C. G. J. JACOBI'S

GESAMMELTE WERKE.

VIERTER BAND.

C. G. J. JACOBI'S

GESAMMELTE WERKE.

HERAUSGEGEBEN AUF VERANLASSUNG DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

VIERTER BAND.

HERAUSGEGEBEN

VON

K. WEIERSTRASS.

BERLIN.
DRUCK UND VERLAG VON GEORG REIMER.
1886.

INHALTSVERZEICHNISS DES VIERTEN BANDES.

NACHLASS.

ÜBER DIE INTEGRATION DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

VON

PROFESSOR C. G. J. JACOBI
ZU KÖNIGSBERG IN PREUSSEN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 2. p. 317—329.

ÜBER DIE INTEGRATION DER PARTIELLEN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG.

1.

Die Entstehung und Ausbildung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen bildet einen der wichtigsten Momente in der Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts. Euler hatte diesen so fruchtbaren Zweig der Analysis ans Licht gerufen, und in einer grossen Zahl von Beispielen durch besondere, dem jedesmaligen Falle angepasste Kunstgriffe die Integration bewerkstelligt. Lagrange gab hierauf die ersten allgemeinen Vorschriften, die linearen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen jeder Anzahl von Variabeln, und insbesondere jede auch nicht lineare zwischen drei Variabeln auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen. Die von Lagrange zu letzterem Zwecke angewandte Methode schien keiner Ausdehnung auf jede Anzahl von Variabeln fähig zu sein, da die Analysten, die dieses versuchten, die ihnen aufstossenden Schwierigkeiten nicht überwinden konnten. Pfaff betrachtete daher den Gegenstand aus einem von allen bisherigen gänzlich verschiedenen Gesichtspunkte. Er sah nämlich das ganze Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung als speciellen Fall des weit umfassenderen an, jede gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren; und indem er dieses Problem vollständig löste, hat er zugleich die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vollendet.

Ich werde im Folgenden diesen Gegenstand wieder aufnehmen, und ihn einer, wie ich glaube, neuen Behandlung unterwerfen, welche sich vielleicht durch ihre Leichtigkeit den Analysten empfiehlt. Durch sie werden die Schwierigkeiten, welche der Ausdehnung der Lagrangeschen Methode auf jede Anzahl von Variabeln entgegen standen, so weit die Natur dieser Methode es möglich macht, gehoben werden, und man wird so auf dem entgegengesetzten Wege zu denselben Resultaten gelangen, welche Pfaff gefunden hat. —

2.

Ich beginne mit einigen Betrachtungen über die Integration eines Systems von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln.

Es seien die $n+1$ Variabeln $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$. Es sollen n derselben, z. B., $x', x'', \ldots, x^{(n)}$, als Functionen der übrigen durch ein System von n Differentialgleichungen bestimmt werden, in welchen nur die ersten Ableitungen von $x', x'', \ldots, x^{(n)}$, in Beziehung auf x genommen, vorkommen. Diese n Gleichungen lassen sich immer unter die Form bringen:

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{X'}{X}, \quad \frac{dx''}{dx} = \frac{X''}{X}, \quad \ldots, \quad \frac{dx^{(n)}}{dx} = \frac{X^{(n)}}{X},$$

welche man auch als Proportion darstellen kann:

$$dx : dx' : dx'' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)},$$

wo $X, X', X'', \ldots, X^{(n)}$ Functionen von $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$ sind, und wo es gleichgültig ist, welche der $n+1$ Variablen man als unabhängig betrachtet.

Es ist seit langer Zeit bekannt, wie man aus diesen Gleichungen $n-1$ Variabeln, z. B. $x'', x''', \ldots, x^{(n)}$, eliminiren kann. Differentiirt man nämlich die Gleichung $\frac{dx'}{dx} = \frac{X'}{X}$ $(n-1)$-mal hintereinander nach x, und setzt jedesmal für die vorkommenden Ableitungen $\frac{dx'}{dx}, \frac{dx''}{dx}, \ldots, \frac{dx^{(n)}}{dx}$ ihre Werthe in $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$, so erhält man $\frac{dx'}{dx}, \frac{d^2x'}{dx^2}, \frac{d^3x'}{dx^3}, \ldots, \frac{d^nx'}{dx^n}$ gegebenen Functionen dieser Variabeln gleich. Aus den so entstehenden n Gleichungen kann man dann die $n-1$ Variabeln $x'', x''', \ldots, x^{(n)}$ eliminiren, und erhält so eine Gleichung von der Form:

$$\varphi\left(x, x', \frac{dx'}{dx}, \frac{d^2x'}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nx'}{dx^n}\right) = 0.$$

Es hat aber bekanntlich jede solche Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung n verschiedene Integralgleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, von denen jede eine willkürliche Constante enthält. Es seien diese:

$$F_1\left(x, x', \frac{dx'}{dx}, \frac{d^2x'}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}x'}{dx^{n-1}}\right) = C_1,$$
$$F_2\left(x, x', \frac{dx'}{dx}, \frac{d^2x'}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}x'}{dx^{n-1}}\right) = C_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_n\left(x, x', \frac{dx'}{dx}, \frac{d^2x'}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}x'}{dx^{n-1}}\right) = C_n,$$

wo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die willkürlichen Constanten bedeuten. Substituirt man hierin für $\frac{dx'}{dx}, \frac{d^2x'}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}x'}{dx^{n-1}}$ ihre Werthe in $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$, so hat man das verlangte System von n endlichen Gleichungen mit n willkürlichen Constanten, welches die Gleichungen

$$dx : dx' : dx'' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

integrirt.

3.

In welcher Form auch die n Integralgleichungen mit n willkürlichen Constanten gefunden werden, so wird man sie immer durch Auflösung nach den n willkürlichen Constanten in diese Form bringen können:

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \ldots, \quad F_n = C_n,$$

wo $F_1, F_2, \ldots, F_n$ die willkürlichen Constanten nicht enthalten. In dieser Form haben die Integralgleichungen die merkwürdige Eigenschaft, dass, wenn man sie differentiirt, unmittelbar auch die willkürlichen Constanten verschwinden, so dass die Differentialgleichungen

$$0 = dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial x'} dx' + \frac{\partial F_1}{\partial x''} dx'' + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x^{(n)}} dx^{(n)},$$
$$0 = dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial x'} dx' + \frac{\partial F_2}{\partial x''} dx'' + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial x^{(n)}} dx^{(n)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = dF_n = \frac{\partial F_n}{\partial x} dx + \frac{\partial F_n}{\partial x'} dx' + \frac{\partial F_n}{\partial x''} dx'' + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x^{(n)}} dx^{(n)}$$

ohne Dazwischenkunft der Integralgleichungen

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \ldots, \quad F_n = C_n$$

mit den gegebenen Gleichungen

$$dx : dx' : dx'' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

übereinkommen werden; denn durch solche Dazwischenkunft würden die willkürlichen Constanten wieder eingeführt werden. Hieraus folgt aber das Stattfinden folgender identischen Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} X + \frac{\partial F_1}{\partial x'} X' + \frac{\partial F_1}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} X + \frac{\partial F_2}{\partial x'} X' + \frac{\partial F_2}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x} X + \frac{\partial F_n}{\partial x'} X' + \frac{\partial F_n}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Die Integration der Differentialgleichungen

$$dx : dx' : dx'' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

kommt also mit der Lösung der Aufgabe überein: n verschiedene Functionen F zu finden, von denen jede der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial x'} X' + \frac{\partial F}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} = 0$$

identisch Genüge leiste.

Wenn die Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$, jede für F gesetzt, diese Bedingung erfüllen, so ist dies auch der Fall mit jeder wieder aus diesen zusammengesetzten Function. Denn es sei solche $\Pi(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, so wird man, wenn man die Gleichungen (I) respective mit $\frac{\partial \Pi}{\partial F_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial F_2}, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial F_n}$ multiplicirt und hierauf addirt, die Gleichung

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} X + \frac{\partial \Pi}{\partial x'} X' + \frac{\partial \Pi}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} = 0$$

erhalten, so dass auch Π für F gesetzt werden kann.

4.

Nach diesen vorausgeschickten Betrachtungen ergiebt sich die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von selbst. Es sei nämlich x als Function von $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ zu finden vermittelst der Gleichung

$$X = X' \frac{\partial x}{\partial x'} + X'' \frac{\partial x}{\partial x''} + \cdots + X^{(n)} \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}.$$

Es werde die zwischen den $n+1$ Variabeln zu suchende Relation ausgedrückt durch $\Pi = 0$, so hat man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \Pi}{\partial x'} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x''} + \frac{\partial \Pi}{\partial x''} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots& \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}} + \frac{\partial \Pi}{\partial x^{(n)}} &= 0, \end{aligned}$$

wodurch die gegebene Gleichung sich verwandelt in:

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial x} X + \frac{\partial \Pi}{\partial x'} X' + \frac{\partial \Pi}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial x^{(n)}} X^{(n)},$$

welcher Gleichung, wie wir gesehen haben, Genüge geschieht, wenn man für Π irgend eine Function von $F_1, F_2, \ldots, F_n$ setzt.

Ist also eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$X = \frac{\partial x}{\partial x'} X' + \frac{\partial x}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}} X^{(n)}$$

gegeben, so integrire man die Gleichungen:

$$dx : dx' : dx'' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}.$$

Ist das System der n endlichen Integralgleichungen derselben

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \ldots, \quad F_n = C_n,$$

wo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die willkürlichen Constanten bedeuten, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ aber diese nicht enthalten, und nennt man Π irgend eine Function von $F_1, F_2, \ldots, F_n$, so wird $\Pi = 0$ das gesuchte Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung.

5.

Wenn der Gleichung

$$X = \frac{\partial x}{\partial x'} X' + \frac{\partial x}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}} X^{(n)}$$

durch irgend eine Gleichung oder Relation zwischen den n Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ Genüge geschieht: so kann man sagen, dass die Gleichungen

$$dx : dx' : dx'' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

durch irgend n Relationen zwischen jenen Functionen integrirt werden. Denn aus n Relationen zwischen n Grössen werden diese Constanten gleich, und die Willkürlichkeit der Relationen reducirt sich auf eine blosse Willkürlichkeit der Constanten. Es zeigt sich nun hier eine Lücke. Man kann nämlich nach demjenigen System von Differentialgleichungen fragen, welches durch irgend zwei, drei oder überhaupt m Relationen zwischen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ integrirt wird, wo m zwischen 1 und n liegt. Diese Lücke wird ausgefüllt durch folgendes allgemeine Theorem, welches zu gleicher Zeit auch die beiden bisher behandelten extremen Fälle, wo $m = 1$ und $m = n$ ist, umfasst.

Theorem. „Es seien $F_1, F_2, \ldots, F_n$ solche Functionen der Variabeln $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$, welche, für F gesetzt, die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial x'} X' + \frac{\partial F}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} = 0$$

identisch erfüllen, oder welche, willkürlichen Constanten gleich gesetzt, die Gleichungen

$$dx : dx' : dx'' : \dots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \dots : X^{(n)}$$

integriren, so wird das System der m Gleichungen:

$$\begin{aligned}
X &= X^{(m)} \frac{\partial x}{\partial x^{(m)}} + X^{(m+1)} \frac{\partial x}{\partial x^{(m+1)}} + \dots + X^{(n)} \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}},\\
X' &= X^{(m)} \frac{\partial x'}{\partial x^{(m)}} + X^{(m+1)} \frac{\partial x'}{\partial x^{(m+1)}} + \dots + X^{(n)} \frac{\partial x'}{\partial x^{(n)}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
X^{(m-1)} &= X^{(m)} \frac{\partial x^{(m-1)}}{\partial x^{(m)}} + X^{(m+1)} \frac{\partial x^{(m-1)}}{\partial x^{(m+1)}} + \dots + X^{(n)} \frac{\partial x^{(m-1)}}{\partial x^{(n)}},
\end{aligned}$$

wo $x, x', \dots, x^{(m-1)}$ als Functionen von $x^{(m)}, x^{(m+1)}, \dots, x^{(n)}$ betrachtet werden, integrirt durch die m Gleichungen:

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \dots, \quad \Pi_m = 0,$$

wo $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ willkürliche Functionen von $F_1, F_2, \dots, F_n$ sind."

Das Charakteristische dieses Systems von Differentialgleichungen besteht darin, dass in jeder Gleichung nur die partiellen Ableitungen einer Variabeln vorkommen, und dass in allen Gleichungen die Coëfficienten der nach derselben Variabeln genommenen Ableitungen dieselben sind.

6.

Um den Beweis dieses Theorems in aller Allgemeinheit zu geben, wollen wir zuerst die Werthe der partiellen Ableitungen von $x, x', x'', \dots, x^{(m-1)}$ nach $x^{(m)}, x^{(m+1)}, \dots, x^{(n)}$ genommen, aus den Gleichungen $\Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0, \dots, \Pi_m = 0$ ableiten. Um die partiellen Ableitungen von x zu finden, bestimme man m Grössen $A, B, C, \dots, M$ dergestalt, dass sie den $m-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x'} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x'} + \dots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x'} &= 0,\\
A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x''} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x''} + \dots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x''} &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\
A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m-1)}} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m-1)}} + \dots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m-1)}} &= 0
\end{aligned}$$

Genüge leisten, wodurch man, wenn man der Kürze wegen

$$A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} + \dots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} = N$$

setzt, die Gleichungen

$$\begin{aligned}
N \frac{\partial x}{\partial x^{(m)}} &= -\left(A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m)}} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m)}} + \dots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m)}}\right),\\
N \frac{\partial x}{\partial x^{(m+1)}} &= -\left(A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m+1)}} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m+1)}} + \dots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m+1)}}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
N \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}} &= -\left(A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(n)}} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(n)}} + \dots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(n)}}\right)
\end{aligned}$$

erhält, und ganz auf ähnliche Art finden sich die partiellen Ableitungen von $x', x'', \dots, x^{(m-1)}$. Nun hat man aber, weil $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ Functionen von $F_1, F_2, \dots, F_n$ sind, aus (3.) die identischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} X + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x'} X' + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x''} X'' + \dots + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} &= 0,\\
\frac{\partial \Pi_2}{\partial x} X + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x'} X' + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x''} X'' + \dots + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\
\frac{\partial \Pi_m}{\partial x} X + \frac{\partial \Pi_m}{\partial x'} X' + \frac{\partial \Pi_m}{\partial x''} X'' + \dots + \frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese respective mit $A, B, C, \dots, M$ und addirt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\left(A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} + \dots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x}\right) X\\
+&\left(A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m)}} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m)}} + \dots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m)}}\right) X^{(m)}\\
+&\left(A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m+1)}} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m+1)}} + \dots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m+1)}}\right) X^{(m+1)}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
+&\left(A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(n)}} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(n)}} + \dots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(n)}}\right) X^{(n)} = 0,
\end{aligned}$$

woraus sich, dem eben Gefundenen zufolge, ergiebt:

$$X = X^{(m)} \frac{\partial x}{\partial x^{(m)}} + X^{(m+1)} \frac{\partial x}{\partial x^{(m+1)}} + \dots + X^{(n)} \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}},$$

welches die erste Gleichung des Theorems ist. Auf dieselbe Art erweisen sich auch die übrigen Gleichungen desselben.

7.

Wir wenden uns jetzt zu den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung überhaupt, da wir bis jetzt nur die linearen betrachtet haben. Lagrange führt für drei Variabeln jede solche Gleichung auf eine lineare partielle Differentialgleichung zwischen vier Variabeln zurück. Die Bestimmung der bei Integration derselben vorkommenden willkürlichen Functionen ist, wie er zeigt, von der Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabeln durch das System zweier Gleichungen abhängig. Diese ist immer möglich und erfordert, indem man eine der Variabeln, was erlaubt ist, constant setzt, nur die Integration einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln.

Wir werden im Folgenden sehen, wie aus einer gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln immer ein solches System von linearen partiellen Differentialgleichungen abgeleitet werden kann, das sich durch das oben aufgestellte Theorem integriren lässt. Die Bestimmung der willkürlichen Functionen erfordert dann weiter die Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $2n-1$ Variabeln durch das System von n Gleichungen, oder zwischen $2n-2$ Variabeln durch das System von $n-1$ Gleichungen, indem man eine der Variabeln, was erlaubt ist, constant setzt. Wie nun aber diese letztere immer und allgemein geleistet werden kann, ist erst durch die berühmte Pfaffsche Arbeit den Analysten kund geworden. Wenn gleich also im Allgemeinen das Problem immer nur durch diese schliesslich gelöst werden kann, so schien es uns doch der Mühe werth, die Lagrangesche Methode so weit zu verfolgen, wie sie zu führen im Stande ist. —

8.

Es sei x eine Function von $x', x'', \ldots, x^{(n)}$, und man setze

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = p', \quad \frac{\partial x}{\partial x''} = p'', \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}} = p^{(n)},$$

wo, wenn $\varkappa$ und λ irgend zwei Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, …, n bedeuten, bekanntlich immer $\frac{\partial p^{(\varkappa)}}{\partial x^{(\lambda)}} = \frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x^{(\varkappa)}}$ ist. Es sei nun die Gleichung

$$0 = \varphi(x, x', x'', \ldots, x^{(n)}, p', p'', \ldots, p^{(n)})$$

zu integriren. Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf x', und setzt

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = p', \quad \frac{\partial p''}{\partial x'} = \frac{\partial p'}{\partial x''}, \quad \frac{\partial p'''}{\partial x'} = \frac{\partial p'}{\partial x'''}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial p^{(n)}}{\partial x'} = \frac{\partial p'}{\partial x^{(n)}},$$

so erhält man:

$$-p'\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi}{\partial p'} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial p''} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x''} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x^{(n)}}.$$

Ebenso erhält man, wenn man die gegebene Gleichung in Beziehung auf x'' differentiirt und $\frac{\partial x}{\partial x''} = p''$, $\frac{\partial p'}{\partial x''} = \frac{\partial p''}{\partial x'}$, $\frac{\partial p'''}{\partial x''} = \frac{\partial p''}{\partial x'''}$ u. s. w. setzt:

$$-p''\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x''} = \frac{\partial \varphi}{\partial p'} \cdot \frac{\partial p''}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial p''} \cdot \frac{\partial p''}{\partial x''} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}} \cdot \frac{\partial p''}{\partial x^{(n)}};$$

und ähnliche Gleichungen erhält man in Bezug auf $x''', x^{\mathrm{IV}}, \ldots, x^{(n)}$. Bemerkt man nun noch die identische Gleichung:

$$p'\frac{\partial \varphi}{\partial p'} + p''\frac{\partial \varphi}{\partial p''} + \cdots + p^{(n)}\frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}} =$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p'} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial p''} \cdot \frac{\partial x}{\partial x''} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}} \cdot \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}},$$

so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$p'\frac{\partial \varphi}{\partial p'} + p''\frac{\partial \varphi}{\partial p''} + \cdots + p^{(n)}\frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}} = P$$

setzt, in Allem folgende $n+1$ Gleichungen:

$$(\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{\partial \varphi}{\partial p'} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial p''} \cdot \frac{\partial x}{\partial x''} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}} \cdot \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}, \\ -p'\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p'} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial p''} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x''} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x^{(n)}}, \\ -p''\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x''} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p'} \cdot \frac{\partial p''}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial p''} \cdot \frac{\partial p''}{\partial x''} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}} \cdot \frac{\partial p''}{\partial x^{(n)}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -p^{(n)}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(n)}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p'} \cdot \frac{\partial p^{(n)}}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial p''} \cdot \frac{\partial p^{(n)}}{\partial x''} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}} \cdot \frac{\partial p^{(n)}}{\partial x^{(n)}}. \end{aligned} \right.$$

Diese $n+1$ partiellen Differentialgleichungen haben die Eigenschaft, dass in jeder nur die partiellen Ableitungen einer Variabeln vorkommen, in allen aber die Coëfficienten der nach derselben Variabeln genommenen Ableitungen dieselben sind. Sie gehören also zu denen, welche das oben aufgestellte Theorem integriren lehrt. Zu diesem Ende hat man das System folgender $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen aufzustellen:

$$P\frac{dx'}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial p'}; \quad P\frac{dx''}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial p''}; \quad \ldots; \quad P\frac{dx^{(n)}}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}};$$

$$P\frac{dp'}{dx} = -p'\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x'}; \quad P\frac{dp''}{dx} = -p''\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x''}; \quad \ldots$$

$$\ldots; \quad P\frac{dp^{(n)}}{dx} = -p^{(n)}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(n)}}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial x'}dx'+\frac{\partial\varphi}{\partial x''}dx''+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)}$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial p'}dp'+\frac{\partial\varphi}{\partial p''}dp''+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}dp^{(n)}=0,$$

woraus man sieht, dass die gegebene Gleichung $\varphi=0$ eine der $2n$ Gleichungen ist, welche diese Differentialgleichungen integriren. Es seien die $2n-1$ anderen:

$$\varphi_1=C_1,\quad \varphi_2=C_2,\quad \varphi_3=C_3,\quad \ldots,\quad \varphi_{2n-1}=C_{2n-1},$$

wo C_1, C_2, C_3, ..., C_{2n-1} die willkürlichen Constanten sind, φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1} aber diese nicht enthalten. Bedeuten nun Π_1, Π_2, ..., Π_n Functionen von φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1}, so giebt das System der $n+1$ partiellen Differentialgleichungen (II), integrirt, Gleichungen von der Form:

$$\varphi=0,\quad \Pi_1=0,\quad \Pi_2=0,\quad \ldots,\quad \Pi_n=0.$$

9.

Das System der $n+1$ partiellen Differentialgleichungen (II) wurde aus der gegebenen $\varphi=0$ abgeleitet vermittelst der Eigenschaft der Grössen p', p'', ..., $p^{(n)}$, dass sie die partiellen Ableitungen von x sind. Es lässt sich aber aus diesem Systeme partieller Differentialgleichungen nicht rückwärts folgern, dass $p'=\frac{\partial x}{\partial x'}$, $p''=\frac{\partial x}{\partial x''}$, ..., $p^{(n)}=\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}$. Geschieht nun jenem Systeme Genüge durch die Gleichung $\varphi=0$ und durch irgend n Gleichungen zwischen den Grössen φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1}, so kommt es jetzt darauf an, diese Gleichungen so zu bestimmen, dass immer auch rückwärts die Gleichungen

$$p'=\frac{\partial x}{\partial x'},\quad p''=\frac{\partial x}{\partial x''},\quad \ldots,\quad p^{(n)}=\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}$$

folgen, welche Gleichungen man in die eine Gleichung:

$$dx=p'dx'+p''dx''+\cdots+p^{(n)}dx^{(n)}$$

zusammenfassen kann.

10.

Da die Aufgabe durch n Gleichungen zwischen den Grössen φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1} gelöst wird, so lässt sich a priori schliessen, so wie Lagrange für den Fall von drei Variabeln thut, dass die Gleichung

$$dx=p'dx'+p''dx''+\cdots+p^{(n)}dx^{(n)}$$

sich in eine andere müsse verwandeln lassen, welche bloss die Grössen φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1} enthält. Wir wollen dieses aber noch a posteriori beweisen.

Zu dem Ende betrachte man die $2n$ Variabeln x', x'', ..., $x^{(n)}$, p', p'', ..., $p^{(n)}$ als Functionen von x und den Grössen φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1}. Unter dieser Voraussetzung verwandelt sich die Gleichung

$$dx=p'dx'+p''dx''+\cdots+p^{(n)}dx^{(n)}$$

in folgende:

$$\begin{aligned}dx=&\left(p'\frac{\partial x'}{\partial x}+p''\frac{\partial x''}{\partial x}+\cdots+p^{(n)}\frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}\right)dx\\&+\left(p'\frac{\partial x'}{\partial\varphi_1}+p''\frac{\partial x''}{\partial\varphi_1}+\cdots+p^{(n)}\frac{\partial x^{(n)}}{\partial\varphi_1}\right)d\varphi_1\\&+\left(p'\frac{\partial x'}{\partial\varphi_2}+p''\frac{\partial x''}{\partial\varphi_2}+\cdots+p^{(n)}\frac{\partial x^{(n)}}{\partial\varphi_2}\right)d\varphi_2\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\left(p'\frac{\partial x'}{\partial\varphi_{2n-1}}+p''\frac{\partial x''}{\partial\varphi_{2n-1}}+\cdots+p^{(n)}\frac{\partial x^{(n)}}{\partial\varphi_{2n-1}}\right)d\varphi_{2n-1},\end{aligned}$$

welche wir der Kürze halber mit

$$dx=Xdx+P_1d\varphi_1+P_2d\varphi_2+\cdots+P_{2n-1}d\varphi_{2n-1}$$

bezeichnen wollen.

Die partiellen Ableitungen nach x können leicht durch die Betrachtung gefunden werden, dass man, um sie zu erhalten, φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1} constant zu setzen hat; indem man, wenn man die bloss nach einer Variabeln genommenen partiellen Ableitungen sucht, inzwischen die übrigen als Constanten betrachtet. Für diesen Fall gelten aber die Differentialgleichungen in (8.), und man erhält, wenn

$$P=p'\frac{\partial\varphi}{\partial p'}+p''\frac{\partial\varphi}{\partial p''}+\cdots+p^{(n)}\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}$$

gesetzt wird:

$$P\frac{dx'}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial p'},\quad P\frac{dx''}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial p''},\quad \ldots,\quad P\frac{dx^{(n)}}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}},$$
$$P\frac{dp'}{dx}=-\left(p'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right),\quad \ldots,\quad P\frac{dp^{(n)}}{dx}=-\left(p^{(n)}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x^{(n)}}\right).$$

Hieraus folgt:

$$X=p'\frac{\partial x'}{\partial x}+p''\frac{\partial x''}{\partial x}+\cdots+p^{(n)}\frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}=1.$$

Es reducirt sich also die Gleichung

$$dx=Xdx+P_1d\varphi_1+P_2d\varphi_2+\cdots+P_{2n-1}d\varphi_{2n-1}$$

bloss auf

$$0=P_1d\varphi_1+P_2d\varphi_2+\cdots+P_{2n-1}d\varphi_{2n-1}.$$

11.

Ich will nun zeigen, dass in den Ausdrücken $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-1}$ x nur in einem, allen gemeinschaftlichen Factor vorkommen kann. Differentiirt man nämlich

$$P_1 = p'\frac{\partial x'}{\partial \varphi_1} + p''\frac{\partial x''}{\partial \varphi_1} + \cdots + p^{(n)}\frac{\partial x^{(n)}}{\partial \varphi_1}$$

nach x, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1}{\partial x} = & \frac{\partial\left\{p'\frac{\partial x'}{\partial x} + p''\frac{\partial x''}{\partial x} + \cdots + p^{(n)}\frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}\right\}}{\partial \varphi_1} \\ & + \frac{\partial p'}{\partial x}\cdot\frac{\partial x'}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial p''}{\partial x}\cdot\frac{\partial x''}{\partial \varphi_1} + \cdots + \frac{\partial p^{(n)}}{\partial x}\cdot\frac{\partial x^{(n)}}{\partial \varphi_1} \\ & - \left\{\frac{\partial p'}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial p''}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial x''}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial p^{(n)}}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}\right\}.\end{aligned}$$

Der erste Ausdruck ist $= \frac{\partial X}{\partial \varphi_1} = 0$, da $X = 1$. Substituirt man in die beiden anderen die in (10.) für die nach x genommenen partiellen Ableitungen gegebenen Werthe, so wird

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{P_1}{P} - \frac{1}{P}\left\{\begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial \varphi_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(n)}}\cdot\frac{\partial x^{(n)}}{\partial \varphi_1} \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial p'}\cdot\frac{\partial p'}{\partial \varphi_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}}\cdot\frac{\partial p^{(n)}}{\partial \varphi_1}\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{P_1}{P},$$

indem der in Klammern eingeschlossene Ausdruck, als genaue Ableitung von φ nach φ_1, wegen $\varphi = 0$ ebenfalls verschwindet.

So wie $\frac{\partial P_1}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{P_1}{P}$, so findet man allgemein

$$\frac{\partial P_1}{P_1 \partial x} = \frac{\partial P_2}{P_2 \partial x} = \cdots = \frac{\partial P_{2n-1}}{P_{2n-1}\partial x} = -\frac{1}{P}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

woraus durch Integration in Beziehung auf x folgt:

$$\begin{aligned} P_1 &= F_1 e^{-\int \frac{1}{P}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx}, \\ P_2 &= F_2 e^{-\int \frac{1}{P}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx}, \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P_{2n-1} &= F_{2n-1} e^{-\int \frac{1}{P}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx},\end{aligned}$$

wo $F_1, F_2, \ldots, F_{2n-1}$ kein x enthalten. Dividirt man also durch

$$e^{-\int \frac{1}{P}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx},$$

so verwandelt sich die Gleichung

$$dx = p'dx' + p''dx'' + \cdots + p^{(n)}dx^{(n)}$$

in

$$0 = F_1 d\varphi_1 + F_2 d\varphi_2 + \cdots + F_{2n-1} d\varphi_{2n-1},$$

wo $F_1, F_2, \ldots, F_{2n-1}$ bloss Functionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-1}$ sind. Diese letztere Gleichung ist nun durch ein System von n Gleichungen zwischen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-1}$ zu integriren; was immer vermittelst der Pfaffschen Methode möglich ist. Ich werde diese in mehreren Abhandlungen besonders behandeln, wo ich auch diesen Gegenstand wieder aufzunehmen gedenke.

Den 12. August 1827.

ÜBER DIE PFAFFSCHE METHODE, EINE GEWÖHNLICHE LINEARE DIFFERENTIAL-GLEICHUNG ZWISCHEN $2n$ VARIABELN DURCH EIN SYSTEM VON n GLEICHUNGEN ZU INTEGRIREN

VON

PROFESSOR C. G. J. JACOBI
ZU KÖNIGSBERG IN PREUSSEN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 2. p. 347—357.

ÜBER DIE PFAFFSCHE METHODE, EINE GEWÖHNLICHE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWISCHEN $2n$ VARIABELN DURCH EIN SYSTEM VON n GLEICHUNGEN ZU INTEGRIREN.

1.

Pfaff hat in einer Abhandlung, welche unter denen der Berliner Akademie vom J. 1814—15 zu lesen ist, gezeigt, wie man jede Gleichung von der Form:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0,$$

wo $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{2n}$ beliebige Functionen von $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n}$ sind, durch ein System von n Gleichungen integriren kann, von welcher Aufgabe die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen n Variabeln nur ein besonderer Fall ist. Zu diesem Ende drückt er $2n-1$ von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ durch die übrige x_m und durch $2n-1$ neue Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ aus, wo $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ gewisse Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ sind. Nach solcher Substitution verwandelt sich die Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

immer in eine andere von der Form:

$$U dx_m + A_1 da_1 + A_2 da_2 + \cdots + A_{2n-1} da_{2n-1} = 0,$$

wo $U, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ Functionen von $x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ sind. Die Functionen $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ bestimmt nun Pfaff so, dass $U=0$, und dass x_m in den Grössen $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ nur in einem allen gemeinschaftlichen Factor vorkommt. Dividirt man mit diesem, so hat man die gegebene Gleichung in eine andere ähnliche, aber nur zwischen $2n-1$ Variabeln $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ verwandelt. Da dieses Verfahren nur bei einer geraden Anzahl von Variabeln möglich ist, so kann man diese nicht wieder auf eben die Weise in eine Gleichung zwischen nur $2n-2$ Variabeln verwandeln. Pfaff setzt daher eine dieser Variabeln einer Constante gleich und verwandelt dann wieder die Gleichung zwischen den noch übrigen $2n-2$ Variabeln in eine andere zwischen nur $2n-3$ Variabeln, deren eine er wieder einer Constante gleich setzt, und so fortfährt, bis er auf eine Gleichung zwischen nur 2 Variabeln kommt, deren Integration die letzte n^{te} Gleichung mit der n^{ten} willkürlichen Constante giebt. Auf diese Weise hat er die gegebene Gleichung durch ein System von n Gleichungen mit n willkürlichen Constanten integrirt.

Pfaff zeigt dann weiter auf eine ähnliche Art, wie es bei den partiellen Differentialgleichungen zu geschehen pflegt, dass man aus solcher Lösung mit n willkürlichen Constanten andere Lösungen mit willkürlichen Functionen ableiten kann. Man denke sich nämlich die n Integralgleichungen auf die Form gebracht:

$$F_1 = C_1,\quad F_2 = C_2,\quad \ldots,\quad F_n = C_n,$$

wo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die willkürlichen Constanten sind und $F_1, F_2, \ldots, F_n$ diese nicht mehr enthalten. Denkt man sich jetzt die Grössen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ als Variabeln, so muss sich vermöge der Gleichungen

$$F_1 = C_1,\quad F_2 = C_2,\quad \ldots,\quad F_n = C_n$$

der Ausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

in einen anderen verwandeln lassen von der Form

$$K_1 dC_1 + K_2 dC_2 + \cdots + K_n dC_n,$$

weil dieser Ausdruck verschwinden muss, wenn $C_1, C_2, \ldots, C_n$ Constanten gleich gesetzt werden. Es muss also auf identische Weise sein:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = K_1 dF_1 + K_2 dF_2 + \cdots + K_n dF_n.$$

Dieser Ausdruck verschwindet nun aber nicht bloss, wenn $F_1, F_2, \ldots, F_n$ Constanten gleich gesetzt werden, sondern auch, indem man m der Grössen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ als beliebige Functionen der übrigen setzt; z. B. $F_1, F_2, \ldots, F_m$ als Functionen von $F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n$; wodurch

$$K_1 dF_1 + K_2 dF_2 + \cdots + K_n dF_n = \Pi_1 dF_{m+1} + \Pi_2 dF_{m+2} + \cdots + \Pi_{n-m} dF_n$$

wird, und alsdann die Gleichungen

$$\Pi_1 = 0,\quad \Pi_2 = 0,\quad \ldots,\quad \Pi_{n-m} = 0$$

hinzufügt. Hat man

$$\begin{aligned} F_1 &= \psi_1(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n), \\ F_2 &= \psi_2(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m &= \psi_m(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n) \end{aligned}$$

gesetzt, so wird

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= K_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial F_{m+1}} + \cdots + K_m \frac{\partial \psi_m}{\partial F_{m+1}} + K_{m+1}, \\ \Pi_2 &= K_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial F_{m+2}} + \cdots + K_m \frac{\partial \psi_m}{\partial F_{m+2}} + K_{m+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Pi_{n-m} &= K_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial F_n} + \cdots + K_m \frac{\partial \psi_m}{\partial F_n} + K_n, \end{aligned}$$

und die gegebene Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

wird auch integrirt durch das System der n Gleichungen

$$\begin{aligned} F_1 &= \psi_1(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n), \\ F_2 &= \psi_2(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m &= \psi_m(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n), \end{aligned}$$

$$\Pi_1 = 0,\quad \Pi_2 = 0,\quad \ldots,\quad \Pi_{n-m} = 0.$$

Endlich erhält man noch eine Lösung, wenn man

$$K_1 = 0,\quad K_2 = 0,\quad \ldots,\quad K_n = 0$$

setzt, was mit derjenigen, wo man $F_1, F_2, \ldots, F_n$ willkürlichen Constanten gleich setzt, gewissermassen die beiden extremen Fälle bildet, welche der sogenannten singulären und vollständigen Lösung bei den partiellen Differentialgleichungen, die übrigen aber den sogenannten allgemeinen Lösungen entsprechen. Alle diese Lösungen haben einen bestimmten, unter sich verschiedenen Charakter, und man wird z. B. nie die ursprüngliche Lösung mit n willkürlichen Constanten erhalten können, indem man Functionen mit n Constanten für die willkürlichen Functionen annimmt. Pfaff hat nur diejenige Lösung angegeben, wo man eine der Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ als Function der übrigen setzt.

2.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass alles auf eine allgemeine Methode, die Functionen $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ jedesmal zu bestimmen, ankommt, welches wir jetzt nach Pfaffs Anleitung unternehmen wollen.

Es sei also die Gleichung

$$0 = X dx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p$$

gegeben. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_p$ gewisse Functionen von $x, x_1, x_2, \ldots, x_p$, und man denke sich $x_1, x_2, \ldots, x_p$ durch diese und durch x ausgedrückt. Die gegebene Gleichung

$$0 = X dx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p$$

verwandelt sich demnach in folgende:

$$0 = U dx + A_1 da_1 + A_2 da_2 + \cdots + A_p da_p,$$

wo

$$\begin{aligned}
U &= X + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial x}, \\
A_1 &= \quad X_1 \frac{\partial x_1}{\partial a_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial a_1} + \cdots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial a_1}, \\
A_2 &= \quad X_1 \frac{\partial x_1}{\partial a_2} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial a_2} + \cdots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial a_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_p &= \quad X_1 \frac{\partial x_1}{\partial a_p} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial a_p} + \cdots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial a_p}.
\end{aligned}$$

Man setze nun zuerst:

$$U = X + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial x} = 0.$$

Damit ferner x in $A_1, A_2, \ldots, A_p$ nur in einem allen gemeinschaftlichen Factor M vorkomme, muss man haben:

$$\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x} = \cdots = \frac{1}{A_p} \cdot \frac{\partial A_p}{\partial x} = \frac{1}{M} \cdot \frac{\partial M}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial \log A_1}{\partial x} = \frac{\partial \log A_2}{\partial x} = \cdots = \frac{\partial \log A_p}{\partial x} = \frac{\partial \log M}{\partial x}.$$

Es sei nun

$$A = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial a} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial a} + \cdots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial a},$$

aus welchem Ausdruck man die verschiedenen Werthe von $A_1, A_2, \ldots, A_p$ erhält, wenn man für a nach einander $a_1, a_2, \ldots, a_p$ setzt, so hat man:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial x} = {} & \frac{\partial X_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial X_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial a} + \cdots + \frac{\partial X_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_p}{\partial a} \\
& + X_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial x} + X_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial a \partial x} + \cdots + X_p \frac{\partial^2 x_p}{\partial a \partial x}.
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung

$$0 = X + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial x}$$

folgt aber, wenn man sie nach a differentiirt,

$$\begin{aligned}
& X_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial x} + X_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial a \partial x} + \cdots + X_p \frac{\partial^2 x_p}{\partial a \partial x} \\
& = -\left\{ \frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial X_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial X_p}{\partial a} \cdot \frac{\partial x_p}{\partial x} \right\}.
\end{aligned}$$

Nun hat man:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial X_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial X_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial a} + \cdots + \frac{\partial X_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_p}{\partial a} \\
& = \frac{\partial x_1}{\partial a} \left\{ \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \cdots + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_p} \right) \cdot \frac{\partial x_p}{\partial x} \right\} \\
& + \frac{\partial x_2}{\partial a} \left\{ \left(\frac{\partial X_2}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \cdots + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_p} \right) \cdot \frac{\partial x_p}{\partial x} \right\} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{\partial x_p}{\partial a} \left\{ \left(\frac{\partial X_p}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \cdots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_p} \right) \cdot \frac{\partial x_p}{\partial x} \right\},
\end{aligned}$$

wo die eingeklammerten Differentialquotienten die nach den ursprünglichen Variabeln $x, x_1, \ldots, x_p$ genommenen partiellen Ableitungen von $X, X_1, \ldots, X_p$ bedeuten.

Ferner

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial X_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial a} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial X_p}{\partial a} \cdot \frac{\partial x_p}{\partial x} \\
& = \frac{\partial x_1}{\partial a} \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial x_p}{\partial x} \right\} \\
& + \frac{\partial x_2}{\partial a} \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_2} \right) \cdot \frac{\partial x_p}{\partial x} \right\} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{\partial x_p}{\partial a} \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial x_p} \right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_p} \right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_p} \right) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_p} \right) \cdot \frac{\partial x_p}{\partial x} \right\}.
\end{aligned}$$

Die Differenz beider Ausdrücke giebt $\frac{\partial A}{\partial x}$. Man setze der Kürze wegen $\left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} \right) - \left(\frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha} \right) = (\alpha, \beta)$, wo also $(\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) = 0$, und z. B.

$$(0, 1) = \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} \right);$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial x} = {} & \frac{\partial x_1}{\partial a} \left\{ (1, 0) + \quad \cdot \quad + (1, 2) \frac{\partial x_2}{\partial x} + (1, 3) \frac{\partial x_3}{\partial x} + \cdots + (1, p) \frac{\partial x_p}{\partial x} \right\} \\
& + \frac{\partial x_2}{\partial a} \left\{ (2, 0) + (2, 1) \frac{\partial x_1}{\partial x} + \quad \cdot \quad + (2, 3) \frac{\partial x_3}{\partial x} + \cdots + (2, p) \frac{\partial x_p}{\partial x} \right\} \\
& + \frac{\partial x_3}{\partial a} \left\{ (3, 0) + (3, 1) \frac{\partial x_1}{\partial x} + (3, 2) \frac{\partial x_2}{\partial x} + \quad \cdot \quad + \cdots + (3, p) \frac{\partial x_p}{\partial x} \right\} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{\partial x_p}{\partial a} \left\{ (p, 0) + (p, 1) \frac{\partial x_1}{\partial x} + (p, 2) \frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots\cdots\cdots + \quad \cdot \quad \right\}.
\end{aligned}$$

Setzt man für a nach einander $a_1, a_2, \ldots, a_p$, so erhält man aus dieser

Formel die verschiedenen Ausdrücke für $\frac{\partial A_1}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial A_p}{\partial x}$. Nun soll, welche der Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ man für a setze, immer sein $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A}{M} \cdot \frac{\partial M}{\partial x} = NA$, wenn man der Kürze halber $\frac{\partial \log M}{\partial x} = N$ setzt, oder

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial x_1}{\partial a} \cdot NX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial a} \cdot NX_2 + \cdots + \frac{\partial x_p}{\partial a} \cdot NX_p,$$

welches der Fall sein wird, sobald die Coëfficienten von $\frac{\partial x_1}{\partial a}, \frac{\partial x_2}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial x_p}{\partial a}$ in beiden für $\frac{\partial A}{\partial x}$ gefundenen Ausdrücken respective gleich sind. Man erhält hieraus die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
NX_1 &= (1,0) + \quad \cdot \quad + (1,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + (1,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}, \\
NX_2 &= (2,0) + (2,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + \quad \cdot \quad + \cdots + (2,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
NX_p &= (p,0) + (p,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (p,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial x_p}{\partial x}$ und addirt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&N\left\{X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial x}\right\} \\
&= (1,0)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (2,0)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + (p,0)\frac{\partial x_p}{\partial x},
\end{aligned}$$

indem alle übrigen Glieder sich aufheben, oder da

$$0 = X + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial x},$$

die Gleichung:

$$NX = (0,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (0,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + (0,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}.$$

Man erhält auf diese Weise $p+1$ lineare Gleichungen zwischen den $p+1$ unbekannten Grössen $N, \frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial x_p}{\partial x}$.

Es hat sich also alles auf blosse Relationen zwischen den nach x genommenen Ableitungen $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial x_p}{\partial x}$ reducirt. Nun erhellt, dass wenn man aus den aufgestellten Gleichungen für $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial x_p}{\partial x}$ resp.

die Werthe $\frac{V_1}{V}, \frac{V_2}{V}, \ldots, \frac{V_p}{V}$ findet, die gesuchten Functionen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ diejenigen Functionen sind, welche bei Integration der Gleichungen

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p$$

den p willkürlichen Constanten gleich gesetzt werden. Denn indem man nur die partiellen Ableitungen nach x sucht, setzt man eben $a_1, a_2, \ldots, a_p$ constant. In diesem Falle aber erhält man:

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p,$$

oder

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{V_1}{V}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{V_2}{V}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_p}{\partial x} = \frac{V_p}{V},$$

wie verlangt wurde. Findet man also aus den gefundenen $p+1$ Gleichungen die Werthe von $V, V_1, V_2, \ldots, V_p$, so giebt die Integration der Gleichungen

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p$$

die gesuchten Functionen $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

3.

Die Gleichungen, aus denen man $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial x_p}{\partial x}$ zu suchen hat, sind dem Obigen zufolge:

$$(\mathrm{A}). \quad \left\{\begin{aligned}
NX &= \quad \cdot \quad + (0,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (0,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + (0,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}, \\
NX_1 &= (1,0) + \quad \cdot \quad + (1,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + (1,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}, \\
NX_2 &= (2,0) + (2,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + \quad \cdot \quad + \cdots + (2,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
NX_p &= (p,0) + (p,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (p,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \cdots + \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}\right.$$

Findet man aus diesen Gleichungen

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{NV_1}{\triangle}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_p}{\partial x} = \frac{NV_p}{\triangle}, \quad N = \frac{\triangle}{V},$$

so wird

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p.$$

Die Gleichungen (A) haben sehr merkwürdige Eigenschaften. Das Charakteristische derselben ist, dass die Verticalreihen der Coëfficienten gerade das Negative der Horizontalreihen sind; daher auch diejenigen Glieder, in welchen die m^{te} Horizontalreihe und die m^{te} Verticalreihe zusammentreffen, verschwinden, wie es durch die in der Diagonale sich befindenden Sternchen anschaulich wird. Aus dieser Eigenschaft folgt zunächst, dass $p+1$, oder die Anzahl der Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots, x_p$, eine gerade Zahl sein muss. Es ist nämlich bekannt, dass man bei jedem System von n Gleichungen zwischen n unbekannten Grössen darauf zu sehen hat, ob nicht der den Werthen der Unbekannten gemeinsame Nenner, welchen Gauss in den *Disquis. Arithm.* mit dem Namen Determinante bezeichnet, verschwinden könne; welches ein Zeichen ist, dass das System der n Gleichungen nicht bestehen kann, wofern nicht etwa eine Bedingungsgleichung zwischen den Constanten stattfindet, vermöge welcher die n^{te} Gleichung eine Folge der übrigen $n-1$ Gleichungen ist. Nun bleibt nach dem bekannten Algorithmus, nach welchem die Determinante gebildet wird, diese unverändert, wenn man die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coëfficienten mit einander vertauscht. Für unsern besondern Fall nun wird, wenn wir die Determinante mit $\triangle$ bezeichnen, hieraus folgen: $\triangle = (-1)^{p+1}\triangle$, da jedes Glied der Determinante ein Product aus $p+1$ Coëfficienten ist, von denen jeder durch Vertauschung der Horizontal- und Verticalreihen sich in sein Negatives verwandelt. Diese Gleichung $\triangle = (-1)^{p+1}\triangle$ aber kann nur bestehen, wenn $p+1$ eine gerade Zahl ist, wofern nicht $\triangle = 0$ sein soll.

Ich will jetzt einige specielle Fälle entwickeln.

Für $p+1=4$ erhält man:

$$\begin{aligned}
V &= \quad\cdot\quad +(2,3)X_1+(3,1)X_2+(1,2)X_3,\\
V_1 &= (3,2)X+\quad\cdot\quad+(0,3)X_2+(2,0)X_3,\\
V_2 &= (1,3)X+(3,0)X_1+\quad\cdot\quad+(0,1)X_3,\\
V_3 &= (2,1)X+(0,2)X_1+(1,0)X_2+\quad\cdot\\
\triangle &= (0,1)(3,2)+(0,3)(2,1)+(0,2)(1,3).
\end{aligned}$$

Für $p+1=6$ erhält man, wenn man, der Kürze wegen, mit $(1,2,3,4)$ den Ausdruck

$$(1,2)(3,4)+(1,3)(4,2)+(1,4)(2,3)$$

bezeichnet und nach diesem Typus die ähnlichen Ausdrücke bildet:

$$\begin{aligned}
V &= \quad\cdot\quad +(2,3,4,5)X_1+(3,4,5,1)X_2+(4,5,1,2)X_3+(5,1,2,3)X_4+(1,2,3,4)X_5,\\
V_1 &= (3,2,4,5)X+\quad\cdot\quad+(4,3,5,0)X_2+(5,4,0,2)X_3+(0,5,2,3)X_4+(2,0,3,4)X_5,\\
V_2 &= (1,3,4,5)X+(3,4,5,0)X_1+\quad\cdot\quad+(4,5,0,1)X_3+(5,0,1,3)X_4+(0,1,3,4)X_5,\\
V_3 &= (2,1,4,5)X+(4,2,5,0)X_1+(5,4,0,1)X_2+\quad\cdot\quad+(0,5,1,2)X_4+(1,0,2,4)X_5,\\
V_4 &= (1,2,3,5)X+(2,3,5,0)X_1+(3,5,0,1)X_2+(5,0,1,2)X_3+\quad\cdot\quad+(0,1,2,3)X_5,\\
V_5 &= (2,1,3,4)X+(3,2,4,0)X_1+(4,3,0,1)X_2+(0,4,1,2)X_3+(1,0,2,3)X_4+\quad\cdot\quad.
\end{aligned}$$

Um die allgemeine Bildungsweise dieser Ausdrücke auseinander zu setzen werde ich sagen, dass man einen Typus einen Cyclus durchlaufen lasse, indem man für die Zahlenelemente $0, 1, 2, \ldots, p$, aus denen er gebildet ist, nach einander resp. setzt:

$$\begin{array}{cccccc}
0, & 1, & 2, & 3, \ldots, & p-1, & p,\\
1, & 2, & 3, & 4, \ldots, & p, & 0,\\
2, & 3, & 4, & 5, \ldots, & 0, & 1,\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
p-1, & p, & 0, & 1, \ldots, & p-3, & p-2,\\
p, & 0, & 1, & 2, \ldots, & p-2, & p-1.
\end{array}$$

Man erhält so, wie man an dem letzten Beispiele sehen kann, den Ausdruck, welcher V_m gleich ist, aus einem seiner Glieder, indem man es den Cyclus durchlaufen lässt, nachdem man aus der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots, p$ die Zahl m fortgelassen hat, wobei zu bemerken ist, dass man das Gleiche auch mit dem Index von X zu thun hat. So erhält man aus dem Gliede $(3,2,4,5)X$ in dem für V_1 gefundenen Ausdruck die übrigen, indem man für $0, 2, 3, 4, 5$ nacheinander setzt $2, 3, 4, 5, 0$; $3, 4, 5, 0, 2$; $4, 5, 0, 2, 3$; $5, 0, 2, 3, 4$. Ferner erhält man aus dem ganzen für V_m gefundenen Ausdruck immer den folgenden für V_{m+1}, wenn man für $0, 1, 2, 3, \ldots, p$ resp. setzt $1, 2, 3, \ldots, p, 0$ und in dem mit einer Klammer bezeichneten Typus die beiden ersten Elemente versetzt. So erhält man aus dem Gliede $(1,0,2,4)X_5$ in V_3, indem man für $0, 1, 2, 3, 4, 5$ resp. $1, 2, 3, 4, 5, 0$ setzt, das Glied $(2,1,3,5)X$, und indem man die beiden ersten Elemente in $(2,1,3,5)$ versetzt, das Glied $(1,2,3,5)X$, welches das erste Glied in dem für V_4 gefundenen Ausdruck ist. —

Es bleibt noch übrig, die Bildung eines solchen Typus, wie $(1,2,3,4)$, anzugeben. Setzt man für $p+1$ Elemente den Coëfficienten von X_1 in V gleich $(2,3,4,5,\ldots,p-1,p)$, so wird $(2,3,\ldots,p)$ aus $1.3.5\ldots(p-2)$ Gliedern bestehen. Das erste von diesen wird:

$$(2,3).(4,5).(6,7)\ldots(p-1,p).$$

Aus diesem bilde man $p-2$, indem man die letzten $p-2$ Elemente $3, 4, \ldots, p$ einen Cyclus durchlaufen lässt. Aus jedem dieser $p-2$ Glieder bilde man $p-4$, indem man die letzten $p-4$ Elemente $5, 6, \ldots, p$ einen Cyclus durchlaufen lässt, u. s. w., bis zuletzt die drei letzten Elemente $p-2$, $p-1$, p den Cyclus zu durchlaufen haben. Auf diese Weise erhält man z. B.

$$\begin{aligned}(2,3,4,5,6,7) = {} & (2,3).(4,5).(6,7)+(2,3).(4,6).(7,5)+(2,3).(4,7).(5,6)\\ & +(2,4).(5,6).(7,3)+(2,4).(5,7).(3,6)+(2,4).(5,3).(6,7)\\ & +(2,5).(6,7).(3,4)+(2,5).(6,3).(4,7)+(2,5).(6,4).(7,3)\\ & +(2,6).(7,3).(4,5)+(2,6).(7,4).(5,3)+(2,6).(7,5).(3,4)\\ & +(2,7).(3,4).(5,6)+(2,7).(3,5).(6,4)+(2,7).(3,6).(4,5).\end{aligned}$$

Ist $p+1$ eine ungerade Zahl, so haben wir gesehen, dass immer eine Bedingungsgleichung stattfinden muss, wenn die Gleichungen (A) möglich sein sollen, oder wenn man die Gleichung

$$0 = X dx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p$$

auf eine ähnliche Gleichung zwischen nur p Variabeln soll zurückführen können. Für $p+1=3$ wird diese Bedingungsgleichung

$$X(1,2)+X_1(2,0)+X_2(0,1) = 0,$$

welches die bekannte Conditio integrabilitatis ist.

Für $p+1=5$ wird sie

$$X(1,2,3,4)+X_1(2,3,4,0)+X_2(3,4,0,1)+X_3(4,0,1,2)+X_4(0,1,2,3) = 0.$$

Allgemein, wenn $p+1$ eine ungerade Zahl ist, wird sie

$$\Sigma X(1,2,3,\ldots,p) = 0,$$

wo man aus $X(1,2,3,\ldots,p)$ die sämmtlichen Glieder des mit Σ bezeichneten Aggregats bildet, indem man $0, 1, 2, \ldots, p$ einen Cyclus durchlaufen lässt. Dies ist also die Bedingungsgleichung, dass die Gleichung

$$0 = X dx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p,$$

wo p eine gerade Zahl ist, durch ein System von $\frac{p}{2}$ Gleichungen integrirt werden könne.

Die Aufstellung und Behandlung der Gleichungen (A) in der eleganten und vollkommen symmetrischen Form, wie sie hier gegeben sind, ist das Eigenthümliche und der eigentliche Zweck dieser Abhandlung; doch musste, des Zusammenhanges wegen, auch das Uebrige der Pfaffschen Methode kürzlich dargestellt werden. Es haben diese Gleichungen grosse Aehnlichkeit mit derjenigen bekannten Art, wo die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coëfficienten dieselben sind, welchen man in sehr vielen analytischen Untersuchungen, unter andern auch bei der Methode der kleinsten Quadrate, begegnet. In den für V, V_1 etc. gefundenen Ausdrücken sind die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coëfficienten von X, X_1 etc. wieder das Negative von einander, so

wie in den Resultaten, welche dort die Auflösung giebt, beide Reihen wieder dieselben sind. Wendet man den von Gauss in der Abhandlung über die elliptischen Elemente der Pallas gegebenen Algorithmus auf unser System an, so sieht man, wie mit grosser Leichtigkeit immer zwei Grössen auf einmal eliminirt werden können, und wie die neuen Gleichungen, deren Anzahl um zwei kleiner ist, wieder dieselbe Form erhalten. Dieses macht, dass man ein solches System von Gleichungen mit grosser Rapidität auflösen kann.

Zusatz. Nach Beendigung dieser Abhandlung bemerkte ich, dass die Gleichungen, auf welche Lagrange und Poisson in ihren berühmten Arbeiten über die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik gekommen sind, ein eben solches System bilden, wie wir hier näher erörtert haben. Man sehe das 15te Heft des polytechnischen Journals S. 288, 289. Da die Pfaffsche Methode ebenfalls auf Variation der Constanten beruht, so scheint dieses System von Gleichungen vorzugsweise bei der Methode der Variation der Constanten vorzukommen.

Den 14. August 1827.

BEMERKUNG
ZU DER ABHANDLUNG DES HERRN PROF. SCHERK: ÜBER DIE INTEGRATION DER GLEICHUNG

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (\alpha + \beta x) y$$

VON

PROFESSOR DR. C. G. J. JACOBI
ZU KÖNIGSBERG IN PREUSSEN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 10 p. 279.

BEMERKUNG ZU DER ABHANDLUNG DES HERRN PROF. SCHERK: ÜBER DIE INTEGRATION DER GLEICHUNG $\frac{d^n y}{dx^n} = (\alpha+\beta x)y$.

Das schöne, in der genannten Abhandlung (Crelle's Journal Bd. 10, p. 96) entwickelte Resultat lässt sich auf folgende bequemere Form bringen:

$$y = \int_0^\infty dt e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} [Ce^{tx} + C_1 \varrho e^{\varrho t x} + C_2 \varrho^2 e^{\varrho^2 t x} + \cdots + C_n \varrho^n e^{\varrho^n t x}], \tag{1}$$

wo ϱ eine primitive Wurzel der Gleichung

$$\varrho^{n+1} = 1,$$

und wo $C, C_1, \ldots, C_n$ beliebige Constanten bedeuten, welche die Bedingungsgleichung erfüllen:

$$C + C_1 + C_2 + \cdots + C_n = 0, \tag{2}$$

so dass n von ihnen willkürlich sind.

Man prüft auf folgende Weise, dass dieser Ausdruck der Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = xy, \tag{3}$$

auf welche der Verfasser die allgemeinere zurückführt, Genüge leistet. Man hat nämlich, wenn man n-mal nach x differentiirt, und dann nach t theilweise integrirt:

$$\frac{d^n \int dt e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} e^{\varrho t x}}{dx^n} = \varrho^n \int dt\, t^n e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} e^{\varrho t x} = -\varrho^n e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} e^{\varrho t x} + x \int dt e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} e^{\varrho t x}. \tag{4}$$

Dehnt man das Integral nach t von 0 bis ∞ aus, so reducirt sich der Theil ausserhalb des Integralzeichens auf ϱ^n. Substituirt man in (4) für ϱ die $n+1$ Werthe $1, \varrho, \varrho^2, \ldots, \varrho^n$, und substituirt die so erhaltenen Ausdrücke in den Ausdruck von $\frac{d^n y}{dx^n}$, wie er sich aus (1) ergiebt, so verschwindet wegen der Bedingungsgleichung (2) der Theil ausserhalb des Integralzeichens, und die Differentialgleichung (3) wird identisch erfüllt.

Setzt man statt (2) zwischen den $n+1$ Constanten die Bedingungsgleichung

$$C + C_1 + C_2 + \cdots + C_n = m, \tag{5}$$

so sieht man aus dem Vorigen, dass die Gleichung (1) der allgemeineren Gleichung genügt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = xy + m. \tag{6}$$

Auf diese wird aber die folgende

$$\frac{d^n y}{dx^n} = axy + bx + cy + d \tag{7}$$

sogleich zurückgeführt.

Den 27. März 1833.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT ET SUR UN CAS PARTICULIER DU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

LETTRE DE

M. C. G. J. JACOBI

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS.

Comptes Rendus III, p. 59—61.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT ET SUR UN CAS PARTICULIER DU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

„Parmi les vérités nouvelles dont les mathématiques se sont enrichies de temps en temps, il y en a auxquelles on n'a pu parvenir qu'en surmontant de grandes difficultés, et dont la découverte paraît être réservée aux esprits supérieurs qui président au développement de la science. Il y en a d'autres dont la découverte n'a pas le mérite des difficultés vaincues, mais qui étant à la portée de tout le monde dès qu'elles ont été une fois trouvées, se sont soustraites pendant long-temps aux soins des savants, je ne sais par quel accident, peut-être même à cause de leur facilité. Dans une lettre antérieure j'ai communiqué à l'illustre Académie, en profitant du titre de son correspondant, un exemple de cette seconde espèce, découverte curieuse et qui précisément dans le même temps a été jugée impossible dans les Transactions philosophiques par l'illustre Ivory. Permettez-moi, Monsieur, d'ajouter à cet exemple les suivants.

„Considérons le mouvement libre d'un point dans un plan et dans le cas de la conservation des forces vives. On a dans ce cas les équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

et le principe des forces vives conservées s'exprime par l'équation

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = U + h,$$

U étant une fonction quelconque de x et de y, et h étant une constante arbitraire. Lagrange a donné cette forme aux équations différentielles du mouvement dans le cas des forces centrales ou parallèles et constantes. Mais la même forme offre généralement des facilités pour l'intégration, qui n'ont pas encore été remarquées.

„Supposons, comme une seconde intégrale des équations différentielles proposées,

$$F\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = a,$$

a étant une nouvelle constante arbitraire; au moyen de cette équation et de celle des forces vives on pourra exprimer les valeurs des différentielles $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ par x et y et par les deux constantes arbitraires a et h. Soient

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y'$$

ces valeurs; on prouve aisément les propositions suivantes:

„1. L'expression

$$x'dx + y'dy$$

est une différentielle exacte; donc aussi ses différentielles prises par rapport aux constantes arbitraires a et h seront des différentielles exactes;

„2. Les expressions

$$\frac{\partial x'}{\partial a}dx + \frac{\partial y'}{\partial a}dy, \quad \frac{\partial x'}{\partial h}dx + \frac{\partial y'}{\partial h}dy$$

étant des différentielles exactes, on aura l'équation de l'orbite cherchée et l'expression du temps au moyen des équations

$$b = \int\left(\frac{\partial x'}{\partial a}dx + \frac{\partial y'}{\partial a}dy\right),$$

$$t + \tau = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{\partial x'}{\partial h}dx + \frac{\partial y'}{\partial h}dy\right),$$

dans lesquelles b et τ sont deux nouvelles constantes arbitraires.

„Une seconde remarque, que j'ajouterai, se rapporte à la théorie analytique du système solaire. Considérons le mouvement d'un point sans masse tournant autour du Soleil et troublé par une planète dont l'orbite est supposée circulaire. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du point, en prenant le plan de l'orbite de la planète pour celui des x et y, et le Soleil pour centre des coordonnées; soit a_1 la distance de la planète troublante au Soleil, $n't$ son anomalie, m' sa masse, M la masse du Soleil, on aura l'équation rigoureuse:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] - n'\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) =$$

$$\frac{\mathrm{M}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + m'\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+z^2-2a_1(x\cos n't + y\sin n't) + a_1^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{x\cos n't + y\sin n't}{a_1^2}\right\} + \text{const.}$$

„C'est donc une nouvelle équation intégrale, qui dans le problème des trois corps subsistera entre les termes indépendants de l'excentricité de la planète troublante, et qui est rigoureuse pour toutes les puissances de la masse de cette dernière. Dans la théorie de la Lune il faut mettre la Terre au lieu du Soleil et prendre celui-ci pour le corps troublant."

ZUR THEORIE DER VARIATIONS-RECHNUNG UND DER DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN

VON

PROFESSOR C. G. J. JACOBI
ZU KÖNIGSBERG IN PREUSSEN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XVII p. 68—82.

ZUR THEORIE DER VARIATIONS-RECHNUNG UND DER DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN.

(Auszug eines Schreibens an Herrn Encke, Secretar der mathematisch-physikalischen Klasse der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)

Es ist mir gelungen, eine grosse und wesentliche Lücke in der Variationsrechnung auszufüllen. Bei den Problemen des Grössten und Kleinsten nämlich, welche von der Variationsrechnung abhängen, kannte man keine allgemeine Regel, woran zu erkennen wäre, ob eine Lösung wirklich ein Grösstes oder Kleinstes giebt, oder keins von beiden. Man hatte zwar erkannt, dass die Kriterien hierfür davon abhängen, ob gewisse Systeme von Differentialgleichungen Integrale haben, die während des ganzen Intervalls, über den das Integral, welches ein Maximum oder Minimum werden soll, erstreckt wird, endlich bleiben. Aber man konnte diese Integrale selbst nicht finden, und auf keine Weise sonst, ohne sie zu kennen, den Umstand, ob sie innerhalb der gegebenen Grenzen endlich bleiben oder nicht, erörtern. Ich habe aber bemerkt, dass diese Integrale immer von selber gegeben sind, wenn man die Differentialgleichungen des Problems integrirt hat, d. h. die Differentialgleichungen, die erfüllt werden müssen, damit die erste Variation verschwindet. Hat man durch Integration dieser Differentialgleichungen die Ausdrücke der gesuchten Functionen erhalten, welche eine Anzahl willkürlicher Constanten enthalten werden, so geben ihre nach diesen willkürlichen Constanten genommenen partiellen Differentialquotienten die Integrale der neuen Differentialgleichungen, welche man zur Bestimmung der Kriterien des Grössten und Kleinsten zu integriren hat.

Es sei, um den einfachsten Fall zu betrachten, das vorgelegte Integral

$$\int f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) dx;$$

y wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\,\frac{\partial f}{\partial y'}}{dx} = 0$$

bestimmt, wo y' für $\frac{dy}{dx}$ gesetzt ist. Der Ausdruck von y, wie er durch die Integration dieser Gleichung gegeben wird, enthält zwei willkürliche Constanten, die ich a und b nennen will. Die zweite Variation wird, wenn $w = \delta y$, $w' = \frac{dw}{dx}$ ist,

$$\int\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}ww + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}ww' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}w'w'\right)dx$$

sein, wo für das Maximum oder Minimum nöthig ist, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ immer dasselbe Zeichen behält. Aber um die vollständigen Kriterien des Maximums oder Minimums zu haben, muss man noch den vollständigen Ausdruck einer Function v kennen, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} + v\right)^2$$

Genüge leistet; wie man dies in Lagranges Functionentheorie, oder in Dirksens Variationsrechnung sehen kann. (Die Variationsrechnung von Ohm ist in dieser Theorie nicht genau.) Diesen vollständigen Ausdruck für v finde ich nun, wie folgt. Es sei

$$u = \alpha\frac{\partial y}{\partial a} + \beta\frac{\partial y}{\partial b},$$

wo $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$ die partiellen Differentialquotienten von y bedeuten, nach den willkürlichen Constanten a, b genommen, die in y vorkommen, und α, β neue willkürliche Constanten sind, so wird

$$v = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} + \frac{1}{u}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{du}{dx}\right)$$

der verlangte Ausdruck von v, welcher eine willkürliche Constante $\frac{\beta}{\alpha}$ enthält.

Schwieriger ist der Fall, wo unter dem Integralzeichen Differentialquotienten höherer Ordnung als die erste vorkommen. Es sei

$$\int f(x, y, y', y'')dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wo wieder $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$, so wird y das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial f}{\partial y'}}{dx} + \frac{d^2\frac{\partial f}{\partial y''}}{dx^2} = 0,$$

welches vier willkürliche Constanten a, a_1, a_2, a_3 enthalten wird. Wenn wieder $\delta y = w$, $\delta y' = w'$, $\delta y'' = w''$, so wird die zweite Variation:

$$\int\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}ww + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}ww' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y''}ww'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}w'w' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial y''}w'w'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}w''w''\right)dx.$$

Für das Maximum oder Minimum muss $\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$ immer dasselbe Zeichen haben. Um aber die vollständigen Kriterien zu haben, muss man folgendes System von Differentialgleichungen integriren, wie man aus Lagranges Theorie der Functionen ersehen kann:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{dv_2}{dx} + 2v_1\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} + v + \frac{dv_1}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y''} + v_1\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{dv_2}{dx} + 2v_1\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial y''} + v_2\right)^2.$$

Durch diese drei Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einen ziemlich abschreckenden Anblick bieten, sind die drei Functionen v, v_1 und v_2 zu bestimmen, deren vollständiger Ausdruck drei willkürliche Constanten enthalten muss. Ich habe ihre allgemeinen Integrale, wie folgt, gefunden. Es sei

$$u = \alpha\frac{\partial y}{\partial a} + \alpha_1\frac{\partial y}{\partial a_1} + \alpha_2\frac{\partial y}{\partial a_2} + \alpha_3\frac{\partial y}{\partial a_3}, \quad u_1 = \beta\frac{\partial y}{\partial a} + \beta_1\frac{\partial y}{\partial a_1} + \beta_2\frac{\partial y}{\partial a_2} + \beta_3\frac{\partial y}{\partial a_2},$$

oder es seien u, u_1 lineare Ausdrücke der partiellen Differentialquotienten von y, nach den willkürlichen Constanten, die es enthält, genommen. Die acht Constanten α, α_1, α_2, α_3, β, β_1, β_2, β_3 sind nicht ganz willkürlich zu nehmen, sondern es muss zwischen den sechs aus ihnen zusammengesetzten Grössen $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$, $\alpha\beta_2 - \alpha_2\beta$, $\alpha\beta_3 - \alpha_3\beta$, $\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3$, $\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3$, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ eine gewisse Bedingung stattfinden, in deren nähere Erörterung ich hier nicht eingehen will. Hiernach werden die allgemeinen Ausdrücke für v, v_1, v_2, die ich gefunden habe, folgende:

$$v_2 = -\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial y''} - \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\cdot\frac{u\frac{d^2 u_1}{dx^2} - u_1\frac{d^2 u}{dx^2}}{u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}},$$

$$v_1 = -\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y''} + \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\cdot\frac{\frac{du}{dx}\frac{d^2 u_1}{dx^2} - \frac{du_1}{dx}\frac{d^2 u}{dx^2}}{u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}},$$

$$v = -\frac{dv_1}{dx} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\cdot\frac{\left(u\frac{d^2 u_1}{dx^2} - u_1\frac{d^2 u}{dx^2}\right)\left(\frac{du}{dx}\frac{d^2 u_1}{dx^2} - \frac{du_1}{dx}\frac{d^2 u}{dx^2}\right)}{\left(u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right)^2}.$$

Da zwischen den sechs Grössen $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ u. s. w. eine identische Gleichung stattfindet, ausserdem zwischen denselben noch eine Bedingung gegeben ist, und in den Ausdrücken von v, v_1, v_2 nur ihre Verhältnisse vorkommen, so vertreten sie die Stelle von drei willkürlichen Constanten, wie verlangt wurde.

Die allgemeine Theorie, wenn unter dem Integralzeichen die Differentialquotienten von y bis auf irgend eine Ordnung vorkommen, wird ohne Schwierigkeit aus einer merkwürdigen Eigenschaft einer besonderen Klasse linearer Differentialgleichungen abgeleitet. Diese linearen Differentialgleichungen der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung haben die Form

$$0 = Ay + \frac{d(A_1 y')}{dx} + \frac{d^2(A_2 y'')}{dx^2} + \frac{d^3(A_3 y''')}{dx^3} + \cdots + \frac{d^n(A_n y^{(n)})}{dx^n} = Y,$$

wo $y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m}$ und A, A_1 etc. gegebene Functionen von x sind. Wenn y irgend ein Integral der Gleichung $Y = 0$ ist, und man setzt $u = ty$, so wird der Ausdruck, in welchem $u^{(m)} = \frac{d^m u}{dx^m}$,

$$y\left[Au + \frac{d(A_1 u')}{dx} + \frac{d^2(A_2 u'')}{dx^2} + \cdots + \frac{d^n(A_n u^{(n)})}{dx^n}\right] = yU$$

integrabel, d. h. man kann sein Integral angeben, ohne t zu kennen, und dieses Integral hat wieder die Form von Y, nur dass n um 1 kleiner geworden; man hat nämlich:

$$\int yU\,dx = Bt' + \frac{d(B_1 t'')}{dx} + \frac{d^2(B_2 t''')}{dx^2} + \cdots + \frac{d^{n-1}(B_{n-1} t^{(n)})}{dx^{n-1}},$$

wo $t^{(m)} = \frac{d^m t}{dx^m}$ und die Functionen B sich aus u und den Functionen A und deren Ableitungen allgemein angeben lassen. Der Beweis dieses Satzes ist nicht ohne Schwierigkeit. Ich habe die allgemeinen Ausdrücke der Functionen B gefunden; doch genügt es für die vorgesetzte Anwendung, nur überhaupt zu beweisen, dass $\int yU\,dx$ die angegebene Form habe, ohne dass es nöthig ist, die Functionen B selber zu kennen.

Die Metaphysik der gefundenen Resultate, um mich eines französischen Ausdruckes zu bedienen, beruht ungefähr auf folgenden Betrachtungen. Man kann bekanntlich der ersten Variation die Form

$$\int V\delta y\,dx$$

geben, wo $V = 0$ die zu integrirende Gleichung ist. Die zweite Variation er-

hält hiernach die Form

$$\int \delta V\delta y\,dx.$$

Soll die zweite Variation das Zeichen nicht ändern, so muss dieselbe nicht verschwinden können, oder die Gleichung $\delta V = 0$, welche in δy linear ist, darf kein Integral δy haben, welches die Bedingungen, denen nach der Natur des Problems δy unterworfen ist, erfüllt. Man sieht hieraus, dass die Gleichung $\delta V = 0$ bei dieser Untersuchung eine bedeutende Rolle spielt, und gewahrt in der That bald ihren Zusammenhang mit den für die Kriterien des Maximums oder Minimums zu integrirenden Differentialgleichungen. Ausserdem sieht man sogleich, dass ein Werth von δy, welcher die Differentialgleichung $\delta V = 0$ erfüllt, jeder partielle Differentialquotient von y ist, nach einer der willkürlichen Constanten genommen, die y als Integral der Gleichung $V = 0$ enthält. Man erhält daher den allgemeinen Ausdruck des Integrals δy der Differentialgleichung $\delta V = 0$, wenn man aus allen diesen partiellen Differentialquotienten von y einen linearen Ausdruck bildet. Die Gleichung $\delta V = 0$, deren sämmtliche Integrale man auf diese Weise kennt, lässt sich aber, wie man zeigen kann, auf die Form der obigen Gleichung $Y = 0$ bringen, wenn man in dieser δy für y schreibt, und vermittelst der angegebenen Eigenschaften dieser Art von Gleichungen gelingt es, die zweite Variation

$$\int \delta V\delta y\,dx$$

durch fortgesetzte partielle Integration in einen andern Ausdruck zu transformiren, der unter dem Integralzeichen ein vollständiges Quadrat enthält, welches eben die Transformation der zweiten Variation ist, die man hierbei zu erreichen strebt. Wenn z. B. das obige Integral

$$\int f(x, y, y', y'')\,dx$$

vorgelegt ist, und man die für diesen Fall angegebene Bedeutung von u und u_1 beibehält, so erhält δV die Form

$$\delta V = A\delta y + \frac{d(A_1 \delta y')}{dx} + \frac{d^2(A_2 \delta y'')}{dx^2},$$

und es wird $\delta V = 0$ für $\delta y = u$. Setzt man $\delta y = u\delta' y$, so erhält man nach dem obigen allgemeinen Satze:

$$\int \delta V\delta y\,dx = \int u\delta V\delta' y\,dx$$
$$= \left[B\delta' y' + \frac{d(B_1 \delta' y'')}{dx}\right]\delta' y - \int\left[B\delta' y' + \frac{d(B_1 \delta' y'')}{dx}\right]\delta' y'\,dx.$$

Setzt man nun das letzte Integral

$$= \int V_1 \delta' y' dx,$$

so wird die Gleichung $V_1 = 0$ erfüllt, wenn man

$$\delta' y = \frac{u_1}{u}, \quad \text{also} \quad \delta' y' = \frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2}$$

setzt. Man kann daher dieselbe Methode fortsetzen, indem man

$$\delta' y' = \frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2} \cdot \delta'' y$$

setzt, wodurch nach demselben Satze

$$\int V_1 \delta' y' dx = \int V_1 \left(\frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2}\right) \delta'' y dx = C \delta'' y' . \delta'' y - \int C (\delta'' y')^2 dx,$$

welches die letzte Transformation ist, in welcher die willkürliche Variation nur in einem Quadrat unter dem Integralzeichen vorkommt. Man sieht übrigens leicht, dass

$$B_1 = u^2 A_2, \quad C = \left(\frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2}\right)^2 B_1, \quad \text{und daher} \quad C = \left(\frac{u u_1' - u_1 u'}{u}\right)^2 A_2.$$

Es ist ferner $A_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$, so dass C immer dasselbe Zeichen wie $\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$ hat, welches für das Minimum immer positiv, für das Maximum immer negativ sein muss. Man muss bekanntlich nun noch untersuchen, ob $\delta'' y'$ zwischen den Grenzen der Integration nicht unendlich werden kann, wozu man durch die Kenntniss der Functionen u, u_1 in den Stand gesetzt ist, welche man kennt, so wie y gegeben ist oder das vollständige Integral der Gleichung $V = 0$.

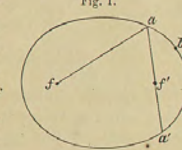
Wenn die im Vorstehenden angedeutete Analysis ziemlich tiefe Speculationen der Integralrechnung erfordert, so werden doch die daraus abgeleiteten Kriterien, ob eine Lösung überhaupt ein Maximum oder ein Minimum giebt, sehr einfach. Ich will den Fall betrachten, wo, wenn unter dem Integralzeichen y mit seinen Differentialquotienten bis zum n^{ten} vorkommt, die Grenzwerthe von $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, so wie die Grenzen selber gegeben sind. Setzt man in die $2n$ Integralgleichungen mit ihren $2n$ willkürlichen Constanten diese Grenzwerthe, so werden die willkürlichen Constanten bestimmt; aber weil hierzu die Auflösung von Gleichungen nöthig ist, giebt es in der Regel mehrere Arten dieser Bestimmung, so dass man mehrere Curven erhält, welche denselben Grenzbedingungen und derselben Differentialgleichung Genüge leisten. Hat man eine von diesen gewählt, so betrachte man den einen Grenzpunkt als fest, und gehe von

ihm zu den folgenden Punkten auf der Curve über. Nimmt man einen dieser folgenden Punkte zum andern Grenzpunkte, so wird es, nach dem eben Gesagten, sich ereignen können, dass man durch ihn und den ersten noch andere Curven legen kann, für welche in diesen beiden Grenzen $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ dieselben Werthe haben, und welche der vorgelegten Differentialgleichung genügen. Sobald man nun, indem man auf der Curve fortschreitet, zu einem Punkt derselben gelangt, für welchen eine jener andern Curven mit ihr zusammenfällt, oder, wie man sich auch ausdrücken kann, ihr unendlich nahe kommt: so ist dieses die Grenze, bis zu welcher, oder über welche hinaus, man die Integration nicht ausdehnen darf, wenn ein Maximum oder Minimum stattfinden soll; wenn man aber das Integral nicht bis zu diesen Grenzen ausdehnt, so wird ein Maximum oder Minimum immer stattfinden, vorausgesetzt, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)2}}$ zwischen den Grenzen immer dasselbe Zeichen hat.

Ich will, um dies an einem Beispiele deutlich zu machen, das Princip der kleinsten Wirkung bei der elliptischen Bewegung eines Planeten betrachten.

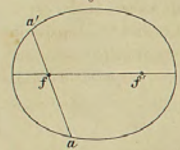
Das in dem Princip der kleinsten Wirkung betrachtete Integral kann nie ein Maximum werden, wie Lagrange geglaubt hat: es wird aber auch keineswegs immer ein Minimum, sondern es sind dazu bestimmte Einschränkungen für die Grenzen nöthig, welche durch die obige allgemeine Regel gegeben werden, widrigenfalls das Integral weder ein Maximum noch ein Minimum wird. Es fange der Planet (Fig. 1) sich von a zu bewegen an, wo a zwischen dem Peri- und Aphelium liege; der andere Endpunkt sei b; wenn $2A$ die grosse Axe, f die Sonne ist, so erhält man bekanntlich den andern Brennpunkt der Ellipse als Durchschnitt zweier aus den Centren a und b mit den Radien $2A - af$, $2A - bf$ beschriebenen Kreise. Die beiden Durchschnittspunkte der Kreise geben zwei verschiedene Lösungen des Problems, welche nur dann in eine zusammenfallen können, wenn die Kreise sich berühren, d. h., wenn ab durch den andern Brennpunkt geht. Wenn man also von a durch den andern Brennpunkt der Ellipse f' die Sehne der Ellipse aa' zieht, so wird, der gegebenen Regel zufolge, der andere Grenzpunkt b zwischen a und a' liegen müssen, wenn die Ellipse das im Princip der kleinsten Wirkung betrachtete Integral wirklich zu einem Kleinsten machen soll. Fällt b in a', so kann die zweite Variation des Integrals zwar

Fig. 1.



nicht negativ werden, aber 0, so dass die Aenderung des Integrals von der dritten Ordnung und daher sowohl positiv als negativ werden kann. Fällt b über a' hinaus, so kann die zweite Variation auch selbst negativ werden. Wenn der Anfangspunkt a zwischen dem Aphelium und Perihelium liegt, so wird der äusserste Punkt a' durch die Sehne der Ellipse bestimmt, welche man von a durch die Sonne f zieht. Denn wenn a und a' (Fig. 2) die Grenzpunkte sind, so erhält man durch Drehung der Ellipse um afa' unendlich viele Lösungen des Problems. Wenn also der zweite Grenzpunkt im letztern Falle über a' hinaus liegt, wird es eine Raumcurve zwischen den beiden gegebenen Grenzen geben, für welche $\int v ds$ kleiner wird als für die Ellipse.

Fig. 2.



Ich will bei dieser Gelegenheit noch ein Paar Worte über die Variation der Doppel-Integrale sagen, deren Theorie einer grössern Eleganz fähig ist, als sie selbst nach den Arbeiten von Gauss und Poisson erlangt hat. Um eine Vorstellung von der Art zu geben, wie es mir zweckmässig scheint, die Variation der Doppel-Integrale auszudrücken, will ich den einfachsten Fall annehmen, in welchem

$$\delta \iint f(x, y, z, p, q) dx dy$$

betrachtet wird, wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Es sei w die Variation von z, so wird

$$\delta \iint dx dy f = \iint dx dy \left(\frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Die bei einfachen Integralen angewendete Methode besteht darin, den Ausdruck unter dem Integralzeichen in zwei Theile zu theilen, von denen der eine in w multiplicirt ist, der andere das Element eines Integrals ist; der erste muss unter dem Integralzeichen $=0$ gesetzt werden, wenn die Variation verschwinden soll; der zweite kann integrirt werden, und man lässt sein Integral verschwinden. Eben so theile ich den Ausdruck unter dem Doppelzeichen in einen in w multiplicirten Theil und in einen andern, der das Element eines Doppel-Integrals ist, das heisst, wenn $u = aw$, so setze ich:

$$\frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = Aw + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vergleicht man die in w, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ multiplicirten Terme, so erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = A + \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = a \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = -a \frac{\partial v}{\partial x},$$

woraus

$$A = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)}{\partial y}$$

folgt, welches, $=0$ gesetzt, die bekannte partielle Differentialgleichung giebt, die hier auf eine vollkommen symmetrische Art abgeleitet ist. Die Function v muss die Gleichung erfüllen:

$$\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Setzt man $A = 0$, so hat man:

$$\delta \iint dx dy f = \iint dx dy \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \iint dv du,$$

welches, in den gegebenen Grenzen genommen, verschwinden muss. Wenn z in den Grenzen gegeben ist, wird w und mithin auch $u = aw$ in den Grenzen verschwinden und daher

$$\iint du dv = 0$$

sein. Wenn die Grenzwerthe von z ganz willkürlich sind, so muss v in den Grenzen verschwinden, oder, wenn $v = 0$ die Grenzcurve bedeutet, so müssen die im Integral der Gleichung $A = 0$ vorkommenden willkürlichen Functionen so bestimmt werden, dass

$$\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ist, u. s. w.

Um auf das Maximum und Minimum zurückzukommen: so ist es ein Uebelstand, dass im Gebrauch dieser Worte solche Verwirrung herrscht. Man sagt, ein Ausdruck sei ein Maximum oder Minimum, wenn man bloss sagen will, dass seine Variation verschwindet, selbst wenn auch weder ein Maximum noch ein Minimum stattfindet. Man sagt, eine Grösse sei ein Maximum, wenn man nur sagen will, sie sei kein Minimum. So sagt Poisson in seiner Mechanik: bei geschlossenen Flächen könne die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten ein Maximum sein, obgleich es sich von selbst versteht, dass man durch Ausbiegungen, die unendlich klein sein können, einen noch so grossen

Weg noch grösser machen kann. Freilich giebt die kürzeste Linie nur dann ein relatives Minimum, wenn die nach meiner obigen allgemeinen Regel gestellte Bedingung erfüllt ist, nämlich dass es zwischen den beiden Endpunkten auf der Curve nicht zwei andere giebt, zwischen denen man noch eine zweite unendlich nahe kürzeste Curve ziehen kann. Im andern Falle ist aber die Länge kein Maximum, sondern weder ein Maximum noch ein Minimum. Für die Flächen, die in jedem Punkte zwei entgegengesetzte Krümmungen haben, habe ich bewiesen, dass zwischen je zweien ihrer Punkte die kürzeste Linie wirklich eine kürzeste Linie ist.

Die oben angedeuteten Untersuchungen über die Kriterien des Grössten und Kleinsten in den isoperimetrischen Problemen füllen eine wesentliche Lücke in einem der schönsten Theile der Mathematik aus; ausserdem sind sie durch die Kunstgriffe der Integralrechnung, die dabei angewendet werden, merkwürdig. Tiefer aber in das Ganze der Wissenschaft eingreifend dürften folgende Untersuchungen sein, von denen ich mir Ihnen eine kurze Andeutung zu geben erlaube.

Hamilton hat gezeigt, dass die Probleme der Mechanik, bei denen der Satz von der lebendigen Kraft gilt, sich auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen lassen. Er fordert eigentlich die Integration zweier solcher partiellen Differentialgleichungen: man zeigt aber leicht, dass es genügt, irgend ein vollständiges Integral einer von ihnen zu kennen. Auch dehnt man seine Resultate leicht mit auf den Fall aus, wo die Kräftefunction, d. i. die Function, deren partielle Differentialquotienten die Kräfte geben, die Zeit explicite enthält; für welchen Fall der Satz von der lebendigen Kraft nicht gilt: aber immer noch das Princip der kleinsten Wirkung. Durch diese Zurückführung auf eine partielle Differentialgleichung könnte wenig gewonnen scheinen, da nach der Pfaffschen Methode in den Abhandlungen Ihrer Akademie — und für mehr als drei Variabele kannte man bisher weiter nichts über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung — die Integration der einen partiellen Differentialgleichung, auf welche das dynamische Problem zurückgeführt wird, viel schwieriger ist als die Integration des Systems der unmittelbar gegebenen, gewöhnlichen Differentialgleichungen der Bewegung. In der That, wenn man, wie es ebenfalls ohne Schwierigkeit geschieht, die Untersuchung Hamiltons auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ausdehnt, ist es umgekehrt eine bedeutende Entdeckung in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, dass sie so immer auf die

Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden können, welche bisher nach der Pfaffschen Methode nicht ausreichend war. Wichtig für die Integration der Differentialgleichungen der Mechanik selber konnte dies nur werden, wenn man nachwies, dass die Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, auf welche die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückkommen, einer besondern Behandlungsweise fähig sind, welche sie von andern Differentialgleichungen unterscheidet. Hamilton, obgleich er manche Anwendung seiner *neuen Methode*, wie er seine Untersuchungen nennt, zu machen versucht hat, hat hiervon nichts bemerkt, und daher auch aus seinen merkwürdigen Theoremen keinen wesentlichen Nutzen gezogen. Aber in der That hat schon Lagrange für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen drei Variabeln, auf die er sich beschränkt hat, und deren Integration zu seinen schönsten und berühmtesten Entdeckungen gehört, bemerkt, dass, wenn man ein Integral des Systems von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen vier Variabeln, auf welches er das Problem zurückgeführt hat, kennt, nur noch zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, jede zwischen zwei Variabeln, zu integriren sind. Im Allgemeinen aber wäre noch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Variabeln zu integriren, die man also für jenes besondere System gewöhnlicher Differentialgleichungen immer auf die erste Ordnung zurückführen kann. Wenn die partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabeln die unbekannte Function nicht selber, sondern nur ihre beiden Differentialquotienten enthält; so hat man nur zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen drei Variabeln zu integriren; und kennt man ein Integral derselben, so hat man nach der Lagrangeschen Methode nur noch zwei Quadraturen auszuführen, während im Allgemeinen noch eine Differentialgleichung erster Ordnung zu integriren wäre. Der letzte Fall findet in der Mechanik statt, d. h. die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, auf welche die dynamischen Probleme zurückkommen, enthalten nie die unbekannte Function selber. Hiernach kann man schon aus dem Lagrangeschen Verfahren für drei Variabele neue, höchst merkwürdige Sätze der Mechanik ziehen. Es folgt nämlich daraus ganz allgemein, dass, wenn irgend ein Problem der Mechanik, für welches der Satz von der lebendigen Kraft gilt, von einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung abhängt, und man noch ausser diesem Satz ein Integral kennt, so dass das Problem auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster

Ordnung zwischen zwei Variabeln zurückkommt, man diese letztere immer integriren kann, d. h. man kann nach einer allgemeinen, ganz bestimmten Regel den Multiplicator derselben finden. Ein solches mechanisches Problem ist z. B. die Bewegung eines Körpers in der Ebene, der nach zwei festen Centren gezogen wird. Euler fand hier mit Leichtigkeit ausser dem Integrale der lebendigen Kraft noch ein zweites; die Differentialgleichung erster Ordnung, worauf er hiernach kam, war aber so complicirt, dass seine ganze Unerschrockenheit dazu gehörte, sich mit der Integration derselben zu beschäftigen, und das Gelingen dieser Bemühung zu seinen berühmtesten Meisterstücken gehört. Diese Integration aber würde ohne alle weiteren Kunstgriffe durch die erwähnte allgemeine Regel geleistet. Ich habe vor etwa einem halben Jahre die auf den Fall der freien Bewegung eines Punktes in einer Ebene bezüglichen Formeln, welche allgemein, wenn man ausser dem Integral der lebendigen Kraft noch ein anderes Integral kennt, das Problem auf Quadraturen zurückführen, der Pariser Akademie mitgetheilt. Diese Formeln lassen sich sogleich auch auf die Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Fläche ausdehnen.

Damit aber eine Anwendung dieser Betrachtungen auf complicirtere mechanische Probleme möglich sei, ist es nöthig, die Lagrangesche Methode für die Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen drei Variabeln auf jede Zahl von Variabeln auszudehnen. Pfaff, der dies mit unübersteiglichen Hindernissen verknüpft hielt, sah sich aus diesem Grunde genöthigt, diese Methode ganz zu verlassen. Er betrachtete das Problem als speciellen Fall eines viel allgemeineren, dessen glückliche Lösung zu den wichtigsten Bereicherungen der Integralrechnung gehört. Aber das Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung hat vor dem allgemeinen Probleme, welches Pfaff betrachtet, Erleichterungen voraus, die ihm entgangen sind, und die er auf seinem Wege nicht finden konnte. Es ist mir gelungen, die Schwierigkeiten, welche der Verallgemeinerung der Lagrangeschen Methode im Wege standen, zu heben und hierdurch eine neue Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für jede Zahl von Variabeln zu begründen, welche für die Integration derselben die wesentlichsten Vortheile darbietet und unmittelbar auf die Probleme der Mechanik ihre Anwendung findet. Hier mögen folgende Andeutungen genügen.

Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und die isoperimetrischen Probleme, in welchen die Differentialquotienten der unbekannten

Functionen unter dem Integralzeichen nur bis auf die erste Ordnung steigen, hängen von derselben Analysis ab, so dass jedes solche isoperimetrische Problem auch als Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung gefasst werden kann. Man kann unter diesen isoperimetrischen Problemen auch diejenigen begreifen, in welchen der Ausdruck, der ein Maximum oder Minimum werden, oder allgemeiner, dessen Variation verschwinden soll, nicht unmittelbar als Integral, sondern durch eine Differentialgleichung erster Ordnung gegeben ist. Umgekehrt kann man auch die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung als solches isoperimetrische Problem fassen. Zufolge des Princips der kleinsten Wirkung kann als ein isoperimetrisches Problem der genannten Art die Bewegung eines Systems sich gegenseitig anziehender Körper betrachtet werden, welche ausserdem noch von constanten Parallelkräften und von Kräften sollicitirt werden können, welche nach festen oder beweglichen Centren gerichtet sind, wofern die Körper des Systems auf die letzteren Centra nicht reagiren und die Bewegung derselben als anderweitig bekannt vorausgesetzt wird. Solches mechanische Problem kann daher auch immer als Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung gefasst werden. Diese Integration hängt von der eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ab, welche mit den bekannten Differentialgleichungen der Mechanik übereinkommen, aber, als auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung bezüglich, besonderer Erleichterungen fähig sind. Man kann nämlich bei denselben durch einen besondern Gang des Verfahrens und durch besondere Wahl der Grössen, die man als Variabele einführt, bewirken, dass jedes gefundene Integral die Stelle von zwei Integrationen vertritt. Um dies deutlicher zu machen, will ich sagen, dass ein System Differentialgleichungen von der n^{ten} Ordnung sei, wenn man dasselbe nach Elimination der übrigen Variabeln auf eine gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen zwei Variabeln bringen kann. Für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche nicht die unbekannte Function selber, sondern nur ihre partiellen Differentialquotienten enthalten, so wie für die isoperimetrischen Probleme der genannten Art, in welchen der Ausdruck, dessen erste Variation verschwinden soll, als Integral gegeben ist, und daher auch für die genannten mechanischen Probleme, lässt sich nun der zu befolgende Gang der Operationen und der dadurch gewonnene Vortheil, wie folgt, angeben. Es sei das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen, von dem das Problem abhängt, von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung; man kenne ein Integral desselben, so lässt sich das Problem durch eine bestimmte Wahl von Grössen, die man als Variabele einführt, auf ein System von Differentialgleichungen der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung bringen. Kennt man von diesem Systeme wieder ein Integral, so lässt sich dasselbe durch eine neue Wahl von Variabeln auf ein System von der $(2n-4)^{\text{ten}}$ Ordnung bringen, und so fort, bis man keine Differentialgleichungen mehr zu integriren hat. Alle ausserdem noch auszuführenden Operationen bestehen lediglich in Quadraturen. Ich bemerke der Deutlichkeit wegen, dass ich ein Integral eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen eine Gleichung $U = a$ nenne, wo a eine willkürliche Constante ist, welche in U nicht vorkommt, und U ein solcher Ausdruck, dass durch die Differentialgleichungen dU identisch Null wird.

Als Beispiel der allgemeinen Methode nehme ich ein mechanisches Problem, von dem ich bereits in einem früheren Schreiben die Akademie zu unterhalten die Ehre hatte. Es giebt nämlich Fälle bei der Bewegung der Himmelskörper, wie z. B. des Mondes oder eines Cometen, der dem Jupiter nahe vorbeigeht, in welchen die elliptische Bewegung so wenig angenähert ist, dass man zur Integration der Differentialgleichungen der Bewegung darauf kein Annäherungsverfahren gründen kann, welches wissenschaftlichen Werth hat. Es ist daher von grosser Wichtigkeit, andere Bewegungen zu erfinden, welche einer einfachen Behandlung fähig sind und dem Fall der Natur sich mehr annähern können. Hierzu könnte man versuchen, die Bewegung eines masselosen Punktes zu wählen, der von zwei Körpern angezogen wird, die sich gleichförmig und mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt drehen. Beim Monde kann man für das Näherungsproblem noch annehmen, dass die drei Körper sich in einer Ebene bewegen. Man hat dann zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche, da die Kräfte die Zeit explicite enthalten, und daher weder der Satz von den Flächen, noch der Satz von der lebendigen Kraft gilt, die Stelle einer Differentialgleichung der vierten Ordnung zwischen zwei Variabeln vertreten. Obgleich die beiden Sätze von den Flächen und der lebendigen Kraft nicht gelten, so habe ich doch gezeigt, dass eine gewisse Combination derselben auch hier stattfindet. Dieses von mir gefundene Integral führt aber das Problem nicht bloss auf die dritte Ordnung zurück, sondern die Anwendung der allgemeinen Methode auf diesen Fall zeigt, dass man durch zweckmässige Wahl der Variabeln das Problem auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Variabeln zurückführen kann, von welcher man, wie nach derselben Methode

erhellt, wieder nur ein einziges Integral zu kennen braucht. Es ist also vermittelst dieser Methode durch das eine von mir gefundene Integral die Integration der Differentialgleichung vierter Ordnung darauf zurückgeführt, ein einziges Integral einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung zu finden, indem alles übrige nur noch Quadraturen erfordert.

Der ganze Gang der angedeuteten Operationen hängt von den jedesmaligen Integralen ab, welche sich entdecken lassen; die Wahl der Variabeln hängt ebenfalls von denselben ab und erfordert auch ihrerseits die Integration von Differentialgleichungen, immer aber so, dass durch ein gefundenes Integral das System von Differentialgleichungen auf ein anderes zurückgeführt wird, dessen Ordnung um zwei niedriger ist; auch werden sich die zur Bestimmung der Wahl der Variabeln aufzustellenden Differentialgleichungen in vielen Fällen leicht integriren lassen. Wofern man nur die einfachen Integrale, die sich finden lassen, nicht übersieht, kann man auf dem genannten Wege sicher sein, das Problem, wenn nicht gänzlich auf Quadraturen, doch so weit zurückzuführen, als es seiner Natur nach möglich ist. Auch wenn die Differentialgleichungen, auf welche man kommt, sich nicht integriren lassen, wird man doch merkwürdige Eigenschaften derselben erkennen, welche sich vortheilhaft benutzen lassen. So weiss man in dem angeführten Problem, wenn man auch die Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, auf welche dasselbe zurückkommt, nicht integriren kann, dass von ihren beiden Integralen eins aus dem andern durch blosse Quadraturen gefunden werden kann.

Sie sehen, hochgeehrtester Herr Professor, dass die in vorstehenden kurzen Umrissen angedeuteten Resultate ein neues wichtiges Capitel der analytischen Mechanik begründen, die Vortheile betreffend, welche man aus der besonderen Form der Differentialgleichungen der Mechanik für ihre Integration ziehen kann. Wir verdanken Lagrange diese Form, aber sie hat bis jetzt in seinen und in den Händen der ihm nachfolgenden Analysten nur dazu gedient, die analytischen Transformationen rascher und übersichtlicher zu leisten, und den bekannten allgemeinen mechanischen Gesetzen die Ausdehnung zu geben, deren sie fähig sind. Aber diese Form erhält jetzt eine viel wichtigere Bedeutung, indem sich zeigt, dass gerade die Differentialgleichungen von dieser bestimmten Form einer eigenthümlichen Behandlung fähig sind, welche die Schwierigkeiten ihrer Integration bedeutend vermindert.

Den 29. November 1836.

ÜBER DIE REDUCTION DER INTEGRATION DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG ZWISCHEN IRGEND EINER ZAHL VARIABELN AUF DIE INTEGRATION EINES EINZIGEN SYSTEMES GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

PROFESSOR C. G. J. JACOBI
ZU KÖNIGSBERG IN PREUSSEN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 17 p. 97—162.

ÜBER DIE REDUCTION DER INTEGRATION DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG ZWISCHEN IRGEND EINER ZAHL VARIABELN AUF DIE INTEGRATION EINES EINZIGEN SYSTEMES GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

1.

Professor Hamilton hat in zwei Abhandlungen in den *Philos. Transact.* vom J. 1834. P. II. und vom J. 1835. P. I. das merkwürdige Resultat gefunden, dass in den Fällen der Mechanik, in welchen der Satz von der lebendigen Kraft gilt, sich die Integralgleichungen der Bewegung, eben so wie die Differentialgleichungen in der ihnen von Lagrange gegebenen Form, sämmtlich durch die partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function darstellen lassen. Der Gang seiner Betrachtung ist ungefähr der folgende.

Es seien die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von n materiellen Punkten, welche den Bedingungen $F = 0$, $F_1 = 0$, ... unterworfen sind,

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \cdots,$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_i} + \cdots,$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_i} + \cdots,$$

in welchen Gleichungen dem Index i die Werthe $1, 2, \ldots, n$ zu geben sind, und m_i die Masse eines Punktes bedeutet, dessen rechtwinklige Coordinaten x_i, y_i, z_i sind. Dies ist die Lagrangesche Form der Differentialgleichungen, welche ihnen in allen Fällen gegeben werden kann, in welchen *der Satz von der lebendigen Kraft* gilt:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] = U + h,$$

wo h eine Constante. Die Grössen λ, λ_1 etc. sind der Symmetrie wegen eingeführte Factoren, welche vermittelst der Bedingungsgleichungen eliminirt werden müssen. Die Function U, deren partielle Differentiation die angebrachten Kräfte giebt, will ich die *Kräftefunction* nennen.

Hat man die aufgestellten Differentialgleichungen vollständig integrirt, so kennt man die $3n$ Coordinaten als Functionen der Zeit und der willkürlichen Constanten. Es werden diese Werthe in die Kräftefunction U substituirt, und ihre partielle Ableitung nach einer der willkürlichen Constanten, die ich α nennen will, genommen: so hat man

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \Sigma\left[\frac{\partial U}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]$$
$$= \Sigma m_i\left[\frac{d^2 x_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{d^2 y_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{d^2 z_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right],$$

da die in λ, λ_1, ... multiplicirten Ausdrücke wegen der Bedingungsgleichungen verschwinden.

Den letzteren Ausdruck kann man auch so darstellen:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{d\Sigma m_i\left[\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]}{dt}$$
$$-\Sigma m_i\left[\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial t}+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial t}+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{\partial^2 z_i}{\partial \alpha \partial t}\right].$$

Der zweite Theil des Ausdrucks rechter Hand vom Gleichheitszeichen lässt sich ebenfalls als eine partielle, nach α genommene Ableitung darstellen:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]}{\partial \alpha},$$

wodurch die vorstehende Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$\frac{\partial\left[U+\frac{1}{2}\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]}{\partial \alpha}$$
$$= \frac{d\Sigma m_i\left[\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]}{dt}.$$

Diese merkwürdige Gleichung ist den Analysten, welche sich mit der Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik beschäftigt haben, nicht entgangen. Es folgt daraus mit Leichtigkeit eines der Haupttheoreme dieser

Theorie. Setzt man nämlich

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

so dass die vorstehende Gleichung wird:

$$\frac{\partial\left[U+\frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)\right]}{\partial \alpha} = \frac{d\Sigma m_i\left[x_i'\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]}{dt},$$

und bedeutet β irgend eine zweite willkürliche Constante, so sehen wir, dass die beiden Ausdrücke

$$\frac{d\Sigma m_i\left[x_i'\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]}{dt}, \quad \frac{d\Sigma m_i\left[x_i'\frac{\partial x_i}{\partial \beta}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial \beta}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial \beta}\right]}{dt}$$

die partiellen Differentialquotienten eines und desselben Ausdrucks

$$U+\frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)$$

sind, das eine Mal nach α, das andere Mal nach β genommen. Es wird also die Ableitung des ersten Ausdrucks, nach β genommen, gleich der Ableitung des zweiten Ausdrucks, nach α genommen, sein, welches nach Weglassung der sich aufhebenden Terme die Gleichung giebt:

$$\frac{d\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial y_i'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial z_i'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]}{dt}$$
$$-\frac{d\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \beta}+\frac{\partial y_i'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \beta}+\frac{\partial z_i'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \beta}\right]}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, dass der Ausdruck

$$\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial y_i'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial z_i'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]-\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \beta}+\frac{\partial y_i'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \beta}+\frac{\partial z_i'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \beta}\right]$$

von t unabhängig oder eine blosse Constante ist, welches der berühmte **Lagrange**sche Satz ist. Man beweist auch noch leicht, dass, wenn γ irgend eine dritte willkürliche Constante ist, und man jenen Ausdruck mit (α, β) bezeichnet, die Gleichungen stattfinden:

$$(\alpha, \alpha) = 0, \quad (\alpha, \beta)+(\beta, \alpha) = 0,$$
$$\frac{\partial(\beta, \gamma)}{\partial \alpha}+\frac{\partial(\gamma, \alpha)}{\partial \beta}+\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial \gamma} = 0.$$

Aber **Hamilton** zieht aus der Gleichung, welche wir fanden:

$$\frac{\partial[U+\frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)]}{\partial a} = \frac{d\Sigma m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial a}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial a}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial a}\right)}{dt},$$

neue Vortheile durch folgendes Verfahren, welches eben sowohl durch die Methode als durch die Resultate, zu welchen es führt, höchst bemerkenswerth ist. Setzt man nämlich:

$$S = \int_0^t [U+\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)]\,dt,$$

so ist nach der bekannten Regel der Differentiation unter dem Integralzeichen:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \int_0^t \frac{\partial[U+\frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)]}{\partial a}\,dt,$$

oder der obigen Gleichung zu Folge:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \int_0^t \frac{d\Sigma m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial a}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial a}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial a}\right)}{dt}\,dt.$$

Sind a, b, c die Anfangswerthe von x, y, z und a', b', c' die Anfangswerthe von x', y', z', oder diejenigen Werthe, welche dem Werthe $t=0$ entsprechen, so giebt diese Gleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \Sigma m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial a}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial a}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial a}\right)-\Sigma m_i\left(a_i'\frac{\partial a_i}{\partial a}+b_i'\frac{\partial b_i}{\partial a}+c_i'\frac{\partial c_i}{\partial a}\right).$$

Die Function S ist eine Function von t und den willkürlichen Constanten; sie wurde dadurch definirt, dass ihre nach t genommene Ableitung gleich ist der Summe der Kräftefunction und der halben lebendigen Kraft. Die vorstehende Gleichung lehrt auch ihre Ableitung finden, wenn man bloss die willkürlichen Constanten als veränderlich betrachtet. Bezeichnet man nämlich durch die Characteristik ∂' das Differential, welches man erhält, wenn man gleichzeitig alle willkürlichen Constanten ändert, t aber ungeändert lässt, so giebt die vorstehende Gleichung, wenn man sie mit da multiplicirt, und die Summe aus allen ähnlichen bildet, die man für jede der willkürlichen Constanten erhält,

$$\partial' S = \Sigma m_i(x_i'\partial' x_i+y_i'\partial' y_i+z_i'\partial' z_i)-\Sigma m_i(a_i'\partial' a_i+b_i'\partial' b_i+c_i'\partial' c_i).$$

Dies ist das vollständige Differential von S, wenn man t constant setzt und es als Function der willkürlichen Constanten betrachtet.

Ist das System ganz frei, so hat man $6n$ willkürliche Constanten, als deren Functionen S und die $6n$ Grössen x, y, z, a, b, c betrachtet werden.

Vermittelst der Integralgleichungen kann man die $3n$ Grössen a, b, c durch diese $6n$ Constanten ausdrücken, und die $3n$ Grössen x, y, z durch diese Constanten und die Zeit t. Man kann daher auch die $6n$ willkürlichen Constanten als Functionen der Zeit und der $6n$ Grössen x, y, z, a, b, c betrachten, wodurch auch S eine Function der Zeit t und der $6n$ Grössen x, y, z, a, b, c wird. Nimmt man in diesem Sinne die partiellen Differentialquotienten von S, so giebt der vorstehende Ausdruck des vollständigen Differentials von S sogleich seine nach den Grössen x, y, z, a, b, c genommenen partiellen Ableitungen, nämlich:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = m_i x_i', \qquad \frac{\partial S}{\partial a_i} = -m_i a_i',$$
$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = m_i y_i', \qquad \frac{\partial S}{\partial b_i} = -m_i b_i',$$
$$\frac{\partial S}{\partial z_i} = m_i z_i', \qquad \frac{\partial S}{\partial c_i} = -m_i c_i'.$$

Die vorstehenden $6n$ Gleichungen kann man als die vollständigen Integralgleichungen der vorgelegten Aufgabe betrachten, und zwar sind die Gleichungen links die $3n$ Integrale erster Ordnung (welche Hamilton auch *Zwischenintegrale* nennt), die Gleichungen rechter Hand die $3n$ endlichen Integrale selber.

Ist das System nicht frei, sondern sind die k Bedingungen gegeben

$$F=0,\quad F_1=0,\quad \ldots,\quad F_{k-1}=0,$$

welchen die Punkte desselben Genüge leisten müssen; so kann man die $3n$ Functionen x, y, z, welche man sucht, auf $3n-k$ reduciren, und braucht von den $3n$ Differentialgleichungen 2ter Ordnung nur $3n-k$ anzuwenden. Man hat daher nur $6n-2k$ willkürliche Constanten, für welche man in den Ausdruck von S wieder die $3n-k$ Grössen, auf welche man die $3n$ Grössen x, y, z zurückgeführt hat, und ihre Anfangswerthe, auf welche sich durch dieselben Bedingungsgleichungen die $3n$ Grössen a, b, c zurückführen lassen, einführen kann. Zu der Gleichung, durch welche wir, wenn man t constant setzt, das vollständige Differential von S, im obigen Sinne genommen, ausgedrückt haben, und welche sich auch so darstellen lässt:

$$\begin{aligned}0 &= \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-m_i x_i'\right)dx_i+\Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}+m_i a_i'\right)da_i\\ &+\Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}-m_i y_i'\right)dy_i+\Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial b_i}+m_i b_i'\right)db_i\\ &+\Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}-m_i z_i'\right)dz_i+\Sigma\left(\frac{\partial S}{dc_i}+m_i c_i'\right)dc_i,\end{aligned}$$

sind dann eben so k von den $3n$ Differentialen dx, dy, dz und k von den Differentialen da, db, dc vermittelst der Bedingungsgleichungen zu eliminiren und die in die übrigen unabhängigen Differentiale multiplicirten Ausdrücke einzeln $=0$ zu setzen. Bedeutet F^0 den Ausdruck von F, wenn man darin für die $3n$ Grössen x, y, z ihre Anfangswerthe a, b, c setzt, so bewerkstelligt man diese Elimination, indem man die k Gleichungen

$$\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial F}{\partial z_i}dz_i\right)=dF=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und die k Gleichungen

$$\Sigma\left(\frac{\partial F^0}{\partial a_i}da_i+\frac{\partial F^0}{\partial b_i}db_i+\frac{\partial F^0}{\partial c_i}dc_i\right)=dF^0=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

jede mit einem Factor multiplicirt, zu der obigen Gleichung hinzufügt und diese Factoren so bestimmt, dass die k von den Differentialen dx, dy, dz, und die k von den Differentialen da, db, dc, welche man eliminiren will, verschwinden. Da nun auch die in die übrigen unabhängigen Differentiale multiplicirten Ausdrücke verschwinden müssen, so erhält man, wenn man die Factoren mit λ, λ_1, $\ldots$, $-\lambda^0$, $-\lambda_1^0$, $\ldots$ bezeichnet, das System von $6n$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
m_i x_i' &= \frac{\partial S}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\cdots,\\
m_i y_i' &= \frac{\partial S}{\partial y_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_i}+\cdots,\\
m_i z_i' &= \frac{\partial S}{\partial z_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z_i}+\cdots,\\
m_i a_i' &= -\frac{\partial S}{\partial a_i}+\lambda^0\frac{\partial F^0}{\partial a_i}+\lambda_1^0\frac{\partial F_1^0}{\partial a_i}+\cdots,\\
m_i b_i' &= -\frac{\partial S}{\partial b_i}+\lambda^0\frac{\partial F^0}{\partial b_i}+\lambda_1^0\frac{\partial F_1^0}{\partial b_i}+\cdots,\\
m_i c_i' &= -\frac{\partial S}{\partial c_i}+\lambda^0\frac{\partial F^0}{\partial c_i}+\lambda_1^0\frac{\partial F_1^0}{\partial c_i}+\cdots,
\end{aligned}$$

welche jetzt als die vollständigen Integralgleichungen mit Hinzuziehung der Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
F&=0, & F_1&=0, & \ldots\\
F_0&=0, & F_1^0&=0, & \ldots
\end{aligned}$$

zu betrachten sind. Die Multiplicatoren werden durch Auflösung einer gleichen Zahl linearer Gleichungen gefunden, welche man dadurch erhält, dass man die vorstehenden Gleichungen in die folgenden, durch Differentiation aus den Bedingungsgleichungen sich ergebenden, substituirt:

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}x_i'+\frac{\partial F}{\partial y_i}y_i'+\frac{\partial F}{\partial z_i}z_i'\right)=0,\\
\frac{dF_1}{dt} &= \Sigma\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}x_i'+\frac{\partial F_1}{\partial y_i}y_i'+\frac{\partial F_1}{\partial z_i}z_i'\right)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

so wie die Gleichungen, die man für $t=0$ aus diesen erhält:

$$\begin{aligned}
&\Sigma\left(\frac{\partial F^0}{\partial a_i}a_i'+\frac{\partial F^0}{\partial b_i}b_i'+\frac{\partial F^0}{\partial c_i}c_i'\right)=0,\\
&\Sigma\left(\frac{\partial F_1^0}{\partial a_i}a_i'+\frac{\partial F_1^0}{\partial b_i}b_i'+\frac{\partial F_1^0}{\partial c_i}c_i'\right)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Wir sehen, wie auch in dem Falle eines nicht freien Systems die *Integralgleichungen* eine ganz analoge Form mit derjenigen erhalten haben, in welche Lagrange die *Differentialgleichungen* der Mechanik gebracht hat.

Wenn der Satz von der lebendigen Kraft gilt, so kann man die Function S auch so ausdrücken:

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^t[U+\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)]dt\\
&= \int_0^t\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)dt-ht\\
&= 2\int_0^t U dt+ht,
\end{aligned}$$

wo h eine willkürliche Constante ist. Ich habe aber im Vorhergehenden den Satz von der lebendigen Kraft nicht benutzt, weil diese Resultate, was Professor Hamilton nicht angemerkt hat, auf einen Fall ausgedehnt werden können, für welchen dieser Satz nicht gilt, auf den Fall nämlich, wo die Kräftefunction ausser den Coordinaten noch die Zeit t explicite enthält, wie z. B., wenn ein Punkt ohne Masse von beweglichen Centren angezogen wird, deren Bewegung bekannt und gegeben ist. Ich werde diese Ausdehnung der Formeln, wo sie statthaft ist, allezeit angeben, da der angegebene Fall der Mechanik in der That seine Anwendung findet.

2.

Die Definition, welche wir von der Function S gegeben haben, setzt die vollständige Integration der Differentialgleichungen des mechanischen Problems bereits voraus. Die vorstehenden Resultate hätten dann nur das Interesse, das System der Integralgleichungen in eine merkwürdige Form gebracht zu haben. Man kann aber noch die Function S auf eine ganz verschiedene und *viel allgemeinere* Art definiren. Ich werde mich im Folgenden auf den Fall eines ganz freien Systems beschränken; den Fall, wo irgend welche Verbindungen und Bedingungen zwischen den Punkten stattfinden, werde ich in einer späteren Abhandlung wieder aufnehmen, deren hauptsächlichste Resultate ich bereits an einem andern Orte mitgetheilt habe.

Wir betrachten S wieder als Function der Zeit, der Coordinaten der Punkte und ihrer Anfangswerthe. Differentiiren wir S vollständig nach der Zeit, indem wir auch die Coordinaten als Functionen der Zeit betrachten, so erhalten wir, der Definition von S zufolge:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial S}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial S}{\partial z_i} z_i'\right) = U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

Hieraus folgt, da

$$x_i' = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad y_i' = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad z_i' = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i},$$

der Ausdruck der partiellen Ableitung von S, nach t genommen,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

welcher Ausdruck sich, wenn U nicht t explicite enthält, also der Satz von der lebendigen Kraft gilt, in folgenden vereinfacht:

$$\frac{dS}{\partial t} = -h,$$

wo h eine willkürliche Constante ist.

Man erhält aus dem Ausdrucke von $\frac{\partial S}{\partial t}$ auch folgende Gleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

und dieses ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welcher die Function S Genüge leisten muss. Die Function S, wie sie oben definirt worden,

ist eine *vollständige* Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, indem sie ausser einer Constante, die man offenbar zu ihr noch hinzufügen kann (da nicht die Function selber, sondern nur ihre Differentialquotienten in der Gleichung vorkommen), $3n$ willkürliche Constanten, nämlich die Anfangswerthe der Coordinaten enthält, und die Zahl der unabhängigen Variabeln ebenfalls $3n+1$ beträgt. Ich will einen Augenblick bei der Natur der verschiedenen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung verweilen.

Man nennt nach Lagrange *vollständige* Lösung einer partiellen nicht linearen Differentialgleichung erster Ordnung eine solche, welche eine gleiche Zahl willkürlicher Constanten enthält, wie die Zahl der unabhängigen Variabeln beträgt, weil man vermittelst der nach diesen genommenen partiellen Differentialquotienten der gesuchten Function eine solche Zahl willkürlicher Constanten eliminiren kann, und im Allgemeinen keine grössere. Kennt man *eine* vollständige Lösung, so kann man daraus *alle* übrigen Lösungen ableiten, deren die partielle Differentialgleichung fähig ist, und welche einen sehr verschiedenen Charakter haben. Man nimmt zu diesem Ende eine Anzahl *willkürlicher* Relationen zwischen den willkürlichen Constanten an oder, was dasselbe ist, bestimmt einige derselben als willkürliche Functionen der übrigen, differentiirt nach diesen, als unabhängig betrachteten willkürlichen Constanten die vollständige Lösung, und setzt die genommenen partiellen Differentialquotienten einzeln $= 0$; wenn man dann vermittelst dieser Gleichungen die willkürlichen Constanten aus der vollständigen Lösung eliminirt, so erhält man die neue Lösung, welche man, da sie willkürliche *Functionen* enthält, nach Lagrange eine *allgemeine* Lösung nennen kann. Diese allgemeinen Lösungen haben aber einen ganz verschiedenen Charakter nach der Zahl der willkürlichen Relationen, welche man zwischen den willkürlichen Constanten annimmt. Wenn m die Zahl der unabhängigen Variabeln und also auch die Zahl der willkürlichen Constanten ist, so hat man $m-1$ Classen allgemeiner Lösungen, je nachdem man $1, 2, \ldots$ oder $m-1$ Relationen zwischen den m Constanten annimmt, und dann wie oben verfährt. Die *allgemeinste* Lösung ist diejenige, bei welcher nur eine Relation zwischen den Constanten angenommen, oder eine als Function der übrigen angesehen wird. Der Grad der Allgemeinheit verringert sich mit der Zahl derjenigen willkürlichen Constanten, für die man willkürliche Functionen der übrigen setzt. So ist es allgemeiner oder lässt mehr willkürliches zu, eine willkürliche

Constante als willkürliche Function der $m-1$ andern anzunehmen, wie in der allgemeinsten Lösung, als zwei willkürliche Constanten als willkürliche Functionen der $m-2$ andern anzunehmen, wie in der nächst folgenden Classe allgemeiner Lösungen. Denn denkt man sich eine willkürliche Function von $m-1$ Grössen nach den Potenzen von einer derselben geordnet, so sind die Coëfficienten willkürliche Functionen von $m-2$ Grössen, so dass *eine* willkürliche Function von $m-1$ Grössen *unendlich viele* Functionen von $m-2$ Grössen umfasst. Als Grenze dieser Classen allgemeiner Lösungen ist der Fall anzusehen, wo man m Relationen zwischen den m Grössen annimmt, oder diese als Constanten betrachtet, was aber die vollständige Lösung selber ist.

Da die verschiedenen Arten von Lösungen, welche ich allgemeine Lösungen genannt habe, willkürliche *Functionen* enthalten, so kann man sie so particularisiren, dass sie *jede beliebige Zahl willkürlicher Constanten* enthalten, denn in jeder willkürlichen Function kann man so viel willkürliche Constanten anbringen, wie man will. Giebt man den willkürlichen Functionen zusammen m willkürliche Constanten, wenn m die Zahl der unabhängigen Variabeln in der partiellen Differentialgleichung ist, *so kann man jede particularisirte allgemeine Lösung mit m willkürlichen Constanten ebenfalls als eine vollständige Lösung ansehen, aus welcher man eben so wie aus der vollständigen Lösung, von welcher man ausgegangen ist, alle Arten von Lösungen, deren die gegebene partielle Differentialgleichung fähig ist, ableiten kann.* Man kann auf ähnliche Art jede allgemeine Lösung so particularisiren, dass daraus eine Lösung wird, die zu einer minder allgemeinen Classe gehört. Hat man z. B. eine Lösung, in welcher k Grössen als willkürliche Functionen der $m-k$ andern vorkommen, und ist $l > k$, aber zugleich $l < m$, so kann man diese k willkürlichen Functionen von $m-k$ Grössen so particularisiren, dass darin so viel willkürliche Functionen von $m-l$ Grössen vorkommen, wie man will; und nimmt man für diese k willkürlichen Functionen particuläre Formen, in denen l willkürliche Functionen von $m-l$ Grössen vorkommen, so kann man diese Lösung als eine solche betrachten, die zu einer minder allgemeinen Classe gehört, und die man aus der vollständigen Lösung erhalten kann, wenn man darin l willkürliche Constanten als willkürliche Functionen der übrigen betrachtet und für diese solche Functionen setzt, dass die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der vollständigen Lösung verschwinden.

3.

Nachdem ich diese bekannten Betrachtungen vorausgeschickt habe, kehre ich zu der hier vorliegenden partiellen Differentialgleichung zurück:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

von welcher die Function S, wie sie oben definirt worden ist, wenn man noch eine willkürliche Constante zu ihr addirt, ein vollständiges Integral ist. Da es aber unendlich viele vollständige Integrale derselben partiellen Differentialgleichung von der verschiedensten Form giebt, so ist die Function S durch die partielle Differentialgleichung, der sie Genüge leistet, noch nicht bestimmt. Gleichwohl ist das System der $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen der Bewegung durch die eine partielle Differentialgleichung vollständig ersetzt. Denn es lässt sich leicht zeigen, dass *jede* vollständige Lösung derselben hinreicht, um sämmtliche Integralgleichungen der Bewegung daraus abzuleiten.

In der That sei S irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U.$$

Da die Zahl der unabhängigen Variabeln hier $3n+1$ ist, nämlich die Zeit t und die $3n$ Coordinaten, so muss die vollständige Lösung $3n+1$ willkürliche Constanten enthalten, von denen man sich immer eine mit S durch blosse Addition verbunden denken kann. Es seien α_1; $\alpha_2, \ldots, \alpha_{3n}$ die $3n$ übrigen, und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{3n}$ andere willkürliche Constanten, so will ich zeigen, dass folgende $3n$ endliche Gleichungen zwischen den $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i und der Zeit t:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}}=\beta_{3n}$$

immer dem vorgelegten System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i}$$

Genüge leisten.

Differentiirt man nämlich die gegebenen endlichen Gleichungen, wodurch die willkürlichen Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{3n}$ von selber verschwinden, so erhält man die $3n$ Gleichungen:

$$0 = \frac{d\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial x_i} x_i' + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial y_i} y_i' + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial z_i} z_i'\right),$$
$$0 = \frac{d\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial x_i} x_i' + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial y_i} y_i' + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial z_i} z_i'\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = \frac{d\frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}}}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial x_i} x_i' + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial y_i} y_i' + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial z_i} z_i'\right),$$

aus welchen man die Werthe von x_i', y_i', z_i' durch Auflösung bestimmen kann. Vergleicht man aber diese $3n$ Gleichungen mit folgenden $3n$ identischen Gleichungen, welche aus der gegebenen Gleichung:

$$U = \frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right]$$

durch partielle Differentiation nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3n}$ hervorgehen:

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial t} + \Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial x_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial y_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial z_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}\right],$$
$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial t} + \Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial x_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial y_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial z_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial t} + \Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial x_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial y_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial z_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}\right]:$$

so sieht man ohne weiteres, dass die gesuchten Werthe von x_i', y_i', z_i', welche die obigen Gleichungen erfüllen sollen, folgende sind:

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i},\quad y_i' = \frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i},\quad z_i' = \frac{dz_i}{dt} = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}.$$

Differentiirt man die vorstehenden Gleichungen aufs neue, so erhält man die Gleichungen:

$$m_i\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_k} x_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial y_k} y_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial z_k} z_k'\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial t},$$
$$m_i\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \Sigma\left[\frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial x_k} x_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial y_k} y_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial z_k} z_k'\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial t},$$
$$m_i\frac{d^2 z_i}{dt^2} = \Sigma\left[\frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial x_k} x_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial y_k} y_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial z_k} z_k'\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial t},$$

wo man in den Summen rechts für k die Werthe $1, 2, \ldots, n$ zu setzen hat,

während i unverändert bleibt. Wenn man in diese Gleichungen für x_k', y_k', z_k' die gefundenen Werthe substituirt, so verwandeln sie sich in folgende:

$$m_i\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma \frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial y_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial z_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_k}\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial t},$$
$$m_i\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \Sigma \frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial x_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial y_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial z_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_k}\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial t},$$
$$m_i\frac{d^2 z_i}{dt^2} = \Sigma \frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial x_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial y_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial z_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_k}\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial t}.$$

Es sind aber die Ausdrücke rechts die partiellen Differentialquotienten des Ausdrucks

$$U = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_k}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_k}\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t},$$

nach x_i, y_i, z_i genommen, wodurch wir die Differentialgleichungen bekommen:

$$m_i\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

welches die vorgelegten Differentialgleichungen sind. Wir haben also folgendes Theorem.

Theorem.

Es seien die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systemes von n materiellen Punkten folgende $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$m_i\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

wo U eine gegebene Function der $3n$ Coordinaten $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots \ldots x_n, y_n, z_n$ und der Zeit t bedeutet, und für i alle Werthe $1, 2, \ldots, n$ zu setzen sind: es sei ferner S irgend ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$U = \frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right],$$

welches ausser einer mit S bloss durch Addition verbundenen willkürlichen Constanten noch $3n$ andre willkürliche Constanten

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{3n}$$

enthalte: so sind die vollständigen endlichen Integrale der vorgelegten $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit $6n$ willkürlichen Constanten:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}} = \beta_{3n},$$

wo die Grössen

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{3n}$$

neue $3n$ willkürliche Constanten sind; es sind ferner die nach den Coordinaten-Axen zerlegten Geschwindigkeiten:

$$x_i' = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad y_i' = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad z_i' = \frac{1}{m_i} \frac{\partial S}{\partial z_i}.$$

4.

Eine der vollständigen Lösungen der im Vorigen betrachteten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist die zu Anfang definirte Function S, und zwar eine solche, in welcher die $3n$ willkürlichen Constanten, die S enthält, gerade die Anfangswerthe der $3n$ Grössen x_i, y_i, z_i sind, welche wir mit a_i, b_i, c_i bezeichnet haben. Für den hauptsächlich vorkommenden Fall, welchen Hamilton allein betrachtet, wo die Kräftefunction die Zeit t nicht explicite enthält, giebt derselbe noch eine zweite partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welcher diese Function S Genüge leistet. Für diesen Fall gilt der Satz von der lebendigen Kraft, welchen man so darstellen kann:

$$U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2),$$

wo wieder a_i', b_i', c_i' die Anfangswerthe von x_i', y_i', z_i' bedeuten, und U_0 der Werth von U ist, wenn man darin für x_i, y_i, z_i ihre Anfangswerthe a_i, b_i, c_i setzt. Es ist aber:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

und daher, wenn der Satz von der lebendigen Kraft gilt, auch

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2).$$

Für die Hamiltonsche Function S wurde aber

$$m_i a_i' = -\frac{\partial S}{\partial a_i}, \quad m_i b_i' = -\frac{\partial S}{\partial b_i}, \quad m_i c_i' = -\frac{\partial S}{\partial c_i},$$

wodurch sich die vorstehende Gleichung in folgende verwandelt:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i}\right)^2\right].$$

Dieses ist die zweite partielle Differentialgleichung, welcher die Hamiltonsche

Function S Genüge leistet, und wodurch sie von allen andern vollständigen Lösungen der ersten unterschieden wird. Aber wir haben gesehen, dass *jede* vollständige Lösung dieser ersten durchaus hinreichend ist, um die sämmtlichen vollständigen Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen der Bewegung zu finden.

Ich weiss daher nicht, warum Hamilton, um die vollständigen Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen angeben zu können, die Erfindung einer Function S von $6n+1$ Variabeln, nämlich den $3n$ Grössen x_i, y_i, z_i, den $3n$ Grössen a_i, b_i, c_i und der Grösse t fordert, welche zu gleicher Zeit den *beiden* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i}\right)^2\right] = U_0$$

Genüge leistet, während es, wie wir gesehen haben, vollkommen hinreicht, irgend eine Function der $3n+1$ Grössen t, x_i, y_i, z_i zu kennen, welche der einen Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U$$

Genüge leistet, und ausser einer mit ihr durch Addition verbundenen noch $3n$ andere willkürliche Constanten enthält. Hamilton scheint mir dadurch seine schöne Entdeckung in ein falsches Licht gesetzt zu haben, ausserdem dass sie dadurch zu gleicher Zeit unnöthig complicirt und beschränkt wird. Auch ist hier der Uebelstand, dass, da man eine Function nicht durch zwei partielle Differentialgleichungen definiren kann, denen sie gleichzeitig genügen soll, ohne zu beweisen, dass eine solche Function auch wirklich möglich ist, sein Theorem, wie er es ausgesprochen hat, nicht an sich, sondern nur mit dem Beweise, den er liefert, verständlich sein kann. Wenn dadurch, dass er gerade diese besondere Function S nimmt, die willkürlichen Constanten die Anfangswerthe der Coordinaten und der nach den Coordinaten-Axen zerlegten Geschwindigkeiten werden, so hat dies kein wesentliches Interesse, da die Einführung dieser Constanten die Form der Integralgleichungen in der Regel complicirter macht, man auch die vollständigen Integralgleichungen aus jeder andern Form in diese bringen kann. Vielleicht ist auch Hamilton dadurch, dass er immer gleichzeitig zwei partielle Differentialgleichungen vor Augen hat, verhindert worden, die allgemeinen Vorschriften, welche Lagrange in den Vorlesungen über die Functionenrechnung für die Integration einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabeln giebt, auf sein Theorem anzuwenden, wodurch ihm, wie ich in einer andern Abhandlung zeigen werde, Resultate von grösster Wichtigkeit für die Mechanik entgangen sind. Ich bemerke noch, dass die Forderung, dass die Function S, nachdem sie der ersten partiellen Differentialgleichung genügt, noch der zweiten genügen solle, auch noch dadurch eine Beschränkung herbeiführt, dass sie den Fall ausschliesst, wo die Kräftefunction U die Zeit t auch explicite enthält, weil für diesen die zweite partielle Differentialgleichung nicht mehr gültig ist.

5.

Man kann der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, durch welche man das System der Differentialgleichungen der Bewegung ersetzt hat, verschiedene Formen geben, indem man theils für die zu suchende Function eine andere nimmt, theils die Variabeln ändert. Hamilton hat mehrere Beispiele hiervon gegeben, von denen ich hier nur eines auseinandersetzen werde, weil die übrigen von geringerem Interesse zu sein scheinen.

Es sei:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i[x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2]-U = H.$$

Wenn U nicht t explicite enthält, also der Satz von der lebendigen Kraft gilt, so hat man

$$H = h,$$

wo h eine Constante. Es sei die Function S nach der von Hamilton gegebenen Definition bestimmt, und zu dem oben gegebenen Ausdruck von $\partial' S$ noch $\frac{\partial S}{\partial t}dt$ hinzugefügt, so hat man das vollständige Differential von S, wenn man allen $6n+1$ Grössen t, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, die es enthält, unendlich kleine von einander unabhängige Incremente giebt. Da wir

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

fanden, so wird, wenn man sich der Charakteristik der Variationsrechnung bedient, diese vollständige Variation von S:

$$\begin{aligned}\delta S = -H\delta t+\Sigma m_i[x_i'\delta x_i+y_i'\delta y_i+z_i'\delta z_i]\\ -\Sigma m_i[a_i'\delta a_i+b_i'\delta b_i+c_i'\delta c_i].\end{aligned}$$

Man setze

$$V = S+H.t,$$

so folgt aus der vorstehenden Variation von S der Ausdruck der Variation von V:

$$\begin{aligned}\delta V = t\delta H+\Sigma m_i(x_i'\delta x_i+y_i'\delta y_i+z_i'\delta z_i]\\ -\Sigma m_i(a_i'\delta a_i+b_i'\delta b_i+c_i'\delta c_i].\end{aligned}$$

Denkt man sich vermittelst der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right]-U = H$$

die Grösse t aus S eliminirt, so wird S und mithin auch V eine Function von H, den $3n$ Grössen x_i, y_i, z_i und den $3n$ Grössen a_i, b_i, c_i, und die vorstehende Gleichung giebt den Ausdruck von δV durch die Variation dieser $6n+1$ Grössen. Betrachtet man daher V als Function von H, den Coordinaten x_i, y_i, z_i und ihren Anfangswerthen a_i, b_i, c_i, so werden die partiellen Differentialquotienten von V, nach diesen Grössen genommen:

$$\frac{\partial V}{\partial H} = t,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i x_i', \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = -m_i a_i',$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i y_i', \quad \frac{\partial V}{\partial b_i} = -m_i b_i',$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i z_i', \quad \frac{\partial V}{\partial c_i} = -m_i c_i'.$$

Diese Werthe geben die partielle Differentialgleichung:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U+H,$$

wo man, wenn U auch t explicite enthält, in U für t die partielle Ableitung $\frac{\partial V}{\partial H}$ zu setzen hat. Wenn aber, wie es insgemein der Fall ist, U nicht t explicite enthält, sondern eine blosse Function der Coordinaten ist, so enthält die partielle Differentialgleichung die partielle Ableitung von U, nach H genommen, gar nicht, weshalb H bei ihrer Integration als Constante betrachtet wird.

Wenn U nicht t explicite enthält, also H eine Constante ist, so hat man, wenn man für S die Hamiltonsche Function nimmt,

$$V = S+Ht = \int_0^t [H+\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)+U]dt,$$

oder da

$$H = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)-U,$$

wird

$$V=\int_0^t \Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)dt = 2Ht+2\int_0^t U dt.$$

In demselben Falle, wo H eine Constante ist, erhält man für $t=0$ auch

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2+b_i'^2+c_i'^2) = U_0+H$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial b_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{dc_i}\right)^2\right] = U_0+H,$$

welches eine zweite partielle Differentialgleichung ist, welcher die Function V Genüge leistet. Hamilton definirt die Function V durch diese *beiden* partiellen Differentialgleichungen: aber um die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung zu finden, reicht es wieder vollkommen hin, wenn man nur irgend ein vollständiges Integral V der ersteren kennt.

Wenn nämlich U die Grösse t explicite enthält, so betrachte man irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U+H,$$

wo, wie erwähnt, in U für t zu setzen ist $\frac{\partial V}{\partial H}$. Solche Lösung wird, da hier $3n+1$ unabhängige Variabeln sind, ausser einer mit V durch Addition verbundenen Constante noch $3n$ andere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3n}$ enthalten. Die $3n$ endlichen vollständigen Integrale des Systems von $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

mit $6n$ willkürlichen Constanten, werden dann:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n}}=\beta_{3n},$$

wo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{3n}$ die neuen $3n$ willkürlichen Constanten sind; die $3n$ Zwischenintegrale mit nur $3n$ willkürlichen Constanten werden ferner:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=m_ix_i',\quad \frac{\partial V}{\partial y_i}=m_iy_i',\quad \frac{\partial V}{\partial z_i}=m_iz_i'.$$

Die Grösse H kann man in diesen Gleichungen vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial H} = t$$

durch t ersetzen. Der Beweis hiervon ist ganz so, wie der für die Function S geführte.

Wenn aber die Function U nicht t explicite enthält, so enthält die partielle Differentialgleichung eine unabhängige Variable weniger, weil H in diesem Falle eine Constante h wird; die Zahl der willkürlichen Constanten einer vollständigen Lösung ist daher, ausser der mit V durch Addition verbundenen, nur $3n-1$, die wir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3n-1}$ nennen wollen. *Die $3n$ endlichen vollständigen Integralgleichungen der Bewegung werden dann:*

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n-1}}=\beta_{3n-1},$$

zu denen man noch die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t+\tau$$

zu fügen hat, wo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{3n-1}, \tau$ neue $3n$ willkürliche Constanten sind, so dass hier wieder $6n$ willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3n-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{3n-1}, h, \tau$ gefunden werden; die $3n$ Zwischenintegrale endlich werden wieder:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=m_ix_i',\quad \frac{\partial V}{\partial y_i}=m_iy_i',\quad \frac{\partial V}{\partial z_i}=m_iz_i'.$$

Der Beweis, der hier etwas modificirt werden muss, ist, wie folgt.

Die Differentiation der Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n-1}}=\beta_{3n-1}$$

giebt folgende $3n-1$ Gleichungen:

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial x_i}x_i'+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial y_i}y_i'+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial z_i}z_i'\right)=0,$$
$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial x_i}x_i'+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial y_i}y_i'+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial z_i}z_i'\right)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_{3n-1}\partial x_i}x_i'+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_{3n-1}\partial y_i}y_i'+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_{3n-1}\partial z_i}z_i'\right)=0,$$

durch welche, da in ihnen kein Term vorkommt, welcher nicht in eine der $3n$ Grössen x_i', y_i', z_i' multiplicirt ist, die Verhältnisse dieser $3n$ Grössen bestimmt werden. Differentiirt man die gegebene partielle Differentialgleichung

$$\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U+h$$

nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3n-1}$, so erhält man die $3n-1$ Gleichungen:

$$\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial y_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial z_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}\right]=0,$$

$$\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial y_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial z_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}\right]=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_{3n-1}\partial x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_{3n-1}\partial y_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_{3n-1}\partial z_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}\right]=0.$$

Vergleicht man diese $3n-1$ Gleichungen mit den vorigen $3n-1$ Gleichungen, so sieht man zunächst, dass die $3n$ Grössen x_i', y_i', z_i' sich respective wie die $3n$ Grössen $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}$ verhalten. Differentiirt man nun ferner die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial h}=t+\tau,$$

so erhält man:

$$\Sigma\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h\partial x_i}x_i'+\frac{\partial^2 V}{\partial h\partial y_i}y_i'+\frac{\partial^2 V}{\partial h\partial z_i}z_i'\right]=1,$$

und wenn man die gegebene partielle Differentialgleichung partiell nach h differentiirt:

$$\Sigma\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h\partial x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial h\partial y_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial h\partial z_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}\right]=1.$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen mit einander, so sieht man, dass, wenn sich, wie bewiesen worden, die $3n$ Grössen x_i', y_i', z_i' respective wie die $3n$ Grössen $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}$ verhalten, die $3n$ Grössen x_i', y_i', z_i' den $3n$ Grössen $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}$ auch respective gleich sein müssen, welches die $3n$ Gleichungen giebt:

$$x_i'=\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i},\quad y_i'=\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i},\quad z_i'=\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Differentiirt man diese Gleichungen aufs neue, und setzt in den Ableitungen für x_i', y_i', z_i' die vorstehenden Werthe, so erhält man:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial y_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial z_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_k}\right],$$

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y_i\partial x_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial y_i\partial y_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial y_i\partial z_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_k}\right],$$

$$m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial z_i\partial x_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial z_i\partial y_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial z_i\partial z_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_k}\right],$$

in welchen Summen i unverändert bleibt, während k die Werthe $1, 2, \ldots, n$ erhält. Die Ausdrücke rechter Hand sind hier die partiellen Differentialquotienten des Ausdrucks

$$\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_k}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_k}\right)^2\right]=U+h,$$

nach x_i, y_i, z_i genommen. Man kann daher dafür die einfacheren Ausdrücke setzen:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

welches die zu beweisenden Gleichungen sind.

In den Anwendungen scheint die Function S dann vorzugsweise brauchbar, wenn die Kräftefunction U die Zeit t auch explicite involvirt. Dagegen bietet die Function V und die gleichzeitige Einführung der Grösse H statt der Zeit t grosse Vortheile in dem häufiger vorkommenden Fall, wo U eine blosse Function der Coordinaten ist. Denn da in diesem letzteren Falle vermittelst des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft H eine Constante wird, so enthält die partielle Differentialgleichung eine Variable, und die zu suchende vollständige Lösung eine willkürliche Constante weniger. Die Function V, welche **Hamilton** zur Erfindung der vollständigen Integralgleichungen der Bewegung fordert, und welche gleichzeitig zweien partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen muss, hat daher hier noch den wesentlichen Nachtheil, dass sie eine Grösse mehr als nöthig ist enthält, nämlich ausser h und den $3n$ Coordinaten *noch ihre* $3n$ *Anfangswerthe*, während man nur irgend eine Lösung der einen partiellen Differentialgleichung braucht, welche ausser h und den $3n$ Coordinaten $3n-1$ willkürliche Constanten enthält.

6.

Wenn die Kräftefunction die Zeit t nicht explicite enthält, so kann man aus den Differentialgleichungen der Bewegung die Grösse t leicht herausschaffen, indem man sie als ein System von $6n-1$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den $6n$ Variabeln x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' darstellt. Nennt man nämlich $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}$ die Coordinaten der n Punkte, $q_1', q_2', \ldots, q_{3n}'$ ihre nach den Coordinaten-Axen zerlegten und respective mit ihrer Masse multiplicirten Geschwindigkeiten, so kann man die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

durch die Proportion darstellen:

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_{3n} : dq'_1 : dq'_2 : \ldots : dq'_{3n} =$$
$$\frac{1}{\mu_1} q'_1 : \frac{1}{\mu_2} q'_2 : \ldots : \frac{1}{\mu_{3n}} q'_{3n} : \frac{\partial U}{\partial q_1} : \frac{\partial U}{\partial q_2} : \ldots : \frac{\partial U}{\partial q_{3n}},$$

wo von den Grössen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{3n}$ je drei, die sich auf Coordinaten *eines* Punktes beziehen, der Masse dieses Punktes gleich zu setzen sind. Diese Proportion vertritt die Stelle von $6n-1$ Gleichungen; die Zahl dieser Gleichungen, so wie die der Variabeln, kann aber noch um eine verringert werden, wenn man durch den im gedachten Falle geltenden Satz der lebendigen Kraft:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} q_1'^2 + \frac{1}{\mu_2} q_2'^2 + \cdots + \frac{1}{\mu_{3n}} q_{3n}'^2\right) = U+h$$

eine der Variabeln eliminirt. Hat man diese Gleichungen vollständig integrirt, und dadurch alle $6n$ Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}, q'_1, q'_2, \ldots, q'_{3n}$ durch eine von ihnen, z. B. q_1, ausgedrückt, so erhält man schliesslich die Zeit durch eine Quadratur vermittelst der Gleichungen:

$$dt = \mu_1 \frac{dq_1}{q'_1}, \quad t = \mu_1 \int \frac{dq_1}{q'_1}.$$

Um die von Hamilton angegebene Function V zu finden, braucht man diese Quadratur nicht auszuführen, sondern erhält sie, ohne t zu kennen, unmittelbar durch eine Quadratur, wenn man die $6n$ Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}, q'_1, q'_2, \ldots, q'_{3n}$ durch eine von ihnen ausgedrückt hat. Man kann nämlich die Function

$$V = \int_0^t \Sigma m_i [x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2]\, dt = \int_0^t \left(\frac{1}{\mu_1} q_1'^2 + \frac{1}{\mu_2} q_2'^2 + \cdots + \frac{1}{\mu_{3n}} q_{3n}'^2\right) dt$$

auch so darstellen:

$$V = \int (q'_1 dq_1 + q'_2 dq_2 + \cdots + q'_{3n} dq_{3n}),$$

aus welchem Ausdruck t ganz herausgegangen ist. Wenn q_1^0 den Werth von q_1 für $t=0$ bedeutet, so dass

$$t = \int_{q_1^0}^{q_1} \frac{\mu_1 dq_1}{q'_1},$$

so hat man das Integral für V ebenfalls so zu nehmen, dass es für $q_1 = q_1^0$ verschwindet.

Das für t angegebene Integral ist die partielle Ableitung des für V gefundenen, nach h genommen, wie sich aus der Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t$$

ergiebt. Durch solche partielle Differentiation eines Integrals nach einer Constanten kommt man in der Regel wieder auf ein neues Integral. Es giebt aber einen sehr bemerkenswerthen Fall, welcher auch unter andern der Fall des Weltsystems ist, in welchem beide Integrale t und V unmittelbar auf einander zurückgeführt werden können. Dies ist der Fall, wenn die Kräftefunction eine *homogene* Function der Coordinaten ist.

Es sei die Kräftefunction U eine Function der $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i von der Dimension ε, so hat man bekanntlich:

$$\Sigma\left[x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i}\right] = \varepsilon U,$$

und daher vermittelst der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\Sigma m_i \left[x_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + y_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + z_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\right] = \varepsilon U.$$

Der Ausdruck linker Hand wird ein vollständiges Differential, wenn man dazu die lebendige Kraft

$$\Sigma m_i \left[\frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \cdot \frac{dy_i}{dt} + \frac{dz_i}{dt} \cdot \frac{dz_i}{dt}\right] = 2U + 2h$$

addirt. Man erhält dann durch Integration von $t=0$ bis $t=t$:

$$\Sigma m_i [x_i x'_i + y_i y'_i + z_i z'_i] - \Sigma m_i [a_i a'_i + b_i b'_i + c_i c'_i] = (2+\varepsilon) \int_0^t U dt + 2ht.$$

Es ist aber andrerseits:

$$V = \int_0^t \Sigma m_i [x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2]\, dt = 2\int_0^t U dt + 2ht,$$

und daher

$$\Sigma m_i [x_i x'_i + y_i y'_i + z_i z'_i] - \Sigma m_i [a_i a'_i + b_i b'_i + c_i c'_i] = \frac{2+\varepsilon}{2} \cdot V - \varepsilon ht,$$

welches die Gleichung ist, vermittelst welcher die Functionen V und t auf einander zurückgeführt werden. Man kann aus dieser Formel, da der Theil linker Hand ein vollständiges Differential ist, auch noch das abermalige Integral

$$\int V dt$$

finden. Setzt man

$$R = \Sigma m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2), \quad R' = \frac{dR}{dt},$$

und nennt R_0, R'_0 die Anfangswerthe von R, R', so kann man die vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$R'-R'_0 = (2+\varepsilon)V-2\varepsilon ht,$$

woraus durch Integration:

$$R-R_0-R'_0t = (2+\varepsilon)\int_0^t Vdt-\varepsilon ht^2.$$

Für den Fall des Weltsystems ist die Kräftefunction U von der Dimension -1, und daher $\varepsilon = -1$. Man hat daher für diesen Fall:

$$R'-R'_0 = V+2ht.$$

Wenn die Kräftefunction von der Dimension -2 ist, so kann man vermittelst der vorstehenden Formeln nicht mehr die Function V auf die Function t zurückführen, weil dann $\varepsilon = -2$, und daher der in V multiplicirte Term verschwindet. In diesem besonderen Falle hat man aber zwei neue Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$R'-R'_0 = 4ht, \quad R-R_0-R'_0t = 2ht^2,$$

welche zwei willkürliche Constanten R_0, R'_0 enthalten. Es ist dies der Fall, wenn das System materieller Punkte gegenseitigen Anziehungen unterworfen ist, die sich wie die Kuben der Distanzen verhalten.

Setzt man für t den Ausdruck

$$t = \frac{\partial V}{\partial h},$$

so hat man nach den obigen Formeln:

$$R'-R'_0 = (2+\varepsilon)V-2\varepsilon h\frac{\partial V}{\partial h},$$

woraus durch Integration nach h:

$$\int h^{-\frac{2+3\varepsilon}{2\varepsilon}}(R'-R'_0)dh = -2\varepsilon h^{-\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}}V+K,$$

wo K eine von h unabhängige Grösse ist. Kennt man daher V für einen speciellen Werth von h, z. B. für $h=0$, so kann man V auch durch Integration nach h finden. Ist $\varepsilon = -1$, so wird die obige Formel:

$$\int(R'-R'_0)\frac{dh}{\sqrt{h}} = 2\sqrt{h}.V+K.$$

Es muss hier $R'-R'_0$ durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten und durch h ausgedrückt, und bei der Integration bloss h als variabel gesetzt werden.

Ich will bei dieser Gelegenheit noch folgende Bemerkungen hinzufügen. Man erhält aus den obigen Formeln die zweite Ableitung von R, nach der Zeit genommen, durch die Kräftefunction ausgedrückt vermittelst der Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2R}{dt^2} = (2+\varepsilon)U+2h,$$

oder wenn $\varepsilon = -1$,

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2R}{dt^2} = U+2h.$$

Nach einer bekannten, von Lagrange öfters angewandten algebraischen Umformung kann, wenn M die Summe der Massen, X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunktes bedeuten, oder

$$MX = \Sigma m_ix_i, \quad MY = \Sigma m_iy_i, \quad MZ = \Sigma m_iz_i,$$

die Grösse MR folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} MR &= \Sigma m_i.\Sigma m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2) \\ &= \Sigma m_im_k[(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2]+M^2(X^2+Y^2+Z^2), \end{aligned}$$

oder, wenn $r_{i,k}$ die Distanz der Massen m_i und m_k bedeutet,

$$MR = \Sigma m_im_kr_{i,k}^2+M^2(X^2+Y^2+Z^2),$$

wo man die Summe auf je zwei Punkte des Systems auszudehnen hat. Der Schwerpunkt eines Systems von Körpern, welche nur ihren gegenseitigen Anziehungen unterworfen sind, bewegt sich gleichförmig in einer geraden Linie, so dass

$$X = \alpha t+\beta, \quad Y = \alpha't+\beta', \quad Z = \alpha''t+\beta''.$$

Man erhält daher für diesen Fall, wenn

$$\gamma^2 = \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2,$$

vermittelst der angegebenen Umformung von MR die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_im_kr_{i,k}^2}{dt^2} = MU+2Mh-M^2\gamma^2,$$

wo γ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes bedeutet. Substituirt man den für das Newtonsche Attractionsgesetz stattfindenden Ausdruck der Kräftefunction U, wie wir ihn oben gegeben haben, so hat man:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_im_kr_{i,k}^2}{Mdt^2} = \Sigma\frac{m_im_k}{r_{i,k}}+2h-M\gamma^2$$

oder, da nach dem Satze von der lebendigen Kraft

$$\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)-2\Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}} = 2h,$$

die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{M dt^2} = \Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)-M\gamma^2-\Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{1}{M}\,\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2 = \Sigma m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-M(X^2+Y^2+Z^2)$$

ist gleich der Summe der Massen des Systems, respective multiplicirt in das Quadrat ihrer Distanz von seinem Schwerpunkt. Man beweist dies aus der vorstehenden Gleichung, indem man den Anfangspunkt der Coordinaten im Schwerpunkt annimmt, wodurch $X = Y = Z = 0$. Eben so beweist man, dass

$$\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)-M\gamma^2$$

die relative lebendige Kraft um den Schwerpunkt ist, d. i. die Summe der Massen des Systems, respective multiplicirt in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit um seinen Schwerpunkt. Wenn das System stabil ist, so darf der Ausdruck:

$$\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2,$$

während t ins Unendliche wächst, weder unendlich noch 0 werden; woraus leicht folgt, dass seine zweite Ableitung von keiner Zeit an immer dasselbe Zeichen behalten darf. Die beiden Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{M dt^2} = \Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}}+2h-M\gamma^2 = \Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)-M\gamma^2-\Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}}$$

lehren also, dass, wenn die Bewegung um den Schwerpunkt des Systems stabil sein soll, 1) *die Constante* $2h-M\gamma^2$ *negativ sein muss*, d. h. weil

$$2h-M\gamma^2 = \Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)-M\gamma^2-2\Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}},$$

dass die relative lebendige Kraft um den Schwerpunkt immer kleiner bleiben muss, als die doppelte Kräftefunction; 2) *dass die relative lebendige Kraft um den Schwerpunkt abwechselnd immer grösser und kleiner werden muss, als die Kräftefunction; dass die Kräftefunction sowohl als die relative lebendige Kraft abwechselnd grösser und kleiner werden muss als die Constante* $M\gamma^2-2h$.

Wenn man die lebendige Kraft und die Kräftefunction in Reihen nach den Cosinus und Sinus von der Zeit proportionalen Winkeln entwickelt, so muss,

wenn das System stabil sein soll, die Constante $M\gamma^2-2h$ der wahre constante Term in beiden Reihen sein. Denn ein von diesem verschiedener Werth des constanten Termes würde in dem Ausdruck von

$$\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2$$

Terme erzeugen, die in das Quadrat der Zeit multiplicirt sind, und daher mit der Zeit in's Unendliche wachsen.

7.

Um das Vorhergehende an einem Beispiel zu erläutern, will ich die Function V für einen einfachen und vielbehandelten Fall, die elliptische Bewegung eines Planeten angeben. Da man nach dem sogenannten Lambertschen Theorem den Ausdruck der Zwischenzeit t durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten kennt, so kann man dem vorigen §. zufolge auch den Ausdruck für V sogleich ohne eine neue Integration daraus finden. Es sei r der *radius vector*, $r' = \frac{dr}{dt}$, E die excentrische Anomalie, r_0, r_0', E_0 die Anfangswerthe von r, r', E; es sei ferner k^2 die anziehende Kraft für den Abstand $r = 1$, e die Excentricität, a die halbe grosse Axe. Setzt man mit Gauss (*Theoria motus art.* 106)

$$\frac{E-E_0}{2} = g,\quad \frac{E+E_0}{2} = G,$$

und führt einen neuen Hülfswinkel h vermittelst der Gleichung

$$e\cos G = \cos h$$

ein; setzt man ferner:

$$h+g = \varepsilon,\quad h-g = \varepsilon',$$

so wird der Ausdruck der Zwischenzeit:

$$\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\,t = \varepsilon-\sin\varepsilon-(\varepsilon'-\sin\varepsilon').$$

Der Satz von der lebendigen Kraft giebt:

$$\tfrac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2) = k^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right),$$

so dass die obige Constante h hier $\frac{-k^2}{2a}$ und $\frac{k^2}{r}$ die Kräftefunction U ist. Setzt man daher in der im vorigen §. gefundenen Formel

$$R'-R_0' = V+2ht$$

für R, h ihre Werthe

$$R = r^2,\quad h = \frac{-k^2}{2a},$$

so erhält man

$$V = 2(rr'-r_0r'_0)+\frac{k^2}{a}t.$$

Ich habe hier in den Ausdrücken von V, R, h die Masse des bewegten Planeten, die eigentlich als Factor diese Grössen afficirt, da sie aus der Rechnung herausgeht, fortgelassen.

Die bekannten Formeln der elliptischen Bewegung geben

$$rr' = k\sqrt{a}.e\sin E,$$

und daher

$$\begin{aligned} rr'-r_0r'_0 &= k\sqrt{a}.e(\sin E-\sin E_0) \\ &= 2k\sqrt{a}.e\sin g\cos G = 2k\sqrt{a}.\sin g\cos h = k\sqrt{a}(\sin\varepsilon-\sin\varepsilon'). \end{aligned}$$

Benutzt man diesen Ausdruck und den Lambertschen Ausdruck der Zeit t, so erhält man für V einen ganz ähnlichen Ausdruck, wie für t,

$$V = k\sqrt{a}[\varepsilon+\sin\varepsilon-(\varepsilon'+\sin\varepsilon')],$$

welcher sich von dem Ausdrucke von $\frac{k^2}{a}t$ nur in dem Zeichen der Sinus unterscheidet. Nennt man ϱ die Sehne der Bahn, welche den Anfangs- und Endpunkt verbindet, so hat man nach den von Gauss am angeführten Orte gegebenen Formeln:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r+r_0+\varrho}{4a},\quad \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r+r_0-\varrho}{4a},$$

wo

$$\begin{aligned} r^2 = x^2+y^2+z^2,\quad r_0^2 &= x_0^2+y_0^2+z_0^2, \\ \varrho^2 &= (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2. \end{aligned}$$

Vermittelst dieser Formeln wird V, so wie t, durch die Coordinaten des Anfangspunktes und Endpunktes und die grosse Axe ausgedrückt. Der hier gegebene Ausdruck von V kommt mit demjenigen überein, welchen Hamilton auf anderm Wege gefunden hat.

Wenn man in dem angegebenen Ausdruck von V alle Grössen ausser k und a variirt, so erhält man

$$\delta V = 2k\sqrt{a}[\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon-\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon'.\delta\varepsilon'].$$

Es ist aber

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon = \frac{\delta r+\delta r_0+\delta\varrho}{4a},\quad \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon'\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon'.\delta\varepsilon' = \frac{\delta r+\delta r_0-\delta\varrho}{4a}.$$

Bemerkt man daher die Gleichung:

$$\begin{aligned} \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon-\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon' &= -\frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon')}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'} = \frac{-\sin g}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'}, \\ \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon+\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon' &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon')}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'} = \frac{\sin h}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'}, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\delta V = \frac{k[\sin h.\delta\varrho-\sin g.(\delta r+\delta r_0)]}{2\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'}.$$

Für den Nenner kann man in diesem Ausdruck zufolge der obigen Formeln auch setzen:

$$2\sqrt{a}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\sqrt{(r+r_0)^2-\varrho^2}}{2\sqrt{a}}.$$

Führt man in diese Formel den von beiden *radii vectores* r und r_0 gebildeten Winkel ein, den wir mit Gauss $2f$ nennen wollen, so hat man:

$$r^2+r_0^2-\varrho^2 = 2rr_0\cos 2f,$$

und daher

$$2\sqrt{a}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\cos f}{\sqrt{a}}\sqrt{rr_0}.$$

Hiernach erhalten wir für die Variation von V den Ausdruck:

$$\delta V = \frac{k\sqrt{a}[\sin h.\delta\varrho-\sin g.(\delta r+\delta r_0)]}{\cos f\sqrt{rr_0}},$$

in welcher Formel man auch einen der Winkel g, h durch den andern vermittelst der Gleichung

$$\varrho = 2a\sin g\sin h,$$

welche sich aus den obigen Formeln leicht ableitet, ersetzen kann.

Der vorstehende Ausdruck der Variation von V ergiebt sogleich die Werthe der nach den Coordinaten-Axen zerlegten Geschwindigkeiten des Anfangs- und Endpunktes. Man erhält nämlich, wenn man ϱ, r, r_0 durch die Coordinaten ausdrückt:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{x-x_0}{\varrho}\sin h-\frac{x}{r}\sin g\right], \\ y' &= \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{y-y_0}{\varrho}\sin h-\frac{y}{r}\sin g\right], \\ z' &= \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{z-z_0}{\varrho}\sin h-\frac{z}{r}\sin g\right], \end{aligned}$$

$$x_0' = -\frac{\partial V}{\partial x_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{x-x_0}{\varrho}\sin h + \frac{x_0}{r_0}\sin g\right],$$

$$y_0' = -\frac{\partial V}{\partial y_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{y-y_0}{\varrho}\sin h + \frac{y_0}{r_0}\sin g\right],$$

$$z_0' = -\frac{\partial V}{\partial z_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{z-z_0}{\varrho}\sin h + \frac{z_0}{r_0}\sin g\right].$$

Nennt man b die halbe kleine Axe, und bemerkt die von Gauss ebenfalls gegebene Gleichung:

$$b\sin g = \sin f\sqrt{rr_0},$$

und setzt den halben Parameter $\frac{b^2}{a} = p$, so leitet man aus diesen Formeln auch noch leicht die folgenden ab:

$$x' - x_0' = -\frac{k\tan g f}{\sqrt{p}}\left(\frac{x}{r} + \frac{x_0}{r_0}\right),$$

$$y' - y_0' = -\frac{k\tan g f}{\sqrt{p}}\left(\frac{y}{r} + \frac{y_0}{r_0}\right),$$

$$z' - z_0' = -\frac{k\tan g f}{\sqrt{p}}\left(\frac{z}{r} + \frac{z_0}{r_0}\right),$$

und hieraus nach einigen Reductionen

$$\sqrt{[(x'-x_0')^2+(y'-y_0')^2+(z'-z_0')^2]} = \frac{2k\sin f}{\sqrt{p}},$$

welche Formeln ich ihrer Einfachheit wegen hinzugefügt habe. Ich bemerke noch, dass die Grössen $\frac{x}{r}+\frac{x_0}{r_0}$, $\frac{y}{r}+\frac{y_0}{r_0}$, $\frac{z}{r}+\frac{z_0}{r_0}$ gleich sind der Grösse $2\cos f$, multiplicirt in die Cosinus der Winkel, welche die den Winkel der *radii vectores* halbirende Linie mit den Coordinaten-Axen bildet.

Den für V gefundenen Ausdruck kann man vermittelst der Gleichung

$$t = \frac{\partial V}{\partial h} = -\frac{\partial V}{\partial \frac{k^2}{2a}} = \frac{2a^2}{k^2}\cdot\frac{\partial V}{\partial a}$$

prüfen. Nimmt man die partiellen Ableitungen nach a, so erhält man aus dem Ausdrucke

$$V = k\sqrt{a}[\varepsilon+\sin\varepsilon-(\varepsilon'+\sin\varepsilon')]$$

die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 2k\sqrt{a}\left[\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial a} - \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon'\cdot\frac{\partial\varepsilon'}{\partial a}\right] + \frac{1}{2a}V.$$

Aus den Gleichungen

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r+r_0+\varrho}{4a},\quad \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r+r_0-\varrho}{4a}$$

folgt aber:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial a} = \frac{-\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{a},\quad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon'\cdot\frac{\partial\varepsilon'}{\partial a} = \frac{-\sin\frac{1}{2}\varepsilon'}{a},$$

wodurch die vorige Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{-k}{\sqrt{a}}(\sin\varepsilon-\sin\varepsilon') + \frac{V}{2a} = \frac{k}{2\sqrt{a}}[\varepsilon-\varepsilon'-(\sin\varepsilon-\sin\varepsilon')] = \frac{k^2}{2a^2}t,$$

was zu beweisen war.

Die partielle Differentialgleichung, auf deren vollständige Integration die Bewegung eines sich gegenseitig anziehenden und von festen Punkten angezogenen Systems von Punkten zurückgeführt werden kann, war

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U+h.$$

Für unsern Fall folgt hieraus die partielle Differentialgleichung, auf deren vollständige Integration die Bewegung eines Planeten um die Sonne zurückkommt:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = k^2\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{2a}\right] = k^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right).$$

Ich will jetzt zeigen, dass der für V angegebene Ausdruck in der That dieser partiellen Differentialgleichung Genüge leistet.

Benutzt man nämlich die oben für $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ gefundenen Werthe, und bemerkt die Gleichungen:

$$x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0) = r^2 - rr_0\cos 2f,\quad \sin g\sin h = \frac{\varrho}{2a},$$

so erhält man

$$\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = \frac{k^2 a}{\cos^2 f.rr_0}\left[\sin^2 h+\sin^2 g-\frac{r-r_0\cos 2f}{a}\right].$$

Es ist aber

$$\sin^2 h+\sin^2 g = 2\left[\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{\varepsilon'}{2}+\sin^2\frac{\varepsilon'}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$= 2\left[\sin^2\frac{\varepsilon}{2}+\sin^2\frac{\varepsilon'}{2}\right]-4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin^2\frac{\varepsilon'}{2},$$

oder nach den oben angegebenen Formeln:

$$\sin^2 h+\sin^2 g = \frac{r+r_0}{a}-\frac{\cos^2 f.rr_0}{a^2},$$

und daher

$$a(\sin^2 h+\sin^2 g)-(r-r_0\cos 2f) = r_0\cos^2 f\left[2-\frac{r}{a}\right],$$

wodurch man erhält:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = k^2\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right],$$

wie verlangt wurde. Gleichzeitig sehen wir auf diese Weise, dass die für x', y', z' gegebenen Werthe der Gleichung für die lebendige Kraft genügen.

Für die parabolische Bewegung verschwindet die Constante, die im Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft zur Kräftefunction hinzukommt, oder es wird $a=\infty$. Die Winkel ε, ε', h, g werden unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Man erhält daher für diesen Fall aus den obigen Formeln:

$$\sqrt{a}.\varepsilon = \sqrt{r+r_0+\varrho}, \qquad \sqrt{a}.\varepsilon' = \sqrt{r+r_0-\varrho},$$

ferner

$$\sqrt{a^3}.[\varepsilon-\sin\varepsilon] = \tfrac{1}{6}.\sqrt{a^3}.\varepsilon^3 = \tfrac{1}{6}[r+r_0+\varrho]^{\frac{3}{2}},$$
$$\sqrt{a^3}.[\varepsilon'-\sin\varepsilon'] = \tfrac{1}{6}.\sqrt{a^3}.\varepsilon'^3 = \tfrac{1}{6}[r+r_0-\varrho]^{\frac{3}{2}},$$

wodurch die für V und t angegebenen Ausdrücke folgende Form annehmen:

$$V = 2k[\sqrt{r+r_0+\varrho}-\sqrt{r+r_0-\varrho}],$$
$$t = \frac{1}{6k}\left[(r+r_0+\varrho)^{\frac{3}{2}}-(r+r_0-\varrho)^{\frac{3}{2}}\right],$$

welches letztere der bekannte Ausdruck der Zeit in der parabolischen Bewegung eines Kometen ist. Setzt man der Kürze halber:

$$\frac{1}{\sqrt{r+r_0-\varrho}}+\frac{1}{\sqrt{r+r_0+\varrho}} = A, \qquad \frac{1}{\sqrt{r+r_0-\varrho}}-\frac{1}{\sqrt{r+r_0+\varrho}} = B,$$

so erhält man hieraus:

$$x' = \frac{\partial V}{\partial x} = k\left[\frac{x-x_0}{\varrho}A-\frac{x}{r}B\right], \quad x_0' = -\frac{\partial V}{\partial x_0} = k\left[\frac{x-x_0}{\varrho}A+\frac{x_0}{r_0}B\right],$$
$$y' = \frac{\partial V}{\partial y} = k\left[\frac{y-y_0}{\varrho}A-\frac{y}{r}B\right], \quad y_0' = -\frac{\partial V}{\partial y_0} = k\left[\frac{y-y_0}{\varrho}A+\frac{y_0}{r_0}B\right],$$
$$z' = \frac{\partial V}{\partial z} = k\left[\frac{z-z_0}{\varrho}A-\frac{z}{r}B\right], \quad z_0' = -\frac{\partial V}{\partial z_0} = k\left[\frac{z-z_0}{\varrho}A+\frac{z_0}{r_0}B\right].$$

Hamilton giebt den Ausdrücken von t und V noch eine besondere Form, welche ich ebenfalls hersetzen will. Da nämlich ε' aus ε erhalten wird, wenn ich $-\varrho$ statt ϱ schreibe, so kann ich den Werth von V so ausdrücken:

$$V = k\sqrt{a}\int_{-\varrho}^{+\varrho}(1+\cos\varepsilon)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho}\cdot d\varrho,$$

indem ich a, r, r_0 als constant und nur ϱ während der Integration als veränderlich annehme. Da aber

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r+r_0+\varrho}{4a},$$

so wird

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho} = \frac{1}{4a},$$

und daher

$$(1+\cos\varepsilon)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho} = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho} = \frac{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{2a\sin\frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{4a}{r+r_0+\varrho}-1}.$$

Hieraus folgt:

$$V = k\int_{-\varrho}^{+\varrho}\left[\frac{1}{r+r_0+\varrho}-\frac{1}{4a}\right]^{\frac{1}{2}}d\varrho,$$
$$t = \frac{2a^2}{k^2}\cdot\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{1}{4k}\int_{-\varrho}^{+\varrho}\left[\frac{1}{r+r_0+\varrho}-\frac{1}{4a}\right]^{-\frac{1}{2}}d\varrho,$$

welches die von Hamilton gegebenen Ausdrücke sind. Setzt man in ihnen $a=\infty$ oder negativ, so erhält man die Formeln für die parabolische oder hyperbolische Bewegung.

8.

Nachdem wir im Vorigen gesehen haben, dass für den Fall der Bewegung eines freien Systems von n materiellen Punkten, auf welche nur innere Anziehungs- oder Abstossungskräfte wirken, das System von $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch eine einzige partielle Differentialgleichung vollkommen ersetzt wird, von welcher man nur irgend eine vollständige Lösung zu kennen braucht, so fragt sich, welche Mittel die heutige Analysis zur Auffindung einer solchen Lösung besitzt, und ob durch solche Zurückführung nach den bisherigen Kenntnissen etwas gewonnen ist.

So viel mir bekannt ist, ist alles wesentliche, was man über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung weiss, in demjenigen enthalten, was Lagrange darüber in seinen Vorlesungen über die Functionenrechnung sagt, und in einer Abhandlung von Pfaff in den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften vom J. 1814. Lagrange beschränkt seine Untersuchungen auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen *drei* Variabeln, von denen eine als Function der beiden andern, welche als unabhängig betrachtet werden, zu bestimmen ist. Die Pfaffsche Methode, welche sich auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen jeder beliebigen Anzahl von Variabeln erstreckt, habe ich im zweiten Bande des Crelleschen Journals auf eine etwas mehr symmetrische und übersichtliche Art darzustellen gesucht, ohne jedoch zu derselben etwas wesentlich neues hinzuzufügen. (Cf. S. 19 dieses Bandes). Pfaff verlässt in der angeführten Abhandlung den von Lagrange eingeschlagenen Weg, dessen Verfolgung für mehr als drei Variabeln seiner Meinung nach unübersteiglichen Hindernissen unterliegt. Er betrachtet die Aufgabe unter einem ganz neuen Gesichtspunkt als einen besonderen Fall einer viel allgemeineren, deren vollständige Lösung ihm gelingt. Es sei nämlich x eine Function der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ihre nach diesen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten, so ist eine Gleichung von der Form

$$0 = \varphi(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

der allgemeinste Ausdruck einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln. Denkt man sich vermittelst dieser Gleichung p_n als Function der übrigen $2n$ Grössen $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ bestimmt, so kommt es darauf an, die zwischen diesen $2n$ Grössen statthabende Gleichung

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + p_n dx_n$$

durch ein System von n Gleichungen zu integriren. Ist nämlich x eine Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so sind auch seine nach diesen Grössen genommenen partiellen Differentialquotienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ Functionen derselben, oder es giebt zwischen den $2n+1$ Grössen $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ eine Anzahl von $n+1$ Gleichungen, von denen eine $\varphi = 0$ gegeben ist, so dass also, wenn vermittelst dieser letzteren Gleichung p_n durch die übrigen Grössen ausgedrückt wird, noch n Gleichungen zwischen den $2n$ Grössen $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ zu finden sind, welche der vorstehenden Differentialgleichung Genüge leisten müssen. Pfaff betrachtet die allgemeinste Form einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $2n$ Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$:

$$0 = X dx + X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n-1} dx_{2n-1},$$

in welcher $X, X_1, \ldots, X_{2n-1}$ beliebige Functionen dieser $2n$ Variabeln sind. Diese reducirt sich auf die vorige für den speciellen Fall, wo

$$X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots = X_{2n-1} = 0,$$

wenn man überdies statt $-\frac{X_1}{X}, -\frac{X_2}{X}, \ldots, -\frac{X_n}{X}$ die Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_n$

schreibt, von denen man $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ nebst $x, x_1, \ldots, x_n$ als die unabhängigen Variabeln betrachtet, und p_n als eine gegebene Function derselben, so dass also die Coëfficienten $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ zu gleicher Zeit die Stelle der $n-1$ unabhängigen Variabeln $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}$ vertreten. Pfaff stellt sich zunächst die Aufgabe, die $2n$ Variabeln durch eine derselben, z. B. x_{2n-1}, und durch $2n-1$ andere $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ auszudrücken, so dass, wenn man die gegebene Differentialgleichung

$$0 = X dx + X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n-1} dx_{2n-1}$$

durch diese neuen Variabeln darstellt, der in dx_{2n-1} multiplicirte Ausdruck verschwindet, und in den in die übrigen Differentiale $da_1, da_2, \ldots, da_{2n-1}$ multiplicirten Ausdrücken die Grösse x_{2n-1} selber nur in einem allen gemeinschaftlichen Factor vorkommt, wodurch sich nach geschehener Division mit diesem gemeinschaftlichen Factor die Differentialgleichung auf eine andere bloss zwischen $2n-1$ Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ reducirt. Er zeigt, dass dieses immer möglich ist, und dass man die zu machenden Substitutionen findet, wenn man ein System von $2n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den $2n$ Variabeln $x, x_1, \ldots, x_{2n-1}$, welches er aufstellt, vollständig integrirt, und die Ausdrücke der willkürlichen Constanten durch $x, x_1, \ldots, x_{2n-1}$, wie sie sich durch die $2n-1$ Integralgleichungen ergeben, für die neu einzuführenden Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ annimmt. Es ist so der merkwürdige Satz gefunden, dass sich jede lineare gewöhnliche Differentialgleichung zwischen einer geraden Zahl von Variabeln in eine andere transformiren lässt, welche nur die nächst niedrige ungerade Zahl von Variabeln enthält. Aber es lässt sich nicht eben so eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zwischen einer ungeraden Zahl von Variabeln in eine andere transformiren, welche nur die nächst niedrige gerade Zahl von Variabeln enthält, sondern es ist hierzu, wenn es möglich sein soll, eine bestimmte Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten der Differentialgleichung erforderlich. Um daher das gefundene Theorem zu einer weiteren Reduction anwenden zu können, setzt Pfaff eine der neu eingeführten Grössen, z. B. a_{2n-1}, einer Constante gleich, wodurch die Differentialgleichung eine zwischen nur $2n-2$ Variabeln wird, die er nach derselben Methode auf eine zwischen nur $2n-3$ Variabeln $b_1, b_2, \ldots, b_{2n-3}$ reducirt, von welchen er wieder eine, z. B. b_{2n-3}, einer Constante gleich setzt und die Differentialgleichung, die dann eine zwischen $2n-4$ Variabeln ist, auf eine zwischen nur $2n-5$ Variabeln $c_1, c_2, \ldots, c_{2n-5}$ reducirt, von denen er wieder eine, z. B. c_{2n-5}, einer willkürlichen Constante gleich setzt, und so fort, bis die Aufgabe schliesslich auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln zurückkommt, deren Integration wieder eine willkürliche Constante einführt. Auf diese Weise integrirt Pfaff die vorgelegte Differentialgleichung dadurch, dass er nach und nach n Ausdrücke a_{2n-1}, b_{2n-3}, c_{2n-5}, u. s. w. willkürlichen Constanten gleich setzt, oder er zeigt, dass sich jede lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n endlichen Integralen mit n willkürlichen Constanten integriren lässt. Kennt man ein solches System, so leitet Pfaff daraus die allgemeinste Lösung ab mit einer willkürlichen Function von $n-1$ Grössen, indem er eine der willkürlichen Constanten, die wir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nennen wollen, z. B. α_n, als willkürliche Function der übrigen setzt, und diese selbst als veränderliche Grössen betrachtet: man erhält dann eine Differentialgleichung von der Form:

$$X dx + X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n-1} dx_{2n-1} = \Pi_1 d\alpha_1 + \Pi_2 d\alpha_2 + \cdots + \Pi_{n-1} d\alpha_{n-1},$$

welche sich auf die gegebene reducirt, wenn man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ als Functionen von $x, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ durch die $n-1$ Gleichungen:

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Pi_{n-1} = 0$$

bestimmt. Behandelt man nach dieser allgemeinen Methode die Gleichung:

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + p_n dx_n,$$

in welcher p_n durch die gegebene partielle Differentialgleichung als Function der übrigen Grössen bestimmt ist, so erhält man n Gleichungen, die, wenn man daraus die $n-1$ Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ eliminirt, die gesuchte endliche Integralgleichung geben. Dieses ist alles, was meines Wissens über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bekannt war, wenn die Zahl der Variabeln drei übersteigt.

Von den n verschiedenen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, welche man nach dieser Methode nach einander aufzustellen, und *jedes vollständig* zu integriren hat, einem von $2n-1$ Differentialgleichungen zwischen $2n$ Variabeln, einem von $2n-3$ Differentialgleichungen zwischen $2n-2$ Variabeln, und so fort bis zu einer Differentialgleichung zwischen 2 Variabeln, kann nur das erste System allgemein angegeben werden, weil in dieser Methode die Aufstellung jedes folgenden die bereits ausgeführte vollständige Integration des zunächst vorhergehenden Systems postulirt. Setzt man der Kürze halber

$$(\alpha, \beta) = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha},$$

so wird dieses erste System gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Form, auf welche ich sie am angeführten Orte (Crelle Journal B. II. S. 353, cf. S. 25 dieses Bandes) gebracht habe, wenn man noch ein neues Differential dN einführt:

$$\begin{array}{rll}
X\,dN = & \cdot \quad (0,1)dx_1 & + \cdots + (0, 2n-1)dx_{2n-1}, \\
X_1 dN = & (1,0)dx \quad \cdot & + \cdots + (1, 2n-1)dx_{2n-1}, \\
X_2 dN = & (2,0)dx + (2,1)dx_1 \quad \cdot & + \cdots + (2, 2n-1)dx_{2n-1}, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
X_{2n-1} dN = & (2n-1, 0)dx + (2n-1, 1)dx_1 + \cdots + & \cdot
\end{array}$$

Aus diesen Gleichungen findet man die Verhältnisse von $dx, dx_1, \ldots, dx_{2n-1}$. Es sind in ihnen die Verticalreihen und Horizontalreihen der Coëfficienten respective einander gleich, aber entgegengesetzt, da

$$(\beta, \alpha) = -(\alpha, \beta),$$

nach welcher Regel auch die Terme in der Diagonale alle verschwinden, da

$$(\alpha, \alpha) = 0;$$

ganz wie es der Fall auch in den linearen Gleichungen ist, auf welche Lagrange und Poisson in ihren Arbeiten über die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik gekommen sind. Ich habe im Crelleschen Journal am angeführten Orte einige Betrachtungen über diese Art linearer Gleichungen angestellt, welche sich immer mit grosser Leichtigkeit auflösen lassen.

Wenn man für $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}$ respective $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ schreibt und

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1} = p_{n-1}, \quad X_n = p_n,$$
$$X = -1, \quad X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots = X_{2n-1} = 0$$

setzt, so verwandelt sich das aufgestellte System von Differentialgleichungen in folgendes:

$$\begin{aligned}
-dN &= -\frac{\partial p_n}{\partial x} dx_n, \\
p_1 dN &= dp_1 - \frac{\partial p_n}{\partial x_1} dx_n, \\
p_2 dN &= dp_2 - \frac{\partial p_n}{\partial x_2} dx_n, \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
p_{n-1} dN &= dp_{n-1} - \frac{\partial p_n}{\partial x_{n-1}} dx_n, \\
p_n dN &= \frac{\partial p_n}{\partial x} dx + \frac{\partial p_n}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1} \\
&\quad + \frac{\partial p_n}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial p_n}{\partial p_2} dp_2 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}} dp_{n-1},
\end{aligned}$$

$$0 = -dx_1 - \frac{\partial p_n}{\partial p_1} dx_n,$$
$$0 = -dx_2 - \frac{\partial p_n}{\partial p_2} dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = -dx_{n-1} - \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}} dx_n.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn man für dN vermittelst der ersten überall dx_n einführt, und in der $(n+1)^{\text{ten}}$ $dx_1, \ldots, dx_{n-1}, dp_1, \ldots, dp_{n-1}$ vermittelst der übrigen Gleichungen eliminirt:

$$dx_1 = -\frac{\partial p_n}{\partial p_1} dx_n,$$
$$dx_2 = -\frac{\partial p_n}{\partial p_2} dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$dx_{n-1} = -\frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}} dx_n,$$
$$dp_1 = \left[\frac{\partial p_n}{\partial x_1} + \frac{\partial p_n}{\partial x} p_1\right] dx_n,$$
$$dp_2 = \left[\frac{\partial p_n}{\partial x_2} + \frac{\partial p_n}{\partial x} p_2\right] dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$dp_{n-1} = \left[\frac{\partial p_n}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial p_n}{\partial x} p_{n-1}\right] dx_n,$$
$$dx = \left[p_n - p_1 \frac{\partial p_n}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial p_n}{\partial p_2} - \cdots - p_{n-1} \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}}\right] dx_n.$$

Wenn die gegebene partielle Differentialgleichung

$$\varphi(x, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

ist, so werden

$$\frac{\partial p_n}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}}, \qquad \frac{\partial p_n}{\partial p_i} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}}.$$

Die vorstehenden Gleichungen verwandeln sich daher, wenn man der Symmetrie wegen ein neues Differential dt einführt, in folgende:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \quad -\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, \quad -\frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}, \quad -\frac{dp_n}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$
$$\frac{dx}{dt} = p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \cdots + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}.$$

Wenn die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function nicht selber enthält, so wird $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, wodurch in den Gleichungen rechter Hand die in diese Grösse multiplicirten Terme verschwinden. Wir wollen diese allgemeinen Formeln auf die partielle Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U + h$$

anwenden, in welcher die $3n$ Grössen x_i, y_i, z_i die unabhängigen Variabeln sind, V die gesuchte Function, die in der partiellen Differentialgleichung nicht selber vorkommt, U eine blosse Function der Grössen x_i, y_i, z_i und h eine Constante ist. Setzt man

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial y_i} = q_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial z_i} = r_i,$$

so wird die partielle Differentialgleichung:

$$0 = \varphi = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} [p_i^2 + q_i^2 + r_i^2] - U - h,$$

und das behufs ihrer Integration vollständig zu integrirende System von $6n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = \frac{1}{m_i} p_i, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x},$$
$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = \frac{1}{m_i} q_i, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$
$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial r_i} = \frac{1}{m_i} r_i, \quad \frac{dr_i}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z_i} = \frac{\partial U}{\partial z_i};$$

welches, wie man leicht sieht, die Differentialgleichungen der Bewegung sind. Man kann nämlich jedes System gewöhnlicher Differentialgleichungen der zweiten

Ordnung als ein System von noch einmal so vielen Differentialgleichungen der ersten Ordnung darstellen, wenn man die Differentialquotienten der ersten Ordnung als neue Variabeln betrachtet. So lassen sich für den hier betrachteten Fall, wenn man

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = p_i, \quad m_i \frac{dy_i}{dt} = q_i, \quad m_i \frac{dz_i}{dt} = r_i$$

setzt, die $3n$ Differentialgleichungen der Bewegung

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

welche von der zweiten Ordnung sind, als ein System von $6n$ Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = p_i, \qquad m_i \frac{dy_i}{dt} = q_i, \qquad m_i \frac{dz_i}{dt} = r_i,$$
$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

darstellen, welches die obigen Gleichungen sind.

Will man die allgemeinen Formeln auf die andere Gleichung Hamiltons

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i} \right)^2 \right] = U$$

anwenden, so hat man hier eine neue unabhängige Variable t; setzt man wieder

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial y_i} = q_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial z_i} = r_i$$

und die nach t genommene partielle Ableitung

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H,$$

so wird die partielle Differentialgleichung:

$$0 = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} [p_i^2 + q_i^2 + r_i^2] - H - U = \varphi.$$

Schreibt man in den allgemeinen Formeln dT für das dort eingeführte Differential dt, da der Buchstabe t hier bereits in einer andern Bedeutung vorkommt, so erhält man nach den allgemeinen Formeln die vorigen Gleichungen, in welchen nur dT statt dt zu setzen ist, und ausserdem noch die Gleichung:

$$\frac{dt}{dT} = -\frac{\partial \varphi}{\partial H} = 1, \quad \text{oder} \quad dT = dt,$$

welche zeigt, dass man genau wieder die vorigen Gleichungen, oder die Differentialgleichungen der Bewegung erhält.

Wenn daher die Differentialgleichungen der Bewegung durch die *neue Methode* Hamiltons auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden, so besteht, wie ich im Vorigen gezeigt habe, die ganze Kenntniss, die wir bis jetzt über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wenigstens für den Fall von mehr als drei Variabeln besitzen, darin, die Integration dieser partiellen Differentialgleichung wieder auf die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurückzuführen. Ja es ist die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung nach der von mir auseinandergesetzten Pfaffschen Theorie nur ein erster Schritt zur Integration der partiellen Differentialgleichung, indem zufolge dieser Theorie nachher noch eine Reihenfolge von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu bilden und jedes vollständig zu integriren ist. Man muss daher im umgekehrten Sinne sagen, dass es eine wichtige Bemerkung Hamiltons ist, dass die Integration der von ihm aufgestellten partiellen Differentialgleichungen *nur* auf die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurückkommt, und es keiner weitern Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen dazu bedarf.

Diese Bemerkung Hamiltons gewinnt noch dadurch an Wichtigkeit, dass sie sich mit Leichtigkeit *auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* ausdehnen lässt. In der That wird man, wenn man die Hamiltonsche Methode befolgt, wie ich im Folgenden zeigen will, zu dem allgemeinen Resultate gelangen, dass zur Integration irgend einer partiellen Differentialgleichung zwischen irgend einer Zahl von Variabeln die vollständige Integration des von Pfaff aufgestellten *ersten* Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen vollkommen hinreicht; und man nicht, wie die Methode dieses Analysten fordert, nachher noch eine Reihenfolge anderer Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen nach einander vollständig zu integriren hat. Diese Verallgemeinerung findet sich bereits für den Fall, wo die gesuchte Function selber in der partiellen Differentialgleichung nicht vorkommt, in einigen merkwürdigen Formeln Hamiltons, wenn man nur die in diesen Formeln vorkommenden Zeichen nicht, wie Hamilton thut, auf die Bedeutung, welche sie in der Mechanik haben, beschränkt.

9.

Es seien wieder $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die unabhängigen Variabeln, x eine Function derselben, ihre nach diesen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1,\quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$

und

$$\varphi(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = h,$$

wo h eine Constante ist, die gegebene partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Um die Integration dieser Gleichung zu bewerkstelligen, stellt Pfaff zuerst zwischen den $2n+1$ Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ folgendes System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung auf:

$$\begin{array}{ll}
P\dfrac{dx_1}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}, & -P\dfrac{dp_1}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\
P\dfrac{dx_2}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_2}, & -P\dfrac{dp_2}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} + p_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
P\dfrac{dx_n}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_n}, & -P\dfrac{dp_n}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} + p_n\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},
\end{array}$$

wo der Kürze halber

$$p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \cdots + p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n} = P$$

gesetzt ist. Aus diesen Gleichungen folgt identisch:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}dp_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}dp_n = 0,$$

und hieraus durch Integration $\varphi = h$, so dass *ein* Integral dieser Gleichungen die gegebene Gleichung selber ist. Sind die $2n-1$ anderen Integrale

$$A_1 = \alpha_1,\quad A_2 = \alpha_2,\quad \ldots,\quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1},$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1}$ willkürliche Constanten sind, welche in den Functionen $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ selber nicht mehr vorkommen, so zeigt Pfaff, dass das vollständige Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung dargestellt wird durch ein System von n Gleichungen zwischen den Functionen $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$

mit n willkürlichen Constanten, vermittelst welcher man, mit Hinzuziehung der gegebenen Gleichung $\varphi = h$, die gesuchte Function nebst ihren partiellen Differentialquotienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausdrücken kann. Diese n Gleichungen sind so zu bestimmen, dass sie mit Hülfe der gegebenen Gleichung $\varphi = h$ der einen Differentialgleichung

$$dx = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \cdots + p_ndx_n$$

Genüge leisten, welche in dem aufgestellten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit enthalten ist. Zu diesem Ende drückt Pfaff vermittelst der Gleichungen

$$\varphi = h,\quad A_1 = \alpha_1,\quad A_2 = \alpha_2,\quad \ldots,\quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}$$

die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch $x, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ aus, und zeigt, dass, wenn man diese Ausdrücke in die Differentialgleichung

$$dx = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \cdots + p_ndx_n$$

substituirt, diese sich in eine andere

$$0 = B_1dA_1 + B_2dA_2 + \cdots + B_{2n-1}dA_{2n-1}$$

verwandelt, in welcher $B_1, B_2, \ldots, B_{2n-1}$ bloss Functionen von $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ sind. Um diese durch ein System von n Gleichungen mit n willkürlichen Constanten zu integriren, muss er nach einander $n-1$ verschiedene Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen respective zwischen $2n-2$, $2n-4$, ... und 2 Variabeln vollständig integriren. Die Hamiltonsche Methode, in der Allgemeinheit, deren sie fähig ist, aufgefasst, lehrt nun, dass diese Gleichung

$$0 = B_1dA_1 + B_2dA_2 + \cdots + B_{2n-1}dA_{2n-1}$$

gar keine weitere Aufstellung von Differentialgleichungen und Integration derselben erfordert, sondern giebt unmittelbar die gesuchten n Gleichungen mit n willkürlichen Constanten, welche ihr Genüge thun. *Man setze nämlich in den Gleichungen*

$$A_1 = \alpha_1,\quad A_2 = \alpha_2,\quad \ldots,\quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1},\quad \varphi = h$$

für $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Werthe

$$x = 0,\quad x_1 = x_1^0,\quad x_2 = x_2^0,\quad \ldots,\quad x_n = x_n^0,$$
$$p_1 = p_1^0,\quad p_2 = p_2^0,\quad \ldots,\quad p_n = p_n^0,$$

so kann man vermittelst dieser $2n$ Gleichungen die Grössen $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$ durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1}$ ausdrücken. Es seien die für $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ gefundenen Werthe:

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \Pi_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}), \\ x_2^0 &= \Pi_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n^0 &= \Pi_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}), \end{aligned}$$

so sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \Pi_1(A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}), \\ x_2^0 &= \Pi_2(A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n^0 &= \Pi_n(A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}), \end{aligned}$$

welche man aus den vorstehenden erhält, indem man statt $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}$ *respective* $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$ *setzt, die gesuchten* n *Gleichungen zwischen den Grössen* $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$ *mit* n *willkürlichen Constanten* $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, *welche, mit der gegebenen Gleichung* $\varphi = h$ *verbunden, der Differentialgleichung*

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

oder ihrer transformirten

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 + \dots + B_{2n-1} dA_{2n-1}$$

Genüge leisten, oder es enthält das System dieser Gleichungen die vollständige Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung. Der Beweis hiervon ist folgender.

Vermittelst der Gleichungen

$$\varphi = h, \quad A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}$$

drücke man $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ durch x und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}$ aus, und substituire diese Werthe in die Gleichungen:

$$\begin{aligned} P\frac{\partial x_1}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, & -P\frac{\partial p_1}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} p_1, \\ P\frac{\partial x_2}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, & -P\frac{\partial p_2}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} p_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ P\frac{\partial x_n}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}, & -P\frac{\partial p_n}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} p_n, \end{aligned}$$

welche dadurch identisch werden müssen, eben so wie die aus ihnen folgende Gleichung:

$$1 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x}.$$

Nimmt man von dieser letzten die partielle Ableitung nach einer der will-

kürlichen Constanten α, so erhält man, wenn man mit P multiplicirt und zugleich die übrigen Gleichungen benutzt:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_n}{\partial \alpha} \\ & + P\left[p_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \alpha \partial x} + p_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \alpha \partial x} + \dots + p_n \frac{\partial^2 x_n}{\partial \alpha \partial x}\right]. \end{aligned}$$

Nimmt man auch die partielle Ableitung nach α von der Gleichung

$$\varphi = h,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_n}{\partial \alpha} \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}, \end{aligned}$$

oder, wenn man die gegebenen Differentialgleichungen zu Hülfe ruft,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_n}{\partial \alpha} \\ = {} & P\left[\frac{\partial p_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial p_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right] \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right]. \end{aligned}$$

Dieses in die obige Gleichung substituirt, giebt

$$0 = P \frac{\partial\left[p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right],$$

woraus durch Integration nach x, von $x = 0$ an genommen,

$$p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha} = M\left[p_1^0 \frac{\partial x_1^0}{\partial \alpha} + p_2^0 \frac{\partial x_2^0}{\partial \alpha} + \dots + p_n^0 \frac{\partial x_n^0}{\partial \alpha}\right],$$

wenn der Kürze halber

$$M = e^{-\int_0^x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{P}}$$

gesetzt wird, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Betrachtet man die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}$ ebenfalls als veränderlich, wie sie durch die Gleichungen

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}$$

bestimmt werden, so hat man

$$\begin{aligned} & dx-[p_1 dx_1+p_2 dx_2+\cdots+p_n dx_n] \\ & = dx\left[1-p_1\frac{\partial x_1}{\partial x}-p_2\frac{\partial x_2}{\partial x}-\cdots-p_n\frac{\partial x_n}{\partial x}\right] \\ & -\Sigma\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}+\cdots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i}\right]d\alpha_i, \end{aligned}$$

wenn man dem i unter dem Summenzeichen die Werthe $1, 2, \ldots, 2n-1$ giebt. Diese Gleichung verwandelt sich, da

$$1-p_1\frac{\partial x_1}{\partial x}-p_2\frac{\partial x_2}{\partial x}-\cdots-p_n\frac{\partial x_n}{\partial x} = 0$$

und für jedes i

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}+\cdots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i} = M\left[p_1^0\frac{\partial x_1^0}{\partial \alpha_i}+p_2^0\frac{\partial x_2^0}{\partial \alpha_i}+\cdots+p_n^0\frac{\partial x_n^0}{\partial \alpha_i}\right],$$

in folgende:

$$\begin{aligned} & dx-[p_1 dx_1+p_2 dx_2+\cdots+p_n dx_n] \\ & = -M\Sigma\left[p_1^0\frac{\partial x_1^0}{\partial \alpha_i}+p_2^0\frac{\partial x_2^0}{\partial \alpha_i}+\cdots+p_n^0\frac{\partial x_n^0}{\partial \alpha_i}\right]d\alpha_i, \end{aligned}$$

oder da

$$dx_k^0 = \Sigma\frac{\partial x_k^0}{\partial \alpha_i}d\alpha_i,$$

in die Gleichung

$$\begin{aligned} & dx-[p_1 dx_1+p_2 dx_2+\cdots+p_n dx_n] \\ & = -M[p_1^0 dx_1^0+p_2^0 dx_2^0+\cdots+p_n^0 dx_n^0]. \end{aligned}$$

Aus dieser identischen Gleichung folgt, dass die Gleichung

$$dx-[p_1 dx_1+p_2 dx_2+\cdots+p_n dx_n] = 0$$

in folgende transformirt werden kann:

$$p_1^0 dx_1^0+p_2^0 dx_2^0+\cdots+p_n^0 dx_n^0 = 0,$$

welche erfüllt wird, wenn man die Grössen $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ willkürlichen Constanten gleich setzt, was der zu beweisende Satz war.

Die hier angewandte Analysis ist genau dieselbe wie diejenige, wodurch Pfaff in der angeführten Abhandlung beweist, dass die Verhältnisse der $2n-1$ Grössen

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}+\cdots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i}$$

von x unabhängig sind. Aber er hat nicht die Bemerkung hinzugefügt, dass

aus diesem Grunde diese Grössen den Grössen

$$p_1^0\frac{\partial x_1^0}{\partial \alpha_i}+p_2^0\frac{\partial x_2^0}{\partial \alpha_i}+\cdots+p_n^0\frac{\partial x_n^0}{\partial \alpha_i}$$

proportional gesetzt werden können, wodurch man die transformirte Differentialgleichung selber findet und unmittelbar die n Gleichungen erhält, durch welche sie erfüllt wird. Ich bemerke noch, dass, wenn der im Vorigen dem x gegebene besondere Werth $x=0$ Unbequemlichkeiten verursacht, man dafür jeden andern Zahlenwerth setzen kann.

Wenn man vermittelst der Gleichungen

$$\varphi = h,\quad A_1 = \alpha_1,\quad A_2 = \alpha_2,\quad \ldots,\quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}$$

die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch x und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1}$ ausdrückt, so enthalten diese Ausdrücke auch h. Differentiirt man die Gleichungen

$$\begin{gathered} 1 = p_1\frac{\partial x_1}{\partial x}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial x}+\cdots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial x}, \\ \varphi = h \end{gathered}$$

nach h, so erhält man, da gemäss den aufgestellten Differentialgleichungen

$$P\frac{\partial x_i}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -P\frac{\partial p_i}{\partial x}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}p_i,$$

folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial h}+\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial h}+\cdots+\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial p_n}{\partial h} \\ & +P\left[p_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial x\partial h}+p_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial x\partial h}+\cdots+p_n\frac{\partial^2 x_n}{\partial x\partial h}\right], \\ 1 = {} & \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial h}+\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial h}+\cdots+\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial p_n}{\partial h} \\ & -P\left[\frac{\partial p_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial h}+\frac{\partial p_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial h}+\cdots+\frac{\partial p_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial h}\right] \\ & -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial h}+\cdots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} 0 = 1+P\cdot & \frac{\partial\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial h}+\cdots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]}{\partial x} \\ & +\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial h}+\cdots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{1}{MP}$, und integrirt von $x=0$ bis $x=x$, so erhält man:

$$0 = \int_0^x \frac{dx}{MP} + \frac{1}{M}\left[p_1 \frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial h} + \cdots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial h}\right]$$
$$- \left[p_1^0 \frac{\partial x_1^0}{\partial h} + p_2^0 \frac{\partial x_2^0}{\partial h} + \cdots + p_n^0 \frac{\partial x_n^0}{\partial h}\right].$$

Betrachtet man h auch als veränderlich, so muss zu dem oben gefundenen Ausdruck von dx

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n - M[p_1^0 dx_1^0 + p_2^0 dx_2^0 + \cdots + p_n^0 dx_n^0]$$

noch der Ausdruck

$$\left[p_1 \frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial h} + \cdots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial h}\right] dh - M\left[p_1^0 \frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2^0 \frac{\partial x_2}{\partial h} + \cdots + p_n^0 \frac{\partial x_n}{\partial h}\right] dh$$
$$= -M\int_0^x \frac{dx}{MP} \cdot dh$$

hinzukommen, wodurch man erhält:

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n - M[p_1^0 dx_1^0 + p_2^0 dx_2^0 + \cdots + p_n^0 dx_n^0]$$
$$+ M\int_0^x \frac{dx}{MP} \cdot dh.$$

Bezeichnet man durch A_i^0 den Ausdruck von A_i und durch φ^0 den Ausdruck von φ, wenn man gleichzeitig $x=0$, $x_i = x_i^0$, $p_i = p_i^0$ setzt, und eliminirt aus den $2n+1$ Gleichungen

$$\varphi = h, \quad \varphi^0 = h, \quad A_1 = A_1^0, \quad A_2 = A_2^0, \quad \ldots, \quad A_{2n-1} = A_{2n-1}^0$$

die $2n$ Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$, so erhält man x ausgedrückt durch $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, h$, und die nach diesen Grössen genommenen partiellen Differentialquotienten dieses Ausdrucks von x sind:

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \qquad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$
$$\frac{\partial x}{\partial x_1^0} = -Mp_1^0, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2^0} = -Mp_2^0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x_n^0} = -Mp_n^0,$$
$$\frac{\partial x}{\partial h} = M\int_0^x \frac{dx}{MP}.$$

In den beiden in diesen Formeln vorkommenden Integralen

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{P}, \quad \int \frac{dx}{MP}$$

sind die Grössen x_i^0, p_i^0 als Constanten zu betrachten, und vermittelst der vollständigen Integrale der gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen alle Variabeln durch eine auszudrücken.

Ich habe im Vorigen als willkürliche Constanten die Werthe der Variabeln für $x=0$ angenommen. Man beweist aber ebenso, dass, wenn man vermittelst der vollständigen Integrale der angegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen sämmtliche Variabeln durch irgend eine von ihnen oder eine beliebige andere Grösse t ausdrückt, und mit $x^0, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$ die Werthe von $x, x_1, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ für $t=0$ bezeichnet und diese Werthe ebenfalls als variabel setzt: die Gleichung stattfinden wird:

$$dx - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_n dx_n$$
$$= M[dx^0 - p_1^0 dx_1^0 - p_2^0 dx_2^0 - \cdots - p_n^0 dx_n^0] + M\int_{x_0}^x \frac{dx}{MP}\, dh,$$

in welcher wiederum

$$M = e^{-\int_{x_0}^x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{P}}.$$

Wenn die gegebene partielle Differentialgleichung, wie es in den Anwendungen auf die Mechanik der Fall ist, die unbekannte Function x nicht enthält, ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

und daher

$$M = 1.$$

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen reducirt sich dann auf folgendes System:

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} : \ldots : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_n},$$

welches eine Gleichung und eine Variable x weniger enthält. Hat man dieses System vollständig integrirt, und alle Variabeln x_i, p_i durch eine von ihnen, z. B. x_1, und $2n-1$ willkürliche Constanten ausgedrückt, so erhält man x durch eine blosse Quadratur vermittelst der Gleichung

$$x - a = \int_0^{x_1} \frac{P\,dx_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}},$$

wo α eine neue willkürliche Constante ist, welche in den Ausdrücken von x_2, $x_3, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch x_1 nicht vorkommt. Bedeuten jetzt x_2^0, $x_3^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$ die Werthe, welche diese Ausdrücke für $x = 0$ annehmen, und in welchen ebenfalls α nicht vorkommt, so erhält man, da $x_1^0 = 0$ und $M = 1$, aus der obigen allgemeinen Formel:

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n - [p_2^0 dx_2^0 + p_3^0 dx_3^0 + \cdots + p_n^0 dx_n^0] + \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}} dh + d\alpha,$$

wo

$$\frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}}$$

gesetzt ist. Diese eine Gleichung giebt:

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_2^0} = -p_2^0, \quad \frac{\partial x}{\partial x_3^0} = -p_3^0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x_n^0} = -p_n^0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial h} = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}}.$$

Wenn man durch Einführung eines Elementes dt den gewöhnlichen Differentialgleichungen die Form giebt, die sie in den Problemen der Mechanik haben:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \qquad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}, \qquad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_n},$$

$$dt = \frac{dx}{P},$$

so erhält man, nachdem man die Gleichungen

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} : \ldots : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$

vollständig integrirt, und $x_2, x_3, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch x_1 ausgedrückt hat, die Functionen x, t durch blosse Quadraturen:

$$x - \alpha = \int_0^{x_1} \frac{P dx_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}}, \quad t + \tau = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}},$$

wo α, τ neue willkürliche Constanten sind. Von diesen beiden Integralen ist aber eines die partielle Ableitung des andern, nach h genommen. Hat man nämlich durch Integration x gefunden, so hat man den obigen Formeln zufolge:

$$\frac{\partial x}{\partial h} = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}} = t + \tau.$$

Wenn in φ ausser x noch eine der unabhängigen Variabeln, z. B. x_n, fehlt, so erhält man noch $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0$; es geben daher die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$dp_n = 0 \quad \text{oder} \quad p_n = \text{Const.},$$

wodurch sich die Zahl derselben wieder um 2 reducirt. Sie werden nämlich in diesem Falle

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{n-1} : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_{n-1} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}} : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} : \ldots : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}},$$

in welchen Ausdrücken man p_n als Constante zu betrachten hat. Hat man durch Integration dieser Gleichungen die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ durch eine von ihnen ausgedrückt, so giebt eine der Gleichungen

$$dx_n = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{dx_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{dp_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}$$

durch blosse Quadratur den Werth von x_n. Man kann aber auch in diesem Falle auf ähnliche Art, wie Hamilton die Function S durch V ersetzt, allgemein die Gleichung $\varphi = h$ selber in eine andere transformiren, in welcher die Zahl der unabhängigen Variabeln um eine geringer ist. Wenn nämlich φ weder x noch x_n enthält, so setze man

$$x = y + p_n x_n,$$

wodurch

$$dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} - x_n dp_n.$$

In dieser Gleichung betrachte man p_n als Constante, wodurch sie sich in die Gleichung

$$dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1}$$

verwandelt, so dass $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ die partiellen Differentialquotienten von y, nach $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ genommen, werden, und die gegebene partielle Differentialgleichung, in welcher ebenfalls p_n als Constante betrachtet wird, eine partielle Differentialgleichung für y wird mit nur $n-1$ unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Hat man durch Integration dieser partiellen Differentialgleichung y als Function von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, von $n-1$ willkürlichen Constanten und der Constante p_n gefunden, so findet man die gesuchte Function x dadurch, dass man in der Gleichung

$$x = y + p_n x_n$$

die Grösse p_n vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial p_n} = -x_n$$

eliminirt. Man kann x_n um eine willkürliche Constante vermehren, wodurch x, wie es für eine vollständige Lösung nöthig ist, n willkürliche Constanten erhält.

10.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, wie man durch die Integration *eines* Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen eine vollständige Lösung einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung finden kann. Ich will jetzt zeigen, wie man umgekehrt aus irgend einer vollständigen Lösung die vollständigen Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ableiten kann.

Kennt man einen Ausdruck von x durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mit n willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, welcher der gegebenen partiellen Differentialgleichung $\varphi = h$ Genüge leistet, so bilde man die $n-1$ Gleichungen, welche sich durch die Proportion darstellen lassen:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} : \ldots : \frac{\partial x}{\partial \alpha_n} = \beta_1 : \beta_2 : \ldots : \beta_n,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ neue willkürliche Constanten seien, die aber, da nur ihre Verhältnisse in Rechnung kommen, nur die Stelle von $n-1$ willkürlichen Constanten vertreten. Führt man eine neue Grösse M ein, so kann man diese

Proportion durch das System von Gleichungen ersetzen:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} + \beta_1 M = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} + \beta_2 M = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_n} + \beta_n M = 0.$$

Durch diese Gleichungen sind die $n+2$ Grössen $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, M$ als Functionen von einer unter ihnen gegeben. Differentiirt man eine dieser Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} + \beta_i M = 0,$$

und setzt für β_i den aus dieser Gleichung gezogenen Werth, so erhält man:

$$0 = -\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{dM}{M} + \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i \partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i \partial x_n} dx_n,$$

oder wenn man

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n$$

setzt, die Gleichung:

$$0 = -\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{dM}{M} + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} dx_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_i} dx_2 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_i} dx_n.$$

Die gegebene Differentialgleichung $\varphi = h$ muss, wenn man darin für x seinen gegebenen Werth und die daraus durch partielle Differentiation nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sich ergebenden Werthe von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ setzt, eine zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, h$ identisch stattfindende Gleichung werden. Nimmt man ihre partielle Ableitung nach α_i, so erhält man:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_i}.$$

Vergleicht man die zwei Systeme von n Gleichungen, welche sich aus dieser und der vorhergehenden Gleichung ergeben, wenn man darin für i seine Werthe $1, 2, \ldots, n$ setzt, so erhält man die Proportion:

$$\frac{dM}{M} : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial \varphi}{\partial p_n},$$

welche man auch, da

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n,$$

durch die Gleichungen darstellen kann:

$$P \frac{dM}{M dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$P \frac{dx_1}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \quad P \frac{dx_2}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad P \frac{dx_n}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n},$$

wo wieder

$$P = p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \cdots + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}$$

gesetzt ist. Differentiirt man ferner die Gleichung $\varphi = h$ nach x_i, und setzt in der Ableitung

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k},$$

so erhält man

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x_n},$$

oder, wenn man in diese Gleichung die vorhin erhaltenen Werthe

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = P \frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} = P \frac{dx_2}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = P \frac{dx_n}{dx}.$$

substituirt, die Gleichung:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P \frac{dp_i}{dx}.$$

Wir haben so umgekehrt aus den $2n$ Gleichungen:

$$\varphi = h, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} : \ldots : \frac{\partial x}{\partial \alpha_n} = \beta_1 : \beta_2 : \ldots : \beta_n,$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n$$

die $2n$ Differentialgleichungen

$$P \frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \quad P \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} p_i$$

abgeleitet, und da jene Gleichungen $2n$ willkürliche Constanten, nämlich h, α_1, α_2, $\ldots$, α_n und die Verhältnisse von β_1, β_2, $\ldots$, β_n enthalten, so sind sie zugleich die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen.

11.

Man kann die letztere Analysis auch auf die allgemeinere Untersuchung ausdehnen, unter welche Pfaff die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einbegreift, und zeigen, dass, wenn irgend ein System von n Gleichungen mit n willkürlichen Constanten gegeben ist, welches der Differentialgleichung

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

Genüge leistet, man daraus die vollständigen Integrale des von Pfaff aufge-

stellten und oben mitgetheilten Systems von $2n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen ableiten kann*). *Durch das gegebene System von n Gleichungen drücke man nämlich* x_1, x_2, $\ldots$, x_n *durch* x_{n+1}, x_{n+2}, $\ldots$, x_{2n} *und durch die n willkürlichen Constanten, die wir* α_1, α_2, $\ldots$, α_n *nennen wollen, aus, und bilde die Gleichungen:*

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} + \cdots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} + M\beta_1 = 0,$$

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} + M\beta_2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n} + \cdots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} + M\beta_n = 0,$$

in welchen β_1, β_2, $\ldots$, β_n *neue willkürliche Constanten sind, welche aber nur die Stelle von* $n-1$ *vertreten, da hier allein ihre Verhältnisse in Rechnung kommen, so werden diese Gleichungen, welche nach Elimination der neu eingeführten Grösse M die Stelle von* $n-1$ *Gleichungen vertreten, in Verbindung mit den gegebenen n Gleichungen die vollständigen Integrale des von Pfaff aufgestellten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen sein, mit* $2n-1$ *willkürlichen Constanten, nämlich den n willkürlichen Constanten* α_1, α_2, $\ldots$, α_n *und den* $n-1$ *Verhältnissen der willkürlichen Constanten* β_1, β_2, $\ldots$, β_n. Man beweist dieses Theorem wie folgt:

Da die durch die gegebenen n Gleichungen bestimmten Ausdrücke von x_1, x_2, $\ldots$, x_n durch x_{n+1}, x_{n+2}, $\ldots$, x_{2n} und die n willkürlichen Constanten der Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

genügen sollen, so muss man die Gleichungen haben:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{n+1}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{n+1}} + \cdots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}} + X_{n+1} = 0,$$

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{n+2}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{n+2}} + \cdots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{n+2}} + X_{n+2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{2n}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{2n}} + \cdots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{2n}} + X_{2n} = 0.$$

*) Statt x in den oben mitgetheilten Formeln ist hier x_{2n} geschrieben.

Man denke sich jetzt vermittelst der n Gleichungen

$$X_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}+\cdots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_i}+M\beta_i=0$$

die $n+1$ Grössen $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}$, M durch eine von ihnen, z. B. durch M, ausgedrückt, wodurch diese Grössen und daher auch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Functionen von M, von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und von $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ werden. Die auf diese Annahme sich beziehenden partiellen Differentialquotienten werde ich der Unterscheidung wegen in Klammern einschliessen, während die partiellen Differentialquotienten ohne Klammern sich auf die Annahme beziehen, dass $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Functionen von $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ betrachtet werden. Man hat demnach:

$$\begin{aligned}
&X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\right)+\cdots+X_n\left(\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_i}\right)\\
&=X_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}+\cdots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_i}\\
&+\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+1}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+1}}+\cdots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}}\right]\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial\alpha_i}\right)\\
&+\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+2}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+2}}+\cdots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+2}}\right]\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial\alpha_i}\right)\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2n}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{2n}}+\cdots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{2n}}\right]\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)\\
&=-M\beta_i-X_{n+1}\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial\alpha_i}\right)-X_{n+2}\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial\alpha_i}\right)-\cdots-X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right),
\end{aligned}$$

oder

$$X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\right)+\cdots+X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)+M\beta_i=0.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach M, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial X_1}{\partial M}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\right)+\left(\frac{\partial X_2}{\partial M}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\right)+\cdots+\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial M}\right)\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)\\
&+X_1\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial M\partial\alpha_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial M\partial\alpha_i}\right)+\cdots+X_{2n}\left(\frac{\partial^2 x_{2n}}{\partial M\partial\alpha_i}\right)+\beta_i=0.
\end{aligned}$$

Es folgt ferner aus der Gleichung

$$X_1dx_1+X_2dx_2+\cdots+X_{2n}dx_{2n}=0,$$

wenn man alle Grössen als Functionen von M betrachtet:

$$X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right)+\cdots+X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right)=0.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach α_i, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&X_1\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial M\partial\alpha_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial M\partial\alpha_i}\right)+\cdots+X_{2n}\left(\frac{\partial^2 x_{2n}}{\partial M\partial\alpha_i}\right)\\
&+\left(\frac{\partial X_1}{\partial\alpha_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right)+\left(\frac{\partial X_2}{\partial\alpha_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right)+\cdots+\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right)=0,
\end{aligned}$$

wodurch sich die obige Gleichung, wenn man sie mit dM multiplicirt, in folgende verwandelt:

$$\begin{aligned}
&dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\right)+dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\right)+\cdots+dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)\\
&-dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial\alpha_i}\right)-dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial\alpha_i}\right)-\cdots-dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)+\beta_i dM=0.
\end{aligned}$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung β_i vermittelst der Gleichung

$$X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\right)+\cdots+X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)+M\beta_i=0,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
&dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\right)+dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\right)+\cdots+dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)\\
&-dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial\alpha_i}\right)-dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial\alpha_i}\right)-\cdots-dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)\\
&-\frac{dM}{M}\left[X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\right)+\cdots+X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)\right]=0.
\end{aligned}$$

Setzt man, wie erlaubt ist, $\beta_n=1$, so erhält man durch die nämliche Analysis ähnliche Formeln, wie für α_i, auch für die $n-1$ anderen willkürlichen Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$. Zuvörderst hat man:

$$\begin{aligned}
&X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\beta_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\beta_i}\right)+\cdots+X_n\left(\frac{\partial x_n}{\partial\beta_i}\right)\\
&=\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+1}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+1}}+\cdots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}}\right]\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial\beta_i}\right)\\
&+\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+2}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+2}}+\cdots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+2}}\right]\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial\beta_i}\right)\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2n}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{2n}}+\cdots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{2n}}\right]\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\beta_i}\right)\\
&=-\left[X_{n+1}\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial\beta_i}\right)+X_{n+2}\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial\beta_i}\right)+\cdots+X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\beta_i}\right)\right],
\end{aligned}$$

oder

$$0 = X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right)+\cdots+X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach M und die Gleichung

$$0 = X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right)+\cdots+X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right)$$

nach β_i, und zieht beide Resultate von einander ab, so erhält man nach Multiplication mit dM:

$$\begin{aligned}0 = dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right)+dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right)+\cdots+dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)\\ -dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial \beta_i}\right)-dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial \beta_i}\right)-\cdots-dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial \beta_i}\right),\end{aligned}$$

von welcher Gleichung wir, um ihr dieselbe Form mit der Gleichung zu geben, die wir in Bezug auf α_i gefunden hatten, die Gleichung:

$$0 = X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right)+\cdots+X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right),$$

mit $\frac{dM}{M}$ multiplicirt, abziehen wollen, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned}0 = dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right)+dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right)+\cdots+dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)\\ -dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial \beta_i}\right)-dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial \beta_i}\right)-\cdots-dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial \beta_i}\right)\\ -\frac{dM}{M}\left[X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right)+\cdots+X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)\right].\end{aligned}$$

Wir wollen in dieser Gleichung, so wie in der oben gefundenen ähnlichen, auf α_i bezüglichen, für die partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{\partial X_k}{\partial \alpha_i}\right),\quad \left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_i}\right)$$

ihre entwickelten Werthe

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial X_k}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial X_k}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right)+\frac{\partial X_k}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right)+\cdots+\frac{\partial X_k}{\partial x_{2n}}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right),\\ \left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_i}\right) = \frac{\partial X_k}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right)+\frac{\partial X_k}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right)+\cdots+\frac{\partial X_k}{\partial x_{2n}}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)\end{aligned}$$

setzen, und die Gleichungen nach den Grössen

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i}\right),\quad \left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_i}\right)$$

ordnen, so verwandeln sie sich in folgende:

$$\begin{aligned}0 = T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right),\\ 0 = T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right),\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}T_1 &= dX_1-\left[\frac{\partial X_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial X_2}{\partial x_1}dx_2+\cdots+\frac{\partial X_{2n}}{\partial x_1}dx_{2n}\right]-\frac{X_1 dM}{M},\\ T_2 &= dX_2-\left[\frac{\partial X_1}{\partial x_2}dx_1+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial X_{2n}}{\partial x_2}dx_{2n}\right]-\frac{X_2 dM}{M},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ T_{2n} &= dX_{2n}-\left[\frac{dX_1}{\partial x_{2n}}dx_1+\frac{\partial X_2}{\partial x_{2n}}dx_2+\cdots+\frac{\partial X_{2n}}{\partial x_{2n}}dx_{2n}\right]-\frac{X_{2n} dM}{M}.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit dx_1, dx_2, ..., dx_{2n}, und addirt sie, so heben sich, da

$$\begin{aligned}X_1dx_1+X_2dx_2+\cdots+X_{2n}dx_{2n} = 0,\\ \frac{\partial X_k}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial X_k}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial X_k}{\partial x_{2n}}dx_{2n} = dX_k,\end{aligned}$$

alle Terme rechter Hand fort, wodurch man die Gleichung erhält:

$$T_1dx_1+T_2dx_2+\cdots+T_{2n}dx_{2n} = 0,$$

welche man auch so schreiben kann:

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right) = 0,$$

da wir in den vorstehenden Formeln alle Grössen x_1, x_2, ..., x_{2n} als Functionen bloss von *einer* Grösse M, und α_1, α_2, ..., α_n, β_1, β_2, ..., β_{n-1} als Constanten betrachten, was ich durch den Gebrauch der Charakteristik d andeute. Aus den $2n$ Gleichungen, nämlich den n Gleichungen

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right)=0,$$

den $n-1$ Gleichungen

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)=0$$

und der Gleichung

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right)=0$$

folgen die $2n$ Gleichungen

$$T_1=0,\quad T_2=0,\quad \ldots,\quad T_{2n}=0,$$

welche mit den Pfaffschen Differentialgleichungen übereinkommen, wie ich sie oben aufgestellt habe, wenn man in ihnen $\frac{dM}{M}$ statt dN und X_{2n}, x_{2n} für X, x setzt.

Dass man aus den $2n$ angegebenen Gleichungen die Gleichungen

$$T_1=0,\quad T_2=0,\quad \ldots,\quad T_{2n}=0$$

folgern kann, lässt sich, wie folgt, beweisen. Man betrachte gleichzeitig α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$, M als Variabeln, so wird durch die zwischen diesen Grössen und den $2n$ Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ aufgestellten Gleichungen keine Relation zwischen diesen letzteren allein gegeben, sondern sie zeigen nur, wie das eine System von $2n$ Variabeln sich durch das andere System von $2n$ Variabeln ausdrücken lässt. Man bezeichne beliebige Variationen der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ mit $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_{2n}$, die von einander unabhängig sind, da zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ selber keine Relation stattfinden soll. Sind $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\alpha_n, \delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots, \delta\beta_{n-1}, \delta M$ die entsprechenden Variationen der Variabeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, M$, so hat man:

$$\begin{aligned}\delta x_k = {} & \left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1}\right)\delta\alpha_1+\left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2}\right)\delta\alpha_2+\cdots+\left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_n}\right)\delta\alpha_n \\ & +\left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_1}\right)\delta\beta_1+\left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_2}\right)\delta\beta_2+\cdots+\left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_{n-1}}\right)\delta\beta_{n-1} \\ & +\left(\frac{\partial x_k}{\partial M}\right)\delta M.\end{aligned}$$

Multiplicirt man daher die $2n$ Gleichungen, die wir gefunden haben:

$$\begin{gathered}T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_1}\right)=0, \\ T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_2}\right)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_n}\right)=0, \\ T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_1}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_1}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_1}\right)=0, \\ T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_2}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_2}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_2}\right)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_{n-1}}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_{n-1}}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_{n-1}}\right)=0, \\ T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right)+T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right)+\cdots+T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right)=0\end{gathered}$$

respective mit $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\alpha_n, \delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots, \delta\beta_{n-1}, \delta M$, und addirt sie, so erhält man:

$$T_1\delta x_1+T_2\delta x_2+\cdots+T_{2n}\delta x_{2n}=0,$$

welche Gleichung, da $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_{2n}$ beliebige, von einander unabhängige Variationen sind, nicht anders bestehen kann, als wenn

$$T_1=0,\quad T_2=0,\quad \ldots,\quad T_{2n}=0,$$

was zu beweisen war.

Dass man auf die angegebene Art, wenn man der Gleichung

$$X_1dx_1+X_2dx_2+\cdots+X_{2n}dx_{2n}=0$$

durch irgend ein System von n Gleichungen mit n willkürlichen Constanten genügen kann, immer auch die vollständigen Integrale der von Pfaff aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen erhält, lässt sich auch durch folgende Betrachtungen einsehen. Man löse die n Gleichungen nach den n willkürlichen Constanten auf, so dass sie die Form erhalten

$$A_1=\alpha_1,\quad A_2=\alpha_2,\quad \ldots,\quad A_n=\alpha_n,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die willkürlichen Constanten sind, und in $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nicht mehr vorkommen. Sollen diese Gleichungen der Differentialgleichung

$$X_1dx_1+X_2dx_2+\cdots+X_{2n}dx_{2n}=0$$

genügen, so muss es n Multiplicatoren $U_1, U_2, \ldots, U_n$ geben, vermittelst welcher *identisch*

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = U_1 dA_1 + U_2 dA_2 + \cdots + U_n dA_n$$

wird, da der Ausdruck linker Hand vom Gleichheitszeichen verschwinden soll, wenn $A_1, A_2, \ldots, A_n$ willkürliche Constanten werden. Denkt man sich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch $A_1, A_2, \ldots, A_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}$ ausgedrückt, so erhält man hieraus:

$$U_i = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial A_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial A_i} + \cdots + X_{2n} \frac{\partial x_{2n}}{\partial A_i}.$$

Aus der von Pfaff selber gegebenen Analysis folgt, dass, wenn man auf irgend eine Art die Gleichung

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

in eine andere zwischen nur $2n-1$ Variabeln transformiren kann, diese, willkürlichen Constanten gleich gesetzt, die vollständigen Integrale seiner gewöhnlichen Differentialgleichungen geben. Nun haben wir aber

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = U_1 dA_1 + U_2 dA_2 + \cdots + U_n dA_n,$$

oder

$$0 = \frac{U_1}{U_n} dA_1 + \frac{U_2}{U_n} dA_2 + \cdots + \frac{U_{n-1}}{U_n} dA_{n-1} + dA_n,$$

welches eine Differentialgleichung zwischen nur $2n-1$ Variabeln

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad \frac{U_1}{U_n}, \quad \frac{U_2}{U_n}, \quad \ldots, \quad \frac{U_{n-1}}{U_n}$$

ist. Diese, willkürlichen Constanten gleich gesetzt, müssen daher die vollständigen Integrale des Pfaffschen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen sein; sie kommen aber genau mit den $2n-1$ Gleichungen überein, wie ich sie oben aufgestellt habe.

12.

Ich habe oben bemerkt, dass es in der von Pfaff zur Integration der Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

vorgeschlagenen Methode ein Uebelstand sei, dass man von den nach einander zu integrirenden Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen nur das erste wirklich aufstellen, und für die anderen Systeme nur die Art angeben

kann, wie man sie, wenn man die vorhergehenden vollständig integrirt hat, zu bilden hat. In der That ist klar, dass es hierdurch unmöglich fällt, das Ganze der Aufgabe zu übersehen. Für den besonderen Fall, welcher die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, haben wir gesehen, dass die Integration des ersten dieser Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen vollkommen ausreicht, und es der Aufstellung und Integration anderer Systeme nicht weiter bedarf. Dieser besondere Fall kann als derjenige bezeichnet werden, in welchem von den $2n$ Grössen $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ eine Anzahl von $n-1$ gleich 0 ist. Es sei z. B.

$$X_{n+2} = X_{n+3} = \cdots = X_{2n} = 0,$$

so dass die zu integrirende Gleichung wird:

$$dx_{n+1} = \frac{-1}{X_{n+1}} [X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n].$$

Man setze:

$$-\frac{X_1}{X_{n+1}} = p_1, \quad -\frac{X_2}{X_{n+1}} = p_2, \quad \ldots, \quad -\frac{X_n}{X_{n+1}} = p_n,$$

so sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die partiellen Differentialquotienten von x_{n+1}, als Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ betrachtet, und die Elimination der $n-1$ Grössen $x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}$ aus diesen n Gleichungen giebt die zu integrirende partielle Differentialgleichung. Ich will jetzt im Folgenden zeigen, dass, wenn man die Methode, welcher wir uns für diesen besonderen Fall bedienten, auf die allgemeine Pfaffsche Differentialgleichung anwendet, man des oben bezeichneten Uebelstandes ledig werden kann, indem es dadurch gelingt, mit Leichtigkeit alle zu integrirenden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen aufzustellen, ohne eines derselben wirklich integrirt zu haben.

Um hierzu zu gelangen, nehme man in den Integralen des von Pfaff aufgestellten ersten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen als willkürliche Constanten die Werthe, welche $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ für $x_{2n} = 0$ annehmen, und die wir mit $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-1}^0$ bezeichnen wollen. Bezeichnet man auch die entsprechenden Werthe von $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ mit $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_{2n}^0$, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$\begin{array}{ll} x_1 = x_1^0 + x_{2n}\xi_1, & X_1 = X_1^0 + x_{2n}\Xi_1, \\ x_2 = x_2^0 + x_{2n}\xi_2, & X_2 = X_2^0 + x_{2n}\Xi_2, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_{2n-1} = x_{2n-1}^0 + x_{2n}\xi_{2n-1}, & X_{2n} = X_{2n}^0 + x_{2n}\Xi_{2n}, \end{array}$$

wo $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n-1}, \Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_{2n}$ Functionen von $x_{2n}, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-1}^0$ sind, welche für $x_{2n} = 0$ nicht unendlich werden. Substituirt man diese Werthe von $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$, wie sie durch vollständige Integration der von Pfaff aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen gefunden werden, in die Gleichung:

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n},$$

indem man auch die Grössen $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-1}^0$ als veränderlich betrachtet, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = & [X_1^0 + x_{2n}\Xi_1]d[x_1^0 + x_{2n}\xi_1] \\ & + [X_2^0 + x_{2n}\Xi_2]d[x_2^0 + x_{2n}\xi_2] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + [X_{2n-1}^0 + x_{2n}\Xi_{2n-1}]d[x_{2n-1}^0 + x_{2n}\xi_{2n-1}] \\ & + [X_{2n}^0 + x_{2n}\Xi_{2n}]dx_{2n} \\ = & B dx_{2n} + B_1 dx_1^0 + B_2 dx_2^0 + \cdots + B_{2n-1} dx_{2n-1}^0, \end{aligned}$$

wo, wenn i eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 2n-1$ bedeutet,

$$\begin{aligned} B_i = & X_i^0 + x_{2n}\Xi_i \\ & + x_{2n}\left[X_1^0 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i^0} + X_2^0 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i^0} + \cdots + X_{2n-1}^0 \frac{\partial \xi_{2n-1}}{\partial x_i^0}\right] \\ & + x_{2n}^2\left[\Xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i^0} + \Xi_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i^0} + \cdots + \Xi_{2n-1} \frac{\partial \xi_{2n-1}}{\partial x_i^0}\right]. \end{aligned}$$

Aber Pfaff hat bewiesen, dass, wenn man vermittelst vollständiger Integration der von ihm aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ durch eine von ihnen, z. B. x_{2n}, und durch die $2n-1$ willkürlichen Constanten ausdrückt, und diese Werthe in den Ausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

substituirt, indem man die willkürlichen Constanten ebenfalls als veränderlich betrachtet, der Coëfficient von dx_{2n} verschwindet, und die Verhältnisse der Coëfficienten der Differentiale der willkürlichen Constanten von x_{2n} unabhängig werden. Da hiernach

$$B = 0,$$

und die Verhältnisse von $B_1, B_2, \ldots, B_{2n-1}$ von x_{2n} unabhängig sein werden, so bleiben diese Verhältnisse ungeändert, wenn in $B_1, B_2, \ldots, B_{2n-1}$ man $x_{2n} = 0$ setzt, wodurch man erhält:

$$B_1 : B_2 : \ldots : B_{2n-1} = X_1^0 : X_2^0 : \ldots : X_{2n-1}^0,$$

oder, wenn man einen Multiplicator M einführt

$$B_1 = MX_1^0, \quad B_2 = MX_2^0, \quad \ldots, \quad B_{2n-1} = MX_{2n-1}^0.$$

Wir sehen also, dass, *wenn man statt der Variabeln* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ *die Variabeln* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-1}^0, x_{2n}$ *einführt, vermittelst der Gleichungen*

$$x_1 = x_1^0 + x_{2n}\xi_1, \quad x_2 = x_2^0 + x_{2n}\xi_2, \quad \ldots, \quad x_{2n-1} = x_{2n-1}^0 + x_{2n}\xi_{2n-1},$$

welche sich durch die vollständige Integration der von Pfaff aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen ergeben, die vorgelegte Differentialgleichung

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

sich in die Gleichung

$$0 = X_1^0 dx_1^0 + X_2^0 dx_2^0 + \cdots + X_{2n-1}^0 dx_{2n-1}^0$$

verwandelt, oder in eine andere Differentialgleichung mit einer Variablen weniger, welche aus der gegebenen Differentialgleichung erhalten wird, wenn man in ihr $x_{2n} = 0$ *setzt, und* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-1}^0$ *für* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ *schreibt. Die Integration dieser letzteren Gleichung giebt also die Integration der vorgelegten, wenn man in ihren Integralgleichungen wieder* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-1}^0$ *durch* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ *vermittelst der angegebenen Gleichungen ausdrückt.*

Nach der Pfaffschen Methode hat man nun in der Gleichung

$$0 = X_1^0 dx_1^0 + X_2^0 dx_2^0 + \cdots + X_{2n-1}^0 dx_{2n-1}^0$$

eine der Grössen $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-1}^0$ einer willkürlichen Constanten gleich zu setzen; es sei also

$$x_{2n-1}^0 = \alpha_1,$$

wo α_1 eine willkürliche Constante. Die Differentialgleichung wird demnach

$$0 = X_1^0 dx_1^0 + X_2^0 dx_2^0 + \cdots + X_{2n-2}^0 dx_{2n-2}^0,$$

wo in den Grössen X_i^0 für x_{2n-1}^0 die Constante α_1 zu setzen ist. Hat man diese neue Differentialgleichung durch $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ willkürlichen Constanten integrirt, so füge man die Gleichung

$$x_{2n-1}^0 = \alpha_1$$

hinzu, und drücke vermittelst der Integralgleichungen des ersten Systems $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-1}^0$ durch $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ aus, so hat man die n Gleichungen mit n willkürlichen Constanten, welche der vorgelegten Differentialgleichung

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

Genüge thun.

Man kann auf dieselbe Weise nun wieder die Differentialgleichung, auf welche die vorgelegte reducirt worden ist, auf eine andere mit zwei Variabeln weniger reduciren. Das zu diesem Ende zu integrirende zweite System von Differentialgleichungen erhält man aus dem ersten, wenn man die beiden letzten Gleichungen desselben fortlässt, $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$ setzt, und für x_i, X_i schreibt x_i^0, X_i^0. Man erhält dann $2n-3$ gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen den $2n-2$ Variabeln $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-2}^0$. Als willkürliche Constanten nehme man wieder die Werthe von $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-3}^0$ für $x_{2n-2}^0 = 0$, welche wir mit $x_1^{00}, x_2^{00}, \ldots, x_{2n-3}^{00}$ bezeichnen wollen, und nenne X_i^{00} den entsprechenden Werth von X_i^0, so ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, die Gleichung

$$X_1^{00}\,dx_1^{00} + X_2^{00}\,dx_2^{00} + \cdots + X_{2n-4}^{00}\,dx_{2n-4}^{00} = 0,$$

welche aus der vorgelegten erhalten wird, wenn man $x_{2n} = x_{2n-2} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, $x_{2n-3} = \alpha_2$ setzt, wo α_1, α_2 willkürliche Constanten bedeuten, und X^{00}, x^{00} für X, x schreibt, durch $n-2$ Gleichungen mit $n-2$ willkürlichen Constanten zu integriren. Zu diesen füge man die Gleichung

$$x_{2n-3}^{00} = \alpha_2,$$

und drücke $x_1^{00}, x_2^{00}, \ldots, x_{2n-3}^{00}$ vermittelst der Integralgleichungen des zweiten Systems durch $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-2}^0$ aus, füge wieder die Gleichung

$$x_{2n-1}^0 = \alpha_1$$

hinzu, und drücke $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-1}^0$ vermittelst der Integralgleichungen des ersten Systems durch $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ aus, so hat man die n Integrale der vorgelegten Gleichung mit n willkürlichen Constanten. Indem man auf diese Weise fortfährt jede Differentialgleichung, auf welche man die vorgelegte reducirt hat, dadurch noch um zwei Variabeln zu verringern, dass man eine Variable $= 0$, eine andere einer willkürlichen Constante gleich setzt, kommt man zuletzt auf eine Differentialgleichung zwischen nur zwei Variabeln:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 = 0,$$

wo in X_1, X_2 zu setzen ist $x_{2n} = x_{2n-2} = \cdots = x_4 = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, $x_{2n-3} = \alpha_2, \ldots$ $x_3 = \alpha_{n-1}$.

Bezeichnet man daher mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ willkürliche Constanten, so besteht das ganze Verfahren zur Aufstellung der verschiedenen zu integrirenden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen im Folgenden. In dem oben aufgestellten ersten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen setzt man $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, lässt die beiden letzten Gleichungen fort, und schreibt x_i^0, X_i^0 für x_i, X_i, wodurch man das zweite System erhält; in diesem setzt man $x_{2n-2}^0 = 0$, $x_{2n-3}^0 = \alpha_2$, lässt wieder die beiden letzten Gleichungen fort, und schreibt x_i^{00}, X_i^{00} für x_i^0, X_i^0, wodurch man das dritte System erhält; in diesem setzt man $x_{2n-4}^{00} = 0$, $x_{2n-5}^{00} = \alpha_3$, lässt wieder die beiden letzten Gleichungen fort, und schreibt x_i^{000}, X_i^{000} für x_i^{00}, X_i^{00}, wodurch man das vierte System von Differentialgleichungen erhält, und so fort; zuletzt kommt man auf die Gleichung, welche das n^{te} System vorstellt,

$$X_1^{0^{n-1}}\,dx_1^{0^{n-1}} + X_2^{0^{n-1}}\,dx_2^{0^{n-1}} = 0.$$

Lässt man $x_1^{0^{n-m}}, x_2^{0^{n-m}}, \ldots, x_{2m+1}^{0^{n-m}}$ die Werthe bedeuten, welche in den $2m+1$ Integralen des $(n-m)^{\text{ten}}$ Systems von Differentialgleichungen $x_1^{0^{n-m-1}}, x_2^{0^{n-m-1}}, \ldots, x_{2m+1}^{0^{n-m-1}}$ für $x_{2m+2}^{0^{n-m-1}} = 0$ annehmen, so geben die sämmtlichen Integralgleichungen der verschiedenen Systeme, verbunden mit den Gleichungen

$$x_{2n-1}^0 = \alpha_1, \quad x_{2n-3}^{00} = \alpha_2, \quad x_{2n-5}^{000} = \alpha_3, \quad \ldots, \quad x_1^{0^n} = \alpha_n,$$

die verlangte Lösung. Man kann nämlich in der letzten der n Gleichungen

$$x_{2n-1}^0 = \alpha_1, \quad x_{2n-3}^{00} = \alpha_2, \quad x_{2n-5}^{000} = \alpha_3, \quad \ldots, \quad x_1^{0^n} = \alpha_n$$

vermittelst des Integrals der letzten Differentialgleichung (des n^{ten} Systems) $x_1^{0^n}$ durch $x_1^{0^{n-1}}$, $x_2^{0^{n-1}}$, dann in den beiden letzten vermittelst der drei Integrale des $(n-1)^{\text{ten}}$ Systems $x_1^{0^{n-1}}, x_2^{0^{n-1}}, x_3^{0^{n-1}}$ durch $x_1^{0^{n-2}}, x_2^{0^{n-2}}, x_3^{0^{n-2}}, x_4^{0^{n-2}}$, dann in den drei letzten vermittelst der 5 Integrale des $(n-2)^{\text{ten}}$ Systems von Differentialgleichungen $x_1^{0^{n-2}}, x_2^{0^{n-2}}, x_3^{0^{n-2}}, x_4^{0^{n-2}}, x_5^{0^{n-2}}$ durch $x_1^{0^{n-3}}, x_2^{0^{n-3}}, \ldots, x_6^{0^{n-3}}$ ausdrücken, und so fortfahren, bis man vermittelst der Integration des ersten Systems alles in den n Gleichungen durch die ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ ausgedrückt hat.

Wir haben gesehen, dass, wenn von den $2n$ Grössen $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ eine Zahl $n-1$ verschwindet, was den Fall der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, die Integration des ersten Systems von Differentialgleichungen hinreicht. Wenn eine geringere Zahl $n-m$ fehlt, so dass

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_{n-m} = 0,$$

so braucht man das obige Verfahren nur so weit fortzusetzen, bis man die vorgelegte Differentialgleichung auf eine mit $2n-2m+2$ Variabeln reducirt hat, welche die Form haben wird:

$$0 = X^{\overset{m-1}{0}}_{n-m+1}\,dx^{\overset{m-1}{0}}_{n-m+1} + X^{\overset{m-1}{0}}_{n-m+2}\,dx^{\overset{m-1}{0}}_{n-m+2} + \cdots + X^{\overset{m-1}{0}}_{2n-2m+2}\,dx^{\overset{m-1}{0}}_{2n-2m+2},$$

indem die Coëfficienten von $dx^{\overset{m-1}{0}}_1$, $dx^{\overset{m-1}{0}}_2$, ..., $dx^{\overset{m-1}{0}}_{n-m}$ fehlen. Die Integration des m^{ten} Systems von Differentialgleichungen reicht hin, die $n-m+1$ Gleichungen zu finden, durch welche dieser Differentialgleichung Genüge geschieht, und man braucht keine Differentialgleichungen weiter zu integriren.

Man kann sich auch zur Integration der Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

folgender Methode bedienen, welche von der Pfaffschen verschieden ist. Indem man nur x_1 und x_2 als Variabeln betrachtet, kann man durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 = U du$$

setzen. Betrachtet man auch x_3 und x_4 als Variabeln, so erhält man hierdurch

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = U du + U' dx_3 + U'' dx_4,$$

wo, wenn man u statt x_1 einführt, U, U', U'' Functionen von u, x_2, x_3, x_4 werden. Durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabeln kann man, wie sich leicht zeigen lässt, diesem Ausdruck die Form geben

$$U du + U' dx_3 + U'' dx_4 = V_1 dv_1 + V_2 dv_2,$$

wodurch auch

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = V_1 dv_1 + V_2 dv_2.$$

Betrachtet man noch x_5, x_6 als Variabeln, so erhält man hierdurch:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_6 dx_6 = V_1 dv_1 + V_2 dv_2 + V' dx_5 + V'' dx_6,$$

wo, wenn man v_1, v_2 statt x_1, x_2 einführt, V_1, V_2, V', V'' Functionen von v_1, v_2, x_3, x_4, x_5, x_6 werden. Dem vorstehenden Ausdruck kann man durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen vier Variabeln die Form geben

$$V_1 dv_1 + V_2 dv_2 + V' dx_5 + V'' dx_6 = W_1 dw_1 + W_2 dw_2 + W_3 dw_3,$$

wodurch auch

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_6 dx_6 = W_1 dw_1 + W_2 dw_2 + W_3 dw_3,$$

u. s. w. Fährt man so fort, so erhält man, nachdem man zuerst eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln, und dann

hinter einander partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen 3, 4, ..., n Variabeln integrirt hat, zuletzt durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln die verlangten n Gleichungen. Da nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $k+1$ Variabeln die Integration von $2k-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $2k$ Variabeln gefordert, so sieht man, dass man nach dieser Methode eben so viel Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zwischen gleich viel Variabeln zu integriren hat, wie nach der früheren Methode. Wenn m von den Grössen X_1, X_2, ..., X_{2n} gleich 0 sind, so kann man sogleich bei diesem Gange der Operationen mit der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+2$ Variabeln anfangen.

Den 9. December 1836.

NOTE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA DYNAMIQUE

PAR

M. C. G. J. JACOBI.

Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. V p. 61—67.

NOTE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA DYNAMIQUE.

La forme que Lagrange a donnée aux équations différentielles de la dynamique n'a servi jusqu'ici qu'à opérer avec élégance les différentes transformations dont ces équations sont susceptibles, et à établir avec facilité et dans toute leur étendue les lois générales de la mécanique. Mais on peut aussi tirer de la même forme un profit important pour l'intégration elle-même de ces équations, ce qui me paraît ajouter une nouvelle branche à la mécanique analytique. J'en ai marqué les traits fondamentaux dans une communication faite à l'Académie de Berlin, le 29. novembre passé, après avoir eu l'honneur de présenter à votre illustre Académie, il y a environ une année, un exemple propre à faire sentir l'esprit et l'utilité de la nouvelle méthode. Toutes les fois que le principe de la moindre action a lieu, j'ai trouvé que l'on peut suivre une telle marche dans l'intégration des équations du mouvement que *chacune* des intégrales trouvées successivement, rabaisse leur ordre de *deux* unités, en égalant toujours l'ordre d'un système d'équations différentielles ordinaires, au nombre des constantes arbitraires que comporte leur intégration complète. La proposition énoncée a lieu aussi dans les cas où la fonction dont les dérivées donnent les composantes des forces agissantes sur les différents points matériels, renferme explicitement le temps. On trouve, par exemple, dans le cas d'un point obligé à rester sur une surface donnée et soumis à la seule action de forces centrales, que l'équation différentielle du second ordre de laquelle dépend ce mouvement, se ramène aux quadratures dès qu'on en a trouvé une seule intégrale. Les lignes les plus courtes d'une surface rentrent dans ce cas.

Tout en composant un mémoire étendu relatif à ces recherches, j'ai été entraîné par des questions sur la théorie des nombres, laquelle a toujours été un objet de prédilection pour un grand nombre de géomètres, et ce ne sera qu'après avoir publié les résultats obtenus dans cette matière que je reviendrai à mon travail sur la dynamique. En attendant, j'ose présenter à l'Académie la note dont j'ai parlé ci-dessus et qui vient d'être imprimée dans le journal de M. Crelle.

On y trouvera aussi de grands détails sur une découverte que j'ai antérieurement annoncée à l'Académie: l'intégration complète de ces équations différentielles établies par Legendre, desquelles dépend l'existence d'un maximum ou minimum dans un problème isopérimètre. La méthode dont je me sers est une nouvelle et remarquable application de la fameuse méthode de la variation des constantes arbitraires, et qui repose principalement sur les propriétés importantes des équations différentielles linéaires susceptibles de prendre la forme

$$Ay+\frac{d(By')}{dx}+\frac{d^2(Cy'')}{dx^2}+\cdots+\frac{d^m(Py^{(m)})}{dx^m}=0,$$

$y^{(m)}$ étant mis pour $\frac{d^my}{dx^m}$. On parvient par-là à une proposition simple et générale, et qui se prête aisément aux applications. Par exemple, si on l'applique aux lignes les plus courtes d'une surface fermée, partant d'un même point, lesquelles envelopperont, en général, une courbe formée par leurs intersections successives, l'on aura le théorème „qu'un arc d'une telle ligne, pris depuis le point de départ commun et terminé avant d'avoir atteint le point de son contact avec l'enveloppe commune, est toujours, sur la surface, le plus court chemin entre ses deux termes, mais que cet arc étant prolongé au-delà ou jusqu'au point de contact, il ne sera entre ses deux termes ni le plus grand, ni le plus court chemin."

Je crois que l'on doit regarder le principe de la moindre action comme l'un des plus importants de la mécanique. En effet, on voit dans un mémoire des *Miscellanea Taurinensia*, ouvrage immortel et supérieur à tout éloge, Lagrange jeune faire ressortir d'un seul jet de ce principe la mécanique analytique toute faite. Celui des vitesses virtuelles n'a été appelé qu'après coup pour les démonstrations méthodiques dans des travaux postérieurs. Pourquoi donc la mécanique analytique, fille ingrate, a-t-elle voulu accuser le principe de la moindre action comme inutile? Si les travaux de M. Hamilton, et les recherches dont j'ai parlé ci-dessus, ajoutent essentiellement à la mécanique analytique, c'est encore à ce principe qu'on en sera redevable.

Il me paraît que le principe mentionné n'est pas présenté ordinairement d'une manière assez claire et qu'il est même impossible d'en saisir le vrai sens d'après la seule définition donnée et sans avoir recours à sa démonstration.

Cela vient de ce qu'on oublie d'ajouter, dans la définition même du principe, que sous le signe de l'intégrale qui doit être un minimum, l'on suppose que l'élément du temps soit éliminé au moyen de l'équation des forces vives. Cette dernière étant

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\,ds^2=(U+h)dt^2,$$

où h est la constante arbitraire, ce n'est donc pas l'intégrale

$$\int dt\,\Sigma m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

mais l'intégrale

$$\int\sqrt{U+h}\sqrt{\Sigma m\,ds^2},$$

qui d'après le principe de la moindre action est un minimum. M. Hamilton a eu soin d'en donner un énoncé rigoureux, de même qu'Euler dans sa *Nova Methodus*, etc. Mais il y a une objection un peu essentielle à faire contre la définition de ce principe telle qu'elle a été donnée par Lagrange et qui se rapporte aux mots *maximum* et *minimum*. En effet, l'on prouve aisément que jamais le maximum ne peut avoir lieu; qu'il y a toujours minimum pour un mouvement resserré entre certaines limites et que, passé ces limites, il n'y a ni maximum ni minimum. En appliquant le principe au mouvement uniforme d'un point sur une surface, Lagrange dit que *dans ce cas* il y a minimum, *puisque le maximum ne peut pas avoir lieu;* Lagrange a donc cru qu'il y avait des cas où le minimum devient maximum. Il me paraît qu'en changeant en maximum et minimum, dans les *Miscellanea Taurinensia* et dans ses travaux suivants, le mot minimum dont seul se sont toujours servi Euler et Laplace, Lagrange a voulu, d'une manière succincte et ingénieuse, censurer l'opinion d'Euler qui, par son principe, a cru pouvoir formuler la providence divine. En effet, en admettant comme également possible le maximum et le minimum, si l'on continue à attribuer à l'intégrale en question sa notion métaphysique, ce serait dire que la nature ferait agir ses forces avec la plus grande ou avec la moindre sagesse. Plus tard, ni Lagrange ni d'autres qui l'ont suivi, n'ont eu soin de vérifier le maximum additionnel. A présent la représentation d'une loi comme théorème de maximum ou minimum, perd de plus en plus son caractère physique ou métaphysique, puisqu'on prouve que de grandes classes de problèmes analytiques, par exemple ceux qui dépendent de l'intégration d'une équation à différences partielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables, sont susceptibles d'être traduites en problèmes isopérimètres.

Réciproquement, je prouve dans mon mémoire que tous les problèmes des isopérimètres dans lesquels il y a sous le signe intégral un nombre quelconque de fonctions d'une seule variable avec leurs différentielles *d'un ordre quelconque*, peuvent être ramenés à l'intégration d'une équation à différences partielles du premier ordre.

Il me semble que les remarques précédentes peuvent contribuer à reconnaître qu'il n'y a aucun rapprochement, ni aucune sorte *d'harmonie* entre le principe de la moindre action et la loi de repos, comme l'a cru Euler et même Lagrange. Euler, dans les mémoires de Berlin, a été même de l'avis qu'en considérant un mouvement infiniment petit, il était possible de déduire la loi de repos du principe de la moindre action, et qu'il n'y avait là de difficulté que pour démêler tous les infiniment petits qui entrent dans la question. L'apparence d'une pareille harmonie disparaît déjà en grande partie, si l'on met l'intégrale sous sa juste forme

$$\int \sqrt{U+h}\sqrt{\Sigma m ds^2}.$$

Mais ce qui paraît prouver *à priori* que le rapprochement suggéré par Euler est impossible, c'est que, d'après les remarques faites ci-dessus, l'intégrale dans les mouvements infiniment petits est toujours un véritable minimum, pendant que dans la loi dite de repos, on peut avoir maximum, minimum, ou ni maximum ni minimum.

En finissant, je prends la liberté d'extraire du travail, dont j'ai parlé ci-dessus, les théorèmes suivants que je crois importants.

I.

Soient

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \text{etc.}$$

les $3n$ équations différentielles du mouvement d'un système libre; soit

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m(dx^2+dy^2+dz^2) = (U+h)dt^2$$

l'équation des forces vives, h étant la constante arbitraire; soit V une solution complète de l'équation à différences partielles

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = U+h,$$

solution qui, outre une constante ajoutée par la simple addition, doit contenir $3n-1$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3n-1}$; je dis, en premier lieu, que les $3n$ équations

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n-1}} = \beta_{3n-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t+\tau,$$

dans lesquelles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{3n-1}$, sont $3n$ nouvelles constantes arbitraires, seront les intégrales complètes des équations différentielles proposées avec $6n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3n-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{3n-1}, h, \tau$. Cela étant, supposons que le mouvement éprouve des perturbations et que les équations différentielles du mouvement troublé deviennent

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \text{etc.};$$

si, par les formules du mouvement primitif, on exprime la fonction Ω par t et les $6n$ constantes arbitraires, les différentielles de celles-ci, dans le mouvement troublé, seront

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d\alpha_{3n-1}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_{3n-1}}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau},$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d\beta_{3n-1}}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{3n-1}}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial h}.$$

La première partie du théorème n'est qu'une généralisation facile d'un théorème de M. Hamilton, ce dernier exigeant que les constantes arbitraires soient précisément les valeurs initiales et finales des coordonnées, et que la fonction V satisfasse encore à une seconde équation à différences partielles. La seconde partie du théorème relative à la variation des constantes arbitraires est entièrement nouvelle. Je n'ai proposé ici, pour cause de simplicité, que le cas du mouvement libre, mais j'ai étendu le théorème avec facilité au mouvement d'un système soumis à des conditions quelconques. On trouve au moyen de ce théorème, par le calcul même, des éléments dont les valeurs différentielles, dans le mouvement troublé, prennent la forme simple qu'elles ont dans le théorème, forme que je désigne dans mon mémoire sous le nom de *canonique*. C'est ce qu'on vérifie aisément dans le mouvement elliptique, où l'intégration de l'équation à différences partielles

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = k^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

conduit aux formules connues du mouvement elliptique et en même temps aux six éléments propres à remplir le but proposé, savoir, le grand axe inverse, la racine carrée du semi-paramètre, le produit de cette dernière par le cosinus de l'inclinaison, la distance au noeud ascendant, la longitude du périhélie et le temps du passage par le périhélie.

Comme on déduit, d'une solution complète quelconque d'une équation à différences partielles du premier ordre, toutes les autres solutions complètes, le théorème que je viens d'énoncer donne aussi la solution d'un autre problème intéressant, savoir:

Étant donné un système quelconque d'éléments entre lesquels et le temps on a, dans le mouvement troublé, un système d'équations différentielles de la forme canonique, trouver tous les autres systèmes d'éléments qui jouissent de la même propriété.

La solution de ce problème est contenue dans le théorème analytique suivant.

II.

Soit donné le système d'équations différentielles:

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial H}{db_2}, \quad \ldots, \quad \frac{da_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial b_m},$$
$$\frac{db_1}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{db_m}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial a_m},$$

H étant une fonction quelconque de t et des variables $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$; soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ de nouvelles variables entre lesquelles et les précédentes on a les équations suivantes:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_m} = \beta_m,$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{da_m} = -b_m,$$

ψ étant une fonction quelconque des variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, a_1, a_2, \ldots, a_m$, sans contenir ni t, ni les autres variables: je dis que si l'on exprime, au moyen des équations précédentes, la fonction H par t et les nouvelles variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, on aura entre ces dernières des équations différentielles, précisément de la même forme que les proposées, savoir:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d\alpha_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_m},$$
$$\frac{d\beta_1}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d\beta_m}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial \alpha_m}.$$

On peut déduire de ce théorème d'autres théorèmes moins généraux, en mettant $\psi + \lambda\psi_1 + \mu\psi_2 +$ etc. au lieu de ψ, et en éliminant les multiplicateurs λ, μ, etc., au moyen des équations $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, etc. Les démonstrations de ces théorèmes n'offrent pas de difficulté.

NEUES THEOREM DER ANALYTISCHEN MECHANIK

VON

C. G. J. JACOBI,
PROF. UND AKADEMIKER ZU BERLIN.

Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1838 p. 178—182.
Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 30 p. 117—120.

NEUES THEOREM DER ANALYTISCHEN MECHANIK.

In einer Abhandlung von Encke im Berliner Jahrbuch für 1837 „über die speciellen Störungen" findet man die partiellen Differentialquotienten der Werthe, welche in der Theorie der elliptischen Bewegung eines Himmelskörpers für seine Coordinaten x, y, z und die Componenten seiner Geschwindigkeit x', y', z' erhalten werden. Die Elemente, in Bezug auf welche an dem angeführten Orte die partiellen Differentialquotienten genommen werden, sind die halbe grosse Axe a, der Werth ε der mittleren Anomalie für $t = 0$, die Excentricität e der Ellipse, der Winkel ω zwischen dem Perihel und dem aufsteigenden Knoten, der aufsteigende Knoten Ω der Ebene der Bahn mit der Ebene der x, y, die Neigung i der Ebene der Bahn gegen dieselbe Coordinatenebene. Da die Anzahl der partiell zu differentiirenden Ausdrücke, so wie die Anzahl der Grössen, nach welchen jeder differentiirt wird, *sechs* beträgt, so wird man im Ganzen 36 solcher partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$, etc. haben, welche S. 305 und S. 309 der erwähnten Abhandlung übersichtlich zusammengestellt sind. Diese 36 Ausdrücke werden gebraucht, um die Coëfficienten der Lagrangeschen Störungsformeln zu bilden, in welchen die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction Ω, in Bezug auf die Elemente a, ε, etc. genommen, durch die Differentialquotienten der gestörten Elemente $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$, etc. ausgedrückt werden. Man kann hieraus umgekehrt die Ausdrücke der Grössen $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$, etc. durch die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \Omega}{\partial a}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}$, etc. ableiten. Aber Poisson hat Störungsformeln gegeben, durch welche man direct diese Ausdrücke findet. Um in diesen letzteren Störungsformeln die Coëfficienten zu bestimmen, hat man die *sechs* Integralgleichungen der elliptischen Bewegung nach den Grössen a, ε, etc. aufzulösen, so dass diese Grössen Functionen von x, y, z, x', y', z' und von t werden, und dann diese Functionen nach x, y, z, x', y', z' partiell zu differentiiren. Man wird auf diese Weise wieder 36 Ausdrücke $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$, etc. erhalten, aus welchen die Coëfficienten der Poissonschen Formeln zusammengesetzt sind.

Statt der Grössen a, ε, etc. kann man beliebige, aber von einander unabhängige, sechs Combinationen derselben als Elemente einführen. Hat die Zahl k dieselbe Bedeutung wie in der angeführten Abhandlung, d. h. ist k^2 die Grösse der anziehenden Kraft für die Einheit der Distanz, so will ich statt a die Grösse $\frac{k^2}{2a}$, statt ε die Zeit des Perihelиums $= -\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\cdot\varepsilon$, statt e die Quadratwurzel des halben Parameters, mit k multiplicirt, oder die Grösse $k\sqrt{a(1-e^2)}$, statt i die Grösse $k\sqrt{p}.\cos i$ als Elemente einführen. Setzt man

$$\frac{k^2}{2a} = \alpha, \quad k\sqrt{p} = \beta, \quad k\sqrt{p}.\cos i = \gamma,$$
$$-\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\cdot\varepsilon = \alpha', \quad \omega = \beta', \quad \Omega = \gamma',$$

so wird man leicht aus den Ausdrücken $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$, etc. die partiellen Differentialquotienten von x, y, z, $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $z' = \frac{dz}{dt}$, in Bezug auf α, β, γ, α', β', γ' genommen, oder die 36 Ausdrücke $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, etc. ableiten können. Ebenso wird man, wenn die Ausdrücke $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$, etc. bekannt sind, daraus leicht die 36 Ausdrücke $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, etc. finden. Aber wenn man diese neuen, nur wenig modificirten, Elemente wählt, und die partiellen Differentialquotienten der letzteren Art mit den partiellen Differentialquotienten der ersteren Art vergleicht, so wird man den merkwürdigen Satz finden, *dass die 36 partiellen Differentialquotienten* $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, *etc. den 36 partiellen Differentialquotienten* $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, *etc. gleich oder von ihnen nur durch das Zeichen verschieden sind. In der That hat man:*

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \alpha'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\partial \beta'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial x}{\partial \gamma} = -\frac{\partial \gamma'}{\partial x'},$$
$$\frac{\partial x}{\partial \alpha'} = \frac{\partial \alpha}{\partial x'}, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta'} = \frac{\partial \beta}{\partial x'}, \quad \frac{\partial x}{\partial \gamma'} = \frac{\partial \gamma}{\partial x'},$$
$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \alpha'}{\partial x}, \quad \frac{\partial x'}{\partial \beta} = \frac{\partial \beta'}{\partial x}, \quad \frac{\partial x'}{\partial \gamma} = \frac{\partial \gamma'}{\partial x},$$
$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha'} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial x'}{\partial \beta'} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \frac{\partial x'}{\partial \gamma'} = -\frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

und ganz ähnliche Formeln, wenn man y und z für x setzt. Da α' die Zeit

des Periheliums ist, so kommen in den Integralgleichungen der elliptischen Bewegung die Grössen t und α' nur in der Verbindung $t-\alpha'$ vor; man hat ferner zufolge des Satzes von der lebendigen Kraft:

$$\alpha = \frac{k^2}{2a} = \frac{k^2}{\sqrt{xx+yy+zz}} - \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y'+z'z').$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha'} = -\frac{dx'}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2},$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{-k^2 x}{(xx+yy+zz)^{\frac{3}{2}}},$$

woraus man sieht, dass die Gleichung

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha'} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

und die ähnlichen in Bezug auf y und z die *Differentialgleichungen des Problems* selber sind, die also nur besondere Formeln aus einem Systeme *ganz ähnlicher* sind, die aus den Integralgleichungen abgeleitet werden können. Es giebt eine unendliche Menge Systeme von Elementen, die man für α, β, etc. wählen kann, für welche die obigen Formeln ebenfalls gelten; alle diese Systeme können aus einer allgemeinen Formel gefunden werden.

Ich habe das Beispiel der elliptischen Bewegung eines Himmelskörpers gewählt, weil in diesem das Theorem durch die bekannten Formeln ohne Schwierigkeit verificirt werden kann. Aber es ist das für dieses Beispiel aufgestellte Theorem nur ein besonderer Fall eines allgemeinen, welches für alle Probleme der Mechanik gilt, in welchen das Princip der Erhaltung der Summe der lebendigen Kräfte stattfindet, und auch ausserdem für den Fall, in welchem die Kräftefunction ausser den Coordinaten noch die Zeit t *explicite* enthält, wenn man nämlich in den Lagrangeschen Formeln der Dynamik *Kräftefunction* diejenige Function nennt, deren partielle Differentialquotienten, in Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte des Systems genommen, die auf diese Punkte in der Richtung der Coordinatenaxen wirkenden Kräfte geben. Nach einer allgemeinen Formel, welche eine willkürliche Function involvirt, kann man immer solche Systeme von Elementen finden, für die mit den obigen ganz analoge Formeln gelten. Auch führt eine besondere Methode der Integration, welche ich an einem anderen Orte mittheilen werde, schon von selber auf ein solches System von Elementen. Wenn das System materieller Punkte ganz frei ist, so werden in allen mechanischen Problemen von der bezeichneten Gattung die dem

Werthe $t=0$ entsprechenden Werthe der Coordinaten und der nach den Coordinatenaxen zerlegten Geschwindigkeiten der materiellen Punkte ein derartiges System von Elementen. Wenn zwischen den n Punkten irgend welche Verbindungen stattfinden, welche durch $3n-m$ Bedingungsgleichungen gegeben seien, so kann man die Position der Punkte immer durch m von einander unabhängige Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ bestimmen. Setzt man $q_i' = \frac{dq_i}{dt}$ und drückt die halbe Summe der lebendigen Kräfte T durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, q_1', q_2', \ldots, q_m'$ aus, so werden ein System von Elementen der genannten Art die dem $t=0$ entsprechenden Werthe der Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und der Grössen

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial T}{\partial q_m'}.$$

Nennt man diese Anfangswerthe $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_m^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0$, so hat man immer:

$$\frac{\partial q_\iota}{\partial q_\varkappa^0} = -\frac{\partial p_\varkappa^0}{\partial p_\iota}, \quad \frac{\partial q_\iota}{\partial p_\varkappa^0} = \frac{\partial q_\varkappa^0}{\partial p_\iota},$$

$$\frac{\partial p_\iota}{\partial q_\varkappa^0} = \frac{\partial p_\varkappa^0}{\partial q_\iota}, \quad \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa^0} = -\frac{\partial q_\varkappa^0}{\partial q_\iota},$$

in welchen Formeln jeder der beiden Indices ι und $\varkappa$ alle Werthe $1, 2, \ldots, m$ annehmen kann. Die partiellen Differentialquotienten links vom Gleichheitszeichen setzen voraus, dass man in die Integralgleichungen des Problems die Grössen q_ι^0 und p_ι^0 als die willkürlichen Constanten eingeführt und diese Gleichungen dann nach den Grössen q_ι und p_ι aufgelöst hat, so dass jede derselben eine Function von t und von den $2m$ Grössen q_ι^0, p_ι^0 wird. Umgekehrt setzen die partiellen Differentialquotienten rechts vom Gleichheitszeichen voraus, dass man die Integralgleichungen nach den Grössen q_ι^0, p_ι^0 aufgelöst hat, so dass jede dieser Grössen eine Function der Zeit t und der $2m$ Grössen q_ι und p_ι wird. Man sieht leicht, dass man die letzteren Ausdrücke aus den ersteren bloss dadurch erhalten kann, dass man q_ι und q_ι^0, p_ι und p_ι^0 mit einander vertauscht und $-t$ statt t setzt.

Für jedes System von Elementen, welches die im Vorigen erwähnte Eigenschaft besitzt, erhalten die Störungsformeln eine möglichst einfache Gestalt, indem der Differentialquotient jedes gestörten Elementes, genommen nach der Zeit, einem einzigen partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction gleich wird, dessen Coëfficient nur $+1$ oder -1 ist, wie dies für die Elemente q_ι^0, p_ι^0 bekannt ist.

Königsberg, den 21. November 1838.

SUR UN THÉORÈME DE POISSON

PAR

M. C. G. J. JACOBI.

Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. XI p. 529.