ÜBER DIE ABBILDUNG EINES UNGLEICHAXIGEN ELLIPSOIDS AUF EINER EBENE, BEI WELCHER DIE KLEINSTEN THEILE ÄHNLICH BLEIBEN.

(Aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi mitgetheilt durch S. Cohn.)

Zwei bekannte Kartenprojectionen, die *stereographische* und Mercatorsche, haben die Eigenschaft, dass sich alle Linien in der Projection unter denselben Winkeln wie auf der Kugel schneiden. Lambert wurde hierdurch auf die Frage geführt, allgemein die Projectionsarten zu suchen, welche diese Eigenschaften haben. Er hat dieselbe in einer sehr lehrreichen Abhandlung: *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* p. 105—199 im dritten Theil seiner mathematischen Beiträge gelöst, und sie auch auf das *abgeplattete Erdsphäroid* ausgedehnt. Lagrange hat hiervon Gelegenheit genommen, für *alle Umdrehungsflächen* die betreffende Differentialgleichung aufzustellen und auf die allgemeinste Art zu integriren. Endlich hat Gauss in einer von der Kopenhagener Akademie gekrönten Abhandlung p. 5—30 im dritten Heft von Schumachers *Astronomischen Abhandlungen* die Differentialgleichung aufgestellt, auf welche die Aufgabe für beliebige Flächen führt, auch dieselbe für diejenigen speciellen Flächen zweiter Ordnung integrirt, die zugleich Umdrehungsflächen, Kegel oder Cylinder sind, für welche Flächen, wie man leicht sieht, diese Integration allgemein ausgeführt werden kann. Die Integration für *beliebige* Flächen zweiter Ordnung kann jedoch, wie ich bereits vor längerer Zeit in einer vor der Berliner Akademie gelesenen Note bemerkt habe, mittelst Einführung der sogenannten *elliptischen Coordinaten* auf Quadraturen zurückgeführt werden. Ich will im Folgenden die hierauf bezüglichen Formeln näher entwickeln.

Es sei die Fläche dadurch bestimmt, dass die drei rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte, x, y, z, als Functionen zweier Gröfsen t und u gegeben sind. Es sei das Quadrat eines Linienelementes der Fläche gegeben,

$$dx^2+dy^2+dz^2 = T dt^2 + 2U dt\,du + V du^2,$$

so hat man den Satz, *dass die Gröfsen T, U, V hinreichen, das Elementardreieck zu bestimmen, welches von drei unendlich nahen Punkten der Fläche gebildet wird, die den Gröfsen t, u; $t+\tau, u+\upsilon$; $t+\tau', u+\upsilon'$ entsprechen, wo τ, τ' unendlich kleine Incremente von t, und υ, υ' unendlich kleine Incremente von u bedeuten.*

Es seien nämlich A, B, C respective die drei Punkte der Fläche, so werden ihre Coordinaten

$$\begin{array}{ccc} x, & y, & z, \\ x+\frac{\partial x}{\partial t}\tau+\frac{\partial x}{\partial u}\upsilon, & y+\frac{\partial y}{\partial t}\tau+\frac{\partial y}{\partial u}\upsilon, & z+\frac{\partial z}{\partial t}\tau+\frac{\partial z}{\partial u}\upsilon, \\ x+\frac{\partial x}{\partial t}\tau'+\frac{\partial x}{\partial u}\upsilon', & y+\frac{\partial y}{\partial t}\tau'+\frac{\partial y}{\partial u}\upsilon', & z+\frac{\partial z}{\partial t}\tau'+\frac{\partial z}{\partial u}\upsilon', \end{array}$$

wo nach der Voraussetzung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = T,$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u} = U,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = V.$$

Es wird hiernach

$$\overline{AB}^2 = T\tau^2+2U\tau\upsilon+V\upsilon^2,$$

$$\overline{AC}^2 = T\tau'^2+2U\tau'\upsilon'+V\upsilon'^2,$$

ferner

$$\begin{aligned} AB.AC.\cos BAC &= \left(\frac{\partial x}{\partial t}\tau+\frac{\partial x}{\partial u}\upsilon\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\tau'+\frac{\partial x}{\partial u}\upsilon'\right) \\ &+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\tau+\frac{\partial y}{\partial u}\upsilon\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\tau'+\frac{\partial y}{\partial u}\upsilon'\right) \\ &+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\tau+\frac{\partial z}{\partial u}\upsilon\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\tau'+\frac{\partial z}{\partial u}\upsilon'\right) \\ &= T\tau\tau'+U(\tau\upsilon'+\tau'\upsilon)+V\upsilon\upsilon', \end{aligned}$$

wie man auch leicht aus der Formel

$$\overline{BC}^2 = T(\tau-\tau')^2+2U(\tau-\tau')(\upsilon-\upsilon')+V(\upsilon-\upsilon')^2$$

findet. Es wird auch

$$\overline{AB}^2\cdot\overline{AC}^2\sin^2 BAC = 4(\Delta ABC)^2 = (TV-U^2)(\tau\upsilon'-\tau'\upsilon)^2,$$

welches die aus der Theorie der *Multiplication der quadratischen Formen* bekannte Gleichung

$$(T\tau^2+2U\tau v+Vv^2)(T\tau'^2+2U\tau'v'+Vv'^2)$$

$$= (T\tau\tau'+U(\tau\upsilon'+\tau'\upsilon)+V\upsilon\upsilon')^2+(TV-U^2)(\tau v'-\tau' v)^2$$

giebt.

Es folgt aus dem Vorstehenden, dass, wenn für eine andere Fläche x, y, z andere Functionen von t und u bedeuten, und *entsprechende Punkte* diejenigen Punkte der beiden Flächen genannt werden, welche denselben Werthen der Gröfsen t und u zugehören, die kleinsten einander entsprechenden Theile der beiden Flächen einander ähnlich sind, wenn für die zweite Fläche die drei Gröfsen T, U, V denen der ersten Fläche proportional bleiben.

Bei Auflösung der Aufgabe, eine gegebene Fläche so auf einer anderen gegebenen Fläche abzubilden, dass die kleinsten Theile einander ähnlich bleiben, genügt es, wenn man für die eine Fläche eine *Ebene* nimmt, welche die Vermittelung zwischen den beiden Flächen übernimmt. Denn kann man unter der gegebenen Bedingung jede Fläche auf einer Ebene und die Ebene auf jeder Fläche abbilden, so kann man unter derselben Bedingung auch jede Fläche auf jeder anderen abbilden. Man wird ferner die Aufgabe in ihrer ganzen Vollständigkeit lösen können, wenn man alle Correlationssysteme der Ebene selbst findet, die so beschaffen sind, dass die kleinsten Theile einander ähnlich werden, oder auf alle möglichen Arten unter der angegebenen Bedingung die Ebene auf sich selber abbilden kann.

Es seien p und q die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Ebene, so sind p und q als solche Functionen von t und u zu bestimmen, dass

$$dp^2+dq^2 = M(T dt^2+2U dt\,du+V du^2)$$

oder

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 = MT, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 = MV,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial u}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial u} = MU,$$

wo $\sqrt{M}$ die Gröfse ist, mit welcher man in dem Punkte, dessen Coordinaten

p und q sind, benachbarten Linienelemente der Ebene multipliciren muss, um die entsprechenden Linienelemente der gegebenen Fläche zu erhalten.

Da die Elemente dt und du gänzlich von einander unabhängig und $dp + i\,dq$ und $dp - i\,dq$ lineare Functionen derselben sind, so kann man die Ausdrücke

$$dp + i\,dq \quad \text{und} \quad dp - i\,dq$$

definiren als lineare Factoren des quadratischen Ausdrucks $T\,dt^2 + 2U\,dt\,du + V\,du^2$, welche zugleich vollständige Differentiale sind. Dasselbe gilt von den Ausdrücken, welche man erhält, wenn man $dp + i\,dq$ und $dp - i\,dq$ noch mit beliebigen Functionen respective von $p + iq$ und $p - iq$ multiplicirt. *Um daher p und q auf die allgemeinste Art als Functionen von t und u zu finden, zerfälle man den gegebenen Ausdruck des Quadrats des Linienelementes*

$$T\,dt^2 + 2U\,dt\,du + V\,du^2$$

in seine linearen Factoren, multiplicire jeden derselben mit einer solchen Function von t und u, dass er ein vollständiges Differential wird, und setze die beiden Integrale beliebigen Functionen respective von $p + iq$ und von $p - iq$ gleich.

Ich will als Beispiele die drei Fälle betrachten, in welchen die Fläche durch Umdrehung erzeugt oder ein Kegel oder ein Cylinder ist, und dann zu der Aufgabe übergehen, ein dreiaxiges Ellipsoid auf einer Fläche abzubilden.

I.

Abbildung von Umdrehungsflächen auf einer Ebene.

Es sei

$$x = t\cos u, \quad y = t\sin u, \quad z = F(t),$$

wie man für eine Umdrehungsfläche annehmen kann. Es wird dann das Quadrat des Linienelementes

$$T\,dt^2 + t^2\,du^2,$$

wo

$$T = 1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

eine Function bloss von t ist. Es werden hier

$$\frac{\sqrt{T}\,dt}{t} + i\,du \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{T}\,dt}{t} - i\,du$$

die integrablen Factoren, und daher

$$f(p + iq) = \mathrm{T} + iu,$$
$$\varphi(p - iq) = \mathrm{T} - iu,$$

wo $\mathrm{T} = \int \frac{\sqrt{T}\,dt}{t}$, die allgemeinsten Gleichungen, welche zwischen p, q und t, u stattfinden können. Setzt man

$$f(x) = \varphi(x) = x,$$

so erhält man

$$p = \mathrm{T}, \quad q = u,$$

und es wird t der Quotient des Linienelementes der Fläche und der Ebene.

Es bedeutet in diesen Formeln die z-Axe die Umdrehungsaxe, t den Halbmesser des Parallelkreises, u die Länge. Man erhält daher die der Mercatorschen entsprechende Projectionsart, in welcher die durch die einzelnen Längengrade gehenden Meridiane durch äquidistante Parallellinien abgebildet werden, während die darauf senkrecht stehenden geraden Linien dem Aequator und den Parallelkreisen entsprechen. Setzt man dagegen

$$f(x) = \varphi(x) = \log x,$$

so erhält man, wenn

$$p = r\cos\varphi, \quad q = r\sin\varphi$$

gesetzt wird,

$$\log r = \mathrm{T}, \quad \varphi = u,$$

und es werden sich die entsprechenden Linienelemente der Projection und der Fläche wie der Radiusvector und der Halbmesser des Parallelkreises verhalten. Diese Projectionsart entspricht der *stereographischen*, weil in ihr die Meridiane durch gerade Linien dargestellt werden, die von einem Punkt ausgehen, der Aequator und die Parallelkreise dagegen durch Kreise, welche diesen Punkt zum Mittelpunkt haben. Die Curven, welche auf der Umdrehungsfläche alle Meridiane unter demselben Winkel schneiden, werden in der ersten Projection gerade Linien, in der zweiten eine Art Spiralen, deren Polargleichung

$$\alpha + \beta\log r + \gamma\varphi = 0$$

ist. Lambert hat noch den Fall betrachtet, wo

$$f(x) = \varphi(x) = x^m,$$

und Werthe von m angegeben, für welche die Formeln eine praktische Anwendung für gewisse specielle Zwecke finden, die man durch die Projection zu erreichen wünschen kann.

II.

Abbildung von Kegelflächen auf einer Ebene.

Es sei

$$x = t\cos u, \quad y = t\sin u\cos v, \quad z = t\sin u\sin v,$$

wo v eine Function bloss von u bedeute, so wird die Fläche ein Kegel, dessen Spitze der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Es wird hiernach

$$dx^2+dy^2+dz^2 = dt^2+t^2A\,du^2,$$

wo

$$A = 1+\sin^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

eine Function bloss von u ist. Es werden daher die beiden integrablen Factoren des Quadrates des Linienelementes des Kegels

$$\frac{dt}{t}+i\sqrt{A}\,du, \quad \frac{dt}{t}-i\sqrt{A}\,du,$$

und daher die gesuchten Gleichungen in ihrer allgemeinsten Form, wenn man

$$\int\sqrt{A}\,du = \int\sqrt{du^2+\sin^2 u\,dv^2} = \sigma$$

setzt,

$$f(p+iq) = \log t+i\sigma,$$
$$\varphi(p-iq) = \log t-i\sigma.$$

Setzt man

$$f(x) = \varphi(x) = \log x,$$

so erhält man

$$p = t\cos\sigma, \quad q = t\sin\sigma$$

und daher diejenige Abbildung des Kegels, welche seine Abwickelung ergiebt.

III.

Abbildung von cylindrischen Flächen auf einer Ebene.

Wenn y eine Function bloss von x, und z von x und y unabhängig ist, erhält man eine cylindrische Fläche. Man kann daher

$$x = t, \quad y = F(t), \quad z = u$$

setzen, woraus

$$dx^2+dy^2+dz^2 = T\,dt^2+du^2$$

folgt, wo

$$T = 1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

eine Function bloss von t ist. Die beiden integrablen Factoren des Quadrates des Linienelementes des Cylinders werden

$$\sqrt{T}dt+i\,du, \quad \sqrt{T}dt-i\,du.$$

Setzt man daher

$$\int\sqrt{T}dt = \int\sqrt{dx^2+dy^2} = \sigma,$$

wo σ den Bogen eines zur Kante des Cylinders senkrechten Schnittes oder des Schnittes der xy-Ebene bedeutet, so werden die verlangten Gleichungen:

$$f(p+iq) = \sigma+iz, \quad \varphi(p-iq) = \sigma-iz.$$

Setzt man

$$f(x) = \varphi(x) = x,$$

so erhält man

$$p = \sigma, \quad q = z = u,$$

und daher wieder diejenige Abbildung, die durch die Abwickelung des Cylinders gegeben wird.

Abbildung eines Ellipsoids und der beiden Hyperboloide auf einer Ebene.

Es seien b und c gegebene positive Constanten und c die gröſsere derselben; es seien ferner ρ, ρ_1, ρ_2 drei Gröſsen, von denen die erste gröſser als c, die dritte kleiner als b und die zweite zwischen b und c liegt; so werden

$$1 = \frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2},$$
$$1 = \frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_1^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho_1^2-c^2},$$
$$1 = \frac{x^2}{\rho_2^2}+\frac{y^2}{\rho_2^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho_2^2-c^2}$$

die Gleichungen eines Ellipsoids, eines einflächigen und eines zweiflächigen Hyperboloids. Betrachtet man x, y, z als Functionen von ρ, ρ_1, ρ_2, wie sie durch die vorstehenden Gleichungen gegeben werden, so findet man, wie bekannt ist,

$$dx^2+dy^2+dz^2 = \frac{(\rho^2-\rho_1^2)(\rho^2-\rho_2^2)}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}d\rho^2+\frac{(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho_1^2-\rho^2)}{(\rho_1^2-b^2)(\rho_1^2-c^2)}d\rho_1^2+\frac{(\rho_2^2-\rho^2)(\rho_2^2-\rho_1^2)}{(\rho_2^2-b^2)(\rho_2^2-c^2)}d\rho_2^2.$$

Betrachtet man nach einander erstens ρ, zweitens ρ_1, drittens ρ_2 als constant, so giebt der vorstehende Ausdruck die Quadrate der Linienelemente der drei genannten Flächen:

1) *für das Ellipsoid* (ρ constant)

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (\rho_1^2-\rho_2^2)\left[\frac{(\rho^2-\rho_1^2)\,d\rho_1^2}{(\rho_1^2-b^2)(c^2-\rho_1^2)}+\frac{(\rho^2-\rho_2^2)\,d\rho_2^2}{(b^2-\rho_2^2)(c^2-\rho_2^2)}\right];$$

2) *für das einflächige Hyperboloid* (ρ_1 constant)

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (\rho^2-\rho_2^2)\left[\frac{(\rho^2-\rho_1^2)\,d\rho^2}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}+\frac{(\rho_1^2-\rho_2^2)\,d\rho_2^2}{(b^2-\rho_2^2)(c^2-\rho_2^2)}\right];$$

3) *für das zweiflächige Hyperboloid* (ρ_2 constant)

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (\rho^2-\rho_1^2)\left[\frac{(\rho^2-\rho_2^2)\,d\rho^2}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}+\frac{(\rho_1^2-\rho_2^2)\,d\rho_1^2}{(\rho_1^2-b^2)(c^2-\rho_1^2)}\right].$$

Die linearen integrablen Factoren dieser Ausdrücke werden:

$$(1.)\qquad \sqrt{\frac{\rho^2-\rho_1^2}{(\rho_1^2-b^2)(c^2-\rho_1^2)}}\,d\rho_1 \pm i\sqrt{\frac{\rho^2-\rho_2^2}{(b^2-\rho_2^2)(c^2-\rho_2^2)}}\,d\rho_2;$$

$$(2.)\qquad \sqrt{\frac{\rho^2-\rho_1^2}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}\,d\rho \pm i\sqrt{\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{(b^2-\rho_2^2)(c^2-\rho_2^2)}}\,d\rho_2;$$

$$(3.)\qquad \sqrt{\frac{\rho^2-\rho_2^2}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}\,d\rho \pm i\sqrt{\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{(\rho_1^2-b^2)(c^2-\rho_1^2)}}\,d\rho_1,$$

und man erhält in jedem der drei Fälle die allgemeinste Auflösung der Aufgabe, wenn man die Integrale der beiden dem Doppelzeichen $\pm$ entsprechenden Ausdrücke respective einer willkürlichen Function von $p+iq$ und einer willkürlichen Function von $p-iq$ gleich setzt.

Abbildung eines Ellipsoids auf einer Ebene.

$$\rho > c > \rho_1 > b > \rho_2.$$

$$U = \int\sqrt{\frac{\rho^2-\rho_1^2}{(\rho_1^2-b^2)(c^2-\rho_1^2)}}\,d\rho_1,\qquad V = \int\sqrt{\frac{\rho^2-\rho_2^2}{(b^2-\rho_2^2)(c^2-\rho_2^2)}}\,d\rho_2.$$

1) In U ist ρ_1 variabel, ρ constant. Man setze

$$\rho_1^2-b^2 = y^2(c^2-\rho_1^2) \quad\text{oder}\quad \rho_1^2(1+y^2) = b^2+c^2y^2,$$

so wird

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)(c^2-\rho_1^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(b^2+c^2y^2)}},$$

$$\rho^2-\rho_1^2 = \frac{\rho^2-b^2+(\rho^2-c^2)y^2}{1+y^2},$$

und daher

$$U = \int\sqrt{\frac{\rho^2-b^2+(\rho^2-c^2)y^2}{b^2+c^2y^2}}\cdot\frac{dy}{1+y^2}.$$

Es sei

$$y = \frac{b}{c}\operatorname{tg}\varphi,$$

so wird

$$\rho^2-b^2+(\rho^2-c^2)y^2 = \frac{(\rho^2-b^2)c^2-\rho^2(c^2-b^2)\sin^2\varphi}{c^2\cos^2\varphi},$$

$$\frac{dy}{(1+y^2)\sqrt{b^2+c^2y^2}} = \frac{c\cos\varphi\,d\varphi}{c^2-(c^2-b^2)\sin^2\varphi},$$

und daher, wenn man

$$\frac{\rho^2(c^2-b^2)}{c^2(\rho^2-b^2)} = k^2,\qquad \frac{c^2-b^2}{c^2} = k^2\sin^2\alpha$$

setzt,

$$U = \frac{\sqrt{\rho^2-b^2}}{c}\int\frac{\Delta\varphi\,d\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi},$$

oder da

$$\frac{\rho^2-b^2}{\rho^2} = \sin^2\alpha,\quad \frac{b^2}{\rho^2} = \cos^2\alpha,\qquad \frac{b^2}{c^2} = \Delta^2\alpha$$

wird,

$$U = \frac{\sin\alpha\,\Delta\alpha}{\cos\alpha}\int\frac{\Delta\varphi\,d\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\,\Delta\alpha\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}-k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}.$$

Setzt man

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u,\qquad \int\frac{d\alpha}{\Delta\alpha} = a,$$

so wird, nach den von mir in den *Fund. Nov.* eingeführten Bezeichnungen,

$$U = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a)\,\Delta\operatorname{am}(a).u-\Pi(u,a)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{e^{2hu}.\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)},$$

wenn man

$$h = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a)\,\Delta\operatorname{am}(a)-Z(a)$$

$$= -\frac{d\log\Theta(a)\cos\operatorname{am}(a)}{da} = -\frac{d\log H(a+K)}{da}$$

setzt. Wenn

$$u = \frac{2K}{\pi} u', \qquad a = \frac{2K}{\pi} a', \qquad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

so wird

$$\Theta(u) = 1 - 2q \cos 2u' + 2q^4 \cos 4u' - 2q^9 \cos 6u' + \cdots,$$
$$H(u) = 2\sqrt[4]{q}\,[\sin u' - q^2 \sin 3u' + q^6 \sin 5u' - q^{12} \sin 7u' + \cdots],$$

und daher

$$\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)} = \frac{1 - 2q\cos 2(u'+a') + 2q^4 \cos 4(u'+a') - \cdots}{1 - 2q\cos 2(u'-a') + 2q^4 \cos 4(u'-a') - \cdots},$$
$$H(a+K) = 2\sqrt[4]{q}\,[\cos a' + q^2 \cos 3a' + q^6 \cos 5a' + \cdots],$$

und daher

$$h = -\frac{d \log H(a+K)}{\frac{2K}{\pi}\, da'} = \frac{\pi}{2K} \frac{\sin a' + 3q^2 \sin 3a' + 5q^6 \sin 5a' + \cdots}{\cos a' + q^2 \cos 3a' + q^6 \cos 5a' + \cdots}.$$

Ich bemerke noch, dass

$$\mathrm{tg}^2 \varphi = \mathrm{tg}^2 \mathrm{am}(u) = \frac{c^2(\rho_1^2 - b^2)}{b^2(c^2 - \rho_1^2)},$$

und daher

$$\cos^2\varphi = \frac{b^2(c^2-\rho_1^2)}{\rho_1^2(c^2-b^2)}, \qquad \sin^2\varphi = \frac{c^2(\rho_1^2-b^2)}{\rho_1^2(c^2-b^2)},$$
$$k^2\sin^2\varphi = \frac{\rho^2(\rho_1^2-b^2)}{\rho_1^2(\rho^2-b^2)}, \qquad \Delta^2\varphi = \frac{b^2(\rho^2-\rho_1^2)}{\rho_1^2(\rho^2-b^2)}.$$

Man sieht, dass $\frac{1}{k^2}$ und $\sin^2\varphi$ dieselben Functionen respective von ρ und ρ_1 sind. Wenn ρ_1 von b bis c wächst, wachsen φ und u' von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und u von 0 bis K.

2) Man erhält iV aus U, wenn man ρ_1 in ρ_2 verwandelt. Hierbei bleiben die Constanten k, α, a, a', h unverändert, und es wird nur u verändert, und zwar nimmt es, weil ρ_2 immer kleiner als b bleiben soll, einen imaginären Werth an, welchen ich mit $i(K'+v)$ bezeichnen werde. Man wird dann die betreffenden Formeln erhalten, wenn man in den zuletzt aufgestellten $i(K'+v)$ für u und daher $\mathrm{am}(i(K'+v))$ für φ und gleichzeitig ρ_2 für ρ_1 setzt. Man erhält hieraus

$$\frac{-1}{k^2\sin^2\mathrm{am}(i(K'+v))} = \frac{\rho_2^2(\rho^2-b^2)}{\rho^2(b^2-\rho_2^2)}$$

oder

$$-\sin^2\mathrm{am}(vi) = \mathrm{tg}^2\mathrm{am}(v, k') = \frac{\rho_2^2(\rho^2-b^2)}{\rho^2(b^2-\rho_2^2)},$$

woraus, wenn man $\mathrm{am}(v, k') = \psi$ setzt,

$$\cos^2\psi = \frac{\rho^2(b^2-\rho_2^2)}{b^2(\rho^2-\rho_2^2)}, \qquad \sin^2\psi = \frac{\rho_2^2(\rho^2-b^2)}{b^2(\rho^2-\rho_2^2)},$$

und, da $k'^2 = \frac{b^2(\rho^2-c^2)}{c^2(\rho^2-b^2)}$, auch

$$k'^2\sin^2\psi = \frac{\rho_2^2(\rho^2-c^2)}{c^2(\rho^2-\rho_2^2)}, \qquad \Delta^2(\psi, k') = \frac{\rho^2(c^2-\rho_2^2)}{c^2(\rho^2-\rho_2^2)}$$

folgt. Es wird ferner

$$V = h(K'+v) + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(iK'+iv+a)}{\Theta(K'i+iv-a)}.$$

Da

$$\Theta(iK'+u) = i.e^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}} H(u),$$

so wird dieser Ausdruck, wenn man, wie verstattet ist, den durch Addition hinzugekommenen constanten Term fortläſst,

$$V = hv + \frac{1}{2i}\log\frac{H(a+iv)}{H(a-iv)}$$
$$= hv + \mathrm{Arctg}\,\frac{\cos a'(e^{v'}-e^{-v'}) - q^2\cos 3a'(e^{3v'}-e^{-3v'}) + \cdots}{\sin a'(e^{v'}+e^{-v'}) - q^2\sin 3a'(e^{3v'}+e^{-3v'}) + \cdots},$$

wo $v' = \frac{\pi v}{2K}$.

Wenn ρ_2 von 0 bis b zunimmt, wächst gleichzeitig v von 0 bis K' und $e^{v'}$ von 1 bis $\frac{1}{\sqrt{q}}$.

Will man bei Erhaltung der Aehnlichkeit der kleinsten Theile das Ellipsoid so auf einer Ebene abbilden, dass seine Krümmungslinien, welche Durchschnitte mit confocalen *zwei*flächigen Hyperboloiden sind, *gerade Linien*, die aus einem festen Punkte ausgehen, die Krümmungslinien dagegen, welche Durchschnitte mit confocalen *ein*flächigen Hyperboloiden sind, *Kreise* werden, die den festen Punkt zum Mittelpunkt haben, so findet man aus jedem gegebenen Punkte des Ellipsoids mittelst der obigen Formeln die Abscissen und Ordinaten $r\cos\eta$ und $r\sin\eta$ des entsprechenden Punktes der Ebene. Ist nämlich der feste Punkt der Anfangspunkt der Polarcoordinaten, so werden dieselben

$$r = e^{hu}\sqrt{\frac{1-2q\cos 2(u'+a')+2q^4\cos 4(u'+a')-\cdots}{1-2q\cos 2(u'-a')+2q^4\cos 4(u'-a')-\cdots}},$$

$$\eta = hv + \operatorname{Arc\,tg}\frac{\cos a'(e^{v'}-e^{-v'})-q^2\cos 3a'(e^{3v'}-e^{-3v'})+\cdots}{\sin a'(e^{v'}+e^{-v'})-q^2\sin 3a'(e^{3v'}+e^{-3v'})+\cdots}.$$

Dem durch diese Polarcoordinaten bestimmten Punkte der Ebene entsprechen Punkte des Ellipsoids, deren Coordinaten

$$x = \frac{\rho\rho_1\rho_2}{bc},$$

$$y = \sqrt{\frac{(\rho^2-b^2)(\rho_1^2-b^2)(b^2-\rho_2^2)}{b^2(c^2-b^2)}},$$

$$z = \sqrt{\frac{(\rho^2-c^2)(c^2-\rho_1^2)(c^2-\rho_2^2)}{c^2(c^2-b^2)}}$$

sind.

Es ist zufolge der obigen Substitutionen, wenn man $\psi = \operatorname{am}(v, k')$ setzt,

$$\rho_1^2 = \frac{b^2}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}, \qquad \rho_2^2 = \frac{b^2\sin^2\psi}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi},$$

$$\rho_1^2-b^2 = \frac{b^2k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}, \qquad b^2-\rho_2^2 = \frac{b^2\sin^2\alpha\cos^2\psi}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi},$$

$$c^2-\rho_1^2 = \frac{c^2k^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}, \qquad c^2-\rho_2^2 = \frac{c^2\sin^2\alpha\,\Delta^2(\psi,k')}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi}.$$

Fügt man hierzu die Formeln

$$\frac{b^2}{c^2} = \Delta^2\alpha, \quad \frac{b^2(\rho^2-b^2)}{c^2-b^2} = \frac{\rho^2\Delta^2\alpha}{k^2}, \quad \frac{c^2(\rho^2-c^2)}{c^2-b^2} = \frac{\rho^2k'^2}{k^2\Delta^2\alpha},$$

so erhält man

$$x = N.\Delta^2\alpha\sin\psi, \quad y = N.\Delta^2\alpha\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\psi, \quad z = N.k'\sin^2\alpha\cos\varphi\,\Delta(\psi,k'),$$

wo

$$N = \frac{\rho}{\Delta\alpha\sqrt{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi)}}.$$

Die Gleichung des Ellipsoids selber wird

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2\sin^2\alpha}+\frac{z^2\Delta^2\alpha}{\rho^2k'^2\sin^2\alpha} = 1.$$

Für das *längliche Umdrehungsellipsoid* wird

$$b = c, \quad k^2 = 0, \quad q = 0, \quad K = \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\varphi = u = u', \quad \alpha = a = a', \quad h = \operatorname{tg}\alpha.$$

Man hat ferner

$$v = v' = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos\psi} = \log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi), \qquad \frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}} = \sin\psi.$$

Man erhält daher aus dem ersten System Formeln die Polarcoordinaten eines Punktes der Ebene

$$r = e^{\operatorname{tg}\alpha.\varphi},$$

$$\eta = \operatorname{tg}\alpha\log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi)+\operatorname{Arc\,tg}(\operatorname{cotg}\alpha\sin\psi),$$

und die rechtwinkligen Coordinaten des entsprechenden Punktes des länglichen Umdrehungsellipsoids

$$x = N.\sin\psi, \quad y = N.\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\psi, \quad z = N.\sin^2\alpha\cos\varphi\cos\psi,$$

wo

$$N = \frac{\rho}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi}} = \frac{\rho}{\sqrt{\sin^2\psi+\sin^2\alpha\cos^2\psi}},$$

und die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2+z^2}{\rho^2\sin^2\alpha} = 1.$$

Wenn das Ellipsoid sich einem *abgeplatteten Umdrehungsellipsoid* annähert, oder b eine kleine Gröfse ist, wodurch k sich der Einheit nähert, muss man die vorstehenden Formeln wie folgt transformiren.

Ich führe zuerst für u und a ihre Complemente

$$K-u = u_1, \qquad K-a = a_1$$

ein. Setzt man

$$\operatorname{am}(u_1) = \varphi_1, \qquad \operatorname{am}(a_1) = \alpha_1,$$

so wird

$$\sin^2\alpha_1 = \frac{c^2}{\rho^2}, \qquad \cos^2\alpha_1 = \frac{\rho^2-c^2}{\rho^2}, \qquad \Delta^2\alpha_1 = \frac{\rho^2-c^2}{\rho^2-b^2},$$

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{(\rho^2-b^2)(c^2-\rho_1^2)}{(c^2-b^2)(\rho^2-\rho_1^2)}, \quad \cos^2\varphi_1 = \frac{(\rho^2-c^2)(\rho_1^2-b^2)}{(c^2-b^2)(\rho^2-\rho_1^2)}, \quad \Delta^2\varphi_1 = \frac{(\rho^2-c^2)\rho_1^2}{c^2(\rho^2-\rho_1^2)},$$

und die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{\Delta^2\alpha_1.y^2}{\rho^2\cos^2\alpha_1}+\frac{z^2}{\rho^2\cos^2\alpha_1} = 1,$$

und es wird nach einigen leichten Reductionen

$$x = M.\Delta^2\alpha_1\,\Delta\varphi_1\sin\psi,\quad y = M.\cos^2\alpha_1\cos\varphi_1\cos\psi,\quad z = M.\cos^2\alpha_1\Delta^2\alpha_1\sin\varphi_1\,\Delta(\psi,k'),$$

wo

$$M = \frac{\rho}{\Delta\alpha_1\sqrt{(1-k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)(\cos^2\alpha_1+k'^2\sin^2\alpha_1\sin^2\psi)}}.$$

Man hat ferner

$$hu = \frac{d\log H(a_1)}{da}(K-u_1),\quad \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)} = \frac{\Theta(u_1+a_1)}{\Theta(u_1-a_1)},$$

und daher, wenn man in dem Ausdrucke von U die Constante $\frac{Kd\log H(a_1)}{da_1}$ fortläſst und die Zeichen umkehrt,

$$U = \frac{d\log H(a_1)}{da_1}u_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u_1+a_1)}{\Theta(u_1-a_1)}.$$

Es wird ferner

$$U = \frac{\sin\alpha\,\Delta\alpha}{\cos\alpha}\int_0^{\varphi}\frac{\Delta\varphi\,d\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi} = \frac{k'^2\cos\alpha_1\,\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_{\varphi_1}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi_1}{(\Delta^2\alpha_1\,\Delta^2\varphi_1-k^2\cos^2\alpha_1\cos^2\varphi_1)\Delta\varphi_1}$$

$$= \frac{\cos\alpha_1\,\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_{\varphi_1}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi_1}{(1-k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)\Delta\varphi_1}.$$

Da es frei steht, von U eine Constante abzuziehen und das Zeichen zu ändern, so werde ich hierfür

$$U = \frac{\cos\alpha_1\,\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{(1-k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)\,\Delta\varphi_1}$$

setzen.

Diese Ausdrücke können in andere transformirt werden, in welchen die Argumente imaginär werden, und der Modul in sein Complement sich verwandelt. Es ist aber

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{\pi uu}{4KK'}}H(K'\pm iu,k'),$$

$$H(u) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot\frac{1}{i}e^{-\frac{\pi uu}{4KK'}}H(iu,k'),$$

und daher

$$h = \frac{d\log H(a_1)}{da_1} = -\frac{\pi a_1}{2KK'}+h_1,$$

wenn man

$$a_1' = \frac{\pi a_1}{2K'},\quad q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}},$$

und

$$h_1 = \frac{d\log H(ia_1,k')}{da_1} = \frac{\pi}{2K'}\cdot\frac{e^{a_1'}+e^{-a_1'}-3q'^2(e^{3a_1'}+e^{-3a_1'})+\cdots}{e^{a_1'}-e^{-a_1'}-q'^2(e^{3a_1'}-e^{-3a_1'})+\cdots}$$

setzt. Es wird ferner

$$U = \frac{\cos\alpha_1\,\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{(1-k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)\,\Delta\varphi_1} = hu_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u_1+a_1)}{\Theta(u_1-a_1)}$$

$$= h_1u_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{H(K'\pm i(u_1+a_1)\,k')}{H(K'\pm i(u_1-a_1)\,k')}$$

oder, wenn man $u_1' = \frac{\pi u_1}{2K'}$ setzt,

$$U = h_1u_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{e^{u_1'+a_1'}+e^{-u_1'-a_1'}+q'^2(e^{3u_1'+3a_1'}+e^{-3u_1'-3a_1'})+\cdots}{e^{u_1'-a_1'}+e^{-u_1'+a_1'}+q'^2(e^{3u_1'-3a_1'}+e^{-3u_1'+3a_1'})+\cdots}.$$

Wenn $\varphi_1 = 0$, wird $u_1 = 0$, wofür dieser Ausdruck von U, wie der obige Integralausdruck verschwindet, weshalb beide einander gleich gesetzt worden sind.

Man hat ferner, wenn man

$$v' = \frac{\pi v}{2K'}$$

setzt,

$$V = hv + \frac{1}{2i}\log\frac{H(a+iv)}{H(a-iv)}$$

$$= hv + \frac{1}{2i}\log\frac{H(K-a_1+iv)}{H(K-a_1-iv)}$$

$$= h_1v + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(v+ia_1,k')}{\Theta(v-ia_1,k')}$$

$$= h_1v + \operatorname{Arc\,tg}\frac{q'(e^{2a_1'}-e^{-2a_1'})\sin 2v' - q'^4(e^{4a_1'}-e^{-4a_1'})\sin 4v'+\cdots}{1-q'(e^{2a_1'}+e^{-2a_1'})\cos 2v'+q'^4(e^{4a_1'}+e^{-4a_1'})\cos 4v'-\cdots}.$$

Für das abgeplattete Umdrehungsellipsoid selbst wird

$$k' = 0,\quad q' = 0,\quad K' = \tfrac{1}{2}\pi,\quad v = v' = \psi,$$

$$a_1' = a_1 = \log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\alpha_1),\quad u_1' = u_1 = \log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi_1),$$

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{\operatorname{tg}(45^0+\frac{1}{2}\alpha_1)+\operatorname{cotg}(45^0+\frac{1}{2}\alpha_1)}{\operatorname{tg}(45^0+\frac{1}{2}\alpha_1)-\operatorname{cotg}(45^0+\frac{1}{2}\alpha_1)}\log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi_1)\\
&\quad-\tfrac{1}{2}\log\frac{\operatorname{tg}(45^0+\frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{tg}(45^0+\frac{1}{2}\varphi_1)+\operatorname{cotg}(45^0+\frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{cotg}(45^0+\frac{1}{2}\varphi_1)}{\operatorname{cotg}(45^0+\frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{tg}(45^0+\frac{1}{2}\varphi_1)+\operatorname{tg}(45^0+\frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{cotg}(45^0+\frac{1}{2}\varphi_1)}\\
&= \frac{1}{\sin\alpha_1}\log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi_1)-\tfrac{1}{2}\log\frac{\sin^2\frac{1}{2}(\varphi_1+\alpha_1)+\cos^2\frac{1}{2}(\varphi_1-\alpha_1)}{\cos^2\frac{1}{2}(\varphi_1+\alpha_1)+\sin^2\frac{1}{2}(\varphi_1-\alpha_1)}\\
&= \frac{1}{\sin\alpha_1}\log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi_1)-\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sin\alpha_1\sin\varphi_1}{1-\sin\alpha_1\sin\varphi_1},\\
V &= \frac{\psi}{\sin\alpha_1}.
\end{aligned}
$$

Die Coordinaten der Punkte des Umdrehungsellipsoids werden, wenn man $M = L\cos^2\alpha_1$ setzt,

$$x = L.\cos\varphi_1\sin\psi,\qquad y = L.\cos\varphi_1\cos\psi,\qquad z = L.\cos^2\alpha_1\sin\varphi_1,$$

wo

$$L = \frac{\rho}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1}},$$

und die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2+y^2}{\rho^2}+\frac{z^2}{\rho^2\cos^2\alpha_1} = 1.$$

Der Winkel ψ ist hier die Länge und der Winkel φ_1 die excentrische Anomalie des Meridians.

SOLUTION NOUVELLE

D'UN PROBLÈME FONDAMENTAL DE GÉODÉSIE

Astronomische Nachrichten Bd. 41, p. 210 u. f. Borchardt Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 53. p. 335—341.

SOLUTION NOUVELLE D'UN PROBLÈME FONDAMENTAL DE GÉODÉSIE.

(Tirée des manuscrits inédits de C. G. J. Jacobi et communiquée par M. E. Luther.)

Le problème dont je vais traiter est le suivant:

Étant connues la longueur s d'un arc géodésique, la latitude B' de son origine et son angle azimuthal T' à ce point, déterminer la latitude B'' de l'autre extrémité de l'arc, son angle azimuthal T'' à ce second point et la différence en longitude de ces deux extrémités.

En appliquant à ce problème les séries dans lesquelles j'ai développé les fonctions elliptiques on en trouve une nouvelle solution très simple, que voici.

L'excentricité du méridien terrestre étant désigné par e, on calculera d'abord la latitude réduite l' de l'origine de la ligne géodésique au moyen de la formule

$$\operatorname{tg} l' = \sqrt{1-e^2}\operatorname{tg} B'.$$

On imaginera ensuite un triangle sphérique rectangle $PO'O$ dont l'hypoténuse soit $PO' = \frac{\pi}{2} - l'$ et l'un des angles aigus $PO'O = T'$. On sait que, si l'on mène du point P à un point quelconque O'' du côté OO' de ce triangle, prolongé au besoin, un arc de grand cercle PO'', on aura toujours PO'' et $PO''O$ respectivement égaux au complément de la latitude réduite d'un certain point de la ligne géodésique et à l'angle azimuthal de cette ligne au même point. Supposons que le point O'' soit l'autre extrémité de l'arc s, la marche que suivra notre solution, sera la suivante.

1. On déterminera la correction $\Delta \log s$ à ajouter au logarithme de l'arc géodésique s pour avoir le logarithme de l'arc de grand cercle $O'O''$;
2. On calculera dans le triangle sphérique $PO'O''$, dont on connaît deux côtés $PO' = \frac{\pi}{2} - l'$ et $O'O''$ et l'angle compris $PO'O'' = \pi - T'$, le

troisième côté $PO'' = \frac{\pi}{2} - l''$, l'angle $PO''O' = T''$ et l'angle $O'PO''$, que je nommerai ω. On choisira pour ce calcul des formules propres à donner les valeurs de $\log(l' - l'')$, $\log(T' - T'')$, $\log\omega$ exactes dans les septièmes décimales;

3. On cherchera la correction $\Delta\omega$ à soustraire de ω pour avoir la différence en longitude que je nommerai λ;
4. On remontera de la différence des latitudes réduites $l' - l''$ à la différence des latitudes $B' - B''$.

Les calculs du No. 2 sont ceux qu'on employerait (avec des données différentes) dans l'hypothèse de la Terre sphérique. Ce sont les seuls calculs dans lesquels il faudrait pour quelques logarithmes employer des tables à 7 décimales. Tout le reste du calcul n'exige que l'emploide tables à 5 décimales.

Je vais donner à présent les formules par lesquelles on calcule les corrections $\Delta\log s$ et $\Delta\omega$, et dans lesquelles les logarithmes sont les logarithmes vulgaires.

1. Dans le triangle rectangle $PO'O$, dans lequel on connaît

$$PO' = \frac{\pi}{2} - l', \qquad PO'O = T',$$

on calculera au moyen des formules

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{cotg} l' \cos T',$$
$$\cos l = \cos l' \sin T',$$
$$\operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tg} l'}{\cos\varphi' \sin T'},$$

dont la dernière donne une vérification des deux autres, les quantités:

$$OO' = \varphi', \qquad PO = \frac{\pi}{2} - l,$$

et ensuite $\sin B$ au moyen de la valeur

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} l}{\sqrt{1-e^2}}, \qquad [\log\sqrt{1-e^2} = 9{,}9985458],$$

enfin

$$\log q = \log(a \sin^2 B) + b \sin^2 B + c \sin^4 B,$$

où

$$\log a = 6{,}620290, \qquad \log b = 7{,}16116, \qquad \log c = 4{,}594.$$

2. En désignant par s l'arc mesuré divisé par le rayon de l'équateur terrestre et exprimé en secondes, on calculera

$$\log\varphi^0 = \log s + d - fq\cos^2\varphi',$$
$$\log\varphi = \log O'O'' = \log\varphi^0 + gq\sin 2\varphi'.\varphi^0 - hq^2\sin^2 2\varphi' + iq\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2},$$

où

$$d = 0{,}0014542, \qquad \log f = 0{,}54087,$$
$$\log g = 4{,}92541, \qquad \log h = 0{,}842, \qquad \log i = 6{,}43,$$

(i est exprimé en unités de la $7^{\text{ième}}$ décimale).

C'est cette valeur de $\log\varphi$ qu'il faudra connaître pour effectuer le calcul du triangle sphérique $PO'O''$, dans lequel φ est le côté $O'O''$. On voit que cette valeur s'obtient en ajoutant une correction à $\log s$. L'angle φ est donné ici en secondes.

3. La valeur de $\log\Delta\omega$ se compose de quantités connues déjà par les calculs précédents. En effet, nommant C et D les quantités déjà calculées,

$$C = fq\cos^2\varphi', \qquad D = gq\sin 2\varphi'.\varphi^0,$$

on aura

$$\log\Delta\omega = \log(\varphi\cos l) + 7{,}52410 - \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D.$$

Ayant trouvé par cette formule $\Delta\omega$ en secondes, on a la différence en longitude,

$$\lambda = \omega - \Delta\omega.$$

4. Connaissant par le calcul du triangle $PO'O''$ la différence des latitudes réduites $l' - l'' = PO'' - PO'$, on aura la différence des latitudes sur la Terre,

$$B' - B'' = l' - l'' + k\sin(l' - l'')\cos(l' + l'') + n\sin 2(l' - l'')\cos 2(l' + l''),$$

où

$$\log k = 2{,}83926, \qquad \log n = 9{,}7620.$$

Le problème dont je viens de donner une solution nouvelle a été dans ces derniers temps l'objet de soins particuliers de la part de M. Gauss, qui en a traité dans différents mémoires et en a donné plusieurs solutions. Mon illustre ami, M. Hansen, a calculé par les formules précédentes l'exemple qui sert à M. Gauss pour éclaircir la dernière de ses solutions (*Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*, zweite Abhandlung, Göttingen 1847 p. 33). Je mettrai ici avec détail la partie de ce calcul qui se rapporte aux corrections dues à l'ellipticité du sphéroide terrestre.

Exemple.

$$\log s = 3{,}5349945 \qquad B' = 51^\circ 48' 1'',9294 \qquad T' = 5^\circ 42' 21'',7699$$

$$\log \operatorname{tg} B' = 0{,}1040765 \qquad \log\cos T' = 9{,}9978428 \qquad \log\sin T' = 8{,}9974946$$

$$l' = 51^\circ 42' 26'',16 \qquad \varphi' = 38^\circ 9' 16''$$

$$\log\cos\varphi' = 9{,}89562 \qquad \log\sin 2\varphi' = 9{,}98748 \qquad \log\cos 2\varphi' = 9{,}37$$

$$\log\operatorname{tg} l = 1{,}20950 \qquad \log\cos l = 8{,}78968$$

$$\log\operatorname{tg} B = 1{,}21095 \qquad \log\sin B = 9{,}99918$$

$$\begin{array}{rl}
\log(a\sin^2 B) = & 6{,}61865 \\
b\sin^2 B = & 0{,}001444 \\
c\sin^4 B = & 4 \\
\hline
\log q = & 6{,}62010
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log s = & 3{,}5349945 \\
d = & 0{,}0014542 \\
-fq\cos^2\varphi' = & -0{,}0008958 = -C \\
\hline
\log\varphi^0 = & 3{,}5355529 \\
gq\sin 2\varphi'.\varphi^0 = & 0{,}00001171 = D \\
-hq^2\sin^2 2\varphi' = & -0{,}00000114 \\
iq\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2} = & 3 \\
\hline
\log\varphi = \log O'O'' = & 3{,}5355635
\end{array}$$

Le calcul du triangle $PO'O''$ donne:

$$T'-T'' = 7'\ 0'',5884 \qquad \omega = 8' 59'',4065$$

$$l'-l'' = 56' 55'',4716 \qquad l'+l'' = 102^\circ 27' 57''$$

$$\begin{array}{rl}
\log(\varphi\cos l) = & 2{,}32524 \\
 & 7{,}52410 \\
-\tfrac{1}{2}C = & -0{,}000448 \\
\tfrac{1}{2}D = & 6 \\
\hline
\log\Delta\omega = & 9{,}84890
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
l'-l'' = & 56' 55'',4716 \\
k\sin(l'-l'')\cos(l'+l'') = & -\ \ 2'',4685 \\
n\sin 2(l'-l'')\cos 2(l'+l'') = & -\ \ 174 \\
\hline
B'-B'' = & 56' 52'',9857
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\omega &= 0'',7062 \\
\lambda = \omega - \Delta\omega &= 8' 58'',7003 \\
T'' = T'-(T'-T'') &= 5^\circ 35' 21'',1815 \\
B'' = B'-(B'-B'') &= 50^\circ 51'\ 8'',9437.
\end{aligned}$$

M. **Gauss** trouve:

$$\begin{aligned}
\lambda &= 8' 58'',7002 \\
T'' &= 5^\circ 35' 21'',1815 \\
B'' &= 50^\circ 51'\ 8'',9444.
\end{aligned}$$

Supposons qu'en partant des mêmes données B', T', s on ait calculé les valeurs de B'', T'', λ dans l'hypothèse de la Terre purement sphérique et nommons ces valeurs B''_0, T''_0, λ_0. Il sera curieux et utile de connaître des formules approximatives simples qui puissent servir à estimer la grandeur des quantités

$$B''-B''_0, \qquad T''-T''_0, \qquad \lambda-\lambda_0,$$

ou l'influence que l'ellipticité du sphéroide terrestre exerce sur la détermination de B'', T'', λ. Ces formules sont:

$$\begin{aligned}
B''-B''_0 &= -\tfrac{1}{4}\sin 2B'.e^2 \\
T''-T''_0 &= -\tfrac{1}{2}\frac{\sin^3 B'}{\cos B'}\sin T'.e^2 s \\
\lambda-\lambda_0 &= -\tfrac{1}{2}\frac{2\cos^2 B' - \sin^2 B'}{\cos B'}\sin T'.e^2 s.
\end{aligned}$$

La dernière de ces quantités s'évanouit pour une latitude d'environ $54^\circ 44'$.

En finissant je réunirai les formules par lesquelles on exprime toutes les quantités relatives à une même ligne géodésique au moyen des fonctions elliptiques Θ et H, auxquelles on a joint les fonctions

$$\Theta_1(u) = \Theta(K-u), \qquad H_1(u) = H(K-u).$$

Au lieu des deux constantes qui entrent dans la détermination d'une ligne géodésique, de l'excentricité e et de la latitude B du point où la ligne touche le parallèle, on introduit le module k des fonctions elliptiques (ou son complément k') et un argument constant a, au moyen des formules

$$e = \frac{k}{\Delta\operatorname{am}(a,k')}, \qquad \cos B = k'\sin\operatorname{am}(a,k'),$$

ou

$$e = \sqrt{k}\cdot\frac{H_1(ia)}{\Theta_1(ia)}, \qquad \sqrt{1-e^2} = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(ia)},$$

$$\sin B = \sqrt{k}\cdot\frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)}, \qquad \cos B = \sqrt{k'}\cdot\frac{H(ia)}{iH_1(ia)}, \qquad \operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\frac{i\Theta_1(ia)}{H(ia)},$$

i étant $=\sqrt{-1}$. On aura encore pour la latitude réduite l du point où la ligne touche le parallèle

$$\cos l = \sin\operatorname{am}(a,k') = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\frac{H(ia)}{iH_1(ia)},$$

$$\sin l = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}, \qquad \operatorname{tg} l = \sqrt{k}\cdot\frac{i\Theta(ia)}{H(ia)}.$$

Mettant pour un point quelconque de la ligne géodésique

$$\varphi' = \operatorname{am}(u),$$

et supposant

$$N = \sqrt{H(u+ia).H(u-ia)},$$

il viendra

$$\sin T' = \frac{H(ia)}{i\Theta(0)} \cdot \frac{\Theta(u)}{N}, \quad \cos T' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta(0)} \cdot \frac{H(u)}{N}, \quad \operatorname{tg} T' = \frac{H(ia)}{i\Theta(ia)} \cdot \frac{\Theta(u)}{H(u)},$$
$$\sin l' = \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)} \cdot \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \quad \cos l' = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(ia)} \cdot \frac{N}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{tg} l' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(0)} \cdot \frac{H_1(u)}{N},$$
$$\sin B' = \frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)} \cdot \frac{H_1(u)}{\Theta_1(u)}, \quad \cos B' = \frac{\Theta(0)}{H_1(ia)} \cdot \frac{N}{\Theta_1(u)}, \quad \operatorname{tg} B' = \frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(0)} \cdot \frac{H_1(u)}{N}.$$

Pour exprimer toutes les quantités relatives au triangle sphérique rectangle POO' par les fonctions Θ, H, Θ_1, H_1, mettons $O'PO = \omega'$, on aura

$$\sin \omega' = \frac{H_1(ia)}{H_1(0)} \cdot \frac{H(u)}{N}, \quad \cos \omega' = \frac{H(ia)}{iH_1(0)} \cdot \frac{H_1(u)}{N}, \quad \operatorname{tg} \omega' = \frac{H_1(ia)}{iH(ia)} \cdot \frac{H(u)}{H_1(u)}.$$

Supposons qu'on eût construit le triangle POO', en prenant pour $\frac{\pi}{2} - PO'$ la vraie latitude B' au lieu de la latitude réduite l'. Nommant l_0, φ_0', ω_0' les valeurs que dans ce cas prendraient les quantités l, φ', ω', on aura

$$\cos l_0 = \frac{H(ia) . \Theta(u)}{iH_1(ia) . \Theta_1(u)}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0' = \frac{\Theta(ia) . H(u)}{\Theta_1(ia) . H_1(u)},$$
$$\operatorname{tg} \omega_0' = \frac{i\Theta(ia) H_1(ia)}{\Theta_1(ia) H(ia)} \cdot \frac{H(u)\Theta_1(u)}{\Theta(u) H_1(u)}.$$

Cette dernière formule peut être simplifiée en introduisant un module transformé.

Enfin, nommant λ' la longitude du point auquel répond la valeur $\varphi' = \operatorname{am}(u)$, cette longitude étant rapportée au méridien qui passe par le point où la ligne géodésique touche le parallèle, on aura, en supposant

$$\nu = \frac{d \log \Theta_1(ia)}{da},$$

les formules remarquables

$$\sin B' = \frac{\Theta_1(ia) H_1(u)}{H_1(ia) \Theta_1(u)},$$
$$\cos B' \sin(\lambda' + \nu u) = \frac{\Theta(0) . [H(u+ia) + H(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta_1(u)},$$
$$\cos B' \cos(\lambda' + \nu u) = \frac{\Theta(0) . [H(u+ia) - H(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta_1(u)},$$

et de plus

$$\sin l' = \frac{\Theta(ia) H_1(u)}{H_1(ia) \Theta(u)},$$
$$\cos l' \sin(\lambda' + \nu u) = \frac{\Theta_1(0) . [H(u+ia) + H(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta(u)},$$
$$\cos l' \cos(\lambda' + \nu u) = \frac{\Theta_1(0) . [H(u+ia) - H(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta(u)}.$$

Berlin, 1849 Nov. 7.

FRAGMENTS

SUR LA ROTATION D'UN CORPS

TIRÉS DES MANUSCRITS DE C. G. J. JACOBI ET COMMUNIQUÉS

PAR

E. LOTTNER

A.

SECOND MÉMOIRE SUR LA ROTATION D'UN CORPS NON SOUMIS À DES FORCES ACCÉLÉRATRICES.

Les axes principaux et l'axe instantané étant projetés sur le plan invariable, il y a une même équation différentielle entre le temps et les vitesses angulaires de ces quatre projections.

1.

On a pu remarquer, dans le premier Mémoire (p. 324 de ce vol.), l'analogie qui existe entre les quatre constantes

$$\frac{l}{A}, \quad \frac{l}{B}, \quad \frac{l}{C}, \quad \frac{h}{l}$$

c'est à dire, les quotients que l'on obtient en divisant le moment principal l par les trois moments d'inertie A, B, C et la force vive h par le moment principal. Si l'on appliquait successivement dans les plans perpendiculaires aux axes principaux et dans le plan invariable un couple dont le moment l est le même que celui du couple qui primitivement a mis le corps en mouvement, ces quatre constantes seraient les *vitesses angulaires* que le corps prendrait respectivement autour des axes principaux et de l'axe perpendiculaire au plan invariable.

On a appelé B le moment d'inertie moyen et l'on est convenu de nommer A le plus grand moment d'inertie et C le plus petit ou *vice versa* A le plus petit et C le plus grand, suivant les deux cas que l'on a distingués constamment dans le cours de ces recherches, savoir le cas de $Bh > l^2$ et celui de $Bh < l^2$ ou de

$$\frac{l}{B} < \frac{h}{l} \quad \text{et de} \quad \frac{l}{B} > \frac{h}{l}.$$

Il s'ensuit que, pour que les quatre constantes dont on vient de parler forment une série croissante dans le premier cas et décroissante dans le second, il faudra les ranger de la manière suivante:

$$\frac{l}{A},\quad \frac{l}{B},\quad \frac{h}{l},\quad \frac{l}{C}.$$

D'ailleurs on est convenu, dans le premier Mémoire (p. 300 de ce vol.), que partout où l'on se sert des signes ambigus $\pm$ ou $\mp$, l'on doit prendre le signe supérieur dans le premier et le signe inférieur dans le second cas, c'est à dire, le signe supérieur ou inférieur, selon que les quatre constantes

$$\frac{l}{A},\quad \frac{l}{B},\quad \frac{h}{l},\quad \frac{l}{C}$$

forment une série croissante ou décroissante.

Soit

$$\frac{l}{A} = s,\quad \frac{l}{B} = s,\quad \frac{h}{l} = s'',\quad \frac{l}{C} = s'''.$$

Comme dans les formules de notre problème n'entrent que les *raisons* des quantités

$$A,\quad B,\quad C,\quad l,\quad h,$$

on pourra remplacer ces *cinq* quantités par les *quatre* quantités

$$s,\quad s',\quad s'',\quad s'''.$$

En introduisant dans les formules ces constantes s, s', s'', s''', on verra toutes les expressions prendre une forme plus simple et plus claire.

Examinons d'abord de quelle manière se composent par les quantités s, s', s'', s''' les carrés du module k, de son complément k', et du facteur constant n par lequel on doit multiplier le temps pour avoir l'argument elliptique u.

Formons les six différences des quantités s, s', s'', s''' de manière que chacune d'elles soit soustraite de chaque suivante. Ces différences seront donc en même temps toutes positives ou toutes négatives. Si on les groupe en trois paires dont chacune embrasse toutes les quatre quantités, et que l'on forme le produit de chaque paire de différences, ces trois produits

$$(s'-s)(s'''-s''),\quad (s''-s)(s'''-s'),\quad (s'''-s)(s''-s')$$

jouiront, comme on sait, de cette propriété que le deuxième est égal à la somme des deux autres. Or ce deuxième produit est précisément égal à la valeur de n^2, et le premier et troisième de ces produits étant divisés par le deuxieme, on aura

le carré du module et de son complément. En effet, des formules données au commencement du premier Mémoire (p. 292 et 293 de ce vol.)

$$n^2 = \frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}$$

$$k^2 = \frac{A-B}{B-C}\cdot\frac{l^2-Ch}{Ah-l^2}$$

$$k'^2 = \frac{A-C}{B-C}\cdot\frac{Bh-l^2}{Ah-l^2}$$

on tire

$$n^2 = (s''-s)(s'''-s')$$

$$k^2 = \frac{(s'-s)(s'''-s'')}{(s''-s)(s'''-s')}$$

$$k'^2 = \frac{(s'''-s)(s''-s')}{(s''-s)(s'''-s')}.$$

En outre, la formule par laquelle est déterminé l'argument elliptique constant *ia* (p. 310 de ce vol.)

$$-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia) = \frac{C(A-B)}{A(B-C)} = \frac{s'-s}{s'''-s'}$$

fournit les suivantes

$$-\sin^2\mathrm{am}(ia) = \frac{s''-s}{s'''-s''}$$

$$\cos^2\mathrm{am}(ia) = \frac{s'''-s}{s'''-s''}$$

$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) = \frac{s'''-s}{s'''-s'},$$

d'où l'on déduit aisément que les six différences

$$\begin{array}{ll} s'-s, & s'''-s'' \\ s''-s, & s'''-s' \\ s'''-s, & s''-s' \end{array}$$

sont entre elles comme les quantités

$$\begin{array}{ll} -k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\cos^2\mathrm{am}(ia), & \Delta^2\mathrm{am}(ia) \\ -\sin^2\mathrm{am}(ia)\,\Delta^2\mathrm{am}(ia), & \cos^2\mathrm{am}(ia) \\ \cos^2\mathrm{am}(ia)\,\Delta^2\mathrm{am}(ia), & -k'^2\sin^2\mathrm{am}(ia). \end{array}$$

Or on a

$$n^2 = (s''-s)(s'''-s'),$$

on obtiendra donc les six différences elles mêmes, en multipliant les six quantités ci-dessus par

$$\pm \frac{in}{\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)},$$

d'ou l'on tire

$$s'-s = \frac{\pm nk^2 \sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)}{i\,\Delta\operatorname{am}(ia)}, \qquad s'''-s'' = \frac{\pm in\,\Delta\operatorname{am}(ia)}{\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)}$$

$$s''-s = \frac{\pm n \sin\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)}{i\cos\operatorname{am}(ia)}, \qquad s'''-s' = \frac{\pm in\cos\operatorname{am}(ia)}{\sin\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)}$$

$$s'''-s = \frac{\pm in\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)}{\sin\operatorname{am}(ia)}, \qquad s''-s' = \frac{\pm nk'^2\sin\operatorname{am}(ia)}{i\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)},$$

ou

$$s'-s = \pm n\frac{d\log\Delta\operatorname{am}(ia)}{da}, \qquad s'''-s'' = \pm n\frac{d\log\operatorname{tg}\operatorname{am}(ia)}{da}$$

$$s''-s = \pm n\frac{d\log\cos\operatorname{am}(ia)}{da}, \qquad s'''-s' = \pm n\frac{d\log\cos\operatorname{coam}(ia)}{da}$$

$$s'''-s = \pm n\frac{d\log\sin\operatorname{am}(ia)}{da}, \qquad s''-s' = \pm n\frac{d\log\sin\operatorname{coam}(ia)}{da}.$$

Ces dernières formules découlent aisément de celles données dans le premier Mémoire (p. 312 de ce vol.)

$$\Psi - s = \mp n\frac{d\log\Theta(ia)}{da}$$

$$\Psi - s' = \mp n\frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}$$

$$\Psi - s'' = \mp n\frac{d\log H_1(ia)}{da}$$

$$\Psi - s''' = \mp n\frac{d\log H(ia)}{da}.$$

Mais on peut aussi donner à ces valeurs une forme différente que je veux exposer.

Étant posé

$$u = \frac{2Kx}{\pi},$$

si l'on fait

$$\begin{aligned} \Theta(u,k) &= \vartheta(x,q) \\ H(u,k) &= \vartheta_1(x,q) \\ H_1(u,k) &= \vartheta_2(x,q) \\ \Theta_1(u,k) &= \vartheta_3(x,q), \end{aligned}$$

il suit des développements en produits infinis de ces fonctions

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x,q)\,\vartheta_2(x,q) &= c\,\vartheta_1(2x,q^2) \\ \vartheta(x,q)\,\vartheta_3(x,q) &= c_1\,\vartheta(2x,q^2) \\ \vartheta_1(x,q)\,\vartheta_3(x,q) &= c_2\,\vartheta_1(x,i\sqrt{q}) \\ \vartheta_2(x,q)\,\vartheta(x,q) &= c_3\,\vartheta_2(x,i\sqrt{q}) \\ \vartheta_2(x,q)\,\vartheta_3(x,q) &= c_4\,\vartheta_2(x,\sqrt{q}) \\ \vartheta_1(x,q)\,\vartheta(x,q) &= c_5\,\vartheta_1(x,\sqrt{q}), \end{aligned}$$

c, c_1, c_2 etc. désignant des fonctions de q seul. Pour déterminer ces constantes, je remarque qu'en nommant $\vartheta_1'(0,q)$ la valeur de $\frac{d\vartheta_1(x,q)}{dx}$ pour $x=0$, on a (*Fundamenta* §. 65, 9.)

$$\vartheta_1'(0,q) = \sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}.$$

De cette formule on tire au moyen des trois théorèmes établis §. 37 Theor. I, II, III des *Fundamenta*

$$\begin{aligned} 2\vartheta_1'(0,q^2) &= k\sqrt[4]{k'}\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3} \\ \vartheta_1'(0,\sqrt{q}) &= \sqrt{2}\,k'\sqrt[4]{k}\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3} \\ \vartheta_1'(0,i\sqrt{q}) &= \sqrt{2}\,\sqrt[4]{ikk'}\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}. \end{aligned}$$

Des formules

$$\vartheta(0,q) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}, \qquad \vartheta_2(0,q) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$$

on tire, au moyen des mêmes théorèmes,

$$\begin{aligned} \vartheta(0,q^2) &= \sqrt[4]{k'}\sqrt{\frac{2K}{\pi}} \\ \vartheta_2(0,\sqrt{q}) &= \sqrt{2}\,\sqrt[4]{k}\sqrt{\frac{2K}{\pi}} \\ \vartheta_2(0,i\sqrt{q}) &= \sqrt{2}\,\sqrt[4]{ikk'}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}. \end{aligned}$$

Faisant donc $x=0$ dans les formules ci-dessus, on trouvera

$$c = c = \sqrt[4]{k'}\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta(0, q^2)$$

$$c_2 = c_3 = \frac{\sqrt[4]{kk'}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{i}} = \frac{\vartheta_2(0, i\sqrt{q})}{2\sqrt{i}}$$

$$c_4 = c_5 = \frac{\sqrt[4]{k}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, \sqrt{q}),$$

d'où l'on tire les formules

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_2(x,q) &= \vartheta(0, q^2)\,\vartheta_1(2x, q^2)\\
\vartheta(x,q)\,\vartheta_3(x,q) &= \vartheta(0, q^2)\,\vartheta(2x, q^2)\\
\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_3(x,q) &= \frac{1}{2\sqrt{i}}\,\vartheta_2(0, i\sqrt{q})\,\vartheta_1(x, i\sqrt{q})\\
\vartheta_2(x,q)\,\vartheta(x,q) &= \frac{1}{2\sqrt{i}}\,\vartheta_2(0, i\sqrt{q})\,\vartheta_2(x, i\sqrt{q})\\
\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_3(x,q) &= \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, \sqrt{q})\,\vartheta_2(x, \sqrt{q})\\
\vartheta_1(x,q)\,\vartheta(x,q) &= \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, \sqrt{q})\,\vartheta_1(x, \sqrt{q}).
\end{aligned}$$

Faisons usage d'une notation nouvelle en posant

$$\begin{aligned}
\sin\mathrm{am}(u,k) &= \sin(x,q)\\
\cos\mathrm{am}(u,k) &= \cos(x,q)\\
\Delta\,\mathrm{am}(u,k) &= \Delta(x,q)
\end{aligned}$$

et remarquant qu'en changeant

q en q^2, il faudra changer $\sqrt{k}$ en $\frac{k}{1+k'}$,

q en $\sqrt{q}$, - - - - - - $\frac{1}{\sqrt{k'}}$ en $\frac{1+k}{k'}$,

q en $i\sqrt{q}$, - - - - - - $\sqrt{k'}$ en $k'-ik$,

on aura

$$\begin{aligned}
s'-s &= \pm\frac{n}{i}(1-k')\sin(2ia, q^2), & s'''-s'' &= \pm in(1+k')\frac{1}{\sin(2ia, q^2)}\\
s''-s &= \pm\frac{n}{i}(k'-ik)\,\mathrm{tg}(ia, i\sqrt{q}), & s'''-s' &= \pm in(k'+ik)\frac{1}{\mathrm{tg}(ia, i\sqrt{q})}\\
s'''-s &= \pm in(1+k)\frac{1}{\mathrm{tg}(ia, \sqrt{q})}, & s''-s' &= \pm\frac{n}{i}(1-k)\,\mathrm{tg}(ia, \sqrt{q})
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
s'-s &= \pm nk\frac{\vartheta_1(2ia, q^2)}{i\vartheta(2ia, q^2)}, & s'''-s'' &= \pm nk\frac{i\vartheta(2ia, q^2)}{\vartheta_1(2ia, q^2)}\\
s''-s &= \pm n\frac{\vartheta_1(ia, i\sqrt{q})}{i\vartheta_2(ia, i\sqrt{q})}, & s'''-s' &= \pm n\frac{i\vartheta_2(ia, i\sqrt{q})}{\vartheta_1(ia, i\sqrt{q})}\\
s'''-s &= \pm nk'\frac{i\vartheta_2(ia, \sqrt{q})}{\vartheta_1(ia, \sqrt{q})}, & s''-s' &= \pm nk'\frac{\vartheta_1(ia, \sqrt{q})}{i\vartheta_2(ia, \sqrt{q})},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire aussi les formules suivantes

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{s'-s}{s'''-s''}} &= \frac{\vartheta_1(2ia, q^2)}{i\vartheta(2ia, q^2)} = \frac{1}{i}\,\frac{k}{1+k'}\sin(2ia, q^2)\\
\sqrt{\frac{s''-s}{s'''-s'}} &= \frac{\vartheta_1(ia, i\sqrt{q})}{\vartheta_2(ia, i\sqrt{q})} = \frac{1}{i}(k'-ik)\,\mathrm{tg}(ia, i\sqrt{q})\\
\sqrt{\frac{s''-s'}{s'''-s}} &= \frac{\vartheta_1(ia, \sqrt{q})}{i\vartheta_2(ia, \sqrt{q})} = \frac{1}{i}\,\frac{1-k}{k'}\,\mathrm{tg}(ia, \sqrt{q}).
\end{aligned}$$

2.

Lorsqu'en général le carré du module d'une intégrale elliptique de la première espèce est composé de quatre quantités s, s', s'', s''', s'entresuivant par ordre de grandeur croissante ou décroissante, de la même manière qu'on vient d'exposer, savoir par la formule

$$k^2 = \frac{(s'-s)(s'''-s'')}{(s''-s)(s'''-s')},$$

l'intégrale elliptique sera la réduite d'une intégrale

$$\int\frac{f\,d\sigma}{\sqrt{-(\sigma-s)(\sigma-s')(\sigma-s'')(\sigma-s''')}},$$

f désignant un facteur constant.

En effet, ramenons cette dernière intégrale à la forme

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}},$$

laquelle conduit à la forme ordinaire des intégrales elliptiques de la première espèce en faisant $x = \sin^2\xi$. On effectuera cette réduction au moyen de la substitution d'Euler

$$x = \frac{m'+m''\sigma}{1+m\sigma},$$

en déterminant les quatre constantes

$$m,\quad m',\quad m'',\quad k$$

de sorte que lorsque x est égalé aux quantités

$$0,\quad 1,\quad \frac{1}{k^2},\quad \infty,$$

la variable σ prenne les valeurs

$$s,\quad s',\quad s'',\quad s'''.$$

C'est ce qu'on pourra faire de 24 manières différentes correspondantes aux permutations de s, s', s'', s'''. Ces différentes substitutions conduiront à *six* valeurs de k^2 dont une seule jouira de la propriété d'être en même temps positive et plus petite que l'unité, comme on le suppose d'usage dans les intégrales elliptiques réduites. Cette valeur de k^2 correspondra à *quatre* substitutions dont on doit faire le choix selon que la variable σ est supposée se trouver dans l'intervalle $s \ldots s'$ ou dans l'intervalle $s'' \ldots s'''$, pendant que x est entre 0 et 1, et selon qu'en même temps que la variable x ira en croissant, la variable σ est supposée croître ou décroître dans l'intervalle dans lequel elle est renfermée. On traitera de toutes ces *quatre* substitutions dont chacune, comme on le verra, a une signification géométrique particulière.

Examinons, en premier lieu, la substitution laquelle correspond à la supposition que x prenne *respectivement* les valeurs

$$0,\quad 1,\quad \frac{1}{k^2},\quad \infty,$$

lorsque σ devient successivement

$$s,\quad s',\quad s'',\quad s'''.$$

Comme x est ou zéro ou infini selon que $\sigma = s$ ou $\sigma = s'''$, on aura d'abord

$$x = \mu \frac{\sigma - s}{s''' - \sigma},$$

μ étant constante, et comme $x = 1$ pour $\sigma = s'$, il viendra

$$x = \sin^2\xi = \frac{(s''' - s')(\sigma - s)}{(s' - s)(s''' - \sigma)}.$$

Enfin, comme on doit avoir $x = \frac{1}{k^2}$ pour $\sigma = s''$, on trouvera

$$k^2 = \frac{(s' - s)(s''' - s'')}{(s''' - s')(s'' - s)},$$

ce qui est précisément l'expression trouvée ci-dessus du carré du module par les quantités s, s', s'', s'''.

Pour achever la réduction on remarquera les formules

$$k^2 x = k^2 \sin^2\xi = \frac{(s''' - s'')(\sigma - s)}{(s'' - s)(s''' - \sigma)}$$

$$1 - x = \cos^2\xi = \frac{(s''' - s)(s' - \sigma)}{(s' - s)(s''' - \sigma)}$$

$$1 - k^2 x = \Delta^2\xi = \frac{(s''' - s)(s'' - \sigma)}{(s'' - s)(s''' - \sigma)}.$$

On voit par ces formules que de la même manière que k^2 et k'^2 sont composés de s, s', s'', s''', les quantités $\sin^2\xi$ et $\cos^2\xi$ se composent respectivement de

$$s,\quad \sigma,\quad s',\quad s''' .$$

et les quantités $k^2 \sin^2\xi$ et $\Delta^2\xi$ de

$$s,\quad \sigma,\quad s'',\quad s'''.$$

De l'équation

$$\frac{s' - s}{s''' - s'} \sin^2\xi = \frac{\sigma - s}{s''' - \sigma} = -1 + \frac{s''' - s}{s''' - \sigma}$$

on déduit

$$s''' - \sigma = \frac{(s''' - s)\ (s''' - s')}{s''' - s' + (s' - s)\sin^2\xi},$$

$$\sigma = \frac{s(s''' - s') + s'''(s' - s)\sin^2\xi}{s''' - s' + (s' - s)\sin^2\xi}.$$

En différentiant la formule

$$x = \sin^2\xi = \frac{(s''' - s')(\sigma - s)}{(s' - s)(s''' - \sigma)}$$

on aura l'équation différentielle

$$dx = 2\sin\xi\cos\xi\, d\xi = \frac{(s''' - s')(s''' - s)}{s' - s} \cdot \frac{d\sigma}{(s''' - \sigma)^2},$$

donc

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - k^2 x)}} = \frac{2\,d\xi}{\Delta\xi} = \pm \frac{\sqrt{(s'' - s)(s''' - s')}\, d\sigma}{\sqrt{(\sigma - s)(s' - \sigma)(s'' - \sigma)(s''' - \sigma)}}.$$

Or on a, comme on a vu dans le premier Mémoire (p. 308 de ce volume),

$$\frac{d\xi}{\Delta\xi} = du = n\,dt = \sqrt{(s'' - s)(s''' - s')}\, dt,$$

donc

$$t - t_0 = \int \frac{d\sigma}{2\sqrt{(\sigma - s)(s' - \sigma)(s'' - \sigma)(s''' - \sigma)}}.$$

3.

En échangeant respectivement

$$s,\quad s',\quad s'',\quad s'''$$

avec les quantités

$$\begin{array}{llll} s', & s, & s''', & s'', \\ s'', & s''', & s, & s', \\ s''', & s'', & s', & s, \end{array}$$

les trois produits

$$(s'-s)(s'''-s''),\quad (s''-s)(s'''-s'),\quad (s'''-s)(s''-s')$$

et par suite les quantités n et k ne changeront pas de valeur.

Nommant donc

$$\sigma',\quad \sigma'',\quad \sigma'''$$

les variables correspondantes à ces différents changements, on aura la même équation différentielle entre la variable $x = \sin^2\xi$ et les variables $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''$. Seulement, les variables σ' et σ''' suivant une marche contraire à celle des variables σ et σ'', en changeant σ en σ' ou σ''', il faudra mettre $-d\sigma'$ et $-d\sigma'''$ au lieu de $d\sigma$, ou $\mp$ au lieu de $\pm$. On aura donc le théorème suivant:

Étant posé

$$\sigma = \frac{s(s'''-s)+s'''(s'-s)\sin^2\xi}{s'''-s'+(s'-s)\sin^2\xi}$$

$$\sigma' = \frac{s'(s''-s)-s''(s'-s)\sin^2\xi}{s''-s-(s'-s)\sin^2\xi}$$

$$\sigma'' = \frac{s''(s'''-s')-s'(s'''-s'')\sin^2\xi}{s'''-s'-(s'''-s'')\sin^2\xi}$$

$$\sigma''' = \frac{s'''(s''-s)+s(s'''-s'')\sin^2\xi}{s''-s+(s'''-s'')\sin^2\xi},$$

il y aura la même équation différentielle entre ξ et les quatre variables,

$$\sigma,\quad \sigma',\quad \sigma'',\quad \sigma''',$$

savoir, en nommant S une quelconque de ces variables et faisant

$$n = \sqrt{(s''-s)(s'''-s')}$$

$$k = \sqrt{\frac{(s'-s)(s'''-s'')}{(s''-s)(s'''-s')}},$$

on aura

$$dt = \frac{d\xi}{n\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}} = \pm\frac{dS}{2\sqrt{-(S-s)(S-s')(S-s'')(S-s''')}},$$

le signe $\pm$ étant changé en $\mp$, lorsque $S=\sigma'$ ou $S=\sigma'''$.

Remarquons encore les formules que l'on obtient en retranchant, respectivement, les valeurs de $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''$ des quantités s''', s'', s', s,

$$s'''-\sigma = \frac{(s'''-s)(s'''-s')}{s'''-s'+(s'-s)\sin^2\xi}$$

$$s''-\sigma' = \frac{(s''-s)(s''-s')}{s''-s-(s'-s)\sin^2\xi}$$

$$\sigma''-s' = \frac{(s''-s')(s'''-s')}{s'''-s'-(s'''-s'')\sin^2\xi}$$

$$\sigma'''-s = \frac{(s''-s)(s'''-s)}{s''-s+(s'''-s'')\sin^2\xi}.$$

Voyons, à présent, quelle est la signification géométrique des quatre variables $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''$, liées avec le temps t par une même équation différentielle.

On a nommé

$$\psi,\quad \psi_1,\quad \psi_2,\quad \psi_3$$

les angles que les projections sur le plan invariable des axes principaux, savoir des axes des z', x', y' et celle de l'axe instantané font avec l'axe y, pris dans le même plan. Les vitesses angulaires de ces quatre projections ont été déterminées dans le premier Mémoire (p. 338 de ce vol.) par les formules

$$\frac{d\psi}{dt} = -l\cdot\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2} = -l\cdot\frac{h-Cr^2}{l^2-C^2r^2}$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -l\cdot\frac{Bq^2+Cr^2}{B^2q^2+C^2r^2} = -l\cdot\frac{h-Ap^2}{l^2-A^2p^2}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -l\cdot\frac{Cr^2+Ap^2}{C^2r^2+A^2p^2} = -l\cdot\frac{h-Bq^2}{l^2-B^2q^2}$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -\left\{\frac{h}{l}+\frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)(Ch-l^2)}{ABC.l[l^2(p^2+q^2+r^2)-h^2]}\right\}.$$

On a de plus dans le premier Mémoire (p. 308 de ce volume) donné les formules

$$p^2 = \frac{l^2-Ch}{A(A-C)}\cos^2\xi,\quad q^2 = \frac{l^2-Ch}{B(B-C)}\sin^2\xi,\quad r^2 = \frac{Ah-l^2}{C(A-C)}\Delta^2\xi,$$

$$p^2+q^2+r^2-s''^2 = \frac{l^2-Ch}{ABC.l^2}[B(Ah-l^2)-(A-B)l^2\sin^2\xi].$$

ou

$$p^2 = \frac{s^2(s'''-s'')}{s'''-s}\cos^2\xi, \quad q^2 = \frac{s'^2(s'''-s'')}{s'''-s'}\sin^2\xi, \quad r^2 = \frac{s'''^2(s''-s)}{s'''-s}\Delta^2\xi$$

$$p^2+q^2+r^2-s''^2 = (s'''-s'')[s''-s-(s'-s)\sin^2\xi].$$

D'où suit

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{s'''(s''s'''-r^2)}{s'''s'''-r^2} = -s'''+\frac{s'''^2(s'''-s'')}{s'''^2-r^2}$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{s(ss''-p^2)}{ss-p^2} = -s-\frac{s^2(s''-s)}{s^2-p^2}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{s'(s's''-q^2)}{s's'-q^2} = -s'-\frac{s'^2(s''-s')}{s'^2-q^2}$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -s''+\frac{(s''-s)(s''-s')(s'''-s'')}{p^2+q^2+r^2-s''s''}.$$

On aura donc, en substituant ces formules,

$$s'''+\frac{d\psi}{dt} = \frac{(s'''-s)(s'''-s'')}{s'''-s-(s''-s)\Delta^2\xi} = \frac{(s'''-s)(s'''-s')}{s'''-s'+(s'-s)\sin^2\xi}$$

$$s+\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{(s'''-s)(s''-s)}{s'''-s-(s'''-s'')\cos^2\xi} = -\frac{(s'''-s)(s''-s)}{s''-s+(s'''-s'')\sin^2\xi}$$

$$s'+\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{(s'''-s')(s''-s')}{s'''-s'-(s'''-s'')\sin^2\xi}$$

$$s''+\frac{d\psi_3}{dt} = \frac{(s''-s)(s''-s')}{s''-s-(s'-s)\sin^2\xi}.$$

En rapprochant ces formules des valeurs données ci-dessus de

$$s'''-\sigma, \quad s''-\sigma', \quad \sigma''-s', \quad \sigma'''-s,$$

on trouve

$$\sigma = -\frac{d\psi}{dt}$$

$$\sigma' = -\frac{d\psi_3}{dt}$$

$$\sigma'' = -\frac{d\psi_2}{dt}$$

$$\sigma''' = -\frac{d\psi_1}{dt}.$$

Les angles ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant comptés en sens contraire à celui du mouvement, les quatre différentielles

$$-\frac{d\psi}{dt}, \quad -\frac{d\psi_1}{dt}, \quad -\frac{d\psi_2}{dt}, \quad -\frac{d\psi_3}{dt}$$

sont les vitesses angulaires des projections sur le plan invariable des axes des z', x', y' et de l'axe instantané de rotation. Voici donc la signification que les quatre fonctions σ, σ''', σ'', σ' ont dans le problème mécanique proposé. Les calculs précédents nous ont conduit à la proposition remarquable suivante:

Théorème.

»*Soient A, B, C les moments d'inertie, l le moment principal, h la force* »*vive du mobile, en projetant sur le plan invariable les trois axes d'inertie et l'axe* »*instantané de rotation, on aura entre le temps t et chacune des vitesses angu-* »*laires de ces quatre projections la même équation différentielle, savoir appelant S* »*la vitesse angulaire d'une quelconque de ces quatre projections, on aura*

$$dt = \frac{\pm dS}{2\sqrt{-\left(S-\frac{l}{A}\right)\left(S-\frac{l}{B}\right)\left(S-\frac{l}{C}\right)\left(S-\frac{h}{l}\right)}}.«$$

Les valeurs de S satisfaisantes à cette équation différentielle lesquelles se trouvent entre les limites $\frac{l}{A}$ et $\frac{l}{B}$ sont les vitesses angulaires des projections sur le plan invariable de l'axe des z' et de l'axe instantané; celles renfermées entre les limites $\frac{l}{C}$ et $\frac{h}{l}$ sont les vitesses angulaires des projections sur le même plan des axes des x' et y'. Lorsque l'axe d'inertie auquel se rapporte le moment moyen se couche sur le plan invariable, les vitesses angulaires des projections des axes des x', y', z' et de l'axe instantané doivent prendre, respectivement, les valeurs

$$\frac{l}{C}, \quad \frac{h}{l}, \quad \frac{l}{A}, \quad \frac{l}{B},$$

conditions qui suffisent pour distinguer entre elles les quatre fonctions ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 de t, satisfaisantes à la même équation différentielle.

4.

Imaginons un système quelconque d'axes rectangulaires, fixé dans l'intérieur du corps. Nommant x'', y'', z'' les coordonnées parallèles à ces axes, soit

$$D = \int (y''^2 + z''^2)\,dm, \qquad G = \int y'' z''\,dm$$
$$E = \int (z''^2 + x''^2)\,dm, \qquad H = \int z'' x''\,dm$$
$$F = \int (x''^2 + y''^2)\,dm, \qquad I = \int x'' y''\,dm$$

dm étant l'élément de la masse du corps. Cela posé, on sait que les moments d'inertie du corps, A, B, C sont les racines de l'équation cubique

$$0 = (x-D)(x-E)(x-F) - G^2(x-D) - H^2(x-E) - I^2(x-F) + 2GHI = (x-A)(x-B)(x-C).$$

On aura donc

$$\begin{aligned}&(l-AS)(l-BS)(l-CS)\\ &= (l-DS)(l-ES)(l-FS) - G^2(l-DS)S^2 - H^2(l-ES)S^2 - I^2(l-FS)S^2 + 2GHIS^3\end{aligned}$$

et par suite, comme on a

$$ABC = DEF - DG^2 - EH^2 - FI^2 - 2GHI,$$

il résultera l'expression suivante de l'élément du temps:

$$dt = \frac{\pm\sqrt{DEF - DG^2 - EH^2 - FI^2 - 2GHI}\,dS}{2\sqrt{\left(S-\frac{h}{l}\right)\left((l-DS)(l-ES)(l-FS) + 2GHIS^3 - G^2(l-DS)S^2 - H^2(l-ES)S^2 - I^2(l-FS)S^2\right)}}.$$

5.

On a nommé T le temps d'une demi-oscillation du corps autour des axes des (x), (y), z, dont les deux premiers ont été supposés tourner uniformément autour du point fixe dans le plan invariable. La valeur de T est donnée par la formule

$$\begin{aligned}T = \frac{2K}{n} &= \pm\tfrac{1}{2}\int_{\frac{l}{A}}^{\frac{l}{B}} \frac{dS}{\sqrt{-\left(S-\frac{l}{A}\right)\left(S-\frac{l}{B}\right)\left(S-\frac{l}{C}\right)\left(S-\frac{h}{l}\right)}}\\ &= \pm\tfrac{1}{2}\int_{\frac{h}{l}}^{\frac{l}{C}} \frac{dS}{\sqrt{-\left(S-\frac{l}{A}\right)\left(S-\frac{l}{B}\right)\left(S-\frac{l}{C}\right)\left(S-\frac{h}{l}\right)}}.\end{aligned}$$

Dans le cas de $A > B > \frac{l^2}{h} > C$ faisons $S = lx$ et dans le cas de $A < B < \frac{l^2}{h} < C$ faisons $S = \frac{l}{x}$, on aura dans le premier cas

$$T = \tfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{B}} \frac{dx}{\sqrt{h-l^2x}\sqrt{\left(x-\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{B}-x\right)\left(\frac{1}{C}-x\right)}}$$

et dans le second cas

$$T = \tfrac{1}{2}\int_A^B \frac{\sqrt{ABC}\,dx}{\sqrt{l^2-hx}\sqrt{(x-A)(B-x)(C-x)}}.$$

On voit par ces expressions que, si dans les deux cas on désigne respectivement par τ et τ' des constantes ne dépendantes que de la constitution du mobile, savoir

$$\tau = \tfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{B}} \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{B}-x\right)\left(x-\frac{1}{C}\right)}} = \tfrac{1}{2}\int_B^A \frac{\sqrt{ABC}\,dx}{\sqrt{x(A-x)(x-B)(x-C)}}$$

$$\tau' = \tfrac{1}{2}\int_A^B \frac{\sqrt{ABC}\,dx}{\sqrt{(x-A)(B-x)(C-x)}},$$

le temps T de la demi-oscillation du corps sera renfermé dans le premier cas entre les limites

$$\frac{\tau}{\sqrt{h-\frac{l^2}{A}}} \quad \text{et} \quad \frac{\tau}{\sqrt{h-\frac{l^2}{B}}}$$

et dans le second cas entre les limites

$$\frac{\tau'}{\sqrt{l^2-Ah}} \quad \text{et} \quad \frac{\tau'}{\sqrt{l^2-Bh}}.$$

On tire de cette proposition le corollaire, que le temps de la demi-oscillation multiplié dans le premier cas par la racine carrée de la force vive, ou dans le second par le moment principal, ne pourra surpasser une certaine quantité τ ou τ', ne dépendante que de la constitution du corps.

6.

L'élément dt étant exprimé par les quatre variables σ, σ', σ'', σ''' au moyen de la même expression différentielle, il s'ensuit que réciproquement ces quatre variables pourront être représentées par une même fonction dont l'argument t n'aura varié pour les différentes fonctions que des constantes. La même chose aura lieu par rapport à l'argument $u = n(t-t_0)$. Or, les quantités σ, σ', σ'', σ''' sont des fonctions *fractionnairement linéaires* de la quantité

$$\sin^2\xi = \sin^2 \operatorname{am} u,$$

elles pourront donc être déduites toutes de l'une d'entre elles, en changeant $\sin^2\xi$ en d'autres quantités lesquelles seront aussi des fonctions *fractionnairement* *linéaires* de $\sin^2\xi$. D'autre coté on sait par les éléments de la théorie des fonctions elliptiques, qu'il n'y a que trois constantes, auxquelles on pourra ajouter des multiples pairs de chacune d'entre elles, telles que l'argument u en étant augmenté, la quantité $\sin^2 \operatorname{am} u$ se changera en une fonction fractionnairement linéaire de $\sin^2 \operatorname{am} u$. Ce sont les constantes

$$K, \quad iK', \quad K+iK'.$$

Il faudra donc que l'argument u étant augmenté de ces trois constantes, les quatre fonctions σ, σ', σ'', σ''' se changent les unes dans les autres.

En effet, des formules ci-dessus §. 2 l'on tire

$$\begin{aligned}
\sin^2 \operatorname{am}(u+K) &= \frac{\cos^2\xi}{\Delta^2\xi} = \frac{(s''-s)(s'-\sigma)}{(s'-s)(s''-\sigma)}\\
\sin^2 \operatorname{am}(u+iK') &= \frac{1}{k^2\sin^2\xi} = \frac{(s''-s)(s'''-\sigma)}{(s'''-s'')(\sigma-s)}\\
\sin^2 \operatorname{am}(u+K+iK') &= \frac{\Delta^2\xi}{k^2\cos^2\xi} = \frac{(s'''-s')(s''-\sigma)}{(s'''-s'')(s'-\sigma)}.
\end{aligned}$$

D'autre côté de l'équation

$$\sin^2\xi = \frac{(s'''-s')(\sigma-s)}{(s'-s)(s'''-\sigma)}$$

on déduit par le changement de lettres indiqué ci-dessus §. 3 les trois autres expressions de $\sin^2\xi$,

$$\begin{aligned}
\sin^2\xi &= \frac{(s''-s)(s'-\sigma')}{(s'-s)(s''-\sigma')}\\
\sin^2\xi &= \frac{(s'''-s')(\sigma''-s'')}{(s'''-s'')(\sigma''-s')}\\
\sin^2\xi &= \frac{(s''-s)(s'''-\sigma''')}{(s'''-s'')(\sigma'''-s)}.
\end{aligned}$$

D'où l'on voit que l'argument elliptique u étant augmenté successivement des constantes

$$K, \quad K+iK', \quad iK'$$

la fonction σ se changera, respectivement, en

$$\sigma', \quad \sigma'', \quad \sigma'''.$$

Puisqu'on a fait

$$\frac{2K}{n} = T,$$

faisons encore

$$\frac{2K'}{n} = T'.$$

Cette constante pourra être exprimé par l'intégrale

$$T' = \pm\tfrac{1}{2}\int_B^{\frac{l^2}{h}} \frac{\sqrt{ABC}\,dx}{\sqrt{(x-A)(x-B)(x-C)(hx-l^2)}}.$$

Les fonctions de t,

$$\sigma = -\frac{d\psi}{dt}, \quad \sigma' = -\frac{d\psi_3}{dt}, \quad \sigma'' = -\frac{d\psi_2}{dt}, \quad \sigma''' = -\frac{d\psi_1}{dt},$$

sont doublement périodiques et les indices de leurs périodes sont $T = \frac{2K}{n}$ et $iT' = \frac{2iK'}{n}$, c'est à dire ces fonctions ne changeront pas de valeurs lorsqu'on augmente t d'une quantité $\nu T + \nu' iT'$, ν, ν' designant des nombres entiers quelconques. Mais par ce qu'on vient de prouver, il résulte encore, que, si l'on augmente t des demi-indices

$$\tfrac{1}{2}T, \quad \tfrac{1}{2}(T+iT'), \quad \tfrac{1}{2}iT'$$

les fonctions

$$\frac{d\psi}{dt}, \quad \frac{d\psi_3}{dt}, \quad \frac{d\psi_2}{dt}, \quad \frac{d\psi_1}{dt},$$

se changent respectivement en

$$\begin{array}{cccc}
\frac{d\psi_3}{dt}, & \frac{d\psi}{dt}, & \frac{d\psi_1}{dt}, & \frac{d\psi_2}{dt}\\
\frac{d\psi_2}{dt}, & \frac{d\psi_1}{dt}, & \frac{d\psi_3}{dt}, & \frac{d\psi}{dt}\\
\frac{d\psi_1}{dt}, & \frac{d\psi_2}{dt}, & \frac{d\psi}{dt}, & \frac{d\psi_3}{dt}.
\end{array}$$

C'est ce qui s'accorde avec la remarque qu'on a fait à la fin du premier Mémoire, mais on a voulu déduire ici cette corrélation des quatre fonctions par des considérations plus élémentaires sans le secours des fonctions Θ et en ne se servant que des équations différentielles elles-mêmes.

De ce que les quantités

$$\sigma''' = -\frac{d\psi_1}{dt} \quad \text{et} \quad \sigma'' = -\frac{d\psi_2}{dt}$$

sont renfermées entre les limites $s'' = \frac{h}{l}$, $s''' = \frac{l}{C}$, les quantités

$$\sigma = -\frac{d\psi}{dt} \quad \text{et} \quad \sigma' = -\frac{d\psi_3}{dt}$$

entre les limites $s = \frac{l}{A}$ et $s' = \frac{l}{B}$ et que les quantités s, s', s'', s''' s'entresuivent par ordre de grandeur, on conclut, que dans le cas de $\frac{l^2}{h} < B$ les vitesses angulaires des projections sur le plan invariable des axes des x' et y' qui se couchent alternativement sur le plan invariable, sont constamment plus grandes que celles des projections de l'axe des z' et de l'axe instantané qui ne coincident jamais avec ce plan, et que le contraire a lieu lorsque $\frac{l^2}{h} > B$.

Les quatre quantités $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''$ étant des fonctions fractionnairement linéaires de $\sin^2\xi$, il suit que chacune de chacune est aussi une fonction fractionnairement linéaire. Mais ces dernières fonctions ont encore la propriété d'être *réciproques* et que, l'une quelconque des quatre quantités étant considérée comme fonction d'une autre quelconque, les deux restantes seront cette même fonction l'une de l'autre, c'est à dire si l'on désigne ces quatre quantités, abstraction faite de l'ordre dans lequel elles sont rangées, par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ et qu'on a

$$\sigma_2 = f(\sigma_1),$$

on aura encore

$$\sigma_1 = f(\sigma_2), \quad \sigma_3 = f(\sigma_4), \quad \sigma_4 = f(\sigma_3).$$

C'est ce qu'on vérifiera au moyen des expressions algébriques données ci-dessus de $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''$ par $\sin^2\xi$. Mais on pourra le prouver plus aisément par la nature analytique de ces quatre fonctions. En effet, des propositions que l'on vient d'établir, il suit que, si dans l'équation $\sigma_2 = f(\sigma_1)$ l'on suppose σ_1 et σ_2 exprimés en fonctions du temps, cette équation se change dans les trois autres en faisant augmenter t successivement des trois constantes $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{2}(T+iT')$, $\frac{1}{2}iT'$.

7.
Remarques sur les données du problème.

Parmi les éléments desquels dépend le mouvement de rotation proposé il y a *quatre* qui sont en quelque sorte étrangers à ce mouvement considéré en lui même. Ce sont les deux angles qui déterminent la position dans l'espace du plan invariable, le temps $(t = t_0)$ auquel sur ce plan est couché celui des trois

axes principaux auquel se rapporte le moment d'inertie moyen, et l'angle qui, au temps $t = t_0$, détermine la position de cet axe dans ce plan. En effet, ces éléments ne concernent que l'endroit de l'espace et, pour ainsi dire, du temps où ce mouvement est placé, ses rapports avec d'autres phénomènes du temps et de l'espace et nullement la nature elle même de la rotation laquelle dépendra entièrement des quatre constantes qu'on a désignées par s, s', s'', s'''. C'est ainsi que dans le mouvement elliptique d'une planète l'inclinaison et la longitude du noeud de son orbite et la longitude et le temps de son périhélie déterminent l'endroit où le mouvement elliptique se trouve placé dans l'espace et le temps, pendant que l'axe, l'excentricité et la masse attirante déterminent la nature du mouvement elliptique même.

Disons quelques mots sur la manière de laquelle est affecté le mouvement de rotation lorsque toutes les constantes s, s', s'', s''' sont augmentées d'une même quantité ou multipliées par le même facteur.

On a défini, dans le premier Mémoire, l'argument elliptique a par la formule

$$-k^2 \sin^2 \mathrm{am}(ia) = \frac{C(A-B)}{A(B-C)} = \frac{s'-s}{s'''-s'},$$

on a de plus (§. 1)

$$k^2 = \frac{(s'-s)(s'''-s'')}{(s''-s)(s'''-s')}, \quad n^2 = (s''-s)(s'''-s').$$

Ces formules font voir, que l'argument elliptique constant a, le module k et le facteur n du temps et par suite aussi les quantités K, $\frac{2K}{n} = T$ ne dépendent que des *différences* des quantités s, s', s'', s'''. D'autre côté, Ψt étant le mouvement moyen de la rotation *progressive**) des projections de l'axe de z' et de l'axe instantané sur le plan invariable, $\Psi_1 t$ celui des projections des axes des x' et y' sur le même plan, on a donné, dans le premier Mémoire (p. 334 de ce vol.) les valeurs suivantes de Ψ, Ψ_1

$$\Psi = \Psi_1 \mp \frac{\pi}{T} = s \mp n \frac{d \log \Theta(ia)}{da}.$$

D'où l'on voit que, les quantités s, s', s'', s''' étant augmentées ou diminuées d'une même constante s_0, les mouvements de la rotation progressive de ces

*) On se sert de cette dénomination de rotation *progressive* en suivant l'exemple de mon illustre ami M. *Hansen*.

quatre projections seront augmentés ou diminués de la même quantité $s_0 t$, pendant que le mouvement oscillatoire du corps autour des droites (x) et (y) et de l'axe des z reste le même.

Lorsque les constantes s, s', s'', s''' sont multipliées par un même facteur f, il n'y aura de changement, si non que les constantes n, Ψ, Ψ_1 et par suite aussi l'argument elliptique u seront multipliées par ce même facteur f, ce qui a le même effet que, si l'on changeait $t - t_0$ en $f(t - t_0)$, rien d'autre chose n'étant changé. C'est comme si l'on donnait à la montre qui sert à la mesure du temps une autre marche uniforme plus vite ou plus lente.

Étant connus la constitution du corps, c'est à dire les trois moments d'inertie A, B, C, le temps t_0, la position du plan invariable et la position de l'axe des (y') dans ce plan au temps t_0, pour que la rotation soit entièrement déterminée, on n'aura besoin que de connaître encore la position de l'axe des (x') au même temps t_0 et le moment principal ou l'intensité l du couple par lequel le corps primitivement a été choqué, le plan invariable étant le plan de ce couple. La position de l'axe des x' au temps t_0 sera donnée par l'angle que cet axe fait avec l'axe des z. Le cosinus de cet angle α'' étant donné généralement par la formule

$$\alpha'' = -\frac{1}{l}\sqrt{\frac{A(l^2 - Ch)}{A - C}}\cos\operatorname{am} u = -\sqrt{\frac{s''' - s''}{s''' - s}}\cos\operatorname{am} u,$$

on aura pour $t = t_0$ ou $u = 0$

$$\alpha'' = -\sqrt{\frac{s''' - s''}{s''' - s}}.$$

D'autre part, de l'équation

$$-k^2 \sin^2\operatorname{am}(ia) = \frac{s' - s}{s''' - s'}$$

il suit

$$-\sin^2\operatorname{am}(ia) = \frac{s'' - s}{s''' - s''}$$

$$\cos^2\operatorname{am}(ia) = \frac{s''' - s}{s''' - s''}.$$

$$\Delta^2\operatorname{am}(ia) = \frac{s''' - s}{s''' - s'}.$$

Or, on a

$$\cos^2\operatorname{am}(ia) = \frac{1}{\cos^2\operatorname{am}(a, k')},$$

on aura donc

$$\cos\operatorname{am}(a, k') = \sqrt{\frac{s''' - s''}{s''' - s}},$$

d'où l'on voit, qu'au temps t_0 l'axe des x' fait avec l'axe des z l'angle $\pi - \operatorname{am}(a, k')$ ou l'angle $-\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(a, k')\right)$ avec le plan invariable.

À l'inclinaison de l'axe des x' au plan invariable au temps t_0, c'est à dire à l'angle $\frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(a, k')$, on peut substituer, comme donnée du problème, la constante $\frac{h}{l^2}$, c. a. d. la force vive divisée par le carré du moment principal. Nommons

$$-I = -\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(a, k')\right)$$

cette inclinaison qui sera aussi celle du plan des x', y' au plan invariable au temps t_0. Pour déterminer la constante

$$\frac{h}{l^2} = \frac{s''}{l}$$

par l'angle I et les moments d'inertie, on a l'équation

$$\sin^2 I = \frac{s''' - s''}{s''' - s} = \frac{A}{A - C}\left(1 - \frac{Ch}{l^2}\right),$$

d'où suit

$$\frac{h}{l^2} = \frac{\cos^2 I}{C} + \frac{\sin^2 I}{A}.$$

On voit par ces formules que l'angle I, c. a. d. l'angle que fait le plan des x', y' avec le plan invariable, lorsque l'axe des y' se couche sur ce dernier plan, ne saura surpasser une certaine limite dépendante de la constitution du corps. Cette limite qu'on nommera I^0, est donnée par l'équation

$$\frac{1}{B} = \frac{\cos^2 I^0}{C} + \frac{\sin^2 I^0}{A}.$$

En même temps que I croîtra de 0 jusqu'à I^0, la constante $\frac{l^2}{h}$, selon les deux cas, croîtra ou décroîtra de C jusqu'à B.

En réunissant dans un même cadre les formules

$$\sin^2 I^0 = \frac{s''' - s'}{s''' - s}, \quad \sin^2 I = \frac{s''' - s''}{s''' - s}$$

$$\cos^2 I^0 = \frac{s' - s}{s''' - s}, \quad \cos^2 I = \frac{s'' - s}{s''' - s}$$

$$\sin^2 I^0 - \sin^2 I = \frac{s'' - s'}{s''' - s},$$

on a fait ce qu'il faut pour exprimer par les angles I^0 et I les raisons qu'ont entre elles les six différences des quantités s, s', s'', s'''.

En rappelant à l'aide la quantité

$$n = \sqrt{(s''-s)(s'''-s')},$$

on aura ces différences elles mêmes exprimées de la manière suivante

$$s'-s = \pm n \cdot \frac{\cos^2 I^0}{\sin I^0 \cos I}, \qquad s'''-s'' = \pm n \cdot \frac{\sin^2 I}{\sin I^0 \cos I}$$
$$s''-s = \pm n \cdot \frac{\cos^2 I}{\sin I^0 \cos I}, \qquad s'''-s' = \pm n \cdot \frac{\sin^2 I^0}{\sin I^0 \cos I}$$
$$s'''-s = \pm n \cdot \frac{1}{\sin I^0 \cos I}, \qquad s''-s' = \pm n \cdot \frac{\sin^2 I^0 - \sin^2 I}{\sin I^0 \cos I}.$$

Remarquons qu'en posant, comme dans le premier Mémoire (p. 310 de ce vol.),

$$a' = K' - a,$$

on a

$$\operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(a', k') = \operatorname{tg}^2 \operatorname{coam}(a, k') = \frac{A(B-C)}{C(A-B)} = \frac{s'''-s'}{s'-s}.$$

On aura donc

$$I^0 = \operatorname{coam}(a, k')$$
$$I = \frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(a, k')$$
$$\frac{\operatorname{tg} I}{\operatorname{tg} I^0} = k.$$

On voit par ces formules que la seule connaissance de ces deux angles I^0 et I fournit toutes les données nécessaires pour construire les valeurs elliptiques des cosinus des *neuf* angles qui déterminent la rotation *oscillatoire* du corps, valeurs réunies sous un même cadre dans ma lettre à l'Académie de Paris. Les trois moments d'inertie n'y concourent que par le seul angle I^0, fonction des moments d'inertie. L'autre angle I est celui que l'axe des z forme avec l'axe des z', lorsque l'axe des y' se couche sur le plan invariable. Mais cet angle sera aussi donné pourvu qu'on connait à un temps quelconque la position du plan invariable ou de l'axe des z, perpendiculaire à ce plan, par rapport aux axes d'inertie du corps.

Nommons, comme dans le premier Mémoire, α'', β'', γ'' les cosinus des angles que l'axe des z forme respectivement, à un temps quelconque, avec l'axe des x', y', z', on aura

$$s\alpha''^2 + s'\beta''^2 + s'''\gamma''^2 = s''$$

d'où suit

$$(s''-s)\alpha''^2 + (s''-s')\beta''^2 - (s'''-s'')\gamma''^2 = 0$$

ou, divisant par $s'''-s$ et substituant les valeurs données ci-dessus des trois coefficients,

$$\alpha''^2 . \cos^2 I + \beta''^2 . (\sin^2 I^0 - \sin^2 I) - \gamma''^2 . \sin^2 I = 0,$$

d'où l'on tire

$$\cos^2 I = \beta''^2 . \cos^2 I^0 + \gamma''^2$$
$$\sin^2 I = \beta''^2 . \sin^2 I^0 + \alpha''^2$$
$$\sin^2 I^0 - \sin^2 I = \gamma''^2 . \sin^2 I^0 - \alpha''^2 . \cos^2 I^0.$$

Au temps t_0 on a $\beta'' = 0$, ce qui s'accorde avec les valeurs par lesquelles ci-dessus l'angle I a été défini.

Nommons

$$I'$$

l'angle que l'axe des z forme avec celui des z' lorsque c'est l'axe des x' qui se couche sur le plan invariable. L'axe des z décrivant pendant la rotation du corps, dans son intérieur, la surface d'un cône dont l'axe des z' est l'axe, proprement dite, du cône et les axes des x' et y' ses deux autres axes principaux, les angles I et I' seront respectivement les angles entre l'axe du cône et ses intersections avec le plan des x', z' et celui des y', z'. L'équation du cône sera par suite

$$\frac{\alpha''^2}{\operatorname{tg}^2 I} + \frac{\beta''^2}{\operatorname{tg}^2 I'} = \gamma''^2,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tg}^2 I' = \frac{\sin^2 I}{\sin^2 I^0 - \sin^2 I}, \qquad \sin I' = \frac{\sin I}{\sin I^0} = \Delta \operatorname{am}(a, k').$$

On voit par cette formule qu'on aura toujours $I' > I$, et que *la raison entre les sinus des deux angles I et I' ne dépendra que de la constitution du corps.*

Étant donnés l'angle I^0 à un temps quelconque, la position de l'axe des z par rapport aux axes d'inertie, cherchons comment on peut reconnaître lequel des deux cas a lieu, savoir si l'axe du cône est celui auquel se rapporte le plus petit ou le plus grand moment d'inertie.

Nommons, pour un moment, A' le plus grand, C' le plus petit moment et traçons dans le plan des x', z' deux droites $\wedge$ faisant avec l'axe auquel se rapporte le plus petit moment l'angle I_0 déterminé par les formules

$$\sin I_0 = \sqrt{\frac{A'(B-C')}{B(A'-C')}}, \quad \cos I_0 = \sqrt{\frac{C'(A'-B)}{B(A'-C')}}.$$

Ceci posé on aura dans le premier cas

$$A = A', \quad C = C', \quad I^0 = I_0$$

et dans le second

$$A = C', \quad C = A', \quad I^0 = \tfrac{1}{2}\pi - I_0.$$

Nommons de plus λ *l'inclinaison de l'axe des z au plan du moyen moment* et μ l'angle que la projection de l'axe des z sur le plan du moyen moment fait avec *l'axe du plus petit moment*, on aura dans le premier cas

$$\alpha'' = \cos\lambda \sin\mu, \quad \beta'' = \sin\lambda, \quad \gamma'' = \cos\lambda\cos\mu,$$

et par suite

$$\sin^2 I^0 - \sin^2 I = \cos^2\lambda(\sin^2 I_0 - \sin^2\mu)$$

et dans le second

$$\alpha'' = \cos\lambda\cos\mu, \quad \beta'' = \sin\lambda, \quad \gamma'' = \cos\lambda\sin\mu,$$

et par suite

$$\sin^2 I^0 - \sin^2 I = \cos^2\lambda(\cos^2 I_0 - \cos^2\mu).$$

La quantité $\sin^2 I^0 - \sin^2 I$ étant toujours positive on aura selon les deux cas $I_0 > \mu$ ou $I_0 < \mu$. Le plan du moyen moment est divisé par les deux droites $\wedge$ en deux parties renfermant respectivement l'axe du plus petit et du plus grand moment. Or, les formules que l'on vient d'établir font voir que la projection de l'axe des z sur le plan du moyen moment se trouvera placée, dans le premier cas, dans l'espace entre les deux droites $\wedge$ renfermant l'axe du plus petit moment et, dans le second cas, dans l'espace entre les deux droites $\wedge$, renfermant l'axe du plus grand moment. Donc, *le premier ou le second cas auront lieu selonque dans le même espace entre les deux droites $\wedge$, où est placée la projection de l'axe des z sur le plan du moyen moment, se trouve placé l'axe du plus petit ou du plus grand moment.* L'axe d'inertie placé dans le même espace, entre les deux droites $\wedge$, dans lequel se trouve la projection de l'axe des z, sera donc celui des z' ou l'axe du cône dont on vient de parler.

L'intersection du plan invariable avec celui du moyen moment étant perpendiculaire à la projection de l'axe des z sur ce dernier plan, l'axe des x' sera

celui *des deux axes d'inertie placé dans le même espace entre les deux droites $\wedge$ dans lequel se trouve l'intersection du plan du moyen moment avec le plan invariable.*

La distinction de deux cas, faite constamment dans le cours de ces recherches, savoir si l'axe des z' est celui du plus petit ou du plus grand moment, dépend de la constitution du corps et de sa position, à un temps quelconque, par rapport au plan invariable ou au plan du couple par lequel le corps primitivement a été mis en mouvement, mais nullement du moment principal ou de l'intensité de ce couple. Mais on n'a pas besoin non plus, pour faire la distinction des deux cas, de connaître à part tous les trois moments d'inertie du corps, ni les deux angles qui déterminent la position du plan invariable par rapport à ses plans principaux. En effet, pour distinguer les deux cas, il suffit, d'après ce qu'on vient d'exposer, de connaître une seule fonction des trois moments d'inertie principaux, l'angle I_0, lequel détermine la position des deux droites $\wedge$ dans le plan du moyen moment et, en outre, l'intersection du plan invariable avec ce plan, perpendiculaire à la projection de l'axe des z sur ce même plan.

Des deux rotations conjuguées.

Les constantes s, s', s'', s''' peuvent être quelconques pourvu qu'elles s'entresuivent par ordre de grandeur. Cet ordre pouvant être croissant ou décroissant, on pourra considérer une seconde rotation dépendante des mêmes quantités s, s', s'', s''', mais rangées dans l'ordre invers, s''', s'', s', s. Les formules relatives à cette seconde rotation s'obtiendront donc de celle de la rotation proposée en échangeant partout entre elles les constantes s et s''', s' et s'' et en changeant le signe ambigu $\pm$ en $\mp$. On nommera cette rotation la *conjuguée* à la proposée. On supposera d'ailleurs, que le moment principal l soit le même dans l'une et l'autre rotation.

Voyons qu'est ce que les deux rotations ont de commun et en quoi elles diffèrent entre elles.

Puisqu'il y a une réciprocité parfaite entre les deux rotations, il est permis de supposer

$$s < s' < s'' < s'''.$$

D'après cette supposition, dans la rotation proposée, l'axe des x' sera celui du plus grand, l'axe des z' celui du plus petit moment, et le contraire aura lieu dans la rotation conjuguée. L'axe des z sera dirigé en dessus dans la première et en dessous dans la seconde rotation, le plan invariable étant supposé horizontal.

Posons

$$s''' = s_1, \quad s'' = s_1', \quad s' = s_1'', \quad s = s_1''',$$

on aura

$$s_1 > s_1' > s_1'' > s_1'''.$$

Puisque c'est le premier cas qui a lieu dans la rotation proposée, le plus grand moment y sera $\frac{l}{s} = A$ et le plus petit $\frac{l}{s'''} = C$, et puisque c'est le second cas qui a lieu dans la rotation conjuguée, le plus grand moment y sera $\frac{l}{s_1'''}$ et le plus petit $\frac{l}{s_1}$. Or, on a $s = s_1'''$, $s''' = s_1$, donc le plus grand et le plus petit moment seront les mêmes dans les deux corps soumis respectivement à ces rotations.

Nommons

$$I_1^0, \quad I_1,$$

ce qui deviennent les angles I^0 et I dans la seconde rotation. Des formules données ci-dessus

$$\sin^2 I^0 = \frac{s'''-s'}{s'''-s}, \qquad \sin^2 I = \frac{s'''-s''}{s'''-s},$$

$$\cos^2 I^0 = \frac{s'-s}{s'''-s}, \qquad \cos^2 I = \frac{s''-s}{s'''-s},$$

on tirera, en échangeant s et s''', s' et s''

$$\sin^2 I_1^0 = \frac{s''-s}{s'''-s}, \qquad \sin^2 I_1 = \frac{s'-s}{s'''-s},$$

et par suite

$$I_1^0 + I = I_1 + I^0 = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Traçons dans le plan des x', z' (plan du moyen moment) les deux droites Z dont la position est celle de l'axe des z dans ce plan aux temps t_0 et $t_0 + T$. Ces droites étant les intersections du plan des x', z' avec le cône, lieu de l'axe des z dans l'intérieur du corps, elles feront avec l'axe des z' l'angle I, comme les deux droites $\wedge$, tracées dans le même plan, font avec le même axe l'angle I^0. Or, nommant dans la rotation conjuguée Z_1 et $\wedge_1$ les deux paires de droites correspondantes aux droites Z et $\wedge$, on voit, d'après la formule précédente, que les droites Z_1 seront perpendiculaires aux droites $\wedge$ et que les droites $\wedge_1$

seront perpendiculaires aux droites Z. Il suit de là que la position que l'on doit supposer au corps soumis à la rotation conjuguée, au temps où son axe moyen se couche sur le plan invariable, dépend de la seule constitution du corps soumis à la rotation proposée. Réciproquement, la constitution du second corps, soumis à la rotation conjuguée, dépend du plus grand et plus petit moment du premier corps et de la position qu'il occupe lorsque l'axe de son moment moyen se couche sur le plan invariable. En effet, nommons

$$B_1 = \frac{l}{s_1''}$$

le moment moyen du second corps; on tire de l'équation

$$s'' = s''' \cos^2 I + s \sin^2 I$$

la valeur suivante de $\frac{1}{B_1}$

$$\frac{1}{B_1} = \frac{\cos^2 I}{C} + \frac{\sin^2 I}{A}.$$

Si l'on nomme, de plus,

$$h_1$$

la force vive dont le second corps est animé pendant le mouvement, on aura

$$s'' = \frac{l}{B_1} = \frac{h}{l}, \qquad s' = \frac{l}{B} = \frac{h_1}{l}$$

et par suite

$$B_1 h = B h_1 = l^2.$$

Les moments moyens seront donc, dans les deux rotations conjuguées, proportionnelles aux forces vives, et l'on voit que l'un et l'autre est plus grand dans la rotation proposée que dans la conjuguée.

Le module et le facteur n du temps sont les mêmes pour l'une et l'autre rotation, et par suite aussi les constantes K, K' et l'argument elliptique variable u. Nommons a_1 l'argument elliptique constant, correspondant à la seconde rotation, on tire des formules données ci-dessus

$$I^0 = \operatorname{coam}(a, k')$$

$$I = \frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(a, k')$$

ces autres

$$I_1^0 = \operatorname{coam}(a_1, k')$$

$$I_1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(a_1, k');$$

mais on a vu qu'on a

$$I_1^0 + I = I_1 + I^0 = \tfrac{1}{2}\pi,$$

d'où suit

$$a_1 = K' - a = a'.$$

Les formules elliptiques relatives au mouvement oscillatoire du corps soumis à la rotation conjuguée s'obtiendront donc de celles données dans le premier Mémoire, en changeant seulement a en $a' = K' - a$.

Soient, dans la rotation conjuguée, les trois axes principaux du corps et l'axe instantané projetés sur le plan invariable, et nommons S_1 une quelconque des vitesses angulaires de ces quatre projections, on obtiendra la même équation différentielle entre t et S_1

$$dt = \frac{\pm dS_1}{2\sqrt{-(S_1-s)(S_1-s')(S_1-s'')(S_1-s''')}},$$

puisque cette équation n'est pas changé en intervertissant l'ordre des constantes s, s', s'', s'''. Les vitesses angulaires des projections de l'axe des x', y', z' et de l'axe instantané, correspondantes au temps t_0, étant, dans la rotation proposée, respectivement s, s', s''', s'', ces mêmes vitesses seront, dans la rotation conjuguée, respectivement s''', s'', s, s'. Mais toutes ces vitesses angulaires sont entièrement déterminées par ces valeurs, correspondantes au temps t_0 et l'équation différentielle laquelle est la même pour toutes ces vitesses. Donc aussi, pour un temps indéfini t, les vitesses angulaires des projections des axes des x' et z', c'est à dire des axes du plus grand et du plus petit moment, dans l'une rotation seront respectivement les mêmes que celles des projections des z' et x', c. a. d. des axes du plus grand et du plus petit moment dans l'autre, et la vitesse angulaire de la projection de l'axe du moyen moment dans l'une rotation sera la même que celle de la projection de l'axe instantané dans l'autre. Donc, dans les deux rotations conjuguées, non seulement le plus grand et le plus petit moment des deux corps seront les mêmes, mais encore, les axes principaux auxquels ces moments se rapportent, étant projetés sur le plan invariable, ces projections auront, respectivement, les mêmes vitesses angulaires.

On a pris pour droite fixe dans le plan invariable la droite dont la direction est opposée à celle qu'au temps t_0 aura l'axe du moyen moment ou celui des y'. On a nommé, respectivement,

$$\psi,\quad \psi_1,\quad \psi_2,\quad \psi_3$$

les angles que font avec cette droite les intersections du plan invariable avec les plans des x', y', des y', z', des z', x' et du plan instantané de rotation. Les valeurs des angles $\psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3$, correspondantes au temps t_0, sont d'après ce qu'on a exposé dans le premier Mémoire, lorsque $Bh > l^2$,

$$\psi = 0,\quad \psi_1 = 0,\quad \psi_2 = -\tfrac{1}{2}\pi,\quad \psi_3 = \pi,$$

et dans le cas contraire

$$\psi = 0,\quad \psi_1 = \pi,\quad \psi_2 = -\tfrac{1}{2}\pi,\quad \psi_3 = 0.$$

Distinguons ces angles par des crochets lorsqu'ils se rapportent à la rotation conjuguée, on aura au temps t_0

$$\psi = 0,\quad \psi_1 = 0,\quad \psi_2 = -\tfrac{1}{2}\pi,\quad \psi_3' = \pi$$
$$(\psi) = 0,\quad (\psi_1) = \pi,\quad (\psi_2) = -\tfrac{1}{2}\pi,\quad (\psi_3) = 0,$$

puisqu'on a supposé que le premier a lieu dans la rotation proposée et le second dans la conjuguée. Or, on vient de trouver

$$\frac{d(\psi)}{dt} = \frac{d\psi_1}{dt},\qquad \frac{d(\psi_2)}{dt} = \frac{d\psi_3}{dt},$$
$$\frac{d(\psi_1)}{dt} = \frac{d\psi}{dt},\qquad \frac{d(\psi_3)}{dt} = \frac{d\psi_2}{dt},$$

les angles (ψ) et ψ_1, (ψ_1) et ψ, (ψ_2) et ψ_3, (ψ_3) et ψ_2 ne pourront donc différer entre eux que par des constantes. On aura, par suite, pour un temps indéfini

$$(\psi) = \psi_1$$
$$(\psi_1) = \psi + \pi$$
$$(\psi_2) = \psi_3 - \tfrac{3}{2}\pi$$
$$(\psi_3) = \psi_2 + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Ces formules font voir que dans les deux rotations conjuguées les projections sur le plan invariable des axes du plus petit moment coincident, et que celles des axes du plus grand moment ont des directions opposées; qu'en outre, les projections sur le plan invariable de l'axe du moyen moment et de l'axe instantané du premier corps, précédent, respectivement, les projections de l'axe instantané et de l'axe du moyen moment du second corps, d'un angle droit.

Nommons

$$\alpha_1'',\quad \beta_1'',\quad \gamma_1''$$

les cosinus des angles que dans la rotation conjuguée les axes des x', y', z' font, respectivement, avec l'axe des z, on tirera des formules

$$\alpha'' = -\sqrt{\frac{s'''-s''}{s'''-s}}\cos\xi = -\sin I\cos\xi$$

$$\beta'' = \sqrt{\frac{s'''-s''}{s'''-s'}}\sin\xi = \sin I'\sin\xi = \frac{\sin I}{\sin I_0}\sin\xi$$

$$\gamma'' = \sqrt{\frac{s''-s}{s'''-s}}\,\Delta\xi = \cos I\,\Delta\xi$$

ces autres relatives à la rotation conjuguée

$$\alpha''_1 = -\sqrt{\frac{s'-s}{s'''-s}}\cos\xi = -\cos I^0\cos\xi$$

$$\beta''_1 = \sqrt{\frac{s'-s}{s''-s}}\sin\xi = \frac{\cos I^0}{\cos I}\sin\xi$$

$$\gamma''_1 = -\sqrt{\frac{s'''-s'}{s'''-s}}\,\Delta\xi = -\sin I^0\,\Delta\xi.$$

On voit par ces formules que les cosinus des angles que font à un même temps dans les deux rotations les axes des x', y', z' avec l'axe des z, conservent, respectivement, des rapports constants. En effet, on aura

$$\alpha'':\alpha''_1 = \sin I:\cos I^0$$
$$\beta'':\beta''_1 = \sin I\cos I:\sin I^0\cos I^0$$
$$\gamma'':\gamma''_1 = \cos I:-\sin I^0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\alpha''\gamma''}{\beta''} = -\frac{\alpha''_1\gamma''_1}{\beta''_1}.$$

Les composantes de la vitesse rotatoire autour de l'axe instantané dans la rotation proposée p, q, r sont proportionnelles aux quantités $\alpha'', \beta'', \gamma''$. Il suit que si l'on nomme p_1, q_1, r_1 les composantes correspondantes de la vitesse rotatoire dans la rotation conjuguée, les vitesses rotatoires elles mêmes autour des axes instantanés dans les deux rotations auront pour un temps quelconque la différence de leurs carrés constante. En effet, des formules

$$p^2 = s^2\alpha''^2 = \frac{s^2(s'''-s'')}{s'''-s}\cos^2\xi$$

$$q^2 = s'^2\beta''^2 = \frac{s'^2(s'''-s'')}{s'''-s'}\sin^2\xi$$

$$r^2 = s'''^2\gamma''^2 = \frac{s'''^2(s''-s)}{s'''-s}\Delta^2\xi = \frac{s'''^2(s''-s)}{s'''-s}\cos^2\xi + \frac{s'''^2(s''-s')}{s'''-s'}\sin^2\xi$$

on tire la valeur du carré de cette vitesse

$$\begin{aligned} p^2+q^2+r^2 &= [s''(s'''+s)-ss''']\cos^2\xi + [s''(s'''+s')-s's''']\sin^2\xi \\ &= s''(s'''+s)-ss'''-(s'-s)(s'''-s'')\sin^2\xi. \end{aligned}$$

Changeant p, q, r en p_1, q_1, r_1 et intervertissant l'ordre des quantités s, s', s'', s''', on aura de même

$$p_1^2+q_1^2+r_1^2 = s'(s'''+s)-ss'''-(s'-s)(s'''-s'')\sin^2\xi,$$

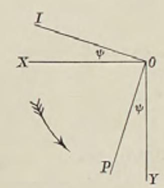
donc

$$p^2+q^2+r^2-(p_1^2+q_1^2+r_1^2) = (s''-s')(s'''+s).$$

Des deux rotations conjuguées la proposée, c. a. d. celle qui est animée d'une plus grande force vive, aura donc aussi, à chaque instant du temps, une plus grande vitesse rotatoire autour de son axe instantané.

Expressions des neuf cosinus α, β, γ etc. par les trois angles ψ, ψ_1, ψ_2.

Les angles ψ, ψ_1, ψ_2 suffisent pour déterminer la position des axes principaux dans l'espace. Nommons X la droite fixe dans le plan invariable, et traçons dans le même plan une seconde droite fixe Y laquelle fait avec X un angle droit dans le sens même de la rotation. Les angles ψ, ψ_1, ψ_2 seront, respectivement, ceux que les projections des axes des z', x', y' font avec la droite Y, et les angles $\psi-\frac{1}{2}\pi, \psi_1-\frac{1}{2}\pi, \psi_2-\frac{1}{2}\pi$ ceux que, respectivement, ces mêmes projections font avec la droite X, comme on le voit dans la figure ci-jointe,



dans laquelle P est la projection de l'axe des z' sur le plan invariable, et I l'intersection du plan des x', y' avec ce même plan. Or soient, respectivement,

$$\vartheta,\quad \vartheta',\quad \vartheta''$$

les angles que l'axe des z fait avec les axes des z', x', y', les axes des z', x', y' feront avec l'axe des z et les droites X et Y des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\begin{array}{lccc} & (z) & (X) & (Y) \\ (z') \; \ldots\ldots & \cos\vartheta, & \sin\vartheta\,\sin\psi, & \sin\vartheta\,\cos\psi \\ (x') \; \ldots\ldots & \cos\vartheta', & \sin\vartheta'\sin\psi_1, & \sin\vartheta'\cos\psi_1 \\ (y') \; \ldots\ldots & \cos\vartheta'', & \sin\vartheta''\sin\psi_2, & \sin\vartheta''\cos\psi_2. \end{array}$$

Ces expressions étant substituées dans les relations connues qui ont lieu entre ces neuf quantités, il résultera ces formules

$$(1.)\quad \begin{cases} \cos\vartheta'\cos\vartheta''+\sin\vartheta'\sin\vartheta''\cos(\psi_1-\psi_2) = 0 \\ \cos\vartheta''\cos\vartheta\;+\sin\vartheta''\sin\vartheta\;\cos(\psi_2-\psi) = 0 \\ \cos\vartheta\;\cos\vartheta'+\sin\vartheta\;\sin\vartheta'\cos(\psi-\psi_1) = 0; \end{cases}$$

$$(2.)\quad \begin{cases} \sin\vartheta'\sin\vartheta''\sin(\psi_1-\psi_2) = \cos\vartheta \\ \sin\vartheta''\sin\vartheta\;\sin(\psi_2-\psi) = \cos\vartheta' \\ \sin\vartheta\;\sin\vartheta'\sin(\psi-\psi_1) = \cos\vartheta''. \end{cases}$$

Posons

$$(3.)\quad \begin{cases} \sin(\psi_1-\psi_2)\sin(\psi_2-\psi)\sin(\psi-\psi_1) = \mathrm{A} \\ -\cos(\psi_1-\psi_2)\cos(\psi_2-\psi)\cos(\psi-\psi_1) = \mathrm{B}, \end{cases}$$

on aura

$$(4.)\quad \begin{cases} \cot^2\vartheta\cot^2\vartheta'\cot^2\vartheta'' = \mathrm{B} \\ \dfrac{\cos\vartheta\,\cos\vartheta'\,\cos\vartheta''}{\sin^2\vartheta\,\sin^2\vartheta'\sin^2\vartheta''} = \mathrm{A}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(5.)\quad \begin{cases} \cos\vartheta\,\cos\vartheta'\cos\vartheta'' = \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} \\ \sin\vartheta\,\sin\vartheta'\,\sin\vartheta'' = \dfrac{\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{A}} \end{cases}$$

et, par suite,

$$(6.)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\vartheta = -\dfrac{\cos(\psi_1-\psi_2)}{\sqrt{\mathrm{B}}}, & \sin 2\vartheta = \dfrac{2\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{A}}\sin(\psi_1-\psi_2) \\ \operatorname{tg}\vartheta' = -\dfrac{\cos(\psi_2-\psi)}{\sqrt{\mathrm{B}}}, & \sin 2\vartheta' = \dfrac{2\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{A}}\sin(\psi_2-\psi) \\ \operatorname{tg}\vartheta'' = -\dfrac{\cos(\psi-\psi_1)}{\sqrt{\mathrm{B}}}, & \sin 2\vartheta'' = \dfrac{2\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{A}}\sin(\psi-\psi_1). \end{cases}$$

Multipliant et divisant l'une par l'autre chaque paire de formules dans la même horizontale, il résultera

$$(7.)\quad \begin{cases} \sin^2\vartheta = -\dfrac{\sin 2(\psi_1-\psi_2)}{2\mathrm{A}}, & \cos^2\vartheta = -\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\operatorname{tg}(\psi_1-\psi_2), \\ \sin^2\vartheta' = -\dfrac{\sin 2(\psi_2-\psi)}{2\mathrm{A}}, & \cos^2\vartheta' = -\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\operatorname{tg}(\psi_2-\psi), \\ \sin^2\vartheta'' = -\dfrac{\sin 2(\psi-\psi_1)}{2\mathrm{A}}, & \cos^2\vartheta'' = -\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\operatorname{tg}(\psi-\psi_1). \end{cases}$$

On obtiendra ainsi, en tirant les racines carrées, les valeurs des cosinus et sinus de ϑ, ϑ', ϑ'', exprimées par les différences des angles ψ, ψ_1, ψ_2, et substituant ces expressions dans les valeurs données ci-dessus des neuf cosinus, on aura les expressions cherchées de ces derniers par les trois angles ψ, ψ_1, ψ_2.

Les formules précédentes rentrent dans celles données par Euler dans le volume XX des *Novi Commentarii*, v. le Mémoire: »*Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum.*«

Ces belles et remarquables formules étant échappées à l'attention des géomètres, je les ai rappelées dans le vol. II du Journal mathématique avec d'autres par lesquelles Euler a fait voir que l'on peut passer d'une position d'un système d'axes rectangulaires à chaque autre au moyen d'une rotation autour d'une axe unique.

On a appelé

$$(\psi),\quad (\psi_1),\quad (\psi_2),\quad (\psi_3)$$

les angles correspondants dans la rotation conjuguée aux ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, et l'on a trouvé

$$(\psi) = \psi_1,\qquad (\psi_2) = \psi_3-\tfrac{3}{2}\pi$$
$$(\psi_1) = \psi+\pi,\qquad (\psi_3) = \psi_2+\tfrac{1}{2}\pi.$$

Il faudra donc, dans la rotation conjuguée, remplacer respectivement les différences des angles ψ, ψ_1, ψ_2

$$\psi_1-\psi_2,\qquad \psi_2-\psi,\qquad \psi-\psi_1$$

par

$$(\psi_1)-(\psi_2),\qquad (\psi_2)-(\psi),\qquad (\psi)-(\psi_1)$$

ou par

$$\psi-\psi_3+\tfrac{1}{2}\pi,\qquad \psi_3-\psi_1+\tfrac{1}{2}\pi,\qquad \psi_1-\psi+\pi.$$

Comme on a

$$\cos\vartheta = \gamma'', \quad \cos\vartheta' = \alpha'', \quad \cos\vartheta'' = \beta'',$$

il résulte des formules ci-dessus (5.) et (7.)

$$\frac{\alpha''\beta''}{\gamma''} = -\operatorname{cotg}(\psi_1-\psi_2)$$

$$\frac{{}''\gamma''}{\alpha''} = -\operatorname{cotg}(\psi_2-\psi)$$

$$\frac{\gamma''\alpha''}{\beta''} = -\operatorname{cotg}(\psi-\psi_1).$$

Dans la rotation conjuguée on aura par ce qu'on vient d'exposer les formules analogues

$$\frac{\alpha_1''\beta_1''}{\gamma_1''} = \operatorname{tg}(\psi-\psi_3)$$

$$\frac{\beta_1''\gamma_1''}{\alpha_1''} = \operatorname{tg}(\psi_3-\psi_1)$$

$$\frac{\gamma_1''\alpha_1''}{\beta_1''} = \operatorname{cotg}(\psi-\psi_1).$$

Rappelant les formules trouvées ci-dessus

$$\frac{\alpha_1''}{\alpha''} = \frac{\cos I^0}{\sin I}, \quad \frac{\beta_1''}{\beta''} = \frac{\sin I^0\cos I^0}{\sin I\cos I}, \quad \frac{\gamma_1''}{\gamma''} = -\frac{\sin I^0}{\cos I},$$

il suit

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos^2 I^0}{\sin^2 I} = \operatorname{tg}(\psi-\psi_3)\operatorname{tg}(\psi_1-\psi_2) \\ \dfrac{\sin^2 I^0}{\cos^2 I} = \operatorname{tg}(\psi_3-\psi_1)\operatorname{tg}(\psi_2-\psi). \end{cases}$$

Représentons ces deux formules de la manière suivante

$$0 = \cos^2 I^0\cos(\psi-\psi_3)\cos(\psi_1-\psi_2) - \sin^2 I\sin(\psi-\psi_3)\sin(\psi_1-\psi_2)$$
$$0 = \sin^2 I^0\cos(\psi_3-\psi_1)\cos(\psi_2-\psi) - \cos^2 I\sin(\psi_3-\psi_1)\sin(\psi_2-\psi),$$

on transformera aisément ces formules dans les suivantes

$$0 = (\cos^2 I^0 - \sin^2 I)\cos(\psi-\psi_1+\psi_2-\psi_3) + (\cos^2 I^0+\sin^2 I)\cos(\psi+\psi_1-\psi_2-\psi_3)$$
$$0 = (\sin^2 I^0 - \cos^2 I)\cos(\psi-\psi_1-\psi_2+\psi_3) + (\sin^2 I^0+\cos^2 I)\cos(\psi+\psi_1-\psi_2-\psi_3),$$

d'où l'on tire

$$\cos(\psi+\psi_1-\psi_2-\psi_3) : \cos(\psi-\psi_1+\psi_2-\psi_3) : \cos(\psi-\psi_1-\psi_2+\psi_3)$$
$$= (\sin^2 I^0-\cos^2 I) : (\cos^2 I^0+\sin^2 I) : -(\sin^2 I^0+\cos^2 I).$$

Soit

$$M = \tfrac{1}{2}[\cos(\psi-\psi_1+\psi_2-\psi_3) - \cos(\psi-\psi_1-\psi_2+\psi_3)],$$

on tirera de la proportion précédente les équations

$$(9.)\quad \begin{cases} \cos(\psi+\psi_1-\psi_2-\psi_3) = M(\sin^2 I^0-\cos^2 I) = M(\sin^2 I-\cos^2 I^0) \\ \cos(\psi-\psi_1+\psi_2-\psi_3) = M(\cos^2 I^0+\sin^2 I) \\ \cos(\psi-\psi_1-\psi_2+\psi_3) = -M(\sin^2 I^0+\cos^2 I). \end{cases}$$

La seule quantité M étant donnée, on connaîtra ainsi par leurs cosinus les trois angles

$$\psi+\psi_1-\psi_2-\psi_3, \quad \psi-\psi_1+\psi_2-\psi_3, \quad \psi-\psi_1-\psi_2+\psi_3.$$

Les demi-sommes et les demi-différences de ces angles pris deux à deux fourniront ensuite les six différences des angles ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, c. a. d. les angles mêmes que font entr'eux les quatre projections sur le plan invariable des trois axes principaux du mobile et de l'axe instantané de rotation.

Les trois équations ci-dessus étant ajoutées deux à deux ou retranchées l'une de l'autre, on aura

$$(10.)\quad \begin{cases} \cos(\psi_1-\psi_2)\cos(\psi_3-\psi) = M\sin^2 I \\ \cos(\psi_2-\psi)\cos(\psi_3-\psi_1) = -M\cos^2 I \\ \cos(\psi-\psi_1)\cos(\psi_3-\psi_2) = -M(\sin^2 I^0-\sin^2 I); \end{cases}$$

$$(11.)\quad \begin{cases} \sin(\psi_1-\psi_2)\sin(\psi_3-\psi) = -M\cos^2 I^0 \\ \sin(\psi_2-\psi)\sin(\psi_3-\psi_1) = -M\sin^2 I^0 \\ \sin(\psi-\psi_1)\sin(\psi_3-\psi_2) = M. \end{cases}$$

Ces formules donnent les suivantes:

$$\frac{\cos(\psi_1-\psi_2)\cos(\psi_3-\psi)}{\cos(\psi_2-\psi)\cos(\psi_3-\psi_1)} = -\operatorname{tg}^2 I$$

$$\frac{\sin(\psi_2-\psi)\sin(\psi_3-\psi_1)}{\sin(\psi_1-\psi_2)\sin(\psi_3-\psi)} = \operatorname{tg}^2 I^0,$$

au moyen desquelles on aura, de la manière la plus simple, les valeurs des angles constants I^0 et I, dès qu'on connaîtra, à un temps quelconque, la position des projections sur le plan invariable des axes principaux et de l'axe instantané.

Comme on a

$$\sin^2 I^0 = \frac{A(B-C)}{B(A-C)}, \qquad \cos^2 I^0 = \frac{C(A-B)}{B(A-C)},$$

on tire des trois dernières formules, par des considérations géométriques très connues, la proposition suivante:

„Les projections sur le plan invariable des axes des z', x', y' et de l'axe instantané étant coupées par une droite quelconque respectivement dans les points O, O', O'', O''', on aura

$$OO'.O''O''' : OO''.O'O''' : O'O''.OO''' = B(A-C) : A(B-C) : C(A-B).“$$

Etant données les projections sur le plan invariable des trois axes principaux, on aura, au moyen de la proposition précédente, cette construction de la projection de l'axe instantané sur le même plan:

„Soient fixement liées entr'elles quatre règles parallèles R, R', R'', R''', dont les distances $R'R'''$, $R''R'''$, RR''' soient respectivement proportionnelles aux moments d'inertie A, B, C, appliquant la règle R'' à la projection de l'axe des y'; soient O et O' les points dans lesquels les projections des axes des z' et x' sont rencontrées respectivement par les règles R et R', et O''' le point dans lequel la quatrième règle R''' est rencontrée par la droite OO', la droite menée du point fixe à O''' sera la projection de l'axe instantané.“

D'une manière semblable on construira chacune des quatre projections au moyen des trois autres.

On pourrait supposer que la règle O''' passe à l'infini et l'on obtiendra la projection de l'axe instantané en menant du point fixe une parallèle à la droite OO'. Alors les trois règles R, R'', R' seront assujetties à la condition que leurs distances $R'R''$ et RR'' soient entre elles comme les quantités $A(B-C)$ et $C(A-B)$.

Lorsque $I^0 = \frac{1}{4}\pi$, on tirera des formules (11.) la proposition suivante:

„Les trois moments principaux du corps étant en progression harmonique, les projections sur le plan invariable des axes principaux et de l'axe instantané formeront constamment pendant le mouvement du mobile un faisceau harmonique.“

Multipliant les équations (10.) avec les équations (11.), chacune avec sa correspondante, on aura les formules suivantes,

$$(12.)\quad \begin{cases} \sin 2(\psi_1-\psi_2)\sin 2(\psi_3-\psi) = -4M^2\cos^2 I^0 \sin^2 I \\ \sin 2(\psi_2-\psi)\ \sin 2(\psi_3-\psi_1) = 4M^2\sin^2 I^0\cos^2 I \\ \sin 2(\psi-\psi_1)\sin 2(\psi_3-\psi_2) = -4M^2(\sin^2 I^0-\sin^2 I). \end{cases}$$

Traçons dans le plan invariable quatre nouvelles droites, formant avec une droite quelconque du même plan des angles *doubles* de ceux que les quatre projections font avec cette même droite. Ces quatre droites étant rencontrées par une droite quelconque dans les points P, P', P'', P''', il suit des formules (12.) que l'on aura

$$PP'.P''P''' : PP''.P'''P' : PP'''.P'P'' = (\sin^2 I^0-\sin^2 I) : \sin^2 I^0\cos^2 I : \cos^2 I^0 \sin^2 I.$$

Remarquons que des formules (12.), à l'aide des expressions données au commencement de ce paragraphe, on tire

$$(13.)\quad \begin{cases} k^2 = \dfrac{\mathrm{tg}^2 I}{\mathrm{tg}^2 I^0} = \dfrac{\sin 2(\psi_1-\psi_2)\sin 2(\psi-\psi_3)}{\sin 2(\psi_2-\psi)\ \sin 2(\psi_3-\psi_1)} \\ k'^2 = \dfrac{\sin^2 I^0-\sin^2 I}{\sin^2 I^0\cos^2 I} = \dfrac{\cos^2 I'}{\cos^2 I} = \dfrac{\sin 2(\psi-\psi_1)\sin 2(\psi_2-\psi_3)}{\sin 2(\psi_2-\psi)\ \sin 2(\psi_3-\psi_1)}, \end{cases}$$

lesquelles font voir, comment on détermine le module par la position des quatre projections à un temps quelconque.

Les équations (10.) et (11.) étant divisées chacune par sa correspondante, on retrouvera les formules (8.) desquelles on est parti et une troisième analogue

$$(14.)\quad \begin{cases} \mathrm{tg}(\psi_1-\psi_2)\,\mathrm{tg}(\psi_3-\psi) = -\dfrac{\cos^2 I^0}{\sin^2 I} \\ \mathrm{tg}(\psi_2-\psi)\ \mathrm{tg}(\psi_3-\psi_1) = \dfrac{\sin^2 I^0}{\cos^2 I} \\ \mathrm{tg}(\psi-\psi_1)\,\mathrm{tg}(\psi_3-\psi_2) = \dfrac{-1}{\sin^2 I^0-\sin^2 I} = \dfrac{-1}{\sin^2 I^0\cos^2 I'}. \end{cases}$$

De ces trois équations chacune doit être la suite des deux autres. C'est ce qu'on voit au moyen de la proposition trigonométrique que, les angles ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant quelconques, *la somme des trois quantités* (14.) *est égal à leur produit*, proposition qu'on a établie ailleurs *) et que l'on vérifiera aisément par les seconds membres des équations (14.). Ajoutons que cette proposition fait voir que les trois produits de tangentes (14.) pourront être egales aux tangentes de trois angles dont la somme est 0 ou π.

Comme on a deux équations entre les différences des angles ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, il suffira de connaître la position de deux quelconques des quatre projections

---

*) On a démontré que cette proposition a lieu, quand même on change le signe *tg* en *tg am*, pourvu qu'on multiplie le produit des six *tg am* par k'^2. V. Journal de Crelle vol. XV. p. 200.

pour trouver celle des deux autres. Pour résoudre ce problème par le calcul de la manière la plus usuelle, on fera usage des formules (14.) et (9.). En effet, supposons données les projections de l'axe du plus grand et du plus petit moment, on connaîtra l'angle $\psi-\psi_1$, et il faudra par cet angle déterminer les deux angles $\psi_1-\psi_2$ et $\psi_2-\psi_3$, qui suffiront pour déterminer la position des projections de l'axe du moyen moment et de l'axe instantané.

Soit

$$\psi-\psi_1 = a, \qquad \psi_1-\psi_2 = x, \qquad \psi_2-\psi_3 = y,$$

on aura d'abord y par l'équation

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{(\sin^2 I^0 - \sin^2 I)\operatorname{tg} a},$$

et ensuite x par l'une ou l'autre équation

$$\frac{\cos(a+y+2x)}{\cos(a+y)} = \frac{\sin^2 I - \cos^2 I^0}{\sin^2 I + \cos^2 I^0}$$

$$\frac{\cos(a+y+2x)}{\cos(a-y)} = -\frac{\sin^2 I^0 - \cos^2 I}{\sin^2 I^0 + \cos^2 I}.$$

De la même manière on calculera au moyen des formules (9.) et (14.) les différences des quatre angles, lorsqu'une seule d'entr'elles sera donnée.

Si l'on ne considère que trois quelconques des quatre angles, il y aura des équations linéaires homogènes sans terme constant, 1° entre les tangentes de leurs différences, 2° entre les sinus des doubles de ces différences. En ne considérant, d'autre part, que les trois angles qu'une quelconque des quatre projections fait avec les trois autres, on aura des équations linéaires sans terme constant, 3° entre les cotangentes de leurs différences et 4° entre les cotangentes des doubles de ces différences. Chacun des systèmes de formules que l'on obtiendra de cette manière contiendra quatre équations lesquelles toutes auront les mêmes coefficients ou qui ne diffèrent entre eux que par les signes.

Pour démontrer le premier de ces systèmes l'on remarquera que l'on a entre quatre angles quelconques a, a', a'', a''' l'équation identique

$$\text{(15.)}\quad \sin(a'-a'')\cos(a'''-a)+\sin(a''-a)\cos(a'''-a')+\sin(a-a')\cos(a'''-a'') = 0.$$

Au moyen de cette équation on tirera des formules (10.) les quatre suivantes:

$$\text{(16.)}\quad \begin{cases} \sin^2 I \operatorname{tg}(\psi_1-\psi_2)-\cos^2 I \operatorname{tg}(\psi_2-\psi)-(\sin^2 I^0-\sin^2 I)\operatorname{tg}(\psi-\psi_1) = 0 \\ \sin^2 I \operatorname{tg}(\psi_1-\psi_2)-\cos^2 I \operatorname{tg}(\psi_3-\psi_1)-(\sin^2 I^0-\sin^2 I)\operatorname{tg}(\psi_2-\psi_3) = 0 \\ \sin^2 I \operatorname{tg}(\psi_3-\psi)-\cos^2 I \operatorname{tg}(\psi-\psi_2)-(\sin^2 I^0-\sin^2 I)\operatorname{tg}(\psi_2-\psi_3) = 0 \\ \sin^2 I \operatorname{tg}(\psi_3-\psi)-\cos^2 I \operatorname{tg}(\psi_1-\psi_3)-(\sin^2 I^0-\sin^2 I)\operatorname{tg}(\psi-\psi_1) = 0. \end{cases}$$

Faisant $a''' = 0$, l'équation (15.) se changera dans cette autre équation identique:

$$\text{(17.)}\quad \cos a \sin(a'-a'')+\cos a' \sin(a''-a)+\cos a'' \sin(a-a') = 0.$$

En égalant $\pm a$, $\pm a'$, $\pm a''$ aux angles

$$\psi+\psi_1-\psi_2-\psi_3, \quad \psi-\psi_1+\psi_2-\psi_3, \quad \psi-\psi_1-\psi_2+\psi_3,$$

on tirera des équations (9.) les suivantes:

$$\text{(18.)}\quad \begin{cases} (\cos^2 I^0+\sin^2 I)\sin 2(\psi_2-\psi_3)-(\sin^2 I^0+\cos^2 I)\sin 2(\psi_3-\psi_1)+(\sin^2 I^0-\cos^2 I)\sin 2(\psi_1-\psi_2) = 0 \\ (\cos^2 I^0+\sin^2 I)\sin 2(\psi_2-\psi_3)-(\sin^2 I^0+\cos^2 I)\sin 2(\psi-\psi_2)+(\sin^2 I^0-\cos^2 I)\sin 2(\psi_3-\psi) = 0 \\ (\cos^2 I^0+\sin^2 I)\sin 2(\psi-\psi_1)-(\sin^2 I^0+\cos^2 I)\sin 2(\psi_1-\psi_3)+(\sin^2 I^0-\cos^2 I)\sin 2(\psi_3-\psi) = 0 \\ (\cos^2 I^0+\sin^2 I)\sin 2(\psi-\psi_1)-(\sin^2 I^0+\cos^2 I)\sin 2(\psi_2-\psi)+(\sin^2 I^0-\cos^2 I)\sin 2(\psi_1-\psi_2) = 0. \end{cases}$$

Au moyen de la même formule (15.) on tire encore des formules (11.) celles-ci:

$$\text{(19.)}\quad \begin{cases} \cos^2 I^0 \cot(\psi_3-\psi)+\sin^2 I^0 \cot(\psi_3-\psi_1)-\cot(\psi_3-\psi_2) = 0 \\ \cos^2 I^0 \cot(\psi-\psi_3)+\sin^2 I^0 \cot(\psi-\psi_2)-\cot(\psi-\psi_1) = 0 \\ \cos^2 I^0 \cot(\psi_1-\psi_2)+\sin^2 I^0 \cot(\psi_1-\psi_3)-\cot(\psi_1-\psi) = 0 \\ \cos^2 I^0 \cot(\psi_2-\psi_1)+\sin^2 I^0 \cot(\psi_2-\psi)-\cot(\psi_2-\psi_1) = 0, \end{cases}$$

et des équations (12.) les suivantes:

$$\text{(20.)}\quad \begin{cases} \cos^2 I^0 \sin^2 I \cot 2(\psi_3-\psi)-\sin^2 I^0 \cos^2 I \cot 2(\psi_3-\psi_1)+(\sin^2 I^0-\sin^2 I)\cot 2(\psi_3-\psi_2) = 0 \\ \cos^2 I^0 \sin^2 I \cot 2(\psi-\psi_3)-\sin^2 I^0 \cos^2 I \cot 2(\psi-\psi_2)+(\sin^2 I^0-\sin^2 I)\cot 2(\psi-\psi_1) = 0 \\ \cos^2 I^0 \sin^2 I \cot 2(\psi_1-\psi_2)-\sin^2 I^0 \cos^2 I \cot 2(\psi_1-\psi_3)+(\sin^2 I^0-\sin^2 I)\cot 2(\psi_1-\psi) = 0 \\ \cos^2 I^0 \sin^2 I \cot 2(\psi_2-\psi_1)-\sin^2 I^0 \cos^2 I \cot 2(\psi_2-\psi)+(\sin^2 I^0-\sin^2 I)\cot 2(\psi_2-\psi_3) = 0. \end{cases}$$

Remarquons que l'on aurait pu déduire les formules (19.) des formules (16.) au moyen des formules (14.). En effet, les formules (14.) font voir que l'on peut remplacer la tangente de la différence de deux quelconques des quatre angles ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, par la cotangente de la différence des deux angles, multipliée par un facteur constant.

Rappelons à présent les valeurs elliptiques données dans le premier Mémoire des angles ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 ou des angles

$$\psi' = \psi + n'u = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$\psi'_1 = \psi_1 + n'u = \pm \frac{1}{2i} \log \left[-\frac{H(u+ia)}{H(u-ia)} \right]$$

$$\psi'_2 = \psi_2 + n'u = \pm \frac{1}{2i} \log \left[-\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)} \right]$$

$$\psi'_3 = \psi_3 + n'u = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u-ia)}.$$

Or, suivant les formules des *Fundamenta* (§. 61) ou celles données dans ma lettre à *l'Institut de France*, on voit qu'étant changé

$$u \quad \text{en} \quad u + iK'$$

les fonctions

$$\Theta(u+ia), \qquad H(u+ia), \qquad H_1(u+ia), \qquad \Theta_1(u+ia)$$

se changent respectivement en

$$ig_1 H(u+ia), \qquad ig_1 \Theta(u+ia); \qquad g_1 \Theta_1(u+ia), \qquad g_1 H_1(u+ia),$$

où l'on a posé

$$g_1 = e^{\frac{\pi}{4K}(K' - 2a - 2iu)}.$$

D'où l'on voit qu'en posant

$$h = e^{-\frac{\pi a}{K}},$$

par le même changement de u en $u + iK'$ les fonctions

$$\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}, \qquad \frac{H(u+ia)}{H(u-ia)}, \qquad \frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)}, \qquad \frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u-ia)}$$

seront changées respectivement en

$$h\frac{H(u+ia)}{H(u-ia)}, \qquad h\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}, \qquad h\frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u-ia)}, \qquad h\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)}.$$

D'où l'on voit encore qu'en changeant u en $u + 2iK'$ les mêmes fonctions seront changées en

$$h^2\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}, \qquad h^2\frac{H(u+ia)}{H(u-ia)}, \qquad h^2\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)}, \qquad h^2\frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u-ia)}.$$

Par suite, si l'on pose

$$e^{\pm 2i\psi'} = \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = f(u),$$

on aura

$$-e^{\pm 2i\psi'_1} = \frac{H(u+ia)}{H(u-ia)} = h^{-1} f(u+iK')$$

$$-e^{\pm 2i\psi'_2} = \frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)} = h^{-1} f(u+K+iK')$$

$$e^{\pm 2i\psi'_3} = f(u+K).$$

Fin du manuscrit.

Note de l'éditeur. Ce manuscrit est resté incomplet. Il paraît que l'auteur a eu l'idée d'exprimer les fonctions trigonométriques des différences des quatre angles ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, et des doubles de ces différences par les fonctions elliptiques Θ etc., soit pour substituer ces valeurs dans les formules (16.) (18.) (19.) (20.) et en tirer de nouveaux résultats remarquables, soit pour vérifier de cette manière les expressions des neuf cosinus données dans son premier mémoire. Cette dernière supposition est constatée par une remarque faite dans un petit mémoire incomplet de quelques pages, écrit en allemand dans lequel l'auteur a exprimé les sinus, cosinus, tangentes des dites différences au moyen des quantités $\sin\operatorname{am}(u \pm ia)$, $\cos\operatorname{am}(u \pm ia)$, $\operatorname{tg}\operatorname{am}(u \pm ia)$, après avoir remplacé les cosinus des neuf angles que les axes principaux forment avec les axes fixes par les quantités

$$\begin{array}{lll} \sin\zeta, & \cos\zeta \sin\psi, & \cos\zeta \cos\psi \\ \sin\zeta_1, & \cos\zeta_1 \sin\psi_1, & \cos\zeta_1 \cos\psi_1 \\ \sin\zeta_2, & \cos\zeta_2 \sin\psi_2, & \cos\zeta_2 \cos\psi_2, \end{array}$$

les angles ζ, ζ_1, ζ_2, étant déterminés par les équations

$$\sin\zeta = -\sqrt{\cot(\psi_2 - \psi_1)\cot(\psi - \psi_1)}$$

$$\sin\zeta_1 = -\sqrt{\cot(\psi - \psi_1)\cot(\psi_1 - \psi_2)}$$

$$\sin\zeta_2 = -\sqrt{\cot(\psi_1 - \psi_2)\cot(\psi_2 - \psi)}.$$

SUPPLÉMENT AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

EXPRESSIONS ELLIPTIQUES DES COSINUS DES ANGLES QU'UN SYSTÈME QUELCONQUE D'AXES RECTANGULAIRES FIXES DANS LE MOBILE FAIT AVEC LES AXES DES x, y, z FIXES DANS L'ESPACE.

Soient x'', y'', z'' les coordonnées parallèles à un système quelconque d'axes rectangulaires fixes dans le mobile, x', y', z' les coordonnées parallèles aux axes principaux et supposons qu'on ait

$$\begin{array}{lll} x' = \delta x''+\delta' y''+\delta'' z'', & x = (\alpha)x''+(\beta)y''+(\gamma)z'', & x = \alpha x'+\beta y'+\gamma z' \\ y' = \varepsilon x''+\varepsilon' y''+\varepsilon'' z'', & y = (\alpha')x''+(\beta')y''+(\gamma')z'', & y = \alpha' x'+\beta' y'+\gamma' z' \\ z' = \zeta x''+\zeta' y''+\zeta'' z'', & z = (\alpha'')x''+(\beta'')y''+(\gamma'')z'', & z = \alpha'' x'+\beta'' y'+\gamma'' z', \end{array}$$

es cosinus des angles que les axes des x'', y'', z'' font avec ceux des x, y, z seront

$$\begin{array}{lll} (\alpha) = \alpha\delta+\beta\varepsilon+\gamma\zeta, & (\alpha') = \alpha'\delta+\beta'\varepsilon+\gamma'\zeta, & (\alpha'') = \alpha''\delta+\beta''\varepsilon+\gamma''\zeta \\ (\beta) = \alpha\delta'+\beta\varepsilon'+\gamma\zeta', & (\beta') = \alpha'\delta'+\beta'\varepsilon'+\gamma'\zeta', & (\beta'') = \alpha''\delta'+\beta''\varepsilon'+\gamma''\zeta' \\ (\gamma) = \alpha\delta''+\beta\varepsilon''+\gamma\zeta'', & (\gamma') = \alpha'\delta''+\beta'\varepsilon''+\gamma'\zeta'', & (\gamma'') = \alpha''\delta''+\beta''\varepsilon''+\gamma''\zeta''. \end{array}$$

Or, en posant

$$M = H_1(ia)\,\Theta(u).$$

on a

$$\begin{array}{lll} M(\alpha-i\alpha') = -\Theta_1(0)\,H(u\pm ia), & M(\beta-i\beta') = -\Theta(0)\,H_1(u\pm ia), & M(\gamma'+i\gamma) = H_1(0)\,\Theta(u\pm ia) \\ M(\alpha+i\alpha') = -\Theta_1(0)\,H(u\mp ia), & M(\beta+i\beta') = -\Theta(0)\,H_1(u\mp ia), & M(\gamma'-i\gamma) = H_1(0)\,\Theta(u\mp ia) \end{array}$$

$$M\alpha'' = -\Theta(ia)\,H_1(u), \quad M\beta'' = \Theta_1(ia)\,H(u), \quad iM\gamma'' = \pm H(ia)\,\Theta_1(u),$$

où des signes $\pm$ ou $\mp$ on prendra toujours le supérieur ou l'inférieur selon que $Bh > l^2$ ou $< l^2$.

En choisissant convenablement l'axe des x'' dans le plan perpendiculaire à l'axe des z'', on pourra de même poser

$$\begin{array}{lll} M'(\delta-i\delta') = -\Theta_1(0)\,H(v\pm ib), & M'(\varepsilon-i\varepsilon') = -\Theta(0)\,H_1(v\pm ib), & M'(\zeta'+i\zeta) = H_1(0)\Theta(v\pm ib) \\ M'(\delta+i\delta') = -\Theta_1(0)\,H(v\mp ib), & M'(\varepsilon+i\varepsilon') = -\Theta(0)\,H_1(v\mp ib), & M'(\zeta'-i\zeta) = H_1(0)\Theta(v\mp ib) \end{array}$$

$$M'\delta'' = -\Theta(ib)\,H_1(v), \quad M'\varepsilon'' = \Theta_1(ib)\,H(v), \quad iM'\zeta'' = \pm H(ib)\,\Theta_1(v),$$

où l'on a posé

$$M' = H_1(ib)\,\Theta(v).$$

Substituant ces valeurs, on aura d'abord la formule

$$\text{(1.)} \quad \begin{aligned} & MM'[(\alpha)-i(\alpha')+i(\beta)+(\beta')] \\ & = \Theta_1^2(0)\,H(u\pm ia)\,H(v\mp ib)+\Theta^2(0)\,H_1(u\pm ia)\,H_1(v\mp ib)+H_1^2(0)\,\Theta(u\pm ia)\,\Theta(v\mp ib) \end{aligned}$$

laquelle tient lieu de quatre équations correspondantes à la double valeur de chacune des unités imaginaires.

On aura ensuite les deux formules

$$\text{(2.)} \quad \begin{aligned} & MM'[(\gamma)-i(\gamma')] \\ & = \Theta_1(0)\,\Theta(ib)\,H_1(v)\,H(u\pm ia)-\Theta(0)\,\Theta_1(ib)\,H(v)\,H_1(u\pm ia)\mp H_1(0)\,H(ib)\,\Theta_1(v)\,\Theta(u\pm ia) \\ & MM'[(\alpha'')-i(\beta'')] \\ & = \Theta_1(0)\,\Theta(ia)\,H(v\pm ib)\,H_1(u)-\Theta(0)\,\Theta_1(ia)\,H_1(v\pm ib)\,H(u)\mp H_1(0)\,H(ia)\,\Theta(v\pm ib)\,\Theta_1(u), \end{aligned}$$

dont chacune embrasse deux équations correspondantes à la double valeur de i, et enfin l'équation unique

$$\text{(3.)} \quad MM'(\gamma'') = \Theta(ia)\,\Theta(ib)\,H_1(v)\,H_1(u)+\Theta_1(ia)\,\Theta_1(ib)\,H(v)\,H(u)-H(ia)\,H(ib)\,\Theta_1(v)\,\Theta(u).$$

Je vais à présent transformer ces expressions au moyen de ces formules générales à 4 arguments que j'ai développées dans mes leçons universitaires de Kœnigsberg et dont je publierai le système complet dans un de mes prochains mémoires.

Ces transformations font voir que les valeurs des *dix* quantités

$$(\alpha)-i(\alpha')\mp i(\beta)\mp(\beta'), \quad 1\pm(\gamma''), \quad (\gamma)-i(\gamma'), \quad (\alpha'')-i(\beta'')$$

sont égales chacune à un seul terme, produit de quatre fonctions Θ aux arguments $\frac{1}{2}(u\pm v\pm ia\pm ib)$.

Soit

$$\begin{aligned} v &= \tfrac{1}{2}(u+u'+u''+u''') \\ v' &= \tfrac{1}{2}(u+u'-u''-u''') \\ v'' &= \tfrac{1}{2}(u-u'+u''-u''') \\ v''' &= \tfrac{1}{2}(u-u'-u''+u'''). \end{aligned}$$

J'emprunte aux nombreuses relations entre les fonctions Θ aux arguments u, u', u'', u''' et celles aux arguments v, v', v'', v''' les trois suivantes:

$$\begin{aligned}(4.)\quad & \Theta(u)\,\Theta(u')\,H_1(u'')\,H_1(u''')+\Theta_1(u)\,\Theta_1(u')\,H(u'')\,H(u''') \\ & -H_1(u)\,H_1(u')\,\Theta(u'')\,\Theta(u''')-H(u)\,H(u')\,\Theta_1(u'')\,\Theta^1(u''') = 2\Theta_1(v)\,\Theta_1(v')\,H(v'')\,H(v''')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5.)\quad & \Theta(u)\,\Theta(u')\,H_1(u'')\,H_1(u''')+\Theta_1(u)\,\Theta_1(u')\,H(u'')\,H(u''') \\ & +H_1(u)\,H_1(u')\,\Theta(u'')\,\Theta(u''')+H(u)\,H(u')\,\Theta_1(u'')\,\Theta_1(u''') = 2\Theta(v)\,\Theta(v')\,H_1(v'')\,H_1(v''')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6.)\quad & H(u)\,H_1(u')\,\Theta(u'')\,\Theta_1(u''')-\Theta(u)\,\Theta_1(u')\,H(u'')\,H_1(u''') \\ & -H_1(u)\,H(u')\,\Theta_1(u'')\,\Theta(u''')+\Theta_1(u)\,\Theta(u')\,H_1(u'')\,H(u''') = 2\Theta_1(v)\,\Theta(v')\,H_1(v'')\,H(v''')\end{aligned}$$

que d'ailleurs on saurait déduire d'une d'entre elles. On obtiendra le second membre de (1.) pour les deux cas de $+i$ et de $-i$ en posant dans les premiers membres de (4.) et (5.)

$$u = 0,\quad u' = 0,\quad u'' = v\pm ib,\quad u''' = u\pm ia,$$

d'où l'on tire

$$(7.)\quad MM'[(\alpha)-i(\alpha')-i(\beta)-(\beta')] = -2\Theta_1^2\left(\frac{u+v\pm i(a+b)}{2}\right)H^2\left(\frac{u-v\pm i(a-b)}{2}\right)$$

$$(8.)\quad MM'[(\alpha)-i(\alpha')+i(\beta)+(\beta')] = 2\Theta^2\left(\frac{u+v\pm i(a-b)}{2}\right)H_1^2\left(\frac{u-v\pm i(a+b)}{2}\right).$$

De la même formule (4.), en y supposant

$$u = ia,\quad u' = ib,\quad u'' = v,\quad u''' = u,$$

on tirera

$$\begin{aligned}(9.)\quad & MM'[1-(\gamma'')] \\ & = 2\Theta_1\left(\frac{u+v\pm i(a+b)}{2}\right)\Theta_1\left(\frac{u+v\mp i(a+b)}{2}\right)H\left(\frac{u-v\mp i(a-b)}{2}\right)H\left(\frac{u-v\pm i(a-b)}{2}\right)\end{aligned}$$

et, en supposant dans (5.)

$$u = -ia,\quad u' = ib,\quad u'' = v,\quad u''' = u,$$

$$\begin{aligned}(10.)\quad & MM'[1+(\gamma'')] \\ & = 2\Theta\left(\frac{u+v\mp i(a-b)}{2}\right)\Theta\left(\frac{u+v\pm i(a-b)}{2}\right)H_1\left(\frac{u-v\pm i(a+b)}{2}\right)H_1\left(\frac{u-v\mp i(a+b)}{2}\right).\end{aligned}$$

Enfin supposant dans (6.)

$$u = 0,\quad u' = ib,\quad u'' = v,\quad u''' = u+ia,$$

il résultera

$$\begin{aligned}(11.)\quad & MM'[(\gamma)-i(\gamma')] \\ & = 2\Theta_1\left(\frac{u+v\pm i(a+b)}{2}\right)\Theta_1\left(\frac{u+v\pm i(a-b)}{2}\right)H_1\left(\frac{u-v\pm i(a+b)}{2}\right)H\left(\frac{u-v\pm i(a-b)}{2}\right)\end{aligned}$$

et, en échangeant a et b, u et v,

$$\begin{aligned}(12.)\quad & MM'[(\alpha'')-i(\beta'')] \\ & = -2\Theta_1\left(\frac{u+v\pm i(a+b)}{2}\right)\Theta\left(\frac{u+v\mp i(a-b)}{2}\right)H_1\left(\frac{u-v\mp i(a+b)}{2}\right)H\left(\frac{u-v\pm i(a-b)}{2}\right).\end{aligned}$$

La quantité MM' étant elle même un produit de quatre fonctions Θ, on saura développer les seconds membres des équations précédentes, divisés par MM', en séries suivant les multiples de l'angle $\frac{\pi(u\pm v)}{4K}$. En effet, pour obtenir ce développement, on n'aura besoin que des théorèmes connus sur les fonctions simples appliqués aux fonctions dont le numérateur et le dénominateur sont des produits infinis.

De la même manière qu'ont été exprimés par les trois angles $\varphi, \psi', \vartheta$ les cosinus des angles que les axes principaux du mobile font avec les axes fixes dans l'espace des x, y, z, exprimons par les trois angles analogues $(\varphi), (\psi'), (\vartheta)$ les cosinus des angles que les axes des x'', y'', z'', eux aussi fixes dans le mobile, font avec les mêmes axes.

On aura donc

$$\begin{aligned}(\alpha) &= \cos(\vartheta)\sin(\varphi)\sin(\psi')+\cos(\varphi)\cos(\psi') \\ (\alpha') &= \cos(\vartheta)\sin(\varphi)\cos(\psi')-\cos(\varphi)\sin(\psi') \\ (\alpha'') &= -\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\beta) &= \cos(\vartheta)\cos(\varphi)\sin(\psi')-\sin(\varphi)\cos(\psi') \\ (\beta') &= \cos(\vartheta)\cos(\varphi)\cos(\psi')+\sin(\varphi)\sin(\psi') \\ (\beta'') &= -\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma) &= \sin(\vartheta)\sin(\psi') \\ (\gamma') &= \sin(\vartheta)\cos(\psi') \\ (\gamma'') &= \cos(\vartheta),\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}(\alpha)-i(\alpha') &= [\cos(\varphi)-i\cos(\vartheta)\sin(\varphi)]e^{i(\psi')} \\ (\beta)-i(\beta') &= [-\sin(\varphi)-i\cos(\vartheta)\cos(\varphi)]e^{i(\psi')}\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}(\alpha)-i(\alpha')-i(\beta)-(\beta') &= [1-\cos(\vartheta)]e^{i[(\psi')+(\varphi)]} \\ (\alpha)-i(\alpha')+i(\beta)+(\beta') &= [1+\cos(\vartheta)]e^{i[(\psi')-(\varphi)]}.\end{aligned}$$

De plus on aura

$$\begin{aligned}(\gamma)-i(\gamma') &= -i\sin(\vartheta)e^{i(\psi')}\\ (\alpha'')-i(\beta'') &= \quad i\sin(\vartheta)e^{i(\varphi)}\\ (\gamma'') &= \cos(\vartheta).\end{aligned}$$

De là résultent, en posant

$$\tfrac{1}{2}(u+v) = u', \quad \tfrac{1}{2}(u-v) = u'', \quad \tfrac{1}{2}(a+b) = b' \quad \tfrac{1}{2}(a-b) = b'',$$

les formules remarquables

$$\begin{aligned}\sqrt{MM'}\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta)e^{\frac{1}{2}i[(\psi')+(\varphi)]} &= i\Theta_1(u'\pm ib')\,H(u''\pm ib'')\\ \sqrt{MM'}\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta)e^{\frac{1}{2}i[(\psi')-(\varphi)]} &= \Theta(u'\pm ib'')\,H_1(u''\pm ib')\\ -iMM'\sin(\vartheta)e^{i(\psi')} &= 2\Theta_1(u'\pm ib')\,\Theta(u'\pm ib'')\,H_1(u''\pm ib')\,H(u''\pm ib'')\\ iMM'\sin(\vartheta)e^{i(\varphi)} &= -2\Theta_1(u'\pm ib')\,\Theta(u'\mp ib'')\,H_1(u''\mp ib')\,H(u''\pm ib'')\\ MM'\sin^2\tfrac{1}{2}(\vartheta) &= \Theta_1(u'\pm ib')\,\Theta_1(u'\mp ib')\,H(u''\pm ib'')\,H(u''\mp ib'')\\ MM'\cos^2\tfrac{1}{2}(\vartheta) &= \Theta(u'\pm ib'')\,\Theta(u'\mp ib'')\,H_1(u''\pm ib')\,H_1(u''\mp ib'').\end{aligned}$$

Les deux premières de ces formules étant obtenues par l'extraction d'une racine carrée, il pourrait paraître douteux si l'on doit avoir i ou $-i$ pour facteur du second membre de la première formule; mais comme le produit des deux premières formules fournit la troisième où il n'y a aucune ambiguité, on voit que ce facteur doit être i tel qu'on l'a posé en supposant que le signe de $\sqrt{MM'}$ soit le même dans les deux formules. Chacune des quatre premières formules embrasse deux équations à la double valeur de i, mais, comme on le voit aisément, les *dix* équations que l'on obtiendra de cette manière pourront être déduites par de simples multiplications de *quatre* d'entre elles, lesquelles résultent des deux premières formules.

Des formules précédentes on tire encore la double expression de

$$\begin{aligned}MM' &= H_1(ia)\,H_1(ib)\,\Theta(u)\,\Theta(v)\\ &= \Theta_1(u'+ib')\,\Theta_1(u'-ib')\,H(u''+ib'')\,H(u''-ib'')\\ &\quad +\Theta(u'+ib'')\,\Theta(u'-ib'')\,H_1(u''+ib')\,H_1(u''-ib'').\end{aligned}$$

On prouve l'identité de ces deux expressions en ajoutant les formules (4.) et (5.), après avoir posé dans (4.)

$$u = u, \quad u' = v, \quad u'' = ia, \quad u''' = ib$$

et dans (5.)

$$u = u, \quad u' = v, \quad u'' = ia, \quad u''' = -ib.$$

On obtient des deux premières formules

$$\begin{aligned}(\psi')+(\varphi) &= \frac{1}{i}\log\frac{\Theta_1(u'\pm ib')\,H(ib''\pm u'')}{\Theta_1(u'\mp ib')\,H(ib''\mp u'')}\\ (\psi')-(\varphi) &= \frac{1}{i}\log\frac{\Theta(u'\pm ib'')\,H_1(u''\pm ib')}{\Theta(u'\mp ib'')\,H_1(u''\mp ib')}\end{aligned}$$

ou, si l'on veut,

$$\begin{aligned}(\psi')+(\varphi) &= \frac{1}{i}\log\frac{\Theta_1(u'\pm ib')}{\Theta_1(u'\mp ib')}+\frac{1}{i}\log\frac{H(ib''\pm u'')}{H(ib''\mp u'')}\\ (\psi')-(\varphi) &= \frac{1}{i}\log\frac{\Theta(u'\pm ib'')}{\Theta(u'\mp ib'')}+\frac{1}{i}\log\frac{H_1(u''\pm ib')}{H_1(u''\mp ib')}.\end{aligned}$$

D'après ce qu'on a remarqué dans le premier mémoire les deux logarithmes

$$\frac{1}{i}\log\frac{\Theta_1(u'\pm ib')}{\Theta_1(u'\mp ib')}, \quad \frac{1}{i}\log\frac{\Theta(u'\pm ib'')}{\Theta(u'\mp ib'')}$$

sont des fonctions du temps périodiques, mais les deux autres logarithmes

$$\frac{1}{i}\log\frac{H(ib''\pm u'')}{H(ib''\mp u'')}, \quad \frac{1}{i}\log\frac{H_1(u''\pm ib'')}{H_1(u''\mp ib'')}$$

ajoutés à ceux-ci dans les équations précédentes contiennent chacun une partie proportionnelle à u'' et, par suite, croissante avec le temps. Cherchons la partie non périodique dans ces deux expressions.

On remarquera, pour cela, que les quantités a et b étant supposées l'une et l'autre positives et plus petites que K', la quantité $b' = \frac{1}{2}(a+b)$ sera aussi positive et plus petite que K'. Or, on a donné dans le premier mémoire les formules

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia')}{\Theta(u+ia)}+\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)} &= \frac{\pi u}{2K}\\ \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}+\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia)}{H_1(u+ia)} &= \frac{\pi u}{2K}\end{aligned}$$

dans lesquelles l'argument a et par suite aussi $a' = K'-a$ doit être positif et plus petit que K'. Ces formules font voir que, *a étant une quantité positive plus petite que K' quelconque, la partie non périodique des deux quantités*

$$\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)}, \quad \frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia)}{H_1(u+ia)}$$

est $\frac{\pi u}{2K}$. Désignons cette partie du nom *de terme séculaire.* Il suit de la proposition précédente que le terme séculaire de $(\psi')-(\varphi)$ est $\mp\frac{\pi u''}{K}$ et que celui de $(\psi')+(\varphi)$ sera ou $\mp\frac{\pi u''}{K}$ ou $\pm\frac{\pi u''}{K}$, selon que b'' est positif ou négatif, c'est à dire selon que $b>a$ ou $b<a$. D'où suit que des deux angles (ψ') et (φ) l'un sera périodique, l'autre contiendra un terme séculaire $u''=\frac{1}{2}(u-v)$. *Lorsque $b>a$, l'angle (φ) sera périodique et le terme séculaire de (ψ') sera $\mp\frac{\pi u''}{K}=\mp\frac{\pi(u-v)}{2K}$, lorsque $b<a$ l'angle (ψ') sera périodique et le terme séculaire de (φ) sera $\pm\frac{\pi u''}{K}=\pm\frac{\pi(u-v)}{2K}$.*

Remarquons d'ailleurs que les développements en séries infinies des angles (φ) et (ψ'), abstraction faite des termes séculaires $\pm\frac{\pi(u-v)}{2K}$, ne contiennent pas de constantes, ou que les développements des fonctions $\log\Theta$ et $\log\Theta_1$ jouissent des trois propriétés d'être périodiques, de ne contenir pas de terme constant et de s'évanouir en même temps que le module.

Dans le cas de $b=a$, ou de $b'=a$, $b''=0$, il viendra

$$(\psi')+(\varphi)=\frac{1}{i}\log\frac{\Theta_1\left(\frac{u+v}{2}\pm ia\right)}{\Theta_1\left(\frac{u+v}{2}\mp ia\right)}+\pi$$

$$(\psi')-(\varphi)=\frac{1}{i}\log\frac{H_1\left(\frac{u-v}{2}\pm ia\right)}{H_1\left(\frac{u-v}{2}\mp ia\right)}=\frac{1}{i}\log\frac{\Theta_1\left(\frac{u-v}{2}\mp ia'\right)}{\Theta_1\left(\frac{u-v}{2}\pm ia'\right)}\mp\frac{\pi(u-v)}{2K}.$$

Donc dans le cas de $b=a$, les termes séculaires de (ψ') et de (φ) seront respectivement $\mp\frac{\pi(u-v)}{4K}$ et $\pm\frac{\pi(u-v)}{4K}$. Si l'on veut que ces termes renferment aussi la constante tout entière du développement, il y faudra ajouter encore l'angle droit $\frac{1}{2}\pi$.

L'axe des x étant supposé faire dans le plan invariable une rotation uniforme autour du point fixe avec la vitesse angulaire $-\Psi$, et (ψ') désignant l'angle que l'intersection du plan des x'', y'' avec le plan invariable fait avec l'axe des x, ou que la projection de l'axe des z'' sur ce même plan fait avec l'axe des y, le mouvement moyen de l'intersection du plan des x'', y'' avec le plan invariable ou de la projection sur ce plan de l'axe des z'' sera respectivement dans les trois cas de $b>a$, $b<a$, $b=a$, en rejetant les termes constants,

$$-\left(\Psi\pm\frac{\pi}{T}\right)t,\quad -\Psi t,\quad -\left(\Psi\pm\frac{1}{2}\frac{\pi}{T}\right)t.$$

Or, lorsque $b=a$ et pour un temps satisfaisant à l'équation

$$v=u=n(t-t_0),$$

on aura

$$(\alpha'')=\alpha'',\quad (\beta'')=\beta'',\quad (\gamma'')=\gamma'',$$

donc, pour ce temps, les axes des z'' et des z feront avec les axes des x', y', z' les mêmes angles. Donc, lorsque $b=a$, l'axe des z'' sera la droite fixe dans l'intérieur du mobile laquelle au temps

$$t=\frac{v}{n}+t_0$$

coincidera avec l'axe des z ou avec la perpendiculaire au plan invariable. Donc toutes les droites fixes dans l'intérieur du corps seront situées dans ce cône du second ordre, lieu des droites dans lesquelles le mobile pendant sa rotation sera traversé par la perpendiculaire au plan invariable. (Poisson, *Mécanique* II. p. 152.) Ce cône séparera les deux espaces du mobile dans lesquels se trouvent respectivement les droites pour lesquelles on a $b>a$ et $b<a$ et, par suite, les droites dont les projections sur le plan invariable ont respectivement les mouvements moyens

$$-\left(\Psi\pm\frac{\pi}{T}\right)t \text{ et } -\Psi t,$$

et comme l'axe des z' est situé dans l'intérieur de ce cône, dont il est l'axe proprement dit, et qu'on a vu que la projection sur le plan invariable de cet axe a le mouvement moyen $-\Psi t$, il suit

1) que les projections sur le plan invariable de toutes les droites situées en dehors de ce cône ont le mouvement moyen $-\left(\Psi\pm\frac{\pi}{T}\right)t$,

2) que les projections sur le plan invariable de toutes les droites situées dans l'intérieur de ce cône ont le mouvement moyen $-\Psi t$,

3) que les projections sur le plan invariable de toutes les droites situées sur la surface même de ce cône ont le mouvement moyen $-\left(\Psi\pm\frac{\pi}{2T}\right)t$, moyen arithmétique entre les deux rotations moyennes précédentes.

Supposons $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ selon qu'on a $b > a$ ou $b < a$ ou selon que l'axe des z'' soit au dehors ou au dedans du cône séparateur. Soit de plus

$$\frac{\pi u}{2K} = x, \quad \frac{\pi v}{2K} = x_0, \quad \frac{\pi a}{2K} = \tfrac{1}{2} c \log \frac{1}{q}, \quad \frac{\pi b}{2K} = \tfrac{1}{2} c_0 \log \frac{1}{q},$$

$$\tfrac{1}{2}(x + x_0) = x_1, \quad \tfrac{1}{2}(x - x_0) = x_2, \quad \tfrac{1}{2}(c + c_0) = b_1, \quad \tfrac{1}{2}(c - c_0) = b_2,$$

il viendra d'après les formules précédentes et celles qui ont été données dans le journal de Crelle Vol. 39, p. 345 (p. 345 de ce volume)

$$\begin{aligned} \mp[(\psi') + (\varphi)] = \varepsilon x_2 &+ 2\sum\left(\operatorname{arctg}\frac{q^{k-b_1}\sin 2x_1}{1+q^{k-b_1}\cos 2x_1} - \operatorname{arctg}\frac{q^{k+b_1}\sin 2x_1}{1+q^{k+b_1}\cos 2x_1}\right) \\ &+ 2\varepsilon\sum\left(\operatorname{arctg}\frac{q^{k+b_2-1}\sin 2x_2}{1-q^{k+b_2-1}\cos 2x_2} - \operatorname{arctg}\frac{q^{k-b_2+1}\sin 2x_2}{1-q^{k-b_2+1}\cos 2x_2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mp[(\psi') - (\varphi)] = x_2 &- 2\varepsilon\sum\left(\operatorname{arctg}\frac{q^{k-b_2}\sin 2x_1}{1-q^{k-b_2}\cos 2x_1} - \operatorname{arctg}\frac{q^{k+b_2}\sin 2x_1}{1-q^{k+b_2}\cos 2x_1}\right) \\ &- 2\sum\left(\operatorname{arctg}\frac{q^{k+b_1-1}\sin 2x_2}{1+q^{k+b_1-1}\cos 2x_2} - \operatorname{arctg}\frac{q^{k-b_1+1}\sin 2x_2}{1+q^{k-b_1+1}\cos 2x_2}\right), \end{aligned}$$

en donnant à k toutes les valeurs des nombres impairs 1, 3, 5 etc.

B.

NOUVELLE THÉORIE DE LA ROTATION D'UN CORPS DE RÉVOLUTION GRAVE SUSPENDU EN UN POINT QUELCONQUE DE SON AXE.

Du diviseur attaché à une intégrale elliptique de la troisième espèce.

L'analyse dont je me suis servi dans un mémoire antérieur, »*sur la rotation d'un corps quelconque non soumis à des forces accélératrices*«, et laquelle a conduit à de nouveaux résultats définitifs et d'une grande simplicité, est fondée principalement sur la valeur particulière de la constante par laquelle est divisée l'intégrale elliptique de la troisième espèce, laquelle détermine l'angle entre la projection sur le plan invariable de l'un des axes principaux du corps et une droite fixe menée dans ce même plan.

Ayant en effet exécuté l'intégration par le moyen d'un de mes théorèmes sur les fonctions elliptiques, on a trouvé la valeur de l'intégrale égale à la somme

Note de l'éditeur. On peut distinguer dans les deux mémoires B et C sur la rotation d'un corps de révolution grave trois compositions différentes. Le mémoire C paraît fait avant l'autre; c'est dans celui-là que l'analyse est poussée le plus loin et à-peu-près achevée, tandisque l'auteur n'y a pas développé la théorie *du diviseur attaché à une intégrale elliptique de la troisième espèce,* mais s'est borné à n'en donner que les résultats. Le mémoire B a été écrit plus tard. Dans sa seconde partie, il contient la théorie complète du dit diviseur, dans sa première qui semble être composée après la seconde et qui finit par les mots: „Voici les calculs qui ont conduit à ces résultats" est énoncé après l'introduction le théorème remarquable que la rotation d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe peut être remplacée par le mouvement relatif de deux corps non soumis à des forces accélératrices. C'est ce qui explique la répétition presque littérale de plusieurs passages de ces deux mémoires. L'examen des deux manuscrits fait connaître que Jacobi a voulu sans doute réunir dans un seul mémoire toute la théorie du problème de Lagrange et qu'il en a été empêché par sa mort prématurée. C'est pour ces raisons que l'éditeur a cru devoir placer le mémoire B avant le mémoire C, quoiqu'il soit écrit plus tard.

de deux termes dont l'un est simplement proportionnel au temps et l'autre une quantité logarithmique

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},$$

i étant l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$, a une constante et u la variable proportionnelle au temps. Dans ce second terme, le logarithme se trouvant précisément divisé par $2i$ et par nulle autre constante, on doit à cette circonstance favorable tout le succès des calculs entrepris dans le mémoire cité ci-dessus.

Il est vrai que, si l'on avait voulu se contenter de pouvoir évaluer en secondes et parties de seconde pour toute valeur donnée du temps l'angle que l'on a déterminé par l'intégrale elliptique de la troisième espèce, sa valeur donnée par l'équation

$$\psi = -n'u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

en aurait fourni les moyens suffisants, et la difficulté de ces évaluations numériques ne se serait accrûe en aucune façon, lors même que cette valeur aurait été divisée encore par quelque constante. Mais en s'arrêtant là et en ne profitant pas de la valeur particulière $2i$ du diviseur du logarithme, on aurait laissé incomplète la solution du problème mécanique et fait tort à l'analyse des fonctions elliptiques. Ce diviseur $2i$ du logarithme faisant recouvrir à la valeur de l'angle

$$\psi + n'u = \psi'$$

la forme même de l'expression d'un angle par sa tangente

$$\psi' = \frac{1}{2i}\log\frac{1+i\operatorname{tg}\psi'}{1-i\operatorname{tg}\psi'} = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},$$

on a pu rationnellement exprimer cette tangente par la formule

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{i[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}$$

et en tirer les valeurs du $\cos\psi'$ et $\sin\psi'$

$$\cos\psi' = \frac{\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)}{2\sqrt{\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia)}}$$

$$\sin\psi' = \frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2i\sqrt{\Theta(u+ia)\Theta(u-ia)}},$$

lesquelles ayant été substituées et introduites dans le calcul algébrique, on est

parvenu à des expressions simples et rationnelles des *neuf* cosinus mêmes des angles entre les deux systèmes d'axes de coordonnées, l'un fixe, l'autre mobile, et a poussé ainsi jusqu'au bout la solution du problème mécanique proposé.

On appellera ***diviseur attaché à une intégrale elliptique de la troisième espèce*** la constante par laquelle est divisée la partie logarithmique de la valeur de l'intégrale. De ce qu'on vient d'exposer il résulte que, lorsque dans la composition des quantités cherchées d'un problème entrent le sinus et cosinus d'un angle et que l'on est parvenu à déterminer cet angle par une intégrale elliptique de la troisième espèce, ce qu'il y aura de plus important à rechercher dès le premier abord, ce sera ce diviseur attaché à l'intégrale, puisque sa valeur fait entrevoir, s'il est convenable de pousser plus loin l'analyse générale, ou s'il faudra se borner aux calculs approximatifs et aux évaluations numériques.

L'intégrale elliptique de la troisième espèce étant réduite à sa forme normale ou canonique

$$\int\frac{a+b\sin^2\varphi}{1+n\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

le diviseur qui y est attaché sera donné par les formules lesquelles en expriment la valeur par les fonctions Θ. Mais lors même que l'intégrale se présente sous la forme plus compliquée dans laquelle sous le radical se trouve une fonction entière quelconque du $3^{\text{ième}}$ ou du $4^{\text{ième}}$ degré, le diviseur attaché à cette intégrale pourra être obtenu de la plus simple manière et sans qu'on ait besoin de passer par ces discussions de racines et de limites et ces substitutions et intégrations plus ou moins pénibles qui pourraient être nécessaires pour en effectuer la réduction préalable à cette forme normale. Comme ce ne peut être ici le lieu de traiter à fond cette matière importante et qui devra être l'objet d'un travail particulier, je me bornerai à énoncer la proposition générale que

$F(x)$ désignant une fonction entière quelconque de x du $3^{\text{ième}}$ ou du $4^{\text{ième}}$ degré, à l'intégrale

$$\int\frac{bx+c}{x-a}\cdot\frac{dx}{\sqrt{F(x)}}$$

sera attaché le diviseur

$$\frac{\sqrt{F(a)}}{ba+c},$$

d'où l'on tire le corollaire

que, u étant une fonction entière quelconque de x du 2ième ou 3ième degré, à l'intégrale

$$\int \frac{bx+c}{2(x-a)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x-a)u-(bx+c)^2}}$$

sera attaché le diviseur $2i$.

Après avoir développé les nouveaux perfectionnements que l'analyse des fonctions elliptiques peut apporter à la théorie de la rotation d'un corps non soumis à des forces accélératrices, j'ai examiné, à l'invitation de mon illustre ami M. Dirichlet, les formules par lesquelles Lagrange a ramené aux quadratures le problème de la rotation d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe. On voit, par ces formules, que les angles que l'intersection de l'équateur mobile du corps avec le plan horizontal fait avec des droites fixes menées dans ces deux plans, sont respectivement égaux à la somme et à la différence de deux intégrales elliptiques de la troisième espèce dans l'expression desquelles on a sous le radical une fonction entière du 3ième degré non résolue en facteurs. Pourqu'il fût possible d'appliquer à ce problème une analyse analogue à celle dont on fait usage dans la théorie de la rotation d'un corps qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, il fallait, comme dans cette dernière théorie, qu'aux intégrales de la troisième espèce équivalentes aux angles soit attaché le diviseur $2i$. C'est ce qui a effectivement lieu, comme, sans entrer dans aucun calcul, on a pu reconnaître par le moyen des propositions générales précédentes. On a donc cru devoir essayer, dans le problème de Lagrange, comme dans celui de d'Alembert et d'Euler, à établir les valeurs définitives des *neuf* cosinus des angles que forment entr'eux les deux systèmes d'axes de coordonnées, et l'on a trouvé, de même que dans ce dernier problème, que toutes ces neuf valeurs sont exprimées au moyen des fonctions Θ par des fractions rationnelles douées du même dénominateur.

En examinant, depuis, de plus près la manière de laquelle sont composés les différents numérateurs de ces fractions, on est parvenu à ce résultat nouveau et inattendu que

la rotation proposée d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe peut être remplacée par le mouvement relatif de deux corps non soumis à des forces accélératrices, tournant autour d'un même point fixe et jouissant, dans leurs mouvements de rotation, du même plan invariable et du même mouvement oscillatoire moyen.

Le problème de Lagrange est donc ramené au problème, qui désormais doit être considéré comme élémentaire, de la rotation d'un corps suspendu par un point fixe et mû par le seul effet d'une impulsion primitive.

Voici les calculs qui ont conduit à ces résultats.

Étant proposé une intégrale elliptique de la troisième espèce

$$\int_0^{\varphi} \frac{c+e\sin^2\varphi}{a+b\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

on sait que l'on peut exécuter l'intégration au moyen de la fonction Θ et que l'on trouvera l'intégrale égale à une expression de la forme

$$fu + \frac{1}{g} \log \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)},$$

étant posé

$$\varphi = \operatorname{am} u.$$

Je nommerai cette expression *la valeur* de l'intégrale et la seconde partie de cette valeur

$$\frac{1}{g} \log \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)},$$

la partie logarithmique de la valeur de l'intégrale ou, plus simplement, *la partie logarithmique de l'intégrale*, non obstant que cette partie a le caractère d'un arc de cercle, lorsque a est une constante réelle multipliée par l'unité imaginaire $\sqrt{-1} = i$, ou le caractère mixte d'une somme d'un arc et d'un logarithme, lorsque a est une constante imaginaire quelconque.

On pourra supposer, dans tous les cas, que la partie de a multipliée par l'unité imaginaire soit contenue entre $-K'$ et $+K'$ et alors la partie logarithmique de l'intégrale sera en même temps sa partie périodique, ou qu'elle ne changera pas de valeur, φ étant augmenté de π ou u de $2K$, ce dont on pourra se convaincre par le développement en série.

Lorsqu'il ne s'agit que d'évaluer en nombres une intégrale elliptique de la troisième espèce, rien n'est plus indifférent que la valeur particulière d'une constante par laquelle on multiplierait ou diviserait cette intégrale et de laquelle dépendrait aussi la constante g par laquelle sera divisée sa partie logarithmique.

Mais lorsqu'on veut savoir s'il était possible de pousser plus loin l'analyse du problème, en introduisant la valeur de l'intégrale dans le calcul algébrique, c'est au contraire la constante particulière qui en divise la partie logarithmique, laquelle décidera seule et catégoriquement de cette question.

Supposons, en effet, que la quantité égalée à l'intégrale elliptique de la troisième espèce soit elle même un logarithme divisé par une constante, si cette constante est égale à celle qui divise la partie logarithmique de l'intégrale, les deux quantités sous le signe logarithmique ne différeront entre elles que d'un simple facteur e^{fu}. Lors donc que la quantité dont le logarithme est donné par une intégrale elliptique de la troisième espèce est une des quantités simples qui entrent comme des éléments dans le calcul algébrique, on pourra poursuivre ce calcul avec la valeur de cette quantité

$$\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)} \cdot e^{fgu},$$

valeur laquelle à cause des nombreuses propriétés de la fonction Θ se prête aisément aux différentes opérations de l'analyse. Mais si les diviseurs constants des deux logarithmes sont différents entre eux, la quantité dont le logarithme est exprimé par une intégrale elliptique de la troisième espèce sera égale à une *puissance* de la valeur précédente, cequi pourra empêcher, dans la plupart des cas, de poursuivre avec succès le calcul algébrique.

La même chose aura lieu lorsque la quantité exprimée par une intégrale elliptique de la troisième espèce est un angle dont le sinus et cosinus entrent dans les formules du problème. Nommant w cet angle et mettant ia au lieu de a, ig au lieu de g, pour avoir la forme des intégrales au caractère trigonométrique, on tirera de l'équation

$$w = fu + \frac{1}{ig} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

ces autres débarrassées du logarithme et par lesquelles on connaîtra le sinus et cosinus mêmes dont on a besoin,

$$\cos(w-fu) = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}\right\}^{\frac{1}{g}} + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}\right\}^{\frac{1}{g}}$$

$$\sin(w-fu) = \frac{1}{2i}\left\{\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}\right\}^{\frac{1}{g}} - \frac{1}{2i}\left\{\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}\right\}^{\frac{1}{g}}$$

et l'on voit que le succès de calculs ultérieurs que l'on pourrait entreprendre après avoir substitué ces valeurs, dépendra entièrement ou en grande partie de la valeur de g ou du diviseur de la partie logarithmique de l'intégrale. C'est ainsi que, dans mon mémoire sur la rotation d'un corps quelconque non soumis à des forces accélératrices, après avoir exprimé par une intégrale elliptique de la troisième espèce l'angle qui détermine la projection sur le plan invariable de l'un des axes principaux du corps, on a profité de la circonstance que le diviseur de la partie logarithmique de l'intégrale a été trouvé égal à $2i$ pour pousser jusqu'au bout la solution du problème, ce qui a fait découvrir des formules définitives d'une simplicité inattendue. Assurément, si l'on avait voulu se contenter de pouvoir évaluer, avec assez d'aisance, en secondes et parties de seconde, pour toute valeur donnée du temps, l'angle ramené par la dite intégrale, il aurait suffi d'exprimer la valeur de cette intégrale par les fonctions Θ, mais en s'arrêtant là, on aurait méconnu la vertu et la portée de l'analyse mathématique.

D'après ce qu'on vient de dire, il paraît convenable de distinguer par un nom particulier la constante qui divise la partie logarithmique de la valeur d'une intégrale elliptique de la troisième espèce; c'est pourquoi on nommera cette constante, dans ce qui suit, *le diviseur attaché à cette intégrale.*

Il résulte de la définition de ce diviseur qu'il ne changera pas de valeur, lorsqu'on ajoute à l'intégrale elliptique de la troisième espèce à laquelle il est attaché une intégrale elliptique quelconque de la première espèce.

On remarquera, de plus, que d'après la même définition c'est seulement la valeur absolue du diviseur qui est déterminée, ou que dans l'expression

$$\frac{1}{g} \log \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

il est permis de changer g en $-g$ pourvu qu'on change en même temps a en $-a$. Le signe de a étant fixé, il sera facile dans tous les cas de fixer aussi le signe du diviseur g, puisqu'il ne s'agira alors que de choisir la valeur d'une intégrale indéfinie donnée entre deux quantités opposées.

La notion du diviseur peut être généralisé de la manière suivante:

Soit proposée une intégrale résoluble en plusieurs intégrales elliptiques de la troisième espèce et supposons qu'à toutes ces intégrales soit attaché le même diviseur g. Leurs valeurs auront donc la forme

$$fu+\frac{1}{g}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)},\quad f'u+\frac{1}{g}\log\frac{\Theta(u+a')}{\Theta(u-a')},\quad f''u+\frac{1}{g}\log\frac{\Theta(u+a'')}{\Theta(u-a'')},\quad \text{etc.}$$

d'où l'on tire la valeur de l'intégrale proposée

$$(f+f'+f''+\cdots)u+\frac{1}{g}\log\frac{\Theta(u+a)\,\Theta(u+a')\,\Theta(u+a'')\cdots}{\Theta(u-a)\,\Theta(u-a')\,\Theta(u-a'')\cdots}.$$

Ayant appelé diviseur attaché à une intégrale elliptique de la trroisième espèce la constante divisant la partie logarithmique de sa valeur, on appèlera, de même, diviseur attaché à l'intégrale proposée, la constante g divisant, dans l'expression précédente, le logarithme du produit

$$\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}\cdot\frac{\Theta(u+a')}{\Theta(u-a')}\cdot\frac{\Theta(u+a'')}{\Theta(u-a'')}\cdots,$$

de sorte qu'un même diviseur attaché à plusieurs intégrales elliptiques de la troisième espèce, à la même amplitude mais aux paramètres différents, sera appelé aussi le diviseur attaché à l'intégrale équivalente à la somme de ces integrales, lesquelles d'ailleurs, dans cette somme, pourront être prises avec des signes arbitraires. Et lorsque, dans un problème proposé, l'on aura exprimé, par une pareille intégrale-somme, un logarithme dont le nombre, ou un arc dont le sinus et cosinus entrent algébriquement dans les formules du problème, ce sera encore la valeur du diviseur attaché à cette intégrale-somme, qu'il importera le plus de connaître puisque de cette valeur dépendra le succès des calculs ultérieurs.

Passons à présent à établir quelques formes générales des intégrales par lesquelles on saura trouver, sans aucun calcul, la valeur du diviseur qui y est attaché. On choisira de préférence, dans ces exemples, des intégrales douées du caractère trigonometrique et dont le diviseur sera i ou $2i$.

1°. Dans le mémoire cité ci-dessus on a réuni dans un même tableau *seize* intégrales elliptiques de la troisième espèce au caractère trigonométrique présentées sous forme canonique

$$\int\frac{c+e\sin^2\varphi}{a+b\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

auxquelles est attaché le diviseur $\frac{1}{2i}$. On y a réuni, dans un autre tableau, *huit* intégrales de la troisièm espèce au caractère logarithmique et présentées sous la même forme canonique, auxquelles est attaché le diviseur $\frac{1}{2}$. Au moyen des formules établies dans ces deux tableaux on trouvera aisément le diviseur

attaché à une intégrale elliptique de la troisième espèce dans tous les cas où cette intégrale est réduite à sa forme canonique.

Mais lorsque l'intégrale de la troisième espèce a la forme plus compliquée

$$\int\frac{lx+m}{gx+h}\cdot\frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

où $F(x)$ est une fonction de x du 3ième ou du 4ième degré, la réduction de cette intégrale à sa forme canonique pourra être embarrassante à cause de la discussion qu'elle exige des racines d'une équation du 3ième ou du 4ième degré. Or, comme on doit être impatient de connaître le diviseur qui y est attaché, afin qu'on puisse juger préalablement et du premier abord de la possibilité de poursuivre avec succès l'analyse générale du problème, on pourra désirer d'avoir des moyens pour le déterminer sans qu'on ait besoin d'exécuter la réduction plus ou moins pénible de l'intégrale à sa forme canonique. Voici quelques principes simples qui y pourront conduire et qui sont susceptibles d'applications plus générales.

Partons d'une formule quelconque des deux tableaux présentés dans le mémoire cité (p. 341 et p. 349 de ce vol.), par exemple de la seconde formule du tableau relatif aux intégrales elliptiques de la troisième espèce et au caractère trigonométrique,

$$\int_0^u\frac{\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\,du}{i[\sin^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)]}=\frac{d\log H(ia')}{da'}u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}.$$

Posant

$$y=\sin^2\operatorname{am}u,\qquad \alpha=\sin^2\operatorname{am}(ia),\qquad f(y)=y(1-y)(1-k^2y)$$

l'intégrale proposée deviendra

$$\int\frac{\sqrt{f(\alpha)}\,dy}{2i(y-\alpha)\sqrt{f(y)}}.$$

D'où suit que le diviseur attaché à l'intégrale

$$\int\frac{dy}{(y-\alpha)\sqrt{f(y)}}$$

est $\sqrt{f(\alpha)}$. On déduit de là la proposition générale qu'étant posé

$$f(y)=y(1-y)(1-k^2y)$$

la valeur du diviseur attaché à l'intégrale

$$\int\frac{cy+e}{ay+b}\,\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

laquelle sera désignée par D est égale à

$$D = \frac{a\sqrt{f(y)}}{cy+e}$$

en y substituant la valeur de y pour laquelle $ay+b=0$. Or cette expression de D restera la même, quand même $f(y)$ aura la forme la plus générale d'une fonction entière du 4ième degré. C'est ce qu'on prouvera de la manière suivante:

Supposons que l'on ait transformé l'intégrale précédente au moyen de la substitution bien connue

$$y = \frac{p+qx}{r+sx}$$

dans une autre

$$\int \frac{lx+m}{gx+h}\cdot\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \int\frac{cy+e}{ay+b}\cdot\frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

où $F(x)$ sera une fonction entière du 4ième degré. Puisque dans les deux expressions sous le signe intégrale, l'une proposée, l'autre transformée, les deux dénominateurs $ay+b$ et $gx+h$ devront s'évanouir en même temps, et que dans l'expression de D par y on doit substituer la valeur de y pour laquelle $ay+b=0$, on devra dans l'expression de D par x substituer la valeur de x pour laquelle $gx+h=0$. Or, en rejetant comme évanouissantes les quantités multipliées par $ay+b$, on aura

$$\frac{d\cdot\frac{(ay+b)\sqrt{f(y)}}{cy+e}}{dy} = D = \frac{a\sqrt{f(y)}}{cy+e}.$$

En substituant dans cette expression de D l'équation différentielle laquelle a fourni la transformation de l'intégrale,

$$\frac{cy+e}{ay+b}\cdot\frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = \frac{lx+m}{gx+h}\cdot\frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

il viendra

$$D = \frac{d\left(\frac{(gx+h)\sqrt{F(x)}}{lx+m}\cdot\frac{dy}{dx}\right)}{dy},$$

ou si, après la différentiation, l'on rejette comme évanouissantes les quantités multipliées par $gx+h$

$$D = \frac{d\left(\frac{(gx+h)\sqrt{F(x)}}{lx+m}\right)}{dx} = \frac{g\sqrt{F(x)}}{lx+m}.$$

Le *diviseur attaché* à l'intégrale irréduite

$$\int\frac{lx+m}{gx+h}\cdot\frac{dx}{\sqrt{F(x)}}$$

sera donc égal à l'expression

$$\frac{g\sqrt{F(x)}}{lx+m},$$

en y substituant la valeur de x donnée par l'équation $gx+h=0$, c'est ce qu'il fallait démontrer.

Pour que la substitution dont on a fait usage précédemment soit réelle, il faut que la fonction $F(x)$ soit résoluble en quatre facteurs linéaires réels. Mais cette restriction ne saura empêcher que le diviseur attaché à l'intégrale elliptique de la troisième espèce

$$\int\frac{lx+m}{gx+h}\cdot\frac{dx}{\sqrt{F(x)}}$$

ne soit donné par l'expression précédente, quelque soit la fonction entière du 4ième degré qui se trouve sous le radical.

1°. Supposons que l'intégrale proposée soit

$$\int\frac{lx+m}{gx+h}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(gx+h)u-\left(\frac{lx+m}{g}\right)^2}},$$

u étant une fonction entière de x du troisième degré, le diviseur attaché à cette intégrale sera i. En effet, en nommant toujours D le diviseur cherché, si l'on fait

$$F(x) = (gx+h)u - \left(\frac{lx+m}{g}\right)^2,$$

on aura d'après la proposition générale qu'on vient d'établir

$$D = \frac{g\sqrt{F(x)}}{lx+m}$$

en substituant la valeur de x tirée de l'équation $gx+h=0$. Mais pour cette valeur de x on a

$$\sqrt{F(x)} = i\,\frac{lx+m}{g}$$

d'où suit $D=i$, c'est ce qu'il fallait démontrer.

2°. Soient $\varphi(x)$ et u deux fonctions quelconques de x du second degré, le diviseur attaché à l'intégrale

$$\int \frac{(lx+m)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{u\varphi(x)-(lx+m)^2}}$$

où l'on a posé $\varphi'(x) = \dfrac{d\varphi(x)}{dx}$, sera i.

En effet, soit

$$\varphi(x) = g(x+h)(x+h')$$
$$u\varphi(x)-(lx+m)^2 = F(x)$$

l'intégrale proposée sera égale à la somme des deux intégrales

$$\int \frac{lx+m}{x+h} \cdot \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}, \qquad \int \frac{lx+m}{x+h'} \cdot \frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

et les diviseurs attachés à l'une et l'autre seront donnés par l'expression

$$\frac{\sqrt{F(x)}}{lx+m},$$

en y substituant la valeur de x tirée respectivement des équations

$$x+h=0, \qquad x+h'=0;$$

mais pour l'une et l'autre équation on a

$$\sqrt{F(x)} = i(lx+m),$$

donc l'un et l'autre diviseur sera i, et, par suite, i sera aussi le diviseur attaché à l'intégrale-somme proposée, c'est ce qu'il fallait démontrer.

Par le même raisonnement on trouve que i est le diviseur attaché à l'intégrale précédente, lorsque $\varphi(x)$ est une fonction de x entière du 3ième degré et u une fonction de x linéaire, ou lorsque $\varphi(x)$ est une fonction de x du 4ième degré et u une constante. Dans tous ces cas le diviseur restera le même, quand même la fonction $\varphi(x)$ et celle qui se trouve sous le radical ne sauront être résolues en facteurs linéaires réels.

3°. Soient u, v, w trois fonctions quelconques de x du second degré et α une constante, on trouve encore, au moyen de la proposition générale, que i est le diviseur attaché à l'intégrale

$$\int \frac{u\left(w\dfrac{dv}{dx}-v\dfrac{dw}{dx}\right)}{vw} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\alpha vw-u^2}}.$$

Remarquons d'abord que, w et v étant deux fonctions entières de x, le degré de l'expression

$$w\frac{dv}{dx}-v\frac{dw}{dx}$$

sera inférieur de deux unités ou d'une unité seulement à celle de vw, selon que v et w sont du même degré ou de degré différent. On voit donc que, u, v, w étant du second degré, le numérateur de la fraction

$$\frac{u\left(w\dfrac{dv}{dx}-v\dfrac{dw}{dx}\right)}{vw}$$

ne sera pas plus élevé que le dénominateur. On peut donc résoudre cette fraction en fractions simples et une constante, laquelle pourra être rejetée puisque cela n'aura que l'effet de retrancher de l'intégrale proposée une intégrale de la première espèce.

Posant, pour cet effet,

$$v = g(x-a')(x-a'')$$
$$w = g'(x-a''')(x-a^{\text{IV}})$$

et nommant $u', u'', u''', u^{\text{IV}}$ les valeurs de u correspondantes aux valeurs $a', a'', a''', a^{\text{IV}}$ de x, la fonction précédente pourra être remplacée par l'aggrégat suivant de fractions simples

$$\frac{u'}{x-a'}+\frac{u''}{x-a''}-\frac{u'''}{x-a'''}-\frac{u^{\text{IV}}}{x-a^{\text{IV}}}.$$

Mais ayant posé

$$F(x) = \alpha vw-u^2,$$

pour ces mêmes valeurs de x on aura

$$iu = \sqrt{F(x)},$$

donc le même aggrégat pourra être présenté aussi sous la forme

$$\frac{1}{i}\left\{\frac{\sqrt{F(a')}}{x-a'}+\frac{\sqrt{F(a'')}}{x-a''}-\frac{\sqrt{F(a''')}}{x-a'''}-\frac{\sqrt{F(a^{\text{IV}})}}{x-a^{\text{IV}}}\right\}.$$

Substituant, sous le signe intégral, cet aggrégat au lieu de la fonction

$$\frac{u\left(w\frac{dv}{dx}-v\frac{dw}{dx}\right)}{vw},$$

on aura remplacé l'intégrale proposée par les quatre intégrales

$$\frac{1}{i}\int\frac{F(a')}{x-a'}\cdot\frac{dx}{\sqrt{F(x)}}+\frac{1}{i}\int\frac{F(a'')}{x-a''}\cdot\frac{dx}{\sqrt{F(x)}}-\frac{1}{i}\int\frac{F(a''')}{x-a'''}\cdot\frac{dx}{\sqrt{F(x)}}-\frac{1}{i}\int\frac{F(a^{\text{IV}})}{x-a^{\text{IV}}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

et à chacune d'elles sera attaché le même diviseur i lequel est par suite le diviseur attaché à l'intégrale proposée même.

On voit par la même démonstration que i sera le diviseur attaché à l'intégrale proposée dans le cas où les fonctions v et w sont linéaires et α et u des fonctions du second degré, et dans le cas où des deux quantités v, w l'une est une fonction du second degré pendant que l'autre et les quantités α et u sont des fonctions linéaires, enfin dans le cas où des deux quantités v et w l'une est du 3ième degré, l'autre et la quantité u linéaire et α une constante. On embrassera ces quatre cas par la proposition,

que i est le diviseur de l'intégrale

$$\int\frac{u\left(w\frac{dv}{dx}-v\frac{dw}{dx}\right)}{vw}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\alpha vw-u^2}},$$

lorsque α, v, w sont des fonctions entières de x telles que le produit αvw ne surpasse pas le quatrième degré, et que u est du second degré ou linéaire, selon que v et w sont de même degré ou de degrés différents.

4°. Dans le cas où v et w sont deux fonctions du second ordre qui ne diffèrent entre elles que d'une constante $c = w - v$, la quantité

$$w\frac{dv}{dx}-v\frac{dw}{dx} = c\frac{dv}{dx}$$

ne sera que linéaire et, par suite, la fonction u pourra monter jusqu'au troisième degré sans que le numérateur de la fraction rationnelle, sous le signe intégral, soit plus élevé que le dénominateur. Mais pour que la fonction $F(x)$ ne surpasse pas le quatrième degré, il faudra que α soit en même temps une fonction du second degré, et qu'en outre dans l'expression $\alpha vw - u^2$ ou $\alpha v^2 - u^2$ la sixième et la cinquième puissance de x soient détruites. Ces déterminations étant faites, on aura encore i pour diviseur de l'intégrale proposée dans le numéro précédent.

Dans les exemples jusqu'ici proposés étant considérées des intégrales de la forme

$$\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

où $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ est une fraction rationnelle dont le numérateur n'est pas plus élevé que le dénominateur, on a pu assigner le diviseur attaché à l'intégrale proposée sans procéder aux décompositions en facteurs linéaires, ni du dénominateur $\varphi(x)$ de la fraction rationnelle, ni de la fonction $F(x)$ sous le radical, ce qui rend ces exemples très utiles dans les applications.

Mon illustre ami, Mr. Dirichlet, m'ayant invité à rechercher si l'analyse dont on a fait usage dans mon mémoire sur la rotation d'un corps non soumis à des forces accélératrices puisse aussi s'appliquer à ce cas particulier de la rotation d'un corps grave, qui a été mené par Lagrange aux quadratures, il fallait avant tout examiner les diviseurs attachés aux deux intégrales elliptiques de la troisième espèce par lesquelles cet auteur a exprimé les angles que l'intersection de l'équateur mobile du corps avec le plan fixe horizontal fait avec des droites fixes dans ces deux plans. Ces intégrales, données dans la Mécanique analytique (Tome II, Sect. IX, No. 55) sont:

$$\psi = \int\frac{(h-Cn\cos\omega)\,d\omega}{\sin\omega\sqrt{A\sin^2\omega(2f-Cn^2+2K\cos\omega)-(h-Cn\cos\omega)^2}}$$

$$\varphi = \int\frac{[An-h\cos\omega+(C-A)\,n\cos^2\omega]\,d\omega}{\sin\omega\sqrt{A\sin^2\omega(2f-Cn^2+2K\cos\omega)-(h-Cn\cos\omega)^2}},$$

ou, en posant $-\cos\omega = x$,

$$\psi = \int\frac{(h+Cnx)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{A(1-x^2)(2f-Cn^2-2Kx)-(h+Cnx)^2}}$$

$$\varphi = \int\frac{[An+hx+(C-A)\,nx^2]\,dx}{(1-x^2)\sqrt{A(1-x^2)(2f-Cn^2-2Kx)-(h+Cnx)^2}}.$$

Or, ces deux intégrales étant multipliées par 2 ou -2, elles peuvent être rendues identiques avec celles considérées précédemment dans le second et troisième exemple. Donc, le diviseur attaché à ces dernières étant i, celui attaché aux deux intégrales précédentes, équivalentes aux angles φ et ψ, sera $2i$.

En effet, en retranchant du numérateur sous le signe de la seconde intégrale le dénominateur $1-x^2$ multiplié par An, ce qui ne change pas la valeur du diviseur attaché à cette intégrale, on aura l'intégrale

$$\int \frac{x(h+Cnx)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{A(1-x^2)(2f-Cn^2-2Kx)-(h+Cnx)^2}},$$

laquelle, étant multipliée par -2, rentre dans celle considérée dans le second exemple, en posant

$$\varphi(x) = 1-x^2, \quad lx+m = h+Cnx$$
$$u = A(2f-Cn^2-2Kx).$$

De même la première intégrale, multipliée par 2, rentrera dans celle considérée dans le troisième exemple, en posant

$$v = 1+x, \quad w = 1-x, \quad u = h+Cnx,$$
$$\alpha = A(2f-Cn^2-2Kx).$$

Les diviseurs attachés aux deux intégrales elliptiques de la troisième espèce équivalentes aux angles φ et ψ, étant égaux à $2i$, il y aura lieu de pousser plus loin l'analyse du problème, en introduisant les valeurs analytiques des sinus et cosinus de ces intégrales. C'est dont nous allons nous occuper dans ce qui suit.

Fin du manuscrit.

C.

SUR LA ROTATION D'UN CORPS DE RÉVOLUTION GRAVE AUTOUR D'UN POINT QUELCONQUE DE SON AXE.

L'analyse dont je me suis servi dans mon mémoire sur la rotation d'un corps quelconque qui n'est soumis à aucune force accélératrice est fondée principalement sur le caractère particulier de l'intégrale elliptique de la troisième espèce par laquelle on détermine la position de la projection d'un des axes principaux sur le plan invariable. En effet, dans l'expression de cette intégrale par les fonctions Θ sa partie périodique est représentée par la quantité

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},$$

et cette quantité ne s'y trouve multipliée par aucun facteur constant, numérique ou autre. C'est cette dernière circonstance favorable qui permet d'introduire au lieu de l'angle exprimé par l'intégrale de la 3ième espèce les valeurs simples et quasi algébriques de son sinus et cosinus dont on a besoin dans le cours du calcul. On fera donc bien, dans tous les cas où l'on est parvenu à exprimer un angle par une intégrale elliptique de la troisième espèce, d'examiner avant tout, si cette intégrale a la même nature que celle par laquelle on vient d'exprimer l'angle ψ, savoir que le logarithme imaginaire de la forme

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

auquel elle pourra être réduite, ne se trouve multiplié par aucun facteur constant, et il sera curieux et utile d'avoir un moyen facile de reconnaître ce caractère de l'intégrale, sans avoir besoin de passer par toutes ces transformations successives et nécessaires pour la réduire d'abord à la forme canonique, et ensuite aux fonctions Θ. Voici un théorème qui résout cette question de la manière la plus simple:

„*Soient $F(x)$ une fonction entière de x du quatrième degré et a et m des con-„stantes, l'intégrale elliptique de la troisième espèce*

$$\int \frac{m\,dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}}$$

„*étant réduite à une intégrale elliptique de la première espèce et au logarithme du „quotient de deux fonctions Θ, ce logarithme sera multiplié par le facteur constant*

$$\frac{m}{\sqrt{F(a)}}.\text{“}$$

Si l'on donne à l'intégrale par laquelle l'angle ψ a été exprimé la forme proposée dans le théorème précédent, on aura

$$\frac{m}{\sqrt{F(a)}} = \pm\frac{1}{2i}$$

et toutes les fois que dans un problème mécanique ou autre un angle est exprimé par une intégrale de la même forme, c'est cette même équation qui doit avoir lieu pour que le problème puisse être traité par une analyse semblable à celle par laquelle on vient de perfectionner la solution du problème de la rotation d'un corps qui n'est sollicité par aucune force accélératrice.

Je nommerai, dans la suite, la constante

$$\frac{m}{\sqrt{F(a)}}$$

le facteur de l'intégrale elliptique de la troisième espèce

$$\int \frac{m\,dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}}.$$

Les constantes m et a étant réelles, l'intégrale aura le caractère logarithmique ou trigonométrique selon que son facteur sera réel ou imaginaire.

Appliquons le théorème précédent aux intégrales elliptiques de la troisième espèce par lesquelles Lagrange a déterminé la rotation d'un corps sollicité par la pesanteur, dans le cas où le point fixe est situé sur un des axes principaux mené par le centre de gravité, et où les moments d'inertie par rapport aux deux autres axes principaux sont égaux.

Pour rendre conformes entr'elles les notations dont fait usage Lagrange dans sa Mécanique analytique (Vol. II, Section IX) et celles employées ci-dessus d'après M. Poisson, on fera dans les formules de Lagrange

$$\omega = \pi - \vartheta,$$

on mettra de plus $\varphi+\pi$ et $\psi+\pi$ au lieu de φ et ψ; enfin on donnera aux axes des ξ, η, a, b respectivement les directions des axes des x, y, x', y', mais aux axes des ζ, c les directions opposées à celles des axes des z, z'. Ceci fait, les axes des coordonnées, mobiles ou fixes, auront la même direction, et les angles φ, ψ, ϑ la même signification que dans les recherches précédentes relatives à la rotation d'un corps qui n'est sollicité par aucune force accélératrice.

Soit

$$\cos\vartheta = x,$$

et pour plus de simplicité,

$$A(1-x^2)(2f-Cn^2-2Gx)-(h+Cnx)^2 = F(x), \text{*)}$$

les formules, par lesquelles le problème proposé a été ramené aux quadratures (Méc. anal. II, Sect. IX, No. 55), donnent

$$dt = \frac{A\,dx}{\sqrt{F(x)}}$$

$$d\psi = \frac{(h+Cnx)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{F(x)}}$$

$$d\varphi = \frac{[An+hx+(C-A)nx^2]\,dx}{(1-x^2)\sqrt{F(x)}}.$$

On voit par la première de ces formules que, dans ce problème encore, le cosinus, $\cos\vartheta = x$, de l'angle des axes des z et z' sera une fonction elliptique dont l'argument est proportionnel au temps et, par suite, une fonction périodique du temps.

Pour simplifier, introduisons au lieu de φ l'angle

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{(C-A)n}{A}(t-t_0),$$

t_0 désignant une constante, on aura

$$d\varphi_1 = d\varphi + (C-A)n\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \frac{(Cn+hx)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{F(x)}}.$$

---

*) On a écrit G au lieu de la lettre K employée par Lagrange.

Or, on a

$$\frac{h+Cnx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\frac{h+Cn}{1-x} + \tfrac{1}{2}\frac{h-Cn}{1+x}$$

$$\frac{Cn+hx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\frac{h+Cn}{1-x} - \tfrac{1}{2}\frac{h-Cn}{1+x}.$$

Donc, étant posé

$$\tfrac{1}{2}(\psi+\varphi_1) = \psi_1, \qquad \tfrac{1}{2}(\psi-\varphi_1) = \psi_2$$

il résultera

$$\psi = \tfrac{1}{2}\int \frac{(h+Cn)\,dx}{(1-x)\sqrt{F(x)}}$$

$$\psi_2 = \tfrac{1}{2}\int \frac{(h-Cn)\,dx}{(1+x)\sqrt{F(x)}}.$$

Or, par la forme même de la fonction $F(x)$ on voit que $h+Cn$ et $h-Cn$ sont, respectivement, les valeurs de $\sqrt{-F(x)}$ pour $x=1$ et $x=-1$. Il suit donc du théorème proposé, que, les angles ψ_1 et ψ_2 étant réduits aux fonctions Θ, le facteur du logarithme par lequel on exprime leur partie périodique, sera $\pm\frac{1}{2i}$.

Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions entières quelconques, et supposons que le degré de $\varphi(x)$ ne surpasse celui de $f(x)$; soient d'ailleurs a, b, c etc. les racines de l'équation $f(x)=0$. Cela posé, l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)\sqrt{F(x)}}$$

sera la somme de plusieurs intégrales elliptiques de la troisième espèce, lesquelles répondront aux différentes racines a, b, etc., et il suit du théorème proposé ci-dessus, que le *facteur* de chaque intégrale répondante à une racine a sera

$$\frac{\varphi(a)}{f'(a)\sqrt{F(a)}},$$

$f'(a)$ étant la valeur de $\frac{df(x)}{dx}$ pour $x=a$. Au moyen de cette généralisation du théorème proposé on aurait pu examiner directement les angles ψ et φ, sans les réduire aux angles ψ_1 et ψ_2.

L'équation

$$F(x) = 0$$

aura, dans le problème proposé, ses trois racines réelles, deux entre -1 et $+1$,

et la troisième entre 1 et ∞. En effet, pour $x=+1$ et $x=-1$ la valeur de $F(x)$ devient négative; mais pour une valeur quelconque que pourra prendre $\cos\omega = -\cos\vartheta = -x$, par exemple pour la valeur initiale que nous désignerons par $\cos\omega_0$, $F(x)$ doit être positive, à cause de l'équation

$$\frac{1}{A^2}F(x) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \sin^2\omega\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2;$$

on aura de plus $F(x) = +\infty$ pour $x=+\infty$. Il suit de là qu'il y aura une racine entre $-\cos\omega_0$ et -1, une seconde entre $-\cos\omega_0$ et $+1$, et la troisième entre 1 et ∞. Donc, faisant

$$F(x) = A(1-x^2)(2f-Cn^2-2Gx)-(h+Cnx)^2 = (1-x^2)[A(2f-Cn^2)-h^2+C^2n^2-2AGx]-(Cn+hx)^2$$
$$= 2AG(r'-x)(r''-x)(x-r'''),$$

on pourra supposer

$$r'>1>r''>r'''>-1.$$

Alors on aura

$$(h+Cn)^2 = 2AG(r'-1)(1-r'')(1-r''')$$
$$(h-Cn)^2 = 2AG(1+r')(1+r'')(1+r''')$$
$$A(2f-Cn^2)-h^2 = -2AGr'r''r'''.$$

La valeur de x devant osciller entre les limites r'' et r''', on fera

$$x = r''\sin^2\xi + r'''\cos^2\xi = r''' + (r''-r''')\sin^2\xi,$$

d'où l'on tire

$$dx = 2(r''-r''')\sin\xi\cos\xi\,d\xi,$$

$$r''-x = (r''-r''')\cos^2\xi, \quad x-r''' = (r''-r''')\sin^2\xi, \quad r'-x = (r'-r''')\left(1-\frac{r''-r'''}{r'-r'''}\sin^2\xi\right),$$

et par suite

$$\frac{1}{A}dt = \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \sqrt{\frac{2}{AG(r'-r''')}}\cdot\frac{d\xi}{\Delta\xi},$$

le module et son complément étant

$$k = \sqrt{\frac{r''-r'''}{r'-r'''}}, \quad k' = \sqrt{\frac{r'-r''}{r'-r'''}}.$$

On aura de plus

$$1-x = (1-r''')\left(1-\frac{r''-r'''}{1-r'''}\sin^2\xi\right)$$
$$1+x = (1+r''')\left(1+\frac{r''-r'''}{1+r'''}\sin^2\xi\right).$$

Faisons donc

$$\xi = \operatorname{am} u, \qquad dt = \sqrt{\frac{2A}{G(r'-r''')}}\cdot du,$$

$$-\sin^2\operatorname{am}(ia) = \frac{r'-1}{1-r''}, \qquad -\sin^2\operatorname{am}(ib) = \frac{r'-r'''}{1+r'''}.$$

On aura

$$\cos^2\operatorname{am}(ia) = \frac{r'-r''}{1-r''}, \qquad \cos^2\operatorname{am}(ib) = \frac{1+r'}{1+r'''},$$

$$\Delta^2\operatorname{am}(ia) = \frac{(r'-r'')(1-r''')}{(r'-r''')(1-r'')}, \qquad \Delta^2\operatorname{am}(ib) = \frac{1+r''}{1+r'''},$$

d'où l'on tire

$$\frac{r''-r'''}{1-r'''} = \frac{k^2\cos^2\operatorname{am}(ia)}{\Delta^2\operatorname{am}(ia)} = \frac{k^2}{\Delta^2\operatorname{am}(a,k')},$$

$$\frac{r''-r'''}{1+r'''} = -k^2\sin^2\operatorname{am}(ib) = k^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(b,k'),$$

$$1-r''' = -\frac{2\sin^2\operatorname{am}(ib)\,\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)-\sin^2\operatorname{am}(ib)\,\Delta^2\operatorname{am}(ia)},$$

$$1+r''' = \frac{2\cos^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)-\sin^2\operatorname{am}(ib)\,\Delta^2\operatorname{am}(ia)},$$

et par conséquent

$$\psi_1 = \tfrac{1}{2}\int\frac{(h+Cn)\,dx}{(1-x)\sqrt{F(x)}} = \int\sqrt{\frac{(r'-1)(1-r'')}{(1-r''')(r'-r''')}}\cdot\frac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)\,du}{\Delta^2\operatorname{am}u-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u}$$

$$= \int\frac{k'^2\operatorname{tg}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\,du}{i[\Delta^2\operatorname{am}u-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u]}$$

$$\psi_2 = \tfrac{1}{2}\int\frac{(h-Cn)\,dx}{(1+x)\sqrt{F(x)}} = \int\sqrt{\frac{(1+r')(1+r'')}{(1+r''')(r'-r''')}}\cdot\frac{du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ib)\sin^2\operatorname{am}u}$$

$$= \int\frac{i\cot\operatorname{am}(ib)\,\Delta\operatorname{am}(ib)\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ib)\sin^2\operatorname{am}u}.$$

On aura, tout de suite, d'après les formules (8.) et (13.) du tableau de valeurs des intégrales elliptiques de la troisième espèce et au caractère trigonométrique présenté dans mon premier mémoire

$$\pi\pm\psi_1 = \frac{d\log H_1(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}$$

$$\pm\psi_2 = \frac{d\log H(ib)}{db}u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ib)}{\Theta(u-ib)}.$$

En effet, sachant une fois, que les *facteurs* des intégrales, par lesquelles on a

exprimé les angles ψ_1 ou ψ_2, sont $\pm\frac{1}{2i}$, on n'aura qu'à chercher dans ce tableau les formules qui ont, sous le signe intégral, pour numérateur une constante, et par lesquelles sont évaluées les intégrales aux paramètres

$$-\frac{k^2\cos^2\operatorname{am}(ia)}{\Delta^2\operatorname{am}(ia)} \quad\text{et}\quad -k^2\sin^2\operatorname{am}(ia).$$

D'après ce qu'on a remarqué plus haut les formules relatives à ces paramètres sont respectivement la quatrième et la première de chaque système de quatre formules. Toutes les intégrales, réunies dans le tableau, ayant des valeurs constamment croissantes avec u, pour déterminer le signe ambigu $\pm$, dans les deux formules précédentes, on cherchera si les angles ψ_1 et ψ_2 données par les équations

$$\psi_1 = \frac{h+Cn}{2A}\int\frac{dt}{1-\cos\vartheta}$$

$$\psi_2 = \frac{h-Cn}{2A}\int\frac{dt}{1+\cos\vartheta}$$

croissent ou décroissent avec le temps t ou avec l'argument u, ce qui dépend évidemment du signe des quantités $h+Cn$ et $h-Cn$. Il faudra donc, dans la première de ces formules, prendre $+\psi_1$ ou $-\psi_1$, selon que la constante $h+Cn$ est positive ou négative; et l'on prendra dans la seconde formule $+\psi_2$ ou $-\psi_2$, selon que la constante $h-Cn$ est positive ou négative. Pour fixer les idées et ne pas trop embarrasser les formules des signes $\pm$, nous prendrons, dans les deux formules précédentes, le signe supérieur. On n'aura qu'à mettre, dans ce qui suit, $-a$ au lieu de a ou $-b$ au lieu de b, s'il fallait prendre, dans l'une ou l'autre formule, le signe inférieur.

Soit

$$\mu = \sqrt{\frac{G(r'-r''')}{2A}},$$

on aura

$$u = \mu(t-t_0),$$

t_0 désignant une constante. Ni la valeur de cette constante ni la position de la droite fixe dans le plan horizontal, à partir de laquelle l'angle ψ est compté, peuvent être considérées comme arbitraires, puisque, dans les formules précédentes, on n'a pas ajouté de constante arbitraire à l'angle $\pm\psi_2$, et qu'on a ajouté la constante π à l'angle $\pm\psi_1$. C'est ce qui a l'effet que la constante t_0 et la droite fixe dans le plan horizontal doivent être déterminées de manière qu'au temps $t = t_0$ l'axe des x' se couche sur le plan horizontal et y prenne une position opposée à la direction de la droite fixe.

Soit

$$\mu_1 = \frac{d \log H_1(ia)}{da}$$
$$\mu_2 = \frac{d \log H(ib)}{db}$$

et posons

$$\psi_1 = \mu_1 u - \psi_1'$$
$$\psi_2 = \mu_2 u + \psi_2',$$

on aura

$$\psi_1' = \pi + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u - ia)}{\Theta_1(u + ia)}$$
$$\psi_2' = \quad \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u + ib)}{\Theta(u - ib)}.$$

Les angles ψ_1' et ψ_2' seront donc, de même que ϑ, des fonctions périodiques du temps et qui reprennent les mêmes valeurs après le temps

$$T = \frac{2K}{\mu}.$$

Pour exprimer ψ et φ par ψ_1' et ψ_2', on aura les équations

$$\psi = \psi + \psi_2 = (\mu_1 + \mu_2) u - \psi_1' + \psi_2'$$
$$\varphi = \varphi_1 - \frac{n(C-A)}{A}(t - t_0) = \left(\mu_1 - \mu_2 - \frac{n(C-A)}{\mu A}\right) u - \psi_1' - \psi_2'.$$

Donc, posant

$$\mu_1 + \mu_2 = \nu$$
$$\mu_1 - \mu_2 - \frac{n(C-A)}{\mu A} = \nu'$$
$$-(\psi_1' - \psi_2') = \psi'$$
$$-(\psi_1' + \psi_2') = \varphi',$$

on aura les valeurs suivantes des angles φ et ψ, dans lesquelles la partie proportionnelle au temps a été séparée de la partie périodique,

$$\psi = \nu u + \psi' = \mu\nu(t - t_0) + \psi'$$
$$\varphi = \nu' u + \varphi' = \mu\nu'(t - t_0) + \varphi'.$$

On voit par ces formules que la rotation proposée se compose de trois mouvements périodiques et dont les périodes sont, en général, incommensurables entre elles. Deux de ces mouvements sont ce qu'on peut appeler des rotations uniformes *progressives* autour d'un axe, celui des z' et celui des z; le troisième mouvement, et le plus compliqué, consiste dans une rotation *oscillatoire* autour des trois axes des x, y, z. Les angles $\vartheta, \varphi', \psi'$ étant connus en fonctions du temps par les formules précédemment établies, on déterminera d'abord leurs valeurs correspondantes au temps t auquel on pourra ajouter un multiple quelconque positif ou négatif de T. Ceci fait, on déterminera la position du corps correspondante au même temps au moyen des formules

$$x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$$
$$y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'$$
$$z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z',$$

où

$$\alpha = \cos\varphi' \cos\psi' + \sin\varphi' \sin\psi' \cos\vartheta$$
$$\beta = -\sin\varphi' \cos\psi' + \cos\varphi' \sin\psi' \cos\vartheta$$
$$\gamma = \sin\psi' \sin\vartheta$$
$$\alpha' = -\cos\varphi' \sin\psi' + \sin\varphi' \cos\psi' \cos\vartheta$$
$$\beta' = \sin\varphi' \sin\psi' + \cos\varphi' \cos\psi' \cos\vartheta$$
$$\gamma' = \cos\psi' \sin\vartheta$$
$$\alpha'' = -\sin\varphi' \sin\vartheta$$
$$\beta'' = -\cos\varphi' \sin\vartheta$$
$$\gamma'' = \cos\vartheta.$$

On fera ensuite tourner le corps autour de l'axe des z d'un angle égal à

$$\mu\nu(t - t_0)$$

ou d'un angle qui en diffère d'un multiple de 2π. Enfin, on fera tourner le corps sur lui-même, autour de l'axe des z' d'un angle égal à

$$\mu\nu'(t - t_0)$$

ou d'un angle qui diffère de cette valeur d'un multiple quelconque de 2π. Au moyen de ce triple déplacement l'on trouvera la véritable position que prendra le corps au temps t dans le mouvement proposé.

Ramenons à présent les valeurs données ci-dessus des neuf cosinus α, β, γ etc. aux fonctions Θ.

Des valeurs

$$\psi_1' = \pi + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \pi + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+K-ia)}{\Theta(u-K+ia)}$$

$$\psi_2' = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ib)}{\Theta(u-ib)}$$

l'on déduit

$$e^{i\psi_1'} = -\sqrt{\frac{\Theta(u+K-ia)}{\Theta(u-K+ia)}}$$

$$e^{i\psi_2'} = \sqrt{\frac{\Theta(u+ib)}{\Theta(u-ib)}},$$

et par suite

$$e^{i\psi'} = e^{-i(\psi_1'-\psi_2')} = -\sqrt{\frac{\Theta(u-K+ia)\,\Theta(u+ib)}{\Theta(u+K-ia)\,\Theta(u-ib)}}$$

$$e^{i\varphi'} = e^{-i(\psi_1'+\psi_2')} = -\sqrt{\frac{\Theta(u-K+ia)\,\Theta(u-ib)}{\Theta(u+K-ia)\,\Theta(u+ib)}}.$$

On a, de plus, d'après ce qu'on a posé ci-dessus,

$$1-\cos\vartheta = (1-r''')(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(K-ia)\sin^2\mathrm{am}\,u)$$

$$1+\cos\vartheta = (1+r''')(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ib)\sin^2\mathrm{am}\,u),$$

où

$$\frac{r''-r'''}{1-r'''} = k^2\sin^2\mathrm{am}(K-ia)$$

$$\frac{r''-r'''}{1+r'''} = -k^2\sin^2\mathrm{am}(ib),$$

et par suite

$$\frac{1-r'''}{1+r'''} = -\frac{\sin^2\mathrm{am}(ib)}{\sin^2\mathrm{am}(K-ia)},$$

d'où l'on tire

$$1-r''' = -\frac{2\sin^2\mathrm{am}(ib)}{\sin^2\mathrm{am}(K-ia)-\sin^2\mathrm{am}(ib)}$$

$$1+r''' = \frac{2\sin^2\mathrm{am}(K-ia)}{\sin^2\mathrm{am}(K-ia)-\sin^2\mathrm{am}(ib)}.$$

Substituant ces expressions dans les valeurs de $1-\cos\vartheta$ et $1+\cos\vartheta$ trouvees ci-dessus on aura

$$1-\cos\vartheta = -\frac{2\sin^2\mathrm{am}(ib)[1-k^2\sin^2\mathrm{am}(K-ia)\sin^2\mathrm{am}\,u]}{\sin^2\mathrm{am}(K-ia)-\sin^2\mathrm{am}(ib)}$$

$$1+\cos\vartheta = \frac{2\sin^2\mathrm{am}(K-ia)[1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ib)\sin^2\mathrm{am}\,u]}{\sin^2\mathrm{am}(K-ia)-\sin^2\mathrm{am}(ib)}.$$

Substituons dans ces équations les formules (*Fund.* §. 53. 3, §. 61. 21)

$$1-k^2\sin^2\mathrm{am}(K-ia)\sin^2\mathrm{am}\,u = \frac{\Theta^2(0)\,\Theta(u+K-ia)\,\Theta(u-K+ia)}{\Theta^2(K-ia)\,\Theta^2(u)}$$

$$1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ib)\,\sin^2\mathrm{am}\,u = \frac{\Theta^2(0)\,\Theta(u+ib)\,\Theta(u-ib)}{\Theta^2(ib)\,\Theta^2(u)}$$

$$k[\sin^2\mathrm{am}(K-ia)-\sin^2\mathrm{am}(ib)] = \frac{\Theta^2(0)\,H(K-ia+ib)\,H(K-ia-ib)}{\Theta^2(K-ia)\,\Theta^2(ib)}$$

$$k\sin^2\mathrm{am}(K-ia) = \frac{H^2(K-ia)}{\Theta^2(K-ia)}, \qquad k\sin^2\mathrm{am}(ib) = \frac{\Theta^2(ib)}{\Theta^2(ib)},$$

il viendra

$$1-\cos\vartheta = -\frac{2H^2(ib)\,\Theta(u+K-ia)\,\Theta(u-K+ia)}{H(K-ia+ib)\,H(K-ia-ib)\,\Theta^2(u)}$$

$$1+\cos\vartheta = \frac{2H^2(K-ia)\,\Theta(u+ib)\,\Theta(u-ib)}{H(K-ia+ib)\,H(K-ia-ib)\,\Theta^2(u)}.$$

Retranchant ces équations l'une de l'autre et introduisant les fonctions Θ_1 et H_1, on aura

$$\gamma'' = \cos\vartheta = \frac{H_1^2(ia)\,\Theta(u+ib)\,\Theta(u-ib)+H^2(ib)\,\Theta_1(u+ia)\,\Theta_1(u-ia)}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}.$$

Multipliant les mêmes équations, et tirant la racine carrée, on aura

$$\sin\vartheta = \frac{2H(ib)\,H(K-ia)\sqrt{\Theta(u+K-ia)\,\Theta(u-K+ia)\,\Theta(u+ib)\,\Theta(u-ib)}}{i\,H(K-ia+ib)\,H(K-ia-ib)\,\Theta^2(u)}.$$

Cette valeur étant multipliée par les valeurs qu'on a données ci-dessus de $e^{i\psi'}$ et $e^{i\varphi'}$, il résultera

$$\sin\vartheta\,e^{i\psi'} = -\frac{2H(ib)\,H(K-ia)\,\Theta(u-K+ia)\,\Theta(u+ib)}{i\,H(K-ia+ib)\,H(K-ia-ib)\,\Theta^2(u)}$$

$$\sin\vartheta\,e^{i\varphi'} = -\frac{2H(ib)\,H(K-ia)\,\Theta(u-K+ia)\,\Theta(u-ib)}{i\,H(K-ia+ib)\,H(K-ia-ib)\,\Theta^2(u)},$$

d'où l'on tire les valeurs des quatre coefficients

$$\gamma = \sin\vartheta\sin\psi' = -\frac{H(ib)\,H_1(ia)[\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u-ib)-\Theta_1(u+ia)\,\Theta(u+ib)]}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}$$

$$\gamma' = \sin\vartheta\cos\psi' = -\frac{H(ib)\,H_1(ia)[\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u-ib)+\Theta_1(u+ia)\,\Theta(u+ib)]}{i\,H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}$$

$$\alpha'' = -\sin\vartheta\sin\varphi' = \frac{H(ib)\,H_1(ia)[\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u+ib)-\Theta_1(u+ia)\,\Theta(u-ib)]}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}$$

$$\beta'' = -\sin\vartheta\cos\varphi' = \frac{H(ib)\,H_1(ia)[\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u+ib)+\Theta_1(u+ia)\,\Theta(u-ib)]}{i\,H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}.$$

Avant de chercher les expressions elliptiques des quatre coefficients restants $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ il sera bon de transformer leurs valeurs données ci-dessus, en remplaçant les angles φ' et ψ' par leur somme et leur différence. De cette manière les valeurs données ci-dessus des quatre coefficients,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\varphi'\cos\psi' + \sin\varphi'\sin\psi'\cos\vartheta \\
\beta &= -\sin\varphi'\cos\psi' + \cos\varphi'\sin\psi'\cos\vartheta \\
\alpha' &= -\cos\varphi'\sin\psi' + \sin\varphi'\cos\psi'\cos\vartheta \\
\beta' &= \sin\varphi'\sin\psi' + \cos\varphi'\cos\psi'\cos\vartheta,
\end{aligned}$$

se changeront dans les suivantes

$$\begin{aligned}
2\alpha &= \cos(\varphi'+\psi')(1-\cos\vartheta) + \cos(\varphi'-\psi')(1+\cos\vartheta) \\
2\beta &= -\sin(\varphi'+\psi')(1-\cos\vartheta) - \sin(\varphi'-\psi')(1+\cos\vartheta) \\
2\alpha' &= -\sin(\varphi'+\psi')(1-\cos\vartheta) + \sin(\varphi'-\psi')(1+\cos\vartheta) \\
2\beta' &= -\cos(\varphi'+\psi')(1-\cos\vartheta) + \cos(\varphi'-\psi')(1+\cos\vartheta).
\end{aligned}$$

Comme on a $\varphi'+\psi' = -2\psi'_1$, $\varphi'-\psi' = -2\psi'_2$, ces formules deviennent plus simplement

$$\begin{aligned}
2\alpha &= \cos 2\psi'_1(1-\cos\vartheta) + \cos 2\psi'_2(1+\cos\vartheta) \\
2\beta &= \sin 2\psi'_1(1-\cos\vartheta) + \sin 2\psi'_2(1+\cos\vartheta) \\
2\alpha' &= \sin 2\psi'_1(1-\cos\vartheta) - \sin 2\psi'_2(1+\cos\vartheta) \\
2\beta' &= -\cos 2\psi'_1(1-\cos\vartheta) + \cos 2\psi'_2(1+\cos\vartheta),
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
2(\alpha+i\beta) &= e^{2i\psi'_1}(1-\cos\vartheta) + e^{2i\psi'_2}(1+\cos\vartheta) \\
2(\beta'-i\alpha') &= -e^{2i\psi'_1}(1-\cos\vartheta) + e^{2i\psi'_2}(1+\cos\vartheta),
\end{aligned}$$

ce qui, en substituant les valeurs

$$\begin{aligned}
e^{2i\psi'_1} &= \frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}, \qquad 1-\cos\vartheta = -\frac{2H^2(ib)\,\Theta_1(u+ia)\,\Theta_1(u-ia)}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}, \\
e^{2i\psi'_2} &= \frac{\Theta(u+ib)}{\Theta(u-ib)}, \qquad 1+\cos\vartheta = \frac{2H_1^2(ia)\,\Theta(u+ib)\,\Theta(u-ib)}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)},
\end{aligned}$$

fournit les formules suivantes

$$\begin{aligned}
\alpha+i\beta &= -\frac{H^2(ib)\,\Theta_1^2(u-ia) - H_1^2(ia)\,\Theta^2(u+ib)}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)} \\
\beta'-i\alpha' &= \frac{H^2(ib)\,\Theta_1^2(u-ia) + H_1^2(ia)\,\Theta^2(u+ib)}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}.
\end{aligned}$$

On aura, par suite, les valeurs suivantes des quatre coefficients restants

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-H^2(ib)[\Theta_1^2(u-ia)+\Theta_1^2(u+ia)] + H_1^2(ia)[\Theta^2(u+ib)+\Theta^2(u-ib)]}{2H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)} \\
\beta &= \frac{-H^2(ib)[\Theta_1^2(u-ia)-\Theta_1^2(u+ia)] + H_1^2(ia)[\Theta^2(u+ib)-\Theta^2(u-ib)]}{2iH_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)} \\
\alpha' &= -\frac{H^2(ib)[\Theta_1^2(u-ia)-\Theta_1^2(u+ia)] + H_1^2(ia)[\Theta^2(u+ib)-\Theta^2(u-ib)]}{2iH_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)} \\
\beta' &= \frac{H^2(ib)[\Theta_1^2(u-ia)+\Theta_1^2(u+ia)] + H_1^2(ia)[\Theta^2(u+ib)-\Theta^2(u-ib)]}{2H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}.
\end{aligned}$$

On voit par ces résultats que les valeurs des neuf coefficients, multipliés chacun par son dénominateur, se composent des quantités

$$\begin{aligned}
H(ib)\,\Theta_1(u-ia) &= iP, \qquad H_1(ia)\,\Theta(u+ib) = Q, \\
H(ib)\,\Theta_1(u+ia) &= iP', \qquad H_1(ia)\,\Theta(u-ib) = Q'
\end{aligned}$$

de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
2N\alpha &= PP+P'P'+QQ+Q'Q', \quad 2iN\alpha' = PP-P'P'-QQ+Q'Q', \\
2iN\beta &= PP-P'P'+QQ-Q'Q', \quad 2N\beta' = -PP-P'P'+QQ-Q'Q', \\
iN\gamma &= PQ'-P'Q, \quad N\gamma' = -(PQ'+P'Q), \\
iN\alpha'' &= -(PQ-P'Q'), \quad N\beta'' = PQ+P'Q', \quad N\gamma'' = -PP'+QQ',
\end{aligned}$$

où l'on aura

$$N = PP_1'+QQ' = H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u).$$

Les formules précédentes sont susceptibles d'une transformation remarquable à l'aide de quelques théorèmes d'addition relatifs aux fonctions Θ. Pour plus de commodité, je déduirai ces théorèmes d'une formule générale qui fait partie de celles que j'ai développées autrefois dans mes leçons orales données à l'université de Kœnigsberg. Ces formules élégantes et très-nombreuses établissent des relations entre les fonctions Θ de quatre arguments quelconques u, u', u'', u''' et les mêmes fonctions de quatre autres arguments v, v', v'', v''' qui dépendent des premiers au moyen des formules

$$\begin{aligned}
v &= \tfrac{1}{2}(u+u'+u''+u''') \\
v' &= \tfrac{1}{2}(u+u'-u''-u''') \\
v'' &= \tfrac{1}{2}(u-u'+u''-u''') \\
v''' &= \tfrac{1}{2}(u-u'-u''+u''') \\
u &= \tfrac{1}{2}(v+v'+v''+v''') \\
u' &= \tfrac{1}{2}(v+v'-v''-v''') \\
u'' &= \tfrac{1}{2}(v-v'+v''-v''') \\
u''' &= \tfrac{1}{2}(v-v'-v''+v''').
\end{aligned}$$

Je choisis parmi ces formules la suivante

$$2\,\Theta(u)\,\Theta(u')\,H(u'')\,H(u''') =$$
$$\Theta(v)\Theta(v')H(v'')H(v''') - H(v)H(v')\Theta(v'')\Theta(v''') + \Theta_1(v)\Theta_1(v')H_1(v'')H_1(v''') - H_1(v)H_1(v')\Theta_1(v'')\Theta_1(v''').$$

Supposons, en premier lieu,

$$u' = u, \qquad u'' = u''' = a,$$

on aura

$$v = u+a, \qquad v' = u-a, \qquad v'' = 0, \qquad v''' = 0,$$

et par suite

$$2\Theta^2(u)\,H^2(a) = H_1^2(0)\,\Theta_1(u+a)\Theta_1(u-a) - \Theta^2(0)\,H(u+a)\,H(u-a) - \Theta_1^2(0)\,H_1(u+a)\,H_1(u-a).$$

De cette formule déduisons deux autres, en mettant, la première fois, $u+K-ia$ au lieu de u, et ib au lieu de a, et la seconde fois, $u+ib$ au lieu de u, et $K-ia$ au lieu de a, on aura les deux formules

$$\begin{aligned}2\,\Theta_1^2(u-ia)\,H^2(ib) = {} & H_1^2(0)\,\Theta(u-ia+ib)\,\Theta(u-ia-ib)\\ & -\Theta^2(0)\,H_1(u-ia+ib)\,H_1(u-ia-ib)\\ & -\Theta_1^2(0)\,H(u-ia+ib)\,H(u-ia-ib)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\,\Theta^2(u+ib)\,H_1^2(ia) = {} & H_1^2(0)\,\Theta(u-ia+ib)\,\Theta(u+ia+ib)\\ & +\Theta^2(0)\,H_1(u-ia+ib)\,H_1(u+ia+ib)\\ & +\Theta_1^2(0)\,H(u-ia+ib)\,H(u+ia+ib).\end{aligned}$$

On aura deux autres formules en changeant i en $-i$, et au moyen de ces quatre formules les valeurs données ci-dessus de α, β, α', β' pourront être transformées dans les suivantes:

$$\begin{aligned}4N\alpha = {} & H_1^2(0)[\Theta(u+ia+ib)-\Theta(u-ia-ib)][\Theta(u-ia+ib)-\Theta(u+ia-ib)]\\ & +\Theta^2(0)[H_1(u+ia+ib)+H_1(u-ia-ib)][H_1(u-ia+ib)+H_1(u+ia-ib)]\\ & +\Theta_1^2(0)\,[H(u+ia+ib)+H(u-ia-ib)][H(u-ia+ib)+H(u+ia-ib)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4iN\beta = {} & H_1^2(0)[\Theta(u+ia+ib)-\Theta(u-ia-ib)][\Theta(u-ia+ib)+\Theta(u+ia-ib)]\\ & +\Theta^2(0)[H_1(u+ia+ib)+H_1(u-ia-ib)][H_1(u-ia+ib)-H_1(u+ia-ib)]\\ & +\Theta_1^2(0)[H(u+ia+ib)+H(u-ia-ib)][H(u-ia+ib)-H(u+ia-ib)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-4iN\alpha' = {} & H_1^2(0)[\Theta(u+ia+ib)+\Theta(u-ia-ib)][\Theta(u-ia+ib)-\Theta(u+ia-ib)]\\ & +\Theta^2(0)[H_1(u+ia+ib)-H_1(u-ia-ib)][H_1(u-ia+ib)+H_1(u+ia-ib)]\\ & +\Theta_1^2(0)[H(u+ia+ib)-H(u-ia-ib)][H(u-ia+ib)+H(u+ia-ib)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4N\beta' = {} & H_1^2(0)[\Theta(u+ia+ib)+\Theta(u-ia-ib)][\Theta(u-ia+ib)+\Theta(u+ia-ib)]\\ & +\Theta^2(0)[H_1(u+ia+ib)-H_1(u-ia-ib)][H_1(u-ia+ib)-H_1(u+ia-ib)]\\ & +\Theta_1^2(0)[H(u+ia+ib)-H(u-ia-ib)][H(u-ia+ib)-H(u+ia-ib)].\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}\delta &= -\frac{\Theta_1(0)[H(u+ia+ib)+H(u-ia-ib)]}{2H_1(ia+ib)\,\Theta(u)}\\ \varepsilon &= -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia-ib)+H_1(u+ia+ib)]}{2H_1(ia+ib)\,\Theta(u)}\\ \zeta &= \frac{H_1(0)[\Theta(u+ia+ib)-\Theta(u-ia-ib)]}{2iH_1(ia+ib)\,\Theta(u)}\\ \delta' &= \frac{\Theta_1(0)[H(u+ia+ib)-H(u-ia-ib)]}{2iH_1(ia+ib)\,\Theta(u)}\\ \varepsilon' &= -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia-ib)-H_1(u+ia+ib)]}{2iH_1(ia+ib)\,\Theta(u)}\\ \zeta' &= \frac{H_1(0)[\Theta(u+ia+ib)+\Theta(u-ia-ib)]}{2H_1(ia+ib)\,\Theta(u)}\end{aligned}$$

et supposons qu'en changeant b en $-b$, les quantités δ, ε, ζ, δ', ε', ζ' se changent respectivement en

$$d,\ e,\ f,\ d',\ e',\ f',$$

on aura les valeurs suivantes des quatre coefficients α, β, α', β'

$$\begin{aligned}\alpha &= \delta d+\varepsilon e+\zeta f\\ \beta &= \delta d'+\varepsilon e'+\zeta f'\\ \alpha' &= \delta' d+\varepsilon' e+\zeta' f\\ \beta' &= \delta' d'+\varepsilon' e'+\zeta' f'.\end{aligned}$$

Afin de parvenir à des expressions semblables des quatre coefficients α'', β'', γ, γ on se servira d'une formule que l'on déduit de la formule générale donnée ci-dessus, en mettant $u+K-ia$ et $u+ib$ au lieu de u et u', et en même temps $K-ia$ et ib au lieu de u'' et u''', ce qui donne les valeurs suivantes des quantités v, v', v'', v''':

$$\begin{aligned}v &= u+K-ia+ib\\ v' &= u\\ v'' &= K-ia-ib\\ v''' &= 0.\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans la formule générale

$$2\,\Theta(u)\,\Theta(u')\,H(u'')\,H(u''') =$$
$$\Theta(v)\Theta(v')H(v'')H(v''') - H(v)H(v')\Theta(v'')\Theta(v''') + \Theta_1(v)\Theta_1(v')H_1(v'')H_1(v''') - H_1(v)H_1(v')\Theta_1(v'')\Theta_1(v''')$$

on aura

$$\begin{aligned}
&2\,\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u+ib)\,H_1(ia)\,H(ib)\\
=\;&H_1(0)\,H(ia+ib)\,\Theta_1(u)\,\Theta(u-ia+ib)\\
&-\Theta(0)\,\Theta_1(ia+ib)\,H(u)\,H_1(u-ia+ib)\\
&+\Theta_1(0)\,\Theta(ia+ib)\,H_1(u)\,H(u-ia+ib).
\end{aligned}$$

De cette formule on déduit trois autres, en changeant a et b en $-a$ et $-b$. Au moyen de ces quatre formules et en posant

$$\begin{aligned}
\delta'' &= -\frac{\Theta(ia+ib)\,H_1(u)}{H_1(ia+ib)\,\Theta(u)}, & d'' &= -\frac{\Theta(ia-ib)\,H_1(u)}{H_1(ia-ib)\,\Theta(u)},\\
\varepsilon'' &= \frac{\Theta_1(ia+ib)\,H(u)}{H_1(ia+ib)\,\Theta(u)}, & e'' &= \frac{\Theta_1(ia-ib)\,H(u)}{H_1(ia-ib)\,\Theta(u)},\\
\zeta'' &= \frac{H(ia+ib)\,\Theta_1(u)}{i H_1(ia+ib)\,\Theta(u)}, & f'' &= \frac{H(ia-ib)\,\Theta_1(u)}{i H_1(ia-ib)\,\Theta(u)},
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{H_1(ia)\,H(ib)\,\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u+ib)}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}\\
=\;&\frac{i\zeta'' H_1(0)\,\Theta(u-ia+ib)-\varepsilon''\,\Theta(0)\,H_1(u-ia+ib)-\delta''\,\Theta_1(0)\,H(u-ia+ib)}{2\,H_1(ia-ib)\,\Theta(u)}\\
&\frac{H_1(ia)\,H(ib)\,\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u-ib)}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}\\
=\;&\frac{-if'' H_1(0)\,\Theta(u-ia-ib)+e''\,\Theta(0)\,H_1(u-ia-ib)+d''\,\Theta_1(0)\,H(u-ia-ib)}{2\,H_1(ia+ib)\,\Theta(u)}\\
&\frac{H_1(ia)\,H(ib)\,\Theta_1(u+ia)\,\Theta(u+ib)}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}\\
=\;&\frac{-if'' H_1(0)\,\Theta(u+ia+ib)-e''\,\Theta(0)\,H_1(u+ia+ib)-d''\,\Theta_1(0)\,H(u+ia+ib)}{2\,H_1(ia+ib)\,\Theta(u)}\\
&\frac{H_1(ia)\,H(ib)\,\Theta_1(u+ia)\,\Theta(u-ib)}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)}\\
=\;&\frac{i\zeta'' H_1(0)\,\Theta(u+ia-ib)+\varepsilon''\,\Theta(0)\,H_1(u+ia-ib)+\delta''\,\Theta_1(0)\,H(u+ia-ib)}{2\,H_1(ia-ib)\,\Theta(u)},
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\gamma &= \delta d''+\varepsilon e''+\zeta f''\\
\gamma' &= \delta' d''+\varepsilon' e''+\zeta' f''\\
\alpha'' &= \delta'' d+\varepsilon'' e+\zeta'' f\\
\beta'' &= \delta'' d'+\varepsilon'' e'+\zeta'' f'.
\end{aligned}$$

Enfin, mettons dans la formule générale au lieu de u, u', u'', u''' les quantités

$$u+K-ia,\quad u-K+ia,\quad ib,\quad -ib,$$

et, par suite, au lieu de v, v', v'', v''' les quantités

$$u,\quad u,\quad K-ia+ib,\quad K-ia-ib,$$

il résultera

$$\begin{aligned}
&-H^2(ib)\,\Theta_1(u+ia)\,\Theta_1(u-ia)\\
=\;&H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)-\Theta_1(ia+ib)\,\Theta_1(ia-ib)\,H^2(u)\\
&+H(ia+ib)\,H(ia-ib)\,\Theta_1^2(u)-\Theta(ia+ib)\,\Theta(ia-ib)\,H_1^2(u),
\end{aligned}$$

d'où suit, en mettant $K-ib$ au lieu de ia et $K-ia$ au lieu de ib,

$$\begin{aligned}
&-H_1^2(ia)\,\Theta(u+ib)\,\Theta(u-ib)\\
=\;&-H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)-\Theta_1(ia+ib)\,\Theta_1(ia-ib)\,H^2(u)\\
&+H(ia+ib)\,H(ia-ib)\,\Theta_1^2(u)-\Theta(ia+ib)\,\Theta(ia-ib)\,H_1^2(u).
\end{aligned}$$

Sommant les deux équations et divisant par $2\,H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)$, il viendra

$$\gamma'' = \delta'' d''+\varepsilon'' e''+\zeta'' f''.$$

Voici donc le tableau des valeurs des neuf coefficients α, β, etc., exprimées par les quantités δ, d, etc.,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \delta d+\varepsilon e+\zeta f\\
\beta &= \delta d'+\varepsilon e'+\zeta f'\\
\gamma &= \delta d''+\varepsilon e''+\zeta f''\\
\alpha' &= \delta' d+\varepsilon' e+\zeta' f\\
\beta' &= \delta' d'+\varepsilon' e'+\zeta' f'\\
\gamma' &= \delta' d''+\varepsilon' e''+\zeta' f''\\
\alpha'' &= \delta'' d+\varepsilon'' e+\zeta'' f\\
\beta'' &= \delta'' d'+\varepsilon'' e'+\zeta'' f'\\
\gamma'' &= \delta'' d''+\varepsilon'' e''+\zeta'' f'',
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
x &= \delta(dx'+d'y'+d''z')+\varepsilon(ex'+e'y'+e''z')+\zeta(fx'+f'y'+f''z')\\
y &= \delta'(dx'+d'y'+d''z')+\varepsilon'(ex'+e'y'+e''z')+\zeta'(fx'+f'y'+f''z')\\
z &= \delta''(dx'+d'y'+d''z')+\varepsilon''(ex'+e'y'+e''z')+\zeta''(fx'+f'y'+f''z').
\end{aligned}$$

Ces formules pourront être remplacees par les deux systèmes suivants des formules plus simples

$$\begin{aligned} x &= \delta x''+\varepsilon y''+\zeta z'' &\quad \text{ou}\quad x'' &= \delta x+\delta' y+\delta'' z \\ y &= \delta' x''+\varepsilon' y''+\zeta' z'' & y'' &= \varepsilon x+\varepsilon' y+\varepsilon'' z \\ z &= \delta'' x''+\varepsilon'' y''+\zeta'' z'' & z'' &= \zeta x+\zeta' y+\zeta'' z \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x'' &= dx'+d'y'+d''z' &\quad \text{ou}\quad x' &= d x''+e y''+f z'' \\ y'' &= ex'+e'y'+e''z' & y' &= d'x''+e'y''+f'z'' \\ z'' &= fx'+f'y'+f''z' & z' &= d''x''+e''y''+f''z''.\text{*)} \end{aligned}$$

Fin du manuscrit.

---

*) *Note de l'éditeur.* Cette décomposition des coordonnées nous permet de démontrer le théorème si beau et si remarquable de Jacobi, énoncé au commencement du mémoire B:

„La rotation d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe peut être ramenée au mouvement relatif de deux corps sur lesquels n'agit aucune force accélératrice.“

En effet, en remplaçant dans les valeurs de α, β, γ etc. données par Jacobi (p. 493 de ce vol.) ia par $ia+ib$, on obtient les neuf cosinus δ, ε, ζ etc.; de même, en remplaçant ia par $ia-ib$, on obtient d, e, f etc. Le premier et le quatrième groupe des équations précédentes déterminent donc les mouvements oscillatoires de deux corps quelconques sur lesquels n'agit aucune force accélératrice. Dans le premier de ces mouvements le plan invariable est le plan des xy; dans le second c'est celui des $x'y'$; et les axes des x'', y'', z'' sont parallèles aux axes principaux des deux corps.

Soient maintenant

l_1, l_2 le moment principal,

h_1, h_2 la force vive,

A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 les trois moments d'inertie rapportés aux axes principaux des deux mobiles; ces quantités satisferont à certaines conditions que nous obtiendrons tout à l'heure.

Observons d'abord que les formules qui donnent δ, ε, ζ, d, e, f, etc. permettent de déterminer, au temps t, la position des axes principaux par rapport à l'axe des z, respectivement des z', ainsi que par rapport aux axes des x, y et des x', y' situés dans les plans invariables. Remarquons d'ailleurs que dans les deux rotations la quantité u et le module k étant les mêmes, les deux corps auront, comme s'exprime Jacobi (p. 334 de ce vol.) le même mouvement oscillatoire moyen:

$$\frac{\pi u}{2K} = \frac{\pi\mu(t-t_0)}{2K}.$$

La constante t_0 doit être choisie de manière que dans les deux cas, au temps $t = t_0$, l'axe des y'', c'est à dire l'axe du moment d'inertie moyen B_1 et B_2, prenne, dans le plan invariable, une direction opposée à celle de la droite fixe de ce plan.

Après avoir ainsi déterminé la position des axes principaux des deux mobiles par rapport à leurs plans invariables, donnons aux deux systèmes de coordonnées une position telle que es axes principaux

correspondants coïncident. Alors les axes des x', y', z' auront, par rapport à ceux des x, y, z, la position qu dans le problème de Lagrange est exprimée par les équations

$$\begin{aligned} x &= \alpha x'+\beta y'+\gamma z' \\ y &= \alpha' x'+\beta' y'+\gamma' z' \\ z &= \alpha'' x'+\beta'' y'+\gamma'' z'. \end{aligned}$$

Au temps $t = t_0$ l'axe des x' prendra, dans le plan des xy, une direction opposée à celle de la droite que nous y supposons fixe. Pour trouver, en un temps quelconque, la position du corps de révolution grave, il restera à diriger l'axe des z dans le sens de la pesanteur et à faire décrire aux axes des x, y et à ceux des x', y', dans leurs plans respectifs, les angles $\mu\nu(t-t_0)$ et $\mu\nu'(t-t_0)$, comptés dans le sens de la vitesse initiale du corps.

Pour que la solution soit complète, il faut que les quantités constantes dont dépendent les mouvements des deux corps auxiliaires, soient exprimées par les données du problème proposé. Ce sont les dix quantités:

$$A_1,\quad B_1,\quad C_1,\quad A_2,\quad B_2,\quad C_2,\quad l_1,\quad l_2,\quad h_1,\quad h_2,$$

mais elles n'entrent dans les formules que sous la forme des quatre quotients

$$\frac{l_1}{A_1},\quad \frac{l_1}{B_1},\quad \frac{h_1}{l_1},\quad \frac{l_1}{C_1}$$

et des quatre analogues à indice 2.

Dans son second mémoire (p. 430 de ce vol.) Jacobi a fait voir que, ces quotients étant désignés, dans l'ordre indiqué, par

$$s_1,\quad s_1',\quad s_1'',\quad s_1''',$$

on peut déduire toutes les constantes nécessaires pour former les valeurs elliptiques des neuf cosinus à l'aide des six différences

$$s_1'-s_1,\quad s_1''-s_1,\quad s_1'''-s_1,\quad s_1'''-s_1'',\quad s_1'''-s_1',\quad s_1''-s_1',$$

dont trois résultent des autres.

Il s'agit donc, dans le cas proposé, d'exprimer ces différences de même que les analogues qui se rapportent au second corps auxiliaire, par les racines r', r'', r''' de l'équation cubique

$$F(x) = A(1-x^2)(2f-Cn^2-2Gx)-(h+Cnx)^2 = 0$$

et par la quantité

$$\mu = \sqrt{\frac{G}{2A}(r'-r''')}.$$

A cet effet, on a, d'après ce qui a été dit plus haut (second mémoire p. 430 de ce vol.)

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} s_1'-s_1 &= \pm\frac{\mu k^2 \sin\mathrm{am}(ia+ib)\cos\mathrm{am}(ia+ib)}{i\,\Delta\mathrm{am}(ia+ib)}, & s_1'''-s_1'' &= \pm\frac{i\mu\,\Delta\mathrm{am}(ia+ib)}{\sin\mathrm{am}(ia+ib)\cos\mathrm{am}(ia+ib)}, \\ s_1''-s_1 &= \pm\frac{\mu\sin\mathrm{am}(ia+ib)\,\Delta\mathrm{am}(ia+ib)}{i\cos\mathrm{am}(ia+ib)}, & s_1'''-s_1' &= \pm\frac{i\mu\cos\mathrm{am}(ia+ib)}{\sin\mathrm{am}(ia+ib)\,\Delta\mathrm{am}(ia+ib)}, \\ s_1'''-s_1 &= \pm\frac{i\mu\cos\mathrm{am}(ia+ib)\,\Delta\mathrm{am}(ia+ib)}{\sin\mathrm{am}(ia+ib)}, & s_1''-s_1' &= \pm\frac{\mu k'^2\sin\mathrm{am}(ia+ib)}{i\cos\mathrm{am}(ia+ib)\,\Delta\mathrm{am}(ia+ib)}, \\ s_2'-s_2 &= \pm\frac{\mu k^2 \sin\mathrm{am}(ia-ib)\cos\mathrm{am}(ia-ib)}{i\,\Delta\mathrm{am}(ia-ib)}, & s_2'''-s_2'' &= \pm\frac{i\mu\,\Delta\mathrm{am}(ia-ib)}{\sin\mathrm{am}(ia-ib)\cos\mathrm{am}(ia-ib)}, \\ s_2''-s_2 &= \pm\frac{\mu\sin\mathrm{am}(ia-ib)\,\Delta\mathrm{am}(ia-ib)}{i\cos\mathrm{am}(ia-ib)}, & s_2'''-s_2' &= \pm\frac{i\mu\cos\mathrm{am}(ia-ib)}{\sin\mathrm{am}(ia-ib)\,\Delta\mathrm{am}(ia-ib)}, \\ s_2'''-s_2 &= \pm\frac{i\mu\cos\mathrm{am}(ia-ib)\,\Delta\mathrm{am}(ia-ib)}{\sin\mathrm{am}(ia-ib)}, & s_2''-s_2' &= \pm\frac{\mu k'^2\sin\mathrm{am}(ia-ib)}{i\cos\mathrm{am}(ia-ib)\,\Delta\mathrm{am}(ia-ib)}. \end{aligned}\right.$$

Quant à l'emploi du signe ambigu $\pm$, voir les remarques faites dans le mémoire déjà cité.

Observons de plus que la propriété du module k et de la quantité μ, d'avoir la même valeur dans les deux mouvements, résulte évidemment du caractère identique des équations

$$k^2 = \frac{r''-r'''}{r'-r'''} = \frac{(s'_1-s_1)(s'''_1-s''_1)}{(s''_1-s_1)(s'''_1-s_1)} = \frac{(s'_2-s_2)(s'''_2-s''_2)}{(s''_2-s_2)(s'''_2-s'_2)}$$

$$\mu^2 = \frac{G}{2A}(r'-r''') = (s''_1-s_1)(s'''_1-s'_1) = (s''_2-s_2)(s'''_2-s'_2).$$

Reste encore à exprimer les six quantités $\sin \mathrm{am}(ia \pm ib)$, $\cos \mathrm{am}(ia \pm ib)$, $\Delta \mathrm{am}(ia \pm ib)$ par les racines r', r'', r'''. Comme on a

$$-\sin^2 \mathrm{am}(ia) = \frac{r'-1}{1-r''}, \quad -\sin^2 \mathrm{am}(ib) = \frac{r'-r'''}{1+r'''},$$

on trouvera aisément à l'aide du théorème d'addition des fonctions elliptiques

$$(2.)\quad \begin{cases} \sin \mathrm{am}(ia \pm ib) = i\dfrac{\sqrt{(r'-1)(1+r')(1-r'')(1+r'')} \pm (r'-r'')\sqrt{(1-r''')(1+r''')}}{1-r'r''+r'r'''-r''r'''}, \\ \cos \mathrm{am}(ia \pm ib) = \sqrt{r'-r''}\,\dfrac{\sqrt{(1+r')(1-r'')(1+r''')} \pm \sqrt{(r'-1)(1+r'')(1-r''')}}{1-r'r''+r'r'''-r''r'''}, \\ \Delta \mathrm{am}(ia \pm ib) = \sqrt{\dfrac{r'-r''}{r'-r'''}}\,\dfrac{\sqrt{(1-r'')(1+r'')(1-r''')(1+r''')} \pm (r'-r''')\sqrt{(r'-1)(1+r')}}{1-r'r''+r'r'''-r''r'''}. \end{cases}$$

Ayant substitué ces valeurs dans les équations (1), on aura exprimé les douze différences en fonctions des trois quantités r', r'', r''' et de la quantité μ. C'est ainsi qu'on peut déterminer les conditions auxquelles doivent satisfaire les deux corps auxiliaires d'ailleurs quelconques et les chocs qui les ont mis primitivement en mouvement, pour que le mouvement du corps de révolution grave puisse être ramené à leur rotation relative.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

A. *Second mémoire sur la rotation d'un corps non soumis à des forces accélératrices* 425–467

Les axes principaux et l'axe instantané de rotation étant projetés sur le plan invariable, il y a une même équation différentielle entre le temps et les vitesses angulaires de ces quatre projections.

1. Les quatre constantes du premier mémoire $\frac{l}{A}$, $\frac{l}{B}$, $\frac{h}{l}$, $\frac{l}{C}$, c'est à dire, les quotients que l'on obtient en divisant le moment principal l par les trois moments d'inertie A, B, C et la force vive h par le moment principal, étant remplacées par les quantités s, s', s'', s''', les carrés du module k, de son complément k' et du facteur constant n par lequel on doit multiplier le temps pour avoir l'argument elliptique u se composent des six différences $s'-s$, $s''-s$, $s'''-s$, $s''-s'$, $s'''-s'$, $s'''-s''$. Transformation de ces différences en fonctions elliptiques 427–433

2. L'intégrale elliptique de la première espèce qui exprime le temps est transformée en une autre de la forme

$$\int \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma-s)(s'-\sigma)(s''-\sigma)(s'''-\sigma)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 433-435$$

3. Nommant S une des vitesses angulaires des projections des trois axes d'inertie et de l'axe instantané de rotation sur le plan invariable, on a la même équation différentielle entre le temps et chacune de ces vitesses, savoir

$$dt = \frac{\pm dS}{2\sqrt{-\left(S-\frac{l}{A}\right)\left(S-\frac{l}{B}\right)\left(S-\frac{l}{C}\right)\left(S-\frac{h}{l}\right)}} \quad \ldots\ldots \quad 436-439$$

4. Expression de l'élément du temps si les moments d'inertie ne sont pas rapportés aux axes principaux mais à un système quelconque d'axes rectangulaires 439–440

5. Le temps d'une demi-oscillation du corps autour des axes x, y, z dont les deux premiers ont été supposés tourner uniformément autour du point fixe dans le plan invariable, multiplié dans le cas de $A > B > \frac{l^2}{h} > C$ par la racine carrée de la force vive, et dans le cas de $A < B < \frac{l^2}{h} < C$ par le moment principal, ne peut surpasser une certaine quantité ne dépendante que de la constitution du corps 440–441

6. Corrélation des vitesses angulaires des quatre projections traitées en 3 441–444

7. Remarques sur les données du problème. La seule connaissance de deux angles fournit toutes les données nécessaires pour construire les valeurs elliptiques des cosinus des neuf angles qui déterminent la rotation oscillatoire du corps. L'un de ces angles est une

Pages

fonction des trois moments d'inertie, l'autre est celui que l'axe des z forme avec l'axe des z' lorsque l'axe des y' se couche sur le plan invariable . . . . 444—451

Des deux rotations conjuguées . . . . 451—457

Expressions des neuf coefficients α, β, γ etc. par les trois angles ψ, ψ_1, ψ_2 que font avec une droite fixe dans le plan invariable les intersections de ce même plan avec les plans des $x'y'$, des $y'z'$, et des $z'x'$. En ajoutant à ces angles le quatrième ψ_3 que la droite fixe fait avec l'intersection du plan instantané de rotation avec le plan invariable, il y a des systèmes remarquables d'équations linéaires homogènes par rapport aux fonctions trigonométriques des différences de ces quatre angles . . . . 457—467

Supplément au mémoire précédent.

Expressions elliptiques des cosinus des angles qu'un système quelconque d'axes rectangulaires fixes dans le mobile fait avec les axes des x, y, z fixes dans l'espace . . . . 467—476

B. *Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave suspendu dans un point quelconque de son axe* . . . . 477—492

Introduction. Théorème remarquable sur la rotation d'un corps grave . . . . 477—481

Du diviseur attaché à une intégrale elliptique de la troisième espèce . . . . 481—492

C. *Sur la rotation d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe* . . 493—512

Remarque sur le facteur d'une intégrale elliptique de la troisième espèce . . . . . . 493—496

Expressions des angles ψ, φ, ϑ dont le mouvement du corps dépend en fonctions du temps t par les fonctions elliptiques. La rotation proposée se compose de trois mouvements périodiques dont deux peuvent être appelés uniformes progressifs, le troisième oscillatoire 496—504

Expressions des cosinus des neuf angles qui déterminent la position du corps en fonctions explicites du temps par les transcendantes H, Θ. Transformations remarquables et simples de ces formules . . . . 504—512

ANMERKUNGEN*).

DE FUNCTIONIBUS DUARUM VARIABILIUM QUADRUPLICITER PERIODICIS ETC.

1) In dieser Abhandlung ist der Buchstabe λ zur Bezeichnung eines der Moduln der betrachteten hyperelliptischen Integrale und zugleich als Functionszeichen verwandt worden. Diese Incongruenz ist aber so wenig störend, dass es nicht angemessen erschien, eine Änderung vorzunehmen.

2) S. 50, Z. 4 v. u. Statt $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ti}}$ steht im ursprünglichen Druck $\left(\frac{n-1}{1}\right)^{\text{ti}}$, wohl nur ein Druckfehler.

DEMONSTRATIO NOVA THEOREMATIS ABELIANI.

3) S. 71, Gl. (6.) Auf der rechten Seite der Gleichung musste der Factor y hinzugefügt werden.

ÜBER DIE ADDITIONSTHEOREME DER ABELSCHEN INTEGRALE ZWEITER UND DRITTER GATTUNG.

4) S. 79, 82. Die Schlussbemerkungen zu §. 1 und §. 2 sind unvollständig; von einer Änderung ist indessen Abstand genommen.

5) S. 86. Die Fussnote ist von Jacobi dem Abdruck der Abhandlung im Crelleschen Journale hinzugefügt worden.

EXTRAIT DE DEUX LETTRES DE CH. HERMITE A C. G. J. JACOBI ET D'UNE LETTRE DE JACOBI A HERMITE.

6) S. 99—101. Der hier vorkommende Multiplicator M (curs.) ist identisch mit dem im ersten Bande durch M (antiq.) bezeichneten.

7) S. 107, Z. 7 v. u. Es musste der Formel der Factor 2 hinzugefügt werden, um sie in Übereinstimmung mit den folgenden Formeln zu bringen.

8) S. 118, 119. Die Punkte P', Q', welche bez. den Punkten P, Q unendlich nahe liegen sollen, sind im Original auch durch P, Q bezeichnet.

NOTIZ ÜBER A. GOEPEL.

9) Von dieser im Herbst 1847 geschriebenen Notiz scheint der wichtigste, auf die Hauptarbeit Göpels „Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis“ sich beziehende Theil aus

*) Ebenso wie im ersten Bande sind die zahlreichen Druckfehler, sowie offenbare Schreib- und Rechenfehler, die sich im ursprünglichen Drucke finden, ohne Weiteres berichtigt worden.

einem ebenfalls im Jahre 1847 verfassten Aufsatze Jacobis entnommen zu sein, den ich erst ganz kürzlich im Original und in einer für den Druck angefertigten Abschrift von der Hand Borchardts unter den Papieren des letzteren aufgefunden habe. Dieser Aufsatz enthält so viel für die Geschichte der Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Functionen Interessantes, dass ich geglaubt habe, ihn an dieser Stelle unverkürzt mittheilen zu sollen, da es nicht mehr möglich war, denselben in den Text dieses Bandes einzufügen.

ZUR GESCHICHTE DER ELLIPTISCHEN UND ABELSCHEN TRANSCENDENTEN.

Die elliptische Function $x = \sin\operatorname{am} u$, welche Abel und ich in die Analysis eingeführt haben, wird durch die Gleichung

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

definirt. Diese Function $x = \sin\operatorname{am} u$ hat einen einzigen vollkommen bestimmten Werth, welcher durch eine lineare Gleichung

$$Ax + B = 0$$

gegeben wird, in der A und B Reihen bedeuten, die für jeden reellen oder imaginären Werth von u convergiren.

Wollte man in die Analysis eine Function $x = \Lambda(u)$ einführen, in welcher

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)(1-\lambda^2 x^2)(1-\mu^2 x^2)}},$$

so würde keine Analogie dieser Function mit der elliptischen Function $\sin\operatorname{am} u$ mehr stattfinden, indem eine solche Function $\Lambda(u)$ für jedes u nicht bloss mehrere Werthe erhält, sondern gänzlich unbestimmt wird, wofern nämlich zur Definition des Integrals bloss seine Grenzen angewandt werden, der Weg aber, welchen die Variable durch reelle oder imaginäre Werthe hindurch von der einen Grenze zur anderen einschlägt, willkürlich bleibt. Denn man kann einen Werth gänzlich unbestimmt nennen, wenn er, wie es in diesem Fall geschieht, jedem reellen oder imaginären gegebenen Werthe so nahe kommen kann, dass der Unterschied weniger als jede gegebene noch so kleine Grösse beträgt.

Goepel tadelt es, dass ich diese Functionen *absurd* genannt habe*), welche die Analysis der Zukunft durch Einführung transcendenter statt der algebraischen Formeln ähnlich wie die elliptischen zu behandeln wissen werde. Bis dahin hat Goepel den anderen Functionen, welche ich als diejenigen bezeichnet habe, zu welchen man von den elliptischen fortzuschreiten hat, seine Bemühungen gewidmet, und es sind dieselben von dem glänzendsten Erfolge gekrönt worden.

Die von mir in die Analysis eingeführten hyperelliptischen Functionen sind die Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

---

*) Vom Standpunkte der heutigen Functionenlehre aus muss anerkannt werden, dass Goepel Recht hatte, obgleich andererseits feststeht, dass Jacobi durch Einführung seiner Functionen mehrerer Veränderlichen der Theorie der Abelschen Transcendenten ihre wahre Grundlage geschaffen hat.

W.

in welcher A, B, C Functionen zweier Variabeln u und v sind, welche mit diesen beiden Wurzeln, die ich x_1 und x_2 nennen will, durch die beiden Gleichungen

$$u = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$v = \int_0^{x_1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} + \int_0^{x_2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}$$

verbunden sind, wo der Kürze halber

$$(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)(1-\lambda^2 x^2)(1-\mu^2 x^2) = X$$

gesetzt ist. Die Coefficienten A, B, C der quadratischen Gleichung sind vollkommen bestimmte, nicht mehrdeutige Functionen der Variabeln u und v, und ihre Verhältnisse haben in Bezug auf diese beiden Variabeln *vier* unabhängige Simultanperioden. Dieses neue Princip der Simultanperiodicität besteht darin, dass eine Function zweier oder mehrerer Variabeln ungeändert bleibt, wenn sich die Variabeln gleichzeitig und um Gleichvielfache gegebener Constanten verändern, und es liegt in demselben die Lösung der Paradoxen, welche die durch eine vierfache Periodicität entstehende Unbestimmtheit darbietet.

Die Analysten begrüssten mit Theilnahme die neue Ansicht über die in die Theorie der Abelschen Transcendenten einzuführenden Functionen. Die Kopenhagener Akademie der Wissenschaften wünschte dieselbe auf alle Integrale algebraischer Functionen ausgedehnt zu sehen, auf welche Abel sein Theorem ausgedehnt hatte. Es ist hieraus eine schätzenswerthe Arbeit von Broch*) und die preiswürdige Abhandlung von Minding**) hervorgegangen, denen später noch die Arbeit von Rosenhain***) folgte. Die nach einem Intervalle von 15 Jahren endlich in den *Mémoires des savants étrangers* erschienene Abhandlung, welche von Abel im Jahre 1826 der Pariser Akademie überreicht worden war, und durch ihre erschöpfende Allgemeinheit zu den bewundernswürdigsten Leistungen gehört, würde, wenn sie früher erschienen wäre, diesen Mathematikern den grössten Theil ihrer Arbeit erspart haben. Seitdem hat Hermite dem Abelschen Werke eine neue Form gegeben, wie sie fast allen Arbeiten dieses grossen Genies zu wünschen ist, wenn ihre tiefen Gedanken klarer hervortreten sollen. Aber am wünschenswerthesten musste es immer erscheinen und am meisten den Analysten daran gelegen sein, die neuen Functionen wenigstens zunächst für die erste und einfachste Klasse der Abelschen Integrale wirklich dargestellt zu sehen, und es wählte daher die Berliner Akademie der Wissenschaften die Darstellung dieser Functionen zum Gegenstand einer ausserordentlichen Preisfrage. Ungeachtet eines Termins von 3 Jahren blieb die Frage unbeantwortet. Wenn wir nicht aus der Einleitung der Goepelschen Abhandlung ersähen, dass er bereits in dieser Zeit die Grundidee seiner Arbeit gefasst hatte, so könnte in der That die Aufgabe zu frühzeitig gestellt scheinen, da es kaum anderthalb Decennien waren, dass die hier vorkommenden Integrale zum ersten Male von Abel betrachtet worden waren, und die Elemente ihrer Theorie noch bei weitem nicht die Durcharbeitung erfahren hatten, wie die der elliptischen Functionen zu der Zeit, als Abel und ich unsere Arbeiten über dieselben begannen. Auch konnte die Methode, durch welche wir, von dem Integral ausgehend, zu den dem trigonometrischen Sinus und Cosinus entsprechenden Functionen gelangt waren, keine Anleitung geben. Denn dieselbe beruhte wesentlich auf der Eigenschaft der rationalen Functionen *einer* Variablen, dass zur Darstellung derselben die Kenntniss der Werthe, für welche sie verschwinden und unendlich werden, hinreicht, was für rationale Functionen *zweier* Variabeln nicht mehr der Fall ist.

---

*) Crelles Journal Bd. 23. p. 145.

**) Ebendaselbst Bd. 23. p. 255.

***) Ebendaselbst Bd. 28. p. 249 und Bd. 29. p. 1.

Es wäre der Weg übrig geblieben, die Transformation der Abelschen Integrale, welche Herr Professor Richelot nach einer von mir angegebenen Substitution aufgestellt hat, unbestimmt zu wiederholen, und die analytische Natur dieser Transformation so zu ergründen, dass man das durch ihre unbestimmte Wiederholung erhaltene Resultat hätte darstellen können; ferner durch eine complementare Transformation die Vervielfachung durch eine Potenz von 2 zu gewinnen, und dann endlich die für eine unendliche Multiplication verschwindender Integrale stattfindende Grenze zu untersuchen. Aber bei Ermangelung der hiezu nöthigen Vorarbeiten konnte man ein günstiges Gelingen nur von einer glücklichen Divination hoffen, und hiezu bot die neue Transcendente Θ, auf welche ich die elliptischen Functionen schliesslich zurückgeführt hatte, einen willkommenen Anknüpfungspunkt.

Die elliptischen Functionen waren zunächst in Form eines Bruches gefunden worden. Erst durch die besondere Betrachtung des Zählers und Nenners dieses Bruches ist ihre Theorie in sich abgeschlossen und auf ihre wahre Grundlage zurückgeführt worden. Wie bei der trigonometrischen Tangente bilden diese dieselbe Function für verschiedene Argumente, nur dass hier noch eine einfache Exponentialgrösse als Factor hinzutritt. Auf dieselbe Transcendente war bereits die dritte Gattung der elliptischen Integrale zurückgeführt worden. Konnte man aus der wirklichen Darstellung der elliptischen Function den Zähler und Nenner durch den blossen Anblick entnehmen, so war man andrerseits dahin gelangt, diese Scheidung auch durch analytische Operationen zu erhalten, und so einen Cyclus von Operationen aufzustellen, nach welchen man zu der elliptischen Function zurückkehrt. Die elliptische Function quadrirt und zwischen zwei Grenzen integrirt, welche um einen halben Index der Periode verschieden sind, giebt den Logarithmus der elliptischen Function. Durch diesen Cyclus lassen sich fast alle über die elliptischen Functionen angestellten Betrachtungen hindurchführen und erhalten dann erst ihre Vollständigkeit.

Es wurde gezeigt, dass die Transcendente für jeden aliquoten Theil des Index einer Periode durch blosses Wurzelausziehen aus elliptischen Functionen erhalten werden kann; dass dasselbe von dem Quotienten zweier Transcendenten gilt, deren Argumente um einen aliquoten Theil des Index einer Periode verschieden sind, und dass sich aus diesen Wurzelgrössen die Theilungsformeln der elliptischen Integrale zusammensetzen.

Die neue Transcendente selbst wird durch eine Reihe von der höchsten Einfachheit dargestellt, welche immer und zwar mit solcher Schnelligkeit convergirt, dass sie für praktische Anwendung wie ein endlicher Ausdruck betrachtet werden kann. Das allgemeine Glied dieser Reihe hat die Form e^{ai^2+bi}, in welcher i eine ganze Zahl, a und b beliebige Grössen sind, nur dass die Grösse a oder, wenn sie imaginär ist, ihr reeller Theil negativ sein muss. Die Grösse a bestimmt den Modul des elliptischen Integrals, während dieses selbst der Grösse b proportional ist.

In meinem Werke über die elliptischen Functionen wird der Weg gezeigt, welcher von dem elliptischen Integral bis zu der neuen Transcendente zurückzulegen ist. Einmal auf dieser Höhe angelangt, gewinnt man eine Uebersicht über diese ganze Theorie, welche derselben eine Klarheit und, ich möchte sagen, Durchsichtigkeit giebt, die man vorher nicht ahnen konnte. Es giebt sehr viele Arten, wie man mit grosser Leichtigkeit und durch die elementarsten Processe von dieser neuen Transcendente aus zu allen Eigenschaften der elliptischen Functionen gelangt. Die erste, welche ich in dem 3ten Bande des Crelleschen Journals p. 305 angegeben habe, beruht auf der Multiplication zweier Transcendenten, welche verschiedene Amplituden, aber denselben Modul haben. Da das Product auf einfache Art wieder durch dieselben Transcendenten ausgedrückt wird, die sich aber auf einen transformirten Modul beziehen, so habe ich später in meinen Vorlesungen diesen Weg verlassen und bin von der Multiplication von *vier* Transcendenten mit beliebigen Argumenten und demselben Modul ausgegangen, durch welche man einen linearen Ausdruck von Producten aus vier Transcendenten derselben Natur mit *unverändertem*

Modul erhält. Eine einzige Formel, in welcher man nur specielle Werthe zu substituiren hat, giebt ohne weitere Rechnung das ganze System der Formeln für die Addition der drei Gattungen der elliptischen Integrale sogar auf drei Argumente ausgedehnt. Es ist hierbei nicht nöthig, zuerst aus der periodischen Natur der Transcendente die allgemeine Form anzugeben, und dann durch die Substitution particularer Werthe für jede der Hauptformeln die Werthe der in dieselben eingehenden zuerst unbestimmt angenommenen Constanten zu ermitteln, sondern die eine Formel giebt zugleich mit der Form auch diese Werthe. Da sich jedoch unter denjenigen Papieren, welche einen zweiten Theil der *Fundamenta Nova* zu bilden bestimmt waren, noch ein fertiger Aufsatz findet*), in welchem jene frühere Methode näher auseinandergesetzt wird, so wird vielleicht deshalb auch die Mittheilung dieser Arbeit nicht ohne Interesse sein, weil sie als Einleitung und Vorstudium zu der Goepelschen Abhandlung dienen kann, in welcher eine ähnliche Methode, aber bei einem viel complicirteren Gegenstande befolgt ist. Einen verschiedenen Weg scheint Cauchy in seinen in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie veröffentlichten Noten eingeschlagen zu haben, indem er von dem unendlichen Producte ausgeht, durch welches ich die neue Transcendente ebenfalls dargestellt habe. Endlich haben Liouville und Hermite in Arbeiten, von welchen nur kurze Andeutungen veröffentlicht sind, sich der blossen periodischen Eigenschaften der Transcendente Θ bedient, um alle Resultate über Addition, Multiplication, Transformation, Theilung abzuleiten, indem ihnen diese periodischen Eigenschaften der Transcendente *a priori* die Form der Resultate, particuläre Betrachtungen dann die darin noch unbestimmt gelassenen Werthe geben. Man wird es hienach gewiss gerechtfertigt halten, wenn ich durch den Titel meines Werkes behauptet habe, die neuen wahren Grundlagen der Theorie der elliptischen Functionen gefunden zu haben. Ausser der Leichtigkeit, mit welcher man auf denselben das ganze Gebäude aufführen kann, gewähren sie noch den Vortheil einer grösseren Strenge und Klarheit, als bis jetzt in derjenigen Behandlung, welche von den Integralen ausgeht, möglich gewesen ist. Denn die Theorie der imaginären Werthe der algebraischen Functionen und ihrer Integrale ist noch nicht ausgebildet genug, um die Betrachtung solcher Integrale für den ganzen Umfang aller reellen und imaginären Werthe der darin eingehenden constanten und veränderlichen Grössen mit gleicher Evidenz zum Grunde zu legen, welche die immer convergirenden Reihen gewähren. Dieser Mangel ist aber nicht der Methode immanent, deren ich mich in den *Fund. Nov.* bedient habe, sondern rührt nur von einer in den allgemeinen Elementen der Analysis noch bestehenden Lücke her. Der Verfasser eines Aufsatzes im 27. Bande**) des mathematischen Journals scheint mir daher, wenn er meiner ihm bekannt gewordenen früheren und neueren Methode, von den unendlichen Reihen auszugehen, seinen Beifall schenkt, doch jene erste Methode, die zu so fruchtbaren Entdeckungen geführt hat, zu streng zu beurtheilen.

Legendre hat sich mit Schnelligkeit und Kraft in dem höchsten Menschenalter der neuen Idee zu bemächtigen gewusst, welche die Theorie, die eine der Hauptbeschäftigungen seines Lebens ausgemacht hatte, umgestaltete. Als ich ihm aber meinen Gedanken mittheilte, wie man die neue Transcendente zum Ausgangspunkt aller Untersuchungen über die elliptischen Functionen machen könnte, hat er sich von demselben als zu heterogen mit den ihm gewohnten Betrachtungen abgewendet. Ich möchte nicht vergessen, schrieb er, dass die grösste Schönheit und Vollkommenheit meiner Theorie in der Anwendung rein algebraischer Ausdrücke und geschlossener endlicher Formeln bestände.

Die Betrachtung der Additionsformeln für die *dritte* Gattung der elliptischen Integrale hatte mich

*) Von diesem Aufsatze haben sich in Jacobis Nachlasse nur einzelne Blätter vorgefunden. W.

**) Im Manuscripte fehlt die Nummer des Bandes; es ist aber kaum zu bezweifeln, dass Jacobi hier den Aufsatz von Eisenstein Bd. 27, p. 185 im Sinne gehabt hat.

darauf geführt, dieselben auf ein anderes geschlossenes Integral zurückzuführen, welches ein Argument weniger enthält, und es fand sich, dass dieses Integral der Logarithmus der Transcendente sei, welche naturgemäss den Zähler und Nenner der elliptischen Functionen bildet. An dem geschlossenen Integral selber konnte gezeigt werden, dass die beiden Grössen, deren Quotient zu bilden ist, keinen gemeinschaftlichen Factor haben und für keinen endlichen Werth des Intervalls unendlich werden können. Es ist zu erwarten, dass, nachdem man sich für die erste Klasse der Abelschen Integrale mit der dritten Gattung dieser Integrale mit Erfolg beschäftigt haben wird, auch deren Reduction auf ein neues geschlossenes Integral gelingen wird, in welchem sich, wie in der Theorie der elliptischen Intgrale, die Argumente mit dem Parmeter vereinigen. Es ist ferner zu erwarten, dass dies Integral dann diejenige Transcendente sein wird, welche die drei Coefficienten der quadratischen Gleichung giebt, deren Wurzeln die Intervalle der beiden durch Addition zu vereinigenden Abelschen Integrale sind. Die so erhaltenen Resultate werden sich durch folgerechte Schlüsse aus dem Abelschen Additionstheorem ergeben. Will man aber die wirkliche Darstellung und, so zu sagen, die sichtbare Gestalt der so gefundenen Transcendente haben, so ist hiefür noch keine aus der Theorie der elliptischen Functionen durch Analogie entnommene Methode vorhanden, und es bleibt nur der Versuch übrig, die Reihe

$$\sum e^{ai^2+bi}$$

auf eine Weise zu verallgemeinern, bei welcher die Methoden, durch die man von dieser Reihe aus zu den Resultaten der Theorie der elliptischen Functionen gelangen kann, noch anwendbar bleiben. Herr Goepel unternimmt in der Abhandlung „*Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio*“ diese Verallgemeinerung, indem er die Doppelreihe

$$\sum\sum e^{ai^2+bik+ck^2+di+ek}$$

betrachtet, in welcher beiden Indices i und k die Werthe aller ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu geben sind. Wie dort der Coefficient von i^2 den Modul, der Coefficient von i die Amplitude gab, so haben wir hier drei Coefficienten der Terme der zweiten Dimension, zwei Coefficienten der Terme der ersten Dimension der Indices i und k, und in der That hat die erste Gattung der Abelschen Integrale drei Moduln, und in der von mir aufgestellten Theorie wurden zwei Argumente als nothwendig verlangt. Die vierfache Simultanperiodicität ergab sich auf den ersten Blick, die Multiplication zweier Reihen dieser Art ergab ebenfalls ganz auf ähnliche Art, wie bei den Functionen Θ, ein lineares Aggregat von Producten zweier ähnlichen Reihen, und so mochte allerdings Goepel sogleich im ersten Augenblick bereits vor 7 bis 8 Jahren die Ueberzeugung erlangt haben, dass die analoge Transcendente und die wahre Grundlage der Theorie der hyperelliptischen Functionen gefunden war, wenn er vielleicht auch erst später die Schwierigkeiten, welche sich noch bis zum wirklichen Herabsteigen zu den von mir aufgestellten Differentialgleichungen zeigten, überwunden hat, wie es in der genannten Abhandlung geschehen ist. Goepel combinirt die beiden Methoden der Multiplication zweier Transcendenten und derjenigen, welche bloss aus ihrer periodischen Natur die Form der Resultate ableitet. Er wäre etwas kürzer zum Ziele gelangt, wenn er ähnlich, wie es am angeführten Orte des 3^{ten} Bandes des mathematischen Journals für die elliptischen Functionen geschehen ist, zwei Reihen mit ganz beliebigen d und e aber denselben a, b, c multiplicirt hätte. Aber es kam zunächst darauf an, auf irgend einem Wege die Gewissheit der Richtigkeit der gewagten Divination zu erlangen. Jedenfalls aber war man sicher, zu merkwürdigen Resultaten zu gelangen, und eine Transcendente zu untersuchen, welche die merkwürdigsten Eigenschaften besass.

Die Verallgemeinerung der Function Θ ist eine zu natürliche, als dass es zu verwundern ist, dass dieselbe auch von einer andern Seite her gemacht worden ist. In der That sind mir die von Goepel gefundenen Resultate und in grösserer Vollständigkeit und Allgemeinheit bereits seit fast *drei* Jahren

durch die Arbeiten eines meiner Schüler*) bekannt geworden, welche seit dem October v. J. einer berühmten Akademie zur Beurtheilung vorliegen, und deren Veröffentlichung nur durch das Gesetz der Akademie einen Aufenthalt erfährt, nach welchem die Gelehrten maskirt concurriren müssen. Es wird hierdurch die frühere Arbeit später zu erscheinen genöthigt, was ein Uebelstand ist, wenngleich die Prioritätsrechte durch die akademische Autorität gerettet werden. In diesen beiden gänzlich von einander unabhängigen Untersuchungen wird derselbe Gegenstand auf zwei verschiedene Arten behandelt, indem mein verehrter Schüler und Freund sich derselben Methode der Multiplication von vier Transcendenten mit beliebigen Argumenten bedient hat, auf welche ich in meinen Vorlesungen die Theorie der elliptischen Functionen gegründet habe. Diese Verschiedenartigkeit der Behandlung muss den Mathematikern um desto willkommener sein, weil sie geeignet ist, Licht auf einen so neuen und schwierigen Gegenstand zu werfen.

Herr Goepel bemerkt, dass seine Betrachtungen sich auch auf eine grössere Zahl Variabeln ausdehnen lassen. Aber es tritt hier, wie auch mein geehrter Freund gesehen hat, ein schwieriges Paradoxon ein.

Wenn in dem Abelschen Integral die Function unter dem Quadratwurzelzeichen auf den $(2m+3)^{\text{ten}}$ oder $(2m+4)^{\text{ten}}$ Grad steigt, so sind nach der von mir aufgestellten Theorie Transcendenten mit $2m+1$ Moduln und $m+1$ Variabeln zu betrachten. Nach der Analogie der elliptischen und der auf sie zunächst folgenden hyperelliptischen Functionen hängt die Theorie dieser Integrale mit Reihen zusammen, in welchen die Exponenten Functionen von $m+1$ Indices vom zweiten Grade sind; die Coefficienten der Terme der zweiten Ordnung müssten wieder den Moduln und die der ersten den Variabeln entsprechen. Aber wenn die Zahl der letzteren Coefficienten $m+1$ wie die der Variabeln ist, so ist die Zahl der ersteren $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$, welche nur für $m=0$ und $m=1$ oder für die elliptischen und die erste Klasse der hyperelliptischen Functionen mit der Zahl der Moduln $2m+1$ übereinstimmt, in allen übrigen Fällen aber sie übertrifft.

Die vorstehende Betrachtung, nach welcher im Allgemeinen die Reihe $\frac{1}{2}m(m-1)$ Constanten mehr enthält als es Moduln giebt, zeigt, dass von der Ausdehnung auf Werthe von m, welche grösser als 1 sind, neue merkwürdige Aufschlüsse in dieser Theorie zu erwarten sind.

ÜBER DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, WELCHEN DIE REIHEN $1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9$ etc., $2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} +$ etc. GENÜGE LEISTEN.

10) S. 181, Z. 13, 14 muss es statt

weniger heissen *plus*,

und es ist hiernach auch in den folgenden Zeilen der Ausdruck etwas zu modificiren. In der That ist in Gleichung (8.) in jedem Term die Dimension auf der Linken 6, auf der Rechten 14, und die Summe der Ordnungen der Differentialquotienten auf der Linken 6, auf der Rechten 4, und man hat

$$6+\tfrac{6}{4} = \quad 4+\tfrac{14}{4},$$
$$6-4 = -\tfrac{1}{4}(6-14).$$

11) S. 182, Z. 15. Der Factor 4 von D^3D'' muss fort. Derselbe Fehler wiederholt sich in den ersten Gliedern der Formeln (9.), (16.) und in dem dritten von (13.).

*) Es ist hiermit, wie sich von selbst versteht, die Abhandlung von Rosenhain: „*Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes*“ gemeint, welche die Pariser Akademie gekrönt hat. Aus dieser Stelle geht hervor, dass die vorliegende Jacobische Notiz im Jahre 1847 geschrieben ist.

ÜBER EINE PARTICULÄRE LÖSUNG DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

12) S. 205, Z. 9 v. u. Dem zweiten und dritten Ausdruck in dieser Zeile musste der Factor i beigefügt werden, ebenso dem zweiten und dritten Gliede auf der Rechten der Gl. (2.), während an letzterer Stelle der Factor i vor dem ersten Gliede zu tilgen war. Dem entsprechend mussten auch die weitern Formeln dieser Seite und ebenso die Ausdrücke S. 208, Z. 11 v. u. und S. 212, Z. 3 modificirt werden.

13) S. 209, Gl. (1.) musste τ^2 an die Stelle von τ gesetzt werden, ebenso an mehreren Stellen der folgende Seite.

14) S. 213, Z. 8. Hier ist das Zeichen der Quadratwurzel geändert worden, damit die Formel mit der frühern (8.) auf S. 203 in Uebereinstimmung sei. Auch im Folgenden mussten aus demselben Grunde noch einige Zeichen geändert werden.

ÜBER UNENDLICHE REIHEN, DEREN EXPONENTEN ZUGLEICH IN ZWEI VERSCHIEDENEN QUADRATISCHEN FORMEN ENTHALTEN SIND.

15) S. 228. In der Gl. (10.) musste
$$1-q^{2i+2} \quad \text{für} \quad 1-q^{2i}$$
gesetzt werden.

16) S. 230, Z. 16 ist im Exponenten $\frac{1}{2}(2a+b)$ für $\frac{1}{2}(a+b)$ gesetzt worden;

17) S. 230, Formel (5.)
$$q^{60}+\cdots \quad \text{für} \quad q^{60}-\cdots;$$

18) S. 240, Formel (2.)
$$\tfrac{1}{2}(3ii+3kk+i+k) \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2}(3ii+kk+i+k);$$

19) S. 243, Formel (15.)
$$2ni \quad \text{für} \quad 2nii.$$

20) S. 247, Z. 16. An dieser Stelle hat sich jedenfalls ein Irrthum eingeschlichen. Dadurch, dass q in $-q$ verwandelt wird, kann die Anzahl der Factoren einer Normalform nicht geändert werden. Setzt man in der hier betrachteten Normalform
$$\prod[(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+3})(1+q^{6i+5})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{6i+6})^2]$$
$-q$ für q, so erhält man
$$\prod[(1-q^{6i+1})(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{6i+6})^2],$$
während Jacobi
$$\prod[(1-q^{2i+1})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{6i+6})^2]$$
angiebt, welches Product dem vorstehenden gleich sein würde, wenn in diesem
$$1-q^{6i+3} \quad \text{statt} \quad 1+q^{6i+3}$$
stände.

21) S. 271, Z. 2 v. u. ist
$$3i(3i+1) \quad \text{für} \quad 3i(3i+3)$$
gesetzt worden;

22) S. 277, Z. 7 v. u.
$$36ii \quad \text{für} \quad 12ii;$$

23) S. 278, Z. 5
$$q^{ii+3kk+2k} \quad \text{für} \quad q^{3ii+3kk+2k};$$

24) S. 285, Formel (5.) in dem letzten Exponenten
$$8(3k+1)^2 \quad \text{für} \quad 2(6k+1)^2;$$

25) S. 286, Z. 5
$$2q^{16} \quad \text{für} \quad 2q^8,$$
und Z. 6
$$(-1)^{i+k} \quad \text{für} \quad (-1)^{i-k};$$

26) S. 288, Z. 11 v. u.
$$2q^8 \quad \text{für} \quad q^8.$$

SUR LA ROTATION D'UN CORPS.

27) Der Zusatz zu dem Titel der Abhandlung „Extrait d'une lettre adressée à l'académie des sciences de Paris" bezieht sich nur auf den einleitenden Theil (S. 291—297), der eine Zusammenstellung der Hauptresultate der Arbeit enthält und zuerst in den Compt. rend. der Pariser Akademie T. 29, p. 97—103 mitgetheilt worden ist.

28) S. 292, Z. 15. Das eingeklammerte Wort

simplement

fehlt in dem Abdrucke der Abhandlung im Crelleschen Journal, findet sich aber in den Compt. rend. und ist der Deutlichkeit wegen wieder aufgenommen worden.

29) S. 294, Z. 2. Die beiden ersten Formeln dieser Zeile haben im Crelleschen Journal andere Vorzeichen wie hier; vgl. die Anm. zu S. 321.

30) S. 297, Z. 5. Hier war ursprünglich hinzugefügt:

„vu qu'en faisant usage d'autres méthodes, on a quelque peine à déterminer les facteurs constants qui entrent dans ces formules."

31) S. 321, Z. 4. Hier giebt Jacobi der rechten Seite der Gleichung das Vorzeichen $\pm$. Dies steht aber im Widerspruch mit frühern Feststellungen und hat im ursprünglichen Text zur Folge gehabt, dass sich in die Ausdrücke von v, v' in Verbindung mit dem Umstande, dass das Zeichen von μ falsch ist, Zeichenfehler eingeschlichen haben, die hier verbessert worden sind. Jacobi versucht im folgenden Absatze die von ihm gegebenen Vorzeichen ($+$ bei v, $\mp$ bei v') a priori zu rechtfertigen; dabei ist aber der Umstand übersehen worden, dass durch Änderung der positiven Richtungen der z'-Axe und y-Axe in die entgegengesetzten auch die Richtung der Rotationsaxe geändert wird, so dass nicht r und v', sondern $p, q, v, v'' = \frac{h}{l}$ ihre Zeichen ändern.

Es möge übrigens bemerkt werden, dass sich in dem Ausdrucke von v, sowie in denen von γ'', γ, α', β' (S. 315—318) die doppelten Vorzeichen hätten vermeiden lassen, wenn die Grösse a folgendermassen wäre definirt worden:
$$a=+\int_\beta^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\beta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}, \quad \text{wenn } Bh>l^2,$$
$$a=-\int_\beta^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\beta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}, \quad \text{wenn } Bh<l^2.$$
Dann würden die auf S. 293, 294 für den ersten Fall gegebenen Ausdrücke der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma'', v, v'$ auch für den zweiten unverändert Geltung gehabt haben.

32) S. 331, Z. 6. In Folge des in der vorhergehenden Anmerkung besprochenen Irrthums findet Jacobi im ersten Falle $\psi_3' = \pi$, und im zweiten Falle $\psi_3' = 0$; er führt daher eine Grösse π_3 ein, die im ersten Falle den Werth π, im andern den Werth Null haben soll. Deshalb steht im ursprünglichen Text überall $\psi_3 - \pi_3$, oder $\psi_3' - \pi_3$, wo sich hier bloss ψ_3 oder ψ_3' findet; wodurch dann noch einige weitere Aenderungen nöthig geworden sind.

33) S. 333, Z. 11, 12. Im Original haben die rechten Seiten dieser Gleichungen das Minuszeichen.

34) S. 335, Z. 11. Hier ist

$$135^\circ \quad \text{für} \quad 225^\circ$$

gesetzt worden; vgl. Anm. (32).

35) S. 351. Im Original steht irrthümlich

positive ou négative.

AUSZUG EINES SCHREIBENS VON C. G. J. JACOBI AN E. HEINE.

36) S. 356 u. f. musste mehrmals

$$iv_2 \quad \text{für} \quad v_2$$

gesetzt werden.

37) S. 359, Z. 12 ist

$$-\beta'\beta'' \quad \text{für} \quad \beta'\beta'',$$

Z. 14 ferner

$$-\beta \quad \text{für} \quad \beta,$$

und Z. 18

$$\beta^{-n} \quad \text{für} \quad \beta$$

gesetzt.

38) S. 360, Z. 2 ist

$$e^{i\omega'} \quad \text{für} \quad e^{i\omega''}$$

gesetzt und

Z. 2 u. 5 v. u. der Factor i vor $\cos\eta$ hinzugefügt worden.

ÜBER DIE SUBSTITUTION

$$(ax^2 + 2bx + c)y^2 + 2(a'x^2 + 2b'x + c')y + a''x^2 + b''y^2 + c'' = 0.$$

39) S. 370, Z. 4 u. 5 v. u. musste den Ausdrücken auf der Rechten der Gleichung das Minuszeichen vorgesetzt werden, wodurch auch in der letzten Zeile, desgl. S. 371, Z. 5, S. 373, Z. 8 v. u. Zeichenänderungen nothwendig geworden sind.

46) S. 376, Anm. Z. 7 u. 8 v. u. ist

$$x_1^2,\ x_2^2 \quad \text{für} \quad x_1,\ x_2$$

gesetzt worden.

41) S. 377, Z. 2 mussten die Vorzeichen der Ausdrücke von m, n geändert, und Z. 17 die Fälle

$$\varkappa\lambda < \mu, \quad \varkappa\lambda > \mu$$

vertauscht werden.

ÜBER DIE ABBILDUNG EINES UNGLEICHAXIGEN ELLIPSOIDS AUF EINER EBENE, BEI WELCHER DIE KLEINSTEN THEILE ÄHNLICH BLEIBEN.

42) S. 402, Z. 6 ist vor U der Factor 2 getilgt, und
Z. 8 v. u. Meridiane statt Meridiankreise gesetzt; ferner musste
Z. 7 v. u. für r gesetzt werden $\log r$.

43) S. 415 ist Zeile 2 eingeschaltet worden; ferner musste
Z. 7 zweimal $\pm i$ an Stelle von $-i$ gesetzt werden.

SOLUTION NOUVELLE D'UN PROBLÈME FONDAMENTAL DE GÉODÉSIE.

44) S. 423, Z. 3—5. Die an dieser Stelle gegebenen Formeln sind unrichtig; sie müssen heissen:

$$B'' - B_0'' = -\tfrac{1}{2}e^2 s \cos^2 B' \cos T'$$

$$T'' - T_0'' = \tfrac{1}{2}e^2 s \frac{\sin^2 B'}{\cos B'} \sin T'$$

$$\lambda - \lambda_0 = -\tfrac{1}{2}e^2 s \frac{\sin^2 B'}{\cos B'} \sin T'.$$

(Vgl. die Ableitung dieser Formeln von E. Luther in Borchardts *Journal* Bd. 35, S. 361.)

FRAGMENTS SUR LA ROTATION D'UN CORPS.

45) Die hier zum erstenmale aus Jacobis Nachlasse mitgetheilten umfangreichen Bruchstücke über die Rotationsbewegung eines festen Körpers stammen aus den zwei letzten Lebensjahren des grossen Mathematikers und würden schon dieses Umstandes wegen ein besonderes Interesse beanspruchen, wenn auch ihr Inhalt weniger wichtig wäre. Sie sind hier nach dem allerdings an vielen Stellen nicht leicht zu entziffernden Jacobischen Manuscript ohne irgend welche wesentliche Veränderung abgedruckt worden, obwohl es leicht gewesen wäre, nicht nur die Abhandlung (A), welche sich auf den Fall bezieht, wo auf den Körper keine beschleunigenden Kräfte wirken, zu Ende zu führen, sondern auch durch Verschmelzung der beiden Abhandlungen (B, C) in eine, mit Hinzufügung einiger Entwickelungen, eine vollständige und elegante Theorie der Rotationsbewegung in dem sogenannten Lagrangeschen Fall herzustellen *).

SCHLUSSBEMERKUNG.

Bei der Herausgabe dieses zweiten Bandes von Jacobis Werken haben mich die Herren Bruns, Frobenius, Henoch, Lottner, Netto, K. Schering, Stickelberger, Wangerin in bereitwilligster und förderlichster Weise unterstützt, wofür ich denselben meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen nicht verfehle. Hr. Bruns hat die Abhandlung Nr. 25 vor dem Abdrucke revidirt; Hr. Frobenius Nr. 12, Hr. Henoch Nr. 22, 23; Hr. Netto Nr. 5, 15, 19; Hr. Stickelberger Nr. 1, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 17, 20; Hr. Wangerin Nr. 6, 18, 21, 24. Hr. Lottner hat sich durch die mühsame Herausgabe der *Fragments sur la rotation d'un corps* ein ganz besonders anzuerkennendes Verdienst erworben. Jeder der genannten Herren hat auch eine Correctur der von ihm revidirten Abhandlungen gelesen. Die Herren K. Schering und Wangerin sind für den ganzen Band als Correctoren thätig gewesen.

Berlin, Ende Juli 1882. Weierstrass.

*) Der Herausgeber dieser Fragmente, Herr Lottner, hat bereits vor 28 Jahren (im 50sten Bande des Crelleschen Journals S. 111 ff.) den Lagrangeschen Fall des Rotationsproblems behandelt, ohne Kenntniss davon zu haben, dass Jacobi sich mit demselben beschäftigt und darauf bezügliche Aufzeichnungen hinterlassen hatte. Die von Herrn Lottner entwickelten Ausdrücke der neun Grössen α, β, γ u.s.w. als Functionen der Zeit stimmen vollständig mit den von Jacobi in der Abhandlung (C) p. 503 u. 505 gegebenen überein. Jacobi hat aber am Schlusse der Abhandlung Umformungen dieser Ausdrücke angegeben, vermittelst welcher, wie Herr Lottner in einer hinzugefügten Note gezeigt hat, sich das in der Abhandlung (B) angekündigte, merkwürdige und schöne Theorem ableiten lässt, nach welchem die Rotationsbewegung eines Körpers in dem Lagrangeschen Falle aus zwei andern Rotationsbewegungen, wie sie stattfinden, wenn keine beschleunigende Kraft auf den Körper wirkt, zusammengesetzt werden kann — ein Theorem, das bis jetzt ganz unbekannt geblieben ist, obwohl Jacobi es in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom J. 1850, S. 77, allerdings ohne irgend eine Andeutung über die Herleitung desselben, mitgetheilt hat.

DRUCKFEHLER.

S. 32, Z. 7 v. u. ist zu lesen

$$\varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2 \quad \text{statt} \quad \varkappa^2 < \lambda^2 < \mu^2;$$

S. 40, letzte Zeile

$$+\infty \quad \text{statt} \quad 0;$$

S. 46, Z. 3

$$Ux^2 \quad \text{statt} \quad Ux;$$

S. 78, Gl. (6.)

$$\Lambda_i \quad \text{statt} \quad \Lambda;$$

Gl. (7.) $\sqrt{f(x) + a^2 R}$ statt $\sqrt{f(x) + aR}$;

Z. 8 $\sqrt{1+y^2}$ statt $\sqrt{1+y}$;

S. 79, Z. 4

den statt dem;

S. 89, in der Fussnote

Vol. I, p. 243 statt Vol. II, p. 23;

S. 105, Z. 2

$$(-1)^n \quad \text{statt} \quad (-1)_n.$$

S. 106, Z. 6 fehlt vor der Summe der Factor $\frac{1}{i}$.

S. 109, Z. 3 ist zu lesen

$$p_3 \quad \text{statt} \quad p_2;$$

S. 112, Z. 2

$$E(\alpha) \quad \text{statt} \quad E(a).$$

S. 112—114 ist überall, wo $\varkappa^2$ explicite vorkommt, dafür

$$-\varkappa^2$$

zu substituiren (im Ganzen achtmal).

S. 137 ist in der letzten der Formeln (1) zu lesen

$$dx_2 \quad \text{statt} \quad dx^2;$$

S. 142, Z. 3 v. u.

$$\sqrt{X_2} \quad \text{statt} \quad \sqrt{X};$$

S. 168, Z. 8

$$\partial v \quad \text{statt} \quad dv;$$

S. 175, Z. 11

$$-\frac{d\varphi}{\Delta} \quad \text{statt} \quad \frac{d\varphi}{\Delta};$$

S. 189, Z. 2 v. u.

$$b' \quad \text{statt} \quad b;$$

S. 197, Formel (1.)

$$e_1 \frac{\partial V}{\partial u_2} \quad \text{statt} \quad e_1 \frac{\partial V}{\partial u}.$$

S. 205, Z. 7 v. u.

$$\frac{i}{c} \frac{\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}} \quad \text{statt} \quad \frac{i}{c} \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}};$$

S. 291 muss in der Reihe für $H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ das dritte Glied das Vorzeichen

$$+ \quad \text{statt} \quad -$$

haben.

S. 346, Z. 8 v. u. ist zu lesen

$$1 - q^{2+b} \cos 2x \quad \text{statt} \quad 1 + q^{2+b} \cos 2x;$$

Z. 2 v. u.

$$\frac{q^{2+b}}{1 - q^{2+b}} \quad \text{statt} \quad \frac{q^{2+b}}{1 - q^{2-b}};$$

S. 375, Z. 6. 5 v. u. müssen die Ausdrücke auf der Linken der Gleichungen heissen

$$\frac{1 + \mu\xi^2}{\sqrt{\Delta\xi}}\, d\xi, \qquad \frac{1 - \mu\xi^2}{\sqrt{\Delta\xi}}\, d\xi.$$

GÖTTINGEN,
DRUCK DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI.
W. FR. KAESTNER.