ÜBER EINE PARTICULÄRE LÖSUNG DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

1.

Es seien x, y, z rechtwinklige Coordinaten und

$$\varphi(x, y, z) = \rho, \qquad \varphi_1(x, y, z) = \rho_1, \qquad \varphi_2(x, y, z) = \rho_2$$

die Gleichungen dreier orthogonalen Flächensysteme, in welchen man ρ, ρ_1, ρ_2 als die veränderlichen Parameter betrachtet. Für gegebene Werthe der Coordinaten x, y, z erhalten durch diese Gleichungen die drei Parameter ρ, ρ_1, ρ_2 bestimmte Werthe, und es ist daher für einen gegebenen Punkt des Raumes die individuelle Fläche jedes Systems bestimmt, welche durch ihn hindurchgeht. Setzt man

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 = h^2,$$
$$\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial z}\right)^2 = h_1^2,$$
$$\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial z}\right)^2 = h_2^2,$$

und nennt

$$\alpha, \beta, \gamma; \qquad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \qquad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$$

die Cosinus der Winkel, welche die an den drei Flächen in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt errichteten Normalen mit den drei Coordinatenaxen bilden, so hat man:

$$(1.)\quad \begin{cases} h\alpha = \frac{\partial\rho}{\partial x}, & h\beta = \frac{\partial\rho}{\partial y}, & h\gamma = \frac{\partial\rho}{\partial z}, \\ h_1\alpha_1 = \frac{\partial\rho_1}{\partial x}, & h_1\beta_1 = \frac{\partial\rho_1}{\partial y}, & h_1\gamma_1 = \frac{\partial\rho_1}{\partial z}, \\ h_2\alpha_2 = \frac{\partial\rho_2}{\partial x}, & h_2\beta_2 = \frac{\partial\rho_2}{\partial y}, & h_2\gamma_2 = \frac{\partial\rho_2}{\partial z}. \end{cases}$$

Da die drei Normalen selber auf einander senkrecht stehen, so haben die neun Gröſsen α, β, etc. die bekannten Eigenschaften der Coëfficienten der Transformationsformeln zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme.

Aus den vorstehenden Formeln folgt für eine beliebige Function V:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \alpha.h\frac{\partial V}{\partial\rho}+\alpha_1.h_1\frac{\partial V}{\partial\rho_1}+\alpha_2.h_2\frac{\partial V}{\partial\rho_2}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \beta.h\frac{\partial V}{\partial\rho}+\beta_1.h_1\frac{\partial V}{\partial\rho_1}+\beta_2.h_2\frac{\partial V}{\partial\rho_2}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \gamma.h\frac{\partial V}{\partial\rho}+\gamma_1.h_1\frac{\partial V}{\partial\rho_1}+\gamma_2.h_2\frac{\partial V}{\partial\rho_2}, \end{aligned}$$

und daher zufolge der erwähnten Eigenschaften der Gröſsen α, β, etc.:

$$(2.)\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = h^2\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)^2+h_1^2\left(\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right)^2+h_2^2\left(\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right)^2.$$

Vermöge der Eigenschaften dieser Gröſsen hat man auch:

$$\Sigma\pm\alpha\beta_1\gamma_2 = 1,$$

woraus durch Substitution von (1.) die Formel

$$\Sigma\pm\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho_1}{\partial y}\frac{\partial\rho_2}{\partial z} = hh_1h_2$$

folgt, und daher auch vermittelst einer bekannten Eigenschaft der Determinanten:

$$(3.)\quad \Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\rho_1}\frac{\partial z}{\partial\rho_2} = \frac{1}{hh_1h_2}.$$

Man kann diese Formel auch folgendermaſsen ableiten. Aus (1.) ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \alpha dx+\beta dy+\gamma dz &= \frac{1}{h}d\rho, \\ \alpha_1 dx+\beta_1 dy+\gamma_1 dz &= \frac{1}{h_1}d\rho_1, \\ \alpha_2 dx+\beta_2 dy+\gamma_2 dz &= \frac{1}{h_2}d\rho_2, \end{aligned}$$

und daraus vermöge der Eigenschaften der Gröſsen α, β, etc.:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\alpha}{h}d\rho+\frac{\alpha_1}{h_1}d\rho_1+\frac{\alpha_2}{h_2}d\rho_2, \\ dy &= \frac{\beta}{h}d\rho+\frac{\beta_1}{h_1}d\rho_1+\frac{\beta_2}{h_2}d\rho_2, \\ dz &= \frac{\gamma}{h}d\rho+\frac{\gamma_1}{h_1}d\rho_1+\frac{\gamma_2}{h_2}d\rho_2; \end{aligned}$$

ferner:

$$(4.)\quad dx^2+dy^2+dz^2 = \frac{1}{h^2}d\rho^2+\frac{1}{h_1^2}d\rho_1^2+\frac{1}{h_2^2}d\rho_2^2.$$

Die ersten drei der vorstehenden Gleichungen ergeben:

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial\rho} = \frac{\alpha}{h}, & \frac{\partial y}{\partial\rho} = \frac{\beta}{h}, & \frac{\partial z}{\partial\rho} = \frac{\gamma}{h}, \\ \frac{\partial x}{\partial\rho_1} = \frac{\alpha_1}{h_1}, & \frac{\partial y}{\partial\rho_1} = \frac{\beta_1}{h_1}, & \frac{\partial z}{\partial\rho_1} = \frac{\gamma_1}{h_1}, \\ \frac{\partial x}{\partial\rho_2} = \frac{\alpha_2}{h_2}, & \frac{\partial y}{\partial\rho_2} = \frac{\beta_2}{h_2}, & \frac{\partial z}{\partial\rho_2} = \frac{\gamma_2}{h_2}, \end{cases}$$

und hieraus folgt, wie oben gefunden worden,

$$\Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\rho_1}\frac{\partial z}{\partial\rho_2} = \frac{1}{hh_1h_2}\Sigma\pm\alpha\beta_1\gamma_2 = \frac{1}{hh_1h_2}.$$

Diese Formel zeigt, dass das Raumelement $dx\,dy\,dz$, wenn man die Parameter ρ, ρ_1, ρ_2 statt der rechtwinkligen Coordinaten einführt, durch das Element

$$\frac{1}{hh_1h_2}d\rho\,d\rho_1\,d\rho_2$$

ausgedrückt wird, wie sich leicht auch aus geometrischen Betrachtungen ergiebt.

Will man die Gröſsen ρ, ρ_1, ρ_2 statt x, y, z in die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

einführen, so kann man die transformirte partielle Differentialgleichung unmittelbar aus den beiden Formeln (2.) und (3.) erhalten, wie aus den folgenden Betrachtungen erhellt.

2.

Man denke sich ein n-faches Integral, welches unter dem Integralzeichen eine unbestimmte abhängige Variable nebst ihren partiellen Differentialquotienten beliebiger Ordnung enthält, durch Einführung neuer unabhängiger Variabeln in ein anderes transformirt, und die Variationen der beiden einander gleichen Integrale nach den bekannten Vorschriften durch partielle Integration so reducirt, dass sich unter den n-fachen Zeichen nur noch die eine Variation der abhängigen Variablen als Factor findet. Die in diese Variation unter den n-fachen Integralzeichen multiplicirten Ausdrücke müssen einander gleich sein. Wenn man in dieser Gleichung die Elemente, in welche diese Ausdrücke multiplicirt sind, auf einander zurückführt, so erhält man die Transformation der Function, welche sich in der reducirten Variation des gegebenen Integrals unter dem n-fachen Zeichen findet, und welche immer auf eine viel höhere Ordnung wie die Function steigt, die in dem gegebenen Integral selbst unter dem Zeichen steht. Ist z. B. F eine Function von

$$x,\quad y,\quad z,\quad V,\quad \frac{\partial V}{\partial x},\quad \frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

welche sich durch Einführung dreier andern Variabeln u, u_1, u_2 für x, y, z in eine Function von

$$u,\quad u_1,\quad u_2,\quad V,\quad \frac{\partial V}{\partial u},\quad \frac{\partial V}{\partial u_1},\quad \frac{\partial V}{\partial u_2}$$

verwandelt, und setzt man

$$\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial u_1}\,\frac{\partial z}{\partial u_2} = \Delta,$$

so folgt aus der Gleichung

$$\iiint F\,dx\,dy\,dz = \iiint F\Delta\,du\,du_1\,du_2$$

durch Reduction der Variation der beiden Integrale die Gleichung

$$\Delta\left\{\frac{\partial F}{\partial V}-\frac{\partial\cdot\dfrac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial x}}}{\partial x}-\frac{\partial\cdot\dfrac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial y}}}{\partial y}-\frac{\partial\cdot\dfrac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial z}}}{\partial z}\right\}$$
$$=\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)-\left(\frac{\partial.\Delta\left(\dfrac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial u}}\right)}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial.\Delta\left(\dfrac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial u_1}}\right)}{\partial u_1}\right)-\left(\frac{\partial.\Delta\left(\dfrac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial u_2}}\right)}{\partial u_2}\right),$$

wo ich durch die hinzugefügten Klammern angedeutet habe, dass die zu differentiirenden Gröfsen als Functionen von

$$u,\quad u_1,\quad u_2,\quad V,\quad \frac{\partial V}{\partial u},\quad \frac{\partial V}{\partial u_1},\quad \frac{\partial V}{\partial u_2}$$

angesehen werden. Man dehnt diese zur Transformation der Differentialausdrücke dienende Methode leicht auf die Fälle aus, in welchen sich unter dem Integralzeichen mehrere abhängige Variable mit ihren Differentialquotienten befinden. Sie bietet den doppelten Vortheil, beschwerliche Rechnungen zu ersparen, und die Resultate in einer bequemen Form zu geben.

Setzt man in dem vorstehenden Beispiele

$$F=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

und verwandelt sich dieser Ausdruck durch Einführung neuer Variabeln u, u_1, u_2 in

$$E\left(\frac{\partial V}{du}\right)^2+E_1\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+E_2\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2+2e\,\frac{\partial V}{\partial u_1}\,\frac{\partial V}{\partial u_2}+2e_1\frac{\partial V}{\partial u_2}\,\frac{\partial V}{\partial u}+2e_2\frac{\partial V}{\partial u}\,\frac{\partial V}{\partial u_1};$$

und ist ferner, wie im Vorhergehenden,

$$\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial u_1}\,\frac{\partial z}{\partial u_2} = \Delta,$$

so giebt die obige allgemeine Formel:

$$(1.)\qquad \Delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial.\Delta\left(E\frac{\partial V}{\partial u}+e_2\frac{\partial V}{\partial u_1}+e_1\frac{\partial V}{\partial u}\right)}{\partial u}$$
$$+\frac{\partial.\Delta\left(e_2\frac{\partial V}{\partial u}+E_1\frac{\partial V}{\partial u_1}+e\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)}{\partial u_1}$$
$$+\frac{\partial.\Delta\left(e_1\frac{\partial V}{\partial u}+e\frac{\partial V}{\partial u_1}+E_2\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)}{\partial u_2}.$$

Wird insbesondere

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=E\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+E_1\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+E_2\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2,$$

so erhält man:

$$(2.)\quad \Delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial.\Delta E\frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial.\Delta E_1\frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{\partial.\Delta E_2\frac{\partial V}{\partial u_2}}{\partial u_2}.$$

Nimmt man für die neuen Variabeln die Parameter ρ, ρ_1, ρ_2, so wird man zufolge dieser Formel aus den Gleichungen (2.) und (3.) des vorigen Paragraphen,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=h^2\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2+h_1^2\left(\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right)^2+h_2^2\left(\frac{\partial V}{\partial \rho^2}\right)^2,$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial \rho}\,\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\,\frac{\partial z}{\partial \rho_2}=\Delta=\frac{1}{h h_1 h_2},$$

unmittelbar auch die folgende erhalten:

$$(3.)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=h h_1 h_2\left\{\frac{\partial\cdot\frac{h}{h_1 h_2}\frac{\partial V}{\partial \rho}}{\partial \rho}+\frac{\partial\cdot\frac{h_1}{h_2 h}\frac{\partial V}{\partial \rho_1}}{\partial \rho_1}+\frac{\partial\cdot\frac{h_2}{h h_1}\frac{\partial V}{\partial \rho_2}}{\partial \rho_2}\right\}.$$

Die vorgelegte partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

verwandelt sich daher durch Einführung der Parameter ρ, ρ_1, ρ_2 statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z in die Gleichung

$$(4.)\quad \frac{\partial\cdot\frac{h}{h_1 h_2}\frac{\partial V}{\partial \rho}}{\partial \rho}+\frac{\partial\cdot\frac{h_1}{h_2 h}\frac{\partial V}{\partial \rho_1}}{\partial \rho_1}+\frac{\partial\cdot\frac{h_2}{h h_1}\frac{\partial V}{\partial \rho_2}}{\partial \rho_2}=0,$$

welche von Herrn Lamé im 23. Hefte des Pariser Polytechnischen Journals gegeben ist. Setzt man in (3.) für V eine Function von ρ,

$$V=f(\rho), \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho}=f'(\rho),$$

so erhält man:

$$\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial z^2}=h h_1 h_2\,\frac{\partial\cdot\frac{h}{h_1 h_2}f'(\rho)}{\partial \rho}.$$

Setzt man $f(\rho)=\rho$, so folgt hieraus:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}=h^2\,\frac{\partial \log\frac{h}{h_1 h_2}}{\partial \rho},$$

welche Formel Herr Lamé ebendaselbst p. 222 gegeben hat.

Wenn der Coëfficient ΔE in (2.) von u unabhängig ist, so giebt diese Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

so dass also, wenn ΔE von u unabhängig ist, $V=u$ eine Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung ist.

Ich will bei dieser Gelegenheit noch bemerken, dass man die Transformation des Ausdrucks

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

so wie den Werth von Δ, immer aus der Transformation des Ausdrucks $dx^2+dy^2+dz^2$ erhalten kann. Hat man nämlich für irgend welche neue Variabeln u, u_1, u_2:

$$dx^2+dy^2+dz^2=A\,du^2+B\,du_1^2+C\,du_2^2+2a\,du_1\,du_2+2b\,du_2\,du+2c\,du\,du_1,$$

so wird

$$\Delta^2=\left\{\Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial u_1}\,\frac{\partial z}{\partial u_2}\right\}^2=ABC-Aa^2-Bb^2-Cc^2+2abc$$

und

$$\Delta^2\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}$$

$$=(BC-a^2)\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+(CA-b^2)\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+(AB-c^2)\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2$$

$$+2(bc-aA)\frac{\partial V}{\partial u_1}\,\frac{\partial V}{\partial u_2}+2(ca-bB)\frac{\partial V}{\partial u_2}\,\frac{\partial V}{\partial u}+2(ab-cC)\frac{\partial V}{\partial u}\,\frac{\partial V}{\partial u_1}.$$

Diese Formel in Verbindung mit der Formel (1.) zeigt,

dass der transformirte Ausdruck des Quadrates des Linienelementes

$$dx^2+dy^2+dz^2$$

allein hinreicht, um sogleich die Transformation der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

zu erhalten.

Ist insbesondere

$$dx^2+dy^2+dz^2=A\,du^2+A_1\,du_1^2+A_2\,du_2^2,$$

so erhält man:

$$\Delta=\sqrt{A A_1 A_2},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2,$$

und die transformirte partielle Differentialgleichung wird:

$$\frac{\partial\cdot\sqrt{\frac{A_1A_2}{A}}\,\frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial\cdot\sqrt{\frac{A_2A}{A_1}}\,\frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{\partial\cdot\sqrt{\frac{AA_1}{A_2}}\,\frac{\partial V}{\partial u_2}}{\partial u_2}=0.$$

Die Zeichen der Wurzelgröfsen sind hier aus einem derselben dadurch bestimmt, dass sich die Wurzelgröfsen wie $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A_1}$, $\frac{1}{A_2}$ verhalten müssen.

Durch Einführung von Polarcoordinaten statt der rechtwinkligen erhält man, indem man

$$x=u\cos u_1,\qquad y=u\sin u_1\cos u_2,\qquad z=u\sin u_1\sin u_2$$

setzt:

$$dx^2+dy^2+dz^2=du^2+u^2du_1^2+u^2\sin^2u_1\,du_2^2;$$

es wird daher für diesen Fall $A=1$, $A_1=u^2$, $A_2=u^2\sin^2u_1$, also

$$\sqrt{\frac{A_1A_2}{A}}=u^2\sin u_1,\qquad\sqrt{\frac{A_2A}{A_1}}=\sin u_1,\qquad\sqrt{\frac{AA_1}{A_2}}=\frac{1}{\sin u_1};$$

und daher wird die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=0$$

durch Einführung der Polarcoordinaten in die folgende transformirt:

$$\sin u_1\frac{\partial\cdot u^2\frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial\cdot\sin u_1\frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{1}{\sin u_1}\frac{\partial^2V}{\partial u_2^2}=0,$$

welches die bekannte von Laplace aufgestellte Gleichung ist.

Um dieselben Formeln auf den Fall anzuwenden, wenn man statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z die sogenannten *elliptischen* einführt, will ich die bekannten auf diese bezüglichen Relationen in der Kürze ableiten.

3.

Die für die Zerfällung rationaler Brüche in Partialbrüche bekannten Formeln ergeben die Gleichung

$$(1.)\qquad\frac{(\lambda-\rho^2)(\lambda-\rho_1^2)(\lambda-\rho_2^2)}{\lambda(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)}=1-\frac{x^2}{\lambda}-\frac{y^2}{\lambda-b^2}-\frac{z^2}{\lambda-c^2},$$

wenn man

$$(2.)\qquad\begin{cases}x^2=\frac{\rho^2\rho_1^2\rho_2^2}{b^2c^2},\\ y^2=\frac{(\rho^2-b^2)(\rho_1^2-b^2)(\rho_2^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)},\\ z^2=\frac{(\rho^2-c^2)(\rho_1^2-c^2)(\rho_2^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}\end{cases}$$

setzt. Es seien b, c und ρ, ρ_1, ρ_2 positiv, ferner

$$c>b,$$

so werden die Gröfsen x, y, z immer reell, wenn

$$\rho>c,\qquad c>\rho_1>b,\qquad b>\rho_2;$$

und umgekehrt, wenn die Gröfsen x, y, z reell sind, kommen die Gröfsen ρ, ρ_1, ρ_2 in den angegebenen Intervallen zu liegen. Die Formel (1.) zeigt nämlich, dass die cubische Gleichung

$$(3.)\qquad 1=\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-b^2}+\frac{z^2}{\lambda-c^2},$$

durch welche λ bestimmt wird, die Gröfsen ρ^2, ρ_1^2, ρ_2^2 zu Wurzeln hat, und es folgt aus bekannten Principien der Theorie der Gleichungen, dass, wenn x^2, y^2, z^2 reelle positive Gröfsen sind, die Wurzeln der Gleichung (3.) immer in den angegebenen Intervallen liegen.

Die drei Gleichungen

$$(4.)\qquad\begin{cases}1=\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2},\\ 1=\frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_1^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho_1^2-c^2},\\ 1=\frac{x^2}{\rho_2^2}+\frac{y^2}{\rho_2^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho_2^2-c^2}\end{cases}$$

geben, wenn man den Parametern ρ, ρ_1, ρ_2 alle ihre in den angegebenen Intervallen befindlichen Werthe beilegt, alle möglichen Ellipsoïde und ein- und zweiflächigen Hyperboloïde, in denen die Hauptschnitte dieselben Brennpunkte haben, die xy- und xz-Schnitte die Punkte der x-Axe, die um b und c, die yz-Schnitte die Punkte der y-Axe, die um $\sqrt{c^2-b^2}$ vom Mittelpunkte entfernt sind.

Da man die identische Gleichung

$$\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{1}{c^2(c^2-b^2)}=0$$

hat, so folgt aus den Formeln (2.):

$$(5.)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{x^2}{\rho_1^2\rho_2^2}+\frac{y^2}{(\rho_1^2-b^2)(\rho_2^2-b^2)}+\frac{z^2}{(\rho_1^2-c^2)(\rho_2^2-c^2)}=0,\\
&\frac{x^2}{\rho_2^2\rho^2}+\frac{y^2}{(\rho_2^2-b^2)(\rho^2-b^2)}+\frac{z^2}{(\rho_2^2-c^2)(\rho^2-c^2)}=0,\\
&\frac{x^2}{\rho^2\rho_1^2}+\frac{y^2}{(\rho^2-b^2)(\rho_1^2-b^2)}+\frac{z^2}{(\rho^2-c^2)(\rho_1^2-c^2)}=0.
\end{aligned}\right.$$

Diese Formeln, welche sich auch ergeben, wenn man je zwei der Formeln (4.) von einander abzieht, zeigen, dass die drei Flächensysteme orthogonal sind. Wenn man die Gleichung (1.) nach λ differentiirt, und hierauf dieser Gröfse nach einander die Werthe ρ^2, ρ_1^2, ρ_2^2 beilegt, so erhält man:

$$(6.)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{(\rho^2-\rho_1^2)(\rho^2-\rho_2^2)}{\rho^2(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}=\frac{x^2}{\rho^4}+\frac{y^2}{(\rho^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\rho^2-c^2)^2},\\
&\frac{(\rho_1^2-\rho^2)(\rho_1^2-\rho_2^2)}{\rho_1^2(\rho_1^2-b^2)(\rho_1^2-c^2)}=\frac{x^2}{\rho_1^4}+\frac{y^2}{(\rho_1^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\rho_1^2-c^2)^2},\\
&\frac{(\rho_2^2-\rho^2)(\rho_2^2-\rho_1^2)}{\rho_2^2(\rho_2^2-b^2)(\rho_2^2-c^2)}=\frac{x^2}{\rho_2^4}+\frac{y^2}{(\rho_2^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\rho_2^2-c^2)^2}.
\end{aligned}\right.$$

Nimmt man von den Gleichungen (2.) die Logarithmen und differentiirt, so erhält man:

$$(7.)\qquad\left\{\begin{aligned}
dx&=\frac{x\rho}{\rho^2}d\rho+\frac{x\rho_1}{\rho_1^2}d\rho_1+\frac{x\rho_2}{\rho_2^2}d\rho_2,\\
dy&=\frac{y\rho}{\rho^2-b^2}d\rho+\frac{y\rho_1}{\rho_1^2-b^2}d\rho_1+\frac{y\rho_2}{\rho_2^2-b^2}d\rho_2,\\
dz&=\frac{z\rho}{\rho^2-c^2}d\rho+\frac{z\rho_1}{\rho_1^2-c^2}d\rho_1+\frac{z\rho_2}{\rho_2^2-c^2}d\rho_2,
\end{aligned}\right.$$

und daher, vermöge (5.) und (6.):

$$dx^2+dy^2+dz^2=\frac{(\rho^2-\rho_1^2)(\rho^2-\rho_2^2)}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}d\rho^2+\frac{(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho_1^2-\rho^2)}{(\rho_1^2-b^2)(\rho_1^2-c^2)}d\rho_1^2+\frac{(\rho_2^2-\rho^2)(\rho_2^2-\rho_1^2)}{(\rho_2^2-b^2)(\rho_2^2-c^2)}d\rho_2^2.$$

Bestimmt man respective ρ, ρ_1, ρ_2 als Functionen von u, u_1, u_2 mittelst der Gleichungen

$$(8.)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}=du,\\
&\frac{d\rho_1}{\sqrt{-(\rho_1^2-b^2)(\rho_1^2-c^2)}}=du^1,\\
&\frac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2^2-b^2)(\rho_2^2-c^2)}}=du_2,
\end{aligned}\right.$$

so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$(9.)\qquad dx^2+dy^2+dz^2=A\,du^2+A_1\,du_1^2+A_2\,du_2^2,$$

wo

$$(10.)\qquad\left\{\begin{aligned}
A&=(\rho^2-\rho_1^2)(\rho^2-\rho_2^2),\\
-A_1&=(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho_1^2-\rho^2),\\
A_2&=(\rho_2^2-\rho^2)(\rho_2^2-\rho_1^2),
\end{aligned}\right.$$

und daher

$$\Delta=\sqrt{AA_1A_2}=(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho^2-\rho_1^2)(\rho^2-\rho_2^2).$$

Man erhält aus (8.) zufolge der im vorigen Paragraphen gegebenen allgemeinen Regel:

$$(11.)\qquad\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2,$$

und die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

wird, wenn man die Gröfsen u, u_1, u_2 als unabhängige Variabele einführt:

$$\frac{\partial\,\frac{\sqrt{AA_1A_2}}{A}\,\frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial\,\frac{\sqrt{AA_1A_2}}{A_1}\,\frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{\partial\,\frac{\sqrt{AA_1A_2}}{A_2}\,\frac{\partial V}{\partial u_2}}{\partial u_2}=0,$$

oder, wenn man die obigen Werthe von A, A_1, A_2 substituirt:

$$(12.)\qquad(\rho_1^2-\rho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(\rho^2-\rho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(\rho^2-\rho_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0,$$

welches die elegante von Herrn **Lamé** gegebene Transformation ist. Die Gleichung (12.) ergiebt sich auch aus der allgemeinen Formel (3.) des vorigen

Paragraphen, wenn man bemerkt, dass die im §. 1 eingeführten Gröfsen h, h_1, h_2 die Werthe

$$(13.)\qquad h=\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{d\rho}{du},\qquad h_1=\frac{1}{\sqrt{A_1}}\frac{d\rho_1}{du_1},\qquad h_2=\frac{1}{\sqrt{A_2}}\frac{d\rho_2}{du_2}$$

annehmen, welche sich aus Vergleichung der Formel (11.) mit der Formel (2.) §. 1 ergeben.

Zufolge der allgemeinen Formel (2.) des vorigen Paragraphen wird für eine beliebige Function V der linke Theil der Gleichung (12.)

$$(\rho_1^2-\rho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(\rho^2-\rho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(\rho^2-\rho_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho^2-\rho_1^2)(\rho^2-\rho_2^2)\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\}.$$

Ist V eine Function der einen Gröfse ρ, $V=f(\rho)$, so folgt hieraus:

$$\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial z^2}=\frac{1}{(\rho^2-\rho_1^2)(\rho^2-\rho_2^2)}\frac{d^2 f(\rho)}{du^2},$$

welche Formel mehrerer merkwürdiger Anwendungen fähig ist.

4.

Der partiellen Differentialgleichung

$$(\rho_1^2-\rho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(\rho^2-\rho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(\rho^2-\rho_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0$$

geschieht durch einen Ausdruck von der Form

$$V=f(u+u_1 i+u_2)+f_1(u+u_1 i-u_2)+f_2(u-u_1 i+u_2)+f_3(u-u_1 i-u_2)$$

Genüge, wo $i=\sqrt{-1}$ und f, f_1, f_2, f_3 vier willkürliche Functionen sind. Es kann aber niemals eine allgemeine Lösung aus dieser particulären zusammengesetzt werden, weil dieselbe jeder partiellen Differentialgleichung von der Form

$$(U_1-U_2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(U-U_2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(U-U_1)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0$$

angehört, die Gröfsen U, U_1, U_2 mögen Functionen der drei Gröfsen u, u_1, u_2 sein, welche sie wollen.

Vermittelst der Theorie der elliptischen Functionen oder des Abelschen Lehrsatzes kann man die willkürlichen Functionen f etc. in andere verwandeln, deren Argumente algebraische Functionen von x, y, z sind. Es sei:

$$(1.)\quad (\lambda^2+m\lambda+n)^2-p^2\lambda(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)=(\lambda-\rho^2)(\lambda-\rho_1^2)(\lambda-\rho_2^2)(\lambda-\sigma^2).$$

Sieht man in dieser Gleichung die Gröfsen ρ, ρ_1, ρ_2 als Veränderliche an, so werden m, n, p, σ Functionen derselben. Zwischen der letzten dieser Gröfsen und ρ, ρ_1, ρ_2 hat man in Folge des Abelschen Theorems die Differentialgleichung:

$$\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}\pm\frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)(\rho_1^2-c^2)}}\pm\frac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2^2-b^2)(\rho_2^2-c^2)}}=\frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2-b^2)(\sigma^2-c^2)}}.$$

Der linke Theil dieser Gleichung ist zufolge (8.) des vorigen Paragraphen

$$du\pm du_1 i\pm du_2,$$

woraus hervorgeht, dass die particuläre Lösung

$$V=f(u\pm u_1 i\pm u_2)$$

auch durch

$$V=f(\sigma)$$

dargestellt werden kann. Je nach den vier Werthen von σ, welche den verschiedenen Zeichen der Quadratwurzeln entsprechen, erhält man vier solcher Lösungen, welche man durch Addition mit einander verbinden kann.

Die Werthe, welche der Ausdruck $\lambda^2+m\lambda+n$ für $\lambda=0$, b^2, c^2 annimmt, sind zufolge (1.):

$$\sigma\rho\rho_1\rho_2,\qquad \sqrt{(b^2-\rho^2)(b^2-\rho_1^2)(b^2-\rho_2^2)}\cdot\sqrt{b^2-\sigma^2},\qquad \sqrt{(c^2-\rho^2)(c_1^2-\rho^2)(c^2-\rho_2^2)}\cdot\sqrt{c^2-\sigma^2},$$

oder nach den zu Anfang des §. 3 gegebenen Formeln:

$$bc.\sigma x,\qquad bi\sqrt{b^2-c^2}\cdot\sqrt{b^2-\sigma^2}\,y,\qquad ci\sqrt{c^2-b^2}\cdot\sqrt{c^2-\sigma^2}\,z.$$

Man erhält daher durch Zerfällung in Partialbrüche:

$$(2.)\quad \frac{\lambda^2+m\lambda+n}{\lambda(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)}=\frac{\sigma}{bc}\cdot\frac{x}{\lambda}+\frac{i\sqrt{b^2-\sigma^2}}{b\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\frac{y}{\lambda-b^2}+\frac{i\sqrt{c^2-b^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}\cdot\frac{z}{\lambda-c^2}.$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung nach den absteigenden Potenzen von λ, so erhält man durch Vergleichung der Coëfficienten von $\frac{1}{\lambda}$:

$$(3.)\qquad 1=\frac{\sigma}{bc}x+\frac{i\sqrt{\sigma^2-b^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}y+\frac{i\sqrt{c^2-\sigma^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}z.$$

Es ergiebt sich hieraus der Satz:

wird die Gröfse σ durch x, y, z mittelst der Gleichung

$$1=\frac{\sigma}{bc}x+\frac{i\sqrt{\sigma^2-b^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}y+\frac{i\sqrt{c^2-\sigma^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}z$$

bestimmt, in welcher b und c beliebige Constanten bedeuten, so genügt jede Function dieser Gröfse,

$$V = f(\sigma),$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

Man kann dieses Resultat auch auf folgende Art erhalten und verallgemeinern.

5.

Damit es erlaubt sei, in der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

für V eine willkürliche Function einer Gröfse σ zu setzen, muss nicht nur die Gleichung

$$(1.)\qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}=0,$$

sondern auch die Gleichung

$$(2.)\qquad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)^2=0$$

stattfinden; und umgekehrt kann man, so oft die Function σ beide Gleichungen erfüllt, für V eine beliebige Function von σ setzen. Ein Corollar dieses Satzes ist, *dass kein Ausdruck σ, von dem jede beliebige Function der Gleichung*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

genügt, reell sein kann.

Bezeichnet man die zwischen der Gröfse σ und x, y, z stattfindende Gleichung durch

$$\Pi(x, y, z, \sigma) = 0,$$

so wird

$$(3.)\qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x},\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y},\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Es erfordert daher die Gleichung (2.), dass auch

$$(4.)\qquad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2=0$$

sei. Differentiirt man die Gleichungen (3.) respective nach x, y, z, und addirt, so verschwindet wegen (2.) der in $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma^2}$ multiplicirte Ausdruck, und man erhält:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\left\{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right\} = -2\left\{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma \partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma \partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial y}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma \partial z}\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right\}-\left\{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}\right\}.$$

Der erste Theil des Ausdrucks rechts vom Gleichheitszeichen reducirt sich aber, wenn man ihn mit $\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$ multiplicirt und die Werthe (3.) substituirt, auf das nach σ genommene partielle Differential des Ausdrucks

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2.$$

Ist daher die Function Π so beschaffen, dass die Gleichung (4.) *identisch* erfüllt wird, so verschwindet dieser Theil, und man erhält:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\left\{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right\} = -\left\{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}\right\}.$$

Umgekehrt hat man die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)^2=0,\qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}=0,$$

wenn σ als Function von x, y, z durch die Gleichung $\Pi = 0$ bestimmt wird, und die beiden Gleichungen

$$(5.)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2=0, \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}=0, \end{cases}$$

und zwar die erste *identisch*, stattfinden. Man hat daher den Satz:

Wenn eine Gröfse σ als Function von x, y, z durch die Gleichung $\Pi = 0$ bestimmt wird, in welcher die Function Π der partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2=0,$$

Genüge leistet, und man aufserdem

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}=0$$

hat, so ist eine willkürliche Function der Gröfse σ,

$$V = f(\sigma),$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Wenn Π in Bezug auf x, y, z linear ist, so findet die zweite der Bedingungsgleichungen (5.) von selber statt. Man findet daher in diesem Falle als Corollar des vorstehenden Satzes den folgenden:

Wird eine Gröfse σ als Function von x, y, z durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz - 1 = 0$$

bestimmt, in welcher A, B, C beliebige Functionen von σ bedeuten, welche der Gleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0$$

Genüge leisten, so ist jede Function von σ,

$$V = f(\sigma),$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Der oben mit Hülfe des Abelschen Theorems gefundene Satz (3.) des §. 4 ist ein specieller Fall des vorstehenden. In der That findet für

$$A = \frac{\sigma}{bc}, \qquad B = \frac{i\sqrt{\sigma^2 - b^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \qquad C = \frac{i\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

die Gleichung $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ statt. Man sieht aber aus dem vorstehenden allgemeineren Satze, dass man in (3.) §. 4 links vom Gleichheitszeichen statt 1 eine beliebige Function von σ setzen kann. Auch erkennt man leicht, dass dieser Satz für jede Zahl n von Variabeln gilt. Für $n = 2$ erhält man auf diese Weise die bekannte allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0;$$

denn es folgt in diesem Falle aus der Gleichung

$$Ax + By = 1,$$

in welcher $A^2 + B^2 = 0$, dass

$$\frac{1}{A} = x + yi;$$

es wird daher σ, als Function von A, eine Function derselben Gröfse, und man kann daher für V eine beliebige Function von $x + yi$ setzen.

6.

Eine Function V, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

genügt, ist bestimmt, wenn sie auf allen Punkten zweier von den §. 3 betrachteten confocalen Ellipsoïden gegebene Werthe annimmt. Ich will jetzt untersuchen, wie diese Werthe beschaffen sein müssen, damit der allgemeine Werth von V die im §. 4 angegebene Form

$$f(u + u_1 i + u_2) + f_1(u + u_1 i - u_2) + f_2(u - u_1 i + u_2) + f_3(u - u_1 i - u_2) = V$$

erhält, wo die Gröfsen u, u_1, u_2 durch die Gleichungen des §. 3 mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z verbunden sind.

Den gegebenen confocalen Ellipsoïden entsprechen constante Werthe von ρ, die ich mit ρ^0 und ρ^1 bezeichne, und daher auch constante Werthe von u, die ich entsprechend u^0 und u^1 nennen will, so wie V^0 und V^1 die entsprechenden Werthe der Function V sein sollen. Setzt man daher

$$\begin{aligned} f(u^0 + u_1 i + u_2) + f_3(u^0 - u_1 i - u_2) &= \varphi(u_1 i + u_2), \\ f(u^1 + u_1 i + u_2) + f_3(u^1 - u_1 i - u_2) &= \varphi_1(u_1 i + u_2), \\ f_1(u^0 + u_1 i - u_2) + f_2(u^0 - u_1 i + u_2) &= \psi(u_1 i - u_2), \\ f_1(u^1 + u_1 i - u_2) + f_2(u^1 - u_1 i + u_2) &= \psi_1(u_1 i - u_2), \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} V^0 &= \varphi(u_1 i + u_2) + \psi(u_1 i - u_2), \\ V^1 &= \varphi_1(u_1 i + u_2) + \psi_1(u_1 i - u_2). \end{aligned}$$

In diesen Formeln ist

$$i\,du_1 = \frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}}, \qquad du_2 = \frac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2^2 - b^2)(\rho_2^2 - c^2)}}.$$

Setzt man

$$\text{(1.)} \qquad \lambda(\lambda + m)^2 - n^2(\lambda - b^2)(\lambda - c^2) = (\lambda - \rho_1^2)(\lambda - \rho_2^2)(\lambda - \tau^2),$$

so wird zufolge des Abelschen Theorems:

$$\frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - b^2)(\tau^2 - c^2)}} = i\,du_1 \pm du_2.$$

Es werden also die beiden der Gleichung (1.) genügenden Werthe von τ, die ich τ_1 und τ_2 nennen will, respective Functionen von $u_1 i+u_2$ und $u_1 i-u_2$, und es erhält daher jede von den Functionen V^0 und V^1 die Form

$$\Pi_1(\tau_1)+\Pi_2(\tau_2),$$

wo Π_1 und Π_2 beliebige Functionen sein können.

Aus (1.) folgt, wenn man der Gröfse λ die Werthe b^2, c^2 beilegt:

$$b(b^2+m)=\sqrt{(b^2-\rho_1^2)(b^2-\rho_2^2)(b^2-\tau^2)},$$
$$c(c^2+m)=\sqrt{(c^2-\rho_1^2)(c^2-\rho_2^2)(c^2-\tau^2)},$$

oder zufolge der Formeln (2.) §. 3:

$$\frac{b^2+m}{b^2-c^2}=\frac{y}{\sqrt{\rho^2-b^2}}\,\frac{\sqrt{b^2-\tau^2}}{\sqrt{b^2-c^2}},$$
$$\frac{c^2+m}{c^2-b^2}=\frac{z}{\sqrt{\rho^2-c^2}}\,\frac{\sqrt{c^2-\tau^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}.$$

Die Addition dieser beiden Formeln ergiebt

$$1=\frac{y}{\sqrt{\rho^2-b^2}}\sqrt{\frac{b^2-\tau^2}{b^2-c^2}}+\frac{z}{\sqrt{\rho^2-c^2}}\sqrt{\frac{c^2-\tau^2}{c^2-b^2}}.$$

In diesen Formeln sind ρ, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$ die halben Hauptaxen des Ellipsoïds. Man kann daher

$$\frac{x}{\rho}=\sin\eta,\qquad \frac{y}{\sqrt{\rho^2-b^2}}=\cos\eta\cos\vartheta,\qquad \frac{z}{\sqrt{\rho^2-c^2}}=\cos\eta\sin\vartheta$$

setzen. Setzt man ferner

$$\tau^2=b^2\sin^2 t+c^2\cos^2 t,$$

wodurch

$$\sqrt{\frac{b^2-\tau^2}{b^2-c^2}}=\cos t,\quad \sqrt{\frac{c^2-\tau^2}{c^2-b^2}}=\sin t,$$

so verwandelt sich die Gleichung, durch welche τ bestimmt worden, wenn man die verschiedenen Zeichen der Wurzelgröfsen berücksichtigt, in:

$$1=\cos\eta\cos(t\pm\vartheta),$$

woraus

$$\cos(t\pm\vartheta)=\frac{1}{\cos\eta},\qquad \pm i\sin(t\pm\vartheta)=\frac{\sin\eta}{\cos\eta},$$
$$\pm i(t\pm\vartheta)=\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}$$

folgt. Hier ergeben sich die vier Werthe von t:

$$t=\pm\vartheta\pm i\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta},$$

von denen jedoch je zwei, die einander entgegengesetzt sind, hier nur für einen zu rechnen sind. Nennt man t_1 und t_2 zwei nicht blofs einander entgegengesetzte Werthe von t, so kann die hier betrachtete besondere Form, welche die Function V für $\rho=\rho^0$ und $\rho=\rho^1$ annehmen soll,

$$V=\Pi_1(\tau_1)+\Pi_2(\tau_2),$$

auch durch

$$V=\Pi_1(t_1)+\Pi_2(t_2)$$

dargestellt werden, da eine beliebige Function von τ auch eine beliebige Function von t ist. Man hat daher den Satz:

Wenn auf den beiden gegebenen confocalen Ellipsoïden,

$$\frac{x^2}{\rho^{0^2}}+\frac{y^2}{\rho^{0^2}-b^2}+\frac{z^2}{\rho^{0^2}-c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\rho^{1^2}}+\frac{y^2}{\rho^{1^2}-b^2}+\frac{z^2}{\rho^{1^2}-c^2}=1,$$

die Coordinaten der Punkte durch zwei Winkel η und ϑ mittelst der Formeln

$$x=\rho^0\sin\eta,\qquad y=\sqrt{\rho^{0^2}-b^2}\cos\eta\cos\vartheta,\qquad z=\sqrt{\rho^{0^2}-c^2}\cos\eta\sin\vartheta,$$
$$x=\rho^1\sin\eta,\qquad y=\sqrt{\rho^{1^2}-b^2}\cos\eta\cos\vartheta,\qquad z=\sqrt{\rho^{1^2}-c^2}\cos\eta\sin\vartheta$$

ausgedrückt werden, und die diesen Punkten entsprechenden Werthe einer Function V, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

genügt, für jedes der beiden Ellipsoïde die Form

$$\Pi\left(\vartheta+i\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}\right)+\Pi_1\left(\vartheta-i\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}\right)$$

annehmen, so erhält der allgemeine Werth von V die Form

$$V=F_1(\sigma_1)+F_2(\sigma_2)+F_3(\sigma_3)+F_4(\sigma_4),$$

wo F_1, F_2, F_3, F_4 willkürliche Functionen und σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 die vier Wurzeln der Gleichung

$$1=\frac{\sigma}{bc}x+\frac{i\sqrt{\sigma^2-b^2}}{b\sqrt{c^2-b^4}}y+\frac{i\sqrt{c^2-\sigma^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}z$$

sind.

Setzt man

$$\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}=\vartheta_1,\qquad \text{oder}\qquad \frac{1-\sin\eta}{\cos\eta}=\sqrt{\frac{1-\sin\eta}{1+\sin\eta}}=e^{-\vartheta_1},$$

so erhält V in dem hier betrachteten Falle auf jedem der confocalen Ellipsoïde die Form

$$V=\Pi(\vartheta+\vartheta_1 i)+\Pi_1(\vartheta-\vartheta_1 i)$$

und genügt daher der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_1^2}=0.$$

In demselben Falle hatte aber auch V auf jedem der confocalen Ellipsoïde die Form

$$V=\varphi(u_1 i+u_2)+\psi(u_1 i-u_2)$$

und genügte daher der ganz ähnlichen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0.$$

Was die Grenzen dieser verschiedenen Variabeln betrifft, so ist zu bemerken, dass, während die Gröfse ϑ alle Werthe von 0 bis 2π, die Gröfse ϑ_1 alle Werthe von $-\infty$ bis ∞ annimmt, die Werthe von u_1 und u_2 immer endlich bleiben.

7.

Um die Gröfsen u, u_1, u_2 auf die übliche Form der elliptischen Integrale zu reduciren, führe man statt der Gröfsen ρ, ρ_1, ρ_2 Winkel ein, welche von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen oder abnehmen, wenn ρ von c bis ∞, ρ_1 von b bis c, ρ_2 von 0 bis b wächst. Zu diesem Zwecke setze man

$$\rho=\sqrt{c^2+(c^2-b^2)\,\mathrm{tg}^2\chi},$$

woraus

$$\sqrt{\frac{\rho^2-b^2}{c^2-b^2}}=\frac{1}{\cos\chi},\qquad \sqrt{\frac{\rho^2-c^2}{c^2-b^2}}=\mathrm{tg}\,\chi,\qquad \frac{1}{c^2-b^2}\,d\rho=\frac{\mathrm{tg}\,\chi\,d\chi}{\cos\chi\sqrt{c^2-b^2\sin^2\chi}}$$

folgt, und daher

$$du=\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}=\frac{d\chi}{\sqrt{c^2-b^2\sin^2\chi}}.$$

Ferner setze man

$$\rho_1=\sqrt{c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi},$$

woraus

$$\sqrt{\frac{\rho_1^2-b^2}{c^2-b^2}}=\cos\varphi,\qquad \sqrt{\frac{c^2-\rho_1^2}{c^2-b^2}}=\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{c^2-b^2}\,d\rho_1=\frac{-\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}$$

folgt, und daher

$$du_1=\frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)(c^2-\rho_1^2)}}=\frac{-d\varphi}{\sqrt{c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}.$$

Endlich setze man

$$\rho_2=b\sin\psi,$$

woraus

$$du_2=\frac{d\rho_2}{\sqrt{(b^2-\rho_2^2)(c^2-\rho_2^2)}}=\frac{d\psi}{\sqrt{c^2-b^2\sin^2\psi}}.$$

Wenn

$$\frac{b}{c}=k',\qquad \frac{1}{c}\sqrt{c^2-b^2}=k,$$

so wird nach der Legendreschen Bezeichnung:

$$cu=F(\chi,k'),\qquad cu_1=-F(\varphi,k),\qquad cu_2=F(\psi,k').$$

Setzt man

$$cu=v,\qquad cu_1=-v_1,\qquad cu_2=v_2,$$

so erhält man nach den von mir eingeführten Bezeichnungen, wenn man überall den Modul k hinzudenkt, wo kein anderer angegeben ist,

$$\varphi=\mathrm{am}\,v_1,\qquad \psi=\mathrm{am}(v_2,k'),$$
$$\rho_1=c\,\Delta\,\mathrm{am}\,v_1,\qquad \rho_2=ck'\sin\mathrm{am}(v_2,k'),$$

und daher, wenn man noch die Formeln (2.) §. 3 zu Hülfe nimmt,

$$\sin\eta=\frac{x}{\rho}=\frac{\rho_1\rho_2}{bc}=\Delta\,\mathrm{am}\,v_1\sin\mathrm{am}(v_2,k'),$$

$$\cos\eta\cos\vartheta=\frac{y}{\sqrt{\rho^2-b^2}}=\frac{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)(b^2-\rho_2^2)}}{b\sqrt{c^2-b^2}}=\cos\mathrm{am}\,v_1\cos\mathrm{am}(v_2,k'),$$

$$\cos\eta\sin\vartheta=\frac{z}{\sqrt{\rho^2-c^2}}=\frac{\sqrt{(c^2-\rho_1^2)(c^2-\rho_2^2)}}{c\sqrt{c^2-b^2}}=\sin\mathrm{am}\,v_1\,\Delta\,\mathrm{am}(v_2,k').$$

Um alle Punkte des Ellipsoïds zu erhalten, muss man dem Winkel ϑ alle Werthe von 0 bis 2π und dem Winkel η alle Werthe von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$, oder der Gröfse v_1 alle Werthe von 0 bis $4K$, der Gröfse v_2 alle Werthe von $-K'$ bis $+K'$ beilegen, wenn man, wie gewöhnlich, mit K und K' die ganzen Integrale

$$K=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad K'=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}$$

bezeichnet.

Will man das im vorigen Paragraphen gefundene Resultat in der gewöhnlichen Bezeichnung der elliptischen Functionen darstellen, so erhält man den Satz, dass durch die Substitution

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}v_1}{\sin\operatorname{coam}(v_2,k')}=\frac{\sin\operatorname{am}v_1\,\Delta\operatorname{am}(v_2,k')}{\cos\operatorname{am}v_1\cos\operatorname{am}(v_2,k')},$$

$$e^{-\vartheta_1}=\sqrt{\frac{1-\Delta\operatorname{am}v_1\sin\operatorname{am}(v_2,k')}{1+\Delta\operatorname{am}v_1\sin\operatorname{am}(v_2,k')}}$$

die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_1^2}=0$$

in einander übergehen.

Aus den Gleichungen, durch welche in dem Vorhergehenden $\operatorname{tg}\vartheta$ und $e^{-\vartheta_1}$ bestimmt worden sind, ergeben sich nämlich die Formeln:

$$d\vartheta=\frac{\Delta\varphi\cos\psi\,\Delta(\psi,k')\,dv_1+k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\,dv_2}{1-\Delta^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$d\vartheta_1=\frac{-k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\,dv_1+\Delta\varphi\cos\psi\,\Delta(\psi,k')\,dv_2}{1-\Delta^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Hieraus folgt nach mehreren Reductionen:

$$\frac{1}{\cos^2\eta}[d\eta^2+\cos^2\eta\,d\vartheta^2]=d\vartheta^2+d\vartheta_1^2=\frac{1-k^2\sin^2\varphi-k'^2\sin^2\psi}{1-\Delta^2\varphi\sin^2\psi}(dv_1^2+dv_2^2),$$

woraus sich zufolge der in §. 2 gegebenen allgemeinen Formeln sogleich die Transformation der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2}=0$ in die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_1^2}=0$ ergiebt.

8.

Man hat in §. 6 gesehen, dass die Function

$$V=\Pi(\vartheta+\vartheta_1 i)+\Pi_1(\vartheta-\vartheta_1 i)$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2}=0$$

genügt. Es muss sich daher diese Function als die Summe zweier Functionen respective von $v_1+v_2 i$ und von $v_1-v_2 i$ darstellen lassen, wie sich auch aus bekannten Formeln der Theorie der elliptischen Functionen ergiebt.

Man erhält nämlich aus den Formeln des vorigen Paragraphen

$$\frac{\cos\eta(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)}{1+\sin\eta}=e^{-\vartheta_1+\vartheta i}=\frac{\cos\operatorname{am}v_1\cos\operatorname{am}(v_2,k')+i\sin\operatorname{am}v_1\,\Delta\operatorname{am}(v_2,k')}{1+\Delta\operatorname{am}v_1\sin\operatorname{am}(v_2,k')}.$$

Da (*Fundam.* §. 19 *))

$$\sin\operatorname{am}(v_2,k')=-i\operatorname{tg}\operatorname{am}(v_2 i),$$

$$\cos\operatorname{am}(v_2,k')=\frac{1}{\cos\operatorname{am}(v_2 i)},$$

$$\Delta\operatorname{am}(v_2,k')=\frac{\Delta\operatorname{am}(v_2 i)}{\cos\operatorname{am}(v_2 i)},$$

so wird

$$e^{-\vartheta_1+\vartheta i}=\frac{\cos\operatorname{am}v_1+i\sin\operatorname{am}v_1\,\Delta\operatorname{am}(v_2 i)}{\cos\operatorname{am}(v_2 i)-i\,\Delta\operatorname{am}v_1\sin\operatorname{am}(v_2 i)}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner des vorstehenden Bruchs mit

$$\cos\operatorname{am}(v_2 i)+i\,\Delta\operatorname{am}v_1\sin\operatorname{am}(v_2 i),$$

und bemerkt, dass

$$\cos^2\operatorname{am}(v_2 i)+\Delta^2\operatorname{am}v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2 i)=1-k^2\sin^2\operatorname{am}v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2 i),$$

dass ferner nach den Fundamentalformeln

$$\cos\operatorname{am}(v_1+v_2 i)=\frac{\cos\operatorname{am}v_1\cos\operatorname{am}(v_2 i)-\sin\operatorname{am}v_1\,\Delta\operatorname{am}v_1\sin\operatorname{am}(v_2 i)\,\Delta\operatorname{am}(v_2 i)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2 i)},$$

$$\sin\operatorname{am}(v_1+v_2 i)=\frac{\sin\operatorname{am}v_1\cos\operatorname{am}(v_2 i)\,\Delta\operatorname{am}(v_2 i)+\sin\operatorname{am}(v_2 i)\cos\operatorname{am}v_1\,\Delta\operatorname{am}v_1}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2 i)},$$

so erhält man:

$$e^{-\vartheta_1+\vartheta i}=\cos\operatorname{am}(v_1+v_2 i)+i\sin\operatorname{am}(v_1+v_2 i)=e^{i\operatorname{am}(v_1+v_2 i)},$$

*) Vergl. Band I. p. 85 dieser Ausgabe.

und daher auch, wenn man das Zeichen von i ändert,

$$e^{-\vartheta_1-\vartheta i} = e^{-i\,\mathrm{am}(v_1-v_2 i)}.$$

Hieraus folgen die Formeln:

$$\mathrm{am}(v_1+v_2 i) = \vartheta+\vartheta_1 i,$$
$$\mathrm{am}(v_1-v_2 i) = \vartheta-\vartheta_1 i,$$

aus denen sich sogleich der zu beweisende Satz ergiebt. Die §. 7 gegebenen Formeln können dazu angewandt werden, aus den Gröſsen

$$\sin\mathrm{am}\, v_1,\qquad \cos\mathrm{am}\, v_1,\qquad \Delta\mathrm{am}\, v_1,$$
$$\sin\mathrm{am}(v_2,k'),\quad \cos\mathrm{am}(v_2,k'),\quad \Delta\mathrm{am}(v_2,k')$$

den reellen und imaginären Theil von $\mathrm{am}(v_1+v_2 i)$ zu berechnen. Diese Formeln zeigen, dass, wenn man

$$\mathrm{am}(v_1+v_2 i) = \vartheta+\vartheta_1 i$$

setzt, wo v_1 und v_2 reell, v_2 zwischen $-K'$ und $+K'$, und v_1 und ϑ gleichzeitig 0 sein sollen, die Gröſsen v_2 und ϑ_1 immer gleichzeitig positiv und negativ sind, und die beiden Winkel $\mathrm{am}\, v_1$ und ϑ immer in denselben Quadranten liegen, welchen Werth zwischen $-K'$ und $+K'$ auch v_2 annimmt. Nimmt man $\mathrm{am}\, v_1$ und ϑ in einem beliebigen Quadranten, und läſst v_2 sich einer seiner Grenzen K' oder $-K'$ nähern, so nähert sich ϑ dem nächsten ungraden Vielfachen von $\pm\frac{1}{2}\pi$, und fällt mit demselben zusammen, wenn $v_2=\pm K'$ wird, wie auch der Werth von v_1 beschaffen ist. Wenn gleichzeitig $v_1=0$, oder ein Vielfaches von $\pm 2K$ und $v_2=+K'$ oder $-K'$, so wird respective $\vartheta_1=+\infty$ oder $-\infty$ und ϑ unbestimmt.

Ich bemerke noch die Formeln:

$$\cos n\,\mathrm{am}(v_1+v_2 i)+\cos n\,\mathrm{am}(v_1-v_2 i) = (e^{n\vartheta_1}+e^{-n\vartheta_1})\cos n\vartheta,$$
$$i[\cos n\,\mathrm{am}(v_1+v_2 i)-\cos n\,\mathrm{am}(v_1-v_2 i)] = (e^{n\vartheta_1}-e^{-n\vartheta_1})\sin n\vartheta,$$
$$\sin n\,\mathrm{am}(v_1+v_2 i)+\sin n\,\mathrm{am}(v_1-v_2 i) = (e^{n\vartheta_1}+e^{-n\vartheta_1})\sin n\vartheta,$$
$$i[\sin n\,\mathrm{am}(v_1-v_2 i)-\sin n\,\mathrm{am}(v_1+v_2 i)] = (e^{n\vartheta_1}-e^{-n\vartheta_1})\cos n\vartheta.$$

Diese Formeln zeigen, dass für einen positiven Werth von v_2 der erste und vierte und eben so der zweite und dritte Ausdruck, wenn n ins Unendliche wächst, selber ihren absoluten Werthen nach ins Unendliche wachsen, während ihre Unterschiede unendlich klein werden.

Berlin, den 10ten Juli 1847.

UEBER UNENDLICHE REIHEN DEREN EXPONENTEN ZUGLEICH IN ZWEI VERSCHIEDENEN QUADRATISCHEN FORMEN ENTHALTEN SIND

VON

PROFESSOR C. G. J. JACOBI

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 37. p. 61—94 u. p. 221—254.

UEBER UNENDLICHE REIHEN, DEREN EXPONENTEN ZUGLEICH IN ZWEI VERSCHIEDENEN QUADRATISCHEN FORMEN ENTHALTEN SIND.

EINLEITUNG.

Zwischen der Analysis und Zahlentheorie, welche man lange für völlig getrennte Disciplinen hielt, sind in neuerer Zeit immer häufigere, oft unerwartete Verbindungen und Übergänge entdeckt worden. Eine reichhaltige Quelle gegenseitiger Beziehungen beider, welche noch lange unerschöpft bleiben wird, ist die Analysis der elliptischen Functionen. Ich will im Folgenden eine Anzahl Formeln mittheilen, welche eine neue Anwendung dieser Analysis auf die Arithmetik gewähren, die Anwendung nämlich auf die Simultanformen des zweiten Grades, in denen gewisse Zahlenklassen immer enthalten sind.

Das erste Beispiel von tiefer liegenden Sätzen über die Eigenschaften solcher Simultanformen ergab sich aus der ersten Gaussischen Abhandlung über die biquadratischen Reste, welche von dem biquadratischen Charakter der Zahl 2 handelt. Aus den in dieser Abhandlung gefundenen Resultaten folgt eine Beziehung zwischen den beiden quadratischen Formen

$$aa+2bb \quad \text{und} \quad cc+dd,$$

in welchen jede Primzahl von der Form $8i+1$ gleichzeitig enthalten ist. Gauss beweist nämlich daselbst durch rein arithmetische Betrachtungen,

> dass die Zahl 2, welche quadratischer Rest jeder Primzahl von der Form $8i+1$ ist, auch ihr biquadratischer Rest ist oder nicht, je nachdem bei der Darstellung der Primzahl durch die Form $aa+2bb$ die Wurzel des ungeraden Quadrates a die Form $8i\pm1$ oder die Form $8i\pm3$ hat.

Durch andere von diesen ganz unabhängige, aus seiner Theorie der Kreistheilung geschöpfte Betrachtungen, denen er jedoch ebenfalls eine arithmetische Einkleidung gab, beweist dann Gauss an demselben Orte ferner auch,

> dass die Zahl 2 biquadratischer Rest einer Primzahl von der Form $8i+1$ ist oder nicht, je nachdem bei Zerfällung der Primzahl in zwei Quadrate die Wurzel des geraden Quadrates durch 8 dividirt aufgeht oder den Rest 4 läfst.

Die Vergleichung dieser beiden Kriterien ergiebt den Satz,

> dass bei der Darstellung einer Primzahl von der Form $8i+1$ durch die beiden quadratischen Formen $aa+2bb$ und $cc+dd$, wo d die Wurzel des geraden Quadrates sein mag, immer gleichzeitig a die Form $8i\pm 1$ und d die Form $8i$ oder a die Form $8i\pm 3$ und d die Form $8i+4$ hat.

Es war zu wünschen, dass dieser Satz unabhängig von der Theorie der biquadratischen Reste durch unmittelbare Betrachtung der Gleichung

$$aa+2bb = cc+dd$$

bewiesen, und dadurch das eine Gaussische Kriterium auf das andere zurückgeführt würde. Dies hat Dirichlet in einer Abhandlung des 3[ten] Bandes des Crelleschen Journals gethan, wo er zugleich Untersuchungen über die allgemeinere Gleichung

$$aa+nbb = cc+dd$$

angestellt hat.

Der zuletzt erwähnte Satz kann auch noch auf eine andere Art ausgedrückt werden. Da entweder $+a$ oder $-a$, $+c$ oder $-c$ die Form $4m+1$ hat, ferner aus der Gleichung

$$p = aa+2bb = cc+dd,$$

wenn p die Form $8i+1$ hat, folgt, dass b durch 2, d durch 4 aufgeht: so erhält man aus diesen beiden Zerfällungen der Primzahl p immer eine Gleichung

$$(4m'+1)^2+8n'n' = (4m+1)^2+16nn = p,$$

wo die Zahlen m und m' positiv oder negativ sind. Der obige Satz besagt, dass in dieser Gleichung m' und n gleichzeitig gerade oder ungerade sind, oder *dass die Zahl $m'+n$ immer gerade ist.* Aus derselben Gleichung folgt aber auch unmittelbar, dass m und $m'+n'$ gerade sind, wenn p die Form $16n+1$ hat, und dass m und $m'+n'$ ungerade sind, wenn p die Form $16n+9$ hat, oder *dass die Zahl $m+m'+n'$ immer gerade ist.* Es wird daher zufolge des obigen Satzes

auch $m+n+n'$ immer gerade sein, oder dieser Satz folgendermafsen ausgesprochen werden können:

> *Wenn eine Primzahl p von der Form $8i+1$ durch die beiden quadratischen Formen $(4m+1)^2+16nn$ und $(4m'+1)^2+8n'n'$ dargestellt wird, so sind die beiden Zahlen $m+n$ und n' immer gleichzeitig gerade oder ungerade.*

In dieser Gestalt findet man den Satz auch als ein Corollar einer analytischen Formel, welche sich aus den Reihenentwickelungen der Theorie der elliptischen Functionen ergiebt, und in welcher eine Reihe, deren Exponenten durch die eine quadratische Form dargestellt werden, einer Reihe gleich wird, deren Exponenten in der andern quadratischen Form enthalten sind. Aus derselben Quelle fliefst eine grofse Anzahl ähnlicher Gleichungen, die Sätze über die Eigenschaften quadratischer Simultanformen ergeben, und in denen die Exponenten der Reihen in den quadratischen Formen x^2+y^2, x^2+2y^2, x^2+3y^2, x^2+6y^2, $2x^2+3y^2$ enthalten sind. Einige solcher Gleichungen lassen sich auch aufstellen, in denen die Exponenten der Reihen in höheren quadratischen Formen, wie x^2+5y^2, x^2+7y^2 enthalten sind. Die folgenden Untersuchungen sollen sich mit diesen analytischen Formeln und den daraus folgenden arithmetischen Sätzen beschäftigen. Da die Anzahl dieser Formeln begrenzt scheint, so kann es Interesse haben, dieselben zu erschöpfen.

Die sämmtlichen diesen Untersuchungen zu Grunde gelegten Entwickelungen sind particuläre Fälle einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Functionen, welche in der Gleichung

$$\begin{aligned}&(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\cdots\\ &\times(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)(1-q^7z)\cdots\\ &\times(1-qz^{-1})(1-q^3z^{-1})(1-q^5z^{-1})(1-q^7z^{-1})\cdots\\ &= 1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\cdots\end{aligned}$$

enthalten ist. Diese Gleichung gilt für alle Werthe von z und für die Werthe von q, deren Modul kleiner als 1 ist. Man kann derselben verschiedene Formen geben. Setzt man q^m für q, wo m eine beliebige positive Gröfse ist, und gleichzeitig $+q^{\pm n}$ oder $-q^{\pm n}$ für z, so erhält man aus ihr die folgenden beiden Formeln:

$$(1.)\quad \begin{aligned}&(1-q^{m-n})(1-q^{m+n})(1-q^{2m})(1-q^{3m-n})(1-q^{3m+n})(1-q^{4m})\cdots\\ &= 1-q^{m-n}-q^{m+n}+q^{4m-2n}+q^{4m+2n}-q^{9m-3n}-q^{9m+3n}+\cdots,\end{aligned}$$

$$(2.)\quad \begin{aligned}&(1+q^{m-n})(1+q^{m+n})(1-q^{2m})(1+q^{3m-n})(1+q^{3m+n})(1-q^{4m})\cdots\\ &= 1+q^{m-n}+q^{m+n}+q^{4m-2n}+q^{4m+2n}+q^{9m-3n}+q^{9m+3n}+\cdots.\end{aligned}$$

Setzt man $m-n=a,\ 2n=b,$ so werden diese Formeln:

$$(3.)\qquad (1-q^a)(1-q^{a+b})(1-q^{2a+b})(1-q^{3a+b})(1-q^{3a+2b})(1-q^{4a+2b})\dots$$
$$= 1-q^a-q^{a+b}+q^{4a+b}+q^{4a+3b}-q^{9a+3b}-q^{9a+6b}+\cdots,$$

$$(4.)\qquad (1+q^a)(1+q^{a+b})(1-q^{2a+b})(1+q^{3a+b})(1+q^{3a+2b})(1-q^{4a+2b})\dots$$
$$= 1+q^a+q^{a+b}+q^{4a+b}+q^{4a+3b}+q^{9a+3b}+q^{9a+6b}+\cdots,$$

wo die Exponenten in den unendlichen Producten eine Reihe bilden, deren erstes Glied a ist, und deren Differenzen

$$b,\ a,\ a,\ b,\ a,\ a,\ b \text{ etc.}$$

sind, die Exponenten in den Entwickelungen dagegen eine Reihe bilden, deren erstes Glied 0 ist, und deren Differenzen

$$a,\ b,\ 3a,\ 2b,\ 5a,\ 3b,\ 7a \text{ etc.}$$

sind. Bezeichnet man die unendlichen Producte und Reihen durch die ihren allgemeinen Gliedern vorgesetzten Zeichen Π und Σ, so kann man die Formeln (1.) und (2.) folgendermafsen darstellen:

$$(5.)\qquad \Pi[(1-q^{2mi+m-n})(1-q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})] = \Sigma(-1)^i q^{mi^2+ni},$$

$$(6.)\qquad \Pi[(1+q^{2mi+m-n})(1+q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})] = \Sigma q^{mi^2+ni}.$$

Hier sind dem Index i unter dem Zeichen Π die Werthe $0,\ 1,\ 2,\dots\infty$, unter dem Zeichen Σ dagegen die Werthe $0,\ \pm1,\ \pm2,\dots\pm\infty$ beizulegen, wie auch im Folgenden immer angenommen werden wird. Setzt man in diesen Formeln m^2 für m, $2mn$ für n, und multiplicirt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit q^{n^2}, so erhalten sie folgende Form:

$$(7.)\qquad q^{n^2}\Pi[(1-q^{2m^2i+m^2-2mn})(1-q^{2m^2i+m^2+2mn})(1-q^{2m^2i+2m^2})] = \Sigma(-1)^i q^{(mi+n)^2},$$

$$(8.)\qquad q^{n^2}\Pi[(1+q^{2m^2i+m^2-2mn})(1+q^{2m^2i+m^2+2mn})(1-q^{2m^2i+2m^2})] = \Sigma q^{(mi+n)^2}.$$

Von den drei einfachen unendlichen Producten, welche mit einander zu multipliciren sind, werden zwei einander gleich, wenn $b=0$; es können die drei in zwei zusammengezogen werden, wenn $b=2a$, oder in ein einziges, wenn $b=a$. Setzt man in diesen Fällen $a=1$, wie es unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann, und daher

$$1.\ \ m=1,\ n=0;\qquad 2.\ \ m=2,\ n=1;\qquad 3.\ \ m=\tfrac{3}{2},\ n=\tfrac{1}{2}:$$

so erhält man aus (5.) und (6.) die *fünf* particulären Formeln:

$$(9.)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})] &= \Sigma(-1)^i q^{i^2},\\
\Pi[(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})] &= \Sigma q^{i^2},\\
\Pi[(1-q^{2i+1})\,(1-q^{4i+4})] &= \Sigma(-1)^i q^{2i^2+i},\\
\Pi[(1+q^{2i+1})\,(1-q^{4i+4})] &= \Sigma q^{2i^2+i},\\
\Pi(1-q^{i+1})\quad &= \Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}i^2+\frac{1}{2}i}.
\end{aligned}\right.$$

Die Zahlen $2i^2+i$ bilden, wenn man dem i alle positiven und negativen Werthe giebt, die Reihe der ***dreieckigen*** Zahlen.

Wenn von den unendlichen Producten, welche aus (5.) und (6.) für specielle Werthe von m und n hervorgehen, irgend welche zwei mit einander multiplicirt werden, so erhält man dadurch ein neues unendliches Product, in dessen Reihenentwickelung nur solche Glieder vorkommen, deren Exponenten in einer bestimmten quadratischen Form zweier Variabeln enthalten sind, welche Anzahl der Variabeln der quadratischen Formen ich immer stillschweigend voraussetzen werde, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist. So oft daher, was in einer grofsen Anzahl von Fällen geschieht, ein solches unendliches Product noch durch die Multiplication zweier anderer in den obigen Ausdrücken (5.) und (6.) enthaltener unendlicher Producte entstehen kann, werden durch die Entwickelung desselben Reihen erhalten, in denen die Exponenten der Glieder ***in zwei bestimmten quadratischen Functionen zugleich*** enthalten sind.

Zufolge ihrer Entstehungsart können diese Reihen durch zwei verschiedene Doppelsummen ausgedrückt, und daher nach zwei verschiedenen Gesetzen gebildet werden. Nach dem einen erhalten die Exponenten der einzelnen Glieder eine andere quadratische Form als nach dem andern; wenn man aber in jeder Doppelsumme alle Glieder, in deren Exponenten die quadratische Form denselben Werth erhält, zusammenfafst, müssen beide Bildungsgesetze zu demselben Resultate führen, und daher sowohl nach dem einen als nach dem andern die Coëfficienten aller Glieder, in welchen die Exponenten nicht zugleich in den beiden quadratischen Formen enthalten sind, verschwinden. Wenn man hingegen die Coëfficienten der Glieder, deren Exponenten in den beiden quadratischen Formen enthalten sind, wie sie aus den beiden verschiedenen Bildungsweisen hervorgehen, mit einander vergleicht, erhält man jedesmal einen ähnlichen arithmetischen Satz, wie oben für die beiden Zerfällungen der Primzahlen von der Form $8i+1$ aufgestellt worden ist.

Durch die Herleitung dieser arithmetischen Sätze aus den analytischen Entwickelungen wird aber nicht allein der Vorrath der arithmetischen Beweismittel vermehrt, sondern es werden dadurch auch die Sätze selbst in einer neuen bemerkenswerthen Form gefunden. Schon in einem früheren Falle, in welchem sich ein arithmetischer Fundamentalsatz als Corollar einer elliptischen Formel ergab, erhielt zugleich dieser Satz eine wesentlich verschiedene Fassung, die ihm einen allgemeineren Charakter und eine erhöhte Wichtigkeit gab. Der Satz nämlich,

> dass für jede Zahl P, *die nur Primzahlen von der Form* $4i+1$ *zu Theilern hat*, die Gleichung $xx+yy=P$ so viel Lösungen in ganzen positiven oder negativen Werthen von x und y verstattet, als die vierfache Anzahl der ungeraden Factoren von P beträgt,

ergiebt sich aus der Theorie der elliptischen Functionen in der allgemeineren Form,

> dass für *jede beliebige* Zahl P die Gleichung $xx+yy=P$ so viel Lösungen in ganzen positiven oder negativen Werthen von x und y verstattet, als der vierfache *Ueberschuss* der Anzahl der Factoren der Zahl P von der Form $4i+1$ über die Anzahl ihrer Factoren von der Form $4i+3$ beträgt*).

Diese verallgemeinerte Form des Satzes über die Anzahl der Zusammensetzungen der Zahlen aus *zwei* Quadraten verstattet es, von ihm aus zu Sätzen über die Anzahl der Zusammensetzungen der Zahlen aus *vier* Quadraten aufzusteigen. (S. Crelles Journal Band 12, p. 167. Anwendungen ähnlicher Umformungen auf tiefere arithmetische Sätze findet man in der berühmten Abhandlung: *Sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, im 21sten Bande desselben Journals p. 3.)

Als Beispiel der allgemeineren Fassung, in welcher die Sätze über Simultanformen durch die Analysis der elliptischen Functionen gefunden werden, will ich die Erweiterung anführen, welche der oben aufgestellte Satz erfährt,

> dass in den Simultanformen $(4m+1)^2+16nn$ und $(4m'+1)^2+8n'n'$, durch welche man jede Primzahl von der Form $8i+1$ darstellen kann, die Zahlen $m+n$ und n' gleichzeitig gerade und ungerade sind.

In der Form, wie er aus der analytischer Formel hervorgeht, heisst dieser Satz:

*) S. *Fund. Nov. Theor. Funct. Ellipt.* p. 107. (B. I, p. 163 dieser Ausgabe.)

Für jede beliebige Zahl P beträgt der Ueberschuss der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$P = (4m+1)^2+16nn,$$

in welchen $m+n$ gerade, über die Anzahl der Lösungen, in welchen $m+n$ ungerade ist, eben so viel als der Ueberschuss der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$P = (4m'+1)^2+8n'n',$$

in welchen n' gerade, über die Anzahl der Lösungen, in welchen n' ungerade ist.

Der wesentliche Charakter dieser Erweiterungen besteht darin, dass die nur für eine besondere Klasse von Zahlen geltenden Sätze durch andere ersetzt werden, welche *auf alle Zahlen* Anwendung finden, für jene besondern Klassen von Zahlen die tiefer liegenden Eigenschaften, welche man bemerken will, herausstellen, für alle andern Zahlen aber sich auf einen elementaren Inhalt reduciren. Wenn gewisse Zahlenklassen gewisse Zerfällungen verstatten, so ersetzt man die Zahlen, welche die Anzahl dieser Zerfällungen bestimmen, durch Ueberschüsse, welche sich für die besondern Klassen von Zahlen auf die Anzahl ihrer Zerfällungen reduciren, und für alle andern Klassen *verschwinden*.

Ich habe im Folgenden die aus den analytischen Entwickelungen sich ergebenden Eigenschaften der Zahlen auch aus bekannten arithmetischen Sätzen abzuleiten gesucht, wodurch man jedesmal für die analytische Formel einen rein arithmetischen Beweis erhält. Wenn diese arithmetischen Beweise der auf analytischem Wege gewonnenen Resultate keine wesentlichen Schwierigkeiten darbieten, so sind sie doch bisweilen complicirter Natur, und erfordern eigenthümliche Klassificationen der Zahlen, welche vielleicht auch in anderen Untersuchungen von Nutzen sein können. Es verstatten diese Beweise oft eine gewisse Willkür in der Wahl der Methoden der Behandlung, so dass sie leicht variirt werden können.

Ich bemerke noch, dass bei mehreren der hier behandelten Entwickelungen elliptischer Reihen für die Vorzeichen der Glieder solche Gesetze gefunden werden, dass man sie durch Gröfsen ausdrücken kann, welche von den biquadratischen Charakteren der Zahlen abhängen. Man gelangt so *a posteriori* zu den ersten merkwürdigen Beispielen der Einführung der biquadratischen Reste in die Entwickelungsgesetze elliptischer Reihen mit beliebigem Modul. Die

Gröfsen, durch welche sich die Vorzeichen dieser elliptischen Reihen unmittelbar ausdrücken lassen, sind die nämlichen, welche durch ein von mir in die Theorie der Potenzreste eingeführtes besonderes Symbol bezeichnet werden, wodurch die Darstellung dieser Reihen an Einfachheit gewinnt.

ZUSAMMENSTELLUNG DER ANALYTISCHEN FORMELN.

In dem 16^{ten} Capitel der Einleitung in die Analysis des Unendlichen, welches *von der Theilung der Zahlen* handelt, hat Euler das unendliche Product

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\cdots = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots},$$

dessen Entwickelungscoëfficienten bestimmen, wie oft eine gegebene Zahl in beliebige ungleiche Zahlen oder in gleiche und ungleiche ungerade Zahlen getheilt werden kann, behufs der Erforschung dieser Coëfficienten untersucht, und dasselbe bei dieser Gelegenheit dem Bruche

$$\frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-q^{30}+q^{44}+q^{52}-\cdots}{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+q^{22}+q^{26}-\cdots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}$$

gleich gefunden. Euler ersetzt nämlich das unendliche Product durch den Bruch

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots},$$

dessen Zähler aus dem Nenner durch die Verwandlung von q in q^2 erhalten wird; für den Nenner aber findet er die in dem Nenner des vorstehenden Bruches befindliche Reihe, deren Glieder zu Exponenten die *fünfeckigen* Zahlen, vorund rückwärts ins Unendliche fortgesetzt, und abwechselnd die Coëfficienten $+1$ und -1 haben. Die eben angegebenen elliptischen Formeln lehren aber, dass es für dasselbe unendliche Product noch *sechs* ähnliche Brüche, wie der von Euler gefundene, giebt. Um diese demselben unendlichen Product gleichen Brüche zu erhalten, stelle ich dasselbe auf verschiedene Arten als Quotienten zweier anderer dar, welche in den allgemeinen unendlichen Producten (1.) und (2.) enthalten sind. Dies geschieht mittelst der folgenden Formeln:

I.

$$\begin{aligned}
&(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots \\
&= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots} \\
&= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)(1+q^7)(1-q^8)\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)(1-q^{10})(1-q^{12})\ldots} \\
&= \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)\ldots}{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2(1-q^4)(1-q^5)^2(1-q^6)\ldots} \\
&= \frac{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)(1-q^6)\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)(1-q^6)^2(1-q^8)(1-q^{10})^2(1-q^{12})\ldots} \\
&= \frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})(1-q^{16})(1-q^{20})(1-q^{24})\ldots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^7)(1-q^8)\ldots} \\
&= \frac{(1+q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)(1+q^5)(1-q^6)\ldots}{(1-q^3)^2(1-q^6)(1-q^9)^2(1-q^{12})(1-q^{15})^2(1-q^{18})\ldots} \\
&= \frac{(1+q^3)(1+q^9)(1-q^{12})(1+q^{15})(1+q^{21})(1-q^{24})\ldots}{(1-q)(1-q^5)(1-q^6)(1-q^7)(1-q^{11})(1-q^{12})\ldots}.
\end{aligned}$$

Wegen der einfachen Reihenentwickelung, deren die elliptischen unendlichen Producte

$$\begin{aligned}
&(1\pm q^{m-n})(1\pm q^{m+n})(1-q^{2m})(1\pm q^{3m-n})(1\pm q^{3m+n})(1-q^{4m})\ldots \\
&\quad = \Pi[(1\pm q^{2mi+m-n})(1\pm q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})]
\end{aligned}$$

zufolge der Formeln (1.) und (2.) oder (3.) und (4.) fähig sind, kann man sie gleichsam als Elementarfunctionen betrachten, und andere unendliche Producte aus ihnen zusammenzusetzen suchen. Die vorstehenden Formeln lösen die Aufgabe, das von Euler betrachtete unendliche Product

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots$$

durch diese elliptischen unendlichen Producte darzustellen. Man sieht, dass diese Aufgabe mehrere Lösungen hat, indem man das vorgelegte unendliche Product durch die Formeln (I.) auf *sieben* verschiedene Arten als Quotienten zweier solcher elliptischen unendlichen Producte findet.

Die Factoren der elliptischen unendlichen Producte, welche die Zähler und Nenner der Formeln (I.) bilden, sind so geordnet, dass die Exponenten der Potenzen von q fortwährend wachsen. Die Vorzeichen dieser Potenzen sind in den Nennern immer —, wie in der Formel (1.); in den Zählern dagegen entweder ebenfalls alle — oder abwechselnd in zweien Factoren + und im dritten —, wie in der Formel (2.). Nur der Zähler des vierten Bruches macht eine Ausnahme, indem derselbe aus (1.) oder (2.) durch Annahme specieller Werthe für m und n nicht unmittelbar hervorgeht, sondern aus dem den Werthen $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{1}{2}$ entsprechenden Product $\Pi(1-q^{i+1})$ durch Aenderung von q in $-q$ erhalten wird. Durch diese Aenderung wird die letzte der Gleichungen (9.),

$$\Pi(1-q^{i+1}) = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)},$$

in

$$\text{(10.)} \qquad \Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})] = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)} q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}$$

verwandelt, oder in

$$\text{(11.)} \qquad \begin{aligned} &(1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)\cdots \\ &= 1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+q^{15}+q^{22}+q^{26}+q^{35}-\cdots, \end{aligned}$$

in welcher Reihe nach den beiden ersten positiven Gliedern abwechselnd *vier* negative und *vier* positive folgen.

Wenn man die beiden ersten Factoren der elliptischen unendlichen Producte mit

$$(1\pm q^a)(1\pm q^{a+b})$$

bezeichnet, so werden die Werthe von a und b oder von $m=a+\frac{1}{2}b$, $n=\frac{1}{2}b$ für die Zähler und Nenner der Formeln (I.) durch folgendes Tableau gegeben:

II.

$$\begin{array}{rr|ccccccc|r|ccccccc}
\textit{Zähler:} & a & 2 & \dot{1} & 1 & \ddot{1} & 4 & \dot{1} & \dot{3} & m & 3 & \dot{2} & \frac{3}{2} & \ddot{\frac{3}{2}} & 6 & \dot{\frac{3}{2}} & \dot{6} \\
 & b & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 6 & n & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 3 \\
\textit{Nenner:} & a & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & m & \frac{3}{2} & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
 & b & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & n & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.
\end{array}$$

Die Fälle, in welchen immer zwei Vorzeichen $+$, das dritte $-$ sind, habe ich bei den Zählern von den Fällen, in welchen alle Vorzeichen $-$ sind, durch übergesetzte Sternchen unterschieden. Das doppelte Sternchen bezieht sich auf den besondern Fall des Zählers des vierten Bruches, wo die Vorzeichen der Potenzen von q in den einzelnen Factoren abwechselnd $+$ und $-$ sind. Man erhält aus den angegebenen Werthen von a und b die Reihe der Exponenten durch ihre ersten Differenzen b, a, a, b, a, a etc.

Bezeichnet man die elliptischen unendlichen Producte durch die *allgemeinen* Ausdrücke ihrer Factoren, wie in den Formeln (5.) und (6.), so erhält man aus I.

die folgenden Gleichungen, deren Richtigkeit ganz von selbst in die Augen fällt, wenn man nur die eine Hülfsgleichung

$$\Pi[(1+q^{i+1})(1-q^{2i+1})] = \frac{\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})]}{\Pi(1-q^{i+1})} = 1$$

benutzt:

III.

$$\begin{aligned}
\Pi(1+q^{i+1}) &= \frac{\Pi(1-q^{2i+2})}{\Pi(1-q^{i+1})} \quad \cdots\cdots \quad 1. \\
&= \frac{\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]}{\Pi(1-q^{2i+2})} \quad \cdots\cdots \quad 2. \\
&= \frac{\Pi(1-q^{i+1})}{\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]} \quad \cdots\cdots \quad 3. \\
&= \frac{\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})]}{\Pi[(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})]} \quad \cdots\cdots \quad 4. \\
&= \frac{\Pi(1-q^{4i+4})}{\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]} \quad \cdots\cdots \quad 5. \\
&= \frac{\Pi[(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})]}{\Pi[(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})]} \quad \cdots\cdots \quad 6. \\
&= \frac{\Pi[(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})]}{\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})]} \quad \cdots\cdots \quad 7.
\end{aligned}$$

Man kann bemerken, dass alle diese Brüche im Zähler oder Nenner oder in beiden einen der fünf in den Formeln (9.) angegebenen particulären Ausdrücke enthalten, in welchen von den drei einfachen unendlichen Producten von der Form $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$, durch deren Multiplication jedes der elliptischen unendlichen Producte (1.) oder (2.) gebildet wird, entweder zwei einander gleich sind, oder zwei oder auch alle drei in ein solches einfaches unendliches Product zusammengezogen werden können.

Wenn man von diesen Zusammenziehungen keinen Gebrauch macht, so kann man die unter dem Zeichen Π befindlichen *allgemeinen* Ausdrücke der Factoren der elliptischen unendlichen Producte *aus ihren drei ersten Factoren* erhalten, indem man in diesen drei Factoren zu den Exponenten von q das Product des Index i mit dem im *dritten* Factor befindlichen Exponenten hinzufügt, wie dies die Vergleichung der Formeln (I.) und (III.) vor Augen legt. Nur in dem Zähler des vierten Bruches müssen wegen der besondern Beschaffenheit desselben die Potenzen von q in den einzelnen Factoren noch mit $(-1)^i$ multiplicirt werden. Man erhält dann zufolge der angegebenen Regel aus den drei ersten Factoren $(1+q)(1-q^2)(1+q^3)$ das unendliche Product

$$\Pi[(1+(-1)^i q^{3i+1})(1-(-1)^i q^{3i+2})(1+(-1)^i q^{3i+3})],$$

oder wenn man für i einmal alle geraden und dann alle ungeraden Zahlen setzt,

$$\Pi[(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})] = \Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})],$$

wie in (III.).

Die Reihenentwickelungen der elliptischen unendlichen Producte der hier betrachteten Art erhält man ebenfalls leicht aus ihren *beiden* ersten Factoren

$$(1+q^a)(1+q^{a+b}) \quad \text{oder} \quad (1-q^a)(1-q^{a+b}).$$

Aus den Formeln (3.) und (4.) der Einleitung erhellt nämlich, dass die Exponenten der Potenzen von q in diesen Entwickelungen eine Reihe bilden, deren erstes Glied 0 ist, und deren erste Differenzen

$$a,\ b,\ 3a,\ 2b,\ 5a,\ 3b \ \text{etc.}$$

sind. Zufolge der Formeln (5.) und (6.) wird das allgemeine Glied dieser Entwickelungen

$$q^{\frac{1}{2}(2a+b)ii+\frac{1}{2}bi} \quad \text{oder} \quad (-1)^i q^{\frac{1}{2}(2a+b)ii+\frac{1}{2}bi},$$

und man erhält aus demselben die einzelnen Glieder in der Ordnung, wie die Exponenten von q der Gröfse nach auf einander folgen, wenn man dem Index i nach einander die Werthe

$$0,\ -1,\ +1,\ -2,\ +2,\ -3 \ \text{etc.}$$

beilegt. Die Coëfficienten der Potenzen von q vom zweiten Gliede an werden, wenn die beiden ersten Factoren des unendlichen Products $(1-q^a)(1-q^{a+b})$ sind, abwechselnd -1, -1 und $+1$, $+1$, oder, wenn dieselben $(1+q^a)(1+q^{a+b})$ sind, alle $+1$. Wenn $b=0$, werden vom zweiten Gliede an immer zwei aufeinander folgende Glieder der Entwickelung einander gleich, und können daher in ein Glied, das den Coëfficienten -2 oder $+2$ erhält, zusammengezogen werden.

Es ist im Vorhergehenden immer angenommen, was unbeschadet der Allgemeinheit verstattet ist, dass a und b positiv sind. Betrachtet man nämlich die allgemeine Form der elliptischen unendlichen Producte (1.) und (2.),

$$\Pi[(1\pm q^{2mi+m-n})(1\pm q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})],$$

in welcher m immer positiv sein muss, weil sonst die Factoren nicht convergiren, so kann man darin auch n immer positiv annehmen, da das Product ungeändert bleibt, wenn man n in $-n$ verändert; es wird daher auch $b=2n$ positiv. Es kann endlich auch $n<m$ oder $m-n=a$ positiv angenommen werden. Denn setzt man in dem vorstehenden unendlichen Producte $n+2km$ statt n, so erleidet dasselbe keine weitere Veränderung, als dass es mit einem Factor

$$\frac{1\pm q^{m-n-2km}}{1\pm q^{-m+n+2km}} \cdot \frac{1\pm q^{3m-n-2km}}{1\pm q^{-3m+n+2km}} \cdots \frac{1\pm q^{(2k-1)m-n-2km}}{1\pm q^{-(2k-1)m+n+2km}} = (\pm 1)^k q^{-(kkm+kn)}$$

multiplicirt wird. Man kann daher n immer kleiner als $2m$ annehmen. Ist n kleiner als $2m$, aber gröfser als m, so kann man $n+m$ für n setzen, wo $n<m$. Hierdurch aber verwandeln sich die unendlichen Producte

$$\Pi(1\pm q^{2mi+m-n}), \qquad \Pi(1\pm q^{2mi+m+n})$$

in

$$(1\pm q^{-n})\Pi(1\pm q^{2mi+m+m-n}), \qquad (1\pm q^n)^{-1}\Pi(1\pm q^{2mi+m-(m-n)}),$$

und daher die elliptischen unendlichen Producte (1.) und (2.) in andere, in welchen bloss $m-n$ für n gesetzt ist, abgesehen von einem Factor $\pm q^{-n}$, mit welchem man noch zu multipliciren hat; die Gröfse $m-n$ ist aber positiv und kleiner als m. Es können daher in allen Fällen die elliptischen unendlichen Producte (1.) und (2.) auf solche zurückgeführt werden, in welchen n positiv und kleiner als m ist, und daher $a=m-n$, $b=2n$ positiv sind.

Vermittelst der obigen Regeln ist es leicht, die Reihenentwickelungen der Zähler und Nenner der Brüche anzugeben, durch welche in den Formeln (I.) das Eulersche unendliche Product ausgedrückt worden ist. Es genügt hierzu, die beiden ersten Factoren jedes Zählers und Nenners, oder auch, wenn man will, das Tableau der Werthe von a und b in (II.) zu betrachten. Nur für den Zähler des vierten Bruches, der von etwas abweichender Beschaffenheit ist, und noch die Aenderung von q in $-q$ erfordert, hat man sich der Formeln (10.) und (11.) zu bedienen. Man erhält hiernach die folgenden Ausdrücke des Eulerschen Products, von denen der erste der von Euler selbst gefundene ist:

IV.

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\dots$$

$$= \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-\cdots}{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-\cdots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}} \quad \dots \quad 1.$$

$$= \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+q^{15}+\cdots}{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-\cdots} = \frac{\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}} \quad \dots \quad 2.$$

$$= \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{ii}} \quad \dots \quad 3.$$

$$= \frac{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+q^{15}+\cdots}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots} = \frac{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)} q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii}} \quad \dots \quad 4.$$

$$= \frac{1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-q^{48}-q^{60}+\cdots}{1-q-q^3+q^6+q^{10}-q^{15}-q^{21}+\cdots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{6ii+2i}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}} \quad \dots \quad 5.$$

$$= \frac{1+q+q^2+q^5+q^7+q^{12}+q^{15}+\cdots}{1-2q^3+2q^{12}-2q^{27}+2q^{48}-\cdots} = \frac{\Sigma q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{3ii}} \quad \dots \quad 6.$$

$$= \frac{1+q^3+q^9+q^{18}+q^{30}+q^{45}+\cdots}{1-q-q^5+q^8+q^{16}-q^{21}-q^{33}+\cdots} = \frac{\Sigma q^{6ii+3i}}{\Sigma(-1)^i q^{3ii+2i}} \quad \dots \quad 7.$$

Euler benutzt am angeführten Orte die von ihm gegebene Formel

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots} = 1+C_1q+C_2q^2+C_3q^3+C_4q^4+\cdots,$$

um für die Coëfficienten C_i ein recurrirendes Gesetz zu erhalten. Solcher recurrirender Gesetze für die Gröfsen C_i findet man durch die Formeln (IV.) *sieben* verschiedene. Das bequemste gewährt der vorletzte der Brüche (IV.). Derselbe giebt den Satz:

> Wenn C_i die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl i in beliebige ungleiche Zahlen oder in gleiche und ungleiche ungerade Zahlen bedeutet, so wird
>
> $$C_i = 2[C_{i-3}-C_{i-12}+C_{i-27}-C_{i-48}+C_{i-75}-\cdots],$$
>
> wo man, wenn i die Form $\frac{1}{2}[3nn\pm n]$ hat, rechts vom Gleichheitszeichen noch $+1$ hinzufügen muss.

Nach der Eulerschen Recursionsformel wird jeder Coëfficient C_i durch ungefähr $\sqrt{\frac{8i}{3}}$, nach der vorstehenden Recursionsformel durch ungefähr $\sqrt{\frac{i}{3}}$ vorhergehende Coëfficienten gefunden, so dass man nach der letztern jeden Coëfficienten aus ungefähr $\sqrt{8}$ mal oder nur aus beinahe *dreimal* so wenigen vorhergehenden durch Addition und Subtraction zusammenzusetzen hat.

Wenn man die beiden ersten oder den ersten und dritten von den sieben Brüchen (IV.) mit einander multiplicirt, so erhält man zwei Brüche ähnlicher Art auch für das ***Quadrat*** des Eulerschen Productes:

V.

$$[(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\dots]^2 = \Pi(1+q^{i+1})^2$$

$$= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)\dots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots} = \frac{\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]}{\Pi(1-q^{i+1})}$$

$$= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots}{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2(1-q^4)\dots} = \frac{\Pi(1-q^{2i+2})}{\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]}$$

$$= \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots} = \frac{\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}$$

$$= \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{ii}}.$$

Wenn man die *drei* ersten von den Brüchen (IV.) mit einander multiplicirt, erhält man einen ähnlichen Bruch auch noch für den *Cubus* desselben Productes. Man kann aber für diesen Cubus auch eine Darstellung durch einen Bruch anderer Art finden, dessen Zähler und Nenner zwar ebenfalls unendliche Reihen sind, in denen die Exponenten von q eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, die Coëfficienten aber nicht mehr der positiven oder negativen Einheit gleich, sondern, abgesehen vom Zeichen, die Glieder einer arithmetischen Reihe der ***ersten*** Ordnung sind. Man erhält diese Darstellung mit Hülfe der in den ***Fund. Nov.*** §. 66, (5.) gegebenen Formel:

$$[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots]^3 = 1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\cdots = \Sigma(4i+1)q^{2ii+i},$$

und der daraus durch Verwandlung von q in q^2 abgeleiteten. Hiernach werden die beiden Ausdrücke für den *Cubus* des Eulerschen Productes:

VI.

$$[(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\dots]^3 = \Pi(1+q^{i+1})^3$$

$$= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)\dots}{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2(1-q^4)\dots} = \frac{\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]}{\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]}$$

$$= \left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots}\right\}^3 = \frac{\Pi(1-q^{2i+2})^3}{\Pi(1-q^{i+1})^3}$$

$$= \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots} = \frac{\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{ii}}$$

$$= \frac{1-3q^2+5q^6-7q^{12}+9q^{20}-\cdots}{1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\cdots} = \frac{\Sigma(4i+1)q^{4ii+2i}}{\Sigma(4i+1)q^{2ii+i}}.$$

Wenn man in dieser und den vorhergehenden Formeln die Zähler und Nenner mit einander vertauscht, so erhält man die Ausdrücke für das unendliche Product

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots,$$

so wie für sein Quadrat und seinen Cubus.

Ich will jetzt das unendliche Product, durch welches *Fund.* §. 36, (8.) die 4[te] Wurzel des Complements des Moduls der elliptischen Functionen ausgedrückt wird,

$$\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\ldots} = \sqrt[4]{k'}$$

als Quotienten zweier elliptischen unendlichen Producte von der hier betrachteten Art darstellen. Es kann auch dies auf mehrere Arten geschehen, wie aus den folgenden leicht zu beweisenden Formeln erhellt:

VII.

$$\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots} = \frac{\Pi(1-q^{2i+1})}{\Pi(1+q^{2i+1})}$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)\ldots} = \frac{\Pi(1-q^{i+1})}{\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})]} \quad \ldots \quad 1.$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)\ldots} = \frac{\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]}{\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]} \quad \ldots \quad 2.$$

$$= \frac{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)(1-q^6)^2\ldots} = \frac{\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]}{\Pi[(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})]} \quad \ldots \quad 3.$$

$$= \frac{(1-q^2)^2(1-q^4)(1-q^6)^2\ldots}{(1+q)^2(1-q^2)(1+q^3)^2\ldots} = \frac{\Pi[(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})]}{\Pi[(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]} \quad \ldots \quad 4.$$

Die Zähler und Nenner der vorstehenden vier Brüche, durch welche das vorgelegte unendliche Product ausgedrückt werden kann, gehören sämmtlich zu den elliptischen unendlichen Producten, welche in den Formeln (9.) entwickelt sind, aufser dem Nenner des ersten, der noch die Verwandlung von q in $-q$ erfordert, und in der Formel (10.) oder (11.) entwickelt ist. Substituirt man diese Reihenentwickelungen, die man auch mittelst der oben gegebenen Regeln aus den beiden ersten Factoren der unendlichen Producte ableiten kann, so erhält man die folgenden Formeln:

VIII.

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-\ldots}{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+\ldots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)} q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}} \quad \ldots \quad 1.$$

$$= \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\ldots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\ldots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}}{\Sigma q^{2ii+i}} \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

$$= \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\ldots}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\ldots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{ii}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii}} \quad \ldots\ldots \quad 3.$$

$$= \frac{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{2ii}}{\Sigma q^{ii}} \quad \ldots\ldots \quad 4.$$

Die beiden letzten Brüche können aus einander durch die Betrachtung abgeleitet werden, dass das vorgelegte Product, wenn man q in $-q$ verändert, den reciproken Werth annimmt. Wenn man diese beiden Brüche mit einander multiplicirt, so heben der Nenner des ersten und der Zähler des zweiten einander auf, und man erhält für das *Quadrat* des vorgelegten Products oder für $\sqrt{k'}$ den in den *Fund.* §. 65, (11.) angegebenen Ausdruck.

Die 4[te] Wurzel des Moduls selbst wird zufolge *Fund.* §. 36, (7.)

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)\ldots}{(1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})(1-q^{14})\ldots}.$$

Wenn man wieder das in $\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}$ multiplicirte unendliche Product durch einen Bruch auszudrücken sucht, dessen Zähler und Nenner zu den elliptischen unendlichen Producten (1.) oder (2.) oder den daraus durch Verwandlung von q in $-q$ abgeleiteten gehören, so kann dies durch die folgenden *vier* Formeln geschehen:

IX.

$$\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots} = \frac{\Pi(1+q^{2i+2})}{\Pi(1+q^{2i+1})}$$

$$= \frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})\ldots}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)\ldots} = \frac{\Pi(1-q^{4i+4})}{\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})]} \quad \ldots \quad 1.$$

$$= \frac{(1+q^2)(1+q^6)(1-q^8)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)\ldots} = \frac{\Pi[(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})]}{\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]} \quad \ldots \quad 2.$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)\ldots} = \frac{\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]}{\Pi[(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})]} \quad \ldots \quad 3.$$

$$= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)\ldots}{(1+q)^2(1-q^2)\ldots} = \frac{\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]}{\Pi[(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]} \quad \ldots \quad 4.$$

Hieraus ergeben sich mit Hülfe der Formeln (9.)—(11.) die folgenden vier Ausdrücke von $\sqrt[4]{k}$:

X.

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1-q^4-q^8+q^{20}+\cdots}{1+q-q^2-q^5-\cdots} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{6ii+2i}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)}q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}} \quad \ldots \quad 1.$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots}{1+q+q^3+q^6+\cdots} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{4ii+2i}}{\Sigma q^{2ii+i}} \quad \ldots \quad 2.$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1-q-q^3+q^6+\cdots}{1-2q^2+2q^8-\cdots} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii}} \quad \ldots \quad 3.$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1+q+q^3+q^6+\cdots}{1+2q+2q^4+\cdots} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma q^{ii}} \quad \ldots \quad 4.$$

Wenn man den zweiten und vierten Bruch mit einander multiplicirt, so hebt sich der Nenner des zweiten mit dem Zähler des vierten, und man erhält die *Fund.* §. 65 (10.) für $\sqrt{k}$ gegebene Formel. Man sieht, dass die für $\sqrt[4]{k}$ und die für $\sqrt[4]{k'}$ gefundenen vier Brüche respective *dieselben Nenner* haben, was in den Anwendungen dieser Formeln von Wichtigkeit ist.

Von besonderem Interesse sind in diesen Formeln diejenigen Brüche, in welchen der Zähler aus dem Nenner, wie in IV. (1.), X. (2.), oder der Nenner aus dem Zähler, wie in VIII. (3.), durch Verwandlung von q in q^2 erhalten wird. Wenn man nämlich in solchem Bruche wiederholt q^2 für q substituirt, und die dadurch erhaltenen Resultate mit einander multiplicirt, so giebt die unendliche Multiplication den Zähler oder Nenner des Bruches. Zugleich wird durch dieses Verfahren aus jedem Factor $1+q^a$ ein Factor $\frac{1}{1-q^a}$. Wenn daher, wie in den angeführten Fällen, diese Brüche unendlichen Producten gleich sind, welche aus Factoren $(1+q^a)^{\pm\alpha}$ gebildet werden können, so kann man aus denselben sogleich auch diejenigen unendlichen Producte ableiten, welchen die Zähler und die Nenner der Brüche für sich besonders gleich werden. Diese Methode ist in der Theorie der elliptischen Functionen von großer Wichtigkeit, indem sie dazu dient, aus den leichter zu findenden Formeln für den Modul die Factoren- und Reihenentwickelung des ganzen elliptischen Integrals abzuleiten.

Die im Vorhergehenden aufgestellten Formeln geben eine Gleichung zwischen je zwei Brüchen, durch welche man dasselbe unendliche Product ausgedrückt hat. Aus jeder dieser Gleichungen geht durch Multipliciren über Kreuz

eine andere zwischen zwei Producten hervor, von denen jedes durch Multiplication zweier elliptischer unendlicher Producte oder elliptischer unendlicher Reihen gebildet wird, welche aus (1.) oder (2.) für specielle Werthe von m und n erhalten werden. Solcher Gleichungen wird es überhaupt so viele geben, als es unendliche Producte giebt, die man auf verschiedene Art in zwei elliptische unendliche Producte von der Form der unendlichen Producte (1.) oder (2.) zerfällen kann. Man wird 21 Gleichungen dieser Art aus (IV.), *zwei* neue aus (VIII.) und *zwei* andere aus (X.), ferner *eine* Gleichung aus (VI.) erhalten. Die übrigen Gleichungen, welche man noch aus (VIII.), (X.) und (V.) ableiten kann, sind in diesen enthalten.

Die Producte von der Form

$$\Sigma \pm q^{mii+ni}\,.\,\Sigma \pm q^{m'ii+n'i},$$

welche sich auf jeder Seite des Gleichheitszeichens der auf die angegebene Art erhaltenen Gleichungen befinden, können durch *Doppelsummen* von der Form

$$\Sigma \pm q^{mii+m'kk+ni+n'k}$$

dargestellt werden, in welchen jedem der Indices i und k die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, etc. zukommen. In den hier und weiter unten betrachteten Doppelsummen dieser Art sind $2m$ und $2n$ und eben so $2m'$ und $2n'$ ganze positive Zahlen, und zwar gleichzeitig gerade oder ungerade. Das Zeichen $\pm$ erhält in den verschiedenen Fällen Werthe von der Form

$$(-1)^i, \quad (-1)^{i+k}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(i+k)}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(i+k)+k}.$$

Nur in der einen Gleichung, welche aus den Brüchen X. (2.), (4.) entspringt, haben alle Glieder in beiden Doppelsummen das Vorzeichen $+$; in diesem Falle werden die *einzelnen* Glieder der Doppelsummen identisch, wodurch die Gleichung einen ganz elementaren Charakter erhält. In allen übrigen sind die quadratischen Formen, in denen die Exponenten der beiden einander gleichen Doppelsummen enthalten sind, nicht äquivalent, so dass nicht jede in der einen enthaltene Zahl nothwendig auch in der andern enthalten ist. Es müssen daher die Vorzeichen der Glieder in beiden Doppelsummen abwechselnd positiv und negativ sein, damit sich in jeder derselben alle Glieder, deren Exponenten nicht in beiden quadratischen Formen zugleich enthalten sind, gegenseitig zerstören können.

Zu den auf die angegebene Art aus den obigen Formeln abgeleiteten Gleichungen können noch *drei* andere etwas mehr verborgene hinzugefügt werden, zu welchen man durch folgende Betrachtungen gelangt.

Aus der Formel (5.) der Einleitung folgt für $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{3}{2}$ und für $m=\frac{5}{2}$, $n=\frac{1}{2}$:

$$\Pi[(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})] = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5ii+3i)},$$
$$\Pi[(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+5})] = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5ii+i)}.$$

Die Multiplication dieser beiden Formeln ergiebt, wenn man die letzte der Gleichungen (9.) benutzt,

$$(12.)\qquad \Pi[(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})] = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5ii+5kk+3i+k)}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+15kk+i+5k)}.$$

Es ist ferner

$$\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{8i+8})^2]$$
$$= \Pi[(1-q^{8i+1})(1-q^{8i+7})(1-q^{8i+8})].\Pi[(1-q^{8i+3})(1-q^{8i+5})(1-q^{8i+8})]$$
$$= \Pi[(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})].\Pi[(1+q^{16i+4})(1+q^{16i+12})(1-q^{16i+16})],$$

und daher, wenn man nach einander in (5.) $m=4$, $n=3$; $m=4$, $n=1$; $m=2$, $n=1$, und in (6.) $m=8$, $n=4$ setzt:

$$(13.)\qquad \Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{8i+8})^2] = \Sigma(-1)^{i+k} q^{4ii+4kk+3i+k}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{2ii+8kk+i+4k}.$$

Ferner ist

$$\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+12})^2]$$
$$= \Pi[(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})].\Pi[(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+12})]$$
$$= \Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})].\Pi[(1+q^{24i+6})(1+q^{24i+18})(1-q^{24i+24})],$$

und daher, wenn man nach einander in (5.) $m=6$, $n=5$; $m=6$, $n=1$; $m=3$, $n=2$, und in (6.) $m=12$, $n=6$ setzt,

$$(14.)\qquad \Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+12})^2] = \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+6kk+5i+k}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{3ii+12kk+2i+6k}.$$

Diese drei Formeln sind auf analoge Art gebildet, und entsprechen respective den Zahlen 5, 8, 12. Es scheint nicht, dass es noch mehrere ähnlich gebildete giebt.

Die hier betrachteten Doppelsummen

$$\Sigma \pm q^{mii+m'kk+ni+n'k}$$

werden durch das Gesetz der Vorzeichen ihrer Glieder und durch die quadratischen Formen definirt, in welchen die Exponenten derselben enthalten sind. Der Charakter dieser Formen, in welchen $2m$ und $2m'$ ganze positive Zahlen sind, wird hauptsächlich von dem Producte $4mm'$ abhängen, welches man von einem quadratischen Factor, wenn es solchen hat, befreit. Ich will daher die Gleichungen, welche man zwischen zwei Doppelsummen der angegebenen Art findet, nach den Werthen, welche die von ihren quadratischen Factoren befreiten Zahlen $4mm'$ in der einen und der andern Doppelsumme annehmen, in verschiedene Klassen theilen. Es soll hiebei mit

$$(\mu,\ \nu)$$

die Klasse bezeichnet werden, welche alle diejenigen Gleichungen umfafst, in denen der Werth von $4mm'$ für die eine Doppelsumme μ, für die andere ν ist, oder sich von diesen Zahlen nur durch einen quadratischen Factor unterscheidet.

Unter den zwischen Doppelsummen der angegebenen Art gefundenen Gleichungen können diejenigen als von mehr elementarer Natur angesehen werden, in welchen $\mu=\nu$, oder in welchen $4mm'$ für die beiden einander gleichen Doppelsummen entweder denselben Werth oder zwei nur durch einen quadratischen Factor unterschiedene annimmt. Von dieser Art Gleichungen enthält die hier unten folgende Formeltabelle drei Klassen (1, 1), (2, 2), (3, 3). Eine zu einer Klasse (6, 6) gehörige Gleichung geht aus den im Vorhergehenden gefundenen Formeln nicht hervor. Die Gleichungen dieser drei Klassen lassen sich alle unmittelbar beweisen, d. h. ohne dass hierzu ein besonderer Satz der Analysis oder Arithmetik zu Hülfe genommen zu werden braucht. Wenn solche unmittelbare Verification keine neuen merkwürdigen Resultate giebt, so gewährt sie das Mittel, zu Resultaten, welche auf einem sogenannten indirecten Wege, wie hier durch die Zerfällung der unendlichen Reihen in unendliche Producte, in einem allgemeineren Zusammenhange gefunden sind, auf einem elementaren und directen Wege zu gelangen. Man bewerkstelligt solche Verification durch eine Art von Synthesis, durch welche die auf indirectem Wege gefundenen Resultate auf reine Identitäten zurückgeführt werden. Diese Synthesis ist in allen Fällen, in welchen sie möglich ist, von Interesse. Die gefundenen Identitäten geben nämlich entweder verborgene Eigenschaften der Gröfsen, die oft einem heterogenen Gebiet angehören, oder, wenn sie evident sind, einfache und directe Beweise und bisweilen neue Methoden. Uebrigens sind gerade diese elementareren Gleichungen, welche den Klassen (μ, μ) angehören, wichtiger Verallgemeinerungen fähig.

Die Klassen, in denen μ und ν von einander verschieden sind, oder in denen die Werthe, die $4mm'$ für die beiden einander gleichen Doppelsummen annimmt, weder die nämlichen sind, noch sich bloss durch einen quadratischen Factor unterscheiden, sind auf den Fall bezüglich, wo die Entwickelung der unendlichen Producte nur solche Glieder giebt, deren Exponenten in zwei wesentlich verschiedenen quadratischen Formen zugleich enthalten sind. Man findet aus den obigen Formeln *sechs* Klassen dieser Art, welche den Combinationen je zweier von den Zahlen 1, 2, 3, 6 entsprechen, und außerdem noch eine Klasse, welche der Combination der Zahlen 1 und 5 entspricht, aber nur *eine* Gleichung enthält. Die hier folgende Formelntabelle wird daher *zehn* Klassen Gleichungen enthalten, deren Charakter durch die Symbole

$$(1,1),\quad (2,2),\quad (3,3),\quad (1,2),\quad (1,3),$$
$$(1,6),\quad (2,3),\quad (2,6),\quad (3,6),\quad (1,5)$$

bezeichnet wird. Bei jeder Formel habe ich die Gleichung angemerkt, aus der sie erhalten worden ist.

[*In den unendlichen Producten sind dem Index i die Werthe* 0, 1, 2, 3 *etc., in den Doppelsummen den Indices i und k die Werthe* 0, ±1, ±2, ±3, *etc. beizulegen.*]

A. (1, 1).

1. $\Pi[(1+q^{2i+1})^2(1-q^{4i+4})^2]$

$= \Sigma q^{2ii+2kk+i+k} = \Sigma q^{ii+4kk+2k} \dots\dots$ X. 2. 4.

2. $\Pi[(1-q^{6i+2})(1-q^{3i+3})^2(1-q^{6i+4})]$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+3kk+i} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+3kk+i+k)} \dots\dots$ IV. 1. 6.

3. $\Pi[(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})(1-q^{6i+6})^2]$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+3kk+i+2k} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+12kk+i+6k)} \dots\dots$ IV. 1. 7.

4. $\Pi[(1-q^{4i+2})^4(1-q^{4i+4})^2]$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2ii+2kk} = \Sigma(-1)^i q^{ii+kk} \dots\dots$ VIII. 3. 4.

5. $\Pi[(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2]$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{4ii+4kk+2i} = \Sigma(-1)^k q^{2ii+2kk+i+k}$ *) $\dots\dots$ D. 2. 3.

---

*) Die Formel (A. 5.) ergiebt sich aus der Combination der Formeln (D. 2.) und (D. 3.).

6. $\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{8i+8})^2]$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{4ii+4kk+i+3k} = \Sigma(-1)^i q^{2ii+8kk+i+4k} \dots\dots$ 13.

7. $\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+12})^2]$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+6kk+i+5k} = \Sigma(-1)^i q^{3ii+12kk+2i+6k} \dots\dots$ 14.

8. $\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})^4]$

$= \Sigma(4k+1) q^{2ii+2kk+i+k} = \Sigma(-1)^i (4k+1) q^{ii+4kk+2k} \dots\dots$ VI.

B. (2, 2).

1. $\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2]$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+2k)} = \Sigma(-1)^i q^{ii+2kk+k} \dots\dots$ IV. 2. 3; V.

2. $\Pi[(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+6})^2]$

$= \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+3kk+3i} \dots\dots$ IV. 6. 7.

C. (3, 3).

$\Pi(1-q^{2i+2})^2$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+2kk+2i} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)}$

$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)} \dots\dots$ IV. 4. 5; X. 1. 3; VIII. 1. 2.

D. (1, 2).

1. $\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2]$

$= \Sigma(-1)^k q^{2ii+2kk+i} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+2k)}$

$= \Sigma(-1)^k q^{ii+2kk+k} \dots\dots$ VIII. 2. 4; IV. 2. 4; X. 3. 4.

2. $\Pi[(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2]$

$= \Sigma(-1)^k q^{2ii+2kk+i+k} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+6kk+i+2k}$

$= \Sigma(-1)^i q^{2ii+4kk+2k} \dots\dots$ IV. 2. 5; X. 2. 3.

3. $\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2]$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2ii+2kk+k} = \Sigma(-1)^i q^{ii+2kk+k} \dots\dots$ VIII. 2. 3.

E. (1, 3).

1. $\Pi(1-q^{i+1})^2$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+3kk+i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+kk+i} \dots\dots$ IV. 1. 3.

2. $\Pi(1-q^{2i+2})^2$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+3kk+i+k} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)} \dots\dots$ IV. 1. 2.

F. (1, 6).

1. $\Pi[(1-q^{4i+2})^3(1-q^{4i+4})^2]$

$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+3kk+i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+2kk+i} \quad \dots\dots \quad \text{IV. 1. 4.}$$

2. $\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2]$

$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+12kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+2kk+i+k} \quad \dots\dots \quad \text{IV. 1. 5.}$$

G. (2, 3).

1. $\Pi[(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{12i+6})^3(1-q^{12i+12})^2]$

$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i)} = \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i)} \quad \dots\dots \quad \text{IV. 4. 6.}$$

2. $\Pi[(1-q^{4i+2})^2(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2]$

$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+2kk+3i} \quad \dots\dots \quad \text{IV. 4. 7.}$$

3. $\Pi[(1-q^{6i+3})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2]$

$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+3kk+2i} = \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)} \quad \dots\dots \quad \text{IV. 5. 6.}$$

4. $\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{12i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2]$

$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+3kk+2i+k} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+2kk+3i+k} \quad \dots\dots \quad \text{IV. 5. 7.}$$

H. (2, 6).

1. $\Pi[(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})(1-q^{6i+3})^3(1-q^{6i+6})^2]$

$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i)} = \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+2kk+i)} \quad \dots\dots \quad \text{IV. 3. 6.}$$

2. $\Pi[(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})^2]$

$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+kk+3i} \quad \dots\dots \quad \text{IV. 3. 7.}$$

3. $\Pi[(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+8})]$

$$= \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+2k)} = \Sigma(-1)^k q^{2ii+3kk+i} \quad \dots\dots \quad \text{IV. 2. 6.}$$

4. $\Pi[(1-q^{6i+2})(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+12})^2]$

$$= \Sigma(-1)^k q^{6ii+3kk+3i+k} = \Sigma(-1)^k q^{2ii+3kk+i+2k} \quad \dots\dots \quad \text{IV. 2. 7.}$$

I. (3, 6).

1. $\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+2})^3(1-q^{4i+4})^2]$

$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i)} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+2kk+i)} \quad \text{VIII. 1. 3; 1. 4; IV. 3. 4.}$$

2. $\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2]$

$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+kk+2i} \quad \dots\dots \quad \text{X. 1. 4; IV. 3. 5.}$$

3. $\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})^2]$

$$= \Sigma(-1)^k q^{2ii+6kk+i+2k} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} q^{\frac{1}{2}(8ii+3kk+4i+k)} \quad \dots\dots \quad \text{X. 1. 2.}$$

K. (1, 5).

$$\Pi[(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})^2]$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5ii+5kk+3i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+15kk+i+5k)} \quad \dots\dots \quad 12.$$

Anmerkung. Die *drei* Formeln A. (2.), A. (4.), A. (5.) sind particuläre Fälle einer *allgemeineren* Formel. Man hat nämlich, wie sich auf den ersten Anblick ergiebt, die folgende Gleichung:

$$\Pi[(1+q^{2mi+m-n})(1+q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})].\Pi[(1-q^{2mi+m-n})(1-q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})]$$
$$= \Pi[(1-q^{4mi+2m-2n})(1-q^{4mi+2m+2n})(1-q^{4mi+4m})].\Pi[(1-q^{4mi+2m})^2(1-q^{4mi+4m})],$$

woraus sich vermöge der Formeln (5.) und (6.) der Einleitung die folgende Gleichung zwischen zwei Doppelsummen ergiebt:

$$(15.) \qquad \Sigma(-1)^k q^{m(ii+kk)+n(i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{2m(ii+kk)+2ni}.$$

Die drei Formeln A. (2.), A. (4.), A. (5.) werden hieraus erhalten, wenn man respective $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{1}{2}$; $m=1, n=0$; $m=2, n=1$ setzt.

Ich will noch einiges über die Art bemerken, wie in der vorstehenden Formelntabelle die unendlichen Producte ausgedrückt worden sind. Diese unendlichen Producte können nämlich auf mannichfache Art dargestellt werden, wie alle, welche durch Multiplication einfacher unendlicher Producte von der Form $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$ oder ihrer Potenzen gebildet werden. Man bewerkstelligt ihre Transformationen, indem man die einfachen unendlichen Producte $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$, welche ihre Factoren bilden, in mehrere ähnliche unendliche Producte zerfällt. Dies geschieht mittelst der Formel

$$(16.) \quad \Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta}) = \Pi(1\pm q^{p\alpha i+\beta})\Pi(1\pm q^{p\alpha i+\alpha+\beta})\Pi(1\pm q^{p\alpha i+2\alpha+\beta})\dots\Pi(1\pm q^{p\alpha i+(p-1)\alpha+\beta}),$$

in welcher p eine beliebige positive ganze Zahl bedeuten kann, und immer das obere oder immer das untere Zeichen zu nehmen ist. Mehrere von den unendlichen Producten, welche aus solchen Zerfällungen von von einander verschiedenen unendlichen Producten $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$, $\Pi(1\pm q^{\alpha' i+\beta'})$, etc. hervorgehen, kann man dann bisweilen wieder umgekehrt mittelst derselben Formel in ein einziges einfaches unendliches Product zusammenziehen. Wenn aus den vorgenommenen Zerfällungen zwei Factoren $\Pi(1+q^{\alpha i+\beta})$, $\Pi(1-q^{\alpha i+\beta})$ entstehen, wird man dieselben ebenfalls in ein einziges einfaches unendliches Product $\Pi(1-q^{2\alpha i+2\beta})$ zusammenziehen können. Endlich wird man das Product $\Pi(1+q^{\alpha i+\alpha})\,\Pi(1-q^{2\alpha i+\alpha})$, welches der Einheit gleich ist, so oft dasselbe nach den geschehenen Zerfällungen angetroffen wird, fortwerfen können. Durch diese Verfahrungsarten kann man demselben Ausdruck unendlich viele Formen geben, und es werden bisweilen selbst die einfachsten Formen, welche derselbe annehmen kann, noch so verschieden unter einander sein können, dass ihre Identität nicht sogleich in die Augen springt.

Unter den verschiedenen Formen, welche die hier betrachteten unendlichen Producte durch die im Vorigen angedeuteten Zerfällungen und Zusammenziehungen erhalten, kann man einige als *Normalformen* ansehen. *Es soll ein Ausdruck*

$$\Pi[(1\pm q^{\alpha i+\beta})^{r}(1\pm q^{\alpha' i+\beta'})^{r'}(1\pm q^{\alpha'' i+\beta''})^{r''}\ldots]$$

eine Normalform haben, wenn die unendlichen Producte

$$\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta}),\quad \Pi(1\pm q^{\alpha' i+\beta'}),\ etc.$$

keine gemeinschaftlichen Factoren oder nicht solche Factoren haben, die sich nur durch die Vorzeichen der gleichnamigen Potenzen von q unterscheiden. Es werden daher die arithmetischen Reihen, welche die Exponenten $\alpha i+\beta$, $\alpha' i+\beta'$, etc. bilden, wenn man der Gröfse i die Werthe 0, 1, 2, 3, etc. in inf. giebt, lauter von einander verschiedene Zahlen enthalten müssen. Hierzu ist erforderlich, *dass keine zwei von den Zahlen α, α', α'', etc. relative Primzahlen sind, und, wenn f den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen α und α' bedeutet, die entsprechenden Zahlen β und β', durch f dividirt, nicht denselben Rest lassen.*

Wenn mehrere von den einfachen unendlichen Producten, deren Potenzen, mit einander multiplicirt, eine Normalform bilden, in dieselbe Potenz erhoben sind, und es möglich ist, dieselben mittelst der obigen Formel (16.) in ein einziges einfaches unendliches Product zusammenzuziehen, so wird durch diese Zusammenziehung die Normalform nicht aufhören eine solche zu sein, zugleich aber eine einfachere Gestalt gewinnen. Wenn keine solche Zusammenziehung einer Normalform mehr stattfinden kann, wird man sagen, dass sie einen einfachsten Ausdruck hat. In solchen *einfachsten Normalformen* sind die in der Formelntabelle enthaltenen unendlichen Producte dargestellt worden. Es kann aber bisweilen *mehrere* einfachste Normalformen desselben unendlichen Productes geben, und es wird vorkommen können, dass zwei einfachste Normalformen

auch *dieselbe Anzahl* Factoren von der Form $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^{r}$ haben. So wird z. B. das unendliche Product

$$\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+3})],$$

welches bereits eine Normalform hat, in die beiden verschiedenen Formen

$$\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})],\qquad \Pi[(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})(1-q^{6i+3})]$$

zusammengezogen werden können, von denen jede eine einfachste Normalform ist, und aus derselben Anzahl einfacher unendlicher Producte gebildet wird. Es ist jedoch zu bemerken, dass die unendlichen Producte der Formelntabelle alle nur die eine dort angegebene einfachste Normalform haben.

Schätzt man die Einfachheit der Formen desselben unendlichen Productes nach der Anzahl der Factoren $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^{r}$, welche in einander multiplicirt werden, so werden die einfachsten Normalformen gewöhnlich nicht die an sich einfachsten Formen sein, welche das unendliche Product überhaupt annehmen kann. Solcher an sich einfachster Formen wird es für dasselbe unendliche Product in der Regel mehrere geben. Um eine an sich einfachste Form, welche keine Normalform ist, in eine Normalform zu verwandeln, sind Zerfällungen nöthig, durch welche die Anzahl der Factoren $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^{r}$ gewöhnlich sehr vermehrt wird. Es treten zwar auch andererseits wieder Vereinfachungen dadurch ein, dass die durch die Zerfällung ermittelten gleichen Factoren eine Potenz bilden; ferner wenn je zwei $1+q^{\alpha i+\beta}$, $1-q^{\alpha i+\beta}$ in den einen $1-q^{2\alpha i+2\beta}$ vereinigt und Producte $\Pi(1+q^{\alpha i+\alpha})\,\Pi(1-q^{2\alpha i+\alpha})$ fortgeworfen werden können; endlich, wenn man mittelst der oben aufgestellten Formel mehrere Factoren $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^{r}$, in denen der Exponent r derselbe ist, in einen einzigen zusammenziehen kann. Aber die Anzahl der Factoren $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^{r}$ pflegt hierdurch nicht so verringert zu werden, dass dadurch ihre durch die erforderten Zerfällungen entstandene Vermehrung aufgewogen würde. Dessenungeachtet habe ich den unendlichen Producten der Formelntabelle die *Normalform* gegeben, weil sich aus derselben durch die blofse Substitution der Werthe von i die wirkliche Darstellung der unendlichen Producte in der Form

$$(1\pm q^{a})^{r}(1\pm q^{a'})^{r'}(1\pm q^{a''})^{r''}\ldots,$$

in welcher die Exponenten a, a', a'', etc. lauter verschiedene Werthe haben, ohne weitere Reductionen ergiebt. Ich habe es nicht für nöthig gehalten, die hierzu erforderlichen Transformationen näher auseinanderzusetzen, da sich dieselben in den einzelnen Fällen leicht ergeben. Es wird genügen, das Verfahren an einem Beispiel zu erläutern, wozu ich das unendliche Product H. (3.) wählen will.

Die beiden Doppelsummen, welche in der Formel H. (3.) einander gleich werden, wurden durch die Reihenentwickelung der vier elliptischen unendlichen Producte

$$\Pi[(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})], \qquad \Pi(1-q^{2i+2}),$$
$$\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})], \qquad \Pi[(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})]$$

gefunden, von denen das Product der beiden ersten gleich dem Product der beiden letzten ist. Um von diesen beiden einander gleichen Ausdrücken

$$\Pi[(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})(1-q^{2i+2})],$$
$$\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})]$$

den ersten auf eine Normalform zu bringen, zerfällt man mittelst der Formel (16.) jeden seiner drei ersten unter dem Zeichen Π enthaltenen Factoren in *zwei*, den vierten in *drei* Factoren. Hierdurch erhält man

$$\Pi[(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+4})(1+q^{6i+2})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+6})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+6})],$$

oder, wenn man die Gleichungen

$$(1+q^{6i+2})(1-q^{6i+2}) = (1-q^{12i+4}), \qquad (1+q^{6i+4})(1-q^{6i+4}) = (1-q^{12i+8})$$

substituirt,

$$\Pi[(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+3})(1+q^{6i+5})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{6i+6})^2],$$

welches die dem unendlichen Producte in der Formel H. (3.) gegebene Normalform ist. Das andere unendliche Product entsteht durch Multiplication der beiden unendlichen Producte

$$\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{6i+3})^2], \qquad \Pi[(1-q^{4i+4})(1-q^{6i+6})],$$

welche ursprünglich keinen Factor mit einander gemeinschaftlich haben, und daher für sich besonders transformirt werden können. Es ist

$$\begin{aligned}\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{6i+3})^2] &= \Pi[(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+3})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+3})^2]\\ &= \Pi[(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+6})]\\ \Pi[(1-q^{4i+4})(1-q^{6i+6})] &= \Pi[(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2(1-q^{12i+6})].\end{aligned}$$

In dieser transformirten Form erhalten die beiden unendlichen Producte den Factor $\Pi(1-q^{12i+6})$ gemeinschaftlich; ihr Product wird daher den Factor $\Pi(1-q^{12i+6})^2$ haben, welcher sich mit dem Factor $\Pi(1-q^{12i+12})^2$ in den einen $\Pi(1-q^{6i+6})^2$ vereinigen läfst. Nach dieser Reduction giebt die Multiplication der beiden vorstehenden unendlichen Producte wieder die obige Normalform. Diese Normalform hat unter dem Zeichen Π *sechs* Factoren von der Form $(1\pm q^{\alpha i+\beta})^r$, während die beiden ursprünglich gegebenen unendlichen Producte, welche an sich einfachste sind, nur *vier* dergleichen enthielten. Andere einfachste Formen desselben unendlichen Productes sind

$$\begin{aligned}&\Pi[(1+q^{i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{3i+3})^2]\\ =\ &\Pi[(1+q^{i+1})(1-q^{2i+2})(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})]\\ =\ &\Pi[(1+q^{i+1})(1-q^{2i+2})(1-q^{3i+3})(1-q^{6i+3})]\\ =\ &\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1-q^{3i+3})(1-q^{6i+3})].\end{aligned}$$

Verwandelt man q in $-q$, so wird die einfachste Normalform ein unendliches Product, das ebenfalls nur *vier* Factoren der angegebenen Art enthält,

$$\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})].$$

Aehnliche Vereinfachungen erhalten durch die Aenderung von q in $-q$ mehrere in der Formelntabelle enthaltene unendliche Producte.

Wenn man in einer gegebenen Normalform

$$\Pi[(1\pm q^{\alpha i+\beta})^{r}(1\pm q^{\alpha' i+\beta'})^{r'}(1\pm q^{\alpha'' i+\beta''})^{r''}\ldots]$$

die Werthe von i substituirt, muss man die einzelnen Factoren $(1\pm q^{a})^{r}$ noch so ordnen, dass die Exponenten a der Gröfse nach auf einander folgen. Um eine Normalform zu erhalten, in welcher diese Ordnung schon in dem allgemeinen Ausdruck selbst befolgt ist, so dass es bloss der Substitution der Werthe von i bedarf, muss man dem unendlichen Producte die Form

$$\Pi[(1\pm q^{Ni+P})^{s}(1\pm q^{Ni+P'})^{s'}(1\pm q^{Ni+P''})^{s''}\ldots]$$

geben, in welcher der Coëfficient von i in allen unter dem Zeichen Π enthaltenen Factoren derselbe ist, und die Zahlen P, P', P'', etc. der Gröfse nach geordnet sind. Für den Coëfficienten von i oder N kann man die kleinste Zahl nehmen, welche durch alle Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc. theilbar ist. Man erhält dann die gesuchte Form, indem man jeden der einzelnen Factoren der gegebenen Normalform,

$$\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta}),\qquad \Pi(1\pm q^{\alpha' i+\beta'}),\qquad \Pi(1\pm q^{\alpha'' i+\beta''}),\ \text{etc.}$$

mittelst der oben gegebenen Formel (16.) respective in $\frac{N}{\alpha}, \frac{N}{\alpha'}, \frac{N}{\alpha''}$, etc. ähnliche unendliche Producte zerfällt. Es wird daher die Anzahl aller gleichen oder verschiedenen Factoren $\Pi(1\pm q^{Ni+P})$ durch die Formel

$$\nu = N\left\{\frac{r}{\alpha}+\frac{r'}{\alpha'}+\frac{r''}{\alpha''}+\text{etc.}\right\}$$

ausgedrückt. Durch diesen Coëfficienten N des Index i und die Anzahl ν der einfachen unendlichen Producte $\Pi(1\pm q^{Ni+P})$, welche die gleichen oder verschiedenen Factoren des unendlichen Productes bilden, wird der allgemeine Charakter desselben am besten bestimmt. Für das obige Beispiel war die Normalform

$$\Pi[(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+8})];$$

die *charakteristische* Form wird

$$\Pi\left\{\begin{array}{l}(1+q^{12i+1})(1-q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1+q^{12i+5})(1-q^{12i+6})^2\\ .(1+q^{12i+7})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})(1+q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2\end{array}\right\},$$

und man erhält aus ihr alle Factoren $(1\pm q^a)^r$ in der Ordnung, wie die Zahlen a aufeinander folgen, wenn man für i nach einander 0, 1, 2, etc. setzt.

Unter den verschiedenen charakteristischen Formen desselben unendlichen Productes ist diejenige die einfachste, in welcher der Coëfficient N den möglichst kleinsten Werth hat. Man erkennt dies leicht auf folgende Art. Es sei die gegebene charakteristische Form

$$\Pi[(1\pm q^{Ni+P'})(1\pm q^{Ni+Q'})(1\pm q^{Ni+R'})\ldots]^{s'}$$
$$\Pi[(1\pm q^{Ni+P''})(1\pm q^{Ni+Q''})(1\pm q^{Ni+R''})\ldots]^{s''}\ldots,$$

wo, wie man immer voraussetzen kann, in den Factoren jeder Horizontalreihe das Vorzeichen $\pm$ dasselbe sei, und in allen Horizontalreihen, in welchen dieses Vorzeichen dasselbe ist, die Exponenten s', s'', etc. von einander verschieden seien. Die Zahlen P', Q', R', etc., P'', Q'', etc. bedeuten hier von einander verschiedene ganze positive Zahlen, welche gröſser als 0 und gleich oder kleiner als N sind. Ist $\nu^{(k)}$ die Anzahl der Zahlen $P^{(k)}, Q^{(k)}, R^{(k)}$, etc., und bedeutet f einen sämmtlichen Zahlen N, ν', ν'', etc. gemeinschaftlichen Factor, so hat man

von den Zahlen $P^{(k)}, Q^{(k)}, R^{(k)}$, etc. diejenigen auszuwählen, welche gleich oder kleiner als $\frac{N}{f}$ sind, und muss dann aus ihnen die übrigen durch successive Addition von $\frac{N}{f}, \frac{2N}{f}, \ldots \frac{(f-1)N}{f}$ erhalten können. Trifft dies für jeden der Werthe des Index k zu, so kann man das unendliche Product in eine andere ähnliche Form bringen, in welcher der Coëfficient von i sich auf $\frac{N}{f}$ reducirt hat. Wenn dies aber für keinen der allen Zahlen N, ν, ν', ν'', etc. gemeinschaftlichen Factoren f gleichzeitig für alle Werthe von k gelingt, so ist die gegebene charakteristische Form die einfachste. Solche *einfachste charakteristische Form* giebt es immer nur eine.

Ich will im Folgenden die einfachsten charakteristischen Formen der in der Formelntabelle enthaltenen unendlichen Producte, nach dem Werthe des Coëfficienten N und der Anzahl ν der gleichen oder ungleichen einfachen unendlichen Producte $\Pi(1\pm q^{Ni+P})$ geordnet, zusammenstellen, und jedesmal ihren doppelten oder mehrfachen Ausdruck durch elliptische unendliche Producte der oben angegebenen Art hinzufügen. Ich habe gröſserer Einförmigkeit halber in allen Factoren der charakteristischen Formen den Potenzen von q dasselbe Vorzeichen (—) zu geben gesucht, und deshalb in einigen unendlichen Producten q in $-q$ geändert. Nur bei zwei charakteristischen Formen der nachstehenden Tabelle hat diese Einförmigkeit der Vorzeichen nicht erreicht werden können.

$N = 1.$

1. $\Pi(1-q^{i+1})^2$

$= \Pi(1-q^{2i+2})\,\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]$

$= \Pi(1-q^{\frac{1}{2}(i+1)})\,\Pi[(1+q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(4i+4)})]$

$= \Pi[(1+q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(2i+2)})]\,\Pi[(1-q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(4i+4)})]$ . . . . C. E.

$N = 2.$

2. $\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2]$

$= \Pi(1-q^{i+1})\,\Pi(1-q^{2i+2})$

$= \Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]\,\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]$

$= \Pi[(1+q^{\frac{1}{3}(3i+1)})(1+q^{\frac{1}{3}(3i+2)})(1-q^{\frac{1}{3}(3i+3)})]\,\Pi[(1-q^{\frac{1}{3}(6i+1)})(1-q^{\frac{1}{3}(6i+5)})(1-q^{\frac{1}{3}(6i+6)})]$

$= \Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]\,\Pi[(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})]$

$= \Pi[(1+q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(4i+4)})]\,\Pi[(1-q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(4i+4)})]$ . . . . . . B. D. A. (5).

3. $\Pi[(1-q^{2i+1})^3(1-q^{2i+2})^2]$

$= \Pi(1-q^{i+1})\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]$

$= \Pi[(1+q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(2i+2)})]\Pi(1-q^{\frac{1}{2}(i+1)})$ . . . . F. (1).

4. $\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})^4]$

$= \Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]\Pi(1-q^{2i+2})^3$

$= \Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]\Pi(1-q^{i+1})^3$ . . . . A. (8).

$N = 4.$

5. $\Pi[(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})^2]$

$= \Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]\Pi(1-q^{4i+4})$

$= \Pi[(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})]\Pi(1-q^{i+1})$ . . . . I. (3).

6. $\Pi[(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})^2]$

$= \Pi(1-q^{i+1})\Pi(1-q^{4i+4})$

$= \Pi(1-q^{2i+2})\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]$ . . . . F. (2).

7. $\Pi[(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})]^2$

$= \Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]\Pi[(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})]$ . . . . A. (1).

8. $\Pi[(1-q^{4i+1})^2(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+3})^2(1-q^{4i+4})^2]$

$= \Pi(1-q^{i+1})\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]$

$= \Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]\Pi(1-q^{4i+4})$ . . . . I. (2).

9. $\Pi[(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+2})^3(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})^2]$

$= \Pi(1-q^{i+1})\Pi[(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})]$

$= \Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})]\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]$ . . . . I. (1).

$N = 8.$

10. $\Pi[(1-q^{8i+1})(1-q^{8i+3})(1-q^{8i+5})(1-q^{8i+7})(1-q^{8i+8})^2]$

$= \Pi[(1-q^{8i+1})(1-q^{8i+7})(1-q^{8i+8})]\Pi[(1-q^{8i+3})(1-q^{8i+5})(1-q^{8i+8})]$

$= \Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]\Pi[(1+q^{8i+4})(1-q^{16i+16})]$ . . . . A. (6).

$N = 6.$

11. $\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2]$

$= \Pi(1-q^{2i+2})\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})]$

$= \Pi(1-q^{i+1})\Pi[(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})]$ . . . . A. (3).

12. $\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})^3(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2]$

$= \Pi(1-q^{i+1})\Pi[(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})]$

$= \Pi[(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})]\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]$ . . . . H. (1).

13. $\Pi[(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})^2]$

$= \Pi(1-q^{i+1})\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})]$

$= \Pi[(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})]\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})]$ . . . . H. (2).

$N = 12.$

14. $\Pi[(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2]$

$= \Pi[(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})]\Pi[(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+12})]$

$= \Pi[(1+q^{12i+6})(1-q^{24i+24})]\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})]$ . . . . A. (7).

15. $\Pi[(1-q^{12i+3})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})^2(1-q^{12i+12})^2]$

$= \Pi(1-q^{4i+4})\Pi[(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})]$

$= \Pi[(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})]\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]$ . . . . G. (3).

16. $\Pi[(1-q^{12i+2})(1-q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})(1-q^{12i+10})(1-q^{12i+12})^2]$

$= \Pi(1-q^{2i+2})\Pi[(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+12})]$

$= \Pi[(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})]\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]$ . . . . H. (4).

17. $\Pi[(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2]$.

$= \Pi(1-q^{4i+4})\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})]$

$= \Pi[(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})]\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]$ . . . . G. (4).

18. $\Pi[(1-q^{12i+2})^2(1-q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})^2(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})(1-q^{12i+10})^2(1-q^{12i+12})^2]$

$= \Pi(1-q^{i+1})\Pi[(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})]$

$= \Pi[(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})]\Pi[(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+12})]$ . . . . G. (2).

19. $\Pi[(1+q^{12i+1})(1-q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1+q^{12i+5})(1-q^{12i+6})^2(1+q^{12i+7})(1-q^{12i+8})$
$\times(1-q^{12i+9})(1+q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2]$

$= \Pi(1-q^{2i+2})\Pi[(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})]$

$= \Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]\Pi[(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})]$ . . . . H. (3).

20. $\Pi[(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+2})(1+q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+6})^2(1-q^{12i+7})$
$\times(1-q^{12i+8})(1+q^{12i+9})(1-q^{12i+10})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2]$

$= \Pi(1-q^{i+1})\Pi[(1+q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})]$

$= \Pi[(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})]\Pi[(1-q^{6i+1})(1+q^{6i+2})(1+q^{6i+3})(1+q^{6i+4})(1-q^{6i+5})$
$\times(1-q^{6i+6})]$ . . . . . G. (1).

$$N = 5.$$

21. $$\Pi[(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})^2]$$
$$= \Pi(1-q^{i+1})\Pi(1-q^{5i+5})$$
$$= \Pi[(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})]\Pi[(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+5})] \quad \ldots\ldots \quad \text{K.}$$

Aus der vorstehenden Tabelle sind die unendlichen Producte A. (2), (4) fortgelassen worden, da ihre doppelte Zerfällung in zwei elliptische unendliche Producte zufolge der oben gemachten Anmerkung in einer allgemeinen Formel enthalten ist.

Die Formeln (1.) und (2.) der Tabelle zeigen, dass sich das unendliche Product

$$\Pi(1-q^{i+1})^2$$

auf *vier*, das unendliche Product

$$\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2]$$

auf *fünf* verschiedene Arten in zwei elliptische unendliche Producte der hier betrachteten Art zerfällen läfst, woraus folgt, dass die Entwickelung des einen auf *vier*, des andern auf *fünf* verschiedene Arten durch Doppelsummen von der Form

$$\Sigma \pm q^{\alpha ii+\beta kk+\gamma i+\delta k}$$

dargestellt werden kann. Setzt man nämlich in der ersten Formel q^2, in der zweiten q^6 für q, so erhält man mittelst der Formeln der Einleitung:

$$(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2(1-q^8)^2\cdots$$
$$= [1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-\cdots]^2$$
$$= [1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-\cdots][1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots]$$
$$= [1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots][1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots]$$
$$= [1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+\cdots][1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots],$$

$$(1-q^6)(1-q^{12})^2(1-q^{18})(1-q^{24})^2(1-q^{30})\ldots$$
$$= [1-q^6-q^{12}+q^{30}+q^{42}-\cdots][1-q^{12}-q^{24}+q^{60}+q^{84}-\cdots]$$
$$= [1-2q^6+2q^{24}-2q^{54}+\cdots][1+q^6+q^{18}+q^{36}+q^{60}+\cdots]$$
$$= [1+q^2+q^4+q^{10}+q^{14}+\cdots][1-q^2-q^{10}+q^{16}+q^{32}-\cdots]$$
$$= [1-q^6-q^{18}+q^{36}+q^{60}-\cdots][1-2q^{12}+2q^{48}-2q^{108}+\cdots]$$
$$= [1+q^{18}+q^{30}+q^{84}+\cdots]^2-[q^3+q^9+q^{45}+q^{63}+\cdots]^2,$$

oder die folgenden beiden Formeln:

$$\Pi(1-q^{2i+2})^2 = \Sigma(-1)^{i+k}q^{3ii+3kk+i+k} = \Sigma(-1)^{i+k}q^{6ii+2kk+2i}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}ii+2kk+\frac{1}{2}i+k} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)+k}q^{\frac{3}{2}ii+2kk+\frac{1}{2}i+k},$$

$$\Pi[(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+12})^2] = \Sigma(-1)^{i+k}q^{9ii+18kk+3i+6k}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{6ii+12kk+6k} = \Sigma(-1)^k q^{3ii+6kk+i+4k}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{12ii+12kk+6i} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+6kk+3i+3k}.$$

In der ersten Formel unterscheiden sich die beiden letzten Doppelsummen nur durch die unter dem Summenzeichen befindlichen Vorzeichen $(-1)^i$ und $(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)+k}$. Es müssen sich daher alle Glieder gegenseitig aufheben, für welche diese beiden Vorzeichen von einander verschiedene Werthe annehmen, welches geschieht, wenn der Exponent von q ungerade ist. Hieraus folgt, dass, wenn man

$$\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)} = A-B, \qquad \Sigma q^{2ii+i} = C+D$$

setzt, wo A und C gerade, B und D ungerade Functionen von q bedeuten, die beiden Gleichungen stattfinden,

$$\Pi(1-q^{2i+2})^2 = AC-BD, \qquad AD = BC.$$

Die Gröfsen A, B, C, D bedeuten hier die unendlichen Reihen

$$A = 1-q^2-q^{12}+q^{22}+q^{26}-q^{40}-q^{70}+q^{92}+q^{100}-\cdots,$$
$$B = q-q^5-q^7+q^{15}+q^{35}-q^{51}-q^{57}+q^{77}+q^{117}-\cdots,$$
$$C = 1+q^6+q^{10}+q^{28}+q^{36}+q^{66}+q^{78}+\cdots,$$
$$D = q+q^3+q^{15}+q^{21}+q^{45}+q^{55}+q^{91}+\cdots,$$

deren allgemeines Gesetz durch die folgenden Ausdrücke gegeben wird:

$$A = \Sigma q^{2i(12i+1)}-\Sigma q^{(6i+2)(4i+1)}, \qquad B = \Sigma q^{(4i-1)(6i-1)}-\Sigma q^{(2i-1)(12i-5)},$$
$$C = \Sigma q^{2i(4i+1)}, \qquad D = \Sigma q^{(2i-1)(4i-1)}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichungen

$$AD-BC = 0$$

und

$$AC-BD = \Pi(1-q^{2i+2})^2,$$

so erhält man nach einigen Reductionen die Gleichung

(17.) $$0 = \Sigma q^{i(6i+1)+k(2k+1)}-\Sigma q^{(2i+1)(3i+2)+k(2k+1)},$$

in deren beiden Doppelsummen für i und k nur solche positive oder negative ganze

Zahlen zu setzen sind, für welche $i+k$ *ungerade ist;* ferner die Gleichung

$$(18.)\qquad \Pi(1-q^{2i+2})^2 = \Sigma q^{i(6i+1)+k(2k+1)} - \Sigma q^{(2i+1)(3i+2)+k(2k+1)},$$

wo man in den beiden Doppelsummen für i *und* k *nur solche positive oder negative ganze Zahlen zu setzen hat, für welche* $i+k$ *gerade ist.* Diese letztere Formel gilt aber wegen (17.) auch, wenn man für i und k alle *beliebigen* positiven oder negativen ganzen Zahlen annimmt. Setzt man darin $-q$ für q, so erhält man

$$(19.)\qquad \Pi(1-q^{2i+2})^2 = \Sigma(-1)^{i+k} q^{i(6i+1)+k(2k+1)} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{(2i+1)(3i+2)+k(2k+1)}.$$

Die Formeln (18.) und (19.) geben eine *fünfte* und *sechste* Darstellung der Entwickelung von $\Pi(1-q^{2i+2})^2$ durch Doppelsummen.

Aehnliche Betrachtungen kann man in Bezug auf die *dritte* Darstellung der Entwickelung des unendlichen Productes

$$\Pi[(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+12})^2] = \Sigma(-1)^k q^{3ii+6kk+i+4k}$$

anstellen, in welcher nur solche Potenzen von q vorkommen können, deren Exponent durch 3 theilbar ist, so dass es hinreicht, die Doppelsumme nur auf solche Werthe von i und k auszudehnen, *für welche* $i+k$ *durch* 3 *theilbar ist,* und dieselbe Doppelsumme in den beiden Fällen *verschwinden muss,* wenn man sie nur über solche Werthe von i und k erstreckt, *für welche* $i+k$ *durch* 3 *dividirt den Rest* 1 *oder den Rest* 2 *läſst.*

Alle im Vorhergehenden gefundenen Resultate ergaben sich aus der einen Fundamentalformel

$$(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)\dots(1-qz^{-1})(1-q^3z^{-1})(1-q^5z^{-1})\dots$$
$$= 1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\cdots.$$

Sie wurden als unmittelbare Folge von Gleichungen gefunden, welche aus dieser Formel hervorgehen, wenn man in ihr für $\pm q$ und $\pm z$ ganze positive Potenzen von q setzt. Selbst die zum Beweise der Formel A. (8) erforderliche Gleichung

$$[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots]^3 = 1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\cdots$$

folgt aus derselben Fundamentalformel, wenn man $z=(1+\varepsilon)q$ annimmt, und, nachdem man mit ε dividirt hat, $\varepsilon=0$ macht, wonach man nur noch q für q^2 zu setzen hat. Aber es lassen sich aus derselben Fundamentalformel noch einige andere Resultate, durch welche das System der im Vorigen gefundenen Gleichungen zwischen Doppelsummen vervollständigt werden kann, ableiten, wenn man für q und z Potenzen von q setzt, welche mit gewissen imaginären Wurzeln der Einheit multiplicirt sind.

GLEICHUNGEN ZWISCHEN DREI DOPPELSUMMEN.

Man kann der in der Einleitung aufgestellten Fundamentalgleichung die folgenden Formen geben:

$$(\alpha)\qquad \Pi[(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})] = \Sigma q^{ii}z^i,$$

$$(\beta)\qquad (z+z^{-1})\Pi[(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})] = \Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)}z^{2i+1},$$

$$(\gamma)\qquad (z-z^{-1})\Pi[(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})] = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(ii+i)}z^{2i+1},$$

wo, wie immer, für den Index i unter dem Zeichen Π die Werthe $0, 1, 2, \dots\infty$ und unter dem Zeichen Σ die Werthe $0, \pm1, \pm2, \dots \pm\infty$ zu nehmen sind. Die Formel (β) wird aus (α) erhalten, wenn man respective $\sqrt{q}$ und $\sqrt{q}.z^2$ für q und z setzt und mit z dividirt. Die Formel (γ) folgt aus (α), wenn man $z\sqrt{-1}$ für z setzt und mit $\sqrt{-1}$ dividirt.

Ich will jetzt in diesen allgemeinen Formeln für z primitive 3^{te}, 5^{te}, 8^{te} und 12^{te} Wurzeln der Einheit setzen, und bei Aufsuchung von unendlichen Producten, welche sich auf doppelte Art in zwei elliptische zerfällen lassen, unter die Zahl der letzteren auch diejenigen aufnehmen, welche für die angegebenen Werthe von z aus (α) — (γ) erhalten werden. Die Gleichungen, zu welchen man auf diesem Wege gelangt, werden sich von den oben mitgetheilten dadurch unterscheiden, dass sie nicht mehr zwischen nur zwei, sondern zwischen drei oder einer gröſsern Zahl Doppelsummen stattfinden. Obgleich einige dieser Resultate sich aus den früher gefundenen zusammensetzen lassen, so habe ich sie doch deshalb für bemerkenswerth gehalten, weil sie mehrere derselben in einer einzigen Formel umfassen, zu welcher man durch dieselbe Methode der doppelten Zerfällung gelangt, welche auf jene Formeln geführt hat. Es beruht dies auf der Eigenschaft der elliptischen Transcendente $\Sigma q^{ii}z^i$, dass sie, wenn man für z Wurzeln der Einheit setzt, in mehrere Reihen zerlegt werden kann, welche aus derselben Transcendente erhalten werden, wenn man darin, wie in den früheren Untersuchungen, für q und z Potenzen von q setzt. Ich werde zur gröſsern Deutlichkeit einige elementare Eigenschaften der 3-eckigen und 5-eckigen Zahlen, auf welchen die Zerlegungen der elliptischen Transcendente, welche hier zu betrachten sind, beruhen, besonders hervorheben, und bei dieser Gelegenheit einige allen Polygonzahlen gemeinschaftliche Eigenschaften bemerken.

I. z gleich einer imaginären Cubikwurzel der Einheit.

Alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, welche für den Index i unter den Summenzeichen zu setzen sind, sind unter den drei Formen $3i$, $-(3i+1)$, $3i+1$ enthalten. Wenn man in dem allgemeinen Ausdruck der 3-eckigen Zahlen $\frac{1}{2}i(i+1)$ für i die Formen $3i$ und $-(3i+1)$ setzt, so erhält man in beiden Fällen $\frac{3}{2}(3ii+i)$; setzt man dagegen $3i+1$ für i, so verwandelt sich $\frac{1}{2}i(i+1)$ in $\frac{9}{2}(ii+i)+1$. Man hat daher den folgenden Satz:

> die durch 3 theilbaren 3-eckigen Zahlen sind die 3fachen der vor- und rückwärts fortgesetzten 5-eckigen Zahlen; die durch 3 nicht theilbaren 3-eckigen Zahlen lassen durch 9 dividirt den Rest 1, und geben, wenn man von ihnen 1 abzieht und den Rest durch 9 dividirt, wiederum die sämmtlichen 3-eckigen Zahlen.

Es folgt aus diesem Satze das Corollar,

> dass man aus jeder 3-eckigen Zahl unendlich viel andere erhält, wenn man wiederholt mit 9 multiplicirt und 1 addirt.

Da $(3i+1)(3i+2)$ unverändert bleibt, wenn man $-(i+1)$ für i setzt, während sich gleichzeitig $2i+1$ in $-(2i+1)$ verwandelt, und man für i unter dem Zeichen Σ auch $i+a$ oder $-(i+a)$ setzen kann, wo a eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bedeutet, so hat man

$$\Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{6i+3} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{-(6i+3)},$$

$$\Sigma (-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{6i+3} = -\Sigma (-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{-(6i+3)}.$$

Man kann ferner für i unter dem Zeichen Σ nach einander

$$\varepsilon(mi+a), \qquad \varepsilon_1(mi+a_1), \qquad \dots \quad \varepsilon_{m-1}(mi+a_{m-1})$$

setzen, wo $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_{m-1}$ entweder $+1$ oder -1, und $\varepsilon a, \varepsilon_1 a_1, \dots \varepsilon_{m-1} a_{m-1}$ alle verschiedenen Reste bedeuten, welche durch Division mit der ganzen Zahl m erhalten werden können. Man erhält daher, wenn man in (α), (β), (γ) für i unter dem Zeichen Σ nach einander $3i$, $-(3i+1)$, $3i+1$ setzt, und die vorstehenden Sätze benutzt, die folgenden Formeln:

$$\text{(20.)} \quad \Pi[(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})] = \Sigma q^{ii} z^i$$
$$= \Sigma q^{9ii} z^{3i} + \Sigma q^{(3i+1)^2}(z^{3i+1}+z^{-(3i+1)}),$$

$$\text{(21.)} \quad (z+z^{-1})\Pi[(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})] = \Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)} z^{2i+1}$$
$$= \Sigma q^{\frac{3}{2}(3ii+i)}(z^{6i+1}+z^{-(6i+1)}) + \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{6i+3}$$
$$= \Sigma q^{\frac{3}{2}(3ii+i)}(z^{6i+1}+z^{-(6i+1)}) + \tfrac{1}{2}\Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}(z^{6i+3}+z^{-(6i+3)}),$$

$$\text{(22.)} \quad (z-z^{-1})\Pi[(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})] = \Sigma (-1)^i q^{\frac{1}{2}(ii+i)} z^{2i+1}$$
$$= \Sigma (-1)^i q^{\frac{3}{2}(3ii+i)}(z^{6i+1}-z^{-(6i+1)}) - \Sigma (-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{6i+3}$$
$$= \Sigma (-1)^i q^{\frac{3}{2}(3ii+i)}(z^{6i+1}-z^{-(6i+1)}) - \tfrac{1}{2}\Sigma (-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}(z^{6i+3}-z^{-(6i+3)}).$$

Setzt man in diesen Formeln die Gröfse z *einer imaginären Cubikwurzel der Einheit* gleich, so erhält man

$$\text{(23.)} \quad \Pi \frac{(1-q^{2i+2})(1+q^{6i+3})}{1+q^{2i+1}} = \Sigma q^{9ii} - \Sigma q^{(3i+1)^2},$$

$$\text{(24.)} \quad \Pi \frac{(1-q^{i+1})(1+q^{3i+3})}{1+q^{i+1}} = \Sigma q^{\frac{3}{2}(3ii+i)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)},$$

$$\text{(25.)} \quad \Pi(1-q^{3i+3}) = \Sigma (-1)^i q^{\frac{3}{2}(3ii+i)}.$$

Die letzte dieser Formeln giebt, wenn man q für q^3 setzt, die Eulersche Entwickelung des Products $\Pi(1-q^{i+1})$.

Man kann der Reihe $\Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}$ noch eine andere merkwürdige Form geben. Es sind nämlich alle Werthe des Index i in den beiden Formen $2i$ und $-(2i+1)$ enthalten, und für beide geht die Gröfse $\frac{1}{2}i(i+1)$ in denselben Ausdruck $2ii+i$ über, was dem Satze entspricht,

> dafs die 6-eckigen Zahlen, vor- und rückwärts fortgesetzt, alle 3-eckigen Zahlen geben *).

Man erhält hieraus

$$\text{(26.)} \quad \Sigma q^{\frac{1}{2}i(i+1)} = 2\Sigma q^{2ii+i}, \qquad \Sigma (-1)^i q^{\frac{1}{2}i(i+1)} = 0,$$

und daher

$$\text{(27.)} \quad \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} = q\Sigma q^{\frac{9}{2}(ii+i)} = 2q\Sigma q^{9(2ii+i)} = 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)},$$

$$\text{(28.)} \quad \Sigma (-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} = 0.$$

*) Proclus in seinem Commentar zum 1sten Buch des Euclides bemerkt als Beispiel, dass man nicht alle mathematischen Sätze umkehren könne, dass jede 6-eckige Zahl eine 3-eckige, aber nicht jede 3-eckige Zahl eine 6-eckige ist. Man sieht, dass, wenn man die Benennung *sechseckige* Zahlen auch auf diejenigen Zahlen $2ii-i$ ausdehnt, welche den negativen Werthen von i entsprechen, die Umkehrung in der That erlaubt ist.

Vermöge der Gleichung (27.) kann man die Gleichung (24.) auch so darstellen:

$$\Pi\frac{(1-q^{i+1})(1+q^{3i+3})}{1+q^{i+1}} = \Sigma q^{\frac{3}{2}(3ii+i)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}.$$

Wenn man die unendlichen Producte (23.) und (24.) von ihren Nennern befreit, und ihnen ihre einfachste oder ihre Normal- oder ihre charakteristische Form giebt, so erhält man

$$(29.)\qquad \Pi\frac{(1-q^{2i+2})(1+q^{6i+3})}{1+q^{2i+1}} = \Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1+q^{6i+3})]$$
$$= \Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{4i+4})(1-q^{12i+6})]$$
$$= \Pi[(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})]$$
$$= \Sigma q^{9ii} - \Sigma q^{(3i+1)^2},$$

$$(30.)\qquad \Pi\frac{(1-q^{i+1})(1+q^{3i+3})}{1+q^{i+1}} = \Pi[(1-q^{i+1})(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})]$$
$$= \Pi[(1-q^{2i+2})(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+5})^2]$$
$$= \Pi[(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})]$$
$$= \Sigma q^{\frac{3}{2}(3ii+i)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} = \Sigma q^{\frac{3}{2}(3ii+i)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}.$$

Andere Darstellungen dieser unendlichen Producte werde ich weiter unten geben.

Von den Formeln (23.), (24.), (25.) ist die letzte, welche mit der Eulerschen übereinkommt, oben noch auf eine andere Art, welche von der im Vorigen gebrauchten wesentlich verschieden ist, aus der allgemeinen Formel abgeleitet worden. Nach den beiden Methoden erhält man (25.) aus der Formel (γ.), indem man entweder für z eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit setzt und mit $\sqrt{-3}$ dividirt, oder indem man für q und z respective q^9 und q^3 setzt und mit $-q^3$ multiplicirt. In ähnlicher Weise kann man auch zu den beiden andern Formeln (23.) und (24.), welche durch Substitution einer imaginären Cubikwurzel der Einheit für z erhalten wurden, durch eine Combination der früher gefundenen Formeln gelangen, welche aus der Fundamentalformel dadurch abgeleitet worden waren, dass man für q und z Potenzen von q gesetzt hat. Ich will diese zweite Beweisart hier mittheilen, weil man daraus desto leichter erkennen wird, ob und auf welche Art die aus den Formeln (23.) und (24.) folgenden Gleichungen zwischen Doppelsummen aus den früher gefundenen erhalten werden können.

Von den oben aus der Fundamentalformel abgeleiteten Formeln wähle ich, um die Formeln (23.) und (24.) dadurch zu beweisen, die Formeln IV. (6.) und IV. (7.),

$$(31.)\qquad \begin{cases} \Pi(1+q^{i+1}) = \dfrac{1}{\Pi(1-q^{2i+1})} = \dfrac{\Sigma q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{3ii}}, \\ \Pi(1+q^{i+1}) = \dfrac{1}{\Pi(1-q^{2i+1})} = \dfrac{\Sigma q^{6ii+3i}}{\Sigma(-1)^i q^{3ii+2i}}. \end{cases}$$

Multiplicirt man mit den Nennern der Brüche, und setzt $-q^3$ für q, so erhält man, nachdem man die zweite Gleichung noch mit q multiplicirt,

$$(32.)\qquad \begin{cases} \Sigma q^{9ii} = \Pi(1+q^{6i+3}).\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii-i)} q^{\frac{3}{2}i(3i+1)}, \\ \Sigma q^{(3i+1)^2} = \Pi(1+q^{6i+3}).\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}. \end{cases}$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, so kann der in $\Pi(1+q^{6i+3})$ multiplicirte Factor in den einfacheren Ausdruck $\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}$ zusammengezogen werden. Setzt man nämlich in (21.) $z = 1$, so erhält man

$$(33.)\qquad \Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)} = 2\Sigma q^{\frac{3}{2}i(3i+1)} + \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)},$$

oder, vermöge (26.) und (27.),

$$(34.)\qquad \Sigma q^{2ii+i} = \Sigma q^{\frac{3}{2}i(3i+1)} + \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)},$$

und hieraus, wenn man $-q$ für q setzt,

$$(35.)\qquad \Sigma(-1)^i q^{2ii+i} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii-i)} q^{\frac{3}{2}i(3i+1)} - \Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}.$$

Mit Hülfe dieser Formel erhält man aus den Gleichungen (32.), wenn man die zweite von der ersten abzieht,

$$(36.)\qquad \Sigma q^{9ii} - \Sigma q^{(3i+1)^2} = \Pi(1+q^{6i+3}).\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}.$$

Substituirt man hierin die häufig im Vorhergehenden angewandte Formel

$$\Sigma(-1)^i q^{2ii+i} = \Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})],$$

welche sich aus (α.) ergiebt, wenn man darin respective q^2 und $-q$ für q und z setzt, so folgt die Formel (29.).

Die Formel (30.) findet man aus denselben Gleichungen (31.) auf folgende Weise. Setzt man in denselben q^3 für q, so erhält man

$$(37.)\quad \begin{cases} \Sigma q^{\frac{3}{2}i(3i+1)} = \Pi(1+q^{3i+3}).\Sigma(-1)^i q^{9ii}, \\ \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)} = \Pi(1+q^{3i+3}).\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}, \end{cases}$$

und hieraus, da

$$\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2} = \Sigma(-1)^i q^{(3i-1)^2},$$

$$(38.)\quad \Sigma q^{\frac{3}{2}i(3i+1)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)} = \Pi(1+q^{3i+3})[\Sigma(-1)^i q^{9ii} - \Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2} - \Sigma(-1)^i q^{(3i-1)^2}]$$
$$= \Pi(1+q^{3i+3})\,\Sigma(-1)^i q^{ii}.$$

Substituirt man hierin die ebenfalls sehr häufig im Vorhergehenden angewandte Formel

$$(39.)\quad \Sigma(-1)^i q^{ii} = \Pi[(1-q^{2i+2})(1-q^{2i+1})^2] = \Pi\frac{1-q^{i+1}}{1+q^{i+1}},$$

welche aus (α.) für $z = -1$ folgt, so erhält man die Formel (30.).

Für den hier vorliegenden Zweck, Gleichungen zwischen Doppelsummen von der Form

$$\Sigma \pm q^{\alpha ii+\beta kk+\gamma i+\delta k+\epsilon}$$

zu finden, kommt es darauf an, die elliptischen unendlichen Producte (29.) und (30.) mit solchen andern elliptischen unendlichen Producten zu multipliciren, dass das unendliche Product, welches man durch diese Multiplication erhält, sich noch auf eine andere Art in zwei elliptische unendliche Producte zerfällen läfst, oder, was dasselbe ist, *die unendlichen Producte* (29.) *und* (30.) *als Brüche darzustellen, deren Nenner ein elliptisches unendliches Product, und deren Zähler das Product zweier elliptischen Producte ist.* Die Formeln III. führen mit Leichtigkeit zu mehreren solchen Darstellungen. Wenn man nämlich die unendlichen Producte (29.) und (30.) auf folgende Art ausdrückt,

$$\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})].\Pi(1+q^{6i+3}),$$
$$\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})].\Pi(1+q^{3i+3}),$$

so sind die ersten Factoren bereits elliptische unendliche Producte, und es kommt nur noch darauf an, die zweiten Factoren

$$\Pi(1+q^{6i+3}),\qquad \Pi(1+q^{3i+3})$$

als Brüche darzustellen, deren Zähler und Nenner elliptische unendliche Producte sind. Dies geschieht aber mittelst der Formeln III. für jedes dieser beiden

unendlichen Producte auf 7 verschiedene Arten. Man erhält für $\Pi(1+q^{6i+3})$ *sieben* solcher Brüche, wenn man in III. $-q^3$ für q setzt und alle Brüche umkehrt, und eine gleiche Anzahl für $\Pi(1+q^{3i+3})$, wenn man in III. selber q^3 für q substituirt. Es ergeben sich hiernach aus (36.) und (38.) *vierzehn* Gleichungen zwischen Doppelsummen. Bezeichnet man nämlich jeden der 7 Brüche in IV. mit $\frac{f(q)}{\varphi(q)}$, so folgt aus (36.):

$$f(-q^3)[\Sigma q^{9ii} - \Sigma q^{(3i+1)^2}] = \varphi(-q^3)\Sigma(-1)^i q^{2ii+i},$$

und aus (38.):

$$\varphi(q^3)[\Sigma q^{\frac{3}{2}i(3i+1)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}] = f(q^3)\Sigma(-1)^i q^{ii}.$$

Es wird aber nicht nöthig sein, diese 14 Gleichungen besonders aufzustellen, da sie keine wesentlich neuen Resultate geben. Denn durch dasselbe Verfahren, durch welches im Vorhergehenden die Formeln (36.) und (38.) aus den Formeln (32.) und (37.) abgeleitet worden sind, welche ihrerseits aus den Formeln IV. (6.) und IV. (7.) folgten, müssen sich auch die aus den Formeln (36.), (38.) und IV. (1.)—(7.) folgenden 14 Gleichungen zwischen Doppelsummen aus denjenigen Formeln der obigen Tabelle ergeben, welche durch Combination der Formeln IV. (6.) und IV. (7.) unter sich und mit den übrigen Formeln IV. (1.)—(5.) erhalten worden sind.

Man kann aber die unendlichen Producte (29.) und (30.) noch auf andere Arten als solche Brüche darstellen, deren Nenner ein elliptisches unendliches Product und deren Zähler das Product zweier elliptischen unendlichen Producte ist, und diese Darstellungen werden zu Resultaten führen, welche in den Gleichungen der obigen Formelntabelle nicht enthalten sind. Es ist nämlich

$$\Pi\frac{(1-q^{2i+2})(1+q^{6i+3})}{1+q^{2i+1}} = \Sigma q^{9ii} - \Sigma q^{(3i+1)^2}$$
$$= \frac{\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})].\Pi(1-q^{4i+4})}{\Pi(1-q^{12i+12})}$$
$$= \frac{\Pi(1-q^{2i+2}).\Pi[(1-q^{6i+1})(1+q^{6i+2})(1+q^{6i+3})(1+q^{6i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})]}{\Pi[(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+6})]}$$
$$= \frac{\Pi(1-q^{i+1}).\Pi[(1+q^{6i+2})(1+q^{6i+4})(1-q^{6i+6})]}{\Pi(1-q^{3i+3})}$$
$$= \frac{\Pi(1-q^{2i+2}).\Pi(1-q^{6i+6})}{\Pi[(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})]},$$

woraus, wenn man für die elliptischen unendlichen Producte ihre Entwickelungen setzt, die folgenden Gleichungen erhalten werden:

$$(40.)\qquad \Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1+q^{6i+3})]$$

$$= \Sigma q^{9ii} - \Sigma q^{(3i+1)^2} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+2i}.\Sigma(-1)^i q^{6ii+2i}}{\Sigma(-1)^i q^{18ii+6i}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}.\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii-i)} q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)} q^{\frac{3}{2}(3ii+i)}} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}.\Sigma q^{3ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}(3ii+i)}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}.\Sigma(-1)^i q^{9ii+3i}}{\Sigma q^{3ii+2i}}.$$

Es ist ferner

$$\Pi\frac{(1-q^{i+1})(1+q^{3i+3})}{1+q^{i+1}} = \Sigma q^{\frac{3}{2}(3ii+i)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{i+1}).\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})]}{\Pi(1-q^{6i+6})} = \frac{\Pi(1-q^{i+1}).\Pi(1-q^{3i+3})}{\Pi[(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})]},$$

woraus

$$(41.)\qquad \Pi[(1-q^{i+1})(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})]$$

$$= \Sigma q^{\frac{3}{2}(3ii+i)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} = \Sigma q^{\frac{3}{2}(3ii+i)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}.\Sigma(-1)^i q^{3ii+2i}}{\Sigma(-1)^i q^{3(3ii+i)}} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}.\Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}(3ii+i)}}{\Sigma q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}$$

folgt. Aus den Formeln (40.) und (41.) ergeben sich durch Multiplication mit den Nennern die unten folgenden Gleichungen zwischen Doppelsummen. Da in den Zählern der Brüche (40.) der Factor $\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}$, in den Zählern der Brüche (41.) der Factor $\Sigma(-1)^i q^{2ii}$ nicht vorkommt, so müssen diese Gleichungen von denen, welche auf die oben angegebene Art aus (36.) und (38.) abgeleitet werden können, wesentlich verschieden werden.

Der Zähler des letzten Bruches in (40.) wird aus dem Zähler des letzten Bruches in (41.) erhalten, wenn man darin q^2 für q setzt. Es ergeben sich daher für denselben aus (40.) und (41.) drei oder, wenn man noch in (40.) $-q$ für q setzt, vier verschiedene Darstellungen durch Doppelsummen, wobei man diejenige nicht mitrechnet, welche aus der doppelten Form der in (41.) mit dem Minuszeichen behafteten Summe folgt. Die hieraus erhaltenen Gleichungen gehören zur Klasse (3, 3), die übrigen aus (40.) und (41.) folgenden zur Klasse (2, 2). Sie können den zu diesen Klassen gehörigen Formeln der obigen Tabelle angeschlossen werden, obgleich sie sich von ihnen dadurch unterscheiden, dass

sie jede eine Gleichung zwischen *drei* Doppelsummen geben. Die unendlichen Producte in den folgenden Formeln sind die Zähler der Ausdrücke, welche die Brüche (40.) und (41.) ergaben; nur sind diese Producte, wie in der obigen Formelntabelle, durch ihre Normalformen ausgedrückt.

XI.

B. (2, 2).

3. $\Pi[(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2]$

$$= \Sigma(-1)^k q^{9ii+18kk+6k} - \Sigma(-1)^k q^{(3i+1)^2+18kk+6k} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+6kk+2i+2k}$$

4. $\Pi[(1-q^{6i+1})(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})]$

$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(kk+k)} q^{9ii+\frac{3}{2}(3kk+k)} - \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(kk+k)} q^{(3i+1)^2+\frac{3}{2}(3kk+k)} = \Sigma(-1)^{i+\frac{1}{2}(kk-k)} q^{3ii+\frac{3}{2}kk+i+\frac{1}{2}k}.$$

5. $\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})]$

$$= \Sigma(-1)^k q^{9ii+\frac{3}{2}(3kk+k)} - \Sigma(-1)^k q^{(3i+1)^2+\frac{3}{2}(3kk+k)} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}ii+3kk+\frac{1}{2}i+k}$$

6. $\Pi[(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})^2]$

$$= \Sigma(-1)^k q^{\frac{3}{2}(3ii+i)+3(3kk+k)} - 2\Sigma(-1)^k q^{(3i+1)(6i+1)+3(3kk+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{9}{2}ii+3kk+\frac{3}{2}i+2k}.$$

C. (3, 3).

2. $\Pi[(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+6})^2]$

$$= \Sigma q^{9ii+3kk+2k} - \Sigma q^{(3i+1)^2+3kk+2k}$$

$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{9ii+3kk+2k} + \Sigma(-1)^{i+k} q^{(3i+1)^2+3kk+2k}$$

$$= \Sigma q^{3(3ii+i)+3kk+k} - \Sigma q^{(3i+1)(3i+2)+3kk+k}$$

$$= \Sigma q^{3(3ii+i)+3kk+k} - 2\Sigma q^{2(3i+1)(6i+1)+3kk+k} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+9kk+i+3k}.$$

Man kann durch Combination der Formeln (36.) und (38.) noch eine Gleichung zwischen *fünf* Doppelsummen ableiten. Multiplicirt man nämlich die Formeln (36.) und (38.) mit einander, nachdem man in der ersten $-q$ für q gesetzt hat, und bemerkt, dass

$$\Pi(1+q^{3i+3})\,\Pi(1-q^{6i+3}) = 1,$$

so erhält man

$$(42.)\qquad \Sigma(-1)^i q^{ii+2kk+k} = [\Sigma(-1)^i q^{9ii} + \Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}][\Sigma q^{\frac{3}{2}i(3i+1)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}].$$

Diese Formel läſst sich aber auf die Gleichung B. (2.) zurückführen. Setzt man nämlich für $\Sigma(-1)^i q^{ii}$, Σq^{2ii+i} die äquivalenten, bloss durch andere Gruppirung der Glieder unterschiedenen Ausdrücke

$$\Sigma(-1)^i q^{9ii} - 2\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2},\qquad \Sigma q^{\frac{3}{2}(3ii+i)} + \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)},$$

von denen der erstere aus (20.) für $z = -1$ folgt, und der zweite durch die Formel (34.) gegeben wird, so wird die Doppelsumme links vom Gleichheitszeichen

$$[\Sigma(-1)^i q^{9ii} - 2\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}][\Sigma q^{\frac{3}{2}i(3i+1)} + \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}],$$

und es kommt daher die Gleichung (42.) auf die folgende zurück:

$$\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2+\frac{3}{2}k(3k+1)} = \Sigma(-1)^i q^{9ii+(3k+1)(6k+1)},$$

welche aus B. (2.) erhalten wird, wenn man darin q^3 für q setzt und mit q multiplicirt.

II. z gleich einer imaginären 5ten Wurzel der Einheit.

Ich will jetzt in der Formel (β.) für z nach einander zwei *imaginäre nicht reciproke 5te Wurzeln der Einheit* setzen, und die daraus hervorgehenden Gleichungen mit einander multipliciren. Wenn man in der Gleichung (β.),

$$(z-z^{-1})\Pi[(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})] = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}i(i+1)} z^{2i+1},$$

für den Index i unter dem Summenzeichen nach einander $5i$, $-(5i+1)$, ferner $-(5i+2)$, $5i+1$, endlich $5i+2$ setzt, wodurch alle Werthe von i erschöpft werden, so verwandelt sich dieselbe in die folgende:

$$(43.)\qquad (z-z^{-1})\Pi[(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})]$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)}(z^{10i+1} - z^{-(10i+1)}) + \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}(z^{-(10i+3)} - z^{10i+3})$$
$$+ \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+2)(5i+3)} z^{10i+5}.$$

Setzt man $-i-1$ für i, so erleidet die letzte Summe keine weitere Aenderung, als dass die Gröſse $(-1)^i z^{10i+5}$ unter dem Summenzeichen in $-(-1)^i z^{-(10i+5)}$ übergeht; man kann daher für diese Summe auch

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+2)(5i+3)}(z^{10i+5} - z^{-(10i+5)})$$

setzen, woraus man sieht, dass dieselbe verschwindet, wenn z einer beliebigen 5^{ten} Wurzel der Einheit gleich wird. Bedeutet daher σ eine imaginäre 5^{te} Wurzel der Einheit, und setzt man in (43.)

$$z = \sigma,$$

so erhält man nach Division mit $\sigma - \sigma^{-1}$,

$$(44.)\quad \Pi[(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}\sigma^2)(1-q^{i+1}\sigma^{-2})] = \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)} + (\sigma+\sigma^{-1})\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}.$$

Setzt man hierin σ^2 für σ, so ergiebt sich:

$$\Pi[(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}\sigma)(1-q^{i+1}\sigma^{-1})] = \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)} + (\sigma^2+\sigma^{-2})\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}.$$

Multiplicirt man beide Formeln mit einander, und bemerkt, dass sowohl die Summe als das Product von $\sigma+\sigma^{-1}$ und $\sigma^2+\sigma^{-2}$ gleich -1 ist, so findet man

$$(45.)\qquad \Pi[(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})] = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}\Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}(3ii+i)}$$
$$= [\Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)}]^2 - \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)}\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)} - [\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}]^2,$$

oder die zur Klasse (1, 5) gehörige Gleichung:

$$(46.)\qquad \Pi[(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})] = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+15kk+i+5k)}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{5}{2}i(5i+1)+\frac{5}{2}k(5k+1)} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{5}{2}i(5i+1)+\frac{1}{2}(5k+1)(5k+2)} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)+\frac{1}{2}(5k+1)(5k+2)}.$$

In der ersten der drei Summen rechts vom Gleichheitszeichen sind die Exponenten von q durch 5 theilbar, in den beiden andern lassen dieselben, durch 5 dividirt, respective die Reste 1 und 2. Wenn man daher auch die Doppelsumme links vom Gleichheitszeichen in drei andere theilt, je nachdem die Exponenten von q oder, was dasselbe ist, die Werthe von $\frac{1}{2}i(3i+1)$, durch 5 dividirt, die Reste 0, 1, 2 lassen, so zerfällt die Gleichung (46.) in drei Gleichungen, von denen jede zwischen Doppelsummen statthat, in denen die Exponenten von q, durch 5 dividirt, dieselben Reste lassen. Je nachdem i die Werthe $5i$ und $-(5i+2)$; $-(5i+1)$; $5i+1$ und $5i+2$ annimmt, erhält die Zahl $\frac{1}{2}i(3i+1)$ die ihren drei Resten 0, 1, 2 entsprechenden Formen,

$$\tfrac{5}{2}i(15i+1) \quad \text{und} \quad \tfrac{5}{2}(3i+1)(5i+2); \quad \tfrac{25}{2}i(3i+1)+1;$$
$$\tfrac{5}{2}i(15i+7)+2 \quad \text{und} \quad \tfrac{5}{2}(3i+2)(5i+1)+2.$$

Es werden daher die sich je nach diesen drei Fällen aus (46.) ergebenden Gleichungen, wenn man im zweiten und dritten Falle respective mit q und q^2 dividirt, und hierauf überall q für q^5 setzt, die nachstehenden. Die den Doppelsummen gleichen unendlichen Producte, welche ich beigefügt habe, ergeben sich leicht aus dem Fundamentaltheorem.

XII.

1. $$\Pi[(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})^2]$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+i)+\frac{1}{2}(3kk+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5ii+5kk+i+3k)}$$

2. $$\Pi[(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+5})]^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}[q^{\frac{1}{2}(15ii+3kk+i+k)} + q^{\frac{1}{2}[(3i+1)(5i+2)+3kk+k]}] = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5ii+5kk+i+k)}$$

3. $$\Pi[(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})]^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}[q^{\frac{1}{2}(15ii+3kk+7i+k)} - q^{\frac{1}{2}[(3i+2)(5i+1)+3kk+k]}] = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5ii+5kk+3i+3k)}.$$

Die erste dieser Formeln ist dieselbe, wie die oben in der Formeltabelle aufgestellte, welche dort durch eine ganz verschiedene Methode gefunden worden ist.

Die Formel XII. (1.) ergab sich im Vorhergehenden aus (46.) durch die Bemerkung, dass, wenn man dem i den Werth $-(5i+1)$ giebt, die 5-eckigen Zahlen $\frac{1}{2}i(3i+1)$ die Form $\frac{25}{2}i(3i+1)+1$ erhalten. Dies giebt den Satz:

> Wenn man von den 5-eckigen Zahlen, welche, durch 5 dividirt, 1 übrig lassen, 1 abzieht, so geht der Rest nicht bloss durch 5, sondern auch durch 25 auf, und man erhält nach Division mit 25 wieder 5-eckige Zahlen.

Werden die unter der Form $\frac{1}{2}(3ii-i)$ enthaltenen Zahlen in 2 Klassen getheilt, je nachdem i positive oder negative Werthe annimmt (von denen die erste Klasse die eigentlichen 5-eckigen Zahlen umfaſst, deren Name aber, wie im Vorhergehenden, auch auf die andere Klasse ausgedehnt zu werden pflegt): so kann man den vorstehenden Satz näher so bestimmen, *dass, wenn man von jeder von beiden Klassen 5-eckiger Zahlen diejenigen nimmt, welche, durch 5 dividirt, 1 übrig lassen, von denselben 1 abzieht und den Rest durch 25 dividirt, die sämmtlichen 5-eckigen Zahlen der andern Klasse erhalten werden.*

Der vorstehende Satz ist dem oben für die 3-eckigen Zahlen bemerkten analog. In beiden Fällen werden diejenigen 3- und 5-eckigen Zahlen betrachtet, welche um 1 vermindert respective durch 3 und 5 aufgehen; zieht man von ihnen 1 ab, so lassen sich die Reste respective durch 3^2 und 5^2 theilen. Es werden ferner nach geschehener Division respective die sämmtlichen 3- und 5-eckigen Zahlen erhalten. Wenn man das umgekehrte Verfahren anwendet, und aus 3- und 5-eckigen Zahlen durch Multiplication mit 9 und 25 und Addition

der Einheit immer andere 3- und 5-eckige Zahlen ableitet, so erhält man den Satz, *dass, wenn A eine beliebige 3- oder 5-eckige Zahl ist, auch*

$$\tfrac{1}{8}(9^n-1)+9^n A,\quad \tfrac{1}{24}(25^n-1)+25^n A$$

respective 3- und 5-eckige Zahlen werden, von denen die letzteren zu derselben oder einer andern Klasse wie A gehören, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Der Satz, dass die 3- und 5-eckigen Zahlen von der Form $3i+1$, $5i+1$ immer auch die Form $3^2 i+1$, $5^2 i+1$ haben, läſst sich durch folgende Betrachtungen auf alle vieleckigen Zahlen ausdehnen.

Es sei M eine m-eckige Zahl, welche, durch m dividirt, den Rest 1 läſst. Ist M die n^{te} m-eckige Zahl

$$M = \tfrac{1}{2}n[(m-2)(n-1)+2],$$

so wird

$$M-1 = \tfrac{1}{2}(n-1)[(m-2)n+2]$$
$$= m\cdot\tfrac{1}{2}n(n-1)-(n-1)^2.$$

Aus dieser Formel folgt, dass, weil $M-1$ durch m theilbar ist, auch $(n-1)^2$ durch m theilbar sein muss. Es sei

$$m = a^2 b,$$

wo a^2 das gröſste Quadrat bedeutet, durch welches m theilbar ist, und also b durch keine Quadratzahl theilbar sein darf. Es muss dann $(n-1)^2$, welches durch $a^2 b = m$ theilbar ist, auch durch $a^2 b^2 = mb$ und daher $n-1$ durch ab theilbar sein. *Es werden daher nur diejenigen m-eckigen Zahlen, durch $m = a^2 b$ dividirt, den Rest 1 lassen, deren Seite (n), durch $ab = \frac{m}{a}$ dividirt, den Rest 1 läſst.* Es sei

$$n-1 = abc,$$

so wird

$$M-1 = \tfrac{1}{2}n.a^3b^2c - a^2b^2c^2 = a^2b^2c[\tfrac{1}{2}n.a-c].$$

Es sei zuerst *m ungerade,* so werden a und b ungerade, und, wegen $n-1 = abc$, von den beiden Zahlen n und c immer die eine gerade. Es wird also $c(\frac{1}{2}na-c)$ eine ganze Zahl, und daher $M-1$ durch a^2b^2 theilbar. Es sei zweitens *m das Doppelte einer ungeraden Zahl,* so wird a ungerade und b ebenfalls das Doppelte einer ungeraden Zahl; es wird daher auch n ungerade, und $c(\frac{1}{2}na-c)$ für ein ungerades c nicht mehr eine ganze Zahl werden. In diesem Falle wird also

$M-1$ nur durch $\frac{1}{2}a^2b^2$ theilbar. Wenn drittens *m das Vier- oder Achtfache einer ungeraden Zahl* ist, wird a das Doppelte einer ungeraden Zahl; es wird daher sowohl n als $\frac{1}{2}a$ ungerade, und $c(\frac{1}{2}na-c)$ für jedes c nicht bloss eine ganze Zahl, sondern auch immer gerade, und also $M-1$ durch $2a^2b^2$ theilbar. Wenn viertens *m durch* 16 *theilbar* ist, so wird a durch 4 theilbar, $c[\frac{1}{4}na-c]$ eine ganze Zahl, und $M-1$ durch a^2b^2 theilbar. Man erhält daher, wenn man Q für a^2b^2 setzt, den Satz: *Wenn M eine m-eckige Zahl ist, welche, durch m dividirt, den Rest* 1 *läfst, und Q das kleinste durch m theilbare Quadrat bedeutet, so wird $M-1$, wenn m das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, durch $\frac{1}{2}Q$, in allen andern Fällen durch Q, und wenn m das Vier- oder Achtfache einer ungeraden Zahl ist, immer auch durch $2Q$ theilbar.* Wenn $a=1$, hat man $b=m$, $Q=m^2$, und daher den Satz:

Wenn m eine durch kein Quadrat theilbare ungerade Zahl ist, und M eine m-eckige Zahl, welche, durch m dividirt, den Rest 1 läfst, so wird $M-1$ auch durch m^2 theilbar sein.

Die für M und $M-1$ angegebenen Werthe zeigen, dass immer gleichzeitig $2M$ durch n und $2(M-1)$ durch $n-1$ theilbar ist. Wenn also M nicht bloss die zweite M-eckige, sondern noch aufserdem eine vieleckige Zahl ist, so haben die beiden Zahlen $2M$ und $2(M-1)$ aufser den Factoren 2 und 1 noch andere Factoren, welche nur um 1 verschieden sind. Diese Eigenschaft kann als Definition einer vieleckigen Zahl gebraucht werden. Man beweist nämlich sehr leicht den umgekehrten Satz:

Jede Zahl M ist so oft eine vieleckige Zahl, als $2M$ einen Factor hat, welcher von einem Factor der Zahl $2(M-1)$ nur um 1 verschieden ist; wenn von den beiden um 1 verschiedenen Factoren der Zahlen $2M$ und $2(M-1)$ der Factor von $2M$ der gröfsere ist, so ist M eine *eigentliche* vieleckige Zahl und dieser Factor ihre Seite, und wenn man

$$2M = ff', \qquad 2(M-1) = gg', \qquad f = g+1$$

hat, so wird $g'-f'+2$ die der Seite f entsprechende Eckenzahl von M.

Mit der Aufgabe, zu bestimmen, *wie oft und auf welche Art eine gegebene Zahl eine vieleckige sein kann,* schliesst das grofse Werk des Diophantus; doch ist ihre Lösung in den auf uns gekommenen Handschriften abgebrochen, vielleicht vom Verfasser selbst unvollendet gelassen.

III. z gleich einer primitiven 8^{ten} oder 16^{ten} Wurzel der Einheit.

Bezeichnet ρ eine primitive 16^{te}, $\sigma=\rho^2$ eine primitive 8^{te} Wurzel der Einheit, so wollen wir jetzt in den Gleichungen

$$\Pi[(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})] = \Sigma q^{ii}z^i,$$
$$(z+z^{-1})\,\Pi[(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})] = \Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)}z^{2i+1},$$

in der ersten nach einander $z=\sigma$, $z=-\sigma$, in der zweiten nach einander $z=\rho$, $z=\rho^5$ setzen, und die beiden jedesmal erhaltenen Formeln mit einander multipliciren.

Man kann den rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Reihen die folgende Form geben:

$$(47.)\quad \Sigma q^{ii}z^i = \Sigma q^{16ii}z^{4i} + \Sigma q^{(4i+1)^2}(z^{4i+1}+z^{-(4i+1)}) + \tfrac{1}{2}\Sigma q^{(4i+2)^2}(z^{4i+2}+z^{-(4i+2)}),$$

$$(48.)\quad \Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)}z^{2i+1} = \tfrac{1}{2}\Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)}(z^{2i+1}+z^{-(2i+1)}) = \Sigma q^{2i(4i+1)}(z^{8i+1}+z^{-(8i+1)})$$
$$+\Sigma q^{(2i+1)(4i+1)}(z^{8i+3}+z^{-(8i+3)}).$$

Die beiden Summen rechts vom zweiten Gleichheitszeichen in der Formel (48.) werden aus der Summe $\Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)}z^{2i+1}$ erhalten, wenn man dem Index i respective die Formen $4i$ und $-(4i+1)$, $4i+1$ und $-(4i+2)$ giebt.

Da

$$\rho^{8i} = \sigma^{4i} = (-1)^i, \quad \rho^4+\rho^{-4} = \sigma^2+\sigma^{-2} = 0, \quad \rho^2+\rho^{-2} = \sigma+\sigma^{-1} = \sqrt{2},$$
$$\rho^3+\rho^{-3} = (\rho+\rho^{-1})[\rho^2+\rho^{-2}-1] = (\rho+\rho^{-1})(\sqrt{2}-1),$$

so folgt aus (47.) für $z=\sigma$ und aus (48.) für $z=\rho$, wenn man letztere Gleichung mit $\rho+\rho^{-1}$ dividirt,

$$(49.)\quad \Pi[(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}\sigma)(1+q^{2i+1}\sigma^{-1})] = \Sigma\sigma^i q^{ii}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{16ii} + \sqrt{2}\,\Sigma(-1)^i q^{(4i+1)^2}$$

$$(50.)\quad \Pi[(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}\sigma)(1+q^{i+1}\sigma^{-1})] = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\rho^{2i+1}+\rho^{-(2i+1)}}{\rho+\rho^{-1}}q^{\frac{1}{2}(ii+i)}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{2i(4i+1)} + (\sqrt{2}-1)\Sigma(-1)^i q^{(2i+1)(4i+1)}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen ρ^5 für ρ und also $-\sigma$ für σ, so ändert sich in den Ausdrücken rechts bloss das Zeichen von $\sqrt{2}$. Man erhält daher durch Multiplication je zweier durch diese Aenderung aus einander abgeleiteten Formeln:

$$(51.)\quad \Pi[(1-q^{2i+2})^2(1+q^{8i+4})]$$
$$= [\Sigma(-1)^i q^{16ii}]^2 - 2[\Sigma(-1)^i q^{(4i+1)^2}]^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{16(ii+kk)} - 2q^2\Sigma(-1)^{i+k} q^{16(ii+kk)+8(i+k)}$$

$$(52.)\quad \Pi[(1-q^{i+1})^2(1+q^{4i+4})]$$
$$= [\Sigma(-1)^i q^{2i(4i+1)}]^2 - 2\Sigma(-1)^i q^{2i(4i+1)}.\Sigma(-1)^i q^{(2i+1)(4i+1)} - [\Sigma(-1)^i q^{(2i+1)(4i+1)}]^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{8(ii+kk)+2(i+k)} - q^2\Sigma(-1)^{i+k} q^{8(ii+kk)+6(i+k)} - 2q\Sigma(-1)^{i+k} q^{8(ii+kk)+2i+6k}.$$

Jedes der beiden unendlichen Producte kann man in zwei *elliptische* unendliche Producte zerfällen, und erhält auf diese Weise für die vorstehenden Ausdrücke noch andere Darstellungen durch Doppelsummen. Man hat nämlich:

$$(53.)\quad \Pi[(1-q^{2i+2})^2(1+q^{8i+4})] = \Pi[(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})].\Pi[(1-q^{8i+8})(1-q^{16i+8})]$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{2ii}.\Sigma(-1)^i q^{8ii} = [\Sigma q^{8ii} - 2\Sigma q^{2(4i+1)^2}]\Sigma(-1)^i q^{8ii}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{8(ii+kk)} - 2q^2\Sigma(-1)^i q^{8(ii+4kk)+16k}$$

$$(54.)\quad \Pi[(1-q^{i+1})^2(1+q^{4i+4})] = \Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})].\Pi[(1-q^{4i+2})(1-q^{8i+8})]$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{ii}.\Sigma(-1)^i q^{2i(2i+1)} = [\Sigma q^{4ii} - 2\Sigma q^{(4i+1)^2}]\Sigma(-1)^i q^{4ii+2i}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{4(ii+kk)+2i} - 2q\Sigma(-1)^i q^{4(ii+4kk)+2i+8k}.$$

Wenn man die Formeln (51.) und (53.) mit einander vergleicht, und die Reihen, in denen die Exponenten von q die Form $8i$ und in denen sie die Form $8i+2$ haben, besonders gleich setzt; ferner in den so erhaltenen Gleichungen q für q^8 setzt, nachdem man die zweite derselben zuvor mit q^2 dividirt hat, so kommt man auf die bereits früher gefundenen Gleichungen A. (4.) und A. (1.) der Formelntabelle.

Ebenso zerfällt die durch Vergleichung von (52.) und (54.) erhaltene Gleichung in zwei Gleichungen, wenn man die Reihen, in denen die Exponenten von q gerade und in denen sie ungerade sind, besonders einander gleich setzt. Wenn man die zweite dieser Gleichungen durch q dividirt, und hierauf q für q^2 setzt, so ergiebt sich die Formel A. (6.). Wenn man dagegen in der ersten von diesen Gleichungen q für $-q^2$ setzt, so erhält man eine neue Formel:

$$(55.)\quad \Sigma q^{4(ii+kk)+i+k} + \Sigma q^{4(ii+kk)+3(i+k)+1} = \Sigma q^{2(ii+kk)+k}.$$

Man wird aber weiter unten sehen, dass diese Gleichung in einer allgemeineren enthalten ist, welche unmittelbar aus der Fundamentalformel fliefst.

IV. z gleich einer primitiven 24^{sten} Wurzel der Einheit.

Setzt man in (21.) unter den Zeichen Σ für i nach einander $2i$ und $-(2i+1)$, so erhält man

$$(56.)\quad (z+z^{-1})\Pi[(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})] = \Sigma q^{\frac{1}{2}i(i+1)} z^{2i+1}$$
$$= \Sigma q^{\frac{3}{2}i(3i+1)}(z^{6i+1}+z^{-(6i+1)}) + \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{6i+3}$$
$$= \Sigma q^{3i(6i+1)}(z^{12i+1}+z^{-(12i+1)}) + \Sigma q^{(3i+1)(6i+3)}(z^{12i+5}+z^{-(12i+5)}) + \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}(z^{12i+3}+z^{-(12i+3)}).$$

Es bedeute jetzt ρ eine primitive 24^{ste} Wurzel der Einheit, welche in der vorstehenden Gleichung für z gesetzt werden soll. Da

$$\rho^{12i} = (-1)^i,\quad \rho^6+\rho^{-6} = 0,\quad \rho^4+\rho^{-4} = 1,\quad \rho^2+\rho^{-2} = \sqrt{3},$$
$$\rho^3+\rho^{-3} = (\rho+\rho^{-1})(\rho^2+\rho^{-2}-1) = (\rho+\rho^{-1})(\sqrt{3}-1),$$
$$\rho^5+\rho^{-5} = (\rho+\rho^{-1})(\rho^4+\rho^{-4}-\rho^2-\rho^{-2}+1) = (\rho+\rho^{-1})(2-\sqrt{3}),$$

so folgt aus (56.) für $z=\rho$ und nach Division mit $\rho+\rho^{-1}$:

$$(57.)\quad \Pi[(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}\rho^2)(1+q^{i+1}\rho^{-2})]$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{3i(6i+1)} + (2-\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+3)} + (\sqrt{3}-1)\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}.$$

Setzt man ρ^7 für ρ, so geht $\sqrt{3}$ und ρ^2 in $-\sqrt{3}$ und $-\rho^2$ über. Man erhält daher aus (57.) eine zweite Formel, wenn man darin gleichzeitig ρ^2 und $\sqrt{3}$ in $-\rho^2$ und $-\sqrt{3}$ verwandelt. Durch Multiplication beider Formeln ergiebt sich, da

$$(1-\rho^4x)(1-\rho^{-4}x) = \frac{1+x^3}{1+x},$$

die folgende:

$$(58.)\quad \Pi\frac{(1-q^{i+1})^2(1+q^{6i+6})}{1+q^{2i+2}}$$
$$= [\Sigma(-1)^i q^{3i(6i+1)} + (2-\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+3)} + (-1+\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}]$$
$$.[\Sigma(-1)^i q^{3i(6i+1)} + (2+\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+3)} + (-1-\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}].$$

Andererseits folgt aus (56.), wenn man für z eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit und dann q^2 für q setzt,

$$\Pi\frac{(1-q^{2i+2})(1+q^{6i+6})}{1+q^{2i+2}} = \Sigma q^{3i(3i+1)} - \Sigma q^{(3i+1)(3i+2)}$$
$$= \Sigma q^{3i(3i+1)} - 2\Sigma q^{(6i+1)(6i+2)}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})] = \Sigma(-1)^i q^{ii} = \Sigma(-1)^i q^{9ii} - 2\Sigma(-1)\, q^{(3i+1)^2},$$

so erhält man das unendliche Product (58.) noch auf eine andere Art als Product zweier Reihen ausgedrückt:

$$(59.)\qquad \Pi\frac{(1-q^{i+1})^2(1+q^{6i+6})}{1+q^{2i+2}}$$
$$= [\Sigma q^{3i(3i+1)} - 2\Sigma q^{(6i+1)(6i+2)}][\Sigma(-1)^i q^{9ii} - 2\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}].$$

Wenn man in (58.) und (59.) die angedeutete Multiplication ausführt, indem man das Product zweier Summen immer durch eine Doppelsumme ersetzt, so giebt die Vergleichung dieser beiden Formeln eine Gleichung zwischen *zehn* Doppelsummen. Diese Gleichung zerfällt in drei einfachere, wenn man die Doppelsummen besonders einander gleich setzt, in welchen die Exponenten von q respective die Formen $3i$, $3i+1$ und $3i+2$ haben. Wenn man in diesen Gleichungen $-q$ für q^3 setzt, nachdem man respective die zweite und dritte Gleichung durch q und q^2 dividirt hat, so kommt die dritte auf die Gleichung A. (1.) zurück, und es werden die beiden andern Gleichungen:

$$(60.)\qquad \Sigma q^{6(ii+kk)+i+3k} + \Sigma q^{6(ii+kk)+5i+3k+1} = \Sigma q^{3(ii+kk)+i+2k}$$

$$(61.)\qquad \Sigma q^{6(ii+kk)+i+k} - 4\Sigma q^{6(ii+kk)+i+5k+1} + \Sigma q^{6(ii+kk)+5(i+k)+2} = \Sigma q^{3ii+3kk+i} - 4\Sigma q^{3ii+12kk+2i+6k+1}.$$

Je nachdem die Zahl i gerade $=2i$ oder ungerade $=-(2i+1)$ ist, verwandelt sich $\frac{1}{2}(3ii+i)$ in $6ii+i$ oder in $(2i+1)(3i+1) = 6ii+5i+1$. Hieraus folgt, dass man in (60.) die beiden Doppelsummen links vom Gleichheitszeichen in die eine

$$(60^*.)\qquad \Sigma q^{\frac{1}{2}(3ii+i)+6kk+3k} = \Sigma q^{3(ii+kk)+i+2k}$$

zusammenziehen kann. Zufolge A. (7.) werden in (61.) die zweiten Doppelsummen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich. Die Gleichung (61.) wird dadurch auf die folgende reducirt:

$$(62.)\qquad \Sigma q^{6(ii+kk)+i+k} + \Sigma q^{6(ii+kk)+5(i+k)+2} = \Sigma q^{3ii+3kk+i}.$$

Wir werden im Folgenden sehen, dass auch die Gleichungen (60*.) und (62.) in allgemeineren Formeln enthalten sind.

Allgemeinere zur Klasse (1, 1) gehörige Gleichungen zwischen Doppelsummen.

Ich will jetzt zeigen, wie man unmittelbar aus den Fundamentalformeln *drei* allgemeine Gleichungen zwischen Doppelsummen ableiten kann, in welchen die Gröfsen q und z, welche sie enthalten, beide beliebig bleiben. Diese zur Klasse (1, 1) gehörigen Gleichungen werden die Formeln A. (1.) — (7.) der Formelntabelle, so wie die im Vorhergehenden gefundenen Gleichungen (55.), (60*.) und (62.) als besondere Fälle umfassen. Eine dieser Formeln kommt mit derjenigen, welche ich in der Anmerkung zur Formelntabelle mitgetheilt habe, überein, wenn man für q und z beliebige Potenzen von q setzt, was dasselbe ist, als wenn diese Gröfsen ihre völlige Allgemeinheit beibehalten.

Man erhält zwei von diesen allgemeinen Gleichungen, wenn man die beiden Formeln

$$\Pi[(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})] = \Sigma q^{ii}z^i,$$
$$\Pi[(1-q^{2i+2})(1-q^{2i+1}z)(1-q^{2i+1}z^{-1})] = \Sigma(-1)^i q^{ii}z^i,$$

ferner die beiden Formeln

$$\Pi[(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z^2)(1+q^{2i+1}z^{-2})] = \Sigma q^{ii}z^{2i},$$
$$(z+z^{-1})\Pi[(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+2}z^2)(1+q^{2i+2}z^{-2})] = \Sigma q^{ii+i}z^{2i+1}$$

mit einander multiplicirt. Man kann nämlich jedes der beiden unendlichen Producte, welche man nach geschehener Multiplication erhält, noch auf eine andere Art in zwei elliptische unendliche Producte zerfällen, von denen nur das eine die Gröfse z enthält, und erhält hierdurch die beiden allgemeinen Formeln:

$$(63.)\qquad \Pi[(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})]\,.\,\Pi[(1-q^{4i+4})(1-q^{4i+2}z^2)(1-q^{4i+2}z^{-2})]$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{2ii+2kk}z^{2k} = \Sigma(-1)^i q^{ii+kk}z^{i+k}$$

$$(64.)\qquad \Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})]\,.\,(z+z^{-1})\,\Pi[(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})]$$
$$= \Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)+2kk+k}z^{2i+1} = \Sigma q^{ii+kk+i}z^{2i+2k+1}.$$

Da

$$\Sigma q^{\frac{1}{2}(kk+k)} = 2\Sigma q^{2kk+k},$$

so wird die erste Doppelsumme in (64.)

$$\tfrac{1}{2}\Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+kk+i+k)}z^{2i+1};$$

vertauscht man in diesem Ausdruck die Indices i und k, und setzt hierauf wieder $2\Sigma q^{2kk+k}$ für $\Sigma q^{\frac{1}{2}(kk+k)}$, so erhält man:

$$\Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)+2kk+k}z^{2k+1} = \Sigma q^{ii+kk+i}z^{2i+2k+1},$$

oder, wenn man mit z dividirt und dann z für z^2 setzt:

$$(64^*.)\qquad \Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)+2kk+k} z^i = \Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)+2kk+k} z^k = \Sigma q^{ii+kk+i} z^{i+k}.$$

Die beiden Formeln (63.) und (64*.) umfassen sämmtliche Formeln A. (1.)—(7.) und die im Vorigen gefundene Formel (60*.). Setzt man nämlich in (63.) für q und z nach einander

$$q^{\frac{3}{2}},\ q^{\frac{1}{2}};\quad q,\ 1;\quad q^2,\ q,$$

so erhält man die Formeln A. (2.), (4.), (5.). Setzt man ferner in (64*.) $-q^{-1}$ für z und für q nach einander q^3, q^4, q^6, so erhält man die Formeln A. (3.), (6.), (7.); setzt man in derselben Formel q^{-1} für z und q^2 für q, so erhält man A. (1.); endlich, wenn man q^{-1} für z und q^3 für q setzt, die Formel (60*.). Die Formel (63.) verwandelt sich in die oben (p. 243 unter (15.)) gegebene, wenn man für q und z beliebige Potenzen von q setzt.

Eine dritte allgemeine Formel kann man auf folgende Art aus der Fundamentalformel ableiten.

Man setze in der Formel

$$\Pi[(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})] = \Sigma q^{ii} z^i$$

für q nach einander die Werthe $q\sqrt{-1}$ und $-q\sqrt{-1}$, und multiplicire die beiden hierdurch erhaltenen Gleichungen. Da

$$\begin{aligned} \Pi(1-q^{2i+2}) &= \Pi(1-q^{4i+2})\Pi(1-q^{4i+4}),\\ \Sigma(\sqrt{-1})^{ii} q^{ii} z^i &= \Sigma q^{4ii} z^{2i} + \sqrt{-1}\,\Sigma q^{(2i+1)^2} z^{2i+1}, \end{aligned}$$

so findet man auf diese Weise:

$$\begin{aligned} &\Pi[(1+q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})].\Pi[(1-q^{4i+4})(1+q^{4i+2}z^2)(1+q^{4i+2}z^{-2})]\\ &= \Sigma q^{2ii}.\Sigma q^{2ii} z^{2i} = [\Sigma q^{4ii} z^{2i}]^2 + [\Sigma q^{(2i+1)^2} z^{2i+1}]^2, \end{aligned}$$

oder, wenn man wieder für jedes Product zweier Reihen eine Doppelsumme und zugleich q, z für q^2, z^2 setzt:

$$(65.)\qquad \begin{aligned} &\Pi[(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})^2(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})]\\ &= \Sigma q^{ii+kk} z^i = \Sigma q^{2ii+2kk} z^{i+k} + \Sigma q^{2(ii+kk)+2(i+k)+1} z^{i+k+1}. \end{aligned}$$

Setzt man in dieser allgemeinen Formel wieder q^2 für q und giebt der Gröfse z den Werth q^{-1}, setzt man ferner rechts vom Gleichheitszeichen $-i$ und $-k$ für i und k, so erhält man die obige Formel (55.). Setzt man dagegen in der

zweiten Doppelsumme rechts $-i-1$ und $-k-1$ für i und k, wodurch sich z^{i+k+1} in $z^{-(i+k+1)}$ ändert, und hierauf q^3 und q für q und z, so erhält man die obige Formel (62.). Diese particulären Formeln (55.) und (62.) waren dadurch gefunden worden, dass in den Fundamentalformeln für z primitive 16te und 24ste Wurzeln der Einheit gesetzt wurden, während im Vorhergehenden die allgemeine Formel (65.) aus denselben Fundamentalformeln dadurch abgeleitet worden ist, dass man für q die Gröfse $q\sqrt{-1}$ setzte, welche Methoden wesentlich von einander verschieden sind.

Neue Gleichungen zwischen Doppelsummen, welche aus den der Transformation der 3ten und 7ten Ordnung angehörenden Modulgleichungen hervorgehen.

Zu den zahlreichen in den vorhergehenden Untersuchungen aus einer und derselben Fundamentalformel abgeleiteten Gleichungen zwischen Doppelsummen will ich noch einige hinzufügen, welche aus einer andern Quelle fliefsen, nämlich aus den *Modulgleichungen* oder den algebraischen Gleichungen zwischen den Moduln zweier elliptischen Integrale, welche in einander transformirt werden können. Unter den unendlich vielen Gleichungen dieser Art können jedoch nur die auf die Transformation der 3ten und der 7ten Ordnung bezüglichen zu dem vorliegenden Zweck angewendet werden. Diese nehmen ihre einfachste Form an, wenn man die erstere zwischen den *Quadratwurzeln* und die letztere zwischen den *Biquadratwurzeln* der Moduln und ihrer Complemente aufstellt. Es wird nämlich die erstere eine *lineare* Gleichung zwischen dem Product der Quadratwurzeln des gegebenen und transformirten Moduls und dem Product der Quadratwurzeln ihrer Complemente; die letztere eine *lineare* Gleichung zwischen dem Product der Biquadratwurzeln des gegebenen und transformirten Moduls und dem Product der Biquadratwurzeln ihrer Complemente. Ich habe in den *Fundamentis* (§. 65) die Quadratwurzel des Moduls und seines Complements durch gebrochene Functionen von q ausgedrückt, welche denselben Nenner haben, und oben (p. 235 und p. 236) dasselbe in Bezug auf ihre Biquadratwurzel gethan, und zwar auf *vier* verschiedene Arten. Setzt man in diesen Ausdrücken q^n für q, so verwandeln sie sich nach der von mir aufgestellten Theorie der Transformation der elliptischen Functionen respective in die Ausdrücke der Quadrat- und Biquadratwurzel des durch eine Transformation der n^{ten} Ordnung transformirten Moduls und seines Complements. Wenn man daher in dem Ausdrucke der Quadratwurzel des Moduls und seines Complements q^3 für q und in den Ausdrücken ihrer Biquadratwurzel q^7 für q setzt, so wird man alle in die beiden Modulgleichungen eingehenden Gröfsen durch q ausgedrückt haben, und zwar werden die beiden Producte, zwischen denen eine lineare Gleichung gegeben ist, durch Brüche ausgedrückt werden, welche denselben Nenner haben. Die beiden Zähler derselben und ihr gemeinschaftlicher Nenner werden Doppelsummen von der hier betrachteten Art, und es wird daher durch Multiplication mit dem gemeinschaftlichen Nenner jedesmal eine Gleichung zwischen diesen drei Doppelsummen erhalten. In mehreren dieser Gleichungen trifft es sich jedoch, dass die allgemeinen Glieder zweier von diesen Doppelsummen nur im Vorzeichen verschieden sind, und sich daher in eines zusammenziehen lassen. In diesen Fällen erhält man aus den beiden Modulgleichungen Gleichungen zwischen nur zwei Doppelsummen, doch wird in der einen das allgemeine Gesetz der Vorzeichen einen complicirteren Ausdruck haben. Die Modulgleichung, die sich auf die Transformation 3^{ter} Ordnung bezieht, führt zu einer zur Klasse C. oder (3, 3) gehörenden Formel. Die auf die Transformation 7^{ter} Ordnung bezügliche Modulgleichung führt durch Combination der verschiedenen Ausdrücke, die ich oben für die Biquadratwurzel des Moduls und seines Complementes gegeben habe, zu 16 Formeln, die sich aber, wenn man diejenigen ausschliefst, die in den übrigen enthalten sind, auf 7 zurückführen lassen, von denen 3 der Klasse (7, 7), 2 der Klasse (7, 14) und 2 der Klasse (21, 42) angehören.

I. $n = 3$.

Wenn man durch eine Transformation 3^{ter} Ordnung oder durch eine Substitution von der Form

$$\sin\psi = \frac{a\sin\varphi + b\sin^3\varphi}{1+c\sin^2\varphi}$$

die Integrale

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int\frac{d\psi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}}$$

in einander transformiren kann, so findet zwischen den beiden Moduln k und λ und ihren Complementen $k' = \sqrt{1-k^2}$, $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$ die einfache Gleichung

$$\sqrt{k'\lambda'} + \sqrt{k\lambda} = 1$$

statt, welche zuerst von Legendre in seinem »Traité des Fonctions Elliptiques« aufgestellt worden ist. Substituirt man in den in den Fundamentis gegebenen Ausdrücken von $\sqrt{k}$ und $\sqrt{k'}$,

$$\sqrt{k} = \frac{2[\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots]}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots} = \frac{2\sqrt[4]{q}\,\Sigma q^{4ii+2i}}{\Sigma q^{ii}},$$

$$\sqrt{k'} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{ii}}{\Sigma q^{ii}},$$

für q die Gröfse q^3, so erhält man:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2\sqrt[4]{q^3}\,\Sigma q^{3(4ii+2i)}}{\Sigma q^{3ii}}, \qquad \sqrt{\lambda'} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii}}{\Sigma q^{3ii}}.$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Modulgleichung substituirt, so ergiebt sich die folgende Formel, welcher ich das den Doppelsummen gleiche unendliche Product in seiner Normalform beigefügt habe.

XIII.

$$4q\Pi[(1+q^{12i+2})(1+q^{12i+6})^2(1+q^{12i+10})(1-q^{24i+8})(1-q^{24i+16})(1-q^{24i+24})^2]$$
$$= \Sigma[1-(-1)^{i+k}]q^{ii+3kk} = 4\Sigma q^{4ii+12kk+2i+6k+1}.$$

Diese Formel gehört der Klasse (3, 3) oder C. an, und kann den oben gegebenen Formeln dieser Klasse hinzugefügt werden.

Die in XIII. links vom Gleichheitszeichen befindliche Doppelsumme besitzt die Eigenschaft, dass, wenn von ihr blofs diejenigen Glieder, deren Exponent durch 3 aufgeht, genommen werden, für welche i die Form $3i$ annimmt, und in denselben q für q^3 gesetzt wird, man auf die ursprüngliche Doppelsumme wieder zurückkommt. Dieselbe Eigenschaft läfst sich auch von der hinter dem letzten Gleichheitszeichen befindlichen leicht erweisen. Um nämlich alle Glieder, deren Exponent durch 3 theilbar ist, zu erhalten, hat man in derselben unter dem Zeichen Σ nur $-(3i+1)$ für i zu setzen, wodurch sich $4ii+2i+1$ in $36ii+18i+3$ verwandelt; setzt man hierauf q für q^3 und vertauscht die Indices i und k, so kommt man auf den ursprünglichen Ausdruck zurück. Es giebt daher die besondere Vergleichung derjenigen Glieder der Gleichung XIII., deren Exponent durch 3 theilbar ist, wieder dieselbe Gleichung XIII., nur dass in ihr q^3 für q steht.

Will man in XIII. die Glieder der Doppelsummen besonders mit einander vergleichen, deren Exponent, durch 3 dividirt, den Rest 1 läfst, so hat man in der Doppelsumme links $\pm(3i+1)$ für i zu setzen, in der Doppelsumme rechts dagegen muss man dem Index i die Formen $3i$ und $3i+1$ geben. Wenn man dann noch mit $2q$ dividirt und q für q^3 setzt, ferner auf beiden Seiten die Indices i und k vertauscht, so erhält man

$$\Sigma[1+(-1)^{i+k}]q^{ii+3kk+2k} = 2\Sigma q^{4ii+12kk+2i+2k} + 2\Sigma q^{4ii+12kk+2i+10k+2}.$$

Die beiden Doppelsummen rechts kann man in eine zusammenziehen. Da nämlich $12kk+10k+2 = (2k+1)(6k+2)$, so sind $12kk+2k$ und $12kk+10k+2$ die beiden Formen, welche die Zahl $k(3k+1)$ annimmt, je nachdem k gerade $= 2k$ oder ungerade $= -(2k+1)$ wird. Man kann daher statt der vorstehenden Gleichung einfacher die folgende setzen, bei welcher ich zugleich das den Doppelsummen gleiche unendliche Product in seiner Normalform beigefügt habe:

$$2\Pi[(1+q^{12i+2})^2(1+q^{12i+10})^2(1-q^{12i+12})^2(1+q^{24i+4})(1+q^{24i+20})(1-q^{48i+16})(1-q^{48i+32})]$$
$$= \Sigma[1+(-1)^{i+k}]q^{ii+3kk+2k} = 2\Sigma q^{4ii+3kk+2i+k}.$$

Wie diese Gleichung aus der Gleichung XIII. folgt, so wird sich auch umgekehrt aus ihr die Gleichung XIII. ergeben. Wenn nämlich $q<1$ und $f(q)$ eine Function ist, welche für $q=0$ verschwindet, und wenn durch $f(q)$ eine andere Function $\varphi(q)$ mittelst der Gleichung

$$f(q) = f(q^3) + q\varphi(q^3)$$

definirt wird, so wird umgekehrt $\varphi(q)$ aus $f(q)$ durch die unendliche Reihe

$$q\varphi(q^3) + q^3\varphi(q^9) + q^9\varphi(q^{27}) + q^{27}\varphi(q^{81}) + \text{etc.} = f(q)$$

bestimmt. Bezeichnet man eine der beiden Doppelsummen in XIII. mit $f(q)$, so wird die auf derselben Seite des Gleichheitszeichens befindliche Doppelsumme in der aus XIII. abgeleiteten Gleichung $\frac{1}{2}\varphi(q)$; und da immer auch $f(q)$ durch $\varphi(q)$ bestimmt ist, so folgt, dass, wenn die beiden Doppelsummen der letzteren Gleichung einander gleich sind, auch die beiden Doppelsummen in XIII. einander gleich sein müssen.

II. $n = 7$.

In dem 12^{ten} Bande des Crelleschen Journals p. 173 hat Herr Dr. Gützlaff die algebraische Transformation der 7^{ten} Ordnung untersucht, und die auf diese Transformation bezügliche Modulgleichung auf die einfache Form

$$\sqrt[4]{k'\lambda'} + \sqrt[4]{k\lambda} = 1$$

gebracht. Jede der beiden Gröfsen $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{k'}$ habe ich oben durch *vier* verschiedene Brüche ausgedrückt. Es ist nämlich

$$(66.)\quad \begin{cases} (a)\ \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{6ii+2i}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)}q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}, & \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)}q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}, \\ (b)\ \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{4ii+2i}}{\Sigma q^{2ii+i}}, & \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}}{\Sigma q^{2ii+i}}, \\ (c)\ \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii}}, & \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{ii}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii}}, \\ (d)\ \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma q^{ii}}, & \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{2ii}}{\Sigma q^{ii}}, \end{cases}$$

wo die neben einander gestellten Brüche denselben Nenner haben.

Wenn man in diesen Ausdrücken für q die Gröfse q^7 setzt, so erhält man vier verschiedene Brüche für jede der beiden Gröfsen $\sqrt[4]{\lambda}$ und $\sqrt[4]{\lambda'}$, welche wieder respective dieselben Nenner haben. Man substituire jetzt beliebige dieser Ausdrücke von $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda'}$ für diese Gröfsen in die Modulgleichung, *indem man jedoch für $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{k'}$ und eben so für $\sqrt[4]{\lambda}$ und $\sqrt[4]{\lambda'}$ gleichzeitig immer nur diejenigen Brüche setzt, welche denselben Nenner haben.* Es werden dann jedesmal auch die Ausdrücke von $\sqrt[4]{k\lambda}$ und $\sqrt[4]{k'\lambda'}$ einen gemeinschaftlichen Nenner haben, und es wird sich durch Multiplication mit demselben jedesmal eine Gleichung zwischen drei Doppelsummen ergeben.

Bezeichnet man die aus den Formeln (a), (b), (c), (d) durch Verwandlung von q in q^7 hervorgehenden Formeln respective mit (α), (β), (γ), (δ), so ergeben sich auf die angegebene Art aus der einen Modulgleichung 16 Gleichungen zwischen Doppelsummen, welche dadurch erhalten werden, dass man jede der Formeln (a), (b), (c), (d) mit jeder der Formeln (α), (β), (γ), (δ) combinirt. Diese Gleichungen werden zu Klassen gehören, von denen in den vorhergehenden Untersuchungen noch kein Beispiel gefunden war. Es geben nämlich die Combinationen

$a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ Gleichungen der Klasse (7, 7);

$\left.\begin{matrix} a\beta, & a\gamma, & a\delta \\ b\alpha, & c\alpha, & d\alpha \end{matrix}\right\}$ - - - (21, 42);

$\left.\begin{matrix} b\gamma, & b\delta, & c\delta \\ c\beta, & d\beta, & d\gamma \end{matrix}\right\}$ - - - (7, 14).

Diese Gleichungen lassen sich jedoch, wenn man nur die wesentlich verschiedenen von ihnen betrachten will, auf eine viel geringere Anzahl zurückführen. Es werden nämlich die aus den Combinationen $d\delta$; $b\delta$, $d\beta$, $d\gamma$; $a\delta$, $d\alpha$ hervorgehenden Gleichungen respective aus den durch die Combinationen $c\gamma$; $b\gamma$, $c\beta$, $c\delta$; $a\gamma$, $c\alpha$ gefundenen durch blofse Verwandlung von q in $-q$ erhalten. Es ergiebt sich ferner bei näherer Untersuchung, dass die aus den Combinationen $b\gamma$, $a\beta$, $a\gamma$ entspringenden Gleichungen respective in den durch die Combinationen $c\beta$, $b\alpha$, $c\alpha$ gefundenen enthalten sind und aus ihnen dadurch abgeleitet werden können, dass man die Glieder, deren Exponent durch 7 aufgeht, besonders mit einander vergleicht. Ich werde daher in dem folgenden Tableau nur die 7 aus den Combinationen

$$a\alpha,\quad b\beta,\quad c\gamma;\quad c\beta,\quad c\delta;\quad b\alpha,\quad c\alpha$$

hervorgehenden Gleichungen zusammenstellen, aus denen die übrigen folgen. Die diesen Gleichungen hinzugefügten unendlichen Producte habe ich in einer einfachen, nicht in der Normalform dargestellt, da in diesen Fällen das allgemeine Glied der Normalform eine sehr grofse Factorenanzahl umfafst.

XIV.

L. (7, 7).

1. $$2q\Pi[(1+q^{12i+4})(1+q^{12i+8})(1-q^{12i+12})(1+q^{84i+28})(1+q^{84i+56})(1-q^{84i+84})]$$
$$= \Sigma[(-1)^{\frac12(ii+kk+i+k)}-(-1)^{i+k}]q^{\frac12(3ii+21kk+i+7k)}$$
$$= 2\Sigma(-1)^{i+k}q^{6ii+42kk+2i+14k+1} \quad\ldots\ldots\quad a,\ \alpha$$

2. $$2q\Pi[(1+q^{8i+2})(1+q^{8i+6})(1-q^{8i+8})(1+q^{56i+14})(1+q^{56i+42})(1-q^{56i+56})]$$
$$= \Sigma[1-(-1)^{i+k}]q^{2ii+14kk+i+7k} = 2\Sigma q^{4ii+28kk+2i+14k+1} \quad\ldots\ldots\quad b,\ \beta$$

3. $$\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})(1-q^{14i+7})^2(1-q^{14i+14})]$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{ii+7kk}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{2ii+14kk}-2\Sigma(-1)^{i+k}q^{2ii+14kk+i+7k+1} \quad\ldots\ldots\quad c,\ \gamma$$

M. (7, 14).

1. $$\Pi[(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})(1+q^{28i+7})(1+q^{28i+21})(1-q^{28i+28})]$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{2ii+14kk+7k}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{ii+14kk+7k}+2\Sigma(-1)^i q^{2ii+28kk+i+14k+1} \quad\ldots\ldots\quad c,\ \beta$$

2. $$2q\Pi[(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1+q^{14i+7})(1-q^{28i+28})]$$
$$= 2\Sigma(-1)^i q^{2ii+14kk+i+7k+1}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{2ii+7kk}-\Sigma(-1)^{i+k}q^{ii+14kk} \quad\ldots\ldots\quad c,\ \delta$$

N. (21, 42).

1. $$2q\Pi[(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})(1-q^{28i+28})]$$
$$= \Sigma[(-1)^{\frac12(kk-k)}-(-1)^{i+k}]q^{\frac12(4ii+21kk+2i+7k)}$$
$$= 2\Sigma(-1)^k q^{4ii+42kk+2i+14k+1} \quad\ldots\ldots\quad b,\ \alpha$$

2. $$\Pi[(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})(1-q^{7i+7})]$$
$$= \Sigma(-1)^{\frac12(kk-k)+i}q^{\frac12(4ii+21kk+7k)}-2\Sigma(-1)^{i+k}q^{2ii+42kk+i+14k+1}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{\frac12(2ii+21kk+7k)} \quad\ldots\ldots\quad c,\ \alpha$$

Wenn man in den drei Gleichungen L. und der Gleichung M. (2.) die Glieder besonders vergleicht, deren Exponenten, durch 7 dividirt, respective die Reste 2, 6, 0, 0 lassen, so wird man wieder auf ähnliche Gleichungen zurückgeführt. Aus dieser Eigenschaft lassen sich, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, ähnlich wie in I., besondere Formen schliefsen, welche die durch die Doppelsummen ausgedrückten Reihen haben müssen.

1. Die Zahl $\frac12(3ii+i)$ erhält die Form $7i+2$ nur für die Werthe von i, welche die Form $7i+1$ haben. Setzt man $7i+1$ für i, so verwandelt sich $\frac12(3ii+i+10)$ in $\frac72(21ii+7i+2)$ und $6ii+2i+6$ in $7(42ii+14i+2)$, und es erhält $(-1)^{\frac12(ii+i)}$ den entgegengesetzten Werth. Wenn man daher in der Gleichung L. (1.) nach Multiplication mit q^5 nur die Glieder beibehält, deren Exponent durch 7 theilbar ist, und in denselben q für q^7 setzt, ferner mit $-q$ dividirt und die Indices i und k vertauscht, so werden auf beiden Seiten der Gleichung wieder die ursprünglichen Doppelsummen erhalten werden. Bezeichnet man daher die auf den beiden Seiten von L. (1.) befindlichen Doppelsummen mit $f(q)$, so wird

$$f(q) = -q^2 f(q^7)+f_1(q),$$

wo $f_1(q)$ eine Function von q ist, in welcher kein Exponent die Form $7i+2$ hat. Aus dieser Gleichung ergiebt sich umgekehrt $f(q)$ durch $f_1(q)$ mittelst der Formel:

$$f(q) = f_1(q)-q^2 f_1(q^7)+q^{\frac12(7^2-1)}f_1(q^{7^2})-q^{\frac12(7^3-1)}f_1(q^{7^3})+ \text{ etc.}$$

Das Charakteristische dieser Form der Reihe $f(q)$ besteht darin, dass, wenn man den Theil derselben, welcher die Glieder umfafst, deren Exponent, durch 7^m dividirt, den Rest $\frac13(7^m-1)$, aber nicht auch, durch 7^{m+1} dividirt, den Rest $\frac13(7^{m+1}-1)$ läfst, durch $(-1)^m q^{\frac13(7^m-1)}f_1(q^{7^m})$ ausdrückt, die Function $f_1(q)$ für jedes m dieselbe bleibt, und die Glieder der Reihe $f(q)$ enthält, deren Exponent, durch 7 dividirt, nicht den Rest 2 läfst.

In der Gleichung L. (1.) ist die Doppelsumme hinter dem zweiten Gleichheitszeichen eine ungerade Function von q; man beweist leicht, dass dies auch mit der Doppelsumme vor diesem Gleichheitszeichen der Fall ist, indem der Factor $(-1)^{\frac{1}{2}(ii+kk+i+k)}-(-1)^{i+k}=0$ ist, so oft der Exponent $\frac{1}{2}(3ii+21kk+i+7k)$ gerade ist. Weil hier die Function $f(q)$ eine ungerade ist, muss auch $f_1(q)$ eine ungerade Function sein.

2. Man multiplicire die Gleichung L. (2.) mit q, und behalte bloss die Glieder, deren Exponent durch 7 aufgeht, was dadurch geschieht, dass man $-(7i+2)$ für i substituirt, wodurch $2ii+i+1$ sich in $7(14ii+7i+1)$ verwandelt. Setzt man hierauf q für q^7 und dividirt mit q, so erhält man nach Vertauschung der Indices wieder auf beiden Seiten der Gleichung die ursprünglichen Doppelsummen. Bezeichnet man daher die Doppelsummen in L. (2.) mit $f(q)$ und mit $f_1(q)$ die Glieder von $f(q)$, in welchen kein Exponent die Form $7n+6$ hat, so wird

$$f(q) = q^6 f(q^7)+f_1(q).$$

Man erhält hieraus für $f(q)$ die Form

$$f_1(q)+q^6 f_1(q^7)+q^{7^2-1} f_1(q^{7^2})+q^{7^3-1} f_1(q^{7^3})+\text{etc.} = f(q).$$

Das Charakteristische dieser Form besteht darin, dass wenn man die Glieder von $qf(q)$, deren Exponent durch 7^m, nicht aber durch 7^{m+1} aufgeht, durch den Ausdruck $q^{7^m} f_1(q^{7^m})$ darstellt, die Function $qf_1(q)$ für jedes m dieselbe bleibt, und die Glieder der Reihe $qf(q)$ enthält, deren Exponent nicht durch 7 aufgeht.

3. Die beiden Doppelsummen in L. (3.) gehen in sich selbst über, wenn man in den Gliedern, deren Exponent durch 7 theilbar ist, q für q^7 setzt. Hieraus folgt, dass sie die Form

$$f_1(q)+f_1(q^7)+f_1(q^{7^2})+\text{etc.}$$

haben, wo $f_1(q)$ eine Reihe bedeutet, in der kein Exponent durch 7 theilbar ist. Bezeichnet man daher den Theil derselben, welcher die Glieder umfafst, deren Exponent durch 7^m, aber nicht durch 7^{m+1} aufgeht, mit $f_1(q^{7^m})$, so bleibt $f_1(q)$ für jedes m dieselbe Function.

4. Betrachtet man in M. (2.) diejenigen Glieder, deren Exponent durch 7 theilbar ist, setzt in ihnen $-q$ für q^7, und kehrt alle Zeichen um, so kommt

man wieder auf die ursprünglichen Doppelsummen zurück. Bezeichnet man daher diese Doppelsummen mit $f(q)$, und umfafst mit $f_1(q)$ die Glieder derselben, die einen durch 7 theilbaren Exponenten haben, so muss die Gleichung

$$f(q) = -f(-q^7)+f_1(q)$$

stattfinden, woraus

$$f(q) = f_1(q)-f_1(-q^7)+f_1(q^{7^2})-f_1(-q^{7^3})+\text{etc.}$$

folgt. Diese Formel zeigt, dass, wenn man in $f(q)$ alle Glieder, deren Exponenten durch 7^m, aber nicht durch 7^{m+1} theilbar sind, durch den Ausdruck $(-1)^m f_1((-1)^m q^{7^m})$ umfafst, $f_1(q)$ für jedes m unverändert bleibt.

Man kann noch aus andern Darstellungen der Modulgleichung Gleichungen zwischen Doppelsummen ableiten, welche aber in den im Vorhergehenden aufgestellten Formeln enthalten sein werden, weshalb die folgenden Andeutungen genügen mögen. Die Gröfsen

$$\sqrt[4]{k'},\quad \sqrt[4]{k},\quad \sqrt{k'},\quad \sqrt[4]{kk'},\quad \sqrt{k}$$

lassen sich durch Brüche darstellen, welche alle denselben Nenner Σq^{ii} haben, während die Zähler Reihen ähnlicher Art sind. Für $\sqrt[4]{kk'}$ erhält man einen solchen Bruch, wenn man den Werth von $\sqrt[4]{k}$ aus (66. c) mit dem Werthe von $\sqrt[4]{k'}$ aus (66. d) multiplicirt. Fügt man aus (66.) die mit dem Nenner Σq^{ii} behafteten Ausdrücke der andern 4 Gröfsen hinzu, so erhält man

$$(67.)\quad \begin{cases} \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{2ii}}{\Sigma q^{ii}}, \quad \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}\,.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma q^{ii}}, \\ \sqrt{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{ii}}{\Sigma q^{ii}}, \ \sqrt[4]{kk'} = \dfrac{\sqrt{2}\,.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}}{\Sigma q^{ii}}, \ \sqrt{k} = \dfrac{2\sqrt[4]{q}\,\Sigma q^{4ii+2i}}{\Sigma q^{ii}}. \end{cases}$$

Bedeutet λ irgend einen transformirten Modul, so folgt hieraus, dass, so oft man zwischen den 36 Gröfsen, welche aus der Multiplication von

$$1,\ \sqrt[4]{k'},\ \sqrt[4]{k},\ \sqrt{k'},\ \sqrt[4]{kk'},\ \sqrt{k}\quad \text{mit}\quad 1,\ \sqrt[4]{\lambda'},\ \sqrt[4]{\lambda},\ \sqrt{\lambda'},\ \sqrt[4]{\lambda\lambda'},\ \sqrt{\lambda}$$

erhalten werden, eine lineare Gleichung hat, sich aus derselben auch eine Gleichung zwischen Doppelsummen der hier betrachteten Art ergiebt. Multiplicirt man z. B. die Modulgleichung

$$\sqrt[4]{k'\lambda'}+\sqrt[4]{k\lambda} = 1$$

mit $\sqrt[4]{k'\lambda'}$ oder mit $\sqrt[4]{k\lambda}$ und substituirt in den hieraus entstehenden Gleichungen,

$$\sqrt{k'\lambda'}+\sqrt[4]{k'k\lambda'\lambda} = \sqrt[4]{k'\lambda'},\qquad \sqrt[4]{k'k\lambda'\lambda}+\sqrt{k\lambda} = \sqrt[4]{k\lambda},$$

die Formeln (67.), so erhält man nach Multiplication mit dem gemeinschaftlichen Nenner $\Sigma q^{ii}\Sigma q^{7ii}$ Gleichungen zwischen Doppelsummen, die mit den obigen L. (2.), (3.) übereinkommen. Ob es aufser den hier gegebenen Beispielen noch andere Modulgleichungen giebt, welche als lineare Gleichungen zwischen den angegebenen 35 Gröfsen dargestellt werden können, bezweifle ich. Wenigstens scheint die zur Transformation 5^{ter} Ordnung gehörige Modulgleichung

$$\sqrt[4]{k\lambda}\,[\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}\,] = \sqrt[4]{k'\lambda'}\,[\sqrt{\lambda'}-\sqrt{k'}\,],$$

die ich in den »*Fund. Theor. F. Ellipt.* §. 30.« gegeben habe, welche man auch auf die beiden folgenden Arten darstellen kann,

$$\sqrt{k}-\sqrt{\lambda} = \sqrt[4]{k'\lambda'}\,[\sqrt{k\lambda'}+\sqrt{k'\lambda}\,],$$
$$\sqrt{\lambda'}-\sqrt{k'} = \sqrt[4]{k\lambda}\,[\sqrt{k\lambda'}+\sqrt{k'\lambda}\,],$$

auf keine solche Form gebracht werden zu können.

Ich will jetzt alle zwischen Doppelsummen gefundenen Gleichungen, welche in der obigen Formeltabelle und in den Formeln XI.—XIV. enthalten sind, in einer *zweiten Formeltabelle* zusammenstellen, dabei aber zugleich durch Substitution einer Potenz von q für q selbst und durch Multiplication mit einer Potenz von q die Exponenten auf die Form

$$m(\alpha i+\beta)^2+n(\gamma k+\delta)^2$$

bringen, was für jede der in derselben Gleichung enthaltenen Doppelsummen durch dieselbe Substitution und Multiplication bewerkstelligt werden kann. Die Formen der Exponenten habe ich in Klammern übergeschrieben, wobei gemeinschaftliche Factoren von m und n fortgelassen sind. Die Gleichungen A. 1.—6. der ersten Formeltabelle und die Formeln (55.), (62.), (64.) habe ich durch die allgemeinen Formeln, in denen sie enthalten sind, ersetzt.

Zweite Formeltabelle.

Allgemeine Gleichungen zwischen Doppelsummen.

1. $\Pi[(1-q^{2i+2})^2(1-q^{4i+2}z^2)(1-q^{4i+2}z^{-2})]$
$= \Sigma(-1)^i q^{ii+kk} z^{i+k} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{2(ii+kk)} z^{2k}$ . . . . 63.

2. $(z+z^{-1})\Pi[(1-q^{16i+16})^2(1+q^{8i+8}z^2)(1+q^{8i+8}z^{-2})]$
$= \Sigma q^{2[(2i+1)^2+4kk]} z^{2(i+k)+1} = \Sigma q^{(2i+1)^2+(4k+1)^2} z^{2i+1}$ . . . . 64*.

3. $\Pi[(1+q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})^2(1+q^{4i+2}z^2)(1+q^{4i+2}z^{-2})]$
$= \Sigma q^{2(ii+kk)} z^{2i} = \Sigma q^{4(ii+kk)} z^{2(i+k)} + \Sigma q^{(2i+1)^2+(2k+1)^2} z^{2(i+k+1)}$ . . . . . . 65.

Particuläre Gleichungen zwischen Doppelsummen, deren Exponenten ähnliche quadratische Formen haben.

$[xx+yy]$

$q^2\Pi[(1-q^{16i+8})^2(1-q^{16i+16})^4]$
$= \Sigma(4k+1)q^{(4i+1)^2+(4k+1)^2} = \Sigma(-1)^i(4k+1)q^{2[4ii+(4k+1)^2]}$ . . . . . . A. 8.

$[xx+2yy]$

1. $q^9\Pi[(1-q^{144i+72})(1-q^{144i+144})^2]$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{3[(6i+1)^2+2(6k+1)^2]} = \Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+8(3k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^k q^{9[(4i+1)^2+8kk]}$ . . . . B. 1, 2.

2. $q^3\Pi[(1-q^{24i+24})(1-q^{36i+6})(1-q^{36i+30})(1-q^{36i+36})]$
$= \Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+54kk} - \Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+6(3k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+2(3k+1)^2}$ . . . . XI. B. 3.

3. $q^3\Pi[(1-q^{48i+24})(1-q^{96i+96})(1+q^{144i+72})^2(1-q^{144i+144})]$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)}q^{3(6i+1)^2+216kk} - \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)}q^{3(6i+1)^2+24(3k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii-i)+k}q^{(6i+1)^2+2(6k+1)^2}$ . . . . XI. B. 4.

4. $q^3\Pi[(1-q^{48i+24})(1-q^{144i+144})^2(1-q^{288i+96})(1-q^{288i+192})]$
$= \Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+216kk} - \Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+24(3k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^i q^{(6i+1)^2+2(6k+1)^2}$ . . . . XI. B. 5.

5. $q^9\Pi[(1-q^{24i+24})(1-q^{144i+24})(1-q^{144i+120})(1-q^{144i+144})]$
$= \Sigma(-1)^k q^{3(6i+1)^2+6(6k+1)^2} - 2\Sigma(-1)^k q^{27(4i+1)^2+6(6k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+8(3k+1)^2}$ . . . . XI. B. 6.

$[xx+3yy]$

1. $q^4\Pi(1-q^{48i+48})^2$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+12kk]} = \Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)+k}q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$ . . . . C.

2. $q^4\Pi[(1-q^{72i+24})(1-q^{72i+48})(1-q^{72i+72})^2]$
$= \Sigma q^{4[(3i+1)^2+27kk]} - \Sigma q^{4[(3i+1)^2+3(3k+1)^2]} = \Sigma q^{(6i+1)^2+3(6k+1)^2} - 2\Sigma q^{(6i+1)^2+27(4k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+3(6k+1)^2}$ . . . . XI. C. 3.

3. $4q^4\Pi[(1+q^{16i+8})(1-q^{32i+32})(1+q^{48i+24})(1-q^{96i+96})]$
$= \Sigma[1-(-1)^{i+k}]q^{4(ii+3kk)} = 4\Sigma q^{(4i+1)^2+3(4k+1)^2}$. . . . . XIII.

$[xx + 7yy]$

1. $2q^{32}\Pi[(1+q^{288i+96})(1+q^{288i+192})(1-q^{288i+288})(1+q^{2016i+672})(1+q^{2016i+1344})(1-q^{2016i+2016})]$
$= \Sigma[(-1)^{\frac{1}{2}(ii+kk+i+k)} - (-1)^{i+k}]q^{(6i+1)^2+7(6k+1)^2}$
$= 2\Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+7(6k+1)^2]}$ . . . . XIV. L. 1.

2. $2q^{16}\Pi[(1+q^{64i+16})(1+q^{64i+48})(1-q^{64i+64})(1+q^{448i+112})(1+q^{448i+336})(1-q^{448i+448})]$
$= \Sigma[1-(-1)^{i+k}]q^{(4i+1)^2+7(4k+1)^2} = 2\Sigma q^{2[(4i+1)^2+7(4k+1)^2]}$ . . . . XIV. L. 2.

3. $\Pi[(1-q^{16i+8})^2(1-q^{16i+16})(1-q^{112i+56})^2(1-q^{112i+112})]$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{16(ii+7kk)} - 2\Sigma(-1)^{i+k}q^{(4i+1)^2+7(4k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{8(ii+7kk)}$. . . . . XIV. L. 3.

Particuläre Gleichungen zwischen Doppelsummen, deren Exponenten in wesentlich verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind.

$[xx + yy,\ xx + 2yy]$

$q^6\Pi[(1+q^{96i+48})(1-q^{96i+96})^2]$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{6[(4i+1)^2+16kk]} = \Sigma(-1)^k q^{3[(4i+1)^2+(4k+1)^2]}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{2[(6i+1)^2+2(6k+1)^2]} = \Sigma(-1)^k q^{6[(4i+1)^2+8kk]}$. . . . . . D. 1. 2. 3.

$[xx + yy,\ xx + 3yy]$

$q^4\Pi(1-q^{48i+48})^2$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{2[(6i+1)^2+(6k+1)^2]}$
$= \Sigma(-1)^i q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2} = \Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+12kk]}$. . . . . . . E. 1. 2.

$[xx + yy,\ xx + 6yy]$

$q^2\Pi[(1-q^{96i+48})^3(1-q^{96i+96})^2]$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)+k}q^{(6i+1)^2+(6k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{2[(6i+1)^2+24kk]}$. . . . . F. 1.

$[xx + yy,\ 2xx + 3yy]$

$q^5\Pi[(1-q^{48i+24})(1-q^{96i+48})(1-q^{96i+96})^2]$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+4(6k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{2(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$. . . . . F. 2.

$[xx + 2yy,\ xx + 3yy]$

1. $q\Pi[(1+q^{48i+24})(1-q^{48i+48})(1-q^{72i+72})(1-q^{144i+72})]$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)+k}q^{(6i+1)^2+72kk}$
$= \Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+48kk}$ . . . . G. 1.

2. $q^9\Pi[(1-q^{96i+48})^2(1-q^{96i+96})(1+q^{144i+72})(1-q^{288i+288})]$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)+k}q^{(6i+1)^2+8(3k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^i q^{3[16ii+3(4k+1)^2]}$ . . . . G. 2.

3. $q^4\Pi[(1-q^{72i+72})(1-q^{144i+72})(1-q^{96i+96})]$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+18kk]}$
$= \Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$ . . . . G. 3.

4. $q^{12}\Pi[(1-q^{96i+96})(1-q^{144i+24})(1-q^{144i+120})(1-q^{144i+144})]$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+2(3k+1)^2]}$
$= \Sigma(-1)^i q^{3[(4i+1)^2+3(4k+1)^2]}$. . . . . G. 4.

$[xx + 2yy,\ xx + 6yy]$

1. $q\Pi[(1-q^{72i+24})(1-q^{72i+48})(1-q^{144i+72})^3(1-q^{144i+144})^2]$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+72kk}$
$= \Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+24kk}$ . . . . H. 1.

2. $q^9\Pi[(1-q^{24i+24})(1-q^{144i+24})(1-q^{144i+120})(1-q^{144i+144})]$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+8(3k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^k q^{9(4i+1)^2+24kk}$ . . . . H. 2.

3. $q^3\Pi[(1+q^{48i+24})(1-q^{72i+72})(1-q^{96i+96})(1-q^{144i+72})]$
$= \Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+2(6k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^k q^{3[(4i+1)^2+24kk]}$. . . . . H. 3.

$[xx + 2yy,\ 2xx + 3yy]$

$q^{11}\Pi[(1-q^{48i+48})(1+q^{144i+72})(1-q^{288i+288})]$
$= \Sigma(-1)^k q^{9(4i+1)^2+2(6k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^i q^{8(3i+1)^2+3(4k+1)^2}$. . . . . H. 4.

$[xx + 3yy,\ xx + 6yy]$

1. $q\Pi[(1-q^{48i+24})(1-q^{96i+48})^3(1-q^{96i+96})^2]$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+48kk}$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)+k}q^{(6i+1)^2+24kk}$ . . . . I. 1.

2. $q^4\Pi[(1-q^{48i+24})^2(1-q^{96i+48})(1-q^{96i+96})^2]$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{[4(6i+1)^2+6kk]}$ . . . . I. 2.

3. $q^7\Pi[(1+q^{48i+24})(1-q^{96i+96})^2]$
$= \Sigma(-1)^i q^{4(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(ii+i)} q^{(6i+1)^2+6(4k+1)^2}$ . . . . I. 3.

$[xx+yy,\ xx+5yy]$

1. $q^{30}\Pi[(1-q^{120i+120})(1-q^{600i+600})]$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3[(10i+1)^2+(10k+3)^2]}$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{5[(6i+1)^2+5(6k+1)^2]}$ . . . . XII. 1. K.

2. $q^6\Pi[(1-q^{600i+240})(1-q^{600i+360})(1-q^{600i+600})]^2$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3[(10i+1)^2+(10k+1)^2]}$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+1)^2+5(6k+1)^2} + \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+11)^2+5(6k+1)^2}$ . . . . XII. 2.

3. $q^{54}\Pi[(1-q^{600i+120})(1-q^{600i+480})(1-q^{600i+600})]^2$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3[(10i+3)^2+(10k+3)^2]}$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+7)^2+5(6k+1)^2} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+13)^2+5(6k+1)^2}$ . . . . XII. 3.

$[xx+7yy,\ xx+14yy$ und $2xx+7yy]$

1. $q^7\Pi[(1-q^{32i+16})^2(1-q^{32i+32})(1+q^{224i+56})(1+q^{224i+168})(1-q^{224i+224})]$
$= \Sigma'(-1)^i q^{16ii+7(4k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{8ii+7(4k+1)^2} + 2\Sigma(-1)^i q^{(4i+1)^2+14(4k+1)^2}$ . . . . XIV. M. 1.

2. $2q^8\Pi[(1-q^{16i+8})(1-q^{32i+32})(1+q^{112i+56})(1-q^{224i+224})]$
$= 2\Sigma(-1)^i q^{(4i+1)^2+7(4k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^i q^{16ii+56kk} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{8ii+112kk}$ . . . . XIV. M. 2.

$[3xx+7yy,\ 3xx+14yy]$

$2q^{34}\Pi[(1+q^{96i+48})(1-q^{192i+192})(1-q^{672i+672})]$
$= \Sigma[(-1)^{\frac{1}{2}(kk-k)} - (-1)^{i+k}] q^{3(4i+1)^2+7(6k+1)^2}$
$= 2\Sigma(-1)^k q^{2[3(4i+1)^2+14(6k+1)^2]}$ . . . . XIV. N. 1.

$[3xx+7yy,\ 6xx+7yy]$

$q^7\Pi[(1-q^{48i+24})^2(1-q^{48i+48})(1-q^{168i+168})]$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(kk-k)+i} q^{48ii+7(6k+1)^2} - 2\Sigma(-1)^{i+k} q^{3(4i+1)^2+28(6k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{24ii+7(6k+1)^2}$ . . . . XIV. N. 2.

SUR LA ROTATION D'UN CORPS

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

PAR

Mr. C. G. J. JACOBI

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 39. p. 293—350.

SUR LA ROTATION D'UN CORPS.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS.

(Lu dans la séance du 30 juillet 1849.)

Le problème de la rotation d'un corps solide quelconque, qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, est susceptible d'être résolu par des formules nouvelles si élégantes et si parfaites, que je ne peux m'empêcher de les communiquer à votre illustre Académie. Ce sont les fonctions Θ et H que j'ai introduites dans l'analyse des fonctions elliptiques, c'est-à-dire les fonctions

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots,$$

$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x - 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - 2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x + \cdots,$$

au moyen desquelles je suis parvenu à exprimer, de la manière la plus simple, les neuf cosinus eux-mêmes qu'il s'agit, dans ce problème, de déterminer en fonctions du temps. En effet, x étant une variable proportionnelle au temps, on trouve les cosinus des angles qui, à chaque instant, déterminent la position des axes principaux du corps, égaux à des fractions qui ont cette fonction Θ pour commun dénominateur, les neuf numérateurs étant, abstraction faite de facteurs constants, la même fonction Θ, dans laquelle seulement x se trouve augmenté d'une constante imaginaire. Quel que soit le degré d'exactitude auquel on voudra pousser les calculs, on n'aura guère à prendre plus de trois ou quatre termes de ces séries, excepté les cas extrêmes. On doit donc regarder ces cosinus comme exprimés par des quantités finies, et même par des quantités finies très-simples. Si l'on veut résoudre le problème du mouvement elliptique d'une planète par de semblables formules définitives qui ont le temps sous le signe cos ou sin, on a, comme on sait, des séries beaucoup moins convergentes, et des coefficients beaucoup plus compliqués.

La rotation en question se compose de ***deux rotations périodiques***, et dont les périodes, en général, sont incommensurables entre elles. Pour avoir une idée nette et claire de ce mouvement, il faut supposer aux axes des x et y, dans le plan invariable, un certain mouvement rotatoire uniforme, et rapporter la position du corps à ces axes mobiles et à l'axe fixe des z perpendiculaire au plan invariable. Or, étant posé

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z' \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{aligned}$$

les axes des x', y', z' étant les axes principaux du corps, et les axes des x et y, comme on vient de dire, des axes mobiles tournoyant uniformément, avec une vitesse déterminée, dans le plan invariable, les neuf quantités α, β, etc., seront des fonctions du temps (simplement) *périodiques*. Avant de donner leurs valeurs en fonctions du temps, il faut convenir des notations suivantes :

Soient, h la force vive, l le moment de rotation dans le plan invariable, A, B, C les trois moments d'inertie relatifs aux axes des x', y', z', et supposons, pour fixer les idées, que, B étant le moment moyen, l'on ait

$$Bh > l^2, \qquad A > B > C.$$

Dans le cas de $Bh < l^2$, on supposera $A < B < C$.

Le module des transcendantes elliptiques qui entreront dans les formules données ci-dessous, sera

$$k = \sqrt{\frac{A-B}{B-C}} \cdot \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{Ah - l^2}},$$

d'où

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{A-C}{B-C}} \cdot \sqrt{\frac{Bh - l^2}{Ah - l^2}}.$$

Faisons, comme dans mon ouvrage sur les fonctions elliptiques,

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}, \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}};$$

soit de plus $K' - a$ une intégrale elliptique de première espèce, dont le sinus de l'amplitude, par rapport au module complémentaire k', est

$$\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} = \sin\operatorname{am}(K'-a, k'),$$

ou, étant mis

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}},$$

soit

$$a = \int_\beta^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}.$$

Soit t le temps, et

$$u = nt + \tau,$$

τ étant une constante arbitraire, et de plus

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}.$$

Aux fonctions $\Theta(u)$ et $H(u)$ dont j'ai fait usage dans les ***Fundamenta***, je joins les fonctions

$$\Theta_1(u) = \Theta(K-u), \qquad H_1(u) = H(K-u);$$

de sorte qu'on a

$$\sqrt{k}\sin\operatorname{am} u = \frac{H(u)}{\Theta(u)}, \qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\operatorname{am} u = \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\operatorname{am} u = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}.$$

Cela posé, et étant $i = \sqrt{-1}$, *on aura le tableau suivant des valeurs des neuf quantités* α, β, *etc.:*

$$\boxed{\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{\Theta_1(0)[H(u+ia)+H(u-ia)]}{2H_1(ia)\,\Theta(u)}, & \alpha' &= \frac{\Theta_1(0)[H(u+ia)-H(u-ia)]}{2iH_1(ia)\,\Theta(u)}, \\
\beta &= -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia)+H_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\,\Theta(u)}, & \beta' &= -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia)-H_1(u+ia)]}{2iH_1(ia)\,\Theta(u)}, \\
\gamma &= \frac{H_1(0)[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)]}{2iH_1(ia)\,\Theta(u)}, & \gamma' &= \frac{H_1(0)[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}{2H_1(ia)\,\Theta(u)}; \\
\alpha'' &= -\frac{\Theta(ia)\,H_1(u)}{H_1(ia)\,\Theta(u)}, \quad \beta'' = \frac{\Theta_1(ia)\,H(u)}{H_1(ia)\,\Theta(u)}, & \gamma'' &= \frac{H(ia)\,\Theta_1(u)}{iH_1(ia)\,\Theta(u)}.
\end{aligned}}$$

Les vitesses de rotation autour des axes des x, y, z seront:

$$-\frac{f[\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)]}{2iH_1(ia)\,\Theta(u)},\qquad \frac{f[\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\,\Theta(u)},\qquad \frac{h}{l},$$

où

$$f = n\sqrt{kk'}\,\Theta_1(0).$$

Les axes des x et des y ayant, dans le plan invariable, un mouvement de rotation uniforme autour du point fixe, dans le sens du choc primitif appliqué au corps, l'angle proportionel au temps qu'ils décriront dans un intervalle t du temps, sera $nn't$, où la constante n' est

$$n' = \frac{1}{A-C}\left(C\,\frac{d\log H(ia)}{da} - A\,\frac{d\log\Theta(ia)}{da}\right).$$

Mettant

$$x = \frac{\pi u}{2K} = \frac{\pi(nt+\tau)}{2K},\qquad b = \frac{a}{K'},$$

où $b<1$, on aura d'après la définition des fonctions Θ etc.,

$$\tfrac12[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)] = 1-q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x + q^{4-2b}(1+q^{4b})\cos 4x - \cdots,$$
$$\frac{1}{2i}[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)] = q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x - q^{4-2b}(1-q^{4b})\sin 4x + \cdots,$$
$$\tfrac12[H(u+ia)+H(u-ia)] = q^{\frac14-\frac12 b}[(1+q^{b})\sin x - q^{2-b}(1+q^{3b})\sin 3x + \cdots],$$
$$\frac{1}{2i}[H(u+ia)-H(u-ia)] = q^{\frac14-\frac12 b}[(1-q^{b})\cos x - q^{2-b}(1-q^{3b})\cos 3x + \cdots],$$
$$\tfrac12[H_1(u-ia)+H_1(u+ia)] = q^{\frac14-\frac12 b}[(1+q^{b})\cos x + q^{2-b}(1+q^{3b})\cos 3x + \cdots],$$
$$\frac{1}{2i}[H_1(u-ia)-H_1(u+ia)] = q^{\frac14-\frac12 b}[(1-q^{b})\sin x + q^{2-b}(1-q^{3b})\sin 3x + \cdots],$$
$$\tfrac12[\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)] = 1+q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x + q^{4-2b}(1+q^{4b})\cos 4x + \cdots,$$
$$\frac{1}{2i}[\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)] = q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x + q^{4-2b}(1-q^{4b})\sin 4x + \cdots.$$

Dans les deux premières et les deux dernières formules, les premiers termes qui suivent ceux qu'on a écrits, sont de l'ordre de la quantité q^{9-3b}; dans les quatre autres formules, ces termes sont de l'ordre de la quantité q^{6-2b}: ceux-ci ajoutés, on n'aura rejeté que les termes respectivement de l'ordre des quantités q^{16-4b} et q^{12-3b}. En mettant ou $b=0$ ou $x=0$, on aura le développement des autres fonctions qui entrent dans les formules établies ci-dessus et dont l'argument est u ou ia. On a d'ailleurs

$$\Theta_1(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},\qquad \Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},\qquad H_1(0) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}.$$

Si la quantité q et le module k sont très-proches de l'unité, on se servira des transformations suivantes, par lesquelles les fonctions qui se rapportent au module k sont changées en d'autres qui se rapportent à son complément k', d'où suit que la quantité q sera remplacée par la quantité extrêmement petite $q' = e^{\frac{\pi^2}{\log q}}$:

$$\begin{aligned}
\Theta(u+ia) &= igH[u-i(K'-a)] = g'H_1(a-iu,k') \\
&= g''\Theta_1[a+i(K-u),k'] \\
H(u+ia) &= ig\Theta[u-i(K'-a)] = ig'H(a-iu,k') \\
&= g''\Theta[a+i(K-u),k'] \\
H_1(u+ia) &= g\Theta_1[u-i(K'-a)] = g'\Theta(a-iu,k') \\
&= -ig''H[a+i(K-u),k'] \\
\Theta_1(u+ia) &= gH_1[u-i(K'-a)] = g'\Theta_1(a-iu,k') \\
&= g''H_1[a+i(K-u),k'],
\end{aligned}$$

où

$$g = e^{-\frac{\pi}{4K}(K'-2a+2iu)},\quad g' = \sqrt{\frac{K}{K'}}\,e^{-\frac{\pi}{4KK'}(u+ia)^2},\quad g'' = \sqrt{\frac{K}{K'}}\,e^{-\frac{\pi}{4KK'}(K-u-ia)^2}.$$

Par cette transformation, les formules perdent leur caractère périodique, comme cela est bien propre à des formules par lesquelles doit être exprimé un mouvement extrêmement lent et dont la période est d'une durée quasi-infinie.

On peut aussi développer les valeurs fractionnaires des neuf cosinus α, β, etc., en séries très-simples et assez convergentes, quoique dépourvues de cette convergence extraordinaire dont jouissent le dénominateur et les numérateurs des fractions mêmes. On obtient ces développements en se servant des formules suivantes:

$$(1.)\qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{i[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}{2H(ia)\,\Theta(u)}$$
$$= \frac{2q^{\frac12 b}}{1-q^{b}} - 2(q^{-\frac12 b}-q^{\frac12 b})\left(\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})} + \frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})} + \cdots\right);$$

$$(2.)\qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2H(ia)\,\Theta(u)}$$
$$= 2(q^{-\frac12 b}+q^{\frac12 b})\left(\frac{q(1-q^2)\sin 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})} + \frac{q^2(1-q^4)\sin 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})} + \cdots\right);$$

$$(3.)\qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H(u+ia)+H(u-ia)}{2\Theta(ia)\,\Theta(u)}$$
$$= 2(q^{-\frac12 b}+q^{\frac12 b})\left(\frac{\sqrt{q}(1-q)\sin x}{(1-q^{1-b})(1-q^{1+b})} + \frac{\sqrt{q^3}(1-q^3)\sin 3x}{(1-q^{3-b})(1-q^{3+b})} + \cdots\right);$$

$$(4.)\qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H(u+ia)-H(u-ia)}{2i\Theta(ia)\,\Theta(u)}$$

$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b})\left(\frac{\sqrt{q}\,(1+q)\cos x}{(1-q^{1-b})(1-q^{1+b})}+\frac{\sqrt{q^3}\,(1+q^3)\cos 3x}{(1-q^{3-b})(1-q^{3+b})}+\cdots\right);$$

$$(5.)\qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H_1(u-ia)+H_1(u+ia)}{2\Theta_1(ia)\,\Theta(u)}$$

$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b})\left(\frac{\sqrt{q}\,(1+q)\cos x}{(1+q^{1-b})(1+q^{1+b})}+\frac{\sqrt{q^3}\,(1+q^3)\cos 3x}{(1+q^{3-b})(1+q^{3+b})}+\cdots\right);$$

$$(6.)\qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H_1(u-ia)-H_1(u+ia)}{2i\Theta_1(ia)\,\Theta(u)}$$

$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b})\left(\frac{\sqrt{q}\,(1-q)\sin x}{(1+q^{1-b})(1+q^{1+b})}+\frac{\sqrt{q^3}\,(1-q^3)\sin 3x}{(1+q^{3-b})(1+q^{3+b})}+\cdots\right);$$

$$(7.)\qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)}{2H_1(ia)\,\Theta(u)}$$

$$= \frac{2q^{\frac{1}{2}b}}{1+q^b}+2(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b})\left(\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1+q^{2-b})(1+q^{2+b})}+\frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1+q^{4-b})(1+q^{4+b})}+\cdots\right);$$

$$(8.)\qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)}{2iH_1(ia)\,\Theta(u)}$$

$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b})\left(\frac{q(1-q^2)\sin 2x}{(1+q^{2-b})(1+q^{2+b})}+\frac{q^2(1-q^4)\sin 4x}{(1+q^{4-b})(1+q^{4+b})}+\cdots\right);$$

$$(9.)\quad H_1(0)\,\Theta(0)\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)} = \frac{2kK}{\pi}\cos\mathrm{am}\,u = \frac{4\sqrt{q}\cos x}{1+q}+\frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3}+\cdots;$$

$$(10.)\quad H_1(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H(u)}{\Theta(u)} = \frac{2kK}{\pi}\sin\mathrm{am}\,u = \frac{4\sqrt{q}\sin x}{1-q}+\frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3}+\cdots;$$

$$(11.)\quad \Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)} = \frac{2K}{\pi}\,\Delta\,\mathrm{am}\,u = 1+\frac{4q\cos 2x}{1+q^2}+\frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4}+\cdots.$$

Quant aux facteurs constants par lesquels il faut multiplier les formules précédentes pour obtenir les valeurs des neuf cosinus, j'observe qu'on a

$$\frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,(ia)} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\sqrt{\frac{A(l^2-Ch)}{(A-C)l^2}}$$

$$\frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(ia)}{\cos\mathrm{am}\,(ia)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2}}$$

$$\frac{H(ia)}{iH_1(ia)} = \frac{\sqrt{k'}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,(ia)}{i} = \sqrt{k'}\,\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{(A-C)l^2}}.$$

Les huit formules (1.) ... (8.) sont nouvelles et d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques; j'ai remarqué dans une lettre à Mr. Hermite (*Mathematische Werke* Vol. I. p. 357 *)) que, par leur moyen, on parvient, de la manière la plus aisée et la plus directe, aux formules de la transformation inverse et de la division des fonctions elliptiques.

On trouvera des séries analogues pour les valeurs des six quantités

$$\frac{\alpha}{\alpha''},\quad \frac{\alpha'}{\alpha''},\quad \frac{\beta}{\beta''},\quad \frac{\beta'}{\beta''},\quad \frac{\gamma}{\gamma''},\quad \frac{\gamma'}{\gamma''},$$

ou pour les tangentes des angles que les projections des axes des x', y', z' sur les plans des x, z et des y, z forment avec l'axe des z.

Pour les recherches générales et analytiques, il conviendra presque toujours de faire usage des formules fractionnaires. Ces formules remarquables pourront, dans le problème de la rotation, servir de point de départ pour résoudre des questions analogues à celles que M. Gaufs a traitées dans sa *Theoria motus corp. coel. etc.* par rapport au mouvement elliptique et hyperbolique.

Les mêmes formules donnent une nouvelle manière d'exprimer par trois quantités les neuf cosinus des angles que forment entre eux deux systèmes d'axes de coordonnées rectangulaires. Ces trois quantités sont ici les deux arguments u et a, et le module k; ou, si l'on veut, les quantités x, b, q.

DÉMONSTRATION **).

Exposé des notations dont on fait usage et des formules par lesquelles le problème est réduit aux quadratures.

Faisons voir à présent comment on peut tirer les résultats précédents des formules connues et dont on trouve la démonstration dans les traités de Mécanique. Pour plus de commodité, on a emprunté ces formules au Traité de Mécanique de M. Poisson. On ne s'est écarté des notations de cet auteur que dans la

*) Vol. II de cette édition, p. 115.

**) On a cru faire plaisir aux géomètres, en ajoutant la démonstration des formules précédentes, laquelle n'avait pas été donnée dans la lettre à l'Académie de Paris. On a changé les directions des axes des x' et des y dans les directions opposées, afin qu'elles s'accordent parfaitement avec celles qui ont été supposées dans la Mécanique de M. Poisson. En outre, on a corrigé quelques fautes qui s'étaient glissées dans les formules relatives à la détermination de l'axe instantané de rotation.

définition des axes des x et des y, lesquels, chez M. Poisson, sont supposés fixes dans le plan invariable et qui ont été supposés ici faire dans ce plan, autour du point fixe, une rotation uniforme, dans le sens de la rotation initiale du corps. On supposera, avec M. Poisson, que l'axe des x parvient dans la direction de l'axe des y, après une rotation de 90^0, faite dans le même sens; de sorte que, d'après la notation employée dans nos formules, les quantités désignées par x et y dans le Traité de M. Poisson, devront être remplacées, par

$$\cos \Psi(t-t_0).x - \sin \Psi(t-t_0).y$$
$$\cos \Psi(t-t_0).y + \sin \Psi(t-t_0).x,$$

Ψ et t_0 désignant des quantités constantes.

J'observe encore que la lettre k désignant dans le Traité de M. Poisson le moment principal, a été remplacé ici par l, k étant employé comme module des fonctions elliptiques qui entrent dans nos formules.

Nommons donc,

x', y', z' les coordonnées parallèles aux axes principaux du corps;

A, B, C les moments du corps par rapport à ces axes, et dont B soit le moment moyen;

ψ l'angle que l'intersection du plan des x', y' et du plan invariable, fait avec une droite fixe, menée dans ce dernier plan par le point fixe;

φ l'angle que cette intersection fait avec l'axe des x';

ϑ l'angle que l'axe des z' fait avec une droite perpendiculaire au plan invariable, laquelle sera prise pour l'axe des z;

p, q, r les vitesses de rotation autour des axes des x', y', z'.

Connaissant les angles ψ, φ, ϑ, on déterminera la direction des axes des x', y', z', de la manière suivante. Supposons que le plan invariable soit horizontal et menons à ce plan une verticale, par le point fixe O, dirigée en bas ou dans le sens de la pesanteur. Soit OA la droite fixe prise à l'arbitraire dans le plan invariable; soient OB, OC, OD trois autres droites dans le même plan, telles que les angles BOA, BOC, BOD, comptés dans le même sens dans lequel le choc primitif a fait tourner le corps, soient respectivement égaux à ψ, φ, $\varphi+\frac{1}{2}\pi$. Faisons tourner le plan et la perpendiculaire qu'on lui a menée, supposée fixement liée avec lui, autour de la droite OB, de manière que la partie adjacente à OB et dirigée dans le même sens dans lequel les trois angles

ψ, φ, $\varphi+\frac{1}{2}\pi$ ont été comptés, s'élève, au commencement de son mouvement, au dessus du plan horizontal. Quand le plan et l'axe perpendiculaire au plan, auront décrit l'angle ϑ, les directions qu'occuperont alors les droites OC et OD, et l'axe perpendiculaire au plan, seront celles des axes des x', y', z'. La direction de la verticale, perpendiculaire au plan invariable, sera prise pour l'axe des z. (Poisson *Méc.* II. p. 62—64.)

Les quantités p, q, r sont liées entre elles par les deux équations:

$$(1.)\qquad \begin{cases} Ap^2+Bq^2+Cr^2 = h \\ A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2 = l^2; \end{cases}$$

les mêmes quantités sont liées avec le temps, par les formules différentielles:

$$(2.)\qquad dt = \frac{A}{B-C}\,\frac{dp}{qr} = -\frac{B}{A-C}\,\frac{dq}{rp} = \frac{C}{A-B}\,\frac{dr}{pq};$$

l'angle ψ s'obtient au moyen d'une autre formule différentielle:

$$(3.)\qquad d\psi = -\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\,l\,dt;$$

enfin les angles ϑ et φ sont données par les formules algébriques:

$$(4.)\qquad \frac{Ap}{l} = -\sin\vartheta\sin\varphi,\quad \frac{Bq}{l} = -\sin\vartheta\cos\varphi,\quad \frac{Cr}{l} = \cos\vartheta.$$

Les quantités h et l sont des constantes arbitraires; deux autres constantes arbitraires entreront dans les formules du problème par l'intégration des équations (2.) et (3.) (Poisson *Méc.* II. p. 139—144.)

Limites des quantités p, q, r.

Substituant les valeurs (1.) de h et de l^2, on voit que les deux constantes

$$(A-C)(Ah-l^2),\qquad (A-C)(l^2-Ch)$$

sont positives, parceque, B étant moyen entre A et C, les quantités $A-B$ et $B-C$ ont le même signe que $A-C$. Comme on est maître de choisir pour A le plus grand ou le plus petit moment, supposons que l'on ait fait l'un ou l'autre choix, selon que $Bh-l^2$ est positif ou négatif. Il suit de là, que les six constantes,

$$A-C,\quad A-B,\quad B-C,$$
$$Ah-l^2,\quad Bh-l^2,\quad l^2-Ch$$

auront toutes le même signe, ou que le produit de deux d'entre elles sera toujours positif. J'observe que quand on emploiera, dans les calculs suivants, le signe ambigu $\pm$ ou $\mp$, on supposera toujours que le signe supérieur ait lieu, lorsque $Bh > l^2$, et le signe inférieur, dans le cas contraire. On prendra les radicaux toujours avec le signe positif, de sorte qu'on devra mettre, par exemple,

$$\frac{1}{A-C}\sqrt{\frac{(A-C)(Ah-l^2)}{C}} = \pm\sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}}.$$

Exprimons p^2 et r^2 par q^2, on aura

$$(5.)\qquad \begin{cases} p^2 = \dfrac{l^2-Ch-B(B-C)q^2}{A(A-C)} \\ r^2 = \dfrac{Ah-l^2-B(A-B)q^2}{C(A-C)}. \end{cases}$$

On voit par là, que q^2 doit être plus petit que la plus petite des deux quantités,

$$\frac{l^2-Ch}{B(B-C)} \quad \text{et} \quad \frac{Ah-l^2}{B(A-B)}.$$

Or comme, suivant la supposition faite, la différence

$$\frac{Ah-l^2}{A-B} - \frac{l^2-Ch}{B-C} = \frac{(A-C)(Bh-l^2)}{(A-B)(B-C)}$$

est positive, on aura

$$\frac{Ah-l^2}{B(A-B)} > \frac{l^2-Ch}{B(B-C)} > q^2.$$

Nous verrons que q^2 peut atteindre la valeur limite, pour laquelle la quantité p s'évanouit; mais la quantité r ne saura jamais s'évanouir et conservera, par suite, toujours le même signe. Comme le choix de ce signe est arbitraire, supposons que r ait le même signe que $Bh-l^2$ ou $A-C$.

Sur la marche que suivent les variables p, q, r, avec le temps croissant, et comment le mouvement proposé se compose de deux mouvements périodiques.

Nommons q' la limite supérieure de q,

$$q' = \sqrt{\frac{l^2-Ch}{B(B-C)}},$$

et supposons qu'à un certain temps le signe de p soit négatif. Le signe de dq sera alors positif ou q croissant, à cause de la formule

$$dq = -\frac{(A-C)rp.dt}{B},$$

et de ce que l'élément du temps est toujours positif. Le facteur p ne pouvant changer de signe avant de s'évanouir, q devra continuer à croître jusqu'à ce qu'on ait $p = 0$, et par suite $q = +q'$.

A cause de la formule

$$dp = \frac{(B-C)qr.dt}{A},$$

et parceque $q = q'$ est positif, on aura alors dp positif; donc p devant continuer à croître, changera de signe, en passant du négatif au positif. La quantité q, par suite, commencera à décroître, dq devenant négatif, et elle devra continuer à décroître tant que p reste positif. Au contraire, p devra continuer à croître, tant que q, en décroissant, à partir de sa limite supérieure $+q'$, restera positif. Lorsque q s'évanouit, en passant du positif au négatif, p aura atteint sa limite supérieure

$$p' = \sqrt{\frac{l^2-Ch}{A(A-C)}},$$

et devra commencer à décroître, dp devenant négatif. Lorsque p, en décroissant, atteint la valeur zéro et repasse au négatif, la variable q, en décroissant aussi, atteint sa limite inférieure $-q'$, et recommencera à croître jusqu'à ce qu'elle soit parvenue à sa limite supérieure $+q'$, et lorsqu'elle, dans cette marche, en s'évanouissant, repassera au positif, la variable p, de son côté, aura atteint sa limite inférieure $-p'$. C'est ainsi que les variables p et q, avec le temps croissant, passent et repassent d'une de leurs limites à l'autre, de manière que, q prenant successivement les valeurs

$$\ldots -q', \quad 0, \quad +q', \quad 0, \quad -q', \quad 0, \ldots,$$

la quantité p obtiendra les valeurs correspondantes,

$$\ldots \quad 0, \quad -p', \quad 0, \quad +p', \quad 0, \quad -p', \quad \ldots$$

La limite inférieure de r est

$$r^0 = \pm\sqrt{\frac{Bh-l^2}{C(B-C)}},$$

la limite supérieure

$$r' = \pm\sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}},$$

et l'on démontre aisément qu'aux valeurs précédentes de p et q correspondent les valeurs de la quantité r:

$$\ldots\; r^0,\; r',\; r^0,\; r',\; r^0,\; r',\; \ldots$$

Supposons que le temps dans lequel la variable q croît ou décroît d'une de ses limites à l'autre, soit égal à T; supposons de plus que, pendant que q croît constamment d'une valeur indéfinie q jusqu'à sa limite supérieure q' ou décroît constamment de q' à q, le temps t ait augmenté de la quantité $\tau-t$; on aura

$$m\int_{-q'}^{q'}\frac{dq}{pr} = m\int_{q'}^{-q'}\frac{dq}{pr} = T$$

$$m\int_{q}^{q'}\frac{dq}{pr} = m\int_{q'}^{q}\frac{dq}{pr} = \tau-t,$$

où l'on a posé $m = -\frac{B}{A-C}$. Généralement, la quantité pr ayant, pour la même valeur de q, des valeurs opposées, selon que q est croissant ou décroissant, il sera toujours permis d'échanger entre elles les deux limites de l'intégrale. On aura donc successivement,

$$m\int_{q}^{q'}\frac{dq}{pr} = \tau-t$$

$$m\int_{q'}^{q}\frac{dq}{pr} = \tau-t$$

$$m\int_{q}^{-q'}\frac{dq}{pr} = m\int_{q'}^{-q'}\frac{dq}{pr} - m\int_{q'}^{q}\frac{dq}{pr} = T-(\tau-t)$$

$$m\int_{-q'}^{q}\frac{dq}{pr} = m\int_{-q'}^{q'}\frac{dq}{pr} - m\int_{q}^{q'}\frac{dq}{pr} = T-(\tau-t),$$

où l'on suppose toujours que la variable q croît ou décroît constamment, en passant d'une limite de l'intégrale à l'autre. La variable q étant retournée à sa valeur primitive et à l'état de croître, elle recommencera de nouveau les mêmes tours et retours, et l'on retrouvera, pour les différents intervalles, les mêmes valeurs de l'intégrale que précédemment.

Ajoutant successivement au temps t correspondant à la valeur primitive de q, les différentes intégrales dont on vient de donner les valeurs, on aura le tableau suivant des valeurs correspondantes du temps t et de la variable q:

$$\begin{array}{llllllll} q, & q', & q, & -q', & q, & q', & q, & \ldots \\ t, & \tau, & 2\tau-t, & \tau+T, & t+2T, & \tau+2T, & 2\tau+2T-t, & \ldots \end{array}$$

On voit par ce tableau que, le temps ayant augmenté de la quantité $2T$, la variable q sera retournée à la même valeur et aura repris la même direction de sa marche. La même chose aura lieu par rapport aux quantités p et r et, par suite, comme il résulte des formules (4.), par rapport aux cosinus et sinus des angles φ et ϑ.

Venons à l'examen de l'intégrale par laquelle on a exprimé l'angle ψ,

$$\psi = -l\int\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\,dt.$$

Si l'on prend la constante l avec le signe positif, cette intégrale montre que ψ décroît constamment. Considérons l'expression par laquelle, sous le signe intégral, se trouve multiplié dt, comme fonction de t, il suit des remarques précédentes, que cette fonction reprend les mêmes valeurs quand t augmente de la constante $2T$. On aura donc, en désignant cette fonction par $F(t)$, pour deux limites quelconques de l'intégrale, t_0 et t_1,

$$\int_{t_0}^{t_1}F(t)\,dt = \int_{t_0+2T}^{t_1+2T}F(t)\,dt,$$

ou, en ajoutant aux deux membres la même intégrale étendue de t_1 à t_0+2T,

$$\int_{t_0}^{t_0+2T}F(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_1+2T}F(t)\,dt.$$

On voit, par cette formule, que l'intégrale

$$\int_{t}^{t+2T}F(t)\,dt$$

est indépendante de la valeur de la variable t ou que cette intégrale est une quantité constante positive que nous désignerons par

$$\frac{2T\Psi}{l} = \int_{t}^{t+2T}\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\,dt.$$

Supposons que la valeur $\psi = 0$ corresponde au temps $t = t_0$, on aura

$$-l\int_{t_0}^{t}\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\,dt = \psi$$

$$-l\int_{t_0}^{t+2T}\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\,dt = -l\int_{t_0}^{t}\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\,dt - l\int_{t}^{t+2T}\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\,dt$$
$$= \psi-2T\Psi.$$

Donc, toutes les fois que le temps augmentera de la quantité constante $2T$, l'angle ψ décroîtra de la quantité constante $2T\Psi$. De là suit que, faisant

$$\psi' = \psi + \Psi(t-t_0),$$

l'angle ψ' ne change pas du tout de valeur, quand le temps augmente de la constante $2T$, ou que ψ', de même que les quantités p, q, r, et les cosinus et sinus des angles φ et ϑ, est une fonction du temps *périodique* et qui jouit de la même période que ces quantités, $2T$.

Supposons que, dans le plan invariable, une droite, que je désignerai par (x), tourne uniformément, et avec une vitesse angulaire Ψ, autour du point fixe dans le même sens dans lequel les angles ψ décroissent ou dans lequel se fait la rotation du corps autour de l'axe des z. Supposons de plus que, pour le temps $t = t_0$, cette droite coïncide avec la droite fixe, à partir de laquelle l'angle ψ est compté. Dans un temps indéfini t la droite (x) fera avec la droite fixe un angle égal à

$$-\Psi(t-t_0).$$

Donc, ψ étant l'angle que l'intersection du plan des x', y' et du plan invariable fait avec la droite fixe, la même intersection fera avec la droite mobile (x) un angle égal à

$$\psi + \Psi(t-t_0) = \psi'.$$

On pourra donc, indifféremment, déterminer cette intersection, ou par l'angle ψ qu'elle fait avec la droite fixe, ou par l'angle ψ' qu'elle fait avec la droite mobile (x).

Soit fixement liée avec la droite (x) une autre droite (y), perpendiculaire à (x) dans le plan invariable, et dont la direction est la même que la droite (x) aurait après une rotation de 90^0, faite dans le sens de son mouvement. On connaîtra, à chaque instant, la position des droites (x) et (y), puisqu'elles tournent uniformément, dans le plan invariable, autour du point fixe, dans un sens donné, et avec une vitesse angulaire donnée. A un instant quelconque prenons les droites (x) et (y) pour axes des coordonnées x et y, et pour axe des z la perpendiculaire menée, par le point fixe, au plan invariable. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du corps mobile, rapportées à ces axes; soient x', y', z' les coordonnées du même point, rapportées aux axes principaux fixes dans le corps; on aura

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z' \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{aligned}$$

et l'on obtiendra les expressions des neuf quantités, α, β, etc., de celles données dans la Mécanique de Mr. Poisson (II. p. 64), en remplaçant seulement l'angle ψ par l'angle

$$\psi' = \psi + \Psi(t-t_0).$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos\vartheta \sin\varphi \sin\psi' + \cos\varphi \cos\psi' \\ \alpha' &= \cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi' - \cos\varphi \sin\psi' \\ \alpha'' &= -\sin\vartheta \sin\varphi, \\[1ex] \beta &= \cos\vartheta \cos\varphi \sin\psi' - \sin\varphi \cos\psi' \\ \beta' &= \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi' + \sin\varphi \sin\psi' \\ \beta'' &= -\sin\vartheta \cos\varphi \\[1ex] \gamma &= \sin\vartheta \sin\psi' \\ \gamma' &= \sin\vartheta \cos\psi' \\ \gamma'' &= \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Les cosinus et sinus des trois angles φ, ϑ, ψ', reprenant toujours les mêmes valeurs, après un accroissement du temps égal à $2T$, on voit, par ces formules, que les neuf quantités α, β, etc. sont des fonctions du temps périodiques et jouissent toutes de la même période $2T$. Connaissant donc les positions diverses que le corps mobile prend dans un temps limité $2T$, on en connaîtra la position pour tout le temps, futur ou passé. En effet, étant donnée une des positions du corps, correspondante à un temps t, pour en déterminer la position correspondante au temps $t + 2iT$, i étant un nombre entier quelconque, on n'aura qu'à faire tourner le corps, autour de l'axe des z, d'un angle constant égal à $2i\Psi T$, dans le sens de la rotation primitive. Le corps se trouvera dans la position correspondante au temps $t - 2iT$, après avoir fait la même rotation dans le sens opposé. On voit par là, que le mouvement du corps se compose de deux mouvements périodiques; après un temps égal à $\frac{2\pi}{\Psi}$, les droites (x) et (y), mobiles dans le plan invariable, auront repris la même position dans ce plan, l'axe des z restant toujours en repos; et après le temps $2T$, le corps aura repris la même position, par rapport aux axes des x, y, z.

Quand on est parvenu à réduire un problème aux quadratures, un grand avantage de cette réduction consiste en ce qu'elle nous met à même de juger en général de la marche que suivent les variables. Mais il semble que l'on n'a pas assez fait ressortir cet avantage, dans tous les cas, des formules intégrales, puisque, si l'on a discuté cette marche des variables, ce n'a été presque toujours que dans les cas qui se prêtent aux solutions approximatives et que l'on aurait pu traiter, sans même connaître la solution générale.

Le raisonnement qu'on vient de faire sur la nature des variables qui, dans le problème proposé, déterminent à chaque instant la position du mobile, est indépendant de ce qu'on peut réduire ces variables aux fonctions elliptiques. Mais par le moyen de ces fonctions, on saura représenter ces mêmes variables par des séries périodiques simples et régulières et d'une convergence des plus rapides.

Réduction des neuf coefficients α, β etc. aux fonctions elliptiques.

Legendre, dans son Traité des Fonctions Elliptiques, a réduit les expressions du temps t et de l'angle ψ, à des intégrales elliptiques, respectivement de la première et de la troisième espèce. Les cos., sin., Δ de l'amplitude de ces intégrales sont égaux aux cosinus des angles que les axes principaux du corps font avec l'axe des z, multipliés par des facteurs constants lesquels, comme le module et le paramètre des mêmes intégrales, sont déterminés par les moments principaux du corps et les données initiales du problème. On saura donc exprimer, réciproquement, en fonctions de t, les cosinus des angles que les axes principaux font avec l'axe des z, ou les quantités désignées ci-dessus par α'', β'', γ''. La théorie des fonctions elliptiques fait voir que ces expressions inverses peuvent être représentées par des *fractions* dont les numérateurs et le dénominateur sont des fonctions de la plus grande simplicité et lesquelles, à cause de l'extrême convergence des séries dans lesquelles elles peuvent être développées, pour toute valeur réelle ou imaginaire de leur argument, doivent être regardées, dans le calcul, comme des quantités finies, de même que les quantités algébriques, trigonométriques ou exponentielles. Par ces mêmes fonctions on a exprimé encore, d'une manière très simple, les intégrales elliptiques de la troisième espèce. On saura donc aussi exprimer l'angle ψ, dépendant d'une intégrale elliptique de la troisième espèce, par ces fonctions simples et explicites du temps.

Les expressions en fonctions du temps, dont on vient de parler, des trois coefficients, α'', β'', γ'', et de l'angle ψ, ont été données par M. Rueb dans une savante thèse*) laquelle, en outre, contient plusieurs développements intéressants. Ces expressions suffisent pour déterminer la position des axes principaux du mobile, correspondante à un temps quelconque. Mais on a cru que, pour avoir une solution complète, il faudra donner les fonctions du temps, par lesquelles s'expriment tous les neuf coefficients, α, β etc. En remplissant cette tâche, on est parvenu à des expressions de ces quantités, qui par leur simplicité et leur caractère analogue à celui des fonctions algébriques rationnelles, sont éminemment propres à être traitées dans le calcul, circonstance d'autant plus importante, puisque ces mêmes quantités pourront et devront être un élément fondamental de la mécanique des mobiles à trois dimensions.

Rappelons les formules (5.) que j'écrirai de la manière suivante:

$$p^2 = \frac{l^2-Ch}{A(A-C)}\left(1-\frac{B(B-C)}{l^2-Ch}q^2\right),$$
$$r^2 = \frac{Ah-l^2}{C(A-C)}\left(1-\frac{B(A-B)}{Ah-l^2}q^2\right).$$

Le facteur de q^2 étant plus grand dans la valeur de p^2 que dans celle de r^2, on fera

$$\sqrt{\frac{B(B-C)}{l^2-Ch}}\cdot q = \sin\xi$$
$$\sqrt{\frac{B(A-B)}{Ah-l^2}}\cdot q = k\sin\xi,$$

où k est une constante plus petite que l'unité et qui est donnée par l'équation

$$k = \sqrt{\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}},$$

d'où suit

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{(A-C)(Bh-l^2)}{(B-C)(Ah-l^2)}}.$$

Posant, de plus,

$$\Delta(\xi) = \sqrt{1-k^2\sin^2\xi}.$$

---

*) Specimen inaugurale de motu gyratorio corporis rigidi nulla vi acceleratrici sollicitati auct. Adolpho Stephano Rueb Roterodamensi, Trajecti ad Rhenum 1834.

il viendra

$$p = -\sqrt{\frac{l^2 - Ch}{A(A-C)}} \cdot \cos\xi$$
$$q = \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{B(B-C)}} \cdot \sin\xi$$
$$r = \pm\sqrt{\frac{Ah - l^2}{C(A-C)}} \cdot \Delta(\xi).$$

L'on a, dans ces formules, déterminé les signes de manière que l'angle ξ croît constamment avec le temps. En effet, on a vu que le signe de p doit être opposé à celui de dq, ou à celui de $\cos\xi d\xi$. Donc, pour que $d\xi$ soit toujours positif, ainsi que l'élément dt, on a dû donner à la valeur de p le signe $-$. Quant à la valeur de r, il a fallu lui donner le signe $\pm$, puisqu'on a supposé que r ait le même signe que $Bh - l^2$, et qu'on est convenu de prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que $Bh - l^2$ est positif ou négatif.

En substituant les valeurs de p, q, r, dans la formule différentielle,

$$dt = -\frac{B}{A-C}\,\frac{dq}{rp},$$

il viendra

$$\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}\,dt.$$

Supposons que ξ s'évanouisse en même temps que ψ ou pour $t = t_0$, et faisons

$$u = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}} \cdot (t - t_0) = n(t - t_0),$$

en posant

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}.$$

On aura donc

$$\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = du,$$

ou, d'après la notation dont on se sert dans l'analyse des fonctions elliptiques,

$$\xi = \operatorname{am}(u),$$

et, par suite,

$$p = -\frac{l}{A}\sin\vartheta\sin\varphi = -\sqrt{\frac{l^2 - Ch}{A(A-C)}}\cos\operatorname{am}u$$
$$q = -\frac{l}{B}\sin\vartheta\cos\varphi = \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{B(B-C)}}\sin\operatorname{am}u$$
$$r = \frac{l}{C}\cos\vartheta = \pm\sqrt{\frac{Ah - l^2}{C(A-C)}}\Delta\operatorname{am}u,$$

le module des fonctions elliptiques étant la constante k dont on a donné ci-dessus la valeur.

L'angle ϑ est supposé entre 0 et 180^0, d'où suit que $\sin\vartheta$ sera toujours positif. Cet angle sera entre 0 et 90^0, si $Bh > l^2$, et entre 90^0 et 180^0, dans le cas contraire. Donc, selon que $Bh - l^2$ est positif ou négatif, l'axe des z' doit être mené au dessous ou au dessus du plan invariable supposé horizontal.

L'intersection qu'a, au temps $t = t_0$, le plan des x', y' avec le plan invariable, est la droite fixe dans ce dernier plan, parceque pour $t = t_0$ on a supposé $\psi = 0$. D'autre côté, pour $t = t_0$ ou $u = 0$, on a $\cos\varphi = 0$ et $\sin\vartheta\sin\varphi$ positif; par conséquence, $\sin\vartheta$ étant toujours positif, l'on doit avoir $\varphi = +\frac{1}{2}\pi$, c'est à dire, l'axe des x' fera, dans le sens convenu, l'angle $+\frac{1}{2}\pi$ avec l'intersection du plan des x', y' et du plan invariable, ou avec la droite fixe dans ce dernier plan. En augmentant cet angle, dans son plan et dans le même sens, de $\frac{1}{2}\pi$, on a la position de l'axe des y'. Cet axe fera donc avec la droite fixe dans le plan invariable l'angle π. Donc, au temps $t = t_0$, l'axe des y' sera couché sur le plan invariable, et y prendra une position opposée à la direction de la droite fixe dans ce plan.

Pour réduire aux fonctions elliptiques l'angle ψ, substituons d'abord dans $A^2p^2 + B^2q^2$ les valeurs, données ci-dessus, de p et de q. On aura par cette substitution

$$A^2p^2 + B^2q^2 = (l^2 - Ch)\left\{\frac{A\cos^2\operatorname{am}u}{A-C} + \frac{B\sin^2\operatorname{am}u}{B-C}\right\}$$
$$= \frac{A(l^2 - Ch)}{A-C}\left(1 + \frac{C(A-B)}{A(B-C)}\sin^2\operatorname{am}u\right).$$

En faisant

$$\frac{A(B-C)}{C(A-B)} = -\sin^2\operatorname{am}(ia') = \operatorname{tg}^2\operatorname{am}(a', k'),$$

où l'on supposera a' entre 0 et K', cette expression se change dans la suivante:

$$A^2p^2 + B^2q^2 = \frac{A(l^2 - Ch)}{A-C}\left(1 - \frac{\sin^2\operatorname{am}u}{\sin^2\operatorname{am}(ia')}\right),$$

ou, comme on a

$$\sin\operatorname{am}(iK' - ia') = \frac{-1}{k\sin\operatorname{am}(ia')},$$

dans celle-ci:

$$A^2p^2 + B^2q^2 = \frac{A(l^2 - Ch)}{A-C}\left(1 - k^2\sin^2\operatorname{am}i(K' - a')\sin^2\operatorname{am}u\right).$$

Donc, étant posé

$$K'-a' = a,$$

il viendra

$$A^2p^2+B^2q^2 = \frac{A(l^2-Ch)}{A-C}\left(1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u\right).$$

On tire de là

$$\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2} = \frac{1}{A}+\frac{A-B}{A}\cdot\frac{Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}$$
$$= \frac{1}{A}+\frac{(A-B)(A-C)}{A^2(B-C)}\,\frac{\sin^2\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u},$$

d'où suit

$$\psi = -l\int\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\,dt$$
$$= -l\sqrt{\frac{BC}{A(B-C)(Ah-l^2)}}\cdot\left(u+\frac{(A-B)(A-C)}{A(B-C)}\int_0^u\frac{\sin^2\operatorname{am}u\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}\right).$$

Or, de ce qu'on a posé ci-dessus, l'on tire

$$-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia) = \frac{C(A-B)}{A(B-C)},$$
$$\Delta^2\operatorname{am}(ia) = \frac{B(A-C)}{A(B-C)},$$
$$k^2\cos^2\operatorname{am}(ia) = \frac{A-B}{B-C}\left(\frac{l^2-Ch}{Ah-l^2}+\frac{C}{A}\right) = \frac{(A-B)(A-C)}{A(B-C)}\,\frac{l^2}{Ah-l^2},$$

et, par suite,

$$k^2\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia) = \frac{\pm il(A-B)(A-C)}{A(B-C)}\sqrt{\frac{BC}{A(B-C)(Ah-l^2)}}.$$

Donc, en posant

$$\nu = \frac{l}{An} = l\sqrt{\frac{BC}{A(B-C)(Ah-l^2)}} = \pm i\frac{C}{A-C}\,\frac{\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)}{\sin\operatorname{am}(ia)},$$

il viendra

$$\psi = -\nu.u\pm i\int_0^u\frac{k^2\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}.$$

On tire la valeur de l'intégrale précédente de la formule (*Fundamenta nova* §. 52. (3.)):

$$\int_0^u\frac{k^2\sin\operatorname{am}a\cos\operatorname{am}a\,\Delta\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u} = \frac{d\log\Theta(a)}{da}u+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

dans laquelle la constante a peut avoir des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires. En effet, il suit de cette formule, en y mettant ia au lieu de a,

$$\psi = \left(\pm\frac{d\log\Theta(ia)}{da}-\nu\right)u\pm\tfrac{1}{2}i\log\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)},$$

ou

$$\psi = -n'u\pm\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},$$

étant posé

$$n' = \nu\mp\frac{d\log\Theta(ia)}{da}.$$

Pour parvenir aux valeurs précédentes des quantités $p, q, r,$ et de l'angle ψ, il suffit de remplacer les formules de Legendre par celles établies dans mon ouvrage sur les fonctions elliptiques. Ces valeurs ont été données, pour la première fois, dans le beau mémoire de M. Rueb. Mais, pour achever la solution du problème proposé, et pour arriver à des formules définitives, il faudra faire des calculs ultérieurs et pour lesquels les expressions trouvées précédemment ne sont, pour ainsi dire, qu'un point de départ.

Substituant dans n' la valeur donnée ci-dessus de ν, et remarquant qu'on a

$$\frac{i\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)}{\sin\operatorname{am}(ia)} = \frac{d\log\sin\operatorname{am}(ia)}{da} = \frac{d\log H(ia)}{da}-\frac{d\log\Theta(ia)}{da},$$

on trouve

$$n' = \pm\left\{\frac{Cd\log H(ia)}{(A-C)da}-\frac{Ad\log\Theta(ia)}{(A-C)da}\right\}.$$

La quantité q étant proportionnelle au $\sin\operatorname{am}u$, lorsqu'elle croît constamment de sa limite inférieure à sa limite supérieure, l'argument u, croissant indéfiniment avec le temps, aura augmenté de $2K$, et, par suite, le temps $t=\frac{1}{n}u+t_0$, aura augmenté de $\frac{2K}{n}$. Or, on a ci-dessus appelé T cet intervalle de temps pendant lequel q, en croissant constamment, parvient d'une limite à l'autre; on aura donc

$$T = \frac{2K}{n}.$$

En augmentant u de $2K$ ou t de T, la fonction $\Theta(u\mp ia)$ ne change pas de valeur, donc l'angle ψ décroîtra de $2n'K = nn'T$. Or, on a trouvé égale à ΨT cette quantité de laquelle ψ décroît chaque fois que le temps augmente de T, Ψ étant la vitesse angulaire de la droite (x); on aura donc

$$\Psi = nn' = \pm\left\{\frac{nC}{A-C}\,\frac{d\log H(ia)}{da} - \frac{nA}{A-C}\,\frac{d\log\Theta(ia)}{da}\right\}.$$

Des formules données ci-dessus, l'on déduit aisément les suivantes:

$$\frac{l}{n}\cdot\frac{A-C}{AC} = \pm\frac{i\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)}{\sin\operatorname{am}(ia)} = \pm\frac{d\log\sin\operatorname{am}(ia)}{da}$$

$$\frac{l}{n}\cdot\frac{A-B}{AB} = \pm\frac{k^2\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)}{i\Delta\operatorname{am}(ia)} = \pm\frac{d\log\Delta\operatorname{am}(ia)}{da}$$

$$\frac{l}{n}\cdot\frac{B-C}{BC} = \pm\frac{i\cos\operatorname{am}(ia)}{\sin\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)} = \pm\frac{d\log\cos\operatorname{am}(K-ia)}{da}.$$

La première de ces formules donne

$$\Psi\frac{d\log\sin\operatorname{am}(ia)}{da} = \frac{l}{A}\,\frac{d\log H(ia)}{da} - \frac{l}{C}\,\frac{d\log\Theta(ia)}{da},$$

d'où l'on tire, après quelques réductions faciles, les formules remarquables:

$$\Psi - \frac{l}{A} = \mp n\frac{d\log\Theta(ia)}{da}$$

$$\Psi - \frac{l}{B} = \mp n\frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}$$

$$\Psi - \frac{l}{C} = \mp n\frac{d\log H(ia)}{da}.$$

L'argument constant a étant entre 0 et K', les quantités

$$-\frac{d\log\Theta(ia)}{da},\quad \frac{d\log H(ia)}{da},\quad \frac{d\log H_1(ia)}{da},\quad \frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}$$

seront réelles et positives*). En vertu de cette remarque, on pourra conclure, des formules précédentes, que $\frac{l}{\Psi}$ est toujours contenu entre le plus grand et le plus petit moment, et que le moment moyen est toujours contenu entre $\frac{l^2}{h}$ et $\frac{l}{\Psi}$.

Posons

$$\psi' = \psi + \Psi(t-t_0) = \psi + nn'(t-t_0) = \psi + n'u,$$

*) C'est ce qui est clair par rapport à la troisième et la quatrième de ces quantités; par rapport à la première, on le démontre en développant $\Theta(ia)$ en produit infini, et par rapport à la deuxième, en la ramenant à la première par la formule:

$$\frac{d\log H(ia)}{da} = \frac{\pi}{2K} - \frac{d\log\Theta(ia')}{da'}.$$

l'angle ψ' sera une fonction périodique de l'argument u ou du temps t, donnée par l'équation

$$\psi' = \frac{\pm 1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u\pm ia)}{\Theta(u\mp ia)}.$$

L'angle ψ' étant exprimé ainsi par un logarithme divisé par l'unité imaginaire, le *sine* et le *cosine* de cet angle seront des fonctions algébriques de la quantité qui se trouve sous le signe logarithmique. Les expressions du sine et cosine d'une intégrale elliptique de la troisième espèce et au caractère trigonométrique, telle qu'elle sert à exprimer l'angle ψ', seront donc plus simples que celle de l'intégrale même. Or ce ne sont presque jamais les angles eux mêmes, mais leurs sines et cosines, dont on fait usage dans les calculs analytiques. En passant de l'expression logarithmique, de l'intégrale, aux expressions de son sine et cosine, on aura donc réuni le double avantage, d'avoir des expressions algébriques, et d'avoir les expressions des quantités mêmes qui entrent dans le calcul. C'est ainsi qu'on franchit véritablement la barrière devant laquelle on a coutume de s'arrêter dans les cas nombreux où l'on parvient à ramener un angle à une intégrale elliptique de la troisième espèce. On verra, de plus, dans la question que l'on traite ici, et dans beaucoup d'autres, que, le sine et cosine de l'intégrale se trouvant divisés par un radical, ce radical s'en ira dans le cours du calcul, à l'aide d'un facteur par lequel ces mêmes sine et cosine seront multipliés; de sorte que l'on parviendra, finalement, à des expressions fractionnaires *rationnelles* et qui ont une manière d'être parfaitement analogue à celle des fonctions elliptiques, $\sin\operatorname{am}$, $\cos\operatorname{am}$, $\Delta\operatorname{am}$; seulement les arguments des numérateurs de ces fractions différeront de celui de leur dénominateur d'une quantité constante qui pourrait être quelconque, pendant que, dans les expressions des fonctions elliptiques élémentaires, $\sin\operatorname{am}$, $\cos\operatorname{am}$, $\Delta\operatorname{am}$, les différences des arguments du numérateur et du dénominateur ont des valeurs constantes particulières, savoir celles des demi-indices, iK', $K+iK'$ ou K.

Voici à présent les calculs mêmes qu'il reste à faire pour achever la solution du problème mécanique proposé.

De la valeur donnée ci-dessus, de l'angle ψ', on tire

$$e^{i\psi'} = \sqrt{\frac{\Theta(u\pm ia)}{\Theta(u\mp ia)}} = \frac{\Theta(u\pm ia)}{\sqrt{N}},$$

où l'on a posé

$$\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia) = N.$$

On aura donc

$$\cos\psi' = \frac{\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)}{2\sqrt{N}}$$
$$\pm\sin\psi' = \frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2i\sqrt{N}}.$$

Les formules par lesquelles on a ci-dessus rappelé les variables p, q, r aux fonctions elliptiques, donnent

$$\alpha'' = -\sin\vartheta\sin\varphi = -\frac{1}{l}\sqrt{\frac{A(l^2-Ch)}{A-C}}\cos\operatorname{am}u$$
$$\beta'' = -\sin\vartheta\cos\varphi = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{B(l^2-Ch)}{B-C}}\sin\operatorname{am}u$$
$$\gamma'' = \cos\vartheta = \frac{\pm 1}{l}\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{A-C}}\Delta\operatorname{am}u.$$

Ramenons, dans ces formules, les facteurs constants aux fonctions elliptiques à l'argument imaginaire ia.

On aura d'abord, d'après les formules par lesquelles on a introduit le module k et les fonctions elliptiques de ia,

$$\frac{C(Ah-l^2)}{(A-C)l^2} = -\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(ia);$$

puis

$$\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)} = k^2$$
$$\frac{B(A-C)}{C(A-B)} = -\frac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)}$$
$$\frac{A(B-C)}{C(A-B)} = -\frac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)},$$

et, par suite,

$$\frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2} = \frac{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(ia)\,\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\sin^2\operatorname{am}(ia)} = \frac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)}$$
$$\frac{A(l^2-Ch)}{(A-C)l^2} = \frac{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(ia)}{\sin^2\operatorname{am}(ia)} = \frac{1}{\cos^2\operatorname{am}(ia)}.$$

On aura donc les valeurs suivantes des cosinus des angles que les axes principaux du mobile font avec la perpendiculaire au plan invariable:

$$\alpha'' = -\sin\vartheta\sin\varphi = -\frac{\cos\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}(ia)}$$
$$\beta'' = -\sin\vartheta\cos\varphi = \frac{\Delta\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}(ia)}$$
$$\gamma'' = \cos\vartheta = \pm\frac{\sin\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}u}{i\cos\operatorname{am}(ia)}.$$

En y substituant les formules

$$\sin\operatorname{am}u = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)},\qquad \sin\operatorname{am}(ia) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(ia)}{\Theta(ia)}$$
$$\cos\operatorname{am}u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)},\qquad \cos\operatorname{am}(ia) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H_1(ia)}{\Theta(ia)}$$
$$\Delta\operatorname{am}u = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)},\qquad \Delta\operatorname{am}(ia) = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(ia)},$$

ces valeurs se changent dans celles-ci:

$$\alpha'' = -\sin\vartheta\sin\varphi = -\frac{\Theta(ia)\,H_1(u)}{H_1(ia)\,\Theta(u)}$$
$$\beta'' = -\sin\vartheta\cos\varphi = \frac{\Theta_1(ia)\,H(u)}{H_1(ia)\,\Theta(u)}$$
$$\gamma'' = \cos\vartheta = \pm\frac{H(ia)\,\Theta_1(u)}{iH_1(ia)\,\Theta(u)}.$$

On déduit des formules précédentes

$$\sin^2\vartheta = \frac{\cos^2\operatorname{am}u+\Delta^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}{\cos^2\operatorname{am}(ia)} = \frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}{\cos^2\operatorname{am}(ia)}.$$

Or on a la formule suivante, qui est d'un grand usage dans l'analyse des fonctions elliptiques (*Fund.* §. 54. III.):

$$\frac{\Theta^2(0)\,\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia)}{\Theta^2(ia)\,\Theta^2(u)} = \frac{\Theta^2(0).N}{\Theta^2(ia)\,\Theta^2(u)} = 1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u;$$

laquelle étant substituée dans l'équation précédente, donnera

$$\sin\vartheta = \frac{\Theta(0)\sqrt{N}}{\Theta(ia)\,\Theta(u)}\cdot\frac{1}{\cos\operatorname{am}(ia)},$$

ou

$$\sin\vartheta = \frac{H_1(0)\sqrt{N}}{H_1(ia)\,\Theta(u)}.$$

On tire de cette formule et des valeurs données ci-dessus de $\cos\psi'$ et de $\sin\psi'$,

$$\cos\psi' = \frac{\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)}{2\sqrt{N}}$$
$$\pm\sin\psi' = \frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2i\sqrt{N}},$$

les valeurs des cosinus des angles que l'axe des z' fait avec les droites (x) et (y), mobiles dans le plan invariable,

$$\gamma = \sin\vartheta\sin\psi' = \pm\frac{H_1(0)[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)]}{2iH_1(ia)\,\Theta(u)}$$
$$\gamma' = \sin\vartheta\cos\psi' = \frac{H_1(0)[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}{2H_1(ia)\,\Theta(u)},$$

formules rationnelles et dans lesquelles le radical, $\sqrt{N}$, par lequel sont divisées les valeurs de $\cos\psi'$ et de $\sin\psi'$, s'en est allé par la multiplication faite avec le facteur $\sin\vartheta$.

En divisant par la valeur de $\sin\vartheta$ les équations données ci-dessus,

$$\sin\vartheta\sin\varphi = \frac{\Theta(ia)\,H_1(u)}{H_1(ia)\,\Theta(u)},\quad \sin\vartheta\cos\varphi = -\frac{\Theta_1(ia)\,H(u)}{H_1(ia)\,\Theta(u)},$$

on trouvera les valeurs suivantes de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{\Theta(ia)\,H_1(u)}{H_1(0)\sqrt{N}},\quad \cos\varphi = -\frac{\Theta_1(ia)\,H(u)}{H_1(0)\sqrt{N}},$$

dans lesquelles on retrouve le radical, $\sqrt{N}$.

On vient d'exprimer par les fonctions elliptiques les valeurs des *cinq* coefficients,

$$\alpha'',\ \beta'',\ \gamma'',\ \gamma',\ \gamma.$$

Quant aux *quatre* restants, ils sont donnés par les angles φ, ϑ, ψ', au moyen des formules,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi'+\cos\varphi\cos\psi'\\
\alpha' &= \cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi'-\cos\varphi\sin\psi'\\
\beta &= \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi'-\sin\varphi\cos\psi'\\
\beta' &= \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi'+\sin\varphi\sin\psi'.
\end{aligned}$$

En substituant dans ces expressions les valeurs qu'on a trouvées de

$$\cos\vartheta,\quad \sin\varphi,\quad \cos\varphi,\quad \sin\psi',\quad \cos\psi',$$

on voit tout d'abord, qu'encore dans les valeurs de α, β, α', β' s'en va le radical $\sqrt{N}$. Mais pour avoir les expressions les plus simples de ces coefficients, il faudra passer par quelques transformations et appeler à l'aide les formules de l'addition des fonctions elliptiques.

En effet, en substituant dans les deux formules d'addition,

$$\cos\operatorname{am}(u\pm ia) = \frac{\cos\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}u\mp\sin\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}$$
$$\sin\operatorname{am}(u\pm ia) = \frac{\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{am}u\pm\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u},$$

les formules trouvées ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}(ia)} &= \sin\vartheta\sin\varphi\\
\frac{\Delta\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}(ia)} &= -\sin\vartheta\cos\varphi\\
\frac{\sin\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}(ia)} &= \pm i\cos\vartheta\\
\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}{\cos^2\operatorname{am}(ia)} &= \sin^2\vartheta,
\end{aligned}$$

on parvient aux formules importantes:

$$\cos\operatorname{am}(u\pm ia) = \frac{\sin\varphi\pm i\cos\vartheta\cos\varphi}{\sin\vartheta}$$
$$\sin\operatorname{am}(u\pm ia) = \frac{-\cos\varphi\pm i\cos\vartheta\sin\varphi}{\sin\vartheta}.$$

On substituera aux signes ambigus $\pm$, dans les deux membres de chacune de ces deux équations, ou le même signe ou des signes opposés, selon que $Bh-l^2$ est positif ou négatif.

Introduisons à présent dans les valeurs données ci-dessus de α, α', β, β' au lieu de $\cos\psi'$ et $\sin\psi'$ les exponentielles, on aura:

$$\begin{aligned}
2\alpha &= (-i\cos\vartheta\sin\varphi+\cos\varphi)e^{i\psi'}+(i\cos\vartheta\sin\varphi+\cos\varphi)e^{-i\psi'}\\
2\alpha' &= (\cos\vartheta\sin\varphi+i\cos\varphi)e^{i\psi'}+(\cos\vartheta\sin\varphi-i\cos\varphi)e^{-i\psi'}\\
2\beta &= (-i\cos\vartheta\cos\varphi-\sin\varphi)e^{i\psi'}+(i\cos\vartheta\cos\varphi-\sin\varphi)e^{-i\psi'}\\
2\beta' &= (\cos\vartheta\cos\varphi-i\sin\varphi)e^{i\psi'}+(\cos\vartheta\cos\varphi+i\sin\varphi)e^{-i\psi'},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en substituant les valeurs qu'on vient de trouver, de $\sin\operatorname{am}(u \pm ia)$ et $\cos\operatorname{am}(u \pm ia)$,

$$
\begin{aligned}
2\alpha &= -\sin\vartheta\, e^{i\psi'} \sin\operatorname{am}(u \pm ia) - \sin\vartheta\, e^{-i\psi'} \sin\operatorname{am}(u \mp ia)\\
2\alpha' &= -i\sin\vartheta\, e^{i\psi'} \sin\operatorname{am}(u \pm ia) + i\sin\vartheta\, e^{-i\psi'} \sin\operatorname{am}(u \mp ia)\\
2\beta &= -\sin\vartheta\, e^{i\psi'} \cos\operatorname{am}(u \pm ia) - \sin\vartheta\, e^{-i\psi'} \cos\operatorname{am}(u \mp ia)\\
2\beta' &= -i\sin\vartheta\, e^{i\psi'} \cos\operatorname{am}(u \pm ia) + i\sin\vartheta\, e^{-i\psi'} \cos\operatorname{am}(u \mp ia).
\end{aligned}
$$

Or on a

$$
\begin{aligned}
\sin\vartheta\, e^{i\psi'} &= \frac{H_1(0)\,\Theta(u \pm ia)}{H_1(ia)\,\Theta(u)}\\
\sin\vartheta\, e^{-i\psi'} &= \frac{H_1(0)\,\Theta(u \mp ia)}{H_1(ia)\,\Theta(u)},
\end{aligned}
$$

et les formules elliptiques

$$
\begin{aligned}
H_1(0)\,\Theta(u \pm ia)\cos\operatorname{am}(u \pm ia) &= \Theta(0)\,H_1(u \pm ia)\\
H_1(0)\,\Theta(u \pm ia)\sin\operatorname{am}(u \pm ia) &= \Theta_1(0)\,H(u \pm ia).
\end{aligned}
$$

En substituant ces équations dans les expressions précédentes de $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, on parvient, finalement, aux expressions suivantes de ces coefficients:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{\Theta_1(0)[H(u+ia)+H(u-ia)]}{2H_1(ia)\,\Theta(u)}\\
\alpha' &= \pm\frac{\Theta_1(0)[H(u+ia)-H(u-ia)]}{2iH_1(ia)\,\Theta(u)}\\
\beta &= -\frac{\Theta(0)[H_1(u+ia)+H_1(u-ia)]}{2H_1(ia)\,\Theta(u)}\\
\beta' &= \pm\frac{\Theta(0)[H_1(u+ia)-H_1(u-ia)]}{2iH_1(ia)\,\Theta(u)}.
\end{aligned}
$$

On a exprimé, dans ce qui précède, les cosinus des angles que les trois axes principaux du corps font avec les droites (x) et (y), ou les quantités

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \alpha',\ \beta',\ \gamma',$$

par des fractions qui ont toutes le même dénominateur et dont les numérateurs, abstraction faite des facteurs constants qui ne sont que fonctions du module, sont formés, respectivement, à l'aide des trois fonctions Θ, H, H_1 d'une manière parfaitement analogue. On pourrait désirer, pour rendre complet le système de ces formules, de voir paraître encore, dans cette théorie, les fractions analogues dont les numérateurs sont formés à l'aide de la quatrième fonction, Θ_1. De

pareilles fractions ne se sont pas trouvées parmi les valeurs des trois autres quantités, α'', β'', γ'', ou des cosinus des angles que les axes principaux font avec le troisième axe de coordonnées, celui des z; mais de telles expressions se présenteront, en cherchant les vitesses de rotation du corps autour des droites (x) et (y), ou les produits de la vitesse de rotation autour de l'axe instantané avec les cosinus des angles que cet axe fait avec ces mêmes droites, la vitesse de rotation autour de l'axe des z étant, comme on sait, une constante,

$$\frac{h}{l}.$$

On pourra parvenir à ces expressions de plusieurs manières différentes, et en faisant usage de telle ou telle formule d'addition des fonctions elliptiques. L'analyse suivante qui peut-être n'est ni la plus courte ni la plus symétrique, a paru pourtant celle qui s'offre le plus naturellement.

Détermination des vitesses de rotation du corps autour des axes des x et y.

Désignons les vitesses de rotation du corps autour des droites (x) et (y), mobiles elles mêmes dans le plan invariable, par v et v', on aura

$$
\begin{aligned}
v &= \alpha p + \beta q + \gamma r\\
v' &= \alpha' p + \beta' q + \gamma' r,
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
v &= l\left(\frac{\alpha\alpha''}{A} + \frac{\beta\beta''}{B} + \frac{\gamma\gamma''}{C}\right)\\
v' &= l\left(\frac{\alpha'\alpha''}{A} + \frac{\beta'\beta''}{B} + \frac{\gamma'\gamma''}{C}\right).
\end{aligned}
$$

Éliminons les valeurs de $\gamma\gamma''$ et de $\gamma'\gamma''$ au moyen des équations

$$
\begin{aligned}
\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' &= 0\\
\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0,
\end{aligned}
$$

il viendra

$$
\begin{aligned}
v &= -\frac{l}{C}\left(\frac{A-C}{A}\alpha\alpha'' + \frac{B-C}{B}\beta\beta''\right)\\
v' &= -\frac{l}{C}\left(\frac{A-C}{A}\alpha'\alpha'' + \frac{B-C}{B}\beta'\beta''\right).
\end{aligned}
$$

En substituant la formule

$$\Delta^2\operatorname{am}(ia) = \frac{B(A-C)}{A(B-C)},$$

et en posant

$$\mu = -\frac{(B-C)l}{BC},$$

ces expressions se changeront dans celles-ci:

$$\begin{aligned} v &= \mu[\Delta^2 \mathrm{am}(ia)\alpha\alpha'' + \beta\beta''] \\ v' &= \mu[\Delta^2 \mathrm{am}(ia)\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'']. \end{aligned}$$

Au lieu de considérer à part les quantités v et v', nous allons chercher la valeur de

$$v \pm iv',$$

où l'on prendra encore le signe $+$ ou $-$, selon que $Bh - l^2$ est positif ou négatif. Pour cet effet, je remarque qu'en mettant

$$m = H_1(ia)\,\Theta(u),$$

l'on tire des valeurs trouvées ci-dessus de $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ les deux formules suivantes:

$$\begin{aligned} m(\alpha \pm i\alpha') &= -\Theta_1(0)\,H(u-ia) \\ m(\beta \pm i\beta') &= -\Theta(0)\,H_1(u-ia). \end{aligned}$$

Ces équations étant substituées dans la valeur de

$$v \pm iv' = \mu[\Delta^2 \mathrm{am}(ia)(\alpha \pm i\alpha')\alpha'' + (\beta \pm i\beta')\beta''],$$

on aura

$$-\frac{m}{\mu}(v \pm iv') = \Theta_1(0)\,\Delta^2 \mathrm{am}(ia)\,H(u-ia)\alpha'' + \Theta(0)\,H_1(u-ia)\beta''.$$

Substituant les valeurs

$$\begin{aligned} \alpha'' &= -\frac{\cos \mathrm{am}\, u}{\cos \mathrm{am}(ia)} \\ \beta'' &= \frac{\Delta \mathrm{am}(ia) \sin \mathrm{am}\, u}{\cos \mathrm{am}(ia)}, \end{aligned}$$

et faisant usage des formules

$$\begin{aligned} \Theta_1(0)\,H(u-ia) &= H_1(0)\,\Theta(u-ia).\sin \mathrm{am}(u-ia) \\ \Theta(0)\,H_1(u-ia) &= H_1(0)\,\Theta(u-ia).\cos \mathrm{am}(u-ia), \end{aligned}$$

on trouvera

$$-\frac{m \cos \mathrm{am}(ia)}{\mu\,\Delta \mathrm{am}(ia)} \cdot \frac{v \pm iv'}{H_1(0)\,\Theta(u-ia)} = \sin \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am}(u-ia) - \Delta \mathrm{am}(ia) \cos \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{am}(u-ia).$$

Or d'après une formule d'addition que l'on déduit aisément des formules connues, on a

$$\sin \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am}(u-ia) - \Delta \mathrm{am}(ia) \cos \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{am}(u-ia) = \sin \mathrm{am}(ia)\,\Delta \mathrm{am}(u-ia),$$

d'où l'on tire

$$-\frac{m \cos \mathrm{am}(ia)}{\mu\,\Delta \mathrm{am}(ia)} \cdot \frac{v \pm iv'}{H_1(0)\,\Theta(u-ia)} = \sin \mathrm{am}(ia)\,\Delta \mathrm{am}(u-ia).$$

Remarquons qu'on a,

$$\frac{\sin \mathrm{am}(ia)\,\Delta \mathrm{am}(ia)}{\cos \mathrm{am}(ia)} = \frac{i}{l}\sqrt{\frac{BC(Ah-l^2)}{A(B-C)}},$$

et, par suite, multipliant par μ et substituant la valeur de μ et celle donnée ci-dessus du facteur n,

$$\frac{\mu \sin \mathrm{am}(ia)\,\Delta \mathrm{am}(ia)}{\cos \mathrm{am}(ia)} = \mp i\sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}} = \mp in.$$

Remarquons, de plus, qu'on a

$$H_1(0) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \qquad \Theta(u-ia)\,\Delta \mathrm{am}(u-ia) = \sqrt{k'}.\Theta_1(u-ia),$$

il viendra

$$v \pm iv' = \pm in\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}} \cdot \frac{\Theta_1(u-ia)}{H_1(ia)\,\Theta(u)}.$$

Changeant i en $-i$, on aura de même

$$v \mp iv' = \mp in\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}} \cdot \frac{\Theta_1(u+ia)}{H_1(ia)\,\Theta(u)}.$$

Donc, les vitesses de rotation autour des droites mobiles (x) et (y) que l'on a choisies pour axes des x et y, deviendront

$$\begin{aligned} v &= \mp \frac{f[\Theta_1(u-ia) - \Theta_1(u+ia)]}{2iH_1(ia)\,\Theta(u)} \\ v' &= \frac{f[\Theta_1(u-ia) + \Theta_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\,\Theta(u)}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$f = n\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}} = nH'(0),$$

en désignant par $H'(0)$ la valeur de $\frac{dH(u)}{du}$ pour $u = 0$ (*Fund.* §. 61).

Remarquons que partout où entrent dans les résultats trouvés les signes ambigus $\pm$ et $\mp$, on peut s'en passer et les remplacer par le signe supérieur, en ayant soin de donner aux axes des z' et des y les directions opposées quand $Bh < l^2$. C'est ce qui résulte des formules primitives desquelles on est parti et peut servir à vérifier ces signes dans les valeurs que l'on a trouvées des cosinus des angles que les axes principaux et l'axe instantané font avec les axes des x, y, z.

Le quarré de la vitesse de rotation autour de l'axe instantané est la somme des quarrés de celles autour de trois axes rectangulaires quelconques. En prenant pour ces axes ceux des x', y', z' ou des x, y, z, on aura l'équation

$$p^2+q^2+r^2 = v^2+v'^2+\frac{h^2}{l^2},$$

laquelle peut servir à vérifier les valeurs trouvées de v et v'. C'est ce que nous allons faire de la manière suivante.

Des équations (5.),

$$p^2 = \frac{l^2-Ch-B(B-C)q^2}{A(A-C)}$$

$$r^2 = \frac{Ah-l^2-B(A-B)q^2}{C(A-C)},$$

il s'ensuit

$$p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2} = \frac{(Ah-l^2)(l^2-Ch)-l^2(A-B)(B-C)q^2}{AC.l^2},$$

et comme on a

$$q^2 = \frac{l^2-Ch}{B(B-C)}\sin^2\operatorname{am}u, \qquad n^2 = \frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC},$$

il viendra

$$p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2} = \frac{l^2-Ch}{ABC.l^2}[B(Ah-l^2)-(A-B)l^2\sin^2\operatorname{am}u]$$

$$= n^2\left(\frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2}-\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}\sin^2\operatorname{am}u\right),$$

et comme on a de plus

$$k^2 = \frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}, \qquad \frac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)} = \frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2},$$

il résultera

$$p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2} = n^2\left(\frac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)}-k^2\sin^2\operatorname{am}u\right).$$

D'autre côté, on trouve successivement

$$v^2+v'^2 = \frac{f^2\,\Theta_1(u+ia)\,\Theta_1(u-ia)}{H_1^2(ia)\,\Theta^2(u)}$$

$$= \frac{f^2}{k'}\,\frac{\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia)}{H_1^2(ia)\,\Theta^2(u)}\,\Delta\operatorname{am}(u+ia)\,\Delta\operatorname{am}(u-ia)$$

$$= \frac{f^2}{k'}\,\frac{\Theta^2(ia)}{\Theta^2(0)\,H_1^2(ia)}[1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u]\,\Delta\operatorname{am}(u+ia)\,\Delta\operatorname{am}(u-ia)$$

$$= \frac{f^2[\Delta^2\operatorname{am}(ia)-k^2\cos^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u]}{kk'\,\Theta_1^2(0)\cos^2\operatorname{am}(ia)}\ {}^{*)},$$

donc

$$v^2+v'^2 = n^2\left(\frac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)}-k^2\sin^2\operatorname{am}u\right)$$

$$= p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Au lieu de faire tourner les droites (x) et (y) dans le plan invariable autour du point fixe avec la vitesse angulaire Ψ', on peut donner ce mouvement de rotation au plan invariable même. La vitesse de rotation du corps, parallèle à ce même plan, étant $\frac{h}{l}$, on aura

$$\frac{h}{l}-\Psi'$$

pour la vitesse *relative* de la rotation du corps parallèle au plan invariable, ce dernier de son côté étant supposé tournoyer autour du point fixe avec la vitesse angulaire Ψ'. Cette vitesse relative, $\frac{h}{l}-\Psi'$, peut être exprimée au moyen des fonctions Θ d'une manière remarquable.

Pour trouver cette expression, on partira de la formule

$$\cos^2\operatorname{am}(ia) = \frac{(A-C)l^2}{A(l^2-Ch)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{h}{l} = l\left(\frac{1}{C}-\frac{A-C}{AC\cos^2\operatorname{am}(ia)}\right).$$

Or on a trouvé ci-dessus la formule

$$\frac{l}{n}\cdot\frac{A-C}{AC} = \pm\frac{i\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)}{\sin\operatorname{am}(ia)},$$

*) *Fund. nov.* §. 18. form. (11).

d'où suit

$$\frac{(A-C)l}{AC\cos^2\operatorname{am}(ia)} = \pm\frac{in\,\Delta\operatorname{am}(ia)}{\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)}$$
$$= \pm n\frac{d\log\operatorname{tg}\operatorname{am}(ia)}{da} = \pm n\left(\frac{d\log H(ia)}{da} - \frac{d\log H_1(ia)}{da}\right).$$

Ajoutons à cette équation la suivante à laquelle on est parvenu au même endroit,

$$\Psi - \frac{l}{C} = \mp n\frac{d\log H(ia)}{da},$$

on aura

$$\Psi - \frac{h}{l} = \mp n\frac{d\log H_1(ia)}{da}.$$

On voit par cette formule et par les valeurs données ci-dessus des quantités $\Psi-\frac{l}{A}$, $\Psi-\frac{l}{B}$, $\Psi-\frac{l}{C}$, que les quatre quantités,

$$\Psi-\frac{l}{A},\quad \Psi-\frac{l}{B},\quad \Psi-\frac{l}{C},\quad \Psi-\frac{h}{l},$$

forment un système de quantités analogues entre elles, leurs valeurs étant exprimées, respectivement, par les produits de $\mp n$ avec les différentielles logarithmiques des quatre fonctions

$$\Theta(ia),\quad \Theta_1(ia),\quad H(ia),\quad H_1(ia).$$

Tableau de formules d'addition des fonctions elliptiques.

La formule d'addition dont on s'est servi dans l'article précédent, fait partie d'un système de *seize* formules semblables que l'on peut aisément déduire des formules connues ou les unes des autres et que je veux présenter ici dans un même tableau. Soit posé

$$\operatorname{am}(a) = \alpha,\quad \operatorname{am}(b) = \beta,\quad \operatorname{am}(a+b) = \sigma,$$

ces seize formules qui sont autant d'équations entre les fonctions sine, cosine et Δ des amplitudes α, β, σ, peuvent être distribuées dans quatre systèmes dont trois embrassent les équations dans lesquelles entrent deux des quantités, $\sin\sigma$, $\cos\sigma$, $\Delta\sigma$, et le quatrième les équations dans lesquelles entrent toutes ces quantités à la fois. On remarquera que les différents termes de ces équations sont composés de manière que l'on ne trouve jamais la même amplitude dans deux facteurs du même terme. La formule d'addition dont on a fait usage dans l'article précédent, s'obtient de la dernière formule du tableau, en posant

$$\alpha = \operatorname{am}(u),\quad \beta = -\operatorname{am}(ia),\quad \sigma = \operatorname{am}(u-ia).$$

$$[\operatorname{am}(a) = \alpha,\quad \operatorname{am}(b) = \beta,\quad \operatorname{am}(a+b) = \sigma].$$

$$\begin{array}{ll}
(1.) & \Delta\alpha\,\Delta\beta\,\Delta\sigma - k^2\cos\alpha\cos\beta\cos\sigma = k'^2 \\
(2.) & \Delta\sigma + k^2\sin\alpha\sin\beta\cos\sigma = \Delta\alpha\,\Delta\beta \\
(3.) & \cos\alpha\cos\beta\,\Delta\sigma - \Delta\alpha\,\Delta\beta\cos\sigma = k'^2\sin\alpha\sin\beta \\
(4.) & \sin\alpha\sin\beta\,\Delta\sigma + \cos\sigma = \cos\alpha\cos\beta \\
(5.) & \Delta\beta\,\Delta\sigma + k^2\cos\alpha\sin\beta\sin\sigma = \Delta\alpha \\
(6.) & \Delta\alpha\,\Delta\sigma + k^2\sin\alpha\cos\beta\sin\sigma = \Delta\beta \\
(7.) & -\sin\alpha\cos\beta\,\Delta\sigma + \Delta\alpha\sin\sigma = \cos\alpha\sin\beta \\
(8.) & -\cos\alpha\sin\beta\,\Delta\sigma + \Delta\beta\sin\sigma = \sin\alpha\cos\beta \\
(9.) & \cos\beta\cos\sigma + \Delta\alpha\sin\beta\sin\sigma = \cos\alpha \\
(10.) & \cos\alpha\cos\sigma + \Delta\beta\sin\alpha\sin\sigma = \cos\beta \\
(11.) & \Delta\alpha\sin\beta\cos\sigma - \cos\beta\sin\sigma = -\sin\alpha\,\Delta\beta \\
(12.) & \Delta\beta\sin\alpha\cos\sigma - \cos\alpha\sin\sigma = -\sin\beta\,\Delta\alpha \\
(13.) & \Delta\alpha\cos\beta\cos\sigma + k'^2\sin\beta\sin\sigma = \cos\alpha\,\Delta\beta\,\Delta\sigma \\
(14.) & \Delta\beta\cos\alpha\cos\sigma + k'^2\sin\alpha\sin\sigma = \cos\beta\,\Delta\alpha\,\Delta\sigma \\
(15.) & \sin\beta\cos\sigma - \Delta\alpha\cos\beta\sin\sigma = -\sin\alpha\,\Delta\sigma \\
(16.) & \sin\alpha\cos\sigma - \Delta\beta\cos\alpha\sin\sigma = -\sin\beta\,\Delta\sigma
\end{array}$$

Dans les quatre premières de ces formules on peut échanger entre elles les amplitudes α et β; par le même changement les autres formules, deux à deux, se changeront l'une dans l'autre. Mais on peut aussi échanger entre elles les amplitudes α et σ, si l'on change en même temps β en $-\beta$. C'est ce qui suit de ce que par le changement de a en $a+b$ et de b en $-b$, $a+b$ se change réciproquement en a.

La formule (4.) qui long-temps a été la seule connue de celles du tableau précédent, a donné lieu à la célèbre construction de Lagrange, laquelle fait voir qu'à chaque formule de trigonométrie sphérique répond une formule d'addition des fonctions elliptiques, et réciproquement. En effet, d'après cette construction on peut supposer que α, β, σ, soient les côtés d'un triangle sphérique dont les angles, α', β', σ', respectivement opposés à ces côtés, sont donnés par les equations

$$\sin\alpha' = k\sin\alpha,\quad \sin\beta' = k\sin\beta,\quad \sin\sigma' = k\sin\sigma$$
$$\cos\alpha' = \Delta\alpha,\quad \cos\beta' = \Delta\beta,\quad \cos\sigma' = -\Delta\sigma.$$

Or, comme dans chaque formule de trigonométrie sphérique on peut échanger entre eux les trois côtés du triangle, en faisant le même échange entre les angles opposés, il suit que dans chaque formule d'addition des fonctions elliptiques, ou dans chaque équation entre les amplitudes α, β, σ, on peut échanger entre elles ces trois amplitudes, en ayant soin toutefois de prendre $\Delta\sigma$ avec le signe $-$, de manière qu'en permutant α, β, σ d'une manière quelconque, on doit permuter entre elles de la même manière les quantités $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\sigma$; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\sigma$; $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $-\Delta\sigma$. C'est ce qu'on peut déduire aussi de la théorie des fonctions elliptiques, en remarquant que si l'on change a en $2K+2iK'-a-b$, les quantités $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\Delta\alpha$ sont changées respectivement en $\sin\sigma$, $\cos\sigma$, $-\Delta\sigma$, et réciproquement.

D'après les remarques précédentes les seize formules du tableau peuvent être ramenées à *cinq* d'entre elles, par exemple aux équations (1.) — (4.) et (7.), desquelles on déduira les autres par de simples échanges de lettres et des changements de signes. La formule (1.) est unique en son genre; de chacune des formules (2.), (3.), (4.) on tire, par ces changements, trois formules du tableau, et de la formule (7.) les six autres. Mais on peut, de plus, réduire ces cinq formules et, par suite, toutes les seize à une quelconque d'entre elles au moyen des remarques suivantes.

Et d'abord, en divisant les formules (1.) et (3.) par $\Delta\alpha\Delta\beta$ et en changeant a, b, $a+b$ en $K-a$, $K-b$, $2K-a-b$, l'on obtient respectivement les formules (2.) et (4.). Il suffira donc, pour pouvoir déduire toutes les quatre formules (1.) — (4.) d'une d'entre elles, de déduire l'une des formules (1.) et (3.) d'une des formules (2.) et (4.).

Pour cet effet, on remarquera qu'en changeant u en iu, et en même temps le module k dans son complément k', les fonctions $\sin\mathrm{am}\, u$, $\cos\mathrm{am}\, u$, $\Delta\,\mathrm{am}\, u$ seront changées respectivement dans

$$\frac{i\sin\mathrm{am}\, u}{\cos\mathrm{am}\, u}, \quad \frac{1}{\cos\mathrm{am}\, u}, \quad \frac{\Delta\,\mathrm{am}\, u}{\cos\mathrm{am}\, u}.$$

D'où suit qu'en divisant la formule (2.) par $\cos\alpha\cos\beta\cos\sigma$, et changeant les quantités a, b, $a+b$, k en ia, ib, $ia+ib$, k', l'on obtiendra la formule (3.).

Il ne restera donc qu'à faire voir comment on peut déduire encore la formule (7.) d'une des formules (1.) — (4.). On peut se servir, pour cet effet, d'une

proposition qui se fonde sur la remarque importante et utile dans beaucoup d'autres occasions, *qu'en changeant q en $-q$ dans les expressions*

$$\frac{2\sqrt[4]{q}(1+q^2+q^6+\cdots)}{1+2q+2q^4+\cdots} = \sqrt{k}$$

$$\frac{1-2q+2q^4-\cdots}{1+2q+2q^4+\cdots} = \sqrt{k'}$$

$$\frac{1+2q+2q^4+\cdots}{1+q^2+q^6+\cdots}\cdot\frac{\sin x - q^2\sin 3x + q^6 \sin 5x - \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - \cdots} = \sin\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$$

$$\frac{1-2q+2q^4-\cdots}{1+q^2+q^6+\cdots}\cdot\frac{\cos x + q^2\cos 3x + q^6 \cos 5x + \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - \cdots} = \cos\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$$

$$\frac{1-2q+2q^4-\cdots}{1+2q+2q^4+\cdots}\cdot\frac{1+2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - \cdots} = \Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi},$$

les quantités k^2, k'^2, $\sin\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$, $\cos\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$, $\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$, *seront changées respectivement dans les suivantes:*

$$-\frac{k^2}{k'^2}, \quad \frac{1}{k'^2}, \quad \frac{k'\sin\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}}, \quad \frac{\cos\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}}, \quad \frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}},$$

et que, si dans ces expressions l'on change à la fois q en $-q$ et x en $\frac{1}{2}\pi - x$, les mêmes quantités seront changées, respectivement, dans

$$-\frac{k^2}{k'^2}, \quad \frac{1}{k'^2}, \quad \cos\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}, \quad \sin\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}, \quad \frac{1}{k'}\,\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}.$$

Dans une équation quelconque entre les fonctions elliptiques des arguments a, b, $a+b$ mettons respectivement $-a$, $K-b$, $K-a-b$ au lieu de a, b, $a+b$, et considérant les quantités qui entrent dans cette équation comme des fonctions de q, $\frac{\pi a}{2K}$, $\frac{\pi b}{2K}$, changeons dans ces fonctions le signe de q, on aura, en profitant de la remarque précédente, la proposition, *que dans les formules d'addition ou dans les équations entre les amplitudes*

$$\alpha = \mathrm{am}(a), \quad \beta = \mathrm{am}(b), \quad \sigma = \mathrm{am}(a+b),$$

il est permis de mettre respectivement au lieu des quantités

$$k^2, \quad k'^2, \quad \sin\alpha, \quad \cos\alpha, \quad \Delta\alpha,$$
$$\sin\beta, \quad \cos\beta, \quad \Delta\beta, \quad \sin\sigma, \quad \cos\sigma, \quad \Delta\sigma$$

les quantités

$$-\frac{k^2}{k'^2},\quad \frac{1}{k'^2},\quad -\frac{k'\sin\alpha}{\Delta\alpha},\quad \frac{\cos\alpha}{\Delta\alpha},\quad \frac{1}{\Delta\alpha},$$

$$\cos\beta,\quad \sin\beta,\quad \frac{1}{k'}\Delta\beta,\quad \cos\varphi,\quad \sin\varphi,\quad \frac{1}{k'}\Delta\varphi.$$

Au moyen de cette proposition l'on obtiendra tout de suite la formule (7.) de la formule (4.) divisée par $\Delta\alpha$. On aura donc déduit de la formule (1.) la formule (2.), en changeant a et b en $K-a$ et $K-b$; de la formule (2.) la formule (3.), en multipliant les arguments par i et en changeant k en k'; de la formule (3.) la formule (4.), en changeant encore a et b en $K-a$ et $K-b$; enfin de la formule (4.) la formule (7.), en changeant a en $-a$, b en $K-b$, et en imaginant que dans les développements des fonctions elliptiques et du module on ait changé q en $-q$. On obtiendra ensuite de ces cinq formules les onze autres formules du tableau, en échangeant entre eux a et b, ou en changeant a et b en $a+b$ et $-b$.

Les projections sur le plan invariable de l'axe des z' et de l'axe instantané, de même que celles des axes des x' et des y', sont accouplées l'une à l'autre de manière que deux projections accouplées ont le même mouvement moyen et que l'une d'elles est donnée par la position que l'autre a avant ou après le temps $\frac{1}{2}T$.

Soient respectivement

$$\psi',\quad \psi'_1,\quad \psi'_2,\quad \psi'_3$$

les angles que les intersections avec le plan invariable, du plan des x', y', du plan des y', z', du plan des z', x' et du plan instantané de rotation*), font avec l'axe mobile des x ou la droite (x). Ces angles sont respectivement égaux à ceux que les projections sur le plan invariable, des axes des z', x', y' et de l'axe instantané, font avec l'axe mobile des y ou la droite (y). Les quantités

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \frac{v}{w}$$

étant respectivement les cosinus des angles que les axes principaux et l'axe instantané font avec l'axe des x, et les quantités

$$\alpha',\quad \beta',\quad \gamma',\quad \frac{v'}{w},$$

*) C'est ainsi qu'on nomme le plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation; on nommera plus bas, avec M. Poisson, w la vitesse de rotation du corps autour de l'axe instantané.

les cosinus des angles que ces mêmes axes font avec l'axe des y, on a

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{\gamma}{\gamma'},\qquad \operatorname{tg}\psi'_1 = \frac{\alpha}{\alpha'},$$

$$\operatorname{tg}\psi'_3 = \frac{v}{v'},\qquad \operatorname{tg}\psi'_2 = \frac{\beta}{\beta'},$$

d'où l'on tire les expressions suivantes des quatre angles mêmes:

$$\psi' = \frac{1}{2i}\log\frac{\gamma'+i\gamma}{\gamma'-i\gamma},\qquad \psi'_1 = \frac{1}{2i}\log\frac{\alpha'+i\alpha}{\alpha'-i\alpha},$$

$$\psi'_3 = \frac{1}{2i}\log\frac{v'+iv}{v'-iv},\qquad \psi'_2 = \frac{1}{2i}\log\frac{\beta'+i\beta}{\beta'-i\beta}.$$

En substituant dans ces expressions les valeurs trouvées ci-dessus des quantités α, β, etc., on aura les équations

$$\psi' = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$\psi'_1 = \pm\frac{1}{2i}\log\left[-\frac{H(u+ia)}{H(u-ia)}\right] = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}$$

$$\psi'_2 = \pm\frac{1}{2i}\log\left[-\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)}\right] = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)}-\tfrac{1}{2}\pi$$

$$\psi'_3 = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u-ia)},$$

dont la première est la même que celle que l'on a pris pour point de départ dans les recherches antérieures.

Les quantités logarithmiques,

$$\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},\qquad \log\frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u-ia)},$$

peuvent être développées dans des séries convergentes suivant les cosinus et sinus des multiples de l'angle

$$\frac{\pi u}{K} = \frac{2\pi}{T}(t-t_0).$$

Il suit de là, que les angles ψ' et ψ'_3 sont des fonctions du temps *périodiques*. Mais la même chose n'a pas lieu par rapport aux quantités logarithmiques,

$$\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)},\qquad \log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)},$$

dont les développements contiendront chacun un terme proportionel au temps en dehors des signes sinus ou cosinus. On peut séparer ces termes de la partie périodique, en se servant des formules (*Fund.* §. 61)

$$H(u+iK') = i e^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}} \Theta(u)$$
$$H_1(u+iK') = e^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}} \Theta_1(u),$$

lesquelles peuvent être déduites l'une de l'autre en changeant u en $K-u$ et i en $-i$. En effet, on tire de ces formules en posant, comme ci-dessus, $a = K' - a'$,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)} = \frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}$$
$$\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia)}{H_1(u+ia)} = \frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}.$$

On aura donc, en remplaçant $\frac{u}{2K}$ par $\frac{t-t_0}{T}$, le système suivant de quatre équations dans lesquelles les seconds membres sont des fonctions du temps périodiques,

$$\begin{aligned}
\mp\psi' &= -\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} \\
\mp\psi_1' - \frac{\pi(t-t_0)}{T} &= \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} \\
\mp\psi_2' - \frac{\pi(t-t_0)}{T} \mp \tfrac{1}{2}\pi &= -\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} \\
\mp\psi_3' &= \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}.
\end{aligned}$$

A cause de la multiplicité des valeurs des logarithmes, il est permis d'ajouter aux valeurs précédentes la quantité $\pm\pi$. Il faut donc examiner, si pour $t = t_0$ ou $u = 0$ les seconds membres des équations précédentes ont les valeurs 0 ou $\pm\pi$. Pour cet effet, on remarquera que les neuf quantités α, β, etc., et les quantités v, v', v'', qui sont suffisantes et nécessaires pour déterminer les directions des axes principaux et de l'axe instantané, ont pour $t = t_0$ ou $u = 0$ les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{lll}
\alpha = 0, & \beta = -1, & \gamma = 0 \\
\alpha' = \pm\sin\operatorname{am}(a,k'), & \beta' = 0, & \gamma' = \cos\operatorname{am}(a,k') \\
\alpha'' = -\cos\operatorname{am}(a,k'), & \beta'' = 0, & \gamma'' = \pm\sin\operatorname{am}(a,k') \\
v = 0, & v' = n\Delta\operatorname{am}(a,k'), & v'' = \frac{h}{l},
\end{array}$$

où les quantités

$$\sin\operatorname{am}(a,k'), \quad \cos\operatorname{am}(a,k'), \quad \Delta\operatorname{am}(a,k'), \quad n, \quad \frac{h}{l}$$

sont positives, et où l'on a nommé v'' la vitesse de la rotation autour de l'axe des z. On conclut de ces valeurs par de simples considérations géométriques que, pour $t = t_0$, l'on doit avoir, lorsque $Bh > l^2$,

$$\psi' = 0, \quad \psi_1' = 0, \quad \psi_2' = -\tfrac{1}{2}\pi, \quad \psi_3' = 0,$$

et lorsque $Bh < l^2$,

$$\psi' = 0, \quad \psi_1' = \pi, \quad \psi_2' = -\tfrac{1}{2}\pi, \quad \psi_3' = 0.$$

Il faudra donc ajouter, dans le second cas, la demi-circonférence du cercle à la valeur de ψ_1'. Donc, si l'on désigne par π_1 une quantité telle que l'on a

$$\pi_1 = 0, \quad \text{si} \quad Bh > l^2, \quad \text{et}$$
$$\pi_1 = \pi, \quad \text{si} \quad Bh < l^2,$$

et que l'on ajoute à la valeur de ψ_1' la quantité π_1, on ne doit pas ajouter de terme constant aux développements des fonctions logarithmiques par lesquelles on a exprimé précédemment les angles $\psi', \psi_1', \psi_2', \psi_3'$.

On a déterminé l'intersection du plan des x', y' avec le plan invariable, ou par l'angle ψ qu'elle fait avec la droite fixe dans ce plan, ou par l'angle ψ' qu'elle fait avec la droite (x) mobile dans le même plan, les deux angles étant liés entre eux par l'équation

$$\psi' = \psi + \Psi(t-t_0).$$

Les angles $\psi_1', \psi_2', \psi_3'$ étant ceux qu'avec la droite (x) font les intersections du plan invariable avec le plan des y', z', celui des x', z' et le plan instantané de rotation, nommons respectivement

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \psi_3$$

les angles que ces mêmes intersections font avec la droite fixe dans le plan invariable, on aura de même:

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= \psi_1 + \Psi(t-t_0) \\
\psi_2' &= \psi_2 + \Psi(t-t_0) \\
\psi_3' &= \psi_3 + \Psi(t-t_0).
\end{aligned}$$

Donc, étant posé

$$\Psi_1 = \Psi \pm \frac{\pi}{T},$$

on aura les équations:

$$\psi + \Psi(t-t_0) = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$\psi_1 + \Psi_1(t-t_0) = \mp \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} + \pi_1$$

$$\psi_2 + \Psi_1(t-t_0) = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} - \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\psi_3 + \Psi(t-t_0) = \mp \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}.$$

Supposons à présent qu'une droite (x_1) tourne uniformément avec la vitesse angulaire Ψ_1 autour du point fixe dans le plan invariable, dans le même sens que (x), qui est opposé à celui dans lequel les angles ψ sont comptés. Supposons, de plus, que cette droite dans son mouvement de rotation soit avancée d'un angle de 90^0 par une droite (y_1) tournant autour du point fixe avec la même vitesse angulaire Ψ_1. Il suit des formules précédentes que les intersections des quatre plans avec le plan invariable font des rotations oscillatoires, savoir

1) l'intersection du plan des x', y' autour de (x);
2) celle du plan des y', z' autour de (x_1) ou autour de la droite opposée, selon que $Bh >$ ou $< l^2$;
3) celle du plan des x', z' autour de (y_1);
4) celle du plan instantané de rotation autour de (x).

On a supposé dans ce qui précède que les directions des intersections des quatre plans avec le plan invariable coïncident avec celles des projections, sur le plan invariable, des axes perpendiculaires à ces plans, après avoir fait un tour de 90^0 dans le sens convenu de leur rotation. Après la même rotation de 90^0, les droites (x) et (x_1) coïncident avec les droites (y) et (y_1), et les droites (y) et (y_1) avec les droites opposées à (x) et (x_1). Les projections des quatre axes sur le plan invariable feront donc des rotations oscillatoires,

1) la projection de l'axe des z' autour de (y);
2) celle de l'axe des x' autour de (y_1) ou autour de la droite opposée, selon que $Bh >$ ou $< l^2$;
3) celle de l'axe des y' autour de la droite opposée à (x_1);
4) celle de l'axe instantané autour de (y).

Augmentant t de $\frac{1}{4}T$, l'argument u augmentera de K, et, par suite, les fonctions

$$\Theta(u \pm ia), \quad \Theta(u \pm ia') \quad \text{et} \quad \Theta_1(u \pm ia), \quad \Theta_1(u \pm ia')$$

se changeront les unes dans les autres. Nommant donc

$$O, \quad O_1, \quad O_2, \quad O_3$$

les angles que les quatre projections font respectivement avec les droites mobiles autour desquelles elles ont leur mouvement d'oscillation, et

$$(O), \quad (O_1), \quad (O_2), \quad (O_3)$$

les valeurs que ces mêmes angles ont après un laps de temps égal au quart de période, $\frac{1}{4}T$, on aura d'après les équations précédemment établies:

$$(O) = O_3, \qquad (O_1) = O_2,$$
$$(O_3) = O, \qquad (O_2) = O_1.$$

La position des droites (x), (x_1), (y), (y_1), et des droites opposées, est connue pour chaque instant du temps, puisque ces droites tournent uniformément autour du point fixe dans le plan invariable avec des vitesses angulaires données. Il suffira donc pour déterminer, à un temps quelconque, les projections des quatre axes sur le plan invariable, de connaître, à ce même temps, les angles qu'elles font avec ces droites, autour desquelles elles font respectivement leurs oscillations. L'on tire par suite des équations précédentes le théorème, que si l'on connaît à deux temps quelconques distants entre eux d'un quart de période, $\frac{1}{4}T$, les positions de la projection de l'axe des z', on connaîtra immédiatement les positions de la projection de l'axe instantané aux mêmes temps et réciproquement, et que si l'on connaît, à ces deux temps, les positions de la projection de l'un des axes des x' et des y', on connaîtra aux mêmes temps les positions de la projection de l'autre.

Des trois axes principaux celui que l'on a pris pour l'axe des z' ne se couche jamais sur le plan invariable; c'est l'axe auquel se rapporte le plus petit moment, quand $Bh > l^2$, ou le plus grand, quand $Bh < l^2$. Cet axe, comme on voit, est accouplé en quelque sorte à l'axe instantané, de même que les deux autres axes principaux, ceux des x' et des y', sont accouplés l'un à l'autre.

Il conviendra d'appeler l'angle

$$\frac{\pi(t-t_0)}{T} = \frac{\pi u}{2K},$$

le mouvement moyen de la rotation oscillatoire du corps, et les angles

$$\Psi(t-t_0), \qquad \Psi_1(t-t_0)$$

les mouvements moyens de la rotation progressive des projections des quatre axes sur le plan invariable. Ceci convenu, on voit par ce qui précède, *que les projections sur le plan invariable de deux axes accouplés ont le même mouvement moyen et que l'on connaît immédiatement à un temps donné la projection sur le plan invariable de l'un des axes d'un même couple, si l'on connaît la projection de l'autre avant ou après un quart de période*, $\frac{1}{4}T$. On voit, de plus, par l'équation

$$\Psi_1(t-t_0) = \Psi(t-t_0) \pm \frac{\pi}{T}(t-t_0),$$

que les mouvements moyens des projections des deux couples diffèrent l'un de l'autre du mouvement moyen de la rotation oscillatoire.

Au moyen des formules

$$\frac{n\,d\log H(ia)}{da} = \frac{n\pi}{2K} - \frac{n\,d\log \Theta(ia')}{da'} = \frac{\pi}{T} - \frac{n\,d\log\Theta(ia')}{da'}$$

$$\frac{n\,d\log H_1(ia)}{da} = \frac{n\pi}{2K} - \frac{n\,d\log \Theta_1(ia')}{da'} = \frac{\pi}{T} - \frac{n\,d\log\Theta_1(ia')}{da'},$$

et en substituant Ψ_1 au lieu de $\Psi \pm \frac{\pi}{T}$, on tire des valeurs données ci-dessus des quantités $\Psi - \frac{l}{A}$, etc., les équations suivantes:

$$\Psi - \frac{l}{A} = \mp n \frac{d\log\Theta(ia)}{da}$$

$$\Psi - \frac{l}{B} = \mp n \frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}$$

$$\Psi_1 - \frac{l}{C} = \pm n \frac{d\log\Theta(ia')}{da'}$$

$$\Psi_1 - \frac{h}{l} = \pm n \frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}.$$

Dans le cas particulier remarquable où

$$h = l^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right),$$

on aura

$$a = a' = \tfrac{1}{2}K',$$

et, par suite,

$$\Psi + \Psi_1 = \frac{l}{A} + \frac{l}{C} = \frac{l}{B} + \frac{h}{l}.$$

On aura de plus,

$$\psi + \psi_1 = -(\Psi + \Psi_1)(t-t_0) + \pi_1$$

$$\psi_2 + \psi_3 = -(\Psi + \Psi_1)(t-t_0) - \tfrac{1}{2}\pi.$$

Soient menées dans le plan invariable et par le point fixe deux droites dont l'une divise en deux parties égales l'angle que font entre elles les projections, sur le plan invariable, des axes des x' et des z', et l'autre l'angle que font entre elles les projections, sur le même plan, de l'axe des y' et de l'axe instantané, les deux formules précédentes font voir que dans le cas particulier où l'on a

$$\frac{l}{A} + \frac{l}{C} = \frac{l}{B} + \frac{h}{l},$$

ces droites tournent autour du point fixe uniformément et avec la vitesse angulaire $\frac{1}{2}\left(\frac{l}{A} + \frac{l}{C}\right)$, en faisant l'une avec l'autre un angle de 45^0 ou de 135^0.

Recherche des différentielles $d\psi_1$, $d\psi_2$, $d\psi_3$.

De la formule (3.)

$$d\psi = -\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}\cdot l\,dt$$

on déduit par un simple échange des lettres les deux autres

$$d\psi_1 = -\frac{Bq^2 + Cr^2}{B^2q^2 + C^2r^2}\cdot l\,dt$$

$$d\psi_2 = -\frac{Cr^2 + Ap^2}{C^2r^2 + A^2p^2}\cdot l\,dt.$$

Vérifions ces formules au moyen des valeurs trouvées ci-dessus de ψ_1 et ψ_2, et cherchons en même temps la valeur de $d\psi_3$.

D'après les formules données au commencement de l'article précédent, on a

$$\psi = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$\psi_1 = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)} + \pi_1$$

$$\psi_2 = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)} - \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\psi_3 = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u-ia)},$$

où

$$n' = \frac{\Psi}{n} = \frac{l}{nA} \mp \frac{d \log \Theta(ia)}{da}.$$

Cherchons les différentielles des quatre équations précédentes, u étant la seule variable; au lieu de différentier, dans chaque cas, par rapport à u, le logarithme du ***quotient*** des deux fonctions aux arguments $u+ia$ et $u-ia$, on pourra différentier par rapport à ia le logarithme du ***produit*** de ces mêmes fonctions. On obtiendra, de cette manière, les quatre équations suivantes:

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{du} &= -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial \log[\Theta^{-2}(ia)\,\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia)]}{2\partial a} \\
\frac{d\psi_1}{du} &= -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial \log[\Theta^{-2}(ia)\,H(u+ia)\,H(u-ia)]}{2\partial a} \\
\frac{d\psi_2}{du} &= -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial \log[\Theta^{-2}(ia)\,H_1(u+ia)\,H_1(u-ia)]}{2\partial a} \\
\frac{d\psi_3}{du} &= -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial \log[\Theta^{-2}(ia)\,\Theta_1(u+ia)\,\Theta_1(u-ia)]}{2\partial a}.
\end{aligned}$$

Or on a l'équation

$$\Theta^{-2}(ia)\,\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia) = \Theta^{-2}(0)\,\Theta^2(u)[1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \sin^2 \operatorname{am} u],$$

et l'on en déduit aisément les trois autres analogues. Remarquons, pour cet effet, que des formules connues d'addition l'on tire les suivantes (***Fund.*** §. 18):

$$\begin{aligned}
\sin \operatorname{am}(u+ia) \sin \operatorname{am}(u-ia) &= \frac{\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am}(ia)}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \sin^2 \operatorname{am} u} \\
\cos \operatorname{am}(u+ia) \cos \operatorname{am}(u-ia) &= \frac{\cos^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am}(ia)\,\Delta^2 \operatorname{am} u}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \sin^2 \operatorname{am} u} \\
\Delta \operatorname{am}(u+ia)\;\; \Delta \operatorname{am}(u-ia) &= \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \cos^2 \operatorname{am} u}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \sin^2 \operatorname{am} u},
\end{aligned}$$

lesquelles étant multipliées par l'équation précédente, on obtient le système suivant de formules:

$$\begin{aligned}
\Theta^{-2}(ia)\;\Theta(u+ia)\;\Theta(u-ia) &= \;\;\Theta^{-2}(0)\,\Theta^2(u)[1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \sin^2 \operatorname{am} u] \\
\Theta^{-2}(ia)\;H(u+ia)\;H(u-ia) &= k\,\Theta^{-2}(0)\,\Theta^2(u)[\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am}(ia)] \\
\Theta^{-2}(ia)\,H_1(u+ia)\,H_1(u-ia) &= \frac{k}{k'}\,\Theta^{-2}(0)\,\Theta^2(u)[\cos^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am}(ia)\,\Delta^2 \operatorname{am} u] \\
\Theta^{-2}(ia)\,\Theta_1(u+ia)\,\Theta_1(u-ia) &= \frac{1}{k'}\,\Theta^{-2}(0)\,\Theta^2(u)[\Delta^2 \operatorname{am} u - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \cos^2 \operatorname{am} u].
\end{aligned}$$

Substituant ces formules dans les équations différentielles précédentes et posant, pour plus de simplicité,

$$\frac{1}{i} \sin \operatorname{am}(ia) \cos \operatorname{am}(ia)\,\Delta \operatorname{am}(ia) = m,$$

on aura

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{du} &= -\frac{l}{nA} \mp \frac{k^2 m \sin^2 \operatorname{am} u}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \sin^2 \operatorname{am} u} \\
\frac{d\psi_1}{du} &= -\frac{l}{nA} \mp \frac{m}{\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am}(ia)} \\
\frac{d\psi_2}{du} &= -\frac{l}{nA} \mp \frac{m\Delta^2 \operatorname{am} u}{\cos^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am}(ia)\,\Delta^2 \operatorname{am} u} \\
\frac{d\psi_3}{du} &= -\frac{l}{nA} \mp \frac{k^2 m \cos^2 \operatorname{am} u}{\Delta^2 \operatorname{am} u - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \cos^2 \operatorname{am} u}.
\end{aligned}$$

Or, on a trouvé ci-dessus:

$$\mp k^2 m = -\frac{l}{nA} \cdot \frac{(A-B)(A-C)}{A(B-C)}$$

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= \frac{Ap}{l} = -\frac{\cos \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am}(ia)} \\
\beta'' &= \frac{Bq}{l} = \frac{\Delta \operatorname{am}(ia) \sin \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am}(ia)} = \sqrt{\frac{B(A-C)}{A(B-C)}} \cdot \frac{\sin \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am}(ia)} \\
\gamma'' &= \frac{Cr}{l} = \pm \frac{\sin \operatorname{am}(ia)\,\Delta \operatorname{am} u}{i \cos \operatorname{am}(ia)} = \frac{\pm 1}{k} \sqrt{\frac{C(A-B)}{A(B-C)}} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am}(ia)},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire les formules:

$$\begin{aligned}
A^2p^2 + B^2q^2 &= \frac{l^2}{\cos^2 \operatorname{am}(ia)}[1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \sin^2 \operatorname{am} u] \\
B^2q^2 + C^2r^2 &= \frac{l^2}{\cos^2 \operatorname{am}(ia)}[\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am}(ia)] \\
C^2r^2 + A^2p^2 &= \frac{l^2}{\cos^2 \operatorname{am}(ia)}[\cos^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am}(ia)\,\Delta^2 \operatorname{am} u],
\end{aligned}$$

auxquelles on joindra cette autre trouvée ci-dessus:

$$\begin{aligned}
v^2 + v'^2 &= \frac{n^2}{\cos^2 \operatorname{am}(ia)}[\Delta^2 \operatorname{am}(ia) - k^2 \cos^2 \operatorname{am}(ia) \sin^2 \operatorname{am} u] \\
&= \frac{n^2}{\cos^2 \operatorname{am}(ia)}[\Delta^2 \operatorname{am} u - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \cos^2 \operatorname{am} u].
\end{aligned}$$

Substituant ces formules dans les valeurs des différentielles des quatre angles, et remarquant qu'on a

$$\frac{l^2}{k^2\cos^2\mathrm{am}\,(ia)} = \frac{A(B-C)(Ah-l^2)}{(A-B)(A-C)} = \frac{AB(B-C)q^2}{A-C} + \frac{AC(B-C)r^2}{A-B},$$

on trouvera, en mettant $n\,dt$ au lieu de u,

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} &= -\frac{l}{A}-\frac{l}{A}\cdot\frac{B(A-B)q^2}{A^2p^2+B^2q^2} &&= -\frac{l(Ap^2+Bq^2)}{A^2p^2+B^2q^2}\\
\frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{l}{A}-\frac{l}{A}\cdot\frac{B(A-B)q^2+C(A-C)r^2}{B^2q^2+C^2r^2} &&= -\frac{l(Bq^2+Cr^2)}{B^2q^2+C^2r^2}\\
\frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{l}{A}-\frac{l}{A}\cdot\frac{C(A-C)r^2}{A^2p^2+C^2r^2} &&= -\frac{l(Ap^2+Cr^2)}{A^2p^2+C^2r^2}\\
\frac{d\psi_3}{dt} &= -\frac{l}{A}-\frac{n^2(A-B)(A-C)}{l(B-C)}\cdot\frac{p^2}{v^2+v'^2}.
\end{aligned}$$

Les trois premières équations peuvent être déduites d'une d'entre elles par le seul échange des lettres. On donnera à la quatrième différentes formes, au moyen des équations

$$\begin{aligned}
l^2(v^2+v'^2) &= l^2(p^2+q^2+r^2)-h^2\\
&= (B-C)^2q^2r^2+(C-A)^2r^2p^2+(A-B)^2p^2q^2,\\
\frac{An^2}{B-C} &= \frac{Ah-l^2}{BC} = \frac{1}{BC}[B(A-B)q^2+C(A-C)r^2],\\
(A-B)(A-C)p^2 &= l^2-(B+C)h+BC\left(v^2+v'^2+\frac{h^2}{l^2}\right),
\end{aligned}$$

desquelles on tire, après quelques réductions faciles, les expressions suivantes de $\frac{d\psi_3}{dt}$:

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -l\cdot\frac{\frac{(B-C)^2}{Ap^2}+\frac{(C-A)^2}{Bq^2}+\frac{(A-B)^2}{Cr^2}}{\frac{(B-C)^2}{p^2}+\frac{(C-A)^2}{q^2}+\frac{(A-B)^2}{r^2}} = -\frac{h}{l}-\frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)(Ch-l^2)}{ABCl^3(v^2+v'^2)},$$

expressions symétriques et qui n'avaient pas encore été données. En comparant entre elles les deux expressions égales à $\frac{d\psi_3}{dt}$, on trouve

$$\begin{aligned}
&(A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2)\left(\frac{(B-C)^2}{Ap^2}+\frac{(C-A)^2}{Bq^2}+\frac{(A-B)^2}{Cr^2}\right)\\
&= (Ap^2+Bq^2+Cr^2)\left(\frac{(B-C)^2}{p^2}+\frac{(C-A)^2}{q^2}+\frac{(A-B)^2}{r^2}\right)\\
&\quad+\frac{[B(A-B)q^2+C(A-C)r^2][C(B-C)r^2+A(B-A)p^2][A(C-A)p^2+B(C-B)q^2]}{ABCp^2q^2r^2},
\end{aligned}$$

équation identique et facile à vérifier.

Tableaux de valeurs des intégrales elliptiques de la troisième espèce.

Les formules de l'article précédent fournissent les équations suivantes, au moyen desquelles les quatre angles ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont exprimés par des intégrales elliptiques de la troisième espèce et au caractère trigonométrique:

$$\begin{aligned}
\mp\left(\psi+\frac{lu}{An}\right) &= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}\\
&= \int_0^u\frac{k^2m\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,du}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u}\\
\mp\left(\psi_1+\frac{lu}{An}-\pi_1\right) &= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}\\
&= \frac{d\log H(ia')}{da'}u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}\\
&= \int_0^u\frac{m\,du}{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,(ia)}\\
\mp\left(\psi_2+\frac{lu}{An}+\tfrac{1}{2}\pi\right) &= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)}\\
&= \frac{d\log H(ia')}{da'}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}\\
&= \int_0^u\frac{m\,\Delta^2\mathrm{am}\,u\,.\,du}{\cos^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,(ia)\,\Delta^2\mathrm{am}\,u}\\
\mp\left(\psi_3+\frac{lu}{An}\right) &= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}\\
&= \int_0^u\frac{k^2m\cos^2\mathrm{am}\,u\,.\,du}{\Delta^2\mathrm{am}\,u-k^2\sin^2\mathrm{am}\,(ia)\cos^2\mathrm{am}\,u}.
\end{aligned}$$

La double expression par les fonctions Θ des angles ψ_1 et ψ_2 se tire de ce que, si $a+a'=K'$, l'on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia')}{\Theta(u+ia')}+\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)} &= \frac{\pi u}{2K}\\
\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}+\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia)}{H_1(u+ia)} &= \frac{\pi u}{2K}\\
\frac{d\log\Theta(ia')}{da'}+\frac{d\log H(ia)}{da} &= \frac{\pi}{2K}\\
\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}+\frac{d\log H_1(ia)}{da} &= \frac{\pi}{2K},
\end{aligned}$$

formules dans lesquelles il est permis d'échanger entre eux a et a'.

On obtiendra des expressions analogues et de la même simplicité que les précédentes pour chaque somme des quatre angles et des trois quantités $\frac{lu}{Cn}$, $\frac{lu}{Bn}$, $\frac{hu}{ln}$ correspondantes à $\frac{lu}{An}$. On tire ces expressions des quatre équations précédentes en y ajoutant les produits de u par les quantités

$$\mp\frac{l}{n}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right) = -\frac{d\log\frac{H(ia)}{\Theta(ia)}}{da} = \frac{d\log\frac{\Theta(ia')}{H(ia')}}{da'} = \frac{\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)}{i\sin\operatorname{am}(ia)}$$

$$\mp\frac{l}{n}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right) = -\frac{d\log\frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(ia)}}{da} = \frac{d\log\frac{H_1(ia')}{H(ia')}}{da'} = \frac{ik^2\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)}{\Delta\operatorname{am}(ia)}$$

$$\mp\frac{l}{n}\left(\frac{h}{l^2}-\frac{1}{A}\right) = -\frac{d\log\frac{H_1(ia)}{\Theta(ia)}}{da} = \frac{d\log\frac{\Theta_1(ia')}{H(ia')}}{da'} = \frac{i\sin\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)}{\cos\operatorname{am}(ia)}.$$

On aura ainsi un système de *seize* formules analogues entre elles et au moyen desquelles on exprime chacun des quatre angles par les intégrales elliptiques et les fonctions Θ de quatre manières différentes. Nous allons réunir ces seize formules dans un même tableau qui sera en même temps très utile et même nécessaire dans la théorie des fonctions elliptiques. En effet, pour chaque intégrale elliptique de la troisième espèce et au caractère trigonométrique,

$$\int\frac{H\,du}{1+n\sin^2\operatorname{am}u},$$

où H est ou une simple constante ou une constante multipliée par l'une des quantités $\sin^2\operatorname{am}u$, $\cos^2\operatorname{am}u$, $\Delta^2\operatorname{am}u$, on aura par ce tableau la formule la plus propre à ramener cette intégrale aux fonctions Θ. Dans ces expressions par les fonctions Θ on a séparé la partie périodique et la partie proportionnelle à u. L'argument u étant positif, toutes les intégrales réunies dans le tableau auront des valeurs positives, pourvu qu'on ait a entre 0 et K', ce qu'on a supposé dans les recherches précédentes. Le même tableau donne la construction mécanique des seize intégrales au moyen du mouvement proposé, c'est à dire, de la rotation d'un corps qui n'est sollicité par aucune force accélératrice.

Tableau de valeurs des intégrales elliptiques de la troisième espèce et au caractère trigonométrique.

$$[a' = K' - a]$$

1. $$\int_0^u\frac{k^2\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\sin^2\operatorname{am}u\,du}{i[1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u]}$$
$$= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \mp\left(\psi+\frac{lu}{An}\right)$$

2. $$\int_0^u\frac{\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\,du}{i[\sin^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)]}$$
$$= \frac{d\log H(ia')}{da'}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \mp\left(\psi_1+\frac{lu}{An}-\pi_1\right)$$

3. $$\int_0^u\frac{\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\Delta^2\operatorname{am}u\,du}{i[\cos^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)\,\Delta^2\operatorname{am}u]}$$
$$= \frac{d\log H(ia')}{da'}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \mp\left(\psi_2+\frac{lu}{An}+\tfrac{1}{2}\pi\right)$$

4. $$\int_0^u\frac{k^2\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\cos^2\operatorname{am}u\,du}{i[\Delta^2\operatorname{am}u-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u]}$$
$$= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \mp\left(\psi_3+\frac{lu}{An}\right)$$

---

5. $$\int_0^u\frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\Delta^2\operatorname{am}u\,du}{i[1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u]}$$
$$= \frac{d\log H_1(ia)}{da}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \pm\left(\psi+\frac{hu}{ln}\right)$$

6. $$\int_0^u\frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\cos^2\operatorname{am}u\,du}{i[\sin^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)]}$$
$$= \frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \mp\left(\psi_1+\frac{hu}{ln}-\pi_1\right)$$

7. $$\int_0^u\frac{k'^2\operatorname{tg}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\sin^2\operatorname{am}u\,du}{i[\cos^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)\,\Delta^2\operatorname{am}u]}$$
$$= \frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \mp\left(\psi_2+\frac{hu}{ln}+\tfrac{1}{2}\pi\right)$$

8. $$\int_0^u\frac{k'^2\operatorname{tg}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\,du}{i[\Delta^2\operatorname{am}u-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u]}$$
$$= \frac{d\log H_1(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \pm\left(\psi_3+\frac{hu}{ln}\right)$$

$$9.\quad \int_0^u \frac{k^2 \sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia).\cos^2\operatorname{am}u\,du}{i[1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u]}$$

$$= \frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \pm\left(\psi + \frac{lu}{Bn}\right)$$

$$10.\quad \int_0^u \frac{\sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia).\Delta^2\operatorname{am}u\,du}{i[\sin^2\operatorname{am}u - \sin^2\operatorname{am}(ia)]}$$

$$= \frac{d\log H_1(ia')}{da'}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \mp\left(\psi_1 + \frac{lu}{Bn} - \pi_1\right)$$

$$11.\quad \int_0^u \frac{k'^2 \sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia)\,du}{i[\cos^2\operatorname{am}u - \sin^2\operatorname{am}(ia)\Delta^2\operatorname{am}u]}$$

$$= \frac{d\log H_1(ia')}{da'}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \mp\left(\psi_2 + \frac{lu}{Bn} + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$12.\quad \int_0^u \frac{k^2k'^2 \sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia).\sin^2\operatorname{am}u\,du}{i[\Delta^2\operatorname{am}u - k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u]}$$

$$= \frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \pm\left(\psi_3 + \frac{lu}{Bn}\right)$$

$$13.\quad \int_0^u \frac{i\cot\operatorname{g}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}$$

$$= \frac{d\log H(ia)}{da}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \pm\left(\psi + \frac{lu}{Cn}\right)$$

$$14.\quad \int_0^u \frac{i\cot\operatorname{g}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\sin^2\operatorname{am}u\,du}{\sin^2\operatorname{am}u - \sin^2\operatorname{am}(ia)}$$

$$= -\frac{d\log\Theta(ia')}{da'}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \pm\left(\psi_1 + \frac{lu}{Cn} - \pi_1\right)$$

$$15.\quad \int_0^u \frac{i\cot\operatorname{g}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\cos^2\operatorname{am}u\,du}{\cos^2\operatorname{am}u - \sin^2\operatorname{am}(ia)\Delta^2\operatorname{am}u}$$

$$= -\frac{d\log\Theta(ia')}{da'}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \pm\left(\psi_2 + \frac{lu}{Cn} + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$16.\quad \int_0^u \frac{i\cot\operatorname{g}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\Delta^2\operatorname{am}u\,du}{\Delta^2\operatorname{am}u - k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u}$$

$$= \frac{d\log H(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \pm\left(\psi_3 + \frac{lu}{Cn}\right).$$

Les trois axes principaux et l'axe instantané étant projetés sur le plan invariable, on a vu que les quantités

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},\qquad \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')},$$
$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)},\qquad \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')},$$

dans lesquelles on a supposé $a<K'$, sont égales aux angles desquels s'écartent les mouvements effectifs de ces projections de leurs mouvements moyens. Or, afin que ces écarts de part et d'autre puissent être regardés comme de véritables *oscillations* autour de droites déterminées, tournant uniformément autour du point fixe dans le plan invariable, il faut que les quantités précédentes ne surpassent jamais $\frac{1}{2}\pi$. C'est ce qui a effectivement lieu, comme on démontre de la manière suivante.

Et d'abord remarquons qu'il suffit de considérer une seule des quatre quantités précédentes, puisque les trois autres en dérivent, en changeant u en $u+K$ ou a en $K'-a$ ou en même temps u en $u+K$ et a en $K'-a$.

Les quatre quantités s'évanouissent pour $u=0$, $\pm K$, $\pm 2K$, etc.; elles ne changent pas de valeurs lorsque u augmente de $2K$; elles prennent des valeurs opposées, si l'on change u en $-u$ ou $2K-u$. C'est ce qui suit des formules

$$\Theta(u) = \Theta(-u) = \Theta(2K-u).$$

Il suffira donc, pour connaître toutes les valeurs des quatre quantités, de supposer u entre 0 et K.

Faisons

$$u = \frac{2Kx}{\pi},\qquad a = bK',$$

où $b<1$, on aura

$$\frac{\pi a}{2K} = \tfrac{1}{2}b.\frac{\pi K'}{K} = -\tfrac{1}{2}b\log q,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{1-q^m e^{-\frac{i\pi}{K}(u+ia)}}{1-q^m e^{\frac{i\pi}{K}(u-ia)}} = \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{m-b}\sin 2x}{1-q^{m-b}\cos 2x}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{1-q^m e^{\frac{i\pi}{K}(u+ia)}}{1-q^m e^{-\frac{i\pi}{K}(u-ia)}} = -\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{m+b}\sin 2x}{1-q^{m+b}\cos 2x}.$$

En donnant à m, dans ces deux équations, toutes les valeurs des nombres positifs entiers impairs, on aura, d'après le développement en produit infini de la fonction Θ (*Fund. N.* §. 61),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}\\
&= \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1-q^{1-b}\cos 2x}+\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{3-b}\sin 2x}{1-q^{3-b}\cos 2x}+\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{5-b}\sin 2x}{1-q^{5-b}\cos 2x}+\cdots\\
&-\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1+b}\sin 2x}{1-q^{1+b}\cos 2x}-\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{3+b}\sin 2x}{1-q^{3+b}\cos 2x}-\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{5+b}\sin 2x}{1-q^{5+b}\cos 2x}-\cdots
\end{aligned}$$

Comme on suppose que pour $u = 0$ ou $x = 0$ la quantité

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

s'évanouisse, on pourra aussi supposer, dans le développement précédent de cette quantité, que pour $x = 0$ chaque Arc tg s'évanouisse séparément et ne devienne pas un multiple de $\pm\pi$. Dans tous ces arcs compris sous la forme générale,

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{n}\sin 2x}{1-q^{n}\cos 2x},$$

les exposants n sont positifs puisqu'on a supposé $b<1$; on aura donc $q^n<1$ et, par suite, aucun de ces arcs ne saura atteindre la valeur $\frac{1}{2}\pi$, leurs *maxima*, abstraction faite du signe, étant

$$\operatorname{Arc\,sin} q^{n},$$

comme on voit aisément par la différentiation. Lorsque u est entre 0 et K ou x entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, comme il est permis de supposer d'après la remarque faite ci-dessus, tous ces arcs auront des valeurs positives. Si l'on ordonne le développement de manière que l'exposant n, dans les termes successifs, ait des valeurs toujours croissantes, ces termes décroîtront et, en même temps, leurs signes alterneront constamment, d'où suit, d'après un raisonnement connu, que l'on aura une valeur trop grande, lorsque le développement est continué jusqu'à un terme quelconque positif, et que l'on aura une valeur trop petite, lorsque le développement est continué jusqu'à un terme quelconque négatif. Par suite, en réunissant les deux premiers termes, on trouve que la valeur de la quantité logarithmique proposée est positive et comprise entre les deux quantités

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1-q^{1-b}\cos 2x},\qquad \operatorname{Arc\,tg}\frac{(q^{1-b}-q^{1+b})\sin 2x}{1-(q^{1-b}+q^{1+b})\cos 2x+q^{2}}.$$

On aura donc, lorsque a est entre 0 et K', la quantité proposée

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}<\operatorname{Arc\,sin} q^{1-b}<\tfrac{1}{2}\pi,$$

et la même quantité pourra toujours croître au delà de

$$\operatorname{Arc\,sin}\frac{q^{1-b}(1-q^{2b})}{1-q^{2}},$$

valeur ***maximum*** de la somme des deux premiers termes. De même, les trois autres quantités logarithmiques seront $<\operatorname{Arc\,sin} q^{1-b}$ ou $\operatorname{Arc\,sin} q^{b}$ et, par suite, $<\frac{1}{2}\pi$, c. q. f. d.

On aurait pu déduire la même conséquence d'une quelconque des formules (7.), (8.), (11.), (12.), du tableau présenté ci-dessus. En effet, ces formules donnent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} &= \frac{\pi u}{2K}-\frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}u-\int_0^u\frac{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,.\,du}{\Delta(\alpha,k')[1-\Delta^2(\alpha,k')\sin^2\operatorname{am}u]}\\
&= \frac{\pi u}{2K}-\frac{d\log H_1(ia)}{da}u-\int_0^u\frac{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha,k')\,.\sin^2\operatorname{am}u\,du}{1-\Delta^2(\alpha,k')\sin^2\operatorname{am}u}\\
\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} &= \frac{\pi u}{2K}-\frac{d\log H_1(ia')}{da'}u-\int_0^u\frac{k^2k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,.\sin^2\operatorname{am}u\,du}{\Delta(\alpha,k')[\Delta^2(\alpha,k')-k^2\sin^2\operatorname{am}u]}\\
&= \frac{\pi u}{2K}-\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}u-\int_0^u\frac{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha,k')\,.\,du}{\Delta^2(\alpha,k')-k^2\sin^2\operatorname{am}u},
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\alpha = \operatorname{am}(a,k'),$$

et où les deux quantités à retrancher de $\frac{\pi u}{2K}$ sont positives, lorsque u est positif.

La valeur $\frac{1}{2}\pi$ pourra être atteinte ou même surpassée par deux des quatre quantités logarithmiques, dans les cas où l'on a

$$a = K',\quad a' = 0\quad\text{ou}\quad a' = K',\quad a = 0.$$

C'est ce qui suit en remarquant que des formules données ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}+\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia'-u)}{H(ia'+u)} &= \frac{\pi u}{2K}\\
\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}+\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia')}{H_1(u+ia')} &= \frac{\pi u}{2K},
\end{aligned}$$

l'on tire, en faisant $a' = 0$, les valeurs

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+iK')}{\Theta(u-iK')} = \frac{\pi(K-u)}{2K}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-iK')}{\Theta_1(u+iK')} = \frac{\pi u}{2K},$$

lesquelles deviendront égales à $\frac{1}{2}\pi$, quand on fait respectivement $u=0$ ou $u=K$. Lorsque a devient 0 ou K', il ne sera donc plus possible de supposer, comme ci-dessus, que pour $u=0$ toutes les quatre quantités logarithmiques s'évanouissent.

Du développement précédemment donné on déduit les trois autres analogues, en mettant ou $\frac{1}{2}\pi - x$ au lieu de x, ou $1-b$ au lieu de b, ou faisant l'un et l'autre changement. On aura ainsi les quatre formules:

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$
$$= \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1-q^{1-b}\cos 2x} - \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1+b}\sin 2x}{1-q^{1+b}\cos 2x} + \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{3-b}\sin 2x}{1-q^{3-b}\cos 2x} - \cdots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}$$
$$= \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1+q^{1-b}\cos 2x} - \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1+b}\sin 2x}{1+q^{1+b}\cos 2x} + \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{3-b}\sin 2x}{1+q^{3-b}\cos 2x} - \cdots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}$$
$$= \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{b}\sin 2x}{1-q^{b}\cos 2x} - \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{2-b}\sin 2x}{1-q^{2-b}\cos 2x} + \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{2+b}\sin 2x}{1+q^{2+b}\cos 2x} - \cdots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}$$
$$= \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{b}\sin 2x}{1+q^{b}\cos 2x} - \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{2-b}\sin 2x}{1+q^{2-b}\cos 2x} + \operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{2+b}\sin 2x}{1+q^{2+b}\cos 2x} - \cdots,$$

auxquelles on joindra les suivantes:

$$-\frac{d\log\Theta(ia)}{da} = \frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^{1-b}}{1-q^{1-b}} - \frac{q^{1+b}}{1-q^{1+b}} + \frac{q^{3-b}}{1-q^{3-b}} - \cdots\right\}$$

$$\frac{d\log\Theta_1(ia)}{da} = \frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^{1-b}}{1+q^{1-b}} - \frac{q^{1+b}}{1+q^{1+b}} + \frac{q^{3-b}}{1+q^{3-b}} - \cdots\right\}$$

$$-\frac{d\log\Theta(ia')}{da'} = \frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^{b}}{1-q^{b}} - \frac{q^{2-b}}{1-q^{2-b}} + \frac{q^{2+b}}{1-q^{2-b}} - \frac{q^{4-b}}{1-q^{4-b}} + \cdots\right\}$$

$$\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'} = \frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^{b}}{1+q^{b}} - \frac{q^{2-b}}{1+q^{2-b}} + \frac{q^{2+b}}{1+q^{2+b}} - \frac{q^{4-b}}{1+q^{4-b}} + \cdots\right\}.$$

Les quatre dernières formules jouissent de la même propriété que les quatre précédentes, de donner alternativement des valeurs trop grandes et trop petites.

Ajoutons quelques remarques sur la nature et l'usage du tableau de formules présenté ci-dessus.

Si l'on réduit à la forme

$$f(1+n\sin^2\operatorname{am} u),$$

où f est un facteur constant, les dénominateurs des différentes fractions qui dans les formules du tableau se trouvent sous le signe d'intégration, on a les quatre valeurs suivantes de n ou du *paramètre* des intégrales de la troisième espèce:

1. $n = -k^2\sin^2\operatorname{am}(ia) = k^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(a,k') = \operatorname{cotg}^2\operatorname{am}(a',k')$;
2. $n = -\dfrac{1}{\sin^2\operatorname{am}(ia)} = \operatorname{cotg}^2\operatorname{am}(a,k') = k^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(a',k')$;
3. $n = -\dfrac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)} = -\Delta^2\operatorname{am}(a,k') = -\dfrac{k^2}{\Delta^2\operatorname{am}(a',k')}$;
4. $n = -\dfrac{k^2\cos^2\operatorname{am}(ia)}{\Delta^2\operatorname{am}(ia)} = -\dfrac{k^2}{\Delta^2\operatorname{am}(a,k')} = -\Delta^2\operatorname{am}(a',k')$.

Lorsque le paramètre n est une quantité quelconque positive, on peut lui donner indifféremment l'une ou l'autre des deux premières formes, et l'on peut lui donner indifféremment l'une ou l'autre des deux dernières formes, lorsque ce paramètre est une quantité négative entre $-k^2$ et -1. Dans l'un et l'autre cas, les deux formes d'un même paramètre se changent l'une dans l'autre, en mettant $K'-a$ au lieu de a, on pourra donc toujours faire, entre les deux formes du paramètre, un tel choix que l'on ait $a < \frac{1}{2}K'$. Or

$$\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}K',k') = \frac{1}{k}, \quad \Delta^2\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}K',k') = k,$$

donc, si l'on veut que la valeur de a soit comprise entre 0 et $\frac{1}{2}K'$ et, par suite, celle de b entre 0 et $\frac{1}{2}$, on aura cette règle que l'on doit poser

1. $n = -k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)$, lorsque n est entre 0 et k;
2. $n = -\dfrac{1}{\sin^2\operatorname{am}(ia)}$, lorsque n est entre k et ∞;
3. $n = -\dfrac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)}$, lorsque n est entre -1 et $-k$;
4. $n = -\dfrac{k^2\cos^2\operatorname{am}(ia)}{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}$, lorsque n est entre $-k$ et $-k^2$.

Soit proposé, à présent, de réduire aux fonctions Θ une intégrale au caractère trigonométrique,

$$\int \frac{H du}{1+n\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

le numérateur H sous le signe d'intégration étant une quelconque des quantités

$$1, \quad \sin^2\mathrm{am}\,u, \quad \cos^2\mathrm{am}\,u, \quad \Delta^2\mathrm{am}\,u,$$

multipliée par une constante; si d'après la règle énoncée l'on donne à la valeur de n la forme correspondante à l'intervalle dans lequel se trouve compris ce paramètre, on connaîtra par cette forme de n et par celle du numérateur H la formule du tableau à prendre et, dans cette formule, l'on aura toujours $a < \frac{1}{2}K'$.

Les intégrales comprises dans les formules (1.), (4.), (9.), (12.) du tableau s'évanouissent pour $k=0$ ou $q=0$. Pour tirer, dans ce cas, les valeurs des autres intégrales des formules du tableau, on remarquera que, K' et b passant pour ce même cas à l'infini, l'on a $\log q = -2K'$ et, par suite,

$$q^b = e^{-2a},$$

ce qui étant substitué dans les développements donnés ci-dessus, on aura pour $k=0$:

$$\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia'-u)}{H(ia'+u)} = \frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia')}{H_1(u+ia')} = u, \quad \frac{d\log H(ia')}{da'} = \frac{d\log H_1(ia')}{da'} = 1$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \frac{1}{2i}\log\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)} - u = \mathrm{Arctg}\,\frac{e^{-2a}\sin 2u}{1-e^{-2a}\cos 2u}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = -\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia)}{H_1(u+ia)} + u = \mathrm{Arctg}\,\frac{e^{-2a}\sin 2u}{1+e^{-2a}\cos 2u}$$

$$-\frac{d\log\Theta(ia')}{da'} = \frac{d\log H(ia)}{da} - 1 = \frac{2e^{-2a}}{1-e^{-2a}}$$

$$\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'} = -\frac{d\log H_1(ia)}{da} + 1 = \frac{2e^{-2a}}{1+e^{-2a}}.$$

Nous allons rendre complet le système des formules les plus propres pour ramener aux fonctions Θ les intégrales elliptiques de la troisième espèce, en joignant ci-dessous les formules relatives aux intégrales *au caractère logarithmique*, formules que l'on déduit aisément ou de celles établies dans le tableau précédent en mettant a au lieu de ia, ou directement des formules démontrées dans les *Fundamenta Nova*.

Tableau de valeurs des intégrales elliptiques de la troisième espèce et au caractère logarithmique.

1. $$\int_0^u \frac{k^2\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\,.\,\sin^2\mathrm{am}\,u\,du}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u} = \frac{d\log\Theta(a)}{da}\,u - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

2. $$\int_0^u \frac{k^2\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,.\,\cos^2\mathrm{am}\,u\,du}{\Delta\mathrm{am}\,a(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u)} = -\frac{d\log\Theta_1(a)}{da}\,u + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

3. $$\int_0^u \frac{\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,u\,du}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u} = -\frac{d\log H_1(a)}{da}\,u + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

4. $$\int_0^u \frac{\Delta\mathrm{am}\,a\,\mathrm{cotg}\,\mathrm{am}\,a\,.\,du}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u} = \frac{d\log H(a)}{da}\,u - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

5. $$\int_0^u \frac{\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\,.\,du}{\sin^2\mathrm{am}\,a-\sin^2\mathrm{am}\,u} = -\frac{d\log\Theta(a)}{da}\,u + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

6. $$\int_0^u \frac{\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,u\,du}{\Delta\mathrm{am}\,a(\sin^2\mathrm{am}\,a-\sin^2\mathrm{am}\,u)} = -\frac{d\log\Theta_1(a)}{da}\,u + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

7. $$\int_0^u \frac{\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\,.\,\cos^2\mathrm{am}\,u\,du}{\sin^2\mathrm{am}\,a-\sin^2\mathrm{am}\,u} = -\frac{d\log H_1(a)}{da}\,u + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

8. $$\int_0^u \frac{\Delta\mathrm{am}\,a\,\mathrm{cotg}\,\mathrm{am}\,a\,.\,\sin^2\mathrm{am}\,u\,du}{\sin^2\mathrm{am}\,a-\sin^2\mathrm{am}\,u} = -\frac{d\log H(a)}{da}\,u + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

5*. $$\int_u^K \frac{\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\,.\,du}{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,a} = \frac{d\log\Theta(a)}{da}(K-u) + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(u+a)}{H(u-a)}$$

6*. $$\int_u^K \frac{\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,u\,du}{\Delta\mathrm{am}\,a(\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,a)} = \frac{d\log\Theta_1(a)}{da}(K-u) + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(u+a)}{H(u-a)}$$

7*. $$\int_u^K \frac{\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\,.\,\cos^2\mathrm{am}\,u\,du}{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,a} = \frac{d\log H_1(a)}{da}(K-u) + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(u+a)}{H(u-a)}$$

8*. $$\int_u^K \frac{\Delta\mathrm{am}\,a\,\mathrm{cotg}\,\mathrm{am}\,a\,.\,\sin^2\mathrm{am}\,u\,du}{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,a} = \frac{d\log H(a)}{da}(K-u) + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(u+a)}{H(u-a)}.$$

Il paraît que l'on pourrait se passer entièrement d'une notation particulière des intégrales elliptiques de la troisième espèce. Leurs valeurs, en effet, exprimées par les fonctions Θ, sont assez simples pour entrer elles-mêmes dans le calcul et sans se cacher sous une notation laquelle ne saurait mettre en évidence ni leur nature logarithmique ni la liaison intime entre leur argument et celui du paramètre ni, enfin, leur décomposition en deux parties, l'une proportionnelle à leur argument et l'autre périodique.

Pour la même valeur de la fonction elliptique $\sin^2 \operatorname{am} u$ les intégrales elliptiques de la troisième espèce et au même argument u peuvent augmenter des multiples de *trois* quantités constantes et indépendantes entre elles. En effet, la fonction $\sin^2 \operatorname{am} u$ ne changera pas de valeur pendant que les intégrales elliptiques de la troisième espèce dont une valeur est

$$\frac{d \log \Theta(a)}{da} u - \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

ou

$$-\frac{d \log \Theta(ia)}{da} u - \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},$$

prendront toutes les valeurs comprises sous les formes générales

$$\frac{d \log \Theta(a)}{da} u - \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)} + m \frac{2K d \log \Theta(a)}{da} + m' i \left(\frac{2K' d \log \Theta(a)}{da} + \frac{\pi a}{K} \right) + m'' i \pi,$$

$$-\frac{d \log \Theta(ia)}{da} u - \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} + m \frac{2K d \log \Theta(ia)}{da} + m' i \left(\frac{2K' d \log \Theta(ia)}{da} - \frac{\pi a}{K} \right) + m'' \pi,$$

m, m', m'' désignant des nombres entiers positifs ou négatifs quelconques. C'est ce qui résulte de la multiplicité des valeurs du logarithme et de ce que la fonction $\Theta(u)$ ne change pas de valeur lorsque u est augmenté de $2K$ et qu'elle est multipliée par

$$-q^{-1} e^{-\frac{i\pi u}{K}}$$

lorsque u est augmenté de $2iK'$ (*Fund.* §. 61. (8.)).

Les expressions précédentes font connaître les trois constantes dont les multiples peuvent être ajoutés aux valeurs des intégrales proposées de la troisième espèce, et l'on voit que de ces constantes une est réelle et deux imaginaires ou deux réelles et une imaginaire selon que l'intégrale a le caractère logarithmique ou trigonométrique. Il suit de là, par un raisonnement connu, que telle est la variété des valeurs de ces intégrales que si l'on ramène chacune d'elles à la forme $P+iQ$, où P et Q sont des quantités réelles, l'une des quantités P et Q sera arbitraire ou pourra approcher indéfiniment d'une quantité donnée quelconque, les valeurs de l'autre formant une série arithmétique, et celle de ces quantités qui restera arbitraire, sera ou P ou Q, selon que l'intégrale a le caractère trigonométrique ou logarithmique *).

Le résultat précédent peut être étendu à l'intégrale plus générale

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}},$$

dans laquelle $a, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont des constantes réelles. Si l'on ramène chacune des valeurs dont cette intégrale est susceptible à la forme $P+iQ$, la quantité arbitraire sera ou P ou Q selon que la constante

$$\alpha+\beta a+\gamma a^2+\delta a^3+\varepsilon a^4$$

est négative ou positive.

Si ce n'est pas la fonction $\sin \operatorname{am} u$ mais l'argument u lui même qui est donné, l'indétermination des intégrales elliptiques de la troisième espèce ne peut naître que de la multiplicité des valeurs du logarithme qui entre dans l'expression de ces intégrales par les fonctions Θ. Ce dernier cas a lieu dans l'application que l'on vient de faire, de ces intégrales, au problème mécanique proposé, l'argument u y étant proportionnel au temps qui dans les problèmes de mécanique est considéré comme la variable donnée.

Remarquons, en finissant, que les fonctions elliptiques dont l'argument est proportionnel au temps, manifestent ici géométriquement, d'une manière

*) J'avais fait connaître autrefois aux élèves géomètres de l'université de Kœnigsberg ces affections fondamentales des intégrales elliptiques de la troisième espèce par lesquelles la nature de ces intégrales est rapprochée de celle des intégrales Abéliennes ou hyperelliptiques. C'est ce qui a engagé M. Rosenhain, l'un de ces élèves dont cette université se glorifie à juste titre, à soumettre, dans une thèse académique, les intégrales elliptiques de la troisième espèce au même traitement analytique que j'avais proposé pour les intégrales Abéliennes. Depuis, ce savant géomètre est parvenu à établir d'une manière explicite les fonctions qui dans la première classe des fonctions hyperelliptiques jouent le rôle des fonctions Θ, grande et belle découverte qui vient d'être couronnée par l'académie des sciences de Paris.

singulière, leurs deux périodes l'une réelle et l'autre imaginaire. Les axes des x' et y' étant ceux des axes principaux qui se couchent alternativement sur le plan invariable, on a vu qu'il y a une corrélation entre ces axes et une autre entre celui des z' et l'axe instantané, corrélations lesquelles correspondent l'une et l'autre à la période réelle des fonctions elliptiques. Mais il y a aussi des corrélations semblables des axes des x' et y' avec l'axe des z' et l'axe instantané et ces corrélations répondent à la période imaginaire des fonctions elliptiques ou à une augmentation du temps d'une constante imaginaire.

Berlin Hôtel de Londres le 17 Mars 1850.

AUSZUG EINES SCHREIBENS

VON

C. G. J. JACOBI AN E. HEINE

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 42. p. 35—40.

AUSZUG EINES SCHREIBENS VON C. G. J. JACOBI AN E. HEINE.

Gotha, den 10. Januar 1851.

Sie haben in Ihrem „Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme" im 29ten Bande des mathematischen Journals eine neue Lösung der von Lamé behandelten Aufgabe darauf gegründet, dass der Ausdruck

$$[\sin\eta + i\cos\eta\cos(\vartheta-\psi)]^n = X_n$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_1^2}+\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_2^2}+n(n+1)(\rho_1^2-\rho_2^2)X_n = 0$$

genügt, wenn

ψ eine willkürliche Constante bedeutet

und ferner

$$\varepsilon_1 = \int_b^{\rho_1}\frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)(c^2-\rho_1^2)}},$$

$$\varepsilon_2 = \int_0^{\rho_2}\frac{d\rho_2}{\sqrt{(b^2-\rho_2^2)(c^2-\rho_2^2)}}$$

ist, wo $b<c$ gegebene Constanten sind; endlich

$$\sin\eta = \frac{\rho_1\rho_2}{bc}$$

$$\cos\eta\cos\vartheta = \frac{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)(b^2-\rho_2^2)}}{b\sqrt{c^2-b^2}}$$

$$\cos\eta\sin\vartheta = \frac{\sqrt{(c^2-\rho_1^2)(c^2-\rho_2^2)}}{c\sqrt{c^2-b^2}}$$

ist.

Ich habe mir hier erlaubt, die in meiner »particulären Lösung« im 36ten Bande des Journals angewandte Bezeichnung beizubehalten und für Ihre Winkel ϑ und φ respective $\frac{1}{2}\pi-\eta$ und ϑ zu schreiben. Setzt man, wie dort

$$c\varepsilon_1 = K-v_1,\quad c\varepsilon_2 = v_2,$$

und bezieht die elliptischen Functionen auf den Modul

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 - b^2},$$

so ist

$$\begin{aligned} \rho_1 &= c\,\Delta \operatorname{am} v_1, \\ \rho_2 &= c\,\frac{k'}{i}\operatorname{tg}\operatorname{am}(iv_2) \\ &= c\,\Delta \operatorname{am}(K + iK' - iv_2); \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \sin\eta &= \frac{1}{i}\,\Delta \operatorname{am} v_1 \operatorname{tg}\operatorname{am}(iv_2), \\ \cos\eta\cos\vartheta &= \frac{\cos\operatorname{am} v_1}{\cos\operatorname{am}(iv_2)}, \\ \cos\eta\sin\vartheta &= \frac{\sin\operatorname{am} v_1\,\Delta\operatorname{am}(iv_2)}{\cos\operatorname{am}(iv_2)} \end{aligned}$$

folgt. Es wird ferner die partielle Differentialgleichung zu

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 X_n}{\partial v_2^2} + n(n+1)(\Delta^2 \operatorname{am} v_1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(iv_2))\,X_n = 0.$$

Es wird Ihnen vielleicht nicht ganz uninteressant sein, zu sehen, wie man mit Hülfe der elliptischen Additionsformeln durch einfache Betrachtungen von dieser Differentialgleichung mit Nothwendigkeit zu dem obigen Ausdruck von X_n gelangt, wenn man die alleinige Voraussetzung macht, dass X_n die n^{te} Potenz einer von n unabhängigen Function sein soll.

Ich führe zuerst an die Stelle von v_1 und v_2 als unabhängige Variabele die Gröfsen

$$v_1 + iv_2 = w', \qquad v_1 - iv_2 = w''$$

ein. Es wird dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_n}{\partial v_1^2} &= \quad \frac{\partial^2 X_n}{\partial w'^2} + \frac{\partial^2 X_n}{\partial w''^2} + 2\,\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\,\partial w''}, \\ \frac{\partial^2 X_n}{\partial v_2^2} &= -\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'^2} - \frac{\partial^2 X_n}{\partial w''^2} + 2\,\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\,\partial w''}, \end{aligned}$$

und daher die vorgelegte Differentialgleichung:

$$4\,\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\,\partial w''} + n(n+1)(\Delta^2 \operatorname{am} v_1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} iv_2)\,X_n = 0.$$

Es sei jetzt

$$X_n = U^{-n},$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n}{\partial w'} &= -nU^{-(n+1)}\frac{\partial U}{\partial w'}, \\ \frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\,\partial w''} &= n(n+1)U^{-(n+2)}\frac{\partial U}{\partial w'}\,\frac{\partial U}{\partial w''} - nU^{-(n+1)}\frac{\partial^2 U}{\partial w'\,\partial w''}. \end{aligned}$$

Wenn man den letzten Ausdruck in die Differentialgleichung substituirt, so sieht man, dass für den besondern Fall, wo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial w'\,\partial w''} = 0,$$

der Exponent n aus ihr gänzlich herausgeht, und dass umgekehrt, wenn es eine Lösung $X_n = U^{-n}$ geben soll, in welcher U von n unabhängig ist, die vorstehende Gleichung stattfinden, d. h. U die Form

$$U = U' + U''$$

haben muss, wo U' eine Function bloss von w', U'' eine Function bloss von w'' ist. Für diesen Fall verwandelt sich durch die Substitution

$$X_n = (U' + U'')^{-n},$$

in welcher U' eine Function bloss von w', U'' eine Function bloss von w'' ist, die partielle Differentialgleichung in die folgende:

$$4\,\frac{\partial U'}{\partial w'}\,\frac{\partial U''}{\partial w''} + (U' + U'')^2(\Delta^2 \operatorname{am} v_1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} iv_2) = 0;$$

aus welcher n ganz herausgegangen ist.

Es ist jetzt der wichtige Umstand zu bemerken, dass sich der Ausdruck

$$\Delta^2 \operatorname{am} v_1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(iv_2) = \frac{1}{c^2}(\rho_1^2 - \rho_2^2)$$

auf eine einfache und rationale Art durch die elliptischen Functionen darstellen läfst, deren Argumente $w' = v_1 + iv_2$ und $w'' = v_1 - iv_2$ sind. In der That hat man zufolge der in den *Fundamentis* § 18 gegebenen Additionsformeln (11.) und (33.)

$$\begin{aligned} N(1 + \Delta \operatorname{am} w'\,\Delta \operatorname{am} w'') &= \Delta^2 \operatorname{am} v_1 + \Delta^2 \operatorname{am}(iv_2) \\ N\cos(\operatorname{am} w' - \operatorname{am} w'') &= \cos^2 \operatorname{am}(iv_2) - \sin^2 \operatorname{am}(iv_2)\,\Delta^2 \operatorname{am} v_1, \end{aligned}$$

wo

$$N = 1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} v_1 \sin^2 \operatorname{am}(iv_2)$$

ist. Es folgt hieraus

$$\begin{aligned} N\,\Delta\,\mathrm{am}\,w'\,\Delta\,\mathrm{am}\,w'' &= \Delta^2\mathrm{am}\,v_1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,(iv_2)\cos^2\mathrm{am}\,v_1 \\ &= \Delta^2\mathrm{am}\,v_1\cos^2\mathrm{am}(iv_2) + k'^2\sin^2\mathrm{am}(iv_2), \end{aligned}$$

$$N[1+\cos(\mathrm{am}\,w'-\mathrm{am}\,w'')] = 2\cos^2\mathrm{am}(iv_2),$$

und es ist daher

$$\frac{2\Delta\,\mathrm{am}\,w'\,\Delta\,\mathrm{am}\,w''}{1+\cos(\mathrm{am}\,w'-\mathrm{am}\,w'')} = \Delta^2\mathrm{am}\,v_1 + k'^2\,\mathrm{tg}^2\,\mathrm{am}\,(iv_2).$$

Die zu erfüllende partielle Differentialgleichung wird daher

$$2\frac{\partial U'}{\partial w'}\frac{\partial U''}{\partial w''} + (U'+U'')^2.\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,w'\,\Delta\,\mathrm{am}\,w''}{1+\cos(\mathrm{am}\,w'-\mathrm{am}\,w'')} = 0.$$

Da U' eine Function von w' und U'' eine Function von w'' ist, so kann man auch U' als Function von $e^{i\,\mathrm{am}\,w'}$ und U'' als Function von $e^{i\,\mathrm{am}\,w''}$ betrachten. Setzt man

$$e^{i\,\mathrm{am}\,w'} = t', \qquad e^{i\,\mathrm{am}\,w''} = t'',$$

so wird

$$\frac{\partial U'}{\partial w'} = i\,\Delta\,\mathrm{am}\,w'.\,t'\,\frac{\partial U'}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial U''}{\partial w''} = i\,\Delta\,\mathrm{am}\,w''.\,t''\,\frac{\partial U''}{\partial t''},$$

$$1+\cos(\mathrm{am}\,w'-\mathrm{am}\,w'') = \frac{(t'+t'')^2}{2t't''},$$

und daher

$$\frac{\partial U'}{\partial t'}\frac{\partial U''}{\partial t''} = \left(\frac{U'+U''}{t'+t''}\right)^2.$$

Es folgt hieraus

$$t'\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}\cdot\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}} + t''\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}\cdot\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}} = U'+U'',$$

und wenn man hintereinander nach t' und t'' differentiirt,

$$\frac{\partial.t'\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'}\cdot\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''} + \frac{\partial.t''\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''}\cdot\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'} = 0.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn gleichzeitig

$$\frac{\partial.t'\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'} = \alpha\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'} \quad \text{und} \quad \frac{\partial.t''\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''} = -\alpha\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''}$$

ist, wo α eine Constante bedeutet. Die Integration giebt:

$$\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}} = \frac{\beta'}{t'-\alpha}, \qquad \sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}} = \frac{\beta''}{t''+\alpha},$$

$$U' = -\frac{\beta'\beta'}{t'-\alpha}+\gamma', \qquad U'' = -\frac{\beta''\beta''}{t''+\alpha}+\gamma'';$$

wo $\beta', \beta'', \gamma', \gamma''$ ebenfalls Constanten sind. Substituirt man diese Werthe von U' und U'' in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial U'}{\partial t'}\frac{\partial U''}{\partial t''} = \left(\frac{U'+U''}{t'+t''}\right)^2,$$

so erhält man, wenn man die Quadratwurzel auszieht und mit

$$(t'+t'')(t'-\alpha)(t''+\alpha)$$

multiplicirt:

$$\beta'\beta''(t'+t'') = -\beta''\beta''(t'-\alpha) - \beta'\beta'(t''+\alpha) + (\gamma'+\gamma'')(t'-\alpha)(t''+\alpha).$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn

$$\gamma'+\gamma'' = 0, \qquad \beta'\beta' = \beta''\beta'' = -\beta'\beta''$$

ist. Setzt man

$$\beta'\beta' = \beta''\beta'' = -\beta,$$

so wird

$$U = U'+U'' = \frac{\beta(t'+t'')}{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}.$$

Es wird daher

$$X_n = U^{-n} = \beta^{-n}\left\{\frac{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}{t'+t''}\right\}^n;$$

und dies ist die allgemeinste Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, in welcher X_n der n^{ten} Potenz einer von n selbst unabhängigen Function gleich wird.

Wenn α' und α'' die Amplituden zweier Argumente sind und σ' die Amplitude ihrer *Summe* bedeutet, so hat man, wenn

$$N = 1-k^2\sin^2\alpha'\sin^2\alpha''$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} Ne^{i\sigma'} = {} & \cos\alpha'\cos\alpha''-\sin\alpha'\sin\alpha''\,\Delta\alpha'\,\Delta\alpha'' \\ & + i(\sin\alpha'\cos\alpha''\,\Delta\alpha''+\sin\alpha''\cos\alpha'\,\Delta\alpha') \end{aligned}$$

oder

$$Ne^{i\sigma'} = (\cos\alpha''+i\sin\alpha''\,\Delta\alpha')(\cos\alpha'+i\sin\alpha'\,\Delta\alpha'').$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} N &= (\cos\alpha''+i\sin\alpha''\,\Delta\alpha')(\cos\alpha''-i\sin\alpha''\,\Delta\alpha') \\ &= (\cos\alpha'+i\sin\alpha'\,\Delta\alpha'')(\cos\alpha'-i\sin\alpha'\,\Delta\alpha''), \end{aligned}$$

und daher, wie ich in der oben genannten Abhandlung bemerkt habe,

$$e^{i\sigma'} = \frac{\cos\alpha' + i\sin\alpha'\Delta\alpha''}{\cos\alpha'' - i\sin\alpha''\Delta\alpha'} = \frac{\cos\alpha'' + i\sin\alpha''\Delta\alpha'}{\cos\alpha' - i\sin\alpha'\Delta\alpha''}.$$

Nennt man σ'' die Amplitude der *Differenz* der beiden Argumente, so erhält man aus dieser Formel durch Änderung von α'' in $-\alpha''$:

$$e^{i\sigma''} = \frac{\cos\alpha' + i\sin\alpha'\Delta\alpha''}{\cos\alpha'' + i\sin\alpha''\Delta\alpha'} = \frac{\cos\alpha'' - i\sin\alpha''\Delta\alpha'}{\cos\alpha' - i\sin\alpha'\Delta\alpha''}.$$

Nimmt man v_1 und iv_2 für die beiden Argumente, so wird

$$\alpha' = \operatorname{am} v_1, \quad \alpha'' = \operatorname{am}(iv_2), \quad \sigma' = \operatorname{am}(v_1 + iv_2) \quad \sigma'' = \operatorname{am}(v_1 - iv_2),$$
$$e^{i\sigma'} = t', \quad e^{i\sigma''} = t'';$$

ferner zufolge der zu Anfang gefundenen Formeln

$$\sin\gamma_1 = -i\Delta\alpha'\operatorname{tg}\alpha'',$$
$$\cos\gamma_1\cos\vartheta = \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha''},$$
$$\cos\gamma_1\sin\vartheta = \frac{\sin\alpha'\Delta\alpha''}{\cos\alpha''},$$

und daher auch

$$\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\alpha'\Delta\alpha''.$$

Man hat daher

$$t' = e^{i\operatorname{am}(v_1+iv_2)} = \frac{1-\sin\gamma_1}{\cos\gamma_1}e^{i\vartheta},$$
$$t'' = e^{i\operatorname{am}(v_1-iv_2)} = \frac{1+\sin\gamma_1}{\cos\gamma_1}e^{i\vartheta};$$

woraus auch

$$t'+t'' = \frac{2e^{i\vartheta}}{\cos\gamma_1}, \quad t'-t'' = -2\operatorname{tg}\gamma_1 e^{i\vartheta}, \quad t't'' = e^{2i\vartheta}$$

folgt. Es wird daher

$$\frac{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}{t'+t''} = \tfrac{1}{2}(\cos\gamma_1 e^{i\vartheta} - 2\alpha\sin\gamma_1 - \alpha^2\cos\gamma_1 e^{-i\vartheta}).$$

Setzt man

$$\alpha = ie^{i\psi},$$

so verwandelt sich diese Formel in die folgende,

$$\frac{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}{t'+t''} = -\alpha(\sin\gamma_1 + \tfrac{1}{2}i\cos\gamma_1 e^{i(\vartheta-\psi)} + \tfrac{1}{2}i\cos\gamma_1 e^{-i(\vartheta-\psi)})$$
$$= -ie^{i\psi}[\sin\gamma_1 + i\cos\gamma_1\cos(\vartheta-\psi)].$$

Es wird daher, abgesehen von einem constanten Factor, der allgemeinste Ausdruck von $\mathbf{X}_n$, welcher eine n^{te} Potenz einer von n unabhängigen Function ist,

$$[\sin\gamma_1 + i\cos\gamma_1\cos(\vartheta-\psi)]^n,$$

w. z. b. w.

NACHLASS.

ÜBER

DIE SUBSTITUTION

$$(ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+a''x^2+2b''x+c''=0$$

UND ÜBER

DIE REDUCTION DER ABELSCHEN INTEGRALE

ERSTER ORDNUNG IN DIE NORMALFORM

Borchardt Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55. p. 1—14.

ÜBER DIE SUBSTITUTION

$$(ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+a''x^2+2b''x+c''=0$$

UND ÜBER DIE REDUCTION DER ABELSCHEN INTEGRALE ERSTER ORDNUNG IN DIE NORMALFORM *).

(Aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi mitgetheilt durch F. Richelot.)

Die allgemeinste Relation zwischen zwei Variabeln, in welcher keine den zweiten Grad übersteigt, ist

$$(1.)\qquad \begin{aligned}&(ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+(a''x^2+2b''x+c'')\\ &=(ay^2+2a'y+a'')x^2+2(by^2+2b'y+b'')x+(cy^2+2c'y+c'')=0.\end{aligned}$$

Es folgen aus ihr die beiden Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases}(ax^2+2bx+c)y+a'x^2+2b'x+c'=\sqrt{(a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')},\\ (ay^2+2a'y+a'')x+by^2+2b'y+b''=\sqrt{(by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'')};\end{cases}$$

ferner hat man durch ihre Differentiation

$$[(ay^2+2a'y+a'')x+by^2+2b'y+b'']dx+[(ax^2+2bx+c)y+a'x^2+2b'x+c']dy=0,$$

---

*) Ich habe mir erlaubt, den Zusatz »und über die Reduction der Abelschen Integrale erster Ordnung in die Normalform« zu dem von Jacobi gegebenen Titel dieser Note zu machen, weil darin in der That das Princip zur Reduction eines beliebigen solchen Integrals, welches Jacobi in seinem Aufsatz Abelsches Integral erster Klasse nennt, enthalten ist. Andrerseits behalte ich mir vor, eine längst vollendete Arbeit von mir, worin diese vollständige Reduction in den 3 Fällen von einem, zwei oder drei Paaren imaginärer conjugirter Factoren des Ausdrucks geleistet wird, so bald als möglich bekannt zu machen. R.

und daher die Differentialgleichung

$$\text{(3.)}\quad \frac{dx}{\sqrt{(a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')}} + \frac{dy}{\sqrt{(by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'')}} = 0.$$

Ich werde die beiden Functionen unter den Wurzelzeichen mit

$$\text{(4.)}\quad \begin{cases} X = (a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c''), \\ Y = (by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'') \end{cases}$$

bezeichnen. Die Gleichungen (2.) zeigen, dass die zwischen den Gröfsen x und y aufgestellte Relation von der Beschaffenheit ist, *dass, wenn für einen reellen Werth von x auch $\sqrt{X}$ reell ist, zugleich y und $\sqrt{Y}$, und umgekehrt, wenn für einen reellen Werth von y auch $\sqrt{Y}$ reell ist, zugleich x und $\sqrt{X}$ reell werden.* Wenn man daher die Gleichung (1.) zur Transformation von Integralausdrücken $\int\frac{Pdx}{\sqrt{X}}$ benutzt, in welchen P eine rationale Function von x ist, so wird, wofern nur der vorgelegte Ausdruck während der Integration reell bleibt, immer auch der transformirte Ausdruck reell bleiben, so dass es keiner weiteren Discussion der Grenzen bedarf. Da in den Formeln (2.) in Bezug auf die Coefficienten a, b etc. keine Wurzelausziehung stattfindet, so kann man von diesen Formeln eine Anwendung auf die Zahlentheorie machen, indem man annimmt, dass a, b etc. ganze Zahlen sind. Man erhält dann den Satz,

dass, wenn für einen rationalen Werth von x der Ausdruck

$$(a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')$$

ein Quadrat wird, man immer auch die Function

$$(by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'')$$

durch einen rationalen Werth von y zu einem Quadrat machen kann.

In dem besondern Falle, wenn $a'=b'=c'=0$, erhält man hieraus den Satz:

Wenn eine Function 4ter Ordnung, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, zu einem Quadrat gemacht werden soll, so kann man für den Fall, wenn die Function in zwei rationale Factoren zerfällt ist, die Aufgabe immer auf den Fall zurückführen, in welchem die ungeraden Potenzen fehlen.

Man kann nämlich von den beiden Ausdrücken

$$-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')$$

und

$$(by^2+b'')^2-(ay^2+a'')(cy^2+c'')$$

den einen immer zu einem Quadrat machen, wenn man den andern zu einem Quadrat machen kann. Dieser Satz entspricht der Reduction des Integrals

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')}}$$

auf die Form

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(by^2+b'')^2-(ay^2+a'')(cy^2+c'')}},$$

welche Legendre durch die Substitution

$$y^2 = -\frac{a''x^2+2b''x+c''}{ax^2+2bx+c}$$

bewerkstelligt, die für den Fall, wo $a'=b'=c'=0$, aus (1.) folgt. Setzt man noch $b=b''=0$, so werden die beiden Ausdrücke, die auf einander reducirt werden können,

$$-(ax^2+c)(a''x^2+c'') \quad \text{und} \quad -(ay^2+a'')(cy^2+c'');$$

die Gleichungen (2.) zeigen nämlich, dass y und $\sqrt{Y}$ immer rational durch x und $\sqrt{X}$ ausgedrückt werden kann, und umgekehrt.

Euler hat nur den Fall betrachtet, wenn die Functionen X und Y dieselben Functionen respective von x und y sind, oder wenn man

$$a' = b, \quad a'' = c, \quad b'' = c'$$

hat, und hieraus seine berühmten Additionstheoreme für die elliptischen Integrale der drei Gattungen abgeleitet, ohne dass er dazu der Reductionen auf die jetzt übliche Form dieser Integrale bedurfte. Die allgemeinere Form hat Lagrange in den *Turiner Memoiren* von 1784 und 1785 aufgestellt. Da dort aber nicht aller Nutzen aus der Substitution (1.) gezogen ist, welchen man aus derselben ziehen kann, so will ich noch einige Bemerkungen über die Anwendungen, welche man von dieser Substitution machen kann, hinzufügen.

Da durch die Function X die drei Trinome

$$ax^2+2bx+c, \quad a'x^2+2b'x+c', \quad a''x^2+2b''x+c''$$

nicht vollkommen bestimmt sind, so kann man die willkürlich bleibenden Bestimmungen dazu benutzen, ***dass in Y die ungeraden Potenzen fortfallen,*** wie wenn man, was erlaubt ist,

$$a' = b' = c' = 0$$

setzt, oder auch dazu, ***dass der erste und letzte Term von Y gleichzeitig verschwindet.*** Setzt man im zweiten Falle $y = z^2$, so erhält das Resultat dieselbe Form, wie im ersten Falle. ***Die Vergleichung dieser beiden Resultate giebt die Transformation.*** Nimmt man an, dass in dem Ausdrucke von X bereits die ungeraden Potenzen fehlen, und schafft man den ersten und letzten Term fort, indem dagegen wieder die ungeraden Potenzen eingeführt werden, so erhält man die Transformation sogleich in der reducirten Form selbst. Euler hat diese beiden Wege zur Reduction des Integrals, die directe Fortschaffung der ungeraden Potenzen und die Fortschaffung des ersten und letzten Terms und nachherige Einführung des Quadrats einer neuen Variabeln, angegeben, und er hätte hierdurch auf die Transformation kommen müssen, wenn er sich nur die Aufgabe gestellt hätte. Dieselbe Idee ist für mich leitend gewesen, als ich die Transformation der Abelschen Integrale suchte. Denn durch eine Substitution von der Form

$$x = \frac{m+ny}{1+y}$$

kann man das Integral

$$\int \frac{(fx+g)dx}{\sqrt{\alpha x^6+\beta x^5+\gamma x^4+\delta x^3+\varepsilon x^2+\zeta x+\eta}},$$

wenn man die Function unter dem Wurzelzeichen in zwei Factoren der 4ten und 2ten Ordnung zerfällt, in die Form

$$\int \frac{(f'y+g')dy}{\sqrt{\alpha' y^4+\beta' y^2+\gamma'}\,\sqrt{ay^2+2by+c}}$$

bringen, und durch eine ähnliche Substitution, in der man aber die neuen Variabeln als Quadrate einführt,

$$x = \frac{p+qz^2}{1+z^2},$$

kann man dasselbe Integral in die Form

$$\int \frac{(f''z^2+g'')dz}{\sqrt{\alpha'' z^8+\beta'' z^6+\gamma'' z^4+\delta'' z^2+\varepsilon''}}$$

bringen. Gelingt es nun durch Substitution einer rationalen Function von t^2 für y^2 die Differentialausdrücke

$$\frac{(f'y+g')dy}{\sqrt{ay^2+2by+c}} - \frac{(f'y-g')dy}{\sqrt{ay^2-2by+c}},$$
$$\frac{(f'y+g')dy}{\sqrt{ay^2+2by+c}} + \frac{(f'y-g')dy}{\sqrt{ay^2-2by+c}}$$

so zu transformiren, dass die ungeraden Potenzen herausgehen, und dadurch die erste Form des reducirten Integrals in Integrale von der Form

$$\int \frac{(f'''t^2+g''')dt}{\sqrt{\alpha''' t^8+\beta''' t^6+\gamma''' t^4+\delta''' t^2+\varepsilon'''}}$$

zu verwandeln, so war ich gewiss, durch Vergleichung der beiden auf verschiedenem Wege erhaltenen Reductionen eine Transformation des Abelschen Integrals zu erhalten, ähnlich der Landenschen für die elliptischen Integrale.

Wenn man für den Zähler $f'y+g'$ die Gröfse $ay+b$ setzt, so wird der zu transformirende Ausdruck das Differential einer Gröfse

$$2t = \sqrt{ay^2+2by+c} - \sqrt{ay^2-2by+c},$$

und man sieht leicht, dass y^2 eine rationale Function von t^2 wird. Man erhält nämlich nach einander die Formeln

$$2t^2 = ay^2+c-\sqrt{(ay^2+c)^2-4b^2y^2},$$
$$t^4-(ay^2+c)t^2+b^2y^2 = 0$$

und daher

$$y^2 = t^2\cdot\frac{c-t^2}{b^2-at^2}.$$

Hieraus folgt aber sogleich

$$(5.)\qquad \frac{dy}{\sqrt{\alpha' y^4+\beta' y^2+\gamma'}}\left\{\frac{ay+b}{\sqrt{ay^2+2by+c}} - \frac{ay-b}{\sqrt{ay^2-2by+c}}\right\}$$
$$= \frac{2dt}{\sqrt{\alpha' y^4+\beta' y^2+\gamma'}} = \frac{2(b^2-at^2)dt}{\sqrt{\alpha' t^4(t^2-c)^2+\beta' t^2(t^2-c)(at^2-b^2)+\gamma'(at^2-b^2)^2}},$$

welches ein Ausdruck von der verlangten Form ist. Es ergiebt sich aber eine ähnliche Formel für jeden Zähler $fy+g$.

Es ist nämlich

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{ay^2-2by+c}} - \dfrac{1}{\sqrt{ay^2+2by+c}}}{\dfrac{1}{\sqrt{ay^2-2by+c}} + \dfrac{1}{\sqrt{ay^2+2by+c}}} = \frac{t^2}{by},$$

und daher

$$\begin{aligned}
2b\,dt &= -aby\,dy\left\{\frac{1}{\sqrt{ay^2-2by+c}}-\frac{1}{\sqrt{ay^2+2by+c}}\right\}\\
&\quad+b^2dy\left\{\frac{1}{\sqrt{ay^2+2by+c}}+\frac{1}{\sqrt{ay^2-2by+c}}\right\}\\
&=(b^2-at^2)\left\{\frac{dy}{\sqrt{ay^2+2by+c}}+\frac{dy}{\sqrt{ay^2-2by+c}}\right\}.
\end{aligned}$$

Man erhält hieraus

$$\frac{dy}{\sqrt{ay^2+2by+c}}+\frac{dy}{\sqrt{ay^2-2by+c}}=\frac{2b\,dt}{b^2-at^2},$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{ay^2-2by+c}}-\frac{y\,dy}{\sqrt{ay^2+2by+c}}=\frac{2t^2dt}{b^2-at^2}.$$

Bezeichnet man daher in (5.) die gerade Function der 8ten Ordnung von t, die sich unter dem Wurzelzeichen befindet, mit T, so dass

$$\sqrt{T}=(b^2-at^2)\sqrt{\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma'},$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{dy}{\sqrt{\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma'}}\left\{\frac{1}{\sqrt{ay^2+2by+c}}+\frac{1}{\sqrt{ay^2-2by+c}}\right\}=\frac{2b\,dt}{\sqrt{T}},$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma'}}\left\{\frac{1}{\sqrt{ay^2-2by+c}}-\frac{1}{\sqrt{ay^2+2by+c}}\right\}=\frac{2t^2dt}{\sqrt{T}}.$$

Setzt man

$$2t'=\sqrt{ay^2+2by+c}+\sqrt{ay^2-2by+c},$$

so erhält man ganz auf dieselbe Art

$$\frac{dy}{\sqrt{\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma'}}\left\{\frac{1}{\sqrt{ay^2-2by+c}}-\frac{1}{\sqrt{ay^2+2by+c}}\right\}=-\frac{2b\,dt'}{\sqrt{T'}},$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma'}}\left\{\frac{1}{\sqrt{ay^2+2by+c}}+\frac{1}{\sqrt{ay^2-2by+c}}\right\}=-\frac{2t'^2dt'}{\sqrt{T'}},$$

wo T' dieselbe Function von t' wie T von t ist.

Die Combination beider Substitutionen giebt

$$\frac{(f'y+g')dy}{\sqrt{\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma'}\sqrt{ay^2+2by+c}}=\frac{(bg'-f't^2)dt}{\sqrt{T}}+\frac{(bg'-f't'^2)dt'}{\sqrt{T'}}.$$

Der oben gefundene Differentialausdruck

$$\frac{(f''z^2+g'')dz}{\sqrt{Z}},$$

wo Z eine ganze Function 8ter Ordnung von z ist, wird auf diese Weise gleich dem Aggregat zweier Ausdrücke von ähnlicher Form gefunden,

$$\frac{(f''z^2-g'')dz}{\sqrt{Z}}=\frac{(bg'-f't^2)dt}{\sqrt{T}}+\frac{(bg'-f't'^2)dt'}{\sqrt{T'}},$$

und diese Vergleichung der auf doppeltem Wege erhaltenen Reductionen ist es, wodurch sich eine Transformation der Abelschen Integrale ergiebt, welche die den elliptischen Integralen zunächst stehende Gattung bilden.

Da die weitere Ausbildung der hier angegebenen Substitution bei der großen Complication des Gegenstandes eine anhaltende Beschäftigung erforderte, zu welcher mir selbst mehrere andere Arbeiten nicht die gehörige Muße gewährten, so hatte ich die glückliche Idee, dieselbe meinem Schüler und Freunde Herrn Prof. Richelot zu übergeben, unter dessen Händen sie dieselbe Vollendung erhielt, welche die Landensche Substitution durch Lagrange und Legendre erlangt hat. (S. Bd. XVI, p. 224 des Crelleschen Journals.)

Man kann die gefundene Transformation nach zwei Seiten auszudehnen unternehmen, indem man entweder für die nächst höheren Abelschen Integrale eine ähnliche Transformation, oder auch für dieselben Integrale noch andere von der gefundenen wesentlich verschiedene Transformationen sucht. Da aber bisher noch Niemand eine solche Ausdehnung geleistet hat, so habe ich, um dadurch vielleicht zu der Lösung dieser Probleme etwas beitragen zu können, den anfänglichen Weg, der zu der gefundenen Transformation geleitet, genauer angegeben.

Die Relation zwischen y und t^2, welche die verlangte Transformation bewerkstelligt hat, ist ebenfalls in der oben aufgestellten Grundgleichung enthalten, und kann daher auch nach der im Anfange angegebenen Methode aus ihr die Differentialgleichung abgeleitet werden. Es ist nämlich diese Relation vollständig entwickelt,

$$t^4-(ay^2+c)t^2+b^2y^2=(b^2-at^2)y^2+t^4-ct^2=0,$$

woraus

$$\frac{dy}{\sqrt{(ay^2+c)^2-4b^2y^2}}=\frac{d.t^2}{2\sqrt{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)}}.$$

Durch Auflösung der Gleichung folgt

$$2t^2 = ay^2+c-\sqrt{(ay^2+c)^2-4b^2y^2},$$
$$\frac{2b^2y^2}{t^2} = ay^2+c+\sqrt{(ay^2+c)^2-4b^2y^2},$$

und daher

$$2t = \sqrt{ay^2+2by+c}-\sqrt{ay^2-2by+c},$$
$$\frac{2by}{t} = \sqrt{ay^2+2by+c}+\sqrt{ay^2-2by+c}.$$

Es ist ferner

$$(b^2-at^2)y = \sqrt{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)}.$$

Multiplicirt man die vorstehende Differentialgleichung mit

$$y\sqrt{ay^2+2by+c}-\sqrt{ay^2-2by+c} = \frac{2t\sqrt{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)}}{b^2-at^2},$$
$$\sqrt{ay^2+2by+c}+\sqrt{ay^2-2by+c} = \frac{2b\sqrt{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)}}{t(b^2-at^2)},$$

so erhält man

$$y\,dy\left\{\frac{1}{\sqrt{ay^2-2by+c}}-\frac{1}{\sqrt{ay^2+2by+c}}\right\} = \frac{2t^2dt}{b^2-at^2},$$
$$dy\left\{\frac{1}{\sqrt{ay^2-2by+c}}+\frac{1}{\sqrt{ay^2+2by+c}}\right\} = \frac{2b\,dt}{b^2-at^2},$$

welches die zuvor gefundenen Gleichungen sind.

In dem 12ten Bande des Crelleschen Journals p. 182 ff. hat Herr Prof. Richelot das Abelsche Integral, wenn die Gröfse unter dem Wurzelzeichen lauter reelle lineare Factoren hat, auf die Form

$$\int\frac{(f+g\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}}$$

zurückgeführt, wo $\varkappa$, λ, μ kleiner als 1 sind. Ich will jetzt zeigen, wie man durch die von mir gegebene Substitution die übrigen Fälle erledigt.

Es sei das vorgelegte Integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}\cdot\frac{m+nx}{\sqrt{x^2-2\alpha x+\beta}},$$

wo $x^2-2\alpha x+\beta$ nicht in zwei reelle lineare Factoren zerlegt werden kann.

Dieser Fall umfafst alle übrigen, in welchen die 6 linearen Factoren nicht alle reell sind. Durch eine lineare Substitution

$$x = \frac{p+qy}{1+y},$$

wo p und q reell sind, kann man immer, wie Legendre gezeigt hat, den Differentialausdruck

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

in den einfacheren

$$\frac{dy}{\sqrt{f+gy^2}\sqrt{f'+g'y^2}}$$

transformiren, wo f, g, f', g' reell sind. Es wird dadurch das vorgelegte Integral die Form

$$\int\frac{dy}{\sqrt{f+gy^2}\sqrt{f'+g'y^2}}\cdot\frac{h+iy}{\sqrt{ay^2+2by+c}}$$

erhalten, wo $ay^2+2by+c$ ebenfalls nicht in reelle Factoren zerlegt werden kann oder

$$ac>b^2$$

ist, und wo ich, was erlaubt ist, a und c positiv annehme.

Durch die Substitution

$$2t = \sqrt{ay^2+2by+c}-\sqrt{ay^2-2by+c}$$
$$2t' = \sqrt{ay^2+2by+c}+\sqrt{ay^2-2by+c}$$

erhielten wir oben

$$\frac{(h+iy)\,dy}{\sqrt{f+gy^2}\sqrt{f'+g'y^2}\sqrt{ay^2+2by+c}} = \frac{(bh-it^2)\,dt}{\sqrt{T}}+\frac{(bh-it'^2)\,dt'}{\sqrt{T'}},$$

wo

$$\sqrt{T} = (b^2-at^2)\sqrt{f+gy^2}\sqrt{f'+g'y^2}$$

und T' dieselbe Function von t' wie T von t ist.

Dieselbe Substitution ergab

$$y^2 = \frac{ct^2-t^4}{b^2-at^2}, \tag{6.}$$

woraus

$$T = [fb^2+(gc-fa)t^2-gt^4][f'b^2+(g'c-f'a)t^2-g't^4].$$

Es sind aber die Gröfsen

$$(gc-fa)^2+4fgb^2 = (gc+fa)^2-4fg(ac-b^2),$$
$$(g'c-f'a)^2+4f'g'b^2 = (g'c+f'a)^2-4f'g'(ac-b^2)$$

immer positiv, sowohl für positive als negative Werthe von fg und $f'g'$, woraus folgt, dass in den transformirten Integralen die Gröfse T unter dem Wurzelzeichen das Product von vier reellen, in Bezug auf t^2 linearen Factoren ist. Es hat aber keine weitere Schwierigkeit, solche Integrale in die von Herrn Prof. Richelot als die kanonische gewählte Form zu bringen, wie man in der angeführten Abhandlung im 12ten Bande des Crelleschen Journals sehen kann, wo alle hierbei vorkommenden Fälle umständlich discutirt sind. Setzt man für t^2 eine neue Variable, so sieht man, dass das Abelsche Integral, in welchem die Function unter dem Wurzelzeichen auf die 6te Ordnung steigt, immer in andere transformirt werden kann, in denen der erste und letzte Term dieser Function fehlt und alle ihre linearen Factoren reell sind.

Herr Prof. Richelot hat die Reduction auf seine kanonische Form in dem Fall, wo die linearen Factoren der Function unter dem Wurzelzeichen alle reell sind, nicht bloss für die *erste Klasse* der Abelschen Integrale, d. h. diejenigen, in welchen die Function unter dem Wurzelzeichen auf den 6ten Grad steigt, bewerkstelligt, sondern gezeigt, dass in diesem Falle dasselbe Verfahren angewandt werden kann, auf welchen Grad auch die unter dem Wurzelzeichen befindliche Function steigt. Aber für die Abelschen Integrale, in welchen diese Function den 6ten Grad übersteigt, hat man noch keine Substitution aufgefunden, durch welche die Reduction in den übrigen Fällen, wo mehrere der linearen Factoren oder alle imaginär sind, geleistet werden könnte. Dass man bei der ersten Klasse der Abelschen Integrale durch eine Substitution die Reduction in Fällen bewirken konnte, welche sich einer andern entzogen, liess im Voraus erkennen, dass ihre Anwendung auf die bereits reducirte Form nicht wieder auf dieselbe reducirte Form zurück, sondern auf eine transformirte führen würde. So wird man bei den Untersuchungen über die höheren Klassen der Abelschen Integrale gewiss sein können, dass die Substitution, mittelst welcher man die Reduction in dem Falle, wo die Function unter dem Wurzelzeichen nicht lauter reelle Factoren hat, bewerkstelligen kann, zugleich eine Transformation geben wird.

Ich habe oben bei Anwendung der Substitution

$$2t = \sqrt{ay^2+2by+c} \mp \sqrt{ay^2-2by+c}$$

vorausgesetzt, dass die Function 6ten Grades unter dem Wurzelzeichen wenigstens *einen* trinomischen Factor hat, der sich nicht in reelle lineäre Factoren auflösen läfst. Wäre diese Bedingung nothwendig, so würde man das von mir vorgeschlagene Verfahren nicht auf das bereits reducirte Integral

$$\int \frac{(f+gx)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)}}$$

anwenden können, ohne dass die erhaltene Transformation auf imaginäre Argumente führt. Auch ist in der That Herr Prof. Richelot auf imaginäre Argumente gekommen *), und hat dieselben durch das Abelsche Additionstheorem

*) Man gelangt nur auf imaginäre Argumente, wenn man bei dieser Substitution Jacobi's von der Unterscheidung der Bedingungen

$$\varkappa\lambda \gtrless \mu$$

abstrahirt, und solche Werthe des Arguments y annimmt, wofür die beiden neuen Argumente t und t' in *einem* und demselben Intervall des Ausdrucks Ft liegen. Beide Rücksichten sind in dieser Jacobischen Umformung nicht beobachtet worden. Er scheint entweder nur beabsichtigt zu haben, zu zeigen, wie seine Formel auch im Fall von lauter reellen Factoren unter dem gegebenen Wurzelzeichen eine einmalige Reduction in reeller Form mit sich führe, oder hat diese Note später noch fortsetzen wollen. Da meine Transformation der Abelschen Integrale erster Ordnung nicht nur von jeder Bedingung zwischen den 3 Moduln unabhängig ist, sondern, was ihre Haupteigenschaft ist, bei ihrer weitern Anwendung nicht auf die gegebenen Integrale zurück-, sondern auf Integrale mit successive kleiner oder grösser werdenden Moduln führt, so ist sie von der obigen, welche schon bei der ersten Wiederholung auf das gegebene Integral zurückführt, wesentlich verschieden. Wenn man diese letztere in die Normalform überträgt, so erhält man für $\varkappa\lambda > \mu$ die Gleichungen

$$\frac{(1+\mu\xi^2)\,d\xi^2}{\sqrt{\Delta\xi}} = C\left\{\frac{(1-c^2x_1^2)\,dx_1}{\sqrt{Dx_1}} - \frac{(1-c^2x_2^2)\,dx_2}{\sqrt{Dx_2}}\right\},$$
$$\frac{(1-\mu^2\xi)\,d\xi^2}{\sqrt{\Delta\xi}} = L\left\{\frac{(1-l^2x_1^2)\,dx_1}{\sqrt{Dx_1}} - \frac{(1-l^2x_2^2)\,dx_2}{\sqrt{Dx_2}}\right\},$$

worin:

$$m = \frac{\varkappa\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)} - \lambda\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)}}{\varkappa\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)} + \lambda\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)}},$$

$$l^2 = m\,\frac{(\varkappa^2-\mu)\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)} + (\lambda^2-\mu)\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)}}{(\varkappa^2-\mu)\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)} - (\lambda^2-\mu)\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)}},$$

$$c^2 = m\,\frac{(\varkappa^2+\mu)\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)} + (\lambda^2+\mu)\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)}}{(\varkappa^2+\mu)\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)} - (\lambda^2+\mu)\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)}},$$

auf reelle Argumente zurückgeführt. (S. den 16[ten] Band des Crelleschen Journals p. 224.) Ich will aber zeigen, dass dies immer vermieden werden kann.

Es sei das Integral

$$J = \int \frac{(f+gx)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}}$$

vorgelegt, wo man $\varkappa$, λ, μ reell und positiv und $1 > \varkappa > \lambda > \mu$, ferner x zwischen 0 und 1 annimmt. Setzt man

$$x = \frac{y-1}{\mu(y+1)},$$

so wird

$$1-x = \frac{1+\mu-(1-\mu)y}{\mu(y+1)}, \qquad 1-\mu^2 x = \frac{1+\mu+(1-\mu)y}{y+1},$$

$$1-\varkappa^2 x = \frac{\varkappa^2+\mu-(\varkappa^2-\mu)y}{\mu(y+1)}, \qquad 1-\lambda^2 x = \frac{\lambda^2+\mu-(\lambda^2-\mu)y}{\mu(y+1)},$$

$$dx = \frac{2}{\mu}\cdot\frac{dy}{(y+1)^2},$$

und daher

$$J = h\int \frac{[(f\mu+g)y+(f\mu-g)]\,dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-\nu^2 y^2)(1+my)(1+ny)}},$$

$$(1-m^2)\,\frac{c\sqrt{(l^2-m^2)(1-l^2)}+l\sqrt{(c^2-m^2)(1-c^2)}}{c\sqrt{(c^2-m^2)(1-l^2)}+\sqrt{(l^2-m^2)(1-c^2)}} = 2C\sqrt{(c^2-m^2)(1-c^2)} = -2L\sqrt{(l^2-m^2)(1-l^2)},$$

$$\Delta\xi = (1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)(1-\lambda^2\xi^2)(1-\mu^2\xi^2), \qquad Dx = (1-x^2)(1-c^2x^2)(1-l^2x^2)(1-m^2x^2)$$

gesetzt ist, und die beiden Argumente x_1 und x_2 aus dem gegebenen Argument ξ vermittelst der Gleichungen:

$$\sqrt{\left(\frac{l^2+m}{c^2+m}\right)\left(\frac{1-c^2x_1^2}{1-l^2x_1^2}\right)} = \sqrt{\frac{\varkappa^2-\mu}{\varkappa^2+\mu}}\cdot\frac{\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2\xi^2)(\lambda^2-\mu^2\xi^2)}-\mu\sqrt{(1-\varkappa^2\xi^2)(1-\lambda^2\xi^2)}}{\sqrt{\varkappa^2\lambda^2-\mu^2}\,.\,(1-\mu\xi^2)},$$

$$\sqrt{\left(\frac{l^2+m}{c^2+m}\right)\left(\frac{1-c^2x_2^2}{1-l^2x_2^2}\right)} = \sqrt{\frac{\varkappa^2-\mu}{\varkappa^2+\mu}}\cdot\frac{\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2\xi^2)(\lambda^2-\mu^2\xi^2)}+\mu\sqrt{(1-\varkappa^2\xi^2)(1-\lambda^2\xi^2)}}{\sqrt{\varkappa^2\lambda^2-\mu^2}\,.\,(1-\mu\xi^2)}$$

abgeleitet sind.

In dieser Form kann man sich auch durch Rechnung davon überzeugen, dass die vorliegende Umformung von der oben bezeichneten reciproken Natur ist, und daher, weiter angewendet, auf das ursprünglich gegebene Integral zurückführt. So sind auch die drei Moduln c, l, m eben solche Functionen der drei Moduln $\varkappa$, λ, μ, wie umgekehrt diese es von jenen sind. — Gelegentlich werde ich diesen Gegenstand ausführlicher verfolgen. R.

wo

$$h = \frac{2}{(1+\mu)\sqrt{\varkappa^2+\mu}\sqrt{\lambda^2+\mu}}, \qquad \nu = \frac{1-\mu}{1+\mu}, \qquad m = \frac{\mu-\varkappa^2}{\mu+\varkappa^2}, \qquad n = \frac{\mu-\lambda^2}{\mu+\lambda^2},$$

und y zwischen 1 und $\frac{1}{\nu}$ ist. Die Substitution

$$2t = \sqrt{ay^2+2by+c} \mp \sqrt{ay^2-2by+c}$$

bleibt immer reell, wenn in den Intervallen, in welchen sich y während der Integration befindet, nicht bloss die Gröſse $ay^2+2by+c$, sondern auch die Gröſse $ay^2-2by+c$ positiv ist. Für den hier betrachteten Fall ist

$$ay^2+2by+c = (1+my)(1+ny)$$

und liegt y zwischen 1 und $\frac{1}{\nu}$. Es sind aber die absoluten Werthe von m und n kleiner als ν, und daher die vier Gröſsen $1\pm\frac{m}{\nu}$, $1\pm\frac{n}{\nu}$ immer positiv, so dass die Gröſsen $(1+my)(1+ny)$ und $(1-my)(1-ny)$, wenn y von 1 bis $\frac{1}{\nu}$ wächst, positiv bleiben, wodurch der geforderten Bedingung Genüge geschieht.

Ich setze jetzt zufolge der angewandten Substitution

$$\pm 2t = \sqrt{(1+my)(1+ny)} - \sqrt{(1-my)(1-ny)},$$

$$2t' = \sqrt{(1+my)(1+ny)} + \sqrt{(1-my)(1-ny)},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $m+n$ positiv oder negativ ist oder, was dasselbe ist, je nachdem $\varkappa\lambda < \mu$ oder $\varkappa\lambda > \mu$. Die Quadratwurzeln werde ich immer positiv nehmen.

Setzt man der Kürze halber

$$1-\varkappa^2 = \varkappa'^2, \qquad 1-\lambda^2 = \lambda'^2, \qquad 1-\mu^2 = \mu'^2,$$

$$\varkappa^2-\lambda^2 = \lambda''^2, \qquad \varkappa^2-\mu^2 = \mu''^2, \qquad \lambda^2-\mu^2 = \mu'''^2,$$

$$N = \sqrt{(\varkappa^2+\mu)(\lambda^2+\mu)},$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{(\varkappa\lambda-\mu)^2}}{N}, \qquad \alpha' = \frac{\varkappa\lambda+\mu}{N},$$

$$\beta = \frac{\sqrt{(\mu''\mu'''-\mu\varkappa'\lambda')^2}}{(1-\mu)N}, \qquad \beta' = \frac{\mu''\mu'''+\mu\varkappa'\lambda'}{(1-\mu)N},$$

so wird gleichzeitig

$$y = 1, \qquad t = \alpha, \qquad t' = \alpha',$$

und

$$y = \frac{1}{\nu}, \qquad t = \beta, \qquad t' = \beta'.$$

Es ist, wie man leicht zeigt,

$$\pm\tfrac{1}{2}(m+n) = \alpha\alpha', \qquad \beta\beta' = \frac{1}{\nu}\cdot\alpha\alpha',$$

ferner, da

$$\varkappa\lambda-\mu^2 > \mu''\mu''', \qquad 1-\varkappa\lambda > \varkappa'\lambda', \qquad \text{auch} \quad \alpha' > \beta'$$

und daher um so mehr

$$\frac{1}{\nu}\alpha' > \beta', \qquad \alpha < \beta.$$

Es folgen demnach α, β, β', α' der Gröfse nach auf einander; diese Gröfsen sind sämmtlich kleiner als 1, da $\alpha'<1$. Wenn y von 1 bis $\frac{1}{\nu}$ wächst, wird t von α bis β wachsen, t' von α' bis β' abnehmen.

Die angewandte Substitution giebt, wenn man in den obigen Formeln

$$4b^2 = (m+n)^2, \qquad a = mn, \qquad c = 1$$

setzt, die Gleichungen

$$y^2 = \frac{4(t^2-t^4)}{(m+n)^2-4mnt^2} = \frac{4(t'^2-t'^4)}{(m+n)^2-4mnt'^2},$$

$$(y^2-1)(1-\nu^2y^2) = \frac{\left(\frac{t^2}{\alpha^2}-1\right)\left(1-\frac{t^2}{\beta^2}\right)\left(1-\frac{t^2}{\beta'^2}\right)\left(1-\frac{t^2}{\alpha'^2}\right)}{\left(1-\frac{4mn}{(m+n)^2}t^2\right)^2},$$

$$= \frac{\left(\frac{t'^2}{\alpha^2}-1\right)\left(\frac{t'^2}{\beta^2}-1\right)\left(\frac{t'^2}{\beta'^2}-1\right)\left(1-\frac{t'^2}{\alpha'^2}\right)}{\left(1-\frac{4mnt'^2}{(m+n)^2}\right)^2},$$

wo

$$\frac{4mn}{(m+n)^2} < 1.$$

Die Factoren sind hier so geschrieben, dafs jeder einzelne während der Integration positiv bleibt, da, wenn y sich zwischen 1 und $\frac{1}{\nu}$ befindet, t in dem Intervalle von α bis β, t' in dem Intervalle von β' bis α' liegt.

Um die Differentialgleichungen zu erhalten, muss man die Zeichen so bestimmen, dass, wie es die Substitution mit sich bringt, t und y gleichzeitig

wachsen, aber t' abnimmt, wenn t wächst. Die obigen Differentialformeln für t und die ihnen ähnlichen für t' werden jetzt:

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{(1-my)(1-ny)}} - \frac{y\,dy}{\sqrt{(1+my)(1+ny)}} = \frac{\pm 2t^2\,dt}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-mnt^2},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1+my)(1+ny)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-my)(1-ny)}} = \frac{\pm(m+n)\,dt}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-mnt^2},$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{(1+my)(1+ny)}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{(1-my)(1-ny)}} = \frac{-2t'^2\,dt'}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-mnt'^2},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-my)(1-ny)}} - \frac{dy}{\sqrt{(1+my)(1+ny)}} = \frac{-(m+n)\,dt'}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-mnt'^2}.$$

Hieraus folgt, wenn $\varkappa\lambda<\mu$, also die oberen Zeichen gelten,

$$J = \int\frac{(f'-g't^2)\,dt}{\sqrt{F(t)}} + \int\frac{(f'-g't'^2)\,dt'}{\sqrt{F(t')}},$$

wenn $\varkappa\lambda>\mu$, also die unteren Zeichen gelten,

$$J = \int\frac{(f'+g't^2)\,dt}{\sqrt{F(t)}} - \int\frac{(f'+g't'^2)\,dt'}{\sqrt{F(t')}},$$

wo

$$f' = \frac{\pm(m+n)(f\mu-g)}{(1-\mu)N}, \qquad g' = \frac{2(f\mu+g)}{(1-\mu)N},$$

$$F(t) = (t^2-\alpha^2)(\beta^2-t^2)(\beta'^2-t^2)(\alpha'^2-t^2),$$

$$F(t') = (t'^2-\alpha^2)(t'^2-\beta^2)(t'^2-\beta'^2)(\alpha'^2-t'^2).$$

DARSTELLUNG

DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

DURCH POTENZREIHEN

Borchardt Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 54. p. 82—97.

DARSTELLUNG DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN DURCH POTENZREIHEN.

(Aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi mitgetheilt durch C. W. Borchardt.)

Die vier Reihen

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) &= 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots \\
\vartheta_1(x) &= 2\left[\sqrt[4]{q}\sin x-\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots\right] \\
\vartheta_2(x) &= 2\left[\sqrt[4]{q}\cos x+\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots\right] \\
\vartheta_3(x) &= 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots
\end{aligned}$$

bilden den Nenner und die Zähler der Brüche, durch welche ich in meinen *Fundam. Nov.* die elliptischen Functionen

$$\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi},\qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi},\qquad \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

dargestellt habe. Ich will im Folgenden diese vier Reihen nach Potenzen von x entwickeln.

Man hat hierzu ein einfaches Mittel durch die in die Augen springende Eigenschaft dieser Reihen, dass, wenn man

$$\log\sqrt[4]{q} = h$$

setzt, ihre erste nach h genommene Ableitung den entgegengesetzten Werth wie ihre zweite nach x genommene Ableitung hat. Hieraus folgt sogleich auch, dass ihre m^{te} nach h genommene Ableitung ihrer $(2m)^{\text{ten}}$ nach x genommenen Ableitung gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist, so dass man die nachstehenden Gleichungen hat:

$$\frac{\partial^{2m}\vartheta(x)}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \frac{\partial^m \vartheta(x)}{\partial h^m},$$
$$\frac{\partial^{2m+1}\vartheta_1(x)}{\partial x^{2m+1}} = (-1)^m \frac{\partial^{m+1}\vartheta_1(x)}{\partial x\,\partial h^m},$$
$$\frac{\partial^{2m}\vartheta_2(x)}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \frac{\partial^m \vartheta_2(x)}{\partial h^m},$$
$$\frac{\partial^{2m}\vartheta_3(x)}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \frac{\partial^m \vartheta_3(x)}{\partial h^m}.$$

Um die vorgelegten Entwickelungen zu erhalten, muss man die Werthe kennen, welche die nach x genommenen geraden Ableitungen von $\vartheta(x), \vartheta_2(x), \vartheta_3(x)$ und die ungeraden Ableitungen von $\vartheta_1(x)$ für $x=0$ annehmen. Wenn man statt dieser Ableitungen die Ausdrücke rechts setzt, so erlangt man den Vortheil, dass man den speciellen Werth 0, für welchen allein man ihre Werthe zu kennen braucht, vor den nach h angestellten Differentiationen in die Functionen

$$\vartheta(x), \qquad \frac{\partial\vartheta_1(x)}{\partial x}, \qquad \vartheta_2(x), \qquad \vartheta_3(x)$$

substituiren kann, und dann nur diese speciellen Werthe, welche sie für $x=0$ annehmen, nach h zu differentiiren hat. Nach in den ***Fund. Nov.*** gegebenen Formeln hat man

$$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \qquad \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \qquad \vartheta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

und es wurde dort der Werth, welchen $\frac{\partial\vartheta_1(x)}{\partial x}$ für $x=0$ annimmt, gleich dem Product der vorstehenden drei Werthe gefunden oder gleich

$$\sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}.$$

Wenn man daher nach den nach x ausgeführten Differentiationen $x=0$ setzt, so erhält man

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{2m}\vartheta_3(x)}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \dfrac{\partial^m\sqrt{\frac{2K}{\pi}}}{\partial h^m}, & \dfrac{\partial^{2m+1}\vartheta_1(x)}{\partial x^{2m+1}} = (-1)^m \dfrac{\partial^m\sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}}{\partial h^m}, \\ \dfrac{\partial^{2m}\vartheta_2(x)}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \dfrac{\partial^m\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}}{\partial h^m}, & \dfrac{\partial^{2m}\vartheta(x)}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \dfrac{\partial^m\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}}{\partial h^m}. \end{cases}$$

Hieraus folgt zufolge des Maclaurinschen Satzes, wenn man mit A, A_1, A_2 die drei Gröſsen

$$\frac{2K}{\pi} = A, \qquad \frac{2kK}{\pi} = A_1, \qquad \frac{2k'K}{\pi} = A_2$$

und mit Πn das Product $1.2.3\ldots n$ bezeichnet,

$$(2.)\quad \begin{cases} \vartheta_3(x) = \sqrt{A} - \dfrac{\partial\sqrt{A}}{\partial h}\dfrac{x^2}{\Pi 2} + \dfrac{\partial^2\sqrt{A}}{\partial h^2}\dfrac{x^4}{\Pi 4} - \dfrac{\partial^3\sqrt{A}}{\partial h^3}\dfrac{x^6}{\Pi 6} + \cdots \\ \vartheta_2(x) = \sqrt{A_1} - \dfrac{\partial\sqrt{A_1}}{\partial h}\dfrac{x^2}{\Pi 2} + \dfrac{\partial^2\sqrt{A_1}}{\partial h^2}\dfrac{x^4}{\Pi 4} - \dfrac{\partial^3\sqrt{A_1}}{\partial h^3}\dfrac{x^6}{\Pi 6} + \cdots \\ \vartheta(x) = \sqrt{A_2} - \dfrac{\partial\sqrt{A_2}}{\partial h}\dfrac{x^2}{\Pi 2} + \dfrac{\partial^2\sqrt{A_2}}{\partial h^2}\dfrac{x^4}{\Pi 4} - \dfrac{\partial^3\sqrt{A_2}}{\partial h^3}\dfrac{x^6}{\Pi 6} + \cdots \end{cases}$$

Ferner, wenn man

$$D = \sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}$$

setzt,

$$(3.)\quad \vartheta_1(x) = D.x - \frac{\partial D}{\partial h}\frac{x^3}{\Pi 3} + \frac{\partial^2 D}{\partial h^2}\frac{x^5}{\Pi 5} - \frac{\partial^3 D}{\partial h^3}\frac{x^7}{\Pi 7} + \cdots$$

Ich will jetzt die Formeln angeben, durch welche man die nach h genommenen Differentialquotienten am bequemsten nach einander findet.

Es sei

$$B = \frac{2k^2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2E}{\pi} - k'^2\frac{2K}{\pi},$$
$$B_1 = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{k}\frac{2E}{\pi},$$
$$B_2 = -\frac{2}{\pi}\frac{k^2}{k'}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\right),$$

so wird, wie ich in einer früheren Abhandlung in Crelle's Journal Bd. 36, p. 100 (p. 176 dieses Bandes) gezeigt habe,

$$\frac{\partial A}{\partial h} = 2A^2B, \qquad \frac{\partial B}{\partial h} = 2k^2k'^2A^3,$$
$$\frac{\partial A_1}{\partial h} = 2A_1^2B_1, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial h} = -\frac{2k'^2}{k^4}A_1^3,$$
$$\frac{\partial A_2}{\partial h} = 2A_2^2B_2, \qquad \frac{\partial B_2}{\partial h} = -\frac{2k^2}{k'^4}A_2^3,$$
$$\frac{\partial.k^2}{\partial h} = -\frac{\partial.k'^2}{\partial h} = 4k^2k'^2A^2 = 4k'^2A_1^2 = 4k^2A_2^2,$$

in welchen Formeln man $d\log q$ durch $4dh$ ersetzt hat*). Aus der letzten dieser Formeln folgt

$$\frac{\partial \log(2k^2k'^2)}{\partial h} = 4(1-2k^2)A^2, \qquad \frac{\partial\, 4(1-2k^2)}{\partial h} = -32k^2k'^2A^2,$$

$$\frac{\partial \log\left(-\frac{2k'^2}{k^4}\right)}{\partial h} = -4\left(\frac{2}{k^2}-1\right)A_1^2, \qquad -\frac{\partial\, 4\left(\frac{2}{k^2}-1\right)}{\partial h} = 32\frac{k'^2}{k^4}A_1^2,$$

$$\frac{\partial \log\left(-\frac{2k^2}{k'^4}\right)}{\partial h} = 4\left(\frac{2}{k'^2}-1\right)A_2^2, \qquad \frac{\partial\, 4\left(\frac{2}{k'^2}-1\right)}{\partial h} = 32\frac{k^2}{k'^4}A_2^2.$$

Es ergiebt sich hieraus, *dass, wenn man respective*

$$\begin{array}{ll|c|c}
\textit{mit } A \textit{ eine der Größen} & \frac{2K}{\pi}, & \frac{2kK}{\pi}, & \frac{2k'K}{\pi}, \\
\textit{mit } B \textit{ eine der Größen} & \frac{2E}{\pi}-k'^2\frac{2K}{\pi}, & \frac{1}{k}\cdot\frac{2E}{\pi}, & \frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\right), \\
\textit{mit } a \textit{ eine der Größen} & 4(1-2k^2), & -4\left(\frac{2}{k^2}-1\right), & 4\left(\frac{2}{k'^2}-1\right), \\
\textit{mit } b \textit{ eine der Größen} & 2k^2k'^2, & \frac{-2k'^2}{k^4}, & \frac{-2k^2}{k'^4}
\end{array}$$

bezeichnet, wo immer $a^2 = 16(1-2b)$, *zwischen den Größen*

$$A,\ B,\ a,\ b,\ h$$

die Differentialgleichungen

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial h} = 2A^2B, & \dfrac{\partial a}{\partial h} = -16bA^2, \\ \dfrac{\partial B}{\partial h} = bA^3, & \dfrac{\partial b}{\partial h} = abA^2 \end{cases}$$

stattfinden.

Der vorstehende Satz gewährt die große Erleichterung, dass man die nach h genommenen Ableitungen der *drei* Functionen

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\quad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},\quad \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

*) Die hier gebrauchte Bezeichnung unterscheidet sich von der in der angeführten früheren Abhandlung angewandten überdies noch dadurch, dass die Größe, die hier B_2 heißt, dort $= -B_2$ gesetzt war. Diese Aenderung ist der Symmetrie der Formeln wegen nothwendig.

welche zu suchen sind, durch dieselben Formeln ausdrücken kann. Hat man nämlich den m^{ten} nach $h = \log\sqrt[4]{q}$ genommenen Differentialquotienten der ersten dieser Functionen durch

$$A = \frac{2K}{\pi}, \quad B = \frac{2E}{\pi} - k'^2\frac{2K}{\pi}, \quad a = 4(k'^2-k^2), \quad b = 2k^2k'^2$$

ausgedrückt, so erhält man denselben Differentialquotienten von $\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$, wenn man in diesem Ausdrucke die Werthe

$$A = \frac{2kK}{\pi}, \quad B = \frac{1}{k}\cdot\frac{2E}{\pi}, \quad a = -\frac{4(1+k'^2)}{k^2}, \quad b = -\frac{2k'^2}{k^4}$$

substituirt, und denselben Differentialquotienten von $\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$, wenn man wieder in dem nämlichen Ausdrucke für A, B, a, b die Werthe

$$A = \frac{2k'K}{\pi}, \quad B = \frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\right), \quad a = \frac{4(1+k^2)}{k'^2}, \quad b = -\frac{2k^2}{k'^4}$$

setzt. Man wird daher auch die vorgelegten Entwickelungen der drei Functionen $\vartheta_3(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta(x)$ durch dieselben Formeln darstellen können, wenn man die Entwickelungscoefficienten durch die Größen A, B, a, b darstellt, und dann diesen Größen die drei verschiedenen im obigen Satze angegebenen Bedeutungen giebt. Man hat ferner

$$D = \sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b}\cdot\sqrt{A^3},$$

wenn man den Größen A und b ihre erste Bedeutung beilegt; und wenn man in dieser Formel den Größen A und b ihre beiden andern Bedeutungen giebt, erhält man keine andere Veränderung, als daſs der Ausdruck mit einer 8^{ten} Wurzel der Einheit multiplicirt wird. Man wird daher den nach h genommenen Differentialquotienten dieses Ausdrucks und daher auch den Entwickelungscoefficienten von $\vartheta_1(x)$ drei verschiedene Formen geben können, wenn man sie durch die Größen A, B, a, b ausdrückt und dann diesen Größen ihre dreierlei Bedeutung beilegt, wobei man nur die zweite und dritte Form, welche man so erhält, noch durch $\sqrt[4]{-1}$ zu dividiren hat.

Man bildet die verschiedenen Differentialquotienten von $\sqrt{A}$ nach einander mittelst der sich aus (4.) ergebenden Formel

$$(5.)\qquad \frac{\partial H}{\partial h} = 2A^2B\frac{\partial H}{\partial A} + bA^3\frac{\partial H}{\partial B} + abA^2\frac{\partial H}{\partial b} - 16bA^2\frac{\partial H}{\partial a},$$

in welcher H eine beliebige Function von A, B, a, b bedeutet. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt sich

$$A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial . A^{\frac{1}{2}}}{\partial h} = A^{\frac{3}{2}} B,$$

$$\frac{\partial^2 . A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^2} = 3A^{\frac{5}{2}} B^2 + bA^{\frac{9}{2}},$$

$$\frac{\partial^3 . A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^3} = 15A^{\frac{7}{2}} B^3 + 15\,bA^{\frac{11}{2}} B + abA^{\frac{13}{2}},$$

$$\frac{\partial^4 . A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^4} = 105A^{\frac{9}{2}} B^4 + 210\,bA^{\frac{13}{2}} B^2 + 28abA^{\frac{15}{2}} B + (a^2b - b^2)A^{\frac{17}{2}},$$

$$\frac{\partial^5 . A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^5} = 945A^{\frac{11}{2}} B^5 + 3150\,bA^{\frac{15}{2}} B^3 + 630abA^{\frac{17}{2}} B^2 + 45(a^2b - b^2)A^{\frac{19}{2}} B + (a^3b - 6ab^2)A^{\frac{21}{2}}$$

u. s. w. u. s. w.

Man sieht hier, dass abgesehen von den Zahlenfactoren die Coefficienten in jedem Differentialquotienten von Anfang an dieselben werden, nämlich, wenn man dem fehlenden Gliede den Coefficienten Null giebt, die folgenden:

$$1,\quad 0,\quad b,\quad ab,\quad a^2b - b^2,\quad a^3b - 6ab^2,\quad \text{etc.}$$

Man sieht aber aus der angegebenen Art der Ableitung keinen Grund hierfür. Ich will daher und um ein Beispiel für diese Ableitung zu geben die Coefficienten der drei letzten Terme in dem Ausdrucke von $\frac{\partial^6 . A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^6}$ aufsuchen. Bezeichnet man den zuletzt angegebenen 5^{ten} Differentialquotienten von $A^{\frac{1}{2}}$ mit H, so hat man zufolge (5.) die vier Ausdrücke

$$2A^2 B \frac{\partial H}{\partial A},\quad bA^3 \frac{\partial H}{\partial B},\quad abA^3 \frac{\partial H}{\partial b},\quad -16\,bA^2 \frac{\partial H}{\partial a}$$

zu bilden und dieselben zu addiren. Diese vier Ausdrücke ergeben respective die Terme

$$\begin{array}{lll}
855(a^2b - b^2)A^{\frac{21}{2}} B^2 + (21a^3b - 126ab^2)A^{\frac{23}{2}} B, & & \\
9450b^2 A^{\frac{21}{2}} B^2 + & 1260ab^2 A^{\frac{23}{2}} B + & 45(a^2b^2 - b^3)A^{\frac{25}{2}}, \\
630a^2bA^{\frac{21}{2}} B^2 + (45a^3b - & 90ab^2)A^{\frac{23}{2}} B + & (a^4b - 12a^2b^2)A^{\frac{25}{2}}, \\
-10080b^2 A^{\frac{21}{2}} B^2 & -1440ab^2 A^{\frac{23}{2}} B + & (-48a^2b^2 + 96b^3)A^{\frac{25}{2}},
\end{array}$$

und deren Summe

$$1485(a^2b - b^2)A^{\frac{21}{2}} B^2 + 66(a^3b - 6ab^2)A^{\frac{23}{2}} B + (a^4b - 15a^2b^2 + 51b^3)A^{\frac{25}{2}},$$

wo die beiden ersten Terme wieder die Factoren $a^2b - b^2$ und $a^3b - 6ab^2$ haben.

Man multiplicire jetzt $A^{\frac{1}{2}}$ und die angegebenen Werthe seiner Differentialquotienten nach einander mit den Gröfsen

$$1,\quad \frac{-x^2}{\Pi 2},\quad \frac{x^4}{\Pi 4},\quad \frac{-x^6}{\Pi 6},\quad \frac{x^8}{\Pi 8},\quad \frac{-x^{10}}{\Pi 10}$$

oder, was dasselbe ist, mit den Gröfsen

$$1,\quad -\frac{x^2}{2},\quad \frac{1}{\Pi 2} \cdot \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{1.3},\quad -\frac{1}{\Pi 3} \cdot \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3}{1.3.5},\quad \frac{1}{\Pi 4} \cdot \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^4}{1.3.5.7},\quad -\frac{1}{\Pi 5} \cdot \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^5}{1.3.5.7.9}$$

und addire die erhaltenen Producte, so bekommt man zufolge (2.) die Entwickelungen von $\vartheta_3(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta(x)$, je nachdem man den Gröfsen A, B, a, b die verschiedenen angegebenen Bedeutungen giebt. Ordnet man die erhaltene Summe nach den Functionen von a und b, in welche die einzelnen Terme multiplicirt sind, so erhält man:

$$A^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{AB.x^2}{2} + \frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{\Pi 3}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^3 + \frac{1}{\Pi 4}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^4 - \cdots\right]$$
$$+ \frac{bA^{\frac{9}{2}}.x^4}{\Pi 4}\left[1 - \frac{AB.x^2}{2} + \frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{\Pi 3}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$- \frac{abA^{\frac{13}{2}}.x^6}{\Pi 6}\left[1 - \frac{AB.x^2}{2} + \frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2 - \cdots\right]$$
$$+ \frac{(a^2b - b^2)A^{\frac{17}{2}}.x^8}{\Pi 8}\left[1 - \frac{AB.x^2}{2} + \frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2 - \cdots\right]$$
$$- \frac{(a^3b - 6ab^2)A^{\frac{21}{2}}.x^{10}}{\Pi 10}\left[1 - \frac{AB.x^2}{2} + \cdots\right]$$
$$+ \frac{(a^4b - 15a^2b^2 + 51b^3)A^{\frac{25}{2}}.x^{12}}{\Pi 12}\left[1 - \cdots\right] \text{ u. s. w.}$$

Dieser Ausdruck läfst noch ein anderes Gesetz erkennen, wonach man auch die Zahlenfactoren allgemein angeben kann, mit welchen dieselben ganzen rationalen Functionen von a und b in den verschiedenen Differentialquotienten von $A^{\frac{1}{2}}$ zu multipliciren sind. Die in Klammern eingeschlossenen Reihen werden nämlich, so weit man aus der hier geführten Induction ersehen kann, dieselben und der aus der Entwickelung der Exponentialfunction

$$e^{-\frac{1}{3}ABx^2}$$

sich ergebenden Reihe gleich. Bezeichnet man daher mit $\vartheta(x)$ eine der drei Functionen $\vartheta_3(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta(x)$, je nachdem man den Gröfsen A, B, a, b ihre dreierlei Bedeutungen giebt, so erhält man zufolge der angestellten Induction

$$(6.)\qquad \vartheta(x) = \sqrt{A}\, e^{-\frac{1}{3}ABx^2}\left(1+r_2\frac{A^4x^4}{\Pi 4}-r_3\frac{A^6x^6}{\Pi 6}+r_4\frac{A^8x^8}{\Pi 8}-\cdots\right),$$

wo

$$(7.)\quad r_2=b,\quad r_3=ab,\quad r_4=a^2b-b^2,\quad r_5=a^3b-6ab^2,\quad r_6=a^4b-15a^2b^2+51b^3, \text{ etc.}$$

Man sieht aus diesen Ausdrücken, *dass die Functionen r_i rationale ganze Functionen von a und b sind, und zwar, wenn man der Gröfse a eine, der Gröfse b zwei Dimensionen beilegt, homogene Functionen der i^{ten} Dimension.*

Vergleicht man die Ausdrücke (6.) von $\vartheta(x)$ mit dem Ausdrucke (2.),

$$\vartheta(x) = \sqrt{A}-\frac{\partial\sqrt{A}}{\partial h}\cdot\frac{x^2}{\Pi 2}+\frac{\partial^2\sqrt{A}}{\partial h^2}\cdot\frac{x^4}{\Pi 4}-\frac{\partial^3\sqrt{A}}{\partial h^3}\cdot\frac{x^6}{\Pi 6}+\cdots,$$

so erhält man

$$(8.)\quad \frac{\partial^m\sqrt{A}}{\partial h^m} = \sqrt{A^{2m+1}}\,[(m)_0B^m+(m)_2r_2B^{m-2}A^2+(m)_3r_3B^{m-3}A^3+\cdots+(m)_mr_mA^m],$$

wo der Zahlenfactor

$$(9.)\quad (m)_i = \frac{\Pi(2m)}{2^{m-i}\Pi(m-i)\Pi(2i)} = (2i+1)(2i+3)\dots(2m-1)\frac{m.m-1\dots m-i+1}{1.2.3\dots i}$$

gefunden wird.

Ich will jetzt die Bedingungen untersuchen, welche stattfinden müssen, damit die beiden im Vorigen durch Induction gefundenen Gesetze sich erhalten. Diese Gesetze bestehen darin, dass, wenn man den Ausdruck (8.) noch einmal nach h differentiirt, in dem neuen Ausdrucke die algebraische Function, welche in $A^{\frac{2m+3}{2}+i}$ multiplicirt ist, unverändert $=r_i$ bleiben, und der Werth des Zahlenfactors aus $(m)_i$ durch Aenderung von m in $m+1$ erhalten werden muss. Zufolge der Formel (5.) hat man

$$\frac{\partial H}{\partial h} = 2A^2B\frac{\partial H}{\partial A}+bA^3\frac{\partial H}{\partial B}+abA^2\frac{\partial H}{\partial b}-16bA^2\frac{\partial H}{\partial a}.$$

Der Term

$$A^{\frac{2m+3}{2}+i}B^{m+1-i}$$

entsteht zufolge dieser Formel aus den drei Termen

$$(m)_ir_iA^{\frac{2m+1}{2}+i}B^{m-i},$$
$$(m)_{i-2}r_{i-2}A^{\frac{2m-3}{2}+i}B^{m-i+2},$$
$$(m)_{i-1}r_{i-1}A^{\frac{2m-1}{2}+i}B^{m-i+1}$$

und erhält den Factor

$$(2m+2i+1)(m)_ir_i+(m-i+2)(m)_{i-2}r_{i-2}b+(m)_{i-1}\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}ab-16(m)_{i-1}\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}b.$$

Dieser Ausdruck muss $=(m+1)_ir_i$ werden. Es muss daher

$$(10.)\qquad [(2m+2i+1)(m)_i-(m+1)_i]r_i+(m-i+2)(m)_{i-2}br_{i-2} \\ +(m)_{i-1}ab\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}-16(m)_{i-1}b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a} = 0$$

sein. Diese Gleichung, welche eine Relation zwischen den Functionen r_i, r_{i-1}, r_{i-2} ausdrückt, muss von der Zahl m unabhängig sein, wenn diese Functionen selbst von m unabhängig sein sollen. In der That hat man

$$(m+1)_i = \frac{(m+1)(2m+1)}{m-i+1}(m)_i,\qquad (m)_{i-1} = \frac{i(2i-1)}{m-i+1}(m)_i,$$

also

$$(m+1)_i-(2m+2i+1)(m)_i = \frac{i(2i-1)}{m-i+1}(m)_i = (m)_{i-1},$$

überdies der zweiten dieser drei Gleichungen analog

$$(m-i+2)(m)_{i-2} = (i-1)(2i-3)(m)_{i-1}.$$

Die Gleichung (10.) verwandelt sich daher nach Division durch $(m)_{i-1}$ in die folgende:

$$(11.)\qquad r_i-(i-1)(2i-3)br_{i-2} = b\left[a\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}-16\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}\right],$$

in welcher m nicht mehr vorkommt. Wenn für einen gegebenen Werth von m in dem für $\frac{\partial^m\sqrt{A}}{\partial h^m}$ gefundenen Ausdruck (8.) die Zahlenfactoren $(m)_i$ die ihnen durch die Formel (9.) gegebene Bedeutung haben, und die Functionen $r_0, r_1, r_2, r_3 \dots r_m$ so beschaffen sind, dass zwischen je drei auf einander folgenden die Gleichung (11.) stattfindet, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass die $m+1$ ersten Glieder von $\frac{\partial^{m+1}\sqrt{A}}{\partial h^{m+1}}$ die folgenden sein werden:

$$\sqrt{A^{2m+3}}[(m+1)_0 B^{m+1}+(m+1)_2 r_2 B^{m-1}A^2+(m+1)_3 r_3 B^{m-2}A^3+\cdots+(m+1)_m r_m BA^m].$$

Damit daher das durch die Formel (8.) gegebene Gesetz auch für den nächsten Werth von m gelte und daher allgemein gültig sei, braucht nur gezeigt zu werden, dass der in dem Ausdrucke von $\frac{\partial^{m+1}\sqrt{A}}{\partial h^{m+1}}$ noch hinzukommende eine Term

$$\sqrt{A^{2m+3}}.(m+1)_{m+1} r_{m+1} A^{m+1} = \sqrt{A^{2m+3}}.r_{m+1}.A^{m+1}$$

dasselbe Gesetz wie die übrigen befolge, oder dass

$$r_{m+1} = m(2m-1)br_{m-1}+b\left[a\frac{\partial r_m}{\partial b}-16\frac{\partial r_m}{\partial a}\right].$$

Dieser Werth von r_{m+1} ergiebt sich aber vermöge der Formel (5.) durch die Differentiation von (8.). Es sind daher die durch die Induction gefundenen Resultate bewiesen.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren erhält man nach und nach die nach h genommenen Differentialquotienten von

$$D = \sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b}\sqrt{A^3}.$$

Setzt man

$$\alpha = k'^2-k^2 = \tfrac{1}{4}a,\quad \beta = \sqrt{kk'} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b},$$

so wird die Formel (5.)

$$\frac{\partial H}{\partial h} = 2A^2B\frac{\partial H}{\partial A}+2\beta^4A^3\frac{\partial H}{\partial B}+\alpha\beta A^2\frac{\partial H}{\partial \beta}-8\beta^4A^2\frac{\partial H}{\partial \alpha}. \tag{12.}$$

Durch die wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man

$$\begin{aligned}
D &= \beta A^{\frac{3}{2}}\\
\frac{\partial D}{\partial h} &= 3\beta A^{\frac{5}{2}}B+\alpha\beta A^{\frac{7}{2}}\\
\frac{\partial^2 D}{\partial h^2} &= 15\beta A^{\frac{7}{2}}B^2+10\alpha\beta A^{\frac{9}{2}}B+(\alpha^2\beta-2\beta^5)A^{\frac{11}{2}}\\
\frac{\partial^3 D}{\partial h^3} &= 105\beta A^{\frac{9}{2}}B^3+105\alpha\beta A^{\frac{11}{2}}B^2+21(\alpha^2\beta-2\beta^5)A^{\frac{13}{2}}B+(\alpha^3\beta-6\alpha\beta^5)A^{\frac{15}{2}}
\end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

Multiplicirt man diese Ausdrücke der Reihe nach mit

$$x,\quad -\frac{x^3}{\Pi 3},\quad \frac{x^5}{\Pi 5},\quad -\frac{x^7}{\Pi 7},\ \text{u. s. w.},$$

so erhält man durch die Addition der entstehenden Producte zufolge (3.)

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(x) = \beta A^{\frac{3}{2}}x&\left[1-\frac{ABx^2}{2}+\frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{ABx^2}{2}\right)^2-\frac{1}{\Pi 3}\left(\frac{ABx^2}{2}\right)^3+\cdots\right]\\
&-\frac{1}{\Pi 3}\alpha\beta A^{\frac{7}{2}}x^3\left[1-\frac{ABx^2}{2}+\frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{ABx^2}{2}\right)^2-\cdots\right]\\
&+\frac{1}{\Pi 5}(\alpha^2\beta-2\beta^5)A^{\frac{11}{2}}x^5\left[1-\frac{ABx^2}{2}+\cdots\right]\\
&-\frac{1}{\Pi 7}(\alpha^3\beta-6\alpha\beta^5)A^{\frac{15}{2}}x^7\left[1-\cdots\right]\ \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

oder

$$\vartheta_1(x) = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left[s_0Ax-s_1\frac{A^3x^3}{\Pi 3}+s_2\frac{A^5x^5}{\Pi 5}-s_3\frac{A^7x^7}{\Pi 7}+\cdots\right], \tag{13.}$$

wo

$$s_0 = \beta,\quad s_1 = \alpha\beta,\quad s_2 = \beta(\alpha^2-2\beta^4),\quad s_3 = \alpha\beta(\alpha^2-6\beta^4),\ \text{etc.}$$

Man wird hierdurch auf den folgenden allgemeinen Ausdruck von $\frac{\partial^m D}{\partial h^m}$ geführt:

$$\frac{\partial^m D}{\partial h^m} = \sqrt{A^{2m+3}}[(m)_0s_0B^m+(m)_1s_1B^{m-1}A+(m)_2s_2B^{m-2}A^2+\cdots+(m)_ms_mA^m], \tag{14.}$$

wo

$$(m)_i = \frac{\Pi(2m+1)}{2^{m-i}\Pi(m-i)\,\Pi(2i+1)} = (2i+3)(2i+5)\ldots(2m+1)\frac{m.m-1\ldots m-i+1}{1.2\ldots i}. \tag{15.}$$

Durch Differentiation von (14.) ergiebt sich vermöge (12.) zwischen den drei auf einander folgenden Functionen s_{m-1}, s_m, s_{m+1} die Gleichung

$$s_{m+1} = 2m(2m+1)\beta^4s_{m-1}+\alpha\beta\frac{\partial s_m}{\partial \beta}-8\beta^4\frac{\partial s_m}{\partial \alpha}. \tag{16.}$$

Man kann diese Induction ganz auf dieselbe Art, wie im Vorhergehenden, zur allgemeinen Gültigkeit erheben. Es wird aber um so mehr genügen, dieses in dem vorigen Beispiel ausgeführt zu haben, als man auf folgende Art unmittelbar zu den gefundenen Gesetzen gelangen kann.

Es sei nämlich

$$u = Ax$$

und

$$\vartheta(x) = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}U, \tag{17.}$$

so wird, wenn man $\vartheta(x)$ als Function von x und h, aber U als Function von u und h ansieht

$$\frac{\partial\vartheta(x)}{\partial x} = \sqrt{A}\,e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left[A\frac{\partial U}{\partial u} - BuU\right],$$

und durch nochmalige Differentiation

$$\frac{\partial^2\vartheta(x)}{\partial x^2} = \sqrt{A}\,e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left[A^2\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} - 2ABu\frac{\partial U}{\partial u} + (B^2u^2 - AB)U\right].$$

Man erhält ferner zufolge der oben gegebenen Formeln

$$\frac{\partial\sqrt{A}}{\partial h} = \sqrt{A^3}B, \qquad \frac{\partial . AB}{\partial h} = 2A^2B^2 + bA^4,$$

und daher

$$\frac{\partial\vartheta(x)}{\partial h} = \sqrt{A}\,e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left[(AB - B^2u^2 - \tfrac{1}{2}bA^2u^2)U + 2ABu\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial h}\right].$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke verwandelt sich die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\vartheta(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial\vartheta(x)}{\partial h} = 0$$

in die folgende

$$A^2\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial U}{\partial h} = \tfrac{1}{2}bA^2u^2U$$

Führt man statt der Gröfse h die Gröfse a ein, so dafs U als Function von u und a angesehen wird, so erhält man, da zufolge (4.)

$$da = -16bA^2dh,$$

nach Division durch A^2

$$(18.)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} - 16b\frac{\partial U}{\partial a} = \tfrac{1}{2}bu^2U.$$

Da die Function U sich in eine nach den ganzen Potenzen von u^2 aufsteigende Reihe entwickeln läfst, deren erster Term 1 ist, so setze man

$$(19.)\qquad U = 1 - r_1\frac{u^2}{\Pi 2} + r_2\frac{u^4}{\Pi 4} - r_3\frac{u^6}{\Pi 6} + \cdots$$

Substituirt man diese Reihe in die für U gefundene partielle Differentialgleichung (18.), so erhält man

$$r_1 = 0$$

und allgemein

$$(20.)\qquad r_i + 16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a} = (i-1)(2i-3)br_{i-2}.$$

Die Gröfsen a und b sind mit einander durch die Formel

$$a^2 = 16(1-2b)$$

verbunden, aus welcher

$$16\frac{\partial b}{\partial a} = -a$$

folgt. Es ist von Vortheil die Function r als homogene Function von a^2 und b auszudrücken. Man hat dann in der vorstehenden Gleichung für $16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}$ zu setzen

$$16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a} + 16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = 16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a} - ab\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b},$$

wodurch sich dieselbe in die oben gefundene Gleichung

$$(21.)\qquad r_i + 16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a} - ab\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b} = (i-1)(2i-3)br_{i-2}$$

verwandelt.

Mittelst dieser Gleichung erhält man aus dem Werthe der ersten Function $r_0 = 1$ den Werth $r_1 = 0$ und hieraus nach und nach die übrigen. Durch dieselbe Gleichung wird zugleich gezeigt, *dass, wenn man für ein nicht negatives* i

$$r_{2i+2} = bf_i(a^2, b), \qquad r_{2i+3} = ab\varphi_i(a^2, b)$$

setzt, die Functionen f_i, φ_i *ganze homogene Functionen von* a^2 *und* b *vom* i^{ten} *Grade, und deren Zahlenfactoren ganze Zahlen sind.*

Setzt man wieder $Ax = u$ und

$$\vartheta_1(x) = \sqrt{A}\,e^{-\frac{1}{2}ABx^2}U_1,$$

und sieht wieder $\vartheta_1(x)$ als Function von x und h, aber U_1 als Function von u und a an, so erhält man ganz auf dieselbe Art

$$(22.)\qquad \frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2} - 16b\frac{\partial U_1}{\partial a} = \tfrac{1}{2}bu^2U_1.$$

Da die Function U_1, nach den ganzen positiven Potenzen von x oder von u entwickelt, nur die ungeraden Potenzen der Variablen enthält, so kann man

$$(23.)\qquad U_1 = s_0u - s_1\frac{u^3}{\Pi 3} + s_2\frac{u^5}{\Pi 5} - s_3\frac{u^7}{\Pi 7} + \text{etc.}$$

setzen.

Der Werth des ersten Coefficienten s_0 wird der Werth von $\frac{\partial U_1}{\partial a}$ für $u=0$ oder der Werth von $\frac{\partial \vartheta_1(x)}{\sqrt{A^3}\partial x}$, welcher

$$\beta = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b} = s_0$$

ist. Substituirt man die Reihe (23.) in die partielle Differentialgleichung (22.), so erhält man

$$(24.)\qquad s_i+16b\frac{\partial s_{i-1}}{\partial a} = (i-1)(2i-1)b\,s_{i-2},$$

oder, wenn man s als Function von a und b betrachtet,

$$(25.)\qquad s_i+16b\frac{\partial s_{i-1}}{\partial a}-ab\frac{\partial s_{i-1}}{\partial b} = (i-1)(2i-1)b s_{i-2}.$$

Setzt man, wie oben,

$$a = 4\alpha, \qquad b = 2\beta^4,$$

so erhält man hieraus die Gleichung

$$(26.)\qquad s_i+8\beta^4\frac{\partial s_{i-1}}{\partial \alpha}-\alpha\beta\frac{\partial s_{i-1}}{\partial \beta} = 2(i-1)(2i-1)\beta^4 s_{i-2},$$

welche mit der Gleichung (16.) übereinkommt, wenn man $i=m+1$ setzt. Mittelst der Gleichung (26.) kann man aus dem Werthe der ersten Function $s_0=\beta$ nach und nach die übrigen erhalten. Durch dieselbe Gleichung wird leicht gezeigt, *dass, wenn man*

$$s_{2i} = \beta f'_i(\alpha^2, \beta^4), \qquad s_{2i+1} = \alpha\beta\varphi'_i(\alpha^2, \beta^4)$$

setzt, die Functionen f'_i und φ'_i ganze homogene Functionen von α^2 und β^4 vom i^{ten} Grade, und deren Zahlenfactoren ganze Zahlen sind.

Die Functionen r_{2i+2}, r_{2i+3}, s_{2i}, s_{2i+1} werden daher nur aus $i+1$ Termen bestehen, welche in möglichst kleine ganze Zahlen *) multiplicirt sind. Da diese algebraischen Functionen sehr merkwürdige Eigenschaften besitzen und auf dieselben gleichsam als Elemente viele andere Bestimmungen zurückgeführt werden, so ist es von Wichtigkeit, ihre einfachsten Ausdrücke aufzustellen,

*) Diese Bemerkung bezieht sich wohl jedenfalls darauf, dass man bei andern Formen der Darstellung, z. B. wenn man die Functionen r und s nach Potenzen von k entwickelt, auf gröfsere Zahlcoefficienten geführt wird. B.

wie es hier durch Einführung der Gröfsen a und b, oder α und β geschehen ist. Je nachdem man den Gröfsen a und b die Werthe

$$a = 4(k'^2-k^2), \qquad b = 2k^2k'^2;$$
$$a = -4\frac{1+k'^2}{k^2}, \qquad b = -\frac{2k'^2}{k^4};$$
$$a = 4\frac{1+k^2}{k'^2}, \qquad b = -\frac{2k^2}{k'^4};$$

oder den Gröfsen α und β die Werthe

$$\alpha = k'^2-k^2, \qquad \beta = \sqrt{kk'};$$
$$\alpha = -\frac{1+k'^2}{k^2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{k'}}{k}\sqrt[4]{-1};$$
$$\alpha = \frac{1+k^2}{k'^2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{k}}{k'}\sqrt[4]{-1}$$

giebt, will ich die Functionen r_i und s_i mit r_i, $\frac{r'_i}{k^{2i}}$, $\frac{r''_i}{k'^{2i}}$ und s_i, $\frac{s'_i}{k^{2i+1}}\sqrt[4]{-1}$, $\frac{s''_i}{k'^{2i+1}}\sqrt[4]{-1}$ bezeichnen.

Hiernach wird für ein nicht negatives i:

$$r_{2i+2} = 2k^2k'^2 f_i[16(k'^2-k^2)^2, 2k^2k'^2],$$
$$r_{2i+3} = 8k^2k'^2(k'^2-k^2)\varphi_i[16(k'^2-k^2), 2k^2k'^2];$$
$$r'_{2i+2} = -2k'^2 f_i[16(1+k'^2)^2, -2k'^2],$$
$$r'_{2i+3} = 8k'^2(1+k'^2)\varphi_i[16(1+k'^2)^2, -2k'^2];$$
$$r''_{2i+2} = -2k^2 f_i[16(1+k^2)^2, -2k^2],$$
$$r''_{2i+3} = -8k^2(1+k^2)\varphi_i[16(1+k^2)^2, -2k^2];$$

$$s_{2i} = \sqrt{kk'}\,f'_i[(k'^2-k^2)^2, k^2k'^2],$$
$$s_{2i+1} = \sqrt{kk'}\,(k'^2-k^2)\varphi'_i[(k'^2-k^2)^2, k^2k'^2];$$
$$s'_{2i} = \sqrt{k'}\,f'_i[(1+k'^2)^2, -k'^2],$$
$$s'_{2i+1} = -\sqrt{k'}\,(1+k'^2)\varphi'_i[(1+k'^2)^2, -k'^2];$$
$$s''_{2i} = \sqrt{k}\,f'_i[(1+k^2)^2, -k^2],$$
$$s''_{2i+1} = \sqrt{k}\,(1+k^2)\varphi'_i[(1+k^2)^2, -k^2].$$

In diesen Ausdrücken bedeuten f_i, φ_i, f'_i, φ'_i jede immer dieselben Functionen der verschiedenen unter dem Functionenzeichen befindlichen Gröfsen, und zwar homogene Ausdrücke derselben vom i^{ten} Grade, deren Zahlencoefficienten ganze Zahlen sind.

Setzt man

$$\frac{2Kx}{\pi} = u,$$

und giebt zufolge des obigen Satzes je nach den dreierlei Bestimmungen von a und b der Gröfse A die Werthe

$$\frac{2K}{\pi},\quad \frac{2kK}{\pi},\quad \frac{2k'K}{\pi},$$

und der Gröfse B die Werthe

$$\frac{2E}{\pi}-k^2\frac{2K}{\pi},\quad \frac{1}{k}\frac{2E}{\pi},\quad \frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\right),$$

so erhält man aus der einen Formel (6.) die nachfolgenden Darstellungen der drei Functionen $\vartheta(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$:

$$\vartheta_3(x) = \vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-k^2\right)u^2}\left(1+r_2\frac{u^4}{\Pi 4}-r_3\frac{u^6}{\Pi 6}+r_4\frac{u^5}{\Pi 8}-\cdots\right),$$

$$\vartheta_2(x) = \vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\, e^{-\frac{Eu^2}{2K}}\left(1+r'_2\frac{u^4}{\Pi 4}+r'_3\frac{u^6}{\Pi 6}+r'_4\frac{u^8}{\Pi 8}-\cdots\right),$$

$$\vartheta(x) = \vartheta\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-1\right)u^2}\left(1+r''_2\frac{u^4}{\Pi 4}-r''_3\frac{u^6}{\Pi 6}+r''_4\frac{u^8}{\Pi 8}-\cdots\right).$$

Ferner erhält man für die Function $\vartheta_1(x)$ aus der einen Formel (13.) die drei verschiedenen Darstellungen:

$$\begin{aligned}\vartheta_1(x) = \vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right) &= \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-k^2\right)u^2}\left(s_0u-s_1\frac{u^3}{\Pi 3}+s_2\frac{u^5}{\Pi 5}-s_3\frac{u^7}{\Pi 7}+\cdots\right)\\ &= \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\, e^{-\frac{Eu^2}{2K}}\left(s'_0u-s'_1\frac{u^3}{\Pi 3}+s'_2\frac{u^5}{\Pi 5}-s'_3\frac{u^7}{\Pi 7}+\cdots\right)\\ &= \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-1\right)u^2}\left(s''_0u-s''_1\frac{u^3}{\Pi 3}+s''_2\frac{u^5}{\Pi 5}-s''_3\frac{u^7}{\Pi 7}+\cdots\right).\end{aligned}$$

Die Gröfse u hat hier nicht die dreifache Bedeutung, welche in den früheren Formeln ihr Werth Ax je nach den drei Werthen von A erhielt, sondern nur diejenige, welche dem ersten Werthe $A = \frac{2K}{\pi}$ entspricht.

ÜBER DIE ABBILDUNG

EINES UNGLEICHAXIGEN ELLIPSOIDS

AUF EINER EBENE

BEI WELCHER DIE KLEINSTEN THEILE ÄHNLICH BLEIBEN

Borchardt Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 59. p. 74—88.