C. G. J. JACOBI'S

GESAMMELTE WERKE.

ZWEITER BAND.

C. G. J. JACOBI'S

GESAMMELTE WERKE.

HERAUSGEGEBEN AUF VERANLASSUNG DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ZWEITER BAND.

HERAUSGEGEBEN

VON

K. WEIERSTRASS.

BERLIN.
VERLAG VON G. REIMER.
1882.

INHALTSVERZEICHNISS DES ZWEITEN BANDES.

NACHLASS.

DE THEOREMATE ABELIANO OBSERVATIO

AUCTORE

C. G. J. JACOBI
PROF. MATH. REGIOM.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 9. p. 99.

DE THEOREMATE ABELIANO OBSERVATIO.

Demonstravit Cl. Abel (Diar. Crell. Vol. III. p. 313 sqq.), designantibus U, V, A, B functiones integras variabilis x, atque $\Pi(x)$ integrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{AB}} = \Pi(x),$$

radices aequationis algebraicae

$$AUU - BVV = 0$$

tales fore, ut summa $\Sigma \pm \Pi(x)$, ad omnes illas radices extensa, a coëfficientibus functionum U, V omnino non pendeat; quod theorema etiam ad casum generaliorem extendit, quo

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{Sdx}{T\sqrt{AB}},$$

designantibus S, T et ipsis functiones quaslibet integras variabilis x. Quippe quo casu demonstravit, summam $\Sigma \pm \Pi(x)$ generaliter expressioni algebraicae et logarithmicae coëfficientium functionum U, V aequalem fore. Signa $\pm$ singulis $\Pi(x)$ in summa assignata praefigenda eadem esse debent atque valorum expressionis AUV.

Observo, theorema facile extendi ad casum, quo aequatio proposita fit

$$AUU + 2BUV + CVV = 0,$$

designantibus rursus A, B, C, S, T, U, V functiones integras, atque $\Pi(x)$ integrale:

$$\int_0^x \frac{Sdx}{T\sqrt{BB - AC}} = \Pi(x).$$

Quo casu, siquidem ponitur $T = x - \alpha$, ad quem casum generalior facile revocatur, theorema Abelianum ita audit.

Theorema.

»Sint A, B, C, S, U, V functiones integrae variabilis x, ponatur $BB - AC = \varphi(x)$, atque integrale

$$\int_0^x \frac{S dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} = \Pi(x),$$

radices aequationis algebraicae

$$AUU + 2BUV + CVV = 0$$

tales erunt, ut summa $\Sigma \pm \Pi(x)$, ad omnes eius radices extensa, sit

$$c + r - L,$$

designante

1) c quantitatem a coëfficientibus functionum U, V independentem;
2) r functionem algebraicam coëfficientium functionum U, V, aequalem coëfficienti termini $\frac{1}{x}$ in evolutione expressionis
$$\frac{S}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \log \frac{AU + BV + V\sqrt{\varphi(x)}}{AU + BV - V\sqrt{\varphi(x)}},$$
evolutione secundum dignitates descendentes ipsius x instituta;
3) L valorem expressionis
$$\frac{S}{\sqrt{\varphi(x)}} \log \frac{AU + BV + V\sqrt{\varphi(x)}}{AU + BV - V\sqrt{\varphi(x)}},$$
posito $x = \alpha$.

Signa $\pm$, quae in summa assignata $\Sigma \pm \Pi(x)$ singulis $\Pi(x)$ praefigenda sunt, eadem sunt atque valorum expressionis $\frac{AU + BV}{V}$.«

Posito $B = 0$, hoc theorema in Abelianum abit; demonstrationi supersedeo, cum pro utroque eadem sit.

Regiomonti, 14. Maii 1832.

CONSIDERATIONES GENERALES

DE

TRANSCENDENTIBUS ABELIANIS

AUCTORE

C. G. J. JACOBI

PROF. MATH. REGIOM.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 9. p. 394—403.

CONSIDERATIONES GENERALES DE TRANSCENDENTIBUS ABELIANIS.

1.

Denotante X functionem variabilis x rationalem integram quarti ordinis, demonstravit olim Eulerus, transcendentes huiusmodi:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x)$$

gaudere proprietate singulari, ut posito

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \Pi(a),$$

ipsa a e x et y algebraice inveniatur. Quo theoremate, advocata transformatione transcendentis $\Pi(x)$ a Cl. Landen detecta, superstruxit Cl. Legendre amplam theoriam, quam hodie nomine *theoriae functionum ellipticarum* usurpamus. Neque tamen harum transcendentium indoles atque natura plane pernosci poterat, considerando hanc solam transcendentem $\Pi(x)$ sive etiam generaliorem hanc

$$\int_0^x \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

in qua $f(x)$ functio ipsius x rationalis est, sed considerari debuit functio, cuius ipsa $\Pi(x)$ inversa est, sive *considerari debuit intervallum x ut functio integralis $\Pi(x)$.*

Etenim si analogiam functionum trigonometricarum respicimus, in quas casu speciali functiones ellipticae abeunt, etiam hic videmus, posito

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-xx}},$$

considerari ab analystis intervallum x tamquam functionem integralis u, cui nomen *sinus* tribuunt. Quam functionem scimus proprietatibus gravissimis gaudere, quae eius usum et applicationem per totam analysin frequentissimam reddunt. Quippe quae, ut de aliis taceam, pro quolibet valore argumenti u valorem unicum ac determinatum habet; evolvi potest in seriem secundum dignitates ipsius u progredientem, quae pro omnibus argumenti valoribus et realibus et imaginariis convergit; discerpi potest in factores lineares, qui determinantur valoribus ipsius u, pro quibus functio evanescit; denique *gaudet illa proprietatibus omnibus functionis ipsius u rationalis integrae.* E contra functionem u considerant analystae tantum ut inversam functionis $x = \sin(u)$, dicentes eam esse, cuius *sinus* $= x$, aut scribentes $u =$ *arcus sinus* x; neque ea functio ullo modo evolvi potest in seriem semper convergentem, neque determinata est, sed numerum valorum infinitum habet, quippe cuius eadem est natura atque *radicis aequationis algebraicae ordinis infiniti*, $x = \sin(u)$. Unde nec nomen nec signum peculiare ei tribuere idoneum putabatur.

Eodem plane modo comparatum est de transcendentibus ellipticis sive de transcendentibus $\Pi(x) = u$, quoties X ascendit ordinem quartum. Etiam hoc casu functio $\Pi(x)$ nullo modo evolvi potest in seriem semper convergentem, neque valorem determinatum habet, sed numerum adeo valorum dupliciter infinitum. Contra vero, quod a nobis in *Fundamentis novis theoriae functionum ellipticarum* factum est, ubi exhibita transcendente $\Pi(x)$ sub forma simpliciore, ad quam Cl. Legendre eam revocavit:

$$u = \Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)(1-k^2xx)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

consideramus *amplitudinem* φ tamquam functionem integralis u: functio x quam hunc in modum exhibemus:

$$x = \sin\mathrm{am}\,(u),$$

gaudet proprietatibus omnibus functionis rationalis fractae. Quippe spectari potest functio illa tamquam fractio, cuius et denominator et numerator sunt functiones rationales integrae ordinis infiniti, quas et ipsas ut transcendentes novas valde memorabiles in analysin introduxi. Evolvi possunt functiones illae in series rapidissime convergentes pro quolibet argumenti u valore sive reali sive imaginario; discerpi possunt in factores lineares, qui facile determinantur valoribus ipsius u, pro quibus functio $x = \sin\mathrm{am}\,(u)$ aut evanescit aut in infinitum abit. Ipsa tandem functio $x = \sin\mathrm{am}\,(u)$, ut de aliis taceam, gaudet proprietate, qua ante omnes transcendentes hactenus notas excellit, *periodo duplici et reali et imaginaria.* Quemadmodum enim functio trigonometrica $\sin(u)$ periodo reali gaudet, ut cuius valores, crescente u, inde a $u = 2\pi$ eodem ordine redeunt, sive cuius valores mutato u in $u + 2\pi$ immutati manent; quemadmodum functio exponentialis e^u periodum imaginariam habet, ut quae mutato u in $u + 2\pi\sqrt{-1}$ et ipsa valorem non mutat: ita, ex observatione a nobismet ipsis et Cl. Abel facta, functio elliptica $\sin\mathrm{am}\,(u)$ valorem non mutat, mutato u et in $u + 4K$ et in $u + 2K'\sqrt{-1}$, designantibus K, K' integralia definita:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + k^2\sin^2\varphi}}.$$

Quibus de causis nos et Cl. Abel arbitrati sumus, artem analyticam magna incrementa capturam esse, introducta hac nova functione $x = \sin\mathrm{am}\,(u)$, cuius ipsa transcendens $u = \Pi(x)$ est inversa sive una aliqua e radicibus aequationis $x = \sin\mathrm{am}\,(u)$, quarum numerus dupliciter infinitus.

2.

Theorema Eulerianum, de quo diximus, a Cl. Abel mirum in modum amplificatum est, videlicet ad casus omnes extensum, quibus functio **X**, quae in integralibus ellipticis tantum ad ordinem quartum ascendebat, functio est quaelibet integra rationalis. Ut a casu simplicissimo post eum, de quo supra egimus, ordiamur, designante **X** functionem ipsius x integram rationalem ordinis quinti aut sexti, sit

$$\int_0^x \frac{(A + A_1x)\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x),$$

proposita aequatione:

$$\Pi(x) + \Pi(y) + \Pi(z) = \Pi(a) + \Pi(b),$$

demonstravit Cl. Abel, ipsas a, b e quantitatibus x, y, z *algebraice* determinari posse.

Generaliter autem, *designante $f(x) = X$ functionem ipsius x integram rationalem ordinis cuiuslibet $2m^{ti}$ sive $(2m-1)^{ti}$, posito*

$$\int_0^x \frac{(A + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_{m-2}x^{m-2})\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x),$$

demonstratum est a Cl. Abel, dato numero m valorum variabilis x:

$$x,\ x_1,\ x\ ,\ \ldots,\ x_{m-1},$$

ex illis algebraice determinari posse $m-1$ *quantitates*

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{m-2}$$

tales, ut satisfaciant aequationi transcendentali:

$$\Pi(x)+\Pi(x_1)+\Pi(x_2)+\cdots+\Pi(x_{m-1}) = \Pi(a)+\Pi(a_1)+\cdots+\Pi(a_{m-2}).$$

Et invenit Cl. Abel ipsas $a,\ a_1,\ \ldots,\ a_{m-2}$ *ut radices aequationis algebraicae ordinis* $(m-1)^{ti}$, *cuius coefficientes singuli per* $x,\ x_1,\ \ldots,\ x_{m-1}$ *atque* $\sqrt{X},\ \sqrt{X_1},\ \ldots,\ \sqrt{X_{m-1}}$ *rationaliter exhibentur, siquidem* $X_1=f(x_1)$, $X_2=f(x_2)$, *etc.*

De quo theoremate facile etiam sequitur, dato numero quolibet valorum ipsius x, summam transcendentium $\Pi(x)$, quae ad valores illos datos pertinent, semper exprimi posse per numerum $m-1$ transcendentium $\Pi(x)$, quae pertinent ad valores ipsius x e datis algebraice determinabiles.

Theoremati antecedenti ut monumento pulcherrimo ingenii admirabilis morte praematura abrepti *theorematis Abeliani* nomen imponere placet. Ipsas etiam transcendentes $\Pi(x)$ casibus, quibus X ultra ordinem quartum ascendit, *transcendentes Abelianas* vocare lubet, ut quas ante illum nemo consideraverat. Quas Cl. Legendre etiam idoneo nomine *hyperellipticas* appellat (fonctions ultra-elliptiques) *).

3.

Casu quo $u=\Pi(x)$ est integrale ellipticum sive X tantum ad ordinem quartum ascendit, docet theorema Eulerianum, siquidem vice versa $x=\lambda(u)$, functionem $\lambda(u+u')$, cuius argumentum est binomen $u+u'$, exhiberi algebraice per functiones $\lambda(u)$, $\lambda(u')$, quae ad singula nomina u, u' pertinent, sicuti de functionibus trigonometricis in elementis proponitur. Iam rogo, *et quaenam sint casu generaliori functiones illae, quarum inversae sunt transcendentes Abelianae, et quomodo de hisce exhibitum audiat theorema Abelianum.*

*) Cl. Abel commentationem *de proprietatibus singularibus integralium functionum algebraicarum* iam a. 1826 Academiae Parisiensi exhibuit, quam Illustris Academia commentationibus *eruditorum alienorum* inserendam decrevit. Quarum tamen publicatio cum in dies proferatur, valde optandum esset, ut Illustri Academiae inter ipsas eius commentationes eam exhibere placeat, vel si forte usus vetat, ut parti certe historicae commentationum inseratur. Quamquam pietatis quodammodo foret, honorem et insuetum tribuere memoriae iuvenis eximii, cui ipsos honores Academicos praeclusit fatum irrevocabile. Quod, dum Parisiis agebam, a Cl. Fourier precibus meis concessum, utinam, mortuo viro excellentissimo, illustris eius successor ratum facere velit.

Theorema Eulerianum exhibet *algebraice* integrale completum aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles, quae in aequatione differentiali separatae sunt, huiusmodi:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

in qua, designante $f(x)$ functionem integram rationalem ordinis quarti, $X=f(x)$, $Y=f(y)$. Iam rogo, *quaenam sint aequationes differentiales, quarum integralia completa algebraice exhibeat theorema Abelianum.*

4.

Ordiamur rursus a casu simplicissimo transcendentium Abelianarum, cum dico, quo functio X tantum ad ordinem quintum aut sextum ascendit. Sit

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Phi(x), \qquad \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_1(x),$$

ac ponatur:

$$\Phi(x)+\Phi(y) = u,$$
$$\Phi_1(x)+\Phi_1(y) = v;$$

considero x, y ut functiones ipsarum u, v, ac pono:

$$x = \lambda(u,v),$$
$$y = \lambda_1(u,v).$$

Quas functiones

$$\lambda(u,v), \quad \lambda_1(u,v),$$

quae ab argumentis duobus u, v pendent, in analysin introducamus necesse est, si analogiam functionum trigonometricarum et ellipticarum etiam in functionibus Abelianis servare placet.

5.

Posito, ut supra,

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{(A+A_1x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

sive

$$\Pi(x) = A\Phi(x)+A_1\Phi_1(x),$$

docet theorema Abelianum, aequationis

$$\Pi(x)+\Pi(y)+\Pi(z) = \Pi(a)+\Pi(b)$$

solutionem dari algebraicam, sive a, b per quantitates x, y, z algebraice determinari posse. At observo, problema determinandi ipsas a, b e datis quantitatibus x, y, z indeterminatum esse, ideoque theorema Abelianum ita propositum nihil aliud docere, nisi e solutionibus innumeris aequationis propositae:

$$\Pi(a)+\Pi(b) = \Pi(x)+\Pi(y)+\Pi(z)$$

unam extare algebraicam. Iam vero observo, relationes illas algebraicas, a Cl. Abel exhibitas, quarum ope a, b e quantitatibus x, y, z determinantur, nullo modo pendere ab ipsis A, A_1, quae afficiunt numeratorem fractionis, cuius integrale est transcendens $\Pi(x)$. Unde eaedem aequationes binae algebraicae inter x, y, z, a, b propositae utrique simul satisfaciunt aequationi transcendentali:

$$\begin{aligned}\Phi(a)+\Phi(b) &= \Phi(x)+\Phi(y)+\Phi(z)\\ \Phi_1(a)+\Phi_1(b) &= \Phi_1(x)+\Phi_1(y)+\Phi_1(z).\end{aligned}$$

Quibus aequationibus duabus simul propositis, iam a, b e quantitatibus x, y, z omnino determinatae sunt. Itaque theorema Abelianum, si eius vim ac naturam recte perspicere velis, in modum sequentem proponi debet:

Theorema.

»*Designante* X *functionem ipsius* x *integram rationalem ordinis quinti aut sexti, sit*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Phi(x), \quad \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_1(x),$$

propositis duabus simul aequationibus,

$$\begin{aligned}\Phi(a)+\Phi(b) &= \Phi(x)+\Phi(y)+\Phi(z)\\ \Phi_1(a)+\Phi_1(b) &= \Phi_1(x)+\Phi_1(y)+\Phi_1(z),\end{aligned}$$

quantitates a, b *e datis quantitatibus* x, y, z *algebraice determinantur.*«

6.

Theorema antecedens facile ad eum casum extenditur, quo summa quatuor sive cuiuslibet numeri transcendentium per summam binarum exprimatur, quarum argumenta ab illarum argumentis algebraice pendent. Consideremus casum, quo summa quatuor transcendentium per summam binarum exhibenda est, theorema Abelianum, ad eum casum applicatum, rursus docet, propositis duabus simul aequationibus,

$$\begin{aligned}\Phi(a)+\Phi(b) &= \Phi(x)+\Phi(y)+\Phi(x')+\Phi(y')\\ \Phi_1(a)+\Phi_1(b) &= \Phi_1(x)+\Phi_1(y)+\Phi_1(x')+\Phi_1(y'),\end{aligned}$$

quantitates a, b e datis quantitatibus x, y, x', y' algebraice determinari.

Ponamus iam:

$$\Phi(x)+\Phi(y) = u, \quad \Phi(x')+\Phi(y') = u',$$

porro

$$\Phi_1(x)+\Phi_1(y) = v, \quad \Phi_1(x')+\Phi_1(y') = v',$$

unde e duabus aequationibus propositis sequitur:

$$\Phi(a)+\Phi(b) = u+u', \quad \Phi_1(a)+\Phi_1(b) = v+v'.$$

E notatione autem supra explicata ex his aequationibus habemus vicissim:

$$\begin{aligned} x &= \lambda(u,v), & y &= \lambda_1(u,v),\\ x' &= \lambda(u',v'), & y' &= \lambda_1(u',v'),\\ a &= \lambda(u+u',\ v+v'), & b &= \lambda_1(u+u',\ v+v').\end{aligned}$$

Quibus statutis, de functionibus novis $\lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$ iam proponimus hoc theorema, in quod theorema Abelianum abit:

Theorema.

»*Designante* X *functionem integram rationalem ordinis quinti aut sexti, ponatur:*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Phi(x), \quad \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_1(x);$$

sint porro

$$x = \lambda(u,v), \quad y = \lambda_1(u,v)$$

functiones tales argumentorum u, v, *ut simul sit:*

$$\Phi(x)+\Phi(y) = u, \quad \Phi_1(x)+\Phi_1(y) = v,$$

gaudebunt functiones illae

$$\lambda(u,v), \quad \lambda_1(u,v)$$

proprietate ei simili, quae de functionibus trigonometricis et ellipticis in elementis proponitur, ut functiones illae argumentorum binominum

$$u+u', \quad v+v'$$

algebraice exhibeantur per functiones, quae ad singula nomina

$$u,\ v; \quad u',\ v'$$

pertinent; sive ut functiones

$$\lambda(u+u',\ v+v'), \quad \lambda_1(u+u',\ v+v')$$

algebraice exhibeantur per functiones

$$\begin{aligned}&\lambda(u,v), \quad \lambda(u',v')\\ &\lambda_1(u,v), \quad \lambda_1(u',v').\text{«}\end{aligned}$$

7.

Theorema autem generale iam ita audit:

Theorema generale.

»*Designante* X *functionem ipsius* x *rationalem integram ordinis* $(2m-1)^{ti}$ *aut* $2m^{ti}$, *sit*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Phi(x),\quad \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_1(x),\quad \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_2(x), \ldots \int_0^x \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_{m-2}(x);$$

quibus positis, statuantur $m-1$ *functiones*

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{m-2},$$

quae singulae a quantitatibus $m-1$ *sequentibus*

$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{m-2}$$

ita pendent, ut simul habeantur aequationes:

$$\begin{aligned}
u &= \Phi(x) + \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots + \Phi(x_{m-2})\\
u_1 &= \Phi_1(x) + \Phi_1(x_1) + \Phi_1(x_2) + \cdots + \Phi_1(x_{m-2})\\
u_2 &= \Phi_2(x) + \Phi_2(x_1) + \Phi_2(x_2) + \cdots + \Phi_2(x_{m-2})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_{m-2} &= \Phi_{m-2}(x) + \Phi_{m-2}(x_1) + \Phi_{m-2}(x_2) + \cdots + \Phi_{m-2}(x_{m-2}),
\end{aligned}$$

sintque functiones illae:

$$\begin{aligned}
x &= \lambda(u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-2})\\
x_1 &= \lambda_1(u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-2})\\
x_2 &= \lambda_2(u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-2})\\
&\ldots\ldots\ldots\\
x_{m-2} &= \lambda_{m-2}(u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-2});
\end{aligned}$$

gaudent functiones illae proprietate eadem, quae de functionibus trigonometricis et ellipticis valet, ut illae pro argumentis binominibus

$$u+u',\ u_1+u_1',\ u_2+u_2',\ \ldots,\ u_{m-2}+u_{m-2}'$$

exprimantur algebraice per functiones easdem, quarum argumenta sunt singula nomina

$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{m-2}$$

atque

$$u',\ u_1',\ u_2',\ \ldots,\ u_{m-2}';$$

sive ut functiones

$$\begin{aligned}
&\lambda(u+u',\ u_1+u_1',\ \ldots,\ u_{m-2}+u_{m-2}')\\
&\lambda_1(u+u',\ u_1+u_1',\ \ldots,\ u_{m-2}+u_{m-2}')\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_{m-2}(u+u',\ u_1+u_1',\ \ldots,\ u_{m-2}+u_{m-2}')
\end{aligned}$$

exprimantur algebraice per functiones

$$\begin{aligned}
&\lambda(u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{m-2})\\
&\lambda_1(u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{m-2})\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_{m-2}(u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{m-2})
\end{aligned}$$

atque

$$\begin{aligned}
&\lambda(u',\ u_1',\ u_2',\ \ldots,\ u_{m-2}')\\
&\lambda_1(u',\ u_1',\ u_2',\ \ldots,\ u_{m-2}')\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_{m-2}(u',\ u_1',\ u_2',\ \ldots,\ u_{m-2}').\text{«}
\end{aligned}$$

Observo functiones quaesitas e datis inveniri ope aequationis algebraicae ordinis $(m-1)^{ti}$, quae generaliter assignari potest per theorema Abelianum.

8.

Theorema Eulerianum exhibet integrale completum algebraicum aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles, in qua variabiles separatae sunt. Theorema Abelianum exhibet $m-1$ integralia completa algebraica (id est, quae $m-1$ constantes arbitrarias involvunt) $m-1$ aequationum differentialium linearium primi ordinis inter m variabiles, in quibus singulis variabiles illae separatae sunt. Ordiamur rursus a casu simplicissimo transcendentium Abelianarum, quo **X** ad quintum aut sextum ordinem ascendit.

Eo casu aequationes duas transcendentales:

$$\begin{aligned}
\Phi(x) + \Phi(y) + \Phi(z) &= \Phi(a) + \Phi(b)\\
\Phi_1(x) + \Phi_1(y) + \Phi_1(z) &= \Phi_1(a) + \Phi_1(b),
\end{aligned}$$

scimus per theorema Abelianum, locum tenere duarum aequationum algebraicarum inter quantitates quinque x, y, z, a, b. Consideremus ipsas a, b ut constantes; differentiatis aequationibus propositis, omnino abire videmus ipsas a, b, quae igitur in aequationibus transcendentalibus sive in aequationibus algebraicis, quae earum locum tenent, sunt constantes arbitrariae. Hinc fluit theorema sequens:

Theorema.

»*Sit* $f(x)$ *functio rationalis integra ipsius* x *ordinis quinti aut sexti, sit porro*

$$f(x) = X,\quad f(y) = Y,\quad f(z) = Z,$$

aequationes duae differentiales lineares primi ordinis inter tres variabiles, in quibus singulis variabiles x, y, z, separatae sunt,

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{dz}{\sqrt{Z}}=0$$
$$\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{Y}}+\frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}=0,$$

dua habent integralia completa algebraica.«

De transcendentibus Abelianis ordinis proxime insequentis simili modo theorema hoc habetur:

Theorema.

»*Sit $f(x)$ functio rationalis integra ipsius x ordinis septimi aut octavi, sit porro*

$$f(w)=W,\quad f(x)=X,\quad f(y)=Y,\quad f(z)=Z,$$

aequationes tres differentiales lineares primi ordinis inter variabiles quatuor, in quibus singulis variabiles w, x, y, z separatae sunt,

$$\frac{dw}{\sqrt{W}}+\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{dz}{\sqrt{Z}}=0,$$
$$\frac{w\,dw}{\sqrt{W}}+\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{Y}}+\frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}=0,$$
$$\frac{w^2dw}{\sqrt{W}}+\frac{x^2dx}{\sqrt{X}}+\frac{y^2dy}{\sqrt{Y}}+\frac{z^2dz}{\sqrt{Z}}=0,$$

tria habent integralia completa algebraica.«

Quae theoremata facile ad numerum quemlibet variabilium et aequationum differentialium extenduntur. Ipsa integralia completa algebraica generaliter suggerit theorema Abelianum.

Novimus, olim Ill. Lagrange in commentationibus Academiae Taurinensis, ab ipsa aequatione differentiali inter duas variabiles profectum, per methodos directas integrationis ad ipsum eius integrale completum algebraicum ascendisse, atque ita methodo nova ac singulari demonstravisse theorema Eulerianum, quod ei tantam ipsius Euleri excitavit admirationem. Ita etiam operae pretium fore credimus, duarum illarum aequationum differentialium inter tres variabiles duo integralia completa algebraica, sive generalius $m-1$ aequationum illarum differentialium inter m variabiles $m-1$ integralia completa algebraica per methodos directas integrationis investigare, atque ita nova nec minus singulari demonstratione theorema Abelianum adornare.

Regiom. 12. Julii 1832.

ÜBER

DIE FIGUR DES GLEICHGEWICHTS.

VON

PROF. DR. C. G. J. JACOBI.

Poggendorff Annalen der Physik und Chemie, Bd. 33. p. 229—233.

ÜBER DIE FIGUR DES GLEICHGEWICHTS.

Die Frage nach der Figur der Erde hat die Untersuchung veranlasst, welche Figur eine flüssige homogene Masse, deren Theilchen zu einander nach dem Newton'schen Gesetz gravitiren, und welche sich um eine feste Axe gleichförmig dreht, annehmen müsse, um im Gleichgewicht zu bleiben. Man nennt solche Figur wohl schlechthin eine Figur des Gleichgewichts. Man fand bald, sie könne eine Fläche der zweiten Ordnung sein und zwar eine solche, die durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entsteht, ein rundes, plattes Ellipsoid. Diefs haben schon Clairaut und Maclaurin bewiesen. Die Ellipse, die man fand, war immer sehr wenig excentrisch, oder das Ellipsoid kam der Sphäre sehr nahe. Aber d'Alembert machte die wichtige Bemerkung, dass die transcendente Gleichung, von der die Excentricität der Ellipse abhängt, immer noch eine Lösung hat, die in der Regel eine grofse Excentricität oder ein sehr plattes Sphäroid giebt; und la Place zeigte, wie d'Alembert vermuthet hatte, diefs seien die einzigen Lösungen. Es wird übrigens hierbei vorausgesetzt, dass die Rotationsgeschwindigkeit eine gewisse Grenze nicht überschreite; in dieser Grenze fallen beide Lösungen zusammen. Überschritte die Rotationsgeschwindigkeit diese Grenze, so würde man auf imaginäre Gröfsen kommen.

Die erste dieser Lösungen, die das wenig abgeplattete Umdrehungsellipsoid giebt, hat durch Legendre's bewundernswürdige Arbeiten über die Figur der Erde eine gröfsere Bedeutung erlangt. Dieser Mann, dessen Ruhm mit den Fortschritten der Mathematik zunimmt, hatte durch Einführung jener merkwürdigen Ausdrücke, durch welche wir heute in den Anwendungen die Functionen zweier Variabeln darstellen, die allgemeinsten Untersuchungen über diesen Gegenstand möglich gemacht. Er zeigte, dass unter allen Figuren, die nicht zu sehr von der sphärischen Gestalt abweichen, so dass es möglich ist, die Anziehung, welche auf einen Punkt der Oberfläche ausgeübt wird, nach den Potenzen dieser Abweichung zu entwickeln, das wenig abgeplattete Umdrehungsellipsoid, wie es Clairaut und Maclaurin bestimmt hatten, die einzig mögliche Figur des Gleichgewichts sei, und zwar nicht in irgend einer Annäherung, sondern in absoluter, geometrischer Strenge. Wenn man bedenkt, dass man hier aus Relationen zwischen dreifachen Integralen, deren Grenzen unbekannt sind, und welche Constanten enthalten, zwischen denen eine unbekannte Relation stattfindet, die Gleichung zwischen den drei Variabeln zu suchen hat, welche die Grenzen giebt und zugleich die unbekannte Relation zwischen den Constanten bestimmt, so staunt man über die Kühnheit und das Glück dieses Unternehmens. Es ist zu bedauern, dass der Autor der Mécanique céleste es nicht für zweckmäßig fand, das merkwürdige Theorem in sein weitschichtiges Werk aufzunehmen.

Wie wesentlich die Bedingung ist, dass die Componenten der Anziehung nach den Potenzen der Abweichung von der Kugelgestalt würden entwickelt werden können, oder wenigstens entwickelt gedacht werden, erhellt daraus, dass die Legendresche Analysis das zweite sehr platte, von d'Alembert zuerst bemerkte Umdrehungsellipsoid nicht giebt. Aber man ist in einem sehr groben Irrthum gewesen, wenn man geglaubt hat, diese beiden Umdrehungsellipsoide seien, wenigstens unter Flächen zweiter Ordnung, die einzigen Figuren des Gleichgewichts. In der That zeigt eine leichte Aufmerksamkeit, dass Ellipsoide mit drei ungleichen Axen eben so gut Figuren des Gleichgewichts sein können; dass man zum Äquator eine ganz beliebige Ellipse annehmen kann, und dann immer die dritte Hauptaxe, die Umdrehungsaxe, welche auch hier die kleinste der drei Axen ist, und die Rotationsgeschwindigkeit so bestimmen kann, dass das Ellipsoid eine Figur des Gleichgewichts wird.

Nennt man m, n die halben Hauptaxen des Äquators, p die halbe Umdrehungsaxe, so hat man, wenn man der Kürze halber

$$\triangle = \sqrt{\left(1+\frac{x}{mm}\right)\left(1+\frac{x}{nn}\right)\left(1+\frac{x}{pp}\right)}$$

setzt, folgende transcendente Relation zwischen den drei Hauptaxen:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{mm}\right)\left(1+\frac{x}{nn}\right)\triangle} = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{pp}\right)\triangle},$$

welche alle ungleichaxigen Ellipsoide umfasst, die Figuren des Gleichgewichts sein können. Die zu jedem dieser Ellipsoide zugehörige Rotationsgeschwindigkeit v bestimmt sich durch die Gleichung

$$v^2 = 2\pi \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+mm)(x+nn)\triangle}.$$

Nimmt man m und n beliebig an, so giebt die erste Gleichung immer einen reellen Werth für p, welcher immer von der Art ist, dass:

$$\frac{1}{pp} > \frac{1}{mm} + \frac{1}{nn}.$$

Man sieht hieraus, dass ein ungleichaxiges Ellipsoid, wenn es Figur des Gleichgewichts sein soll, immer sehr von der Kugelform abweicht, was mit dem Legendreschen Theorem übereinstimmt, welches lehrt, dass, wenn es außer dem wenig abgeplatteten Umdrehungsellipsoid noch Figuren des Gleichgewichts giebt, diese sehr von der Kugelform abweichen müssen.

Da zum Äquator eine beliebige Ellipse angenommen werden kann, so kann man nach dem Fall fragen, wo für diese Ellipse ein Kreis angenommen würde. Für diesen Fall findet man jene oben erwähnte Grenze der Rotationsgeschwindigkeit, und unsere Figur des Gleichgewichts fällt mit den beiden bekannten zusammen.

Die beiden aufgestellten Formeln leiten sich ohne weitere Rechnung aus den bekannten ab, daher es hinreicht, sie hinzuschreiben. Unter den beiden Gleichungen, welche das Gleichgewicht erfordert, hat die eine, welche die nöthige Relation zwischen den drei Hauptaxen ausdrückt, die Form:

$$\varphi(m, n, p) = \varphi(n, m, p),$$

die, wie man augenblicklich sieht, erfüllt wird, wenn man $m = n$, setzt. Indem man nun in der zweiten Gleichung, welche die Rotationsgeschwindigkeit giebt, $m = n$ setzte, erhielt man die bekannten Umdrehungsellipsoide. Aber nachdem diese längst auf das genaueste erörtert sind, durfte man fragen, ob denn jene Gleichung nothwendig erfordere, dass $m = n$ gesetzt werde; ob nicht auch der Gleichung

$$\frac{\varphi(m, n, p) - \varphi(n, m, p)}{m - n} = 0$$

durch reelle Werthe von m und n Genüge geschehen könne. Diese ist aber keine andere als die erste der angegebenen Gleichungen, welche in der That eine Classe reeller ungleichaxiger Ellipsoide giebt, welche Figuren des Gleichgewichts sein können.

Ich will noch eines anderen merkwürdigen Umstandes bei der Attraction der Ellipsoide erwähnen. Die ersten Analysten, die sich mit der Attraction homogener Ellipsoide beschäftigten, suchten diese endlich zu finden, natürlich vergeblich, da sie von elliptischen Integralen abhängt. Laplace erzählt bei dieser Gelegenheit, er habe sich einen Beweis gemacht, dass diese Integrale sich nicht endlich, d. h. durch Kreisbogen und Logarithmen, ausdrücken lassen, was interessant genug ist. Wenn man das Ellipsoid nicht homogen annimmt, sondern nur aus homogenen concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Schichten bestehen lässt, deren Dichtigkeit sich von einer Schicht zur andern ändert, so dass etwa, wie man öfters angenommen, die Dichtigkeit der auf demselben Durchmesser befindlichen Elemente der Entfernung vom Mittelpunkt umgekehrt proportional ist, oder durch irgend sonst eine rationale ungrade Function dieser Entfernung ausgedrückt wird, so läſst sich in der That die Anziehung, welche das Ellipsoid auf irgend einen äuſseren oder inneren Punkt ausübt, endlich, d. h. durch Kreisbogen und Logarithmen, ausdrücken.

Potsdam, den 4. October 1834.

DE FUNCTIONIBUS DUARUM VARIABILIUM QUADRUPLICITER PERIODICIS, QUIBUS THEORIA TRANSCENDENTIUM ABELIANARUM INNITITUR.

AUCTORE

C. G. J. JACOBI

PROF. ORD. MATH. REGIOM.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 13. p. 55—78.

DE FUNCTIONIBUS DUARUM VARIABILIUM QUADRUPLICITER PERIODICIS, QUIBUS THEORIA TRANSCENDENTIUM ABELIANARUM INNITITUR.

1.

In *Fundamentis novis theoriae functionum ellipticarum* adnotavi (§. 19.), duplicem periodum amplecti universam, quae in analysi fingi possit, periodicitatem. Quam rem sequentibus accuratius examinemus.

Periodicam voco functionem $\lambda(u)$, si datur constans i talis, ut pro quolibet ipsius u valore sit

$$\lambda(u+i) = \lambda(u).$$

Constantem i functionis voco *indicem*. Patet autem, ex uno indice innumeros provenire alios, cum eius multiplum positivum aut negativum quodcunque et ipse sit index. E quorum numero eum, cuius nulla pars aliquota functionis index est, indicem functionis dico *proprium*. Circumferuntur in elementis functiones periodicae $\sin(u)$, e^u, quarum indices proprii sunt resp. 2π, $2\pi\sqrt{-1}$.

Iam ponamus, cuius rei exemplum in functionibus ellipticis primum monstrabatur, functionem $\lambda(u)$ duabus gaudere periodis, quas ad unam revocare non liceat. Sint earum indices i, i', unde simul locum habent aequationes:

$$\lambda(u+i) = \lambda(u), \quad \lambda(u+i') = \lambda(u),$$

de quibus, designantibus m, m' numeros quoscunque integros positivos aut negativos, haec sequitur generalior:

$$\lambda(u+mi+m'i') = \lambda(u),$$

sive erit etiam $mi+m'i'$ index. Et primum patet, *indices i, i' inter se statuendos* *esse incommensurabiles.* Nam si Δ eorum divisor maximus communis, ponere licet

$$i = m\Delta, \quad i' = m'\Delta,$$

designantibus m, m' numeros integros inter se primos. Unde alios determinare possumus n, n' tales, ut sit

$$mn + m'n' = 1.$$

Quo facto, habetur index

$$ni + n'i' = \Delta,$$

de quo uno indice cum indices i, i', ut multipla eius, proveniant, videmus, *si duarum periodorum, quibus functio gaudet, sint indices inter se commensurabiles, duas periodos redire in unicam, cuius index ipsorum sit divisor maximus communis.*

Quotientem duorum indicum, qui ex uno non proveniant, cum ex antecedentibus pateat, statui non posse quantitatem rationalem, facile etiam patet, eundem *statui non posse quantitatem realem.* Sit enim

$$i = \varepsilon\Delta, \quad i' = \varepsilon'\Delta,$$

designantibus $\varepsilon, \varepsilon'$ quantitates reales inter se incommensurabiles; invenire licet numeros integros positivos vel negativos m, m' tales, ut

$$m\varepsilon + m'\varepsilon' = \varepsilon''$$

ulla data quantitate minor evadat. Quibus positis, erit

$$\lambda(u + mi + m'i') = \lambda(u + \varepsilon''\Delta) = \lambda(u),$$

unde functio $\lambda(u)$ indicem haberet ulla data quantitate minorem neque tamen evanescentem. Quod fieri non potest.

Sequitur ex antecedentibus, quoties periodorum, quae in unam non redeant, indices sint quantitates imaginariae,

$$i = a + b\sqrt{-1}, \quad i' = a' + b'\sqrt{-1},$$

designantibus a, b, a', b' quantitates reales, numquam haberi posse:

$$ab' - a'b = 0.$$

Tum enim indicum quotientem

$$\frac{a' + b'\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

haberes quantitatem realem.

2.

Examinemus iam, an functio tribus gaudere possit periodis, quas e duabus componere non liceat. Sint trium eiusmodi periodorum indices

$$i = a + b\sqrt{-1}, \quad i' = a' + b'\sqrt{-1}, \quad i'' = a'' + b''\sqrt{-1},$$

designantibus a, b, a', b', a'', b'' quantitates reales. Supponimus ex antecedentibus, e tribus quantitatibus

$$a'b'' - a''b', \quad a''b - ab'', \quad ab' - a'b$$

nullam evanescere. Alioquin enim aut duae periodi in unam redirent, quod est contra hypothesin, aut functio haberet indicem minorem quam ullam quantitatem datam neque tamen evanescentem, quod est absurdum. Ac primum observo, tres illas quantitates inter se esse non posse ut numeros integros, vel eandem eas quantitatem metiri non posse.

Ponamus enim, esse

$$a'b'' - a''b' : a''b - ab'' : ab' - a'b = m : m' : m'',$$

designantibus m, m', m'' *) numeros integros, quos factore communi destitutos accipimus. Erit:

$$ma + m'a' + m''a'' = 0$$
$$mb + m'b' + m''b'' = 0,$$

ideoque etiam:

$$mi + m'i' + m''i'' = 0.$$

Sit f divisor maximus communis ipsorum m', m'', qui ad m primus esse debet, cum tres numeri m, m', m'' per eundem numerum non dividantur; erit etiam

$$\frac{mi}{f} = -\left[\frac{m'}{f} \cdot i' + \frac{m''}{f} \cdot i''\right]$$

index functionis. Iam cum indices i et $\frac{mi}{f}$ sint inter se commensurabiles, eorumque divisor maximus communis sit $\frac{i}{f}$, erit etiam $\frac{i}{f}$ index, uti §. 1 demonstratum est. Eligantur porro numeri n', n'' tales, ut sit

$$\frac{m'}{f} \cdot n' + \frac{m''}{f} \cdot n'' = 1;$$

dico, tres periodos componi e duabus, quarum indices sunt

$$\frac{i}{f} \text{ et } n''i' - n'i'',$$

*) Hic et in sequentibus numeros integros accipimus sive positivos sive negativos.

quippe e quibus et index i componatur et reliqui indices i', i''. Habetur enim

$$-mn'\cdot\frac{i}{f}+\frac{m''}{f}(n''i'-n'i'') = n'\left[\frac{m'}{f}i'+\frac{m''}{f}i''\right]+\frac{m''}{f}(n''i'-n'i'') = i'$$

$$-mn''\cdot\frac{i}{f}-\frac{m'}{f}(n''i'-n'i'') = n''\left[\frac{m'}{f}i'+\frac{m''}{f}i''\right]-\frac{m'}{f}(n''i'-n'i'') = i''.$$

Unde si quantitates tres

$$a'b''-a''b', \quad a''b-ab'', \quad ab'-a'b$$

sunt, ut numeri integri, sive, quod idem est, *si designantibus m, m', m'' numeros integros, inter tres indices i, i', i'' locum habet aequatio huiusmodi*

$$mi+m'i'+m''i'' = 0,$$

tres periodos e duabus componere licet, sive functio tantum dupliciter periodica est.

Observo secundo loco, *designantibus $\alpha, \alpha', \alpha''$ numeros integros, locum habere non posse aequationem huiusmodi:*

$$\alpha(a'b''-a''b')+\alpha'(a''b-ab'')+\alpha''(ab'-a'b) = 0.$$

Nam ex arbitrio acceptis sex aliis numeris integris

$$\beta, \beta', \beta''; \quad \gamma, \gamma', \gamma'',$$

statuamus:

$$\begin{aligned}
u &= (\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')a+(\gamma''\alpha-\gamma\alpha'')a'+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)a'',\\
u' &= (\alpha'\beta''-\alpha''\beta')a+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')a'+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)a'',\\
v &= (\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')b+(\gamma''\alpha-\gamma\alpha'')b'+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)b'',\\
v' &= (\alpha'\beta''-\alpha''\beta')b+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')b'+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)b'';
\end{aligned}$$

unde functionis propositae indices etiam hi erunt:

$$u+v\sqrt{-1}, \quad u'+v'\sqrt{-1}.$$

Iam si statuitur

$$\varepsilon = \alpha(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')+\alpha'(\beta''\gamma-\beta\gamma'')+\alpha''(\beta\gamma'-\beta'\gamma),$$

invenitur:

$$uv'-u'v = \varepsilon[\alpha(a'b''-a''b')+\alpha'(a''b-ab'')+\alpha''(ab'-a'b)].$$

Unde, si expressio uncis inclusa evanescit, habetur:

$$uv'-u'v = 0.$$

Hanc vero aequationem vidimus §. 1. locum habere non posse, nisi indices

$$u+v\sqrt{-1}, \quad u'+v'\sqrt{-1},$$

sint inter se commensurabiles sive ex uno indice proveniant. Quo casu statui potest, designantibus f, f' integros,

$$f(u+v\sqrt{-1})-f'(u'+v'\sqrt{-1}) = 0,$$

quae aequatio, substitutis ipsarum u, v, u', v' valoribus, hanc formam induit:

$$mi+m'i'+m''i'' = 0,$$

ubi m, m', m'' integri; quam locum habere non posse demonstravimus.

3.

His praeparatis, iam demonstrabo, *si tres periodi ad duas revocari non possint, semper determinari posse numeros integros m, m', m'' tales, ut utraque simul expressio*

$$ma+m'a'+m''a'',$$
$$mb+m'b'+m''b''$$

ulla data quantitate minor evadat, sive functionem propositam indicem habere minorem quam ullam quantitatem datam neque tamen evanescentem.

Pono brevitatis causa:

$$a'b''-a''b' = A, \quad a''b-ab'' = A', \quad ab'-a'b = A'',$$

unde

$$aA+a'A'+a''A'' = 0, \quad bA+b'A'+b''A'' = 0.$$

Porro, designantibus $\alpha, \alpha', \alpha''$ numeros integros, pono:

$$\frac{\alpha A'}{A}-\alpha' = \Delta, \quad \frac{\alpha A''}{A}-\alpha'' = \Delta';$$

unde

$$\begin{aligned}
\alpha a+\alpha'a'+\alpha''a'' &= -[a'\Delta+a''\Delta'],\\
\alpha b+\alpha'b'+\alpha''b'' &= -[b'\Delta+b''\Delta'].
\end{aligned}$$

Iam numeros α, α' ita determinare licet, ut Δ ulla data quantitate minor fiat. Porro, determinatis α, α', tertium numerum α'' ita accipere licet, ut signi respectu non habito, fiat

$$\Delta' < \tfrac{1}{2}.$$

Qua ratione determinatis $\alpha, \alpha', \alpha''$, expressiones antecedentes fiunt respective absolute minores quam $\frac{1}{2}a''$ et $\frac{1}{2}b''$. Unde *datis quantitatibus a, a', a'' et b, b', b'', semper determinare licet numeros integros $\alpha, \alpha', \alpha''$ tales, ut, posito*

$$a''' = \alpha a+\alpha'a'+\alpha''a'', \quad b''' = \alpha b+\alpha'b'+\alpha''b'',$$

simul fiat

$$a''' < \tfrac{1}{2}a'', \quad b''' < \tfrac{1}{2}b'',$$

signorum respectu non habito.

Ponatur iam successive:

$$\begin{aligned} \beta a' + \beta' a'' + \beta'' a''' &= a^{\text{IV}}, & \beta b' + \beta' b'' + \beta'' b''' &= b^{\text{IV}}, \\ \gamma a'' + \gamma' a''' + \gamma'' a^{\text{IV}} &= a^{\text{V}}, & \gamma b'' + \gamma' b''' + \gamma'' b^{\text{IV}} &= b^{\text{V}}, \\ \delta a''' + \delta' a^{\text{IV}} + \delta'' a^{\text{V}} &= a^{\text{VI}}, & \delta b''' + \delta' b^{\text{IV}} + \delta'' b^{\text{V}} &= b^{\text{VI}} \\ \ldots & & \ldots \end{aligned}$$

Coëfficientes harum aequationum β, γ etc., β', γ' etc., β'', γ'' etc. accipere licet ex antecedentibus numeros integros tales, ut simul fiat, signorum respectu non habito,

$$a^{\text{IV}} < \tfrac{1}{2}a''', \quad a^{\text{V}} < \tfrac{1}{2}a^{\text{IV}}, \quad a^{\text{VI}} < \tfrac{1}{2}a^{\text{V}}, \quad \text{etc.}$$
$$b^{\text{IV}} < \tfrac{1}{2}b''', \quad b^{\text{V}} < \tfrac{1}{2}b^{\text{IV}}, \quad b^{\text{VI}} < \tfrac{1}{2}b^{\text{V}}, \quad \text{etc.}$$

Unde liquet, duarum serierum

$$a'', \ a''', \ a^{\text{IV}}, \ a^{\text{V}}, \ a^{\text{VI}}, \ \ldots$$
$$b'', \ b''', \ b^{\text{IV}}, \ b^{\text{V}}, \ b^{\text{VI}}, \ \ldots$$

terminos, si satis illae continuentur, ulla data quantitate minores fieri.

Sint duarum serierum termini sibi respondentes $a^{(n)}, b^{(n)}$, data quantitate minores. Si formationem aequationum respicis, quibus quantitates illae ab antecedentibus pendent, sine negotio patet, eas per ipsas a, a', a'' atque b, b', b'' exprimi posse ope aequationum:

$$a^{(n)} = ma + m'a' + m''a'',$$
$$b^{(n)} = mb + m'b' + m''b'',$$

in quibus coëfficientes m, m', m'' sunt numeri integri. In utraque porro aequatione hos coëfficientes eosdem esse, cum quantitates $a^{(n)}, b^{(n)}$ resp. per easdem aequationes a terminis eas antecedentibus pendeant. Unde evictum est, quod propositum erat, determinari posse numeros integros (positivos aut negativos) m, m', m'' tales, ut utraque simul expressio

$$ma + m'a' + m''a'',$$
$$mb + m'b' + m''b''$$

data quantitate minor evadat.

Algorithmus assignatus, quo serierum duarum termini alii post alios inveniuntur, non turbatur, si in altera serie evanescit terminus. Tum quidem

proximus terminus semisse eius minor non fit, cum termino evanescente minor non detur, si signa non respicimus. At facile patet, evanescente alterius seriei termino, proximum minorem reddi posse quam ullam quantitatem datam. Sit ex. gr. $a'' = 0$, invenitur terminus proximus

$$a''' = -a'\Delta,$$

ubi Δ data quavis quantitate minor reddi poterat. Hoc igitur termino usus, ulla data quantitate minore, continuabis algorithmum, dum etiam alterius seriei termini data quantitate minores fiunt. Neque simul in utraque serie termini sibi respondentes evanescere possunt. Nam ubi simul haberetur

$$a^{(n)} = 0, \quad b^{(n)} = 0,$$

darentur numeri m, m', m'', pro quibus simul

$$a^{(n)} = ma + m'a' + m''a'' = 0$$
$$b^{(n)} = mb + m'b' + m''b'' = 0,$$

ideoque etiam

$$mi + m'i' + m''i'' = 0.$$

Quod fieri non posse, vidimus §. 2., nisi tres periodos e duabus componere liceat.

Algorithmus assignatus porro supponit, numquam haberi

$$a^{(n)}b^{(n+1)} - a^{(n+1)}b^{(n)} = 0,$$

quod hoc modo patet. Sit enim

$$a^{(n+1)} = pa + p'a' + p''a'', \quad b^{(n+1)} = pb + p'b' + p''b''.$$

Erit

$$\begin{aligned} 0 &= a^{(n)}b^{(n+1)} - a^{(n+1)}b^{(n)} \\ &= (m'p'' - m''p')(a'b'' - a''b') + (m''p - mp'')(a''b - ab'') + (mp' - m'p)(ab' - a'b). \end{aligned}$$

Quam aequationem locum habere non posse, §. 2. demonstratum est.

4.

Si statuimus

$$a^{(n)} + b^{(n)}\sqrt{-1} = i^{(n)},$$

patet, $i''', i^{\text{IV}}, i^{\text{V}}$ etc. fore indices functionis propositae. Indicavimus igitur certum quemdam algorithmum, quo, datis tribus indicibus imaginariis, formatur series infinita indicum, quorum pars realis simul atque pars imaginaria ulla data quantitate minor evadit neque tamen simul evanescere potest. Unde omnibus casibus evictum est, *si functio proposita tribus periodis gaudeat, aut eas e duabus componi, aut eam habere indicem omni data quantitate minorem.* Quod cum absurdum sit, *functio tripliciter periodica non datur.*

Bono iure igitur dixisse videmur, duplici periodo universam confici periodicitatem. Sed hoc tantum de functionibus unius variabilis valet. Si functiones plurium variabilium consideras, longe abest, ut in duplici periodo consistendum sit.

Exempla functionum plurium variabilium, quae pluribus quam duabus periodis gaudent, suppeditant functiones illae, quas primus consideravi in Commentatiuncula *de transcendentibus Abelianis* (Diar. *Crell.* Vol. IX. pag. 394)*). Sed res gravissima altius repetenda est.

Sit

$$u = C + \frac{2A}{\pi}\cdot\varphi + A_1\sin 2\varphi + A_2\sin 4\varphi + A_3\sin 6\varphi + \cdots$$

series pro valoribus omnibus realibus ipsius φ convergens. Statuamus, x esse ipsius $\sin^2\varphi$ functionem plane determinatam, ex. gr. functionem rationalem. Mutato φ in $\varphi+\pi$, non mutabitur x, mutabitur vero u in $u+2A$. Hinc, posito

$$x = \lambda(u),$$

fit

$$\lambda(u+2A) = \lambda(u).$$

Erit igitur $\lambda(u)$ functio periodica, eiusque index $2A$.

Consideremus iam integrale huiusmodi:

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}} = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

designantibus $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 quantitates reales, positivas, unitate minores. Cuius integralis examinemus valores, quos induit, crescente x per valores reales a $-\infty$ usque ad $+\infty$. Sit $\varkappa^2<\lambda^2<\mu^2$: distinguemus intervalla sex, in quibus x versari potest:

1. $-\infty\cdots 0$, 2. $0\cdots 1$, 3. $1\cdots\frac{1}{\varkappa^2}$,
4. $\frac{1}{\varkappa^2}\cdots\frac{1}{\lambda^2}$, 5. $\frac{1}{\lambda^2}\cdots\frac{1}{\mu^2}$, 6. $\frac{1}{\mu^2}\cdots\infty$.

Pro intervallo primo, tertio, quinto erit valor ipsius X negativus, pro secundo, quarto, sexto positivus. Quaeramus iam, quomodo pro singulis intervallis illis

*) Pag. 7 huius Vol.

ipsum x ita per $\sin^2\varphi$ exprimatur, ut integrale propositum u in seriem infinitam convergentem formae, quam assignavimus,

$$u = C + \frac{2A}{\pi}\cdot\varphi + A_1\sin 2\varphi + A_2\sin 4\varphi + A_3\sin 6\varphi + \cdots$$

evolvi possit. Quo facto, posito $x=\lambda(u)$, erit functio $\lambda(u)$ periodica, eiusque index $2A$, ubi

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{d\varphi}\cdot d\varphi.$$

1°. Si ipsi x convenit valor negativus quicunque, ponatur

(1.) $$x = \frac{-1}{\mu^2\operatorname{tg}^2\varphi};$$

crescente x per valores negativos a $-\infty$ ad 0, crescit φ a 0 ad $\frac{\pi}{2}$. Facta substitutione, posito brevitatis causa

$$\varkappa'^2 = 1-\varkappa^2,\quad \lambda'^2 = 1-\lambda^2,\quad \mu'^2 = 1-\mu^2,$$

eruitur:

$$\int_{-\infty}^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{-X}} = \frac{2}{\varkappa\lambda}\int_0^\varphi \frac{[(\alpha\mu^2+\beta)\sin^2\varphi-\beta]\,d\varphi}{\sqrt{(1-\mu'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa^2-\mu^2}{\varkappa^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Unde posito

$$u_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{-X}} = \frac{2}{\varkappa\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[(\alpha\mu^2+\beta)\sin^2\varphi-\beta]\,d\varphi}{\sqrt{(1-\mu'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa^2-\mu^2}{\varkappa^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)}},$$

erit

$$u = \frac{u_1}{\sqrt{-1}} + \frac{2\sqrt{-1}}{\varkappa\lambda}\int_0^\varphi \frac{[(\alpha\mu^2+\beta)\sin^2\varphi-\beta]\,d\varphi}{\sqrt{(1-\mu'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa^2-\mu^2}{\varkappa^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Iam observo, integrale huiusmodi

$$\int_0^\varphi \frac{(m+n\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-p^2\sin^2\varphi)(1-q^2\sin^2\varphi)(1-r^2\sin^2\varphi)}},$$

quoties p^2, q^2, r^2 reales unitate minores, semper evolvi posse in seriem convergentem formae

$$\frac{2A}{\pi}\cdot\varphi + A_1\sin 2\varphi + A_2\sin 4\varphi + A_3\sin 6\varphi + \ldots,$$

ubi

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(m+n\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-p^2\sin^2\varphi)(1-q^2\sin^2\varphi)(1-r^2\sin^2\varphi)}}.$$

Unde u in formam propositam evolvere licet; atque fit

$$C = \frac{u_1}{\sqrt{-1}}, \quad A = u_1\sqrt{-1}.$$

Posito igitur $x=\lambda(u)$, erit $\lambda(u)$ functio periodica, cuius index $2u_1\sqrt{-1}$, sive erit

$$\lambda(u+2u_1\sqrt{-1}) = \lambda(u).$$

2°. Si x inter 0 et 1, pono

$$(2.) \qquad x = \sin^2\varphi;$$

fit

$$u = 2\int_0^{\varphi} \frac{[\alpha+\beta\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}}.$$

Unde posito

$$u_2 = \int_0^1 \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\alpha+\beta\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}},$$

ipsam u in formam assignatam evolvere licet, cuius coëfficientes primi erunt

$$C = 0, \quad A = u_2.$$

Erit igitur functionis $x=\lambda(u)$ alter index $2u_2$, sive erit etiam

$$\lambda(u+2u_2) = \lambda(u).$$

3°. Sit x inter 1 et $\frac{1}{\varkappa^2}$, pono

$$(3.) \qquad x = \frac{1}{\cos^2\varphi+\varkappa^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{1-\varkappa'^2\sin^2\varphi}.$$

Integrale u cum a 0 usque ad x sumatur, intervallum in duo divido, alterum inter 0 et 1, alterum inter 1 et x. Quo facto, post substitutionem adhibitam eruimus:

$$u = u_2 + \frac{2\sqrt{-1}}{\lambda'\mu'}\int_0^{\varphi} \frac{[\alpha+\beta-\alpha\varkappa'^2\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa'^2}{\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa'^2}{\mu'^2}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Unde posito

$$u_3 = \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{-X}} = \frac{2}{\lambda'\mu'}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\alpha+\beta-\alpha\varkappa'^2\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa'^2}{\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa'^2}{\mu'^2}\sin^2\varphi\right)}},$$

ipsam u in seriem formae propositae evolvere licet, cuius primi coëfficientes erunt

$$C = u_2, \quad A = u_3\sqrt{-1}.$$

Unde functio $x=\lambda(u)$ etiam indice gaudet $2u_3\sqrt{-1}$, sive erit etiam

$$\lambda(u+2u_3\sqrt{-1}) = \lambda(u).$$

4°. Procedimus ad intervallum quartum inter $\frac{1}{\varkappa^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$; in quo si x versatur, pono

$$(4.) \qquad x = \frac{\lambda'^2\cos^2\varphi+\varkappa'^2\sin^2\varphi}{\varkappa^2\lambda'^2\cos^2\varphi+\lambda^2\varkappa'^2\sin^2\varphi} = \frac{\lambda'^2-(\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi}{\varkappa^2\lambda'^2-(\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi},$$

quo facto, crescente x a $\frac{1}{\varkappa^2}$ usque ad $\frac{1}{\lambda^2}$, crescit φ a 0 usque ad $\frac{\pi}{2}$. Facta substitutione, integrale propositum abit in hoc,

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} =$$

$$u_2+u_3\sqrt{-1} - \frac{2}{\varkappa\lambda'^3\sqrt{\varkappa^2-\mu^2}}\int_0^{\varphi} \frac{[\lambda'^2(\alpha\varkappa^2+\beta)-(\varkappa^2-\lambda^2)(\alpha+\beta)\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{\varkappa^2\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\mu'^2(\varkappa^2-\lambda^2)}{\lambda'^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Quod cum rursus in formam assignatam evolvere liceat, habentur, posito

$$u_4 = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} =$$

$$\frac{2}{\varkappa\lambda'^3\sqrt{\varkappa^2-\mu^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\lambda'^2(\alpha\varkappa^2+\beta)-(\varkappa^2-\lambda^2)(\alpha+\beta)\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{\varkappa^2\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\mu'^2(\varkappa^2-\lambda^2)}{\lambda'^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)}},$$

evolutionis coëfficientes primi:

$$C = u_2+u_3\sqrt{-1}, \quad A = u_4;$$

unde functio $x=\lambda(u)$ habet indicem $2u_4$, sive fit etiam:

$$\lambda(u+2u_4) = \lambda(u).$$

5°. Quinto loco sit x inter $\frac{1}{\lambda^2}$ et $\frac{1}{\mu^2}$, quo casu ponimus:

$$(5.)\quad x = \frac{(\varkappa^2-\mu^2)\cos^2\varphi+(\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)\cos^2\varphi+\mu^2(\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi} = \frac{\varkappa^2-\mu^2-(\lambda^2-\mu^2)\sin^2\varphi}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)-\varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)\sin^2\varphi},$$

quo facto rursus, crescente x a $\frac{1}{\lambda^2}$ ad $\frac{1}{\mu^2}$, crescit φ a 0 ad $\frac{\pi}{2}$. Transacta substitutione, obtinemus:

$$u = u_2+u_3\sqrt{-1}-u_4$$

$$-\frac{2\sqrt{-1}}{\lambda\lambda'\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)^3}}\int_0^{\varphi}\frac{[(\varkappa^2-\mu^2)(\alpha\lambda^2+\beta)-(\lambda^2-\mu^2)(\alpha\varkappa^2+\beta)\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{\varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\varkappa^2-\mu^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa'^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda'^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Quam expressionem rursus patet in formam assignatam evolvi posse, eruntque, posito

$$u_5 = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{-X}}$$

$$=\frac{2}{\lambda\lambda'\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[(\varkappa^2-\mu^2)(\alpha\lambda^2+\beta)-(\lambda^2-\mu^2)(\alpha\varkappa^2+\beta)\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{\varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\varkappa^2-\mu^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa'^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda'^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)}},$$

evolutionis factae coëfficientes primi

$$C = u_2+u_3\sqrt{-1}-u_4,\quad A = -u_5\sqrt{-1}.$$

Unde functio $x=\lambda(u)$ etiam habebit indicem $2u_5\sqrt{-1}$, sive erit

$$\lambda(u+2u_5\sqrt{-1}) = \lambda(u).$$

6°. Denique si x in intervallo sexto versatur, inter $\frac{1}{\mu^2}$ et ∞, pono

$$(6.)\qquad x = \frac{1}{\mu^2}+\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2\mu^2}\operatorname{tg}^2\varphi,$$

provenit

$$u = u_2+u_3\sqrt{-1}-u_4-u_5\sqrt{-1}$$

$$+\frac{2}{\lambda^3\mu'\sqrt{\varkappa^2-\mu^2}}\int_0^{\varphi}\frac{[\lambda^2(\alpha\mu^2+\beta)-\mu^2(\alpha\lambda^2+\beta)\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda'^2\mu^2}{\mu'^2\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{(\varkappa^2-\lambda^2)\mu^2}{(\varkappa^2-\mu^2)\lambda^2}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Qua expressione in formam assignatam evoluta, quod licet, positoque

$$u_6 = \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}}$$

$$=\frac{2}{\lambda^3\mu'\sqrt{\varkappa^2-\mu^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[\lambda^2(\alpha\mu^2+\beta)-\mu^2(\alpha\lambda^2+\beta)\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda'^2\mu^2}{\mu'^2\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{(\varkappa^2-\lambda^2)\mu^2}{(\varkappa^2-\mu^2)\lambda^2}\sin^2\varphi\right)}},$$

habentur coëfficientes primi evolutionis

$$C = u_2+u_3\sqrt{-1}-u_4-u_5\sqrt{-1},\quad A = u_6,$$

unde functio $x=\lambda(u)$ etiam indicem $2u_6$ habet, sive erit

$$\lambda(u+2u_6) = \lambda(u).$$

Unde iam demonstravimus, quod propositum erat, quomodo pro valoribus omnibus realibus ipsius x, integrale propositum

$$u = \int_0^x\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}},$$

evolvi possit in seriem convergentem formae

$$u = C+\frac{2A}{\pi}\cdot\varphi+A_1\sin 2\varphi+A_2\sin 4\varphi+A_3\sin 6\varphi+\cdots.$$

Atque sex evolutiones inter se diversae, quas pro intervallis sex, in quibus x versari potest, assignavimus, suggerebant totidem functionis periodicae $x=\lambda(u)$ indices.

5.

Antecedentibus pro singulis intervallis eas adhibuimus substitutiones, quibus integrale propositum in eandem semper formam abeat

$$C+\int_0^{\varphi}\frac{(m+n\sin^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{(1-p^2\sin^2\varphi)(1-q^2\sin^2\varphi)(1-r^2\sin^2\varphi)}},$$

ubi p^2, q^2, r^2 unitate minores, simulque, crescente x a limite inferiore intervalli ad superiorem, crescat φ a 0 ad $\frac{\pi}{2}$. Idem pro singulis intervallis per alteram quoque substitutionem formae eiusdem

$$x = \frac{d+e\sin^2\varphi}{f+g\sin^2\varphi},$$

praestari potest, ita ut, variabili x a limite inferiore crescente ad superiorem, simul φ a $\frac{\pi}{2}$ ad 0 decrescat. Generalius Cl. Richelot in commentatione, quae mox lucem videbit, demonstravit, designante X functionem rationalem integram quamcunque sexti ordinis, quae in factores lineares reales resolvi possit, integrale

$$u = \int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

per duodecim substitutiones reales formae

$$x = \frac{d+e\sin^2\varphi}{f+g\sin^2\varphi}$$

in formam redigi posse

$$\int \frac{(m+n\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-p^2\sin^2\varphi)(1-q^2\sin^2\varphi)(1-r^2\sin^2\varphi)}},$$

ubi p^2, q^2, r^2 reales, positivae, unitate minores. Idem ille casui generali applicuit, quo X cuiuslibet $2n^{ti}$ ordinis est. Ad quem igitur casum etiam considerationes antecedentes extendere licuit. Ceterum per innumeras alias substitutiones perveniri poterat ad formam integralis, quae evolutionem in seriem convergentem secundum cosinus aut sinus multiplorum ciusdem anguli procedentem permittit, qua unica hic opus est. Neque tamen per alias substitutiones perveniri potest ad alios indices, nisi qui ex indicibus, a nobis assignatis, componuntur.

At ipsi quoque indices, quos assignavimus, tres reales et tres imaginarii, ita inter se comparati sunt, ut unum realem e duobus reliquis realibus, unum imaginarium e duobus reliquis imaginariis componere liceat. Quod sequentibus comprobemus.

Integrale propositum

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

determinatum non est, nisi pro singulis intervallis de signo radicalis conventum sit. Iam cum pro proximo quoque intervallo novus factor expressionis, quae sub radicali est, signum mutet, statuimus, inde multiplicationem nasci per eandem semper quantitatem $\sqrt{-1}$, ita ut expressioni $\frac{1}{\sqrt{X}}$ in intervallis assignatis resp. signa conveniant

$$-\sqrt{-1}, \quad +, \quad +\sqrt{-1}, \quad -, \quad -\sqrt{-1}, \quad +,$$

si etiam praefixum $\pm\sqrt{-1}$ signis adnumerare licet. His statutis, nanciscimur, adhibitis ipsarum u_1, u_2 etc. valoribus supra propositis,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} = -u_1\sqrt{-1}+u_2+u_3\sqrt{-1}-u_4-u_5\sqrt{-1}+u_6.$$

Iam cum posito $\frac{1}{x}$ loco x duo limites coincidant, coniicio, fore

$$0 = -u_1\sqrt{-1}+u_2+u_3\sqrt{-1}-u_4-u_5\sqrt{-1}+u_6;$$

sive

$$u_1+u_5 = u_3, \quad u_2+u_6 = u_4,$$

vel quod idem est:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{-X}} + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{-X}} = \int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{-X}},$$

$$\int_{0}^{1} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

quibus in aequationibus $\sqrt{-X}$ et $\sqrt{X}$ resp. semper positivae accipiantur. Sed cum propter ambiguitatem radicalis $\sqrt{X}$ aliam formularum antecedentium memorabilium demonstrationem desideremus, deducemus easdem de casu speciali theorematis Abeliani. Quem hic accuratius exponemus.

6.

Consideremus aequationem cubicam sequentem

$$f(x) = x(1-\varkappa^2 x)(1-\mu^2 x)-h(1-x)(1-\lambda^2 x) = 0,$$

cuius radices tres spectamus ut functiones ipsius h. Sit rursus

$$1 > \varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2;$$

si h est positiva, posito

$$x = -\infty, \quad 0, \quad 1, \quad \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{1}{\mu^2}, \quad +\infty,$$

functio $f(x)$ signis afficitur:

$$-, \quad -, \quad +, \quad +, \quad -, \quad -, \quad +.$$

Unde aequationis cubicae radices tres sunt reales, una inter 0 et 1, secunda inter $\frac{1}{\varkappa^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$, tertia inter $\frac{1}{\mu^2}$ et $+\infty$. Si h est negativa, pro iisdem ipsius x valoribus functio $f(x)$ resp. afficitur signis:

$$-, \quad +, \quad +, \quad -, \quad -, \quad +, \quad +.$$

Unde hoc quoque casu aequationis cubicae tres radices reales sunt, prima negativa, reliquae positivae, et secunda quidem inter 1 et $\frac{1}{\varkappa^2}$, tertia inter $\frac{1}{\lambda^2}$ et $\frac{1}{\mu^2}$ posita.

Aequatione proposita differentiata, facile prodit:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{h\,dx} &= \frac{1}{x}+\frac{1-\varkappa^2}{(1-x)(1-\varkappa^2x)}+\frac{\lambda^2-\mu^2}{(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)}\\ &= \frac{1}{x(1-x)}-\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)}-\frac{\mu^2}{1-\mu^2x}.\end{aligned}$$

Haec formula docet,

1) si h sit positiva, atque x aut inter 0 et 1, aut inter $\frac{1}{\varkappa^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$, aut $\frac{1}{\mu^2}$ et $+\infty$,

2) si h sit negativa, atque x aut negativa, aut inter 1 et $\frac{1}{\varkappa^2}$, aut inter $\frac{1}{\lambda^2}$ et $\frac{1}{\mu^2}$,

expressionem $\frac{dx}{dh}$ semper fieri positivam. Unde utroque casu, quo h aut positiva est aut negativa, aequationis cubicae radices tres omnes simul cum h continuo crescunt vel decrescunt. Iam

$$\begin{array}{llll} \text{posito} & h = -\infty, & \text{fiunt radices} & -\infty,\ 1,\ \frac{1}{\lambda^2},\\ \text{-\ -} & h = 0, & \text{-\ -\ -} & 0,\ \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{1}{\mu^2},\\ \text{-\ -} & h = +\infty, & \text{-\ -\ -} & 1,\ \frac{1}{\lambda^2},\ +\infty. \end{array}$$

Unde si resp. vocamus utroque casu a, b, c radices, quae magnitudine se excipiunt, quas diximus primam, secundam, tertiam, videmus, continuo crescere simul:

h ab 0 ad $+\infty$, a ab 0 ad 1, b ab $\frac{1}{\varkappa^2}$ ad $\frac{1}{\lambda^2}$, c ab $\frac{1}{\mu^2}$ ad $+\infty$,

h ab $-\infty$ ad 0, a ab $-\infty$ ad 0, b ab 1 ad $\frac{1}{\varkappa^2}$, c ab $\frac{1}{\lambda^2}$ ad $\frac{1}{\mu^2}$.

Unde simul etiam continuo crescunt:

h ab $-\infty$ ad 0, a ab $-\infty$ ad 1, b ab 1 ad $\frac{1}{\lambda^2}$, c ab $\frac{1}{\lambda^2}$ ad $+\infty$.

Iam statuamus, crescente h ab h_0 ad h_1, simul crescere a ab a_0 ad a_1, b ab b_0 ad b_1, c ab c_0 ad c_1. Posito

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x),$$

habetur e differentiatione aequationis propositae:

$$f'(x)dx-(1-x)(1-\lambda^2x)dh = 0,$$

vel si substituitur

$$(1-x)(1-\lambda^2x)\sqrt{h} = \sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)} = \sqrt{X},$$

habetur, multiplicatione facta per $\alpha+\beta x$:

$$\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = \frac{(\alpha+\beta x)dh}{f'(x).\sqrt{h}}.$$

Si in hac formula loco x ponimus tres eius valores $a, b, c,$ prodeunt formulae tres:

$$\begin{aligned}\int_{a_0}^{a_1}\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} &= \int_{h_0}^{h_1}\frac{(\alpha+\beta a)dh}{f'(a).\sqrt{h}},\\ \int_{b_0}^{b_1}\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} &= \int_{h_0}^{h_1}\frac{(\alpha+\beta b)dh}{f'(b).\sqrt{h}},\\ \int_{c_0}^{c_1}\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} &= \int_{h_0}^{h_1}\frac{(\alpha+\beta c)dh}{f'(c).\sqrt{h}}.\end{aligned}$$

Iam cum e theoremate algebraico notissimo habeatur:

$$\frac{\alpha+\beta a}{f'(a)}+\frac{\alpha+\beta b}{f'(b)}+\frac{\alpha+\beta c}{f'(c)} = 0,$$

provenit, tres formulas propositas summando, si $\sqrt{h}$ in iis eodem signo accipitur,

$$\varepsilon\int_{a_0}^{a_1}\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}}+\varepsilon_1\int_{b_0}^{b_1}\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}}+\varepsilon_2\int_{c_0}^{c_1}\frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = 0;$$

factoribus ε, ε_1, ε_2, qui propter ambiguitatem radicalis adiiciendi erant, aut $+1$ aut -1 designantibus.

Ad determinandos factores ε, ε_1, ε_2 observo, in calculum nostrum introductum esse radicale $\sqrt{X}$ in locum expressionis

$$\sqrt{X} = \sqrt{h}(1-x)(1-\lambda^2x),$$

quae eodem signo affecta est, si x inter $-\infty$ et 1 atque si x inter $\frac{1}{\lambda^2}$ et $+\infty$, signo opposito, si x inter 1 et $\frac{1}{\lambda^2}$; sive pro prima et tertia radice a et c eodem, pro secunda b opposito signo affecta erit. Unde statui debet:

$$\varepsilon = -\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Quo facto aequatio nostra fit:

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} + \int_{c_0}^{c_1} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = \int_{b_0}^{b_1} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}}.$$

In qua formula tria radicalia $\sqrt{X}$ eodem signo accipi debent.

Vidimus, simul haberi

$$a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad c_0 = \frac{1}{\mu^2},$$

et

$$a_1 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad c_1 = +\infty,$$

qui valores respondent valoribus

$$h_0 = 0, \quad h_1 = +\infty.$$

Quibus substitutis, e formula proposita fluit:

$$\int_0^1 \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}}.$$

Porro simul habentur

$$a_0 = -\infty, \quad b_0 = 1, \quad c_0 = \frac{1}{\lambda^2},$$
$$a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad c_1 = \frac{1}{\mu^2},$$

qui valores respondent ipsius h valoribus

$$h_0 = -\infty, \quad h_1 = 0.$$

Unde e formula proposita, ubi simul per $\sqrt{-1}$ divisionem facimus, fluit:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{-X}} + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{-X}} = \int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{-X}}.$$

Quibus in formulis tria radicalia $\sqrt{X}$ aut $\sqrt{-X}$ eodem signo accipienda sunt.

Quae sunt formulae, quas demonstrandas proposuimus, deductae e formula generaliori de integralibus indefinitis proposita.

In quaestione antecedente suppositum erat, h ipsam x non continere; theorema, a Cl. Abel propositum, suppositione nititur multo generaliore, h esse quadratum cuiuslibet functionis rationalis ipsius x.

7.

Antecedentibus probatum est, sex indices a nobis inventos

$$u_1\sqrt{-1}, \quad u_2, \quad u_3\sqrt{-1}, \quad u_4, \quad u_5\sqrt{-1}, \quad u_6$$

revocari ad quatuor ope formularum

$$u_1 + u_5 = u_3, \quad u_2 + u_6 = u_4.$$

Quos indices statuamus

$$u_2, \quad u_6: \quad u_1\sqrt{-1}, \quad u_5\sqrt{-1}.$$

Neque generaliter u_2 et u_6 aut $u_1\sqrt{-1}$ et $u_5\sqrt{-1}$ revocari poterunt ad eundem indicem, sive erunt u_2 et u_6 nec non u_1 et u_5 inter se incommensurabiles. Unde functio $x = \lambda(u)$ habebit quatuor indices, qui ad minorem numerum revocari non possunt, sive erit illa quadrupliciter periodica. Sed iam tripliciter periodicam non dari, supra pluribus demonstratum est. Hunc vero casum, quo duo indices incommensurabiles sunt reales, duo incommensurabiles imaginarii formae $u_1\sqrt{-1}$, $u_5\sqrt{-1}$, absurdum esse, iam e §. 1 constat. Darentur enim ex iis, quae ibi diximus, functionis $x = \lambda(u)$ indices Δ et $\Delta'\sqrt{-1}$, ubi Δ et Δ' sunt quantitates reales minores quantitate data quantumvis parva. Unde functione $\lambda(u)$ immutata manente, ipsum u induere posset valores omnes reales aut imaginarios, sive e numero valorum, quos ipsum u induere potest functione $\lambda(u)$ immutata manente, semper forent, qui a data qualibet quantitate reali aut imaginaria minus differrent quam ulla quantitate data quantumvis parva. Quod absurdum est.

In plures adhuc periodos incideremus, si functio X, quae sub radicali invenitur, ad altiorem quam quintum aut sextum ordinem ascendit. Generaliter enim, si X est $2n^{\text{ti}}$ aut $(2n-1)^{\text{ti}}$ ordinis, atque posito

$$u = \int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}},$$

ubi $f(x)$ est functio quaelibet data rationalis integra, spectatur x ut functio ipsius u, functio habebit $2n-2$ indices, qui ad minorem numerum, nisi casibus specialibus, revocari nequeunt; eorumque erunt, si coëfficientes functionis X sunt quantitates reales, $n-1$ reales, $n-1$ imaginarii.

Eodem enim modo, atque supra, pro casu generali demonstrantur sequentia. Sit

$$X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\varkappa_1^2 x)\ldots(1-\varkappa_{2n-4}^2 x),$$

ubi

$$1 > \varkappa^2 > \varkappa_1^2 \ldots > \varkappa_{2n-5}^2 > \varkappa_{2n-4}^2;$$

aequatio n^{ti} ordinis

$$x(1-\varkappa^2 x)(1-\varkappa_2^2 x)\ldots(1-\varkappa_{2n-4}^2 x) = h(1-x)(1-\varkappa_1^2 x)\ldots(1-\varkappa_{2n-5}^2 x)$$

habet n radices reales; quas si vocamus $a_1, a_2, \ldots a_n$, ordine magnitudinis se insequentes, crescente h a $-\infty$ ad 0, ac deinde a 0 ad $+\infty$, crescit

$$a_1 \text{ a } -\infty \text{ ad } 0, \qquad \text{ac deinde a } 0 \text{ ad } 1,$$

$$a_2 \text{ a } 1 \text{ ad } \frac{1}{\varkappa^2}, \qquad \text{ac deinde a } \frac{1}{\varkappa^2} \text{ ad } \frac{1}{\varkappa_1^2},$$

ac generaliter

$$a_m \text{ a } \frac{1}{\varkappa_{2m-5}^2} \text{ ad } \frac{1}{\varkappa_{2m-4}^2} \qquad \text{ac deinde a } \frac{1}{\varkappa_{2m-4}^2} \text{ ad } \frac{1}{\varkappa_{2m-3}^2},$$

ac postremo

$$a_n \text{ a } \frac{1}{\varkappa_{2n-5}^2} \text{ ad } \frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2} \qquad \text{ac deinde a } \frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2} \text{ ad } +\infty.$$

Iam si crescente h a $h^{(0)}$ ad h' crescit a_m a $a_m^{(0)}$ ad a'_m, erit:

$$\int_{a_1^{(0)}}^{a'_1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} - \int_{a_2^{(0)}}^{a'_2} \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} + \ldots \pm \int_{a_n^{(0)}}^{a'_n} \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = 0,$$

designante $f(x)$ functionem quamlibet rationalem integram ordinis $n-2$. De qua formula proveniunt duae speciales:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{f(x)dx}{\sqrt{-X}} - \int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{f(x)dx}{\sqrt{-X}} + \int_{\frac{1}{\varkappa_1^2}}^{\frac{1}{\varkappa_2^2}} \frac{f(x)dx}{\sqrt{-X}} \ldots \pm \int_{\frac{1}{\varkappa_{2n-5}^2}}^{\frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2}} \frac{f(x)dx}{\sqrt{-X}} = 0,$$

$$\int_{0}^{1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} - \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\varkappa_1^2}} \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\varkappa_2^2}}^{\frac{1}{\varkappa_3^2}} \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} \ldots \pm \int_{\frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2}}^{\infty} \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = 0.$$

Quibus in formulis n radicalia $\sqrt{X}$ aut $\sqrt{-X}$ eodem signo accipienda sunt.

Eruntque $2n$ integralia definita apposita duplicata, si in n prioribus loco $\sqrt{-X}$ scribimus $\sqrt{X}$, indices functionis $x = \lambda(u)$, n reales et n imaginarii, qui per aequationes duas antecedentes ad $n-1$ reales, $n-1$ imaginarios revocantur; nec nisi casibus specialibus, ad minorem numerum revocari possunt.

8.

E praemissis concludimus:

»*quemadmodum arcus circulares pro eodem sinu innumeros valores induunt inter se aequidistantes, quemadmodum eiusdem numeri dantur innumeri logarithmi, eadem quantitate imaginaria inter se distantes; quemadmodum integralia elliptica pro eodem sinu amplitudinis numero valorum dupliciter infinito gaudent, quippe quorum et partes reales et partes imaginariae simul innumeros valores induunt inter se aequidistantes: ita integralia Abeliana seu hyperelliptica, hoc est integralia, in quibus sub signo integrationis invenitur radix quadratica functionis altioris quam quarti gradus, tantam multiplicatem valorum secum ferunt, ut pro datis quibuslibet limitibus valores omnes induant reales aut imaginarios quoscunque, seu ut e numero valorum, quos idem integrale pro iisdem datis limitibus quibuslibet induere potest, semper sint, qui a dato quolibet valore reali aut imaginario minus differant quam ulla quantitate data quantumvis parva.*«

Patet ex antecedentibus, quoties X altioris quam quarti gradus sit, ipsum x non spectari posse ut functionem analyticam ipsius u; neque igitur videtur, methodos generales, quibus olim trigonometria analytica, et quibus nuper theoria functionum ellipticarum condita est, transcendentibus Abelianis applicari posse. At, quod feliciter evenit in hac quasi desperatione, ratio singularis, quam in commentatione anteriore, (Diar. *Crell.* Vol. IX. pag. 394 sqq., huius vol. p. 7 sqq.) a longe aliis considerationibus profecti explicuimus, qua unica, nostra sententia, transcendentes Abelianas in analysin introducere convenit, et hic difficultates amovet, quae e multiplicitate valorum integralis oriuntur. Rem, levi mutatione facta, paucis repetam.

9.

Sit rursus X functio rationalis integra quinti aut sexti ordinis; statuamus:

$$\int_a^x \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = u,$$

$$\int_a^x \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} = u',$$

designantibus $a, b, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ constantes. Considerari debent x, y ut radices aequationis quadraticae

$$Ux - U'x + U'' = 0,$$

in quibus U, U', U'' sunt functiones ipsarum u, u'. Quoties datur u ut summa plurium integralium

$$\int \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}},$$

simulque u' ut summa totidem integralium

$$\int \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}},$$

quae respective inter eosdem limites sumuntur: habentur e theoremate Abeliano U, U', U'' ut functiones *rationales* horum limitum valorumque, quos pro iisdem radicale $\sqrt{X}$ induit. Quo igitur casu binae aequationes transcendentes ad algebraicas revocantur. Hac ratione proponere convenit theorema Abelianum, si X quinti aut sexti ordinis est.

Exemplum simplicissimum huius ampli theorematis supra dedimus. Sequitur enim e supra probatis, si statuimus:

$$X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x),$$

ubi $1 > \varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2$, propositis duabus aequationibus transcendentibus,

$$\int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^y \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^z \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^y \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^z \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}},$$

determinari x, y e z ut radices aequationis quadraticae:

$$\frac{(1-z)(1-\lambda^2 z) . x(1-\varkappa^2 x)(1-\mu^2 x) - z(1-\varkappa^2 z)(1-\mu^2 z)(1-x)(1-\lambda^2 x)}{x-z} = 0,$$

sive

$$Ux^2 - U'x + U'' = 0,$$

ubi

$$\begin{aligned} U &= \varkappa^2\mu^2(1-z)(1-\lambda^2 z), \\ U' &= \varkappa^2+\mu^2+[\lambda^2-(\varkappa^2+\mu^2)(1+\lambda^2)-\varkappa^2\mu^2]z+\varkappa^2\mu^2(1+\lambda^2)z^2, \\ U'' &= (1-\varkappa^2 z)(1-\mu^2 z). \end{aligned}$$

Demonstravimus enim, alteram aequationem transcendentem locum habere, si x, y, z sint radices aequationis cubicae

$$x(1-\varkappa^2 x)(1-\mu^2 x) = h(1-x)(1-\lambda^2 x);$$

de qua aequatione eliminata h ope formulae

$$h = \frac{z(1-\varkappa^2 z)(1-\mu^2 z)}{(1-z)(1-\lambda^2 z)},$$

ac divisione facta per $x-z$, obtinemus duas reliquas radices x, y ut radices aequationis quadraticae propositae. Et cum aequatio illa nullo modo a constantibus α, β afficiatur, eaedem relationes algebraicae, inter x, y, z propositae, satisfaciunt etiam alteri aequationi transcendenti, in qua loco α, β inveniuntur constantes aliae α', β'. Neque novi quid adderetur, si adiungeremus aequationem tertiam transcendentem, in qua rursus aliae constantes α'', β'' loco α, β positae inveniuntur. Nam ubi per relationes inter x, y, z stabilitas satisfactum est duabus aequationibus transcendentibus propositis, inde alia aequatio

$$\int_0^x \frac{(m+nx)dx}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^y \frac{(m+nx)dx}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^z \frac{(m+nx)dx}{\sqrt{X}},$$

quaecunque sint constantes m, n, sua sponte fluit.

10.

Dedimus supra substitutiones sex formae

$$x = \frac{d+e\sin^2\varphi}{f+g\sin^2\varphi},$$

quarum ope pro intervallis diversis, in quibus x continetur, integrale

$$\int \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}}$$

in eam formam redegimus, quae evolutionem in seriem convergentem permittit huiusmodi:

$$\int_a^x \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = C + \frac{2A}{\pi}\cdot\varphi + A'\sin 2\varphi + A''\sin 4\varphi + A'''\sin 6\varphi + \ldots.$$

Substitutiones illae cum nullo modo pendeant a constantibus α, β, singulis casibus per eandem substitutionem etiam eruitur pro aliis constantibus α', β' evolutio convergens:

$$\int_a^x \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} = C' + \frac{2B}{\pi}\cdot\varphi + B'\sin 2\varphi + B''\sin 4\varphi + B'''\sin 6\varphi + \cdots$$

Pro dato alio valore y, sive eiusdem substitutionis ope sive alius,

$$y = \frac{d' + e' \sin^2 \psi}{f' + g' \sin^2 \psi},$$

pro intervallo, in quo y versatur, adhibendae, eruantur evolutiones sequentes convergentes:

$$\int_b^y \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = C_1 + \frac{2A_1}{\pi}\cdot\psi + A_1' \sin 2\psi + A_1'' \sin 4\psi + A_1''' \sin 6\psi + \cdots$$

$$\int_b^y \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} = C_1' + \frac{2B_1}{\pi}\cdot\psi + B_1' \sin 2\psi + B_1'' \sin 4\psi + B_1''' \sin 6\psi + \cdots.$$

Hinc posito

$$\int_a^x \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = u,$$

$$\int_a^x \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} = u',$$

videmus mutato φ in $\varphi + m\pi$, ψ in $\psi + m'\pi$, designantibus m, m' numeros integros positivos aut negativos quoslibet, mutari simul

$$u \text{ in } u + 2mA + 2m'A_1,$$
$$u' \text{ in } u' + 2mB + 2m'B_1,$$

neque simul mutari x, y. Hic sunt A, A_1 e quantitatibus sex, quas supra vocavimus

$$\frac{u_1}{\sqrt{-1}}, \quad u_2, \quad u_3\sqrt{-1}, \quad -u_4, \quad -u_5\sqrt{-1}, \quad u_6,$$

sive eaedem sive diversae, atque B, B_1 sunt quantitates, in quas A, A_1 abeunt, si loco α, β ponitur α', β'. Hinc, si sex quantitates illae, ubi loco α, β ponitur α', β', resp. abeunt in has:

$$\frac{u_1'}{\sqrt{-1}}, \quad u_2', \quad u_3'\sqrt{-1}, \quad -u_4', \quad -u_5'\sqrt{-1}, \quad u_6',$$

sequitur, designantibus m, m', m'', m''' numeros quoslibet integros, mutato

$$u \text{ in } u + \frac{2mu_1}{\sqrt{-1}} + 2m'u_2 + 2m''u_5\sqrt{-1} + 2m'''u_6$$

simulque

$$u' \text{ in } u' + \frac{2mu_1'}{\sqrt{-1}} + 2m'u_2' + 2m''u_5'\sqrt{-1} + 2m'''u_6',$$

non mutari x, y. Indices $2u_3\sqrt{-1}$, $2u_4$ ac respondentes $2u_3'\sqrt{-1}$, $2u_4'$ omisimus, cum ad reliquos revocentur. Inventum igitur est theorema sequens, de periodis transcendentium nostrarum fundamentale:

Theorema Fundamentale.

»*Posito*

$$X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x),$$

statuatur:

$$2\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{-X}} = i_1, \qquad 2\int_0^1 \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = i_2,$$

$$2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{-X}} = i_3, \qquad 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = i_4,$$

$$2\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{-X}} = i_1', \qquad 2\int_0^1 \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} = i_2',$$

$$2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{-X}} = i_3', \qquad 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} = i_4';$$

considerentur x, y ut functiones ipsarum u, u',

$$x = \lambda(u, u'), \qquad y = \lambda'(u, u'),$$

datae per aequationes:

$$\int_a^x \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{X}} = u,$$

$$\int_a^x \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}} = u',$$

erit:

$$\lambda\begin{pmatrix} u + mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4, \\ u' + mi_1'\sqrt{-1} + m'i_2' + m''i_3'\sqrt{-1} + m'''i_4' \end{pmatrix} = \lambda(u, u')$$

$$\lambda'\begin{pmatrix} u + mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4, \\ u' + mi_1'\sqrt{-1} + m'i_2' + m''i_3'\sqrt{-1} + m'''i_4' \end{pmatrix} = \lambda'(u, u'),$$

quicunque sint m, m', m'', m''' numeri integri positivi aut negativi.«

Genus periodicitatis, quod theoremate antecedente explicitum est, nihil habet, quod legibus functionum analyticarum obversetur. Sane quidem numeros m, m', m'', m''' ita semper determinare licet, ut expressionum

$$u + m'i_2 + m'''i_4 + (mi_1 + m''i_3)\sqrt{-1},$$
$$u' + m'i_2' + m'''i_4' + (mi_1' + m''i_3')\sqrt{-1}$$

alterutra a data quantitate qualibet

$$p + q\sqrt{-1}$$

minus differat quam ulla quantitate data quantumvis parva; neque tamen id generaliter effici potest, nisi simul iidem numeri ultra omnes limites crescunt; ita ut, altera expressione ad datam quantitatem infinite prope accedente, altera simul infinite magna evadat. Unde videmus, in functionibus nostris duarum variabilium quadrupliciter periodicis

$$x = \lambda(u, u'), \qquad y = \lambda'(u, u')$$

tum demum alterum argumentum fieri indeterminatum, si alterum in infinitum abeat. Quod nihil habet absurdi.

Videmus pro iisdem ipsarum x, y valoribus non alterum tantum argumentum certa quadam constante mutari posse, altero immutato manente, sed semper utrumque simul argumentum mutationem subire; ita ut alterius argumenti indice alterius index prorsus determinatus sit. Quae est istius periodicitatis proprietas characteristica, sine qua non locum habere possit.

11.

E theoremate Abeliano constat, positis

$$x = \lambda(u, u') \qquad y = \lambda'(u, u'),$$

functiones

$$x_n = \lambda(nu, nu'), \qquad y_n = \lambda'(nu, nu')$$

datas esse ut radices aequationis quadraticae

$$U_n x^2 - U'_n x + U''_n = 0,$$

in qua U_n, U'_n, U''_n sunt functiones ipsarum $x, y, \sqrt{X}, \sqrt{Y}$ rationales, si Y ipsius y eadem functio atque X ipsius x. Unde etiam patet, vice versa x, y e x_n, y_n per resolutionem aequationum algebraicarum obtineri. Quarum ordinem e theoremate fundamentali iam coniicis fore n^4. Quod pro $n = 2$ e theoremate Abeliano facile probas; atque idem adeo theorema facile suggerit resolutionem aequationis 16^{ti} gradus, quae in bisectione requiritur, per solas extractiones radicum quadraticarum. Quod alia occasione persequemur.

Si vero dantur transformationes, ex eodem theoremate facile coniicis, perveniri ad multiplicationem per quatuor transformationes n^{ti} ordinis, alias post alias applicatas; unde resolutio aequationis n^{4ti} gradus, quae in divisione in n partes requiritur, ad quatuor aequationes n^{ti} gradus revocatur, si divisionem indicum notam supponis. Hanc vero, etiam facile coniicis, si n sit numerus primus, pendere ab aequatione $(1+n+n^2+n^3)^{ti}$ gradus generaliter irresolubili et alia $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{ti}$ gradus, quae, illius radicibus ut notis suppositis, solutionem permittit. Atque erit etiam, si n primus, $1+n+n^2+n^3$ numerus transformationum eiusdem n^{ti} ordinis, e quo numero erunt $2(n+1)$ reales.

Scr. 14. Febr. 1834.

DE USU

THEORIAE INTEGRALIUM ELLIPTICORUM ET INTEGRALIUM ABELIANORUM

IN ANALYSI DIOPHANTEA.

AUCTORE

C. G. J. JACOBI

PROF. ORD. MATH. REGIOM.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 13. p. 353—355.

DE USU THEORIAE INTEGRALIUM ELLIPTICORUM ET INTEGRALIUM ABELIANORUM IN ANALYSI DIOPHANTEA.

Illustris Academia Petropolitana ante hos quatuor annos commentationes posthumas VV. Cll. Euler, Schubert, Fufs, quae nondum lucem viderant, in unum volumen collegit — nam quadragesimo anno post Euleri mortem eius adhuc quatuordecim commentationes publicandae restabant. In quo volumine pluribus commentationibus Eulerus tractat problema et quasi ad perfectionem ducit, quod diversis temporibus varia eius tentamina provocaverat, videlicet

> »dato numero rationali x, qui expressionem $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$ et ipsam rationalem reddit, alios eiusmodi innumeros valores ipsius x detegendi.«

In quibus commentationibus non adnotavit vir — quod bene est supplere — analysin solutionis ab eo traditae aliam non esse nisi multiplicationis integralium ellipticorum — quamquam utriusque analysis autorem consensum illum memorabilem non fugisse, probabile est.

Statuamus

$$f(x) = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4,$$

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

docet Eulerianum theorema de additione integralium ellipticorum,

I. »proposita aequatione transcendenti

$$\Pi(z) = \Pi(x)+\Pi(y),$$

simul et ipsum z et ipsum $\sqrt{f(z)}$ *rationaliter* exhiberi per $x, y, \sqrt{f(x)}, \sqrt{f(y)}$.«

Unde sequitur theorema:

II. »proposita aequatione

$$\Pi(y) = n\Pi(x),$$

ubi n numerus integer, simul et ipsum y et ipsum $\sqrt{f(y)}$ per x, $\sqrt{f(x)}$ *rationaliter* exhiberi,«

vel generalius

III. »proposita aequatione

$$\Pi(x) = m_1\Pi(x_1)+m_2\Pi(x_2)\cdots+m_n\Pi(x_n),$$

ubi $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sunt numeri integri quilibet positivi vel negativi, simul et ipsum x et radicale $\sqrt{f(x)}$ per $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et radicalia $\sqrt{f(x_1)}, \sqrt{f(x_2)}, \ldots, \sqrt{f(x_n)}$ *rationaliter* exprimi.«

Patet iam e theoremate II., si pro dato ipsius x uno valore rationali etiam $\sqrt{f(x)}$ rationale fiat, inde per analysin multiplicationis integralium ellipticorum innumeros alios valores rationales y deduci posse, qui et ipsum $\sqrt{f(y)}$ rationale reddant. Valores enim omnes y, qui aequationi

$$\Pi(y) = n\Pi(x)$$

satisfaciunt, in qua x datum valorem designat, et n numerum quemlibet integrum, e theoremate assignato proposito satisfaciunt. Ac reapse Euleri analysis, qua utitur in volumine citato (Mémoires posthumes de L. Euler, F. T. Schubert et N. Fufs ci-devant membres de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg) ad solvendum problema Diophanteum, prorsus eadem est atque ea, quam in Institutionibus Calculi Integralis aliisque locis ad aequationem transcendentem

$$\Pi(y) = n\Pi(x)$$

algebraice solvendam proposuit.

Patet porro e theoremate III., datis duobus valoribus rationalibus x_1, x_2, pro quibus etiam $\sqrt{f(x_1)}$, $\sqrt{f(x_2)}$ rationalia fiant, si neuter modo antecedentibus exposito ex altero derivari potest, praeter valores novos per methodum antecedentem ex iis deductos innumeros alios x, qui proposito satisfaciant, dari per aequationem

$$\Pi(x) = m_1\Pi(x_1)+m_2\Pi(x_2),$$

in quibus m_1, m_2 numeros quoslibet integros positivos vel negativos designant; et ita porro pro novis valoribus e tribus, quatuor, etc. datis derivandis.

Exceptionum casus proveniunt, si pro dato valore a fit $\Pi(a)$ pars aliquota indicis; siquidem ea, quae in commentationibus nostris de indicibus functionum ellipticarum proposuimus, ad formam generaliorem integralis $\Pi(x)$, qualem hic consideramus, extendis.

Si vero quaeris, quaenam e theoremate Abeliano, mira illa theorematis Euleriani amplificatione, in artem Diophanteam incrementa redundent, facile e theoremate illo rite examinato hanc deducis propositionem:

»designante $f(x)$ functionem ipsius x rationalem integram quinti aut sexti ordinis, si datur unus valor ipsius x rationalis, pro quo etiam $\sqrt{f(x)}$ rationale fiat, dantur innumeri ipsius x valores formae $a+b\sqrt{c}$, in qua a, b, c quantitates rationales, pro quibus etiam $\sqrt{f(x)}$ eandem formam induit $a'+b'\sqrt{c}$, ubi rursus a', b' rationales;«

ac generaliorem:

»designante $f(x)$ functionem ipsius x rationalem integram $(2n+1)^{ti}$ aut $(2n+2)^{ti}$ ordinis, si datur valor ipsius x rationalis, pro quo etiam $\sqrt{f(x)}$ rationale fiat, dantur innumerae aequationes n^{ti} gradus, quarum coëfficientes numeri rationales sunt, ita comparatae, ut designante x earum radicem quamlibet, radicale $\sqrt{f(x)}$ per ipsam radicem x et numeros rationales rationaliter exhiberi queat.«

Multo vero generaliora adhuc, si loco $\sqrt{f(x)}$ radicem ullius aequationis algebraicae consideras, quarum coëfficientes sunt dati numeri rationales, e theorematis Abelianis petere licet, quae de integralibus functionum algebraicarum quarumcunque proposita sunt.

Nec non monere iuvat, cum ex antecedentibus Euleri de dicto problemate Diophantea scripta etiam ad analysin functionum ellipticarum pertineant, calculi integralis amatores ea non sine fructu perlegere.

Regiom. 20 Dec. 1834.

NOTE VON DER

GEODÄTISCHEN LINIE AUF EINEM ELLIPSOID

UND DEN

VERSCHIEDENEN ANWENDUNGEN EINER MERKWÜRDIGEN ANALYTISCHEN SUBSTITUTION.

VON

C. G. J. JACOBI,
PROFESSOR ORDIN. ZU KÖNIGSBERG IN PR.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 19. p. 309—313.

NOTE VON DER GEODÄTISCHEN LINIE AUF EINEM ELLIPSOID UND DEN VERSCHIEDENEN ANWENDUNGEN EINER MERKWÜRDIGEN ANALYTISCHEN SUBSTITUTION.

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 18. April 1839.)

Da die Erdoberfläche nicht die Form einer Umdrehungsfläche besitzt, so hat man öfter versucht, den an einem Punkte derselben ausgeführten Triangulirungen ein osculirendes Ellipsoid mit drei ungleichen Hauptaxen anzuschliefsen. Dies erhöht das Interesse der Aufgabe, die geodätische Linie auf einem solchen Ellipsoid zu suchen, eine Aufgabe, die von den gröfsten analytischen Schwierigkeiten umringt zu sein scheint. In der That erscheint die Differentialgleichung zweiter Ordnung, von welcher das Problem abhängt, wenn man die gewöhnlich üblichen Variabeln wählt, in einer so complicirten Form, dass man leicht von jeder Behandlung derselben abgeschreckt wird. Nach mehreren vergeblichen Versuchen ist es mir jedoch durch Anwendung besonderer Hülfsmittel gelungen, diese Gleichung vollständig zu integriren, d. h. auf Quadraturen zurückzuführen, wie ich der Pariser Akademie der Wissenschaften unter dem 28. December des vorigen Jahres mitgetheilt habe. Ich will jetzt die Form des Resultats näher auseinander setzen. Es sei die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} = 1,$$

und a die kleinste, b die mittlere, c die gröfste der drei Constanten a, b, c. Da man die drei Coordinaten des Punktes einer gegebenen Oberfläche durch zwei Gröfsen ausdrücken kann, so wähle ich hierzu die Winkel φ und ψ, welche die Coordinaten durch die folgenden Formeln bestimmen:

$$x = \sqrt{\frac{a}{c-a}} \sin\varphi \sqrt{b\cos^2\psi + c\sin^2\psi - a},$$

$$y = \sqrt{b}\cos\varphi \sin\psi,$$

$$z = \sqrt{\frac{c}{c-a}} \cos\psi \sqrt{c - a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi}.$$

Die geodätische Linie auf dem gegebenen Ellipsoid wird dann durch folgende Gleichung zwischen den beiden Winkeln φ und ψ bestimmt:

$$\alpha = \int \frac{\sqrt{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{c - a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi}\sqrt{(b-a)\cos^2\varphi - \beta}}$$

$$- \int \frac{\sqrt{b\cos^2\psi + c\sin^2\psi}\, d\psi}{\sqrt{b\cos^2\psi + c\sin^2\psi - a}\sqrt{(c-b)\sin^2\psi + \beta}}.$$

Die Form dieser Gleichung ist, wie man sieht, sehr einfach. Eine Function des Winkels φ wird einer Function des Winkels ψ gleich; die Functionen selbst sind Abelsche Integrale und zwar von der Form, welche zunächst auf die elliptischen folgt. Die beiden Abelschen Integrale sind, wenn sie auch hier in der trigonometrischen Form verschieden scheinen, doch im Wesen dieselben, so dass man beide durch einfache Substitutionen in Integrale von derselben Form verwandeln kann, in denen die Werthe, welche die Variable anzunehmen hat, sich nur in verschiedenen Intervallen bewegen. Die Gröfsen α und β sind die beiden willkürlichen Constanten, welche das vollständige Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung enthalten muss. Die Constante α wird gleich Null, wenn man die Integrale von denjenigen Werthen von φ und ψ beginnen läfst, welche dem Punkte des Ellipsoids entsprechen, von dem aus man die geodätische Linie zieht. Die andre willkürliche Constante β kommt nur in einem der drei unter dem Integralzeichen als Factoren befindlichen Radicalen vor; sie wird auf algebraischem Wege durch die anfängliche Richtung bestimmt, die man der geodätischen Linie giebt. Man erhält ganz ähnliche Ausdrücke für die Rectification der geodätischen Linie. Für das Umdrehungs-Ellipsoid verwandelt sich das eine der beiden Abelschen Integrale in einen Kreisbogen, das andre in ein elliptisches Integral der dritten Gattung, wodurch man die für das Umdrehungs-Ellipsoid bekannte Gleichung der geodätischen Linie erhält.

Die hier angewandte Art, die drei Coordinaten des Punktes eines Ellipsoids durch zwei Winkel φ und ψ auszudrücken, ist dieselbe, auf welche man geführt wird, wenn man den Punkt des Ellipsoids als Intersection der beiden Krümmungslinien bestimmt, auf welchen er liegt, oder, was nach der schönen Bemerkung von Charles Dupin dasselbe ist, wenn man ihn als Intersection des Ellipsoids mit den beiden durch ihn gehenden Hyperboloiden betrachtet, deren Hauptschnitte mit denen des Ellipsoids die Brennpunkte gemein haben. Legendre hat zuerst die hierauf bezüglichen von Monge gegebenen Formeln als analytisches Instrument benutzt, um den Inhalt der Oberfläche des Ellipsoids auf die Länge von Ellipsenbogen zurückzuführen, wie einst Archimedes den Inhalt der Kugel-Oberfläche auf die Länge der Kreisperipherie zurückgeführt hat*). Früher benutzte schon Euler ähnliche, aber auf die Ebene beschränkte Formeln in seiner berühmten Bestimmung der Bewegung eines nach zwei festen Centren nach dem Newtonschen Gesetze angezogenen Punktes. Denn die von ihm gewählten Variabeln kommen nach einer Bemerkung Legendres darauf hinaus, den angezogenen Punkt als Durchschnitt der durch ihn gehenden Ellipse und Hyperbel zu bestimmen, welche die beiden Anziehungscentra zu gemeinschaftlichen Brennpunkten haben.

Man kann eine andre merkwürdige Anwendung der oben angegebenen Art, die Coordinaten des Punktes eines Ellipsoids auszudrücken, auf die Aufgabe machen, die Oberfläche des Ellipsoids so auf einer Karte abzubilden, dass die unendlich kleinen Theile ähnlich bleiben. In dieser Art hat Lambert in seinen Beiträgen das Problem der Kartenprojection aufgefafst, und Lagrange hat in den Schriften dieser Akademie die allgemeine Lösung für alle Rotationsflächen gegeben, welche Gauss in einer von der Kopenhagener Akademie gekrönten und in Schumachers astronomischen Abhandlungen abgedruckten Preisschrift auf alle Flächen ausgedehnt hat. Drückt man das Element einer auf der Fläche gezeichneten Curve durch

$$\sqrt{A\,dt^2 + 2B\,dt\,du + C\,du^2}$$

---

*) Ich habe im achten Bande des Crelleschen Journals gezeigt, dass man zu den von Legendre gefundenen Resultaten auch auf sehr einfachem und elementarem Wege gelangen kann, wenn man die Coordinaten des Punktes eines Ellipsoids durch die beiden Winkel ausdrückt, welche die Richtung der an ihm errichteten Normale bestimmen. Eine andre hierzu führende, eben so neue als elegante und umfassende Methode hat neuerdings Dirichlet in einer in der Akademie gelesenen Abhandlung angegeben.

aus, wo t und u die beiden Variabeln sind, durch welche man einen Punkt der gegebenen Fläche bestimmt, so hat man den quadratischen Ausdruck

$$Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2$$

in zwei Factoren,

$$Pdt + (Q + \sqrt{R})du \quad \text{und} \quad Pdt + (Q - \sqrt{R})du,$$

zu zerfällen. Die Lösung des Problems hängt dann nach der von Gauss gegebenen Theorie von der Integration der Gleichung

$$0 = Pdt + (Q + \sqrt{R})du$$

ab, in welcher P, Q, R gegebene Functionen von t und u sind. Für Rotationsflächen läfst sich diese Gleichung immer integriren, und man kommt dann auf die von Lagrange gegebenen Formeln. Ich bemerke noch, was man leicht sieht, dass dasselbe allgemein für conische und cylindrische Flächen der Fall ist. Wenn man daher auch alle speciellen Flächen zweiter Ordnung leicht behandelt, so bietet doch die Aufgabe für die allgemeine Fläche zweiter Ordnung bei der gewöhnlichen Wahl der Variabeln unübersteigliche Hindernisse wegen der ungemein complicirten Form der zu integrirenden Differentialgleichung. Nimmt man aber den Ausdruck des Elements einer auf einem Ellipsoid befindlichen Curve, welchen ich im achten Bande des Crelleschen Journals gegeben habe, so finden sich in der Differentialgleichung die Variabeln von selbst separirt, und die Aufgabe ist auf bloſse Quadraturen zurückgeführt, und zwar auch hier auf Abelsche Transcendenten.

Man kann leicht die in den eben angedeuteten Problemen auf drei Variable bezüglichen Formeln auf jede Zahl von Variabeln ausdehnen, und bekommt dann merkwürdige Amplificationen wichtiger Theoreme. Auf diese Weise habe ich die berühmte von Legendre entdeckte Relation zwischen den vollständigen Integralen der ersten und zweiten Gattung zweier elliptischer Integrale, deren Moduln Complemente zu einander sind, auf alle Abelschen Integrale ausgedehnt. Aber dieselbe Substitution hat mich auf das Abelsche Theorem selbst geführt, auf einem Wege und durch Betrachtungen, welche von dem von Abel eingeschlagenen gänzlich verschieden sind, und welche von einem mechanischen Problem ausgehen. Die von Euler gegebenen Formeln für die Bahn eines von zwei festen Centren angezogenen Punktes enthalten

elliptische Transcendenten. Ist die eine Masse oder beide Null, so ist die Bahn eine Ellipse oder gerade Linie, also ihre Gleichung algebraisch. Aber durch das Verschwinden einer oder beider Massen hören die elliptischen Integrale nicht auf elliptische Integrale zu sein, so dass man die elliptische Bewegung eines Planeten oder selbst die geradlinige Bewegung eines Punktes durch eine Gleichung zwischen elliptischen Integralen erhält. Diese Form ist nicht ohne Interesse; denn wir haben hier für die elliptische Bewegung Formeln, die nur eine geringe Änderung erleiden, wenn noch ein zweites anziehendes Centrum hinzukommt. Aber abgesehen hiervon, sind zwei Methoden gegeben, dasselbe Problem zu behandeln, von denen die eine die Lösung in transcendenter, die andere in algebraischer Form darstellt, oder es ist eine neue Methode gegeben, das Fundamentaltheorem über die Addition der elliptischen Integrale aufzufinden. In seiner Behandlung des mechanischen Problems in den älteren Schriften dieser Akademie hat Euler das früher von ihm gefundene Fundamentaltheorem nur zur Verificirung der für die speciellen Fälle gefundenen Formeln benutzt. Mir schien es von Wichtigkeit, die beiden Methoden mit einander in Verbindung zu setzen, welche die transcendente und die algebraische Form ergeben, um so direct von der einen auf die andre zu kommen. Indem ich die für zwei Variable angewandten Formeln auf jede Zahl von Variabeln ausdehnte, was, wie ich bemerkt, mit Leichtigkeit geschieht, erhielt ich das Abelsche Theorem, und zwar in einer neuen, merkwürdigen und fertigen Form. Zugleich ergab sich ein einfacher Weg, von dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen, wie ich dasselbe früher in einer Abhandlung im Crelleschen Journal über die Abelschen Transcendenten aufgestellt habe, durch Anwendung passender Multiplicationen direct zu den algebraischen Integralen zu gelangen, was mir früher wegen der groſsen Complication des Gegenstandes wohl wünschenswerth, aber schwer zu erreichen schien.

Einer der tiefsinnigsten Mathematiker, Herr Lamé, Correspondent dieser Akademie, hat neuerdings die hier erwähnten Substitutionen auf schwierige physikalische Probleme angewendet.

18. April 1839.

DEMONSTRATIO NOVA

THEOREMATIS ABELIANI.

AUCTORE

C. G. J. JACOBI

PROF. MATH. ORD. REGIOM.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 24. p. 28.

DEMONSTRATIO NOVA THEOREMATIS ABELIANI.

1.

Proponantur inter n variabiles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ atque variabilem t aequationes differentiales primi ordinis:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \dfrac{d\lambda_2}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \cdots + \dfrac{d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0, \\ \dfrac{\lambda_1 d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \dfrac{\lambda_2 d\lambda_2}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \cdots + \dfrac{\lambda_n d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0, \\ \dfrac{\lambda_1^2 d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \dfrac{\lambda_2^2 d\lambda_2}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \cdots + \dfrac{\lambda_n^2 d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\lambda_1^{n-2} d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \dfrac{\lambda_2^{n-2} d\lambda_2}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \cdots + \dfrac{\lambda_n^{n-2} d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0, \\ \dfrac{\lambda_1^{n-1} d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \dfrac{\lambda_2^{n-1} d\lambda_2}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \cdots + \dfrac{\lambda_n^{n-1} d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = dt, \end{cases}$$

designante $f(\lambda)$ functionem quantitatis λ ordinis $(2n-1)^{\text{ti}}$. Ponendo

$$N_k = (\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)\ldots(\lambda_k - \lambda_n),$$

ubi factor evanescens $(\lambda_k - \lambda_k)$ omittendus est, ex aequationibus (1.) sequuntur hae:

$$(2.)\qquad \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{\sqrt{f(\lambda_1)}}{N_1}, \qquad \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{\sqrt{f(\lambda_2)}}{N_2}, \ldots \frac{d\lambda_n}{dt} = \frac{\sqrt{f(\lambda_n)}}{N_n}.$$

Substituendo enim (2.) aequationibus (1.) satisfieri per formulas notas algebraicas constat. Formularum (1.) sponte habentur integralia transcendentia; earundem ut inveniantur integralia algebraica, antemittam lemma e theoria fractionum simplicium petitum.

2.

Dedit olim ill. Lagrange in Actis Acad. Berol. a. 1792 huiusmodi formulas pro discerptione fractionis in simplices, quae mutationem non subeant, si plures denominatoris factores inter se aequales exsistunt. Quas formulas cum ill. autor sine demonstratione proposuisset, addita demonstratione tractavi in commentatione »*Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus*« (Berol. 1825 ap. Herbig). Revocavi eo loco propositionem Lagrangianam ad hanc:

Fractione $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, *cuius denominator* $\varphi(x)$ *factorem* $x-\alpha$ *continet, in fractiones simplices resoluta, eam fractionum simplicium partem, quae ex illo factore ortum ducit, quotiescunque eum contineat denominator* $\varphi(x)$, *aequari coëfficienti termini* $\frac{1}{h}$ *in evolutione expressionis*

$$\frac{\psi(\alpha+h)}{\varphi(\alpha+h)(x-\alpha-h)},$$

secundum ascendentes quantitatis h *potestates facta.*

Demonstrationem simplicem huius propositionis videas in comm. cit. §. 10. Eandem propositionem etiam sic exhibui (l. c. §. 7):

Si summa factoris $x-\alpha$ *potestas, per quam denominator* $\varphi(x)$ *dividi potest, est* $(x-\alpha)^m$ *atque ponitur*

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\Pi(x)}{(x-\alpha)^m},$$

aggregatum fractionum simplicium, quarum denominatores fiunt eius factoris potestates, aequatur quantitati

$$\frac{1}{1.2\ldots(m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1} \cdot \frac{\Pi\alpha}{x-\alpha}}{\partial\alpha^{m-1}}.$$

Sit $\psi(\lambda)$ functio ipsius λ integra rationalis ac proponatur fractio

$$\frac{\psi(\lambda)}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)]^m},$$

in fractiones simplices resolvenda. Secundum propositionem antecedentem fit aggregatum fractionum simplicium e factore $\lambda-\lambda_k$ provenientium

$$\frac{1}{1.2\ldots(m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1}\left(\frac{\psi(\lambda_k)}{N_k^m} \cdot \frac{1}{\lambda-\lambda_k}\right)}{\partial\lambda_k^{m-1}}.$$

Unde totum systema fractionum simplicium, in quas fractio proposita resolvitur, aequatur aggregato

$$\frac{1}{1.2\ldots(m-1)} \sum \frac{\partial^{m-1}\left(\frac{\psi(\lambda_k)}{N_k^m} \cdot \frac{1}{\lambda-\lambda_k}\right)}{\partial\lambda_k^{m-1}},$$

summatione extensa ad indicis k valores $1, 2, \ldots n$. Facta evolutione secundum potestates ipsius λ descendentes, obtinemus hanc propositionem:

Evoluta fractione $\frac{\psi(\lambda)}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)]^m}$ *secundum potestates quantitatis* λ *descendentes, coëfficientem termini* $\frac{1}{\lambda^p}$ *aequari quantitati*

$$\frac{1}{1.2\ldots(m-1)} \sum \frac{\partial^{m-1} \cdot \frac{\lambda_k^{p-1}\psi(\lambda_k)}{N_k^m}}{\partial\lambda_k^{m-1}}.$$

Haec propositio valet etiam, si numeratoris $\psi(x)$ gradus gradum denominatoris superat; eo enim casu fractionibus simplicibus accedit functio integra rationalis qui est divisionis quotiens; e functionis integrae rationalis evolutione autem potestates negativae $\frac{1}{\lambda^p}$ provenire nequeunt, unde formula antecedens non mutatur. Si denominatoris gradus numeratoris gradum superat i unitatibus, evolutio proposita terminis $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \cdots \frac{1}{\lambda^{i-1}}$ caret. Eo igitur casu quantitates

$$\sum \frac{\partial^{m-1} \cdot \frac{\lambda_k^{p-1}\psi(\lambda_k)}{N_k^m}}{\partial\lambda_k^{m-1}}$$

pro ipsius p valoribus $1, 2, \ldots i-1$ evanescunt. Ad sequentia tantum egemus formula, in qua $i=2$, $p=1$, $m=2$. Quam suppeditat sequens

Lemma.

Sit $\psi(\lambda)$ *functio quantitatis* λ *integra rationalis* $(2n-2)^{ti}$ *gradus, erit*

$$\sum \frac{\partial \frac{\psi(\lambda_k)}{N_k N_k}}{\partial\lambda_k} = 0.$$

Hoc lemmate comprobato ad propositum redeo.

3.

Sit $m-\lambda$ factor functionis $f(\lambda)$ quicunque, unde, posito

$$\frac{f(\lambda)}{m-\lambda} = \psi(\lambda),$$

fit $\psi(\lambda)$ functio rationalis integra $(2n-2)^{ti}$ gradus. Sit brevitatis causa

$$\lambda_k' = \frac{d\lambda_k}{dt}, \qquad \lambda_k'' = \frac{d^2\lambda_k}{dt^2},$$

erit secundum formulas (2.) §. 1

$$\frac{\lambda_k'}{\sqrt{m-\lambda_k}} = \frac{\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{N_k}.$$

Unde, rursus differentiando et substituendo valores quantitatum λ_1', λ_2' etc. e §. 1 petitos, obtinetur:

$$(1.)\qquad \frac{d\cdot\dfrac{\lambda_k'}{\sqrt{m-\lambda_k}}}{\sqrt{m-\lambda_k}\,dt} = \frac{\partial\cdot\dfrac{\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{N_k}}{\partial\lambda_k}\cdot\frac{\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{N_k} + \sum^{i}\frac{\sqrt{\psi(\lambda_i)}\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{\sqrt{m-\lambda_i}\sqrt{m-\lambda_k}}\cdot\frac{(m-\lambda_i)\,\partial\dfrac{1}{N_k}}{N_i\,\partial\lambda_i},$$

summationis signo pertinente ad indicis superscripti valores $1, 2, \dots n$ omnes praeter $i=k$. Fit autem

$$\frac{\partial\cdot\dfrac{\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{N_k}}{\partial\lambda_k}\cdot\frac{\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{N_k} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial\cdot\dfrac{\psi(\lambda_k)}{N_k N_k}}{\partial\lambda_k},\qquad \frac{\partial\dfrac{1}{N_k}}{\partial\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_k-\lambda_i}\cdot\frac{1}{N_k}.$$

Unde e (1.) fit, advocato lemmate demonstrato,

$$\sum^{k}\frac{d\cdot\dfrac{\lambda_k'}{\sqrt{m-\lambda_k}}}{\sqrt{m-\lambda_k}\,dt} = \sum^{k}\sum^{i}\frac{\sqrt{\psi(\lambda_i)}\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{\sqrt{m-\lambda_i}\sqrt{m-\lambda_k}\,N_i N_k}\cdot\frac{m-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}.$$

Summa duplex in formula praecedente pertinet ad omnes valores $1, 2, \dots n$, quos uterque index i et k induere potest, exclusis valoribus aequalibus $i=k$. Si quantitati sub signo duplici summationis collocatae additur altera e commutatione indicum i et k proveniens, summatio tantum extendi debet ad combinationes diversas indicum $1, 2, \dots n$, ita ut e positionibus $i=\alpha$, $k=\beta$ et $i=\beta$, $k=\alpha$, altera tantum eligenda sit. Quod si de summa duplici statuimus atque observamus, fieri $\frac{m-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}+\frac{m-\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k}=1$, expressio antecedens in hanc abit:

$$(2.)\qquad \sum^{k}\frac{d\cdot\dfrac{\lambda_k'}{\sqrt{m-\lambda_k}}}{\sqrt{m-\lambda_k}\,dt} = \sum^{k}\sum^{i}\frac{\sqrt{\psi(\lambda_i)}\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{\sqrt{m-\lambda_i}\sqrt{m-\lambda_k}\,N_i N_k} = \sum^{k}\sum^{i}\frac{\lambda_i'\lambda_k'}{(m-\lambda_i)(m-\lambda_k)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{\lambda_1'}{m-\lambda_1}+\frac{\lambda_2'}{m-\lambda_2}+\cdots+\frac{\lambda_n'}{m-\lambda_n}\right]^2$$
$$-\tfrac{1}{2}\left[\frac{\lambda_1'\lambda_1'}{(m-\lambda_1)^2}+\frac{\lambda_2'\lambda_2'}{(m-\lambda_2)^2}+\cdots+\frac{\lambda_n'\lambda_n'}{(m-\lambda_n)^2}\right].$$

Fit autem

$$\sum^{k}\frac{d\cdot\dfrac{\lambda_k'}{\sqrt{m-\lambda_k}}}{\sqrt{m-\lambda_k}\,dt} = \sum^{k}\left[\frac{\lambda_k''}{m-\lambda_k}+\tfrac{1}{2}\frac{\lambda_k'\lambda_k'}{(m-\lambda_k)^2}\right].$$

Unde aequatio (2.) in hanc abit:

$$(3.)\qquad 0 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1'}{m-\lambda_1}+\frac{\lambda_2'}{m-\lambda_2}+\cdots+\frac{\lambda_n'}{m-\lambda_n}\right)^2$$
$$-\left(\frac{\lambda_1'\lambda_1'}{(m-\lambda_1)^2}+\frac{\lambda_2'\lambda_2'}{(m-\lambda_2)^2}+\cdots+\frac{\lambda_n'\lambda_n'}{(m-\lambda_n)^2}\right)$$
$$-\left(\frac{\lambda_1''}{m-\lambda_1}+\frac{\lambda_2''}{m-\lambda_2}+\cdots+\frac{\lambda_n''}{m-\lambda_n}\right).$$

Ponatur

$$(4.)\qquad y = \sqrt{(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\dots(m-\lambda_n)};$$

si insuper fit $u=\log y$, erit

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{d^2u}{dt}\right].$$

Fit autem

$$\frac{du}{dt} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1'}{m-\lambda_1}+\frac{\lambda_2'}{m-\lambda_2}+\cdots+\frac{\lambda_n'}{m-\lambda_n}\right),$$
$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1'\lambda_1'}{(m-\lambda_1)^2}+\frac{\lambda_2'\lambda_2'}{(m-\lambda_2)^2}+\cdots+\frac{\lambda_n'\lambda_n'}{(m-\lambda_n)^2}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1''}{m-\lambda_1}+\frac{\lambda_2''}{m-\lambda_2}+\cdots+\frac{\lambda_n''}{m-\lambda_n}\right),$$

unde aequatio (3.), per 2 divisa, in hanc abit:

$$0 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{d^2u}{dt^2},$$

sive

$$(5.)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Qua formula integrata et substitutis valoribus, $\lambda_k' = \frac{\sqrt{f(\lambda_k)}}{N_k}$, obtinetur e (4.):

$$(6.)\qquad -2\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{\sqrt{f(\lambda_1)}}{(m-\lambda_1)N_1}+\frac{\sqrt{f(\lambda_2)}}{(m-\lambda_2)N_2}+\cdots+\frac{\sqrt{f(\lambda_n)}}{(m-\lambda_n)N_n}\right) = \text{Const.}$$

Haec formula constituit integrale algebraicum aequationum differentialium propositarum, ex eoque obtinentur $2n-1$ integralia algebraica pro singulis functionis $f(\lambda)$ factoribus linearibus $m-\lambda$. Sufficit autem numerus $n-1$ ad relationes algebraicas inter n variabiles $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ condendas. Non immorabor hic formulae

$$\text{Const.} = y\left(\frac{\sqrt{f(\lambda_1)}}{(m-\lambda_1)N_1} + \frac{\sqrt{f(\lambda_2)}}{(m-\lambda_2)N_2} + \dots + \frac{\sqrt{f(\lambda_n)}}{(m-\lambda_n)N_n}\right),$$

e theoremate Abeliano deducendae. Quas res apud cl. Richelot videas in egregia commentatione, qua Lagrangianam integrationis methodum pro $n=2$ exhibitam amplificatum it eiusque methodi adiumento duo integralia algebraica pro ipsius n valore quocunque, immo pro forma functionis $f(\lambda)$ generaliore eruit. Et forte methodum quoque antecedentibus a me usurpatam, qua cuncta integralia algebraica obtinentur, pro amplificatione methodi Lagrangianae habere placet.

Si ipsi $f(\lambda)$ formam tribuis functionis rationalis integrae $2n^{\text{ti}}$ ordinis, per substitutionem obviam $\lambda = \frac{m+nz}{1+pz}$, problema ad eum casum revocas, quo $f(\lambda)$ tantum $(2n-1)^{\text{ti}}$ ordinis est. Illo casu generaliore non amplius evanescit summa

$$\sum^{k} \frac{\partial \cdot \frac{\psi(\lambda)}{N_k N_k}}{\partial \lambda_k},$$

sed ea summa, cum secundum ea, quae §. 2. demonstravi, aequet coëfficientem termini $\frac{1}{\lambda}$ in evolutione quantitatis

$$\frac{\psi(\lambda)}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)]^2},$$

aequalis evadit constanti $-c$, si quidem $c\lambda^{2n}$ est altissimus functionis $f(\lambda)$ terminus. Hinc aequatio antecedentibus inventa

$$0 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d^2u}{dt^2}$$

in hanc mutari debet:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d^2u}{dt^2} = \tfrac{1}{4}c;$$

unde sequitur aequatio haec:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \tfrac{1}{4}cy,$$

quae multiplicata per $2\frac{dy}{dt}$ et integrata suggerit:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{4}cyy + \alpha,$$

designante α constantem arbitrariam. In qua formula si substituuntur quantitatum y et $\frac{dy}{dt}$ valores (4.) et (6.), proveniunt integralia algebraica formae functionis $f(\lambda)$ generaliori respondentia.

4.

Coronidis instar hoc addo. *Quicunque sit functionis $f(\lambda)$ gradus,* si, designante $m-\lambda$ factorem eius quemcunque, vocamus (m) coëfficientem termini $\frac{1}{\lambda}$ in evolutione quantitatis

$$\frac{\frac{f(\lambda)}{m-\lambda}}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)]^2},$$

suggerit analysis antecedentibus adhibita formulam:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d^2u}{dt^2} + \tfrac{1}{4}(m) = 0.$$

Unde, multiplicatione per y facta, prodit:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \tfrac{1}{4}y(m) = 0.$$

Sit y_1 altera functio, ipsius $f(\lambda)$ factori $m_1-\lambda$ respondens, ita ut habeatur

$$y = \sqrt{(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\dots(m-\lambda_n)}, \qquad y_1 = \sqrt{(m_1-\lambda_1)(m_1-\lambda_2)\dots(m_1-\lambda_n)},$$

erit:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \tfrac{1}{4}y(m) = 0, \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} + \tfrac{1}{4}y_1(m_1) = 0,$$

unde:

$$y\frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1\frac{d^2y}{dt^2} + \tfrac{1}{4}yy_1[(m_1)-(m)] = 0.$$

Cum sit

$$\frac{1}{m_1-\lambda} - \frac{1}{m-\lambda} = \frac{m-m_1}{(m-\lambda)(m_1-\lambda)},$$

aequabit $(m_1)-(m)$ coëfficientem termini $\frac{1}{\lambda}$ in evolutione quantitatis

$$\frac{\frac{f(\lambda)}{(m-\lambda)(m_1-\lambda)}}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)]^2},$$

multiplicatum per $m-m_1$. Quem coëfficientem designo per (m, m_1), unde fit

$$y\frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{m-m_1}{4}yy_1(m, m_1) = 0,$$

atque integratione facta,

$$(1.) \qquad y\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy}{dt} + \frac{m-m_1}{4}\int yy_1(m, m_1)dt = 0.$$

Quae docet formula, *integrale $\int yy_1(m, m_1)dt$ valorem obtinere algebraicum.* Sit ex. gr. functio $f(\lambda)$ gradus $(2n+1)^{\text{ti}}$ eiusque summus terminus $c\lambda^{2n+1}$, erit $(m, m_1) = c$, ideoque substituendo formulam (6.) §. pr. eruitur:

$$(2.) \qquad c\int yy_1\,dt = \frac{-4}{m-m_1}\left[y\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy}{dt}\right]$$

$$= 2yy_1\left[\frac{\sqrt{f(\lambda_1)}}{(m-\lambda_1)(m_1-\lambda_1)N_1} + \frac{\sqrt{f(\lambda_2)}}{(m-\lambda_2)(m_1-\lambda_2)N_2} + \cdots + \frac{\sqrt{f(\lambda_n)}}{(m-\lambda_n)(m_1-\lambda_n)N_n}\right].$$

Si $m = m_1$ atque

$$\sqrt{f(\lambda)} = (m-\lambda)\sqrt{F(\lambda)},$$

aequatio antecedens in hanc abit:

$$(3.) \qquad c\int (m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\ldots(m-\lambda_n)\,dt$$

$$= 2(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\ldots(m-\lambda_n)\left[\frac{\sqrt{F(\lambda_1)}}{(m-\lambda_1)N_1} + \frac{\sqrt{F(\lambda_2)}}{(m-\lambda_2)N_2} + \cdots + \frac{\sqrt{F(\lambda_n)}}{(m-\lambda_n)N_n}\right].$$

Convenit ut in genere novo formularum exemplum addere. Sit quod est simplicissimum,

$$\sqrt{f(\lambda)} = \sqrt{\lambda^5},$$

unde

$$m = 0, \quad c = 1, \quad \sqrt{F(\lambda)} = -\sqrt{\lambda^3};$$

erunt aequationes differentiales propositae:

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^5}} + \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^5}} = 0, \qquad \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^3}} + \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^3}} = dt,$$

e quibus secundum (3.) fieri debet:

$$\int \lambda_1\lambda_2\,dt = 2\lambda_1\lambda_2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}.$$

Aequationes differentiales propositae suggerunt:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^3}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^3}} = \alpha, \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = -\tfrac{1}{2}t,$$

designante α constantem arbitrariam; unde, ponendo $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} = u$, fit:

$$\alpha = -\tfrac{1}{8}t^3 + \tfrac{3}{2}tu, \qquad \int \lambda_1\lambda_2\,dt = \int \frac{dt}{uu} = \tfrac{9}{4}\int \frac{t^2\,dt}{(\alpha+\frac{1}{8}t^3)^2} = \frac{-6}{\alpha+\frac{1}{8}t^3}.$$

Fit autem $\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2} = -\frac{1}{2}t\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$, unde $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} = -\frac{2}{tu} = \frac{-3}{\alpha+\frac{1}{8}t^3}$, ideoque

$$\int \lambda_1\lambda_2\,dt = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}, \text{ q. d. e.}$$

Regiom. d. 5 Maii 1842.

ÜBER DIE ADDITIONSTHEOREME

DER ABELSCHEN INTEGRALE

ZWEITER UND DRITTER GATTUNG

VON

PROFESSOR DR. C. G. J. JACOBI.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 30. p. 121—126.

ÜBER DIE ADDITIONSTHEOREME DER ABELSCHEN INTEGRALE ZWEITER UND DRITTER GATTUNG.

1.

Es sei R eine gegebene ganze Function von x vom $2n^{ten}$ Grade,

$$R = a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + a_3 x^{2n-2} + \cdots + 1; \tag{1.}$$

V eine ganze Function von x vom n^{ten} Grade, in welcher man den Coëfficienten von x^n der Einheit gleich setze; ferner a eine Constante und

$$\begin{aligned} xV^2 - a^2R = f(x) &= (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{2n+1}) \\ &= x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n+1}. \end{aligned} \tag{2.}$$

Die in V vorkommenden Coëfficienten und die Gröfse a betrachte man als unabhängige Veränderliche, während dagegen die Coëfficienten der Function R unverändert bleiben sollen. Zwischen den ebenfalls veränderlichen $2n+1$ Wurzeln der Gleichung (2.) folgen dann aus dem Abelschen Theorem n transcendente Gleichungen, wodurch n Wurzeln als Functionen der übrigen $n+1$ bestimmt werden. Wenn nämlich m einen der Werthe $0, 1, 2, \dots n-1$ annimmt und man die Zeichen der Wurzelgröfse unter dem Integralzeichen gehörig bestimmt, so wird

$$\int \frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{x_1 R(x_1)}} + \int \frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{x_2 R(x_2)}} + \cdots + \int \frac{x_{2n+1}^m dx_{2n+1}}{\sqrt{x_{2n+1} R(x_{2n+1})}} = 0. \tag{3.}$$

Die Anfangs- und Endgrenzen der Integrale sind die beiden Systeme der Wurzeln zweier Gleichungen von der Form (2.), in denen sich a und die Coëfficienten von V verändert haben, während die Function R ungeändert geblieben ist.

Entwickelt man den Ausdruck

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{xR}} \log \frac{\sqrt{x}.V + a\sqrt{R}}{\sqrt{x}.V - a\sqrt{R}} \tag{4.}$$

nach den absteigenden Potenzen von x,

$$\Lambda = \frac{\Lambda_0}{x^{n+1}} + \frac{\Lambda_1}{x^{n+2}} + \frac{\Lambda_2}{x^{n+3}} + \text{etc.}, \tag{5.}$$

so findet Abel ferner für die Werthe von m, welche $\geqq n$ sind,

$$(6.)\qquad \int\frac{x_1^{n+i}dx_1}{\sqrt{x_1R(x_1)}}+\int\frac{x_2^{n+i}dx_2}{\sqrt{x_2R(x_2)}}+\cdots+\int\frac{x_{2n+1}^{n+i}dx_{2n+1}}{\sqrt{x_{2n+1}R(x_{2n+1})}}=\Lambda_i.$$

Um die Entwickelungscoëfficienten Λ_i durch die Coëfficienten von $f(x)$ oder die Gröfsen x_1, x_2 etc. und durch die gegebenen Coëfficienten von R darzustellen, setze ich für $\sqrt{x}.V$ vermöge (2.) den Ausdruck $\sqrt{f(x)+a^2R}$, wodurch man

$$(7.)\qquad \Lambda=\frac{1}{\sqrt{xR}}\log\frac{\sqrt{f(x)+a^2R}+a\sqrt{R}}{\sqrt{f(x)+a^2R}-a\sqrt{R}}$$

erhält. Setzt man $y=\frac{a\sqrt{R}}{\sqrt{f(x)}}$, so wird

$$\Lambda.\sqrt{xR}=\log\frac{\sqrt{1+y^2}+y}{\sqrt{1+y^2}-y}=2\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{1+y}}$$

$$=2y-\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{4.5}y^5-\frac{3.5}{4.6.7}y^7+\frac{3.5.7}{4.6.8.9}y^9-\cdots$$

und daher

$$(8.)\qquad \Lambda=\frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^a\frac{da}{\sqrt{f(x)+a^2R}}=\frac{2a}{\sqrt{xf(x)}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3R}{\sqrt{x}\sqrt{f(x)^3}}+\frac{3}{4.5}\cdot\frac{a^5R^2}{\sqrt{x}\sqrt{f(x)^5}}\text{ etc.}$$

Aus dieser Formel kann man zur Bestimmung von Λ_i folgende leichte Regel ableiten:

»Man entwickle den Ausdruck $(1+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_{2n+1}z^{2n+1})^{-\frac{1}{2}}$ *nach den aufsteigenden Potenzen von* z, *setze in dem Coëfficienten von* z^i *für* b_1, b_2 *etc. die Gröfsen* $a_1+\alpha_1$, $a_2+\alpha_2$ *etc., entwickle alle Producte und Potenzen dieser Binome und multiplicire jeden Term, der den Factor* $\alpha_1^{\mu_1}\alpha_2^{\mu_2}\dots$ *enthält, noch mit* $\frac{a^{2(\mu_1+\mu_2+\dots)+1}}{2(\mu_1+\mu_2+\cdots)+1}$, *so wird der Ausdruck, welchen man erhält, der Werth von* $\frac{1}{2}\Lambda_i$.«

Auf diese Weise findet man

$$(9.)\qquad\begin{cases}\frac{1}{2}\Lambda_0=a,\\ \frac{1}{2}\Lambda_1=-\frac{1}{2}(a_1a+\frac{1}{3}\alpha_1a^3),\\ \frac{1}{2}\Lambda_2=-\frac{1}{2}(a_2a+\frac{1}{3}\alpha_2a^3)+\frac{3}{2.4}\left(a_1^2.a+2a_1\alpha_1\cdot\frac{a^3}{3}+\alpha_1^2\cdot\frac{a^5}{5}\right);\\ \frac{1}{2}\Lambda_3=-\frac{1}{2}(a_3a+\frac{1}{3}\alpha_3a^3)+\frac{3}{4}\left(a_1a_2.a+(a_1\alpha_2+a_2\alpha_1)\frac{a^3}{3}+\alpha_1\alpha_2\cdot\frac{a^5}{5}\right)\\ \qquad\qquad-\frac{3.5}{2.4.6}\left(a_1^3.a+3a_1^2\alpha_1\cdot\frac{a^3}{3}+3a_1\alpha_1^2\cdot\frac{a^5}{5}+\alpha_1^3\cdot\frac{a^7}{7}\right)\end{cases}$$

u. s. w.

Man hat in diesen Formeln die auf a_{2n+1} und α_{2n+1} folgenden Gröfsen $=0$ und $\alpha_{2n+1}=1$ zu setzen. Da man aus (2.) den Werth

$$(10.)\qquad a=\sqrt{-a_{2n+1}}=\sqrt{x_1x_2\dots x_{2n+1}}$$

findet, so giebt die erste der Formeln (9.) die einfache Gleichung:

$$(11.)\qquad \int\frac{x_1^n dx_1}{\sqrt{x_1R(x_1)}}+\int\frac{x_2^n dx_2}{\sqrt{x_2R(x_2)}}+\cdots+\int\frac{x_{2n+1}^n dx_{2n+1}}{\sqrt{x_{2n+1}R(x_{2n+1})}}=2\sqrt{x_1x_2\dots x_{2n+1}},$$

welche für $n=1$, wenn man die Zeichen der Quadratwurzeln unter dem Integralzeichen gehörig bestimmt, auf die bekannte Additionsformel der zweiten Gattung der elliptischen Functionen zurückkommt.

Man erhält dieselben Formeln (9.) für den allgemeineren Fall, wenn man noch einen Werth x_{2n+2} hinzunimmt und wieder

$$(12.)\qquad \int\frac{x_1^{n+i}dx_1}{\sqrt{x_1R(x_1)}}+\int\frac{x_2^{n+i}dx_2}{\sqrt{x_2R(x_2)}}+\cdots+\int\frac{x_{2n+2}^{n+i}dx_{2n+2}}{\sqrt{x_{2n+2}R(x_{2n+2})}}=\Lambda_i$$

setzt. Die Gröfsen a, a_1, … a_{2n+2} werden dann durch die Gleichung

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{2n+2})=x^{2n+2}+a_1x^{2n+1}+a_2x^{2n}+\cdots+a_{2n+2}$$

bestimmt; der Ausdruck, dessen $(-\frac{1}{2})^{\text{te}}$ Potenz zu entwickeln ist, wird

$$1+b_1y+b_2y^2+\cdots+b_{2n+2}y^{2n+2}.$$

In den Formeln (9.), welche man aus der Entwickelung dieses Ausdrucks nach der oben angegebenen Regel ableitet, hat man die auf a_{2n+2} und α_{2n+1} folgenden Gröfsen a_{2n+3}, α_{2n+2} etc. $=0$ und wieder $\alpha_{2n+1}=1$ zu setzen. Die Gröfse a wird hier aber durch keine so einfache Formel wie (10.) bestimmt. Die Zahl dieser Gröfsen a, mit deren Hülfe man die Gröfsen Λ_i rational durch die Werthe x_1, x_2 etc. darstellen kann, vermehrt sich bei demselben R immer um eine, wenn die Zahl der Integrale, welche das Aggregat (6.) bilden, um zwei zunimmt.

Ich bemerke noch, dafs man für Λ statt des Ausdrucks (4.) eigentlich die Differenz zweier solcher Ausdrücke zu setzen hätte, welche den beiden Systemen der Anfangs- und Endgrenzen der Integrale entsprechen. Es reicht aber hin in (6.) eines der Integrale und in (12.) zwei der Integrale von $x=0$ an beginnen zu lassen, und auch in dem allgemeineren Falle, wenn man ein Aggregat von $2n+m$ Integralen betrachtet, m Integrale von der Grenze 0 an zu nehmen, weil dann immer die abzuziehende Function Λ verschwindet.

2.

Nach Abel findet man für die dritte Gattung:

$$(13.)\qquad \int\frac{dx_1}{(\alpha-x_1)\sqrt{x_1R(x_1)}}+\int\frac{dx_2}{(\alpha-x_2)\sqrt{x_2R(x_2)}}+\cdots+\int\frac{dx_{2n+1}}{(\alpha-x_{2n+1})\sqrt{x_{2n+1}R(x_{2n+1})}}=\Lambda(\alpha),$$

wenn $\Lambda(\alpha)$ den Werth der oben (4.) definirten Function $\Lambda(x)$ für $x=\alpha$ bedeutet. Dieser Werth $\Lambda(\alpha)$ kann, wie ich im Folgenden zeigen will, durch Einführung von Gröfsen, welche von neuen transcendenten Gleichungen abhängen, eine merkwürdige Form annehmen, welche für $n=1$ das bekannte Additionstheorem der dritten Gattung der elliptischen Integrale giebt.

Man kann die Function n^{ten} Grades $\frac{V}{a}$ dadurch bestimmen, dass sie vermöge (2.) für $x=x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ dieselben Werthe wie die gegebene Function $\sqrt{\frac{R}{x}}$ annimmt. Man bestimme jetzt zwei andre ganze Functionen von x vom $(n+1)^{ten}$ Grade, Y und Z, durch die Bedingung, dass jede von ihnen für die Werthe $x=x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ dieselben Werthe wie $\frac{xV}{a}$ oder wie $\sqrt{xR(x)}$ annehmen, und aufserdem noch für $x=\alpha$ die Function Y den Werth $+\sqrt{\alpha R(\alpha)}$, die Function Z den Werth $-\sqrt{\alpha R(\alpha)}$ erhalten soll. Da zufolge dieser Annahme $\frac{x}{a}V-Y$ und $\frac{x}{a}V-Z$ für die Werthe $x=x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ verschwinden müssen, so erhält man diese Functionen Y und Z sogleich durch die Formeln

$$(14.)\quad \begin{cases} Y = \frac{x}{a}\cdot V - r\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})}{(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\dots(\alpha-x_{n+1})}, \\ Z = \frac{x}{a}\cdot V - s\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})}{(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\dots(\alpha-x_{n+1})}, \end{cases}$$

wenn man wegen der letzten Bedingung die Constanten r und s durch die Gleichungen

$$(15.)\quad r = \frac{\alpha}{a}V(\alpha)-\sqrt{\alpha R(\alpha)}, \qquad s = \frac{\alpha}{a}V(\alpha)+\sqrt{\alpha R(\alpha)}$$

bestimmt. Hier ist $V(\alpha)$ der Werth von V für $x=\alpha$, und daher zufolge (4.)

$$(16.)\quad \Lambda(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha R(\alpha)}}\log\frac{s}{r}.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen müssen die beiden Ausdrücke $(2n+2)^{ter}$ Ordnung Y^2-xR, Z^2-xR durch das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})(x-\alpha)$$

theilbar sein. Man setze daher

$$(17.)\quad \begin{cases} Y^2-xR = r_1(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})(x-\alpha)(x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_n), \\ Z^2-xR = s_1(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})(x-\alpha)(x-z_1)(x-z_2)\dots(x-z_n). \end{cases}$$

Da die Function xR weder einen constanten Term enthält noch die Potenz x^{2n+2},

welche die höchste Potenz von x ist, welche in den Ausdrücken (17.) vorkommt, so wird man, wenn man respective in den Functionen Y und Z den Coëfficienten von x^{n+1} durch den constanten Term dividirt, die Quotienten

$$(x_1x_2\dots x_{n+1}\cdot\alpha y_1y_2\dots y_n)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (x_1x_2\dots x_{n+1}\cdot\alpha z_1z_2\dots z_n)^{-\frac{1}{2}}$$

erhalten. Die Werthe dieser Quotienten kann man aber auch andererseits aus den Gleichungen (14.) entnehmen, wenn man bemerkt, dass in $\frac{x}{a}V$ der Coëfficient von x^{n+1} den Werth $\frac{1}{a}$ hat und der constante Term $=0$ ist. Durch Vergleichung der beiden Werthe, welche man auf diese Weise für jeden dieser Quotienten erhält, findet man, wenn man dieselben noch mit $x_1x_2\dots x_{n+1}$ multiplicirt,

$$(18.)\quad \begin{cases} (-1)^n\sqrt{\frac{x_1x_2\dots x_{n+1}}{\alpha y_1y_2\dots y_n}} = (\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\dots(\alpha-x_{n+1})\frac{1}{ar}-1, \\ (-1)^n\sqrt{\frac{x_1x_2\dots x_{n+1}}{\alpha z_1z_2\dots z_n}} = (\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\dots(\alpha-x_{n+1})\frac{1}{as}-1, \end{cases}$$

woraus

$$(19.)\quad \frac{s}{r} = \frac{\sqrt{\alpha}V(\alpha)+a\sqrt{R(\alpha)}}{\sqrt{\alpha}V(\alpha)-a\sqrt{R(\alpha)}} = \frac{1+(-1)^n\sqrt{\frac{x_1x_2\dots x_{n+1}}{\alpha y_1y_2\dots y_n}}}{1+(-1)^n\sqrt{\frac{x_1x_2\dots x_{n+1}}{\alpha z_1z_2\dots z_n}}}$$

folgt. Hieraus erhält man vermöge (13.) und (16.)

$$(20.)\quad \Lambda(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha R(\alpha)}}\log\frac{1+(-1)^n\sqrt{\frac{x_1x_2\dots x_{n+1}}{\alpha y_1y_2\dots y_n}}}{1+(-1)^n\sqrt{\frac{x_1x_2\dots x_{n+1}}{\alpha z_1z_2\dots z_n}}}$$

$$= \int\frac{dx_1}{(\alpha-x_1)\sqrt{x_1R(x_1)}}+\int\frac{dx_2}{(\alpha-x_2)\sqrt{x_2R(x_2)}}+\dots+\int\frac{dx_{2n+1}}{(\alpha-x_{2n+1})\sqrt{x_{2n+1}R(x_{2n+1})}}.$$

Die in der vorstehenden Formel vorkommenden Hülfsgröfsen y_1, y_2 etc.; z_1, z_2 etc., welche aus $x_1, x_2, \dots x_{n+1}, \alpha$ vermittelst der Gleichungen (17.) bestimmt werden, kann man aber auch nach dem Abelschen Theorem durch transcendente Gleichungen definiren und erhält dann, wenn man noch $w_1, w_2, \dots w_n$ für $x_{n+2}, x_{n+3}, \dots x_{2n+1}$ schreibt, und die diesen Variabeln entsprechenden Integrale mit entgegengesetzten Zeichen nimmt, folgendes Theorem:

Theorem.

»*Aus* $n+2$ *gegebenen Gröfsen* $x_1, x_2, \dots x_{n+1}, \alpha$ *bestimme man drei Systeme von* n *Gröfsen* $w_1, w_2, \dots w_n$; $y_1, y_2, \dots y_n$; $z_1, z_2, \dots z_n$ *durch die* *drei Systeme von n transcendenten Gleichungen,*

$$\int\frac{w_1^m\,dw_1}{\sqrt{w_1R(w_1)}}+\int\frac{w_2^m\,dw_2}{\sqrt{w_2R(w_2)}}+\cdots+\int\frac{w_n^m\,dw_n}{\sqrt{w_nR(w_n)}}$$
$$=\int\frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{x_1R(x_1)}}+\int\frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{x_2R(x_2)}}+\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m\,dx_{n+1}}{\sqrt{x_{n+1}R(x_{n+1})}},$$

$$\int\frac{y_1^m\,dy_1}{\sqrt{y_1R(y_1)}}+\int\frac{y_2^m\,dy_2}{\sqrt{y_2R(y_2)}}+\cdots+\int\frac{y_n^m\,dy_n}{\sqrt{y_nR(y_n)}}$$
$$=\int\frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{x_1R(x_1)}}+\int\frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{x_2R(x_2)}}+\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m\,dx_{n+1}}{\sqrt{x_{n+1}R(x_{n+1})}}+\int\frac{\alpha^m\,d\alpha}{\sqrt{\alpha R(\alpha)}},$$

$$\int\frac{z_1^m\,dz_1}{\sqrt{z_1R(z_1)}}+\int\frac{z_2^m\,dz_2}{\sqrt{z_2R(z_2)}}+\cdots+\int\frac{z_n^m\,dz_n}{\sqrt{z_nR(z_n)}}$$
$$=\int\frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{x_1R(x_1)}}+\int\frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{x_2R(x_2)}}+\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m\,dx_{n+1}}{\sqrt{x_{n+1}R(x_{n+1})}}-\int\frac{\alpha^m\,d\alpha}{\sqrt{\alpha R(\alpha)}},$$

in welchen $R(x)$ eine gegebene Function von x vom $2n^{ten}$ Grade bedeutet und m jeden der n Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ annehmen kann. Man erhält dann zwischen den Integralen dritter Gattung folgende Gleichung:

$$\int\frac{dw_1}{(\alpha-w_1)\sqrt{w_1R(w_1)}}+\int\frac{dw_2}{(\alpha-w_2)\sqrt{w_2R(w_2)}}+\cdots+\int\frac{dw_n}{(\alpha-w_n)\sqrt{w_nR(w_n)}}$$
$$=\int\frac{dx_1}{(\alpha-x_1)\sqrt{x_1R(x_1)}}+\int\frac{dx_2}{(\alpha-x_2)\sqrt{x_2R(x_2)}}+\cdots+\int\frac{dx_{n+1}}{(\alpha-x_{n+1})\sqrt{x_{n+1}R(x_{n+1})}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha R(\alpha)}}\log\frac{1+(-1)^n\sqrt{\dfrac{x_1x_2\ldots x_{n+1}}{\alpha y_1y_2\ldots y_n}}}{1+(-1)^n\sqrt{\dfrac{x_1x_2\ldots x_{n+1}}{\alpha z_1z_2\ldots z_n}}}.$$

Man sieht aus diesem Theorem, dass die Additionsformel für die dritte Gattung der Abelschen Integrale dieselbe Form wie bei den elliptischen Integralen annimmt. Auch in diesem Theorem, so wie in der Formel (13.), muss man im Allgemeinen von dem logarithmischen Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen einen ähnlichen, den Anfangsgrenzen der Integrale entsprechenden, abziehen. Aber es reicht hin, eines der Integrale von $x=0$ an zu nehmen, weil in diesem Falle der Anfangswerth von a und mithin auch der Anfangswerth von $\Lambda(a)$ verschwindet.

Berlin, den 25. August 1845.

NOTE

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES.

PAR

C. G. J. JACOBI.

Bulletin de la classe physico-mathématique de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, Tome II. No. 7. Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 30. p. 183. 184.

NOTE SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES.

Soit X une fonction rationnelle et entière de x du sixième degré, et nommons Y la même fonction de y; soit de plus

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x), \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi_1(x).$$

Déterminons deux quantités x et y en fonctions de u et v par les équations simultanées

$$\Pi(x) + \Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x) + \Pi_1(y) = v,$$

j'ai fait voir que ce sont ces fonctions de deux variables,

$$x = \lambda(u, v), \qquad y = \lambda_1(u, v),$$

qu'il convient d'introduire dans l'analyse des transcendantes Abéliennes, et qui sont analogues aux fonctions trigonométriques et elliptiques. Or je viens de trouver, *que ces fonctions de deux variables se composent algébriquement de fonctions d'une seule variable.* En effet, nommons x' et y' les valeurs de x et de y, que l'on tire des deux équations transcendantes simultanées, en mettant $v = 0$, et soient x'' et y'' celles qui répondent à $u = 0$; on aura:

$$\begin{aligned} \Pi(x') + \Pi(y') &= u, & \Pi_1(x') + \Pi_1(y') &= 0, \\ \Pi(x'') + \Pi(y'') &= 0, & \Pi_1(x'') + \Pi_1(y'') &= v, \end{aligned}$$

d'où il suit,

$$\begin{aligned} \Pi(x') + \Pi(y') + \Pi(x'') + \Pi(y'') &= u, \\ \Pi_1(x') + \Pi_1(y') + \Pi_1(x'') + \Pi_1(y'') &= v. \end{aligned}$$

Mais, d'après le théorème d'Abel, on sait exprimer deux quantités x et y en fonctions *algébriques* des quatre variables x', x'', y', y'', de manière que l'on a les deux équations

$$\begin{aligned} u &= \Pi(x') + \Pi(y') + \Pi(x'') + \Pi(y'') = \Pi(x) + \Pi(y), \\ v &= \Pi_1(x') + \Pi_1(y') + \Pi_1(x'') + \Pi_1(y'') = \Pi_1(x) + \Pi_1(y). \end{aligned}$$

Donc les deux fonctions x et y, déterminées par les équations simultanées

$$\Pi(x)+\Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x)+\Pi_1(y) = v,$$

sont des fonctions algébriques des quatre quantités x', x'', y', y'', qui ne sont elles-mêmes que des fonctions d'une seule variable, ou en d'autres termes, *les deux fonctions de deux variables $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$ s'expriment algébriquement par les quatre fonctions d'une seule variable*

$$\begin{array}{ll} \lambda(u, 0), & \lambda_1(u, 0), \\ \lambda(0, v), & \lambda_1(0, v). \end{array}$$

La même remarque s'applique aux transcendentes Abéliennes, dans lesquelles la fonction X est d'un degré quelconque *).

) Dans un mémoire publié dans le vol. 27 du Journal de M. Crelle page 185, M. Eisenstein s'est mépris sur la nature des fonctions $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, faute d'avoir bien saisi le principe fondamental de la coëxistence des périodes relatives aux deux arguments u et v. Le mémoire „Sur les fonctions à deux variables et à quatre périodes" tome XIII page 55) a posé les vrais principes dans cette branche nouvelle de l'analyse.

On sait que la fonction $x = \sin \operatorname{am}(u)$ est donnée en u au moyen d'une équation *linéaire*, $A+Bx=0$, A et B étant des fonctions de u qui ont une valeur unique et finie pour chaque valeur finie, réelle ou imaginaire, de l'argument u. D'une manière analogue, étant données les deux équations établies ci-dessus,

$$\Pi(x)+\Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x)+\Pi_1(y) = v,$$

les quantités x et y se trouvent être les deux racines d'une équation *quadratique*

$$A+Bt+Ct^2 = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions de u et v qui ont une valeur unique et finie pour toutes les valeurs finies, réelles ou imaginaires, des deux arguments u et v. C'est là la véritable nature des fonctions x et y. Le caractère de la fonction $\sin \operatorname{am}(u)$ étant d'être un *quotient* $-\frac{B}{A}$, M. Eisenstein dit (pag. 190), que, par analogie, dans la théorie des intégrales Abéliennes il faudrait considérer *des quotients de quotients*. Mais qu'est ce que c'est que *des quotients de quotients?* C'est tout simplement *des quotients*.

Dans le même mémoire M. Eisenstein a considéré certains produits doublement infinis, que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques, et qu'il n'a pas reconnus être du nombre de ceux qui prennent des valeurs différentes suivant l'ordre dans lequel on range les facteurs. Ces erreurs, ayant été reproduites dans un autre mémoire (page 285 du même volume), ont été la cause, que M. Eisenstein y a établi des formules fautives relatives aux fonctions $\Theta(x)$. Les formules exactes ont été données depuis longtemps dans le mémoire tome IV pag. 382**).

Oct. 1845.

J.

*) Vol. II de cette édition, pag. 25.
**) Vol. I de cette édition, pag. 309 et 310.

EXTRAIT DE DEUX LETTRES

DE

CHARLES HERMITE À C. G. J. JACOBI

ET D'UNE LETTRE

DE

JACOBI ADRESSÉE À HERMITE.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 32. p. 277—299 und Bd. 32. p. 176—181.

EXTRAITS DE DEUX LETTRES DE CH. HERMITE A C. G. J. JACOBI.

I.

Paris, Janvier 1843.

L'étude de votre mémoire publié dans le Journal de M. Crelle sous le titre: »De functionibus quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur«, m'a conduit pour la division des arguments dans ces fonctions à un théorème analogue à celui que vous avez donné dans le 3e volume du même*) journal, pour obtenir l'expression la plus simple des racines des équations traitées par Abel. M. Liouville m'a engagé à vous écrire pour vous soumettre ce travail; oserais-je espérer, Monsieur, que vous daignerez l'accueillir avec toute l'indulgence dont il a besoin?

Soit:

$$\varDelta(x) = \sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)};$$

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\varDelta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha+\beta y)\,dy}{\varDelta(y)},$$

$$u' = \int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\varDelta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha'+\beta' y)\,dy}{\varDelta(y)},$$

$$x = \lambda_0(u, u'), \qquad y = \lambda_1(u, u').$$

Faisons pour abréger:

$$x_n = \lambda_0(nu, nu'), \qquad y_n = \lambda_1(nu, nu'),$$

ces deux quantités seront déterminées simultanément par les deux racines d'une équation du second degré,

$$Ux_n^2 + U'x_n + U'' = 0,$$

dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de x, y, $\varDelta(x)$, $\varDelta(y)$; j'ai

*) Vol. II. de cette édition, pag. 23.

trouvé qu'ils étaient de la forme $P+Q\Delta(x)\Delta(y)$, où P et Q sont des fonctions rationnelles de x et y; mais cette remarque n'est pas essentielle pour ce qui suit.

Je partirai de ce que les racines simultanées des deux équations

$$(A.)\qquad Ux_n^2+U'x_n+U''=0,\qquad Uy_n^2+U'y_n+U''=0$$

sont données par les formules:

$$x=\lambda_0\left(u+\frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n},\ u'+\frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4}{n}\right),$$

$$y=\lambda_1\left(u+\frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n},\ u'+\frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4}{n}\right),$$

en attribuant aux nombres entiers m, m', m'', m''' les valeurs $0, 1, 2, \ldots n-1$.

Cela posé, soit pour abréger:

$$I=mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4,\qquad I'=mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4,$$

et désignons par $f(x,y)$ une fonction rationnelle symétrique de x et y, et par p, q, r, s quatre racines de l'équation binome $x^n=1$, je dis qu'on aura:

$$(B.)\quad \sum_0^{n-1}{}_{m'''}\sum_0^{n-1}{}_{m''}\sum_0^{n-1}{}_{m'}\sum_0^{n-1}{}_{m}\left\{f\left[\lambda_0\left(u+\frac{I}{n},\ u'+\frac{I'}{n}\right),\quad \lambda_1\left(u+\frac{I}{n},\ u'+\frac{I'}{n}\right)\right]\right\}p^m q^{m'} r^{m''} s^{m'''}$$
$$=\sqrt[n]{A+B\Delta(\lambda_0(nu,nu'))+C\Delta(\lambda_1(nu,nu'))+D\Delta(\lambda_0(nu,nu'))\Delta(\lambda_1(nu,nu'))},$$

A, B, C, D désignant des fonctions rationnelles de $\lambda_0(nu,nu')$, $\lambda_1(nu,nu')$.

Le premier membre peut d'abord se ramener à une fonction rationnelle de $\lambda_0(u,u')$, $\lambda_1(u,u')$. En effet, d'après la propriété fondamentale des fonctions λ_0, λ_1, un terme quelconque, tel que

$$f\left[\lambda_0\left(u+\frac{I}{n}, u'+\frac{I'}{n}\right),\ \lambda_1\left(u+\frac{I}{n}, u'+\frac{I'}{n}\right)\right],$$

pourra être exprimé rationnellement en

$$\lambda_0(u,u'),\ \ \lambda_1(u,u'),\ \ \Delta(\lambda_0(u,u')),\ \ \Delta(\lambda_1(u,u')),$$

et les quantités analogues relatives à la division des indices. Or on trouve aisément ces formules:

$$\Delta(x)=(\alpha+\beta x)\frac{\partial x}{\partial u}+(\alpha'+\beta' x)\frac{\partial x}{\partial u'}.$$
$$\Delta(y)=(\alpha+\beta y)\frac{\partial y}{\partial u}+(\alpha'+\beta' y)\frac{\partial y}{\partial u'}$$

qui montrent que les radicaux carrés $\Delta(\lambda_0(u,u'))$, $\Delta(\lambda_1(u,u'))$ pourront s'exprimer rationnellement en $\lambda_0(u,u')$, $\lambda_1(u,u')$; car en faisant disparaître les irrationnelles des équations $(A.)$, puis les différentiant successivement par rapport à u et u', on obtiendra les expressions des dérivées partielles en fonctions rationnelles de $\lambda_0(u,u')$ et $\lambda_1(u,u')$.

Représentons le premier membre de l'équation $(B.)$ par $\varphi(u,u')$, on démontrera bien aisément que:

$$\varphi\left(u+\frac{ki_1\sqrt{-1}+k'i_2+k''i_3\sqrt{-1}+k'''i_4}{n},\quad u'+\frac{ki'_1\sqrt{-1}+k'i'_2+k''i'_3\sqrt{-1}+k'''i'_4}{n}\right)$$
$$=p^{-k}q^{-k'}r^{-k''}s^{-k'''}\varphi(u,u'),$$

quels que soint les entiers k, k', k'', k'''.

En l'élevant à la puissance n^e, on obtient donc une fonction rationnelle de $\lambda_0(u,u')$, $\lambda_1(u,u')$, qui ne change point, en substituant à ces quantités deux autres quelconques des racines simultanées des équations proposées. Il suit de là et de la théorie des fonctions symétriques des racines d'un système d'équations à plusieurs inconnues, que cette fonction pourra être déterminée rationnellement par les coefficients des équations $(A.)$.

J'observe actuellement qu'il a été introduit les quantités

$$\frac{\partial\lambda_0(nu,nu')}{\partial u},\quad \frac{\partial\lambda_0(nu,nu')}{\partial u'},\quad \frac{\partial\lambda_1(nu,nu')}{\partial u},\quad \frac{\partial\lambda_1(nu,nu')}{\partial u'}$$

qu'on pourra éliminer par les formules suivantes:

$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha'+\beta' y),\quad (\alpha'\beta-\beta'\alpha)\frac{\partial x}{\partial u'}=\frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha+\beta y),$$
$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha'+\beta' x),\quad (\alpha'\beta-\beta'\alpha)\frac{\partial y}{\partial u'}=\frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha+\beta x).$$

Or, une fonction rationnelle quelconque des deux radicaux $\Delta(\lambda_0(u,u'))$, $\Delta(\lambda_1(u,u'))$ peut toujours être mise sous la forme

$$a+b\Delta(\lambda_0(u,u'))+c\Delta(\lambda_1(u,u'))+e\Delta(\lambda_0(u,u'))\Delta(\lambda_1(u,u')),$$

ce qui achève la démonstration du théorème énoncé.

En supposant successivement:

$$f(x,y)=x+y,\quad \text{et}\quad f(x,y)=xy,$$

on aura séparément par une somme de n^4-1 radicaux n^{es} les coefficients d'une équation du second degré, dont les racines détermineront finalement celles des équations proposées. On pourrait aussi faire voir qu'il suffit de connaître l'un d'eux, l'autre se déterminant rationnellement par celui-là.

Pour obtenir la division des indices, soit

$$u = \frac{ki_1\sqrt{-1} + k'i_2 + k''i_3\sqrt{-1} + k'''i_4}{n} = \frac{I}{n},$$

$$u' = \frac{ki'_1\sqrt{-1} + k'i'_2 + k''i'_3\sqrt{-1} + k'''i'_4}{n} = \frac{I'}{n},$$

on aura:

$$x_n = 0, \quad y_n = 0,$$

et les équations à résoudre seront:

$$(C.) \qquad U' = 0, \quad U'' = 0;$$

leurs racines seront comprises dans les formules:

$$x = \lambda_0\left(\frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n}, \ \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right),$$

$$y = \lambda_1\left(\frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n}, \ \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right),$$

en attribuant aux nombres entiers m, m', m'', m''' les valeurs $0, 1, 2, \ldots n-1$. Mais si l'on suppose le nombre n premier, on verra aisément qu'en supposant successivement:

$$(D.) \quad \begin{array}{llll} I_1 = i_1\sqrt{-1}, & I'_1 = i'_1\sqrt{-1}; & I_2 = \mu i_1\sqrt{-1} + i_2, & I'_2 = \mu i'_1\sqrt{-1} + i'_2; \\ I_3 = \mu i_1\sqrt{-1} + \mu' i_2 + i_3\sqrt{-1}, & & I'_3 = \mu i'_1\sqrt{-1} + \mu' i'_2 + i'_3\sqrt{-1}; & \\ I_4 = \mu i_1\sqrt{-1} + \mu' i_2 + \mu'' i_3\sqrt{-1} + i_4, & & I'_4 = \mu i'_1\sqrt{-1} + \mu' i'_2 + \mu'' i'_3\sqrt{-1} + i'_4, & \end{array}$$

on pourra leur substituer les suivantes:

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_1}{n}, m\frac{I'_1}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(m\frac{I_1}{n}, m\frac{I'_1}{n}\right),$$

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_2}{n}, m\frac{I'_2}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(m\frac{I_2}{n}, m\frac{I'_2}{n}\right),$$

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_3}{n}, m\frac{I'_3}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(m\frac{I_3}{n}, m\frac{I'_3}{n}\right),$$

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_4}{n}, m\frac{I'_4}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(m\frac{I_4}{n}, m\frac{I'_4}{n}\right),$$

en excluant la solution zéro, et donnant à m, μ, μ', μ'', les valeurs

$$0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Mais comme les intégrales qui entrent dans les expressions de u et u' ont été prises à la limite inférieure zéro, on a:

$$\lambda_0(-u, -u') = \lambda_0(u, u'), \quad \lambda_1(-u, -u') = \lambda_1(u, u'),$$

d'où il arrive que les n^4-1 solutions des équations $(C.)$ sont égales deux à deux; et il suffira de prendre dans les formules précédentes $m = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)$.

Soit toujours $f(x, y)$ une fonction rationnelle et symétrique de x et y, on établira d'abord, qu'en désignant par I l'une des quantités I_1, I_2, I_3, I_4, par I' la quantité correspondante au second argument, l'expression

$$f\left[\lambda_0\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right), \ \lambda_1\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right)\right]$$

peut se ramener quel que soit le nombre entier k, à une fonction rationnelle de

$$\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right), \ \lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right).$$

Cela résulte de ce que les radicaux

$$\varDelta\left[\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right], \ \varDelta\left[\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right]$$

s'expriment eux-mêmes rationnellement en

$$\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right), \ \lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right).$$

comme il est facile de le voir d'après ce qui a été dit plus haut.

Cela posé, l'expression

$$\sum_0^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_k \left\{f\left[\lambda_0\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right), \ \lambda_1\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right)\right]\right\}^l,$$

où l est un entier quelconque, pourra être ramenée à une fonction rationnelle et symétrique de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, que je représenterai, pour abréger, par $\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, et qu'on démontrera aisément jouir de la propriété que:

$$\varphi\left(\nu\frac{I}{n}, \nu\frac{I'}{n}\right) = \varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right),$$

quel que soit le nombre entier ν.

Donc, donnant successivement à I et I' toutes les valeurs correspondantes comprises dans les formules $(D.)$, on pourra construire une équation entièrement rationnelle, qui aura pour racines les valeurs qui en résulteront pour la fonction $\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$.

Il est bien facile de voir que son degré sera le nombre

$$1 + n + n^2 + n^3 = \frac{n^4-1}{n-1};$$

ainsi, l'équation de degré $\frac{1}{2}(n^4-1)$ de laquelle dépend la détermination d'une fonction rationnelle symétrique de

$$\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right), \quad \lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right),$$

peut être décomposée en $\frac{n^4-1}{n-1}$ facteurs du degré $\frac{1}{2}(n-1)$, au moyen des racines d'une équation rationnelle du degré $\frac{n^4-1}{n-1}$.

Les équations de degré $\frac{1}{2}(n-1)$ sont résolubles par radicaux. Pour le faire voir en peu de mots, soit ρ une racine primitive par rapport au nombre premier n, on établira d'abord que leurs racines peuvent être représentées par la formule

$$f\left[\lambda_0\left(\rho^k\frac{I}{n}, \rho^k\frac{I'}{n}\right), \ \lambda_1\left(\rho^k\frac{I}{n}; \rho^k\frac{I'}{n}\right)\right],$$

en supposant $k=0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-3)$; et si l'on considère la puissance de degré $\frac{1}{2}(n-1)$ de l'expression

$$\sum_0^{\frac{1}{2}(n-3)}{}_k\, f\left[\lambda_0\left(\rho^k\frac{I}{n}, \rho^k\frac{I'}{n}\right), \ \lambda_1\left(\rho^k\frac{I}{n}, \rho^k\frac{I'}{n}\right)\right]\theta^k,$$

où θ est une racine de $\theta^{\frac{1}{2}(n-1)}-1=0$, on verra qu'elle peut être ramenée à une fonction rationnelle et symétrique de

$$\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right), \quad \lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$$

que je représenterai, pour abréger, par $\psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, et qui jouira, comme la fonction φ, de la propriété que:

$$\psi\left(\frac{\nu I}{n}, \frac{\nu I'}{n}\right) = \psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right).$$

Dès lors on démontre aisément qu'on peut trouver une fonction rationnelle $F(x)$ telle, que pour toutes les valeurs de I et I' comprises dans les formules $(D.)$, on ait:

$$\psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right) = F\left[\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right].$$

Or, connaissant la fonction ψ, on sait comment en déduire toutes les racines de l'équation proposée.

Les considérations précédentes semblent pouvoir s'appliquer également aux autres classes des transcendantes nommées généralement par Legendre fonctions ultra-elliptiques; il est facile en effet de trouver les formules suivantes. Soit:

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \sqrt{x(1-x)(1-\lambda_1^2x)\ldots(1-\lambda_{2n+1}^2x)},\\
\theta_k(x) &= \alpha_k+\beta_kx+\gamma_kx^2+\cdots+\eta_kx^n,\\
\Phi_k(x) &= \int_0^x\frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)};
\end{aligned}$$

posons:

$$\begin{aligned}
u_0 &= \Phi_0(x_0)+\Phi_0(x_1)+\cdots+\Phi_0(x_n),\\
u_1 &= \Phi_1(x_0)+\Phi_1(x_1)+\cdots+\Phi_1(x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_n &= \Phi_n(x_0)+\Phi_n(x_1)+\cdots+\Phi_n(x_n),
\end{aligned}$$

et soit:

$$x_0=\lambda_0(u_0, u_1, \ldots u_n), \quad x_1=\lambda_1(u_0, u_1, \ldots u_n), \ \ldots x_n=\lambda_n(u_0, u_1, \ldots u_n),$$

on aura:

$$\begin{aligned}
\Delta(x_0) &= \theta_0(x_0)\frac{\partial x_0}{\partial u_0}+\theta_1(x_0)\frac{\partial x_0}{\partial u_1}+\theta_2(x_0)\frac{\partial x_0}{\partial u_2}+\cdots+\theta_n(x_0)\frac{\partial x_0}{\partial u_n},\\
\Delta(x_1) &= \theta_0(x_1)\frac{\partial x_1}{\partial u_0}+\theta_1(x_1)\frac{\partial x_1}{\partial u_1}+\theta_2(x_1)\frac{\partial x_1}{\partial u_2}+\cdots+\theta_n(x_1)\frac{\partial x_1}{\partial u_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta(x_n) &= \theta_0(x_n)\frac{\partial x_n}{\partial u_0}+\theta_1(x_n)\frac{\partial x_n}{\partial u_1}+\theta_2(x_n)\frac{\partial x_n}{\partial u_2}+\cdots+\theta_n(x_n)\frac{\partial x_n}{\partial u_n}.
\end{aligned}$$

Les fonctions θ étant du degré n, on trouve aussi que les racines de l'équation du n^e degré

$$0=\theta_0(x)\frac{\partial x_k}{\partial u_0}+\theta_1(x)\frac{\partial x_k}{\partial u_1}+\theta_2(x)\frac{\partial x_k}{\partial u_2}+\cdots+\theta_n(x)\frac{\partial x_k}{\partial u_n}$$

sont les n fonctions, $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, x_{k+1} \ldots x_n$.

En cherchant à déterminer directement le degré des équations relatives à la division des arguments dans les fonctions λ, j'ai été conduit à cette remarque, que l'équation algébrique correspondante à l'équation transcendante

$$\Phi(\alpha_0)+\Phi(\alpha_1)+\Phi(\alpha_2)+\cdots+\Phi(\alpha_n)=\mu\Phi(x)$$

a ses coefficients rationnels en x, quel que soit le nombre entier μ; mais voici quelque chose de plus étendu.

Considérez la transcendante

$$\int_0^x \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{F(x)^k}},$$

où $F(x)$ est un polynome entier du degré m, $\theta(x)$ un autre polynome d'un degré $< m\cdot\frac{k}{n} - 1$. Si l'on suppose n et m premiers entre eux, et si l'on fait $\nu = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$, on sait que la somme d'un nombre quelconque μ de pareilles intégrales relatives aux variables x, y, z etc. est réductible à une somme composée de ν termes seulement, dont les arguments $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{\nu-1}$ sont déterminées par les racines d'une équation du degré ν, dont les coefficients sont rationnels en

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ \sqrt[n]{F(x)},\ \sqrt[n]{F(y)},\ \sqrt[n]{F(z)} \text{ etc.}$$

Or, si l'on fait $x = y = z = \ldots$, l'équation correspondante à l'équation transcendante

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{F(x)^k}} + \int_0^{\alpha_1} \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{F(x)^k}} + \cdots + \int_0^{\alpha_{\nu-1}} \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{F(x)^k}} = \mu \int_0^x \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{F(x)^k}}$$

aura tous ses coefficients rationnels en x.

II.

Paris, Août 1844.

La bonté avec laquelle vous avez accueilli mes premières recherches sur les fonctions Abéliennes, m'engage à vous écrire une seconde fois, pour vous soumettre quelques nouveaux résultats auxquels j'ai été conduit par l'étude de vos ouvrages, en essayant d'étendre aux transcendantes plus générales, les principales théories des fonctions elliptiques. Mon travail m'a amené naturellement, à rechercher la démonstration de quelques uns des théorèmes que vous avez énoncés dans le journal de M. Crelle; c'est aussi, Monsieur, ce dont je vous demanderai la permission de vous entretenir d'abord; je m'occuperai surtout de l'expression de $\sin\mathrm{am}(u,\varkappa)$ par $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, si importante pour la théorie des fonctions elliptiques; mais je ne sais si j'aurai véritablement rencontré les principes qui vous ont conduit à ce beau théorème.

En suivant vos notations, je nommerai $H(x)$, $\Theta(x)$ les deux fonctions qui donnent

$$\sin\mathrm{am}(x) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

et qui satisfont aux conditions:

$$(1.)\qquad \begin{aligned} &\Theta(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Theta(x), && H(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}H(x),\\ &\Theta(x+2K) \;\;= \Theta(x), && H(x+2K) \;\;= -H(x); \end{aligned}$$

et voici d'abord une remarque sur laquelle je me fonderai principalement. Soit $\Phi(x)$ une fonction définie par l'équation

$$(2.)\qquad \Phi(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x)$$

et par la condition de périodicité

$$(3.)\qquad \Phi(x+4K) = \Phi(x),$$

on trouvera qu'en supposant

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, a_m e^{m\frac{i\pi x}{2K}},$$

les coefficients se déterminent de la manière suivante:

$$a_{2\mu} = (-1)^\mu a_0 q^{\mu^2}, \qquad a_{2\mu+1} = (-1)^\mu a_1 q^{\mu(\mu+1)},$$

de sorte qu'en employant les fonctions H et Θ, on a

$$\Phi(x) = AH(x) + B\Theta(x).$$

Cela posé, soit n un nombre premier, p un entier compris entre 0 et $n-1$, faisons $\alpha = e^{-p\frac{8i\pi}{n}}$ et considérons la somme

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)} + \alpha\frac{H\left(x+\frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4K}{n}\right)} + \alpha^2\frac{H\left(x+\frac{8K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{8K}{n}\right)} + \cdots + \alpha^{n-1}\frac{H\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)};$$

nommons $\Phi(x)$ le numérateur et $\Phi_0(x)$ le dénominateur, savoir:

$$\Phi_0(x) = \Theta(x)\,\Theta\left(x+\frac{4K}{n}\right)\Theta\left(x+\frac{8K}{n}\right)\cdots\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right);$$

on déduit sans peine de la propriété fondamentale des Θ, qui est exprimée par l'égalité (1.), la condition

$$\Phi_0(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi_0(x),$$

et il est clair qu'on a

$$\Phi_0\left(x+\frac{4K}{n}\right) = \Phi_0(x).$$

Or ces deux équations peuvent être ramenées aux équations (2.) et (3.) de la manière suivante. Soit $\varphi(x)$ une fonction définie par les deux conditions

$$\varphi(x+2iK_1') = -e^{-\frac{i\pi}{K_1}(x+iK_1')}\varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x+4K_1) = \varphi(x),$$

on aura d'après ce qui a été dit tout-à-l'heure:

$$\varphi(x) = AH_1(x)+B\Theta_1(x),$$

en désignant par H_1 et Θ_1 les fonctions H et Θ, dans lesquelles K et K' seraient supposés devenus K_1 et K_1'; posons ensuite $n\frac{K_1}{K} = \frac{K_1'}{K'}$, et faisons $x = \frac{nK_1}{K}\cdot z$, il viendra, comme on le voit facilement:

$$\varphi\left(\frac{nK_1}{K}(z+2iK')\right) = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(z+iK')}\varphi\left(\frac{nK_1}{K}z\right)$$

et

$$\varphi\left(\frac{nK_1}{K}\left(z+\frac{4K}{n}\right)\right) = \varphi\left(\frac{nK_1}{K}z\right).$$

Or ces équations font voir qu'on aura:

$$\Phi_0(x) = \varphi\left(\frac{nK_1}{K}x\right) = AH_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)+B\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right),$$

et comme la fonction Φ_0 est paire, il faut faire $A = 0$ et il vient:

$$\Phi_0(x) = \text{Const.}\,\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right).$$

Je passe actuellement au numérateur désigné par $\Phi(x)$. On établit immédiatement, qu'il satisfait encore à l'équation

$$(4.) \qquad \Phi(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x),$$

et on peut même observer que chacun des n produits dont la somme le compose, la vérifie isolément. On trouve ensuite en désignant par j un nombre entier:

$$\Phi\left(x+\frac{4jK}{n}\right) = \alpha^{-j}\Phi(x).$$

Si donc je pose

$$\Psi(x) = e^{-2p\frac{i\pi x}{K}}\Phi(x),$$

j'aurai:

$$\Psi\left(x+\frac{4jK}{n}\right) = \Psi(x).$$

D'ailleurs de l'équation fondamentale (4.) on tirera:

$$\Psi(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')+4p\frac{\pi K'}{K}}\Psi(x),$$

et en mettant $x-4p\frac{iK'}{n}$ à la place de x, et faisant pour plus de clarté

$$\Psi_1(x) = \Psi\left(x-\frac{4piK'}{n}\right),$$

on en déduit:

$$\Psi_1(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Psi_1(x).$$

Ainsi par cette transformation nous sommes entièrement ramenés à l'équation (4.). Mais on a la condition de périodicité:

$$\Psi_1\left(x+\frac{4K}{n}\right) = \Psi_1(x),$$

donc, en raisonnant comme plus haut, il viendra:

$$\Psi_1(x) = AH_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)+B\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right).$$

Faisons pour la suite $\frac{nK_1}{K} = \frac{1}{M}$, nous aurons le théorème exprimé par l'égalité:

$$\sin\operatorname{am}(x)+\alpha\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{4K}{n}\right)+\alpha^2\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{8K}{n}\right)+\cdots+\alpha^{n-1}\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)$$
$$= e^{2p\frac{i\pi x}{K}}\cdot\frac{AH_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)+B\Theta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)}.$$

J'observe que le premier membre change de signe en augmentant x de $2K$; le nombre n étant impair, il en est de même de la fonction $H_1\left(\frac{x}{M}\right)$; d'ailleurs $\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)$ ne change pas; ainsi il faut faire $B = 0$, et il vient:

$$\sin\operatorname{am}(x)+\alpha\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{4K}{n}\right)+\cdots+\alpha^{n-1}\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)$$
$$= \text{Const.}\,e^{2p\frac{i\pi x}{K}}\cdot\frac{H_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)} = \text{Const.}\sin\operatorname{am}\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)\cdot\frac{e^{2p\frac{i\pi x}{K}}\Theta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)}.$$

Je substitue maintenant aux fonctions Θ à période réelle, les fonctions analogues

$$\vartheta(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta(x),$$

à la période imaginaire $4iK'$; on trouve:

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right) = e^{n\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right),$$

de sorte qu'à un facteur constant près, l'expression

$$\frac{e^{2p\frac{i\pi x}{K}}\Theta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)}$$

se transforme en la suivante:

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)},$$

où l'exponentielle $e^{2p\frac{i\pi x}{K}}$ a disparu; ainsi il vient:

$$\sin\mathrm{am}(x)+\alpha\sin\mathrm{am}\left(x+\frac{4K}{n}\right)+\cdots+\alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)$$
$$= \text{Const.}\sin\mathrm{am}\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)\cdot\frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)}.$$

Pour déterminer la constante, je multiplie les deux membres par $x-iK'$, puis je fais $x=iK'$; en nommant $\varkappa$, $\varkappa_1$ les modules des fonctions K, K_1, le terme $\sin\mathrm{am}(x)$ qu'il y a seul lieu de considérer dans le premier membre, donne $\frac{1}{\varkappa}$; dans le second il suffit d'avoir la valeur de la dérivée de $\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)$ pour $x=iK'$. Or on obtient sans peine pour résultat:

$$\frac{i\sqrt{\varkappa_1}\cdot\vartheta_1(0)}{M};$$

ainsi on a l'égalité:

$$\frac{1}{\varkappa} = \text{Const.}\sin\mathrm{am}\left(\frac{iK'}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)\cdot\frac{\vartheta_1\left(\frac{iK'}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)}{\frac{1}{M}\cdot i\sqrt{\varkappa_1}\cdot\vartheta_1(0)},$$

et on en tire après quelques transformations faciles:

$$\text{Const.} = \frac{\varkappa_1}{M\varkappa}\cdot\frac{\vartheta_1(0)}{\vartheta_1\left(\frac{4piK_1'}{n}\right)}.$$

Nous voici de la sorte parvenus au théorème exprimé par l'égalité:

$$\frac{M\varkappa}{\varkappa_1}\left[\sin\mathrm{am}(x)+\alpha\sin\mathrm{am}\left(x+\frac{4K}{n}\right)+\cdots+\alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)\right]$$
$$= \sin\mathrm{am}\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)\cdot\frac{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(4p\frac{iK_1'}{n}\right)}.$$

Je n'ai plus maintenant, qu'à vous emprunter, Monsieur, la méthode par laquelle vous établissez les propriétés si remarquables de la fonction

$$\chi(u) = e^{ru^2}\Omega(u).$$

En formant le produit

$$\psi(x) = \frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(\frac{x}{M}+\frac{4iK_1'}{n}\right)\vartheta_1\left(\frac{x}{M}+\frac{8iK_1'}{n}\right)\cdots\vartheta_1\left(\frac{x}{M}+\frac{4(n-1)iK_1'}{n}\right)}{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1^2\left(\frac{4iK_1'}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{8iK_1'}{n}\right)\cdots\vartheta_1^2\left(\frac{2(n-1)iK_1'}{n}\right)},$$

on aura $\psi\left(x+4p\frac{iK'}{n}\right)=\psi(x)$, et on en déduit la formule suivante:

$$\frac{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(4p\frac{iK_1'}{n}\right)}$$
$$=\left\{\frac{\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_m\left[1-\varkappa_1^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{x}{M}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4miK_1'}{n}\right)\right]\cdot\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_m\left[1-\varkappa_1^2\sin^2\mathrm{am}\left(4p\frac{iK_1'}{n}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4miK_1'}{n}\right)\right]}{\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_m\left[1-\varkappa_1^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1'}{n}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4miK_1'}{n}\right)\right]}\right\}^{\frac{1}{n}},$$

de laquelle découle ainsi la démonstration de votre théorème sur l'expression algébrique de $\sin\mathrm{am}(x)$ par $\sin\mathrm{am}\left(\frac{x}{M}\right)$.

La méthode précédente est fondée principalement sur ce caractère digne de toute notre attention de la fonction $\sin\mathrm{am}(x)$, d'être exprimable par le quotient de deux fonctions développables en séries, toujours convergentes, et qui restent les mêmes, ou ne font qu'acquérir un facteur commun, en augmentant l'argument de certaines quantités constantes. Tel est le lien si simple, par lequel se trouve rattaché aux notions analytiques élémentaires l'ensemble des propriétés caractéristiques de la nouvelle transcendante, qui ont leur source dans le principe de la double période. Mais il est important d'abord d'observer dans toute fonction rationnelle de $\sin\operatorname{am}(x)$ l'analogie des fonctions qui jouent les rôles de numérateur et de dénominateur avec les fonctions H et Θ. A cet effet, je considère la fonction homogène d'un degré quelconque n:

$$\Phi(x) = AH^n(x) + BH^{n-1}(x)\Theta(x) + \cdots + LH(x)\Theta^{n-1}(x) + I\Theta^n(x).$$

On trouve bien facilement, d'après chaque terme en particulier:

$$\Phi(x+2iK') = (-1)^n e^{-\frac{ni\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x);$$

on a d'ailleurs:

$$\Phi(x+4K) = \Phi(x);$$

ainsi dans ce cas général, l'expression analytique du caractère de la double périodicité se présente sous la même forme que pour la fonction $\sin\operatorname{am}(x)$. Introduisons aussi la fonction $H'(x)\,\Theta(x) - H(x)\,\Theta'(x)$, qui représente le numérateur de la dérivée de $\frac{H(x)}{\Theta(x)}$; en la désignant un instant par $\chi(x)$, on aura sans peine:

$$\chi(x+2K) = -\chi(x), \qquad \chi(x+2iK') = e^{-2\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\chi(x).$$

De là résulte que la fonction suivante:

$$(\alpha.) \quad \begin{aligned} \Pi(x) = {} & AH^n(x) + BH^{n-1}(x)\Theta(x) + \cdots + LH(x)\Theta^{n-1}(x) + I\Theta^n(x) \\ & + [H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x)][A'H^{n-2}(x) + B'H^{n-3}(x)\Theta(x) + \cdots + I'\Theta^{n-2}(x)] \end{aligned}$$

donnera encore

$$\Pi(x+4K) = \Pi(x), \qquad \Pi(x+2iK') = (-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Pi(x).$$

Mais on ne peut pas satisfaire à ces deux équations par une solution plus générale que la fonction définie par l'équation $(\alpha.)$ qui renferme $2n$ constantes arbitraires. Supposons en effet:

$$\Pi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, a_m e^{m\frac{i\pi x}{2K}},$$

la seconde équation donnera facilement:

$$a_{m+2n} = (-1)^n a_m q^{m+n},$$

d'où:

$$a_{m+2kn} = (-1)^{kn} a_m q^{km+k^2n},$$

k étant un nombre entier positif ou négatif. On voit par là, que tous les coefficients s'obtiendront au moyen des quantités $a_0, a_1, \ldots a_{2n-1}$ qui restent arbitraires. Si à la condition $\Pi(x+4K) = \Pi(x)$ on substitue la condition plus particulière $\Pi(x+2K) = -\Pi(x)$, tous les coefficients à indices pairs devront être nuls, ce qui réduira à moitié le nombre des constantes arbitraires.

Ainsi je considère l'expression

$$\sin\operatorname{am}(x).F(\sin^2\operatorname{am}(x)) - \frac{d.\sin\operatorname{am}(x)}{dx}f(\sin^2\operatorname{am}(x)),$$

où $F(x)$ et $f(x)$ désignent deux fonctions entières, l'une du degré m, l'autre du degré $m-1$; je remplace $\sin\operatorname{am}(x)$ par $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\cdot\frac{H(x)}{\Theta(x)}$, le numérateur

$$\Pi(x) = \Theta(x)^{2m+1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\cdot\frac{H(x)}{\Theta(x)}\cdot F\left(\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}\right) - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\cdot\frac{H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x)}{\Theta^2(x)}f\left(\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}\right)\right\}$$

vérifiera les deux équations:

$$\Pi(x+2K) = -\Pi(x), \qquad \Pi(x+2iK') = -e^{-(2m+1)\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Pi(x)$$

indépendamment des valeurs des coefficients au nombre de $2m+1$ qu'il renferme; il en représentera donc la solution la plus générale. Mais d'une autre part, je considère le produit des $2m+1$ facteurs

$$H(x+a_1).H(x+a_2)\ldots H(x+a_{2m}).H(x+a_{2m+1}):$$

il satisfait évidemment à la première des équations précédentes, et on voit sans peine qu'il vérifiera la seconde, en assujettissant les constantes $a_1, a_2, \ldots a_{2m}, a_{2m+1}$, à la seule condition

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m} + a_{2m+1} = 2jK,$$

j étant un nombre entier quelconque. En introduisant un facteur constant, on aura une nouvelle expression de la solution générale, dont la comparaison avec la première donne le théorème exprimé par l'égalité:

$$\begin{aligned} & \sin\operatorname{am}(x)\,F(\sin^2\operatorname{am}(x)) - \frac{d.\sin\operatorname{am}(x)}{dx}f(\sin^2\operatorname{am}(x)) \\ & = \text{Const.}\,\frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ldots H(x+a_{2m+1})}{\Theta^{2m+1}(x)}. \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons sous la forme trouvée par Abel les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques relatives à l'addition des arguments.

Dans le cas le plus simple, celui de $m = 1$, on aura :

$$\sin\operatorname{am}(x)\,(\sin^2\operatorname{am}(x) + A) - B\,\frac{d.\sin\operatorname{am}(x)}{dx} = \text{Const.}\,\frac{H(x+a_1)\,H(x+a_2)\,H(x-a_1-a_2)}{\Theta^3(x)}.$$

Les coefficients A, B dépendent des quantités a_1 et a_2 au moyen des deux équations qui expriment que le premier membre s'annule pour $x = -a_1$, $x = -a_2$.

Si l'on suppose $a_1 = -a_2$, on trouvera

$$B = 0, \qquad A = -\sin^2\operatorname{am}(a_1),$$

ce qui donnera :

$$\sin\operatorname{am}(x)\,[\sin^2\operatorname{am}(x) - \sin^2\operatorname{am}(a_1)] = \text{Const.}\,\frac{H(x)\,H(x+a_1)\,H(x-a_1)}{\Theta^3(x)};$$

et par suite :

$$\sin^2\operatorname{am}(x) - \sin^2\operatorname{am}(a_1) = \text{Const.}\,\frac{H(x+a_1)\,H(x-a_1)}{\Theta^2(x)},$$

$$\log[\sin^2\operatorname{am}(x) - \sin^2\operatorname{am}(a_1)] = \text{const.} + \log H(x+a_1) + \log H(x-a_1) - 2\log\Theta(x).$$

Cette dernière équation conduit à la théorie des fonctions de 3^me espèce, en différentiant par rapport à a_1, et intégrant par rapport à x.

Mais je reprends les deux équations

$$\Pi(x+4K) = \Pi(x), \qquad \Pi(x+2iK') = (-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\,\Pi(x),$$

dont la solution générale est donnée par l'expression

$$\Pi(x) = AH^n(x) + BH^{n-1}(x)\,\Theta(x) + \cdots + I\Theta^n(x)$$
$$+ [H'(x)\,\Theta(x) - H(x)\,\Theta'(x)][A'H^{n-2}(x) + B'H^{n-3}(x)\,\Theta(x) + \cdots + I'\Theta^{n-2}(x)].$$

En faisant $\alpha = e^{-p\frac{2i\pi}{n}}$ et

$$\Phi(x) = \Pi(x) + \alpha\Pi\left(x + \frac{4K}{n}\right) + \alpha^2\Pi\left(x + \frac{8K}{n}\right) + \cdots + \alpha^{n-1}\Pi\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right),$$

on aura toujours la seconde équation :

$$\Phi(x+2iK') = (-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\,\Phi(x),$$

mais de plus :

$$\Phi\left(x + \frac{4jK}{n}\right) = \alpha^{-j}\,\Phi(x).$$

Posant donc

$$\Psi(x) = e^{-p\frac{i\pi x}{2K}}\,\Phi(x),$$

il viendra :

$$\Psi\left(x + \frac{4K}{n}\right) = \Psi(x), \qquad \Psi(x+2iK') = (-1)_n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK') + p\frac{\pi K'}{K}}\,\Psi(x).$$

Je mets à la place du facteur $(-1)^n$, $e^{ni\pi}$, et je fais

$$\Psi_1(x) = \Psi\left(x + \frac{(n-1)K}{n} - \frac{p}{n}iK'\right);$$

j'obtiendrai par là les deux équations

$$\Psi_1\left(x + \frac{4K}{n}\right) = \Psi_1(x), \qquad \Psi_1(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\,\Psi_1(x).$$

On aurait pu faire plus généralement :

$$\Psi_1(x) = \Psi\left(x + \frac{(n-\nu)K}{n} - p\,\frac{iK'}{n}\right),$$

ν désignant un nombre impair quelconque, et on serait arrivé aux mêmes conditions. En faisant

$$\frac{1}{M} = \frac{nK_1}{K},$$

on trouvera, comme je l'ai déjà établi, que le nombre n soit impair ou pair :

$$\Psi_1(x) = aH_1\left(\frac{x}{M}\right) + b\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right).$$

Nous voici donc parvenus au théorème exprimé par l'égalité suivante :

$$\Pi(x) + \alpha\Pi\left(x + \frac{4K}{n}\right) + \alpha^2\Pi\left(x + \frac{8K}{n}\right) + \cdots + \alpha^{n-1}\Pi\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right)$$
$$= e^{p\frac{i\pi x}{2K}}\left\{aH_1\left(\frac{x}{M} + \frac{piK' - (n-\nu)K}{nM}\right) + b\Theta_1\left(\frac{x}{M} + \frac{piK' - (n-\nu)K}{nM}\right)\right\}.$$

Sans m'arrêter à la détermination des constantes a, b, il est clair qu'en remplaçant α successivement par toutes les racines de l'équation binome $x^n = 1$, ou en faisant $p = 0, 1, 2, \ldots n-1$, on aura un système de n équations linéaires qui donneront :

$$\Pi(x) = \sum_0^{n-1}{}_p\, e^{p\frac{i\pi x}{2K}}\left\{a_p H_1\left(\frac{x}{M} + \frac{piK' - (n-\nu)K}{nM}\right) + b_p\Theta_1\left(\frac{x}{M} + \frac{piK' - (n-\nu)K}{nM}\right)\right\}.$$

Cette nouvelle expression de la fonction $\Pi(x)$ conduit au développement en série de toute fonction rationnelle de $\sin\operatorname{am}(x)$ et de sa dérivée. (J'ai remarqué à ce sujet, qu'en cherchant le développement de la fonction

$$\vartheta(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\,\Theta(x),$$

d'après celui de

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos 2\frac{\pi x}{K} - \cdots = 1 + \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \left\{ e^{\frac{n\pi}{K}(ix-nK')} + e^{-\frac{n\pi}{K}(ix+nK')} \right\},$$

on arrivait au résultat suivant:

$$\vartheta(x) = e^{\frac{\pi}{4KK'}x^2} + \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \left\{ e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+2niK')^2} + e^{\frac{\pi}{4KK'}(x-2niK')^2} \right\}.$$

La fonction $e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}} H(x)$ donne de même:

$$\sum_0^\infty{}_n (-1)^n \left\{ e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+(2n+1)iK')^2} - e^{\frac{\pi}{4KK'}(x-(2n+1)iK')^2} \right\}.)$$

La théorie de la transformation découle bien simplement des mêmes principes. Considérez en effet, la somme ou la somme des produits deux à deux, trois à trois etc., ou le produit des n fonctions (n étant impair):

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)} \cdot \frac{H\left(x + \frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x + \frac{4K}{n}\right)} \cdot \frac{H\left(x + \frac{8K}{n}\right)}{\Theta\left(x + \frac{8K}{n}\right)} \cdots \frac{H\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right)}.$$

Soit $\Phi_1(x)$ le numérateur, $\Phi_0(x)$ le dénominateur: pour l'une et pour l'autre de ces deux fonctions on trouve les conditions:

$$\Phi(x + 2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x), \qquad \Phi\left(x + \frac{4K}{n}\right) = \Phi(x),$$

desquelles il résulte:

$$\Phi_1(x) = A_1 H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right) + B_1 \Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right),$$

$$\Phi_0(x) = A_0 H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right) + B_0 \Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right).$$

Or la fonction $\Phi_1(x)$ sera paire ou impaire selon qu'elle sera relative à une somme de produits d'un nombre pair ou d'un nombre impair de fonctions. Dans le premier cas on devra faire $A_1 = 0$, dans le second, $B_1 = 0$; d'ailleurs pour $\Phi_0(x)$ on a toujours $A_0 = 0$. De là résulte que la somme des produits 2 à 2, 4 à 4, ... $n-1$ à $n-1$ des quantités

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)}, \quad \frac{H\left(x + \frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x + \frac{4K}{n}\right)}, \quad \cdots \quad \frac{H\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right)},$$

est constante, et qu'elles peuvent être considérées comme les racines d'une équation du n^{me} degré, dont les coefficients sont des fonctions du premier degré de

$$\frac{H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)}{\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)}.$$

On en conclut l'expression connue de cette dernière fonction par une fonction rationnelle de l'une quelconque des quantités précédentes etc. Toutes ces propriétés spéciales à la fonction à double période $\frac{H(x)}{\Theta(x)}$, découlent immédiatement, comme on le voit, de l'équation de définition des fonctions H et Θ simplement périodiques; on peut même remarquer la grande extension que reçoit le développement en produit infini de $\sin\mathrm{am}(x)$, qui a été obtenu la première fois comme conséquence des formules de transformation, au moyen de l'égalité obtenue plus haut, savoir:

$$\sin\mathrm{am}(x)\, F(\sin^2\mathrm{am}(x)) - \frac{d.\sin\mathrm{am}(x)}{dx} f(\sin^2\mathrm{am}(x))$$
$$= \mathrm{Const.}\frac{H(x+a_1)\,H(x+a_2)\ldots H(x+a_{2m+1})}{\Theta^{2m+1}(x)}.$$

Jusqu'à présent, je n'ose point encore espérer, Monsieur, d'appliquer avec succès la méthode précédente à l'analyse des fonctions de deux variables à quatre périodes simultanées; ce sera donc sous un autre point de vue, que je vais essayer de lier en quelques points, par des résultats analogues, la théorie des fonctions Abéliennes et des fonctions elliptiques. Ainsi je prendrai les fonctions de 3^{me} espèce, et sous la forme suivante:

$$\int\left\{\left(\frac{\Delta(a)}{x-a} + \frac{\Delta(b)}{x-b}\right)\cdot\frac{2dx}{\Delta x} + \left(\frac{\Delta(a)}{y-a} + \frac{\Delta(b)}{y-b}\right)\cdot\frac{2dy}{\Delta y}\right\};$$

l'intégrale étant assujettie à s'évanouir, lorsqu'on fait à la fois $x = 0$, $y = 0$, $\Delta(x)$ représentant la racine carrée du polynome $p_1x^1 + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5$. Je la désignerai par $\Pi(u, v, \alpha, \beta)$, lorsqu'on y aura fait les substitutions

$$x = \lambda_0(u, v), \qquad y = \lambda_1(u, v),$$

les nouvelles variables u et v étant comme à l'ordinaire:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{dy}{\Delta(y)}, \qquad v = \int_0^x \frac{x\,dx}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{y\,dy}{\Delta(y)},$$

et de même $a = \lambda_0(\alpha, \beta)$, $b = \lambda_1(\alpha, \beta)$. On aura alors les expressions suivantes des coefficients différentiels:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial u} = \Delta(a)\cdot\frac{x+y-a}{(a-x)(a-y)} + \Delta(b)\cdot\frac{x+y-b}{(b-x)(b-y)},$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial v} = -\frac{\Delta(a)}{(a-x)(a-y)} - \frac{\Delta(b)}{(b-x)(b-y)}.$$

J'introduirai pareillement les variables u et v dans les fonctions de seconde espèce, savoir:

$$\int\left(\frac{x^2 dx}{\Delta(x)} + \frac{y^2 dy}{\Delta(y)}\right) \text{ et } \int\left(\frac{x^3 dx}{\Delta(x)} + \frac{y^3 dy}{\Delta(y)}\right);$$

elles deviendront respectivement:

$$\int((\lambda_0+\lambda_1)dv - \lambda_0\lambda_1 du), \qquad \int((\lambda_0^2+\lambda_0\lambda_1+\lambda_1^2)dv - \lambda_0\lambda_1(\lambda_0+\lambda_1)du).$$

Cela posé, la première étant désignée pour un instant par $(u, v)_1$, et la seconde par $(u, v)_2$, je ferai

$$E_1(u, v) = 2p_4(u, v)_1 + 3p_5(u, v)_2 \text{ et } E_2(u, v) = p_5(u, v)_1;$$

on aura alors le théorème exprimé par l'égalité suivante:

$$(1.)\quad \Pi(u, v, \alpha, \beta) - \Pi(\alpha, \beta, u, v) = p_3(\alpha v - \beta u) + \alpha E_1(u, v) + \beta E_2(u, v) - u E_1(\alpha, \beta) - v E_2(\alpha, \beta),$$

de laquelle se tirent les valeurs des fonctions complètes. Prenons en effet pour u et v deux demi-périodes simultanées i, j, les valeurs correspondantes de x et y donneront $\Delta(x) = 0$, $\Delta(y) = 0$; ainsi l'on aura:

$$\Pi(i, j, \alpha, \beta) = p_3(\alpha j - \beta i) + \alpha E_1(i, j) + \beta E_2(i, j) - i E_1(\alpha, \beta) - j E_2(\alpha, \beta).$$

On remarque sur cette expression un singulier genre de discontinuité de la fonction Π. En effet, les arguments u, v étant quelconques, il est hors de doute qu'on peut, sans altérer sa valeur, ajouter les périodes simultanées aux arguments α, β; mais si l'on suppose $u = i$, $v = j$, la fonction deviendra uniquement périodique pour ces indices; c'est ce qu'on vérifie aisément sur la valeur précédente.

L'égalité (1.) peut être transformée en une autre plus simple. Posons

$$Z_1(u, v) = E_1(u, v) - Au - Bv, \qquad Z_2(u, v) = E_2(u, v) - A'u - B'v$$

et déterminons A, B, A', B' par les conditions

$$Ai + Bj = E_1(i, j), \qquad Ai' + Bj' = E_1(i', j'),$$
$$A'i + B'j = E_2(i, j), \qquad A'i' + B'j' = E_2(i', j'),$$

i', j' désignant deux autres demi-périodes simultanées. Faisons en outre

$$\Phi(u, v, \alpha, \beta) = \Pi(u, v, \alpha, \beta) + u Z_1(\alpha, \beta) + v Z_2(\alpha, \beta) - c(\alpha v - \beta u),$$

c étant une constante dont la valeur est $c = p_2 + B - A'$, il viendra:

$$(2.)\quad \Phi(u, v, \alpha, \beta) - \Phi(\alpha, \beta, u, v) = -c(\alpha v - \beta u).$$

Dans le théorème exprimé par cette égalité, la fonction Φ, comme il aisé de le voir, jouira de la propriété que

$$\Phi(u + 2i, v + 2j, \alpha, \beta) = \Phi(u, v, \alpha, \beta),$$
$$\Phi(u + 2i', v + 2j', \alpha, \beta) = \Phi(u, v, \alpha, \beta);$$

ainsi on obtiendrait une fonction séparément périodique en u et en v, en prenant

$$\Psi(u, v, \alpha, \beta) = \Phi\left(\frac{iu + i'v}{\pi}, \frac{ju + j'v}{\pi}, \alpha, \beta\right).$$

Peut-être cela conduira-t-il à un développement de la fonction Ψ de la forme

$$\sum a_{m,n} e^{(mu+nv)\sqrt{-1}}.$$

J'ai remarqué à ce sujet que, le théorème d'Abel permettant d'exprimer algébriquement

$$\lambda_0\left(\frac{iu + i'v}{\pi}, \frac{ju + j'v}{\pi}\right), \quad \lambda_1\left(\frac{iu + i'v}{\pi}, \frac{ju + j'v}{\pi}\right),$$

au moyen de

$$\lambda_0\left(\frac{iu}{\pi}, \frac{ju}{\pi}\right), \ \lambda_1\left(\frac{iu}{\pi}, \frac{ju}{\pi}\right) \text{ et } \lambda_0\left(\frac{i'v}{\pi}, \frac{j'v}{\pi}\right), \ \lambda_1\left(\frac{i'v}{\pi}, \frac{j'v}{\pi}\right),$$

on obtenait un nouveau genre de réduction des fonctions de deux variables à des fonctions algébriques de fonctions d'une variable, parfaitement analogue à celui que vous m'avez fait, Monsieur, l'honneur de m'écrire; mais ce cas particulier, auquel j'ai été ainsi amené, ne m'a point semblé moins difficile à traiter que le cas général.

Quoiqu'il en soit, le théorème d'Abel donnera pour l'addition des arguments dans la fonction Π l'égalité:

$$\Pi(u + u', v + v', \alpha, \beta) = \Pi(u, v, \alpha, \beta) + \Pi(u', v', \alpha, \beta) + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta);$$

et on aura de même:

$$(3.)\quad \Phi(u + u', v + v', \alpha, \beta) = \Phi(u, v, \alpha, \beta) + \Phi(u', v', \alpha, \beta) + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta).$$

L'égalité (2.), au moyen de laquelle on peut faire l'échange simultané des arguments u, v et α, β, nous donnera le théorème correspondant:

$$\Phi(\alpha, \beta, u + u', v + v') = \Phi(\alpha, \beta, u, v) + \Phi(\alpha, \beta, u', v') + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta),$$

auquel on pourrait arriver aussi par une voie directe. Cela posé, je mets dans l'équation (3.), à la place de u, u', v, v', respectivement, $i+u, i+u', j+v, j+v'$; il viendra:

$$\begin{aligned}&\Phi(u+u'+2i,\ v+v'+2j,\alpha,\beta)\\ &= \Phi(u+i, v+j, \alpha, \beta)+\Phi(u'+i, v'+j, \alpha, \beta)+\log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, \alpha, \beta),\end{aligned}$$

ou bien:

$$\begin{aligned}&\Phi(u+u', v+v', \alpha, \beta)\\ &= \Phi(u+i, v+j, \alpha, \beta)+\Phi(u'+i, v'+j, \alpha, \beta)+\log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, \alpha, \beta).\end{aligned}$$

Cela étant, je fais: $\alpha=u-u'$, $\beta=v-v'$, ce qui donne:

$$\begin{aligned}&\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v')\\ &= \Phi(u+i, v+j, u-u', v-v')+\Phi(u'+i, v'+j, u-u', v-v')\\ &\quad+\log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, u-u', v-v').\end{aligned}$$

Je change ensuite u', v' en $-u', -v'$. Comme la fonction Φ change de signe avec les deux arguments u, v, le terme $\Phi(-u'+i, -v'+j, \ldots)$ pourra s'écrire $-\Phi(u'-i, v'-j, \ldots)$; et en ajoutant aux deux premiers arguments leurs périodes $2i$, $2j$, $-\Phi(u'+i, v'+j, \ldots)$, de sorte qu'il viendra:

$$\begin{aligned}&\Phi(u-u', v-v', u+u', v+v')\\ &= \Phi(u+i, v+j, u+u', v+v')-\Phi(u'+i, v'+j, u+u', v+v')\\ &\quad+\log f(u+i, v+j, i-u', j-v', u+u', v+v').\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre les deux dernières égalités, et développant dans le second membre par le théorème sur l'addition des deux derniers arguments, il viendra:

$$\begin{aligned}&\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v')+\Phi(u-u', v-v', u+u', v+v')\\ &= 2\Phi(u+i, v+j, u, v)-2\Phi(u'+i, v'+j, u', v')+\text{fonct. log}^{e}.\end{aligned}$$

Enfin, si l'on applique au premier membre le théorème

$$\Phi(u, v, \alpha, \beta)-\Phi(\alpha, \beta, u, v) = -c(\alpha v-\beta u),$$

on obtiendra l'égalité

$$\begin{aligned}&\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v')\\ &= \Phi(u+i, v+j, u, v)-\Phi(u'+i, v'+j, u', v')-c(uv'-u'v)+\text{une fonct. logarithmique},\end{aligned}$$

par laquelle la réduction des fonctions elliptiques de 3^{me} espèce est étendue aux fonctions Abéliennes.

Mais j'ai entrevu un autre genre de démonstration, fondé sur des considé-

rations toutes différentes, et dont je vais essayer de donner l'idée en l'appliquant aux fonctions elliptiques.

Soit, comme à l'ordinaire:

$$\Delta(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)};$$

posons

$$z = \int_0^x \frac{\Delta(a).dx}{(x-a)\Delta(x)},$$

on trouvera facilement:

$$\Delta(a)\cdot\frac{\partial z}{\partial a} = \varkappa^2\int_0^x \frac{x^2-a^2}{\Delta(x)}dx-\frac{\Delta(x)}{x-a}-\frac{1}{a},$$

et en différentiant de nouveau par rapport à a:

$$\frac{\partial\left(\Delta(a)\dfrac{\partial z}{\partial a}\right)}{\partial a} = -2a\varkappa^2\int_0^x\frac{dx}{\Delta x}-\frac{\Delta(x)}{(x-a)^2}+\frac{1}{a^2}.$$

D'ailleurs on a immédiatement:

$$\Delta(x)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\Delta(a)}{x-a},\quad \frac{\partial\left(\Delta(x)\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = -\frac{\Delta(a)}{(x-a)^2};$$

on en conclut cette équation:

$$\frac{\partial\left(\Delta(a)\dfrac{\partial z}{\partial a}\right)}{\partial a}\cdot\Delta(a) = \frac{\partial\left(\Delta(x)\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}\Delta(x)-2a\varkappa^2\Delta(a)\int_0^x\frac{dx}{\Delta(x)}+\frac{\Delta(a)}{a^2}.$$

En prenant pour variables indépendantes les arguments ξ et α des fonctions

$$x = \sin\text{am}(\xi),\qquad a = \sin\text{am}(\alpha),$$

et mettant $\Delta(\text{am}(\alpha))$ au lieu de $\Delta(\sin\text{am}(\alpha)) = \dfrac{d\sin\text{am}(\alpha)}{d\alpha}$, il viendra:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-2\varkappa^2\xi\sin\text{am}(\alpha)\Delta(\text{am}(\alpha))+\frac{\Delta(\text{am}(\alpha))}{\sin^2\text{am}(\alpha)}.$$

Soit

$$E(\alpha) = \int_0^\alpha \sin^2\text{am}(\alpha)\,d\alpha \quad\text{et}\quad z = -\varkappa^2\xi E(\alpha)-\int\frac{d\alpha}{\sin\text{am}(\alpha)}+u;$$

on aura

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2},\quad\text{donc}\quad u = F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi).$$

Considérons donc l'égalité:

$$u=\int_0^{\xi}\frac{\varDelta(\mathrm{am}(\alpha))\,d\xi}{\sin\mathrm{am}(\xi)-\sin\mathrm{am}(\alpha)}-\varkappa^2\xi E(\alpha)+\int\frac{d\alpha}{\sin\mathrm{am}(\alpha)}=F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi).$$

En faisant $\xi=0$, on a

$$F(\alpha)+f(\alpha)=\int\frac{d\alpha}{\sin\mathrm{am}(\alpha)};$$

on trouverait de même pour $\alpha=0$:

$$F(\xi)+f(-\xi)=\int\frac{d\xi}{\sin\mathrm{am}(\xi)},$$

donc

$$F(\alpha)+f(\alpha)=F(\alpha)+f(-\alpha)\quad\text{ou}\quad f(\alpha)=f(-\alpha).$$

Je m'arrête un instant à cette remarque; car, sans aller plus loin, on peut tirer de là les théorèmes fondamentaux des fonctions elliptiques. En effet, en différentiant par rapport à ξ, il vient:

$$\frac{\varDelta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin\mathrm{am}(\xi)-\sin\mathrm{am}(\alpha)}-\varkappa^2E(\alpha)=F'(\alpha+\xi)-f'(\alpha-\xi).$$

Faisant successivement $\xi=x+a$, $\xi=x-a$ et retranchant, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}&\frac{\varDelta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin\mathrm{am}(x+a)-\sin\mathrm{am}(\alpha)}-\frac{\varDelta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin\mathrm{am}(x-a)-\sin\mathrm{am}(\alpha)}\\&=F'(\alpha+x+a)-F'(\alpha+x-a)-f'(\alpha-x-a)+f'(\alpha-x+a).\end{aligned}$$

Or la fonction $f'(x)$ étant impaire, on voit immédiatement que le second membre est symétrique par rapport à x et α; on aura donc:

$$\begin{aligned}&\frac{\varDelta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin\mathrm{am}(x+a)-\sin\mathrm{am}(\alpha)}-\frac{\varDelta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin\mathrm{am}(x-a)-\sin\mathrm{am}(\alpha)}\\&=\frac{\varDelta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(\alpha+a)-\sin\mathrm{am}(x)}-\frac{\varDelta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(\alpha-a)-\sin\mathrm{am}(x)}.\end{aligned}$$

De là se tire le théorème d'Euler sur l'addition des fonctions elliptiques. Soit en effet $\alpha=0$, on aura:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\mathrm{am}(x+a)}-\frac{1}{\sin\mathrm{am}(x-a)}\\&=\frac{\varDelta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(a)-\sin\mathrm{am}(x)}+\frac{\varDelta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(a)+\sin\mathrm{am}(x)}=\frac{2\sin\mathrm{am}(a)\varDelta(\mathrm{am}(x))}{\sin^2\mathrm{am}(a)-\sin^2\mathrm{am}(x)},\end{aligned}$$

et permutant x et a:

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}(x+a)}+\frac{1}{\sin\mathrm{am}(x-a)}=\frac{2\sin\mathrm{am}(x)\varDelta(\mathrm{am}(a))}{\sin^2\mathrm{am}(x)-\sin^2\mathrm{am}(a)};$$

donc, en ajoutant membre à membre:

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}(x+a)}=\frac{\sin\mathrm{am}(x)\varDelta(\mathrm{am}(a))-\sin\mathrm{am}(a)\varDelta(\mathrm{am}(x))}{\sin^2\mathrm{am}(x)-\sin^2\mathrm{am}(a)};$$

ce qui se ramène sans difficulté à la formule connue. De la même source on tire encore le théorème sur l'addition des arguments dans la fonction de 3[e] espèce, en opérant ainsi que je l'ai fait dans une lettre adressée à M. Liouville, imprimée déjà dans les Comptes-rendus, et qui paraîtra de nouveau dans le prochain numéro du Journal de mathématiques. Il ne serait pas difficile d'arriver à la forme que vous prenez ordinairement, Monsieur, pour les fonctions de troisième espèce; il suffirait pour cela de partir de la formule suivante, qu'on démontrerait comme précédemment; savoir, i étant une quelconque des quantités, qui donnent $\sin\mathrm{am}(u+i)=\sin\mathrm{am}(u-i)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\varDelta(\mathrm{am}(\alpha+i))}{\sin\mathrm{am}(x+a)-\sin\mathrm{am}(\alpha+i)}-\frac{\varDelta(\mathrm{am}(\alpha+i))}{\sin\mathrm{am}(x-a)-\sin\mathrm{am}(\alpha+i)}\\&=\frac{\varDelta(\mathrm{am}(x+i))}{\sin\mathrm{am}(\alpha+a)-\sin\mathrm{am}(x+i)}-\frac{\varDelta(\mathrm{am}(x+i))}{\sin\mathrm{am}(\alpha-a)-\sin\mathrm{am}(x+i)},\end{aligned}$$

et de prendre i tel, que $\frac{1}{\sin\mathrm{am}(i)}=0$.

Mais je reviens à l'égalité:

$$\int_0^{\xi}\frac{\varDelta(\mathrm{am}(\alpha)).\,d\xi}{\sin\mathrm{am}(\xi)-\sin\mathrm{am}(\alpha)}-\varkappa^2\xi E(\alpha)+\int\frac{d\alpha}{\sin\mathrm{am}(\alpha)}=F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi).$$

Changeons α en $-\alpha$, puis retranchons membre à membre, il viendra:

$$\int_0^{\xi}\frac{2\sin\mathrm{am}(\alpha)\varDelta(\mathrm{am}(\alpha)).\,d\xi}{\sin^2\mathrm{am}(\xi)-\sin^2\mathrm{am}(\alpha)}-2\varkappa^2\xi E(\alpha)=F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi)-F(\xi-\alpha)-f(-\xi-\alpha).$$

Le second membre pourra encore évidemment être représenté par $F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi)$, et puisque le premier s'annule pour $\xi=0$, et $\alpha=0$, par $F(\xi+\alpha)-F(\xi-\alpha)$, F étant une fonction paire. Pour la déterminer, différentions par rapport à ξ; puis faisons $\xi=0$, il viendra:

$$2F'(\alpha)=-\frac{2\sin\mathrm{am}(\alpha)\varDelta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin^2\mathrm{am}(\alpha)}-2\varkappa^2E(\alpha),$$

d'où, en posant $Z(\alpha) = \int E(\alpha)\, d\alpha$:

$$F(\alpha) = -\tfrac{1}{2} \log \sin^2 \mathrm{am}(\alpha) - \varkappa^2 Z(\alpha);$$

il vient donc cette égalité:

$$\int_0^{\xi} \frac{2 \sin \mathrm{am}(\alpha) \Delta(\mathrm{am}(\alpha)) . d\xi}{\sin^2 \mathrm{am}(\xi) - \sin^2 \mathrm{am}(\alpha)}$$
$$= 2\varkappa^2 \xi E(\alpha) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\sin^2 \mathrm{am}(\xi - \alpha)}{\sin^2 \mathrm{am}(\xi + \alpha)} + \varkappa^2 (Z(\xi - \alpha) - Z(\xi + \alpha)),$$

de laquelle se conclut sans peine tout le reste de cette recherche.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE JACOBI ADRESSÉE A HERMITE.

Berlin, le 6. août 1845.

». . . Les principes dont vous partez pour parvenir aux formules de la transformation inverse que j'ai publiées sans démonstration dans le Journal de M. Crelle, sont précisément les mêmes qui d'abord m'ont conduit à ces formules. Ensuite, j'avais fait une espèce de tour de force en prouvant ces formules par la substitution même des expressions si compliquées de radicaux faite dans l'équation différentielle à laquelle elles doivent satisfaire. Pour mieux faire saisir l'esprit de cette dernière démonstration en quelque sorte synthétique, j'ai commencé par publier une application de la même méthode à la démonstration des formules de la transformation directe, dans un mémoire imprimé dans le Journal de M. Crelle, tome VI, pages 397 et suivantes*). Plus tard, je suis parvenu à une troisième démonstration qui repose entièrement sur la décomposition de $\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)}$ en fractions simples, pour laquelle j'ai établi les formules dans une de mes leçons données à l'université de Kœnigsberg.

»Quant aux formules de développement du produit

$$H(x + a_1)\, H(x + a_2) \ldots H(x + a_n),$$

où

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2jK,$$

et des fonctions homogènes de $H(x)$ et $\Theta(x)$, je les avais d'abord, comme vous, déduites des propriétés analytiques et caractéristiques des fonctions $H(x)$ et $\Theta(x)$, et j'y ai fait allusion dans le Journal de M. Crelle, tome XXVI, page 103**).

*) Tome 1. de cette édition, pag. 319.

**) Tome 1. de cette édition, pag. 356.

Depuis, j'ai remarqué que l'on peut parvenir aux mêmes formules par la considération élémentaire et algébrique, qu'étant mis

$$y_1 = x_1 + b, \qquad y_2 = x_2 + b, \quad \text{etc.}$$

à chaque solution des deux équations

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = p, \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a,$$

répond une solution des deux autres équations

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = p - \frac{a^2}{n} + n\left(\frac{a}{n} + b\right)^2,$$
$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = a + nb.$$

On mettra pour a les nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$, et pour b tous les nombres, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

»Mais ce qui auparavant ne m'est jamais venu dans l'esprit, c'est votre idée ingénieuse et très-originale de faire ressortir de ces mêmes principes le théorème d'Abel, tant qu'il s'applique aux fonctions elliptiques. Ne pensez-vous pas consacrer un mémoire particulier à cette matière qui se détache très-bien des autres questions?

»En cherchant à tirer la transformation directe des propriétés des fonctions Θ, sans faire usage de leur décomposition en facteurs infinis, vous avez pensé savamment aux cas plus généraux, où probablement l'on se doit résigner à l'impossibilité d'une décomposition en facteurs.

»Dans mes leçons universitaires de Kœnigsberg, moi aussi j'ai eu coutume de partir des fonctions Θ. Dans ces leçons, en multipliant quatre séries

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_i\, e^{-(ax+bi)^2}$$

pour différentes valeurs de x, et en transformant les exposants par la formule

$$i^2 + i'^2 + i''^2 + i'''^2 = \left(\frac{i+i'+i''+i'''}{2}\right)^2 + \left(\frac{i+i'-i''-i'''}{2}\right)^2 + \text{etc.},$$

j'ai obtenu tout de suite une formule de laquelle découlent, comme cas particuliers et sans le moindre calcul, les expressions fractionnaires des fonctions elliptiques, les théorèmes sur l'addition des trois espèces, et plusieurs centaines de formules intéressantes auxquelles on ne saurait arriver que par un calcul algébrique fatigant. Dans un des premiers volumes du Journal de M. Crelle, j'ai donné des formules d'addition et de transformation conjointes, ressortantes de la multiplication seulement de deux Θ. Ces formules font voir que l'on peut

arriver par deux transformations successives, non-seulement à la multiplication, mais encore aux formules de l'addition.

»Dans les mêmes leçons, j'ai examiné l'ensemble des différentes formes que peut prendre une même fonction Θ. En faisant usage de la méthode employée par Lagrange pour la réduction des formes quadratiques, j'ai trouvé le fait analytique remarquable que, q étant une quantité imaginaire quelconque, on peut toujours, et par la seule multiplication par une quantité de la forme e^{rxx}, ramener la fonction Θ à une autre où le module de q, ce mot pris dans le sens de M. Cauchy, soit $< e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$. C'est une limite précise, c'est à dire qu'étant prise une quantité inférieure, il y aura toujours des cas, où le module de q dans toutes les formes que pourrait prendre la fonction Θ restera supérieure à cette quantité.

»L'addition des paramètres dans la troisième espèce des intégrales abéliennes et l'échange des paramètres avec les amplitudes me sont bien connus. Il y a douze années environ que je les ai communiqués à deux de mes élèves, M. Richelot, de Kœnigsberg, et M. Senff, à présent professeur de mathématiques près l'université de Dorpat, et qui étudiait à Kœnigsberg lorsque je trouvai ces formules. J'avais d'abord prouvé l'addition des paramètres, indépendamment, par la seule différentiation de

$$\log \frac{\sqrt{R} + U\sqrt{x}}{\sqrt{R} - U\sqrt{x}},$$

U et R étant deux fonctions de l'ordre m et $2m$. Puis je l'ai déduite de l'échange mutuel des paramètres et amplitudes, qui se trouve aisément en remplaçant la somme des deux intégrales simples

$$\int_0^x \frac{\sqrt{\alpha R(\alpha)}\,.\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{xR(x)}} + \int_0^\alpha \frac{\sqrt{xR(x)}\,.\,d\alpha}{(x-\alpha)\sqrt{\alpha R(\alpha)}},$$

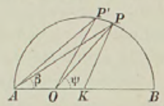
par la double intégrale

$$\iint \frac{dx\,d\alpha}{\sqrt{\alpha R(\alpha)}\sqrt{xR(x)}} \left[\frac{1}{2(x-\alpha)}\left(\frac{d\,.\,xR(x)}{dx} + \frac{d\,.\,\alpha R(\alpha)}{d\alpha}\right) + \frac{\alpha R(\alpha) - xR(x)}{(x-\alpha)^2}\right],$$

où l'on prouve sans peine que la fonction de x et de α, placée entre les grands crochets, est entière. Depuis, j'ai appris par les Oeuvres posthumes d'Abel, quelle est la généralisation dont ces théorèmes sont susceptibles.

»Feuilletant mes anciens papiers, j'y ai trouvé la démonstration de quelques théorèmes par lesquels on donne aux formules d'addition des intégrales abéliennes de la seconde et de la troisième espèce une forme analogue à celle sous laquelle les formules d'addition des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce ont été présentées par Legendre, ce qui contribue à rendre de plus en plus parfaite l'analogie entre les fonctions abéliennes et elliptiques*).

Permettez-moi d'ajouter une construction géométrique de la transformation dite de Landen, la première qui ait été connue des fonctions elliptiques.



Soit AB le diamètre d'un cercle: si l'on mène d'un point P du cercle la droite PK au centre K, l'angle PKB est double de PAB; mais si l'on mène la droite à un autre point fixe O du diamètre, on obtient l'angle dans lequel par la transformation de Landen se change l'amplitude PAB d'une intégrale elliptique dont le complément du module est $\frac{AO}{BO}$, le module transformé étant $\frac{KO}{KA}$. En effet soit R le rayon du cercle, $KO = a$, $PAB = \beta$, $POB = \psi$; variant P en P', on aura dans le triangle infiniment petit POP',

$$PP' \sin PP'O = OP \sin POP';$$

donc

$$2R\,d\beta . \cos KPO = OP . d\psi, \quad \frac{2d\beta}{OP} = \frac{d\psi}{R \cos KPO};$$

or

$$OP^2 = R^2 + a^2 + 2Ra \cos 2\beta = (R+a)^2 \cos^2\beta + (R-a)^2 \sin^2\beta,$$
$$R^2 \cos^2 KPO = R^2 - R^2 \sin^2 KPO = R^2 - a^2 \sin^2\psi;$$

donc

$$\frac{2d\beta}{\sqrt{(R+a)^2\cos^2\beta + (R-a)^2\sin^2\beta}} = \frac{d\psi}{\sqrt{R^2\cos^2\psi + (R^2-a^2)\sin^2\psi}}.$$

On a, en même temps,

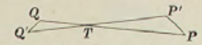
$$\sin\psi = \frac{AP . \sin\beta}{OP} = \frac{2R \sin\beta \cos\beta}{\sqrt{(R+a)^2\cos^2\beta + (R-a)^2\sin^2\beta}},$$

ce qui est la substitution de Landen.

»Je suis aussi parvenu à étendre au théorème d'Abel ma construction de l'addition des fonctions elliptiques. Dans cette dernière, la corde PQ d'un

*) La démonstration de ces théorèmes a été publiée dès l'envoi de cette lettre dans le Journal de M. Crelle Vol. XXX. pag. 121. (Tome II. pag. 75 d. c. éd.)

cercle touche constamment un autre cercle. Soit T le point d'intersection



de deux positions consécutives (PQ, $P'Q'$) de la droite; les deux angles $QQ'T$ et $P'PT$ étant égaux d'après une propriété du cercle, on aura $\frac{PP'}{PT} = \frac{QQ'}{Q'T}$, ou bien, les arcs PP', QQ' étant infiniment petits,

$$\frac{PP'}{PT} = \frac{QQ'}{QT},$$

ce qui est l'équation différentielle, dont par la construction de la droite inscrite à l'un et circonscrite à l'autre cercle on trouve l'intégrale complète et algébrique, la même qui a été donnée par Euler. A présent, je suppose qu'une corde C d'une courbe I du $n^{\text{ième}}$ degrè touche constamment une autre courbe II. Soient P un point d'intersection de la corde mobile avec la courbe I, et $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ l'élément de la courbe I dans ce point, T le point de contact de la corde C avec la courbe II; si $f(x,y) = 0$ est l'équation de la courbe I, je démontre, par des considérations mixtes de géométrie et d'algèbre, la formule générale

$$\sum \frac{\psi(x,y)\,ds}{PT \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = 0,$$

$\psi(x,y)$ étant une fonction entière quelconque de x et y de l'ordre $n-2$, et la somme s'étendant aux n points d'intersection, le signe du radical étant $+$ ou $-$, selon que ces points sont de l'un ou de l'autre côté de T. Supposons en particulier que la courbe I rentre dans ces courbes pour les points desquelles on peut exprimer x et y par des fractions dont les numérateurs et le dénominateur commun sont des fonctions entières d'une troisième variable t, $x = \frac{\tau_1}{\tau}$, $y = \frac{\tau_2}{\tau}$, τ, τ_1, τ_2 étant du $n^{\text{ième}}$ degré, ce qui même pourra toujours se faire pour les courbes du premier et du second degré. Faisant usage de divers théorèmes établis dans mon mémoire sur l'élimination (Journal de M. Crelle, tome XV), je trouve que, $\beta(t)$ étant une fonction quelconque de t du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré, on aura:

$$\frac{\beta(t)}{\tau}\,dt = \frac{\psi(x,y)\,ds}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$\psi(x,y)$ étant, comme ci-dessus, du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré. On aura donc.

$$\sum \frac{\beta(t)dt}{\tau . PT} = 0.$$

Soit la courbe II un cercle ayant pour équation $x^2+y^2=1$; on aura

$$\tau . PT = \sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2},$$

donc

$$\sum \frac{\beta(t)dt}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2}} = 0, \quad \text{d'où} \quad \sum \int \frac{\beta(t)dt}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2}} = 0,$$

les n intégrales étant prises entre les limites correspondantes aux intersections de la courbe I avec deux tangentes quelconques du cercle. Soit $f(t)$ une fonction donnée du $(2p)^{\text{ième}}$ degré, prenons trois fonctions entières de t quelconques, $\Psi(t)$, U, τ_1, respectivement du $(p-2)^{\text{ième}}$, $(n-p)^{\text{ième}}$, $n^{\text{ième}}$ degré, déterminons deux autres fonctions du $n^{\text{ième}}$ degré, τ et τ_2, au moyen de la formule

$$\tau_1^2-U^2f(t) = \tau^2-\tau_2^2,$$

et supposons enfin, que dans l'équation-somme trouvée on ait $\beta(t) = U\Psi(t)$ et que les limites des intégrales correspondent aux intersections de la courbe I avec les deux tangentes du cercle parallèles à l'axe des x, on aura l'équation-somme

$$\sum \int \frac{\Psi(t)dt}{\sqrt{f(t)}} = 0,$$

les limites des n intégrales étant les racines de l'équation

$$\tau^2-\tau_2^2 = \tau_1^2-U^2f(t) = 0,$$

ce qui est le théorème d'Abel. Mais la forme sous laquelle ce théorème se présente, d'après la construction précédente, ne semble pas dépourvue d'intérêt. Comme je n'ai étudié avec soin que les intégrales qui ont sous le signe une racine carrée, je ne saurais dire si la formule générale dont je suis parti en prenant deux courbes quelconques I et II, comporte la même généralité que le théorème général d'Abel. Par vos travaux sur ce théorème pris dans toute sa généralité, vous serez mieux que moi à même d'en juger.

»Ne soyez pas fâché, monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre. . . .«

ÜBER DIE VERTAUSCHUNG

VON PARAMETER UND ARGUMENT

BEI DER DRITTEN GATTUNG DER ABELSCHEN UND HÖHERN TRANSCENDENTEN

VON

Professor Dr. C. G. J. JACOBI
ZU BERLIN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 32. p. 185—196.

ÜBER DIE VERTAUSCHUNG VON PARAMETER UND ARGUMENT BEI DER DRITTEN GATTUNG DER ABELSCHEN UND HÖHERN TRANSCENDENTEN.

1.

Unter den hinterlassenen Arbeiten Abels finden sich zwei kleine Aufsätze, der 9te und 10te im 2ten Bande seiner gesammelten Werke, in welchen die Sätze, welche Legendre über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der elliptischen Integrale gefunden hat, zu einer grofsen Allgemeinheit erhoben sind. Ich will hier diese Arbeiten Abels reproduciren, um sie durch eine etwas abweichende Darstellung vielleicht in ein besseres Licht zu setzen.

In der ersten der beiden Abhandlungen, welche den Titel führt: »*Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*« (S. 54—57 am angef. O.), beweist Abel ein Theorem, welches mit dem folgenden übereinkommt:

»Es sei $f(x)$ eine ganze rationale Function von x; es seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei beliebige andere ganze rationale Functionen von x, deren Summe

$$f_1(x)+f_2(x) = \frac{df(x)}{dx};$$

man setze ferner

$$\frac{d\log\varphi(x)}{dx} = \frac{f_1(x)}{f(x)}, \qquad \frac{d\log\psi(x)}{dx} = \frac{f_2(x)}{f(x)},$$

so wird

$$\varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\varphi(x)} - \psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\psi(\alpha)}$$

ein Aggregat von Producten von der Form

$$C_{m,n}\int\frac{\alpha^m d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n dx}{\varphi(x)},$$

wo m und n ganze positive Zahlen und die Gröfsen $C_{m,n}$ Constanten sind.«

Der vorgelegte Ausdruck, welchen ich mit

$$H = \varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\,\varphi(x)} - \psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\,\psi(\alpha)}$$

bezeichnen will, kann folgendermafsen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} H = & \iint\left(\frac{d\log\varphi(\alpha)}{d\alpha}+\frac{1}{x-\alpha}\right)\frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha\,dx}{(x-\alpha)\,\varphi(x)} \\ & -\iint\left(\frac{d\log\psi(x)}{dx}+\frac{1}{\alpha-x}\right)\frac{\psi(x)\,d\alpha\,dx}{(\alpha-x)\,\psi(\alpha)}, \end{aligned}$$

oder da in Folge der Gleichungen, durch welche die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ definirt wurden, ihr Product

$$\varphi(x)\,\psi(x) = f(x)$$

wird, durch die Formel:

$$\begin{aligned} H &= \iint\frac{f(\alpha)+(x-\alpha)f_1(\alpha)}{(x-\alpha)^2\psi(\alpha)\,\varphi(x)}\,d\alpha\,dx - \iint\frac{f(x)+(\alpha-x)f_2(x)}{(\alpha-x)^2\psi(\alpha)\,\varphi(x)}\,d\alpha\,dx, \\ &= \iint\frac{f(\alpha)-f(x)+(x-\alpha)[f_1(\alpha)+f_2(x)]}{(x-\alpha)^2\,\psi(\alpha)\,\varphi(x)}\,d\alpha\,dx. \end{aligned}$$

Setzt man $\frac{df(x)}{dx}-f_1(x)$ für $f_2(x)$, so wird der Zähler des Bruchs unter dem doppelten Integralzeichen:

$$f(\alpha)-f(x)-(\alpha-x)\frac{df(x)}{dx}+(x-\alpha)[f_1(\alpha)-f_1(x)].$$

Dieser Ausdruck geht, wie man sogleich sieht, durch $(x-\alpha)^2$ auf. Ich will den Quotient, welcher eine ganze rationale Function der Gröfsen x und α ist, mit

$$\Sigma C_{m,n}\,\alpha^m x^n = \frac{f(\alpha)-f(x)+(x-\alpha)[f_1(\alpha)+f_2(x)]}{(x-\alpha)^2}$$

bezeichnen, wo die Gröfsen $C_{m,n}$ von α und x unabhängige Constanten sind. Durch Substitution dieses Ausdrucks verwandelt sich der für H gefundene Werth in

$$H = \Sigma C_{m,n}\int\frac{\alpha^m\,d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n\,dx}{\varphi(x)},$$

was der zu beweisende Satz ist.

Entwickelt man die Brüche $\frac{-f(x)}{(x-\alpha)^2}$, $\frac{f_2(x)}{x-\alpha}$ nach absteigenden Potenzen von x, so wird $C_{m,n}$ der Coëfficient von $\alpha^m x^n$ in dieser Entwickelung, da aus den beiden andern Termen des für $\Sigma C_{m,n}\alpha^m x^n$ angegebenen Ausdrucks nur negative Potenzen von x hervorgehen. Setzt man

$$f_1(x) = \Sigma a_1^{(i)} x^i,\quad f_2(x) = \Sigma a_2^{(i)} x^i,\quad f(x) = c+\Sigma\frac{1}{i+1}(a_1^{(i)}+a_2^{(i)})\,x^{i+1},$$

wo c eine Constante ist, so ergiebt sich auf diese Weise:

$$\begin{aligned} C_{m,n} &= \frac{-(m+1)}{m+n+2}(a_1^{(m+n+1)}+a_2^{(m+n+1)})+a_2^{(m+n+1)} \\ &= \frac{-1}{m+n+2}[(m+1)\,a_1^{(m+n+1)}-(n+1)\,a_2^{(m+n+1)}]. \end{aligned}$$

Über die Grenzen der Integration ist Folgendes zu bemerken.

Damit, wie gesetzt worden,

$$\frac{\varphi(\alpha)}{x-\alpha} = \int\frac{d\cdot\frac{\varphi(\alpha)}{x-\alpha}}{d\alpha}\,d\alpha$$

sei, mufs das Integral von einem solchen Werthe von α an genommen werden, für welchen $\varphi(\alpha)$ verschwindet, und ebenso mufs in der Gleichung

$$\frac{\psi(x)}{\alpha-x} = \int\frac{d\cdot\frac{\psi(x)}{\alpha-x}}{dx}\,dx$$

das Integral von einem solchen Werthe von x an genommen werden, für welchen $\psi(x)$ verschwindet. Aufserdem aber dürfen die Intervalle, über welche in Bezug auf α und x integrirt wird, keinen Werth mit einander gemein haben, oder es darf kein Werth, den α während der Integration annehmen kann, mit einem Werthe, den x während der Integration annehmen kann, zusammenfallen, weil die Vertauschung der Ordnung der Integration, welche den obigen Betrachtungen zu Grunde liegt, nur dann allgemein zulässig ist, wenn die zu integrirende Function nicht in diesen Intervallen unendlich wird.

Es sei

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\mu_1}(x-\alpha_2)^{\mu_2}(x-\alpha_3)^{\mu_3}\dots,$$

wo μ_1, μ_2, μ_3 etc. ganze positive Zahlen sind; man erhält dann:

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)}{f(x)} = \frac{df(x)}{f(x)\,dx} = \frac{\mu_1}{x-\alpha_1}+\frac{\mu_2}{x-\alpha_2}+\frac{\mu_3}{x-\alpha_3}+\text{etc.}$$

Man kann daher, wenn

$$\beta_i+\gamma_i = \mu_i,$$

für die Differentialquotienten von $\log\varphi(x)$ und $\log\psi(x)$ folgende Ausdrücke setzen:

$$\begin{aligned} \frac{d\log\varphi(x)}{dx} &= \frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1}+\frac{\beta_2}{x-\alpha_2}+\frac{\beta_3}{x-\alpha_3}+\text{etc.}+U, \\ \frac{d\log\psi(x)}{dx} &= \frac{f_2(x)}{f(x)} = \frac{\gamma_1}{x-\alpha_1}+\frac{\gamma_2}{x-\alpha_2}+\frac{\gamma_3}{x-\alpha_2}+\text{etc.}-U. \end{aligned}$$

Die Function U kann hier eine beliebige ganze rationale Function von x sein, und aufserdem noch für die verschiedenen Werthe von i Aggregate von Brüchen von der Form

$$\frac{\beta_i'}{(x-\alpha_i)^2}+\frac{\beta_i''}{(x-\alpha_i)^3}+\cdots+\frac{\beta_i^{(\mu_i-1)}}{(x-\alpha_i)^{\mu_i}}$$

enthalten. Dieses ist die allgemeinste Annahme, unter welcher die Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ganze Functionen bleiben und ihre Summe $=\frac{df(x)}{dx}$ wird. Die Function $\int U dx$ wird daher immer eine rationale, ganze oder gebrochene Function von x, deren Nenner nur die Factoren $x-\alpha_i$ hat, und jeden in einer niedrigern Potenz, als in der ihn $f(x)$ enthält. Es werden demnach in dem aufgestellten Theorem die allgemeinsten Formen, welche $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ annehmen können,

$$\varphi(x)=e^P(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\ldots,$$
$$\psi(x)=e^{-P}(x-\alpha_1)^{\gamma_1}(x-\alpha_2)^{\gamma_2}(x-\alpha_3)^{\gamma_3}\ldots,$$

wo $\beta_1+\gamma_1$, $\beta_2+\gamma_2$ etc. ganze positive Zahlen sind, die Null ausgeschlossen, und P eine rationale, ganze oder gebrochene Function, deren Nenner nur die Potenzen von $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$ etc. als Factoren enthält, und zwar jedes $x-\alpha$ höchstens in die $(\beta_i+\gamma_i-1)^{\text{te}}$ Potenz erhoben.

Hieraus ergiebt sich das folgende Theorem.

Theorem I.

»Es sei

$$\varphi(x)=e^P(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\ldots,$$
$$\psi(x)=e^{-P}(x-\alpha_1)^{\gamma_1}(x-\alpha_2)^{\gamma_2}(x-\alpha_3)^{\gamma_3}\ldots,$$

wo $\beta_1+\gamma_1$, $\beta_2+\gamma_2$ etc. ganze positive Zahlen sind, die Null ausgeschlossen, und

$$P=\frac{Q}{(x-\alpha_1)^{\beta_1+\gamma_1-1}(x-\alpha_2)^{\beta_2+\gamma_2-1}(x-\alpha_3)^{\beta_3+\gamma_3-1}\ldots},$$

wo Q eine beliebige ganze rationale Function von x ist; es seien ferner $a_1^{(i)}$ und $a_2^{(i)}$ die Coëfficienten von x^i in den ganzen rationalen Functionen

$$\psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} \quad \text{und} \quad \varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx},$$

so wird

$$\varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\varphi(x)}-\psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\psi(\alpha)}$$
$$=\Sigma\left(\frac{n+1}{m+n+2}a_2^{(m+n+1)}-\frac{m+1}{m+n+2}a_1^{(m+n+1)}\right)\int\frac{\alpha^m d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n dx}{\varphi(x)},$$

wo die Integrationen in Bezug auf α und x von solchen Anfangsgrenzen an zu nehmen sind, für welche $\varphi(\alpha)$ und $\psi(x)$ verschwinden.«

Die von Abel (S. 56 a. a. O. oben) hinzugefügte Beschränkung, dafs die Exponenten β_1, γ_1 etc. positiv und kleiner als 1 sein müssen, ist nicht für alle wesentlich nothwendig. Wäre dies der Fall, so könnte, wie aus dem Vorigen erhellt, niemals P eine gebrochene Function sein, wie doch Abel annimmt. Soll in dem vorstehenden Theorem $\psi(x)$ dieselbe Function wie $\varphi(x)$ sein, so wird es die Quadratwurzel einer ganzen rationalen Function, $\varphi(x)=\psi(x)=\sqrt{f(x)}$. In diesem Falle mufs immer P verschwinden. Setzt man für denselben Fall

$$\frac{1}{i+1}a_1^{(i)}=\frac{1}{i+1}a_2^{(i)}=b_{i+1},$$

wo $\frac{1}{2}b_i$ der Coëfficient von x^i in $f(x)$ ist, so wird

$$C_{m,n}=(n-m)b_{n+m+2}, \quad \text{also} \quad C_{m,m}=0.$$

2.

Ich komme jetzt zu der grofsen Ausdehnung, welche Abel dem schon so allgemeinen Theorem, welches im Vorigen bewiesen worden, gegeben hat (s. Abh. 10. des 2ten Theiles seiner Werke S. 58—65). Zu dem näheren Verständnifs dieser Ausdehnung ist es nöthig, einige Sätze über lineare Differentialgleichungen voranzuschicken.

Hat man einen Ausdruck

$$Ay+A_1y'+A_2y''\cdots+A_ny^{(n)},$$

wo $y^{(i)}=\frac{d^iy}{dx^i}$ und A, A_1 etc. Functionen von x sind, so entspricht ihm immer ein anderer

$$Bz+B_1z'+B_2z''\cdots+B_nz^{(n)}$$

in der Art, dafs für unbestimmte Functionen y und z der Ausdruck

$$z[Ay+A_1y'+A_2y''\cdots+A_ny^{(n)}]+y[Bz+B_1z'+B_2z''\cdots+B_nz^{(n)}]$$

ein vollständiges Differential wird. Diese Bedingung erfordert die Gleichung

$$By+B_1y'+B_2y''\cdots+B_ny^{(n)}=-Ay+\frac{d.A_1y}{dx}-\frac{d^2.A_2y}{dx^2}\cdots\pm\frac{d^n.A_ny}{dx^n},$$

mittelst welcher der zweite Ausdruck aus dem gegebenen bestimmt wird, und durch dieselbe Bedingung wird auch auf ganz ähnliche Art der gegebene Ausdruck aus dem zweiten mittelst der Gleichung

$$Ay+A_1y'+A_2y''\cdots+A_ny^{(n)}=-By+\frac{d.B_1y}{dx}-\frac{d^2.B_2y}{dx^2}\cdots\pm\frac{d^n.B_ny}{dx^n}$$

bestimmt. Ich werde mit $[y]_1$ und $[y]_2$ die Ausdrücke

$$[y]_1 = Ay+A_1y'+A_2y''\cdots+A_ny^{(n)} = -By+\frac{d.B_1y}{dx}-\frac{d^2.B_2y}{dx^2}\cdots\pm\frac{d^n.B_ny}{dx^n},$$

$$[y]_2 = By+B_1y'+B_2y''\cdots+B_ny^{(n)} = -Ay+\frac{d.A_1y}{dx}-\frac{d^2.A_2y}{dx^2}\cdots\pm\frac{d^n.A_ny}{dx^n}$$

bezeichnen, und das Integral

$$\int(z[y]_1+y[z]_2)\,dx = [y,z]$$

setzen. Wenn man in den Functionen A, A_1 etc., B, B_1 etc. für die unabhängige Variable x eine andere einführt und nach dieser differentiirt, so werde ich dieselbe den Klammern oben rechts beifügen.

Wenn z eine Lösung der Gleichung

$$[z]_2 = 0,$$

y eine beliebige Function ist, so folgt aus der vorstehenden Formel,

$$\int z[y]_1 dx = [y,z],$$

und ebenso, wenn y eine Lösung der Gleichung

$$[y]_1 = 0,$$

z aber eine beliebige Function ist,

$$\int y[z]_2 dx = [y,z].$$

Wenn y und z gleichzeitig Lösungen der Gleichungen

$$[y]_1 = 0,\quad [z]_2 = 0$$

sind, so wird $[y,z]$ einer Constanten gleich.

Es seien A, A_1 etc. ganze rationale Functionen von x, so werden auch B, B_1 etc. ganze rationale Functionen von x sein. Nennt man $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ etc. die Functionen von α, welche aus A, A_1 erhalten werden, wenn man α für x substituirt, und setzt

$$\frac{A-\mathfrak{A}}{x-\alpha} = P,\quad \frac{A_1-\mathfrak{A}_1}{x-\alpha} = P_1,\quad \dots \frac{A_n-\mathfrak{A}_n}{x-\alpha} = P_n,$$

so werden P, P_1 etc. ganze rationale Functionen der beiden Gröſsen x und α. Substituirt man in

$$[y]_2 = -Ay+\frac{d.A_1y}{dx}-\frac{d^2.A\,y}{dx^2}\cdots\pm\frac{d^n.A_ny}{dx^n}$$

für y den Bruch $\frac{1}{x-\alpha}$, und setzt statt der Differentiationen von $\frac{1}{x-\alpha}$ nach x die nach α, abwechselnd mit entgegengesetztem Zeichen genommen, so erhält man

$$\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2 = -\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)} - P + \frac{dP_1}{dx} - \frac{d^2P_2}{dx^2}\cdots\pm\frac{d^nP_n}{dx^n}.$$

Es wird daher

$$\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)} + \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)}$$

eine ganze rationale Function von x und α. Ich will diese ganze rationale Function von x und α mit U bezeichnen. Setzt man

$$\mathfrak{A}_m^{(i)} = \frac{d^i\mathfrak{A}_m}{d\alpha^i},$$

so wird

$$(1.)\qquad U = \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)} + \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)}$$

$$= \frac{\mathfrak{A}+B}{x-\alpha} + \frac{\mathfrak{A}_1-B_1}{(x-\alpha)^2} + \Pi 2\cdot\frac{\mathfrak{A}_2+B_2}{(x-\alpha)^3} + \cdots + \Pi n\cdot\frac{\mathfrak{A}_n+(-1)^nB_n}{(x-\alpha)^{n+1}}.$$

Ist

$$U = \Sigma C_{m,p}\alpha^m x^p,$$

wo m und p nur ganze positive Werthe annehmen, so ergiebt sich $C_{m,p}$ aus (1.) auf doppelte Art, nämlich als Coëfficient von x^p in dem Ausdrucke

$$\frac{B}{x^{m+1}}-(m+1)\frac{B_1}{x^{m+2}}+(m+1)(m+2)\frac{B_2}{x^{m+3}}-\cdots\pm(m+1)(m+2)\cdots(m+n)\frac{B_n}{x^{m+n+1}} = [x^{-m-1}]_2,$$

oder als Coëfficient von α^m in dem Ausdrucke

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\alpha^{p+1}}+(p+1)\frac{\mathfrak{A}_1}{\alpha^{p+2}}-(p+1)(p+2)\frac{\mathfrak{A}_2}{\alpha^{p+3}}+\cdots\mp(p+1)(p+2)\cdots(p+n)\frac{\mathfrak{A}_n}{\alpha^{p+n+1}}$$

$$= -[\alpha^{-p-1}]_1^{(\alpha)}\ \text{*)}.$$

Die Identität dieser beiden für $C_{m,p}$ gefundenen Darstellungen folgt auch un-

---

*) Setzt man

$$\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+i)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+i)}A_i + \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+i)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+i)}B_i = M_i,$$

wo $\nu = m+p+1$, so führt die Vergleichung der beiden obigen Bestimmungen von $C_{m,p}$ auf die Gleichung

$$M - \frac{dM_1}{dx} + \frac{d^2M_2}{dx^2} - \cdots \pm \frac{d^nM_n}{dx^n} = 0,$$

welche man mittelst der bekannten Formel

$$1-k_1\frac{m+1}{\nu+1}+k_2\frac{(m+1)(m+2)}{(\nu+1)(\nu+2)}-k_3\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}\cdots\pm\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+k)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+k)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)},$$

wo $k_i = \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{1.2\dots i}$, verificirt. Es wird daher der Ausdruck

$$My + M_1y' + M_2y''\dots + M_ny^{(n)}$$

ein vollständiges Differential.

mittelbar aus der Betrachtung, dass in

$$x^{-m-1}[x^{-p-1}]_1 + x^{-p-1}[x^{-m-1}]_2$$

als dem Differential des Ausdrucks $[x^{-p-1}, x^{-m-1}]$, welcher aus bloſsen Potenzen von x besteht, der Term $\frac{1}{x}$ nicht vorkommen kann.

Ich multiplicire die Gleichung (1.) mit

$$\frac{d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)\,\varphi(x)},$$

wo $\frac{1}{\varphi(x)}$ und $\frac{1}{\psi(\alpha)}$ respective Lösungen der Gleichungen

$$\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]_1^{(x)} = 0, \quad \left[\frac{1}{\psi(\alpha)}\right]_2^{(\alpha)} = 0$$

sein sollen, und integrire nach α und x. Man erhält aber zufolge der obigen Formeln:

$$\int\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)} \frac{dx}{\varphi(x)} = \left[\frac{1}{\varphi(x)}, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)},$$

$$\int\left[\frac{1}{\alpha-x}\right]_1^{(\alpha)} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \left[\frac{1}{\alpha-x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)},$$

und daher

$$(2.)\quad \int\left[\frac{1}{\varphi(x)}, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} - \int\left[\frac{1}{\alpha-x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} \frac{dx}{\varphi(x)} = \iint \frac{U\,d\alpha\,dx}{\psi(\alpha)\,\varphi(x)}.$$

In der Formel (2.) sind die beiden Ausdrücke $[y, z]$ so beschaffen, dass y eine Lösung der Gleichung $[y]_1 = 0$ oder z eine Lösung der Gleichung $[z]_2 = 0$ ist. Für diese Fälle kann man Folgendes bemerken.

Es seien $y_1, y_2, \ldots y_n$ die n Lösungen der Gleichung $[y]_1 = 0$, und $z_1, z_2, \ldots z_n$ die n Lösungen der Gleichung $[z]_2 = 0$, so sind die nn Ausdrücke $[y_i, z_k]$ Constanten gleich. Da man für $z_1, z_2, \ldots z_n$ beliebige lineare Functionen derselben, deren Coëfficienten constant sind, einführen kann, so kann man sich diese constanten Coëfficienten so bestimmt denken, dass die Ausdrücke

$$[y_i, z_i] = 1,$$

dagegen, wenn i und k verschieden sind, die Ausdrücke

$$[y_i, z_k] = 0$$

sind. Mittelst dieser Bedingungen sind für gegebene Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ die Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_n$, und umgekehrt für gegebene Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_n$ die Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ vollkommen bestimmt. Hat man nämlich für eine beliebige Function z die n Gleichungen

$$[y_1, z] = r_1, \quad [y_2, z] = r_2, \quad \ldots \quad [y_n, z] = r_n,$$

welches n lineare Gleichungen zwischen $z, z', \ldots z^{(n-1)}$ sind, so folgt:

$$\begin{aligned}
z &= z_1 r_1 + z_2 r_2 + \cdots + z_n r_n,\\
z' &= z_1' r_1 + z_2' r_2 + \cdots + z_n' r_n,\\
z'' &= z_1'' r_1 + z_2'' r_2 + \cdots + z_n'' r_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z^{(n-1)} &= z_1^{(n-1)} r_1 + z_2^{(n-1)} r_2 + \cdots + z_n^{(n-1)} r_n,
\end{aligned}$$

indem man sogleich sieht, dass durch die Substitution dieser Werthe den n Gleichungen Genüge geschicht. Eben so erhält man für eine beliebige Function y aus den n Gleichungen

$$[y, z_1] = s_1, \quad [y, z_2] = s_2, \quad \ldots \quad [y, z_n] = s_n$$

die Werthe

$$\begin{aligned}
y &= y_1 s_1 + y_2 s_2 + \cdots + y_n s_n,\\
y' &= y_1' s_1 + y_2' s_2 + \cdots + y_n' s_n,\\
y'' &= y_1'' s_1 + y_2'' s_2 + \cdots + y_n'' s_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n-1)} &= y_1^{(n-1)} s_1 + y_2^{(n-1)} s_2 + \cdots + y_n^{(n-1)} s_n.
\end{aligned}$$

Setzt man in $r_i = [y_i, z]$ für z die Function von x, welche durch das Integral

$$z = \int \frac{d\alpha}{(x-\alpha)\,\psi(\alpha)}$$

gegeben ist, und $\frac{1}{\varphi(x)} = y_i$, so folgt aus (2.):

$$r_i = \int\left[y_i, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} - \int\left[\frac{1}{\alpha-x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} y_i\, dx + \iint \frac{y_i U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)},$$

und daher

$$z_1^{(i)} r_1 + z_2^{(i)} r_2 + \cdots + z_n^{(i)} r_n = \left[Z^{(i)}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} + V^{(i)},$$

wenn man

$$Z^{(i)} = z_1^{(i)} \int \frac{y_1\, dx}{\alpha - x} + z_2^{(i)} \int \frac{y_2\, dx}{\alpha - x} + \cdots + z_n^{(i)} \int \frac{y_n\, dx}{\alpha - x},$$

$$V^{(i)} = z_1^{(i)} \iint \frac{y_1 U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)} + z_2^{(i)} \iint \frac{y_2 U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)} + \cdots + z_n^{(i)} \iint \frac{y_n U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)}$$

setzt. Man erhält daher durch die im Vorhergehenden zur Auflösung der Gleichungen

$$[y_1, z] = r_1, \quad [y_2, z] = r_2, \quad \ldots \quad [y_n, z] = r_n$$

gegebenen Formeln für die Functionen $z, z', \ldots z^{(n-1)}$ die Werthe

$$z^{(i)} = (-1)^i \Pi i \cdot \int \frac{d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}\psi(\alpha)} = \left[Z^{(i)}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} + V^{(i)}.$$

Man setze in dieser Gleichung für $\frac{1}{\psi(\alpha)}$ nach und nach $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$, wo ζ_k dieselbe Function von α sei, die z_k von x ist. Man bezeichne ferner die der Lösung $\frac{1}{\psi(\alpha)} = \zeta_k$ entsprechenden Werthe von $V^{(i)}$ mit $V_k^{(i)}$, so hat man:

$$[Z^{(i)}, \zeta_k]^{(\alpha)} = (-1)^i \Pi i \cdot \int \frac{\zeta_k d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} - V_k^{(i)}.$$

Setzt man hierin für k die Werthe $1, 2, \ldots n$, so erhält man n lineare Gleichungen zwischen den Gröſsen

$$Z^{(i)}, \quad \frac{dZ^{(i)}}{d\alpha}, \quad \frac{d^2 Z^{(i)}}{d\alpha^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^{n-1} Z^{(i)}}{d\alpha^{n-1}},$$

und nach den obigen Auflösungsformeln, wenn υ_i dieselbe Function von α bedeutet, welche y_i von x ist,

$$\frac{d^k Z^{(i)}}{d\alpha^k} = (-1)^i \Pi i \left\{\upsilon_1^{(k)} \int \frac{\zeta_1 d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} + \upsilon_2^{(k)} \int \frac{\zeta_2 d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} + \cdots + \upsilon_n^{(k)} \int \frac{\zeta_n d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}}\right\}$$
$$- \left\{\upsilon_1^{(k)} V_1^{(i)} + \upsilon_2^{(k)} V_2^{(i)} \cdots + \upsilon_n^{(k)} V_n^{(i)}\right\}.$$

Es ist aber

$$\frac{d^k Z^{(i)}}{d\alpha^k} = (-1)^k \Pi k \left\{z_1^{(i)} \int \frac{y_1 dx}{(\alpha-x)^{k+1}} + z_2^{(i)} \int \frac{y_2 dx}{(\alpha-x)^{k+1}} + \cdots + z_n^{(i)} \int \frac{y_n dx}{(\alpha-x)^{k+1}}\right\},$$

ferner

$$\upsilon_1^{(k)} V_1^{(i)} + \upsilon_2^{(k)} V_2^{(i)} \cdots + \upsilon_n^{(k)} V_n^{(i)} = \Sigma \upsilon_g^{(k)} V_g^{(i)} = \Sigma\Sigma \upsilon_g^{(k)} z_h^{(i)} \iint \zeta_g y_h U d\alpha\, dx,$$

wo für die beiden Indices g und h die Werthe $1, 2, \ldots n$ zu setzen sind. Man erhält daher folgendes Theorem.

Theorem.

»Es seien $A, A_1, \ldots A_n$ und $B, B_1, \ldots B_n$ ganze rationale Functionen von x, welche in solcher Beziehung zu einander stehen, dass, wenn man durch die oberen Accente die Differentialquotienten bezeichnet, für zwei beliebige Functionen y und z der Ausdruck

$$z\{Ay + A_1 y' + A_2 y'' \cdots + A_n y^{(n)}\} + y\{Bz + B_1 z' + B_2 z'' \cdots + B_n z^{(n)}\}$$

ein vollständiges Differential wird; es seien

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots y_n$$

die n von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$Ay + A_1 y' + A_2 y'' \cdots + A_n y^{(n)} = 0,$$

und

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots z_n$$

die von ihnen abhängigen Lösungen der Gleichung

$$Bz + B_1 z' + B_2 z'' \cdots + B_n z^{(n)} = 0,$$

welche man, was immer möglich ist, so bestimmt, dass das für unbestimmte Functionen y und z und ohne Hinzufügung einer willkürlichen Constante dargestellte Integral des Ausdrucks

$$z\{Ay + A_1 y' + \ldots\} + y\{Bz + B_1 z' + \ldots\}$$

verschwindet, wenn man $y = y_i$ und $z = z_k$, oder $= 1$ wird, wenn man $y = y_i$, $z = z_i$ setzt; es sei ferner $C_{m,p}$ der Coëfficient von $\frac{1}{x}$ in dem Ausdrucke

$$-x^{-m-1}\{Ay + A_1 y' \cdots + A_n y^{(n)}\},$$

wenn $y = x^{-p-1}$, oder, was dasselbe ist, in dem Ausdrucke

$$x^{-p-1}\{By + B_1 y' \cdots + B_n y^{(n)}\},$$

wenn $y = x^{-m-1}$ gesetzt wird; es seien endlich

$$\upsilon_1, \quad \upsilon_2, \quad \ldots \upsilon_n; \quad \zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots \zeta_n$$

die Functionen von α, in welche sich

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots y_n; \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots z_n$$

verwandeln, wenn man α für x substituirt, so wird:

$$\Pi k \left\{z_1^{(i)} \int \frac{y_1 dx}{(x-\alpha)^{k+1}} + z_2^{(i)} \int \frac{y_2 dx}{(x-\alpha)^{k+1}} + \cdots + z_n^{(i)} \int \frac{y_n dx}{(x-\alpha)^{k+1}}\right\}$$
$$-\Pi i \left\{\upsilon_1^{(k)} \int \frac{\zeta_1 d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}} + \upsilon_2^{(k)} \int \frac{\zeta_2 d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}} + \cdots + \upsilon_n^{(k)} \int \frac{\zeta_n dx}{(\alpha-x)^{i+1}}\right\}$$
$$= \Sigma C_{m,p} \upsilon_g^{(k)} z_h^{(i)} \int \alpha^m \zeta_g d\alpha . \int x^p y_h dx,$$

wo in der mit Σ bezeichneten vierfachen Summe g und h die Werthe $1, 2, \ldots n$ erhalten, m und p alle Werthe, für welche sich in einer oder in mehreren von den Functionen $x^{-l-1}A_l$ ein Term x^{m+p} findet, und die Accente i und k, welche die Ordnung der Differentiale anzeigen, beliebig angenommene Zahlen aus der Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ sind.«

Die im vorstehenden Theorem gegebene Formel umfasst nn Gleichungen, welche man aus der Combination aller Werthe von i mit allen Werthen von k erhält. Man kann mittelst derselben die nn Gröſsen $\int \frac{y_i dx}{(x-\alpha)^{k+1}}$ linear durch die nn Gröſsen $\int \frac{\zeta_i d\alpha}{(\alpha-x)^{k+1}}$ ausdrücken und umgekehrt. Für $n = 1$ erhält man den §. 1. entwickelten Satz.

Wenn die Differentialgleichung

$$Ay + A_1 y' \cdots + A_n y^{(n)} = 0$$

die besondere Form

$$Ky + \frac{d.K_1 y'}{dx} + \frac{d^2.K\, y''}{dx^2} + \frac{d^3.K\, y'''}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

hat, welche ich in meinen Untersuchungen *über die Kriterien des Maximum und Minimum bei den isoperimetrischen Problemen* betrachtet habe, wird die Differentialgleichung

$$By + B_1 y' \cdots + B_n y^{(n)} = 0$$

mit ihr identisch, oder es wird

$$B = -A, \quad B_1 = -A_1, \quad B_2 = -A_2, \quad \ldots \quad B_n = -A_n.$$

Man kann diese linearen Differentialgleichungen als solche bezeichnen, bei denen jede Lösung zugleich ein Factor, welcher sie integrabel macht, und jeder solcher Factor eine ihrer Lösungen ist. Sie nehmen für eine gerade Ordnung immer die obige Form an; für eine ungerade Ordnung kann man dieselben passend so darstellen:

$$\sqrt{K_1} \cdot \frac{d.y\sqrt{K_1}}{dx} + \frac{d.\left(\sqrt{K_2}\,\frac{d.y'\sqrt{K_2}}{dx}\right)}{dx} + \frac{d^2.\left(\sqrt{K_3}\,\frac{d.y''\sqrt{K_3}}{dx}\right)}{dx^2} + \text{etc.} = 0.$$

Bei der Integration dieser Differentialgleichungen bietet sich der merkwürdige Umstand dar, dass durch *eine* bekannt gewordene Lösung sich ihre Ordnung um *zwei* Einheiten verringern läſst, und die übrigen Lösungen sich je nach der weitern Verringerung der Ordnung der Differentialgleichung, die sich durch sie erreichen läſst, unterscheiden. Man kann ihre Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ immer so bestimmen, dass die aus denselben auf die oben angegebene Weise abgeleiteten Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_n$ mit ihnen übereinkommen, so dass

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2, \quad \ldots \quad z_n = y_n.$$

Um das aufgestellte allgemeine Theorem in ein vollständiges Licht zu setzen, und insbesondere die Anfangsgrenzen der Integrale zu bestimmen und die nothwendigen Beschränkungen des Theorems anzugeben, ist es nöthig, den Charakter der Lösungen der linearen Differentialgleichungen, deren Coëfficienten ganze rationale Functionen der Variablen sind, näher zu ergründen, wofür, wenn man die zweite Ordnung überschreitet, noch wenig von den Mathematikern geschehen ist.

13. Mai 1846.

ÜBER EINE NEUE METHODE

ZUR

INTEGRATION DER HYPERELLIPTISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

UND

ÜBER DIE RATIONALE FORM IHRER VOLLSTÄNDIGEN ALGEBRAISCHEN INTEGRALGLEICHUNGEN.

VON

PROFESSOR DR. C. G. J. JACOBI

ZU BERLIN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 32. p. 220—226.

ÜBER EINE NEUE METHODE ZUR INTEGRATION DER HYPERELLIPTISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND ÜBER DIE RATIONALE FORM IHRER VOLLSTÄNDIGEN ALGEBRAISCHEN INTEGRALGLEICHUNGEN.

Ich werde das System der Differentialgleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \cdots + \dfrac{dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ \dfrac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} + \cdots + \dfrac{x_n\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ \dfrac{x_1^2\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{x_2^2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} + \cdots + \dfrac{x_n^2\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{x_1^{n-2}\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{x_2^{n-2}\,dx^2}{\sqrt{X_2}} + \cdots + \dfrac{x_n^{n-2}\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \end{cases}$$

in welchem $X_1, X_2, \ldots X_n$ dieselben ganzen Functionen $2n^{\text{ten}}$ Grades respective von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, und $n > 2$ ist, mit dem Namen *eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen* bezeichnen. Man weifs, dass sie durch rein algebraische Gleichungen vollständig integrirt werden können. Wenn X_1 und X_2 vom 4^{ten} Grade sind, hat Euler gefunden, dass das algebraische Integral der Gleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0$$

eine Gleichung zweiter Ordnung zwischen den beiden Gröfsen

$$x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad x_1 x_2$$

ist. Die algebraischen Integralgleichungen eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen hat man noch nicht in rationaler Form dargestellt, dürfte auch dazu von den bekannten Formeln aus durch Anwendung der gewöhnlichen Regeln zur Fortschaffung der Wurzelgröſsen nur mit Mühe gelangen, insbesondere wenn man eine solche rationale Form der Gleichungen zu erlangen wünscht, welche die Gewiſsheit gewährt, dass sie durch keine Combination derselben vereinfacht werden kann. Ich habe daher eine neue Integrationsmethode ersonnen, welche direct zu den rationalen algebraischen Integralgleichungen eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen, und zwar in ihrer einfachsten Form führt. Das von Euler gefundene Resultat wird hierdurch verallgemeinert. Ich finde nämlich, dass das System von $n-1$ *rationalen* Gleichungen, durch welche das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen vollständig integrirt wird,

> aus *einer* Gleichung *zweiten* Grades zwischen der Summe der Gröſsen $x_1, x_2, \dots x_n$ und der Summe ihrer Amben und aus $n-2$ andern Gleichungen besteht, mittelst welcher durch diese beiden Gröſsen die Summe der Ternen, Quaternen etc. und das Product der Variabeln *linear* ausgedrückt werden.

Ist X die Function unter dem Wurzelzeichen, wenn man x die Variable nennt, so muss zur Bildung dieser Gleichungen die Function X durch die Form S^2-RT dargestellt werden, wo R, S, T ganze Functionen von x vom n^{ten} Grade sind. Die hierbei willkürlich anzunehmenden constanten Gröſsen geben, wie bei Euler, die willkürlichen Constanten, mit denen die rationalen Integralgleichungen behaftet sind.

Ich betrachte die Gleichung

$$Ry^2+2Sy+T = 0,$$

wo R, S, T ganze Functionen von x vom n^{ten} Grade sind. Dieselbe Gleichung, nach x geordnet, sei

$$(2.)\qquad Yx^n-Y_1x^{n-1}+Y_2x^{n-2}-\dots\pm Y_n = Ry^2+2Sy+T = 0,$$

wo $Y, Y_1, \dots Y_n$ ganze Functionen von y vom 2^{ten} Grade sind. Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man:

$$\frac{dx}{Ry+S}+\frac{2dy}{nYx^{n-1}-(n-1)Y_1x^{n-2}+\dots\mp Y_{n-1}} = 0.$$

Nennt man

$$x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n$$

die n Werthe, welche x für ein gegebenes y annimmt, und R_i, S_i, T_i die durch Substitution von $x = x_i$ aus R, S, T erhaltenen Ausdrücke, so kann man dieser Differentialgleichung die Form

$$\frac{dx_i}{\sqrt{S_i^2-R_iT_i}}+\frac{2dy}{Y(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_n)} = 0$$

geben, wo im Nenner des zweiten Gliedes der verschwindende Factor x_i-x_i auszulassen ist. Ist P_i eine rationale Function von x_i, und dehnt man die Summen auf die n Werthe von i aus, so erhält man hieraus:

$$\sum\frac{P_i dx_i}{\sqrt{S_i^2-R_iT_i}}+Q dy = 0,$$

wo die Gröſse

$$Q = \frac{2}{Y}\sum\frac{P_i}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_n)}$$

mittelst der Gleichung (2.) eine rationale Function von y wird. Ist insbesondere P_i eine ganze Potenz von x_i, deren Exponent kleiner als $n-1$ ist, so verschwindet Q. Man erhält in diesem Fall das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen (1.), wenn man auf irgend eine Weise drei ganze Functionen R, S, T vom n^{ten} Grade so bestimmt, dass

$$S^2-RT = X$$

wird.

Setzt man

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = x^n-u_1x^{n-1}+u_2x^{n-2}-\dots\pm u_n,$$

wo u_1 die Summe der Gröſsen $x_1, x_2, \dots x_n$ und u_2, u_3 etc. die Summe ihrer Amben, Ternen u. s. w. bedeutet, so erhält man aus der Gleichung (2.):

$$(3.)\qquad u_1 = \frac{Y_1}{Y},\quad u_2 = \frac{Y_2}{Y},\quad \dots\quad u_n = \frac{Y_n}{Y}.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen ergiebt sich durch Elimination von y eine Gleichung *zweiter* Ordnung zwischen u_1 und u_2. Denn die sechs Gröſsen

$$Y^2,\quad Y^2u_1,\quad Y^2u_2,\quad Y^2u_1^2,\quad Y^2u_1u_2,\quad Y^2u_2^2$$

werden ganzen Functionen von y vom 4^{ten} Grade gleich, welche aus 5 Termen bestehen, und man kann daher, wenn man diese sechs Gleichungen mit constanten Factoren α, β etc. multiplicirt und addirt, eine Gleichung von der Form

$$\alpha+\beta u_1+\gamma u_2+\delta u_1^2+\varepsilon u_1u_2+\zeta u_2^2 = 0$$

erhalten. Man kann ferner, wenn Y_m eine der Functionen $Y_3, Y_4, \dots Y_n$ ist, Y als einen linearen homogenen Ausdruck von Y_1, Y_2, Y_m darstellen,

$$Y = \varkappa_m Y_1 + \lambda_m Y_2 + \mu_m Y_m,$$

wo $\varkappa_m, \lambda_m, \mu_m$ Constanten sind, wodurch man zwischen je drei Gröfsen u_1, u_2, u_m eine Gleichung von der Form

$$\varkappa_m u_1 + \lambda_m u_2 + \mu_m u_m = 1$$

erhält. Es findet daher zwischen den Gröfsen $u_1, u_2, \dots u_n$ eine Anzahl von $n-1$ Gleichungen statt, von denen eine von der zweiten Ordnung ist und die andern linear sind. Man sieht zu gleicher Zeit, dass es unmöglich ist, diese Gleichungen, insofern man sie als Gleichungen zwischen den in den vorgelegten Differentialgleichungen (1.) enthaltenen Variabeln betrachtet, in eine einfachere Form zu bringen.

In den Ausdrücken von R, S, T kann man einen Coëfficienten $= 1$ setzen; aufserdem aber kann man immer noch drei Coëfficienten beliebig annehmen, ohne dass hierdurch die Allgemeinheit der Integralgleichungen beschränkt wird. Setzt man nämlich $\frac{my+n}{py+q}$ statt y, wo m, n, p, q beliebige Constanten sind, welche die Gleichung $mq-np = 1$ erfüllen, so verwandelt sich die Gleichung (2.) in

$$R'y^2 + 2S'y + T' = 0,$$

wo

$$R' = m^2R + 2mpS + p^2T, \qquad T' = n^2R + 2nqS + q^2T,$$
$$S' = mnR + (mq+np)S + pqT, \qquad S'S' - R'T' = SS - RT.$$

Man kann daher die Constanten m, n, p, q z. B. so bestimmen, dass in S zwei Coëfficienten $= 0$ werden, und ein dritter einen gegebenen Werth erhält. Hierdurch reducirt sich die Zahl der in den Integralgleichungen enthaltenen Constanten auf

$$3(n+1) - 4 = 3n - 1.$$

Die Zahl der in den Differentialgleichungen vorkommenden Constanten ist aber nur $2n$, weil dies die Anzahl der Coëfficienten von X ist, wenn man einen derselben $= 1$ setzt. Da sich aus den angegebenen $n-1$ Gleichungen zwischen den Gröfsen $u_1, u_2, \dots u_n$ durch Einführung der Gröfse y die Gleichungen (3.), und aus diesen durch die obigen Betrachtungen die Differentialgleichungen (1.) ergeben, welche $n-1$ Constanten weniger als die zwischen den Gröfsen

$u_1, u_2, \dots u_n$ aufgestellten Gleichungen enthalten, so sind die letztern die vollständigen Integralgleichungen des aufgestellten Systems Differentialgleichungen (1.).

Um die gegebene Function X durch die Form $S^2 - RT$ darzustellen, könnte man alle Coëfficienten in S willkürlich annehmen, und hätte dann nur $S^2 - X$ in zwei Factoren R und T vom n^{ten} Grade zu zerfällen. Dies erfordert aber die Auflösung höherer Gleichungen. Man wird mit Ausziehung von Quadratwurzeln ausreichen, wenn man folgendermafsen verfährt.

Man bestimme, etwa durch die sogenannte Lagrangesche Interpolationsformel, eine ganze Function S vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, welche für n willkürlich angenommene Werthe von x,

$$a_1, \ a_2, \ \dots \ a_n,$$

dieselben Werthe annimmt, wie die irrationale Function $\sqrt{X}$. Nennt man diese Function S, so verschwindet $SS - X$ für diese n Werthe von x und muss also durch

$$T = f(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)$$

theilbar sein, wo f ein constanter Factor ist. Nennt man den Quotienten R, so sind R, S, T die verlangten Functionen.

Man könnte die Function S auch vom n^{ten} Grade annehmen und noch die Bedingung hinzufügen, dass sie für einen neuen Werth $x = a$ einen bestimmten Werth erhalten solle. Nähme man für letzteren wieder den Werth von $\sqrt{X}$ für $x = a$, so würde man noch von R einen linearen Factor, nämlich $x - a$, kennen.

Für $y = 0$ reduciren sich die Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$ auf $a_1, a_2, \dots a_n$. Man erhält also, wenn man die Functionen R, S, T auf die angegebene Art bestimmt hat, die $n-1$ transcendenten Gleichungen:

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{X_2}} + \dots + \int_{a_n}^{x_n} \frac{x_n^m dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0,$$

wo m jeden der Werthe $0, 1, 2, \dots n-2$ annehmen kann.

Die Zeichen sämmtlicher Wurzelgröfsen $\sqrt{X_i}$ werden durch den Werth der einen Gröfse y mittelst der Gleichung

$$R_i y + S_i = \sqrt{X_i}$$

bestimmt. Man hat daher für zwei der Variabeln x_i und x_k

$$\frac{-S_i+\sqrt{X_i}}{R} = \frac{-S_k+\sqrt{X_k}}{R_k},$$

durch welche Gleichung die Wurzelgröfsen von einander abhängen. Wenn y von 0 an sich continuirlich ändert, so werden auch die Gröfsen $\sqrt{X_i}$ respective von $\sqrt{A_i}$ an sich continuirlich ändern, wenn man A_i den Werth von X für $x = a_i$ nennt. Das Zeichen jeder Wurzelgröfse $\sqrt{X_i}$ wird daher auch aus dem Zeichen von $\sqrt{A_i}$ durch die Bedingung der Continuität bestimmt.

Man setze jetzt U^2X für X, wo U eine ganze Function von x von der p^{ten} Ordnung bedeutet. Es seien ferner R, S, T ganze Functionen von x von der $(n+p)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Gleichung

$$S^2-RT = U^2X$$

erfüllen, und $x_1, x_2, \dots x_{n+p}$ die Wurzeln der Gleichung

$$Ry^2+2Sy+T = 0,$$

die einem Werthe von y entsprechen. Man erhält dann die Differentialgleichung

$$\frac{dx_i}{U_i\sqrt{X_i}} + \frac{2dy}{Y(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{n+p})} = 0,$$

wo Y der Coëfficient von x^{n+p} in der zwischen x und y aufgestellten Gleichung und U_i der Werth von U für $x = x_i$ ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit $x_i^m U_i$, wo m wieder die Werthe $0, 1, 2, \dots n-2$ annehmen kann, und summirt für alle $n+p$ Werthe von i, so erhält man, indem man dem m seine $n-1$ Werthe giebt, folgendes System von $n-1$ Differentialgleichungen zwischen den $n+p$ Variabeln $x_1, x_2, \dots x_{n+p}$:

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \cdots + \dfrac{dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0, \\ \dfrac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} + \cdots + \dfrac{x_{n+p}\,dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{x_2^{n-2}dx_2}{\sqrt{X}} + \cdots + \dfrac{x_{n+p}^{n-2}dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0. \end{cases}$$

Setzt man

$$Ry^2+2Sy+T = Yx^{n+p}-Y_1x^{n+p-1}+Y_2x^{n+p-2}-\dots\pm Y_{n+p}$$

und nennt u_1, u_2, u_3 etc. die Summe der $n+p$ Variabeln $x_1, x_2, \dots x_{n+p}$, die Summe ihrer Amben, Ternen etc., so erhält man:

$$u_1 = \frac{Y_1}{Y},\quad u_2 = \frac{Y_2}{Y},\quad \dots\quad u_{n+p} = \frac{Y_{n+p}}{Y},$$

und hieraus ergeben sich durch Elimination von y die algebraischen Integralgleichungen des Systems der Gleichungen (3.), nämlich *eine* Gleichung zweiter Ordnung zwischen u_1 und u_2 und andere $n+p-2$ Gleichungen, welche $u_3, u_4, \dots u_{n+p}$ durch u_1 und u_2 linear bestimmen. Setzt man

$$T = f(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n+p}),$$

wo f eine Constante ist und man, ohne die Allgemeinheit der Integralgleichungen zu beeinträchtigen, für $p+1$ der Gröfsen $a_1, a_2, \dots a_{n+p}$ bestimmte Werthe annehmen kann, so wird S eine ganze Function $(n+p)^{\text{ter}}$ Ordnung, die, wenn man für x die $n+p$ Werthe $a_1, a_2, \dots a_{n+p}$ setzt, dieselben Werthe wie die Function $U\sqrt{X}$ hat. Es wird dann S^2-U^2X durch T theilbar, und der Quotient wird die Function R. Die mit den algebraischen Integralgleichungen identischen transcendenten werden

$$\int_{a_1}^{x_1}\frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_{a_2}^{x_2}\frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{X_2}} + \cdots + \int_{a_{n+p}}^{x_{n+p}}\frac{x_{n+p}^m dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0,$$

so dass man auch auf diesem neuen Wege die Addition auf eine beliebige Zahl von Variabeln ausdehnen kann.

Wenn man wieder die Zahl der Variabeln auf n beschränkt und zwischen u_1 und u_2 eine beliebige Gleichung zweiten Grades annimmt, so enthält diese 5 Constanten; wenn man ferner $u_3, u_4, \dots u_n$ auf beliebige Art linear durch u_1 und u_2 ausdrückt, so enthält jede Gleichung, durch welche dieses geschieht, *drei* Constanten. Die Zahl aller in diesen Gleichungen vorkommenden Constanten ist daher $5+3(n-2) = 3n-1$ oder gleich der Zahl der in den Differentialgleichungen vorkommenden Constanten (der Coëfficienten von X, wenn man einen derselben $= 1$ setzt) plus der Zahl der willkürlichen Constanten, welche die vollständigen Integralgleichungen enthalten müssen. Da man nun gezeigt hat, dass letztere immer in die angegebene Form gebracht werden können, so folgt umgekehrt, dass jedes System algebraischer Gleichungen von der angegebenen Form immer das System vollständiger Integralgleichungen von einem System hyperelliptischer Differentialgleichungen (1.) ist, wenn man die Coëfficienten der Function X unter dem Wurzelzeichen durch die Constanten der algebraischen Gleichungen gehörig bestimmt. Wenn man aber die angegebene Form der rationalen algebraischen Integralgleichungen für $n+p$ Variable anwenden will, so können hier nicht mehr alle Constanten der Gleichungen beliebig angenommen werden.

Man kann das gefundene Theorem auch folgendermafsen darstellen:

Setzt man

$$\begin{aligned} f(x) = &(bx^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} \cdots + b_n)^2 \\ &+ (cx^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} \cdots + c_n)^2 \\ &- (ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \cdots + a_n)^2, \end{aligned}$$

so werden die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \cdots + \frac{dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0, \\ &\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \cdots + \frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0, \\ &\frac{x_1^2\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^2\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \cdots + \frac{x_n^2\,dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{x_1^{n-2}\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^{n-2}\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \cdots + \frac{x_n^{n-2}\,dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0 \end{aligned}$$

vollständig integrirt, wenn man für $x_1, x_2, \ldots x_n$ *die Wurzeln der Gleichung*

$$\begin{aligned} &ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n \\ &= (bx^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_n)\cos\varphi \\ &\quad + (cx^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n)\sin\varphi \end{aligned}$$

setzt, wo φ *einen veränderlichen Winkel bedeutet.*

Den 14. Juli 1846.

NOTIZ ÜBER A. GÖPEL

VON

C. G. J. JACOBI.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 35. p. 313—317.

NOTIZ ÜBER A. GÖPEL.

Herr Adolph Göpel, Doctor der Philosophie und einer der Beamten der hiesigen Königlichen Bibliothek, ist wenige Wochen, nachdem er im März d. J. die wichtige Abhandlung *) »*Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis*« zum Druck übergeben, einer kurzen, aber schmerzlichen Krankheit erlegen. In den Stunden, welche ihm sein Amt frei liess, widmete er sich tiefen mathematischen Speculationen. Die einzige Erholung von diesen fand er in der Musik, in welcher er es bis zu einer bedeutenden Fertigkeit gebracht hatte. In stiller Zurückgezogenheit scheint er selbst den Umgang mit den Gelehrten seines Faches vermieden zu haben, die erst nach seinem Tode erfuhren, welch' ein bedeutendes Talent unter ihnen gelebt hatte. Ich habe ihn nie gesehen.

Seine Jugenderlebnisse erzählt Göpel selbst in dem seiner Doctoraldissertation angehängten Curriculum Vitae. Sein Vater, aus Sachsen gebürtig, war Musiklehrer in Rostock, wo er im September 1812 geboren wurde. Ein mütterlicher Oheim, der englischer Consul in Corsica war, nahm ihn in seinem zehnten Jahre mit sich nach Italien. Dort während eines wechselnden Aufenthaltes in mehreren Städten machte es sich dieser Oheim zum angelegentlichen Geschäft, seinen jungen Verwandten in den Anfangsgründen der Wissenschaften selbst zu unterrichten. Einen längeren Aufenthalt in Pisa während der beiden Winter von 1825 und 1826 benutzte der junge Göpel, um an der dor-

*) Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 35. p. 277.

tigen Universität den Vorlesungen der Professoren Pieraccioli, Poletti, Gerbi und Gatteschi über Algebra und Differentialrechnung, Statik und analytische Mechanik, theoretische und Experimentalphysik beizuwohnen. Im Jahre 1827 kehrte er nach seiner Vaterstadt Rostock zurück, und besuchte hierauf noch zwei Jahre die erste Classe des dortigen Gymnasiums, von wo er die Berliner Universität bezog. Er ergriff mit Eifer die ihm hier gebotene Gelegenheit einer mannichfachen Ausbildung, und hörte aufser mathematischen, physikalischen und chemischen auch noch philosophische, philologische, historische und ästhetische Vorlesungen. Tieferen mathematischen Studien wandte er sich erst nach Beendigung seiner Universitätszeit zu, und wurde, wie viele von denen, welche zur rein mathematischen Speculation berufen sind, zunächst von der höheren Zahlenlehre angezogen. In seiner zur Erwerbung des Doctorgrades an der Berliner Universität im März 1835 vertheidigten Dissertation »*De aequationibus secundi gradus indeterminatis*«, welche etwa $1\frac{1}{2}$ Bogen umfafst, legte er eine Probe dieser arithmetischen Studien ab, welche von grofsem Scharfsinn zeugte und seine Fähigkeit zu tiefen Forschungen bekundete. Da diese merkwürdige Dissertation nicht in den Handelsverkehr gekommen ist, will ich hier einige der hauptsächlichsten darin enthaltenen Resultate mittheilen.

Wenn man die Quadratwurzel einer Primzahl A von der Form $4n+1$ in einen Kettenbruch verwandelt, so enthält, wie bekannt, die symmetrische Periode der Nenner zwei gleiche mittlere Terme. Sind die diesen entsprechenden vollständigen Quotienten

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

so hat Legendre gezeigt, dass

$$D = D', \quad A = I'I'+DD,$$

und dass man daher auf diese Weise durch die Verwandlung der Quadratwurzel der Primzahl A in einen Kettenbruch ihre Zerfällung in zwei Quadrate erhält. Dieses schöne Resultat war bisher einzig in seiner Art geblieben. Durch tiefer eingehende Betrachtungen zeigt nun hier Göpel, wie man auch, wenn A eine Primzahl von der Form $4n+3$ oder ihr Doppeltes ist, die Zerfällung von A in die Form $\varphi^2 \pm 2\psi^2$ durch die Entwickelung von $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch findet. *Ist nämlich A eine Primzahl von der Form $8n+3$ oder ihr Doppeltes, so*

kommt man bei der Entwickelung von $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch immer auf drei aufeinander folgende vollständige Quotienten

$$\frac{\sqrt{A}+I^0}{D^0}, \quad \frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

in welchen D entweder $= \frac{1}{2}D^0$ oder $\frac{1}{2}D'$ oder $\frac{1}{2}(D^0+D')$ ist, und es wird in den beiden ersten Fällen

$$A = I^2+2D^2,$$

im dritten

$$A = \tfrac{1}{4}(I-I')^2+2D^2 = \tfrac{1}{16}(D^0-D')^2+2D^2,$$

wo $I-I'$ immer durch 2, D^0-D' durch 4 aufgeht. Wenn dagegen A eine Primzahl von der Form $8n+7$ oder ihr Doppeltes ist, so wird man bei der Verwandlung von $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch immer auf zwei aufeinander folgende vollständige Quotienten

$$\frac{\sqrt{A}+I^0}{D^0}, \quad \frac{\sqrt{A}+I}{D}$$

kommen, für welche

$$D+D^0 = 2I$$

ist, und diese ergeben

$$A = 2I^2-\tfrac{1}{4}(D-D^0)^2,$$

wo $D-D^0$ immer gerade ist.

Ich habe mit Hülfe der Degenschen Tafel die folgende Tabelle angefertigt, welche anzeigt, für welche Primzahlen von der Form $8n+3$ oder Doppelte von solchen die drei von Göpel unterschiedenen Fälle,

$$D = \tfrac{1}{2}D^0, \quad D = \tfrac{1}{2}D', \quad D = \tfrac{1}{2}(D^0+D')$$

eintreten.

$D = \frac{1}{2}D^0$: 3. 6. 11. 22. 38. 43. 59. 83. 131. 139. 179. 211. 214. 227. 262. 278. 283. 326. 379. 419. 443. 467. 491. 502. 547. 619. 659. 683. 694. 739. 787. 811. 827. 838. 971. 998.

$D = \frac{1}{2}D'$: 67. 86. 118. 307. 331. 358. 422. 523. 563. 566. 571. 614. 643. 662. 691. 859. 934. 947.

$D = \frac{1}{2}(D^0+D')$: 19. 107. 134. 163. 166. 251. 347. 454. 499. 587. 758. 883. 886. 907. 982.

Es ist hierbei zu bemerken, dass wenigstens in den hier betrachteten Zahlen unter 1000 der erste Fall bedeutend überwiegt, indem unter den 69 Zahlen 36 dem ersten, 18 dem zweiten, 15 dem dritten Falle angehören. Für die Primzahlen von der Form $8n+7$ und ihre Doppelten sind in ähnlicher Art die Fälle zu unterscheiden, in welchen $D^0 > D$ oder $D > D^0$.

Nach dieser ersten Arbeit hat Göpel in einem Zeitraume von 12 Jahren nichts veröffentlicht, aufser in den Jahren 1843—45 mehrere kleine, mit Geist verfafste, wenn gleich weniger bedeutende Aufsätze, welche er bei Gelegenheit der Correctur einer in Greifswald von Grunert herausgegebenen mathematischen Zeitschrift niederschrieb. In einem derselben beweist er, *dass wenn in einer Gleichung* $\left(\frac{x+\sqrt{y}}{p}\right)^n = P+\sqrt{Q}$, *wo* x, y, p, n, P, Q *ganze Zahlen bedeuten, der Nenner* p *von* 1 *verschieden ist, und* x, y, p *keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, immer* $p=2$, $n=3$ *oder ein Vielfaches von* 3, x *ungerade und* y *von der Form* $8n+5$ *sein muss.* Mit der Handhabung der synthetischen Methoden Steiners zeigt er sich in mehreren dieser Aufsätze vollkommen vertraut. Es ist zu vermuthen, dass sich noch andere gröfsere unpublicirte, mehr oder minder ausgearbeitete Abhandlungen in seinem Nachlass finden werden. Die von ihm kurz vor seinem Tode beendigte oben angeführte Abhandlung behandelt einen hohen und abstracten Theil der Analysis, und giebt die Lösung eines der bedeutendsten Probleme, welches sich die gegenwärtige Mathematik gestellt hat, die umgekehrten Functionen der ersten Classe der Abelschen Integrale wirklich darzustellen. Durch eine glückliche Divination verallgemeinert er auf naturgemäfse Art die einfachen Reihen Θ, auf welche ich die elliptischen Functionen zurückgeführt habe, und findet, dass diese verallgemeinerten Reihen die Coëfficienten der quadratischen Gleichung geben, deren beide Wurzeln in meiner Theorie der hyperelliptischen Functionen die simultanen Umkehrungsfunctionen zweier Integralsummen sind. Das einfache Mittel, dessen er sich hiezu bedient, ist die Multiplication zweier von den verallgemeinerten Reihen, wie ich ein ähnliches Verfahren für die Functionen Θ selbst im 3ten Bande des mathematischen Journals p. 305 *) angegeben habe. Meisterhaft ist die Art, wie er die

*) Bd. I. dieser Ausgabe, p. 257.

Differentialgleichungen, welche er findet, ungeschreckt von ihrer Complication, durch eine passende Substitution in die verlangte Form der von mir aufgestellten Systeme der hyperelliptischen Differentialgleichungen bringt, und hierdurch das gestellte Problem vollständig erledigt. Aber Göpel war nicht der einzige, welcher sich mit Glück mit diesem schönen Probleme beschäftigt hat. Eine andere, umfangreichere Arbeit, welche, wie ich glaube, seit dem October v. J. einer berühmten Akademie vorliegt, und deren wesentlicher Inhalt mir von ihrem Verfasser und von mir auch einigen geehrten Freunden seit 3 Jahren bereits mitgetheilt worden ist, geht von derselben glücklichen Divination aus, und führt, wenn auch auf verschiedenem, vielleicht leichterem Wege zu denselben Resultaten.

Ich bemerke noch, dass die von Göpel angestellten Betrachtungen über die zweiten Differentiale seiner Functionen, welche für den jetzigen Zweck der Abhandlung überflüssig sind, so wie seine ausdrücklichen Worte p. 297 »quas ad secundam speciem nostrarum functionum facere *infra* videbis« und p. 298 »Quam *infra* ad tertiam speciem functionum quadrupliciter periodicarum pertinere videbis« auf weitere, noch in der Abhandlung selbst auszuführende Untersuchungen deuten, die man aber in derselben mit Bedauern vermifst. Vielleicht finden sich dieselben in des Autors Papieren, die vielleicht auch das gewagt scheinende Wort rechtfertigen, dass eine ähnliche Methode sich auf alle Transcendenten erstrecke, welche aus der Integration algebraischer Gröfsen entstehen. Auch dürfte schon nicht so ganz unbedenklich, wie der Verfasser meint, die Ausdehnung auf die Integrale erscheinen, in denen die unter dem Quadratwurzelzeichen befindliche Function den *sechsten* Grad übersteigt, da bei ihnen die Anzahl der in den Reihen enthaltenen Constanten nicht mehr, wie bei den elliptischen und den Abelschen Integralen der ersten Classe, mit der Anzahl der Moduln übereinstimmt.

Wenn auch nicht in der ersten Jugendblüthe, wie Galois und Abel, so hat doch auch hier viel zu früh und mitten in der Arbeit der Tod ein bedeutendes Talent hinweggerafft. Freuen wir uns, dass uns von demselben wenigstens ein schönes und dauerndes Denkmal hinterblieben ist. Bei der Gewohnheit der Deutschen, ihre Arbeiten überreif werden zu lassen, und ihrer Scheu, mit ihren besten Gedanken hervorzutreten, wären wir leicht um die Früchte der Arbeit

Göpels gekommen, wenn ihn nicht ein von Hrn. Hermite an mich gerichteter Brief, wie in der Einleitung der Abhandlung angedeutet ist, zu ihrer Bekanntmachung bewogen hätte; oder es hat ein dunkles Vorgefühl, das uns aus den Worten »quum magis quam optabam festinandum fuisset« anspricht, ihn zur Eile ermahnt.

Berlin, d. 22. Sept. 1847.

ÜBER DIE UNMITTELBARE

VERIFICATION EINER FUNDAMENTALFORMEL

DER THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

VON

PROF. C. G. J. JACOBI.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 36. S. 75—80.

ÜBER DIE UNMITTELBARE VERIFICATION EINER FUNDAMENTALFORMEL DER THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

In meinen »*Fundamentis novis*« habe ich die Reihe

$$S = 1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\text{ etc.}$$

dem Producte unendlich vieler Factoren

$$\Pi = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)\dots(1-qz^{-1})(1-q^3z^{-1})(1-q^5z^{-1})\dots$$

gleich gefunden. Wenn man die Logarithmen dieser beiden einander gleichen Ausdrücke S und Π nach q oder nach z differentiirt, die aus dem Product Π hervorgehenden Brüche entwickelt, und dann mit der Reihe S multiplicirt, so muſs man auf identische Gleichungen

$$(1.)\qquad \frac{\partial S}{\partial q} = S\frac{\partial \log \Pi}{\partial q}, \qquad \frac{\partial S}{\partial z} = S\frac{\partial \log \Pi}{\partial z}$$

kommen. Man kann diese Identitäten auf folgende Art erweisen.

Setzt man

$$-q\frac{\partial \log \Pi}{\partial q} = P, \qquad -z\frac{\partial \log \Pi}{\partial z} = R,$$

so erhält man durch Substitution des Ausdrucks von Π:

$$\begin{aligned} P = {} & \frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{4q^4}{1-q^4}+\frac{6q^6}{1-q^6}+\text{ etc.} \\ & +\frac{qz}{1-qz}+\frac{3q^3z}{1-q^3z}+\frac{5q^5z}{1-q^5z}+\text{ etc.} \\ & +\frac{qz^{-1}}{1-qz^{-1}}+\frac{3q^3z^{-1}}{1-q^3z^{-1}}+\frac{5q^5z^{-1}}{1-q^5z^{-1}}+\text{ etc.}, \\ R = {} & \frac{qz}{1-qz}+\frac{q^3z}{1-q^3z}+\frac{q^5z}{1-q^5z}+\text{ etc.} \\ & -\frac{qz^{-1}}{1-qz^{-1}}-\frac{q^3z^{-1}}{1-q^3z^{-1}}-\frac{q^5z^{-1}}{1-q^5z^{-1}}-\text{ etc.} \end{aligned}$$

Durch die Entwickelung der zur Rechten befindlichen Brüche erhält man:

$$(2.)\qquad \begin{aligned} P &= 2\Sigma\psi(m)q^{2m}+\Sigma\Sigma p q^{pm}(z^m+z^{-m}) \\ &= \Sigma\left\{2\psi(m)q^{2m}+\frac{q^m(1+q^{2m})}{(1-q^{2m})^2}(z^m+z^{-m})\right\},\end{aligned}$$

$$(3.)\qquad \begin{aligned} R &= \Sigma\Sigma q^{pm}(z^m-z^{-m}) \\ &= \Sigma\frac{q^m}{1-q^{2m}}(z^m-z^{-m}),\end{aligned}$$

wo

m alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞,
p alle ungeraden Zahlen von 1 bis ∞,
$\psi(m)$ die Factorensumme von m

bedeutet. Bezeichnet man noch mit

i alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$,

so wird

$$(4.)\qquad S = \Sigma(-1)^i q^{ii} z^i.$$

Substituirt man die Ausdrücke (2.), (3.), (4.) in die Gleichungen

$$(5.)\qquad -q\frac{\partial S}{\partial q} = SP, \qquad -z\frac{\partial S}{\partial z} = SR,$$

welche aus (1.) folgen, so erhält man:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \Sigma(-1)^{i+1}i^2q^{ii}z^i = 2\Sigma\Sigma(-1)^i\psi(m)q^{ii+2m}z^i+\Sigma\Sigma\Sigma(-1)^i p q^{ii+pm}(z^{i+m}+z^{i-m}), \\ \Sigma(-1)^{i+1}iq^{ii}z^i = \Sigma\Sigma\Sigma(-1)^i q^{ii+pm}(z^{i+m}-z^{i-m}). \end{cases}$$

Um in diesen beiden Formeln die allgemeinen Glieder der Summen rechter Hand auf die Form

$$(-1)^i q^{ii} Q_i z^i \quad \text{und} \quad (-1)^i q^{ii} Z_i z^i$$

zu bringen, wo Q_i und Z_i die Gröfse z nicht enthalten sollen, hat man in den dreifachen Summen $i-m$ oder $i+m$ für i zu setzen, wodurch man

$$(7.)\qquad Q = 2\Sigma\psi(m)q^{2m}+\Sigma\Sigma(-1)^m p q^{m(m+p-2i)}+\Sigma\Sigma(-1)^m p q^{m(m+p+2i)},$$

$$(8.)\qquad Z_i = \Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p-2i)}-\Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p+2i)}$$

erhält. Es ist daher, um die Gleichungen (6.) zu beweisen, aus welchen die Gleichungen (5.) oder, was dasselbe ist, die Gleichungen (1.) folgen, nöthig und ausreichend, zu zeigen, *dass die Gröfsen Q_i und Z_i für jeden Werth von i von q unabhängig sind, und respective die einfachen Werthe $-ii$, $-i$ annehmen.* Dieses geschieht durch folgende Betrachtungen.

In den Ausdrücken der Gröfsen Q_i und Z_i bedeutet m jede ganze positive Zahl, die Null nicht inbegriffen; p jede positive ungerade Zahl; i dagegen eine

bestimmte positive oder negative Zahl, die Null mit inbegriffen; es reicht aber hin, wie im Folgenden geschehen soll, i positiv oder gleich Null anzunehmen, da, wenn man $-i$ für i setzt, Q_i unverändert bleibt und Z_i sich in $-Z_i$ verwandelt.

Bedeutet jetzt π alle positiven und negativen ungeraden Zahlen von $-(2i-1)$ bis $2i-1$, so nimmt p alle Werthe der Zahlen $2i+\pi$ und $4i+p$ an. Man hat daher:

$$\begin{aligned} &\Sigma\Sigma(-1)^m p q^{m(m+p-2i)}+\Sigma\Sigma(-1)^m p q^{m(m+p+2i)} \\ &= \Sigma\Sigma(-1)^m(2i+\pi)q^{m(m+\pi)}+\Sigma\Sigma(-1)^m(4i+2p)q^{m(m+p+2i)}, \\ &\Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p-2i)}-\Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p+2i)} \\ &= \Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+\pi)}. \end{aligned}$$

Ich will jetzt die drei Fälle untersuchen, wenn in den Ausdrücken rechts vom Gleichheitszeichen $m+\pi$ negativ, $m+\pi$ positiv und $m+\pi=0$ ist.

1) Wenn $m+\pi$ negativ ist, so kann m auch den Werth $-(m+\pi)$ annehmen, und es werden sich je zwei von den Werthen der Gröfsen

$$(-1)^m(2i+\pi)q^{m(m+\pi)}, \qquad (-1)^m q^{m(m+\pi)},$$

in denen m die beiden Werthe m und $-(m+\pi)$ annimmt, gegenseitig aufheben, da für dieselben $(-1)^m$ entgegengesetzte Werthe erhält, der andere Factor aber ungeändert bleibt.

2) Wenn $m+\pi$ positiv ist, kann man $m+\pi$ für m setzen; da man auch $-\pi$ für π setzen kann, so kann man gleichzeitig $m+\pi$ und $-\pi$ statt m und π setzen. Man erhält so zu jedem Term

$$(-1)^m(2i+\pi)q^{m(m+\pi)}, \qquad (-1)^m q^{m(m+\pi)}$$

den entsprechenden

$$-(-1)^m(2i-\pi)q^{m(m+\pi)}, \qquad -(-1)^m q^{m(m+\pi)}.$$

Es werden sich daher, wenn $m+\pi$ positiv ist, je zwei Terme, die man durch Substitution von $m+\pi$, $-\pi$ für m, π aus einander erhält, in der Summe $\Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+\pi)}$ aufheben, und in der Summe $\Sigma\Sigma(-1)^m(2i+\pi)q^{m(m+\pi)}$ zu *einem* Term

$$(-1)^m 2\pi q^{m(m+\pi)}$$

vereinigen. Da π in dem einen der beiden Terme positiv, in dem andern negativ ist, so darf in dem Term, der beide vereinigt, π nur seine positiven (oder nur seine negativen) Werthe annehmen. In diesem Term ist der *Exponent* von q das Product zweier Factoren, deren Differenz ungerade und *kleiner* als $2i$ ist; der *Zahlcoëfficient* das Doppelte dieser Differenz; das *Vorzeichen* $+$ oder $-$, jenachdem der kleinere Factor gerade oder ungerade ist. Dies ist genau dasselbe Gesetz, welches die Terme der Doppelsumme

$$\Sigma\Sigma(-1)^m(4i+2p)q^{m(m+p+2i)}$$

befolgen, nur dass in letzterer die Differenz der beiden Factoren des Exponenten *gröfser* als $2i$ ist. Man kann daher in dem ersten der beiden vorgelegten Ausdrücke diejenigen Terme der ersten Doppelsumme, für welche $m+\pi$ positiv ist, mit der zweiten Doppelsumme in die eine

$$\Sigma\Sigma(-1)^m 2pq^{m(m+p)}$$

vereinigen.

3) Wenn $m+\pi=0$, erhält man die Terme

$$(-1)^m(2i+\pi), \qquad (-1)^m.$$

Die Werthe, welche in denselben m und π annehmen können, sind

$$m=1,\ \pi=-1;\ m=3,\ \pi=-3;\ \ldots\ m=2i-1,\ \pi=-(2i-1).$$

Hieraus folgt:

$$\Sigma(-1)^m(2i+\pi) = -[2i-1+2i-3+\cdots+1] = -ii,$$
$$\Sigma(-1)^m = -i.$$

Vereinigt man alle bisher gefundenen Resultate, so erhält man:

$$Q_i = -ii+2\Sigma\psi(m)q^{2m}+2\Sigma\Sigma(-1)^m pq^{m(m+p)},$$
$$Z_i = -i.$$

Es ist daher der eine Satz, dass $Z_i=-i$, bewiesen. Um auch $Q_i=-ii$ zu erhalten, was der andere zu beweisende Satz war, mufs noch gezeigt werden, dass

$$-\Sigma\Sigma(-1)^m pq^{m(m+p)} = \Sigma\Sigma(-1)^{m+p}pq^{m(m+p)} = \Sigma\psi(m)q^{2m}$$

ist.

Die vorstehende Formel, welche allein noch zu beweisen übrig blieb, kommt mit dem folgenden Satze überein *):

Wenn man eine gegebene gerade Zahl auf alle mögliche Arten in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine ungerade, der andere gerade ist, so ist die Summe

---

*) Es ist nämlich

$$(-1)^{m+p}p = (-1)^{m+p}(m+p)+(-1)^m m.$$

Wenn die Zahl $m(m+p)$, welche jeden beliebigen positiven geraden Werth haben kann, gegeben ist, und man dieselbe auf irgend eine Art in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine gerade, der andere ungerade ist, so hat man für $m+p$ den gröfseren, für m den kleineren dieser beiden Factoren zu setzen. Es wird daher in der Doppelsumme der Coëfficient von $q^{m(m+p)}$ oder $\Sigma(-1)^{m+p}p$ gleich der Summe aller dieser Factoren von $m(m+p)$, wenn man jeden Factor positiv oder negativ nimmt, je nachdem er gerade oder ungerade ist.

der geraden weniger der Summe der ungeraden Factoren gleich der Factorensumme der Hälfte der gegebenen Zahl.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr leicht. Es sei nämlich die gerade Zahl $2^i N$, wo N ungerade; es sei ν die Factorensumme von N, so ist $(2^i-1)\nu$ die Factorensumme der halben Zahl oder von $2^{i-1}N$. Zerfällt man aber die gegebene Zahl $2^i N$ auf alle mögliche Arten in zwei Factoren, von denen der eine ungerade ist, so ist der andere immer durch 2^i theilbar, also die Summe dieser letztern $2^i\nu$, während ν die Summe der ungeraden Factoren ist. Die Differenz beider ist also $(2^i-1)\nu$ oder die Factorensumme von $2^{i-1}N$, w. z. b. w.

Die vorstehende Untersuchung giebt eine unmittelbare Verification der beiden Gleichungen (6.) oder (5.) oder der Gleichungen:

$$\text{(9.)}\qquad q(z+z^{-1})-4q^4(z^2+z^{-2})+9q^9(z^3+z^{-3})-\text{etc.}$$
$$=\{1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\text{etc.}\}\times\Sigma\left\{2\psi(m)q^{2m}+\frac{q^m(1+q^{2m})}{(1-q^{2m})^2}(z^m+z^{-m})\right\},$$

$$\text{(10.)}\qquad q(z-z^{-1})-2q^4(z^2-z^{-2})+3q^9(z^3-z^{-3})-\text{etc.}$$
$$=\{1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\text{etc.}\}\times\Sigma\frac{q^m}{1-q^{2m}}(z^m-z^{-m}),$$

in welchen m jede beliebige ganze positive Zahl, die Null ausgeschlossen, bedeutet. Da sich aus den Gleichungen (5.),

$$-q\frac{\partial S}{\partial q}=SP, \qquad -z\frac{\partial S}{\partial z}=SR,$$

wenn man für P und R die Ausdrücke

$$-q\frac{\partial \log\Pi}{\partial q}=P, \qquad -z\frac{\partial\log\Pi}{\partial z}=R$$

setzt, die in den *Fundamentis* auf doppelte Art bewiesene Formel $S=\Pi$ ergiebt, so kann das Vorstehende auch als ein dritter Beweis dieser Fundamentalformel betrachtet werden.

Aus der Natur der Reihe S folgt die Gleichung:

$$\text{(11.)}\qquad q\frac{\partial S}{\partial q}=\frac{z\partial.z\frac{\partial S}{\partial z}}{\partial z}.$$

Substituirt man hierin die Gleichungen

$$-q\frac{\partial S}{\partial q}=SP, \qquad -z\frac{\partial S}{\partial z}=SR,$$

so ergiebt sich:

$$SP = \frac{z\partial . SR}{\partial z} = S\frac{z\partial R}{\partial z} + R\frac{z\partial S}{\partial z} = S\frac{z\partial R}{\partial z} - SR^2.$$

Die Gleichung

$$SP = \frac{z\partial . SR}{\partial z}$$

läfst sich mittelst der oben bewiesenen

$$-ii = Q_i = iZ_i$$

verificiren, da man

$$SP = \Sigma(-1)^i q^{ii} Q_i z^i, \qquad SR = \Sigma(-1)^i q^{ii} Z_i z^i$$

hat. Aus der vorstehenden Gleichung ergiebt sich ferner, wenn man durch S dividirt:

$$R^2 = \frac{z\partial R}{\partial z} - P, \tag{12.}$$

das ist, wenn man für P und R die Ausdrücke (2.) und (3.) setzt:

$$\left\{\Sigma \frac{q^m}{1-q^{2m}}(z^m - z^{-m})\right\}^2 = \Sigma\left\{\left(\frac{(m-1)q^m}{1-q^{2m}} - \frac{2q^{3m}}{(1-q^{2m})^2}\right)(z^m + z^{-m}) - 2\psi(m)q^{2m}\right\}.$$

Von dieser Formel findet man eine unmittelbare Verification in den *Fundamentis* S. 136*). Es ist aber von besonderem Interesse, alle solche Formeln der Theorie der elliptischen Functionen hervorzuheben, welche sich auf Identitäten zurückführen lassen, die unmittelbar, d. i. ohne Hülfe anderweitiger analytischer Sätze eingesehen werden können, indem man dadurch ein Mittel erhält, neue Methoden zu gewinnen. So hat der unmittelbare Beweis der Formel

$$\left\{\frac{\sqrt{q}(z-z^{-1})}{1-q} + \frac{\sqrt{q^3}(z^3-z^{-3})}{1-q^3} + \frac{\sqrt{q^5}(z^5-z^{-5})}{1-q^5} + \text{etc.}\right\}^2$$
$$= \frac{q(z-z^{-1})^2}{1-q^2} + \frac{2q^2(z^2-z^{-2})^2}{1-q^4} + \frac{3q^3(z^3-z^{-3})^2}{1-q^6} + \text{etc.},$$

welchen ich in den *Fundamentis* S. 110**) gegeben habe, zu einer neuen arithmetischen Methode geführt, aus den für die Zusammensetzungen der Zahlen aus *zwei* Quadraten bekannten Sätzen sowohl den bekannten Satz über die Zusammensetzbarkeit aller Zahlen aus *vier* Quadraten als auch neue Sätze über die *Anzahl* der Zusammensetzungen einer Zahl aus vier Quadraten abzuleiten.

*) Band I. dieser Ausgabe, p. 190.

**) Band I. dieser Ausgabe, p. 166.

ÜBER

DIE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICUNG,

WELCHER DIE ZÄHLER UND NENNER DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN GENÜGE LEISTEN.

VON

PROFESSOR DR. C. G. J. JACOBI
ZU BERLIN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 36. p. 80—88.

ÜBER DIE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNG, WELCHER DIE ZÄHLER UND NENNER DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN GENÜGE LEISTEN.

Es sei

$$k'k' = 1-k^2, \quad \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta$$

und

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} = u, \qquad \int_0^{\varphi} \Delta d\varphi = E(u),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta} = K, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta d\varphi = E,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'k'\sin^2\varphi}} = K', \qquad e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q,$$

$$\Theta = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\,\Delta e^{\int_0^u E(u)du - \frac{1}{2}\frac{Eu^2}{K}},$$

endlich

$$u = \frac{2Kx}{\pi}.$$

In den »*Fundamentis nov. theor. funct. elliptic.*« habe ich gezeigt, dass die elliptischen Functionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, Δ Brüche sind, deren Zähler und Nenner sich durch die Transcendente Θ darstellen lassen, welche selber sich in die Reihe

$$1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \text{etc.} = \Theta$$

entwickeln läſst. Jeder Term dieser Reihe und daher die ganze Reihe selbst genügt der partiellen Differentialgleichung

$$-4q\frac{\partial\Theta}{\partial q} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}.$$

Diese partielle Differentialgleichung muss sich, ohne dass man die Reihenentwickelung von Θ kennt, unmitelbar auch aus den aufgestellten Definitionen ergeben. Es kann die Frage entstehen, ob man nicht zu solchen einfachen partiellen Differentialgleichungen durch Einführung analoger Gröfsen auch für complicirtere Transcendenten gelangen könne. Ich werde daher, um aus den obigen Definitionen die partielle Differentialgleichung, welcher θ Genüge leistet, abzuleiten, statt von dem Integral u von dem allgemeineren Integral

$$\int t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}\,dt$$

ausgehen, welches sich für

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{2}, \quad \gamma = 1, \quad r = k^2, \quad t = \sin^2\varphi$$

auf $2u$ reducirt, und nur schliefslich, wenn die weitere Fortführung der Rechnung es erfordert, für α, β, γ die angegebenen besondern Werthe setzen.

Es sei für Werthe von α und β, welche zwischen 0 und 1 liegen, und für $\gamma > \beta$,

$$Y = \int_0^t t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}\,dt, \quad y = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}\,dt,$$

wo y die von Euler, Pfaff, Gauss, Kummer und anderen vielfach behandelte Transcendente ist. Man hat für die beiden Transcendenten Y und y die Differentialgleichungen:

$$(r-rr)Y'' + [\gamma-(\alpha+\beta+1)r]Y' - \alpha\beta Y = -\alpha t^{\beta}(1-t)^{\gamma-\beta}(1-rt)^{-\alpha-1},$$
$$(r-rr)y'' + [\gamma-(\alpha+\beta+1)r]y' - \alpha\beta y = 0,$$

in denen, wie auch im Folgenden, durch die obern Indices die nach r für ein constantes t genommenen Differentialquotienten angedeutet werden. Setzt man

$$R = r^{\gamma}(1-r)^{\alpha+\beta+1-\gamma}, \quad T = t^{\beta}(1-t)^{\gamma-\beta},$$

so kann man diese Gleichungen auch so darstellen:

$$RY'' + R'Y' - \alpha\beta\frac{YR}{r-rr} = -\alpha\frac{TR(1-rt)^{-\alpha-1}}{r-rr},$$
$$Ry'' + R'y' - \alpha\beta\frac{yR}{r-rr} = 0.$$

Nennt man z ein zweites Integral der Gleichung, welcher y genügt, so hat man auch

$$Rz'' + R'z' - \alpha\beta\frac{zR}{r-rr} = 0.$$

Ein solches Integral ist

$$z = \int_0^{\frac{1}{r}} t^{\beta-1}(t-1)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}\,dt = r_1^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}(1-r_1 t)^{\alpha-\gamma}\,dt,$$

wo $r_1 = 1-r$. Aus den vorstehenden Differentialgleichungen folgt, wenn man

$$\frac{Y}{y} = v, \quad \frac{z}{y} = l, \quad Z = \int\frac{(1-rt)^{-\alpha-1}yR\,dr}{r-rr}$$

setzt, und c eine Constante bedeutet,

$$Rv' = -\alpha\frac{TZ}{yy}, \quad Rl' = \frac{c}{yy} \text{ oder } \frac{c\,dr}{R} = yy\,dl.$$

Wenn man statt r die Gröfse l als unabhängige Variable einführt, so wird das vollständige Differential von v durch die Gleichung

$$dv = \frac{1}{y}\frac{\partial Y}{\partial t}dt + v'dr = \frac{T}{y}(1-rt)^{-\alpha}\frac{dt}{t-tt} - \frac{\alpha}{c}TZ\,dl$$

gegeben. Betrachtet man v und l als die beiden unabhängigen Variabeln, und unterscheidet die unter dieser Annahme abgeleiteten partiellen Differentiale durch Klammern, so geben die vorstehenden Formeln:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right) = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial t}} = \frac{y(t-tt)(1-rt)^{\alpha}}{T},$$
$$\left(\frac{\partial t}{\partial l}\right) = \frac{\alpha}{c}\cdot y(t-tt)(1-rt)^{\alpha}.Z = \frac{\alpha TZ}{c}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right),$$
$$\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right) = \frac{1}{c}yyR.$$

Ist eine Function V in r und t gegeben, und man ersetzt die Variabeln r und t durch l und v, so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \frac{\partial V}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right),$$

und zufolge der vorstehenden Formeln das nach l genommene Differential

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) = \frac{\partial V}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial l}\right) + \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)$$
$$= \frac{\alpha TZ}{c}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{yyR}{c}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Nimmt man für V die Function

$$V = \tfrac{1}{2}\alpha TZ = -\tfrac{1}{2}Ryyv' = \tfrac{1}{2}R(y'Y - yY'),$$

so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial.VV}{\partial v}\right) + \frac{\alpha yyTR}{2c}\frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial.VV}{\partial v}\right) + \frac{\alpha}{2c}\frac{y^3RR}{r-rr}T(1-rt)^{-\alpha-1}.$$

Es ist ferner

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right) = y, \qquad \left(\frac{\partial Y'}{\partial v}\right) = \frac{\alpha t}{1-rt}\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right) = \frac{\alpha t y}{1-rt},$$

woraus

$$\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}yR\left(y' - \frac{\alpha t y}{1-rt}\right)$$

folgt, und hieraus

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right) = \frac{\alpha y^2 R}{2(1-rt)^2}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}\alpha y^3 R\,\frac{(t-tt)(1-rt)^{\alpha-2}}{T}.$$

Durch Combination aller dieser Formeln ergiebt sich

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial.VV}{dv}\right) = -\frac{1}{c}\,\frac{R}{r-rr}\,\frac{TT}{t-tt}\,(1-rt)^{-2\alpha+1}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right).$$

Man hat daher, wenn man $l = c\lambda$ setzt, in Bezug auf die hier betrachtete allgemeinere Transcendente Y den folgenden Satz:

Es sei

$$Y = \int_0^t t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}\,dt,$$

$$y = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}\,dt,$$

$$\lambda = \int r^{-\gamma}(1-r)^{\gamma-\alpha-\beta-1}y^{-2}\,\partial r, \qquad v = \frac{Y}{y},$$

$$V = \tfrac{1}{2}r^{\gamma}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma+1}\left(Y\frac{\partial y}{\partial r} - y\frac{\partial Y}{\partial r}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\alpha t^{\beta}(1-t)^{\gamma-\beta}\int r^{\gamma-1}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}(1-rt)^{-\alpha-1}\,y\,\partial r,$$

so genügt V, als Function von v und λ betrachtet, der partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \lambda} - 2V\frac{\partial V}{\partial v} + r^{\gamma-1}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}t^{2\beta-1}(1-t)^{2\gamma-2\beta-1}(1-rt)^{-2\alpha+1}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}.$$

In dieser Gleichung sind die Gröfsen t und r aufser in λ und v noch explicite enthalten, aber nur in einem einzigen in $\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}$ multiplicirten Factor. Ich will jetzt zu dem besondern Falle der elliptischen Integrale übergehen, in welchem dieser Factor der Einheit gleich wird.

Setzt man nämlich in den vorstehenden Formeln

$$\gamma = 1, \qquad \alpha = \beta = \tfrac{1}{2},$$

so wird

$$R = r - rr, \qquad TT = t - tt, \qquad (1-rt)^{-2\alpha+1} = 1,$$

und es verwandelt sich daher die zuletzt gefundene Gleichung in die folgende:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial.VV}{\partial v}\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right).$$

Man setze

$$\int V dv = W,$$

so giebt die Integration dieser Gleichung nach v

$$c\left(\frac{\partial W}{\partial l}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right).$$

Wenn das Integral, durch welches W definirt wird, von 0 an genommen wird, so mufs man zu demselben solche Functionen von l oder r addiren, dass für $v = 0$ oder, was dasselbe ist, für $t = 0$ die vorstehende Gleichung erfüllt wird. Für $t = 0$ verschwindet Y und daher auch Y', und es wird daher

$$\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right) = V = 0;$$

ferner erhält man aus dem oben angegebenen Werthe von $\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)$ für $t = 0$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}Ryy'.$$

Setzt man daher

$$\int_0^v V dv + W^0 = W,$$

so mufs W^0 die Gleichung

$$c\left(\frac{\partial W^0}{\partial l}\right) = yyR\,\frac{\partial W^0}{\partial r} = -\tfrac{1}{2}Ryy'$$

erfüllen, woraus

$$W^0 = -\log\sqrt{y}$$

folgt. Setzt man endlich

$$\Omega = e^{-W} = \sqrt{y}\,e^{-\int_0^v V dv},$$

so erhält die partielle Differentialgleichung, zu welcher man gelangt war, die einfache Form:

$$-c\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right) = \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}\right).$$

Es ist aber in dem hier betrachteten besondern Falle

$$Y = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-rt)}}, \qquad y = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-rt)}},$$

und daher, wenn man

$$r = k^2, \qquad t = \sin^2\varphi$$

setzt, und den Gröſsen u, K, K' etc. die ihnen oben beigelegte Bedeutung giebt,

$$Y = 2u, \qquad v = \frac{u}{K} = \frac{2x}{\pi}, \qquad R = k^2k'^2.$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher K genügt, hat auch die Lösung K'; man kann daher

$$z = 2K'$$

setzen, woraus

$$l = \frac{z}{y} = \frac{K'}{K} = -\frac{1}{\pi}\log q$$

folgt. Die Constante c hat man aus der Gleichung $\frac{cdr}{R} = y^2 dl$ oder

$$c\frac{d.k^2}{k^2k'^2} = -\frac{4}{\pi}KKd\log q$$

zu bestimmen. Für unendlich kleine Werthe von k wird nach einem Satze Eulers in den Opusc. V. A.

$$\frac{\pi K'}{2K} = \log\frac{4}{k}, \text{ also } k^2 = 16q, \text{ und daher}$$

$$c = -\pi.$$

Substituirt man die Werthe $l = -\frac{1}{\pi}\log q$, $v = \frac{2x}{\pi}$, $c = -\pi$ in die für Ω gefundene partielle Differentialgleichung, so wird dieselbe:

$$-4q\frac{\partial\Omega}{\partial q} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}.$$

Ich will jetzt zeigen, dass die Function Ω von der oben mit Θ bezeichneten Transcendente nur um einen constanten Factor verschieden ist.

Aus der Formel

$$\tfrac{1}{2}Y = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

ergiebt sich, wenn man nach $r = k^2$ differentiirt,

$$Y' = \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}}.$$

Es ist aber

$$k^2 d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \left(-\frac{k'k'}{\Delta^3} + \Delta\right)d\varphi,$$

und daher

$$k^2Y' = \int_0^\varphi \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{\Delta}\right)d\varphi = \frac{1}{k'k'}E(u) - u - \frac{k^2}{k'k'}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}.$$

Hieraus folgt, wenn man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ setzt,

$$k^2y' = \frac{1}{k'k'}E - K,$$

und daher

$$\tfrac{1}{2}k^2(y'Y - yY') = \frac{-1}{k'k'}(KE(u) - E.u) + \frac{k^2K}{k'k'}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}.$$

Man hat daher nach einander die Formeln:

$$-V = \frac{-1}{2}k^2k'^2(y'Y - yY') = KE(u) - E.u - \frac{k^2K\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta},$$

$$-\int_0^v Vdv = \frac{-1}{K}\int_0^u Vdu = \int_0^u E(u)du - \tfrac{1}{2}\frac{E.u^2}{K} + \log\Delta,$$

$$\Omega = \sqrt{2K}e^{-\int_0^v Vdv} = \sqrt{2K}\,\Delta\, e^{\int_0^u E(u)du - \frac{Eu^2}{2K}} = \sqrt{\pi}.\Theta,$$

w. z. b. w.

Die Transcendente $\Theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Omega$ genügt derselben partiellen Differentialgleichung wie Ω, oder der Gleichung

$$-4q\frac{\partial\Theta}{\partial q} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2},$$

welche sich aus der Reihenentwickelung von Θ unmittelbar ergab. Umgekehrt kann man mittelst dieser partiellen Differentialgleichung die Reihenentwickelung von Θ finden. Wenn a positiv ist, wird für $t = \frac{1}{r}$ sowohl V als $\int Vdv$ unendlich und demgemäfs Θ verschwinden. Für $t = \frac{1}{r}$ erhält man ferner, wenn man für z den oben angegebenen Werth setzt,

$$Y = y+(-1)^{\gamma-\beta-1}z, \qquad v = 1+(-1)^{\gamma-\beta-1}l,$$

und daher

$$u = K+K'\sqrt{-1}, \qquad x = \frac{\pi u}{2K} = \tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}\log q\sqrt{-1}.$$

Vermöge der partiellen Differentialgleichung erhält die für Θ anzunehmende Reihe die Form:

$$A+2A_1q\cos 2x+2A_2q^4\cos 4x+2A_3q^9\cos 6x+ \text{ etc.},$$

wo A, A_1, A_2, etc. Zahlencoëfficienten sind, und es giebt die Bedingung, dass diese Reihe für $x = \frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\log q\sqrt{-1}$ verschwinden soll, die Werthe

$$A = A_1 = A_2 \cdots = 1.$$

Die hierbei gemachte Voraussetzung, dass eine Entwickelung von Θ nach den Cosinus der geraden Vielfachen von x für jeden reellen oder imaginären Werth von x gültig bleibt, rechtfertigt sich durch den Erfolg.

Die vorstehenden Betrachtungen lehren, dass man aus der Definition der Function Θ durch geschlossene Integralausdrücke die merkwürdige Reihenentwickelung dieser Transcendenten mittelst allgemeiner Methoden, ohne einen der Theorie der elliptischen Functionen eigenthümlichen Satz zu kennen, ableiten kann. Die weitere Verfolgung dieser Betrachtungen und die Untersuchung, wie weit sie auf die allgemeinere Transcendente Y Anwendung finden, behalte ich einer andern Gelegenheit vor.

October 1847.

ÜBER

DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG,

WELCHER DIE REIHEN

$$1\pm 2q+2q^4\pm 2q^9+ \text{ etc.}, \qquad 2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+ \text{ etc.}$$

GENÜGE LEISTEN.

VON

PROFESSOR DR. C. G. J. JACOBI
ZU BERLIN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 36. p. 97—112.

ÜBER DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG, WELCHER DIE REIHEN $1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \text{etc.}, \quad 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \text{etc.}$ GENÜGE LEISTEN.

Die Aufgabe, eine gegebene Function durch eine Differentialgleichung zu definiren, ist im Allgemeinen eine unbestimmte, weil man mittelst der Gleichung, welche zwischen der Function und der unabhängigen Variablen stattfindet, die Differentialgleichung auf unendlich viele Arten abändern kann. Aber diese Aufgabe wird bestimmt, wenn die Function keine algebraische ist, die Differentialgleichung aber, wie stillschweigend vorausgesetzt zu werden pflegt, eine algebraische Gleichung zwischen der unabhängigen Variablen, der Function und ihren Differentialquotienten sein soll. Unter allen Differentialgleichungen dieser Art, welchen dieselbe Function Genüge leistet, wird eine die niedrigste Ordnung haben und die übrigen durch Differentiation ergeben. Von dieser soll allein im Folgenden die Rede sein, wenn man von der Differentialgleichung spricht, welcher eine Function Genüge leistet. Macht man diese Gleichung rational und befreit den Ausdruck, welcher $= 0$ wird, von Brüchen, so bestimmt die Dimension, auf welche der höchste Differentialquotient in diesem Ausdrucke steigt, den *Grad* der Differentialgleichung.

Es giebt aber im Allgemeinen kein Mittel, um zu erkennen, ob es eine solche endliche Differentialgleichung zwischen der Function und der unabhängigen Variablen giebt, oder wenn man irgend woher wüſste, dass es eine solche giebt, um dieselbe aufzufinden. Nur wenn die Function einer *linearen* Differentialgleichung Genüge leistet, hat man einige allgemeine Vorschriften, dieses zu erkennen und die Differentialgleichung selber zu bilden. Wenn man z. B. die Reihe

$$y = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \text{etc.}$$

betrachtet, deren Bildungsgesetz so einfach ist, so giebt es doch trotz dieser Einfachheit kein Mittel, um *aus der Natur dieser Reihe selber* zu erkennen, ob sie durch eine endliche Differentialgleichung, d. h. durch eine algebraische Gleichung zwischen ihr selbst, der unabhängigen Variablen und ihren Differentialquotienten definirt werden kann. Und wenn es möglich ist, mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen eine solche Differentialgleichung zu finden, wie complicirt und indirect sind die dazu nöthigen Betrachtungen! Man mufs zuerst zeigen, dass man die beiden Gröfsen y und q durch eine dritte Variable k mittelst der transcendenten Gleichungen

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}},$$

$$\log\frac{1}{q} = \frac{\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + k^2\sin^2\varphi}}}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}$$

ausdrücken kann. Wie sehr man auch bei der Mannigfaltigkeit der Methoden, welche die Theorie der elliptischen Functionen darbietet, den Beweis dieses merkwürdigen Theorems abkürzen mag, so wird derselbe doch immer eine lange Kette subtiler Schlüsse erfordern. Man zeigt dann, dass der Zähler sowohl wie der Nenner des für $\log\frac{1}{q}$ angegebenen Ausdrucks einer und derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher k die unabhängige Variable ist, genügen. Durch diesen Umstand wird es möglich, den Differentialquotienten $\frac{\partial \log q}{\partial k}$ durch y und k auszudrücken, wodurch es ferner möglich wird, in der zwischen y und k stattfindenden Differentialgleichung zweiter Ordnung die nach k genommenen Differentialquotienten von y durch andere nach $\log q$ genommene zu ersetzen. Man gewinnt hierdurch eine Gleichung, aus welcher man k durch y und seine nach $\log q$ genommenen Differentialquotienten bestimmen kann. Durch eine neue Differentiation endlich erhält man mittelst Elimination von k eine blofs zwischen y und seinen nach q genommenen Differentialquotienten stattfindende Gleichung dritter Ordnung und zweiten Grades, welche die verlangte Differentialgleichung ist. Diese Differentialgleichung steigt in Bezug auf y und seine Differentialquotienten bis auf die *vierzehnte Dimension*,

und sie dürfte daher trotz aller unserer Kenntnisse von den quadratischen Formen durch die unmittelbare Substitution der Reihe schwer zu beweisen sein. Ich will jetzt die etwas beschwerliche Rechnung näher angeben, durch welche man zu dieser Differentialgleichung gelangen kann, deren Complication in einem merkwürdigen Gegensatz zu der Einfachheit der Reihe steht, welche ihr genügt.

Die Substitution

$$\cos\psi = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta}, \qquad \sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta}, \qquad \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} = \frac{k'}{\Delta},$$

in welcher

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \qquad \Delta = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

ist, giebt

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \frac{d\varphi}{\Delta},$$

und daher die Gleichungen

$$(1.) \qquad \begin{cases} \int \Delta\, d\varphi = k'^2 \int \frac{d\varphi}{\Delta^3}, \\ \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}, \\ \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = k'^2 \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}, \end{cases}$$

wo die Integrale, so wie auch im Folgenden immer, von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ ausgedehnt gedacht werden. Bezeichnet man das ganze Integral der ersten Gattung mit

$$K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

so hat man

$$kK = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{k^2} - \sin^2\varphi}}, \qquad k'K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k'^2} + \sin^2\varphi}}.$$

Die Differentiation dieser drei Integrale nach k^2 ergiebt, wenn man die Formeln (1.) zu Hülfe nimmt, die folgenden Gleichungen:

$$\frac{dK}{d(k^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2k'^2}\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{d(kK)}{d(k^2)} = \frac{1}{2k}\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2kk'^2}\int \Delta\, d\varphi,$$

$$\frac{d(k'K)}{d(k^2)} = -\frac{1}{2k'}\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} = -\frac{1}{2k'}\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}.$$

Die letztere erhält man leicht, wenn man bemerkt, dass $d(k^2) = -d(k'^2)$.

Es ist ferner, wenn man wieder die Gleichungen (1.) zu Hülfe ruft,

$$\frac{d\int \frac{k^2 \cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}}{d(k^2)} = \frac{d\int \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\left(\frac{1}{\Delta} - \Delta\right) d\varphi}{d(k^2)} = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{\cos^2\varphi}{\Delta} + \frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\right) d\varphi = \tfrac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{d\int \frac{1}{k}\Delta\, d\varphi}{d(k^2)} = \frac{d\int \sqrt{\frac{1}{k^2} - \sin^2\varphi}\, d\varphi}{d(k^2)} = -\frac{1}{2k^3}\int \frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{d\int \frac{k^2}{k'}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}}{d(k^2)} = \frac{d\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k'^2} + \sin^2\varphi}}}{d(k'^2)} - \frac{d\int \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k'^2} + \sin^2\varphi}\, d\varphi}{d(k'^2)}$$

$$= \frac{1}{2k'^3}\int\left\{\frac{k'^2 \sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} + \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}\right\} = \frac{1}{2k'^3}\int \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Setzt man daher

$$K = \tfrac{1}{2}\pi A, \qquad kK = \tfrac{1}{2}\pi A_1, \qquad k'K = \tfrac{1}{2}\pi A_2,$$

ferner

$$k^2\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\pi B,$$
$$\frac{1}{k}\int \Delta\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi B_1,$$
$$\frac{k^2}{k'}\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\pi B_2,$$

so wird:

$$(2.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dA}{d(k^2)} = \dfrac{1}{2k^2k'^2} B, & \dfrac{dB}{d(k^2)} = \tfrac{1}{2} A; \\[2ex] \dfrac{dA_1}{d(k^2)} = \dfrac{1}{2k'^2} B_1, & \dfrac{dB_1}{d(k^2)} = -\dfrac{1}{2k^4} A_1; \\[2ex] \dfrac{dA_2}{d(k^2)} = -\dfrac{1}{2k^2} B_2, & \dfrac{dB_2}{d(k^2)} = \dfrac{1}{2k'^4} A_2. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dass A der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d\left(k^2k'^2\frac{dA}{d(k^2)}\right)}{d(k^2)} = \tfrac{1}{4}A,$$

oder, wenn man der Kürze halber

$$\frac{d(k^2)}{k^2k'^2} = d\log\frac{k^2}{k'^2} = dl$$

setzt, der Differentialgleichung

$$\frac{d^2A}{dl^2} = \tfrac{1}{4}k^2k'^2 A$$

Genüge leistet. Diese Differentialgleichung bleibt unverändert, wenn man k in k' verändert. Es ist daher auch

$$K' = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}}$$

ein Integral derselben. Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{d^2A}{dl^2} = \tfrac{1}{4}k^2k'^2 A, \qquad \frac{d^2K'}{dl^2} = \tfrac{1}{4}k^2k'^2 K'$$

folgt

$$A\frac{d^2K'}{dl^2} - K'\frac{d^2A}{dl^2} = 0,$$

und durch Integration

$$A\frac{dK'}{dl} - K'\frac{dA}{dl} = \alpha,$$

wo α eine Constante ist. Diese Gleichung kann man auch so darstellen:

$$\frac{d\left(\frac{K'}{A}\right)}{dl} = \frac{\alpha}{A^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d\left(\frac{K'}{A}\right)}{d(k^2)} = \frac{\alpha}{k^2k'^2A^2}.$$

Der Bruch

$$\frac{1}{k'^2A^2} = \frac{\pi^2}{4k'^2K^2}$$

läſst sich für kleine Werthe von k in eine nach den ganzen positiven Potenzen von k^2 fortschreitende, mit der Einheit beginnende Reihe entwickeln, woraus durch Integration folgt, dass der Werth von

$$\frac{K'}{A} = \frac{\pi K'}{2K}$$

für kleine Werthe von k bis auf Gröſsen von der Ordnung k^2 genau

$$\alpha\log k^2 + \beta$$

ist, wo β eine neue Constante bedeutet. Die Werthe von α und β hat Euler in den »*Opusculis varii argumenti*« $\alpha = -\tfrac{1}{2}$, $\beta = \log 4$ gefunden. Substituirt man den Werth von α, und setzt

$$\log q = -\frac{\pi K'}{K} = -2\frac{K'}{A},$$

so erhält man

$$(3.)\qquad \frac{d\log q}{d(k^2)} = \frac{1}{k^2 k'^2 A^2} = \frac{1}{k'^2 A_1^2} = \frac{1}{k^2 A_2^2},$$

oder auch

$$(3^*.)\qquad \frac{d\log\frac{k^2}{k'^2}}{d\log q} = A^2, \qquad \frac{d\log\frac{1}{k'^2}}{d\log q} = A_1^2, \qquad \frac{d\log k^2}{d\log q} = A_2^2.$$

Wenn man mittelst der Formeln (3.) statt des Differentials $d(k^2)$ das Differential $d\log q$ einführt, so werden die Formeln (2.):

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dA}{d\log q} = \tfrac{1}{2}BA^2, & \dfrac{dB}{d\log q} = \tfrac{1}{2}k^2k'^2A^3, \\ \dfrac{dA_1}{d\log q} = \tfrac{1}{2}B_1A_1^2, & \dfrac{dB_1}{d\log q} = -\tfrac{1}{2}\dfrac{k'^2}{k^4}A_1^3, \\ \dfrac{dA_2}{d\log q} = -\tfrac{1}{2}B_2A_2^2, & \dfrac{dB_2}{d\log q} = \tfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{k'^4}A_2^3. \end{cases}$$

Man hat daher, wenn man

$$A = \frac{1}{C}, \quad A_1 = \frac{1}{C_1}, \quad A_2 = \frac{1}{C_2}$$

setzt, und die nach $\log q$ genommenen Differentiale der Functionen C mit oberen Indices bezeichnet,

$$(5.)\qquad 4C^3C'' = -k^2k'^2, \qquad 4C_1^3C_1'' = \frac{k'^2}{k^4}, \qquad 4C_2^3C_2'' = \frac{k^2}{k'^4}.$$

Ich bemerke jetzt, dass, wenn man in dem Ausdruck

$$\frac{\sqrt{4h+1}-1}{\sqrt{4h+1}+1}$$

für h die drei vorstehenden Gröfsen

$$-k^2k'^2, \qquad \frac{k'^2}{k^4}, \quad \frac{k^2}{k'^4}$$

setzt und bei der zweiten die Wurzel negativ nimmt, die drei Gröfsen

$$-\frac{k^2}{k'^2}, \qquad \frac{1}{k'^2}, \qquad k^2$$

erhalten werden. Dies sind zufolge (3*.) die Gröfsen, deren Logarithmen differentiirt die Differentiale $A^2 d\log q$, $A_1^2 d\log q$, $A_2^2 d\log q$ oder

$$\frac{d\log q}{C^2}, \qquad \frac{d\log q}{C_1^2}, \qquad \frac{d\log q}{C_2^2}$$

geben. Es ist aber

$$d\log\frac{\sqrt{4h+1}-1}{\sqrt{4h+1}+1} = \frac{dh}{h\sqrt{4h+1}} = \frac{d\log h}{\sqrt{4h+1}}.$$

Substituirt man daher in $\frac{d\log h}{\sqrt{4h+1}}$ für h die drei Werthe (5.), so erhält man

$$\frac{d\log q}{C^2}, \qquad \frac{d\log q}{C_1^2}, \qquad \frac{d\log q}{C_2^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass für alle drei Gröfsen C, C_1, C_2 dieselbe Differentialgleichung

$$(6.)\qquad d\log(C^3C'') = \sqrt{16C^3C''+1}\cdot\frac{d\log q}{C^2}$$

stattfindet, nur dass man, wenn man C_1 für C setzt, die Quadratwurzel negativ zu nehmen hat. Macht man diese Gleichung rational, so ergiebt sich für alle drei Functionen

$$C = \frac{\pi}{2K}, \qquad C_1 = \frac{\pi}{2kK}, \qquad C_2 = \frac{\pi}{2k'K}$$

dieselbe Differentialgleichung dritter Ordnung und zweiten Grades:

$$(7.)\qquad C^2(CC''' + 3C'C'')^2 = C''^2(16C^3C''+1).$$

Wenn man

$$C = y^{-2}$$

setzt, und die nach $\log q$ genommenen Differentialquotienten von y wieder durch obere Indices bezeichnet, so erhält man nach einander

$$C' = -2y^{-3}y', \quad C'' = -2y^{-3}y'' + 6y^{-4}y'^2, \quad C''' = -2y^{-3}y''' + 18y^{-4}y'y'' - 24y^{-5}y'^3,$$

und daher

$$CC''' + 3C'C'' = -2y^{-5}y''' + 30y^{-6}y'y'' - 60y^{-7}y'^3.$$

Es verwandelt sich daher die Differentialgleichung (7.), wenn man noch mit $\frac{1}{4}y^{18}$ multiplicirt, in die folgende Differentialgleichung zwischen y und q:

$$(8.)\qquad (y^2y''' - 15yy'y'' + 30y'^3)^2 + 32(yy'' - 3y'^2)^3 = y^{10}(yy'' - 3y'^2)^2.$$

In dieser Gleichung kann y, den drei Werthen von C entsprechend, jede der drei Functionen $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$ bedeuten. Wenn man daher die aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten, nach den Potenzen von q fortschreitenden Reihenentwickelungen dieser Functionen einführt, so erhält man das folgende Theorem:

Theorem.

Es bedeute y eine der drei Reihen

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + 2q^{16} \pm 2q^{25} + \text{ etc.},$$
$$2\{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \sqrt[4]{q^{49}} + \text{ etc.}\},$$

so findet zwischen y und q die folgende Differentialgleichung dritter Ordnung und zweiten Grades statt, in welcher $d\log q$ als das constante Differential angenommen ist:

$$\{y^2 d^3y - 15y\,dy\,d^2y + 30\,dy^3\}^2 + 32\{y\,d^2y - 3\,dy^2\}^3 = y^{10}\{y\,d^2y - 3\,dy^2\}^2 d\log q)^2.$$

Die beiden der vorstehenden Differentialgleichung genügenden Reihen,

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

$$1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

werden aus einander durch Veränderung von q in $-q$ erhalten. Allgemeiner kann man, da die Differentialgleichung (8.) nur die nach $\log q$ genommenen Differentiale und nicht q selber enthält, aus jedem für y gefundenen Ausdruck einen andern, welcher derselben Differentialgleichung Genüge leistet, erhalten, wenn man αq statt q setzt, wo α eine beliebige Constante bedeutet. Wenn man in der Reihe

$$2\sqrt[4]{q}\{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \text{ etc.}\} = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},$$

welche ebenfalls der Differentialgleichung (8.) genügt, die Variable q in $-q$ verwandelt, oder $\alpha + -1$ setzt, so wird diese Reihe mit einer 8^{ten} Wurzel der Einheit multiplicirt. Die Differentialgleichung (8.) mufs daher so beschaffen sein, dass sie unverändert bleibt, wenn man y mit einer 8^{ten} Wurzel der Einheit multiplicirt, oder es müssen in den verschiedenen Termen der Glei-

chung (8.) die Unterschiede ihrer Dimensionen in Bezug auf y und seine Differentialquotienten durch 8 theilbar sein. Dies ist auch in der That der Fall, da in Bezug auf y und seine Differentialquotienten die Terme links vom Gleichheitszeichen in der Gleichung (8.) von der 6^{ten}, die Terme rechts vom Gleichheitszeichen von der 14^{ten} Dimension sind.

Die Gleichung

$$d\log q = \frac{d(k^2)}{k^2 k'^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2} = \frac{d(k^2)}{k^2 k'^2 y^4}$$

bleibt unverändert, wenn man q in q^m und gleichzeitig y in $\frac{y}{\sqrt[4]{m}}$ (oder C in $\sqrt{m}\,C$) ändert. Hieraus folgt, *dass aus jeder gegebenen Function, welche der Differentialgleichung* (8.) *Genüge leistet, eine andere erhalten wird, welche derselben Differentialgleichung genügt, wenn man die gegebene Function mit $\sqrt[4]{m}$ multiplicirt und gleichzeitig q in q^m ändert.* Es mufs daher in jedem Term der Differentialgleichung (8.) die Summe der Ordnungen der einzelnen Differentialquotienten weniger dem 4^{ten} Theile seiner in Bezug auf y und die Differentialquotienten von y gemessenen Dimension die gleiche Zahl geben, oder in je zwei verschiedenen Termen die Differenz der Summe der Ordnungen der Differentialquotienten gleich dem vierten Theile des Unterschiedes ihrer Dimensionen sein. In der That ist in (8.) der 4^{te} Theil des Unterschiedes der Dimensionen der Terme rechts und links vom Gleichheitszeichen $\frac{1}{4}(14-6) = 2$ und der Unterschied der Summe der Ordnungen ihrer Differentialquotienten ebenfalls $6 - 4 = 2$.

In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird gezeigt, dass durch die Aenderung von q in q^m, wenn m eine beliebige rationale Zahl ist, das ganze elliptische Integral K und daher auch $C = \frac{\pi}{2K}$ mit einem Factor, welcher eine algebraische Function von k ist, multiplicirt wird. Bedeutet daher g einen solchen Factor, so muss dem Vorhergehenden zufolge der Differentialgleichung (7.), welcher C genügt, auch die Function $\frac{gC}{\sqrt{m}}$ genügen. Es giebt daher unendlich viele Fälle, in welchen zwei Integrale der Differentialgleichung (7.) aus einander durch Multiplication mit einer algebraischen Function von k erhalten werden. Wenn allgemein f einen Factor von der Beschaffenheit bedeutet, dass $fC = \frac{\pi f}{2K}$ wieder ein Integral der Differentialgleichung (7.)

wird, welcher C genügt, so findet man die zwischen diesem Factor f und dem Modul k bestehende Differentialgleichung auf folgende Art.

Die zwischen den Gröfsen C und q stattfindende Differentialgleichung (7.) wurde durch Elimination von $k^2 k'^2$ aus den Gleichungen

$$4C^3 C'' = -k^2 k'^2, \qquad \frac{d \log(-k^2 k'^2)}{\sqrt{1-4k^2 k'^2}} = \frac{d \log q}{C^2}$$

abgeleitet. Die letztere Gleichung folgt aus der Gleichung $d \log \frac{k^2}{k'^2} = dl = \frac{d \log q}{C^2}$. Diese giebt für eine beliebige Function u:

$$C^2 u' = C^2 \frac{du}{d \log q} = \frac{du}{dl}.$$

Setzt man

$$D = f.C$$

und bezieht die oberen Indices von D und f, ebenso wie die von y, C und u auf die Differentiation nach $\log q$, so wird

$$D'' = fC'' + 2f'C' + f''C.$$

Man hat daher

$$4D^3 D'' = -f^4 k^2 k'^2 + 4f^3 C^2 \frac{d(C^2 f')}{d \log q}$$

$$= -f^4 k^2 k'^2 + 4f^3 \frac{d^2 f}{dl^2},$$

$$\frac{dl}{f^2} = \frac{d \log q}{D^2}.$$

Setzt man den Ausdruck

$$(9.) \qquad -f^4 k^2 k'^2 + 4f^3 \frac{d^2 f}{dl^2} = H$$

und denkt sich die Function f so bestimmt, dass

$$(10.) \qquad \frac{d \log H}{\sqrt{4H+1}} = \frac{dl}{f^2},$$

so hat man die beiden Gleichungen:

$$(11.) \qquad 4D^3 D'' = H, \qquad \frac{d \log H}{\sqrt{4H+1}} = \frac{d \log q}{D^2}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Gröfse H, so erhält man dieselbe Differentialgleichung zwischen D und q, welche zwischen C und q gefunden

worden ist. Wenn man andererseits aus (9.) den Werth von H in (10.) substituirt, so erhält man eine Differentialgleichung 3ter Ordnung zwischen f und k. Setzt man in dieser Differentialgleichung $l = \log k_1$ oder

$$\frac{k^2}{k'^2} = k_1,$$

so wird dieselbe

$$(12.) \qquad k_1^2 f^4 \left(\frac{dH}{dk_1}\right)^2 = H^2 + 4H^3,$$

wo zufolge (9.) die Gröfse H den Ausdruck

$$(13.) \qquad 4k_1^2 f^3 \frac{d^2 f}{dk_1^2} + 4k_1 f^3 \frac{df}{dk_1} - \frac{k_1 f^4}{(1+k_1)^2)} = H$$

bedeutet.

So wie die Function $D = \frac{\pi f}{2K}$ ein Integral der Gleichung (7.) wurde, wenn f ein beliebiges Integral der Gleichung (12.) ist, so wird auch umgekehrt $f = \frac{2K}{\pi} D$ ein Integral der Gleichung (12.), wenn D ein beliebiges Integral der Gleichung (7.) ist. Setzt man nämlich $4D^3 D'' = H$, so verwandelt sich die Gleichung (7.), welcher D genügt, in die Gleichung (10.). Bestimmt man dann f durch die Gleichung $D = \frac{\pi f}{2K} = fC$, so erhält man durch zweimalige Differentiation für H den Werth (9.), und wenn man diesen in die Gleichung (10.) substituirt, die Differentialgleichung (12.).

Aus den Gleichungen (3*.) und (5.) ergiebt sich, dass man, ohne dass $d \log q$ und die Gleichung (7.) sich ändert, für $-\frac{k^2}{k'^2}$ die Gröfsen $\frac{1}{k'^2}$ und k^2 setzen kann, wenn man gleichzeitig K in kK und $k'K$ ändert. Bedeutet daher $f(k_1)$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (12.), so wird nicht nur $\frac{\pi}{2K} f\left(\frac{k^2}{k'^2}\right)$, sondern es werden auch die Functionen

$$\frac{\pi}{2kK} f\left(-\frac{1}{k'^2}\right), \qquad \frac{\pi}{2k'K} f(-k^2)$$

Integrale der Gleichung (7.) werden. Umgekehrt werden, wenn D ein beliebiges Integral der Gleichung (7.) ist, die Functionen

$$\frac{2K}{\pi} D, \quad \frac{2kK}{\pi} D, \quad \frac{2k'K}{\pi} D$$

Integrale der Gleichung (12.), je nachdem in letzterer k_1 die Gröfsen

$$\frac{k^2}{k'^2}, \quad -\frac{1}{k'^2}, \quad -k^2$$

bedeutet.

Der Differentialgleichung (12.) genügen unendlich viele algebraische Werthe von f, welche nur um einen Zahlenfactor von den Werthen verschieden sind, die der in der Theorie der Transformation der elliptischen Integrale vorkommende Multiplicator M für die verschiedenen Transformationen annimmt. Kennt man die algebraische Gleichung zwischen dem gegebenen Modul k und dem transformirten λ, so wird das Quadrat dieses Multiplicators rational durch k und λ vermittelst der allgemeinen Formel

$$(14.) \qquad M^2 = \frac{(\lambda - \lambda^3)dk}{n(k - k^3)d\lambda}$$

gegeben, wo n die Ordnung der Transformation bedeutet. Aufserdem findet zwischen den nach k genommenen ersten beiden Differentialquotienten von M und dem ersten von λ noch die Differentialgleichung

$$(15.) \qquad M\left\{(k-k^3)\frac{d^2M}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{dM}{dk} - kM\right\} + \frac{\lambda\, d\lambda}{n\, dk} = 0$$

statt. In den *Fund. nov.* (pag. 77)*) ist aus den beiden Gleichungen (14.) und (15.) durch Elimination von M die zwischen je zwei Moduln, welche in einander transformirt werden können, bestehende Differentialgleichung 3ter Ordnung gefunden worden. Wenn man aber aus denselben beiden Differentialgleichungen statt M den transformirten Modul λ eliminirt, so erhält man für $\sqrt{n}.M$ dieselbe Differentialgleichung, wie oben für f gefunden worden, welche von der Ordnung der Transformation unabhängig ist. Es können nämlich die beiden Gleichungen (14.) und (15.), wenn man $\lambda'^2 = 1 - \lambda^2$, $l = \log\frac{k^2}{k'^2}$ setzt, durch folgende beide ersetzt werden:

$$(16.) \qquad \begin{cases} n^2\left\{-M^4k^2k'^2 + 4M^3\dfrac{d^2M}{dl^2}\right\} = -\lambda^2\lambda'^2, \\[2ex] d\log\dfrac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \dfrac{d\log(-\lambda^2\lambda'^2)}{\sqrt{1-4\lambda^2\lambda'^2}} = \dfrac{dl}{nM^2}. \end{cases}$$

*) Band I., p. 132 dieser Ausgabe.

Da nun, wenn man

$$H = -\lambda^2\lambda'^2, \qquad f = \sqrt{n}.M$$

setzt, die Gleichungen (9.) und (10.) mit den Gleichungen (16.) übereinkommen, so werden die Functionen $\sqrt{n}.M$ Integrale der zwischen f und $k_1 = \frac{k^2}{k'^2}$ bestehenden Differentialgleichung (12.), und zwar algebraische Integrale dieser Gleichung.

Die für C und y oben aufgestellten Differentialgleichungen sind aus der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren besondere Integrale K und K' sind, in Verbindung mit der Gleichung

$$d\log q = d\,\frac{-\pi K'}{K} = \frac{d(k^2)}{k^2k'^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}$$

erhalten worden. Setzt man für K und K' zwei vollständige Integrale der erstern,

$$Q = aK + \sqrt{-1}\,bK', \qquad Q' = a'K' + \sqrt{-1}\,b'K,$$

so wird

$$d\,\frac{-\pi Q'}{Q} = \frac{(aa'+bb')\,d(k^2)}{k^2k'^2\left(\frac{2Q}{\pi}\right)^2}.$$

Hieraus folgt, dass man in den zwischen K, k und q aufgestellten Differentialgleichungen für K und $\log q$ auf die allgemeinste Art die Gröfsen $\frac{Q}{\sqrt{aa'+bb'}}$ und $-\frac{\pi Q'}{Q}$ setzen kann. *Es wird daher das vollständige Integral der Differentialgleichungen* (7.) *und* (8.) *durch das System der beiden Gleichungen*

$$(17.) \qquad \begin{cases} C^{-\frac{1}{2}} = y = \sqrt{\dfrac{\frac{2}{\pi}(aK+\sqrt{-1}\,bK')}{\sqrt{aa'+bb'}}}, \\[2ex] \log q = -\dfrac{\pi(a'K'+\sqrt{-1}\,b'K)}{aK+\sqrt{-1}\,bK'} \end{cases}$$

gegeben, wo a, b, a', b' willkürliche Constanten bedeuten, und die Gröfsen K und K' gegebene Functionen einer dritten Gröfse k sind, nämlich die ganzen elliptischen Integrale erster Gattung für die Moduln k und $\sqrt{1-k^2}$.

Setzt man

$$-\frac{K'}{K} = r,$$

woraus

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \text{ etc.}$$

folgt, so erhält man aus der letzten der beiden vorstehenden Gleichungen (17.):

$$\log q = \frac{\pi(a'r - \sqrt{-1}\,b')}{a - \sqrt{-1}\,br},$$

und daher

$$r = \frac{a \log q + \sqrt{-1}\,b'\pi}{a'\pi + \sqrt{-1}\,b \log q}, \qquad a - \sqrt{-1}\,br = \frac{(aa' + bb')\pi}{a'\pi + \sqrt{-1}\,b \log q}.$$

Der vollständige Werth von y, durch r ausgedrückt, wird:

$$y = \sqrt{\frac{a - \sqrt{-1}\,br}{\sqrt{aa' + bb'}}} \cdot \{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \text{ etc.}\}.$$

Wenn man in diesen Formeln a, b, a', b' statt

$$\frac{a}{\sqrt{aa' + bb'}}, \quad \frac{b}{\sqrt{aa' + bb'}}, \quad \frac{a'}{\sqrt{aa' + bb'}}, \quad \frac{b'}{\sqrt{aa' + bb'}}$$

und

$$q = e^{\pi\rho}, \qquad \log q = \pi\rho$$

setzt, so erhält man das folgende

Theorem.

»*Die Reihe*

$$y = 1 + 2e^{\pi\rho} + 2e^{4\pi\rho} + 2e^{9\pi\rho} + \text{ etc.}$$

genügt der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\{y^2 d^3y - 15y\,dy\,d^2y + 30dy^3\}^2 + 32\{y\,d^2y - 3dy^2\}^3 = y^{10}\{y\,d^2y - 3dy^2\}^2 \pi^2 d\rho^2,$$

in welcher $d\rho$ *das beständige Differential ist, und es wird das vollständige Integral dieser Differentialgleichung:*

$$y = \frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \text{ etc.}}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\,b\rho}},$$

wo

$$r = \frac{a\rho + \sqrt{-1}\,b'}{a' + \sqrt{-1}\,b\rho}$$

ist, und a, a', b, b' *willkürliche Constanten bedeuten, für welche*

$$aa' + bb' = 1$$

ist.«

Man kann das vorstehende Theorem aus dem ersten oben gegebenen Theorem ableiten, wenn man beweist,

dass, wenn $y = f(\rho)$, *wo* $\pi\rho = \log q$, *ein beliebiges particuläres Integral der Differentialgleichung* (8.) *bedeutet, und man* $r = \frac{a\rho + \sqrt{-1}\,b'}{a' + \sqrt{-1}\,b\rho}$ *setzt, wo* $aa' + bb' = 1$, *die Function*

$$y = \frac{f(r)}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\,b\rho}}$$

das vollständige Integral der Differentialgleichung (8.) *ist.*

Man zeigt dieses leicht auf folgende Art.

Die Differentialgleichung (8.) verwandelt sich, wenn man $y = C^{-\frac{1}{2}}$ setzt, in die Differentialgleichung (7.), welche, wie wir gesehen haben, aus dem Systeme zweier Gleichungen,

$$4C^3C'' = H, \qquad \frac{d \log H}{\sqrt{1 + 4H}} = \frac{d \log q}{C^2},$$

durch Elimination von H hervorgeht. Setzt man $\log q = \pi\rho$ und für C ein beliebiges particuläres Integral der Differentialgleichung (7.),

$$C = \varphi(\rho) = \{f(\rho)\}^{-2},$$

so werden die beiden vorstehenden Gleichungen, wenn man sich der Lagrangeschen Bezeichnungsart der Differentialquotienten bedient,

$$4\varphi(\rho)^3\varphi''(\rho) = \pi^2 H, \qquad \frac{d \log H}{\sqrt{1 + 4H}} = \frac{\pi\, d\rho}{\varphi(\rho)^2}.$$

Schreibt man r für ρ, so werden auch zwei Gleichungen von der Form

$$4\varphi(r)^3\varphi''(r) = \pi^2 H_1, \qquad \frac{d \log H_1}{\sqrt{1 + 4H_1}} = \frac{\pi\, dr}{\varphi(r)^2}$$

gleichzeitig stattfinden. Es seien a, b, a', b' Constanten, für welche $aa' + bb' = 1$, und

$$r = \frac{a\varrho + \sqrt{-1}\,b'}{a' + \sqrt{-1}\,b\varrho}, \qquad dr = \frac{d\varrho}{(a' + \sqrt{-1}\,b\varrho)^2},$$

ferner

$$\psi(\varrho) = (a' + \sqrt{-1}\,b\varrho)\,\varphi(r),$$

so erhält man durch zweimaliges Differentiiren:

$$\psi'(\varrho) = \sqrt{-1}\,b\varphi(r) + \frac{\varphi'(r)}{a' + \sqrt{-1}\,b\varrho},$$

$$\psi''(\varrho) = \frac{\varphi''(r)}{(a' + \sqrt{-1}\,b\varrho)^3},$$

und daher

$$\psi(\varrho)^3\psi''(\varrho) = \varphi(r)^3\varphi''(r).$$

Fügt man hierzu die Formel

$$\frac{dr}{\varphi(r)^2} = \frac{d\varrho}{(a' + \sqrt{-1}\,b\varrho)^2\varphi(r)^2} = \frac{d\varrho}{\psi(\varrho)^2},$$

so verwandeln sich die beiden Gleichungen

$$4\varphi(r)^3\varphi''(r) = \pi^2 H_1, \qquad \frac{d\log H_1}{\sqrt{1+4H_1}} = \frac{\pi\,dr}{\varphi(r)^2}$$

in die ganz ähnlichen

$$4\varphi(\varrho)^3\psi''(\varrho) = \pi^2 H_1, \qquad \frac{d\log H_1}{\sqrt{1+4H_1}} = \frac{\pi\,d\varrho}{\psi(\varrho)^2}.$$

Es folgt hieraus, dass die Function

$$\psi(\varrho) = (a' + \sqrt{-1}\,b\varrho)\,\varphi(r),$$

eben so wie $\varphi(\varrho)$, ein Integral der Differentialgleichung (7.) und daher auch

$$\{\psi(\varrho)\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{f(r)}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\,b\varrho}}$$

ein Integral der Differentialgleichung (8.) ist, und zwar sind dies die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen, weil sie drei willkürliche Constanten enthalten.

Man hat oben gesehen, dass die Reihe

$$2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \text{etc.}$$

ebenfalls ein Integral der Differentialgleichung (8.) ist. Man wird daher mittelst des eben gefundenen Satzes auch aus dieser Reihe das vollständige Integral der Differentialgleichung (8.) ableiten können, und es mufs das aus der einen Form erhaltene vollständige Integral das Integral der andern Form umfassen. Es müssen daher in dem Ausdruck $r = \frac{a\varrho + \sqrt{-1}\,b'}{a' + \sqrt{-1}\,b\varrho}$ die Constanten a, b, a', b' immer so bestimmt werden können, dass

$$\frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \text{etc.}}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\,b\varrho}} = 2e^{\frac{1}{4}\pi\varrho} + 2e^{\frac{9}{4}\pi\varrho} + 2e^{\frac{25}{4}\pi\varrho} + \text{etc.}$$

Die Theorie der elliptischen Transcendenten lehrt, dass diese Bestimmung auf unendlich viele Arten möglich ist. Es ergiebt sich nämlich aus der Theorie der unendlich vielen Formen der Transcendente Θ *), dass die vorstehende Gleichung immer gilt, wenn a, b, a', b' positive oder negative ganze Zahlen sind, von denen a, a' und b ungerade sind, und a' und b durch 4 dividirt nicht denselben Rest lassen. *Das Zeichen der den Nenner bildenden Quadratwurzel in der vorstehenden Formel hängt von dem Werthe der in der Theorie der quadratischen Reste mit* $\left(\frac{a'}{b}\right)$ *bezeichneten Gröfse ab.* Ein doppelter Gang der Untersuchung, welchen man einschlagen kann, führt zu dieser Zeichenbestimmung entweder mittelst einer Kettenbruchentwickelung oder der von Gaufs in seiner Abhandlung *Summatio serierum quarundam singularium* betrachteten Summen. Die vorstehende Gleichung wird, wenn a und b ungerade sind, immer gelten, wofern man nur die eine Seite derselben mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt. Wenn von den Zahlen a und b die eine gerade, die andere ungerade ist, hat man die Gleichung

$$\delta \cdot \frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \cdots}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\,b\varrho}} = 1 \pm 2e^{\pi\varrho} + 2e^{4\pi\varrho} \pm 2e^{9\pi\varrho} + \cdots,$$

wo δ eine 8te Wurzel der Einheit bedeutet, und das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem von den Zahlen a' und b die eine gerade, die andere ungerade oder beide ungerade sind.

---

*) Ich habe diese Theorie in mehreren an der Königsberger Universität gehaltenen Vorlesungen umständlich auseinandergesetzt und behalte mir vor, dieselbe bei einer andern Gelegenheit bekannt zu machen.

Die vorstehenden Reihenentwickelungen setzen voraus, dass der reelle Theil der Gröfsen ρ und r negativ ist. Wenn dies bei ρ, aber nicht bei der Gröfse r der Fall ist, so kann man die Constanten a und b' mit $\sqrt{-1}$ multipliciren und die Constanten a' und b mit $\sqrt{-1}$ dividiren, wodurch die Bedingung $aa' + bb' = 1$ unverändert bleibt, und sich r in $-r$ verwandelt, also der reelle Theil negativ wird. *Für beliebige reelle Werthe der willkürlichen Constanten a, a', b, b' wird, wenn der reelle Theil von ρ negativ ist, auch der reelle Theil von r immer negativ sein.* Setzt man nämlich

$$\rho = -\rho_0 + \rho_1\sqrt{-1},$$

so wird

$$\begin{aligned} r &= \frac{-a\rho_0 + (a\rho_1 + b'(\sqrt{-1}}{a' - b\rho_1 - b\rho_0\sqrt{-1}} \\ &= \frac{-\rho_0 + \{(a' - b\rho_1)(a\rho_1 + b') - ab\rho_0^2\}\sqrt{-1}}{(a' - b\rho_1)^2 + b^2\rho_0^2}, \end{aligned}$$

woraus der vorstehende Satz folgt.

Den 10. November 1847.

ÜBER

EINE PARTICULÄRE LÖSUNG

DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

VON

C. G. J. JACOBI.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 36. p. 113—134.