ÜBER DIE

ZUR NUMERISCHEN BERECHNUNG

# DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

ZWECKMÄSSIGSTEN FORMELN

VON

HERRN PROFESSOR DR. C. G. J. JACOBI

ZU KÖNIGSBERG IN PREUSSEN

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 26. p. 93—114.

# ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

1.

Unter den Formeln, durch welche man die vielen von mir in den *Fundam. nov.* gegebenen Entwicklungen mit leichter Mühe noch vermehren kann, scheint mir die nachfolgende, welche die Tangente der halben Differenz der Amplitude des Integrals $u$ und der Gröfse $\frac{\pi u}{2K}$ selber ergiebt, einen eigenthümlichen Character zu haben.

Da

$$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-x)}{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi+x)},$$

so kann man die Formel *Fund. nov.* §. 39. (4.) wie folgt schreiben:

$$(1.)\qquad \sqrt{\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-x)(1-2q\sin x+q^2)(1-2q^2\sin x+q^4)\dots}{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi+x)(1+2q\sin x+q^2)(1+2q^2\sin x+q^4)\dots}.$$

In der Formel (§. 64.):

$$\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\dots$$
$$= \frac{\sqrt[4]{q}\sin x-\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}$$

setze man $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-x)$ und $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi+x)$ für $x$ und gleichzeitig $\sqrt{q}$ für $q$, so erhält man nach Division mit $\sqrt[4]{q}$ den Zähler und Nenner in (1.), und daher:

$$(2.)\qquad \sqrt{\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}} = \operatorname{tg}\left(45^\circ-\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)$$
$$= \frac{\sin(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x)-q\sin 3(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x)+q^3\sin 5(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x)-\cdots}{\sin(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)-q\sin 3(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)+q^3\sin 5(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)-\cdots},$$

wo die Exponenten von $q$ die dreieckigen Zahlen sind. Setzt man hierin $\frac{1}{2}\pi-x$ für $x$, so erhält man:

$$(3.)\quad \operatorname{tg}\left(45^0-\tfrac{1}{2}\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{\sin\frac{1}{2}x - q\sin\frac{3}{2}x + q^3\sin\frac{5}{2}x - q^6\sin\frac{7}{2}x + \cdots}{\cos\frac{1}{2}x + q\cos\frac{3}{2}x + q^3\cos\frac{5}{2}x + q^6\cos\frac{7}{2}x + \cdots}. ^{*)}$$

Nach der §. 37. Theorem I. gemachten Bemerkung gehen $\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ und $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}$ in einander über, wenn man $-q$ für $q$ setzt. Die vorstehende Formel giebt daher sogleich auch folgende:

$$(4.)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sin\frac{1}{2}x + q\sin\frac{3}{2}x - q^3\sin\frac{5}{2}x - q^6\sin\frac{7}{2}x + \cdots}{\cos\frac{1}{2}x - q\cos\frac{3}{2}x - q^3\cos\frac{5}{2}x + q^6\cos\frac{7}{2}x + \cdots},$$

wo im Zähler und Nenner immer zwei positive und zwei negative Zeichen mit einander abwechseln. Man erhält aus dieser Formel, wenn $i = \sqrt{-1}$,

$$(5.)\quad \frac{1+i\operatorname{tg}\frac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-i\operatorname{tg}\frac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = e^{i\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}ix} - qe^{-\frac{3}{2}ix} - q^3e^{\frac{5}{2}ix} + q^6e^{-\frac{7}{2}ix} + q^{10}e^{\frac{9}{2}ix} - \cdots}{e^{-\frac{1}{2}ix} - qe^{\frac{3}{2}ix} - q^3e^{-\frac{5}{2}ix} + q^6e^{\frac{7}{2}ix} + q^{10}e^{-\frac{9}{2}ix} - \cdots}$$

und hieraus:

$$e^{i\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}-x\right)} = \frac{1+i\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}-x\right)}{1-i\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}-x\right)}$$

$$= \frac{1-qe^{-2ix}-q^3e^{2ix}+q^6e^{-4ix}+q^{10}e^{4ix}-\cdots}{1-qe^{2ix}-q^3e^{-2ix}+q^6e^{4ix}+q^{10}e^{-4ix}-\cdots}$$

oder:

$$(6.)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}-x\right)$$

$$= \frac{(q-q^3)\sin 2x - (q^6-q^{10})\sin 4x + (q^{15}-q^{21})\sin 6x - \cdots}{1-(q+q^3)\cos 2x + (q^6+q^{10})\cos 4x - (q^{15}+q^{21})\cos 6x + \cdots}.$$

Diese merkwürdige Formel ist zur Berechnung einzelner Werthe oder von Tafeln vorzugsweise bequem. Da $\operatorname{tg}\operatorname{am}\frac{1}{2}K = \frac{1}{\sqrt{k'}}$, also

$$\operatorname{tg}(\operatorname{am}\tfrac{1}{2}K - 45^0) = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}},$$

*) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit die Formel:

$$\sqrt{k'}\operatorname{tg}\operatorname{am}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u \,.\, \operatorname{tg}(45^0-\tfrac{1}{2}\operatorname{coam}u)},$$

welche etwas bequemer als die von Legendre für die Halbirung gegebene ist.



so erhält man aus (6.), wenn man $x = \frac{1}{4}\pi$ setzt,

$$(7.)\quad \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}+\sqrt{2(1+k')}} = \frac{q-q^3-q^{15}+q^{21}+q^{45}-q^{55}-\cdots}{1-q^6-q^{10}+q^{28}+q^{36}-q^{66}-\cdots}.$$

Setzt man $q = b^8$, so erhält der Bruch rechts die Form:

$$\frac{\Sigma \pm b^{(8h\pm 3)^2}}{\Sigma \pm b^{(8h\pm 1)^2}}.$$

Das Zeichen $+$ oder $-$ (vor den Potenzen von $b$) ist zu nehmen, je nachdem $h$ gerade oder ungerade ist.

Wenn der Modul der Einheit sehr nahe kommt, mufs man sich der Entwicklungen bedienen, welche statt der Kreisfunctionen Exponentialgröfsen enthalten. Setzt man $ix$ für $x$ und $k'$ für $k$, so verwandelt sich

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} \quad\text{in}\quad i\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2K'x}{\pi},$$

und gleichzeitig $q$ in $q'$, wo $q$ und $q'$ durch die Gleichung

$$\log q \,.\, \log q' = \pi^2$$

mit einander verbunden sind. Nennt man $u$ das elliptische Integral erster Gattung und setzt

$$z = e^x = e^{\frac{\pi u}{2K'}}, \qquad \operatorname{am}(u,k) = \varphi,$$

so erhält man aus (5.) folgende Entwicklung von ebenfalls eigenthümlicher Form:

$$(8.)\quad \operatorname{tg}(45^0-\tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1-q'z^2-q'^3z^{-2}+q'^6z^4+q'^{10}z^{-4}-\cdots}{1-q'z^{-2}-q'^3z^2+q'^6z^{-4}+q'^{10}z^4-\cdots}.$$

Wenn $\varphi$ sich sehr der Grenze $\frac{1}{2}\pi$ und daher $z$ der Grenze $\frac{1}{\sqrt{q'}}$ nähert, werden je zwei aufeinander folgende Terme in Zähler und Nenner nahe gleich oder entgegengesetzt. Vereinigt man sie in ein Glied, so bleibt die Convergenz noch überaus grofs. Ist z. B. $k = \frac{14}{15}$, so wird ungefähr $q = \frac{1}{8}$, so dass die Formel (6.) noch sehr rasch convergirt. Aber es wird dann schon $q'$ ungefähr $\frac{1}{116}$, so dass man für alle Amplituden mit der Formel

$$\operatorname{tg}(45^0-\tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1-q'z^2-q'^3z^{-2}}{1-q'z^{-2}-q'^3z^2}$$

ausreicht, um $\varphi$ bis auf $0{,}''01$ genau zu haben.

Ich will noch einen sehr rasch convergirenden Ausdruck für die ganzen

Integrale zweiter Gattung hinzufügen. Vergleicht man nämlich die beiden Formeln *Fund.* §. 41.:

$$\tfrac{1}{2}\pi A = \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \mathrm{am}\, \frac{2Kx}{\pi}\, dx = 4\pi \left\{ \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} + \cdots \right\}$$

$$\tfrac{1}{2}\pi B = \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \mathrm{am}\, \frac{2Kx}{\pi}\, dx = 4\pi \left\{ \frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \cdots \right\},$$

so sieht man, dass $A$ in $-B$, $B$ in $-A$ übergeht, wenn man $-q$ für $q$ setzt. Differentiirt man ferner die Formel *Fund.* §. 40. (3.), nämlich:

$$\log \frac{2K}{\pi} = 4 \left\{ \frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{3(1+q^3)} + \frac{q^5}{5(1+q^5)} + \cdots \right\},$$

so erhält man:

$$\frac{2q\,dK}{K\,dq} = B.$$

Hieraus folgt nach §. 65. (6.):

$$4q \frac{d}{dq} \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \cdot B = k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\, \Delta\varphi}$$
$$= 8(q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \cdots).$$

Setzt man hierin $-q$ für $q$, wodurch $K$ in $k'K$, $B$ in $-A$ übergeht, so erhält man:

$$\sqrt{k'} . k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\, \Delta\varphi} = 8(q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots),$$

und daher, durch Addition und Subtraction, zur Bestimmung der ganzen Integrale zweiter Gattung die Formeln:

$$C = k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\cos^2\varphi + \sqrt{k'}\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta\varphi} = 16(q + 9q^9 + 25q^{25} + \cdots)$$

$$D = k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\cos^2\varphi - \sqrt{k'}\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta\varphi} = 64(q^4 + 4q^{16} + 9q^{36} + \cdots),$$

von denen besonders die zweite bemerkenswerth ist, indem sie zeigt, dass der Werth des ganzen elliptischen Integrals zweiter Gattung

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\cos^2\varphi - \sqrt{k'}\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi}$$

von der Ordnung der **sechsten** Potenz des Moduls und von

$$\frac{64q^4}{k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$



nur in Gröfsen von der Ordnung der **dreifsigsten** Potenz des Moduls verschieden ist, welche aufserdem noch durch überaus grofse Zahlen dividirt wird. Man sieht auch aus der vorstehenden Formel, dass

$$B < A \quad \text{und} \quad B > \sqrt{k'} A.$$

Um aus $D$ den Werth von $E^1$ zu finden, dient die Formel:

$$(1 + \sqrt{k'})E^1 = \sqrt{k'}(1 + \sqrt{k'^3})F^1 + \frac{\frac{1}{2}\pi D}{\left(\frac{2F^1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Auch kann man die Formel

$$-(1 + \sqrt{k'}) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = (1 - \sqrt{k'})F^1 - \frac{\pi D}{k^2\left(\frac{2F^1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

bemerken. Da immer

$$q > \frac{k^2}{16}, \quad q < \frac{k^2}{16k'},$$

so ist in der Entwicklung von $D$ der erste Term, welcher, extreme Fälle abgerechnet, allein einen Werth erhält, immer $< \frac{k^8}{1024k'^4}$. Man sieht, wie genau für nicht allzugrofse Moduln die beiden Gröfsen

$$(1 + \sqrt{k'})E^1 \quad \text{und} \quad \sqrt{k'}(1 + \sqrt{k'^3})F^1$$

mit einander übereinkommen, indem die Differenz, nach den Potenzen von $k^2$ entwickelt, mit dem Term $\frac{1}{4}\pi \cdot \frac{k^8}{1024}$ beginnt.

2.

Man kann bei Berechnung der elliptischen Integrale mit Vortheil die Gaufsischen Tafeln anwenden, in welchen für einen unter der Columne $A$ als Argument gegebenen $\log x$, wo $x > 1$, der Werth von $\log(1+x)$ in der Columne $C$ sich befindet. Ich will hierüber in einige nähere Erörterungen eingehen.

Es sollen im Folgenden die Werthe von $A$ mit einem lateinischen Buchstaben und die entsprechenden von $C - \frac{1}{2}A - 0.3010300$ mit dem entsprechenden griechischen bezeichnet werden, so dass man, wenn $m > n$ und $a = \log \frac{m}{n}$,

$$\alpha = \log \frac{m+n}{2\sqrt{mn}}$$

oder $\alpha$ gleich dem Logarithmus des Verhältnisses des arithmetischen und geometrischen Mittels von $m$ und $n$ setzt. Ist $-a$ der Logarithmus des Complements eines gegebenen Moduls, so wird hiernach $-\alpha$ der Logarithmus des Complements des kleineren Moduls, in welchen der gegebene durch die Landensche Substitution transformirt wird. Setzt man nun nacheinander:

$$a = \log\frac{m}{n}, \quad a' = \alpha, \quad a'' = \alpha', \quad a''' = \alpha'', \ldots,$$

indem man immer den gefundenen Werth von $\alpha^{(i)}$ zum Argument $A$ macht und den entsprechenden Werth von $\alpha^{(i+1)} = C - \frac{1}{2}A - 0.3010300$ aufsucht, bis man auf verschwindende Gröfsen kommt, so wird, nach der §. 38. angewandten Bezeichnung:

$$a = \log\frac{m}{n}, \quad a' = \alpha = \log\frac{m'}{n'}, \quad a'' = \alpha' = \log\frac{m''}{n''}, \cdots$$

Man erhält ferner aus den Formeln

$$mn = n'n', \quad m'n' = n''n'', \quad \ldots \quad m^{(i-1)}n^{(i-1)} = n^{(i)}n^{(i)}$$

die Gleichung:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'}\cdots\frac{m^{(i-1)}}{n^{(i-1)}} = \frac{n^{(i)}n^{(i)}}{nn},$$

und daher, wenn durch $\mu$ die Grenze bezeichnet wird, welcher die Gröfsen $n^{(i)}$ sehr schnell sich nähern:

$$\log\mu = \log n + \tfrac{1}{2}[a + a' + a'' + \cdots].$$

Der so für $\mu$ erhaltene Werth giebt bekanntlich das ganze elliptische Integral erster Gattung durch die Formel:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\mu}.$$

Die Gröfsen $n', n'', \ldots$ selber findet man durch successive Addition von $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a', \ldots$ vermittelst der Formeln:

$$\log n' = \log n + \tfrac{1}{2}a, \qquad \log n'' = \log n' + \tfrac{1}{2}a', \ldots,$$

und hieraus:

$$\log m' = \log n' + a', \qquad \log m'' = \log n'' + a'', \ldots$$



Gaufs hat in seiner Abhandlung *Determinatio attractionis* auch eine sehr bequeme Anordnung für die Berechnung des ganzen elliptischen Integrals zweiter Gattung mitgetheilt. Berechnet man nämlich:

$$\lambda = \tfrac{1}{4}\sqrt{mm - nn}, \qquad \lambda' = \frac{\lambda\lambda}{m'}, \qquad \lambda'' = \frac{\lambda'\lambda'}{m''}, \ldots$$

$$\nu = \frac{2\lambda'\lambda' + 4\lambda''\lambda'' + 8\lambda'''\lambda''' + \cdots}{\lambda\lambda},$$

so findet man nach einer Formel, welche im Wesentlichen mit der von Legendre gegebenen übereinkommt,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi}} = -\frac{\nu}{\mu}.$$

Die Gröfsen $\frac{4\lambda}{m}, \frac{4\lambda'}{m'}, \frac{4\lambda''}{m''}, \ldots$ oder $\frac{4\lambda}{m}, \frac{4\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}, \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda'\lambda'}, \ldots$ sind der gegebene und die nach und nach transformirten Moduln. Nach *Fund.* §. 52. *Coroll.* (4.) findet man die Gröfse $q$ durch die Formel

$$\log q = 2\log\frac{\lambda}{m} + a - \tfrac{3}{2}a' - \tfrac{3}{4}a'' - \tfrac{3}{8}a''' - \cdots$$

Um das unbestimmte Integral erster Gattung zu finden, hat man nach *Fund.* §. 38. die Gröfsen $\Delta'$ aus den vorhergehenden $\Delta$ durch die Formel

$$\Delta' = \sqrt{\frac{mm'(\Delta + n)}{m + \Delta}}$$

zu berechnen, woraus folgt:

$$\frac{m'}{\Delta'} = \sqrt{\frac{m'}{n'}}\cdot\sqrt{\frac{1 + \frac{m}{\Delta}}{2\sqrt{\frac{m}{\Delta}}}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{\Delta}{n}}}{1 + \frac{\Delta}{n}}},$$

$$\frac{\Delta'}{n'} = \sqrt{\frac{m'}{n'}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{m}{\Delta}}}{1 + \frac{m}{\Delta}}}\cdot\sqrt{\frac{1 + \frac{\Delta}{n}}{2\sqrt{\frac{\Delta}{n}}}}.$$

Setzt man daher:

$$\begin{array}{lll}
a = \log\frac{m}{n}, & b = \log\frac{m}{\Delta} & c = \log\frac{\Delta}{n}, \\
a' = \alpha, & b' = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) & c' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma), \\
a'' = \alpha', & b'' = \frac{1}{2}(\alpha' + \beta' - \gamma') & c'' = \frac{1}{2}(\alpha' - \beta' + \gamma'), \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

wo man immer, wenn man in den Gaufsischen Tafeln $A = \alpha^{(i)}$, $b^{(i)}$ oder $c^{(i)}$ nimmt, die Gröfsen $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ oder $\gamma^{(i)}$ durch die Formel

$$C - \tfrac{1}{2}A - 0.3010300$$

erhält, so wird

$$\log \frac{m^{(i)}}{\Delta^{(i)}} = b^{(i)}, \qquad \log \frac{\Delta^{(i)}}{n^{(i)}} = c^{(i)}.$$

Für das Integral

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi}} = \Phi$$

findet man hiernach durch die Formel §. 38.:

$$\log \operatorname{tg} \mu\Phi = \log \operatorname{tg}\varphi + \log \frac{\Delta'\Delta''\Delta'''\ldots}{mm'm''\ldots}$$

$$= \log \operatorname{tg}\varphi + \log \frac{\mu}{m} - b' - b'' - b''' - \cdots$$

Man kann auch die ersten Gröfsen $\frac{m}{\Delta}$ und $\frac{\Delta}{n}$ auf analoge Art durch $\operatorname{tg}\varphi$ finden. Sind nämlich $b^0$, $c^0$ positive Gröfsen, welche durch die Gleichungen

$$\pm \log \operatorname{tg}^2\varphi = b^0, \qquad \pm \log \frac{n^2}{m^2} \operatorname{tg}^2\varphi = c^0$$

bestimmt werden, so wird

$$\log \frac{m}{\Delta} = b = \tfrac{1}{2}(\alpha^0 + \beta^0 - \gamma^0), \qquad \log \frac{\Delta}{n} = c = \tfrac{1}{2}(\alpha^0 - \beta^0 + \gamma^0),$$

wo $\alpha^0 = a$. Die Gröfse $\mu\Phi$ ist der in den Reihen-Entwicklungen mit $x$ bezeichnete Winkel.

Aus der von Gaufs angewandten Substitution

$$\sin\varphi = \frac{2m\sin\varphi'}{(m+n)\cos^2\varphi' + 2m\sin^2\varphi'}$$

findet man:

$$\frac{\sin\varphi'}{m'} = \frac{2\sin\varphi}{m+\Delta}, \qquad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\Delta'}{m}\operatorname{tg}\varphi,$$

wo, wie im Vorhergehenden,

$$\Delta = \sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi}, \qquad \Delta' = \sqrt{m'm'\cos^2\varphi' + n'n'\sin^2\varphi'}.$$

Hieraus folgt:

$$\log \frac{\sin\varphi'}{m'} = \log \frac{\sin\varphi}{m} + \tfrac{1}{2}b - \beta, \qquad \log \frac{\sin\varphi''}{m''} = \log \frac{\sin\varphi'}{m'} + \tfrac{1}{2}b' - \beta', \ldots$$

$$\log\cos\varphi' = \log\cos\varphi + b' + \tfrac{1}{2}b - \beta, \quad \log\cos\varphi'' = \log\cos\varphi' + b'' + \tfrac{1}{2}b' - \beta', \cdots$$



Man hat so durch die bereits berechneten Werthe von $b^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ und durch $\log\sin\varphi$, $\log\cos\varphi$ nacheinander durch blofse Addition die Werthe von $\log\sin\varphi'$, $\log\cos\varphi'$, $\log\sin\varphi''$, $\log\cos\varphi''$, ... Diese Gröfsen dienen dazu, die von Gaufs für das unbestimmte Integral zweiter Gattung gegebene Formel zu berechnen, welche man, mit einer kleinen Veränderung, so darstellen kann:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi}} = -\nu\Phi + \frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''}$$
$$+ \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''} + \cdots$$

Bezeichnet man das vorstehende Integral mit $P$ und, wie Legendre, mit $F^{\mathrm{I}}$, $E^{\mathrm{I}}$ die ganzen, mit $F(\varphi)$, $E(\varphi)$ die unbestimmten elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, so dafs $F(\varphi) = \Phi$, so wird für $m = 1$,

$$E(\varphi) = \tfrac{1}{2}(\Phi + P) + \tfrac{1}{2}k'k'(\Phi - P),$$

$$\frac{E^{\mathrm{I}}}{F^{\mathrm{I}}} = \tfrac{1}{2}(1-\nu) + \tfrac{1}{2}k'k'(1+\nu),$$

und daher:

$$\frac{F^{\mathrm{I}}E(\varphi) - E^{\mathrm{I}}F(\varphi)}{F^{\mathrm{I}}} = \tfrac{1}{2}k^2(P + \nu\Phi)$$

$$= \frac{mm-nn}{2mm}\left(\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} + \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''} + \cdots\right).$$

Zufolge des oben für $\frac{\sin\varphi'}{m'}$ gegebenen Werthes wird

$$\int \frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = \int \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta(m+\Delta)}$$

und daher:

$$\tfrac{1}{2}(mm-nn)\int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = \log\frac{2m}{m+\Delta}.$$

Setzt man daher, wie in den *Fundam.* §. 52. (6.)

$$e^{\int_0^{\varphi} \frac{F^{\mathrm{I}}E(\varphi) - E^{\mathrm{I}}F(\varphi)}{F^{\mathrm{I}}}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)},$$

und bemerkt die Formeln:

$$(mm-nn)\frac{\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = m'm' - n'n', \quad (mm-nn)\frac{\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = m''m'' - n''n'', \ldots$$

$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{d\varphi'}{\Delta'} = \frac{d\varphi''}{\Delta''} = \cdots$$

so erhält man einen neuen zur Berechnung bequemen Ausdruck für die Function $\Theta(u)$:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{2m}{m+\Delta}\cdot\left(\frac{2m'}{m'+\Delta'}\right)^2\cdot\left(\frac{2m''}{m''+\Delta''}\right)^4\cdot\left(\frac{2m'''}{m'''+\Delta'''}\right)^8\cdots$$

Da $\log\frac{2m}{m+\Delta} = \frac{1}{2}b-\beta$, so giebt diese Formel die folgende:

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \tfrac{1}{2}b-\beta+b'-2\beta'+2b''-4\beta''+4b'''-8\beta'''+\cdots,$$

welcher man noch verschiedene andere Formen geben kann.

3.

Setzt man $\qquad k = \frac{\sqrt{mm-nn}}{m},\quad k^{(2)} = \frac{\sqrt{m'm'-n'n'}}{m'},$

ferner: $\qquad K^{(2)} = \frac{1}{2}(1+k')K,\qquad \varphi = \operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right),$

so wird

$$\varphi' = \operatorname{am}\left(\frac{2K^{(2)}x}{\pi},k^{(2)}\right).$$

Zufolge der §. 37. Theorema II. gemachten Bemerkung verwandelt sich daher $k, K, \varphi$ in $k^{(2)}, K^{(2)}, \varphi'$, wenn man $q^2$ für $q$ setzt. Dies erhält eine Bestätigung durch die Formel:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m\operatorname{tg}\varphi'}{\Delta'} = \frac{2}{1+k'}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\sqrt{1-k^{(2)^2}\sin^2\varphi'}}.$$

Wenn man nämlich aus den §. 39. (1.), (2.), (3.) für $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$ gegebenen Zerfällungen in unendliche Producte den Werth von $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi}$ entnimmt und in demselben $q^2$ für $q$ setzt, so erhält man sogleich den Ausdruck für $\frac{1}{2}(1+k')\operatorname{tg}\varphi$. Umgekehrt kann man auf diese Art die vorstehende Formel, durch welche $\varphi$ aus $\varphi'$ bestimmt wird, unmittelbar aus jenen Factorenzerfällungen von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$ ableiten.

Für $m = 1$ hat man die Formel §. 39. (16.):

$$\frac{2k'k'K}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{\cos\operatorname{coam}u}{\cos\operatorname{am}u} = \operatorname{tg}x-\frac{4q\sin 2x}{1+q}+\frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2}-\cdots$$

Setzt man hierin $q^2$ für $q$, so verwandelt sich der Ausdruck links in:

$$\frac{2k'}{1+k'}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\sqrt{1-k^{(2)^2}\sin^2\varphi'}} = \frac{2k'K}{\pi}\operatorname{tg}\varphi.$$



Man kann daher zu den in den *Fundam.* mitgetheilten Reihen noch die folgende fügen:

$$\frac{2k'K}{\pi}\operatorname{tg}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \operatorname{tg}x-\frac{4q^2\sin 2x}{1+q^2}+\frac{4q^4\sin 4x}{1+q^4}-\frac{4q^6\sin 6x}{1+q^6}+\cdots$$

Ueberhaupt bietet die Betrachtung, durch welche diese Formel abgeleitet ist, ein wichtiges Mittel dar, aus den gefundenen Resultaten mit Leichtigkeit neue abzuleiten. Man bemerke z. B., daſs, wenn man in dem für $\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}}$ oben gefundenen Ausdruck $k^{(2)}$ für $k$ oder $q^2$ für $q$ setzt und ihn dann ins Quadrat erhebt, dasselbe Resultat sich ergiebt, als wenn man den Ausdruck mit $\frac{m+\Delta}{2m}$ multiplicirt. Da sich nach §. 40. (6.), (7.) $k'K$ dadurch, daſs man $q^2$ für $q$ setzt, in $\sqrt{k'}K$ verwandelt und nach §. 53. (9.)

$$\frac{\Delta}{m}\Theta(u) = \sqrt{k'}\,\Theta(u+K)$$

ist, so erhält man hieraus die Gleichung:

$$2\Theta^2(\tfrac{1}{2}(1+k')u,k^{(2)}) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\,\Theta(u)+\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\,\Theta(u+K).$$

Die oben gegebene Gleichung

$$\frac{\sin\varphi'}{m'} = \frac{2\sin\varphi}{m+\Delta}$$

kann man auch so darstellen:

$$k^{(2)}\sin^2\varphi' = \frac{1-k'}{1+k'}\sin^2\varphi' = \frac{m-\Delta}{m+\Delta}.$$

Aus der Formel §. 61. (1.) folgt aber, wenn man $k^{(2)}$ für $k$ setzt:

$$k^{(2)}\sin^2\varphi' = \frac{1-k'}{1+k'}\sin^2\varphi' = \frac{H^2(\frac{1}{2}(1+k')u,k^{(2)})}{\Theta^2(\frac{1}{2}(1+k')u,k^{(2)})}$$

und daher:

$$\frac{H^2(\frac{1}{2}(1+k')u,k^{(2)})}{\Theta^2(\frac{1}{2}(1+k')u,k^{(2)})} = \frac{m-\Delta}{m+\Delta} = \frac{\Theta(u)-\sqrt{k'}\,\Theta(u+K)}{\Theta(u)+\sqrt{k'}\,\Theta(u+K)},$$

woraus

$$2H^2(\tfrac{1}{2}(1+k')u,k^{(2)}) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\,\Theta(u)-\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\,\Theta(u+K)$$

folgt. Ersetzt man die Formel

$$\sqrt{k^{(2)}}\sin\varphi' = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\sin\varphi' = \frac{k\sin\varphi}{1+\frac{\Delta}{m}}$$

durch die folgende:

$$\frac{H(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})} = \sqrt{k}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)+\sqrt{k'}\,\Theta(u+K)},$$

so erhält man:

$$2H(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}).\Theta(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\,H(u),$$

eine Formel, welche sich unmittelbar aus der Darstellung von $\Theta(u)$ und $H(u)$ als unendliche Producte ergiebt. Die drei gefundenen Formeln geben die Gleichungen:

$$2[1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-2q^{18}\cos 6x+\cdots]^2$$
$$= \begin{cases} \phantom{+}(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)(1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots) \\ +(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)(1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots) \end{cases},$$

$$8[\sqrt{q}\sin x-\sqrt{q^9}\sin 3x+\sqrt{q^{25}}\sin 5x-\cdots]^2$$
$$= \begin{cases} \phantom{-}(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)(1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots) \\ -(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)(1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots) \end{cases},$$

$$[1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-2q^{18}\cos 6x+\cdots][\sqrt{q}\sin x-\sqrt{q^9}\sin 3x+\sqrt{q^{25}}\sin 5x-\cdots]$$
$$= [\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots][\sqrt[4]{q}\sin x-\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots].$$

Dies sind die einfachsten Fälle sehr wichtiger und sehr allgemeiner Formeln für die Verwandlung der Potenzen und Producte der Functionen $\Theta(u)$ und $H(u)$ in ein Aggregat linearer Ausdrücke.

Die Rechnungsvorschriften, welche auf der von Legendre hauptsächlich untersuchten Landenschen Transformation beruhen, erfordern zur Auffindung der Werthe der unbestimmten Integrale erster Gattung den Gebrauch trigonometrischer Tafeln. Man berechnet $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ durch die Formel:

$$\log\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = \log\operatorname{tg}\varphi - a, \ldots$$

Die Winkel $\frac{1}{2}\varphi_1$, $\frac{1}{4}\varphi_2 \ldots$ nähern sich sehr bald der Grenze:

$$\mu\Phi = \mu\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi}}.$$



Um die unbestimmten Integrale zweiter Gattung zu finden, setze man

$$\frac{Z}{m} = \frac{F^1E(\varphi)-E^1F(\varphi)}{F^1} = \frac{mm-nn}{2m}\left(\int_0^\varphi \frac{\cos 2\varphi\,d\varphi}{\Delta}+\nu\Phi\right)$$

und bezeichne mit $\frac{Z_i}{m^{(i)}}$ die analogen Gröfsen, welche man erhält, wenn man $m^{(i)}, n^{(i)}, \varphi_i$ für $m, n, \varphi$ setzt. Die Legendreschen Formeln geben dann:

$$Z_1 = Z-4\lambda'\sin\varphi_1, \qquad Z_2 = Z_1-4\lambda''\sin\varphi_2, \ldots$$

und daher:

$$Z = 4[\lambda'\sin\varphi_1+\lambda''\sin\varphi_2+\lambda'''\sin\varphi_3+\cdots].$$

Multiplicirt man diese Formel mit

$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{2}\frac{d\varphi_1}{\Delta_1} = \frac{1}{4}\frac{d\varphi_2}{\Delta_2} = \cdots$$

und bemerkt, dass

$$\frac{4\lambda'\sin\varphi_1\,d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{4}(mm-nn)\frac{\sin 2\varphi\,d\varphi}{mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi} = -\frac{1}{2}d\log\frac{\Delta}{m},$$

so erhält man durch Integration:

$$e^{\int_0^\varphi \frac{Zd\varphi}{\Delta}} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \sqrt{\frac{m}{\Delta}}\cdot\sqrt[4]{\frac{m'}{\Delta_1}}\cdot\sqrt[8]{\frac{m''}{\Delta_2}}\cdots,$$

welches der in den *Fundam.* §. 52. *Corollarium* durch Betrachtung der unendlichen Producte gefundene Ausdruck ist. Die Gröfsen $\Delta_1, \Delta_2 \ldots$ kann man durch die Formeln

$$\cos(2\varphi-\varphi_1) = \frac{\Delta_1}{m'}, \qquad \cos(2\varphi_1-\varphi_2) = \frac{\Delta_2}{m''}, \cdots$$

berechnen. Diese geben den Ausdruck:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \sqrt{\frac{m}{\Delta}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\cos(2\varphi-\varphi_1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{\cos(2\varphi_1-\varphi_2)}}\cdot\cdots$$

Will man die in den *Fundam.* mitgetheilte Berechnungsweise der Gröfsen $\Delta_1, \Delta_2 \ldots$ anwenden, so gebraucht man wieder mit Vortheil die Gaufsischen Tafeln.

4.

Ich will die hauptsächlichsten der im Vorigen mitgetheilten Formeln durch ein von Legendre ebenfalls behandeltes numerisches Beispiel erläutern, welches sich auf einen schon ziemlich grofsen Modul $k = \sin 75^0$ bezieht.

Es sei

$$m = 1, \qquad \log n = \log\sin 15^0 = 9.4129962,$$
$$\varphi = 47^0\ 3'\ 30''95,$$

wo $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Die benutzten Tafeln sind die auf 7 Stellen berechneten Matthiessenschen (Altona 1817). Bei den Interpolationen ist noch immer die 8te Stelle mitgenommen worden, um den Fehler in der 7ten zu verringern.

Setzt man

$$a = \log\frac{1}{n} = 0.5870038,$$

ferner

$$\log\operatorname{tg}^2\varphi = \quad b^0 = 0.0624693.6,$$
$$\log\frac{n^2}{m^2}\operatorname{tg}^2\varphi = -c^0 = 8.8884617.6,$$

und sucht nach der in der Abhandlung angegebenen Regel aus den Matthiessenschen Tafeln die Werthe

$$\beta^0 = 0.0011222.3,$$
$$\gamma^0 = 0.2870960.3,$$

so findet man nach und nach:

$$\log\frac{m}{\Delta} = b = \tfrac{1}{2}(a+\beta^0-\gamma^0) = 0.1505150, \qquad \beta = 0.0064882.3,$$
$$\log\frac{\Delta}{n} = c = \qquad a-b = 0.4364888.0, \qquad \gamma = 0.0526732.3,$$
$$a' = 0.0924352.2, \qquad b' = 0.0231251.1, \qquad c' = 0.0693101.1,$$
$$\beta' = 0.0001539.7, \qquad \gamma' = 0.0013812.0,$$
$$a'' = 0.0024545.8, \qquad b'' = 0.0006136.7, \qquad c'' = 0.0018409.1,$$
$$\beta'' = 0.0000001.0, \qquad \gamma'' = 0.0000009.0,$$
$$a''' = 0.0000018.0, \qquad b''' = 0.0000005.0, \qquad c''' = 0.0000013.0.$$

Hat man hier aus $a^i, b^i, c^i$ die Gröfsen $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ gefunden, indem man nach der allgemeinen Regel

$$a^i,\ b^i \text{ oder } c^i = A \quad \text{und} \quad \alpha^i,\ \beta^i,\ \gamma^i = C - \tfrac{1}{2}A - 0.3010300.0$$

setzt, wo $C$ aus $A$ durch die Matth. Tafeln gegeben ist, so wird

$$a^{i+1} = \alpha^i, \qquad b^{i+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha^i+\beta^i-\gamma^i), \qquad c^{i+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha^i-\beta^i+\gamma^i),$$

und daher immer $a^i = b^i + c^i$. Wenn daher $\log\frac{1}{n}$, $\log\operatorname{tg}\varphi$ gegeben ist, so hat man zur Berechnung aller vorstehenden Gröfsen nur achtmal in die Tafeln zu



gehen. Hiermit ist aber schon fast alles gegeben, was zur Berechnung der ganzen und unbestimmten Integrale erster und zweiter Gattung und der Gröfsen $\log q$ und $\log\Theta$ erforderlich ist. Denn man hat zunächst:

$$\log\mu = \log\frac{\pi}{2F^1} = \log n + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{2}a'' + \tfrac{1}{2}a''' = 9.7539439.0.$$

Um $\log q$ zu finden, braucht man noch den log. des vierten Theils des Moduls

$$\log\lambda = \log\tfrac{1}{4}\sqrt{mm-nn} = 9.3828837.7;$$

dann wird

$$\log q = 2\log\lambda + a - 3[\tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{4}a'' + \tfrac{1}{8}a'''] = 9.2122768.7.$$

Setzt man ferner $\Phi = F(\varphi)$, so wird

$$\log\operatorname{tg}\mu\Phi = \log\operatorname{tg}\varphi + \log\frac{\mu}{m} - [b' + b'' + b'''] = 9.7614393.0.$$

Der genaue Werth von $x = \mu\Phi$ ist $30^0$, und man hat nach den Tafeln $\log\operatorname{tg}30^0 = 9.7614393.7$. Man findet ferner:

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \int_0^{\varphi}\Big[E(\varphi) - \frac{E^1}{F^1}F(\varphi)\Big]\frac{d\varphi}{\Delta}$$
$$= \tfrac{1}{2}b + b' + 2b'' + 4b''' - [\beta + 2\beta' + 4\beta''] = 0.0928153.9.$$

Um die Integrale zweiter Gattung zu erhalten, mufs man zuvor durch Addition und Subtraction die Logarithmen der Gröfsen $m^i, n^i, \lambda^i$ bilden:

$$\log n' = 9.7064981, \qquad \log m' = 9.7989333.2, \qquad \log\lambda' = 8.9668342,$$
$$\log n'' = 9.7527157.1, \qquad \log m'' = 9.7551702.9, \qquad \log\lambda'' = 8.1784981,$$
$$\log n''' = 9.7539430.0, \qquad \log m''' = 9.7539448.0, \qquad \log\lambda''' = 6.60305,$$
$$\log n^{\text{IV}} = 9.7539439.0, \qquad \log m^{\text{IV}} = 9.7539439.0, \qquad \log\lambda^{\text{IV}} = 3.452.$$

Hier ist

$$\log n^{i+1} = \log n^i + \tfrac{1}{2}a^i, \qquad \log m^i = \log n^i + a^i, \qquad \log\lambda^{i+1} = 2\log\lambda^i - \log m^{i+1}.$$

Hiernach findet man:

$$\log\frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = 9.4689309, \qquad \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = 0.2943952.7,$$
$$\log\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = 8.1932888, \qquad \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = 0.0156059.0,$$
$$\log\frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} = 5.34343, \qquad \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} = 0.0000220.5,$$
$$\nu = 0.3100232.2.$$

Der gefundene Werth von $\nu$, welcher das Aufschlagen dreier Zahlen erforderte, giebt:

$$\nu = -\frac{1}{F^1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}; \qquad \frac{E^1}{F^1} = \frac{mm+nn}{2mm} - \frac{mm-nn}{2mm}\nu.$$

Zur Berechnung des unbestimmten Integrals zweiter Gattung geht man von den Werthen von $\log\sin\varphi$, $\log\cos\varphi$ aus und findet dann durch successives Addiren:

$$\begin{array}{rlrl}
\log\frac{\sin\varphi}{m} & = 9.8645412.7 & \log\cos\varphi & = 9.8333065.7 \\
\frac{1}{2}b-\beta & = 0.0687692.8 & b'+\frac{1}{2}b-\beta & = 0.0918943.9 \\ \hline
\log\frac{\sin\varphi'}{m'} & = 9.9333105.5 & \log\cos\varphi' & = 9.9252009.6 \\
\frac{1}{2}b'-\beta' & = 0.0114085.9 & b''+\frac{1}{2}b'-\beta' & = 0.0120222.6 \\ \hline
\log\frac{\sin\varphi''}{m''} & = 9.9447191.4 & \log\cos\varphi'' & = 9.9372232.2 \\
\frac{1}{2}b''-\beta'' & = 0.0003067.4 & b'''+\frac{1}{2}b''-\beta'' & = 0.0003072.4 \\ \hline
\log\frac{\sin\varphi'''}{m'''} & = 9.9450258.8 & \log\cos\varphi''' & = 9.9375304.6 \\
\frac{1}{2}b''' & = \phantom{0.000000}2.5 & & \\ \hline
\log\frac{\sin\varphi^{\mathrm{IV}}}{m^{\mathrm{IV}}} & = 9.9450261.3 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} & = 9.7666171.2 & \frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} & = 0.5842747.0 \\
\log\frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} & = 9.3388510.0 & \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} & = 0.2181981.5 \\
\log\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''} & = 8.0755378.6 & \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''} & = 0.0118997.5 \\
\log\frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'''\sin\varphi^{\mathrm{IV}}}{m^{\mathrm{IV}}} & = 5.22599 & \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'''\sin\varphi^{\mathrm{IV}}}{m^{\mathrm{IV}}} & = 0.0000168.3 \\ \cline{4-4}
\log\nu & = 9.4913942.9 & & \phantom{=}\, 0.8143894.3 \\
\log\nu\Phi = \log\frac{\nu}{\mu}\,30^0 & = 9.4564490.9 & \nu\Phi & = 0.2860547.2
\end{array}$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = 0.5283347.1.$$

Man hat zur Berechnung des vorstehenden Integrals zwar nur fünf Zahlen



aufzuschlagen, aber sehr viele Additionen zu machen. Es wird daher eben so vortheilhaft die Gröfse $\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}+\cdots$ auch durch die Formel

$$\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} + \cdots$$

$$= \frac{1}{8\lambda\lambda}\left\{E(\varphi) - \frac{E^1}{F^1}F(\varphi)\right\} = \frac{1}{2\lambda\lambda\mu}\cdot\frac{q\sin 2x - 2q^4\sin 4x + 3q^9\sin 6x - \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots}$$

berechnet werden können. Da hier $x = 30^0$ und $\log q = 9.2122768.7$ ist, so findet man, wenn man den Bruch mit $\frac{Z}{N}$ bezeichnet,

$$\begin{array}{rlrl}
q\sin 2x & = 0.1411911.5 & q\cos 2x & = 0.0815167.5 \\
2q^4\sin 4x & = 0.0012236.8 & -q^4\cos 4x & = 0.0003532.4 \\ \cline{2-2}
Z & = 0.1399674.7 & -q^9\cos 6x & = \phantom{0.000000}0.8 \\
\log Z & = 9.1460271.7 & N & = 0.8362601.8 \\
\log N & = 9.9223413.9 & & = 1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x \\
\log\frac{Z}{2\lambda\lambda\mu N} & = 9.9108321.4; & \frac{1}{2\lambda\lambda\mu}\cdot\frac{Z}{N} & = 0.8143894.4.
\end{array}$$

Die frühere Rechnung gab dieselbe Gröfse 0.8143894.3. Den Werth von $\log N$ kann man auch aus der Formel

$$\log N = \log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} + \frac{1}{2}\log\frac{n}{\mu}$$

erhalten. Wir fanden aber oben:

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = 0.0928153.9,$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{n}{\mu} = 9.8295261.5,$$

und hieraus wird

$$\log N = 9.9223415.4,$$

welches nur um 1.5 in der 7ten Stelle von dem durch die Reihen-Entwicklung gefundenen Werthe abweicht.

Sehr leicht wird die Berechnung von $\nu$ durch die Formel:

$$-(1+\sqrt{k'})\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = (1-\sqrt{k'})F^1 - \frac{\pi D}{k^2\left(\frac{2F^1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

oder:

$$\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\nu}{\mu} = \frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{\mu} - \frac{\mu^{\frac{3}{2}}D}{8\lambda\lambda}.$$

Es ist

$$\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{m-n}{2(m'+n')} = \frac{mm-nn}{2(m'+n')(m+n)} = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''}$$

$$\sqrt{m}+\sqrt{n} = \sqrt{2(m'+n')} = 2\sqrt{m''},$$

und daher, wenn man $q^{16}$, als unmerklich, wegläſst,

$$\nu = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} - \frac{\sqrt{m}\,.\,\mu^{\frac{5}{2}}D}{16\lambda\lambda\sqrt{m''}} = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} - \frac{4\sqrt{m}\,.\,\mu^{\frac{5}{2}}q^4}{\sqrt{m''}\,.\,\lambda\lambda}.$$

Es ist

$$\log\frac{2\lambda\lambda}{m'm''} = 9.5126939.3; \qquad \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} = 0.3256071.8,$$

$$\log\frac{4\sqrt{m}\,.\,\mu^{\frac{5}{2}}q^4}{\sqrt{m''}\,.\,\lambda\lambda} = 8.1926745.4; \qquad \frac{4\sqrt{m}\,.\,\mu^{\frac{5}{2}}q^4}{\sqrt{m''}\,.\,\lambda\lambda} = 0.0155838.4,$$

$$\nu = 0.3100233.4;$$

welches nur um 1.2 in der 7ten Stelle vom oben gefundenen Werthe abweicht.

Königsberg, den 12. Juni 1843.

---

Ich füge die folgende Tabelle hinzu, welche für die Werthe des Argumentes $\vartheta = \arcsin k$ von Zehntel zu Zehntel Grad die Werthe von $\log q$ bis auf 5 Decimalstellen nebst den ersten Differenzen giebt.



| $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | Infinitum. | | 5.0 | 6.67813 | 1722 | 10.0 | 7.28185 | 869 |
| 0.1 | 3.27964 | 0.60206 | 5.1 | 6.69535 | 1689 | 10.1 | 7.29054 | 860 |
| 0.2 | 3.88170 | 35218 | 5.2 | 6.71224 | 1657 | 10.2 | 7.29914 | 852 |
| 0.3 | 4.23388 | 24988 | 5.3 | 6.72881 | 1626 | 10.3 | 7.30766 | 844 |
| 0.4 | 4.48376 | 19382 | 5.4 | 6.74507 | 1596 | 10.4 | 7.31610 | 836 |
| 0.5 | 4.67758 | 15836 | 5.5 | 6.76103 | 1567 | 10.5 | 7.32446 | 828 |
| 0.6 | 4.83594 | 13390 | 5.6 | 6.77670 | 1540 | 10.6 | 7.33274 | 820 |
| 0.7 | 4.96984 | 11599 | 5.7 | 6.79210 | 1513 | 10.7 | 7.34094 | 813 |
| 0.8 | 5.08583 | 10231 | 5.8 | 6.80723 | 1488 | 10.8 | 7.34907 | 805 |
| 0.9 | 5.18814 | 9152 | 5.9 | 6.82211 | 1462 | 10.9 | 7.35712 | 798 |
| 1.0 | 5.27966 | 8279 | 6.0 | 6.83673 | 1439 | 11.0 | 7.36510 | 791 |
| 1.1 | 5.36245 | 7457 | 6.1 | 6.85112 | 1415 | 11.1 | 7.37301 | 784 |
| 1.2 | 5.43702 | 7054 | 6.2 | 6.86527 | 1392 | 11.2 | 7.38085 | 777 |
| 1.3 | 5.50756 | 6437 | 6.3 | 6.87919 | 1371 | 11.3 | 7.38862 | 771 |
| 1.4 | 5.57193 | 5994 | 6.4 | 6.89290 | 1349 | 11.4 | 7.39633 | 763 |
| 1.5 | 5.63187 | 5606 | 6.5 | 6.90639 | 1329 | 11.5 | 7.40396 | 758 |
| 1.6 | 5.68793 | 5267 | 6.6 | 6.91968 | 1310 | 11.6 | 7.41154 | 750 |
| 1.7 | 5.74060 | 4965 | 6.7 | 6.93278 | 1289 | 11.7 | 7.41904 | 745 |
| 1.8 | 5.79025 | 4697 | 6.8 | 6.94567 | 1272 | 11.8 | 7.42649 | 738 |
| 1.9 | 5.83722 | 4456 | 6.9 | 6.95839 | 1252 | 11.9 | 7.43387 | 732 |
| 2.0 | 5.88178 | 4239 | 7.0 | 6.97091 | 1236 | 12.0 | 7.44119 | 727 |
| 2.1 | 5.92417 | 4042 | 7.1 | 6.98327 | 1218 | 12.1 | 7.44846 | 720 |
| 2.2 | 5.96459 | 3862 | 7.2 | 6.99545 | 1201 | 12.2 | 7.45566 | 714 |
| 2.3 | 6.00321 | 3697 | 7.3 | 7.00746 | 1185 | 12.3 | 7.46280 | 709 |
| 2.4 | 6.04018 | 3547 | 7.4 | 7.01931 | 1169 | 12.4 | 7.46989 | 703 |
| 2.5 | 6.07565 | 3408 | 7.5 | 7.03100 | 1154 | 12.5 | 7.47692 | 698 |
| 2.6 | 6.10973 | 3279 | 7.6 | 7.04254 | 1139 | 12.6 | 7.48390 | 693 |
| 2.7 | 6.14252 | 3160 | 7.7 | 7.05393 | 1124 | 12.7 | 7.49083 | 686 |
| 2.8 | 6.17412 | 3050 | 7.8 | 7.06517 | 1110 | 12.8 | 7.49769 | 682 |
| 2.9 | 6.20462 | 2946 | 7.9 | 7.07627 | 1096 | 12.9 | 7.50451 | 677 |
| 3.0 | 6.23408 | 2849 | 8.0 | 7.08723 | 1083 | 13.0 | 7.51128 | 671 |
| 3.1 | 6.26257 | 2759 | 8.1 | 7.09806 | 1069 | 13.1 | 7.51799 | 667 |
| 3.2 | 6.29016 | 2674 | 8.2 | 7.10875 | 1056 | 13.2 | 7.52466 | 661 |
| 3.3 | 6.31690 | 2595 | 8.3 | 7.11931 | 1044 | 13.3 | 7.53127 | 657 |
| 3.4 | 6.34285 | 2519 | 8.4 | 7.12975 | 1032 | 13.4 | 7.53784 | 651 |
| 3.5 | 6.36804 | 2449 | 8.5 | 7.14007 | 1020 | 13.5 | 7.54435 | 648 |
| 3.6 | 6.39253 | 2381 | 8.6 | 7.15027 | 1008 | 13.6 | 7.55083 | 642 |
| 3.7 | 6.41634 | 2318 | 8.7 | 7.16035 | 996 | 13.7 | 7.55725 | 638 |
| 3.8 | 6.43952 | 2258 | 8.8 | 7.17031 | 986 | 13.8 | 7.56363 | 633 |
| 3.9 | 6.46210 | 2201 | 8.9 | 7.18017 | 974 | 13.9 | 7.56996 | 629 |
| 4.0 | 6.48411 | 2146 | 9.0 | 7.18991 | 964 | 14.0 | 7.57625 | 625 |
| 4.1 | 6.50557 | 2095 | 9.1 | 7.19955 | 953 | 14.1 | 7.58250 | 620 |
| 4.2 | 6.52652 | 2046 | 9.2 | 7.20908 | 944 | 14.2 | 7.58870 | 616 |
| 4.3 | 6.54698 | 1999 | 9.3 | 7.21852 | 933 | 14.3 | 7.59486 | 612 |
| 4.4 | 6.56697 | 1954 | 9.4 | 7.22785 | 923 | 14.4 | 7.60098 | 607 |
| 4.5 | 6.58651 | 1911 | 9.5 | 7.23708 | 914 | 14.5 | 7.60705 | 604 |
| 4.6 | 6.60562 | 1870 | 9.6 | 7.24622 | 904 | 14.6 | 7.61309 | 599 |
| 4.7 | 6.62432 | 1831 | 9.7 | 7.25526 | 895 | 14.7 | 7.61908 | 596 |
| 4.8 | 6.64263 | 1793 | 9.8 | 7.26421 | 887 | 14.8 | 7.62504 | 591 |
| 4.9 | 6.66056 | 1757 | 9.9 | 7.27308 | 877 | 14.9 | 7.63095 | 588 |
| 5.0 | 6.67813 | 1722 | 10.0 | 7.28185 | 869 | 15.0 | 7.63683 | 584 |

| ϑ | log. q | Diff. I. | ϑ | log. q | Diff. I. | ϑ | log. q | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15.0 | 7.63683 | 584 | 20.0 | 7.89068 | 443 | 25.0 | 8.08971 | 359 |
| 15.1 | 7.64267 | 580 | 20.1 | 7.89511 | 440 | 25.1 | 8.09330 | 357 |
| 15.2 | 7.64847 | 577 | 20.2 | 7.89951 | 438 | 25.2 | 8.09687 | 356 |
| 15.3 | 7.65424 | 572 | 20.3 | 7.90389 | 436 | 25.3 | 8.10043 | 354 |
| 15.4 | 7.65996 | 570 | 20.4 | 7.90825 | 434 | 25.4 | 8.10397 | 354 |
| 15.5 | 7.66566 | 565 | 20.5 | 7.91259 | 433 | 25.5 | 8.10751 | 351 |
| 15.6 | 7.67131 | 562 | 20.6 | 7.91692 | 430 | 25.6 | 8.11102 | 351 |
| 15.7 | 7.67693 | 559 | 20.7 | 7.92122 | 428 | 25.7 | 8.11453 | 350 |
| 15.8 | 7.68252 | 555 | 20.8 | 7.92550 | 426 | 25.8 | 8.11803 | 348 |
| 15.9 | 7.68807 | 552 | 20.9 | 7.92976 | 424 | 25.9 | 8.12151 | 347 |
| 16.0 | 7.69359 | 548 | 21.0 | 7.93400 | 423 | 26.0 | 8.12498 | 345 |
| 16.1 | 7.69907 | 545 | 21.1 | 7.93823 | 420 | 26.1 | 8.12843 | 345 |
| 16.2 | 7.70452 | 542 | 21.2 | 7.94243 | 418 | 26.2 | 8.13188 | 343 |
| 16.3 | 7.70994 | 539 | 21.3 | 7.94661 | 417 | 26.3 | 8.13531 | 342 |
| 16.4 | 7.71533 | 535 | 21.4 | 7.95078 | 415 | 26.4 | 8.13873 | 341 |
| 16.5 | 7.72068 | 533 | 21.5 | 7.95493 | 413 | 26.5 | 8.14214 | 340 |
| 16.6 | 7.72601 | 529 | 21.6 | 7.95906 | 411 | 26.6 | 8.14554 | 338 |
| 16.7 | 7.73130 | 526 | 21.7 | 7.96317 | 409 | 26.7 | 8.14892 | 338 |
| 16.8 | 7.73656 | 523 | 21.8 | 7.96726 | 408 | 26.8 | 8.15230 | 336 |
| 16.9 | 7.74179 | 520 | 21.9 | 7.97134 | 406 | 26.9 | 8.15566 | 335 |
| 17.0 | 7.74699 | 517 | 22.0 | 7.97540 | 404 | 27.0 | 8.15901 | 334 |
| 17.1 | 7.75216 | 515 | 22.1 | 7.97944 | 402 | 27.1 | 8.16235 | 333 |
| 17.2 | 7.75731 | 511 | 22.2 | 7.98346 | 401 | 27.2 | 8.16568 | 331 |
| 17.3 | 7.76242 | 508 | 22.3 | 7.98747 | 399 | 27.3 | 8.16899 | 331 |
| 17.4 | 7.76750 | 507 | 22.4 | 7.99146 | 397 | 27.4 | 8.17230 | 329 |
| 17.5 | 7.77257 | 502 | 22.5 | 7.99543 | 396 | 27.5 | 8.17559 | 329 |
| 17.6 | 7.77759 | 500 | 22.6 | 7.99939 | 394 | 27.6 | 8.17888 | 327 |
| 17.7 | 7.78259 | 498 | 22.7 | 8.00333 | 392 | 27.7 | 8.18215 | 326 |
| 17.8 | 7.78757 | 494 | 22.8 | 8.00725 | 391 | 27.8 | 8.18541 | 325 |
| 17.9 | 7.79251 | 492 | 22.9 | 8.01116 | 389 | 27.9 | 8.18866 | 324 |
| 18.0 | 7.79743 | 490 | 23.0 | 8.01505 | 388 | 28.0 | 8.19190 | 323 |
| 18.1 | 7.80233 | 487 | 23.1 | 8.01893 | 386 | 28.1 | 8.19513 | 322 |
| 18.2 | 7.80720 | 484 | 23.2 | 8.02279 | 384 | 28.2 | 8.19835 | 321 |
| 18.3 | 7.81204 | 482 | 23.3 | 8.02663 | 383 | 28.3 | 8.20156 | 320 |
| 18.4 | 7.81686 | 479 | 23.4 | 8.03046 | 381 | 28.4 | 8.20476 | 319 |
| 18.5 | 7.82165 | 476 | 23.5 | 8.03427 | 380 | 28.5 | 8.20795 | 318 |
| 18.6 | 7.82641 | 475 | 23.6 | 8.03807 | 378 | 28.6 | 8.21113 | 317 |
| 18.7 | 7.83116 | 471 | 23.7 | 8.04185 | 377 | 28.7 | 8.21430 | 315 |
| 18.8 | 7.83587 | 470 | 23.8 | 8.04562 | 375 | 28.8 | 8.21745 | 315 |
| 18.9 | 7.84057 | 467 | 23.9 | 8.04937 | 374 | 28.9 | 8.22060 | 314 |
| 19.0 | 7.84524 | 464 | 24.0 | 8.05311 | 372 | 29.0 | 8.22374 | 313 |
| 19.1 | 7.84988 | 463 | 24.1 | 8.05683 | 371 | 29.1 | 8.22687 | 312 |
| 19.2 | 7.85451 | 460 | 24.2 | 8.06054 | 370 | 29.2 | 8.22999 | 311 |
| 19.3 | 7.85911 | 457 | 24.3 | 8.06424 | 368 | 29.3 | 8.23310 | 310 |
| 19.4 | 7.86368 | 456 | 24.4 | 8.06792 | 367 | 29.4 | 8.23620 | 309 |
| 19.5 | 7.86824 | 453 | 24.5 | 8.07159 | 365 | 29.5 | 8.23929 | 308 |
| 19.6 | 7.87277 | 451 | 24.6 | 8.07524 | 364 | 29.6 | 8.24237 | 307 |
| 19.7 | 7.87728 | 449 | 24.7 | 8.07888 | 362 | 29.7 | 8.24544 | 306 |
| 19.8 | 7.88177 | 447 | 24.8 | 8.08250 | 361 | 29.8 | 8.24850 | 306 |
| 19.9 | 7.88624 | 444 | 24.9 | 8.08611 | 360 | 29.9 | 8.25156 | 305 |
| 20.0 | 7.89068 | 443 | 25.0 | 8.08971 | 359 | 30.0 | 8.25461 | 303 |



| ϑ | log. q | Diff. I. | ϑ | log. q | Diff. I. | ϑ | log. q | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30.0 | 8.25461 | 303 | 35.0 | 8.39646 | 265 | 40.0 | 8.52199 | 238 |
| 30.1 | 8.25764 | 303 | 35.1 | 8.39911 | 265 | 40.1 | 8.52437 | 237 |
| 30.2 | 8.26067 | 301 | 35.2 | 8.40176 | 264 | 40.2 | 8.52674 | 237 |
| 30.3 | 8.26368 | 301 | 35.3 | 8.40440 | 264 | 40.3 | 8.52911 | 236 |
| 30.4 | 8.26669 | 301 | 35.4 | 8.40704 | 262 | 40.4 | 8.53147 | 236 |
| 30.5 | 8.26970 | 301 | 35.5 | 8.40966 | 262 | 40.5 | 8.53383 | 235 |
| 30.6 | 8.27268 | 298 | 35.6 | 8.41228 | 262 | 40.6 | 8.53618 | 235 |
| 30.7 | 8.27567 | 297 | 35.7 | 8.41490 | 261 | 40.7 | 8.53853 | 235 |
| 30.8 | 8.27864 | 296 | 35.8 | 8.41751 | 260 | 40.8 | 8.54088 | 234 |
| 30.9 | 8.28160 | 296 | 35.9 | 8.42011 | 260 | 40.9 | 8.54322 | 233 |
| 31.0 | 8.28456 | 295 | 36.0 | 8.42271 | 259 | 41.0 | 8.54555 | 233 |
| 31.1 | 8.28751 | 294 | 36.1 | 8.42530 | 258 | 41.1 | 8.54788 | 233 |
| 31.2 | 8.29045 | 293 | 36.2 | 8.42788 | 258 | 41.2 | 8.55021 | 233 |
| 31.3 | 8.29338 | 292 | 36.3 | 8.43046 | 257 | 41.3 | 8.55254 | 232 |
| 31.4 | 8.29630 | 292 | 36.4 | 8.43303 | 257 | 41.4 | 8.55486 | 231 |
| 31.5 | 8.29922 | 290 | 36.5 | 8.43560 | 256 | 41.5 | 8.55717 | 231 |
| 31.6 | 8.30212 | 290 | 36.6 | 8.43816 | 256 | 41.6 | 8.55948 | 230 |
| 31.7 | 8.30502 | 289 | 36.7 | 8.44072 | 255 | 41.7 | 8.56178 | 230 |
| 31.8 | 8.30791 | 288 | 36.8 | 8.44327 | 254 | 41.8 | 8.56408 | 230 |
| 31.9 | 8.31079 | 288 | 36.9 | 8.44581 | 254 | 41.9 | 8.56638 | 229 |
| 32.0 | 8.31367 | 287 | 37.0 | 8.44835 | 253 | 42.0 | 8.56867 | 229 |
| 32.1 | 8.31654 | 286 | 37.1 | 8.45088 | 253 | 42.1 | 8.57096 | 229 |
| 32.2 | 8.31940 | 285 | 37.2 | 8.45341 | 252 | 42.2 | 8.57325 | 228 |
| 32.3 | 8.32225 | 284 | 37.3 | 8.45593 | 251 | 42.3 | 8.57553 | 227 |
| 32.4 | 8.32509 | 283 | 37.4 | 8.45844 | 251 | 42.4 | 8.57780 | 227 |
| 32.5 | 8.32792 | 283 | 37.5 | 8.46095 | 251 | 42.5 | 8.58007 | 227 |
| 32.6 | 8.33075 | 282 | 37.6 | 8.46346 | 250 | 42.6 | 8.58234 | 227 |
| 32.7 | 8.33357 | 281 | 37.7 | 8.46596 | 249 | 42.7 | 8.58461 | 226 |
| 32.8 | 8.33638 | 281 | 37.8 | 8.46845 | 249 | 42.8 | 8.58687 | 225 |
| 32.9 | 8.33919 | 280 | 37.9 | 8.47094 | 248 | 42.9 | 8.58912 | 225 |
| 33.0 | 8.34199 | 279 | 38.0 | 8.47342 | 248 | 43.0 | 8.59137 | 225 |
| 33.1 | 8.34478 | 278 | 38.1 | 8.47590 | 247 | 43.1 | 8.59362 | 225 |
| 33.2 | 8.34756 | 278 | 38.2 | 8.47837 | 247 | 43.2 | 8.59587 | 224 |
| 33.3 | 8.35034 | 277 | 38.3 | 8.48084 | 246 | 43.3 | 8.59811 | 224 |
| 33.4 | 8.35311 | 276 | 38.4 | 8.48330 | 245 | 43.4 | 8.60035 | 223 |
| 33.5 | 8.35587 | 275 | 38.5 | 8.48575 | 245 | 43.5 | 8.60258 | 223 |
| 33.6 | 8.35862 | 275 | 38.6 | 8.48820 | 245 | 43.6 | 8.60481 | 222 |
| 33.7 | 8.36137 | 274 | 38.7 | 8.49065 | 244 | 43.7 | 8.60703 | 222 |
| 33.8 | 8.36411 | 273 | 38.8 | 8.49309 | 244 | 43.8 | 8.60925 | 222 |
| 33.9 | 8.36684 | 273 | 38.9 | 8.49553 | 243 | 43.9 | 8.61147 | 221 |
| 34.0 | 8.36957 | 272 | 39.0 | 8.49796 | 242 | 44.0 | 8.61368 | 221 |
| 34.1 | 8.37229 | 271 | 39.1 | 8.50038 | 242 | 44.1 | 8.61589 | 221 |
| 34.2 | 8.37500 | 271 | 39.2 | 8.50280 | 242 | 44.2 | 8.61810 | 221 |
| 34.3 | 8.37771 | 270 | 39.3 | 8.50522 | 241 | 44.3 | 8.62031 | 220 |
| 34.4 | 8.38041 | 269 | 39.4 | 8.50763 | 240 | 44.4 | 8.62251 | 219 |
| 34.5 | 8.38310 | 269 | 39.5 | 8.51003 | 240 | 44.5 | 8.62470 | 219 |
| 34.6 | 8.38579 | 268 | 39.6 | 8.51243 | 240 | 44.6 | 8.62689 | 219 |
| 34.7 | 8.38847 | 267 | 39.7 | 8.51483 | 239 | 44.7 | 8.62908 | 219 |
| 34.8 | 8.39114 | 266 | 39.8 | 8.51722 | 239 | 44.8 | 8.63127 | 218 |
| 34.9 | 8.39380 | 266 | 39.9 | 8.51961 | 238 | 44.9 | 8.63345 | 218 |
| 35.0 | 8.39646 | 265 | 40.0 | 8.52199 | 238 | 45.0 | 8.63563 | 217 |

| ϑ | log. q | Diff. I. | ϑ | log. q | Diff. I. | ϑ | log. q | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45.0 | 8.63563 | 217 | 50.0 | 8.74052 | 203 | 55.0 | 8.83912 | 192 |
| 45.1 | 8.63780 | 217 | 50.1 | 8.74255 | 202 | 55.1 | 8.84104 | 192 |
| 45.2 | 8.63997 | 217 | 50.2 | 8.74457 | 202 | 55.2 | 8.84296 | 192 |
| 45.3 | 8.64214 | 216 | 50.3 | 8.74659 | 202 | 55.3 | 8.84488 | 191 |
| 45.4 | 8.64430 | 216 | 50.4 | 8.74861 | 202 | 55.4 | 8.84679 | 192 |
| 45.5 | 8.64646 | 216 | 50.5 | 8.75063 | 201 | 55.5 | 8.84871 | 191 |
| 45.6 | 8.64862 | 215 | 50.6 | 8.75264 | 201 | 55.6 | 8.85062 | 192 |
| 45.7 | 8.65077 | 215 | 50.7 | 8.75465 | 201 | 55.7 | 8.85254 | 191 |
| 45.8 | 8.65292 | 215 | 50.8 | 8.75666 | 201 | 55.8 | 8.85445 | 190 |
| 45.9 | 8.65507 | 215 | 50.9 | 8.75867 | 201 | 55.9 | 8.85635 | 191 |
| 46.0 | 8.65722 | 214 | 51.0 | 8.76068 | 200 | 56.0 | 8.85826 | 191 |
| 46.1 | 8.65936 | 214 | 51.1 | 8.76268 | 200 | 56.1 | 8.86017 | 190 |
| 46.2 | 8.66150 | 213 | 51.2 | 8.76468 | 199 | 56.2 | 8.86207 | 191 |
| 46.3 | 8.66363 | 213 | 51.3 | 8.76667 | 200 | 56.3 | 8.86398 | 190 |
| 46.4 | 8.66576 | 213 | 51.4 | 8.76867 | 199 | 56.4 | 8.86588 | 190 |
| 46.5 | 8.66789 | 212 | 51.5 | 8.77066 | 199 | 56.5 | 8.86778 | 190 |
| 46.6 | 8.67001 | 212 | 51.6 | 8.77265 | 199 | 56.6 | 8.86968 | 189 |
| 46.7 | 8.67213 | 212 | 51.7 | 8.77464 | 199 | 56.7 | 8.87157 | 190 |
| 46.8 | 8.67425 | 212 | 51.8 | 8.77663 | 198 | 56.8 | 8.87347 | 189 |
| 46.9 | 8.67637 | 211 | 51.9 | 8.77861 | 198 | 56.9 | 8.87536 | 190 |
| 47.0 | 8.67848 | 211 | 52.0 | 8.78059 | 198 | 57.0 | 8.87726 | 189 |
| 47.1 | 8.68059 | 211 | 52.1 | 8.78257 | 198 | 57.1 | 8.87915 | 189 |
| 47.2 | 8.68270 | 210 | 52.2 | 8.78455 | 198 | 57.2 | 8.88104 | 189 |
| 47.3 | 8.68480 | 210 | 52.3 | 8.78653 | 197 | 57.3 | 8.88293 | 188 |
| 47.4 | 8.68690 | 210 | 52.4 | 8.78850 | 197 | 57.4 | 8.88481 | 189 |
| 47.5 | 8.68900 | 209 | 52.5 | 8.79047 | 197 | 57.5 | 8.88670 | 188 |
| 47.6 | 8.69109 | 209 | 52.6 | 8.79244 | 197 | 57.6 | 8.88858 | 189 |
| 47.7 | 8.69318 | 209 | 52.7 | 8.79441 | 196 | 57.7 | 8.89047 | 188 |
| 47.8 | 8.69527 | 209 | 52.8 | 8.79637 | 197 | 57.8 | 8.89235 | 188 |
| 47.9 | 8.69736 | 208 | 52.9 | 8.79834 | 196 | 57.9 | 8.89423 | 188 |
| 48.0 | 8.69944 | 208 | 53.0 | 8.80030 | 196 | 58.0 | 8.89611 | 188 |
| 48.1 | 8.70152 | 208 | 53.1 | 8.80226 | 195 | 58.1 | 8.89799 | 188 |
| 48.2 | 8.70360 | 207 | 53.2 | 8.80421 | 196 | 58.2 | 8.89987 | 187 |
| 48.3 | 8.70567 | 207 | 53.3 | 8.80617 | 195 | 58.3 | 8.90174 | 188 |
| 48.4 | 8.70774 | 207 | 53.4 | 8.80812 | 195 | 58.4 | 8.90362 | 187 |
| 48.5 | 8.70981 | 207 | 53.5 | 8.81007 | 195 | 58.5 | 8.90549 | 187 |
| 48.6 | 8.71188 | 206 | 53.6 | 8.81202 | 195 | 58.6 | 8.90736 | 187 |
| 48.7 | 8.71394 | 207 | 53.7 | 8.81397 | 194 | 58.7 | 8.90923 | 187 |
| 48.8 | 8.71601 | 205 | 53.8 | 8.81591 | 194 | 58.8 | 8.91110 | 187 |
| 48.9 | 8.71806 | 205 | 53.9 | 8.81785 | 194 | 58.9 | 8.91297 | 187 |
| 49.0 | 8.72011 | 206 | 54.0 | 8.81979 | 195 | 59.0 | 8.91484 | 187 |
| 49.1 | 8.72217 | 205 | 54.1 | 8.82174 | 194 | 59.1 | 8.91671 | 186 |
| 49.2 | 8.72422 | 204 | 54.2 | 8.82368 | 193 | 59.2 | 8.91857 | 187 |
| 49.3 | 8.72626 | 205 | 54.3 | 8.82561 | 194 | 59.3 | 8.92044 | 186 |
| 49.4 | 8.72831 | 204 | 54.4 | 8.82755 | 193 | 59.4 | 8.92230 | 186 |
| 49.5 | 8.73035 | 204 | 54.5 | 8.82948 | 193 | 59.5 | 8.92416 | 187 |
| 49.6 | 8.73239 | 204 | 54.6 | 8.83141 | 193 | 59.6 | 8.92603 | 186 |
| 49.7 | 8.73443 | 203 | 54.7 | 8.83334 | 193 | 59.7 | 8.92789 | 186 |
| 49.8 | 8.73646 | 203 | 54.8 | 8.83527 | 192 | 59.8 | 8.92975 | 186 |
| 49.9 | 8.73849 | 203 | 54.9 | 8.83719 | 193 | 59.9 | 8.93161 | 186 |
| 50.0 | 8.74052 | 203 | 55.0 | 8.83912 | 192 | 60.0 | 8.93347 | 185 |



| ϑ | log. q | Diff. I. | ϑ | log. q | Diff. I. | ϑ | log. q | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60.0 | 8.93347 | 185 | 65.0 | 9.02553 | 183 | 70.0 | 9.11748 | 185 |
| 60.1 | 8.93532 | 186 | 65.1 | 9.02736 | 183 | 70.1 | 9.11933 | 186 |
| 60.2 | 8.93718 | 185 | 65.2 | 9.02919 | 183 | 70.2 | 9.12119 | 186 |
| 60.3 | 8.93903 | 186 | 65.3 | 9.03102 | 183 | 70.3 | 9.12305 | 186 |
| 60.4 | 8.94089 | 185 | 65.4 | 9.03285 | 184 | 70.4 | 9.12491 | 186 |
| 60.5 | 8.94274 | 185 | 65.5 | 9.03469 | 183 | 70.5 | 9.12677 | 186 |
| 60.6 | 8.94459 | 186 | 65.6 | 9.03652 | 183 | 70.6 | 9.12863 | 186 |
| 60.7 | 8.94645 | 185 | 65.7 | 9.03835 | 183 | 70.7 | 9.13049 | 187 |
| 60.8 | 8.94830 | 185 | 65.8 | 9.04018 | 184 | 70.8 | 9.13236 | 186 |
| 60.9 | 8.95015 | 185 | 65.9 | 9.04202 | 183 | 70.9 | 9.13422 | 187 |
| 61.0 | 8.95200 | 185 | 66.0 | 9.04385 | 183 | 71.0 | 9.13609 | 187 |
| 61.1 | 8.95385 | 184 | 66.1 | 9.04568 | 183 | 71.1 | 9.13796 | 187 |
| 61.2 | 8.95569 | 185 | 66.2 | 9.04751 | 183 | 71.2 | 9.13983 | 187 |
| 61.3 | 8.95754 | 185 | 66.3 | 9.04934 | 184 | 71.3 | 9.14170 | 187 |
| 61.4 | 8.95939 | 184 | 66.4 | 9.05118 | 183 | 71.4 | 9.14357 | 187 |
| 61.5 | 8.96123 | 185 | 66.5 | 9.05301 | 183 | 71.5 | 9.14544 | 188 |
| 61.6 | 8.96308 | 184 | 66.6 | 9.05484 | 184 | 71.6 | 9.14732 | 188 |
| 61.7 | 8.96492 | 185 | 66.7 | 9.05668 | 183 | 71.7 | 9.14920 | 188 |
| 61.8 | 8.96677 | 184 | 66.8 | 9.05851 | 184 | 71.8 | 9.15108 | 188 |
| 61.9 | 8.96861 | 184 | 66.9 | 9.06035 | 183 | 71.9 | 9.15296 | 188 |
| 62.0 | 8.97045 | 184 | 67.0 | 9.06218 | 184 | 72.0 | 9.15484 | 188 |
| 62.1 | 8.97229 | 185 | 67.1 | 9.06402 | 183 | 72.1 | 9.15672 | 189 |
| 62.2 | 8.97414 | 184 | 67.2 | 9.06585 | 184 | 72.2 | 9.15861 | 189 |
| 62.3 | 8.97598 | 184 | 67.3 | 9.06769 | 183 | 72.3 | 9.16050 | 189 |
| 62.4 | 8.97782 | 184 | 67.4 | 9.06952 | 184 | 72.4 | 9.16239 | 189 |
| 62.5 | 8.97966 | 184 | 67.5 | 9.07136 | 184 | 72.5 | 9.16428 | 189 |
| 62.6 | 8.98150 | 183 | 67.6 | 9.07320 | 183 | 72.6 | 9.16617 | 189 |
| 62.7 | 8.98333 | 184 | 67.7 | 9.07503 | 184 | 72.7 | 9.16806 | 190 |
| 62.8 | 8.98517 | 184 | 67.8 | 9.07687 | 184 | 72.8 | 9.16996 | 190 |
| 62.9 | 8.98701 | 184 | 67.9 | 9.07871 | 184 | 72.9 | 9.17186 | 190 |
| 63.0 | 8.98885 | 184 | 68.0 | 9.08055 | 184 | 73.0 | 9.17376 | 190 |
| 63.1 | 8.99069 | 183 | 68.1 | 9.08239 | 184 | 73.1 | 9.17566 | 191 |
| 63.2 | 8.99252 | 184 | 68.2 | 9.08423 | 184 | 73.2 | 9.17757 | 191 |
| 63.3 | 8.99436 | 183 | 68.3 | 9.08607 | 184 | 73.3 | 9.17948 | 191 |
| 63.4 | 8.99619 | 184 | 68.4 | 9.08791 | 184 | 73.4 | 9.18139 | 191 |
| 63.5 | 8.99803 | 183 | 68.5 | 9.08975 | 184 | 73.5 | 9.18330 | 191 |
| 63.6 | 8.99986 | 184 | 68.6 | 9.09159 | 185 | 73.6 | 9.18521 | 192 |
| 63.7 | 9.00170 | 183 | 68.7 | 9.09344 | 184 | 73.7 | 9.18713 | 192 |
| 63.8 | 9.00353 | 184 | 68.8 | 9.09528 | 185 | 73.8 | 9.18905 | 192 |
| 63.9 | 9.00537 | 183 | 68.9 | 9.09713 | 184 | 73.9 | 9.19097 | 192 |
| 64.0 | 9.00720 | 183 | 69.0 | 9.09897 | 185 | 74.0 | 9.19289 | 193 |
| 64.1 | 9.00903 | 184 | 69.1 | 9.10082 | 185 | 74.1 | 9.19482 | 193 |
| 64.2 | 9.01087 | 183 | 69.2 | 9.10267 | 184 | 74.2 | 9.19675 | 193 |
| 64.3 | 9.01270 | 183 | 69.3 | 9.10451 | 185 | 74.3 | 9.19868 | 193 |
| 64.4 | 9.01453 | 184 | 69.4 | 9.10636 | 185 | 74.4 | 9.20061 | 194 |
| 64.5 | 9.01637 | 183 | 69.5 | 9.10821 | 185 | 74.5 | 9.20255 | 194 |
| 64.6 | 9.01820 | 183 | 69.6 | 9.11006 | 185 | 74.6 | 9.20449 | 194 |
| 64.7 | 9.02003 | 183 | 69.7 | 9.11191 | 186 | 74.7 | 9.20643 | 195 |
| 64.8 | 9.02186 | 183 | 69.8 | 9.11377 | 185 | 74.8 | 9.20838 | 195 |
| 64.9 | 9.02369 | 184 | 69.9 | 9.11562 | 186 | 74.9 | 9.21033 | 195 |
| 65.0 | 9.02553 | 183 | 70.0 | 9.11748 | 185 | 75.0 | 9.21228 | 195 |

| ϑ | log. $q$ | Diff. I. | ϑ | log. $q$ | Diff. I. | ϑ | log. $q$ | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 75.0 | 9.21228 | 195 | 80.0 | 9.31515 | 220 | 85.0 | 9.43962 | 296 |
| 75.1 | 9.21423 | 196 | 80.1 | 9.31735 | 222 | 85.1 | 9.44256 | 298 |
| 75.2 | 9.21619 | 196 | 80.2 | 9.31957 | 222 | 85.2 | 9.44554 | 301 |
| 75.3 | 9.21815 | 196 | 80.3 | 9.32179 | 222 | 85.3 | 9.44855 | 304 |
| 75.4 | 9.22011 | 197 | 80.4 | 9.32401 | 224 | 85.4 | 9.45159 | 307 |
| 75.5 | 9.22208 | 197 | 80.5 | 9.32625 | 224 | 85.5 | 9.45466 | 310 |
| 75.6 | 9.22405 | 197 | 80.6 | 9.32849 | 225 | 85.6 | 9.45776 | 314 |
| 75.7 | 9.22602 | 198 | 80.7 | 9.33074 | 227 | 85.7 | 9.46090 | 318 |
| 75.8 | 9.22800 | 198 | 80.8 | 9.33301 | 227 | 85.8 | 9.46408 | 321 |
| 75.9 | 9.22998 | 198 | 80.9 | 9.33528 | 228 | 85.9 | 9.46729 | 325 |
| 76.0 | 9.23196 | 199 | 81.0 | 9.33756 | 229 | 86.0 | 9.47054 | 329 |
| 76.1 | 9.23395 | 199 | 81.1 | 9.33985 | 230 | 86.1 | 9.47383 | 334 |
| 76.2 | 9.23594 | 200 | 81.2 | 9.34215 | 230 | 86.2 | 9.47717 | 338 |
| 76.3 | 9.23794 | 200 | 81.3 | 9.34445 | 232 | 86.3 | 9.48055 | 343 |
| 76.4 | 9.23994 | 200 | 81.4 | 9.34677 | 233 | 86.4 | 9.48398 | 348 |
| 76.5 | 9.24194 | 201 | 81.5 | 9.34910 | 234 | 86.5 | 9.48746 | 353 |
| 76.6 | 9.24395 | 201 | 81.6 | 9.35144 | 235 | 86.6 | 9.49099 | 359 |
| 76.7 | 9.24596 | 201 | 81.7 | 9.35379 | 236 | 86.7 | 9.49458 | 364 |
| 76.8 | 9.24797 | 202 | 81.8 | 9.35615 | 238 | 86.8 | 9.49822 | 370 |
| 76.9 | 9.24999 | 203 | 81.9 | 9.35853 | 238 | 86.9 | 9.50192 | 377 |
| 77.0 | 9.25202 | 202 | 82.0 | 9.36091 | 240 | 87.0 | 9.50569 | 384 |
| 77.1 | 9.25404 | 204 | 82.1 | 9.36331 | 240 | 87.1 | 9.50953 | 391 |
| 77.2 | 9.25608 | 203 | 82.2 | 9.36571 | 242 | 87.2 | 9.51344 | 398 |
| 77.3 | 9.25811 | 204 | 82.3 | 9.36813 | 244 | 87.3 | 9.51742 | 407 |
| 77.4 | 9.26015 | 205 | 82.4 | 9.37057 | 244 | 87.4 | 9.52149 | 416 |
| 77.5 | 9.26220 | 205 | 82.5 | 9.37301 | 246 | 87.5 | 9.52565 | 425 |
| 77.6 | 9.26425 | 206 | 82.6 | 9.37547 | 247 | 87.6 | 9.52990 | 435 |
| 77.7 | 9.26631 | 206 | 82.7 | 9.37794 | 249 | 87.7 | 9.53425 | 445 |
| 77.8 | 9.26837 | 206 | 82.8 | 9.38043 | 250 | 87.8 | 9.53870 | 458 |
| 77.9 | 9.27043 | 207 | 82.9 | 9.38293 | 252 | 87.9 | 9.54328 | 470 |
| 78.0 | 9.27250 | 208 | 83.0 | 9.38545 | 253 | 88.0 | 9.54798 | 484 |
| 78.1 | 9.27458 | 208 | 83.1 | 9.38798 | 255 | 88.1 | 9.55282 | 499 |
| 78.2 | 9.27666 | 209 | 83.2 | 9.39053 | 256 | 88.2 | 9.55781 | 515 |
| 78.3 | 9.27875 | 209 | 83.3 | 9.39309 | 258 | 88.3 | 9.56296 | 534 |
| 78.4 | 9.28084 | 210 | 83.4 | 9.39567 | 260 | 88.4 | 9.56830 | 554 |
| 78.5 | 9.28294 | 210 | 83.5 | 9.39827 | 261 | 88.5 | 9.57384 | 577 |
| 78.6 | 9.28504 | 211 | 83.6 | 9.40088 | 263 | 88.6 | 9.57961 | 602 |
| 78.7 | 9.28715 | 211 | 83.7 | 9.40351 | 265 | 88.7 | 9.58563 | 632 |
| 78.8 | 9.28926 | 212 | 83.8 | 9.40616 | 267 | 88.8 | 9.59195 | 665 |
| 78.9 | 9.29138 | 213 | 83.9 | 9.40883 | 269 | 88.9 | 9.59860 | 704 |
| 79.0 | 9.29351 | 214 | 84.0 | 9.41152 | 271 | 89.0 | 9.60564 | 750 |
| 79.1 | 9.29565 | 214 | 84.1 | 9.41423 | 273 | 89.1 | 9.61314 | 805 |
| 79.2 | 9.29779 | 214 | 84.2 | 9.41696 | 275 | 89.2 | 9.62119 | 874 |
| 79.3 | 9.29993 | 215 | 84.3 | 9.41971 | 277 | 89.3 | 9.62993 | 959 |
| 79.4 | 9.30208 | 216 | 84.4 | 9.42248 | 279 | 89.4 | 9.63952 | 1073 |
| 79.5 | 9.30424 | 217 | 84.5 | 9.42527 | 282 | 89.5 | 9.65025 | 1229 |
| 79.6 | 9.30641 | 218 | 84.6 | 9.42809 | 284 | 89.6 | 9.66254 | 1462 |
| 79.7 | 9.30859 | 218 | 84.7 | 9.43093 | 287 | 89.7 | 9.67716 | 1859 |
| 79.8 | 9.31077 | 219 | 84.8 | 9.43380 | 290 | 89.8 | 9.69575 | 2725 |
| 79.9 | 9.31296 | 219 | 84.9 | 9.43670 | 292 | 89.9 | 9.72300 | 27700 |
| 80.0 | 9.31515 | 220 | 85.0 | 9.43962 | 294 | 90.0 | 10.00000 | |

# ÜBER EINIGE
# DIE ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN
# BETREFFENDEN FORMELN

VON

HERRN PROF. DR. C. G. J. JACOBI
ZU BERLIN

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 30. p. 269. 270.

# ÜBER EINIGE DIE ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN BETREFFENDEN FORMELN.

Es sei

$$x = \sin\mathrm{am}(u,k),\qquad \int_0^u (1-k^2x^2)\,du = E(u),\qquad \int_0^u E(u)\,du = \log\Omega(u).$$

Bedeutet $F(x)$ den rationalen Nenner der Substitution, welche eine Transformation der $n$ten Ordnung ergiebt, und $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$ die transformirte Function, so wird

$$(1.)\qquad F(x) = e^{-\tau uu}\cdot\frac{\Omega\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}{\Omega^n(u)},$$

wo $\tau$ eine Constante ist (S. *de functionibus ellipticis comment. prima* §. 2. Gl. (16.)). Es sei

$$x^2 = u^2(1+S_1^{(2)}u^2+S_2^{(2)}u^4+\cdots),$$

so wird

$$E(u) = u-k^2u^3\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}S_1^{(2)}u^2+\frac{1}{7}S_2^{(2)}u^4+\cdots\right\},$$

$$(2.)\qquad \log\Omega(u) = \tfrac{1}{2}u^2-k^2u^4\left\{\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}S_1^{(2)}u^2+\frac{1}{7.8}S_2^{(2)}u^4+\cdots\right\}.$$

Ist $T_m^{(2)}$ dieselbe Function von $\lambda$ wie $S_m^{(2)}$ von $k$, so folgt aus (1.) und (2.):

$$\log F(x) = -k^2\rho u^2-\frac{\lambda^2u^4}{M^4}\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}T_1^{(2)}\frac{u^2}{M^2}+\frac{1}{7.8}T_2^{(2)}\frac{u^4}{M^4}+\cdots\right)$$
$$+nk^2u^4\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}S_1^{(2)}u^2+\frac{1}{7.8}S_2^{(2)}u^4+\cdots\right),$$

wo, wie am a. O. Gl. (6.), $k^2\rho = \frac{n}{2}+\tau-\frac{1}{2M^2}$. Setzt man jetzt

$$u^n = x^n\{1+R_1^{(n)}x^2+R_2^{(n)}x^4+\cdots\},$$
$$\log F(x) = C_1x^2+C_2x^4+C_3x^6+\cdots,$$

so wird

$$(3.)\qquad C_m = -k^2\rho R_{m-1}^{(2)}-\lambda^2\left(\frac{R_{m-2}^{(4)}}{3.4.M^4}+\frac{R_{m-3}^{(6)}T_1^{(2)}}{5.6.M^6}+\frac{R_{m-4}^{(8)}T_2^{(2)}}{7.8.M^8}+\cdots\right)$$
$$+nk^2\left(\frac{R_{m-2}^{(4)}}{3.4}+\frac{R_{m-3}^{(6)}S_1^{(2)}}{5.6}+\frac{R_{m-4}^{(8)}S_2^{(2)}}{7.8}+\cdots\right).$$

Diese Formel umfafst auch die Multiplication. Soll nämlich $F(x)$ den Nenner in dem Ausdrucke von $\sin\mathrm{am}\,nu$ bedeuten, so hat man in (1.) und dem vorstehenden Werthe von $C_m$ nur $\tau = \rho = 0$, $\lambda = k$, $M = \frac{1}{n}$ zu setzen; ferner $n^2$ für $n$ und $S$ für $T$. Hierdurch erhält man:

$$C_m = -k^2 \left\{ \frac{n^4 - n^2}{3.4} R^{(4)}_{m-2} + \frac{n^6 - n^2}{5.6} R^{(6)}_{m-3} S^{(2)}_1 + \frac{n^8 - n^2}{7.8} R^{(8)}_{m-4} S^{(2)}_2 + \cdots \right\}.$$

Auf diesem und ähnlichem Wege erhält man die von Herrn Dr. Eisenstein gegebenen, auf die Multiplication und Transformation bezüglichen Formeln, und zwar als eine unmittelbare Folge der Theoreme, durch welche man vermittelst der Transcendente $\Omega(u)$ den Zähler und Nenner der Multiplications- und Transformationsformeln abgesondert definiren kann.

Setzt man $[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{-\frac{1}{2}} = 1 + c_1 x^2 + c_2 x^4 + \cdots$ und

$$(4.)\quad \tfrac{1}{2}u^2 - \log\Omega(u) = k^2 x^4 (D_0 + D_1 x^2 + D_2 x^4 + \cdots)$$
$$= k^2 \int (1 + c_1 x^2 + c_2 x^4 + \cdots)(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}c_1 x^5 + \tfrac{1}{7}c_2 x^7 + \cdots)\, dx,$$

so wird

$$D_n = \frac{1}{2n+4} \left( \frac{1}{2n+3} c_n + \frac{1}{2n+1} c_1 c_{n-1} + \frac{1}{2n-1} c_2 c_{n-2} + \cdots + \frac{1}{3} c_n \right).$$

Die Gröfse $D_{n-2}$ ist die in (3.) und *Fund.* §. 45. (7.) vorkommende,

$$\frac{1}{3.4} R^{(4)}_{n-2} + \frac{1}{5.6} S^{(2)}_1 R^{(6)}_{n-3} + \frac{1}{7.8} S^{(2)}_2 R^{(8)}_{n-4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} S^{(2)}_{n-2}.$$

Für $k^2 = -1$ oder für die Lemniscate wird $\frac{d^2(x^m)}{du^2} = m(m-1)x^{m-2} - m(m+1)x^{m+2}$. Man erhält daher aus (4.), durch zweimalige Differentiation nach $u$,

$$x^2 = 3.4 D_0 x^2 + 5.6 D_1 x^4 + 7.8 D_2 x^6 + 9.10 D_3 x^8 + 11.12 D_4 x^{10} + \cdots$$
$$- [4.5 D_0 x^6 + 6.7 D_1 x^8 + 8.9 D_2 x^{10} + \cdots],$$

und hieraus $D_1 = D_3 = \cdots = 0$, $D_0 = \frac{1}{3.4}$, $D_2 = \frac{1.5}{3.7.8}$, $\cdots$ also:

$$\log\Omega(u) - \tfrac{1}{2}uu = \frac{x^4}{3.4} + \frac{5.x^8}{3.7.8} + \frac{5.9.x^{12}}{3.7.11.12} + \frac{5.9.13.x^{16}}{3.7.11.15.16} + \cdots$$

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$\tfrac{1}{2}uu = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right)^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{3.x^6}{5.6} + \frac{3.7.x^{10}}{5.9.10} + \frac{3.7.11.x^{14}}{5.9.13.14} + \cdots,$$

$$(n+1)\int_0^u du \int_0^u x^n du = \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{(n+3)x^{n+6}}{(n+5)(n+6)} + \frac{(n+3)(n+7)x^{n+10}}{(n+5)(n+9)(n+10)} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2}u^2 \log x - \int_0^u du \int_0^u \log x\, du = \frac{b_0 x^2}{2} + \frac{3 b_1 x^6}{5.6} + \frac{3.7.b_2 x^{10}}{5.9.10} + \cdots,$$

wo $b_i = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4i+1} + \frac{1}{4i+2}$.

Berlin, im Dec. 1845.

---

ANZEIGE VON

# LEGENDRE THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

## TROISIÈME SUPPLÉMENT

VON

HERRN PROFESSOR DR. C. G. J. JACOBI

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 8. p. 413—417.

# ANZEIGE*) VON LEGENDRE THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

TROISIÈME SUPPLÉMENT P. 169—359.

---

Mit dem dritten Supplemente beschliefst Herr Legendre den dritten Theil seines Werkes über die elliptischen Functionen: *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, avec des tables pour en faciliter le calcul numérique*, (*chez Treuttel et Würtz*), welches anfänglich nur aus zwei Theilen bestand. Diese Fortsetzung umfasst in drei nach einander erschienenen Supplementen die durch die neueren Untersuchungen über diesen Gegenstand veranlafsten Ergänzungen des Werks. Die beiden ersten Supplemente, welche den dritten Theil beginnen, wurden bereits vor dem Erscheinen der eigenen Darstellung des Referenten publicirt; sie entstanden aus kurzen, in diesem Journal und den Astronomischen Nachrichten gegebenen Notizen, so wie aus wenigen brieflichen Mittheilungen von dem Entwicklungsgange, den die Untersuchung nach und nach annahm; daher die Darstellung in ihnen als eine ganz eigenthümliche zu betrachten ist. Abels Arbeiten über die elliptischen Transcendenten sind hierbei weniger benutzt.

Das dritte Supplement, dessen Inhalt wir hier näher angeben wollen,

---

*) Diese Anzeige wird durch die folgenden Worte Crelles eingeleitet:

So eben ist das dritte und letzte Supplement Legendres zu seiner *Théorie des fonctions elliptiques* bei Treuttel und Würtz in Strafsburg erschienen. Diese Schrift ist in mehrfachem Betracht von besonderem Interesse. Zuerst ist sie als eine neue Arbeit des ehrenwerthen Veterans der Mathematik, dessen Namen schon ihren Werth verbürgt, wichtig. Sodann ist sie interessant, weil sie das grofse Werk desselben beschliefst, welches eine lange Reihe von Jahren hindurch, bis auf die Arbeiten Abels und Jacobis, das einzige in seiner Art über jene so interessante, neuerdings so erfreulich weiter entwickelte, und nun wiederum noch zuletzt von ihrem früheren Pfleger durchforschte Theorie war. Endlich aber hat das Werk noch ein eigenthümliches Interesse, weil es dem Genius des leider viel zu früh dahingeschiedenen Abel, der schon in seinem 24sten Jahre, im fernen Norden, fast von allen Hülfsmitteln entblöfst, über Schranken seiner Wissenschaft, die Euler und Lagrange nicht überstiegen hatten, sich hinausschwang, und mit welchem leider wahrscheinlich noch kostbare Schätze neuer Entdeckungen in dem Reiche der Wahrheit, der Mathematik, ins Grab gesunken sind, ein wahrhaft würdiges Denkmal setzt. In einem Briefe an den Herausgeber sagt Legendre am 24sten März d. J.: „Vous verrez que je beginnt damit, eine im ersten Supplement gelassene Lücke im Bereiche des Haupt-Theorems über die Transformation auszufüllen. Es ist dies der Beweis, dass wenn $U$ und $V$ zwei ganze rationale Functionen von $x$ von der Beschaffenheit sind, dass

$$(VV-UU)(VV-\lambda^2 UU) = (1-x^2)(1-k^2x^2)TT,$$

die Substitution $y = \frac{U}{V}$ immer der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wo $M$ eine Constante bedeutet, Genüge leistet. Durch dieses Theorem, welches ein Grundprincip der Transformation der elliptischen Transcendenten ist, wird diese ein rein algebraisches Problem, da die Functionen $U$ und $V$, für jeden gegebenen Grad der höchsten derselben, durch die angegebene Bedingung vollkommen bestimmt sind. Ein allgemeiner Algorithmus für diese Bestimmung ist ein schwieriges Problem, dessen Haupttheil die Erfindung der jedesmaligen Gleichung zwischen den Moduln $k$ und $\lambda$ bildet, indem sich allgemein durch $k$ und $\lambda$ und die Differentialquotienten von $\lambda$ nach $k$, wie Referent in einer Notiz*) in diesem Journal bemerkt hat, die Coëfficienten von $U$ und $V$ algebraisch ausdrücken lassen.

„suis parvenu à tirer du beau théorème de M. Abel une théorie toute nouvelle, à laquelle je donne le „nom de *Théorie des fonctions ultra-elliptiques*, laquelle est beaucoup plus étendue que celle des fonctions „elliptiques et cependant conserve avec celle-ci des rapports très-intimes. En travaillant pour mon propre „compte, j'ai éprouvé une grande satisfaction, de rendre un éclatant hommage au génie de M. Abel, en „faisant sentir tout le mérite du beau théorème dont l'invention lui est due, et auquel on peut appliquer „la qualification de *monumentum aere perennius.*" Man weiss nicht, was man hier mehr schätzen soll: dass ein Mann von 80 Jahren, noch mit Jugendkraft und Jugendlust, in den abstractesten Gegenständen seiner Wissenschaft sich ergeht, und ferner über unerstiegene Schranken vordringt: oder jene Bereitwilligkeit, fremdes Verdienst anzuerkennen, fände es sich auch bei einem Jünglinge, der des gefeierten Gelehrten Enkel sein könnte! Wäre doch eine solche Bereitwilligkeit allgemein; sie würde der Wissenschaft wahrhaft würdig sein. Wie gewöhnlich begegnete sich das Rechte und Gute auch hier. Auch Abel war fähig, jedes fremde Verdienst mit wahrem natürlichen Herzenstriebe anzuerkennen. Eigensucht war ihm fremd.

Da schwerlich Jemand den Inhalt der Legendreschen neuen Arbeit besser zu würdigen und zu erkennen vermocht haben dürfte, als Jacobi, der Zeitgenosse und Geistesverwandte Abels, der, ebenfalls noch in jugendlichen Jahren, mit gleichem Erfolge und gleicher Kraft ihm würdig zur Seite ging (auch ihm verdankt die Theorie der elliptischen Functionen ihre neuere Vervollkommnung, und er erreichte darin, unbekannt mit den gleichzeitigen Arbeiten Abels, das gleiche Ziel); so hat der Herausgeber Denselben ersucht, eine Übersicht des Werkes aufzusetzen, und er die Güte gehabt, sie während seines hiesigen Aufenthalts, noch vor seiner Rückkehr nach Königsberg, zu geben.

*) S. p. 266 dieses Bandes.



In einem folgenden §. giebt der Verfasser die elementare geometrische Construction für die Vervielfachung der elliptischen Transcendenten, welche ich in einem der früheren Bände dieses Journals*) mitgetheilt habe. Das Problem der Vervielfachung besteht, wie man weiss, darin, aus einem Winkel $\varphi_1$ einen Winkel $\varphi_n$ zu finden, so dafs $F(\varphi_n) = nF(\varphi_1)$, wo $F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$. Aus einem Punkte $A$ eines Kreises, dessen Halbmesser $R$, zieht man durch den Mittelpunkt eine Linie $AO = \frac{2R}{k^2}$, und errichtet auf ihr in $O$ ein Loth $l$; hierauf nimmt man auf der Peripherie des Kreises den Bogen $AA' = 2\varphi_1$, und beschreibt einen zweiten Kreis, der die Sehne $AA'$ berührt und mit dem ersten die Linie $l$ zur gemeinschaftlichen idealen Secante hat. Beschreibt man nun von $A$ aus in den ersten Kreis das Stück eines Polygons $AA'A''A'''\dots A^{(n)}$, das zugleich dem zweiten Kreise umgeschrieben ist, so ist, wenn $A^{(n)}$ der Endpunkt der $n$ten Seite ist, $AA^{(n)} = 2\varphi_n$. Dem Verfasser giebt diese Construction zu manchen interessanten Erörterungen Veranlassung.

In den folgenden §§. wendet sich Legendre zu dem grofsen Abelschen Theorem, wodurch derselbe das Eulersche Theorem, welches die Basis der Theorie der elliptischen Transcendenten bildet, auf alle Integrale von der Form $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ ausdehnt, wo $f(x)$ eine rationale und $X$ eine ganze rationale Function von $x$ bedeutet. Nachdem der Verfasser für den allgemeinen Fall in nähere Entwickelungen eingegangen ist, und daraus, wenn $\mathbf{X}$ auf den vierten Grad steigt, die bekannten Formeln für die elliptischen Integrale der drei Gattungen abgeleitet hat, wendet er die allgemeine Theorie auf die Transcendente $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^5}}$ an, welche für die Werthe $x = 1$ und $x = -\infty$ auf die Function $\Gamma$ zurückkommt. Er giebt Mittel an, den Werth dieser Transcendente für jeden reellen und imaginären Werth von $x$ zu berechnen, und prüft dann durch deren Hülfe das Abelsche Theorem in einer Menge numerischer Beispiele, welche alle mit gröfster Genauigkeit in einer grofsen Anzahl Decimalstellen ausgeführt sind. Man bewundert hier wieder den unermüdlichen Rechner, der die grofse Arbeit der elliptischen Tafeln im Interesse der Wissenschaft unternommen und vollendet hat.

*) S. p. 279 dieses Bandes.

In einem Schlufsparagraph untersucht der Verfasser die Transcendente

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

und findet das merkwürdige Resultat, dass sie immer auf die Summe zweier elliptischer Integrale der ersten Gattung zurückkommt, deren Amplitude dieselbe und deren Moduln Complemente von einander sind. Setzt man nämlich:

$$b^2 = \frac{(1+\sqrt{k})^2}{2(1+k)}, \qquad c^2 = \frac{(1-\sqrt{k})^2}{2(1+k)},$$

wo $b^2+c^2=1$, so giebt die Substitution

$$\sqrt{x} = \frac{(b+c)\sin\varphi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\varphi}+\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

oder wie der Verfasser sie darstellt:

$$\sin^2\varphi = \frac{2x(1+k)}{(1+x)(1+kx)},$$

die Gleichung:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{F(b,\varphi)+F(c,\varphi)}{\sqrt{2(1+k)}}.$$

Dieselbe Substitution, bemerke ich, giebt auch:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{F(b,\varphi)-F(c,\varphi)}{\sqrt{2k(1+k)}}.$$

Da die gegebene Substitution nur reell bleibt, wenn $x$ zwischen 0 und 1, so giebt Legendre für den Fall, wo $x$ zwischen 1 und $\infty$, noch andere Substitutionen, welche das Integral auf elliptische zurückführen. Er wendet hierauf das Abelsche Theorem an, und erhält dadurch merkwürdige Resultate für die elliptischen Transcendenten. Ich will hier kurz ein anderes erwähnen, zu dem man durch die Vertauschung von $+k$ und $-k$ in den beiden vorstehenden Gleichungen leicht geführt wird. Setzt man nämlich:

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2-\sin^2\varphi+\sqrt{(2-\sin^2\varphi)^2+a^2\sin^4\varphi}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+a^2}}\cdot\frac{\sin\psi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\psi}+\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}},$$

wo

$$b^2 = \frac{\sqrt{1+a^2}+a}{2\sqrt{1+a^2}}, \qquad c^2 = \frac{\sqrt{1+a^2}-a}{2\sqrt{1+a^2}},$$



so wird:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1+a\sqrt{-1}}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{F(b,\psi)+F(c,\psi)}{2\sqrt[4]{1+a^2}}+\sqrt{-1}\;\frac{F(b,\psi)-F(c,\psi)}{2\sqrt[4]{1+a^2}}.$$

Die Winkel $\varphi$ und $\psi$ sind zugleich 0 und $\frac{\pi}{2}$ und daher:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1+a\sqrt{-1}}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{(1+\sqrt{-1})F^1(b)+(1-\sqrt{-1})F^1(c)}{2\sqrt[4]{1+a^2}}.$$

Dies Resultat, welches nicht in den über die Transformation der elliptischen Functionen bekannten Resultaten enthalten ist, zeigt, dafs die imaginären Moduln, deren Quadrat $+\frac{1}{2}$ zum reellen Theil hat, was auch der imaginäre Theil sei, auf reelle zurückgeführt werden können.

Legendre giebt den Transcendenten $\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, wenn $X$ den vierten Grad übersteigt, den Namen der hyperelliptischen (*ultra-elliptiques*). Wir würden sie die Abelschen Transcendenten nennen, da Abel zuerst sie in die Analysis eingeführt und durch ein umfassendes Theorem ihre grofse Bedeutung nachgewiesen hat. Diesem Theoreme selbst dürfte wohl vorzugsweise, als dem schönsten Monumente dieses aufserordentlichen Geistes, der Name des Abelschen Theorems zukommen. Denn gern stimmen wir dem Verfasser bei, dafs es das ganze Gepräge seiner Gedankentiefe trägt. Wir halten es, wie es in einfacher Gestalt ohne Apparat von Calcul den tiefsten und umfassendsten mathematischen Gedanken ausspricht, für die gröfste mathematische Entdeckung unserer Zeit, obgleich erst eine künftige, vielleicht späte, grofse Arbeit ihre ganze Bedeutung aufweisen kann.

In einer Abhandlung im achten Bande dieses Journals habe ich das Eulersche Fundamental-Theorem auf doppelte Integrale ausgedehnt; das gleiche kann in aller Allgemeinheit mit dem Abelschen Theorem geschehen. Es bedarf hierzu nur, wie ich an einem andern Orte zeigen werde, des auch für andere Untersuchungen merkwürdigen Satzes der Algebra, dafs wenn $f$ und $F$ zwei ganze rationale Functionen von $x$ und $y$ sind, und man in den Ausdruck $\frac{1}{f'(x)F'(y)-f'(y)F'(x)}$ für $x$ und $y$ alle Systeme von Werthen setzt, für welche zugleich $f=0$ und $F=0$, die Summe der so erhaltenen Werthe dieses Ausdrucks verschwindet.

Was aber die wirkliche numerische Berechnung der Integrale $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$ betrifft, so werde ich an einem anderen Orte zeigen, dafs sie immer mit derselben Leichtigkeit wie die Integration rationaler Functionen geleistet werden kann. Die hierzu gebrauchte Methode findet in der Theorie der himmlischen Störungen eine wichtige Anwendung, da sie sich nicht blofs auf die einfachen Integrale erstreckt.

Abel selbst hat im vierten Bande dieses Journals sein Theorem auf alle Integrale algebraischer auch inexpliciter Functionen erweitert. Seine Darstellung mufs aber reproducirt werden, was, da der Hauptideengang sich erkennen läfst, nicht schwer fällt. Diese Erweiterung geschah kurz vor seinem Tode und war seine letzte Arbeit in diesem Journal.

Beim Schlusse des dritten Bandes des Legendreschen Werks stellt sich uns noch erneuert das grofse Verdienst dieses ausgezeichneten Mathematikers vor Augen, dafs er, abgesehen von den wichtigen Entdeckungen, mit denen er die Wissenschaft bereichert hat, in dem vielfach zerstreuten Stoffe zwei grofse Disciplinen als die Hauptaufgabe der Mathematik in seiner Zeit herauserkannt hat, und daraus durch die Arbeit seines Lebens selbständige Theorien gründete, welche hinfort zu den wesentlichsten Bestandtheilen alles höheren mathematischen Studiums gehören müssen. Und so hat er noch in seinem achtzigsten Lebensjahre, die Aufgabe der Zukunft vorfühlend, mit der Durchforschung des Abelschen Theorems sein grofses Werk über die elliptischen Functionen beschlossen.

Potsdam, den 22sten April 1832.

## Nachschrift.

Das von Legendre zu Ende des dritten Theils gegebene merkwürdige Theorem läfst sich auf das allgemeinere Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k\lambda x)(1+kx)(1+\lambda x)}}$$

ausdehnen, welches für $\lambda = 1$ mit dem Legendreschen übereinkommt, und das sich ebenfalls immer auf die Summe zweier elliptischen Integrale der ersten Gattung zurückführen läfst, deren Amplitude dieselbe ist, deren Moduln aber im Allgemeinen nicht Complemente von einander sind, sondern, wenn man $k$



und $\lambda$ gehörig annimmt, irgend welche beliebige sein können. Es seien nämlich $b$ und $c$ irgend beliebige Moduln,

$$b' = \sqrt{1-bb}, \quad c' = \sqrt{1-cc}$$

ihre Complemente,

$$k = \left(\frac{c'-b'}{b-c}\right)^2, \quad \lambda = \left(\frac{c'-b'}{b+c}\right)^2,$$

oder:

$$b = \frac{\sqrt{k}+\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(1+k)(1+\lambda)}}, \quad c = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(1+k)(1+\lambda)}}$$

$$b' = \frac{1-\sqrt{k\lambda}}{\sqrt{(1+k)(1+\lambda)}}, \quad c' = \frac{1+\sqrt{k\lambda}}{\sqrt{(1+k)(1+\lambda)}},$$

so giebt die Substitution:

$$\sqrt{x} = \frac{(b'+c')\sin\varphi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\varphi}+\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$$

die Gleichung:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k\lambda x)(1+kx)(1+\lambda x)}} = \frac{b'+c'}{2}[F(b,\varphi)+F(c,\varphi)].$$

Dieselbe Substitution giebt:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{(1-x)(1-k\lambda x)(1+kx)(1+\lambda x)}} = \frac{(c'+b')^2}{2(c'-b')}[F(b,\varphi)-F(c,\varphi)],$$

wo

$$\frac{(c'+b')^2}{2(c'-b')} = \frac{1}{\sqrt{k\lambda(1+k)(1+\lambda)}}.$$

Ich bemerke noch die Gleichungen:

$$\sin^2\varphi = \frac{(1+k)(1+\lambda)x}{(1+kx)(1+\lambda x)}, \quad \cos^2\varphi = \frac{(1-x)(1-k\lambda x)}{(1+kx)(1+\lambda x)},$$

$$1-b^2\sin^2\varphi = \frac{(1-\sqrt{k\lambda}\,x)^2}{(1+kx)(1+\lambda x)}, \quad 1-c^2\sin^2\varphi = \frac{(1+\sqrt{k\lambda}\,x)^2}{(1+kx)(1+\lambda x)},$$

welche leicht zu den angegebenen Resultaten führen. Übrigens sind die Grenzen von $\varphi$ auch hier $0$ und $\frac{\pi}{2}$, wenn $0$ und $1$ die Grenzen von $x$ sind.

Man sieht so, dafs allgemein die Summe und die Differenz zweier elliptischen Integrale erster Gattung mit derselben Amplitude und beliebigen Moduln die Eigenschaften der ersten Klasse der Abelschen Transcendenten geniefsen müssen, in welchen die Function unter dem Quadratwurzelzeichen bis auf den fünften oder sechsten Grad steigt. Diese Bemerkung, welche Legendre zuerst für den Fall, wo die beiden Moduln Complemente von einander sind, angestellt hat, und welche sich nach dem Obigen leicht auf zwei beliebige Moduln ausdehnen liefs, ist für die Theorie der elliptischen Transcendenten von Wichtigkeit und kann andererseits bei der Behandlung jener Klasse der Abelschen Transcendenten mannigfachen Nutzen gewähren.

Setzt man in den vorstehenden Formeln $\lambda$ negativ, so erhält man ein Paar imaginäre Moduln. Es sei $b^2 = e + f\sqrt{-1}$, $c^2 = e - f\sqrt{-1}$, so wird, wenn man $-\lambda$ statt $\lambda$ setzt,

$$k = \frac{\sqrt{(1-e)^2+ff}+e-1}{\sqrt{ee+ff}-e}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{(1-e)^2+ff}+e-1}{\sqrt{ee+ff}+e},$$

und die Summation der beiden gegebenen Resultate giebt:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(e+f\sqrt{-1})\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{(1-e)^2+ff}-e+1}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+k\lambda x)(1+kx)(1-\lambda x)}}$$

$$+\sqrt{-1}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{(1-e)^2+ff}+e-1}}{\sqrt{2}\,(\sqrt{(1-e)^2+ff}-e+1)} \int_0^x \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+k\lambda x)(1+kx)(1-\lambda x)}}.$$

Die imaginären Moduln lassen sich in unzähligen Fällen auf reelle zurückführen. Denn man weifs, dafs man durch eine Transformation der $n$ten Ordnung einen Modul in so viel andere transformiren kann, wie die Summe der Factoren von $n$ beträgt; von diesen sind, wenn der ursprüngliche Modul reell angenommen wird, nur so viele ebenfalls reell, wie die Anzahl der Factoren von $n$ beträgt; alle übrigen sind imaginäre Moduln, die in einen reellen transformirt werden können. Man wird also auch die Integrale

$$\int_0^x \frac{x^{\pm\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+k\lambda x)(1+kx)(1-\lambda x)}},$$

wo $k$ und $\lambda$ positiv sind, in unzähligen Fällen in elliptische Integrale mit reellem Modul transformiren können. Andererseits giebt die zuletzt gefundene Gleichung vielleicht die einfachste Darstellung des elliptischen Integrals erster Gattung mit imaginärem Modul in der Form $P+Q\sqrt{-1}$, und so führt die Theorie der elliptischen Integrale selbst für den Fall imaginärer Moduln mit Nothwendigkeit auf jene erste Klasse der Abelschen Transcendenten.

---

# NACHLASS.

# CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE

AVEC

# LEGENDRE.

Borchardt, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 80. p. 205—279.

La correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi est une des correspondances les plus mémorables qu'on trouve dans la littérature des sciences exactes. Il a fallu un concours de circonstances heureuses pour la conserver en entier à la postérité.

C'est à M. Bertrand que nous devons la publication de onze lettres de Jacobi à Legendre insérées aux *Annales de l'école normale* de 1869. En les faisant imprimer l'éminent géomètre a sauvé ce trésor, les manuscrits originaux ayant péri en 1871 dans les incendies de la Commune. Cette publication fut en même temps un acte de justice pour la mémoire de Jacobi.

Une grave erreur historique avait été répandue concernant la découverte de la nouvelle théorie des fonctions elliptiques. On avait avancé qu'à Abel seul revenait la découverte de cette théorie en vertu de ses mémoires contenues dans les volumes 2. et 3. du *Journal de Crelle;* que Jacobi, sans y ajouter rien d'essentiel, en avait seulement formé un corps de doctrine publié trois ans plus tard dans ses *Fundamenta nova*. Cette opinion se trouvait déjà, quand elle fut émise, en contradiction manifeste avec les notes et mémoires de Jacobi et d'Abel insérés dans le *Journal astronomique de Schumacher* *) et non moins avec le célèbre rapport de Poisson **) sur les *Fundamenta nova* de Jacobi. Mais rien n'y aurait pu donner un démenti plus formel que la publication des lettres de Jacobi dans lesquelles l'illustre analyste raconte avec une rare franchise l'historique de ses découvertes et la filiation de ses idées ***).

Au mois de septembre 1827 ont paru à Berlin le $2^{me}$ cahier vol. 2. du *Journal de Crelle* †) et à Altona le n°. 123. vol. 6. des *Nouvelles astronomiques de Schumacher*. Le cahier du *Journal de Crelle* contient la première publication d'Abel ††) relative à la

*) *Astronomische Nachrichten. Bd.* 6. n°. 123. 127. 138.

**) Lu à la séance de l'Académie des sciences du 21 décembre 1829.

***) Lettre de Jacobi du 12 avril 1828.

†) M. G. Reimer en recherchant dans les livres de son imprimerie et de l'année 1827 a bien voulu constater le mois dans lequel ce cahier a été expédié aux abonnés.

††) Abel était de retour à Christiania depuis le mois de mai 1827.

nouvelle théorie des fonctions elliptiques. On y trouve leur double périodicité, la théorie analytique de leur multiplication et de leur division, leur définition par des produits infinis. Le numéro des *Nouvelles astronomiques* contient deux lettres de Jacobi à Schumacher écrites de Kœnigsberg et datées du 13 juin et du 2 août 1827. Dans la première lettre il donne les transformations du 3^me^ et du 5^me^ ordre dans leur forme algébrique avec les transformations supplémentaires à la multiplication. Dans la seconde il établit les formules analytiques générales pour la transformation de l'ordre *n*.

Pour un géomètre qui a sous les yeux ces deux publications simultanées, il est évident qu'en les écrivant Abel et Jacobi ont été chacun en possession de l'ensemble de la nouvelle théorie des fonctions elliptiques, qu'ils y sont parvenus indépendamment l'un de l'autre, Abel en partant de la multiplication, Jacobi en partant de la transformation des fonctions elliptiques.

Le fait historique de cette coïncidence remarquable a été reconnu par tous les géomètres contemporains, parmi lesquels il suffira de nommer Legendre, Poisson et Lejeune-Dirichlet. D'ailleurs jamais discussion de priorité n'a eu lieu entre Abel et Jacobi. Ils ont réalisé l'attente de Legendre: „vous serez sans doute dignes l'un de l'autre par la noblesse de vos sentiments et par la justice que vous vous rendrez réciproquement"*).

En comparant les onze lettres de Jacobi publiées par M. Bertrand avec douze lettres manuscrites de Legendre qui se sont trouvées dans la succession de Jacobi, j'ai pu vérifier que ces 23 lettres forment la correspondance scientifique entière qui a eu lieu entre Legendre et Jacobi**). M. Bertrand ayant bien voulu m'exprimer son assentiment à l'impression de cette correspondance entière, je la fais paraître suivant l'ordre chronologique dans lequel les lettres ont été écrites. A côté des *Fundamenta nova* de Jacobi, des notes et mémoires d'Abel et de Jacobi imprimés dans le *Journal de Crelle* et dans les *Nouvelles astronomiques de Schumacher,* cette correspondance est un des documents les plus précieux pour l'histoire de la découverte de la nouvelle théorie des fonctions elliptiques.

Quatre grands géomètres, Legendre, Gauss, Abel et Jacobi, ont eu leur part dans cet événement. Legendre l'avait préparé; vieillard de 75 ans en 1827, il avait cultivé depuis 1786 pendant plus de quarante ans le calcul des intégrales elliptiques et en avait formé une discipline particulière. Ses travaux avaient été peu appréciés par les célèbres analystes de son propre pays dont l'intérêt se dirigeait plutôt vers les recherches applicables à l'astronomie et à la physique. Parmi les savants étrangers à la France Gauss

*) Lettre de Legendre à Abel du 28 octobre 1828.

**) Outre ces 12 lettres de Legendre je n'ai trouvé qu'un billet du 6 septembre 1829 (séjour de Jacobi à Paris), simple billet d'invitation qui n'offre point d'intérêt et n'a aucun rapport aux mathématiques.



connaissait parfaitement l'importance du sujet, mais dès son début il avait montré à l'égard de Legendre une froideur que ce dernier ne lui pardonnait pas. La découverte de 1827 avait d'ailleurs pour Gauss un intérêt très-personnel. Depuis plus de vingt ans il était en possession des résultats par lesquels Abel et Jacobi ont étonné les géomètres. Des recherches entreprises pendant les années de 1797 à 1808, dans lesquelles il partait de la transformation du second ordre et des moyennes arithmético-géométriques, l'y avaient conduit, mais il n'en avait rien publié. Pendant toute sa vie il n'en a jamais parlé que dans des lettres ou conversations privées.

Lorsqu'en 1827 Legendre reçut la première nouvelle de la récente découverte de Jacobi, d'abord par le n°. 123. du *Journal de Schumacher,* puis par la lettre de Jacobi du 5 août 1827, il l'accueillit avec un vrai enthousiasme. L'intérêt qu'il prenait à la discipline qui pendant une si grande partie de sa vie avait formé son travail principal, était en lui d'une telle pureté qu'il n'éprouvait point de jalousie de se voir surpassé et son oeuvre couronnée par un jeune homme de 23 ans qui se nommait avec raison son disciple. Mais lorsqu'il fut averti d'une assertion de Gauss qui aurait pu enlever à Jacobi une partie de la gloire de sa découverte, son irritation fut grande. Il n'hésita pas à douter de la vérité de l'assertion, et ce fut alors Jacobi qui se chargea de la défense de Gauss.

Pour les caractères de Legendre et de Jacobi leur correspondance est un beau monument.

Legendre qui par son travail infatigable avait initié la nouvelle génération dans la théorie des intégrales elliptiques, montre pour Jacobi une bienveillance qui lui fait le plus grand honneur. En ce qui concerne Abel, après avoir vaincu la difficulté qu'il trouvait d'abord à se familiariser avec ses idées, il exprime la haute considération due à ses travaux.

Jacobi se montre plein de vénération pour Legendre dont les oeuvres lui ont fourni le point de départ de ses profondes études. C'est dans ce ton que sont écrites toutes ses lettres à l'exception d'un seul passage dans lequel il s'agit de la plus grande découverte de son émule Abel oubliée pendant deux ans parmi les papiers de Cauchy. A l'égard de Gauss son jugement est juste et sans prévention. Son admiration pour les travaux d'Abel est telle qu'il les place au-dessus des siens propres. La grande découverte à laquelle il a donné le nom de *théorème d'Abel* est désignée par lui comme „la découverte la plus importante de ce qu'a fait dans les Mathématiques le siècle dans lequel nous vivons".

En présentant au monde scientifique cette correspondance de deux géomètres de nationalité différente et pour lesquels l'intérêt de leur science fait disparaître toute autre considération, je ne puis me refuser à exprimer l'espérance que cet exemple ne sera pas perdu pour la génération présente.

Borchardt.

## JACOBI A LEGENDRE.

Kœnigsberg en Prusse, le 5 août 1827.

Monsieur,

Un jeune géomètre ose vous présenter quelques découvertes faites dans la théorie des fonctions elliptiques, auxquelles il a été conduit par l'étude assidue de vos beaux écrits. C'est à vous, Monsieur, que cette partie brillante de l'analyse doit le haut degré de perfectionnement auquel elle a été portée, et ce n'est qu'en marchant sur les vestiges d'un si grand maître, que les géomètres pourront parvenir à la pousser au delà des bornes qui lui ont été prescrites jusqu'ici. C'est donc à vous que je dois offrir ce qui suit comme un juste tribut d'admiration et de reconnaissance.

Je commence à exposer les moments principaux des résultats que je viens d'obtenir. Soit $p$ un nombre impair quelconque; on remarque aisément en poursuivant les théorèmes concernant la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce, proposés dans le tome I. des *Exercices de Calcul Intégral,* que l'on peut toujours parvenir à l'équation:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{p\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

au moyen d'une substitution rationnelle:

$$x = \frac{z\left(A + A'z^2 + A''z^4 + \cdots + A^{\frac{p^2-1}{2}} z^{p^2-1}\right)}{B + B'z^2 + B''z^4 + \cdots + B^{\frac{p^2-1}{2}} z^{p^2-1}}.$$

J'ai observé depuis, que cette substitution peut être remplacée par les deux autres, employées successivement:

$$x = \frac{y\left(a + a'y^2 + a''y^4 + \cdots + a^{\frac{p-1}{2}} y^{p-1}\right)}{b + b'y^2 + b''y^4 + \cdots + b^{\frac{p-1}{2}} y^{p-1}},$$

$$y = \frac{z\left(\alpha + \alpha'z^2 + \alpha''z^4 + \cdots + \alpha^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1}\right)}{\beta + \beta'z^2 + \beta''z^4 + \cdots + \beta^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1}}.$$



Après une première substitution, la fonction elliptique va être transformée dans une autre de module différent, de sorte qu'on aura:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{M\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{p\,dz}{M\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Or, en donnant au nombre $p$ des valeurs différentes, on trouve le théorème remarquable, que *chaque module donné fait part d'une infinité d'échelles de modules, dans lesquels il peut être transformé par une substitution algébrique et même rationnelle.*

Aussi je suis parvenu à trouver l'expression générale de ces deux substitutions-là, que je présenterai sous la forme trigonométrique, qui me paraît la plus commode. Elles pourront être transformées aisément dans la forme algébrique mentionnée. Je commence par la substitution dernière, qui me fournit le théorème suivant:

Théorème I*).

Soit pris l'angle $\varphi'$ de manière qu'on ait $F(k,\varphi') = \frac{1}{p} F^1(k)$, et nommons en général $\varphi^m$ un angle tel que $F(k,\varphi^m) = \frac{m}{p} F^1(k)$. Cherchons un angle $\psi$ au moyen de la formule:

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi'-\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi'+\varphi}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi'''+\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi'''-\varphi}{2}} \cdots \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi^{p-2}\pm\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi^{p-2}\mp\varphi}{2}} \operatorname{tg}\left(45^0 \mp \frac{\varphi}{2}\right),$$

on aura $F(k,\varphi) = \frac{M}{p} F(\lambda,\psi)$. Le signe supérieur ou inférieur doit être pris selon que $p$ est de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n-1$. Toutes les fois que $\varphi$ se trouve entre les limites $\varphi^m$ et $\varphi^{m+1}$, il faudra prendre l'angle $\psi$ entre les limites $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$. La détermination des constantes $M$, $\lambda$ pourra se faire par les formules:

$$M = \frac{p}{2(\operatorname{cos\acute{e}c}\varphi' - \operatorname{cos\acute{e}c}\varphi''' + \cdots \mp \operatorname{cos\acute{e}c}\varphi^{p-2} \pm \frac{1}{2})},$$

$$\lambda = \frac{2kM}{p}(\sin\varphi' - \sin\varphi''' + \cdots \mp \sin\varphi^{p-2} \pm \tfrac{1}{2}).$$

*) Je me servirai ici et dans la suite des signes des *Exercices de Calcul Intégral.*

Je passe à présent au théorème II., qui répond à l'autre substitution, par laquelle on peut passer du module $\lambda$ au module $k$, et qui, joint au précédent, sert à la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce.

Théorème II.

Soit $\lambda^2+\lambda'^2=1$, soit en général $\psi^m$ un angle tel, que

$$F(\lambda',\psi^m)=\frac{m}{p}F^1(\lambda'),$$

qu'on fasse

$$\operatorname{tg}\theta'=\operatorname{tg}\psi\operatorname{cos\acute{e}c}\psi',\quad \operatorname{tg}\theta'''=\operatorname{tg}\psi\operatorname{cos\acute{e}c}\psi''',\quad \ldots,\quad \operatorname{tg}\theta^{p-2}=\operatorname{tg}\psi\operatorname{cos\acute{e}c}\psi^{p-2},$$

soit enfin

$$\theta=2(\theta'-\theta'''+\theta^{v}-\cdots\mp\theta^{p-2}\pm\tfrac{1}{2}\psi),$$

on aura

$$F(k,\theta)=MF(\lambda,\psi).$$

Les angles $\theta', \theta''', \ldots$ doivent être pris dans le même quadrant de cercle dans lequel se trouve l'angle $\psi$.

Les théorèmes I. et II. joints ensemble donnent

$$F(k,\theta)=pF(k,\varphi).$$

Je passe sous silence les nombreuses relations analytiques très-curieuses, que vont fournir les deux théorèmes proposés. Je n'ajouterai ici qu'une méthode, qui peut servir à l'évaluation des transcendantes $F(k,\varphi)$, la plus commode, à ce que je crois, qu'on puisse imaginer.

En effet, $\lambda$ se trouvant toujours très-petit, quand même le nombre $p$ ne surpasse pas 5 ou 7, on pourra négliger les termes de l'ordre $\lambda^2$. On aura donc simplement $F(k,\varphi)=\frac{M}{p}\psi$. La constante $M$ ne différant que de l'ordre $\lambda^2$ de la quantité $\frac{2}{\pi}F^1(k)$, on introduira celle-ci dans le calcul au lieu de $M$. Par là on aura en même temps corrigé le résultat de la partie non périodique de l'erreur commise en négligeant les quantités de cet ordre. Notre formule deviendra donc $F(k,\varphi)=\frac{2}{p\pi}F^1(k).\psi$, et l'erreur commise ne comportera que $-\frac{\lambda^2}{4p\pi}F^1(k)\sin 2\psi$. C'est donc la correction à ajouter pour que l'erreur ne soit que de l'ordre $\lambda^4$ *).

*) Si l'on exprime $\psi$ en secondes, on aura $F(k,\varphi)=M'\psi$, étant mis $M'=\frac{F^1(k)}{324000\,p}$.



Soit, par exemple, $p=5$, $k=\sin 45^0$, je trouve dans le tome III. des *Exercices*, p. 215, $\varphi'=21^0 0'36'',02754\,43$, $\varphi'''=58^0 38'10'',31402\,70$. Aussi la Table II. du tome III. me donne $F^1(k)=1,85407\,46773\,01$, d'où résulte

$$M'=\frac{F^1(k)}{5\times 324\,000}=0,00000\,11444\,90541\,544.$$

On aura donc à calculer l'angle $\psi$ par la formule

$$\operatorname{tg}\frac{90^0-\psi}{2}=\frac{\operatorname{tg}(10^0 30'18'',01-\frac{1}{2}\varphi)}{\operatorname{tg}(10^0 30'18'',01+\frac{1}{2}\varphi)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(29^0 19'5'',16+\frac{1}{2}\varphi)}{\operatorname{tg}(29^0 19'5'',16-\frac{1}{2}\varphi)}\operatorname{tg}(45^0-\tfrac{1}{2}\varphi),$$

et ensuite on trouvera

$$F(\varphi)=0,00000\,11444\,90541.\psi.$$

La correction à ajouter sera $-0,00000\,007.\sin 2\psi$.

Exemple. $\varphi=30^0$:

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{tg}\frac{\varphi'-\varphi}{2} &= 8,89549\,90n\\
\log\operatorname{tg}\frac{\varphi'''+\varphi}{2} &= 9,98966\,16\\
\log\cot\frac{\varphi'+\varphi}{2} &= 0,32140\,63\\
\log\cot\frac{\varphi'''-\varphi}{2} &= 0,59306\,27\\
\log\operatorname{tg}(45^0-\tfrac{1}{2}\varphi) &= \underline{9,76143\,94}\\
\log\operatorname{tg}(45^0-\tfrac{1}{2}\psi) &= 9,56106\,90n\\
45^0-\tfrac{1}{2}\psi &= -20^0 0'0'',473\\
\psi &= 468000,95 \quad (M'=0,00000\,11444\,90541)\\
M'\psi &= 0,53562\,266\\
\text{Corr.} &= \underline{+0,00000\,007}\\
F &= 0,53562\,273
\end{aligned}$$

La Table II. du tome III. des *Exercices* donne 0,53562 27328 22.

Cette méthode me paraît fournir la manière la plus convenable de construire des Tables pour l'évaluation des fonctions elliptiques de première espèce.

Il n'y a que très-peu de temps que ces recherches ont pris naissance. Cependant elles ne sont pas les seules entreprises en Allemagne sur le même objet.

M. Gauss, ayant appris de celles-ci, m'a fait dire qu'il avait développé déjà en 1808 les cas de 3 sections, 5 sections et de 7 sections, et trouvé en même temps les nouvelles échelles de modules qui s'y rapportent. Cette nouvelle, à ce qui me paraît, est bien intéressante.

Depuis quelque temps j'ai fait encore quelques recherches sur la théorie des nombres, qui m'ont conduit à des résultats assez curieux relatifs à la belle partie de cette discipline ouverte aux géomètres par votre célèbre loi de réciprocité. En effet, en partant de la nouvelle théorie de section de cercle proposée par M. Gauss dans la huitième section de ses *Disquisitiones Arithmeticae*, j'ai découvert une méthode qui me conduit aux théorèmes fondamentaux concernant la théorie des résidus cubiques, biquadratiques, et même des résidus des puissances plus élevées encore*).

Pour en donner une idée succincte, je mets ici la démonstration du théorème fondamental relatif aux résidus quadratiques, fondée sur ces nouveaux principes.

Soit $p$ un nombre premier impair, $x$ une racine de l'équation $\frac{x^p-1}{x-1}=0$, $g$ une racine primitive de la congruence $g^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p}$, on a:

$$x-x^g+x^{g^2}-x^{g^3}+\cdots-x^{g^{p-2}}=+\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}.$$

On a de même en général

$$x^q-x^{qg}+x^{qg^2}-x^{qg^3}+\cdots-x^{qg^{p-2}}$$

égal à $+\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$ ou à $-\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$, selon que $q$ est résidu quadratique ou non-résidu quadratique du nombre $p$. Mais le nombre $q$ étant aussi premier, on a, en négligeant les multiples de $q$,

$$x^q-x^{qg}+\cdots-x^{qg^{p-2}}=(x-x^g+\cdots-x^{g^{p-2}})^q=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}.$$

Donc $q$ sera résidu ou non-résidu de $p$ selon que $(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}$, divisé par $q$, laisse $+1$ ou $-1$, ce qui est précisément la loi de réciprocité, ou, d'après M. Gauss, le théorème fondamental relatif aux résidus quadratiques.

---

*) Je me sers ici dans ce qui suit des signes et des dénominations mis en usage par M. Gauss dans ses *Disquisitiones Arithmeticae*.



J'ajoute plusieurs théorèmes relatifs aux résidus cubiques qui résultent tous d'un même théorème général. Ce sont les premiers de ce genre qui ont été proposés.

Etant donné un nombre premier $p$ de la forme $6n+1$, un autre nombre premier quelconque $q$ sera résidu cubique de $p$ toutes les fois que $4p$ sera de l'une des deux formes:

$$L^2+27q^2M^2, \quad q^2L^2+27M^2;$$

cependant il faut exclure la forme seconde dans les cas de $q=2$ et $q=3$.

Aussi $q$ étant un nombre premier plus grand que 7, il sera résidu cubique de $p$ toutes les fois que $p$ est de la forme $(q\kappa+mM)^2+27M^2$, le nombre $m$ étant donné par rapport à $q$ au moyen de la Table suivante:

| $q=$ 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 5 | 8 | ... |
| | | 9 | 9 | 8 | 2 | 7 | 3 | ... |
| | | | | 11 | 11 | 6 | 9 | ... |
| | | | | | 13 | 11 | 7 | ... |
| | | | | | | | 12 | ... |
| | | | | | | | | .... |

Ainsi, par exemple, le nombre 37 est résidu cubique de $p$ toutes les fois que $4p$ sera de l'une des sept formes:

$$L^2+36963M^2, \quad 1369L^2+27M^2,$$
$$(37\kappa+3M)^2+27M^2, \quad (37\kappa+9M)^2+27M^2,$$
$$(37\kappa+7M)^2+27M^2, \quad (37\kappa+12M)^2+27M^2,$$
$$(37\kappa+8M)^2+27M^2.$$

Le nombre $4p$ n'étant pas compris sous l'une des formes établies par les théorèmes précédents, le nombre $q$ n'en saura être résidu cubique.

M. Gauss a présenté à la Société de Gœttingue, il y a environ deux ans, un premier mémoire relatif à la théorie des résidus biquadratiques, laquelle est beaucoup plus facile que celle des résidus cubiques. Ce mémoire n'a pas encore paru, mais il en a donné un extrait dans les *Annales de Gœttingue*, année 1825, vol. I. Les théorèmes qui s'y trouvent annoncés se démontrent et pourront même être généralisés par mes méthodes avec une facilité extrême, et, à ce que je crois, ce sera de même avec tout ce qu'on pourrait établir sur les résidus des puissances. Ledit grand géomètre m'a écrit, depuis, qu'il poursuivra le même objet dans trois autres mémoires destinés à être présentés à la Société, et il se plaint que le temps lui manque à publier ses vastes recherches sur différents objets de la plus grande importance. Je suis avec le respect le plus profond,

Monsieur,

Votre très-humble serviteur,

Dr. C. G. J. Jacobi,

Auprès l'Université de Kœnigsberg en Prusse.

---

## LEGENDRE A JACOBI.

Paris, le 30 novembre 1827.

Monsieur,

Ce n'est que depuis quelques jours que j'ai reçu des mains de M. Michael Reiss, la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire en date du 5 août dernier. Je connaissais déjà votre belle découverte dans la théorie des fonctions elliptiques, par les deux lettres que vous avez fait insérer dans le nº. 123. du *Journal astronomique de M. Schumacher.* Le théorème I. contenu dans ces lettres, m'était déjà connu, puisqu'il s'accorde entièrement avec la seconde échelle des modules dont j'ai développé les propriétés dans le chap. XXXI. du tome I. de mon *Traité des fonctions elliptiques,* imprimé en 1825 et présenté à l'Académie dans sa séance du 12 septembre de ladite année. Le tome II. n'a été imprimé qu'en 1826, et l'ouvrage entier n'a été mis en vente chez MM. Treuttel et Wurtz qu'au mois de janvier de cette année; ainsi il n'est point douteux pour moi que vous n'ayez eu aucune connaissance de mon ouvrage et que vos propres recherches vous aient conduit au même résultat que j'avais imprimé deux ans avant vous. Mais ce qui vous appartient incontestablement c'est le theorème II. qui contient la découverte d'une troisième échelle de modules, celle que vous désignez à bon droit comme répondant au nombre 5. J'ai vérifié ce théorème par les méthodes qui me sont propres et je l'ai trouvé parfaitement exact. En regrettant que cette découverte m'ait échappé je n'en ai pas moins éprouvé une joie très-vive de voir un perfectionnement si notable ajouté à la belle théorie, dont je puis me dire le créateur, et que j'ai cultivé presque seul depuis plus de quarante ans. L'invention de la seconde échelle attachée au nombre premier 3, m'avait mis à portée d'expliquer beaucoup de résultats d'analyse transcendante dont les autres formules ne pouvaient rendre compte; je la trouvais digne d'intérêt par différents résultats que son développement m'avait fait connaître dans le chap. XXXI. et particulièrement par le moyen qu'elle fournit de réduire à deux équations du 3me degré la trisection de la fonction $F$ qui dépend en général d'une équation du 9me degré, enfin la combinaison de deux échelles déjà connues me donnait le moyen de former l'espèce de Damier analytique dont j'ai fait mention page 326 du tome I., qui dans ses cases multipliées à l'infini dans les deux dimensions contient toutes les transformations d'une même fonction donnée $F$. Votre troisième échelle, Monsieur, vient étendre aux trois dimensions de l'espace, les cubes infiniment multipliés dans tous les sens qui contiennent les transformations de la fonction $F$; ils remplissent donc toute l'étendue de l'espace. Mais l'imagination déjà frappée de cette multitude infinie de transformations dont aucune fonction analytique ne montre l'exemple, est en quelque sorte accablée quand vous affirmez qu'il y a une quatrième échelle attachée au nombre premier 7, une cinquième au nombre premier 11, et ainsi pour tous les nombres premiers à l'infini sans aucune exception. Aucune preuve de cette assertion ne se trouvant dans le nº. 123 du *Journal astronomique,* j'avoue que j'étais porté à croire que la proposition n'était pas exacte et que l'induction seule avait pu vous la suggérer. En effet une méthode assez simple que j'avais employée pour vérifier votre théorème II., présentait deux équations de plus que d'inconnues, mais ces équations se sont trouvées satisfaites. Cette même méthode appliquée à l'échelle ultérieure pour le nombre premier 7 contiendrait trois équations de plus que d'inconnues; j'ai commencé le calcul, mais je ne l'ai pas achevé pour m'assurer si ces trois équations n'étaient qu'une conséquence des autres. Dans les échelles ultérieures le nombre des équations oiseuses augmenterait progressivement; j'étais donc en doute sur la proposition considérée dans toute sa généralité. Mais ayant reçu votre lettre j'y ai vu les deux formules générales sous forme trigonométrique dont toute votre théorie dépend; je vois dès lors que ce n'est pas sur l'induction, mais bien sur une analyse profonde et rigoureuse que vous avez établi votre proposition générale. Maintenant je ne puis que vous témoigner le désir que j'éprouve d'avoir communication de l'analyse qui vous a conduit à ces deux formules; la grande habitude que j'ai de la matière me fera contenter d'une simple indication de la méthode, ou de son principe fondamental; je pourrais bien espérer de réussir dans cette recherche en y consacrant un certain espace de temps, mais vous m'obligerez beaucoup, Monsieur, de m'épargner cette peine. Il me sera fort agréable de composer d'après votre méthode, et avec une due mention honorable de son auteur, un supplément au tome I. de mon ouvrage, où j'exposerai votre belle découverte dans tout son jour, et qui en sera un des plus beaux ornements.

Vous recevrez par la voie de M. l'ambassadeur de Prusse, qui a bien voulu accueillir ma demande, un exemplaire de mon *Traité des fonctions elliptiques* dont je vous prie d'agréer l'hommage. J'ai profité de la même occasion pour faire passer à M. Alexandre de Humboldt à Berlin, une lettre où je lui fais part de mon opinion sur votre belle découverte dont j'ai aussi entretenu l'Académie des sciences de Paris dans sa séance du 26. novembre dernier*).

Je ne vous dirai rien dans ce moment sur l'article de votre lettre qui concerne vos découvertes dans la théorie des nombres. J'espère revenir sur cet article dans une autre occasion, pour peu que vous vouliez la faire naître; car devant faire imprimer l'année prochaine une troisième édition de ma théorie des nombres, dans laquelle il y aura plusieurs additions importantes, surtout dans la partie qui concerne les équations à deux termes, je serais fort aise d'y pouvoir insérer quelques-uns de vos nouveaux résultats, avec mention honorable de son auteur.

Comment se fait-il que M. Gauss ait osé vous faire dire que la plupart de vos théorèmes lui étaient connus et qu'il en avait fait la découverte dès 1808?...**) Cet excès d'impudence n'est pas croyable de la part d'un homme qui a assez de mérite personnel pour n'avoir pas besoin de s'approprier les découvertes des autres.... Mais c'est le même homme qui en 1801 voulut s'attribuer la découverte de la loi de réciprocité publiée en 1785***) et qui voulut s'emparer

*) Voir pour la communication à l'Académie des sciences à la suite de cette lettre. B.

**) L'exactitude de cette assertion est prouvée par l'édition des oeuvres complètes de Gauss vol. 3. pp. 492—496, où M. Schering donne les dates précises des travaux de Gauss relatifs à la théorie des fonctions elliptiques et publiés après sa mort. B.

***) Quant à la loi de réciprocité des résidus quadratiques il faut distinguer la découverte par observation et la démonstration de la loi. La première démonstration a été donnée, comme l'on sait, par



en 1809 de la méthode des moindres carrés publiée en 1805*). — D'autres exemples se trouveraient en d'autres lieux, mais un homme d'honneur doit se garder de les imiter. J'ai l'honneur d'être, Monsieur, votre dévoué serviteur.

Paris, Quai Voltaire n°. 9.

Le Gendre.

---

### Extrait du Globe (de jeudi 29. novembre 1827).

A la lettre de Legendre fut joint le numéro indiqué ci-dessus du *Globe* dans lequel on trouve le rapport suivant sur la communication faite par Legendre à l'Académie des sciences dans sa séance de lundi 5 novembre 1827:

Il n'existait jusqu'ici que deux échelles de modules, l'une connue depuis longtemps, l'autre publiée tout récemment dans mon *Traité des fonctions elliptiques* et affectée au nombre premier 3. Or la lettre insérée par M. Jacobi dans le *Journal astronomique d'Altona* contient deux théorèmes qui donnent naissance à deux nouvelles échelles de modules affectées, savoir: la première au nombre premier 3 (c'est précisément celle à laquelle j'étais arrivé moi-même; je regardais sa découverte comme l'un de mes travaux les plus importants, et cette découverte M. Jacobi l'a faite certainement de son côté); la seconde échelle à laquelle je n'avais pas pensé et qui appartient exclusivement à M. Jacobi est affectée au nombre premier 5. Par cette dernière échelle, M. Jacobi a multiplié à l'infini les transformations de la fonction elliptique de première espèce, désignée par $F(c, \varphi)$. J'ai pu vérifier, mais seulement au moyen des calculs les plus élevés, que cette découverte de M. Jacobi est très-réelle. Cependant cet auteur ne s'en est pas tenu là; il a voulu aller plus loin. Il a annoncé que la même

Gauss dans ses *Disquisitiones arithmeticae*, tandis que la démonstration essayée par Legendre reposait sur des hypothèses non moins difficiles à démontrer que la loi même. Dans l'article 151 des *disquisitiones* Gauss parle d'Euler et de Legendre comme de ceux qui avant lui sont parvenus par observation à cette loi. Dans un autre endroit (*Theorematis arithmetici demonstratio nova*, *art.* 2., *Comm. Gotting. Vol.* XVI, 1808) Gauss dit: Pro primo huius elegantissimi theorematis inventore ill. Legendre absque dubio habendus est, postquam longe antea summi geometrae Euler et Lagrange plures eius casus speciales per inductionem detexerant. B.

*) Dans la *Theoria motus corporum coelestium* publiée par Gauss en 1809 on trouve (art. 186.) à la suite de l'exposition de la méthode des moindres carrés le passage: Ceterum principium nostrum, quo iam inde ab anno 1795 usi sumus, nuper etiam a clar. Legendre in opere *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris 1806, prolatum est. B.

méthode qui l'avait conduit aux résultats précédents lui donnait les moyens de former une quatrième échelle attachée au nombre premier 7, une cinquième au nombre premier 11, et ainsi à l'infini. Ici, dit M. Legendre, je n'ai plus été de l'avis de M. Jacobi, et j'ai même cru pouvoir lui écrire une lettre dans laquelle je lui indiquais ce qui, suivant moi, l'avait induit en erreur. Heureusement l'envoi de cette lettre a été assez retardé pour que j'aie pu reconnaître que c'était moi-même qui me trompais, et que M. Jacobi sur ce point comme sur les autres avait complétement raison; et je l'ai reconnu avec d'autant plus de plaisir que c'est sur un sujet dont je m'occupe depuis plus de quarante ans que j'ai été ainsi surpassé par M. Jacobi, mon émule. Ce n'est pas par induction que M. Jacobi est parvenu aux résultats qu'il a publiés; c'est par une théorie profonde et infaillible et à l'aide de deux théorèmes entièrement nouveaux, qu'il a fait cette découverte, qui agrandit considérablement la théorie des fonctions elliptiques et en fait une branche d'analyse parfaite dans son genre et qui ne peut être comparée à aucune autre.

Une principale conséquence entre une infinité d'autres qui résultent de cette savante analyse, c'est que la trisection de la fonction $F$ qui dépend en général d'une équation algébrique du $9^{me}$ degré se réduit à deux équations du $3^{me}$; que la quintisection qui est du $25^{me}$ degré se réduit à deux équations du $5^{me}$; de sorte que la considération des propriétés de notre transcendante sert à résoudre des problèmes d'analyse algébrique d'une grande difficulté et en nombre infini.

M. Jacobi a annoncé aussi, et prouvé par des exemples, qu'il a fait des découvertes importantes dans une des parties les plus importantes de la science des nombres, sur laquelle M. Gauss a annoncé des résultats nouveaux sans les avoir encore publiés.

Frappé de tant de beaux travaux, j'ai voulu, dit M. Legendre, prendre quelques renseignements sur la personne de M. Jacobi: j'ai appris que c'était un jeune homme de 25 ans*) attaché à l'université de Kœnigsberg, où il n'est pas encore professeur, et où il n'occupe qu'un grade inférieur analogue à celui d'agrégé parmi nous.

*) Jacobi, né le 10 décembre 1804, n'avait pas même atteint l'âge de 23 ans. B.

---



## JACOBI A LEGENDRE.

Kœnigsberg, le 12. janvier 1828.

Monsieur,

Je chercherais en vain à vous décrire quels furent mes sentiments en recevant votre lettre du 30 novembre et en même temps le numéro du *Globe* qui contient la communication que vous avez bien voulu faire à l'Académie des sciences de mes essais. Je me sentis confus, accablé de cet excès des bontés que vous m'avez eues et du sentiment que jamais de ma vie je ne saurai mériter de pareilles. Comment vous rendre grâce? Quelle satisfaction pour moi que l'homme que j'admirais tant en dévorant ses écrits a bien voulu accueillir mes travaux avec une bonté si rare et si précieuse! Tout en manquant de paroles qui soient de dignes interprètes de mes sentiments, je n'y saurais répondre qu'en redoublant mes efforts à pousser plus loin les belles théories dont vous êtes le créateur.

J'avais déjà appris il y a quelques mois que vous avez publié un nouvel ouvrage sur les fonctions elliptiques en deux volumes. Aussitôt j'ai donné à un libraire de Berlin l'ordre de me le faire parvenir; mais, à mon grand dépit, je ne l'ai pas encore reçu. J'attends donc avec une impatience extrême le cadeau brillant que vous m'en avez voulu faire et pour lequel je vous rends mille grâces.

Depuis ma dernière lettre, des recherches de la plus grande importance ont été publiées sur les fonctions elliptiques de la part d'un jeune géomètre, qui peut-être vous sera connu personnellement. C'est la première partie d'un mémoire de M. Abel, à Christiania, qu'on m'a dit avoir été à Paris il y a deux ou trois ans, inséré dans le second cahier du second volume du *Journal des Mathématiques pures et appliquées* publié à Berlin par M. Crelle. La continuation doit avoir été publiée dans ces jours dans le cahier troisième dudit Journal: mais elle ne m'est pas encore parvenue. Comme je suppose que ce mémoire ne vous soit pas encore connu, je vous en veux raconter les détails les plus intéressants. Mais, pour plus de commodité, j'avancerai le mode de notation dont je me sers ordinairement.

Si l'on pose $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \Xi$, l'angle $\varphi$ étant l'amplitude de $\Xi$, je le désigne par $\mathrm{am}\,\Xi$; $K$ étant la fonction entière $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, je mets, au lieu de $\operatorname{am}(K-\Xi)$, cette autre expression $\operatorname{coam}\Xi$ (c'est-à-dire *complementi amplitudo*). Je désigne, avec vous,

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\Xi} = \frac{d\operatorname{am}\Xi}{d\Xi} \quad \text{par} \quad \Delta\operatorname{am}\Xi.$$

Le module sera mis à côté, si on le juge convenable; toutes les fois qu'il sera supprimé dans le suivant, les formules se rapportent au module $k$. Du reste, je désignerai le complément de $k$ par $k'$ et la fonction entière qui répond à $k'$ par $K'$.

M. Abel commence par donner l'expression analytique de toutes les racines des équations élevées desquelles dépend la division des fonctions elliptiques. En effet, soit $\sin\varphi = i\operatorname{tang}\psi$, $i$ étant $\sqrt{-1}$, on aura:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{i\,d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}},$$

d'où l'on tire:

$$\sin\operatorname{am}(i\Xi, k) = i\operatorname{tg}\operatorname{am}(\Xi, k'),$$

théorème fondamental de M. Abel.

Je remarque encore les formules suivantes:

$$\cos\operatorname{am}(i\Xi, k) = \operatorname{séc}\operatorname{am}(\Xi, k'),$$

$$\Delta\operatorname{am}(i\Xi, k) = \frac{\Delta\operatorname{am}(\Xi, k')}{\cos\operatorname{am}(\Xi, k')} = \operatorname{coséc}\operatorname{coam}(\Xi, k').$$

Aussi on aura:

$$\sin\operatorname{am}(2iK', k) = 0,$$

$$\sin\operatorname{am}(\Xi + iK') = \frac{1}{k\sin\operatorname{am}\Xi},$$

$$\cot\operatorname{am}(\Xi + iK') = -i\Delta\operatorname{am}\Xi,$$

$$\Delta\operatorname{am}(\Xi + iK') = -i\cot\operatorname{am}\Xi, \text{ etc.}$$

Comme on a:

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(2m'K', k') = 0,$$

$m'$ étant un nombre entier, on aura aussi:

$$\sin\operatorname{am}(2m'iK', k) = 0,$$

d'où il suit qu'on aura en général:

$$\sin\operatorname{am}(\Xi + 4mK + 4m'iK') = \sin\operatorname{am}\Xi,$$

$m$ et $m'$ étant des nombres positifs ou négatifs. On voit donc que les racines de



l'équation élevée qui sert à la division de la fonction elliptique $\Xi$ en $n$ parties seront de la forme $\sin\operatorname{am}\frac{\Xi + 4mK + 4m'iK'}{n}$, formule qui embrasse toutes les racines au nombre de $n^2$, si l'on donne à $m$, $m'$ successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

*M. Abel ramène ensuite la division d'une fonction elliptique quelconque $\Xi$ à la division de la fonction entière $K$.* En effet, soient $\alpha$, $\beta$ des racines quelconques de l'équation $x^n = 1$, l'expression

$$\left(\sum \alpha^m \beta^{m'} \sin\operatorname{am}\frac{\Xi + 4mK + 4m'iK'}{n}\right)^n \text{*)},$$

où l'on donne à $m$, $m'$ toutes leurs valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, ne changera pas si l'on met, au lieu de $\sin\operatorname{am}\frac{\Xi}{n}$, une autre racine quelconque $\sin\operatorname{am}\frac{\Xi + 4\mu K + 4\mu' iK'}{n}$. Cette expression sera donc symétrique par rapport à ces racines et pourra, par conséquence, être exprimée par

$$\sin\operatorname{am}\Xi \text{ **)}.$$

A présent si l'on donne à $\alpha$, $\beta$ toutes leurs valeurs possibles, ce qui donne $n^2$ combinaisons, on tire de là les valeurs de toutes les racines. M. Abel suit une autre méthode, qui, si je ne me trompe pas, rend le problème plus compliqué qu'il n'est en lui-même.

La division de la fonction entière, laquelle dépend en général d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, est ramenée à une équation du degré $n+1$, $n$ étant un nombre premier. En effet, soit $\frac{4\mu K + 4\mu' iK'}{n} = \omega$, $g$ une racine primitive de la congruence $x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, $\varphi(\omega)$ une fonction trigonométrique quelconque de l'amplitude de $\omega$, $\alpha$ une racine de l'équation $x^{n-1} = 1$, on y parvient en considérant l'expression

$$[\varphi(\omega) + \alpha\varphi(g\omega) + \alpha^2\varphi(g^2\omega) + \cdots + \alpha^{n-2}\varphi(g^{n-2}\omega)]^{n-1}$$

symétrique en $\varphi(\omega)$, $\varphi(g\omega)$, $\varphi(g^2\omega)$, $\ldots$, $\varphi(g^{n-2}\omega)$. Or les fonctions symétriques de ces quantités ne sauront avoir que des valeurs différentes au nombre de $n+1$, qui répondent à $\mu = 0$, $\mu' = 1$; $\mu = 1$, $\mu' = 0$; $\mu = 1$, $\mu' = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Donc elles seront données au moyen d'une équation algébrique du degré $n+1$.

---

*) On entend par $\sum$ la somme des expressions formées de ladite manière.

**) Il faut ajouter: Et par des quantités constantes, mais irrationnelles, de la forme $\sin\operatorname{am}\frac{4mK + 4m'iK'}{n}$.

Je vais ajouter à présent les propres paroles de M. Abel, en remarquant qu'il considère dans son mémoire les fonctions elliptiques sous la forme

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}:$$

„Donc, en dernier lieu, la résolution de l'équation $P_n = 0$ est réduite à celle d'une seule équation de degré $n+1$; mais cette équation ne paraît pas en général être résoluble algébriquement. Néanmoins on peut la résoudre complètement dans plusieurs cas particuliers, par exemple lorsque $e = c$, $e = c\sqrt{3}$, $e = c(2\pm\sqrt{3})$, etc. Dans le cours de ce mémoire*), je m'occuperai de ces cas, dont le premier surtout est remarquable, tant par la simplicité de la solution, que par sa belle application dans la géométrie. En effet, entre autres, je suis parvenu à ce théorème: *On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate, par la règle et le compas seuls, en m parties égales, si m est de la forme* $2^n$ *ou* $2^n+1$, *le dernier nombre étant en même temps premier; ou bien si m est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes.* Ce théorème est, comme on voit, précisément le même que celui de M. Gauss relativement au cercle.“

Connaissant les racines des équations mentionnées, M. Abel les résout en facteurs; ensuite, dans les formules qui en résultent, il pose $n = \infty$, d'où il tire des expressions très-remarquables; mais cela n'a plus aucune difficulté.

Vous m'avez permis, Monsieur, de vous communiquer l'analyse dont je me sers. Une démonstration rigoureuse du théorème général concernant les transformations s'imprime à présent dans le Journal de M. Schumacher; elle vous sera envoyée aussitôt qu'elle sera imprimée. Mes recherches ultérieures sont encore loin d'être finies; cependant j'en embrasserai une partie dans un mémoire que je crois pouvoir publier dans peu. Il s'y trouvera, entre autres, un résultat curieux qui d'abord m'a frappé un peu; c'est le cas suivant. Si l'on peut transformer un module $k$ dans un autre $\lambda$, on a entre ces deux modules une équation algébrique du degré $n+1$, si la transformation se rapporte au nombre $n$, qu'on suppose être premier. Ces équations symétriques en $k$ et $\lambda$ sont, par exemple pour $n = 3$, $n = 5$:

$$u^4 - v^4 \pm 2uv(1-u^2v^2) = 0, \quad u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2-v^2) \pm 4uv(1-u^4v^4) = 0,$$

où l'on a supposé $u = \sqrt[4]{k}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$. Il paraît remarquable que ces équations,

*) Qui n'est pas encore publié.



qu'on pourrait appeler *équations modulaires*, ont leur forme la plus simple entre les quatrièmes racines des modules. Or toutes ces équations algébriques en nombre infini satisfont à une même équation différentielle du troisième degré, savoir:

$$3(dk^2d^2\lambda^2 - d\lambda^2d^2k^2) - 2dk\,d\lambda(dk\,d^3\lambda - d\lambda\,d^3k) + dk^2d\lambda^2\left[\left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2 dk^2 - \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right)^2 d\lambda^2\right] = 0,$$

où l'on n'a supposé constante aucune différentielle. Aussi j'ai trouvé que, dans certains cas, on retombe sur le même module, de sorte que la transformation devient multiplication; ainsi $k$ étant $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, on aura deux racines de l'équation $u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2-v^2) - 4uv(1-u^4v^4) = 0$ égales à $(1\pm i)u^5$, d'où l'on tire $v^8 = \lambda^2 = k^2 = \tfrac{1}{2}$. Ce sera dans tous les cas où le nombre $n$ est la somme de deux carrés, $n = a^2 + 4b^2$, $k$ étant $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; la fonction elliptique se trouve alors multipliée par $a \pm 2bi$. On remarque des choses semblables dans les modules qui sont liés d'après une échelle quelconque avec $k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. C'est un genre de multiplication qui n'a pas son analogue dans les arcs de cercle. Je suis très-curieux de savoir votre avis sur ma démonstration, laquelle à la vérité est un peu compliquée. La nouvelle d'une troisième édition de la *Théorie des nombres* m'a charmé. Je n'ai travaillé sur cette science que très-peu de temps; quand je m'aurai pris la liberté de vous communiquer un petit mémoire qui va être publié sur la théorie des résidus, vous verrez que mes idées ne méritent pas la place brillante que vous leur avez offerte. Aussi les recherches sur les fonctions elliptiques doivent être en quelque sorte finies avant qu'elles soient dignes de former un supplément à un ouvrage sans doute parfait dans toutes ses parties.

Adieu, Monsieur, daignez recevoir les respects les plus profonds que m'inspirent la supériorité de vos lumières et la générosité de vos sentiments. Jamais de ma vie je n'oublierai cette bonté de père avec laquelle vous avez voulu m'encourager dans la carrière des sciences.

Votre dévoué serviteur,

C. G. J. Jacobi.

P. S. Le troisième cahier du *Journal de Crelle*, que je viens de recevoir, ne contient pas encore la suite du mémoire de M. Abel.

## LEGENDRE A JACOBI.

Paris le 9. février 1828.

Monsieur,

Lorsque j'ai reçu votre lettre du 12. janvier, M. Schumacher m'avait déjà envoyé le n°. 127. de son Journal, où se trouve votre démonstration du théorème sur les transformations des fonctions elliptiques. J'ai pris infiniment de plaisir à votre démonstration où brille votre sagacité et que je trouve fort courte relativement à la grande étendue de son objet; elle m'a suggéré quelques remarques dont j'ai envoyé un précis à M. Schumacher pour être imprimé dans son Journal, suivant le désir qu'il m'en avait témoigné. La manière dont vous passez de la valeur de $1-y$ à celle de $y$, décomposée également en facteurs, m'a paru très-élégante; mais ce qui, à mes yeux, fait le grand mérite de votre démonstration, c'est l'heureuse idée que vous avez eue de substituer à la fois $\frac{1}{kx}$ à $x$ et $\frac{1}{\lambda y}$ à $y$. Cette double substitution qui satisfait à l'équation différentielle, doit satisfaire aussi aux intégrales qui la représentent; par ce moyen vous pouvez vérifier d'un trait de plume la valeur $y=\frac{U}{V}$, et vous trouvez pour seule condition la valeur du module $\lambda$ exprimée en fonction du module donné $k$; dès lors le théorème est démontré dans toute sa généralité, sans aucun calcul pénible et par une sorte d'enchantement; vous verrez dans ma note que cette belle démonstration m'aurait paru plus satisfaisante, si vous y eussiez joint quelques détails sur la série des idées qui vous ont conduit à la valeur supposée pour $1-y$; vous pourrez avoir égard à mon observation dans les autres parties de vos recherches qui vous restent à publier. J'ai indiqué aussi une vérification de votre théorème qu'il serait curieux d'effectuer et qui mettrait dès à présent cette découverte dans tout son jour. Par vos formules il est facile de trouver la valeur de la fonction $T$ en facteurs; ensuite l'idée vient naturellement de faire les substitutions dans l'équation

$$\frac{dU}{Udx}-\frac{dV}{Vdx}=\frac{1}{M}\cdot\frac{T}{UV},$$

afin de voir si elle est satisfaite. L'équation mise sous cette forme se décompose dans les deux membres en fractions partielles dont les dénominateurs sont les facteurs binômes des fonctions $U$ et $V$, et il est facile d'avoir l'expression générale du numérateur correspondant à un facteur quelconque de $U$, et celle du numérateur correspondant à un facteur quelconque de $V$.



L'identité de l'équation fournira donc deux conditions générales qui devront être satisfaites. Depuis l'envoi de ma note j'ai observé que ces deux conditions se réduisent à une seule que je présente ici sous la forme la plus simple. Soit $\alpha_m$ l'amplitude telle que $F(\alpha_m)=\frac{m}{2n+1}K$, la condition dont il s'agit et qui doit avoir lieu pour toute valeur de $i$ depuis 1 jusqu'à $n$, est celle-ci:

$$2\cos\alpha_{2i}\left(\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_2}-1\right)\left(\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_4}-1\right)\cdots\left(\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_{2i-2}}-1\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_{2i+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_{2n}}\right)$$
$$=(1-k^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_1)(1-k^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_3)(1-k^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_5)\cdots(1-k^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_{2n-1}).$$

Cette équation doit être vraie d'après votre démonstration, mais il serait intéressant de la déduire des premiers principes de la théorie des fonctions elliptiques. C'est une recherche que je laisse à votre sagacité et qui me paraît assez importante puisqu'elle confirmera d'une manière invincible l'exactitude de votre théorème. Je suis parvenu à cette équation au moyen d'un lemme que j'ai déduit de vos formules et qui dans votre notation serait exprimé ainsi:

$$\frac{1-\dfrac{x^2}{\sin^2\operatorname{coam}\frac{2mK}{2n+1}}}{1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2mK}{2n+1}}=\frac{\cos\operatorname{am}\left(\Xi+\frac{2mK}{2n+1}\right)\cos\operatorname{am}\left(\Xi-\frac{2mK}{2n+1}\right)}{\cos^2\operatorname{am}\frac{2mK}{2n+1}}.$$

Je crois voir en écrivant ceci que ce même lemme donnera assez facilement la démonstration de mon équation.

J'avais déjà connaissance du beau travail de M. Abel inséré dans le *Journal de Crelle*. Mais vous m'avez fait beaucoup de plaisir de m'en donner une analyse dans votre langage qui est plus rapproché du mien. C'est une grande satisfaction pour moi de voir deux jeunes géomètres, comme vous et lui, cultiver avec succès une branche d'analyse qui a fait si longtemps l'objet de mes études favorites et qui n'a point été accueillie dans mon propre pays comme elle le méritait. Vous vous placez par ces travaux au rang des meilleurs analystes de notre époque; nous voyons au contraire ici les talents peu nombreux qui y restent se livrer à des recherches vagues qui ne laisseront que de faibles traces dans l'histoire. Ce n'est pas assez d'avoir du talent, il faut savoir choisir l'objet dont on doit s'occuper.

J'attends avec impatience la suite des recherches que vous ferez paraître dans le Journal de M. Schumacher, et particulièrement les relations que vous avez trouvées entre deux modules qui peuvent se transformer l'un dans l'autre. Vous me donnez pour le cas $n = 3$ l'équation

$$u^4 - v^4 \pm 2uv(1 - u^2v^2) = 0$$

à laquelle j'ai ajouté le double signe $\pm$; j'ai pour le même cas donné dans mon traité l'équation $1 = \sqrt{cc_1} + \sqrt{bb_1}$ qui revient au même. Mais vous êtes allé beaucoup plus loin.

Je ne m'occupe pas encore de ma troisième édition de la théorie des nombres, ainsi vous avez tout le temps de me faire part de ce que vous aurez imprimé sur les résidus de différents degrés. J'ai déjà approuvé beaucoup votre démonstration de la loi de réciprocité à laquelle pourtant il faut ajouter quelques développements; je pourrais vous indiquer dans cette partie des objets de recherche qui ont une difficulté digne de vous; mais j'aime mieux vous donner le conseil de ne pas donner trop de temps aux recherches de cette nature. Elles sont très-difficiles et ne mènent souvent à aucun résultat.

Je suis étonné de ce que vous n'avez pas encore reçu l'exemplaire que M. l'ambassadeur le baron de Werther avait promis de vous faire passer. Il faut le réclamer à Berlin si vous éprouvez de nouveaux retards.

Agréez, Monsieur, l'assurance de mon estime bien sincère et de mon entier dévouement.

Le Gendre.

Je vous prie de ne pas prendre la peine d'affranchir, quand vous m'écrivez, il ne faut pas que ma correspondance vous soit onéreuse.



## JACOBI A LEGENDRE.

Kœnigsberg, le 12 avril 1828.

Monsieur,

Il me faut vous faire de grandes excuses d'avoir retardé aussi longtemps la réponse à votre aimable lettre, plaine de vos bontés, qui font la plus douce récompense de mes efforts et un grand bonheur de ma vie. En effet, j'avais espéré de jour en jour pouvoir vous mander la fin d'un premier mémoire qui devait embrasser la plupart de mes recherches. Cependant la difficulté de la matière, de même que les nouvelles vues qui se sont ouvertes dans le cours même du travail, me font éprouver de si grands retards, que peut-être il ne vous sera pas désagréable si je vous fais part des résultats principaux trouvés jusqu'ici, et qui me paraissent dignes de votre intérêt. Veuillez les accueillir avec la bonté dont vous m'avez donné des preuves si éclatantes et qui seront gravées à jamais dans mon coeur.

Soit d'après ma notation $\omega = \frac{mK + 2m'iK'}{n}$ ($n$ est un nombre impair), $m$ et $m'$ désignant des nombres entiers quelconques, mais tels qu'un même nombre ne saura être diviseur des trois, $m, m', n$. Vous verrez aisément que la démonstration de mon théorème s'applique mot à mot au cas même qu'on met partout $\operatorname{am}\omega$ au lieu de $\operatorname{am}\frac{K}{n}$. En mettant successivement

$$\omega = \frac{K}{n}, \quad \frac{2iK'}{n}, \quad \frac{K \pm 2iK'}{n}, \quad \frac{K \pm 4iK'}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{K \pm (n-1)iK'}{n},$$

on tire de là un nombre $n+1$ de transformations attachées au nombre $n$ et analogues à celle que j'ai donnée relativement à $\omega = \frac{K}{n}$. Elles embrassent toutes les possibles quand $n$ est premier; aussi dans les cas de $n = 3$, $n = 5$, j'ai montré que les équations modulaires montent au quatrième et sixième degré, comme cela doit être. De ces modules, au nombre de $n+1$, il n'y a que deux qui soient réels, savoir: ceux qui répondent à $\omega = \frac{K}{n}$ et à $\omega = \frac{2iK'}{n}$. La dernière transformation, savoir: celle qui répond à $\omega = \frac{2iK'}{n}$, est précisément la même qui fournit le théorème complémentaire. Pour démontrer ceci, il faut remonter aux formules analytiques concernant la multiplication, données la première fois par M. Abel. J'en cite les trois suivantes, présentées d'après la forme sous laquelle vous considérez les fonctions elliptiques, et dans laquelle j'ai eu soin de vous suivre:

$$♀\begin{cases} (1.) & \sin\operatorname{am}(n\xi, k) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n^2-1}{2}} \Pi \sin\operatorname{am}\left(\xi + \frac{2mK+2m'iK'}{n}\right), \\ (2.) & \dfrac{1}{k^{n^2-1}} = \Pi \sin^4\operatorname{coam}\dfrac{2mK+2m'iK'}{n}, \\ (3.) & \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \Pi \dfrac{\sin^2\operatorname{coam}\frac{2mK+2m'iK'}{n}}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2mK+2m'iK'}{n}}. \end{cases}$$

Les produits désignés par $\Pi$ embrassent tous les facteurs *différents entre eux* que l'on obtient en donnant à $m$, $m'$ des valeurs en nombres entiers positifs ou négatifs.

Les trois formules principales relatives à la transformation complémentaire sont:

$$(1.)\begin{cases} \sin\operatorname{am}(n\xi, k) \\ = \sqrt{\frac{\lambda^n}{k}} \sin\operatorname{am}\frac{\xi}{M} \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{4i\Lambda'}{n}\right) \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{8i\Lambda'}{n}\right) \cdots \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{4(n-1)i\Lambda'}{n}\right) \pmod{\lambda} \\ = \dfrac{nMy\left(1+\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}}\right)\left(1+\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1+\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right)}{\left(1+\lambda^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}y^2\right)\left(1+\lambda^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}y^2\right)\cdots\left(1+\lambda^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}y^2\right)} \pmod{\lambda'}, \end{cases}$$

$$(2.)\begin{cases} k = \lambda^n\left(\sin\operatorname{coam}\frac{2i\Lambda'}{n}\sin\operatorname{coam}\frac{4i\Lambda'}{n}\sin\operatorname{coam}\frac{6i\Lambda'}{n}\cdots\sin\operatorname{coam}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}\right)^4 \pmod{\lambda}, \\ \quad = \dfrac{\lambda^n}{\left(\Delta\operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}\Delta\operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\Delta\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}\right)^4} \pmod{\lambda'}, \end{cases}$$

$$(3.)\quad \frac{1}{nM} = \left(\frac{\sin\operatorname{coam}\frac{2\Lambda'}{n}\sin\operatorname{coam}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\sin\operatorname{coam}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}{\sin\operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}\sin\operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\sin\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right)^2 \pmod{\lambda'},$$

où l'on a mis

$$y = \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M}, \lambda\right), \quad \lambda^2+\lambda'^2 = 1,$$

$$\Lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}, \quad \Lambda' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda'^2\sin^2\varphi}}.$$



Il faut ajouter que la théorie de la première transformation donne $\Lambda = \frac{K}{nM}$, $\Lambda' = \frac{K'}{M}$. Démontrons la première de ces formules.

Si, dans la formule suivante, qui concerne la première transformation:

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M},\lambda\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\sin\operatorname{am}\xi\sin\operatorname{am}\left(\xi+\frac{4K}{n}\right)\sin\operatorname{am}\left(\xi+\frac{8K}{n}\right)\cdots\sin\operatorname{am}\left(\xi+\frac{4(n-1)K}{n}\right),$$

on met $\xi+\frac{2m'iK'}{n}$ au lieu de $\xi$, $\frac{\xi}{M}$ devenant $\frac{\xi}{M}+\frac{2m'iK'}{nM} = \frac{\xi}{M}+\frac{2m'i\Lambda'}{n}$, on a:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2m'i\Lambda'}{n},\lambda\right) = \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\,\Pi\sin\operatorname{am}\left(\xi+\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right),$$

où l'on donne à $m$ les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm\frac{n-1}{2}$. Dans cette formule, mettant successivement $m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{n-1}{2}$, et formant le produit, on a:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\Pi\sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2m'i\Lambda'}{n},\lambda\right) = \sqrt{\frac{k^{n^2}}{\lambda^n}}\,\Pi\sin\operatorname{am}\left(\xi+\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right).$$

Mais la formule désignée par ♀ (1.) donne:

$$\sin\operatorname{am} n\xi = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n^2-1}{2}}\,\Pi\sin\operatorname{am}\left(\xi+\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right),$$

d'où l'on tire:

$$\sin\operatorname{am}(n\xi, k) = \sqrt{\frac{\lambda^n}{k}}\,\Pi\sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2m'i\Lambda'}{n},\lambda\right),$$

ce qui est la formule à démontrer. De la même manière on démontre les deux autres au moyen des formules ♀ (2.), (3.). La formule dont j'ai fait mention dans ma première lettre résulte des mêmes principes.

Si l'on met dans ces deux transformations $i\xi$ au lieu de $\xi$, on a la transformation du module $k'$ dans le module $\lambda'$, et *vice versâ*. Nommant $\lambda_1$ le second module réel dans lequel on sait transformer le module $k$ et qui répond à $\omega = \frac{2iK'}{n}$, on verra que $\lambda$ dépend de la même manière de $k$ que $k$ de $\lambda_1$, $\lambda_1'$ de $k'$ et $k'$ de $\lambda'$, $\lambda_1'$ étant le complément de $\lambda_1$. Donc si l'on forme d'après la même loi deux échelles relatives à $k$ et $k'$, trois termes consécutifs seront dans l'une $\ldots\lambda, k, \lambda_1, \ldots$ et dans l'autre $\ldots\lambda_1', k', \lambda'\ldots$, théorème que vous avez démontré dans les cas de $n = 2$ et de $n = 3$.

On pourrait d'une manière analogue passer à la multiplication par le moyen du module $\lambda_1$, de même que par le moyen des autres modules imaginaires.

Faisons $\xi = \frac{u}{n}$, $n = \infty$, on aura dans cette limite $\lambda = 0$, et par conséquent $\Lambda = \frac{\pi}{2}$; les formules $\Lambda = \frac{K}{n\mathrm{M}}$, $\Lambda' = \frac{K'}{\mathrm{M}}$ donnent $n\mathrm{M} = \frac{2K}{\pi}$, $\frac{\Lambda'}{n} = \frac{K'}{n\mathrm{M}} = \frac{\pi K'}{2K}$; on aura de plus:

$$y = \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{\mathrm{M}}, \lambda\right) = \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{n\mathrm{M}}, \lambda\right) = \sin\frac{\pi u}{2K}.$$

La formule (1.) peut s'écrire de la manière suivante:

$$\sin\operatorname{am}(n\xi, k) = \frac{n\mathrm{M}y\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2i\Lambda'}{n}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{4i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}}\right)}{\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{i\Lambda'}{n}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{3i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-2)i\Lambda'}{n}}\right)} (\mathrm{mod.}\,\lambda).$$

De là on tire, dans le cas de $n = \infty$,

$$\sin\operatorname{am} u = \frac{\frac{2Ky}{\pi}\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\frac{i\pi K'}{K}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\frac{2i\pi K'}{K}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\frac{3i\pi K'}{K}}\right)\cdots}{\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\frac{i\pi K'}{2K}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\frac{3i\pi K'}{2K}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\frac{5i\pi K'}{2K}}\right)\cdots},$$

$y$ étant $\sin\frac{\pi u}{2K}$. Soit $e^{\frac{i\pi u}{2K}} = U$, $e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$; cette formule se transforme dans celle-ci:

$$\sin\operatorname{am}(u, k)$$
$$= \frac{2K}{\pi} A\left(\frac{U-U^{-1}}{2i}\right)\frac{[(1-q^2U^2)(1-q^4U^2)(1-q^6U^2)\ldots][(1-q^2U^{-2})(1-q^4U^{-2})(1-q^6U^{-2})\ldots]}{[(1-qU^2)(1-q^3U^2)(1-q^5U^2)\ldots][(1-qU^{-2})(1-q^3U^{-2})(1-q^5U^{-2})\ldots]},$$

où l'on a mis $A = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}\right]^2$. Si l'on met dans cette formule $u + iK'$ au lieu de $u$, $U$ deviendra $\sqrt{q}U$; de là on tire, en remarquant que $\sin\operatorname{am}(u+iK') = \frac{1}{k\sin\operatorname{am} u}$, la valeur de $A = \frac{\pi\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}K}$. De la même manière on trouve au moyen des expressions semblables pour $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ etc., les valeurs des produits suivants:



$$[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^6 = \frac{2k'\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}},$$

$$[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^6 = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{kk'}},$$

$$[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots]^6 = \frac{2kk'K^3}{\sqrt{q}\pi^3},$$

$$[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^6 = \frac{k}{4\sqrt{k'}\sqrt{q}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sommations très-remarquables, ce me semble.

Comme on a $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}$, $\frac{\Lambda'_1}{\Lambda_1} = \frac{1}{n}\frac{K'}{K}$, on voit qu'en mettant seulement $q^n$ ou $q^{\frac{1}{n}}$ au lieu de $q$, on tire de ces formules aussitôt les expressions semblables relatives aux modules transformés $\lambda$, $\lambda_1$. Ainsi on aura, par exemple,

$$k = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4, \quad \lambda = 4\sqrt{q^n}\left[\frac{(1+q^{2n})(1+q^{4n})(1+q^{6n})\ldots}{(1+q^n)(1+q^{3n})(1+q^{5n})\ldots}\right]^4.$$

On ne saura guère reconnaître de la nature de ces produits que ces deux expressions dépendent *algébriquement* l'une de l'autre. Je remarque encore que, comme on a

$$k' = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4, \quad k^2 + k'^2 = 1,$$

on aura aussi:

$$[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^8 + 16q[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^8 = [(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^8,$$

équation difficile à prouver au moyen des méthodes connues. On y saura ajouter nombre d'autres.

Si l'on met $u + \frac{4mK}{n}$ au lieu de $u$, $U$ se change en $\alpha U$, où $\alpha^n = 1$.

De là se déduit de la formule pour $\sin\operatorname{am} u$ une nouvelle vérification assez facile de ma première transformation.

Je passe à d'autres recherches. Soit

$$\left(\frac{U-U^{-1}}{2}\right)[(1-q^2U^2)(1-q^4U^2)(1-q^6U^2)\ldots][(1-q^2U^{-2})(1-q^4U^{-2})(1-q^6U^{-2})\ldots]$$
$$= a'(U-U^{-1}) + a''(U^3-U^{-3}) + a'''(U^5-U^{-5}) + \cdots$$

Si l'on met dans ce produit $qU$ au lieu de $U$, il sera multiplié par $\left(\frac{qU-q^{-1}U^{-1}}{U-U^{-1}}\right)\left(\frac{1-U^{-2}}{1-q^2U^2}\right)=-\frac{1}{qU^2}$. De là suit:

$$a''=-q^2a',\quad a'''=-q^4a'',\quad a^{\text{IV}}=-q^6a''',\ \ldots;$$

ou

$$\frac{a''}{a'}=-q^2,\quad \frac{a'''}{a'}=+q^{2.3},\quad \frac{a^{\text{IV}}}{a'}=-q^{3.4},\quad \frac{a^{\text{V}}}{a'}=+q^{4.5},\ \ldots;$$

de sorte qu'on aura ce produit égal à

$$a'[U-U^{-1}-q^2(U^3-U^{-3})+q^6(U^5-U^{-5})-q^{12}(U^7-U^{-7})+q^{20}(U^9-U^{-9})-\cdots].$$

De la même manière on trouve:

$$[(1-qU^2)(1-q^3U^2)(1-q^5U^2)\ldots][(1-qU^{-2})(1-q^3U^{-2})(1-q^5U^{-2})\ldots]$$
$$=b[1-q(U^2+U^{-2})+q^4(U^4+U^{-4})-q^9(U^6+U^{-6})+q^{16}(U^8+U^{-8})\ldots],$$

$a'$ et $b$ désignant des constantes.

On aura donc

$$\sin\operatorname{am}u=C\frac{U-U^{-1}-q^2(U^3-U^{-3})+q^6(U^5-U^{-5})-q^{12}(U^7-U^{-7})+\cdots}{1-q(U^2+U^{-2})+q^4(U^4+U^{-4})-q^9(U^6+U^{-6})+q^{16}(U^8+U^{-8})-\cdots}.$$

La constante $C$ se détermine encore au moyen de la formule

$$\sin\operatorname{am}(u+iK')=\frac{1}{k\sin\operatorname{am}u},$$

en remarquant que $U$ se change en $\sqrt{q}U$ en même temps que $u$ devient $u+iK'$. On la trouve égale à $\frac{\sqrt[4]{q}}{i\sqrt{k}}$, de sorte qu'il vient, en mettant $u=\frac{2Kx}{\pi}$,

$$(1.)\quad \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{2}{\sqrt{k}}\,\frac{q^{\frac14}\sin x-q^{\frac94}\sin 3x+q^{\frac{25}{4}}\sin 5x-q^{\frac{49}{4}}\sin 7x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots}.$$

J'y ajoute les trois semblables:

$$(2.)\quad \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=2\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{q^{\frac14}\cos x+q^{\frac94}\cos 3x+q^{\frac{25}{4}}\cos 5x+q^{\frac{49}{4}}\cos 7x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots},$$

$$(3.)\quad \Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{k'}\,\frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots},$$

$$(4.)\quad \operatorname{tg}\tfrac12\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{\sin\frac{x}{2}+q\sin\frac{3x}{2}-q^3\sin\frac{5x}{2}-q^6\sin\frac{7x}{2}+q^{10}\sin\frac{9x}{2}+q^{15}\sin\frac{11x}{2}-\cdots}{\cos\frac{x}{2}-q\cos\frac{3x}{2}-q^3\cos\frac{5x}{2}+q^6\cos\frac{7x}{2}+q^{10}\cos\frac{9x}{2}-q^{15}\cos\frac{11x}{2}-\cdots},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .



Je remarque encore les formules suivantes:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots,$$

$$\sqrt{k}=\frac{2\left(q^{\frac14}+q^{\frac94}+q^{\frac{25}{4}}+q^{\frac{49}{4}}+\cdots\right)}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots},$$

$$\sqrt{k'}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . ,

dont la première est la plus remarquable.

Quant à l'importance de ces formules, vous la sentirez mieux que je ne pourrais le dire. Aussi elles ne seront pas sans intérêt pour les célèbres géomètres qui s'occupent du mouvement de la chaleur; les numérateurs et les dénominateurs des fractions par lesquelles on a exprimé les fonctions trigonométriques de l'amplitude étant souvent rencontrés dans ladite question. Je finirai ici l'exposition rapide des résultats principaux trouvés jusqu'ici.

Vous auriez voulu que j'eusse donné la chaîne des idées qui m'a conduit à mes théorèmes. Cependant la route que j'ai suivie n'est pas susceptible de rigueur géométrique. La chose étant trouvée, on pourra y substituer une autre sur laquelle on aurait pu y parvenir rigoureusement. Ce n'est donc que pour vous, Monsieur, que j'ajoute le suivant:

La première chose que j'avais trouvée (dans le mars 1827), c'était l'équation $\frac{T}{M}=\frac{VdU}{dx}-\frac{UdV}{dx}$; de là je reconnus que, pour un nombre $n$ quelconque, la transformation était un problème d'analyse algébrique ***déterminé***, le nombre des constantes arbitraires égalant toujours celui des conditions. Au moyen des coefficients indéterminés, je formai les transformations relatives aux nombres 3 et 5. L'équation du quatrième degré à laquelle me mena la première ayant presque la même forme que celle qui sert à la trisection, j'y soupçonnais quelque rapport. Par un tâtonnement heureux, je remarquais dans ces deux cas l'autre transformation complémentaire pour la multiplication. Là j'écrivis ma première lettre à M. Schumacher, la méthode étant générale et vérifiée par des exemples. Depuis, examinant plus de proche les deux substitutions $z=\frac{ay+by^3}{1+cy^2}$, $y=\frac{a'x+b'x^3}{1+c'x^2}$ sous la forme présentée dans ma première lettre, je vis qu'étant mis $x = \sin\operatorname{am}\frac{2K}{3}$, $z$ devra s'évanouir, et comme, dans ladite forme, $\frac{b}{a}$ était positif, j'en conclus que $y$ devra s'évanouir aussi. De cette manière je trouvai par induction la résolution en facteurs, laquelle étant confirmée par des exemples, je donnai le théorème général dans ma seconde lettre à M. Schumacher. Ensuite, ayant remarqué l'équation $\sin\operatorname{am}(i\xi, k) = i\operatorname{tg}\operatorname{am}(\xi, k')$, j'en tirai la transformation de $k'$ en $\lambda'$. J'avais donc deux transformations différentes, l'une de $k$ dans un module plus petit $\lambda$, l'autre de $k'$ dans un module plus grand $\lambda'$. De là, je fis la conjecture qu'en échangeant entre eux $k'$ et $\lambda$, $k$ et $\lambda'$, on aurait l'expression analytique de la transformation complémentaire. Tout étant confirmé par des exemples, j'eus la hardiesse de vous adresser une première lettre *), qui a été accueillie de vous avec tant de candeur. Les démonstrations n'ont été trouvées que ci-après.

Le 14 février dernier, j'ai enfin reçu votre excellent cadeau par la bonté de M. de Humboldt, qui me l'a fait parvenir aussitôt qu'il arriva à Berlin. Il fera l'étude de ma vie.

M. Schumacher m'a donné connaissance de ce que vous lui avez écrit du théorème complémentaire; je me suis donc empressé de faire partir cette lettre, et je l'en avertirai. Il faut m'excuser, Monsieur, si la bonne opinion que vous avez bien voulu avoir pour moi me rend un peu timide à présenter des choses trop imparfaites à un si grand maître.

M. Crelle m'a écrit que la continuation du mémoire de M. Abel s'imprime déjà. Je l'attends avec impatience. Quant à M. Gauss, il n'a rien encore publié sur les fonctions elliptiques, mais il est certain qu'il a eu de jolies choses. S'il a été prévenu et peut-être surpassé, c'est une juste peine de ce qu'il a répandu un voile mystique sur ses travaux. Je ne le connais pas personnellement, ayant étudié la philologie à Berlin, où il n'y a pas des géomètres de distinction.

Daignez accueillir l'assurance de mon respect le plus profond.

Votre dévoué

C. G. J. Jacobi.

*) Je l'avais donnée à un jeune marchand que je ne connaissais pas personnellement; on m'avait dit qu'il allait droitement à Paris; mais il a passé plusieurs mois dans les capitales de l'Allemagne. De là s'est fait, à mon grand dépit, le retard de cette lettre.



## LEGENDRE A JACOBI.

Paris, le 14 avril 1828 *).

Monsieur,

Je viens de recevoir une lettre de M. Schumacher qui m'apprend que vous ne lui avez rien envoyé pour être imprimé dans son Journal. J'avais l'espérance que votre première publication contiendrait la démonstration de votre Théorème II., laquelle m'intéresse d'autant plus que j'ai lieu de croire que ce n'est que par un artifice nouveau et très-ingénieux que vous êtes parvenu à cette démonstration. En effet, si on fait conformément à vos dénominations

$$\lambda^2+\lambda'^2 = 1,\quad F(\lambda', \psi^m) = \frac{m}{p}F^1(\lambda'),\quad \operatorname{tg}\vartheta' = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\psi'},\quad \operatorname{tg}\vartheta''' = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\psi'''},\ \ldots$$

et enfin

$$\tfrac{1}{2}\vartheta = \vartheta' - \vartheta''' + \vartheta^{v} \ldots \mp \vartheta^{p-2} \pm \tfrac{1}{2}\psi,$$

on aura la formule du Théorème II.:

$$F(k, \vartheta) = \mu F(\lambda, \psi)$$

laquelle étant combinée avec celle du théorème I., donne

$$F(k, \vartheta) = pF(k, \varphi).$$

Je trouve aisément par les données du Théorème II., qu'en faisant $\gamma' = \cot^2\psi'$, $\gamma''' = \cot^2\psi'''$, ..., $x = \sin\psi$, $y = \sin\vartheta$, on a

$$y = \frac{\mu x\left(1+\frac{\lambda^2x^2}{\gamma'}\right)\left(1+\frac{\lambda^2x^2}{\gamma'''}\right)\left(1+\frac{\lambda^2x^2}{\gamma^{v}}\right)\cdots}{(1+\gamma'x^2)(1+\gamma'''x^2)(1+\gamma^{v}x^2)\ldots}$$

et de là

$$k = \frac{\gamma'^2\gamma'''^2\gamma^{v2}\ldots}{\mu^2\lambda^{p-2}}.$$

Ces valeurs entièrement déterminées satisfont à ce beau principe de transformation qui vous est dû, savoir qu'on peut mettre à la fois $\frac{1}{k\sin\vartheta}$ à la place

*) Cette lettre s'est croisée avec celle du 12 avril 1828 adressée par Jacobi à Legendre. B.

de $\sin\vartheta$ et $\frac{1}{\lambda\sin\psi}$ à la place de $\sin\psi$. Mais pour rendre la démonstration complète et semblable à celle du Théorème I., il faudrait dans l'équation

$$\sqrt{1-yy} = \sqrt{1-xx}\cdot\frac{P}{(1+\gamma' x^2)(1+\gamma''' x^2)\ldots}$$

pouvoir exprimer le numérateur $P$ en produit de facteurs $(1+\delta' x^2)(1+\delta''' x^2)\ldots$ dont on connaîtrait l'expression générale. Or c'est ce qui paraît présenter une telle difficulté que je n'ai vu, après plusieurs recherches, aucun moyen de la résoudre. Il serait d'ailleurs fort superflu que j'employasse beaucoup de temps à cette recherche puisque la gloire de la découverte vous appartient tout entière et qu'il n'entrerait nullement dans mon esprit d'en revendiquer la moindre partie. Vous voyez donc, Monsieur, combien vous m'obligeriez de vouloir bien satisfaire mon impatience, en me donnant les directions nécessaires pour parvenir à votre démonstration. Je présume que ma demande n'exige pas de très-longs développements, et qu'il vous sera facile de me mettre sur la voie de votre belle découverte qui excite ma curiosité au plus haut degré. *Intelligenti pauca.*

J'ai l'intention d'insérer dans les mémoires de notre Académie une notice de vos deux théorèmes, pour réveiller la paresse de nos jeunes auteurs, et les engager à ne pas rester si longtemps dans l'ignorance de la belle théorie que vous avez su élever à un degré de perfection inattendu.

M. Bessel a mandé à M. Schumacher que vous êtes fortement occupé de la rédaction d'un grand mémoire sur les fonctions elliptiques. Ce travail contiendra sans doute des développements curieux et très-intéressants de votre nouvelle théorie; il ne pourra manquer de vous faire beaucoup d'honneur; mais je vous engage de ne pas trop tarder à publier les parties essentielles de ce travail. Il y a des gens comme M. Gauss, qui ne se feraient pas scrupule de vous ravir, s'ils le pouvaient, le fruit de vos recherches, et de prétendre qu'elles sont depuis longtemps en leur possession. Prétention bien absurde assurément; car si M. Gauss était tombé sur de pareilles découvertes qui surpassent à mes yeux, tout ce qui a été fait jusqu'ici en analyse, bien sûrement il se serait empressé de les publier.

Veuillez, Monsieur, présenter mes civilités à M. Bessel que je n'ai pas l'honneur de connaître, mais que je regarde comme l'un des premiers astronomes de l'Europe. J'ai vu dans un n°. des Astronomische Abhandlungen un joli



mémoire de M. Bessel, où il perfectionne la méthode des comètes de M. Olbers par un moyen semblable à celui que j'ai employé dans le second supplément de ma méthode publié en août 1820.

J'ai l'honneur d'être, Monsieur, votre très-humble serviteur

Le Gendre.

Je compte sur une prompte réponse, et vous prie instamment de ne point l'affranchir à moins qu'il ne soit impossible de faire autrement.

---

## LEGENDRE A JACOBI.

Paris, le 11 mai 1828.

Monsieur,

J'ai reçu le 26 avril votre dernière lettre datée du 12, où se trouvent contenus les principes de la démonstration de votre théorème complémentaire, qu'il me tardait d'autant plus de recevoir de vous, que je n'avais guère espérance de trouver cette démonstration par mes propres recherches comme j'aurais pu faire peut-être dans un âge moins avancé où l'on est capable de supporter plus aisément une grande contention d'esprit. Je vous avais écrit le 14 du même mois pour obtenir de votre complaisance cette communication qui m'intéresse au plus haut degré, mais je vois par la date de votre lettre que c'est à la pressante sollicitation de M. Schumacher que vous vous êtes rendu à mes désirs, et que vous les avez en quelque sorte prévenus. Maintenant, Monsieur, vous apprendrez peut-être avec quelque peine que depuis le 26 avril que votre lettre m'est parvenue, je n'ai pas été encore en état de me faire une juste idée de la belle méthode par laquelle vous êtes parvenu à déduire votre théorème II. ou complémentaire du théorème I., dont la démonstration ne laisse rien à désirer. N'en concluez pas que j'aie quelque objection à faire à votre méthode qui sans doute est une nouvelle preuve de votre sagacité; mais j'ai été tellement malade d'un catarrhe qui m'a tourmenté tout l'hiver et qui s'est singulièrement aggravé au printemps, que toute étude sérieuse m'a été interdite depuis une vingtaine de jours, et que je suis devenu incapable d'entendre mes propres ouvrages. Cet état commence cependant à s'améliorer, et j'espère dans peu être en état de reprendre mes occupations ordinaires: ce sera pour moi une grande satisfaction de pouvoir comprendre votre nouvelle démonstration qui sera la première chose dont je m'occuperai. En attendant qu'un examen approfondi me mette en état d'apprécier toute sa valeur, je dois vous faire part d'une ou deux observations peu importantes. Ayant établi $\omega = \frac{mK}{n} + \frac{2m'iK'}{n}$, vous dites qu'on peut prendre pour $m$ et $m'$ des nombres entiers quelconques, *mais qui n'aient aucun diviseur commun avec le nombre impair donné $n$.* Il me semble que si cette restriction avait lieu, l'équation pour la division d'une fonction elliptique en $n$ parties ne serait plus du degré $n^2$, ce qui a pourtant lieu même quand $n$ n'est pas un nombre premier.

*Seconde observation.* Pour établir le principe de votre démonstration il faut, dites-vous, recourir aux formules analytiques concernant la multiplication, *données pour la première fois par M. Abel.* Cet aveu qui prouve votre candeur, qualité qui s'accorde si bien avec le vrai talent, me fait quelque peine; car tout en rendant justice au beau travail de M. Abel, et le mettant cependant fort au-dessous de vos découvertes, je voudrais, que la gloire de celles-ci, c'est-à-dire de leurs démonstrations, vous appartînt tout entière. Mais enfin je me consolerai aisément, la science n'y perd rien; vos démonstrations ne vous appartiennent pas moins, quelque part que vous en ayez pris les bases, soit dans mes ouvrages, soit dans le travail récent et très-estimable de M. Abel.

L'espace me manque pour m'étendre davantage dans une réponse qui n'est que provisoire. Je vous remercierai une autre fois de la franchise entièrement gracieuse avec laquelle vous avez satisfait à ma demande sur les moyens que vous aviez employés pour parvenir à de si beaux résultats.

Votre tout dévoué

Le Gendre.

---

## LEGENDRE A JACOBI.

Paris, le 16 juin 1828.

Monsieur,

Depuis le jour où je me suis trouvé en état de vous écrire pour vous faire mes remercîments au moins provisoires sur les précieux renseignements que vous aviez eu l'obligeance de m'adresser dans votre lettre du 12 avril dernier, ma santé s'étant progressivement améliorée, j'ai enfin réussi à déduire la démonstration du théorème II. de celle du théorème I., sans avoir recours aux formules de M. Abel, ce qui m'a entièrement satisfait; je serais parvenu sans doute beaucoup plus tôt à ce résultat si j'avais pu me livrer à un examen plus approfondi des différents objets contenus dans votre lettre, mais l'état de souffrance où je suis resté pendantlongtemps m'avait rendu incapable de tout travail et m'aurait même empêché d'entendre mes propres ouvrages. Maintenant, Monsieur, je me propose de rédiger un mémoire qui contiendra la démonstration de vos deux théorèmes et quelques accessoires, en me conformant aux principes de votre théorie, et rendant d'ailleurs toute la justice que je dois au mérite de vos découvertes que personne ne sait et ne saura jamais mieux apprécier que moi. Ce mémoire est destiné à paraître dans le recueil des mémoires de notre Académie, mais il ne pourra pas être imprimé de sitôt, et vous aurez sans doute le temps de faire paraître bien à l'avance la suite de vos savantes recherches, soit dans le Journal de M. Schumacher, soit dans tout autre recueil destiné aux sciences.



Je n'ai pu que toucher très-légèrement dans ma dernière lettre ce que j'avais à vous dire sur la communication pleine de franchise que vous m'avez faite de la filiation des idées qui vous ont conduit à vos belles découvertes sur les fonctions elliptiques, je vois que nous avons couru tous deux des dangers, *vous* en annonçant des découvertes qui n'étaient pas encore revêtues du sceau d'une démonstration rigoureuse, et *moi* en leur donnant publiquement et sans restriction mon approbation tout entière. Nous n'avons pas à nous repentir ni l'un ni l'autre de ce que nous avons fait. D'ailleurs nous avions chacun nos raisons de nous conduire ainsi; je ne dirai rien des vôtres, quant à moi je voyais très-clairement que des résultats tels que ceux que vous aviez obtenus, ne pouvaient être l'effet ni du hasard, ni d'une induction trompeuse, mais bien d'une théorie profonde et appuyée sur la nature des choses, d'ailleurs il m'avait été facile au moyen de mes tables et avec très-peu de calcul de vérifier vos résultats pour le cas du nombre 7, et après les avoir trouvés exacts jusqu'à cinq ou six décimales, il ne me restait aucun doute sur l'exactitude rigoureuse de la formule.

Vous avez eu la bonté dans votre dernière lettre et dans les précédentes de me réduire à des expressions plus simples quelques-uns des beaux résultats de M. Abel. Je trouve comme vous que ces résultats, qui sont fort intéressants, ont été présentés par leur jeune et ingénieux auteur, d'une manière fort méthodique, mais un peu embrouillée; je ne vois pas par exemple, pourquoi il s'est si fort appesanti sur les propriétés des fonctions qu'il désigne par $f$ et $F$; sans doute il aurait pu atteindre son but sans le secours de ces fonctions. Au reste je pense que dans la suite de vos publications vous présenterez à votre manière les belles formules de M. Abel, et que vous donnerez à son travail plus de précision sans qu'il perde rien de son élégance ni de sa généralité.

Agréez, Monsieur, les sentiments d'estime et d'attachement que j'ai voués pour toujours à votre talent et à votre caractère.

Le Gendre.

P. S. Il serait possible que je fasse bientôt un voyage de 2 mois dans le midi de la France pour rétablir ma santé. Dans ce cas il ne faudrait pas vous étonner si une lettre que vous pourriez m'adresser dans cet intervalle, restera assez longtemps sans réponse, parce que je n'en aurais connaissance qu'à mon retour.

---

## JACOBI A LEGENDRE.

Kœnigsberg, le 9 septembre 1828.

Monsieur,

La lettre dans laquelle vous m'aviez mandé votre maladie de l'hiver passé m'a causé de grandes peines, et j'ai attendu avec la plus vive inquiétude la nouvelle de l'amélioration de votre santé qui m'est enfin parvenue. L'avis que vous avez voulu me donner en même temps de votre départ pour le midi de la France a causé le retard de ma réponse. Fasse le ciel que ce voyage vous ait entièrement satisfait!

Ma dernière lettre a été écrite un peu à la hâte; sans cela je n'aurais pas cru que l'on doit supposer connues les formules de multiplication pour la démonstration du théorème complémentaire. Aussi il avait été trouvé et communiqué à vous sans la connaissance de celles-ci. En effet, l'équation $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}$ montre que $k$ dépend de la même manière de $\lambda$ que $\lambda'$ de $k'$; d'où il suit qu'en appliquant au module $\lambda$ la même transformation qui sert à parvenir du module $k'$ au module $\lambda'$, il faut retomber sur le module $k$.

Vous aurez reçu sans doute deux mémoires de M. Abel, l'un inséré dans le *Journal de M. Crelle*, l'autre dans les *Nouvelles Astronomiques de M. Schumacher*. Vous y aurez vu que M. Abel a trouvé de son côté la théorie générale de la transformation, dans la publication de laquelle je l'ai prévenu de six mois. Le



second mémoire, inséré dans le recueil de M. Schumacher, n°. 138, contient une *déduction* rigoureuse des théorèmes de transformation, dont le défaut s'était fait sentir dans mes annonces sur le même objet. Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux.

Dans le même cahier du *Journal de M. Crelle* (3. vol., 2. cah.) où se trouvent les premiers travaux de M. Abel sur la transformation, j'avais fait insérer la remarque que toutes les transformations attachées au nombre $n$ sont au nombre de $n+1$, lorsque $n$ est premier, et que l'on trouvait tous les modules transformés qui s'y rapportent en mettant, dans la formule

$$\sqrt{k} = \frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots},$$

$q^n$ et $\sqrt[n]{q}$ au lieu de $q$, $\sqrt[n]{q}$ ayant $n$ valeurs différentes. M. Abel verra donc que les transformations imaginaires ne m'étaient pas échappées. Que $n$ soit premier ou non, le nombre des transformations sera en général égal à la somme des facteurs de $n$; on trouve tous les modules transformés en mettant $\sqrt[a]{q^{a'}}$ au lieu de $q$, $aa'$ étant $= n$. Cette théorie est complète de sorte qu'on ne saura rien y ajouter. Toutes les racines des équations modulaires se trouvent par là développées dans des séries d'une élégance et d'une convergence sans exemple dans l'analyse. Je remarque encore que, $n$ étant un nombre carré, on aura une seule fois $a = a'$; donc un seul des modules transformés sera dans ce cas égal à celui d'où l'on est parti, ce qui fournit la multiplication.

Vous ne m'avez dit dans deux de vos lettres pas un seul mot sur ces séries remarquables sommées par les fonctions elliptiques, dans lesquelles les exposants suivent la loi des nombres carrés, et dont celle-ci:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+\cdots$$

me paraît être l'un des résultats les plus brillants de toute la théorie. Tout ce qui regarde la décomposition des nombres en nombres carrés devient, par ces séries, du ressort des fonctions elliptiques. Les développements de celles-ci me donnent, par exemple:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 &= 1+\frac{8q}{1-q}+\frac{16q^2}{1+q^2}+\frac{24q^3}{1-q^3}+\frac{32q^4}{1+q^4}+\cdots\\ &= 1+\frac{8q}{(1-q)^2}+\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}+\frac{8q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{8q^4}{(1+q^4)^2}+\cdots\\ &= 1+8\sum\varphi(p)(q^p+3q^{2p}+3q^{4p}+3q^{8p}+3q^{16p}+3q^{32p}+\cdots),\end{aligned}$$

$p$ étant un nombre impair quelconque, et $\varphi(p)$ la somme des facteurs de $p$. Comme dans cette série il ne manque aucune puissance de $q$ et qu'on a en même temps

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = (1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots)^4,$$

il suit comme corollaire de cette formule le fameux théorème de Fermat, que chaque nombre est la somme de quatre carrés. Les théorèmes relatifs aux nombres qui sont la somme de deux carrés découlent de la formule suivante:

$$\frac{2K}{\pi} = (1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots)^2 = 1+\frac{4q}{1-q}-\frac{4q^3}{1-q^3}+\frac{4q^5}{1-q^5}-\frac{4q^7}{1-q^7}+\cdots$$
$$= 1+\frac{4q}{1-q}-\frac{4q^3}{1+q^2}-\frac{4q^6}{1-q^3}+\frac{4q^{10}}{1+q^4}+\frac{4q^{15}}{1-q^5}-\frac{4q^{21}}{1+q^6}-\cdots.$$

Parmi d'autres formules, je trouve encore la suivante, digne de vous être communiquée:

$$(q-q^{5.5}-q^{7.7}+q^{11.11}+q^{13.13}-q^{17.17}-q^{19.19}+q^{23.23}+\cdots)^3$$
$$= q^3-3q^{3.3.3}+5q^{3.5.5}-7q^{3.7.7}+9q^{3.9.9}-11q^{3.11.11}+\cdots,$$

dont vous saisirez aisément la loi. Elle résulte de la transformation attachée au nombre 3.

Ne vous fait-il pas de plaisir, Monsieur, de voir se rapprocher l'une à l'autre deux théories si hétérogènes en apparence et qui se datent en quelque sorte de vos travaux?

Je vais ajouter quelques remarques isolées telles qu'elles se présentent à mon esprit. Rappelons la formule donnée dans ma dernière lettre:

$$\sqrt{k}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots}.$$

Il m'a paru d'importance de pouvoir exprimer à part le numérateur et le dénominateur de cette expression au moyen des fonctions elliptiques, ce qui n'est pas facile.

En me servant de vos signes et mettant $F^1$ au lieu de $K$, $\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, et par conséquent $\frac{2Kx}{\pi} = F$, je trouve

$$1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots = \sqrt{\frac{2k'F^1}{\pi}}\, e^{\int_0^\varphi \frac{F^1E(\varphi)-E^1F(\varphi)}{F^1}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}},$$

l'intégrale étant prise depuis $0$ jusqu'à $\varphi$.



L'un de vos plus beaux théorèmes est que l'expression

$$\int\frac{k^2\sin A\cos A\,\Delta A\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2 A\sin^2\varphi)\Delta\varphi}-\frac{F(\varphi)}{F^1}[F^1E(A)-E^1F(A)]$$

ne change pas de valeur si l'on échange entre eux les angles $\varphi$ et $A$. Or étant mis $A = \operatorname{am}\frac{2K\alpha}{\pi}$, $\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, je la trouve égale à

$$\tfrac{1}{2}\log\left[\frac{1-2q\cos 2(x-\alpha)+2q^4\cos 4(x-\alpha)-2q^9\cos 6(x-\alpha)+2q^{16}\cos 8(x-\alpha)-\cdots}{1-2q\cos 2(x+\alpha)+2q^4\cos 4(x+\alpha)-2q^9\cos 6(x+\alpha)+2q^{16}\cos 8(x+\alpha)-\cdots}\right],$$

formule symétrique en $x$ et $\alpha$. *D'ailleurs elle montre que les fonctions elliptiques de troisième espèce dans lesquelles entrent trois variables se ramènent à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux*, découverte qui vous intéressera beaucoup.

Mes recherches seront rassemblées dans un petit ouvrage d'environ 200 pages in 4° qui sera imprimé à part et dont l'impression vient d'être commencée. Il aura pour titre: *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Peut-être je serai assez heureux de vous le présenter moi-même.

Il faut avouer, Monsieur, que je suis un peu fatigué de la matière, qui m'a occupé pendant dix-huit mois presque jour et nuit. Cependant la fin de mon ouvrage ne doit pas être celle de mes recherches; il en reste encore d'une grande importance, mais aussi d'une grande difficulté. Je vous prie instamment de me donner des nouvelles de vous et surtout de votre santé. Vous pourriez compter sur une prompte réponse.

Votre très-humble et très-dévoué

C. G. J. Jacobi.

M. Bessel vous rend grâce de vos civilités; je vous prie d'en faire de ma part à M. Cauchy, dont j'ai toujours estimé de préférence les écrits ingénieux et d'une rare subtilité. Les formules analytiques qui renferment le théorème de Fermat ne seront pas sans intérêt pour ce géomètre, qui a tant de mérite dans cette partie de la théorie des nombres.

## LEGENDRE A JACOBI.

Paris, le 15 octobre 1828.

Je vous envoie, Monsieur, un premier supplément à mon traité contenant vos deux théorèmes généraux sur la transformation de la fonction elliptique de première espèce. Ce qu'il y aura de bon dans ce supplément vous appartient; je ne suis en quelque sorte que votre commentateur, parfois long et diffus, parce qu'il faut plus de développements dans un traité que dans un mémoire. D'ailleurs je me suis complu dans l'énumération des beaux résultats d'analyse qu'on était loin de soupçonner avant que vous les eussiez fait connaître. Le célèbre astronome Plana de Turin, qui est en même temps un géomètre très-distingué, vient de rendre hommage à vos découvertes dans un écrit où il fait des efforts pour parvenir méthodiquement à vos théorèmes. S'il n'a pas très-bien réussi, c'est une preuve de plus de la difficulté que vous avez trouvé le moyen de surmonter.

Le voyage que je projetais n'a pas eu lieu. Je suis resté et j'ai profité d'un intervalle de quelques mois où ma santé s'est un peu améliorée pour travailler à mon supplément. J'y ai employé le peu de forces qui me restent; car déjà mon catarrhe menace de me ressaisir et je pourrais bientôt être hors d'état de m'occuper d'un second supplément. Au reste le monde savant n'y perdra rien et je puis me reposer sur le zèle de deux athlètes infatigables tels que vous et M. Abel. Ce dernier a publié dans le Journal de M. Crelle la suite de son beau mémoire où entr'autres choses fort intéressantes on trouve la démonstration de votre théorème général de transformation. Démonstration que vous avez la modestie de placer au-dessus de la vôtre. Il a ensuite publié dans le Journal de M. Schumacher d'autres recherches où il montre beaucoup de profondeur et de sagacité. Pour vous, Monsieur, vous n'êtes pas resté en arrière et vous avez continué de publier dans ces deux recueils un grand nombre de résultats nouveaux qui doivent intéresser au plus haut degré les analystes, surtout lorsque vous en aurez fait connaître les démonstrations.

Votre lettre du 9 septembre m'apprend d'autres particularités sur vos travaux. J'y ai vu surtout avec un grand plaisir, que vous avez commencé l'impression d'un ouvrage in 4° de 200 pages qui sera intitulé *Fundamenta nova theoriae etc.* Je serai doublement satisfait si je puis recevoir cet ouvrage de votre main, comme



vous me le faites espérer, et il me sera bien agréable de voir, de mes yeux, l'un des deux jeunes géomètres qui par leurs découvertes ont contribué le plus à perfectionner mes travaux.

J'induis de vos expressions que la composition de votre ouvrage est terminée, et qu'ainsi nous pourrons en jouir bientôt. Il me sera très-utile pour y prendre la matière de deux ou trois suppléments que je voudrais joindre à mon traité pour le mettre au courant de vos nouvelles découvertes. Je commencerais ainsi un 3ᵉ volume qui ne serait pas inférieur aux deux autres; et comme vous traiterez sans doute de la plupart des objets dont M. Abel s'est occupé, votre ouvrage me dispensera de recourir à ceux de M. Abel, dont la manière quoique très-méthodique, me paraît difficile à saisir. Je n'aime point ses fonctions $f$ et $F$, et je pense que dans vos explications, dont vous m'avez déjà donné un échantillon, vous trouverez moyen de vous en passer.

J'applaudis à la théorie que vous donnez de l'équation modulaire et que vous regardez comme complète; j'y applaudirai encore mieux quand je connaîtrai vos démonstrations. C'est un grand point à mes yeux d'avoir prouvé que pour le nombre premier $p$, l'équation modulaire est toujours du degré $p+1$. Vous donnez par des séries très-élégantes les racines de cette équation dont deux seulement sont réelles. Celles-ci sont le module $h$ qui suit le module donné $k$ et le module $k_1$ qui le précède, en sorte que trois termes consécutifs de l'échelle sont $k_1, k, h$. J'en conclus que si on se servait de l'équation modulaire pour calculer les autres termes de l'échelle, l'équation à résoudre pour passer d'un terme au suivant, ne serait que du degré $p$. Il reste à examiner si les auxiliaires $\alpha_m$ et $\beta_m$ qui entrent dans les formules de vos deux théorèmes peuvent être déterminés par les termes connus de l'échelle, comme cela a lieu pour le cas de $p=5$, ou si elles exigent la résolution d'une équation, et quel est le degré déduit de cette équation. M. Abel dit qu'elle est du degré $p+1$ (sans supposer connus les termes de l'échelle), mais cela n'est pas encore démontré et c'est un point qu'il faudrait éclaircir pour la perfection de votre théorie.

Si j'ai gardé le silence jusqu'ici sur les belles séries en fonctions de $q$ que vous êtes parvenu à sommer et qui seront un des plus beaux ornements de votre ouvrage c'est que j'attendais que vous en donnassiez la démonstration. Du reste je les regarde comme un nouveau titre que vous avez acquis à l'estime des savants et il en est de même de vos nouvelles fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$, avec lesquelles vous avez réussi à exprimer très-simplement une fonction de la $3^{me}$ espèce qui se rapporte à l'espèce de paramètre que j'ai nommé *logarithmique*. Il vous sera sans doute également facile d'exprimer semblablement la fonction qui se rapporte au paramètre *circulaire;* vous avez découvert en tout cela une nouvelle mine fort intéressante à exploiter et qui mène à un grand nombre de résultats curieux. Remarquons cependant que la théorie des transformations doit son élégance et on peut dire sa perfection, à ce qu'elle est indépendante des séries et que tout s'y détermine algébriquement.

Je remarque au surplus que votre possession à vous et à M. Abel est maintenant bien assurée. L'envahisseur M. G.... ne s'avisera point, je pense, d'écrire qu'il avait trouvé tout cela longtemps avant vous, car s'il disait pareille chose, il se ferait moquer de lui.

J'ai vu que vous aviez acquis le titre de Professeur dans votre université; je vous en fais mon compliment bien sincère; car rien de ce qui touche à votre avancement et à vos succès ne saurait m'être indifférent.

Votre dévoué serviteur

Le Gendre.

---

## JACOBI A LEGENDRE.

Kœnigsberg, le 18 janvier 1829.

Monsieur,

Il faut que vous soyez assez fâché de moi à cause du grand retard de ma réponse à votre dernière lettre, et je ne saurai à peine m'excuser si ce n'est que j'ai voulu finir, avant de vous répondre, plusieurs travaux très-difficiles sur les fonctions elliptiques, pour pouvoir vous en mander les résultats. Je ne veux vous parler à présent que du problème le plus important de ceux que je suis parvenu à résoudre dans ces derniers temps: c'est la résolution algébrique et générale de l'équation du degré $n^2$, de laquelle dépend la division de la fonction elliptique en $n$ parties égales. Je vous prie, Monsieur, de me permettre d'entrer là-dessus dans un grand détail.

Après que vous aviez résolu le premier l'équation du neuvième degré, de laquelle dépend la trisection des fonctions elliptiques, nous remarquâmes en



même temps, M. Abel et moi, que l'on peut généralement réduire l'équation algébrique du degré $n^2$, de laquelle dépend la $n^{\text{ième}}$ section, à deux équations du $n^{\text{ième}}$ degré seulement. Ce résultat était une conséquence de la remarque que j'avais faite que l'on peut parvenir à la multiplication en appliquant à la fonction elliptique deux transformations l'une après l'autre. En lisant avec attention le premier *Mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques*, on reconnaît aisément qu'il a effectivement suivi la même route sans cependant soupçonner, lors du temps qu'il composa son mémoire, que c'était le *medium* des transformations par lequel il passa. Soit $z = \sin\mathrm{am}\, nu$, $x = \sin\mathrm{am}\, u$, $n$ étant un nombre impair quelconque, si l'on a

$$(1.) \qquad z = \frac{b'y + b'''y^3 + \cdots + b^{(n)}y^n}{b + b''y^2 + \cdots + b^{(n-1)}y^{n-1}},$$

$$(2.) \qquad y = \frac{a'x + a'''x^3 + \cdots + a^{(n)}x^n}{a + a''x^2 + \cdots + a^{(n-1)}x^{n-1}},$$

$y$ étant le *sinus amplitude* de la fonction transformée, il faut, d'après ce que je viens de dire, pour avoir $x$ en $z$, exprimer en premier lieu $x$ en $y$, en résolvant algébriquement l'équation (2.); puis, en résolvant encore l'équation (1.), il faut exprimer par $z$ toutes les fonctions de $y$ qui se trouveront sous les radicaux. Or comme on a toujours plusieurs transformations qui répondent à un même nombre $n$, on trouvera de cette manière différentes formules algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section d'après les différentes transformations par lesquelles on est passé à la multiplication. On pouvait cependant soupçonner qu'il y avait une manière d'exprimer $x$ en $z$ plus simple et qui n'était qu'unique. J'ai fait connaître cette forme la plus simple sous laquelle on peut présenter les expressions algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section dans une petite *Addition* faite au premier *Mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques*, et laquelle se trouve dans le $3^{e}$ vol. du *Journal de M. Crelle*. Elle est fondée sur une formule très-remarquable, et dont je veux vous parler en peu de mots.

Partons des deux formules connues pour la transformation des fonctions elliptiques, qui donnent ensemble la multiplication:

$$(1.) \quad \frac{\lambda}{kM} \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \sin\mathrm{am}\, u + \sin\mathrm{am}\left(u + \frac{4K}{n}\right) + \cdots + \sin\mathrm{am}\left(u + \frac{4(n-1)K}{n}\right),$$

$$(2.) \quad \frac{nkM}{\lambda} \sin\mathrm{am}\, nu = \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M} + \frac{4iK'}{nM}, \lambda\right) + \cdots + \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M} + \frac{4(n-1)iK'}{nM}, \lambda\right),$$

$i$ étant $\sqrt{-1}$. Au moyen de l'équation (1.) on tire de la formule (2.) celle qui suit:

$$(3.)\qquad n \sin\operatorname{am} nu = \sum \sin\operatorname{am}\left(u + \frac{4mK + 4m'iK'}{n}\right),$$

en donnant à $m, m'$ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Cette dernière formule a été déjà donnée par M. Abel.

Dans le cas de $n$ premier, le seul que nous considérons pour plus de simplicité, on a $n+1$ formules analogues à la formule (1.) et qui répondent aux diverses transformations du module $k$ attachées au nombre $n$. Elles sont contenues toutes sous la formule générale:

$$(4.)\qquad \frac{\lambda}{kM} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \sin\operatorname{am} u + \sin\operatorname{am}(u + 4\omega) + \cdots + \sin\operatorname{am}(u + 4(n-1)\omega),$$

$\omega$ ayant une des $n+1$ valeurs suivantes:

$$\frac{K}{n},\quad \frac{iK'}{n},\quad \frac{iK'}{n} + \frac{2K}{n},\quad \frac{iK'}{n} + \frac{4K}{n},\quad \ldots,\quad \frac{iK'}{n} + \frac{2(n-1)K}{n},$$

et les quantités $\lambda$, $M$ étant déterminées de la même manière par $\omega$, qu'elles sont déterminées par $\frac{K}{n}$ dans la formule (1.). Nommons les valeurs de $\lambda$, $M$ qui répondent à ces différentes valeurs de $\omega$:

$$\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_n;\quad M,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots,\ M_n,$$

si l'on ajoute ensemble les $n+1$ quantités suivantes:

$$\frac{\lambda}{kM} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right),\ \frac{\lambda_1}{kM_1} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_1}, \lambda_1\right),\ \frac{\lambda_2}{kM_2} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_2}, \lambda_2\right),\ \cdots\ \frac{\lambda_n}{kM_n} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_n}, \lambda_n\right),$$

en substituant pour chacune sa valeur tirée de l'équation générale (4.), on trouve:

$$(5.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\lambda}{kM} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + \frac{\lambda_1}{kM_1} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_1}, \lambda_1\right) + \cdots + \frac{\lambda_n}{kM_n} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_n}, \lambda_n\right) \\ &\quad = n \sin\operatorname{am} u + \sum \sin\operatorname{am}\left(u + \frac{4mK + 4m'iK'}{n}\right) \\ &\quad = n \sin\operatorname{am} u + n \sin\operatorname{am} nu. \end{aligned}\right.$$

En effet, on voit aisément qu'il se trouve dans la somme dont on parle tous les termes de l'expression $\sum \sin\operatorname{am}\left(u + \frac{4mK + 4m'iK'}{n}\right)$ et qu'ils ne s'y trouvent qu'une seule fois, excepté seulement le terme $\sin\operatorname{am} u$, qui s'y trouve $n+1$ fois. De l'équation (5.) on tire celle qui suit:



$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sin\operatorname{am} u \\ &= \frac{\frac{\lambda}{kM} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + \frac{\lambda_1}{kM_1} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_1}, \lambda_1\right) + \cdots + \frac{\lambda_n}{kM_n} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_n}, \lambda_n\right) - n \sin\operatorname{am} nu}{n}. \end{aligned}\right.$$

C'est la formule remarquable dont j'ai parlé, et qui est de la plus grande importance dans la théorie de la division des fonctions elliptiques. En effet, lorsqu'il s'agit d'exprimer $\sin\operatorname{am} u$ par $\sin\operatorname{am} nu$, on n'a plus qu'à exprimer par $\sin\operatorname{am} nu$ les quantités $\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_p}, \lambda_p\right)$, ce qui se fait par la résolution d'équations algébriques du $n^{\text{ième}}$ degré seulement. Je vais rapporter à présent les expressions algébriques et générales des racines de ces dernières.

Soit toujours $\sin\operatorname{am} nu = z$ et désignons par $\Phi(nu, \omega)$ l'expression suivante:

$$\Phi(nu, \omega) = (1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} 4\omega \,.\, z^2)(1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} 8\omega \,.\, z^2) \ldots (1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} 2(n-1)\omega \,.\, z^2);$$

nommons de plus $A^{(p)}$ l'expression suivante:

$$A^{(p)} = \frac{\Phi(4p\omega, \omega)\, \Phi(nu, \omega)}{\Phi(nu + 4p\omega, \omega)},$$

je dis qu'on a

$$(7.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\lambda}{kM} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) \\ &= \sin\operatorname{am} nu + \sin\operatorname{am}(nu + 4\omega)\sqrt[n]{A'} + \sin\operatorname{am}(nu + 8\omega)\sqrt[n]{A''} + \cdots \\ &\qquad + \sin\operatorname{am}(nu + 4(n-1)\omega)\sqrt[n]{A^{(n-1)}}. \end{aligned}\right.$$

Les quantités $A^{(p)}$ seront de la forme $P + Q\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$; $P$ et $Q$ étant des fonctions rationnelles de $z$.

Voici une formule entièrement nouvelle pour la transformation des fonctions elliptiques, et laquelle ne pourra être *déduite* d'aucune façon des formules connues jusqu'ici, quoiqu'une fois trouvée, on peut la *vérifier* par les premiers éléments de la théorie des fonctions elliptiques, et même sans supposer connues les formules de transformation ordinaires. La découverte de cette formule m'a coûté beaucoup de peine, et c'est peut-être pourquoi je voudrais la compter pour le résultat le plus important de tout ce que j'ai trouvé jusqu'ici.

Les formules (6.) et (7.) donnent aussitôt les formules algébriques et générales pour exprimer $\sin\operatorname{am} u$ par $\sin\operatorname{am} nu$. Nommons pour cet effet $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les différentes valeurs de $\omega$ qui répondent aux différents modules transformés $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et soit $A_m^{(p)}$ une expression qui dépend de la même manière de $\omega_m$ que $A^{(p)}$ dépend de $\omega$, on trouve

$$\frac{n \sin \operatorname{am} u}{=\left\{\begin{array}{l} \sin \operatorname{am} nu \\ + \sin \operatorname{am}(nu+4\omega)\sqrt[n]{A'} + \sin \operatorname{am}(nu+8\omega)\sqrt[n]{A''} + \cdots + \sin \operatorname{am}(nu+4(n-1)\omega)\sqrt[n]{A^{(n-1)}} \\ + \sin \operatorname{am}(nu+4\omega_1)\sqrt[n]{A_1} + \sin \operatorname{am}(nu+8\omega_1)\sqrt[n]{A_1''} + \cdots + \sin \operatorname{am}(nu+4(n-1)\omega_1)\sqrt[n]{A_1^{(n-1)}} \\ + \sin \operatorname{am}(nu+4\omega_2)\sqrt[n]{A_2'} + \sin \operatorname{am}(nu+8\omega_2)\sqrt[n]{A_2''} + \cdots + \sin \operatorname{am}(nu+4(n-1)\omega_2)\sqrt[n]{A_2^{(n-1)}} \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + \sin \operatorname{am}(nu+4\omega_n)\sqrt[n]{A_n'} + \sin \operatorname{am}(nu+8\omega_n)\sqrt[n]{A_n''} + \cdots + \sin \operatorname{am}(nu+4(n-1)\omega_n)\sqrt[n]{A_n^{(n-1)}}. \end{array}\right.}$$

C'est l'expression algébrique pour la $n^{\text{ième}}$ section des fonctions elliptiques, laquelle est composée, comme on voit, de $(n+1)(n-1) = n^2-1$ $n^{\text{ièmes}}$ racines; les quantités qui se trouvent sous les radicaux sont toutes de la forme $P + Q\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$, $P$ et $Q$ étant des fonctions rationnelles de $z$. Vous trouverez ce résultat parmi d'autres dans le *Journal de M. Crelle;* du nombre de ces derniers sont *les formules générales pour la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce.* Les limites d'une lettre ne me permettent pas d'entrer dans ce moment dans un plus grand détail. Je vous entretiendrai une autre fois de la manière dont je suis parvenu à la formule (7.), laquelle pourra paraître assez étrangère, comme elle est fondée sur la considération des séries et surtout sur les propriétés remarquables de mes nouvelles transcendantes $H$, $\Theta$, au moyen desquelles on peut exprimer rationnellement tous les radicaux. Ainsi, par exemple, $\omega$ étant $= \frac{K}{n}$, on a

$$\sqrt[n]{A^{(p)}} = \frac{\Theta(0)\,\Theta\left(nu + \frac{4pK}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{4pK}{n}\right)\Theta(nu)}, \quad \Theta(u) \text{ étant } \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\, e^{\int_0^{\varphi} \frac{F^1E(\varphi) - E^1F(\varphi)}{F^1} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}}, \quad \varphi = \operatorname{am} u.$$

Cependant, comme je l'ai dit, on peut aussi vérifier la formule (7.) en quantités finies.

A cause de l'extension inattendue qu'ont prise mes travaux, je partagerai mon ouvrage en deux parties, dont la première sera publiée dans trois mois environ: je vous en ferai hommage dès que son impression sera achevée. Dans des notes et des additions jointes à la première partie, j'exposerai ce qui est particulier à



M. Abel, en rapprochant les méthodes de cet Auteur de celles dont j'ai fait usage moi-même.

Il faut vous rendre encore mille grâces pour l'envoi de votre premier Supplément: tout ce qu'il contient vous appartient sous tant de titres que ce n'est que votre bonté qui m'y a fait prendre tant de part. C'est encore à vous, Monsieur, que je suis redevable de la place de Professeur dont vous êtes assez obligeant de me féliciter. Une gazette de Berlin ayant fait mention de la communication que vous avez faite à votre Académie de mes travaux, l'autorité de votre nom a été la cause que le Ministre m'a placé.

Vous m'avez donné de grandes inquiétudes sur votre santé dans votre dernière lettre; il faut que vous m'en arrachiez sitôt qu'il vous soit possible: je vous en prie instamment.

Ce serait trop me punir pour le retard de ma réponse par un retard de votre côté; c'est la division des fonctions elliptiques qu'il faut accuser là-dessus.

Votre entièrement dévoué serviteur

C. G. J. Jacobi.

Je vous prie, Monsieur, de faire parvenir la lettre ci-adjointe au célèbre orientaliste M. Klaproth; veuillez me pardonner si j'ose vous faire tant de peine.

---

## LEGENDRE A JACOBI.

Paris, le 9 février 1829.

Monsieur,

Votre lettre du 18 janvier que j'ai reçue le 30 m'a fait beaucoup de plaisir; l'intérêt de cette correspondance va toujours en augmentant par le nombre et l'importance des découvertes dont vous me donnez communication. Je ne puis lire qu'avec peine les formules, parce que l'espace vous manque et le temps peut-être, pour bien former les caractères, mais ce que j'y puis apercevoir me donne la plus haute idée des beaux résultats auxquels vous êtes parvenu pour la division des fonctions en $n$ parties. Je n'aurais jamais imaginé qu'il fût possible de résoudre ainsi explicitement une équation du degré $nn$, et de former d'une manière praticable les différents termes de la formule. C'est un grand tour de force qui vous fera infiniment d'honneur, et il me tarde de recevoir l'ouvrage où vous donnerez des développements assez étendus sur cette découverte, pour que j'en puisse faire mon profit et l'insérer dans mes suppléments, après que je l'aurai moi-même suffisamment comprise.

De son côté M. Abel publie d'une manière assez suivie des mémoires qui sont de véritables chefs-d'oeuvre, et comme il n'a pas à sa disposition les moyens de faire imprimer l'ensemble de ses recherches, cette raison le détermine à développer davantage ce qu'il publie dans les journaux de Mrs. Crelle et Schumacher. Il obtient ainsi sur vous une sorte d'avantage, parce que vous n'avez guère publié jusqu'à présent que des notices qui ne font pas connaître vos méthodes. C'est une raison pour que vous vous hâtiez de prendre possession de ce qui vous appartient en faisant paraître votre ouvrage le plus tôt qu'il vous sera possible.

La question de la $n$-section des fonctions elliptiques, abstraction faite des formules de solution dont vous avez fait la découverte, se réduit pour moi aux deux équations du degré $n$ que fournissent les deux théorèmes de transformation, et de plus aux équations nécessaires pour diviser en $n$ parties égales les deux fonctions complètes $F^1(k)$, $F^1(h)$, où je désigne par $h$ le module qui suit $k$ dans l'échelle rapportée au nombre $n$. Ces dernières équations pour déterminer les fonctions trigonométriques des amplitudes $\alpha_m$, $\beta_m$, sont un objet que vous ne me paraissez pas encore avoir traité d'une manière satisfaisante ni vous ni M. Abel; cependant elles fournissent les constantes qui entrent dans les coefficients de vos équations, et par suite dans les résultats définitifs. Comment donc trouve-t-on les constantes? Vous avez annoncé que pour passer du module donné $k$ au module transformé $h$ il faut résoudre ce que vous appelez l'équation des modules que vous dites être du degré $n+1$ et dont vous avez même donné les racines. Mais cette assertion ne me semble pas encore établie d'une manière tout à fait rigoureuse; et il reste toujours à trouver quel est le degré des équations à résoudre pour déterminer les constantes dont j'ai parlé. Pour la valeur particulière $n=5$, les constantes dont il s'agit se déduisent simplement de la valeur de $h$, sans exiger la résolution d'aucune équation composée; mais il n'en est pas probablement de même dans tous les cas, et vous m'obligeriez beaucoup, Monsieur, de me dire ce que vous savez au moins en partie, sur la solution de cette difficulté. —



Vous l'avez résolue sûrement, sans quoi votre formule générale de solution contiendrait des coefficients que vous ne pourriez déterminer.

Je répéterai volontiers que cette formule telle que vous l'annoncez est la plus belle chose que je connaisse dans l'analyse. M. Abel en avait annoncé une semblable de son côté, mais sa formule est représentée d'une manière bien vague, elle n'existe en quelque sorte qu'idéalement, tandis que vous lui avez donné une existence réelle et palpable, dans tout son développement.

En admirant ces belles formules de solution dites *algébriques*, c'est à dire composées de radicaux du degré $n$, imposés sur des quantités en partie réelles et en partie imaginaires, les savants reconnaîtront que vous avez beaucoup généralisé les solutions analogues qu'ont données Gauss et Vandermonde des équations à deux termes, ou plutôt des équations auxiliaires dont elles dépendent. — Nous conviendrons tous ensuite que ces formules, si belles en théorie, ne sont d'aucune utilité en pratique pour les solutions effectives. Car indépendamment de la grande difficulté d'évaluer chaque radical en particulier du degré $n$, il se présente une autre difficulté à peu près insurmontable, qui est de savoir laquelle des $n$ valeurs de chaque radical devra être combinée avec les valeurs des autres. M. Gauss a laissé cette théorie fort imparfaite en ne donnant aucune réponse à cette question, qui deviendra bien plus difficile encore à résoudre pour vos $n^2-1$ radicaux.

L'espace ne me permet plus que de vous parler succinctement de deux choses. J'ai reçu de M. Abel une lettre fort intéressante, où il me parle d'une grande extension qu'il a donnée à ses recherches en prouvant que des propriétés analogues à celles des fonctions elliptiques peuvent s'appliquer à des transcendantes beaucoup plus composées. C'est une grande généralisation de la belle intégrale d'Euler. On trouve un très-bel échantillon de ces nouvelles recherches dans le 4$^e$ cahier T. III. du Journal de M. Crelle pag. 313. — En second lieu il m'assure être en possession d'une méthode par laquelle il peut résoudre *algébriquement* toute équation donnée qui satisfait aux conditions nécessaires pour être ainsi résolue. Il s'ensuit que la solution générale est impossible passé le 4$^e$ degré.

Adieu, Monsieur, recevez l'assurance de mon très-sincère attachement.

Le Gendre.

---

## JACOBI A LEGENDRE.

Kœnigsberg, le 14 mars 1829.

Monsieur,

Je vous remercie mille fois de votre lettre du 9 février, et, comme vous m'y proposez diverses questions, je veux chercher à y répondre. Vous supposez que j'ai trouvé des moyens à exprimer algébriquement les fonctions trigonométriques des amplitudes que vous désignez par $\alpha_m$, en ajoutant que sans cela ma formule contiendrait des coefficients que je ne pourrai déterminer. Mais, Monsieur, ce que vous désirez est une chose *tout a fait impossible* dans le cas général, et qui ne s'exécute que pour des valeurs spéciales du module.

Ma formule qui donne l'expression algébrique de $\sin\operatorname{am} u$ au moyen de $\sin\operatorname{am} nu$ suppose connue la section de la fonction entière. C'est ainsi qu'on savait résoudre algébriquement depuis plus d'un siècle les équations qui se rapportent à la division d'un arc de cercle, toutefois en supposant connue celle de la circonférence entière, cette dernière n'étant donnée généralement que dans ces derniers temps par les travaux de M. Gauss.

M. Abel a traité, dans son premier *Mémoire sur les fonctions elliptiques,* le problème en question pour la première fois d'une manière générale; il a montré qu'il est toujours possible de réduire la division de la fonction indéfinie à celle de la fonction entière; ensuite il a montré que l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, de laquelle dépend cette dernière se réduit à une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ dont les coefficients dépendent d'une autre équation du degré $n+1$, $n$ étant premier. En effet, l'équation du degré $n^2$ entre $\sin\operatorname{am} u$ et $\sin\operatorname{am} nu$ a pour racines les $n^2$ expressions contenues sous la forme $\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{2mK+2im'K'}{n}\right)$, où l'on donne à $m, m'$ les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

En supposant $u=0$, une racine devenant $\sin\operatorname{am} u = 0$ et les autres devenant égales deux à deux, mais de signes opposés, l'expression $\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2mK+2im'K'}{n}\right)$ ne dépend plus que d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, comme vous l'avez montré par des exemples dans vos Traités.



Supposons $n$ premier, et soit $\frac{mK+m'iK'}{n}=\omega$, on prouve aisément qu'une fonction symétrique quelconque de $\sin^2\operatorname{am} 2\omega$, $\sin^2\operatorname{am} 4\omega, \ldots, \sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega$, par exemple celle-ci:

$$\sin^4\operatorname{coam} 2\omega \,.\, \sin^4\operatorname{coam} 4\omega \ldots \sin^4\operatorname{coam}(n-1)\omega = \frac{\lambda}{k^n},$$

ne peut obtenir plus que $n+1$ valeurs différentes, en mettant pour $\sin^2\operatorname{am} 2\omega$ une quelconque des racines de l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$. Ces valeurs différentes répondent aux valeurs de $\omega = K, iK', K+iK', 2K+iK', \ldots, (n-1)K+iK'$. En effet, toutes les racines de l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$ étant contenues sous la forme $\sin^2\operatorname{am} 2p\omega$, où l'on donne à $p$ les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, à $\omega$ les $n+1$ valeurs mentionnées, et le système des quantités $\sin^2\operatorname{am} 2\omega$, $\sin^2\operatorname{am} 4\omega, \ldots$, $\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega$ pouvant être remplacé par le système de celles-ci: $\sin^2\operatorname{am} 2p\omega$, $\sin^2\operatorname{am} 4p\omega, \ldots, \sin^2\operatorname{am}(n-1)p\omega$, il suit que les fonctions symétriques de ces quantités ne sauront obtenir que les $n+1$ valeurs que l'on obtient en mettant pour $\omega$ des valeurs différentes et *incommensurables* entre elles. Donc elles dépendent d'une équation algébrique du degré $n+1$. C'est donc aussi le degré de l'équation dont les racines sont les différents modules transformés attachés au nombre $n$ supposé premier, et que j'appelle *aequatio modularis*, ces modules étant contenus sous la forme

$$\lambda = k^n[\sin\operatorname{coam} 2\omega \,.\, \sin\operatorname{coam} 4\omega \ldots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^4.$$

Vous voyez donc, Monsieur, que M. Abel a prouvé ce théorème important, comme vous le nommez, dans son premier *Mémoire sur les fonctions elliptiques,* quoiqu'il n'y ait pas traité de la transformation, et qu'il ne paraît pas même avoir songé, du temps qu'il le composa, que ses formules et ses théorèmes trouveraient une pareille application. Quant à moi, je n'ai pas trouvé nécessaire de reproduire cette démonstration dans les écrits que j'ai publiés jusqu'ici sur cette matière, car il me reste trop à faire pour ne pas épargner mon temps le plus que possible.

Mais peut-être, Monsieur, vous aurez à faire des objections à cette démonstration. Dans ce cas, vous m'obligerez de beaucoup en me les communiquant, car lorsque je traiterai de mes théories nouvelles il faudra en parler.

Etant connue une seule des fonctions symétriques de $\sin^2 \operatorname{am} 2\omega, \ldots,$ la théorie générale des équations algébriques nous apprend, et M. Abel l'a remarqué, qu'il est possible d'exprimer par celle-ci toute autre fonction symétrique des mêmes quantités. C'est la cause de ce que vous avez pu exprimer rationnellement en fonctions des deux modules les coefficients des transformations attachées aux nombres 3 et 5, et il sera de même pour tout autre nombre. Vous trouverez même dans le 2^e^ cahier du vol. IV. du Journal de M. Crelle une formule à différences partielles très-remarquable qui sert à exprimer *généralement* ces coefficients par les deux modules, en supposant connue l'équation aux modules; de sorte que la formation algébrique des substitutions à faire pour parvenir à une transformation quelconque est entièrement réduite à la recherche des équations aux modules, formule qui donne en même temps comme cas spécial les expressions algébriques et générales pour la multiplication par un nombre $n$ quelconque *indéfini:* chose très-difficile et dont vous avez dû remarquer les premiers exemples dans le 4^e^ cahier du vol. III. dudit Recueil. Il sera de même si l'on fait tout dépendre de l'équation dont les racines donnent les valeurs de ce que vous appelez le *régulateur*, et cela conviendra peut-être encore mieux, ces dernières semblant être plus simples. Aussi j'ai découvert une propriété tout à fait singulière de ces équations, dont les racines sont les régulateurs, comme vous l'aurez lu dans le 3^e^ cahier du vol. III.: c'est qu'on peut exprimer linéairement leurs *racines carrées* au moyen de la moitié de leur nombre, propriété qui m'est d'autant plus remarquable que je ne l'ai trouvée que par les développements en séries qui me sont propres, et que je ne vois pas comment on peut la prouver en quantités finies, ce qui pourtant doit être possible. Cette propriété servira sans doute à approfondir un jour la vraie nature de ces équations du degré $n+1$.

J'ai été convaincu, et M. Abel l'a confirmé, qu'il n'est pas possible de résoudre algébriquement ces équations du degré $n+1$; aussi, comme M. Abel sait établir des critères nécessaires et suffisants pour qu'une équation algébrique puisse être résolue, il pourra sans doute prouver cela avec toute la rigueur analytique. Quant aux cas spéciaux, comme M. Abel a promis en plusieurs lieux d'en traiter, je ne me suis pas encore occupé beaucoup de cet objet, sans doute très-intéressant. Je ne veux ni reproduire ni prévenir les travaux de M. Abel: presque tout ce que j'ai publié dans ces derniers temps sur les fonctions elliptiques contient des vues nouvelles; ce ne sont pas des amplifications de matières dont M. Abel a traité ou même promis de s'occuper.



Le module transformé ou, ce qui revient au même, le régulateur qui y répond étant supposé connu, il faut encore résoudre une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ pour parvenir aux quantités $\sin^2 \operatorname{am} 2p\omega$, ou à la section de la fonction entière. Donc vous n'aviez eu qu'à résoudre une équation du second degré dans le cas de $n=5$. M. Abel a prouvé que la méthode de M. Gauss s'applique presque mot à mot à la résolution de ces équations, de sorte que ce ne sont que les équations aux modules qu'on ne sait pas résoudre algébriquement. J'ai trouvé le théorème remarquable, et je l'ai annoncé dans le 2^e^ cahier du vol. IV. du Journal mentionné, qu'étant supposées connues *toutes les racines* de l'équation aux modules, ou tous les régulateurs qui répondent au nombre $n$, on peut exprimer les quantités $\sin^2 \alpha_m$ *sans avoir besoin de résoudre encore aucune équation algébrique.* La méthode de M. Abel ne suppose connu qu'un seul module transformé pour trouver, par la résolution d'une équation algébrique du $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ième}}$ degré, les quantités $\sin \alpha_m$ qui répondent à ce module; la connaissance de *tous* les modules transformés remplacera donc la résolution de cette équation.

Je ne crois pas que la formule que j'ai eu l'honneur de vous communiquer dans ma dernière lettre perdra à vos yeux à présent où vous voyez qu'elle contient des coefficients que je ne sais pas déterminer, mais en même temps qu'il est impossible de les déterminer algébriquement.

L'impression de mon Ouvrage s'est retardée, puisqu'il s'imprime à 200 lieues de Kœnigsberg; sans cela, il serait déjà dans vos mains; cependant j'espère pouvoir vous le faire parvenir dans très-peu de temps. Il ne contiendra que les fondements de mes travaux; je publierai le reste dans des Mémoires isolés, puisque cela paraît être plus conforme à vos vœux.

Quelle découverte de M. Abel que cette généralisation de l'intégrale d'Euler! A-t-on jamais vu pareille chose! Mais comment s'est-il fait que cette découverte, peut-être la plus importante de ce qu'a fait dans les mathématiques le siècle dans lequel nous vivons, étant communiquée à votre académie il y a deux ans, elle a pu échapper à l'attention de vous et de vos confrères?

Vos lettres, Monsieur, font époque dans le cours de mes travaux. Veuillez donc me daigner honorer bientôt d'une réponse, et, comme j'irai voir mes parents à ***Potsdam,*** je vous prie de l'adresser à cette ville. Je vous prie aussi de vouloir bien excuser mille inconvénients qui naissent de ce qu'il faut que j'écrive dans une langue qui m'est étrangère.

Votre dévoué serviteur
C. G. J. Jacobi.

---

## LEGENDRE A JACOBI.

Paris, le 8 avril 1829.

Je vous remercie, Monsieur, de la peine que vous avez prise de répondre aux questions contenues dans ma lettre précédente. Je vois maintenant plus clairement qu'auparavant, comment vous êtes parvenus, M. Abel et vous, à démontrer que l'équation des modules doit être du degré $n+1$, et aussi pourquoi la division de la fonction complète en $n$ parties qui en général dépend d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, se réduit à deux équations, l'une du degré $n+1$, l'autre du degré $\frac{n-1}{2}$. La démonstration de ces belles propriétés est encore enveloppée de quelques nuages qui, j'espère, pourront se dissiper par un travail ultérieur, et avec le secours de ce que vous publierez sur cette matière, car votre manière d'écrire est plus claire pour moi que celle de M. Abel qui en général ne me paraît pas suffisamment développée et laisse au lecteur beaucoup de difficultés à résoudre.

Je viens de recevoir le nouveau cahier du Journal de M. Crelle où il y a trois beaux mémoires de M. Abel et un précis que vous m'aviez annoncé de vos nouvelles recherches. Vous allez si vite Messieurs, dans toutes ces belles spéculations, qu'il est presque impossible de vous suivre; surtout pour un vieillard qui a déjà passé l'âge où est mort Euler, âge où l'on a nombre d'infirmités à combattre, et où l'esprit n'est plus capable de cette contention qui peut vaincre des difficultés et se plier à des idées nouvelles. Je me félicite néanmoins d'avoir vécu assez longtemps pour être témoin de ces luttes généreuses entre deux jeunes athlètes également vigoureux, qui font tourner leurs efforts au profit de la science dont ils reculent de plus en plus les limites. Ce spectacle m'intéresse d'autant plus qu'il m'offre les moyens de perfectionner mon propre ouvrage, en profitant



de quelques-uns des matériaux précieux qui sont le résultat de leurs savantes recherches.

Je finirai dans quelques jours l'impression de mon second supplément dont j'adresserai un exemplaire à Kœnigsberg, pensant que vous y serez de retour à cette époque. Il est composé de presque toutes choses qui vous appartiennent, et qui m'ont cependant coûté beaucoup de travail, à cause des démonstrations que vous n'aviez pas toujours indiquées. Ce supplément complète en quelque sorte la théorie des approximations qui est l'un des objets principaux de mon ouvrage; car une fois les fonctions elliptiques connues, il faut faciliter par tous les moyens possibles leur application, c'est-à-dire la détermination numérique des fonctions. Je trouve que vous avez fait un grand pas dans cette carrière en réduisant les fonctions de la 3ème espèce, *à paramètre logarithmique* (j'appelle ainsi les fonctions dont le paramètre est $-k^2\sin^2\alpha$), de sorte qu'elles ne dépendent plus que de deux variables, et qu'ainsi on puisse les évaluer en joignant aux tables connues une nouvelle table à double entrée seulement. J'aurais bien voulu que la même propriété pût être étendue aux autres fonctions de la 3ème espèce, c'est-à-dire à celles que j'appelle *à paramètre circulaire,* ou dont les paramètres sont des formes $\cot^2\alpha$, $k'^2\operatorname{tg}^2\alpha$, et $-1+k'^2\sin^2\alpha$. Mais les efforts que j'ai faits pour parvenir à ce résultat ont été infructueux, quoique vous en ayez annoncé la possibilité. Je serai très-aise de m'être trompé, et je réparerais avec grand plaisir mon erreur si vous m'indiquiez le moyen de résoudre la difficulté et d'exprimer par deux variables seulement cette seconde division des fonctions de troisième espèce. Ce serait à mon avis la plus grande découverte qu'il est possible d'espérer dans la théorie des fonctions elliptiques, puisqu'elle rendrait l'usage de ces fonctions presqu'aussi facile, dans tous les cas, que celui des fonctions circulaires et logarithmiques. S'il faut perdre tout espoir à cet égard, j'aurai au moins la consolation que mes recherches sur votre découverte m'ont fourni l'occasion de perfectionner assez notablement le calcul approximatif des fonctions à paramètre circulaire, au moyen de mes arcs $\Omega$ et $\Omega'$ dont l'un au moins se détermine toujours par deux suites fort convergentes.

Je ne terminerai pas cette lettre sans répondre à l'article de la vôtre qui concerne le beau memoire de M. Abel qui a été imprimé dans le cahier précédent du Journal de Crelle, et qui avait été présenté à l'Académie par son auteur dans les derniers mois de 1826. M. Poisson était alors président de l'Académie, les commissaires nommés pour examiner le mémoire furent M. Cauchy et moi. Nous nous aperçûmes que le mémoire n'était presque pas lisible, il était écrit en encre très-blanche, les caractères mal formés; il fut convenu entre nous qu'on demanderait à l'auteur une copie plus nette et plus facile à lire. Les choses en sont restées là; M. Cauchy a gardé le manuscrit jusqu'ici sans s'en occuper, l'auteur M. Abel paraît s'en être allé sans s'occuper de ce que devenait son mémoire, il n'a pas fourni de copie, et il n'a pas été fait de rapport. Cependant j'ai demandé à M. Cauchy qu'il me remette le manuscrit qui n'a jamais été entre mes mains, et je verrai ce qu'il y a à faire, pour réparer, s'il est possible, le peu d'attention qu'il a donné à une production qui méritait sans doute un meilleur sort.

Votre tout dévoué

Le Gendre.

---

## JACOBI A LEGENDRE.

Potsdam, le 23 mai 1829.

Monsieur,

Je vous rends grâce de votre lettre du 8 avril qui me mande la publication d'un Supplément, que j'attends avec une grande impatience. Vos deux Suppléments embrasseront sans doute la plupart de ce qui se trouvera de nouveau et d'intéressant dans mon ouvrage et beaucoup d'autres choses qui ne s'y trouvent pas. L'impression de celui-ci étant achevée, je me suis empressé de vous le faire parvenir, et je vous prie de l'accueillir avec cette bonté dont vous m'avez donné des preuves si éclatantes. Cependant je crains qu'il ne soit beaucoup au-dessous de la bonne opinion que vous avez voulu concevoir de mes travaux, et je crains cela d'autant plus, puisqu'il ne contient que les fondements de mes recherches et qu'il me faut encore une longue série de travaux pour établir aux yeux des Géomètres leur ensemble.

En ce qui regarde les intégrales elliptiques de la troisième espèce à paramètre circulaire, vous avez complètement raison; elles ne jouissent pas d'une réduction analogue à celle de l'autre espèce logarithmique. Si j'ai annoncé une

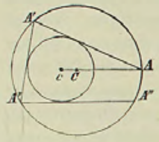


pareille chose, comme vous le dites dans votre lettre, cela n'a pu être que dans le sens général et analytique, où l'on ne distingue pas entre les valeurs réelles et imaginaires, et qu'on fait abstraction de l'évaluation numérique. Sous ce point de vue, une même formule embrasse tous les cas, de sorte qu'on n'a pas besoin de distinguer entre les espèces, ce qui devient nécessaire aussitôt qu'on veut appliquer les formules qui s'y rapportent au calcul numérique ou qu'on ne veut considérer que des quantités réelles. Toutefois cette sorte d'inconvénient, qui tient à la nature intime de l'objet, et nullement à un défaut de notre part, me paraît ajouter du mérite à votre division des intégrales elliptiques de la troisième espèce en deux classes, auxquelles se ramènent tous les autres cas. En effet, ces deux classes diffèrent essentiellement entre elles, le paramètre et l'amplitude dans l'une d'entre elles pouvant être réunis dans une seule variable, et l'autre pouvant être rapportée en même temps au module donné et à son complément. Je pourrais vous parler davantage sur cette matière, mais j'aime mieux voir auparavant votre second supplément.

J'ai déjà communiqué à M. Crelle, pour le faire insérer dans son Journal, un premier mémoire qui fait partie d'une suite de mémoires dans lesquels je veux exposer, avec les démonstrations et les développements nécessaires, les différents résultats auxquels je suis parvenu, et dont j'ai déjà annoncé la plupart sans démonstration. Vous y trouverez les formules générales qui se rapportent à la transformation des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce, présentées sous une forme commode et élégante. Vous y trouverez aussi les formules générales qui donnent leurs valeurs dans le cas que $F(\varphi)$ est commensurable avec la fonction entière $F^1$, ou plus généralement $= \frac{mF^1(k)+nF^1(k')\sqrt{-1}}{p}$, $m, n, p$ étant des nombres entiers. Mais le but principal de ce premier mémoire est de préparer tout ce qui est nécessaire pour que je puisse établir dans les mémoires suivants, avec toute la rigueur nécessaire et en partant des premiers éléments, cette théorie des transformations irrationnelles ou inverses et de la section des fonctions elliptiques, qui me paraît être le comble de toutes mes recherches sur cette matière.

Dans un mémoire écrit en allemand, et qui a été inséré dans le 3[e] volume du Journal de M. Crelle, j'ai donné une construction *plane* de la multiplication des fonctions elliptiques.

Soit $AA'A''A'''\ldots$ une partie d'un polygone inscrit dans le cercle $C$ et circonscrit au cercle $c$, $A$ étant situé dans le prolongement de $cC$ ou de la droite qui joint les deux centres: si l'on met $AA' = 2\varphi_1$, $AA'' = 2\varphi_2$, $AA''' = 2\varphi_3$, ..., on aura




$$F(\varphi_2) = 2F(\varphi_1), \quad F(\varphi_3) = 3F(\varphi_1'), \ldots$$

Le module se détermine par la distance du centre $C$ à la sécante idéale commune aux deux cercles. Donc si l'on veut trouver un angle $\varphi_n$ tel que $F(\varphi_n) = nF(\varphi)$, on n'a qu'à décrire un cercle $c$, qui touche la droite $AA'$ et qui a une sécante idéale donnée commune avec le cercle $C$; ensuite on mène au cercle $c$ les tangentes $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A^{\text{IV}}$, ...; les points $A''$, $A'''$, $A^{\text{IV}}$, ... étant situés tous dans la périphérie du cercle $C$; la $n^{\text{ième}}$ tangente étant $A^{(n-1)}A^{(n)}$, on aura $AA_n = 2\varphi_n$. Les arcs de cercles peuvent devenir plus grands que 360 degrés, de sorte que cette construction n'a point des limites, comme celle de Lagrange. On voit ainsi que la théorie générale des polygones inscriptibles et circonscriptibles en même temps à un cercle dépend des fonctions elliptiques, comme celle des polygones réguliers des fonctions circulaires.

Pardonnez-moi si j'ose vous faire remarquer qu'il me semble que, dans votre premier Supplément, vous avez présenté d'une manière incomplète ma démonstration de mon premier théorème. Il me semble que de la seule circonstance que $y$ se change en $\frac{1}{\lambda y}$, $x$ étant changé en $\frac{1}{kx}$, vous concluez que la valeur de $y$, qu'on a supposée, satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

puisqu'on peut faire dans celle-ci cette substitution.

Mais je n'ai pas fait, moi, cette conclusion, que vous reconnaîtrez aisément être fautive puisqu'on peut former *ad libitum* des expressions qui jouissent de cette propriété et qui ne satisfont pas à l'équation différentielle.

Vous m'obligerez beaucoup, Monsieur, si vous voulez avoir la bonté de faire parvenir à MM. Poisson, Fourier et Cauchy les exemplaires de mon ouvrage qui se trouvent auprès de celui dont je vous fais hommage. Comme je resterai encore quelque temps à Potsdam je vous prie d'y adresser une réponse que j'attends avec une vive impatience.

Votre entièrement dévoué C. G. J. Jacobi.



## LEGENDRE A JACOBI.

Paris, le 4 juin 1829.

Monsieur,

Je suis fort empressé de recevoir l'exemplaire que vous m'avez destiné de votre ouvrage contenant le fondement de vos recherches sur la théorie des fonctions elliptiques. Je distribuerai conformément à vos intentions les trois exemplaires qui y sont joints, aussitôt que je les aurai reçus, je regrette seulement que vous n'en ayez pas envoyé un quatrième pour l'académie avec une lettre au président, et je vous engage à réparer cette omission aussitôt la présente reçue, que je m'empresse à cet effet de vous adresser à Potsdam, puisque vous me marquez que vous y resterez encore quelque temps. — Je ne serai pas moins empressé de voir le mémoire qui doit paraître dans le recueil de M. Crelle et qui sera suivi de plusieurs autres où vous donnerez, dites-vous, les démonstrations détaillées de plusieurs de vos beaux résultats. — Je vous ai adressé mon second supplément à Kœnigsberg, pensant que vous ne resteriez pas si longtemps à Potsdam. — Je vois à l'avance que nous serons d'accord sur les deux classes des fonctions de troisième espèce que je distingue par les noms de logarithmique et de circulaire, je suis fâché de perdre l'espérance de réduire en table les fonctions à paramètre circulaire et j'ai peine à comprendre comment il peut y avoir une différence aussi essentielle entre les deux classes. ***Mais, comme vous dites, cela tient à la nature des choses et nous ne pouvons rien y changer.*** Vous vous en consolez plus aisément que moi, vous et M. Abel qui êtes tous deux éminemment spéculatifs, mais moi qui ai toujours eu pour but d'introduire dans le calcul de nouveaux éléments qu'on puisse réaliser en nombres à volonté, moi qui me suis livré à un travail des plus longs et des plus fastidieux pour la construction des tables, travail que je n'hésite pas à croire aussi considérable que celui des grandes tables de Briggs, je ne prends pas mon parti aussi facilement sur l'espérance déçue que vous m'aviez fait concevoir, et dont une moitié seulement s'est réalisée.

Votre construction géométrique des fonctions multiples me paraît fort ingénieuse, ce sont de ces choses dont je ne manquerai pas de faire mention dans un 3ème supplément, s'il y a lieu. Car je ne réponds de rien, j'ai eu encore bien de la peine à passer cet hiver, et une année de plus devient pour moi un demi-siècle. Vous avez déjà une preuve de l'influence de l'âge qui diminue nécessairement l'étendue de nos facultés intellectuelles, puisque vous avez remarqué que je n'ai pas bien saisi votre pensée, et que j'ai présenté d'une manière incomplète dans mon premier supplément la démonstration de votre théorème I. Vous aurez peut-être occasion de faire de semblables remarques dans la lecture du second supplément, mais vous remarquerez du moins en même temps que les erreurs dans lesquelles j'aurai pu tomber ne peuvent être reprochées qu'à moi, et que je n'ai rien négligé pour que la gloire de vos découvertes vous soit réservée tout entière.

Relativement au premier objet je dois dire pour mon excuse que votre démonstration, telle que vous l'avez donnée dans le Journal de M. Schumacher, ne m'a paru concluante qu'en admettant comme *assomption*, ce que j'appelle *le principe de la double substitution* dont l'idée m'a paru très-heureuse et de nature à faire beaucoup d'honneur à votre sagacité.

J'ai dit expressément que la double substitution qui satisfait à l'équation différentielle doit satisfaire aussi à son intégrale, et partant de là je suis arrivé à votre résultat. Cette raison m'a paru suffisante, d'ailleurs je n'ai point vu que vous ayez motivé sur des raisons plus solides l'usage que vous avez fait de ce principe. Il ne m'avait pas cependant échappé qu'on pouvait faire des objections contre ce principe, j'avais remarqué que si la valeur $y = \frac{x}{\mu} \cdot \frac{U}{V}$ satisfait au principe, une valeur différente telle que $y = \frac{x}{\mu} \cdot \frac{U}{V} \left(\frac{1}{kx} + x\right)\left(\frac{1}{kx} - x\right)$ y satisfait encore sans satisfaire à l'équation différentielle, j'avais remarqué encore que pour l'échelle ancienne dont l'indice est 2 (pag. 36 et 38 du 1. supplément) l'équation des amplitudes pour le Théorème I, savoir $y = \frac{(1+k')x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}$, satisfait bien au principe de la double substitution, mais que l'équation analogue du Théorème II, savoir $z = \frac{1+\lambda}{\lambda y + \frac{1}{y}}$, n'y satisfait pas. J'ai maintenant l'espoir que dans le mémoire qui va bientôt me parvenir dans le Journal de M. Crelle, je trouverai les développements nécessaires sur cet objet avec lesquels je pourrai corriger dans mon prochain supplément ce que le premier contient de défectueux.

Recevez, Monsieur, mes compliments et l'assurance de mon sincère attachement.

Le Gendre.



En fermant cette lettre je viens d'apprendre avec une profonde douleur que votre digne émule M. Abel est mort à Christiania des suites d'une maladie de poitrine dont il était affecté depuis quelque temps et qui a été aggravée par les rigueurs de l'hiver.

C'est une perte qui sera vivement sentie de tous ceux qui s'intéressent aux progrès de l'analyse mathématique considérée dans ce qu'elle a de plus élevé. Au reste dans le court espace de temps qu'il a vécu il a élevé un monument qui suffira pour rendre sa mémoire durable et donner une idée de ce qu'on aurait pu attendre de son génie *ni fata obstetissent.*

---

## JACOBI A LEGENDRE.

Potsdam, le 14 juin 1829.

Monsieur,

Conformément à ce que vous avez la bonté de m'écrire dans votre lettre du 4 juin, je vous envoie un quatrième exemplaire pour l'Académie. Je l'ai adressé à M. le Baron Fourier, Secrétaire perpétuel de l'Académie, puisque j'ignore le nom du Président. Veuillez bien le lui faire parvenir et excuser la peine que je vous fais. Votre bonté envers moi et votre générosité sont telles, que je ne sais vous en rendre de dignes grâces.

Peu de jours après l'envoi de ma dernière lettre, j'appris la triste nouvelle de la mort d'Abel. Notre Gouvernement l'avait appelé à Berlin, mais l'appel ne l'a pas trouvé parmi les vivants. L'espérance que j'avais conçue de le trouver à Berlin a été donc cruellement déçue. Les vastes problèmes qu'il s'était proposés, d'établir des critères suffisants et nécessaires pour qu'une équation algébrique quelconque soit résoluble, pour qu'une intégrale quelconque puisse être exprimée en quantités finies, son invention admirable de la propriété générale qui embrasse toutes les fonctions qui sont des intégrales de fonctions algébriques quelconques, etc., etc., marquent un genre de questions tout à fait particulier, et que personne avant lui n'a osé imaginer. Il s'en est allé, mais il a laissé un grand exemple.

Je vous rends mille grâces de votre second Supplément, qui avait fait le grand détour par Kœnigsberg. Les démonstrations différentes de celles que vous trouverez dans mon petit ouvrage et les développements que vous avez ajoutés à plusieurs points importants me l'ont rendu fort intéressant. Quant au calcul numérique des intégrales elliptiques de troisième espèce à paramètre circulaire, je vous demande pardon d'avoir fait naître en vous une espérance qui n'a pas été réalisée depuis. Cependant je crois que vous n'avez pas à regretter trop l'inconvénient que ces fonctions ne peuvent être réduites en tables à double entrée. Les moyens que vous avez indiqués pour leur évaluation dans le second Supplément sont tels, qu'on doit considérer ces fonctions tout à fait comme des quantités finies. Je crois même qu'au moyen de quelques tables à simple entrée on peut faciliter tellement leur calcul, que la peine de les calculer au moyen de mes séries devienne plus petite que celle qu'exige l'interpolation dans une table à double entrée.

Pour ce qui regarde la démonstration que j'ai donnée de mon Théorème I dans le *Journal de M. Schumacher*, elle repose sur le théorème qu' „étant trouvées trois fonctions entières et rationnelles de $x$ quelconques $U$, $V$ et $T$, telles que

$$(U^2-V^2)(U^2-\lambda^2V^2) = (1-x^2)(1-k^2x^2)T^2,$$

on aura toujours, en mettant $y=\frac{U}{V}$,

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$M$ désignant une constante"; théorème fondamental qui a été prouvé au commencement de ma démonstration, et dont il ne se trouve pas fait mention dans le premier Supplément. Dans mon ouvrage, j'ai désigné ce théorème sous le nom de *principe de la transformation des fonctions elliptiques.* En effet, ce principe suffit pour qu'on puisse établir la théorie générale de la transformation, en réduisant cette dernière à un problème algébrique qu'on peut toujours résoudre, les constantes indéterminées étant en nombre suffisant pour remplir les conditions du problème. Pour compléter ma démonstration, telle qu'elle se trouve dans le premier Supplément, il suffira d'ajouter en peu de mots la démonstration du théorème mentionné. La double substitution vous fournissant les valeurs de $U\pm V$, $U\pm\lambda V$ résolues en facteurs, et telles qu'on a

$$U-V=(1-x)A^2,\quad U-\lambda V=(1-kx)C^2,$$
$$U+V=(1+x)B^2,\quad U+\lambda V=(1+kx)D^2,$$

$A$, $B$, $C$, $D$ étant des fonctions entières, tout se trouvera prouvé rigoureusement.



Abel s'est servi du même principe, de sorte que nos démonstrations sont au fond les mêmes. Vous êtes le premier, Monsieur, qui avez montré qu'on peut s'en passer, en effectuant la substitution elle-même au moyen de la résolution en fractions simples. Aussi je n'ai pas tardé à exposer dans mon ouvrage cette démonstration, qui vous est propre et qui donne une excellente vérification. A présent, je suis en possession d'un nombre assez grand de démonstrations différentes. Je remarque, à cette occasion, que le mérite principal d'Abel, dans la théorie de la transformation, consiste dans sa démonstration que *nos formules embrassent toutes les substitutions algébriques possibles*, ce qui donne un haut degré de perfection à cette théorie.

Vous vous plaignez des infirmités de votre âge. Ah! Monsieur, ces excellents suppléments que vous venez de composer, en partant de quelques légères notices que j'avais données sans démonstration, montrent que c'est encore la vigueur et l'énergie de la jeunesse qui vous animent et font concevoir l'espérance que le ciel conservera encore longtemps une vie aussi chère.

Mes parents m'ont prié de vous faire leurs civilités et vous rendent grâces des bontés que vous avez bien voulu avoir pour moi. Soyez assuré, Monsieur, que je n'oublierai jamais ces bontés, et que je suis avec le respect le plus profond

Votre tout dévoué,

C. G. J. Jacobi.

Je ne retournerai à Kœnigsberg que cet hiver.

---

## LEGENDRE A JACOBI.

Paris, le 16 juillet 1829.

Je ne veux pas différer plus longtemps, Monsieur, de répondre à votre lettre du 14 juin dernier, car il faut que vous sachiez que j'ai reçu les quatre exemplaires destinés pour trois de mes confrères et pour moi, et de plus un cinquième qui est arrivé un peu plus tard pour l'académie. Le tout a été distribué selon vos intentions et j'ai été chargé de vous adresser les remercîments de ces Messieurs auxquels je joins les miens. M. Fourier vous adressera probablement ceux de l'académie, d'ailleurs M. de Mirbel, son président, a chargé M. Poisson de faire de votre ouvrage un rapport verbal à l'académie, ce qui me procurera le plaisir d'entendre citer avec éloge les beaux travaux par lesquels vous avez considérablement perfectionné une branche importante de l'analyse, et qui déjà vous placent au nombre des géomètres les plus distingués de l'Europe.

L'exécution typographique de votre ouvrage paraît, surtout dans mon exemplaire qui est sur papier fin, d'une beauté remarquable. Je regrette seulement que vous n'ayez pas été à portée de corriger les épreuves, car outre les fautes indiquées dans l'errata il me paraît qu'il en reste encore un assez bon nombre. Par exemple je trouve pag. 29, 30, 67 et 69 que les équations modulaires pour les nombres 3 et 5 sont

$$u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0,$$
$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0.$$

Mais puisque vous supposez $u > v$ (voir la formule $\lambda = k^n$ (.....) pag. 37), il est évident que les premiers membres de ces équations sont composés l'un de deux binômes dont la valeur est positive, l'autre de trois binômes semblables. Les vraies équations telles que je les ai données pag. 68 et 75 de mon premier supplément sont

$$u^4 - v^4 - 2uv(1 - u^2v^2) = 0,$$
$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) - 4uv(1 - u^4v^4) = 0\;^{*)}$$

et alors pour le dire en passant, on ne peut échanger entre eux $u$ et $v$, mais bien $u$ et $-v$.

Au reste, j'ai remarqué beaucoup de choses dans votre ouvrage qui sont nouvelles pour moi et dont je pourrai profiter, s'il m'est donné de publier un 3^e supplément. Mais il me faudra beaucoup de temps et de travail pour me mettre en état de traduire en langage vulgaire le résultat des hautes spéculations auxquelles vous vous êtes livré; car nous écrivons dans deux genres fort différents.

J'applaudis aux efforts heureux que vous avez faits dans la partie purement spéculative, en traitant des transformations imaginaires, et résolvant les équations algébriques les plus difficiles par des formules très-élégantes, mais l'objet de mon ouvrage se rapproche beaucoup plus de la pratique, je cherche à recueillir tout ce qui peut faciliter l'usage de mes fonctions afin d'en faire un véritable instrument de calcul, comme l'ont été jusqu'ici les fonctions circulaires et logarithmiques.

*) Ces deux équations se trouvent avec les mêmes signes dans la notice de Jacobi du 2 avril 1828, Journal de Crelle vol. 3 p. 194, et avec un double signe dans la lettre de Jacobi à Legendre datée du 12 janvier 1828. B.



Je devrais borner là ma lettre et ne vous point parler des changements de nomenclature que vous proposez dans votre art. 17 pag. 31; mais comme d'autres personnes pourraient vous représenter qu'en cela vous avez fait une chose qui doit m'être désagréable, je ne vois pas pourquoi je vous cacherais ce que je pense de cette proposition. Je vous dirai donc franchement que je n'approuve pas votre idée, et que je ne vois pas de quelle utilité elle peut être pour vous et pour la science.

La plus simple des fonctions elliptiques, savoir l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, jouit de tant et de si belles propriétés; considérée seule, elle est liée par de si beaux rapports avec les deux autres fonctions dites de la seconde et de la troisième espèce que l'ensemble de ces trois fonctions forme un système complet auquel on pourrait donner un autre nom que celui de fonctions elliptiques, mais dont l'existence est indépendante de toute autre fonction. La nomenclature méthodique que j'ai proposée, dès 1793, dans mon mémoire sur les *transcendantes elliptiques*, a été adoptée généralement, vous l'avez trouvée établie; quelles sont donc vos raisons pour vous écarter de l'usage général? Vous faites schisme avec M. Abel et avec moi, vous faites schisme avec vous-même, puisque, après avoir appelé *fonctions elliptiques* les sinus, cosinus et autres fonctions trigonométriques de l'amplitude, vous êtes encore obligé d'appeler *fonctions de troisième espèce* celles que je désigne sous le même nom. N'est ce pas ce que veut dire le titre de l'art. 56 p. 160? Pourquoi désignez-vous comme moi la fonction de 3^e espèce tantôt par $\Pi(u, a)$, tantôt par $\Pi(u, a+K', k')$? Quelle liaison y a-t-il entre ces fonctions et la première, qui n'est plus, suivant vous, qu'un argument de fonction? Je vous laisse à expliquer toutes ces choses. Du reste, je vous fais part confidentiellement de ces observations, dont vous ferez tel usage que vous voudrez, et auxquelles je ne donnerai jamais aucune publicité. Il me suffira de vous avoir témoigné ma surprise sur l'inconvenance et la bizarrerie de votre idée; elle n'altérera en rien les sentiments d'estime et d'affection que j'ai conçus pour vous et dont je vous renouvelle l'assurance.

Le Gendre.

## JACOBI A LEGENDRE.

Francfort, le 19 août 1829.

Monsieur,

Dans un voyage que j'ai entrepris en Allemagne, étant arrivé près des rivages du Rhin, je ne puis résister au désir de vous voir à Paris. J'y partirai donc dans quelques jours pour y passer plusieurs semaines. Je ne saurais mieux profiter de la permission que le Gouvernement m'a voulu accorder pour ce semestre pour pouvoir jouir d'une récréation de mes études. Je brûle du désir de voir l'homme auquel je suis le plus redevable des bontés qu'il a voulu avoir pour moi, et de lui témoigner tous les sentiments que peuvent inspirer l'admiration et la reconnaissance.

Comme j'écris ceci en hâte, je ne puis répondre que quelques mots aux reproches que vous m'avez faits dans votre dernière lettre, et pour lesquels je vous rends grâce mieux encore que pour les éloges que vous m'avez prodigués et que j'ai si peu mérités. Il me fallait absolument une dénomination pour les fonctions sinam, cosam, etc., dont les propriétés répondent parfaitement à celles des fonctions sin, cos, dites *circulaires*. D'un autre côté, l'application importante qu'on fait de la théorie des fonctions elliptiques au calcul intégral rendait nécessaires les distinctions et les dénominations que vous avez introduites dans l'analyse, et qui ont été accueillies par tous les géomètres. J'ai donc trouvé convenable d'appeler les intégrales auxquelles vous donnez le nom de *fonctions elliptiques de la première, seconde, troisième espèce*, *intégrales elliptiques de la première, seconde, troisième espèce* et d'étendre ou d'attribuer de préférence la dénomination de *fonctions elliptiques* aux sinam, cosam, $\Delta$am, analogiquement comme on nomme *fonctions circulaires* les sinus, cosinus, etc. Si cela vous déplaît, toute autre dénomination me sera agréable. Dans tous les cas, je crois que nous deviendrons aisément d'accord sur cet objet*).

Votre tout dévoué serviteur,

C. G. J. Jacobi.

*) La correspondance, interrompue après cette lettre par le voyage de Jacobi en France et par son séjour à Paris, n'a été reprise que l'année suivante et ne s'élève plus à son niveau antérieur, les fonctions elliptiques ne formant plus, ni pour Legendre ni pour Jacobi, l'occupation presque exclusive.

B.



## JACOBI A LEGENDRE.

Kœnigsberg, le 2 juillet 1830.

Monsieur,

Je vous prie de vouloir bien m'excuser de ne vous avoir pas plus tôt donné des nouvelles de moi, car ç'aurait dû être pour moi un devoir que de vous rendre grâce des bontés que vous m'avez eues pendant mon séjour à Paris et de vous dire que je compte le temps que vous m'avez permis de passer avec vous parmi les moments les plus heureux de ma vie. Les distractions d'un long voyage et d'autres circonstances ayant interrompu le cours de mes travaux, je n'ai su reprendre sitôt le fil de mes recherches ordinaires; et j'étais trop accoutumé à vous parler mathématiques et à vous raconter quelque chose de nouveau qui pouvait mériter votre indulgence, pour remplir une lettre avec les seuls sentiments de ma reconnaissance. Mais, après avoir reçu le cadeau précieux que vous venez de me faire par l'envoi de la troisième édition de votre ouvrage sur les nombres, je ne veux pousser plus loin un délai peu excusable. La partie la plus grande du tome II de votre ouvrage étant entièrement nouvelle, j'ai eu occasion d'y admirer de nouveau cette vigueur d'esprit qui fait vaincre les difficultés et surpasser, même dans un âge avancé, les efforts des jeunes géomètres, auxquels votre vie glorieusement consacrée aux progrès de la science sera pour toujours un modèle d'émulation. J'ai vu aussi avec plaisir que vous avez voulu profiter de ma remarque relative à la loi de réciprocité. J'avais espéré de trouver dans l'exemplaire que vous m'avez adressé quelques lignes de votre main qui me parleraient de vous et de la santé de M^me^ Legendre; mais je l'ai feuilleté inutilement et me voilà puni pour ma négligence assez sévèrement.

Pour ne pas laisser cette lettre sans les signes de calcul, je vais vous faire une observation relative à l'équation $4\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right) = Y^2 \pm nZ^2$. Pour trouver $Y$, votre ouvrage donne la règle de développer $2(x-1)^{\frac{n-1}{2}}$ et de remplacer les coefficients par les *plus petits* résidus qu'ils laissent étant divisés par $n$. Cette règle, qui se trouve déjà dans la seconde édition, n'est cependant juste que pour des nombres premiers peu grands. Les valeurs exactes de $Y$ et de $Z$ sont données dans chaque cas par les formules connues qui expriment les coefficients d'une équation au moyen des sommes des puissances de ses racines, sommes qui, dans notre cas, sont ou $\frac{-1+\sqrt{\pm n}}{2}$ ou $\frac{-1-\sqrt{\pm n}}{2}$. C'est ainsi qu'on trouve, qu'étant posé

$$Y = 2(x-r)(x-r^4)(x-r^9)\ldots\left(x-r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\right) = 2x^{\frac{n-1}{2}}+a_1x^{\frac{n-3}{2}}+a_2x^{\frac{n-5}{2}}+\cdots{}^{*}),$$

la règle est exacte pour les trois premiers coefficients $a_1$, $a_2$, $a_3$, mais qu'elle cesse de l'être pour les suivants dès que $n$ surpasse une certaine limite; de sorte que les coefficients de $Y$ et de $Z$ peuvent surpasser $\frac{1}{2}n$ et même $n$ et les puissances de $n$. Soit, par exemple, $n$ de l'une des quatre formes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1.) | $24\mu+1$, | on aura | $a_4 =$ (1.) | $\frac{(n-1)(n-105)}{192}+n$, |
| (2.) | $24\mu+5$, | | (2.) | $\frac{(n-5)(n-21)}{192}$, |
| (3.) | $24\mu+13$, | | (3.) | $\frac{(n+3)(n+35)}{192}$, |
| (4.) | $24\mu+17$, | | (4.) | $\frac{(n+7)(n+15)}{192}$, |

expressions qui pour de grands $n$ sont de l'ordre $\frac{n^2}{192}$ et peuvent surpasser $n$ de beaucoup.

Généralement on trouve que, pour de grands $n$, $a_{2m}$ et $a_{2m+1}$ sont de l'ordre $\frac{1}{3.4.5\ldots2m}\left(\frac{n}{4}\right)^m$. Peut-être vous jugerez convenable de faire une addition de quelques lignes à votre ouvrage pour limiter l'énoncé de la règle mentionnée.

J'ai lu avec plaisir le rapport de M. Poisson sur mon ouvrage, et je crois pouvoir en être très-content; il me paraît avoir très-bien présenté les deux transformations, qui, étant jointes entre elles, conduisent à la multiplication des fonctions elliptiques, en quoi il a été guidé sensiblement par vos suppléments. Mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est

*) L'erreur qui s'est glissée dans cette formule, le produit qui forme la seconde partie n'étant pas égal au polynôme $Y$ développé suivant les puissances de $x$ dans la troisième partie de l'équation, mais bien égal à $Y+\sqrt{\pm n}.Z$, est relevée dans la réponse de Legendre, p. 456. B.



l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde. Quoi qu'il en soit, on doit vivement regretter que M. Fourier n'ait pu achever son ouvrage sur les équations, et de tels hommes sont trop rares aujourd'hui, même en France, pour qu'il soit facile de les remplacer.

En ce qui regarde mes propres occupations, j'ai entrepris un bon nombre de recherches sur différentes matières et que je voudrais avoir finies avant de retourner aux fonctions elliptiques et aux transcendantes d'un ordre supérieur qui sont de la forme $\int\frac{dx}{\sqrt{a+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}}$. Je crois entrevoir à présent que toutes ces transcendantes jouissent des propriétés admirables et inattendues auxquelles on peut être conduit par le théorème d'Abel qui établit une relation entre plusieurs de ces transcendantes qui répondent à différentes valeurs de $x$. J'ai réfléchi aussi de temps en temps sur une méthode nouvelle de traiter les perturbations célestes, méthode dans laquelle doivent entrer les théories nouvelles des fonctions elliptiques.

Je vous prie, Monsieur, de me rappeler à la mémoire de M[me] Legendre, qui a voulu participer avec tant de bienveillance aux bontés que vous m'avez eues; je vous prie en même temps de faire mes civilités à M[lle] Sophie Germain, dont je me félicite d'avoir fait la connaissance, et de me dire des nouvelles de sa santé, si vous daignez me répondre.

Agréez, Monsieur, les assurances de mon entier dévouement.

Votre très-humble serviteur,

C. G. J. Jacobi.

---

## LEGENDRE A JACOBI.

Paris, le 1 octobre 1830.

Monsieur,

Différents obstacles de toute nature et principalement le mauvais état de ma santé m'ont empêché jusqu'ici de répondre à votre lettre du 19 juillet arrivée après un long silence qui commençait à m'inquiéter et dont j'attribue la cause à de nouveaux travaux toujours marqués au coin d'un grand talent.

J'ai trouvé votre remarque très-juste sur l'erreur que j'ai commise dans ma théorie des nombres en supposant que les fonctions $Y$ et $Z$ dans l'équation $4X = Y^2 \pm nZ^2$ ont leurs coefficients plus petits que $\frac{1}{2}n$. L'induction m'a trompé, et cela est fâcheux, puisque la règle très-simple que j'avais donnée pour déterminer ces fonctions cesse d'être exacte lorsque $n = 61$, et devient de plus en plus fautive à mesure que $n$ est plus grand. Vous paraissez avoir grandement approfondi cette question, comme j'en puis juger d'après les valeurs que vous donnez du coefficient $a_4$, selon les différentes formes du nombre premier $n = 4i+1$. Je suis parvenu avec assez de peine à vérifier l'une de ces formules, celle qui suppose $n = 24\mu+13$, ce qui me conduisit à la vérification des trois autres. Ce genre d'analyse est fort beau, c'est dommage seulement qu'il ne conduise pas à des formules absolument générales et que les résultats ne peuvent être trouvés commodément que dans des cas particuliers. De mon côté, je vous reprocherai de m'avoir induit en erreur, en me marquant que la fonction $Y$ est le produit des facteurs

$$2(x-r)(x-r^4)(x-r^9)\ldots\left(x-r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\right)$$

$r$ étant sans doute une racine imaginaire de l'équation $r^n-1=0$. On voit au premier coup d'oeil que ces facteurs ne peuvent avoir lieu, parce qu'ils seraient communs à $X$ et à $Y$, par conséquent à $Z$.

J'ai vu avec plaisir dans la lettre que vous avez écrite à l'académie, que vous vous occupez à perfectionner la théorie des perturbations, et que vous avez l'espoir d'y employer utilement la théorie des fonctions elliptiques. C'est un objet très-digne de vos recherches et qui a été fort négligé par nos devanciers; j'avais eu quelques idées là-dessus, mais sans rien approfondir; j'en ai fait mention dans mes exercices et dans mon traité des fonctions elliptiques, espérant qu'un jour les géomètres s'en occuperaient sérieusement, et une pareille entreprise ne saurait être mieux placée qu'entre vos mains.

M. Crelle est venu à Paris, précisément pour être témoin de notre révolution qui porte déjà des fruits, fruits amers pour les partisans des gouvernements absolus. Comme j'étais fort tourmenté de mes maux ordinaires dans ce même temps, j'ai eu le regret de ne pas recevoir M. Crelle et le fêter autant que j'aurais voulu. Je crains qu'il n'ait pas été content de moi; vous auriez pu, Monsieur, me faire un pareil reproche, car je n'ai pu, par la même cause, vous faire l'accueil que j'aurais voulu vous faire pendant votre voyage à Paris. — Je me suis acquitté de votre commission auprès de ma femme et de M^lle^ Germain; elles vous remercient de votre bon souvenir, et vous souhaitent toute espèce de bonheur. — M^lle^ Germain était malade quand vous l'avez vue, son état a malheureusement fort empiré depuis.



Adieu, Monsieur, ne me laissez pas trop longtemps sans me donner de vos nouvelles; je deviens chaque jour moins en état de travailler, mais j'apprends toujours avec grand plaisir les succès nouveaux que vous devez obtenir dans la carrière des sciences.

Votre très-dévoué,

Le Gendre.

---

## JACOBI A LEGENDRE.

Kœnigsberg, ce 27 mai 1832.

Monsieur,

Je ne sais comment excuser le long intervalle de temps qui s'est écoulé sans que je vous aie donné quelque témoignage de mon dévouement et sans que je vous aie rendu compte de mes travaux, comme j'avais coutume d'après votre permission bienveillante dans le premier temps où je m'occupais des fonctions elliptiques. J'aurais bien voulu pouvoir vous avertir de l'achèvement de quelque ouvrage plus étendu, mais pendant tout ce temps-ci je n'ai pu regagner ni le goût ni l'énergie de jadis. Ce n'auraient été que des ouvrages commencés ou même seulement projetés dont j'aurais dû faire mention à vous, qui ne cessez de publier des ouvrages également distingués par leur étendue et par leur riche teneur, et cela presque dans l'âge où se trouvait Oughtred lorsque Wallis lui dédia son *Arithmetica Infinitorum*. J'ai lu le troisième supplément qui finit le troisième volume de votre grand ouvrage sur les fonctions elliptiques à Potsdam, où je me suis rendu pour voir mon père malade, qui mourut huit jours après mon arrivée, à l'âge pas même accompli de cinquante-neuf ans. Je lui devais la reconnaissance la plus haute. Ce furent ses assistances libérales qui m'ont mis en état de me vouer entièrement aux sciences, et l'étendue de mes obligations envers lui me rendit ce triste événement plus amer encore. Dans ce temps d'une douleur profonde, Monsieur, c'était l'étude de votre ouvrage, qui m'a été communiqué par M. Crelle, qui fit mon soulagement et en quelque sorte ma consolation. Dans une annonce que j'en ai faite à la fin du huitième volume de M. Crelle, j'ai cherché à relever les mérites impérissables du géomètre qui, outre les découvertes nombreuses et importantes dont il a enrichi la science, est parvenu à fonder deux disciplines grandes et étendues par les travaux glorieux de sa vie, lesquelles formeront désormais l'$\alpha$ et l'$\omega$ de toute étude mathématique. J'ai profité en même temps de cette occasion pour parler d'Abel et de son grand théorème, que vous avez encore le mérite d'avoir approfondi le premier, montrant en même temps à la postérité que son développement est la grande tâche qui lui reste à remplir.

Les limites d'une lettre ne permettent pas de vous parler de mes travaux sur les perturbations célestes. En attendant j'ai éprouvé moi-même des perturbations pas moins célestes et qui ont fini par un mariage heureux. L'intérêt que vous avez bien voulu me témoigner me fait croire que vous prendrez quelque part à ce qui fait le bonheur et le charme de ma vie. Depuis les huit mois de mon mariage j'ai repris mes occupations ordinaires avec un zèle redoublé, et j'espère que les années suivantes me dédommageront en quelque sorte du peu de fruit que m'ont porté les trois précédentes. Je ne veux vous dire que deux mots d'un nouveau résultat obtenu par mes recherches sur les nombres, à la publication desquelles je n'ai encore pu parvenir: c'est ***la résolution trigonométrique du problème de Pell.*** En effet, j'exprime généralement par $\cos\frac{2m\pi}{a}$ et $\sin\frac{2m\pi}{a}$ deux nombres entiers $x$ et $y$ tels que $x^2-ay^2=1$. J'ai trouvé même une généralisation du problème de Pell qui me paraît être très-remarquable et qui se rapporte au cas où $a$ est le produit de deux ou de plusieurs facteurs. En effet, supposons que $a$ soit le produit des deux facteurs $b$ et $c$, on peut, d'une infinité de manières, trouver quatre nombres entiers $u, v, w, x$ tels, que le produit des quatre facteurs

$$(u+v\sqrt{b}+w\sqrt{c}+x\sqrt{bc})(u+v\sqrt{b}-w\sqrt{c}-x\sqrt{bc})$$
$$\times(u-v\sqrt{b}+w\sqrt{c}-x\sqrt{bc})(u-v\sqrt{b}-w\sqrt{c}+x\sqrt{bc})$$

soit égal à l'unité. On donne aisément à ce produit les trois formes: $y^2-bz^2$, $y'^2-cz'^2$, $y''^2-az''^2$; donc, $a$ étant $=bc$, on peut faire dépendre les six nombres $y, z, y', z', y'', z''$, lesquels donnent $y^2-bz^2=1$, $y'^2-cz'^2=1$, $y''^2-az''^2=1$, des quatre nombres plus simples $u, v, w, x$. Vous voyez aisément comment cela



doit être étendu au cas où $a$ est le produit d'un nombre quelconque de facteurs. Dans tous les cas, je donne les nombres $u, v, w, x, \ldots.$ par des formules générales et trigonométriques. Si vous le jugez convenable, et s'il ne vous fait pas de peine en aucune sorte, vous pourriez communiquer à l'académie des sciences la notice que je viens de vous donner sur cette nouvelle manière de résoudre le fameux problème de Pell. Je remarque, en outre, qu'il doit exister des algorithmes, analogues aux fractions continues, qui pourront servir à trouver les nombres $u, v, w, x$ et leurs analogues dans le cas d'un plus grand nombre de facteurs de $a$, et je crois que la recherche de ces algorithmes sera une chose de quelque importance pour la science de nombres.

Les fonctions elliptiques et la science de nombres ne devraient pas manquer à l'avenir dans les leçons données aux élèves de l'école polytechnique, si l'on veut que ces leçons soient conformes aux progrès du temps. Quant à moi, je donne des leçons régulières sur ces belles théories, et je vois avec plaisir les élèves de notre Université s'emparer avec empressement de ces matières. Vous verrez plusieurs fruits de leurs travaux dans les volumes suivants du *Journal de M. Crelle.* Ce sont encore, Monsieur, les fruits de vos travaux que ces branches de la science, jadis peu connues, vont devenir la possession commune des géomètres.

De mon retour à Kœnigsberg, j'y trouvais votre bel ouvrage dont votre bonté a bien voulu me gratifier, et je m'empresse de vous dire mes remercîments de ce que votre générosité l'a voulu emporter sur ma négligence. Ajoutez, Monsieur, à cette générosité quelques lignes de votre main, qui m'ont toujours été si précieuses et qui pourront me donner l'assurance de ce que vous n'êtes pas fâché de moi.

Je vous prie, Monsieur, de recommander Marie Jacobi aux bonnes grâces de Mme Legendre, et de vouloir bien agréer les assurances de mon dévouement le plus parfait.

Votre serviteur très-humble,

C. G. J. Jacobi.

## LEGENDRE A JACOBI.

(Sans date, timbré Paris, le 30 juin 1832.)

Monsieur,

Je n'ai jamais interprété à votre désavantage la longue lacune qui s'est trouvée dans votre correspondance: j'ai supposé que vous étiez occupé d'un grand travail qui absorbait tout votre temps, ou que des affaires essentielles vous empêchaient de penser à autre chose. Les deux suppositions paraissent avoir eu lieu successivement; c'est en effet une grande époque dans la vie que celle où l'on a le malheur de perdre son père, c'en est une autre non moins importante, mais plus agréable, que celle où l'on se décide à entrer en ménage. Et pour ne parler que de cette dernière, je vous félicite bien sincèrement d'avoir rencontré une jeune épouse que, d'après une expérience *déjà longue*, vous jugez devoir faire pour toujours votre bonheur.

Vous étiez dans l'âge convenable pour vous marier; un homme destiné à passer beaucoup de temps dans les travaux du cabinet, a besoin d'une compagne qui s'occupe de tout le détail du ménage et qui affranchisse son mari de tous ces petits soins minutieux dont un homme n'est guère capable. Je me suis marié beaucoup plus tard que vous et à la suite d'une révolution sanglante qui avait détruit ma petite fortune; nous avons eu de grands embarras et des moments bien difficiles à passer, mais ma femme m'a aidé puissamment à restaurer progressivement mes affaires et à me donner cette tranquillité d'esprit nécessaire pour me livrer à mes travaux accoutumés et pour composer de nouveaux ouvrages qui ont ajouté de plus en plus à ma réputation, de manière à me procurer bientôt une existence honorable et une petite fortune dont les débris, après de nouvelles revolutions qui m'ont causé de grandes pertes, suffisent encore pour pourvoir aux besoins de ma vieillesse, et suffiront pour pourvoir à ceux de ma femme bien-aimée quand je n'y serai plus. Mais c'est trop parler de moi. Je reviens à vous et à votre lettre.

Je n'ai pas trouvé l'occasion de parler à l'académie de vos travaux sur l'analyse indéterminée; peut-être n'en parlerai-je pas, dans la crainte de n'être pas suffisamment entendu. J'obtiendrais plus de faveur si j'avais à parler à l'académie des travaux dont vous vous occupez sur la théorie des perturbations. C'est un objet d'un grand intérêt auquel j'ai pensé plusieurs fois et sur lequel j'ai



donné par-ci par-là quelques idées; je me suis toujours persuadé que, si je m'en étais occupé sérieusement et d'une manière suivie, j'aurais trouvé quelque chose de plus que mes honorables confrères la Grange et la Place. Si on excepte en effet les beaux résultats qu'ils ont trouvés pour les différentielles des éléments elliptiques exprimées par la fonction des perturbations, je ne vois pas qu'ils aient avancé la science au delà de ce qu'elle était du temps d'Euler, Clairaut et d'Alembert. Je verrais donc avec beaucoup de plaisir, mon cher disciple (car vous me permettrez de vous donner ce nom à raison de mon ancienneté, sauf à vous à user du même droit un jour envers qui il appartiendra) que vous ouvrissiez dans cette théorie *une nouvelle porte* qui nous conduisît à des résultats plus précis et plus exacts que tout ce qui a été fait jusqu'ici. J'aurais un double plaisir si ces nouveaux résultats étaient obtenus par le secours de *nos* fonctions elliptiques qui vous appartiennent autant qu'à moi, quoique vous ne vouliez pas exprimer la même chose par le même nom.

Je ne puis voir ma page finir sans vous remercier de la peine que vous avez prise de donner dans le Journal de M. Crelle un extrait de mon 3[e] supplément. Je n'ai pas le bonheur d'entendre la langue dont vous vous êtes servi, mais je sais que vous avez dit beaucoup de bien de mon nouveau travail qui sera sans doute le dernier. Car je vais bientôt entrer dans ma 81[e] année et, à cet âge, il faut s'appliquer forcément l'adage *salve senectutem*. En attendant je vous envoie un petit opuscule de géométrie élémentaire qui est le résultat d'une longue suite de réflexions faites et renouvelées à de grands intervalles de temps. Peut-être ce petit opuscule trouvera-t-il plus de lecteurs que mes meilleurs ouvrages, mais s'il a votre approbation, cela me suffit.

Agréez, Monsieur, l'expression des sentiments d'estime et d'attachement bien sincère que je vous ai voués pour toujours. Ma femme vous fait mille compliments ainsi qu'à votre aimable épouse. Elle désire ainsi que moi que vous nous l'ameniez quelque jour.

Votre dévoué serviteur,

Le Gendre.

# DE TRANSFORMATIONIBUS FUNCTIONUM ELLIPTICARUM IRRATIONALIBUS SIVE INVERSIS

AUCTORE

C. G. J. JACOBI
PROF. ORD. MATH. REGIOM.

# DE TRANSFORMATIONIBUS FUNCTIONUM ELLIPTICARUM IRRATIONALIBUS SIVE INVERSIS.

(Ex ill. C. G. J. Jacobi manuscriptis posthumis in medium protulit F. Mertens.)

1.

Vidimus in *Fundamentis*, quicunque sit $n$ numerus impar, determinari posse substitutiones

$$y = \frac{x}{M}\cdot\frac{1+A'x^2+A''x^4+\cdots+A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}}{1+B'x^2+B''x^4+\cdots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}}$$

$$z = nMy\cdot\frac{1+C'y^2+C''y^4+\cdots+C^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}y^{n-1}}{1+D'y^2+D''y^4+\cdots+D^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}y^{n-1}}$$

tales ut fiat

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)(1-\lambda^2yy)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-xx)(1-k^2xx)}}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-zz)(1-k^2zz)}} = \frac{nMdy}{\sqrt{(1-yy)(1-\lambda^2yy)}}.$$

Dedimus adeo expressiones analyticas generales et substitutionum adhibitarum et moduli transformati $\lambda$. Quas substitutiones et transformationes, quas suppeditant, vocabimus rationales sive directas. Docebimus in sequentibus, non solum harum rationalium assignari posse expressiones analyticas generales, sed etiam substitutionum irrationalium, quae ex earum inversione ortum ducunt; videlicet generaliter etiam idque modo explicito exprimi posse $x$ per $y$, $y$ per $z$. Quare non parum censeo promoveri analysin algebraicam, ut quae problema tam complicatum tantaeque generalitatis et elegantiae vix antea solverit.

Antequam autem rem ipsam aggrediar, revocanda sunt theoremata quaedam fundamentalia, quae in commentationibus prioribus condidimus.

Posito

$$\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u\, du = E(u) \qquad \int_0^u E(u)\, du = \log \Omega(u),$$

vidimus in *commentatione prima* *), infinitis modis assignari posse constantem $r$, ut functio $e^{ruu}\Omega(u)$, quam vocavimus $\chi(u)$, periodica evadat, eamque, qua gaudet, periodum functionibus ellipticis argumenti $u$ communem esse. Designantibus enim $m, m'$ numeros integros positivos vel negativos, vidimus, posito

$$mK + m'iK' = Q \qquad r = \frac{m'i\pi}{4KQ} - \frac{E}{2K},$$

fieri

$$\chi(u+4Q) = \chi(u).$$

Ex elementis autem constat, esse etiam

$$\sin \operatorname{am}(u+4Q) = \sin \operatorname{am} u, \quad \cos \operatorname{am}(u+4Q) = \cos \operatorname{am} u, \quad \Delta \operatorname{am}(u+4Q) = \Delta \operatorname{am} u, \text{ etc.}$$

Vice versa, quamcunque eligis ex innumeris functionum ellipticarum periodis, quae e duabus componuntur omnes, determinare licet functionem $\chi(u)$, quae eadem gaudeat.

Demonstravimus porro loco citato formulam fundamentalem:

$$\frac{\chi(u+a)\chi(u-a)}{\chi^2(a)\chi^2(u)} = 1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u, \tag{1.}$$

nec non in commentatione *Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales* **) formulas:

$$\frac{\chi(u+a)\chi(u+b)\chi(a+b)}{\chi(a)\chi(b)\chi(u)\chi(u+a+b)} = 1 + k^2 \sin \operatorname{am} a \sin \operatorname{am} b \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(u+a+b) \tag{2.}$$

$$\begin{aligned} &\sin \operatorname{am} a \sin \operatorname{am} b + \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(u+a+b) - \sin \operatorname{am}(u+a) \sin \operatorname{am}(u+b) \\ &= k^2 \sin \operatorname{am} a \sin \operatorname{am} b \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(u+a) \sin \operatorname{am}(u+b) \sin \operatorname{am}(u+a+b). \end{aligned} \tag{3.}$$

2.

His praemissis, designante $n$ numerum imparem quemlibet, $m, m'$ autem numeros integros quoslibet positivos seu negativos, qui tamen per eundem ipsius $n$ factorem uterque simul non sunt divisibiles, ponamus

$$mK + m'iK' = Q = n\omega$$

*) p. 297 hujus voluminis.

**) p. 340 hujus voluminis.



ac formemus expressiones sequentes:

$$\begin{aligned} X &= \sum \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)\chi(4p\omega)} \cdot \sin \operatorname{am}(u+4p\omega) \\ Y &= \sum \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)\chi(4p\omega)} \cdot \frac{\cos \operatorname{am}(u+4p\omega)}{\Delta \operatorname{am} 4p\omega} \\ Z &= \sum \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)\chi(4p\omega)} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am}(u+4p\omega)}{\cos \operatorname{am} 4p\omega}, \end{aligned}$$

quibus in summis numero $p$ tribuendi sunt valores $0, 1, 2, \ldots n-1$. Fiunt itaque termini primi, posito $p=0$:

$$\sin \operatorname{am} u, \quad \cos \operatorname{am} u, \quad \Delta \operatorname{am} u.$$

Expressiones $X, Y, Z$ primum singulas in se ipsas ducamus, deinde formemus productum $YZ$.

Ponamus

$$\begin{aligned} X_p &= \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)\chi(4p\omega)} \cdot \sin \operatorname{am}(u+4p\omega) \\ Y_p &= \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)\chi(4p\omega)} \cdot \frac{\cos \operatorname{am}(u+4p\omega)}{\Delta \operatorname{am} 4p\omega} \\ Z_p &= \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)\chi(4p\omega)} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am}(u+4p\omega)}{\cos \operatorname{am} 4p\omega}, \end{aligned}$$

erit

$$\begin{aligned} X &= X_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} \\ Y &= Y_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{n-1} \\ Z &= Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{n-1}. \end{aligned}$$

Expressiones $X_p, Y_p, Z_p$, cum e functionibus periodicis constent, quae immutatae manent mutato $u$ in $u+4Q$, et ipsae non mutantur, siquidem $p$ mutatur in $p \pm n$. Hinc loco $X_{n-h}, Y_{n-h}, Z_{n-h}$ scribere etiam licet $X_{-h}, Y_{-h}, Z_{-h}$. Quibus statutis, ponamus

$$\begin{aligned} (XX)_0 &= X_0 X_0 + 2X_1 X_{-1} + 2X_2 X_{-2} + \cdots + 2X_{\frac{n-1}{2}} X_{-\frac{n-1}{2}} \\ (YY)_0 &= Y_0 Y_0 + 2Y_1 Y_{-1} + 2Y_2 Y_{-2} + \cdots + 2Y_{\frac{n-1}{2}} Y_{-\frac{n-1}{2}} \\ (ZZ)_0 &= Z_0 Z_0 + 2Z_1 Z_{-1} + 2Z_2 Z_{-2} + \cdots + 2Z_{\frac{n-1}{2}} Z_{-\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

ac generaliter

$$\begin{aligned} (XX)_p &= X_0 X_p + X_1 X_{p-1} + X_2 X_{p-2} + \cdots + X_{n-1} X_{p-n+1} \\ (YY)_p &= Y_0 Y_p + Y_1 Y_{p-1} + Y_2 Y_{p-2} + \cdots + Y_{n-1} Y_{p-n+1} \\ (ZZ)_p &= Z_0 Z_p + Z_1 Z_{p-1} + Z_2 Z_{p-2} + \cdots + Z_{n-1} Z_{p-n+1} \end{aligned}$$

sive

$$(XX)_p = \sum X_h X_{p-h} \qquad (YY)_p = \sum Y_h Y_{p-h} \qquad (ZZ)_p = \sum Z_h Z_{p-h},$$

siquidem numero $h$ tribuuntur valores $0, 1, 2, \dots n-1$; erit:

$$XX = (XX)_0 + (XX)_1 + (XX)_2 + \cdots + (XX)_{n-1} = \sum (XX)_p \tag{4.}$$

$$YY = (YY)_0 + (YY)_1 + (YY)_2 + \cdots + (YY)_{n-1} = \sum (YY)_p \tag{5.}$$

$$ZZ = (ZZ)_0 + (ZZ)_1 + (ZZ)_2 + \cdots + (ZZ)_{n-1} = \sum (ZZ)_p. \tag{6.}$$

3.

Sequitur e formulis, quas in *Fundamentis* (§ 18) dedimus:

$$\sin \operatorname{am}(u+a) \sin \operatorname{am}(u-a) = \frac{\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am} a}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}$$

$$\frac{\cos \operatorname{am}(u+a) \cos \operatorname{am}(u-a)}{\Delta^2 \operatorname{am} a} = \frac{\cos^2 \operatorname{am} u - \cos^2 \operatorname{coam} a}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}$$

$$\frac{\Delta \operatorname{am}(u+a) \Delta \operatorname{am}(u-a)}{\cos^2 \operatorname{am} a} = \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u + k'k' \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} a}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}$$

ideoque e (1.)

$$X_h X_{-h} = \sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am} 4h\omega$$

$$Y_h Y_{-h} = \cos^2 \operatorname{am} u - \cos^2 \operatorname{coam} 4h\omega$$

$$Z_h Z_{-h} = \Delta^2 \operatorname{am} u + k'k' \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} 4h\omega.$$

Ponatur, ut in *commentatione prima*:

$$\sin^2 \operatorname{am} 4\omega + \sin^2 \operatorname{am} 8\omega + \cdots + \sin^2 \operatorname{am} 2(n-1)\omega = \rho$$

$$\cos^2 \operatorname{coam} 4\omega + \cos^2 \operatorname{coam} 8\omega + \cdots + \cos^2 \operatorname{coam} 2(n-1)\omega = \sigma$$

$$k'k' [\operatorname{tg}^2 \operatorname{am} 4\omega + \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} 8\omega + \cdots + \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} 2(n-1)\omega] = \tau,$$

fit:

$$(XX)_0 = n \sin^2 \operatorname{am} u - 2\rho \tag{7.}$$

$$(YY)_0 = n \cos^2 \operatorname{am} u - 2\sigma \tag{8.}$$

$$(ZZ)_0 = n \Delta^2 \operatorname{am} u + 2\tau. \tag{9.}$$

4.

Antequam valores expressionum $(XX)_p$, $(YY)_p$, $(ZZ)_p$ pro reliquis ipsius $p$ valoribus indagemus, expressiones $Y_p$, $Z_p$ in formam ipsi $X_p$ simillimam transformemus. Quem in finem evolvemus valores expressionum

$$\chi(u+K), \; \chi(u+K+iK').$$

Designemus per $G(u)$ functionem

$$G(u) = \frac{\chi'(u)}{\chi(u)} = \frac{d \log \chi(u)}{du},$$



sive, cum sit

$$\chi(u) = e^{ruu} \Omega(u) \qquad \frac{d \log \Omega(u)}{du} = E(u),$$

functionem

$$G(u) = 2ru + E(u).$$

Quia $\chi(u+4Q) = \chi(u)$, erit etiam,

$$G(u+4Q) = G(u),$$

ita ut functio $G(u)$ et ipsa periodica sit. Porro e theoremate de additione integralium ellipticorum, quae ad secundam speciem pertinent, sequitur:

$$G(u) + G(a) - G(u+a) = k^2 \sin \operatorname{am} a \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(u+a), \tag{10.}$$

unde, posito deinceps $a = K$, $a = K + iK'$,

$$G(u+K) - G(K) - G(u) = -\frac{k^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{d \log \Delta \operatorname{am} u}{du}$$

$$G(u+K+iK') - G(K+iK') - G(u) = -\frac{\sin \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u} = \frac{d \log \cos \operatorname{am} u}{du},$$

e quibus formulis facta integratione prodit:

$$\log \frac{\chi(u+K)}{\chi(u)\chi(K)} - G(K).u = \log \Delta \operatorname{am} u$$

$$\log \frac{\chi(u+K+iK')}{\chi(u)\chi(K+iK')} - G(K+iK').u = \log \cos \operatorname{am} u$$

sive

$$\frac{\chi(u+K)}{\chi(u)\chi(K)} = e^{G(K).u} \Delta \operatorname{am} u$$

$$\frac{\chi(u+K+iK')}{\chi(u)\chi(K+iK')} = e^{G(K+iK').u} \cos \operatorname{am} u.$$

Hinc sequitur, loco $u$ posito $a$ et $u+a$ et divisione facta:

$$\frac{\chi(u+a+K)}{\chi(a+K)\chi(u)} = e^{G(K).u} \frac{\chi(u+a)}{\chi(a)\chi(u)} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am}(u+a)}{\Delta \operatorname{am} a}$$

$$\frac{\chi(u+a+K+iK')}{\chi(a+K+iK')\chi(u)} = e^{G(K+iK').u} \frac{\chi(u+a)}{\chi(a)\chi(u)} \cdot \frac{\cos \operatorname{am}(u+a)}{\cos \operatorname{am} a},$$

unde etiam, mutato $a$ respective in $a+K$, $a+K+iK'$, cum sit

$$\Delta \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am}(u+K) = k'$$

$$\cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am}(u+K+iK') = \frac{-ik'}{k}$$

$$\cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am}(u+K+iK') = ik' \sin \operatorname{am} u,$$

quae formulae ex elementis constant (cf. *Fund.* § 17, 19), obtinetur:

$$(11.)\qquad \frac{\chi(u+a+2K)}{\chi(a+2K)\chi(u)} = e^{2G(K).u}\,\frac{\chi(u+a)}{\chi(a)\chi(u)}$$

$$(12.)\qquad \frac{\chi(u+a+2K+2iK')}{\chi(a+2K+2iK')\chi(u)} = e^{2G(K+iK').u}\,\frac{\chi(u+a)}{\chi(a)\chi(u)}$$

$$(13.)\qquad \frac{\chi(u+a+2K+iK')}{\chi(a+2K+iK')\chi(u)} = e^{[G(K)+G(K+iK')]u}\,\frac{\chi(u+a)}{\chi(a)\chi(u)}\cdot\frac{\sin\operatorname{am}(u+a)}{\sin\operatorname{am} a}.$$

Hinc, cum, posito brevitatis causa $4p\omega = a$, sit

$$X_p = \frac{\chi(u+a)}{\chi(a)\chi(u)}\cdot\sin\operatorname{am}(u+a)$$

$$Y_p = \frac{\chi(u+a)}{\chi(a)\chi(u)}\cdot\frac{\cos\operatorname{am}(u+a)}{\Delta\operatorname{am} a}$$

$$Z_p = \frac{\chi(u+a)}{\chi(a)\chi(u)}\cdot\frac{\Delta\operatorname{am}(u+a)}{\cos\operatorname{am} a},$$

fit etiam, posito

$$e^{-G(k).u} = \vartheta \qquad e^{-G(K+iK').u} = \vartheta'$$

$$a+K = a' \qquad a+K+iK' = a'':$$

$$(14.)\qquad X_p = \frac{\chi(u+a)}{\chi(a)\chi(u)}\cdot\sin\operatorname{am}(u+a)$$

$$(15.)\qquad Y_p = \vartheta\cdot\frac{\chi(u+a')}{\chi(a')\chi(u)}\cdot\sin\operatorname{am}(u+a')$$

$$(16.)\qquad Z_p = k\vartheta'\cdot\frac{\chi(u+a'')}{\chi(a'')\chi(u)}\cdot\sin\operatorname{am}(u+a''),$$

unde, siquidem factores $\vartheta$, $k\vartheta'$ omnibus $Y_p$, $Z_p$ communes non respicimus, $Y_p$ et $Z_p$ ex $X_p$ obtinemus mutando respective $a$ in $a'$, $a''$.

5.

His praeparatis, siquidem ponitur

$$4h\omega = a \qquad 4(p-h)\omega = b$$

$$a+K = a' \qquad b+K = b'$$

$$a+K+iK' = a'' \qquad b+K+iK' = b'',$$

fit:

$$X_h X_{p-h} = \frac{\chi(u+a)}{\chi(a)\chi(u)}\cdot\frac{\chi(u+b)}{\chi(b)\chi(u)}\cdot\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)$$

$$Y_h Y_{p-h} = \vartheta\vartheta\cdot\frac{\chi(u+a')}{\chi(a')\chi(u)}\cdot\frac{\chi(u+b')}{\chi(b')\chi(u)}\cdot\sin\operatorname{am}(u+a')\sin\operatorname{am}(u+b')$$

$$Z_h Z_{p-h} = k^2\vartheta'\vartheta'\cdot\frac{\chi(u+a'')}{\chi(a'')\chi(u)}\cdot\frac{\chi(u+b'')}{\chi(b'')\chi(u)}\cdot\sin\operatorname{am}(u+a'')\sin\operatorname{am}(u+b'').$$



Iam e formula (2.) obtinetur:

$$\frac{\chi(u+a)}{\chi(a)\chi(u)}\cdot\frac{\chi(u+b)}{\chi(b)\chi(u)} = (1+k^2\sin\operatorname{am} a\sin\operatorname{am} b\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{am}(u+a+b))\,\frac{\chi(u+a+b)}{\chi(a+b)\chi(u)};$$

porro e formula (3.):

$$\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)(1+k^2\sin\operatorname{am} a\sin\operatorname{am} b\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{am}(u+a+b))$$
$$= \sin\operatorname{am} a\sin\operatorname{am} b+\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{am}(u+a+b),$$

unde

$$X_h X_{p-h} = \frac{\chi(u+a+b)}{\chi(a+b)\chi(u)}\cdot(\sin\operatorname{am} a\sin\operatorname{am} b+\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{am}(u+a+b)).$$

Hinc etiam, mutato $a$ in $a'$, $a''$, $b$ in $b'$, $b''$ fit:

$$Y_h Y_{p-h} = \vartheta\vartheta\cdot\frac{\chi(u+a'+b')}{\chi(a'+b')\chi(u)}\cdot(\sin\operatorname{am} a'\sin\operatorname{am} b'+\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{am}(u+a'+b'))$$

$$Z_h Z_{p-h} = k^2\vartheta'\vartheta'\cdot\frac{\chi(u+a''+b'')}{\chi(a''+b'')\chi(u)}\cdot(\sin\operatorname{am} a''\sin\operatorname{am} b''+\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{am}(u+a''+b'')).$$

Fit autem e (11.), (12.):

$$\vartheta\vartheta\cdot\frac{\chi(u+a'+b')}{\chi(a'+b')\chi(u)} = \frac{\chi(u+a+b)}{\chi(a+b)\chi(u)}$$

$$\vartheta'\vartheta'\cdot\frac{\chi(u+a''+b'')}{\chi(a''+b'')\chi(u)} = \frac{\chi(u+a+b)}{\chi(a+b)\chi(u)};$$

porro

$$\sin\operatorname{am}(u+a'+b') = -\sin\operatorname{am}(u+a+b)$$
$$\sin\operatorname{am}(u+a''+b'') = -\sin\operatorname{am}(u+a+b),$$

unde, cum sit $a+b = 4p\omega$, posito $0, 1, 2, \ldots n-1$ loco $h$, prodit summatione facta:

$$(XX)_p = \sum X_h X_{p-h} = \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}[n\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)+\sum\sin\operatorname{am} a\sin\operatorname{am} b]$$

$$(YY)_p = \sum Y_h Y_{p-h} = \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}[-n\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)+\sum\sin\operatorname{am} a'\sin\operatorname{am} b']$$

$$(ZZ)_p = \sum Z_h Z_{p-h} = k^2\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}[-n\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)+\sum\sin\operatorname{am} a''\sin\operatorname{am} b''].$$

Problema igitur revocatum est ad investigationem summarum

$$\sum\sin\operatorname{am} a\sin\operatorname{am} b, \qquad \sum\sin\operatorname{am} a'\sin\operatorname{am} b', \qquad \sum\sin\operatorname{am} a''\sin\operatorname{am} b''.$$

Quem in finem adnotamus formulam (10.):

$$\sin\operatorname{am} a\sin\operatorname{am} b = \frac{G(a)+G(b)-G(a+b)}{k^2\sin\operatorname{am}(a+b)},$$

unde fit:

$$\sum \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b = \frac{\sum G(a) + \sum G(b) - nG(4p\omega)}{k^2 \sin\operatorname{am} 4p\omega}$$

$$\sum \sin\operatorname{am} a' \sin\operatorname{am} b' = -\frac{\sum G(a') + \sum G(b') - nG(4p\omega + 2K)}{k^2 \sin\operatorname{am} 4p\omega}$$

$$\sum \sin\operatorname{am} a'' \sin\operatorname{am} b'' = -\frac{\sum G(a'') + \sum G(b'') - nG(4p\omega + 2K + 2iK')}{k^2 \sin\operatorname{am} 4p\omega}.$$

Est autem

$$\sum G(a) = G(4\omega) + G(8\omega) + \cdots + G(4(n-1)\omega),$$

et cum sit

$$G(4(n-1)\omega) = -G(4\omega), \quad G(4(n-2)\omega) = -G(8\omega), \ldots$$

fit:

$$\sum G(a) = 0;$$

porro est e (10.):

$$G(a') = G(a) + G(K) - k^2 \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{coam} a$$

$$G(a'') = G(a) + G(K + iK') - \frac{\sin\operatorname{am} a}{\sin\operatorname{coam} a},$$

unde

$$\sum G(a') = \sum G(a) + nG(K) - k^2 \sum \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{coam} a$$

$$\sum G(a'') = \sum G(a) + nG(K + iK') - \sum \frac{\sin\operatorname{am} a}{\sin\operatorname{coam} a},$$

et cum summae $\sum \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{coam} a$, $\sum \frac{\sin\operatorname{am} a}{\sin\operatorname{coam} a}$ destruentibus se invicem binis terminis evanescant, fit:

$$\sum G(a') = nG(K)$$

$$\sum G(a'') = nG(K + iK').$$

Eodem modo invenitur:

$$\sum G(b) = 0$$

$$\sum G(b') = nG(K)$$

$$\sum G(b'') = nG(K + iK').$$

Cum insuper sit:

$$G(4p\omega + 2K) = G(4p\omega) + 2G(K)$$

$$G(4p\omega + 2K + 2iK') = G(4p\omega) + 2G(K + iK'),$$



fit:

$$\sum \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b = -\frac{nG(4p\omega)}{k^2 \sin\operatorname{am} 4p\omega}$$

$$\sum \sin\operatorname{am} a' \sin\operatorname{am} b' = \sum \sin\operatorname{am} a'' \sin\operatorname{am} b'' = \frac{nG(4p\omega)}{k^2 \sin\operatorname{am} 4p\omega},$$

unde tandem

$$(XX)_p = -(YY)_p = -\frac{1}{k^2}(ZZ)_p$$

$$= n\left[\sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u + 4p\omega) - \frac{G(4p\omega)}{k^2 \sin\operatorname{am} 4p\omega}\right] \frac{\chi(u + 4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}.$$

Quam formulam, cum sit:

$$G(4p\omega) + G(u) - G(u + 4p\omega) = k^2 \sin\operatorname{am} 4p\omega \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u + 4p\omega),$$

ita elegantius exhibere licet:

$$(17.) \quad (XX)_p = -(YY)_p = -\frac{1}{k^2}(ZZ)_p = n \cdot \frac{G(u) - G(u + 4p\omega)}{k^2 \sin\operatorname{am} 4p\omega} \cdot \frac{\chi(u + 4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}.$$

Supponimus autem in hac formula, $p$ non esse $= 0$, pro quo casu invenimus formulas (7.), (8.), (9.).

## 6.

His praeparatis, e formulis (4.), (5.), (6.) sequitur:

$$(18.) \qquad XX + YY = n - 2\rho - 2\sigma$$

$$(19.) \qquad k^2 XX + ZZ = n - 2k^2\rho + 2\tau.$$

Fit enim e formulis (7.), (8.), (9.)

$$(XX)_0 + (YY)_0 = n - 2\rho - 2\sigma$$

$$k^2(XX)_0 + (ZZ)_0 = n - 2k^2\rho + 2\tau;$$

porro e (17.)

$$(XX)_1 + (YY)_1 = 0, \quad (XX)_2 + (YY)_2 = 0, \ldots$$

$$k^2(XX)_1 + (ZZ)_1 = 0, \quad k^2(XX)_2 + (ZZ)_2 = 0, \ldots$$

E formulis (18.), (19.) sequitur, posito

$$X = \sqrt{n - 2\rho - 2\sigma} \,.\, \sin\psi,$$

$$k^2 \cdot \frac{n - 2\rho - 2\sigma}{n - 2k^2\rho + 2\tau} = \lambda\lambda,$$

fieri:

$$Y = \sqrt{n - 2\rho - 2\sigma} \,.\, \cos\psi$$

$$Z = \sqrt{n - 2k^2\rho + 2\tau} \,.\, \sqrt{1 - \lambda\lambda \sin^2\psi}.$$

Ponatur

$$n-2k^2\rho+2\sigma = \frac{1}{MM};$$

fieri videmus:

$$n-2\rho-2\sigma = \frac{\lambda^2}{k^2M^2},$$

unde

$$X = \frac{\lambda}{kM}\sin\psi, \quad Y = \frac{\lambda}{kM}\cos\psi, \quad Z = \frac{1}{M}\Delta(\psi,\lambda).$$

7.

Expressiones

$$Y = Y_0+Y_1+Y_2+\cdots+Y_{n-1}$$
$$Z = Z_0+Z_1+Z_2+\cdots+Z_{n-1}$$

in se ducamus. Sit

$$(YZ)_p = \sum Y_h Z_{p-h}$$

designante $h$ numeros $0, 1, 2, \ldots n-1$; erit

$$YZ = (YZ)_0+(YZ)_1+(YZ)_2+\cdots+(YZ)_{n-1}.$$

Posito rursus

$$4h\omega = a \qquad 4(p-h)\omega = b$$
$$a+K = a' \qquad b+K+iK' = b'',$$

e formulis (15.), (16.) sequitur:

$$Y_h Z_{p-h} = k\vartheta\vartheta'\cdot\frac{\chi(u+a')}{\chi(a')\chi(u)}\cdot\frac{\chi(u+b'')}{\chi(b'')\chi(u)}\cdot\sin\operatorname{am}(u+a')\sin\operatorname{am}(u+b'').$$

Quam expressionem e (2.), (3.), ut supra, invenimus

$$= k\vartheta\vartheta'\cdot\frac{\chi(u+a'+b'')}{\chi(a'+b'')\chi(u)}[\sin\operatorname{am}a'\sin\operatorname{am}b''+\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+a'+b'')].$$

Fit autem e formula (13.):

$$\vartheta\vartheta'\cdot\frac{\chi(u+a'+b'')}{\chi(a'+b'')\chi(u)} = \frac{\chi(u+a+b)}{\chi(a+b)\chi(u)}\cdot\frac{\sin\operatorname{am}(u+a+b)}{\sin\operatorname{am}(a+b)};$$

porro

$$\sin\operatorname{am}(u+a'+b'') = \sin\operatorname{am}(u+a+b+2K+iK') = -\frac{1}{k\sin\operatorname{am}(u+a+b)},$$

unde, cum sit $a+b=4p\omega$:

$$Y_h Z_{p-h} = \left[-\frac{\sin\operatorname{am}u}{\sin\operatorname{am}4p\omega}+\frac{k\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)}{\sin\operatorname{am}4p\omega}\cdot\sin\operatorname{am}a'\sin\operatorname{am}b''\right]\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}$$



ideoque, posito $0, 1, 2, \ldots n-1$ loco $h$ et summatione facta,

$$(YZ)_p = \sum Y_h Z_{p-h} = \left[-\frac{n\sin\operatorname{am}u}{\sin\operatorname{am}4p\omega}+\frac{k\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)}{\sin\operatorname{am}4p\omega}\sum\sin\operatorname{am}a'\sin\operatorname{am}b''\right]\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)},$$

ita ut negotium ad inveniendam summam

$$\sum\sin\operatorname{am}a'\sin\operatorname{am}b''$$

reductum sit. Quem in finem adnoto rursus formulam

$$\sin\operatorname{am}a'\sin\operatorname{am}b'' = \frac{G(a')+G(b'')-G(a'+b'')}{k^2\sin\operatorname{am}(a'+b'')},$$

unde, cum sit:

$$\sin\operatorname{am}(a'+b'') = -\frac{1}{k\sin\operatorname{am}4p\omega}$$
$$\sum G(a') = nG(K)$$
$$\sum G(b'') = nG(K+iK')$$
$$G(a'+b'') = G(4p\omega+2K+iK') = G(4p\omega)+G(K)+G(K+iK')+\cot\operatorname{am}4p\omega\,\Delta\operatorname{am}4p\omega,$$

prodit:

$$\sum\sin\operatorname{am}a'\sin\operatorname{am}b'' = \frac{n\sin\operatorname{am}4p\omega}{k}[\cot\operatorname{am}4p\omega\,\Delta\operatorname{am}4p\omega+G(4p\omega)].$$

Quibus collectis tandem obtinemus:

$$(20.)\quad (YZ)_p = n\left[\frac{\cos\operatorname{am}4p\omega\,\Delta\operatorname{am}4p\omega\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)-\sin\operatorname{am}u}{\sin\operatorname{am}4p\omega}+\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)G(4p\omega)\right]\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}.$$

In hac formula supponimus, $p$ non esse $=0$, qui casus attentionem peculiarem poscit.

Ut eruatur valor ipsius

$$(YZ)_0 = Y_0Z_0+Y_1Z_{-1}+Y_{-1}Z_1+Y_2Z_{-2}+Y_{-2}Z_2+\cdots+Y_{\frac{n-1}{2}}Z_{-\frac{n-1}{2}}+Y_{-\frac{n-1}{2}}Z_{\frac{n-1}{2}},$$

advocata formula

$$\frac{\cos\operatorname{am}(u+a)\Delta\operatorname{am}(u-a)}{\cos\operatorname{am}a\,\Delta\operatorname{am}a} = \frac{\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u-k'k'\dfrac{\operatorname{tg}\operatorname{am}a}{\Delta\operatorname{am}a}\cdot\sin\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u},$$

e (1.) colligimus:

$$Y_hZ_{-h} = \cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u-k'k'\frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}4h\omega}{\Delta\operatorname{am}4h\omega}\cdot\sin\operatorname{am}u,$$

$$Y_{-h}Z_h = \cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u+k'k'\frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}4h\omega}{\Delta\operatorname{am}4h\omega}\cdot\sin\operatorname{am}u,$$

unde:

$$(YZ)_0 = n \cos\operatorname{am} u \, \Delta\operatorname{am} u.$$

Expressionem (20.) ulterius transformare licet ope formularum

$$\begin{aligned}\sin\operatorname{am} u &= \sin\operatorname{am}(u+4p\omega-4p\omega)\\ &= \frac{\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)\cos\operatorname{am}4p\omega\,\Delta\operatorname{am}4p\omega-\sin\operatorname{am}4p\omega\cos\operatorname{am}(u+4p\omega)\,\Delta\operatorname{am}(u+4p\omega)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}4p\omega\sin^2\operatorname{am}(u+4p\omega)}\end{aligned}$$

$$k^2\sin\operatorname{am}4p\omega\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+4p\omega) = G(4p\omega)+G(u)-G(u+4p\omega),$$

quibus adhibitis fit:

$$\begin{aligned}&\frac{\cos\operatorname{am}4p\omega\,\Delta\operatorname{am}4p\omega\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)-\sin\operatorname{am}u}{\sin\operatorname{am}4p\omega}\\ &= \cos\operatorname{am}(u+4p\omega)\,\Delta\operatorname{am}(u+4p\omega)-k^2\sin\operatorname{am}4p\omega\sin\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}(u+4p\omega)\\ &= \cos\operatorname{am}(u+4p\omega)\,\Delta\operatorname{am}(u+4p\omega)+[G(u+4p\omega)-G(u)-G(4p\omega)]\sin\operatorname{am}(u+4p\omega),\end{aligned}$$

unde

$$(YZ)_p = n[\cos\operatorname{am}(u+4p\omega)\,\Delta\operatorname{am}(u+4p\omega)+\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)(G(u+4p\omega)-G(u))]\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)},$$

quae formula etiam pro $p=0$ valet.

Adnotamus jam, esse:

$$\begin{aligned}\frac{d\dfrac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}}{du} &= \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}\left[\frac{d\log\chi(u+4p\omega)}{du}-\frac{d\log\chi(u)}{du}\right]\\ &= \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}[G(u+4p\omega)-G(u)],\end{aligned}$$

unde, cum porro sit

$$\frac{d\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)}{du} = \cos\operatorname{am}(u+4p\omega)\,\Delta\operatorname{am}(u+4p\omega),$$

eruimus:

$$(YZ)_p = n\frac{d\sin\operatorname{am}(u+4p\omega)\dfrac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}}{du} = n\frac{dX_p}{du}.$$

Hinc fit

$$\sum(YZ)_p = n\sum\frac{dX_p}{du}$$

sive

$$YZ = n\frac{dX}{du}. \tag{21.}$$



8.

Jam vero invenimus, posito

$$X = \frac{\lambda}{kM}\sin\psi,$$

fieri

$$Y = \frac{\lambda}{kM}\cos\psi, \qquad Z = \frac{1}{M}\Delta(\psi,\lambda),$$

unde aequatio (21.) in hanc abit:

$$\frac{\cos\psi\,\Delta(\psi,\lambda)}{M} = n\frac{d\sin\psi}{du}$$

sive

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{\Delta(\psi,\lambda)}{nM}, \qquad \frac{du}{nM} = \frac{d\psi}{\sqrt{1-\lambda\lambda\sin^2\psi}}.$$

Hinc, cum simul $\psi$ et $u$ evanescant, e notatione a Cl. Legendre adhibita erit

$$\frac{u}{nM} = F(\psi,\lambda)$$

sive e nostra

$$\psi = \operatorname{am}\left(\frac{u}{nM},\lambda\right),$$

unde

$$\begin{aligned}X &= \frac{\lambda}{kM}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{nM},\lambda\right)\\ Y &= \frac{\lambda}{kM}\cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{nM},\lambda\right)\\ Z &= \frac{1}{M}\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{nM},\lambda\right).\end{aligned}$$

Hinc fluunt

*Formulae fundamentales:*

$$\frac{\lambda}{kM}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{nM}\,\lambda\right) = \sin\operatorname{am}u+\sum\sin\operatorname{am}(u+4\nu\omega)\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)} \tag{22.}$$

$$\frac{\lambda}{kM}\cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{nM},\lambda\right) = \cos\operatorname{am}u+\sum\frac{\cos\operatorname{am}(u+4\nu\omega)}{\Delta\operatorname{am}4\nu\omega}\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)} \tag{23.}$$

$$\frac{1}{M}\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{nM},\lambda\right) = \Delta\operatorname{am}u+\sum\frac{\Delta\operatorname{am}(u+4\nu\omega)}{\cos\operatorname{am}4\nu\omega}\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)}, \tag{24.}$$

siquidem numero $\nu$ tribuuntur valores $\pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{n-1}{2}$. Quibus formulis addi debet, quae e (7.), (17.) fluit, sequens:

$$(25.)\quad \frac{\lambda^2}{k^2M^2}\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{nM},\lambda\right) = n\sin^2\mathrm{am}\,u - 2\rho + n\sum\frac{G(u)-G(u+4\nu\omega)}{k^2\sin\mathrm{am}\,4\nu\omega}\cdot\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)}$$

$$= n\sin^2\mathrm{am}\,u - 2\rho + n\sum\left[\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}(u+4\nu\omega) - \frac{G(4\nu\omega)}{k^2\sin\mathrm{am}\,4\nu\omega}\right]\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)}.$$

Adnotare convenit, modulum $\lambda$ et multiplicatorem $M$ pertinere ad transformationem $n^{ti}$ ordinis elemento $\omega$ respondentem. Fit enim e (23.), (24.), si $u$ ponitur $= 0$:

$$\frac{\lambda}{kM} = 1 + \sin\mathrm{coam}\,4\omega + \sin\mathrm{coam}\,8\omega + \cdots + \sin\mathrm{coam}\,4(n-1)\omega$$

$$\frac{1}{M} = 1 + \frac{1}{\sin\mathrm{coam}\,4\omega} + \frac{1}{\sin\mathrm{coam}\,8\omega} + \cdots + \frac{1}{\sin\mathrm{coam}\,4(n-1)\omega};$$

eaedem autem aequationes prodeunt e formula (*Fund.* §. 23 (16.)):

$$\frac{\lambda}{kM}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sin\mathrm{am}\,u + \sin\mathrm{am}(u+4\omega) + \cdots + \sin\mathrm{am}(u+4(n-1)\omega),$$

si ponitur respective $u = K$, $u = K + iK'$.

Formulae (22.) — (25.), cum sit

$$\chi(u+4Q) = \chi(u+4n\omega) = \chi(u)$$
$$G(u+4Q) = G(u+4n\omega) = G(u),$$

immutatae manent mutato $u$ in $u + 4Q$ sive in $u + 4pQ$, designante $p$ numerum quemcunque integrum positivum seu negativum. Si vero supponimus numeros $m$, $m'$ absque factore communi, quod salva generalitate fieri potest, determinari possunt numeri integri positivi seu negativi $\mu$, $\mu'$ ejusmodi, ut sit

$$m\mu' - \mu m' = 1;$$

quo facto, si ponitur

$$\mu K + \mu' iK' = Q' = 4n\omega',$$

erit $4Q'$ periodus ipsi $4Q$ conjugata et secundum aequationem (32.) *commentationis primae*

$$\frac{\chi(u+4p\omega+4p'Q')}{\chi(u+4p'Q')} = e^{-\frac{8pp'i\pi}{n}}\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)}.$$

Unde, mutato $u$ in $u + 4pQ'$, e formulis (22.) — (25.) fit:



$$(26.)\quad \frac{\lambda}{kM}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right) = \sin\mathrm{am}\,u + \sum e^{-\frac{8\nu p\pi i}{n}}\sin\mathrm{am}(u+4\nu\omega)\cdot\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)}$$

$$(27.)\quad \frac{\lambda}{kM}\cos\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right) = \cos\mathrm{am}\,u + \sum e^{-\frac{8\nu p\pi i}{n}}\frac{\cos\mathrm{am}(u+4\nu\omega)}{\Delta\mathrm{am}\,4\nu\omega}\cdot\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)}$$

$$(28.)\quad \frac{1}{M}\,\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right) = \Delta\mathrm{am}\,u + \sum e^{-\frac{8\nu p\pi i}{n}}\frac{\Delta\mathrm{am}(u+4\nu\omega)}{\cos\mathrm{am}\,4\nu\omega}\cdot\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)}$$

$$(29.)\quad \frac{\lambda^2}{k^2M^2}\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right) = n\sin^2\mathrm{am}\,u - 2\rho + n\sum e^{-\frac{8\nu p\pi i}{n}}\frac{G(u)-G(u+4\nu\omega)}{k^2\sin\mathrm{am}\,4\nu\omega}\cdot\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)}.$$

Ubi in his formulis loco $p$ ponimus valores $0, 1, 2, \ldots n-1$, quatuor systemata aequationum obtinemus, e quibus facile eruuntur formulae:

$$(30.)\quad \sin\mathrm{am}\,u = \frac{\lambda}{nkM}\sum\sin\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right)$$

$$(31.)\quad \cos\mathrm{am}\,u = \frac{\lambda}{nkM}\sum\cos\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right)$$

$$(32.)\quad \Delta\mathrm{am}\,u = \frac{1}{nM}\sum\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right)$$

$$(33.)\quad \sin^2\mathrm{am}\,u - \frac{2\rho}{n} = \frac{\lambda^2}{n^2k^2M^2}\sum\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right).$$

vel generaliores hae:

$$(34.)\quad \sin\mathrm{am}(u+4\nu\omega)\cdot\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)} = \frac{\lambda}{nkM}\sum e^{\frac{8\nu p\pi i}{n}}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right)$$

$$(35.)\quad \frac{\cos\mathrm{am}(u+4\nu\omega)}{\Delta\mathrm{am}\,4\nu\omega}\cdot\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)} = \frac{\lambda}{nkM}\sum e^{\frac{8\nu p\pi i}{n}}\cos\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right)$$

$$(36.)\quad \frac{\Delta\mathrm{am}(u+4\nu\omega)}{\cos\mathrm{am}\,4\nu\omega}\cdot\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)} = \frac{1}{nM}\sum e^{\frac{8\nu p\pi i}{n}}\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right)$$

$$(37.)\quad \frac{G(u)-G(u+4\nu\omega)}{k^2\sin\mathrm{am}\,4\nu\omega}\cdot\frac{\chi(u+4\nu\omega)}{\chi(4\nu\omega)\chi(u)} = \frac{\lambda^2}{n^2k^2M^2}\sum e^{\frac{8\nu p\pi i}{n}}\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+4pQ'}{nM},\lambda\right).$$

9.

Posito

$$r' = \frac{\mu'\pi i}{4KQ'} - \frac{E}{2K}$$

$$\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = e^{(mr'-\tau)uu}\,\Omega\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$

$$G\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \frac{\chi'\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right)},$$

fit:

$$\chi\left(\frac{u+4Q'}{M},\lambda\right)=\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right),\quad G\left(\frac{u+4Q'}{M},\lambda\right)=G\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$

et e formulis (22.)—(25.), mutato $k$ in $\lambda$, $\lambda$ in $k$, $M$ in $\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{nM}$, $u$ in $\frac{u}{M}$, $\omega$ in $\frac{\omega'}{M}$, $\rho$ in

$$\rho'=\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2\omega'}{M},\lambda\right)+\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4\omega'}{M},\lambda\right)+\cdots+\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{(n-1)\omega'}{M},\lambda\right),$$

sequentes obtinentur:

$$\frac{nkM}{\lambda}\sin\mathrm{am}\,u=\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\sum\sin\mathrm{am}\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)\cdot\frac{\chi\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right)} \tag{38.}$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}nkM}{\lambda}\cos\mathrm{am}\,u=\cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\sum\frac{\cos\mathrm{am}\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\Delta\mathrm{am}\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}\cdot\frac{\chi\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right)} \tag{39.}$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}nM\,\Delta\mathrm{am}\,u=\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\sum\frac{\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\cos\mathrm{am}\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}\cdot\frac{\chi\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right)} \tag{40.}$$

$$\begin{aligned}\frac{n^2k^2M^2}{\lambda^2}\sin^2\mathrm{am}\,u&=n\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)-2\rho'\\&+n\sum\frac{G\left(\frac{u}{M},\lambda\right)-G\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\lambda^2\sin\mathrm{am}\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}\cdot\frac{\chi\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}.\end{aligned} \tag{41.}$$

E quibus, cum sit

$$\frac{\chi\left(\frac{u+4\nu\omega'+4p\omega}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{u+4p\omega}{M},\lambda\right)}=e^{\frac{8\nu p\pi i}{n}}\frac{\chi\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right)},$$

mutato $u$ in $u+4p\omega$, fluunt formulae generaliores hae:



$$\frac{nkM}{\lambda}\sin\mathrm{am}(u+4p\omega)=\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\sum e^{\frac{8\nu p\pi i}{n}}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)\cdot\frac{\chi\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right)} \tag{42.}$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}nkM}{\lambda}\cos\mathrm{am}(u+4p\omega)=\cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\sum e^{\frac{8\nu p\pi i}{n}}\frac{\cos\mathrm{am}\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\Delta\mathrm{am}\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}\cdot\frac{\chi\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right)} \tag{43.}$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}nM\,\Delta\mathrm{am}(u+4p\omega)=\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\sum e^{\frac{8\nu p\pi i}{n}}\frac{\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\cos\mathrm{am}\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}\cdot\frac{\chi\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right)} \tag{44.}$$

$$\begin{aligned}\frac{n^2k^2M^2}{\lambda^2}\sin^2\mathrm{am}(u+4p\omega)&=n\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)-2\rho'\\&+n\sum e^{\frac{8\nu p\pi i}{n}}\cdot\frac{G\left(\frac{u}{M},\lambda\right)-G\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\lambda^2\sin\mathrm{am}\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}\cdot\frac{\chi\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{4\nu\omega'}{M},\lambda\right)\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}.\end{aligned} \tag{45.}$$

## 10.

Posito

$$x=\sin\mathrm{am}\,u,\ \text{et}$$

$$y=\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\frac{\frac{x}{M}\left(1-\frac{xx}{\sin^2\mathrm{am}\,2\omega}\right)\left(1-\frac{xx}{\sin^2\mathrm{am}\,4\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{xx}{\sin^2\mathrm{am}(n-1)\omega}\right)}{(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,2\omega\,.\,xx)(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4\omega\,.\,xx)\dots(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(n-1)\omega\,.\,xx)} \tag{46.}$$

$$z=\sin\mathrm{am}\,nu=\frac{nMy\left(1-\frac{yy}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2\omega'}{M},\lambda\right)}\right)\left(1-\frac{yy}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4\omega'}{M},\lambda\right)}\right)\cdots\left(1-\frac{yy}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{(n-1)\omega'}{M},\lambda\right)}\right)}{\left(1-\lambda^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2\omega'}{M},\lambda\right)\cdot yy\right)\left(1-\lambda^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4\omega'}{M},\lambda\right)\cdot yy\right)\cdots\left(1-\lambda^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{(n-1)\omega'}{M},\lambda\right)\cdot yy\right)} \tag{47.}$$

$$\Phi(u)=(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,2\omega\,.\,xx)(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4\omega\,.\,xx)\dots(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(n-1)\omega\,.\,xx)$$

$$\Psi(u)=\left(1-\lambda^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2\omega'}{M},\lambda\right).yy\right)\left(1-\lambda^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4\omega'}{M},\lambda\right).yy\right)\cdots\left(1-\lambda^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{(n-1)\omega'}{M},\lambda\right).yy\right),$$

secundum formulam (17.) *commentationis primae* fit:

$$\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)}=\sqrt[n]{\frac{\Phi(4p\omega)\Phi(u)}{\Phi(u+4p\omega)}},\qquad\frac{\chi\left(\frac{u+4p\omega'}{M},\lambda\right)}{\chi\left(\frac{4p\omega'}{M},\lambda\right)\chi\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}=\sqrt[n]{\frac{\Psi(4p\omega')\Psi(u)}{\Psi(u+4p\omega')}}.$$

Quae expressiones si in aequationibus (26.), (42.) substituuntur et in formula (26.) insuper loco $u$ ponitur $nu$, prodit:

$$(48.)\quad \frac{nkM}{\lambda}\sin\mathrm{am}(u+4p\omega) = \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\sum e^{\frac{8\nu p\pi i}{n}}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u+4\nu\omega'}{M},\lambda\right)\cdot\sqrt[n]{\frac{\Psi(4\nu\omega')\Psi(u)}{\Psi(u+4\nu\omega')}}$$

$$(49.)\quad \frac{\lambda}{kM}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u+4p\omega'}{M},\lambda\right) = \sin\mathrm{am}\, nu + \sum e^{\frac{-8\nu p\pi i}{n}}\sin\mathrm{am}(nu+4\nu\omega)\cdot\sqrt[n]{\frac{\Phi(4\nu\omega)\Phi(nu)}{\Phi(nu+4\nu\omega)}}.$$

Quarum aequationum prima suppeditat expressionem generalem explicitam ipsius $x$ per $y$ sive resolutionem completam algebraicam aequationis $n^{ti}$ gradus (46.), altera autem expressionem generalem explicitam ipsius $y$ per $z$ sive resolutionem algebraicam aequationis (47.) Adnotandum est, aequationis (2.) ope omnia radicalia in unaquaque harum aequationum per dignitates unius exprimi posse*).

*) Cfr. form. (1.) art. IV. pag. 272 et form. (7.) pag. 431 huius voluminis.

# DE
# DIVISIONE INTEGRALIUM ELLIPTICORUM
## IN $n$ PARTES AEQUALES

AUCTORE

C. G. J. JACOBI

PROF. ORD. MATH. REGIOM.

# DE DIVISIONE INTEGRALIUM ELLIPTICORUM IN $n$ PARTES AEQUALES.

(Ex ill. C. G. J. Jacobi manuscriptis posthumis in medium protulit C. W. Borchardt.)

---

Divisionem integralium ellipticorum in $n$ partes aequales notum est a resolutione aequationis algebraicae ordinis $nn^{ti}$ pendere*), dum aequatio, a cujus resolutione divisio arcuum circularium in $n$ partes aequales pendet, tantum ad ordinem $n^{tum}$ ascendit. Facile e natura periodica functionum circularium expressionem analyticam radicum omnium hujus aequationis $n^{ti}$ ordinis petere licet; idem tamen quomodo in theoria divisionis integralium ellipticorum de radicibus aequationis illius $nn^{ti}$ ordinis praestari possit, diu analystas fugit. Secundum analogiam quidem functionum circularium, cum constaret, functiones ellipticas et ipsas periodicas esse, facile erat numerum $n$ radicum analytica expressione exhibere: quinam vero reliquis radicibus numero $nn-n$ sensus analyticus insit, ex iis, quae de theoria functionum ellipticarum explorata erant, nullo modo colligi poterat. Scilicet novo omnino principio indigebat haec theoria, ut radicum illarum vera et genuina natura indagetur, principio dico duplicis periodi, quo nomine in *Fundamentis* designavi proprietatem functionum ellipticarum fundamentalem, duabus eas gaudere periodis, videlicet praeter eam, de qua jam constabat, realem, altera adhuc imaginaria; e quarum deinde combinatione aliae nascuntur innumerae et ipsae imaginariae et inter se incommensurabiles.

---

*) Hoc theorema, ab Eulero observatum, neque ab illo neque a Cl. Legendre demonstratum, primus, ni fallor, Cl. Abel (*Diar. Crell. vol. II. Recherches sur les fonctions elliptiques*) per considerationes analyticas demonstravit. Aliam postea addidit demonstrationem (*ib. vol.* IV *p.* 258) e commodo algorithmo algebraico petitam, quo expressiones $\sin am\, u$, $\sin am\, 2u$, $\sin am\, 3u$, $\sin am\, 4u \ldots$ alias ex aliis formari posse docuit, ita ut fractiones formandae statim sub forma simplicissima inveniantur, dum algorithmus, qui eum in finem adhiberi solebat, simulac $n > 5$, et numeratorem et denominatorem factoribus superfluis implicat.

Quod principium duplicis periodi, simulac inventum est, cum universae theoriae functionum ellipticarum novam faciem creabat, tum hanc quaestionem de natura analytica radicum illarum facile absolvit. Qua explorata, Cl. Abel ipsam adeo aequationum illarum $nn^{ti}$ ordinis resolutionem algebraicam aggressus est, problema antea desperatum et quod vires analysis superare videbatur. Demonstravit ille theorema memorabile, aequationes illas generaliter ad duas alias revocari posse, quae tantum $n^{ti}$ ordinis sunt. Cujus gravissimi theorematis exemplum primum paulo ante iam Cl. Legendre dederat in ***tractatu de functionibus ellipticis***, demonstrans aequationem noni gradus, a cujus resolutione trisectio functionum ellipticarum pendet, revocari posse ad aequationes duas tertii ordinis; quae cum algebraice resolubiles sint, et ipsam patet aequationem illam noni gradus algebraice resolvi posse *). At quoties de quintisectione agitur, etsi aequatio ordinis quinti et vicesimi, a cujus resolutione illa pendet, ad aequationes quinti ordinis revocetur, parum inde profici videri possit, cum solutionem illae in genere non admittant. Quod adeo, crescente numero $n$, augeri videtur incommodum. Jam vero Cl. Abel, dum methodos algebraicas Euleri et Lagrange ad aequationes illas $n^{ti}$ ordinis, ad quas aequatio proposita $nn^{ti}$ ordinis revocari potest, adhibebat, easdem quicunque sit numerus $n$, algebraice resolvi posse demonstravit, unde iam aequationes illas $nn^{ti}$ ordinis, quarum resolutione sectio in $n$ partes conficitur, algebraice resolubiles esse, invenitur. Quo egregio invento maxime ille de hac theoria meritus est vastumque altissimarum quaestionum campum aperuit.

Invento Cl^i^. Abel ipse postea commodam adieci simplificationem. Aequationem enim $nn^{ti}$ ordinis, quam ad aequationes duas ordinis $n^{ti}$ reduxit Cl. Abel, vidi absque ea reductione directe resolvi posse adeoque ea reductione formam radicum multo complicatiorem reddi qum fieri deberet. Methodo enim a Cl. Abel adhibita revocatur aequatio $nn^{ti}$ ordinis ad aliam ordinis $n^{ti}$, cuius coefficientes rursus ab aequatione $n^{ti}$ ordinis pendent; unde repraesentatio radicum eius fit per $n^{tas}$ radices expressionum, quae rursus ex aggregatis $n^{tarum}$ radicum constant. Docet autem consideratio directa, haec aggregata ipsas adeo esse $n^{tas}$

*) Tempore, quo idem ut inventum meum publicavi (*Schumacher Nova Astronomica No.* 123) Cl^i^. Legendre tractatus oras septentrionales nondum viderat; Cl^i^. Abel autem ea de re commentatio lucem nondum viderat.



dignitates expressionum similium, e quibus igitur haec postrema $n^{tae}$ radicis extractio omni generalitate succedit. Quare radices aequationis propositae ad maiorem simplicitatem et ad formam veram ac genuinam revocantur.

In solutionibus illis algebraicis quantitates quaedam constantes inveniuntur, quae a divisione integralis integri in $n$ partes pendent. Simili modo in theoria divisionis arcuum circularium indefinitorum divisionem peripheriae integrae ut notam supponere debes. Quae quantitates constantes rursus ab aequationibus algebraicis pendent, de quarum resolutione et ipsa gravissima quaestio moneri potest. De sectione peripheriae integrae circuli quaestionem nuper admodum Cl. Gauss aggressus est, quem multis in hac theoria inventis plane admirabilibus immortalem sibi gloriam comparasse scimus; qui adeo hanc quaestionem ad divisionem integralis elliptici integri pro casu speciali, quo modulus $\sin 45^0$, se extensurum pollicitus est. Et huius theoriae de constantibus illis algebraice determinandis sive de sectione integralis elliptici integri fundamenta iecit Cl. Abel.

Quoties de sectione functionis integrae agitur, e radicum numero binae aequales sunt vel signo tantum differunt, unde eo casu aequationis gradus ad semissem deprimitur. Hinc sequitur, quod notum est, quoties, quod licet, $n$ imparem statuamus, cum eo casu radicum una nota sit, sectionem peripheriae circuli in $n$ partes aequales tantum ab aequatione ordinis $\frac{n-1}{2}$, integralis elliptici tantum ab aequatione ordinis $\frac{nn-1}{2}$ pendere. Hanc aequationem ordinis $\frac{nn-1}{2}$ eo casu, ubi $n$ est numerus primus, docuit Cl. Abel reduci posse ad aequationem ordinis $\frac{n-1}{2}$, cuius coefficientes ab aequatione ordinis $(n+1)^{ti}$ pendent. Ipsam aequationem illam ordinis $\frac{n-1}{2}$, siquidem coefficientes eius ut notas supponis, per eandem methodum resolvi posse demonstravit, quam Cl. Gauss ad resolutionem aequationis $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{ti}$ ordinis adhibuit, a qua sectio peripheriae circuli pendet.

At aequationem $(n+1)^{ti}$ ordinis, a qua coefficientes eius pendent, generaliter resolvi non posse demonstravit Cl. Abel, ita ut problema totum de divisione algebraica functionis ellipticae in $n$ partes aequales ad aequationem $(n+1)^{ti}$ ordinis revocatum sit, quam in genere neque resolvere, neque ad gradum minorem deprimere ullo modo licet. Pro valoribus tamen specialibus moduli compluribus observavit idem, etiam hanc aequationem resolvi posse methodumque adeo, qua id fieri possit, pro modulo sin $45^{\circ}$ adstruxit (Cf. *Diar. Crellianum vol.* III.)

Grave quidem videri possit incommodum, quod pro modulo certe indefiniti valoris ad aequationem irresolubilem deferamus; accuratius autem inspicienti inde vel magnum commodum analysi algebraicae nasci posse elucebit. Inventum enim est genus aequationum algebraicarum, quarum radices nullo modo per extractionem radicum exhibere licet, quae tamen per divisionem integralium ellipticorum resolvi possunt. Quam divisionem omnibus casibus vel per tabulas a Cl. Legendre conditas, vel aliis methodis expeditis summa facilitate in numeris exsequi licet.

Eodem tempore, quo Cl. Abel haec et alia praeclare et eleganter invenit, ipse theoriam generalem transformationis functionum ellipticarum condidi, et a principio duplicis periodi, ad quod et ipse deveneram, et a principio novo profectus, quod in *Fundamentis principium transformationis* vocavi. Quod docet principium, innumeris modis per substitutiones rationales et a se independentes transformari posse modulum integralium ellipticorum.

---

# DE
# MULTIPLICATIONE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM PER QUANTITATEM IMAGINARIAM
## PRO CERTO QUODAM MODULORUM SYSTEMATE

AUCTORE

C. G. J. JACOBI
PROF. ORD. MATH. REGIOM.

# DE MULTIPLICATIONE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM PER QUANTITATEM IMAGINARIAM PRO CERTO QUODAM MODULORUM SYSTEMATE.

(Ex ill. C. G. J. Jacobi manuscriptis posthumis in medium protulit F. Mertens.)

---

### 1.

In sequentibus casum specialem transformationis functionum ellipticarum, qui prae ceteris insignibus gaudet proprietatibus, paullo accuratius examinemus, eum dico, quo per transformationem aliquam modulus in complementum abit. Facile constat eiusmodi modulos extare innumeros, qui singuli singulis transformationum ordinibus respondent. Ita e. g. invenit Cl. Legendre, per transformationem secundi ordinis modulum $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, per transformationem tertii ordinis modulum $k = \sin\frac{\pi}{12}$ transformari posse in complementum; quibus addere licet, posito $\cos\vartheta = \operatorname{tg}\vartheta$, modulum $k = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right)$ per transformationem quinti ordinis transformari posse in complementum. Atque omnes transformantur per transformationem, quam diximus secundam seu minoris moduli in maiorem, unde vice versa moduli $\frac{\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}}}{\cos\frac{\pi}{8}}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right)$ per transformationem primam seu maioris moduli in minorem in complementa abeunt. Porro suis exemplis invenit Cl. Legendre, fore resp. multiplicatorem $M = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$, nec non casu a nobis addito invenietur $M = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Iam generaliter probabimus, si modulus realis unitate minor $k$ per transformationem $n^{ti}$ ordinis realem transit in complementum, fore $M = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vidimus in *Fundamentis* § 29, aequationes modulares et ubi $k$ et $\lambda$ inter se commutentur, et ubi simul $k'$ loco $k$, $\lambda'$ loco $\lambda$ ponatur, immutatas manere;

unde idem valebit, ubi simul $k$ in $\lambda'$, $\lambda$ in $k'$ mutatur, sive posito $q = 1-2kk$, $l = 1-2\lambda\lambda$, ubi simul $q$ in $-l$, $l$ in $-q$ mutatur. Sit aequatio inter $q$ et $l$

$$F(q, l) = 0:$$

ponamus, simulatque $q$ in $q+\Delta q$, abire $l$ in $l+\Delta l$, ita ut etiam

$$F(q+\Delta q,\ l+\Delta l) = 0.$$

Iam cum $F(q, l)$, ubi $q$ in $-l$, $l$ in $-q$ mutatur, immutatum maneat, idem etiam de expressione $F(q+\Delta q, l+\Delta l)$ valebit, si quidem insuper etiam $\Delta q$ in $-\Delta l$, $\Delta l$ in $-\Delta q$ mutatur; ideoque etiam de expressione

$$\frac{\partial F}{\partial q}\Delta q + \frac{\partial F}{\partial l}\Delta l.$$

(Potuisset quidem $F(q,l)$ in $-F(q,l)$ mutari, quia tantum aequationem $F(q,l) = 0$ immutatam manere probavimus, quod tamen locum habere non posse cum ex ipsa aequationum modularium natura facile probatur, tum etiam inde patet, quod inveniretur eo casu $\frac{\lambda d\lambda}{kdk} = -1$, unde $\mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{-n}}$; quamquam M quantitatem esse realem abunde constat). Unde patet, posito $-l$ loco $q$, $-q$ loco $l$ abire $\frac{\partial F}{\partial q}$ in $-\frac{\partial F}{\partial l}$, $\frac{\partial F}{\partial l}$ in $-\frac{\partial F}{\partial q}$. At casu quo adeo $q = -l$, $l = -q$, sive $\lambda = k'$, valor functionis cuiusdam elementorum $q, l$ ponendo $-l$ loco $q$, $-q$ loco $l$, omnino non mutatur, unde eo casu

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{\partial F}{\partial l}$$

atque

$$\frac{\lambda d\lambda}{kdk} = \frac{dl}{dq} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial l}} = 1.$$

Hinc autem sequitur ope formulae

$$\mathrm{MM} = \frac{1}{n}\frac{\lambda(1-\lambda^2)}{k(1-k^2)}\frac{dk}{d\lambda} = \frac{1}{n}\frac{\lambda^2(1-\lambda^2)}{k^2(1-k^2)}\frac{kdk}{\lambda d\lambda},$$

quia casu nostro $\lambda^2 = 1-k^2$, $k^2 = 1-\lambda^2$:

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

q. d. e. At multo facilior evadit demonstratio, ubi reputas, his casibus transformationem complementariam et supplementariam eandem fore, unde

$$\mathrm{M} = \frac{1}{n\mathrm{M}}, \quad \text{sive} \quad \mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$



Casu igitur proposito functiones ellipticas argumenti $\sqrt{n}.u$, moduli $k'$ per functiones ellipticas argumenti $u$, moduli $k$ rationaliter exprimere licet. Deinde per transformationem supplementariam functiones ellipticae argumenti $nu$, moduli $k$ per alias argumenti $\sqrt{n}.u$, moduli $k'$ exprimi poterunt, unde apparet, quam pulchre hoc casu inter functionem et multiplicatam medium teneat transformata. Porro designante $k$ minorem e modulis $k, k'$, qui in se transformari possunt, obtinemus e § 24 *Fundamentorum*

$$K' = \sqrt{n}K, \quad \text{sive} \quad \frac{K'}{K} = \sqrt{n}.$$

Quod sane satis singulare evenit, proposita aequatione transcendente $\frac{K'}{K} = \sqrt{n}$, modulum $k$ semper algebraice inveniri posse.

2.

At moduli illi alia adhuc gaudent proprietate insigni, quod nempe casu, quo $p = aa+nbb$, designante $p$ numerum primum, $a$ numerum imparem, $b$ numerum parem, e transformationibus $p^{ti}$ ordinis par unum ad modulum propositum reducit, ita ut duo moduli transformati imaginarii valores reales atque inter se et modulo proposito aequales evadant, ideoque e numero transformationum imaginariarum duae in *multiplicationem per quantitatem imaginariam evadant.* Quae obtinentur transformationes, siquidem in formulis generalibus in *Fundamentis* § 20 allatis ponis $\omega = \frac{cK \pm iK'}{p}$, designante $c$ numerum talem, ut sit $\frac{cc+n}{p}$ integer. Multiplicatorem duobus illis casibus nanciscimur $M = \frac{1}{a+ib\sqrt{n}}$ *). Nec mirum sane pro modulis illis multiplicationem per quantitatem imaginariam succedere; nam cum argumenta imaginaria formae $ib\sqrt{n}.u$ ad alia revocare liceat realia $b\sqrt{n}.u$, si simul modulus in complementum mutatur, casu autem proposito functiones ellipticae argumenti $b\sqrt{n}.u$ per functiones ellipticas argumenti $u$, rursus mutato modulo in complementum, exprimi possint, unde ad modulum propositum reditur, facile, si formulae pro multiplicatione per numerum parem et imparem accuratius respiciuntur, eruetur, $\sin\operatorname{am}(a+ib\sqrt{n})u$ pro modulo assignato rationaliter per $\sin\operatorname{am} u$ exprimi posse. — Deinde ope transformationis, quam diximus supplementariam, functiones ellipticae argumenti $pu$ per alias argumenti $(a+ib\sqrt{n})u$ exprimi poterunt, quae est multi-

*) Signum numeri $b$ ad arbitrium, signum vero numeri $a$ ita eligendum est, ut sit $a \equiv 1 \pmod{4}$.

plicatio per quantitatem $a-ib\sqrt{n}$, ita ut multiplicationem per numerum $p$ e duabus aliis componere liceat multiplicationibus. Cui multiplicationis per quantitatem imaginariam speciei neque in functionibus circularibus neque in functionibus exponentialibus simile quidquam invenitur.

Ubi modo evictum est, eiusmodi multiplicationem pro modulis assignatis locum habere posse, facile etiam ipsae, quas adhibere convenit, inveniuntur substitutiones. Posito enim $\sin\operatorname{am}(a+ib\sqrt{n})u = \frac{U}{V}$, designantibus $U, V$ functiones rationales integras quantitatis $\sin\operatorname{am} u$, e consideratione valorum eius, pro quibus $\sin\operatorname{am}(a+ib\sqrt{n})u$ evanescit et pro quibus in infinitum abit, ipsae $U, V$ facile inveniuntur.

Valores autem argumenti $u$, pro quibus evanescit $\sin\operatorname{am}(a+ib\sqrt{n})u$, omnes schemate continentur:

$$\frac{2mK+2m'iK'}{a+ib\sqrt{n}} = 2K\cdot\frac{m+im'\sqrt{n}}{a+ib\sqrt{n}},$$

designantibus $m, m'$ numeros integros quoslibet. Ponamus

$$m+im'\sqrt{n} = A(a+ib\sqrt{n})+B(\alpha+i\beta\sqrt{n}),$$

ita ut sit

$$m = Aa+B\alpha \qquad m' = Ab+B\beta,$$

unde

$$A = \frac{m\beta-m'\alpha}{a\beta-b\alpha} \qquad B = \frac{m'a-mb}{a\beta-b\alpha}.$$

Cum $a, b$ factorem communem non habeant, numeri $\alpha, \beta$ ita determinentur, ut sit $a\beta-b\alpha = 1$; erunt $A, B$ integri simul atque $m, m'$ et vice versa. Hinc fit

$$\frac{m+im'\sqrt{n}}{a+ib\sqrt{n}} = A+B\cdot\frac{\alpha+i\beta\sqrt{n}}{a+ib\sqrt{n}} = A+B\cdot\frac{c+i\sqrt{n}}{p},$$

si quidem ponitur $c = a\alpha+nb\beta$. Hinc obtinemus

$$cc = (a\alpha+nb\beta)^2 = (aa+nbb)(\alpha\alpha+n\beta\beta)-n(a\beta-b\alpha)^2 = p(\alpha\alpha+n\beta\beta)-n,$$

unde $\frac{cc+n}{p}$ integer, quae cum supra dictis conveniunt. Omnes igitur valores functionis $\sin\operatorname{am} u$ eiusmodi, ut evanescat $\sin\operatorname{am}(a+ib\sqrt{n})u$, continentur schemate:

$$\sin\operatorname{am} 2K\left\{A+B\cdot\frac{c+i\sqrt{n}}{p}\right\}$$

seu simplicius

$$\sin\operatorname{am}\frac{2B(c+i\sqrt{n})K}{p} = \sin\operatorname{am}\frac{2B(cK+iK')}{p},$$



designante $B$ numerum integrum quemlibet, quem si successive ponis $0, 1, 2, \ldots p-1$, seu $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\frac{p-1}{2}$, valores isti functionis $\sin\operatorname{am} u$ inter se diversi eruuntur omnes.

Simili modo probatur, ubi $u$ in $u+\frac{4B(cK+iK')}{p}$ abeat, $\sin\operatorname{am}(a+ib\sqrt{n})u$ valorem non mutare.

Facile etiam sequitur, ubi

$$\sin\operatorname{am} u = \sin\operatorname{am}\left\{\frac{2B(cK+iK')}{p}+iK'\right\} = \frac{1}{k\sin\operatorname{am}\frac{2B(cK+iK')}{p}},$$

$\sin\operatorname{am}(a+ib\sqrt{n})u$ in infinitum abire. Fit enim, quia $a$ impar et $b$ par,

$$\sin\operatorname{am}(a+ib\sqrt{n})(u+iK') = \sin\operatorname{am}\left\{-bnK+aiK'+(a+ib\sqrt{n})u\right\} = \frac{\pm 1}{k\sin\operatorname{am}(a+ib\sqrt{n})u}.$$

His rite collectis*), invenitur, posito

$$\omega = \frac{cK+iK'}{p} = \frac{c+i\sqrt{n}}{p}\cdot K, \quad x = \sin\operatorname{am} u, \quad y = \sin\operatorname{am}(a+ib\sqrt{n})u,$$

fieri:

$$y = \frac{(a+ib\sqrt{n})x\left(1-\frac{xx}{\sin^2\operatorname{am}2\omega}\right)\left(1-\frac{xx}{\sin^2\operatorname{am}4\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{xx}{\sin^2\operatorname{am}(p-1)\omega}\right)}{(1-k^2\sin^2\operatorname{am}2\omega\,.\,xx)(1-k^2\sin^2\operatorname{am}4\omega\,.\,xx)\ldots(1-k^2\sin^2\operatorname{am}(p-1)\omega\,.\,xx)}.$$

Deinde posito $\frac{cK-iK'}{p} = \omega_1$, $\sin\operatorname{am} pu = z$, fit multiplicatio, ut ita dicam, supplementaria:

$$z = \frac{(a-ib\sqrt{n})y\left(1-\frac{yy}{\sin^2\operatorname{am}2\omega_1}\right)\left(1-\frac{yy}{\sin^2\operatorname{am}4\omega_1}\right)\cdots\left(1-\frac{yy}{\sin^2\operatorname{am}(p-1)\omega_1}\right)}{(1-k^2\sin^2\operatorname{am}2\omega_1\,.\,yy)(1-k^2\sin^2\operatorname{am}4\omega_1\,.\,yy)\ldots(1-k^2\sin^2\operatorname{am}(p-1)\omega_1\,.\,yy)}.$$

Transformationes propositarum complementariae statim obtinentur, ubi loco $k$ ponitur $k'$, ideoque loco $\omega$ ponitur $\omega' = \frac{c+i\sqrt{n}}{p}.K'$. Constat enim ad transformationem complementariam eruendam loco $\omega$ ponendum esse $\frac{\omega}{i} = \frac{cK+iK'}{ip} = \frac{K'-ciK}{p}$.

*) In substitutionibus, quae sive ad multiplicationem sive ad transformationem pertinent, neque numeratorem neque denominatorem factorem duplicem habere posse, sequitur ex aequatione differentiali

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)(1-\lambda^2yy)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-xx)(1-k^2xx)}}.$$

Alioquin e natura multiplicationis propositae probari debuisset, functionum $U, V$ alteram $p^{ti}$, alteram $(p-1)^{ti}$ ordinis esse.

At quia $c$ ad $p$ primus, loco $\frac{\omega}{i}$ etiam ponere licet $\frac{c\omega}{i} = \frac{cK'-cciK}{p}$, quod eodem redit ac si loco $\frac{\omega}{i}$ ponitur $\frac{cK'+inK}{p} = \frac{c+i\sqrt{n}}{p}\cdot K' = \omega'$.

Adnotabo porro, ex antecedentibus discerptionem numeri $p$ in formam $aa+nbb$ per functiones ellipticas obtineri, modo numerus $c$ innotuerit eiusmodi, ut sit $\frac{cc+n}{p}$ integer. Fit enim, quum sit $p \equiv 1 \pmod{4}$,

$$\frac{1}{M} = \left\{\frac{\sin\operatorname{am} 2\omega \sin\operatorname{am} 4\omega \ldots \sin\operatorname{am}(p-1)\omega}{\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega \ldots \sin\operatorname{coam}(p-1)\omega}\right\}^2 = a+ib\sqrt{n}.$$

Quod sane non mirabitur, qui secum reputaverit, universae illi de transformationibus quaestioni necessario nexum intimum esse cum arithmetica, nam transformatio $n^{ti}$ ordinis, quam diximus, a numero $n$ tota pendet, ita ut omnes numeri, omnes adeo formae algebraicae, quae in substitutionibus adhibendis obveniunt, suam habeant relationem certam ac definitam ad illum numerum necesse sit, cuius varios affectus manifestant. Idem de sectione circuli valet.

Si $p$ est numerus quicunque impar et $\nu$ repraesentationes numeri $p$ per formam $xx+nyy$ dantur tales, ut $x$ valorem imparem, $y$ autem valorem parem nanciscatur, duabus repraesentationibus $(a, b)$, $(a', b')$ pro diversis habitis, si neque $a' = a$ et $b' = b$, neque $a' = -a$ et $b' = -b$; inter transformationes $p^{ti}$ ordinis etiam $\nu$ dabuntur, quae ad modulum propositum reducunt.

### 3.

In antecedentibus de modulis tantum diximus realibus unitate minoribus, qui per transformationes reales in complementa abeunt. Extant tamen et alii, qui per transformationes imaginarias in complementa mutantur. In quibus examinandis valde cavendum est, ne et hic generaliter multiplicator ponatur $= \frac{1}{n}$, cum fieri possit, ut eiusmodi moduli bini aequales evadant, unde $\frac{\lambda d\lambda}{kdk}$ formam induit $\frac{0}{0}$. Quam materiem hoc loco non nisi indicere possumus, amplam sane et dignam, in quam accuratius inquireretur.

Cl. Abel pro certis quibusdam modulis demonstraturum se promittere voluit*), sectionem functionum ellipticarum totam algebraice confici posse. Id quod de omnibus, de quibus diximus, valebit modulis, quos in complementa licet transformare.

*) Diarium Crellianum Vol. II.

---

THEORIE

# DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

## AUS DEN EIGENSCHAFTEN DER THETAREIHEN ABGELEITET

NACH EINER VORLESUNG JACOBIS IN DESSEN AUFTRAG AUSGEARBEITET

VON

C. W. BORCHARDT.

## THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN, AUS DEN EIGENSCHAFTEN DER THETAREIHEN ABGELEITET.

In meinem Werke »*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*« bin ich, von der Betrachtung der elliptischen Integrale ausgehend, am Ende der dort angestellten Untersuchungen zu den merkwürdigen Reihen gelangt, die ich mit den Charakteren $\Theta$ und $H$ bezeichnet habe und welche Zähler und Nenner der elliptischen Functionen $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ bilden.

Im Folgenden beabsichtige ich, den historischen Gang der Entdeckung der elliptischen Functionen umkehrend, den entgegengesetzten Weg einzuschlagen.

Ohne irgend etwas aus der Theorie der elliptischen Transcendenten vorauszusetzen, werde ich, von den Reihen $\Theta$ und $H$ ausgehend, mit Hülfe eines einfachen Princips die Relationen aufstellen, welchen jene Reihen genügen. Aus diesen Relationen werde ich für die Quotienten der Reihen ein Additionstheorem und aus diesem die Differentialformeln herleiten, welche unmittelbar zu den elliptischen Integralen führen.

1.

Die nach beiden Seiten in's Unendliche sich erstreckenden Reihen, welche den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden, bestehen aus Exponentialgrössen, in welchen das reihende Element im Exponenten bis auf den zweiten Grad steigt, deren allgemeine Form also, indem man die Coefficienten sämmtlich der Einheit gleich setzt, die folgende ist:

$$\sum e^{a\nu^2+2b\nu+c},$$

wo die Summation in Beziehung auf $\nu$ über alle positiven und negativen ganzen Zahlen ausgedehnt wird. Von den drei Quantitäten $a, b, c$ kann man die letzte, ohne die Allgemeinheit der Reihe zu beschränken, gleich Null setzen, da $e^c$ ein gemeinschaftlicher Factor aller Glieder der Reihe ist.

Damit die Reihe convergire, ist es nothwendig und hinreichend, dass $a$ (oder wenigstens dessen reeller Theil) negativ sei. Ist diese eine Bedingung in Bezug auf $a$ erfüllt, so convergirt die Reihe, welchen reellen oder imaginären Werth auch $b$ annehmen möge.

Durch Aenderung der Argumente $a$ und $b$ verwandelt man die Summe in eine andere, in welcher für $\nu$ nicht alle ganzen sondern nur alle *graden* positiven und negativen Zahlen gesetzt werden; man braucht hierzu für $a$ und $b$ nur $\frac{1}{4}a$ und $\frac{1}{2}b$ zu setzen, da

$$\sum e^{a\nu^2+2b\nu} = \sum e^{\frac{1}{4}a(2\nu)^2+2\cdot\frac{1}{2}b(2\nu)}.$$

Durch Hinzufügung eines Factors kann man aber die Summe auch in eine andere verwandeln, in welcher für $\nu$ nur alle *ungraden* positiven und negativen Zahlen gesetzt werden. Da nämlich

$$\nu^2 = \tfrac{1}{4}(2\nu+1)^2-\tfrac{1}{2}(2\nu+1)+\tfrac{1}{4},$$

so wird

$$\sum e^{a\nu^2+2b\nu} = e^{\frac{1}{4}a-b}\sum e^{\frac{1}{4}a(2\nu+1)^2+(b-\frac{1}{2}a)(2\nu+1)}.$$

Man erhält also dieselbe Function, möge man in

$$\sum e^{\frac{1}{4}a\nu^2+b\nu}$$

für $\nu$ alle positiven und negativen *graden* Zahlen setzen, oder möge man, nach Ersetzung von $b$ durch $b-\frac{1}{2}a$, für $\nu$ alle positiven und negativen *ungraden* Zahlen setzen und dann die Reihe mit dem Factor

$$e^{\frac{1}{4}a-b}$$

multipliciren.

Aus jeder dieser beiden Formen der Reihe leitet man eine neue ab, in welcher die Vorzeichen wechseln, wenn man $b$ durch $b-\frac{1}{2}\pi i$ ersetzt; hierbei erhält die zweite Form überdies den Factor $i$.

Da nämlich

$$(-1)^\nu = e^{\nu\pi i}, \quad i = e^{\frac{1}{2}\pi i},$$



so ergiebt sich:

$$(*)\begin{cases} \sum e^{a\nu^2+2b\nu} & = e^{\frac{1}{4}a-b}\sum e^{\frac{1}{4}a(2\nu+1)^2+(b-\frac{1}{2}a)(2\nu+1)} \\ = \sum(-1)^\nu e^{a\nu^2+2(b-\frac{1}{2}\pi i)\nu} & = i e^{\frac{1}{4}a-b}\sum(-1)^\nu e^{\frac{1}{4}a(2\nu+1)^2+(b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\pi i)(2\nu+1)}. \end{cases}$$

Setzt man

$$e^a = q, \quad b = xi,$$

so dass nach der über $a$ gemachten Voraussetzung der Modul von $q$ eine zwischen 0 und 1 liegende Grösse ist (was im Folgenden immer stillschweigend angenommen wird), so erhalten die obigen vier Reihenformen folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \sum e^{a\nu^2+2b\nu} &= 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots \\ \sum e^{\frac{1}{4}a(2\nu+1)^2+b(2\nu+1)} &= 2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots \\ \sum(-1)^\nu e^{a\nu^2+2b\nu} &= 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots \\ -\sum i^{2\nu+1} e^{\frac{1}{4}a(2\nu+1)^2+b(2\nu+1)} &= 2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots, \end{aligned}$$

wo die Summationen auf der linken Seite sich von $\nu=-\infty$ bis $\nu=+\infty$ über alle ganzen Zahlen erstrecken.

Diesen vier Reihen soll im Folgenden die Bezeichnung $\vartheta_3(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$, oder, wo es nöthig ist, die ausführlichere Bezeichnung $\vartheta_3(x,q)$, $\vartheta_2(x,q)$, $\vartheta(x,q)$, $\vartheta_1(x,q)$ gegeben werden, so dass die vier zu betrachtenden Thetafunctionen durch die Gleichungen:

$$(1.)\begin{cases} \vartheta(x) = \sum(-1)^\nu q^{\nu^2} e^{2\nu xi} & = 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots \\ \vartheta_1(x) = -\sum i^{2\nu+1} q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2} e^{(2\nu+1)xi} & = 2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots \\ \vartheta_2(x) = \sum q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2} e^{(2\nu+1)xi} & = 2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots \\ \vartheta_3(x) = \sum q^{\nu^2} e^{2\nu xi} & = 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots \end{cases}$$

definirt werden.

Die Betrachtungen, welche zu diesen vier Functionen geführt haben, zeigen, dass man durch Aenderung des Arguments $x$ und Hinzufügung eines Exponentialfactors von einer Function $\vartheta$ zu den drei übrigen gelangt. Führt man nämlich in $(*)$ $q, x$ statt $a, b$ ein, so ergiebt sich:

$$\vartheta_3(x) = \sqrt[4]{q}\,e^{-xi}\,\vartheta_2(x+\tfrac{1}{2}\lg q.i).$$

Fügt man zu dieser Formel die beiden folgenden:

$$\vartheta(x) = \vartheta_3\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \quad \vartheta_1(x) = -\vartheta_2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

und die aus der ersten und zweiten sich ergebende:

$$\vartheta(x) = -i\sqrt[4]{q}\,e^{-xi}\,\vartheta_2(x+\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\lg q.i)$$

hinzu, so sieht man, dass aus $\vartheta_2(x)$ durch Aenderung des Arguments um $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\lg q.i$ und $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i$ und Multiplication mit dem geeigneten Exponentialfactor die drei übrigen $\vartheta$-Functionen hervorgehen. Ebenso verhält es sich mit $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_3(x)$. Eine vollständige Uebersicht über den Uebergang der $\vartheta$-Functionen in einander gewährt folgendes System von Formeln:

$$(2.)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l}
\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi) = \vartheta_3(x) & \vartheta(x+\frac{1}{2}\lg q.i) = -if.\vartheta_1(x) & \vartheta(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i) = f.\vartheta_2(x) \\
\vartheta_1(x+\frac{1}{2}\pi) = \vartheta_2(x) & \vartheta_1(x+\frac{1}{2}\lg q.i) = -if.\vartheta(x) & \vartheta_1(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i) = f.\vartheta_3(x) \\
\vartheta_2(x+\frac{1}{2}\pi) = -\vartheta_1(x) & \vartheta_2(x+\frac{1}{2}\lg q.i) = f.\vartheta_3(x) & \vartheta_2(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i) = if.\vartheta(x) \\
\vartheta_3(x+\frac{1}{2}\pi) = \vartheta(x) & \vartheta_3(x+\frac{1}{2}\lg q.i) = f.\vartheta_2(x) & \vartheta_3(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i) = -if.\vartheta_1(x),
\end{array}\right.$$

wo

$$f = q^{-\frac{1}{4}}e^{x}.$$

Mit Hülfe der Formeln

$$(3.)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\vartheta(-x) = \vartheta(x) & \vartheta(x+\pi) = \vartheta(x) \\
\vartheta_1(-x) = -\vartheta_1(x) & \vartheta_1(x+\pi) = -\vartheta_1(x) \\
\vartheta_2(-x) = \vartheta_2(x) & \vartheta_2(x+\pi) = -\vartheta_2(x) \\
\vartheta_3(-x) = \vartheta_3(x) & \vartheta_3(x+\pi) = \vartheta_3(x)
\end{array}\right.$$

kann man aus (2.) ähnliche Formeln für die Aenderung des Arguments $x$ um $-\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\lg q.i$, $-\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\lg q.i$ ableiten.

## 2.

Die Function $\vartheta_3(x)$ wird in ihrer ursprünglich betrachteten Gestalt als unendliche Reihe von Exponentialgrössen durch die Gleichung

$$\vartheta_3(x) = \sum q^{\nu^2}e^{2\nu xi} = \sum e^{\nu^2\lg q+2\nu xi}$$

definirt, wo die Summation sich von $\nu = -\infty$ bis $\nu = +\infty$ erstreckt. Der Exponent von $e$ lässt sich auf die Form

$$\frac{1}{\lg q}[(\nu\lg q+xi)^2+x^2]$$

bringen, woraus für $\vartheta_3(x)$ die Darstellung:

$$(4.)\quad \vartheta_3(x) = e^{\frac{1}{\lg q}x^2}\sum e^{\frac{1}{\lg q}(2\nu.\frac{1}{2}\lg q+xi)^2}$$



hervorgeht. Die entsprechende Darstellung der Function $\vartheta_2(x)$ ist:

$$(5.)\quad \vartheta_2(x) = e^{\frac{1}{\lg q}x^2}\sum e^{\frac{1}{\lg q}[(2\nu+1)\frac{1}{2}\lg q+xi]^2}.$$

Diese beiden Summen unterscheiden sich nur dadurch, dass, während die eine auf alle (positiven und negativen) *graden* Zahlen $2\nu$ auszudehnen ist, die andere sich auf alle *ungraden* Zahlen $2\nu+1$ bezieht.

Werden mehrere Reihen dieser Art mit verschiedenen Werthen des Arguments $x$ in einander multiplicirt, so kann man das Product als eine vielfache Reihe ansehen, deren allgemeiner Term eine Exponentialgröſse ist, welche eine Quadratsumme im Exponenten hat. Von besonderem Interesse ist der Fall, in welchem man vier solche Reihen mit einander multiplicirt, weil man dann im Exponenten eine Summe von vier Quadraten erhält, auf welche eine elementare Transformationsformel sich anwenden läſst.

Es ist ein bekannter algebraischer Satz, dass man die Summe von vier Quadraten

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$

immer auf eine zweite Art unter derselben Form darstellen kann. Bestimmt man nämlich vier neue Gröſsen $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ durch die Formeln

$$(6.)\quad \left\{\begin{array}{l}
a' = \frac{1}{2}(a+b+c+d) \\
b' = \frac{1}{2}(a+b-c-d) \\
c' = \frac{1}{2}(a-b+c-d) \\
d' = \frac{1}{2}(a-b-c+d),
\end{array}\right.$$

so wird identisch

$$(7.)\quad a'^2+b'^2+c'^2+d'^2 = a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Es seien insbesondere $a, b, c, d$ entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen, dann sind nach (6.) in beiden Fällen $2a'$, $2b'$, $2c'$, $2d'$ grade, also $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ ganze Zahlen. Nach den aus (6.) hervorgehenden Gleichungen

$$a'+b' = a+b,\quad a'+c' = a+c,\quad a'+d' = a+d$$

sind überdies die drei Summen

$$a'+b',\quad a'+c',\quad a'+d'$$

in beiden Fällen grade Zahlen, d. h. jede der Zahlen $b'$, $c'$, $d'$ ist mit $a'$ zugleich grade und ungrade. Die vier Grössen $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ sind also ebenfalls entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen.

Der nämliche Schlufs läfst sich rückwärts machen; denn die Gleichungen (6.), nach $a, b, c, d$ aufgelöst, geben:

$$(8.)\quad \begin{cases} a = \tfrac{1}{2}(a'+b'+c'+d') \\ b = \tfrac{1}{2}(a'+b'-c'-d') \\ c = \tfrac{1}{2}(a'-b'+c'-d') \\ d = \tfrac{1}{2}(a'-b'-c'+d'). \end{cases}$$

Sind $a', b', c', d'$ entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen, so sind also $a, b, c, d$ ebenfalls sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen.

Die beiden Zahlensysteme $a, b, c, d$ und $a', b', c', d'$ stehen in Reciprocität zu einander. Setzt man für $a, b, c, d$ ein bestimmtes System von Zahlen, die entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade sind, so erhält man für $a', b', c', d'$ ein zweites System von Zahlen, die ebenfalls entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade sind; setzt man ferner für $a, b, c, d$ das zweite Zahlensystem, so erhält man für $a', b', c', d'$ wieder das ursprüngliche Zahlensystem. Die Zahlensysteme der betrachteten Art ordnen sich daher durch die Gleichungen (6.), (8.) zu Paaren, welche einander reciprok sind.

Hieraus geht hervor, dass, wenn man für $a, b, c, d$ alle möglichen Systeme von vier Zahlen setzt, die entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade sind, die zugeordneten Gröfsen $a', b', c', d'$ dieselben Zahlensysteme, nur in anderer Ordnung, durchlaufen und zwar so, dass keines derselben ausgelassen und keines derselben doppelt genommen werden kann. Dies Princip ist von grosser Wichtigkeit. Ist nämlich eine vierfache von der Anordnung der Glieder nicht abhängige Summe auf alle Werthe der Gröfsen $a, b, c, d$ auszudehnen, welche sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen sind, und substituirt man für $a, b, c, d$ ihre in $a', b', c', d'$ ausgedrückten Werthe (8.), so wird nach dem aufgestellten Princip die vierfache Summe ungeändert bleiben, wenn man sie auf alle Werthe der Gröfsen $a', b', c', d'$ ausdehnt, die sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen sind.

Nachdem dies vorausgeschickt worden ist, kehre ich zu den Darstellungen (4.), (5.) der Functionen $\vartheta_3(x)$, $\vartheta_2(x)$ zurück. Man setze in jeder dieser Gleichungen für $x$ vier verschiedene Argumente $w, x, y, z$ und bezeichne zugleich das reihende Element dem entsprechend mit $\nu, \nu', \nu'', \nu'''$, so ergiebt sich:



$$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = e^{\frac{1}{\lg q}(w^2+x^2+y^2+z^2)}\sum e^{\frac{1}{\lg q}L}$$
$$\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = e^{\frac{1}{\lg q}(w^2+x^2+y^2+z^2)}\sum e^{\frac{1}{\lg q}M},$$

wo

$$L = [2\nu.\tfrac{1}{2}\lg q+wi]^2+[2\nu'.\tfrac{1}{2}\lg q+xi]^2+[2\nu''.\tfrac{1}{2}\lg q+yi]^2+[2\nu'''.\tfrac{1}{2}\lg q+zi]^2$$
$$M = [(2\nu+1)\tfrac{1}{2}\lg q+wi]^2+[(2\nu'+1)\tfrac{1}{2}\lg q+xi]^2+[(2\nu''+1)\tfrac{1}{2}\lg q+yi]^2+[(2\nu'''+1)\tfrac{1}{2}\lg q+zi]^2$$

und die Summation in der ersten Gleichung auf alle positiven und negativen graden Zahlen $2\nu, 2\nu', 2\nu'', 2\nu'''$, in der zweiten auf alle positiven und negativen ungraden Zahlen $2\nu+1, 2\nu'+1, 2\nu''+1, 2\nu'''+1$ auszudehnen ist.

Die Addition beider Gleichungen ergiebt daher:

$$(9.)\quad \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)+\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = e^{\frac{1}{\lg q}(w^2+x^2+y^2+z^2)}\sum e^{\frac{1}{\lg q}N},$$

wo

$$N = [a.\tfrac{1}{2}\lg q+wi]^2+[b.\tfrac{1}{2}\lg q+xi]^2+[c.\tfrac{1}{2}\lg q+yi]^2+[d.\tfrac{1}{2}\lg q+zi]^2$$

und die Summation auf alle Systeme von vier graden oder vier ungraden Zahlen $a, b, c, d$ auszudehnen ist.

Man führe in den Exponenten $\frac{1}{\lg q}N$ der Gleichung (9.) an Stelle der Gröfsen $a, b, c, d$ die zugeordneten Gröfsen $a', b', c', d'$ nach (8.) ein und setze überdies

$$(10.)\quad \begin{cases} w' = \tfrac{1}{2}(w+x+y+z) \\ x' = \tfrac{1}{2}(w+x-y-z) \\ y' = \tfrac{1}{2}(w-x+y-z) \\ z' = \tfrac{1}{2}(w-x-y+z), \end{cases}$$

so nimmt Gleichung (9.) folgende Gestalt an:

$$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)+\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = e^{\frac{1}{\lg q}(w'^2+x'^2+y'^2+z'^2)}\sum e^{\frac{1}{\lg q}N},$$

wo $N$ unter Benutzung der Gleichungen (6.), (10.) in folgende neue Form übergeht:

$$N = [a'.\tfrac{1}{2}\lg q+w'i]^2+[b'.\tfrac{1}{2}\lg q+x'i]^2+[c'.\tfrac{1}{2}\lg q+y'i]^2+[d'.\tfrac{1}{2}\lg q+z'i]^2.$$

Diese Gleichung ist noch genau dieselbe wie Gleichung (9.), solange man die Summation rechter Hand auf die Gröfsen $a, b, c, d$ bezieht. Aber nach dem oben aufgestellten Princip bleibt die Summe unverändert, wenn man sie, anstatt auf alle Werthe von $a, b, c, d$ auszudehnen, welche sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen sind, auf die nämlichen Werthe der Gröfsen $a', b', c', d'$

ausdehnt. Hieraus folgt, dass die rechte Seite der letzten Gleichung nichts anderes ist als die Summe der beiden Producte:

$$\vartheta_3(w')\,\vartheta_3(x')\,\vartheta_3(y')\,\vartheta_3(z')+\vartheta_2(w')\,\vartheta_2(x')\,\vartheta_2(y')\,\vartheta_2(z').$$

Man hat daher folgenden Fundamentalsatz:

Bestimmt man die Variabeln $w', x', y', z'$ aus $w, x, y, z$ nach den Gleichungen (10.), so ist:

$$\begin{aligned}(11.)\qquad & \vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z)+\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z)\\ & =\vartheta_3(w')\,\vartheta_3(x')\,\vartheta_3(y')\,\vartheta_3(z')+\vartheta_2(w')\,\vartheta_2(x')\,\vartheta_2(y')\,\vartheta_2(z').\end{aligned}$$

Diese Formel ist das Fundament der ganzen ferneren Untersuchung. Man leitet aus ihr eine Formel für die Differenz der auf der linken Seite stehenden beiden Producte her, indem man $w$ um $\pi$ vermehrt, wodurch an die Stelle von $\vartheta_3(w)$, $\vartheta_2(w)$ respective $\vartheta_3(w+\pi)=\vartheta_3(w)$, $\vartheta_2(w+\pi)=-\vartheta_2(w)$ tritt. Gleichzeitig vermehrt sich jede der Gröfsen $w', x', y', z'$ um $\frac{1}{2}\pi$, wodurch (Gl. (2.)) jedes $\vartheta_3$ in $\vartheta$ und jedes $\vartheta_2$ in $-\vartheta_1$ übergeht. Daher ergiebt sich:

$$\begin{aligned}(11^*.)\qquad & \vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z)-\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z)\\ & =\vartheta(w')\,\vartheta(x')\,\vartheta(y')\,\vartheta(z')+\vartheta_1(w')\,\vartheta_1(x')\,\vartheta_1(y')\,\vartheta_1(z').\end{aligned}$$

Indem man die Summe der Gleichungen (11.), (11*.) bildet, erhält man das Product $\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$ durch vier Producte von $\vartheta$-Functionen ausgedrückt, deren Argumente $w', x', y', z'$ sind. Von dem einen Product $\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$ aus kann man zu allen möglichen Producten von vier $\vartheta$-Functionen übergehen, indem man jedes der Argumente um eine der vier Gröfsen $0$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\lg q.i$, $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i$ vermehrt. Die Anzahl der Formeln, die man auf diese Weise erhalten kann, beträgt 35, aber dieselben zerfallen in zwei wesentlich verschiedene Kategorien. Aus den an $w, x, y, z$ angebrachten Aenderungen gehen nämlich für $w', x', y', z'$ entweder Aenderungen hervor, welche sich aus Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\lg q.i$ zusammen setzen lassen, oder Aenderungen, zu welchen ungrade Vielfache von $\frac{1}{4}\pi$ oder von $\frac{1}{4}\lg q.i$ gehören. Nur im ersten Fall lassen sich die Argumente der auf der rechten Seite der Gleichung stehenden $\vartheta$-Functionen auf $w', x', y', z'$ zurückführen, während dieselben im zweiten Fall von diesen Werthen immer um $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\lg q.i$, $\frac{1}{4}\pi\pm\frac{1}{4}\lg q.i$ abweichen. Nach dieser Eintheilung gehören in die erste Kategorie nur 11 Formeln. Die übrigen 24 Formeln führen auf Resultate, die zwar auf anderem Wege schwierig zu bewei-



sen, aber für den vorliegenden Zweck nicht nothwendig sind. Ich beschränke mich daher auf die 11 Formeln der ersten Kategorie, aus denen, nachdem alle Reductionen daran angebracht sind, die folgenden Gleichungen hervorgehn:

(A.)

$$\begin{aligned}
&(1.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)+\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)=\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')+\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')\\
&(2.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)-\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)=\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta(y')\vartheta(z')+\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z')\\[1ex]
&(3.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)+\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)=\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')-\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')\\
&(4.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)-\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)=\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta(y')\vartheta(z')-\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z')
\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}
&(5.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)+\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)=\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')+\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')\\
&(6.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)-\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)=\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta(y')\vartheta(z')+\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z')\\[1ex]
&(7.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)+\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)=\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')+\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')\\
&(8.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)-\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)=\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta(y')\vartheta(z')+\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z')\\[1ex]
&(9.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)+\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)=\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')+\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z')\\
&(10.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)-\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)=\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')+\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta(y')\vartheta(z')
\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}
&(11.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta_1(z)+\vartheta_2(w)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta(z)=\vartheta_1(w')\vartheta(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')-\vartheta(w')\vartheta_1(x')\vartheta_3(y')\vartheta_2(z')\\
&(12.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta_1(z)-\vartheta_2(w)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta(z)=\vartheta_3(w')\vartheta_2(x')\vartheta(y')\vartheta_1(z')-\vartheta_2(w')\vartheta_3(x')\vartheta_1(y')\vartheta(z'),
\end{aligned}$$

worin wie oben (Gl. (10.))

$$\begin{aligned}
w' &= \tfrac{1}{2}(w+x+y+z) & w &= \tfrac{1}{2}(w'+x'+y'+z')\\
x' &= \tfrac{1}{2}(w+x-y-z) & x &= \tfrac{1}{2}(w'+x'-y'-z')\\
y' &= \tfrac{1}{2}(w-x+y-z) & y &= \tfrac{1}{2}(w'-x'+y'-z')\\
z' &= \tfrac{1}{2}(w-x-y+z) & z &= \tfrac{1}{2}(w'-x'-y'+z').
\end{aligned}$$

Die beiden letzten der Gleichungen (A.) sind nur für eine zu rechnen, denn die Ausdrücke von $\vartheta_3(w(\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta_1(z)$, $\vartheta_2(w)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta(z)$, aus denen sie sich ergeben, gehen in einander über, wenn man $x, w, z, y$ für $w, x, y, z$ setzt.

Uebrigens ist noch zu bemerken, dass die Gleichungen:

$$(5.),\quad (7.),\quad (9.),\quad (11.)$$

in die Gleichungen

$$(6.),\quad (8.),\quad (10.),\quad (12.)$$

übergehen, so wie diese in jene, wenn man

$$-x,\ -y \text{ resp. für } x,\ y$$

setzt, wodurch zugleich $w'$ mit $z'$ und $x'$ mit $y'$ vertauscht werden.

3.

Die Formeln (A.) des vorigen §. lassen sich auf vielfache Art specialisiren, indem man zwischen den vier von einander unabhängigen Variabeln $w, x, y, z$ Relationen stattfinden läfst. Indem ich eine vollständigere Entwickelung der Formeln dieser Art für den Schlufs dieser Abhandlung vorbehalte, werde ich mich jetzt auf die für den vorliegenden Zweck nothwendigen beschränken.

Man setze

$$w = \pm(x+y+z),$$

was die Anzahl der von einander unabhängigen Variabeln auf drei reducirt, so ergeben die Gleichungen (10.) für $w', x', y', z'$ im Fall des oberen Zeichens:

$$w' = x+y+z,\quad x' = x,\quad y' = y,\quad z' = z,$$

so dass beide Systeme von Variabeln $w, x, y, z$ und $w', x', y', z'$ in dieselben Werthe zusammenfallen, dagegen im Fall des unteren Zeichens:

$$w' = 0,\quad x' = -(y+z),\quad y' = -(x+z),\quad z' = -(x+y).$$

Von den unter diesen beiden Hypothesen aus den Formeln (A.) hervorgehenden Resultaten lassen sich die interessantesten in folgende fünf Doppelgleichungen zusammenfassen:



(B.)

$$\begin{aligned}
(1.)\ \vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta(x+z)\vartheta(x+y) &= \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)\\
&= \vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)\\
(2.)\ \vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta_3(x+z)\vartheta_3(x+y) &= \vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)\\
&= \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)\\
(3.)\ \vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta_2(x+z)\vartheta_2(x+y) &= \vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)\\
&= \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)\\
(4.)\ \vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta_1(x+z)\vartheta_1(x+y) &= \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)\\
&= \vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z)\\
(5.)\ \vartheta(0)\vartheta_1(y+z)\vartheta_2(x+z)\vartheta_3(x+y) &= \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta(z) + \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta_1(z)\\
&= \vartheta_1(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_2(z) - \vartheta(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(z).
\end{aligned}$$

Ein zweites specielleres Formelsystem, welches nur noch zwei von einander unabhängige Variable enthält, ergiebt sich aus (A.), wenn man

$$w = \pm x,\qquad y = \pm z$$

setzt, wo beidemal das obere oder beidemal das untere Vorzeichen zu nehmen ist. Die hieraus folgenden Werthe von $w', x', y', z'$ sind nach (10.) für die oberen Vorzeichen:

$$w' = x+y,\quad x' = x-y,\quad y' = 0,\quad z' = 0,$$

für die unteren Vorzeichen:

$$w' = 0,\quad x' = 0,\quad y' = -(x-y),\quad z' = -(x+y).$$

Ebenso kann man den Variabeln folgende vier den Gleichungen (10.) genügende Werthsysteme geben:

$$\begin{array}{llllll}
w = y, & x = z, & w' = x+y, & x' = 0, & y' = -(x-y), & z' = 0,\\
w = -y, & x = -z, & w' = 0, & x' = x-y, & y' = 0, & z' = -(x+y),\\
w = z, & x = y, & w' = y+z, & x' = 0, & y' = 0, & z' = -(y-z),\\
w = -z, & x = -y, & w' = 0, & x' = -(y+z), & y' = y-z, & z' = 0.
\end{array}$$

Die aus diesen Hypothesen hervorgehenden Formeln, welche das Product aus einer $\vartheta$-Function mit dem Argument $x+y$ und aus einer $\vartheta$-Function mit dem Argument $x-y$ durch $\vartheta$-Functionen mit den Argumenten $x$ und $y$ darstellen, sind ihrer Wichtigkeit wegen in dem folgenden System von 18 Gleichungen vollständig zusammengestellt.

(C.)

$$
\begin{array}{lllll}
(1.) & \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3(x+y)\,\vartheta_3(x-y) & = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_3^2(y)+\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_1^2(y) & = \vartheta^2(x)\,\vartheta^2(y)+\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_2^2(y) \\
(2.) & \vartheta_3^2(0)\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y) & = \vartheta^2(x)\,\vartheta_3^2(y)+\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_1^2(y) & = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta^2(y)+\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_2^2(y) \\
(3.) & \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_2(x+y)\,\vartheta_2(x-y) & = \vartheta_2^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta^2(x)\,\vartheta_1^2(y) & = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_1^2(x)\,\vartheta^2(y) \\
(4.) & \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x-y) & = \vartheta_1^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta_3^2(x)\,\vartheta_1^2(y) & = \vartheta^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_2^2(x)\,\vartheta^2(y) \\
(5.) & \vartheta^2(0)\,\vartheta_3(x+y)\,\vartheta_3(x-y) & = \vartheta^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_2^2(y) & = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta^2(y)-\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_1^2(y) \\
(6.) & \vartheta^2(0)\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y) & = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_2^2(y) & = \vartheta^2(x)\,\vartheta^2(y)-\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_1^2(y) \\
(7.) & \vartheta^2(0)\,\vartheta_2(x+y)\,\vartheta_2(x-y) & = \vartheta^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_3^2(y) & = \vartheta_2^2(x)\,\vartheta^2(y)-\vartheta_3^2(x)\,\vartheta_1^2(y) \\
(8.) & \vartheta^2(0)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x-y) & = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_3^2(y) & = \vartheta_1^2(x)\,\vartheta^2(y)-\vartheta^2(x)\,\vartheta_1^2(y) \\
(9.) & \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_3(x+y)\,\vartheta_3(x-y) & = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_2^2(y)+\vartheta^2(x)\,\vartheta_1^2(y) & = \vartheta_2^2(x)\,\vartheta_3^2(y)+\vartheta_1^2(x)\,\vartheta^2(y) \\
(10.) & \vartheta_2^2(0)\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y) & = \vartheta^2(x)\,\vartheta_2^2(y)+\vartheta_3^2(x)\,\vartheta_1^2(y) & = \vartheta_1^2(x)\,\vartheta_3^2(y)+\vartheta_2^2(x)\,\vartheta^2(y) \\
(11.) & \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2(x+y)\,\vartheta_2(x-y) & = \vartheta_2^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_1^2(y) & = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta^2(x)\,\vartheta^2(y) \\
(12.) & \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x-y) & = \vartheta_1^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_1^2(y) & = \vartheta^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta_3^2(x)\,\vartheta^2(y)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(13.) & \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta(x\pm y)\,\vartheta_2(x\mp y) & = \vartheta(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_2(y)\pm\vartheta_1(x)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_3(y) \\
(14.) & \vartheta_3(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(x\pm y)\,\vartheta_2(x\mp y) & = \vartheta_3(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_2(y)\pm\vartheta(x)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_1(y) \\
(15.) & \vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta(x\pm y)\,\vartheta_3(x\mp y) & = \vartheta(x)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_3(y)\pm\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_2(y) \\
(16.) & \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_1(x\pm y)\,\vartheta_3(x\mp y) & = \vartheta_1(x)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_2(y)\pm\vartheta(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_3(y) \\
(17.) & \vartheta_3(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_1(x\pm y)\,\vartheta(x\mp y) & = \vartheta(x)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_2(y)\pm\vartheta_3(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_1(y) \\
(18.) & \vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(x\pm y)\,\vartheta_2(x\mp y) & = \vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_3(y)\pm\vartheta(x)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_2(y).
\end{array}
$$

Setzt man in diesen Formeln $x=y$, so erhält man die $\vartheta$-Functionen des doppelten Arguments durch $\vartheta$-Functionen des einfachen Arguments ausgedrückt. So ergeben zum Beispiel die $1^{\text{te}}$, $2^{\text{te}}$, $11^{\text{te}}$ der Formeln (C.) die Gleichungen

$$
(12.)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
\vartheta_3^3(0)\,\vartheta_3(2x) & = \vartheta_3^4(x)+\vartheta_1^4(x) = \vartheta^4(x)+\vartheta_2^4(x) \\
\vartheta_3^2(0)\,\vartheta(0)\,\vartheta(2x) & = \vartheta^2(x)\,\vartheta_3^2(x)+\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_2^2(x) \\
\vartheta_2^3(0)\,\vartheta_2(2x) & = \vartheta_2^4(x)-\vartheta_1^4(x) = \vartheta_3^4(x)-\vartheta^4(x).
\end{array}\right\}
$$

Die erste Gleichung (12.) drückt $\vartheta_3(x)$, mit der Constante $\vartheta_3^3(0)$ multiplicirt, als Summe vierter Potenzen von Functionen des halben Arguments aus. Für reelle Werthe von $x$ und $q$ zeigt sie daher, dass $\vartheta_3(x)$ (und daher auch $\vartheta(x)$) immer positive Werthe hat, und zwar mit Ausschlufs der Null, denn sollte $\vartheta_3(x)$ verschwinden, so müfste auch $\vartheta_3(\frac{1}{2}x)$, folglich auch $\vartheta_3(\frac{1}{4}x)$ u. s. w., also endlich $\vartheta_3(0)$ verschwinden, was nicht der Fall ist.



Wichtiger als die unter der Hypothese $x=y$ aus (C.) hervorgehenden Formeln sind diejenigen, welche man aus denselben für $y=0$ erhält. Es sind die folgenden vier:

(D.)

$$
\begin{array}{ll}
(1.) & \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3^2(x) = \vartheta^2(0)\,\vartheta^2(x)+\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2^2(x) \\
(2.) & \vartheta_3^2(0)\,\vartheta^2(x) = \vartheta^2(0)\,\vartheta_3^2(x)+\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1^2(x) \\
(3.) & \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_2^2(x) = \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_3^2(x)-\vartheta^2(0)\,\vartheta_1^2(x) \\
(4.) & \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1^2(x) = \vartheta_2^2(0)\,\vartheta^2(x)-\vartheta^2(0)\,\vartheta_2^2(x).
\end{array}
$$

Setzt man überdies noch $x=0$, so giebt die $1^{\text{te}}$ der Gleichungen (D.) zwischen $\vartheta_3(0)$, $\vartheta(0)$, $\vartheta_2(0)$ die merkwürdige Relation

$$
(\text{E.})\qquad \vartheta_3^4(0) = \vartheta^4(0)+\vartheta_2^4(0)
$$

d. h.

$$
[1+2q+2q^4+2q^9+\cdots]^4 = [1-2q+2q^4-2q^9+\cdots]^4+16q[1+q^{1.2}+q^{2.3}+\cdots]^4.
$$

Setzt man

$$
\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)},
$$

so besteht nach (E.) zwischen $k$ und $k'$ die Relation

$$
k^2+k'^2 = 1.
$$

Die Gleichungen (D.) zeigen, dass, wenn man drei der Functionen $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$ durch die vierte dividirt, von den so entstehenden Brüchen zwei durch den dritten vermittelst Ausziehung von Quadratwurzeln bestimmbar sind. So ergiebt sich:

$$
\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_2(0)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right)^2}
$$

$$
\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right)^2},
$$

was sich eleganter so ausdrücken läfst: *man kann einen Winkel $\varphi$ dergestalt bestimmen, dass gleichzeitig*

$$
\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\sin\varphi, \quad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta(0)}\cos\varphi, \quad \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)}\sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right)^4\sin^2\varphi}.
$$

welche Gleichungen unter Einführung der oben definirten Gröfsen $k, k'$ und der Legendreschen Bezeichnung

$$\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

die Gestalt

$$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}\sin\varphi, \quad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi, \quad \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\varphi$$

annehmen.

Die aus den Formeln (D.), (E.) gezogenen Resultate lassen sich daher in folgenden Gleichungen zusammenstellen:

$$(13.)\quad \begin{cases} \sqrt{k} = \dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \dfrac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots} \\ \sqrt{k'} = \dfrac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} = \dfrac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots} \\ k^2+k'^2 = 1 \end{cases}$$

$$(14.)\quad \begin{cases} \sqrt{k}\sin\varphi = \dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \dfrac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots} \\ \sqrt{\dfrac{k}{k'}}\cos\varphi = \dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \dfrac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots} \\ \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\varphi = \dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \dfrac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots} \end{cases}$$

Durch die Gleichungen (14.) wird der Winkel $\varphi$ selbst nicht vollständig bestimmt, sondern nur die trigonometrischen Functionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$ desselben, welche bei Aenderung von $\varphi$ um $2\pi$ ungeändert bleiben. Daher giebt *ein* Werth von $\varphi$, welcher den Gleichungen (14.) genügt, alle übrigen, wenn man ihn um alle möglichen Vielfachen von $2\pi$ vermehrt oder vermindert. Hieraus folgt, dass wenn die Forderung hinzugefügt wird, *$\varphi$ sei eine continuirliche Function von $x$*, man nur für *einen* Werth von $x$ das zugehörige $\varphi$ festgesetzt zu haben braucht, um für alle Werthe von $x$ die Vieldeutigkeit der Bestimmung von $\varphi$ zu heben. Da für $x = 0$ nach (14.) $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ wird, so ist es am einfachsten, für $x = 0$ auch $\varphi = 0$ anzunehmen. Man setze also fest, *dass $\varphi$ mit $x$ zugleich verschwinde*, so ist $\varphi$ durch die Gleichungen (14.) und die hinzugefügten Nebenbedingungen vollständig bestimmt.



Man nehme insbesondere an, *$x$ und $q$* (dessen Modul immer $< 1$ vorausgesetzt wird) *seien beide reell*, so werden nach (13.) auch $k, k'$ reell und $< 1$, ebenso wird nach (14.) $\varphi$ reell, und da nach (12.) für reelle Werthe von $x$ und $q$ die Functionen $\vartheta_3(x)$, $\vartheta(x)$ ausschliefslich positive Werthe haben, so ist in der dritten Gleichung (14.) die Quadratwurzel $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ stets mit positivem Zeichen zu nehmen.

---

Nachdem die Formeln (D.), (E.) den in den Gleichungen (13.), (14.) dargestellten Zusammenhang zwischen den drei Functionen $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$ ergeben haben, werden die Formeln (C.) zu der Fundamental-Eigenschaft dieser Functionen führen, zu der Eigenschaft, *dass die Function der Summe zweier Argumente sich algebraisch durch die Functionen der einzelnen Argumente ausdrücken läfst.*

Man dividire die drei Formeln (C. 13, 15, 17) durch (C. 6), so ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$(15.)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)\vartheta(0)}\cdot\dfrac{\vartheta_1(x\pm y)}{\vartheta(x\pm y)} = \dfrac{\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)}\dfrac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)} \pm \dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\cdot\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}}{1-\dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_1^2(y)}{\vartheta^2(y)}} \\[3ex] \dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta(0)}\cdot\dfrac{\vartheta_2(x\pm y)}{\vartheta(x\pm y)} = \dfrac{\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)} \mp \dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\cdot\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)}}{1-\dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\dfrac{\vartheta_1^2(y)}{\vartheta^2(y)}} \\[3ex] \dfrac{\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)}\cdot\dfrac{\vartheta_3(x\pm y)}{\vartheta(x\pm y)} = \dfrac{\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)} \mp \dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\cdot\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)}}{1-\dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_1^2(y)}{\vartheta^2(y)}}. \end{cases}$$

Da von den drei Brüchen $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$ je zwei mit Hülfe von Quadratwurzeln durch den dritten darstellbar sind, so hat nach (15.) jede der drei Functionen $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$ die obengenannte Fundamental-Eigenschaft.

Die Gleichungen (15.) werden die für die Functionen $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$ geltenden Formeln der Addition genannt.

Man führe nach (13.) die Gröfsen $k, k'$ ein und nach (14.) den von $x$ abhangenden Winkel $\varphi$, ferner seien $\psi$, $\sigma$ die Winkel, welche resp. von $y$, $x+y$ ebenso abhangen wie $\varphi$ von $x$, sodass

$$(16.)\quad \begin{cases} \sqrt{k}\sin\varphi = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} & \sqrt{k}\sin\psi = \frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)} & \sqrt{k}\sin\sigma = \frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)} \\ \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi = \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} & \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\psi = \frac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)} & \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\sigma = \frac{\vartheta_2(x+y)}{\vartheta(x+y)} \\ \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\Delta\varphi = \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} & \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\Delta\psi = \frac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)} & \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\Delta\sigma = \frac{\vartheta_3(x+y)}{\vartheta(x+y)}, \end{cases}$$

dann erhalten die Gleichungen (15.), mit dem oberen Zeichen genommen, folgende elegante Form:

$$(17.)\quad \begin{cases} \sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi+\sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} \\ \cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} \\ \Delta\sigma = \frac{\Delta\varphi\,\Delta\psi-k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}, \end{cases}$$

Formeln, von welchen die beiden ersten für $k=0$ in die Additionsformeln der Trigonometrie übergehen. Ein reichhaltiges, den Gleichungen (17.) ähnliches System von Formeln läfst sich aus den Formeln (C.) ableiten, wobei ich indessen nicht verweile, da bereits im § 18 der ***Fundamenta*** eine Sammlung von Formeln dieser Art mit grofser Vollständigkeit gegeben ist.

Wenn für eine Function ein Additionstheorem im Sinne der Gleichungen (15.) besteht, so läfst sich der Differentialquotient der Function algebraisch durch die Function ausdrücken.

Man differentiire die Gleichungen (15.) nach $y$, setze nach der Differentiation $y=0$ und bezeichne mit $\vartheta_1'(0)$ den Werth von $\frac{d\vartheta_1(x)}{dx}$ für $x=0$, dann erhält man:



$$(18.)\quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\vartheta(0)\,\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \\ \frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = -\frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \\ \frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = -\frac{\vartheta_2(0)\,\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\,\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}. \end{cases}$$

Führt man nach (14.) den Winkel $\varphi$ ein, so geben die drei Gleichungen (18.) übereinstimmend:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)}\cdot\Delta\varphi,$$

$$\frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta'(0)}{\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)}\,dx = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wo, für reelle Werthe von $\varphi$ und $k$, $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ den positiven Werth der Quadratwurzel bedeutet. Integrirt man und berücksichtigt, dass $x$ und $\varphi$ gleichzeitig verschwinden, so ergiebt sich:

$$(19.)\quad \frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)}\cdot x = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Die rechte Seite von Gleichung (19.) ist bekanntlich das elliptische Integral erster Gattung, $\varphi$ die Amplitude, $k$ der Modul, $k'$ der Complementarmodul.

Der constante Factor

$$\frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)},$$

mit welchem $x$ multiplicirt dem Integral erster Gattung gleich wird, läfst sich noch vereinfachen, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden soll.

4.

Der blofse Hinblick auf die Definitionsgleichungen

$$\vartheta_3(x) = 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots$$
$$\vartheta(x) = 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots$$

und

$$\vartheta_2(x) = 2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots$$

der Functionen $\vartheta_3$, $\vartheta$ und $\vartheta_2$ zeigt, dass, wenn man in den Functionen $\vartheta_3$ und $\vartheta$

die graden Glieder von den ungraden trennt, jede dieser Summen für sich wieder eine $\vartheta$-Function ist, in welcher indessen $x$ und $q$ durch $2x$ und $q^4$ ersetzt sind, und zwar ist die Summe der graden Glieder gleich $\vartheta_3(2x, q^4)$, die Summe der ungraden Glieder gleich $\vartheta_2(2x, q^4)$. Man hat also die beiden identischen Gleichungen:

$$(20.)\qquad \begin{cases} \vartheta_3(x,q) = \vartheta_3(2x,q^4)+\vartheta_2(2x,q^4) \\ \vartheta(x,q) \;= \vartheta_3(2x,q^4)-\vartheta_2(2x,q^4). \end{cases}$$

Diese Werthe von $\vartheta_3$, $\vartheta$, in die dritte Gleichung (12.)

$$\vartheta_2^2(0)\cdot\vartheta_2(2x) = \vartheta_3^4(x)-\vartheta^4(x)$$

eingesetzt, führen, wenn man zugleich $x$ für $2x$ schreibt, zu der Gleichung:

$$(21.)\qquad \vartheta_2^2(0,q)\,\vartheta_2(x,q) = 8\vartheta_2(x,q^4)\,\vartheta_3(x,q^4)[\vartheta_3^2(x,q^4)+\vartheta_2^2(x,q^4)],$$

aus welcher, wenn man $x$ um $\frac{\pi}{2}$ vermehrt, eine ähnliche Gleichung für die Function $\vartheta_1$:

$$(21^*.)\qquad \vartheta_2^2(0,q)\,\vartheta_1(x,q) = 8\vartheta_1(x,q^4)\,\vartheta(x,q^4)[\vartheta^2(x,q^4)+\vartheta_1^2(x,q^4)]$$

hervorgeht. Die letzte Gleichung giebt, wenn man sie nach $x$ differentiirt und dann $x=0$ setzt:

$$(22.)\qquad \vartheta_2^2(0,q)\,\vartheta_1'(0,q) = 8\vartheta^3(0,q^4)\,\vartheta_1'(0,q^4).$$

Andrerseits ergeben die Gleichungen (20.), (21.) für $x=0$:

$$\vartheta_3(0,q) = \vartheta_3(0,q^4)+\vartheta_2(0,q^4)$$
$$\vartheta(0,q) = \vartheta_3(0,q^4)-\vartheta_2(0,q^4)$$
$$\vartheta_2^4(0,q) = 8\vartheta_2(0,q^4)\,\vartheta_3(0,q^4)[\vartheta_3^2(0,q^4)+\vartheta_2^2(0,q^4)],$$

also, wenn man das Product aus den letzten drei Formeln bildet und dabei die Relation (E.)

$$\vartheta_3^4(0,q^4)-\vartheta_2^4(0,q^4) = \vartheta^4(0,q^4)$$

anwendet:

$$(22^*.)\qquad \vartheta_2^4(0,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta(0,q) = 8\vartheta^4(0,q^4)\,\vartheta_2(0,q^4)\,\vartheta_3(0,q^4).$$

Man dividire beide Seiten der Gleichungen (22.), (22*.) durch einander, so ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)}{\vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)} = \frac{\vartheta_1'(0,q^4)}{\vartheta(0,q^4)\,\vartheta_2(0,q^4)\,\vartheta_3(0,q^4)};$$



d. h. die Function

$$\xi(q) = \frac{\vartheta_1'(0,q)}{\vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)}$$

hat die Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn man $q^4$ für $q$ setzt.

Indem man dies Resultat wiederholt anwendet und berücksichtigt, dass, da der Modul von $q$ kleiner als 1 ist, $q^n$ für $n=\infty$ zur Grenze Null hat, ergiebt sich:

$$\xi(q) = \xi(0).$$

Aber für $q=0$ ist, wie leicht einzusehen, die Function $\xi$ der Einheit gleich, daher für jeden Werth von $q$:

$$\xi(q) = 1$$

oder

$$(23.)\qquad \vartheta_1'(0,q) = \vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q).$$

Diese wichtige Relation reducirt den constanten Factor, mit welchem $x$ in Gleichung (19.) multiplicirt ist, auf $\vartheta_3^2(0)$, sodass diese Gleichung jetzt in die folgende übergeht:

$$(19^*.)\qquad \vartheta_3^2(0)\cdot x = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

5.

Während $x$ dem unbestimmten elliptischen Integral erster Gattung proportional ist, hängt der constante Factor, um welchen sich $x$ davon unterscheidet, von dem vollständigen Integral (intégrale complète) ab, d. h. von dem innerhalb solcher Grenzen genommenen Integral, dass die unter demselben stehende Function $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ alle Werthe bekommt, deren sie für reelle Werthe von $\varphi$ fähig ist, was der Fall ist, sobald die Grenzen um $\frac{1}{2}\pi$ von einander verschieden sind. Es soll aber, während bisher $q$ ebensowohl imaginär als reell sein konnte, wenn nur sein Modul $<1$ war, von jetzt an die Untersuchung auf reelle Werthe von $q$ beschränkt werden.

Da für $x=\frac{\pi}{2}$ die Brüche $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}$ und $\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}$ die Werthe $\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k}$

und 0 bekommen, so geht aus den Gleichungen (14.)

$$\sqrt{k}\sin\varphi = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \quad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi = \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}$$

hervor, dass für $x = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\varphi = 1, \quad \cos\varphi = 0$$

werden. Daher wird $\varphi$ gleich $\frac{\pi}{2}$ oder von diesem Werthe um ein ganzes Vielfaches von $2\pi$ verschieden, also

$$\varphi = (4n+1)\frac{\pi}{2},$$

wo $n$ eine ganze Zahl bedeutet. Es läſst sich aber leicht beweisen, dass $n = 0$ ist.

Man setze in (21.) $x = 0$ und bilde den Quotienten aus beiden Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta_2(0,q)} = \frac{\vartheta_2(x,q^4)}{\vartheta_2(0,q^4)}\cdot\rho,$$

wo der Ausdruck

$$\rho = \frac{\vartheta_3(x,q^4)}{\vartheta_3(0,q^4)}\cdot\frac{\vartheta_3^2(x,q^4)+\vartheta_2^2(x,q^4)}{\vartheta_3^2(0,q^4)+\vartheta_2^2(0,q^4)}$$

ein für alle reellen Werthe von $x$ und $q$ positiver Factor ist. Die Function

$$\frac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta_2(0,q)}$$

behält also ihr Zeichen, wenn man $q$ durch $q^4$ ersetzt. Durch fortgesetzte Anwendung hiervon, und indem man berücksichtigt, dass sich $q^m$ mit steigendem $m$ immer mehr der Null nähert, gelangt man zu dem Ergebniss, dass die obige Function gleiches Zeichen mit

$$\frac{\vartheta_2(x,\delta)}{\vartheta_2(0,\delta)}$$

hat, wo $\delta$ unendlich klein ist. Aber für ein unendlich kleines $\delta$ nähert sich dieser Bruch der Grenze $\cos x$, *folglich hat, für alle reellen Werthe von $x$ und $q$, $\vartheta_2(x)$ das Zeichen von $\cos x$.*

Bei Vertauschung von $x$ mit $\frac{\pi}{2}-x$ geht $\vartheta_2(x)$ in $\vartheta_1(x)$ und $\cos x$ in $\sin x$ über, daher ist in dem obigen gleichzeitig das Ergebniss enthalten, *dass $\vartheta_1(x)$ das Zeichen von $\sin x$ hat.*



Da ferner $\vartheta(x)$ für reelle Werthe von $x$ und $q$ immer positiv ist, so schlieſst man aus den beiden Gleichungen:

$$\sqrt{k}\sin\varphi = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \quad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi = \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)},$$

dass $\sin\varphi$ das Zeichen von $\sin x$ und $\cos\varphi$ das Zeichen von $\cos x$ hat, oder, was, da $\varphi$ mit $x$ zugleich verschwindet, dasselbe ist: *$\varphi$ liegt mit $x$ immer in demselben Quadranten*, wird also mit $x$ gleichzeitig $= \frac{1}{2}\pi$, $\pi$, $\frac{3}{2}\pi$ etc.

Man kann also in (19*.) $x$ und $\varphi$ gleichzeitig $= \frac{\pi}{2}$ setzen und erhält

$$\vartheta_3^2(0)\cdot\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Wenn man, wie in den *Fundamenten*, das vollständige Integral mit $K$ bezeichnet, so hat man nach der eben bewiesenen Gleichung:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}[1+2q+2q^4+2q^9+\cdots]^2,$$

was in Verbindung mit (13.) die drei Gleichungen

$$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}, \quad \vartheta(0) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}$$

liefert. — Man kann jetzt $x$ als Function von $\varphi$, $k$ bestimmen, *ohne $q$ dabei zu gebrauchen.* Bezeichnet man mit Legendre durch $F(\varphi)$ das unbestimmte elliptische Integral erster Gattung, so hat man nämlich

$$x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{F(\varphi)}{K}.$$

Die bisher gewonnenen Resultate lassen sich folgendermaſsen zusammenfassen:

Die vier in § 1 definirten $\vartheta$-Functionen erfüllen solche Relationen, dass man die Amplitude $\varphi$, den Modul $k$ und den Complementarmodul $k'$ als Functionen von $x$ und $q$ durch die sechs gleichzeitig bestehenden Gleichungen (13.), (14.):

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}$$

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}$$

$$k^2+k'^2 = 1$$

$$\sqrt{k}\sin\varphi = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}$$

$$\sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi = \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \frac{2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\varphi = \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}$$

und die Bedingung, dass $\varphi$ mit $x$ zugleich verschwinde, definiren kann. Dann läſst sich aber umgekehrt $x$ als Function von $\varphi$ und $k$ durch die Gleichungen

$$(24.)\quad \frac{2Kx}{\pi} = F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

darstellen, und man hat überdies:

$$(25.)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0) = 1+2q+2q^4+2q^9+\cdots \\ \sqrt{\dfrac{2Kk}{\pi}} = \vartheta_2(0) = 2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots \\ \sqrt{\dfrac{2Kk'}{\pi}} = \vartheta(0) = 1-2q+2q^4-2q^9+\cdots \end{cases}$$

Im Folgenden werde ich, wie in den *Fundamenten*, mit $\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$ die inverse Function von $F(\varphi)$ bezeichnen, sodass aus $\frac{2Kx}{\pi} = F(\varphi)$ umgekehrt $\varphi = \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$ folgt.

6.

Es bleibt jetzt noch die Aufgabe zu lösen, $q$ als Function von $k$ zu bestimmen.

Durch die Gleichungen (25.) sind $K, k, k'$ als Functionen von $q$ definirt. Man setze in denselben $q^4$ an die Stelle von $q$ und bezeichne mit $K_4, k_4, k_4'$ die



Gröſsen, in welche alsdann $K, k, k'$ übergehen. Dies vorausgesetzt, so gehen die für $x=0$ in (20.) enthaltenen Gleichungen

$$\vartheta_3(0,q) = \vartheta_3(0,q^4)+\vartheta_2(0,q^4)$$
$$\vartheta(0,q) = \vartheta_3(0,q^4)-\vartheta_2(0,q^4)$$

unter Benutzung von (25.) in die folgenden über:

$$\sqrt{K} = (1+\sqrt{k_4})\sqrt{K_4}$$
$$\sqrt{Kk'} = (1-\sqrt{k_4})\sqrt{K_4},$$

aus welchen

$$\sqrt{k'} = \frac{1-\sqrt{k_4}}{1+\sqrt{k_4}}, \qquad \sqrt{k_4} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$

hervorgeht. Das hierdurch gewonnene Resultat läſst sich auch so aussprechen:

Man bestimme aus dem Complementarmodul $k'$ eines gegebenen Moduls $k$ einen neuen Modul $k_4$ durch die Relation

$$\sqrt{k_4} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}},$$

so stehen die zu den beiden Moduln $k, k_4$ gehörigen vollständigen Integrale $K, K_4$ in der einfachen durch die Gleichung

$$K = (1+\sqrt{k_4})^2 K_4$$

angegebenen Relation. Aber die zwischen $k'$ und $k_4$ bestehende Beziehung ist eine reciproke. Hieraus folgt, dass wenn $k_4'$ der gegebene Modul ist, dieselbe Operation, welche $k_4$ aus $k$ entstehen läſst, von $k_4'$ zu $k'$ führt. Man hat daher die Gleichung

$$K_4' = (1+\sqrt{k'})^2 K'$$

oder

$$K' = \frac{1}{(1+\sqrt{k'})^2} K_4'.$$

Aus den beiden Relationen zwischen $K$ und $K_4$ und zwischen $K'$ und $K_4'$ ergiebt sich:

$$\frac{K_4'}{K_4} = [(1+\sqrt{k'})(1+\sqrt{k_4})]^2 \frac{K'}{K}$$

oder, da

$$(1+\sqrt{k'})(1+\sqrt{k_4}) = 2$$

ist:

$$\frac{K_4'}{K_4} = 4\frac{K'}{K}.$$

Sieht man $\frac{K'}{K}$ als Function von $q$ an, so hat diese Function also die durch die Gleichung

$$\mathrm{funct}(q^4) = 4\,\mathrm{funct}(q)$$

ausgedrückte Eigenschaft, eine Eigenschaft, welche sie mit dem Logarithmus gemein hat, da

$$\lg(q^4) = 4\lg q.$$

Bezeichnet man mit $\psi(q)$ den Quotienten aus beiden Functionen, setzt also

$$\psi(q) = \frac{K\lg q}{K'},$$

so hat daher $\psi(q)$ die Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn man $q^4$ für $q$ setzt, und hieraus folgt wiederum durch Wiederholung dieses Schlusses, und indem man $\psi(0)$ mit $c$ bezeichnet:

$$\text{(26.)} \qquad \frac{K\lg q}{K'} = c.$$

Um den Werth der Constante $c$ zu ermitteln, betrachte man die Werthe von $K$ und $K'$ für unendlich kleine Werthe von $q$, für welche zugleich $k^2$ unendlich klein wird, und zwar so, dass

$$\operatorname*{Lim.}_{q=0} \frac{k^2}{16q} = 1$$

ist. In diesem Falle nähert sich $K$ der Grenze $\frac{\pi}{2}$, dagegen wächst

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2\varphi}}$$

wegen der in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Elemente des Integrals ins Unendliche. Nach der erhaltenen Gleichung weiss man bereits, dass $K'$ proportional $\lg q$ oder, was dasselbe ist, proportional $\lg\frac{k}{4}$ unendlich werden muss; aber es muss ermittelt werden, mit welcher numerischen Constante $\lg\frac{k}{4}$ zu multipliciren ist, damit für unendlich kleine Werthe von $k$ das Verhältniss des Products zu $K'$ der Einheit unendlich nahe komme. Indem man

$$\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\sin\varphi} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\sin\varphi} - 1$$



in $K'$ substituirt, ergiebt sich

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\,\frac{k^2}{1-\sin\varphi} - k^2\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\sin\varphi}\right)}}$$

oder, wenn man

$$\mu = \frac{1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\sin\varphi}}{1+\frac{1}{2}\,\frac{k^2}{1-\sin\varphi}}$$

setzt:

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\,\frac{k^2}{1-\sin\varphi}}}\cdot(1-\mu k^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\,\frac{k^2}{1-\sin\varphi}}}\cdot\left\{1+\frac{1}{2}\mu k^2+\frac{1.3}{2.4}\mu^2k^4+\cdots\right\}.$$

Hier ist $\mu$ eine Gröfse, welche von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ immer kleiner als 1 bleibt, daher ergiebt sich:

$$K' = \left\{1+\frac{1}{2}\mu_1k^2+\frac{1.3}{2.4}\mu_2k^4+\cdots\right\}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1+\frac{1}{2}\,\frac{k^2}{1-\sin\varphi}}},$$

wo $\mu_1, \mu_2 \ldots$ Factoren sind, welche zwischen 0 und 1 liegen. Das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende bestimmte Integral findet man nach den gewöhnlichen Regeln der Integralrechnung

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{4}k^2}}\lg\frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}k^2}-\sqrt{1+\frac{1}{4}k^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}k^2}+\sqrt{1+\frac{1}{4}k^2}},$$

welcher Ausdruck für unendlich kleine Werthe von $k$ unendlich wenig von $\lg\frac{4}{k}$ und somit auch unendlich wenig von

$$-\tfrac{1}{2}\lg q$$

verschieden ist. Man hat daher

$$\operatorname*{Lim.}_{q=0}\frac{K\lg q}{K'} = -\pi.$$

Hieraus ergiebt sich

$$c = -\pi.$$

Die hier angewandte Analyse *), um $K'$ für kleine Werthe von $k$ in eine Reihe zu entwickeln, ist die nämliche, welche 1750 Euler im zweiten Theile

---

*) Eine andere Methode, um dasselbe Ziel zu erreichen, ist folgende:
Indem man in das vollständige Integral $K'$ für $\varphi$ eine neue Variable

$$z = k\operatorname{tg}\varphi$$

einführt, erhält man

$$K' = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(k^2+z^2)}}.$$

Es sei $\alpha$ eine Gröfse, welche mit $k$ gleichzeitig unendlich klein wird, doch so dass $\frac{k}{\alpha}$ ebenfalls unendlich klein ist, was zum Beispiel stattfindet, wenn $\alpha = \sqrt{k}$ gesetzt wird. Dies vorausgesetzt, theile man das Integral in ein von 0 bis $\alpha$ und ein von $\alpha$ bis $\infty$ genommenes und bezeichne mit

$$\overset{b}{\underset{a}{M}} f(z)$$

einen zwischen dem gröfsten und kleinsten Werthe von $f(z)$ innerhalb der Grenzen $z = a$, $z = b$ liegenden Mittelwerth, dann ist nach einem bekannten Satze über bestimmte Integrale

$$K' = \int_0^\alpha \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(k^2+z^2)}} + \int_\alpha^\infty \frac{dz}{z\sqrt{(1+z^2)\left(1+\frac{k^2}{z^2}\right)}}$$

$$= \int_0^\alpha \frac{dz}{\sqrt{k^2+z^2}} \cdot \overset{\alpha}{\underset{0}{M}} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + \int_\alpha^\infty \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} \cdot \overset{\infty}{\underset{\alpha}{M}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{z^2}}},$$

also, wenn $k$, $\alpha$ und $\frac{k}{\alpha}$ zugleich unendlich klein werden, bis auf eine unendlich kleine Grösse

$$K' = \int_0^\alpha \frac{dz}{\sqrt{k^2+z^2}} + \int_\alpha^\infty \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}},$$

oder, wenn man im ersten Integral $z = ku$, im zweiten $z = \frac{1}{u}$ setzt:

$$K' = \int_0^{\frac{\alpha}{k}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} + \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Da aber bekanntlich

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \lg(u+\sqrt{1+u^2}) = \lg u + \lg\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}\right)$$

ist, so ergiebt sich

$$K' = \lg\frac{\alpha}{k} + \lg\frac{1}{\alpha} + \lg\left(1+\sqrt{1+\frac{k^2}{\alpha^2}}\right) + \lg(1+\sqrt{1+\alpha^2}),$$

es ist also, wenn $\alpha$ und $\frac{k}{\alpha}$ unendlich klein sind, $K'$ unendlich wenig von $\lg\frac{4}{k}$ verschieden.

B.



der opuscula varii argumenti p. 161 auf das elliptische Integral zweiter Gattung angewandt hat.

Aus der Gleichung

$$\frac{K \lg q}{K'} = -\pi$$

folgt

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \tag{27.}$$

und hiermit ist die Aufgabe, $q$ als Function von $k$ zu bestimmen, gelöst.

Die erlangten Resultate können jetzt so ausgesprochen werden, dass man von dem elliptischen Integral erster Gattung ausgeht, und zwar folgendermafsen:

Es sei

$$F(\varphi) = u,$$

wo

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (0<k<1)$$

das elliptische Integral erster Gattung mit dem Modul $k$ ist, so setze man $\varphi$ als Function von $u$ betrachtend,

$$\varphi = \operatorname{am} u.$$

Dann hat man, wenn $K$, $K'$ die zu dem Modul $k$ und dem Complementarmodul $k' = \sqrt{1-k^2}$ gehörenden vollständigen Integrale sind,

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

und wenn

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \quad x = \frac{\pi u}{2K} \text{ oder } u = \frac{2Kx}{\pi}$$

gesetzt wird:

$$\sqrt{k}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots}$$

$$\sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1+2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots};$$

und es gilt für die Amplituden

$$\varphi = \operatorname{am} u = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}, \quad \psi = \operatorname{am} v = \operatorname{am}\frac{2Ky}{\pi}, \quad \sigma = \operatorname{am}(u+v) = \operatorname{am}\frac{2K(x+y)}{\pi}$$

das Additionstheorem:

$$\sin\operatorname{am}(u+v) = \frac{\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}v\,\Delta\operatorname{am}v+\sin\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v}$$

$$\cos\operatorname{am}(u+v) = \frac{\cos\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}v-\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}v\,\Delta\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}v}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v}$$

$$\Delta\operatorname{am}(u+v) = \frac{\Delta\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}v-k^2\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}v}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v},$$

welches man auch durch die Gleichungen

$$F(\sigma) = F(\varphi)+F(\psi)$$

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi+\sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$\cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\varphi\,\Delta\psi-k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

darstellen kann.

## 7.

Dem nachgewiesenen Zusammenhange zwischen den $\vartheta$-Functionen und dem elliptischen Integral erster Gattung soll das entsprechende für die Integrale zweiter und dritter Gattung hinzugefügt werden. Da die Variable $x$ der $\vartheta$-Functionen dem Integrale erster Gattung proportional ist, so werden die Integrale zweiter und dritter Gattung im Folgenden als Functionen des Integrals erster Gattung von der nämlichen Amplitude betrachtet.

Während zu den bisherigen Entwickelungen die Formelsysteme (C.), (D.), (E.) hinreichten, ist es jetzt nothwendig, zu dem System (B.) zurückzukehren. Die erste Formel dieses Systems ist

$$\vartheta(x+y+z)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(z)+\vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta(0)\,\vartheta(y+z)\,\vartheta(x+z)\,\vartheta(x+y).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach $z$, setzt alsdann $z=0$ und benutzt das § 4 (23.) gewonnene Resultat

$$\vartheta_1'(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0),$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}+\frac{\vartheta'(y)}{\vartheta(y)}-\frac{\vartheta'(x+y)}{\vartheta(x+y)} = \vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\,\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\,\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)},$$



also, wenn man

$$\text{(28.)}\quad \zeta(x) = \frac{d\lg\vartheta(x)}{dx} = \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} = \frac{2[2q\sin 2x-4q^4\sin 4x+6q^9\sin 6x-\cdots]}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}$$

setzt:

$$\text{(29.)}\quad \zeta(x)+\zeta(y)-\zeta(x+y) = \vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\,\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\,\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)}.$$

Die Function $\zeta(x)$ steht mit dem elliptischen Integral zweiter Gattung im genauesten Zusammenhange. Man differentiire (29.) nach $y$, und setze alsdann $y=0$, so ergiebt sich:

$$\zeta'(0)-\zeta'(x) = \left\{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right\}^2 = \left\{\frac{2K}{\pi}\sqrt{k}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right\}^2,$$

wo

$$\zeta'(x) = \frac{d\zeta(x)}{dx}.$$

Führt man an die Stelle von $x$ die Amplitude

$$\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

ein, sodass

$$\frac{2Kx}{\pi} = \int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad \frac{2K}{\pi}dx = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\qquad \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}.\sin\varphi,$$

so wird

$$\zeta'(0)-\zeta'(x) = \left\{\frac{2Kk}{\pi}\sin\varphi\right\}^2$$

$$[\zeta'(0)-\zeta'(x)]dx = \frac{2K}{\pi}\,\frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi,$$

also integrirt:

$$\zeta'(0).x-\zeta(x) = \frac{2K}{\pi}\int_0^\varphi\frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi$$

Setzt man nach Legendre

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

so ist

$$\int_0^\varphi\frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi = F(\varphi)-E(\varphi),$$

also

$$\text{(30.)}\quad \zeta'(0).x-\zeta(x) = \frac{2K}{\pi}[F(\varphi)-E(\varphi)].$$

Hieraus ergiebt sich der Werth von $\zeta'(0)$, indem man $x = \frac{\pi}{2}$ setzt, woraus sich zugleich $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergiebt. Da ferner nach (28.) $\zeta(x)$ für $x = \frac{\pi}{2}$ verschwindet, so wird

$$\frac{\pi}{2}\zeta'(0) = \frac{2K}{\pi}\left\{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Bezeichnet man nach Legendre das vollständige Integral zweiter Gattung mit

$$E^1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi$$

und der Uebereinstimmung wegen zugleich das vollständige Integral erster Gattung $K$ mit

$$F^1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

so ergiebt sich

$$\zeta'(0) = \frac{4F^1}{\pi^2}(F^1 - E^1).$$

Dieser Werth, in (30.) eingesetzt, giebt

$$(31.) \qquad \frac{\pi}{2}\zeta(x) = F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi).$$

Man bezeichne wie früher mit $\psi$, $\sigma$ die Amplituden von $\frac{2Ky}{\pi}$, $\frac{2K(x+y)}{\pi}$, so hat man die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}\zeta(x) \quad &= F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)\\
\frac{\pi}{2}\zeta(y) \quad &= F^1 E(\psi) - E^1 F(\psi)\\
\frac{\pi}{2}\zeta(x+y) &= F^1 E(\sigma) - E^1 F(\sigma).
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke substituire man in (29.), so geht diese Gleichung in

$$F^1[E(\varphi)+E(\psi)-E(\sigma)] - E^1[F(\varphi)+F(\psi)-F(\sigma)] = F^1 k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma$$

oder, da

$$F(\varphi)+F(\psi)-F(\sigma) = 0$$

ist, in

$$(32.) \qquad E(\varphi)+E(\psi)-E(\sigma) = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma$$

über. Dies ist das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung.



Man multiplicire (31.) mit

$$\frac{2}{\pi}dx = \frac{1}{K}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

und integrire, so ergiebt sich

$$\lg\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)} = \int_0^{\varphi} \frac{F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)}{F^1 \Delta\varphi} d\varphi$$

oder

$$\vartheta(x) = \vartheta(0) . e^{\int_0^{\varphi} \frac{F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)}{F^1 \Delta\varphi} d\varphi},$$

eine Gleichung, welche die Function $\vartheta(x)$ vermittelst der Integrale erster und zweiter Gattung darstellt.

Die Gleichung (29.) führt auch dazu, die Integrale dritter Gattung vermittelst der $\vartheta$-Functionen darzustellen. Man setze in (29.) $y = a$ und $y = -a$ und bilde die Differenz beider Resultate, so ergiebt sich:

$$2\zeta(a)+\zeta(x-a)-\zeta(x+a) = \vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\left\{\frac{\vartheta_1(x+a)}{\vartheta(x+a)} + \frac{\vartheta_1(x-a)}{\vartheta(x-a)}\right\}.$$

Nach (C. 17) geht diese Gleichung in

$$(33.) \qquad \zeta(a) + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \frac{\vartheta_1(a)\vartheta_2(a)\vartheta_3(a)\vartheta_1^2(x)}{\vartheta(a)\vartheta(x+a)\vartheta(x-a)}$$

über. Wendet man auf den Nenner der rechten Seite (C. 6) an und setzt

$$\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}, \qquad \alpha = \operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi},$$

so verwandelt sich die Gleichung in:

$$\begin{aligned}
\zeta(a) + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} &= \vartheta^2(0)\frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\frac{\vartheta_2(a)}{\vartheta(a)}\frac{\vartheta_3(a)}{\vartheta(a)} \cdot \frac{\frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}}{1 - \frac{\vartheta_1^2(a)\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(a)\vartheta^2(x)}}\\
&= \frac{2K}{\pi}\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\frac{k^2\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}.
\end{aligned}$$

Indem man mit $\frac{2K}{\pi}dx = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ multiplicirt und integrirt, ergiebt sich:

$$x\zeta(a) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\int_0^{\varphi}\frac{k^2\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist das elliptische Integral dritter Gattung in der in den *Fundamenten* eingeführten Gestalt, welches ich mit $\Pi(\varphi, \alpha)$ bezeichne, und in welchem der von Legendre mit $n$ bezeichnete Parameter durch $-k^2 \sin^2 \alpha$ ersetzt ist. Die Formel

$$\Pi(\varphi, \alpha) = \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha \, \Delta\alpha \sin^2\varphi \, d\varphi}{(1-k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\, \Delta\varphi} = x\zeta(a) + \tfrac{1}{2} \lg \frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} \tag{34.}$$

ist die Fundamentalgleichung für das Integral dritter Gattung. Durch dieselbe wird die von drei Variabeln $\varphi, \alpha, k$ abhangende Function $\Pi$ auf Functionen von zwei Variabeln und, wenn $\varphi$ und $\alpha$ reell sind, von nur zwei reellen Argumenten zurückgeführt.

Aus (34.) folgen mit grosser Leichtigkeit die Haupteigenschaften der Integrale dritter Gattung. Man setze $x = \frac{\pi}{2}$, woraus $\varphi = \frac{\pi}{2}$ folgt, so wird

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = \frac{\pi}{2}\zeta(a) = F^1 E(\alpha) - E^1 F(\alpha),$$

wodurch das vollständige Integral dritter Gattung auf die vollständigen und die unbestimmten Integrale erster und zweiter Gattung zurückgeführt wird.

Vertauscht man in (34.) die Amplitude $\varphi$ mit dem Parameter $\alpha$ und subtrahirt beide Resultate von einander, so ergiebt sich:

$$\Pi(\varphi, \alpha) - \Pi(\alpha, \varphi) = x\zeta(a) - a\zeta(x) = F(\varphi) E(\alpha) - E(\varphi) F(\alpha), \tag{35.}$$

worin das Theorem von der Vertauschung der Amplitude und des Parameters enthalten ist.

Wendet man (34.) auf die drei Amplituden

$$\varphi = \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}, \qquad \psi = \operatorname{am} \frac{2Ky}{\pi}, \qquad \sigma = \operatorname{am} \frac{2K(x+y)}{\pi}$$

an und schreibt $\vartheta(x-a)$ für $\vartheta(a-x)$, so ergiebt sich:

$$\Pi(\varphi, \alpha) = x\zeta(a) + \tfrac{1}{2}\lg \frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)}$$

$$\Pi(\psi, \alpha) = y\zeta(a) + \tfrac{1}{2}\lg \frac{\vartheta(y-a)}{\vartheta(y+a)}$$

$$\Pi(\sigma, \alpha) = (x+y)\zeta(a) + \tfrac{1}{2}\lg \frac{\vartheta(x+y-a)}{\vartheta(x+y+a)},$$



und hieraus:

$$\Pi(\varphi, \alpha) + \Pi(\psi, \alpha) - \Pi(\sigma, \alpha) = \tfrac{1}{2}\lg \frac{\vartheta(x-a)\,\vartheta(y-a)\,\vartheta(x+y+a)}{\vartheta(x+a)\,\vartheta(y+a)\,\vartheta(x+y-a)}.$$

Den aus $\vartheta$-Functionen zusammengesetzten Quotienten auf der rechten Seite dieser Gleichung verwandelt man mit Hülfe der bereits oben angewandten, dem Formelsystem (B.) angehörenden Gleichung

$$\vartheta(0)\,\vartheta(y+z)\,\vartheta(x+z)\,\vartheta(x+y) = \vartheta(x+y+z)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(z) + \vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(z)$$

in einen nur von der Function sinus amplitudinis abhangenden Ausdruck. Man setze nämlich $z = -a$ und $z = a$, und dividire beide Resultate durch einander, so ergiebt sich, wenn man überdies

$$A = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(x+y-a), \qquad A' = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(x+y+a)$$

setzt:

$$\frac{\vartheta(x-a)\vartheta(y-a)\vartheta(x+y+a)}{\vartheta(x+a)\vartheta(y+a)\vartheta(x+y-a)} = \frac{1 - \dfrac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\dfrac{\vartheta_1(x+y-a)}{\vartheta(x+y-a)}}{1 + \dfrac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\dfrac{\vartheta_1(x+y+a)}{\vartheta(x+y+a)}} = \frac{1-k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A}{1+k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A'},$$

und hierdurch geht die oben erhaltene Formel in

$$\left\{\begin{aligned} &\Pi(\varphi, \alpha) + \Pi(\psi, \alpha) - \Pi(\sigma, \alpha) = \tfrac{1}{2}\lg \frac{1-k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A}{1+k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A'}, \\ &F(A) = F(\sigma) - F(\alpha), \qquad F(A') = F(\sigma) + F(\alpha) \end{aligned}\right. \tag{36.}$$

über, worin das Additionstheorem der Integrale dritter Gattung enthalten ist.

Einen ähnlichen Satz giebt es für die Addition der Parameter $\alpha$ bei unveränderter Amplitude. Diesen kann man vermittelst des Satzes (35.) von der Vertauschung der Amplitude und des Parameters aus (36.) ableiten, indem man

$$\alpha = \operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}, \qquad \beta = \operatorname{am}\frac{2Kb}{\pi}, \qquad \gamma = \operatorname{am}\frac{2K(a+b)}{\pi}$$

setzt, sodass

$$F(\alpha) + F(\beta) - F(\gamma) = 0$$

ist. Die Gleichung (35.) ergiebt nämlich:

$$\Pi(\varphi, \alpha) = \Pi(\alpha, \varphi) + F(\varphi) E(\alpha) - E(\varphi) F(\alpha)$$
$$\Pi(\varphi, \beta) = \Pi(\beta, \varphi) + F(\varphi) E(\beta) - E(\varphi) F(\beta)$$
$$\Pi(\varphi, \gamma) = \Pi(\gamma, \varphi) + F(\varphi) E(\gamma) - E(\varphi) F(\gamma).$$

und hieraus folgt:

$$\Pi(\varphi,\alpha)+\Pi(\varphi,\beta)-\Pi(\varphi,\gamma) = \begin{cases} \Pi(\alpha,\varphi)+\Pi(\beta,\varphi)-\Pi(\gamma,\varphi) \\ +F(\varphi)[E(\alpha)+E(\beta)-E(\gamma)] \\ -E(\varphi)[F(\alpha)+F(\beta)-F(\gamma)]. \end{cases}$$

Aber nach (36.) ist

$$\Pi(\alpha,\varphi)+\Pi(\beta,\varphi)-\Pi(\gamma,\varphi) = \tfrac{1}{2}\lg\frac{1-k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi\sin\Phi}{1+k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi\sin\Phi'},$$

$$F(\Phi) = F(\gamma)-F(\varphi), \qquad F(\Phi') = F(\gamma)+F(\varphi),$$

während nach (32.)

$$E(\alpha)+E(\beta)-E(\gamma) = k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

folglich ergiebt sich:

$$(36^*.)\begin{cases} \Pi(\varphi,\alpha)+\Pi(\varphi,\beta)-\Pi(\varphi,\gamma) = \tfrac{1}{2}\lg\dfrac{1-k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi\sin\Phi}{1+k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi\sin\Phi'}+k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,F(\varphi), \\ F(\gamma) = F(\alpha)+F(\beta), \quad F(\Phi) = F(\gamma)-F(\varphi), \quad F(\Phi') = F(\gamma)+F(\varphi) \end{cases}$$

als Theorem von der Addition der Parameter der Integrale dritter Gattung.

Schliesslich mögen die Theoreme (17.), (32.), (36.) von der Addition der Amplituden für die drei Gattungen der elliptischen Integrale zusammengestellt werden. Es sei

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi,$$

$$\Pi(\varphi,\alpha) = \int_0^\varphi \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = x\zeta(a)+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)},$$

und man bestimme aus den beiden Amplituden $\varphi$, $\psi$, eine dritte $\sigma$ den Gleichungen

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi+\sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$\cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\varphi\,\Delta\psi-k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

gemäfs, so hat man:

$$F(\varphi)+F(\psi)-F(\sigma) = 0$$

$$E(\varphi)+E(\psi)-E(\sigma) = k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma$$

$$\Pi(\varphi,\alpha)+\Pi(\psi,\alpha)-\Pi(\sigma,\alpha) = \tfrac{1}{2}\lg\frac{1-k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A}{1+k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A'},$$



wo

$$F(A) = F(\sigma)-F(\alpha), \qquad F(A') = F(\sigma)+F(\alpha).$$

Man sieht daraus, dass, wenn $P(\varphi)$ irgend ein elliptisches Integral bedeutet, der Ausdruck

$$P(\varphi)+P(\psi)-P(\sigma)$$

sich immer durch algebraische und logarithmische Functionen von $\sin\varphi$ und $\sin\psi$ darstellen läfst.

## 8.

Die Formeln (A.) § 2 und (B.) § 3 sowie die aus den letzteren hergeleiteten Formeln (29.), (33.), (34.) § 7 sind von so grofser Wichtigkeit für die Theorie der elliptischen Functionen, dass es zweckmäfsig ist, auf dieselben noch einmal zurückzukommen, um alle Formeln derselben Art, welche zwischen $\vartheta$-Functionen möglich sind, in einem vollständigen System derselben vor Augen zu haben.

Die 12 Formeln (A.) sind die Fundamentalformeln, aus welchen alle Relationen zwischen $\vartheta$-Functionen mit ein und demselben Werthe von $q$ abgeleitet werden können. Durch lineare Verbindungen kann man aus den Formeln (A.) andere ableiten, welche mit denselben als gleichberechtigt anzusehen sind. Aber alle diese Formeln lassen sich in einer übersichtlichen Art zusammenfassen.

Aus den Formeln (A. 1, 2, 3, 4) ergeben sich die vier Producte $\vartheta_\alpha(w)\,\vartheta_\alpha(x)\,\vartheta_\alpha(y)\,\vartheta_\alpha(z)$ für $\alpha = 0, 1, 2, 3$ als lineare Ausdrücke der vier Producte $\vartheta_\alpha(w')\,\vartheta_\alpha(x')\,\vartheta_\alpha(y')\,\vartheta_\alpha(z')$ für dieselben Werthe von $\alpha$, und zwar bestehen unter diesen zwei Systemen von Producten genau dieselben Gleichungen wie nach den Formeln (10.) unter den beiden Systemen von Variabeln $w, x, y, z$ und $w', x', y', z'$. Genau dieselbe lineare Abhängigkeit zwischen zwei Systemen von vier anderen Producten aus $\vartheta$-Functionen erhält man aus den Formeln (A. 5, 6), (A. 7, 8), (A. 9, 10), (A. 11), sodass man das auf diese Weise gewonnene Resultat in fünf Systemen von je vier Formeln auf folgende Art darstellen kann:

Man verstehe unter $\lambda, \mu, \nu$ irgend eine Permutation der Zahlen 0, 2, 3 und bezeichne mit $W, X, Y, Z$ eines der in der nachstehenden Tabelle enthaltenen Systeme von vier aus $\vartheta$-Functionen gebildeten Producten

(F.)

| | $W$ | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|---|
| (1.) | $\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$ | $\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$ | $\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$ | $\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$ |
| (2.) | $\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$ | $\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$ | $\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$ | $\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$ |
| (3.) | $\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$ | $\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$ | $\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$ | $\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$ |
| (4.) | $\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$ | $\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$ | $\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$ | $\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$ |
| (5.) | $\vartheta_1(w)\vartheta_\lambda(x)\vartheta_\mu(y)\vartheta_\nu(z)$ | $\vartheta_\lambda(w)\vartheta_1(x)\vartheta_\nu(y)\vartheta_\mu(z)$ | $\vartheta_\mu(w)\vartheta_\nu(x)\vartheta_1(y)\vartheta_\lambda(z)$ | $\vartheta_\nu(w)\vartheta_\mu(x)\vartheta_\lambda(y)\vartheta_1(z)$ |

und mit $W', X', Y', Z'$ die nämlichen aus den Argumenten $w', x', y', z'$ gebildeten Producte von $\vartheta$-Functionen, so bestehen zwischen den beiden Systemen von vier Producten die Relationen:

$$2W' = W+X+Y+Z, \qquad 2X' = W+X-Y-Z,$$
$$2Y' = W-X+Y-Z, \qquad 2Z' = W-X-Y+Z.$$

Aus diesen $4.5 = 20$ Relationen können $5.12 = 60$ Gleichungen gebildet werden, in welchen auf der rechten, wie auf der linken Seite nur zwei Producte von $\vartheta$-Functionen stehen.

Mit Hülfe von (F.) läfst sich das Formelsystem (B.) zu einem System von 13 Doppelgleichungen vervollständigen. Führt man zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$s = x+y+z, \quad \xi = y+z, \quad \eta = x+z, \quad \zeta = x+y$$

ein, so ergeben sich folgende 13 Doppelgleichungen:

(G.)

$$(1.)\ \vartheta_3(0)\vartheta_3(\xi)\vartheta_3(\eta)\vartheta_3(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$$
$$(2.)\ \vartheta_2(0)\vartheta_2(\xi)\vartheta_2(\eta)\vartheta_2(\zeta) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$$
$$(3.)\ \vartheta(0)\vartheta(\xi)\vartheta(\eta)\vartheta(\zeta) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$$
$$(4.)\ \vartheta_3(0)\vartheta_3(\xi)\vartheta(\eta)\vartheta(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$$
$$(5.)\ \vartheta_2(0)\vartheta_2(\xi)\vartheta_1(\eta)\vartheta_1(\zeta) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$$
$$(6.)\ \vartheta(0)\vartheta(\xi)\vartheta_3(\eta)\vartheta_3(\zeta) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$$
$$(7.)\ \vartheta_3(0)\vartheta_3(\xi)\vartheta_2(\eta)\vartheta_2(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$$
$$(8.)\ \vartheta_2(0)\vartheta_2(\xi)\vartheta_3(\eta)\vartheta_3(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$$
$$(9.)\ \vartheta(0)\vartheta(\xi)\vartheta_1(\eta)\vartheta_1(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$$
$$(10.)\ \vartheta_3(0)\vartheta_3(\xi)\vartheta_1(\eta)\vartheta_1(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$$
$$(11.)\ \vartheta_2(0)\vartheta_2(\xi)\vartheta(\eta)\vartheta(\zeta) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$$
$$(12.)\ \vartheta(0)\vartheta(\xi)\vartheta_2(\eta)\vartheta_2(\zeta) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$$
$$(13.)\ \vartheta_\lambda(0)\vartheta_1(\xi)\vartheta_\nu(\eta)\vartheta_\mu(\zeta) = \vartheta_1(s)\vartheta_\lambda(x)\vartheta_\mu(y)\vartheta_\nu(z) - \vartheta_\lambda(s)\vartheta_1(x)\vartheta_\nu(y)\vartheta_\mu(z) = \vartheta_\nu(s)\vartheta_\mu(x)\vartheta_\lambda(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_\mu(s)\vartheta_\nu(x)\vartheta_1(y)\vartheta_\lambda(z)$$



Indem man die 13 Formeln (G.) nach einer der Variabeln $x, y, z$ logarithmisch differentiirt und dann die Variable gleich Null setzt, erhält man ein System von 15 Formeln, welche der Gleichung (29.) ähnlich sind. Jede dieser 15 Formeln enthält auf der linken Seite ein Aggregat der Form

$$\frac{\vartheta'_\lambda(x)}{\vartheta_\lambda(x)} + \frac{\vartheta'_\mu(y)}{\vartheta_\mu(y)} + \frac{\vartheta'_\nu(z)}{\vartheta_\nu(z)},$$

wo $x, y, z$ drei Variabele bedeuten, zwischen welchen die Relation

$$x+y+z = 0$$

besteht. Die Indices $\lambda, \mu, \nu$ haben die Werthe $0, 1, 2, 3$ und können von einander verschieden sein oder coincidiren. Auf der rechten Seite dagegen steht ein Product von drei Quotienten aus $\vartheta$-Functionen, deren Argumente $x, y, z$ sind.

Die möglichen Combinationen der Indices $\lambda, \mu, \nu$ führen im Ganzen auf zwanzig Fälle. Von diesen lassen sich je fünf durch Aenderung der Argumente um $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}i\lg q$ auf *eine* Formel zurückführen, in welcher $\lambda = \mu = \nu$. Aber die fünf Formeln, in welchen $\lambda = \mu = \nu = 1$, oder welche hieraus durch Argumentänderungen herzuleiten sind, nämlich die Combinationen 111, 100, 122, 133, 023 müssen ausgeschlossen werden. In diesen fünf Fällen läfst sich nämlich das oben angeführte Aggregat zwar auch durch doppelt periodische Functionen resp. von $x, y, z$ ausdrücken, aber dieser Ausdruck ist kein blofses Product.

Die 15 übrig bleibenden Formeln, welche sich durch Argumentänderung auf 000, 222, 333 zurückführen lassen, können in folgende vier Formeln zusammengefafst werden:

(H.)

$$(1.)\quad \frac{\vartheta'_\lambda(x)}{\vartheta_\lambda(x)} + \frac{\vartheta'_\lambda(y)}{\vartheta_\lambda(y)} + \frac{\vartheta'_\lambda(z)}{\vartheta_\lambda(z)} = (-1)^{\lambda-1}\,\frac{\vartheta'_1(0)}{\vartheta_\lambda(0)}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_\lambda(x)}\,\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta_\lambda(y)}\,\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_\lambda(z)}$$
$$(2.)\quad \frac{\vartheta'_\mu(x)}{\vartheta_\mu(x)} + \frac{\vartheta'_\mu(y)}{\vartheta_\mu(y)} + \frac{\vartheta'_\nu(z)}{\vartheta_\nu(z)} = -\varepsilon.\frac{\vartheta'_1(0)}{\vartheta_\nu(0)}\,\frac{\vartheta_\lambda(x)}{\vartheta_\mu(x)}\,\frac{\vartheta_\lambda(y)}{\vartheta_\mu(y)}\,\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_\nu(z)}$$
$$(3.)\quad \frac{\vartheta'_1(x)}{\vartheta_1(x)} + \frac{\vartheta'_1(y)}{\vartheta_1(y)} + \frac{\vartheta'_\lambda(z)}{\vartheta_\lambda(z)} = -\frac{\vartheta'_1(0)}{\vartheta_\lambda(0)}\,\frac{\vartheta_\lambda(x)}{\vartheta_1(x)}\,\frac{\vartheta_\lambda(y)}{\vartheta_1(y)}\,\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_\lambda(z)}$$
$$(4.)\quad \frac{\vartheta'_\mu(x)}{\vartheta_\mu(x)} + \frac{\vartheta'_\nu(y)}{\vartheta_\nu(y)} + \frac{\vartheta'_1(z)}{\vartheta_1(z)} = \frac{\vartheta'_1(0)}{\vartheta_\lambda(0)}\,\frac{\vartheta_\nu(x)}{\vartheta_\mu(x)}\,\frac{\vartheta_\mu(y)}{\vartheta_\nu(y)}\,\frac{\vartheta_\lambda(z)}{\vartheta_1(z)}$$

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}\cdot\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}.$$

In diesen Formeln bedeuten $\lambda, \mu, \nu$ die drei Indices $0, 2, 3$ in irgend einer Permutation und $\vartheta'_\lambda(x)$ die Ableitung von $\vartheta_\lambda(x)$, es repräsentiren daher die erste, dritte, vierte dieser Formeln je drei, die zweite sechs verschiedene Gleichungen.

In derselben Weise, in welcher aus (29.) zu (33.) übergegangen wurde, kann man aus (H.) 16 verschiedene Gleichungen ableiten, in denen die linke Seite die Form

$$\frac{\vartheta'_\lambda(y)}{\vartheta_\lambda(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_\mu(x-y)}{\vartheta_\mu(x+y)}$$

hat, wo $\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3$. Diese 16 Formeln lassen sich in fünf Gleichungen zusammenfassen. Es bezeichne $\lambda, \mu, \nu, 1$ eine Permutation der vier Indices $0, 1, 2, 3$, so hat man:

(I.)

$$(1.)\quad \frac{\vartheta'_\lambda(y)}{\vartheta_\lambda(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_\lambda(x-y)}{\vartheta_\lambda(x+y)} = (-1)^\lambda \frac{\vartheta_1(y)\vartheta_\mu(y)\vartheta_\nu(y)\vartheta_1^2(x)}{\vartheta_\lambda(y)\vartheta_\lambda(x+y)\vartheta_\lambda(x-y)} = (-1)^\lambda \vartheta^2(0)\frac{\vartheta_1(y)\vartheta_\mu(y)\vartheta_\nu(y)\vartheta_1^2(x)}{\vartheta_\lambda(y)\cdot M_\lambda}$$

$$(2.)\quad \frac{\vartheta'_\mu(y)}{\vartheta_\mu(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_\nu(x-y)}{\vartheta_\nu(x+y)} = \varepsilon\cdot\frac{\vartheta_1(y)\vartheta_\lambda(y)\vartheta_\nu(y)\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\mu(y)\vartheta_\nu(x+y)\vartheta_\nu(x-y)} = \varepsilon\,\vartheta^2(0)\frac{\vartheta_1(y)\vartheta_\lambda(y)\vartheta_\nu(y)\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\mu(y)\cdot M_\nu}$$

$$(3.)\quad \frac{\vartheta'_1(y)}{\vartheta_1(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_\lambda(x-y)}{\vartheta_\lambda(x+y)} = \frac{\vartheta(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_1(y)\vartheta_\lambda(x+y)\vartheta_\lambda(x-y)} = \vartheta^2(0)\frac{\vartheta(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_1(y)\cdot M_\lambda}$$

$$(4.)\quad \frac{\vartheta'_\lambda(y)}{\vartheta_\lambda(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_1(x-y)}{\vartheta_1(x+y)} = \frac{\vartheta_1(y)\vartheta_\mu(y)\vartheta_\nu(y)\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\lambda(y)\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)} = \vartheta^2(0)\frac{\vartheta_1(y)\vartheta_\mu(y)\vartheta_\nu(y)\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\lambda(y)\cdot M_1}$$

$$(5.)\quad \frac{\vartheta'_1(y)}{\vartheta_1(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_1(x-y)}{\vartheta_1(x+y)} = \frac{\vartheta(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_1^2(x)}{\vartheta_1(y)\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)} = \vartheta^2(0)\frac{\vartheta(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_1^2(x)}{\vartheta_1(y)\cdot M_1}.$$

Hierin hat $\varepsilon$ wie oben die Bedeutung

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}\cdot\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}$$

und es ist zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
M &= \vartheta^2(x)\vartheta^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y) = \vartheta_3^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_2^2(y)\\
M_1 &= \vartheta_1^2(x)\vartheta^2(y) - \vartheta^2(x)\vartheta_1^2(y) = \vartheta_3^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y)\\
M_2 &= \vartheta_2^2(x)\vartheta^2(y) - \vartheta_3^2(x)\vartheta_1^2(y) = \vartheta^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(y)\\
M_3 &= \vartheta_3^2(x)\vartheta^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y) = \vartheta^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y)
\end{aligned}$$

gesetzt.



Man kann die obigen 5 Formeln (I.) auch in die *eine*

$$\frac{\vartheta'_\mu(y)}{\vartheta_\mu(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_\nu(x-y)}{\vartheta_\nu(x+y)} = \varepsilon\frac{\vartheta(y)\vartheta_1(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)}{\vartheta_\nu(x+y)\vartheta_\nu(x-y)}\cdot\frac{\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\mu^2(y)} = \varepsilon\,\vartheta^2(0)\frac{\vartheta(y)\vartheta_1(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)}{M_\nu}\cdot\frac{\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\mu^2(y)}$$

zusammenfassen, wenn man die in dieser Formel vorkommenden Indices $\lambda, \mu, \nu$ folgendermafsen bestimmt:

Die vier Indices $\lambda, \mu, \nu, 1$ bilden entweder eine vollständige Permutation der Zahlen $0, 1, 2, 3$, oder diese vier Zahlen coincidiren paarweise, d. h. es findet eins der 3 Gleichungspaare

$$\begin{aligned}
\mu &= \nu, & \lambda &= 1\\
\mu &= 1, & \lambda &= \nu\\
\nu &= 1, & \lambda &= \mu
\end{aligned}$$

statt, oder endlich es ist

$$\mu = \nu = \lambda = 1.$$

Aus dem Gleichungssystem (I.) kann man endlich, wenn man, wie oben

$$\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}, \qquad \alpha = \operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}$$

setzt, 16 Formeln ableiten, welche der Formel (34.) ähnlich sind, nämlich:

$$(1.)\quad \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}x + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\,\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

$$(2.)\quad \frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)}x + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{\cos\alpha\,\Delta\alpha\,d\varphi}{\sin\alpha\,(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

$$(3.)\quad \frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)}x + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{-\sin\alpha\,\Delta\alpha\,\Delta\varphi\,d\varphi}{\cos\alpha\,(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)}$$

$$(4.)\quad \frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)}x + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{-k^2\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\alpha\,(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

---

$$(5.)\quad \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}x + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(a-x)}{\vartheta_1(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\,d\varphi}{(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha)\,\Delta\varphi}$$

$$(6.)\quad \frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)}x + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(a-x)}{\vartheta_1(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{\cos\alpha\,\Delta\alpha\,\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sin\alpha\,(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha)\,\Delta\varphi}$$

$$(7.)\quad \frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)}x + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(a-x)}{\vartheta_1(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{\sin\alpha\,\Delta\alpha\cos^2\varphi\,d\varphi}{\cos\alpha\,(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha)\,\Delta\varphi}$$

$$(8.)\quad \frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)}x + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(a-x)}{\vartheta_1(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\varphi\,d\varphi}{\Delta\alpha\,(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha)}$$

---

$$(9.)\quad \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(a-x)}{\vartheta_2(a+x)} = \int_0^{\varphi}\frac{\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\,\Delta\varphi\,d\varphi}{\cos^2\alpha-\Delta^2\alpha\sin^2\varphi}$$

$$(10.)\quad \frac{\vartheta_1'(a)}{\vartheta_1(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(a-x)}{\vartheta_2(a+x)} = \int_0^{\varphi}\frac{\cos\alpha\,\Delta\alpha\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sin\alpha(\cos^2\alpha-\Delta^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

$$(11.)\quad \frac{\vartheta_2'(a)}{\vartheta_2(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(a-x)}{\vartheta_2(a+x)} = \int_0^{\varphi}\frac{k'^2\sin\alpha\,\Delta\alpha\sin^2\varphi\,d\varphi}{\cos\alpha(\cos^2\alpha-\Delta^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

$$(12.)\quad \frac{\vartheta_3'(a)}{\vartheta_3(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(a-x)}{\vartheta_2(a+x)} = \int_0^{\varphi}\frac{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,d\varphi}{\Delta\alpha(\cos^2\alpha-\Delta^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

---

$$(13.)\quad \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(a-x)}{\vartheta_3(a+x)} = \int_0^{\varphi}\frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\cos^2\varphi\,d\varphi}{(\Delta^2\alpha-k^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

$$(14.)\quad \frac{\vartheta_1'(a)}{\vartheta_1(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(a-x)}{\vartheta_3(a+x)} = \int_0^{\varphi}\frac{\cos\alpha\,\Delta\alpha\,\Delta\varphi\,d\varphi}{\sin\alpha(\Delta^2\alpha-k^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)}$$

$$(15.)\quad \frac{\vartheta_2'(a)}{\vartheta_2(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(a-x)}{\vartheta_3(a+x)} = \int_0^{\varphi}\frac{-k'^2\sin\alpha\,\Delta\alpha\,d\varphi}{\cos\alpha(\Delta^2\alpha-k^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

$$(16.)\quad \frac{\vartheta_3'(a)}{\vartheta_3(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(a-x)}{\vartheta_3(a+x)} = \int_0^{\varphi}\frac{-k^2k'^2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\alpha(\Delta^2\alpha-k^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

---



# ANMERKUNGEN *).

## DEMONSTRATIO THEOREMATIS AD THEORIAM FUNCTIONUM ELLIPTICARUM SPECTANTIS.

1) S. 46 und 47. Dem Ausdruck von

$$y = \sin\operatorname{am}\left(\frac{\Xi}{M}, \lambda\right)$$

musste der Factor $(-1)^n$, der im Original fehlt, hinzugefügt werden. (Vgl. die Anm. (3).)

## FUNDAMENTA NOVA THEORIAE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM.

2) S. 68, Tab. III. (A.), (II.). Statt des hier gegebenen Werthes der vierten Wurzel im Ausdruck von $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ steht im Original der reciproke.

3) S. 87, 88. (§ 20). Der bei der Transformation der elliptischen Functionen vorkommende Multiplicator wird in den Fundamenten sowie in den übrigen Abhandlungen Jacobi's nicht überall in gleichem Sinne definirt. Da aber gleichwohl zu seiner Bezeichnung stets derselbe Buchstabe ($M$) gebraucht ist, so wird dadurch dem Leser das Verständniss erschwert. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, ist in dieser Ausgabe folgende typographische Unterscheidung durchgeführt worden: Der Werth des Multiplicators, wie er in den Fundamenten und an andern Orten bei der allgemeinen Transformation $n$ter Ordnung vorkommt, ist überall mit dem cursiven $M$ bezeichnet worden. Es ist also, wenn (§ 20)

$$\omega = \frac{mK+m'iK'}{n}$$

gesetzt wird,

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{\sin\operatorname{coam}4\omega\sin\operatorname{coam}8\omega\ldots\sin\operatorname{coam}2(n-1)\omega}{\sin\operatorname{am}4\omega\sin\operatorname{am}8\omega\ldots\sin\operatorname{am}2(n-1)\omega}\right\}^2.$$

---

*) In diesen Anmerkungen, die ich grösstentheils nach hinterlassenen Notizen Borchardt's ausgearbeitet habe, findet der Leser diejenigen Stellen angegeben, an denen in dieser Ausgabe der Jacobischen Werke Veränderungen des ursprünglichen Textes vorgenommen sind, deren Nothwendigkeit nicht sofort in die Augen fällt. Die zahlreichen Druck-, Schreib- und offenbaren Rechenfehler, welche bei der dem Drucke vorangegangenen Revision sämmtlicher Abhandlungen bemerkt wurden, sind ohne Weiteres berichtigt worden. Wahrscheinlich habe ich, da es mir nicht möglich war, den ganzen Band Seite für Seite mit dem Texte, der dem Neudrucke zu Grunde liegt, und allen zugehörigen Correcturbogen zu vergleichen, noch Stellen, die mit einer Anmerkung hätten begleitet werden müssen, übersehen; ich kann jedoch versichern, dass sowohl in den Formeln als in dem Worttext auch nicht die geringste Veränderung ohne vorherige reifliche Erwägung vorgenommen worden ist.
W.

Dagegen bedeutet in den Fällen, wo (unter der Voraussetzung eines zwischen 0 und 1 enthaltenen reellen Werthes von $k$) $M$ eine reelle Grösse ist, $\mathrm{M}$ (antiqua) den **absoluten Betrag** derselben. Demgemäss ist z. B. in den S. 104–108 zusammengestellten Formeln für die erste und zweite reelle Transformation

$$\mathrm{M} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} M \quad \text{bei der Annahme} \quad \omega = \frac{K}{n},$$

$$\mathrm{M}_1 = M \quad \text{bei der Annahme} \quad \omega = \frac{iK'}{n}.$$

In der vorhergehenden Abhandlung musste daher der Gleichförmigkeit wegen von S. 45 an $\mathrm{M}$ statt $M$ gesetzt werden, und es bleibt dann der in dieser Abhandlung gegebene Beweis des Transformations-Theorems, wie Jacobi in dem S. 409 abgedruckten Briefe an Legendre bemerkt, Wort für Wort gültig, wenn überall $\omega$ für $\frac{K}{n}$, also

$$\mathrm{M} = \left\{\frac{\sin\operatorname{coam} 4\omega \ldots \sin\operatorname{coam} 2(n-1)\omega}{\sin\operatorname{am} 4\omega \ldots \sin\operatorname{am} 2(n-1)\omega}\right\}^2$$

gesetzt wird. Es würde aber unzweckmässig sein aus diesem Grunde allgemein $\mathrm{M}$ durch die vorstehende Gleichung zu definiren, weil dann in dem Falle, wo $\omega = \frac{iK'}{n}$, $\mathrm{M}$ nicht stets wie in den Fundamenten eine positive Grösse sein würde.

4) S. 110, Z. 5 ist $\omega' = \frac{\omega}{i} = \frac{\mp iK}{n}$ statt $\frac{\pm iK}{n}$ gesetzt.

5) S. 112, Z. 5 v. u. $k$ loco $\lambda_1$ statt $k$ loco $\lambda$.

6) S. 112, Z. 4 v. u. $nu$ loco $\frac{u}{\mathrm{M}_1}$ statt $nu$ loco $\frac{u}{\mathrm{M}}$.

7) S. 127, Z. 11, 13, 14 musste $-K'$ an die Stelle von $K'$ gesetzt werden, wenn der Complementarmodul von $\frac{1}{k}$, wie Jacobi S. 126 ausdrücklich angiebt, $\frac{k'i}{k}$ sein und die Gleichung

$$\Delta\operatorname{am}(K, k) = k'$$

auch in dem Falle, wo $\frac{1}{k}$ an die Stelle von $k$ tritt, gültig bleiben soll.

8) S. 128, Z. 1, 2, 5, 6 ist $m'-m$ für $m'+m$ gesetzt worden.

9) S. 131, Z. 1 und 5 $aa'+bb' = n$ für $aa'+bb' = 1$.

10) S. 136, Z. 1

$$-\frac{6k'}{k^3(1+k')^2} \quad \text{für} \quad \frac{6k'}{k^3(1+k')^2}$$

und

$$2(1-k')^2-1 \quad \text{für} \quad 2(1-k')^2+1.$$

11) S. 147, Z. 9, 15, 20 ist in Folge der auf S. 127 vorgenommenen Aenderung

$$K'-iK \quad \text{für} \quad K'+iK$$

gesetzt worden.

12) S. 153, Z. 11 $\operatorname{am}(u, k^{(p)})$ für $\operatorname{am}(u, k)$.

13) S. 155, § 39 (5.) ist der im Original auf der rechten Seite der Gleichung stehende Factor $\sqrt{k'}$ weggelassen.

14) S. 156, § 39 (10.) ist das Zeichen der linken Seite der Gleichung geändert.



15) S. 160 § 40 (11.) sind in der zweiten Form der Gleichung die im Original sich findenden Zähler

$$1+q, \quad 1+q^3, \quad 1+q^5$$

$$\text{in} \quad 1-q, \quad 1-q^3, \quad 1-q^5$$

geändert, und zugleich die Vorzeichen der Glieder zu abwechselnden gemacht worden.

16) S. 161, (16.) ist $-\frac{24}{5}$ statt $-\frac{24}{10}$ gesetzt.

17) S. 162 § 40 (30.)–(33.) Im Exponenten von $q$ ist $m$ für $4m-1$ gesetzt worden und $m$ definirt als numerus impar, cujus factores primi omnes formam $4a-1$ habent.

18) S. 172, Z. 5 v. u. ist $\prod(2n-1)$ statt $\prod(2n-2)$ gesetzt.

19) S. 173, Z. 8 $-2k^2$ statt $-2$, und

Z. 10 $-32k^2(1+k^2)$ statt $-32\,(1+k^2)$.

20) S. 180, Z. 1 v. u. Das constante Glied dieser Gleichung ist nach Jacobi's eigener Angabe (Crelle's Journal Bd. 30, S. 270) berichtigt worden.

21) S. 183, Z. 5 v. u. ist $x^2, x^4, x^6$ statt $x, x^2, x^3$ und

Z. 3 v. u. $y^2, y^4, y^6$ statt $y, y^2, y^3$ gesetzt.

22) S. 184, Z. 4. Die Formel für $\mathrm{S}_m^{(n)}$ ist nach Jacobi's Angabe (Crelle's Journal Bd. 30, S. 270) berichtigt.

23) S. 185, Z. 1 ist

$$\frac{1}{\prod(2n+1)} \cdot \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \frac{1}{\sin x} \quad \text{statt} \quad \frac{1}{\prod(2n)} \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}} \frac{1}{\sin x}$$

gesetzt worden.

24) S. 186, Z. 13 $-i\Delta\operatorname{am} u$ für $i\Delta\operatorname{am} u$.

25) S. 202, Z. 8. Im Original steht posito $p = 2^m$. Da der Buchstabe $m$ in diesem § bereits in anderer Bedeutung vorkommt, so ist statt seiner $p$ gewählt und $r$ für $p$ gesetzt worden.

26) S. 203, Z. 2. Nach dem Original würde unter $\Delta^{(r)}$ der Ausdruck

$$\frac{\Delta\operatorname{am}\left(\frac{2rK^{(r)}x}{\pi}, k^{(r)}\right)}{\sqrt{k^{(r)\prime}}}$$

zu verstehen sein, während aus der folgenden Gleichung erhellt, dass

$$\Delta^{(r)} = \Delta\operatorname{am}\left(\frac{2rK^{(r)}x}{\pi}, k^{(r)}\right)$$

zu setzen ist.

27) S. 204, Z. 1. Statt des hier gegebenen Werthes von

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}$$

steht im Original der reciproke. Der Irrthum ist von Jacobi selbst (Crelle's Journal, Bd. 26, S. 104) berichtigt worden.

28) S. 216, Z. 11. Hier ist $Z(2iK') = \frac{-i\pi}{K}$ statt $Z(2iK') = 0$ gesetzt.

29) S. 216, Z. 3 v. u. musste dem unendlichen Producte das Zeichen — vorgesetzt werden.

30) S. 216, Z. 1 v. u. Dasselbe gilt von dem Ausdrucke auf der Rechten der Gleichung (7.)

31) S. 222, Z. 5 v. u. Hier ist $\frac{\sqrt{1+k'}}{k}$ für $\frac{1}{2}\sqrt{1+k'}$ gesetzt.

32) S. 228, Z. 2 v. u. fehlt im Original auf der linken Seite der Gleichung der Factor $i$.

33) S. 229, Z. 6 musste den Functionen $H$ der Factor $i$ vorgesetzt werden.

34) S. 238, Gl. (13.). In den mit $\sqrt{q}$, $\sqrt{q^9}$, $\sqrt{q^{25}}$ multiplicirten Ausdrücken steht im Original $q$, $q^3$, $q^5$ statt $q^2$, $q^6$, $q^{10}$.

35) S. 239, Z. 1. In der Formel auf der rechten Seite der Gleichung musste dieselbe Veränderung wie in Gl. (13.) vorgenommen werden.

## NOTICES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

36) S. 253, Z. 5 und 6 v. u. Die hier gegebenen Modulargleichungen dritter und fünfter Ordnung unterscheiden sich von denen der Fundamenta dadurch, dass vorausgesetzt, es seien $u$ und $v$ beide reell, hier $u > v$ angenommen ist, in den Fundamentis dagegen $u < v$. Die Vertauschung von $u$ und $v$ lässt daher die hier gegebenen Modulargleichungen in die der Fundamenta übergehen.

37) S. 256, Z. 5 und 11. Die hier eingeführten Functionen $\Theta(x)$, $\mathrm{H}(x)$ unterscheiden sich von den Functionen $\Theta(u)$, $H(u)$ der Fundamenta dadurch, dass diese in jene übergehen, wenn $u = \frac{2Kx}{\pi}$ gesetzt wird. Deswegen sind hier die antiqua $\Theta$, H gewählt worden, während die Functionen der Fundamenta mit den cursiven $\Theta$, $H$ bezeichnet sind.

38) S. 258, Z. 5 und 12. Im Original fehlt auf der linken Seite der Gl. (21.) und in dem Ausdruck von

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{2K^{(n)}x}{\pi},\ k^{(n)}\right)$$

der Factor $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

39) S. 261, Z. 5. Im Original ist für die hier mit $\mathfrak{M}$ bezeichnete Grösse der Buchstabe $M$ gewählt, der also hier von Jacobi in einer andern Bedeutung wie gewöhnlich gebraucht wird, wodurch ein Missverständniss entstehen kann. Wird unter $M$ der in den Fundamentis definirte Multiplicator verstanden, so ist

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{M}.$$

40) S. 263, Z. 9. Dem Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung musste der Factor $\frac{1}{i}$ beigefügt werden.

41) S. 266. 267 I. Wenn die Formeln des § I, wie es Jacobi beabsichtigt zu haben scheint, so eingerichtet werden sollen, dass bei der in den Fundamenten definirten ersten reellen Transformation (S. 102) die Coefficienten $B, B', \dots B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ reelle Werthe erhalten, so ist unter M in diesem Falle der im Vorhergehenden (Anm. (3.)) ebenso bezeichnete Multiplicator zu verstehen. Dies vorausgesetzt, war es nöthig, in der Gleichung, durch welche $y = \sqrt{\lambda}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right)$ als Function von $x = \sqrt{k}\sin\operatorname{am}(u, k)$ definirt wird, der Grösse $y$ den Factor $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ hinzuzufügen, weil nur unter dieser Bedingung, wie aus den S. 102 zusammengestellten Formeln ersichtlich ist, der Coefficient der höchsten Potenz von $x$ in dem Zähler des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung dem constanten Gliede des Nenners gleich wird. Dann hätte aber in Z. 5 v. u.

$$B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{\lambda\lambda'}{kk'\mathrm{M}^2}} \text{ statt } B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\lambda\lambda'}{kk'\mathrm{M}^2}}$$

gesetzt werden müssen, was durch ein Versehen unterblieben ist.



In der Gleichung, durch welche $y = \sqrt{k}\sin\operatorname{am} nu$ als Function von $x = \sqrt{k}\sin\operatorname{am} u$ definirt wird, muss ebenfalls der Grösse $y$ der Factor $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ hinzugefügt werden, wie aus den Formeln (4) (7) auf S. 121 erhellt.

42) S. 274, Z. 11. An Stelle des hier gegebenen Werthes $C_p$ steht im Original der reciproke.

43) S. 275, Z. 7 v. u. Hier musste $\sin^2\operatorname{am}\frac{2mK+2m'iK'}{n}$ für $\sin\operatorname{am}\frac{2mK+2m'iK'}{n}$ gesetzt werden, weil in der That nur die erste Grösse sich rational durch den Modul $k$ und die durch die Transformation $n^{ter}$ Ordnung aus demselben hervorgehenden Moduln ausdrücken lässt.

## DE FUNCTIONIBUS ELLIPTICIS COMMENTATIO PRIMA ET ALTERA.

44) S. 297. Die Fussnote, welche diese und die folgenden Abhandlungen als Fortsetzung der Fundamenta bezeichnet, fehlt in dem Abdruck in Crelle's Journal, findet sich aber im Manuscript.

45) S. 307, Gl. (1.). Im Original steht $E\operatorname{am}(ui)$ statt $E(ui)$.

46) S. 311, Z. 1 steht im Original hinter habent der Zwischensatz „et quae ex una omnes componi possunt" der hier als unrichtig weggelassen ist. Es hätte müssen duabus heissen.

47) S. 312, Gl. (17.) Zu dieser Formel hatte Jacobi in seinem Manuscript den folgenden, später von ihm wieder gestrichenen und deswegen auch hier weggelassenen Zusatz gemacht:
Hoc theorema, quod sane profundissimae indaginis est, attentioni eorum qui theoriae functionum ellipticarum vacare volunt, commendare debemus. Ei enim superstruetur in commentationibus subsequentibus nova nostra theoria de transformationibus inversis sive irrationalibus et de divisione functionum ellipticarum, quae universae earum theoriae fastigium est.
Von den hiermit in Aussicht gestellten Abhandlungen fand sich eine (S. 465 dieses Bandes) soweit ausgearbeitet, dass sie ohne Schwierigkeit druckfertig gemacht werden konnte, in Jacobi's Nachlass vor.

48) S. 318. Der Schlusssatz: Haec jam ad majora viam sternunt etc. ist hier aus Jacobi's Manuscript hinzugefügt worden.

49) S. 323. Um die Gleichungen (12.), (13.), (14.) herzuleiten hatte Jacobi nur die Voraussetzung gemacht, die in den Worten „Casu speciali quo $\sin\operatorname{am} n\alpha$ neque simul $\sin\operatorname{am} p\alpha$ evanescit" etc. liegt. Doch erfordert das Bestehen der genannten Gleichungen die etwas andere Bedingung, dass nicht nur $\sin\operatorname{am} n\alpha$, sondern auch $\sin\operatorname{am}\frac{n\alpha}{2}$ verschwinde, eine Bedingung, die in dem Fall, auf welchen nachher die 3 Formeln angewandt werden, erfüllt ist. Damit die fraglichen Gleichungen bestehen, müssen nämlich die Factoren, mit denen die Summen auf der linken Seite der Gleichungen (9.), (10.), (11.) multiplicirt sind, von Null verschieden sein, während gleichzeitig die Factoren der Summen auf der rechten Seite derselben Gleichungen verschwinden. Zur Erfüllung der letzten Bedingung ist erforderlich, dass $\sin\operatorname{am}\frac{n\alpha}{2}$ verschwinde, zur Erfüllung der ersten, dass $\sin\operatorname{am} p\alpha$ von Null verschieden sei. Wäre es ausreichend, dass $\sin\operatorname{am} n\alpha = 0$, so könnte man $\alpha = 2\omega$ setzen; aber dies genügt nicht, man muss, wie Jacobi es wirklich macht, $\alpha = 4\omega$ setzen.

## NOTE SUR UNE NOUVELLE APPLICATION DE L'ANALYSE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES À L'ALGÈBRE.

50) S. 331, Z. 8 v. u. ist $\frac{\sin^8\alpha}{4\cos^4\alpha\,\Delta^4\alpha}$ für $\frac{\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha\,\Delta^2\alpha}$ gesetzt, und
Z. 5 v. u. dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung das Vorzeichen — gegeben worden.

## UEBER DIE ZUR NUMERISCHEN BERECHNUNG DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN ZWECKMÄSSIGSTEN FORMELN.

51) S. 347, Z. 6 v. u. ist $k = \frac{14}{15}$ statt $k = \frac{10}{11}$, und
Z. 5 v. u. $q' \dots \frac{1}{116}$ statt $\frac{1}{150}$ gesetzt.

52) S. 357, Z. 9 v. u. Im Original steht

$$\frac{\Delta}{m},\ \frac{\Delta_1}{m'},\ \dots \text{ für } \frac{\Delta_1}{m'},\ \frac{\Delta_2}{m''},\ \dots$$

Dadurch ist auch in die unmittelbar folgende Formel für $\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}$ eine hier beseitigte Unrichtigkeit gekommen.

## ÜBER EINIGE DIE ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN BETREFFENDEN FORMELN.

53) S. 372, Z. 1 ist $M = \frac{1}{n}$ für $M = n$ gesetzt.

## ANZEIGE VON LEGENDRE THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES, TROISIÈME SUPPLÉMENT.

54) S. 378, Z. 6 v. u. Der Passus: „Ich will hier u. s. w. bis … durchgeführt werden" auf der folgenden Seite ist aus Jacobi's Manuscript hier hinzugefügt worden.

55) S. 382, Z. 12. Dem Ausdruck von

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(e+f\sqrt{-1})\sin^2\varphi}}$$

ist der Factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hinzugefügt worden.

## CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE AVEC LEGENDRE.

56) S. 417, Z. 4 v. u. Im Nenner der Formel für $k$ musste

$$\mu^2\lambda^{p-2} \text{ für } \mu'\lambda^{2n-1}$$

gesetzt werden.

## DE TRANSFORMATIONE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM INVERSIS SIVE IRRATIONALIBUS.

57) S. 465 Vgl. Anm. (47) am Schluss.



## DE DIVISIONE INTEGRALIUM ELLIPTICORUM IN $n$ PARTES AEQUALES.

58) Obwohl dieser Aufsatz nur eine Einleitung zu einer ausführlicheren Arbeit zu sein scheint, ist er doch als zu dem vorhergehenden gehörig aufgenommen worden.

## DE MULTIPLICATIONE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM PER QUANTITATEM IMAGINARIAM PRO CERTO QUODAM MODULORUM SYSTEMATE.

59) Auch diese Abhandlung erschöpft zwar den behandelten Gegenstand nicht, ist aber abgedruckt worden, weil sie die einzige ist, in der Jacobi die complexe Multiplication behandelt. Sie scheint gleichzeitig mit den beiden vorhergehenden unmittelbar nach Vollendung der Fundamenta entstanden zu sein.

## THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN AUS DEN EIGENSCHAFTEN DER THETAREIHEN ABGELEITET.

60) Diese Abhandlung ist von Borchardt während seiner Studienzeit (1838) nach einer Vorlesung Jacobi's in dessen Auftrag ausgearbeitet worden. Sie kann mit gutem Fug als eine von Jacobi autorisirte betrachtet werden, weil dieser das Manuscript durchgesehen, mit Anmerkungen begleitet und durch Hinzufügung mehrerer Formel-Systeme vervollständigt hat. Unter Berücksichtigung dieser Bemerkungen und Zusätze hat dann Borchardt sein unter den Papieren Jacobi's aufgefundenes Manuscript zum Zweck der Herausgabe überarbeitet, was seine letzte, zwei Monate vor seinem Tode (27. Juni 1880) beendigte literarische Beschäftigung gewesen ist.

Aus der Vergleichung der hier mitgetheilten Abhandlung mit einer (ebenfalls von Borchardt herrührenden) vollständigen Nachschrift der gedachten Vorlesung habe ich mich überzeugt, dass gerade derjenige Theil der letztern, auf den Jacobi laut der Einleitung das Hauptgewicht gelegt hat, in der Borchardt'schen Bearbeitung vollständig und wohlgeordnet wiedergegeben ist. Die übrigen Theile enthalten hauptsächlich eine sehr ausführliche Theorie der linearen Transformation der $\vartheta$-Functionen, die Darstellung der letztern in der Gestalt unendlicher Producte und eine ziemlich kurz gehaltene Entwickelung der Formeln für die Transformation $n^{ter}$ Ordnung der elliptischen Functionen, abgeleitet aus der entsprechenden Transformation der $\vartheta$-Functionen. Es würde nicht schwierig gewesen sein, mit Hülfe des Borchardt'schen Heftes die vorliegende Abhandlung so zu vervollständigen, dass der Leser in den Stand gesetzt worden wäre, alle mittelst anderer Methoden gewonnenen Resultate der Theorie der elliptischen Functionen auf dem von Jacobi in seiner Vorlesung eingeschlagenen Wege abzuleiten; doch musste hiervon aus den in der Vorrede angegebenen Gründen für jetzt Abstand genommen werden.

Es möge noch bemerkt werden, dass in einem wesentlichen Punkte die hier mitgetheilte Arbeit sowohl als auch Jacobi's Vorlesung eine Lücke hat. Wenn man bei Begründung der Theorie der elliptischen Functionen von den $\vartheta$-Reihen ausgeht, so muss gezeigt werden, wie sich zu jedem gegebenen Werth des Moduls $k$ ein die Gleichung

$$\frac{\vartheta_2^2(0, q)}{\vartheta_3^2(0, q)} = k$$

befriedigender Werth der Grösse $q$ berechnen lässt. Dies ist in § 6. geschehen, *aber nur für reelle, zwischen* 0 *und* 1 *enthaltenen Werthe von* $k$, während es doch nicht nur für die Theorie der elliptischen Functionen, sondern auch für mancherlei Anwendungen derselben unumgänglich erforderlich ist, dass die Aufgabe allgemein gelöst werde. Borchardt hielt sich jedoch nicht für berechtigt, in seine Ausarbeitung etwas nicht von Jacobi selbst Herrührendes aufzunehmen. Ich werde aber an einem andern Orte zeigen, wie man mit Hülfe der von Jacobi in dem citirten § angewandten Transformation 4ter Ordnung leicht zu einem die Grösse $q$ als Function von $k$ darstellenden allgemein gültigen Ausdruck gelangen kann.

W.

---

## BERICHTIGUNG.

S. 112, Z. 10 muss es heissen

$M$ in $M'$ statt $M_1$ in $M_1'$.

---

GÖTTINGEN,
DRUCK DER DIETERICHSCHEN UNIVE[illegible]TS-BUCHDRUCKEREI.
W. FR. KAESTN[illegible]R.