DE EVOLUTIONE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM IN PRODUCTA INFINITA.

35.

Proposito modulo k reali, unitate minore, videmus modulum

$$\lambda = k^n \left\{ \sin\operatorname{coam}\frac{2K}{n} \sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n} \cdots \sin\operatorname{coam}\frac{(n-1)K}{n} \right\}^4,$$

in quem ille per transformationem primam n^{ti} ordinis mutatur, crescente numero n, celerrime ad nihilum convergere, adeoque pro limite $n = \infty$ fieri $\lambda = 0$. Tum erit $\Lambda = \frac{\pi}{2}$. $\operatorname{am}(u,\lambda) = u$, unde e formulis $\Lambda = \frac{K}{n\mathrm{M}}$, $\Lambda' = \frac{K'}{\mathrm{M}}$ obtinemus:

$$n\mathrm{M} = \frac{2K}{\pi}, \quad \frac{\Lambda'}{n} = \frac{K'}{n\mathrm{M}} = \frac{\pi K'}{2K}.$$

Ponamus iam in formulis pro transformatione primae supplementaria §. 27 $\frac{u}{n}$ loco u, $n = \infty$: abit $\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right)$ in $\operatorname{am}\left(\frac{u}{n\mathrm{M}}, \lambda\right) = \frac{\pi u}{2K}$, $y = \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right)$ in $\sin\frac{\pi u}{2K}$, porro $\operatorname{am}(nu)$ in $\operatorname{am}(u)$. Hinc e formulis illis nanciscimur sequentes:

$$\sin\operatorname{am} u = \frac{2Ky}{\pi} \cdot \frac{\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2\frac{i\pi K'}{K}}\right)\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2\frac{2i\pi K'}{K}}\right)\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2\frac{3i\pi K'}{K}}\right)\cdots}{\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2\frac{i\pi K'}{2K}}\right)\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2\frac{3i\pi K'}{2K}}\right)\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2\frac{5i\pi K'}{2K}}\right)\cdots}$$

$$\cos\operatorname{am} u = \sqrt{1-y^2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{y^2}{\cos^2\frac{i\pi K'}{K}}\right)\left(1 - \frac{y^2}{\cos^2\frac{2i\pi K'}{K}}\right)\left(1 - \frac{y^2}{\cos^2\frac{3i\pi K'}{K}}\right)\cdots}{\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2\frac{i\pi K'}{2K}}\right)\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2\frac{3i\pi K'}{2K}}\right)\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2\frac{5i\pi K'}{2K}}\right)\cdots}$$

$$\Delta \operatorname{am} u = \frac{\left(1-\dfrac{y^2}{\cos^2\dfrac{i\pi K'}{2K}}\right)\left(1-\dfrac{y^2}{\cos^2\dfrac{3i\pi K'}{2K}}\right)\left(1-\dfrac{y^2}{\cos^2\dfrac{5i\pi K'}{2K}}\right)\cdots}{\left(1-\dfrac{y^2}{\sin^2\dfrac{i\pi K'}{2K}}\right)\left(1-\dfrac{y^2}{\sin^2\dfrac{3i\pi K'}{2K}}\right)\left(1-\dfrac{y^2}{\sin^2\dfrac{5i\pi K'}{2K}}\right)\cdots}$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin\operatorname{am} u}{1+\sin\operatorname{am} u}} = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{y}{\cos\dfrac{i\pi K'}{K}}\right)\left(1-\dfrac{y}{\cos\dfrac{2i\pi K'}{K}}\right)\left(1-\dfrac{y}{\cos\dfrac{3i\pi K'}{K}}\right)\cdots}{\left(1+\dfrac{y}{\cos\dfrac{i\pi K'}{K}}\right)\left(1+\dfrac{y}{\cos\dfrac{2i\pi K'}{K}}\right)\left(1+\dfrac{y}{\cos\dfrac{3i\pi K'}{K}}\right)\cdots}$$

$$\sqrt{\frac{1-k\sin\operatorname{am} u}{1+k\sin\operatorname{am} u}} =. \frac{\left(1-\dfrac{y}{\cos\dfrac{i\pi K'}{2K}}\right)\left(1-\dfrac{y}{\cos\dfrac{3i\pi K'}{2K}}\right)\left(1-\dfrac{y}{\cos\dfrac{5i\pi K'}{2K}}\right)\cdots}{\left(1+\dfrac{y}{\cos\dfrac{i\pi K'}{2K}}\right)\left(1+\dfrac{y}{\cos\dfrac{3i\pi K'}{2K}}\right)\left(1+\dfrac{y}{\cos\dfrac{5i\pi K'}{2K}}\right)\cdots}$$

$$\sin\operatorname{am} u = -\frac{\pi y}{kK}\cdot\left(\frac{\cos\dfrac{i\pi K'}{2K}}{\sin^2\dfrac{i\pi K'}{2K}-y^2}+\frac{\cos\dfrac{3i\pi K'}{2K}}{\sin^2\dfrac{3i\pi K'}{2K}-y^2}+\frac{\cos\dfrac{5i\pi K'}{2K}}{\sin^2\dfrac{5i\pi K'}{2K}-y^2}+\cdots\right)$$

$$\cos\operatorname{am} u = \frac{i\pi\sqrt{1-y^2}}{kK}\cdot\left(\frac{\sin\dfrac{i\pi K'}{2K}}{\sin^2\dfrac{i\pi K'}{2K}-y^2}-\frac{\sin\dfrac{3i\pi K'}{2K}}{\sin^2\dfrac{3i\pi K'}{2K}-y^2}+\frac{\sin\dfrac{5i\pi K'}{2K}}{\sin^2\dfrac{5i\pi K'}{2K}-y^2}-\cdots\right).$$

Ponamus in sequentibus $e^{\frac{-\pi K'}{K}} = q$, $\frac{\pi u}{2K} = x$, sive $u = \frac{2Kx}{\pi}$, unde $y = \sin\frac{\pi u}{2K} = \sin x$; fit:

$$\sin\frac{mi\pi K'}{K} = \frac{q^m-q^{-m}}{2i} = \frac{i(1-q^{2m})}{2q^m}$$

$$\cos\frac{mi\pi K'}{K} = \frac{q^m+q^{-m}}{2} = \frac{1+q^{2m}}{2q^m},$$

unde:

$$1-\frac{y^2}{\sin^2\dfrac{mi\pi K'}{K}} = 1+\frac{4q^{2m}\sin^2 x}{(1-q^{2m})^2} = \frac{1-2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}{(1-q^{2m})^2}$$

$$1-\frac{y^2}{\cos^2\dfrac{mi\pi K'}{K}} = 1-\frac{4q^{2m}\sin^2 x}{(1+q^{2m})^2} = \frac{1+2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}{(1+q^{2m})^2}$$

$$1\pm\frac{y}{\cos\dfrac{mi\pi K'}{K}} = 1\pm\frac{2q^m\sin x}{1+q^{2m}} = \frac{1\pm 2q^m\sin x+q^{2m}}{1+q^{2m}}$$

$$\frac{-\cos\dfrac{mi\pi K'}{K}}{\sin^2\dfrac{mi\pi K'}{K}-y^2} = \frac{2q^m(1+q^{2m})}{1-2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}$$

$$\frac{i\sin\dfrac{mi\pi K'}{K}}{\sin^2\dfrac{mi\pi K'}{K}-y^2} = \frac{2q^m(1-q^{2m})}{1-2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}.$$

His praeparatis atque posito brevitatis causa:

$$A = \left\{\frac{(1-q\ )(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}\right\}^2$$

$$B = \left\{\frac{(1-q\ )(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}\right\}^2$$

$$C = \left\{\frac{(1-q\ )(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1+q\ )(1+q^3)(1+q^5)\dots}\right\}^2,$$

prodeunt functionum ellipticarum evolutiones in producta infinita fundamentales:

(1.) $$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2AK}{\pi}\sin x\cdot\frac{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\dots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}$$

(2.) $$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = B\cos x\cdot\frac{(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\dots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}$$

(3.) $$\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = C\cdot\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}$$

(4.) $$\sqrt{\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}} = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\cdot\frac{(1-2q\sin x+q^2)(1-2q^2\sin x+q^4)(1-2q^3\sin x+q^6)\dots}{(1+2q\sin x+q^2)(1+2q^2\sin x+q^4)(1+2q^3\sin x+q^6)\dots}$$

(5.) $$\sqrt{\frac{1-k\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+k\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}} = \frac{(1-2\sqrt{q}\sin x+q)(1-2\sqrt{q^3}\sin x+q^3)(1-2\sqrt{q^5}\sin x+q^5)\dots}{(1+2\sqrt{q}\sin x+q)(1+2\sqrt{q^3}\sin x+q^3)(1+2\sqrt{q^5}\sin x+q^5)\dots}$$

nec non aliud formularum systema, quod resolutionem propositarum in fractiones simplices suppeditat:

$$(6.)\quad \sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{2\pi}{kK}\sin x\left(\frac{\sqrt{q}(1+q)}{1-2q\cos 2x+q^2}+\frac{\sqrt{q^3}(1+q^3)}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\frac{\sqrt{q^5}(1+q^5)}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}}+\cdots\right)$$

$$(7.)\quad \cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{2\pi}{kK}\cos x\left(\frac{\sqrt{q}(1-q)}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{\sqrt{q^3}(1-q^3)}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\frac{\sqrt{q^5}(1-q^5)}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}}-\cdots\right).$$

Quibus addimus ex eodem fonte manantes:

$$(8.)\quad 1-\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{4\pi\sin^2 x}{K}\left(\frac{q\left(\frac{1+q}{1-q}\right)}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{q^3\left(\frac{1+q^3}{1-q^3}\right)}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\frac{q^5\left(\frac{1+q^5}{1-q^5}\right)}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}}-\cdots\right)$$

$$(9.)\quad \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\pm x+2\,\mathrm{arctg}\frac{(1+q)\,\mathrm{tg}\,x}{1-q}-2\,\mathrm{arctg}\frac{(1+q^3)\,\mathrm{tg}\,x}{1-q^3}+2\,\mathrm{arctg}\frac{(1+q^5)\,\mathrm{tg}\,x}{1-q^5}-\cdots$$

In formula postrema signum superius eligendum est, quoties in termino negativo, inferius, quoties in termino positivo computationem sistis.

36.

Contemplemur formulas (1.), (2.), (3.), in quibus ante omnia quantitatum, quas per A, B, C designavimus, valores eruendi sunt. Facile quidem invenitur, ponendo $x=\frac{\pi}{2}$, e formulis (3.), (1.):

$$k'=C\left\{\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots}\right\}^2=CC,$$

unde

$$C=\sqrt{k'},$$

$$1=\frac{2AK}{\pi}\left\{\frac{1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots}{1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots}\right\}^2=\frac{2AK}{\pi}\cdot\frac{C}{B}=\frac{2\sqrt{k'}\,AK}{\pi B},$$

unde

$$B=\frac{2\sqrt{k'}\,AK}{\pi}.$$

At ut ipsius A eruatur valor, ad alia artificia confugiendum est.

Ponamus $e^{ix}=U$: ubi x in $x+\frac{i\pi K'}{2K}$ mutatur, abit U in $\sqrt{q}U$, $\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$ in

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}+iK'\right)=\frac{1}{k\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}.$$

E formula (1.) autem obtinemus:

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{AK}{\pi}\left(\frac{U-U^{-1}}{i}\right)\frac{[(1-q^2U^2)(1-q^4U^2)\ldots][(1-q^2U^{-2})(1-q^4U^{-2})\ldots]}{[(1-qU^2)(1-q^3U^2)\ldots][(1-qU^{-2})(1-q^3U^{-2})\ldots]},$$

unde mutando x in $x+\frac{i\pi K'}{2K}$:

$$\frac{1}{k\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}=\frac{AK}{\pi}\left(\frac{\sqrt{q}U-\sqrt{q^{-1}}U^{-1}}{i}\right)\frac{[(1-q^3U^2)(1-q^5U^2)\ldots][(1-qU^{-2})(1-q^3U^{-2})\ldots]}{[(1-q^2U^2)(1-q^4U^2)\ldots][(1-U^{-2})(1-q^2U^{-2})\ldots]},$$

quibus in se ductis aequationibus, cum sit:

$$\frac{\sqrt{q}U-\sqrt{q^{-1}}U^{-1}}{1-U^{-2}}=-\frac{1}{\sqrt{q}}\cdot\frac{1-qU^2}{U-U^{-1}},$$

prodit:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{AK}{\pi}\right)^2,\quad \text{sive}\quad A=\frac{\pi\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}\,K};\quad \text{unde}\quad \frac{2KA}{\pi}=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}.$$

Hinc erit $B=\frac{2\sqrt{k'}AK}{\pi}=2\sqrt[4]{q}\sqrt{\frac{k'}{k}}$. Iam igitur fit:

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}$$

$$\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{k'}\cdot\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}.$$

Aequationibus in se ductis:

$$B=2\sqrt[4]{q}\sqrt{\frac{k'}{k}}=\left\{\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}\right\}^2$$

$$C=\sqrt{k'}=\left\{\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right\}^2,$$

prodit:

$$\frac{2\sqrt[4]{q}\,k'}{\sqrt{k}}=\frac{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^4}{[(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots]^2}.$$

Iam vero secundum Eulerum in *Introductione (de Partitione Numerorum)* est:

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots=\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}$$
$$=\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots},$$

unde obtinemus:

$$(1.)\qquad [(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\dots]^6 = \frac{2\sqrt[4]{q}\,k'}{\sqrt{k}}.$$

Advocata formula:

$$A = \frac{\pi\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}\,K} = \left\{\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}\right\}^2,$$

fit:

$$(2.)\qquad [(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots]^6 = \frac{2kk'K^3}{\pi^3\sqrt{q}},$$

unde etiam:

$$(3.)\qquad [(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots]^6 = \frac{4\sqrt{k}\,k'k'K^3}{\pi^3\sqrt[4]{q}}.$$

Quibus addere licet, quae facile sequuntur, formulas:

$$(4.)\qquad [(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\dots]^6 = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{kk'}}$$

$$(5.)\qquad [(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)\dots]^6 = \frac{k}{4\sqrt{k'}\sqrt{q}}$$

$$(6.)\qquad [(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\dots]^6 = \frac{\sqrt{k}}{2k'\sqrt[4]{q}}.$$

E quibus etiam colligitur:

$$(7.)\qquad k = 4\sqrt{q}\left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}\right\}^4$$

$$(8.)\qquad k' = \left\{\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}\right\}^4$$

$$(9.)\qquad \frac{2K}{\pi} = \left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}\right\}^2\left\{\frac{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}\right\}^2$$

$$(10.)\qquad \frac{2kK}{\pi} = 4\sqrt{q}\left\{\frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})\dots}{(1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\dots}\right\}^2$$

$$(11.)\qquad \frac{2k'K}{\pi} = \left\{\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots}\right\}^2$$

$$(12.)\qquad \frac{2\sqrt{k}\,K}{\pi} = 2\sqrt[4]{q}\left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}\right\}^2$$

$$(13.)\qquad \frac{2\sqrt{k'}\,K}{\pi} = \left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}\right\}^2.$$

E formulis (7.), (8.) sequitur aequatio identica satis abstrusa:

$$(14.)\qquad [(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^8 + 16q[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots]^8 = [(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots]^8.$$

37.

Vidimus supra, ubi de proprietatibus aequationum modularium actum est, mutato k in $\frac{1}{k}$, abire K in $k(K-iK')$, K' in kK'; porro fieri:

$$\sin\mathrm{am}\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \cos\mathrm{coam}\,(u, k')$$

$$\cos\mathrm{am}\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \sin\mathrm{coam}\,(u, k')$$

$$\Delta\mathrm{am}\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{1}{\Delta\mathrm{am}\,(u, k')}.$$

Commutatis inter se k et k', hinc sequitur, ubi k' in $\frac{1}{k'}$ seu k in $\frac{ik}{k'}$ abeat, simul abire K in $k'K$, K' in $k'(K'-iK)$; porro fieri:

$$\sin\mathrm{am}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \cos\mathrm{coam}\,u$$

$$\cos\mathrm{am}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \sin\mathrm{coam}\,u$$

$$\Delta\mathrm{am}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\Delta\mathrm{am}\,u},$$

unde etiam:

$$\mathrm{am}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{coam}\,u.$$

At mutato K in $k'K$, K' in $k'(K'-iK)$, abit $q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$ in $-q$, unde vice versa fluit

Theorema I.

Mutato q in $-q$, abit:

$$k \text{ in } \frac{ik}{k'},\quad k' \text{ in } \frac{1}{k'}$$

$$K \text{ in } k'K,\quad K' \text{ in } k'(K'-iK)$$

$$\begin{array}{rcl}
\sin\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} & \text{in} & \cos\operatorname{coam}\dfrac{2Kx}{\pi} \\[2ex]
\cos\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} & \text{in} & \sin\operatorname{coam}\dfrac{2Kx}{\pi} \\[2ex]
\Delta\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} & \text{in} & \dfrac{1}{\Delta\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi}} \\[3ex]
\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} & \text{in} & \dfrac{\pi}{2}-\operatorname{coam}\dfrac{2Kx}{\pi};
\end{array}$$

mutato simul q in $-q$, x in $\frac{\pi}{2}-x$, abit:

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} & \text{in} & \dfrac{\pi}{2}-\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} \\[2ex]
\sin\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} & \text{in} & \cos\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} \\[2ex]
\cos\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} & \text{in} & \sin\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} \\[2ex]
\Delta\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} & \text{in} & \dfrac{1}{k'}\Delta\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi}.
\end{array}$$

Inquiramus adhuc, quasnam functiones ellipticae, mutato q vel in q^2 vel in $\sqrt{q}$, subeant mutationes.

Vidimus supra, modulum λ, per transformationem realem primam n^{ti} ordinis a modulo k derivatum, ea insigni gaudere facultate, ut sit:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K};$$

unde mutato k in λ, abit $q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$ in q^n. Idem, a nobis de transformationibus imparis ordinis generaliter probatum, iam dudum a Cl°. Legendre de transformatione secundi ordinis probatum est, videlicet, posito $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$, fieri:

$$\Lambda = \frac{1+k'}{2}K, \quad \Lambda' = (1+k')K', \quad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = 2\frac{K'}{K},$$

unde videmus, mutato k in $\frac{1-k'}{1+k'}$, abire q in q^2. Hinc vice versa obtinemus

Theorema II.

Mutato q in q^2, abit k in $\frac{1-k'}{1+k'}$, K in $\frac{1+k'}{2}K$,

unde etiam:

$$\begin{array}{rclcrcl}
k' & \text{in} & \dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'} & \qquad & 1+k & \text{in} & \dfrac{2}{1+k'} \\[2ex]
k'K & \text{in} & \sqrt{k'}K & & 1-k & \text{in} & \dfrac{2k'}{1+k'} \\[2ex]
\sqrt{k} & \text{in} & \dfrac{k}{1+k'} & & 1+k' & \text{in} & \dfrac{(1+\sqrt{k'})^2}{1+k'} \\[2ex]
\sqrt{k}K & \text{in} & \dfrac{kK}{2} & & 1-k' & \text{in} & \dfrac{(1-\sqrt{k'})^2}{1+k'}.
\end{array}$$

Ex inversione huius theorematis obtinetur alterum

Theorema III.

Mutato q in $\sqrt{q}$, abit k in $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, K in $(1+k)K$,

unde etiam:

$$\begin{array}{rclcrcl}
k' & \text{in} & \dfrac{1-k}{1+k} & \qquad & 1+k & \text{in} & \dfrac{(1+\sqrt{k})^2}{1+k} \\[2ex]
\sqrt{k'} & \text{in} & \dfrac{k'}{1+k} & & 1-k & \text{in} & \dfrac{(1-\sqrt{k})^2}{1+k} \\[2ex]
kK & \text{in} & 2\sqrt{k}K & & 1+k' & \text{in} & \dfrac{2}{1+k} \\[2ex]
\sqrt{k'}K & \text{in} & k'K & & 1-k' & \text{in} & \dfrac{2k}{1+k}.
\end{array}$$

Quae tria theoremata evolutionibus §§. 35., 36. propositis multimodis confirmantur suamque in sequentibus frequentissimam inveniunt applicationem, quippe quorum ope vel ex aliis alias derivare licet formulas, vel aliunde inventae commode confirmantur.

38.

Quantitates, in quas, posito q^r loco q, abeunt k, k', K, designemus per $k^{(r)}$, $k^{(r)\prime}$, $K^{(r)}$, ita ut $k^{(r)}$ sit modulus per transformationem realem primam r^{ti} ordinis erutus eiusque complementum $k^{(r)\prime}$. Ponamus in aequatione:

$$\sqrt{k'} = \left\{\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\dots}\right\}^2$$

loco q successive q^2, q^4, q^8, q^{16}, etc., prodit facta multiplicatione infinita:

$$\sqrt{k^{(2)'}k^{(4)'}k^{(8)'}k^{(16)'}\ldots} = \left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)\ldots}\right\}^2;$$

at invenimus:

$$\left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)\ldots}\right\}^2 = \frac{2\sqrt{k'}\,K}{\pi},$$

unde:

$$(1.)\qquad \frac{2K}{\pi} = \sqrt{\frac{k^{(2)'}k^{(4)'}k^{(8)'}k^{(16)'}\ldots\ldots}{k'}}.$$

Cum sit $k^{(2)'} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, fit ex (1.):

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{k'}\cdot\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\cdot\frac{2\sqrt{k^{(2)'}}}{1+k^{(2)'}}\cdot\frac{2\sqrt{k^{(4)'}}}{1+k^{(4)'}}\cdot\frac{2\sqrt{k^{(8)'}}}{1+k^{(8)'}}\ldots,$$

unde divisione facta per (1.):

$$(2.)\qquad \frac{2K}{\pi} = \frac{2}{1+k'}\cdot\frac{2}{1+k^{(2)'}}\cdot\frac{2}{1+k^{(4)'}}\cdot\frac{2}{1+k^{(8)'}}\ldots$$

Quae etiam eo obtinetur formula, quod sit:

$$\begin{aligned}\frac{2K}{\pi} &= \frac{2K^{(2)}}{\pi}\cdot\frac{2}{1+k'}\\ \frac{2K^{(2)}}{\pi} &= \frac{2K^{(4)}}{\pi}\cdot\frac{2}{1+k^{(2)'}}\\ \frac{2K^{(4)}}{\pi} &= \frac{2K^{(8)}}{\pi}\cdot\frac{2}{1+k^{(4)'}}\\ &\ldots\quad,\end{aligned}$$

unde cum, crescente r in infinitum, limes expressionis $\frac{2K^{(r)}}{\pi}$ sit 1, facto producto infinito, prodit (2.). Posito:

$$\begin{aligned}m &= 1, & n &= k'\\ m' &= \frac{m+n}{2}, & n' &= \sqrt{mn}\\ m'' &= \frac{m'+n'}{2}, & n'' &= \sqrt{m'n'}\\ m''' &= \frac{m''+n''}{2}, & n''' &= \sqrt{m''n''}\\ &\ldots & &,\end{aligned}$$

fit:

$$\begin{aligned}k^{(2)'} &= \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'} = \frac{n'}{m'}\\ k^{(4)'} &= \frac{2\sqrt{k^{(2)'}}}{1+k^{(2)'}} = \frac{n''}{m''}\\ k^{(8)'} &= \frac{2\sqrt{k^{(4)'}}}{1+k^{(4)'}} = \frac{n'''}{m'''}\\ &\ldots\quad,\end{aligned}$$

unde:

$$\frac{2}{1+k'} = \frac{m}{m'},\qquad \frac{2}{1+k^{(2)'}} = \frac{m'}{m''},\qquad \frac{2}{1+k^{(4)'}} = \frac{m''}{m'''},\quad\ldots$$

ideoque:

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{m}{m'}\cdot\frac{m'}{m''}\cdot\frac{m''}{m'''}\cdot\frac{m'''}{m''''}\ldots$$

seu designante μ limitem communem, ad quem $m^{(p)}$, $n^{(p)}$ convergunt, crescente p in infinitum:

$$(3.)\qquad \frac{2K}{\pi} = \frac{1}{\mu}.$$

Quae abunde nota sunt.

Ponamus rursus in formula:

$$\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\,\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}$$

loco q successive q^2, q^4, q^8, etc.; sit porro:

$$S = \Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{2K^{(2)}x}{\pi},\,k^{(2)}\right)\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{2K^{(4)}x}{\pi},\,k^{(4)}\right)\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{2K^{(8)}x}{\pi},\,k^{(8)}\right)\ldots.$$

Facto producto infinito, cum sit:

$$\frac{2\sqrt{k'}\,K}{\pi} = \sqrt{k^{(2)'}k^{(4)'}k^{(8)'}k^{(16)'}\ldots},$$

obtinemus:

$$S = \frac{2\sqrt{k'}\,K}{\pi}\cdot\frac{(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}.$$

Iam vero e formulis:

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\dots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = 2\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\sqrt[4]{q}\cos x(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\dots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}$$

obtinemus:

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\frac{\operatorname{tg}x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\dots}{(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\dots},$$

unde prodit formula memorabilis:

$$\operatorname{tg}x = \frac{S.\operatorname{tg}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\frac{2K}{\pi}}. \tag{4.}$$

Ut eandem per formulas notas demonstremus, advocemus formulam pro transformatione secundi ordinis, qualem Cl. Gauss exhibuit in commentatione inscripta: »*Determinatio Attractionis*« etc.:

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{(1+k^{(2)})\sin\operatorname{am}\left(\frac{2K^{(2)}x}{\pi},\ k^{(2)}\right)}{1+k^{(2)}\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2K^{(2)}x}{\pi},\ k^{(2)}\right)},$$

quae, brevitatis causa posito:

$$\operatorname{am}\left(\frac{2K^{(r)}x}{\pi},\ k^{(r)}\right) = \varphi^{(r)},\ \Delta\operatorname{am}\left(\frac{2K^{(r)}x}{\pi},\ k^{(r)}\right) = \Delta^{(r)},$$

ita exhibetur:

$$\sin\varphi = \frac{(1+k^{(2)})\sin\varphi^{(2)}}{1+k^{(2)}\sin^2\varphi^{(2)}},$$

unde etiam:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\varphi^{(2)}\Delta^{(2)}}{1+k^{(2)}\sin^2\varphi^{(2)}}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1-k^{(2)}\sin^2\varphi^{(2)}}{1+k^{(2)}\sin^2\varphi^{(2)}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(1+k^{(2)})\operatorname{tg}\varphi^{(2)}}{\Delta^{(2)}}.$$

Formula postrema ita quoque repraesentari potest:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\frac{2K}{\pi}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi^{(2)}}{\frac{2K^{(2)}}{\pi}}\cdot\frac{1}{\Delta^{(2)}},$$

unde loco q successive posito $q^2, q^4, q^8, \dots$, quo facto k, K, φ abeunt in $k^{(2)}, k^{(4)}, k^{(8)}, \dots;\ K^{(2)}, K^{(4)}, K^{(8)}, \dots;\ \varphi^{(2)}, \varphi^{(4)}, \varphi^{(8)}, \dots$, obtinemus:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi^{(2)}}{\frac{2K^{(2)}}{\pi}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi^{(4)}}{\frac{2K^{(4)}}{\pi}}\cdot\frac{1}{\Delta^{(4)}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi^{(4)}}{\frac{2K^{(4)}}{\pi}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi^{(8)}}{\frac{2K^{(8)}}{\pi}}\cdot\frac{1}{\Delta^{(8)}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi^{(8)}}{\frac{2K^{(8)}}{\pi}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi^{(16)}}{\frac{2K^{(16)}}{\pi}}\cdot\frac{1}{\Delta^{(16)}}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Iam limes expressionis:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi^{(p)}}{\frac{2K^{(p)}}{\pi}} = \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}\left(\frac{2K^{(p)}x}{\pi}, k^{(p)}\right)}{\frac{2K^{(p)}}{\pi}},$$

crescente p in infinitum, fit:

$$\operatorname{tang}x;$$

tum enim fit $k^{(p)} = 0$, $K^{(p)} = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{am}(u, k^{(p)}) = u$; unde iam, facto producto infinito et posito, ut supra, $S = \Delta^{(2)}\Delta^{(4)}\Delta^{(8)}\dots$, prodit:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\frac{2K}{\pi}} = \frac{\operatorname{tg}x}{S},$$

quae est formula demonstranda.

E formula:

$$\operatorname{tg}x = \frac{S.\operatorname{tg}\varphi}{\frac{2K}{\pi}}$$

algorithmus non inelegans peti potest ad computanda integralia elliptica primae speciei *indefinita*; idque ope formulae, probatu facilis:

$$\Delta^{(2)} = \sqrt{\frac{2(\Delta+k')}{(1+k')(1+\Delta)}}.$$

Quem in finem proponimus

Theorema.

Posito:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi}} = \Phi$$

$$\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi} = \Delta,$$

formentur expressiones:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{m+n}{2} = m' & \sqrt{mn} = n' & \Delta' = \sqrt{\dfrac{mm'(\Delta+n)}{m+\Delta}} \\ \dfrac{m'+n'}{2} = m'' & \sqrt{m'n'} = n'' & \Delta'' = \sqrt{\dfrac{m'm''(\Delta'+n')}{m'+\Delta'}} \\ \dfrac{m''+n''}{2} = m''' & \sqrt{m''n''} = n''' & \Delta''' = \sqrt{\dfrac{m''m'''(\Delta''+n'')}{m''+\Delta''}} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad , \end{array}$$

designante μ limitem communem, ad quem quantitates $m^{(p)}$, $\Delta^{(p)}$, $n^{(p)}$ crescente p rapidissime convergunt; erit:

$$\operatorname{tg}\mu\Phi = \frac{\Delta'\Delta''\Delta'''\ldots}{mm'm''\ldots}\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$

Iisdem methodis, quibus in antecedentibus usi sumus, invenitur etiam valor producti infiniti:

$$\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q^2}}{\sqrt{k^{(2)}}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q^4}}{\sqrt{k^{(4)}}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q^8}}{\sqrt{k^{(8)}}}\cdots$$

Quem in finem allegamus formulas §. 36, (4.), (5.):

$$[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\ldots]^6 = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{kk'}}$$

$$[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)\ldots]^6 = \frac{k}{4\sqrt{k'}\sqrt{q}},$$

quarum posterior e priore nascitur, loco q posito successive q^2, q^4, q^8 etc. et facto producto infinito, unde obtinemus:

$$\frac{k}{4\sqrt{k'}\sqrt{q}} = \frac{2\sqrt[4]{q^2}}{\sqrt{k^{(2)}k^{(2)\prime}}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q^4}}{\sqrt{k^{(4)}k^{(4)\prime}}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q^8}}{\sqrt{k^{(8)}k^{(8)\prime}}}\cdots$$

Iam vero eruimus (1.):

$$\frac{2K}{\pi} = \sqrt{\frac{k^{(2)\prime}k^{(4)\prime}k^{(8)\prime}\ldots}{k'}},$$

unde:

$$(5.)\qquad \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt[4]{q}}\cdot\frac{2K}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q^2}}{\sqrt{k^{(2)}}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q^4}}{\sqrt{k^{(4)}}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q^8}}{\sqrt{k^{(8)}}}\cdots$$

Quae licet aliena videri possint ab instituto nostro, cum nec elegantia careant et magnopere faciant ad perspiciendam naturam evolutionum propositarum, apposuisse iuvat.

EVOLUTIO FUNCTIONUM ELLIPTICARUM IN SERIES SECUNDUM SINUS VEL COSINUS MULTIPLORUM ARGUMENTI PROGREDIENTES.

39.

E formulis supra traditis:

$$(1.)\quad \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin x\cdot\frac{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}$$

$$(2.)\quad \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\cos x\cdot\frac{(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}$$

$$(3.)\quad \Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\cdot\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}$$

$$(4.)\quad \sqrt{\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}} = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\cdot\frac{(1-2q\sin x+q^2)(1-2q^2\sin x+q^4)(1-2q^3\sin x+q^6)\ldots}{(1+2q\sin x+q^2)(1+2q^2\sin x+q^4)(1+2q^3\sin x+q^6)\ldots}$$

$$(5.)\quad \sqrt{\frac{1-k\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+k\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}} = \frac{(1-2\sqrt{q}\sin x+q)(1-2\sqrt{q^3}\sin x+q^3)(1-2\sqrt{q^5}\sin x+q^5)\ldots}{(1+2\sqrt{q}\sin x+q)(1+2\sqrt{q^3}\sin x+q^3)(1+2\sqrt{q^5}\sin x+q^5)\ldots},$$

logarithmis singulorum factorum in altera aequationum parte evolutis, post reductiones obvias, sequuntur hae:

$$(6.)\quad \log\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \log\left\{\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin x\right\} + \frac{2q\cos 2x}{1+q} + \frac{2q^2\cos 4x}{2(1+q^2)} + \frac{2q^3\cos 6x}{3(1+q^3)} + \cdots$$

$$(7.)\quad \log\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \log\left\{2\sqrt[4]{q}\sqrt{\frac{k'}{k}}\cos x\right\} + \frac{2q\cos 2x}{1-q} + \frac{2q^2\cos 4x}{2(1+q^2)} + \frac{2q^3\cos 6x}{3(1-q^3)} + \cdots$$

$$(8.)\quad \log\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \log\sqrt{k'} + \frac{4q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{4q^3\cos 6x}{3(1-q^6)} + \frac{4q^5\cos 10x}{5(1-q^{10})} + \cdots$$

$$(9.)\quad \log\sqrt{\frac{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}} = \log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + \frac{4q\sin x}{1-q} - \frac{4q^3\sin 3x}{3(1-q^3)} + \frac{4q^5\sin 5x}{5(1-q^5)} - \cdots$$

$$(10.)\quad \log\sqrt{\frac{1+k\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}} = \frac{4\sqrt{q}\sin x}{1-q} - \frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{3(1-q^3)} + \frac{4\sqrt{q^5}\sin 5x}{5(1-q^5)} - \cdots$$

Quibus formulis differentiatis, ubi adnotamus formulas differentiales probatu faciles:

$$\frac{d\log\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx} = \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\cos\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}}$$

$$-\frac{d\log\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{2K}{\pi}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{4Kx}{\pi}$$

$$-\frac{d\log\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx} = \frac{2k^2K}{\pi}\cdot\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}$$

$$\frac{d\log\sqrt{\frac{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}}}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}}$$

$$\frac{d\log\sqrt{\frac{1+k\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}}}{dx} = \frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi},$$

eruimus sequentes:

$$(11.)\quad \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\cos\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}} = \operatorname{cotg}x - \frac{4q\sin 2x}{1+q} - \frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} - \frac{4q^3\sin 6x}{1+q^3} - \cdots$$

$$(12.)\quad \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}} = \operatorname{tg}x + \frac{4q\sin 2x}{1-q} + \frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} + \frac{4q^3\sin 6x}{1-q^3} + \cdots$$

$$(13.)\quad \frac{2k^2K}{\pi}\cdot\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{8q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{8q^3\sin 6x}{1-q^6} + \frac{8q^5\sin 10x}{1-q^{10}} + \cdots$$

$$(14.)\quad \frac{2K}{\pi\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{1}{\cos x} + \frac{4q\cos x}{1-q} - \frac{4q^3\cos 3x}{1-q^3} + \frac{4q^5\cos 5x}{1-q^5} - \cdots$$

$$(15.)\quad \frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}\cos x}{1-q} - \frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1-q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\cos 5x}{1-q^5} - \cdots$$

Ubi in his formulis loco x ponitur $\frac{\pi}{2}-x$, eruitur:

$$(16.)\quad \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{\cos\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}}{\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \operatorname{tg}x - \frac{4q\sin 2x}{1+q} + \frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} - \frac{4q^3\sin 6x}{1+q^3} + \cdots$$

$$(17.)\quad \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}}{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \operatorname{cotg}x + \frac{4q\sin 2x}{1-q} - \frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} + \frac{4q^3\sin 6x}{1-q^3} - \cdots$$

$$(18.)\quad \frac{2K}{\pi\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{1}{\sin x} + \frac{4q\sin x}{1-q} + \frac{4q^3\sin 3x}{1-q^3} + \frac{4q^5\sin 5x}{1-q^5} + \cdots$$

$$(19.)\quad \frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}\sin x}{1-q} + \frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5} + \cdots$$

Formula (13.), ponendo $\frac{\pi}{2}-x$ loco x, immutata manet.

Mutando q in $-q$, e theoremate I. §. 37. formulae (11.), (12.) in (17.), (16.) abeunt; (13.) immutata manet; e formulis (14.), (15.), (18.), (19.) obtinemus:

$$(20.)\quad \frac{2k'K}{\pi\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{1}{\cos x} - \frac{4q\cos x}{1+q} + \frac{4q^3\cos 3x}{1+q^3} - \frac{4q^5\cos 5x}{1+q^5} + \cdots$$

$$(21.)\quad \frac{2kK}{\pi}\cdot\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}\cos x}{1+q} + \frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\cos 5x}{1+q^5} + \cdots$$

$$(22.)\qquad \frac{2k'K}{\pi\cos\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{1}{\sin x} - \frac{4q\sin x}{1+q} - \frac{4q^3\sin 3x}{1+q^3} - \frac{4q^5\sin 5x}{1+q^5} - \cdots$$

$$(23.)\qquad \frac{2kK}{\pi}\cdot\cos\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}\sin x}{1+q} - \frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1+q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\sin 5x}{1+q^5} - \cdots$$

Formulae (19.), (21.) per evolutiones notas ex iis etiam facile derivari possunt, quas supra attulimus §. 35. (6.), (7.):

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\pi}{kK}\sin x\left(\frac{\sqrt{q}(1+q)}{1-2q\cos 2x+q^2} + \frac{\sqrt{q^3}(1+q^3)}{1-2q^3\cos 2x+q^6} + \frac{\sqrt{q^5}(1+q^5)}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}} + \cdots\right)$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\pi}{kK}\cos x\left(\frac{\sqrt{q}(1-q)}{1-2q\cos 2x+q^2} - \frac{\sqrt{q^3}(1-q^3)}{1-2q^3\cos 2x+q^6} + \frac{\sqrt{q^5}(1-q^5)}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}} - \cdots\right).$$

E formula (9.) §. 35.:

$$\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \pm x + 2\operatorname{arctg}\frac{(1+q)\operatorname{tg}x}{1-q} - 2\operatorname{arctg}\frac{(1+q^3)\operatorname{tg}x}{1-q^3} + 2\operatorname{arctg}\frac{(1+q^5)\operatorname{tg}x}{1-q^5} - \cdots$$

sequitur adhuc:

$$(24.)\qquad \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = x + \frac{2q\sin 2x}{1+q^2} + \frac{2q^2\sin 4x}{2(1+q^4)} + \frac{2q^3\sin 6x}{3(1+q^6)} + \cdots$$

Eandem enim pro signi ambigui ratione ita repraesentare licet:

$$\begin{array}{l} +x + 2\operatorname{arctg}\frac{(1+q)t}{1-q} - 2\operatorname{arctg}\frac{(1+q^3)t}{1-q^3} + 2\operatorname{arctg}\frac{(1+q^5)t}{1-q^5} - \cdots \\ \quad -2x \qquad\qquad\quad +2x \qquad\qquad\qquad -2x \qquad\qquad\qquad + \cdots, \end{array}$$

siquidem brevitatis causa $t = \operatorname{tg}x$. Fit autem:

$$\operatorname{arctg}\frac{(1+q)t}{1-q} - x = \operatorname{arctg}\frac{(1+q)t-(1-q)t}{1-q+(1+q)tt} = \operatorname{arctg}\frac{2qt}{1+tt-q(1-tt)} = \operatorname{arctg}\frac{q\sin 2x}{1-q\cos 2x},$$

unde:

$$\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = x + 2\operatorname{arctg}\frac{q\sin 2x}{1-q\cos 2x} - 2\operatorname{arctg}\frac{q^3\sin 2x}{1-q^3\cos 2x} + 2\operatorname{arctg}\frac{q^5\sin 2x}{1-q^5\cos 2x} - \cdots,$$

sive cum sit:

$$\operatorname{arctg}\frac{q\sin 2x}{1-q\cos 2x} = q\sin 2x + \frac{q^2\sin 4x}{2} + \frac{q^3\sin 6x}{3} + \cdots,$$

fit:

$$\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = x + \frac{2q\sin 2x}{1+q^2} + \frac{2q^2\sin 4x}{2(1+q^4)} + \frac{2q^3\sin 6x}{3(1+q^6)} + \cdots,$$

quae est formula (24.). E cuius differentiatione prodit:

$$(25.)\qquad \frac{2K}{\pi}\cdot\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = 1 + \frac{4q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4} + \frac{4q^3\cos 6x}{1+q^6} + \cdots,$$

unde etiam, posito $-q$ loco q seu $\frac{\pi}{2}-x$ loco x:

$$(26.)\qquad \frac{2k'K}{\pi\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = 1 - \frac{4q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4} - \frac{4q^3\cos 6x}{1+q^6} + \cdots.$$

40.

E formulis propositis, ponendo $x = 0$ vel aliis modis, facile eruuntur sequentes:

$$(1.)\qquad \log k = \log 4\sqrt{q} - \frac{4q}{1+q} + \frac{4q^2}{2(1+q^2)} - \frac{4q^3}{3(1+q^3)} + \frac{4q^4}{4(1+q^4)} - \cdots$$

$$(2.)\qquad -\log k' = \frac{8q}{1-q^2} + \frac{8q^3}{3(1-q^6)} + \frac{8q^5}{5(1-q^{10})} + \frac{8q^7}{7(1-q^{14})} + \cdots$$

$$(3.)\qquad \log\frac{2K}{\pi} = \frac{4q}{1+q} + \frac{4q^3}{3(1+q^3)} + \frac{4q^5}{5(1+q^5)} + \frac{4q^7}{7(1+q^7)} + \cdots$$

$$(4.)\qquad \frac{2K}{\pi} = 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1-q^3} + \frac{4q^5}{1-q^5} - \cdots$$

$$= 1 + \frac{4q}{1+q^2} + \frac{4q^2}{1+q^4} + \frac{4q^3}{1+q^6} + \cdots$$

$$(5.)\qquad \frac{2kK}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}}{1-q} - \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}}{1-q^5} - \cdots$$

$$= \frac{4\sqrt{q}}{1+q} + \frac{4\sqrt{q^3}}{1+q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}}{1+q^5} + \cdots$$

$$(6.)\qquad \frac{2k'K}{\pi} = 1 - \frac{4q}{1+q} + \frac{4q^3}{1+q^3} - \frac{4q^5}{1+q^5} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{4q}{1+q^2} + \frac{4q^2}{1+q^4} - \frac{4q^3}{1+q^6} + \cdots$$

$$(7.)\qquad \frac{2\sqrt{k'}K}{\pi} = 1 - \frac{4q^2}{1+q^2} + \frac{4q^6}{1+q^6} - \frac{4q^{10}}{1+q^{10}} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{4q^2}{1+q^4} + \frac{4q^4}{1+q^8} - \frac{4q^6}{1+q^{12}} + \cdots$$

$$(8.)\quad \frac{4KK}{\pi\pi} = 1+\frac{8q}{1-q}+\frac{16q^2}{1+q^2}+\frac{24q^3}{1-q^3}+\cdots$$
$$= 1+\frac{8q}{(1-q)^2}+\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}+\frac{8q^3}{(1-q^3)^2}+\cdots$$

$$(9.)\quad \frac{4kkKK}{\pi\pi} = \frac{16q}{1-q^2}+\frac{48q^3}{1-q^6}+\frac{80q^5}{1-q^{10}}+\cdots$$
$$= \frac{16q(1+q^2)}{(1-q^2)^2}+\frac{16q^3(1+q^6)}{(1-q^6)^2}+\frac{16q^5(1+q^{10})}{(1-q^{10})^2}+\cdots$$

$$(10.)\quad \frac{4k'k'KK}{\pi\pi} = 1-\frac{8q}{1+q}+\frac{16q^2}{1+q^2}-\frac{24q^3}{1+q^3}+\cdots$$
$$= 1-\frac{8q}{(1+q)^2}+\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}-\frac{8q^3}{(1+q^3)^2}+\cdots$$

$$(11.)\quad \frac{4kk'KK}{\pi\pi} = \frac{4\sqrt{q}}{1+q}-\frac{12\sqrt{q^3}}{1+q^3}+\frac{20\sqrt{q^5}}{1+q^5}-\cdots$$
$$= \frac{4\sqrt{q}(1-q)}{(1+q)^2}-\frac{4\sqrt{q^3}(1-q^3)}{(1+q^3)^2}+\frac{4\sqrt{q^5}(1-q^5)}{(1+q^5)^2}-\cdots$$

$$(12.)\quad \frac{4k'KK}{\pi\pi} = 1-\frac{8q^2}{1+q^2}+\frac{16q^4}{1+q^4}-\frac{24q^6}{1+q^6}+\cdots$$
$$= 1-\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}+\frac{8q^4}{(1+q^4)^2}-\frac{8q^6}{(1+q^6)^2}+\cdots$$

$$(13.)\quad \frac{4kKK}{\pi\pi} = \frac{4\sqrt{q}}{1-q}+\frac{12\sqrt{q^3}}{1-q^3}+\frac{20\sqrt{q^5}}{1-q^5}+\cdots$$
$$= \frac{4\sqrt{q}(1+q)}{(1-q)^2}+\frac{4\sqrt{q^3}(1+q^3)}{(1-q^3)^2}+\frac{4\sqrt{q^5}(1+q^5)}{(1-q^5)^2}+\cdots$$

Formulas (4.)—(13.) duplici modo repraesentavimus; facile autem repraesentatio altera ex altera sequitur, ubi singuli denominatores in seriem evolvuntur. Adnotemus adhuc, secundum theoremata §. 37. proposita e duabus ex earum numero, (4.) et (8.), derivari posse omnes. Ponendo enim $\sqrt{q}$ loco q, cum abeat K in $(1+k)K$, subtrahendo e formula (4.) prodit (5.); deinde ponendo $-q$ loco q, abit K in $k'K$, unde e formulis (4.), (8.) prodeunt (6.), (10.); (5.) immutata manet. Ponendo q^2 loco q, abit $k'K$ in $\sqrt{k'}K$, unde e (6.), (10.) prodeunt (7.), (12.). Ex (8.), (10.), quia $kk+k'k'=1$, prodit (9.). Ponendo $\sqrt{q}$ loco q, abit kK in $2\sqrt{k}K$, unde e (9.) prodit (13.). Ponendo $-q$ loco q, abit kKK in $ikk'KK$, unde e (13.) prodit (11.). Ceterum pro ipso modulo vel complemento eiusmodi series non extare videntur.

Formulis propositis ad dignitates ipsius q evolutis, obtinemus:

$$(14.)\quad \log k = \log 4\sqrt{q}-4q+6q^2-\frac{16}{3}q^3+3q^4-\frac{24}{5}q^5+8q^6-\frac{32}{7}q^7+\frac{3}{2}q^8-\frac{52}{9}q^9+\frac{36}{5}q^{10}-\cdots$$

$$(15.)\quad -\log k' = 8q+\frac{32}{3}q^3+\frac{48}{5}q^5+\frac{64}{7}q^7+\frac{104}{9}q^9+\frac{96}{11}q^{11}+\frac{112}{13}q^{13}+\frac{192}{15}q^{15}+\cdots$$

$$(16.)\quad \log\frac{2K}{\pi} = 4q-4q^2+\frac{16}{3}q^3-4q^4+\frac{24}{5}q^5-\frac{16}{3}q^6+\frac{32}{7}q^7-4q^8+\frac{52}{9}q^9-\frac{24}{5}q^{10}+\cdots$$

$$(17.)\quad \frac{2K}{\pi} = 1+4q+4q^2+4q^4+8q^5+4q^8+4q^9+8q^{10}+8q^{13}+4q^{16}+8q^{17}+4q^{18}+\cdots$$

$$(18.)\quad \frac{2kK}{\pi} = 4\sqrt{q}+8\sqrt{q^5}+4\sqrt{q^9}+8\sqrt{q^{13}}+8\sqrt{q^{17}}+12\sqrt{q^{25}}+8\sqrt{q^{29}}+8\sqrt{q^{37}}+\cdots$$

$$(19.)\quad \frac{2k'K}{\pi} = 1-4q+4q^2+4q^4-8q^5+4q^8-4q^9+8q^{10}-8q^{13}+4q^{16}-8q^{17}+4q^{18}+\cdots$$

$$(20.)\quad \frac{2\sqrt{k'}K}{\pi} = 1-4q^2+4q^4+4q^8-8q^{10}+4q^{16}-4q^{18}+8q^{20}-8q^{26}+4q^{32}-\cdots$$

$$(21.)\quad \frac{4KK}{\pi\pi} = 1+8q+24q^2+32q^3+24q^4+48q^5+96q^6+64q^7+24q^8+\cdots$$

$$(22.)\quad \frac{4kkKK}{\pi\pi} = 16q+64q^3+96q^5+128q^7+208q^9+192q^{11}+224q^{13}+384q^{15}+\cdots$$

$$(23.)\quad \frac{4k'k'KK}{\pi\pi} = 1-8q+24q^2-32q^3+24q^4-48q^5+96q^6-64q^7+24q^8-\cdots$$

$$(24.)\quad \frac{4kk'KK}{\pi\pi} = 4\sqrt{q}-16\sqrt{q^3}+24\sqrt{q^5}-32\sqrt{q^7}+52\sqrt{q^9}-48\sqrt{q^{11}}+56\sqrt{q^{13}}-\cdots$$

$$(25.)\quad \frac{4k'KK}{\pi\pi} = 1-8q^2+24q^4-32q^6+24q^8-48q^{10}+96q^{12}-64q^{14}+24q^{16}-104q^{18}+\cdots$$

$$(26.)\quad \frac{4kKK}{\pi\pi} = 4\sqrt{q}+16\sqrt{q^3}+24\sqrt{q^5}+32\sqrt{q^7}+52\sqrt{q^9}+48\sqrt{q^{11}}+56\sqrt{q^{13}}+\cdots$$

Quarum serierum lex et ratio quo melius perspiciatur, denotabimus eas signo summatorio Σ termino earum generali praefixo. Statuamus, p esse *numerum imparem*, $\varphi(p)$ *summam factorum ipsius* p. Tum fit:

$$(27.)\quad \log k = \log 4\sqrt{q}-4\sum\frac{\varphi(p)}{p}\left\{q^p-\frac{3q^{2p}}{2}-\frac{3}{4}q^{4p}-\frac{3}{8}q^{8p}-\frac{3}{16}q^{16p}-\cdots\right\}$$

$$(28.)\quad -\log k' = 8\sum\frac{\varphi(p)}{p}q^p$$

$$(29.)\quad \log\frac{2K}{\pi} = 4\sum\frac{\varphi(p)}{p}\left\{q^p-q^{2p}-q^{4p}-q^{8p}-q^{16p}-\cdots\right\}.$$

Porro sit m *numerus impar, cuius factores primi omnes formam* $4a-1$,

n numerus impar, cuius factores primi omnes formam $4a+1$ habent, $\psi(n)$ numerus factorum ipsius n, l numerus quicunque a 0 usque ad ∞: obtinemus:

$$\frac{2K}{\pi} = 1+4\sum\psi(n)q^{2^l m^2 n} \tag{30.}$$

$$\frac{2kK}{\pi} = 4\sum\psi(n)q^{\frac{m^2 n}{2}} \tag{31.}$$

$$\frac{2k'K}{\pi} = 1-4\sum\psi(n)q^{m^2 n}+4\sum\psi(n)q^{2^{l+1}m^2 n} \tag{32.}$$

$$\frac{2\sqrt{k'}K}{\pi} = 1-4\sum\psi(n)q^{2m^2 n}+4\sum\psi(n)q^{2^{l+2}m^2 n}. \tag{33.}$$

Designante p rursus numerum imparem, $\varphi(p)$ summam factorum ipsius p: fit:

$$\frac{4KK}{\pi\pi} = 1+8\sum\varphi(p)[q^p+3q^{2p}+3q^{4p}+3q^{8p}+3q^{16p}+\cdots] \tag{34.}$$

$$\frac{4kkKK}{\pi\pi} = 16\sum\varphi(p)q^p \tag{35.}$$

$$\frac{4k'k'KK}{\pi\pi} = 1+8\sum\varphi(p)[-q^p+3q^{2p}+3q^{4p}+3q^{8p}+3q^{16p}+\cdots] \tag{36.}$$

$$\frac{4kk'KK}{\pi\pi} = 4\sum(-1)^{\frac{p-1}{2}}\varphi(p)\sqrt{q^p} \tag{37.}$$

$$\frac{4k'KK}{\pi\pi} = 1+8\sum\varphi(p)[-q^{2p}+3q^{4p}+3q^{8p}+3q^{16p}+3q^{32p}+\cdots] \tag{38.}$$

$$\frac{4kKK}{\pi\pi} = 4\sum\varphi(p)\sqrt{q^p}. \tag{39.}$$

Demonstremus formulam (27.). Invenimus (1.):

$$\log k = \log 4\sqrt{q}-\frac{4q}{1+q}+\frac{4q^2}{2(1+q^2)}-\frac{4q^3}{3(1+q^3)}+\cdots,$$

quod ponamus $=\log 4\sqrt{q}+4\sum A^{(x)}q^x$. Sit x numerus impar $p=mm'$, e quovis termino $-\frac{q^m}{m(1+q^m)}$ prodit $\frac{-q^p}{m}$, unde constat, fore $A^{(p)}=-\frac{\varphi(p)}{p}$. Iam sit x numerus par $=2^l p=2^l mm'$: e terminis

$$\frac{-q^m}{m(1+q^m)}+\frac{q^{2m}}{2m(1+q^{2m})}+\frac{q^{4m}}{4m(1+q^{4m})}+\frac{q^{8m}}{8m(1+q^{8m})}+\cdots+\frac{q^{2^l m}}{2^l m(1+q^{2^l m})}$$

provenit:

$$\frac{q^x}{m}\left\{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdots-\frac{1}{2^{l-1}}+\frac{1}{2^l}\right\} = \frac{3q^x}{2^l m},$$

unde $A^{(x)}=\frac{3\varphi(p)}{2^l p}$, id quod formulam propositam suppeditat.

Demonstremus formulam (30.). Invenimus (4.):

$$\frac{2K}{\pi} = 1+\frac{4q}{1-q}-\frac{4q^3}{1-q^3}+\frac{4q^5}{1-q^5}-\cdots = 1+4\sum A^{(x)}q^x.$$

Sit $B^{(x)}$ numerus factorum ipsius x, qui formam $4m+1$ habent, $C^{(x)}$ numerus factorum, qui formam $4m+3$ habent, facile patet, fore $A^{(x)}=B^{(x)}-C^{(x)}$. Sit $x=2^l nn'$, ita ut n sit numerus impar, cuius factores primi omnes formam $4m+1$, n' numerus impar, cuius factores primi omnes formam $4m-1$ habent, facile probatur, nisi sit n' numerus quadratus, semper fore $B^{(x)}-C^{(x)}=0$, ubi vero n' est numerus quadratus, fore $B^{(x)}-C^{(x)}=B^{(n)}=\psi(n)$, unde formula (30.) fluit.

Postremo probemus formulam (34.). Invenimus (8.):

$$\frac{4KK}{\pi\pi} = 1+\frac{8q}{1-q}+\frac{16q^2}{1+q^2}+\frac{24q^3}{1-q^3}+\frac{32q^4}{1+q^4}+\cdots = 1+8\sum A^{(x)}q^x.$$

Designante x numerum imparem, facile patet, fore $A^{(x)}=\varphi(x)$; ubi vero x numerus par $=2^l p$, designante p numerum imparem, quoties m factor ipsius p, e terminis

$$8\left\{\frac{mq^m}{1-q^m}+\frac{2mq^{2m}}{1+q^{2m}}+\frac{4mq^{4m}}{1+q^{4m}}+\frac{8mq^{8m}}{1+q^{8m}}+\cdots+\frac{2^l mq^{2^l m}}{1+q^{2^l m}}\right\}$$

prodit $8mq^x\{1-2-4-8-\cdots-2^{l-1}+2^l\}=24mq^x$, unde eo casu $A^{(x)}=3\varphi(p)$, id quod formulam propositam suggerit. Reliquae similiter demonstrantur vel ex his deduci possunt.

Expressiones $\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, $\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, $\frac{1}{\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}$ ad dignitates ipsius x evolutae coefficientem ipsius x^2 nanciscuntur resp. $-\frac{1}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2$, $-\frac{1}{2}\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2$, $+\frac{1}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2$, unde e formulis §^{i} antecedentis (21.), (25.), (20.) prodire videmus sequentes:

$$\begin{aligned} k\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 &= 4\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}+\frac{9\sqrt{q^3}}{1+q^3}+\frac{25\sqrt{q^5}}{1+q^5}+\frac{49\sqrt{q^7}}{1+q^7}+\cdots\right\} \\ &= 4\left\{\frac{\sqrt{q}(1+6q+q^2)}{(1-q)^3}-\frac{\sqrt{q^3}(1+6q^3+q^6)}{(1-q^3)^3}+\frac{\sqrt{q^5}(1+6q^5+q^{10})}{(1-q^5)^3}-\cdots\right\} \end{aligned} \tag{40.}$$

$$(41.)\quad k'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 = 1+4\left\{\frac{q}{1+q}-\frac{9q^3}{1+q^3}+\frac{25q^5}{1+q^5}-\frac{49q^7}{1+q^7}+\cdots\right\}$$
$$= 1+4\left\{\frac{q(1-6q^2+q^4)}{(1+q^2)^3}-\frac{q^2(1-6q^4+q^8)}{(1+q^4)^3}+\frac{q^3(1-6q^6+q^{12})}{(1+q^6)^3}-\cdots\right\}$$

$$(42.)\quad kk\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 = 16\left\{\frac{q}{1+q^2}+\frac{4q^2}{1+q^4}+\frac{9q^3}{1+q^6}+\frac{16q^4}{1+q^8}+\cdots\right\}$$
$$= 16\left\{\frac{q(1+q)}{(1-q)^3}-\frac{q^3(1+q^3)}{(1-q^3)^3}+\frac{q^5(1+q^5)}{(1-q^5)^3}+\cdots\right\}.$$

Ex his, posito $-q$ loco q, obtinemus:

$$(43.)\quad kk'k'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 = 4\left\{\frac{\sqrt{q}}{1-q}-\frac{9\sqrt{q^3}}{1-q^3}+\frac{25\sqrt{q^5}}{1-q^5}-\frac{49\sqrt{q^7}}{1-q^7}+\cdots\right\}$$

$$(44.)\quad k'k'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 = 1-4\left\{\frac{q}{1-q}-\frac{9q^3}{1-q^3}+\frac{25q^5}{1-q^5}-\frac{49q^7}{1-q^7}+\cdots\right\}$$

$$(45.)\quad k'kk\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 = 16\left\{\frac{q}{1+q^2}-\frac{4q^2}{1+q^4}+\frac{9q^3}{1+q^6}-\frac{16q^4}{1+q^8}+\cdots\right\}.$$

Formulis (42.), (44.) additis, obtinemus $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3$; (40.) et (43.), (41.) et (45.) subductis, obtinemus $\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^3$, $\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^3$, e quibus, posito resp. $\sqrt{q}$, q^2 loco q, prodit $\left(\frac{4\sqrt{k}K}{\pi}\right)^3$, $\left(\frac{2\sqrt{k'}K}{\pi}\right)^3$; e $\left(\frac{4\sqrt{k}K}{\pi}\right)^3$, posito $-q$ loco q, obtinetur $\left(\frac{4\sqrt{kk'}K}{\pi}\right)^3$.

Sub finem, posito $k=\sin\vartheta$, evolvamus ipsum $\vartheta=\arcsin k$. Vidimus, posito $\sqrt{q}$ loco q, abire k' in $\frac{1-k}{1+k}$; ponamus rursus $-q$ loco q, abit k in $\frac{ik}{k'}$ sive in $i\operatorname{tang}\vartheta$, ita ut, posito $i\sqrt{q}$ loco q, expressio $\frac{-\log k'}{2i}$ mutetur in:

$$-\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1-i\operatorname{tang}\vartheta}{1+i\operatorname{tang}\vartheta}\right)=\vartheta.$$

Hinc e formula (2.):

$$-\log k' = \frac{8q}{1-q^2}+\frac{8q^3}{3(1-q^6)}+\frac{8q^5}{5(1-q^{10})}+\frac{8q^7}{7(1-q^{14})}+\cdots$$

eruimus:

$$(46.)\quad \vartheta=\arcsin k=\frac{4\sqrt{q}}{1+q}-\frac{4\sqrt{q^3}}{3(1+q^3)}+\frac{4\sqrt{q^5}}{5(1+q^5)}-\frac{4\sqrt{q^7}}{7(1+q^7)}+\cdots,$$

quae in hanc facile transformatur:

$$(47.)\quad \frac{\vartheta}{4}=\operatorname{arctg}\sqrt{q}-\operatorname{arctg}\sqrt{q^3}+\operatorname{arctg}\sqrt{q^5}-\operatorname{arctg}\sqrt{q^7}+\cdots,$$

quae inter formulas elegantissimas censeri debet.

41.

Aequationem supra exhibitam:

$$\frac{2kK}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{4\sqrt{q}\sin x}{1-q}+\frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3}+\frac{4\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5}+\cdots$$

in se ipsam ducamus. Loco $2\sin mx\sin nx$ ubique substituto

$$\cos(m-n)x-\cos(m+n)x,$$

factum induit formam:

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=A+A'\cos 2x+A''\cos 4x+A'''\cos 6x+\cdots$$

Invenitur:

$$A=\frac{8q}{(1-q)^2}+\frac{8q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{8q^5}{(1-q^5)^2}+\cdots$$

Porro fit:

$$A^{(n)}=16B^{(n)}-8C^{(n)}=8[2B^{(n)}-C^{(n)}],$$

siquidem ponitur:

$$B^{(n)}=\frac{q^{n+1}}{(1-q)(1-q^{2n+1})}+\frac{q^{n+3}}{(1-q^3)(1-q^{2n+3})}+\frac{q^{n+5}}{(1-q^5)(1-q^{2n+5})}+\text{ etc. in inf.}$$

$$C^{(n)}=\frac{q^n}{(1-q)(1-q^{2n-1})}+\frac{q^n}{(1-q^3)(1-q^{2n-3})}+\frac{q^n}{(1-q^5)(1-q^{2n-5})}+\cdots+\frac{q^n}{(1-q^{2n-1})(1-q)}.$$

Iam cum sit:

$$\frac{q^{n+m}}{(1-q^m)(1-q^{2n+m})}=\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q^m}{1-q^m}-\frac{q^{2n+m}}{1-q^{2n+m}}\right\},$$

fit:

$$B^{(n)}=\left\{\begin{array}{l}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\cdots\right\}\\ -\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}+\frac{q^{2n+3}}{1-q^{2n+3}}+\frac{q^{2n+5}}{1-q^{2n+5}}+\cdots\right\}\end{array}\right\},$$

sive sublatis, qui se destruunt, terminis:

$$B^{(n)}=\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right\}.$$

Porro fit:

$$\frac{q^n}{(1-q^m)(1-q^{2n-m})}=\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q^m}{1-q^m}+\frac{q^{2n-m}}{1-q^{2n-m}}+1\right\},$$

unde:

$$C^{(n)} = \frac{nq^n}{1-q^{2n}} + \frac{2q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{1-q^3} + \cdots + \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right\}.$$

Hinc tandem prodit:

$$A^{(n)} = 8[2B^{(n)} - C^{(n)}] = \frac{-8nq^n}{1-q^{2n}},$$

unde iam:

$$(1.)\quad \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \sin^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = A - 8\left\{\frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} + \cdots\right\}.$$

Simili modo vel ex (1.) invenitur:

$$(2.)\quad \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \cos^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = B + 8\left\{\frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} + \cdots\right\},$$

siquidem:

$$A = 8\left\{\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} + \cdots\right\}$$

$$B = 8\left\{\frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \cdots\right\}.$$

E noto calculi integralis theoremate fit, quoties

$$\varphi(x) = A + A'\cos 2x + A''\cos 4x + A'''\cos 6x + \cdots,$$

terminus primus seu constans:

$$A = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\,dx$$

unde nanciscimur hoc loco:

$$A = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\,dx$$

$$B = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\,dx.$$

Ponamus cum Cl°. Legendre:

$$E^{\mathrm{I}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\Delta(\varphi) = \frac{2K}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,\Delta^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi},$$

erit:

$$A = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E^{\mathrm{I}}}{\pi}$$

$$B = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E^{\mathrm{I}}}{\pi} - \left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2.$$

Hinc etiam, cum, mutato q in $-q$, abeat A in $-B$, K in $k'K$, sequitur simul abire E^{I} in $\frac{E^{\mathrm{I}}}{k'}$.

Adnotemus adhuc e formula (1.) sequi:

$$(3.)\quad kk\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 = 16\left\{\frac{q}{1-q^2} + \frac{2^3q^2}{1-q^4} + \frac{3^3q^3}{1-q^6} + \frac{4^3q^4}{1-q^8} + \cdots\right\}$$

$$= 16\left\{\frac{q(1+4q+q^2)}{(1-q)^4} + \frac{q^3(1+4q^3+q^6)}{(1-q^3)^4} + \frac{q^5(1+4q^5+q^{10})}{(1-q^5)^4} + \cdots\right\},$$

unde etiam, mutato q in $-q$:

$$(4.)\quad k^2k'^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 = 16\left\{\frac{q}{1-q^2} - \frac{2^3q^2}{1-q^4} + \frac{3^3q^3}{1-q^6} - \frac{4^3q^4}{1-q^8} + \cdots\right\}$$

$$= 16\left\{\frac{q(1-4q+q^2)}{(1+q)^4} + \frac{q^3(1-4q^3+q^6)}{(1+q^3)^4} + \frac{q^5(1-4q^5+q^{10})}{(1+q^5)^4} + \cdots\right\}.$$

Subtracta formula (4.) a (3.), prodit:

$$(5.)\quad \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^4 = 256\left\{\frac{q^2}{1-q^4} + \frac{2^3q^4}{1-q^8} + \frac{3^3q^6}{1-q^{12}} + \frac{4^3q^8}{1-q^{16}} + \cdots\right\}$$

$$= 256\left\{\frac{q^2(1+4q^2+q^4)}{(1-q^2)^4} + \frac{q^6(1+4q^6+q^{12})}{(1-q^6)^4} + \frac{q^{10}(1+4q^{10}+q^{20})}{(1-q^{10})^4} + \cdots\right\},$$

quam etiam e (3.), mutato q in q^2, obtines.

42.

Methodo simili atque formula (1.) §$^{\mathrm{i}}$ antecedentis inventa est, in expressionem

$$\frac{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}{\sin^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}$$

in seriem evolvendam inquirere possemus, siquidem formula (18.) §. 39. in se ipsam ducatur. Id quod tamen facilius ex ipsa (1.) §$^{\mathrm{i}}$ 41. absolvitur consideratione sequente.

Etenim formula:

$$\frac{d\log\sin \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{1-(1+kk)\sin^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} + kk\sin^4 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}}{\sin \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}$$

iterum differentiata, factis reductionibus, obtinemus:

$$(1.)\qquad \frac{d^2\log\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx^2} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\left\{kk\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - \frac{1}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right\}.$$

Iam vero invenimus §. 39. (6.):

$$\log\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \log\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\right) + \log\sin x + 2\left\{\frac{q\cos 2x}{1+q} + \frac{q^2\cos 4x}{2(1+q^2)} + \frac{q^3\cos 6x}{3(1+q^3)} + \cdots\right\},$$

unde:

$$\frac{d^2\log\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx^2} = -\frac{1}{\sin^2 x} - 8\left\{\frac{q\cos 2x}{1+q} + \frac{2q^2\cos 4x}{1+q^2} + \frac{3q^3\cos 6x}{1+q^3} + \cdots\right\}.$$

Porro est §. 41. (1.):

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E^1}{\pi} - 8\left\{\frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} + \cdots\right\},$$

unde, cum e formula (1.) sit:

$$\frac{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - \frac{d^2\log\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx^2},$$

provenit, quod quaerimus:

$$(2.)\qquad \frac{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E^1}{\pi} + \frac{1}{\sin^2 x} - 8\left\{\frac{q^2\cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^4\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^6\cos 6x}{1-q^6} + \cdots\right\}.$$

Mutatis simul q in $-q$ et x in $\frac{\pi}{2}-x$, unde K in $k'K$, E^1 in $\frac{E^1}{k'}$ (§. 41.), $\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ in $\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ abit, e (2.) prodit:

$$(3.)\qquad \frac{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2}{\cos^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E^1}{\pi} + \frac{1}{\cos^2 x} + 8\left\{\frac{q^2\cos 2x}{1-q^2} - \frac{2q^4\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^6\cos 6x}{1-q^6} - \cdots\right\}.$$

His adiungo, quae facile e §. 41. (1.) sequuntur, hasce:

$$(4.)\qquad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E^1}{\pi} + 8\left\{\frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} + \cdots\right\}$$

$$(5.)\qquad \left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2\frac{1}{\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E^1}{\pi} - 8\left\{\frac{q\cos 2x}{1-q^2} - \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} - \cdots\right\},$$

quarum (5.) e (4.) sequitur, mutato x in $\frac{\pi}{2}-x$ seu q in $-q$.

Posito $y = \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, $\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} = R$, fit:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{2K}{\pi}\cdot R \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 y(1+k^2-2k^2y^2) \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1+k^2-6k^2y^2)R \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 y\left(1+14k^2+k^4-20k^2(1+k^2)y^2+24k^4y^4\right) \\
\frac{d^5y}{dx^5} &= \left(\frac{2K}{\pi}\right)^5 \left(1+14k^2+k^4-60k^2(1+k^2)y^2+120k^4y^4\right)R \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.,}
\end{aligned}$$

unde:

$$y = \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2Kx}{\pi} - \frac{1+k^2}{2.3}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{2.3.4.5}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)^5 - \cdots$$

ideoque:

$$\frac{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{1}{x^2} + \frac{1+k^2}{3}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 + \frac{1-k^2+k^4}{15}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 x^2 + \cdots,$$

qua formula comparata cum (2.), eruitur:

$$\frac{1+k^2}{3}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E^1}{\pi} - 8\left\{\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{2q^4}{1-q^4} + \frac{3q^6}{1-q^6} + \cdots\right\},$$

sive:

$$(6.)\qquad \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{2q^4}{1-q^4} + \frac{3q^6}{1-q^6} + \frac{4q^8}{1-q^8} + \cdots = \frac{1+\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(2-k^2) - 3\,\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E^1}{\pi}}{2.3.4}.$$

Porro fit:

$$\frac{1-k^2+k^4}{15}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 = \frac{1}{15} + 16\left\{\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{2^3q^4}{1-q^4} + \frac{3^3q^6}{1-q^6} + \frac{4^3q^8}{1-q^8} + \cdots\right\},$$

sive cum sit $15 = 2.2^3 - 1$:

$$(1-k^2+k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 = 1+2.16\left\{\frac{2^3q^2}{1-q^2}+\frac{4^3q^4}{1-q^4}+\frac{6^3q^6}{1-q^6}+\frac{8^3q^8}{1-q^8}+\cdots\right\}$$
$$-16\left\{\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{2^3q^4}{1-q^4}+\frac{3^3q^6}{1-q^6}+\frac{4^3q^8}{1-q^8}+\cdots\right\}.$$

De hac formula detrahatur sequens §. 41. (3.):

$$k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 = 16\left\{\frac{q}{1-q^2}+\frac{2^3q^2}{1-q^4}+\frac{3^3q^3}{1-q^6}+\frac{4^3q^4}{1-q^8}+\cdots\right\},$$

fit residuum:

$$(7.)\qquad \left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^4 = 1-16\left\{\frac{q}{1-q}-\frac{2^3q^2}{1-q^2}+\frac{3^3q^3}{1-q^3}-\frac{4^3q^4}{1-q^4}+\cdots\right\},$$

unde etiam, mutato q in $-q$:

$$(8.)\qquad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 = 1+16\left\{\frac{q}{1+q}+\frac{2^3q^2}{1-q^2}+\frac{3^3q^3}{1+q^3}+\frac{4^3q^4}{1-q^4}+\cdots\right\},$$

quae difficiliores indagatu erant formulae. Quas si iis iungis, quas supra invenimus, iam quatuor primas dignitates ipsorum $\frac{2K}{\pi}$, $\frac{2kK}{\pi}$ in series satis concinnas evolutas habes.

FORMULAE GENERALES PRO FUNCTIONIBUS

$$\sin^n \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi},\qquad \frac{1}{\sin^n \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}}$$

IN SERIES EVOLVENDIS SECUNDUM SINUS VEL COSINUS MULTIPLORUM IPSIUS x PROGREDIENTES.

43.

Inventis evolutionibus functionum

$$\sin \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi},\quad \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi},\quad \frac{1}{\sin \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}},\quad \frac{1}{\sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}},$$

iam quaestio se offert de evolutionibus altiorum dignitatum ipsius

$$\sin \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi},\quad \frac{1}{\sin \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}}$$

peragendis. Facilis quidem in trigonometria analytica via constat, qua, evolutione inventa ipsorum $\sin x$, $\cos x$, progredi possis ad evolutionem expressionum $\sin^n x$, $\cos^n x$; nimirum id succedit formularum notarum ope, quibus $\sin^n x$, $\cos^n x$ per sinus vel cosinus multiplorum ipsius x lineariter exhibentur. At in theoria functionum ellipticarum illud deficit subsidium; ad aliud confugiendum erit, quod in sequentibus exponemus.

Formula, quae ex elementis patet:

$$\frac{d\sin^n \mathrm{am}\,u}{du^2} = n\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u\sqrt{1-(1+k^2)\sin^2\mathrm{am}\,u+k^2\sin^4\mathrm{am}\,u},$$

iterum differentiata, prodit:

$$(1.)\qquad \frac{d^2\sin^n \mathrm{am}\,u}{du^2} = n(n-1)\sin^{n-2}\mathrm{am}\,u - n^2(1+k^2)\sin^n\mathrm{am}\,u + n(n+1)k^2\sin^{n+2}\mathrm{am}\,u.$$

Posito successive $n = 1, 3, 5, 7\ldots$, $n = 2, 4, 6, 8\ldots$, hinc duplex formetur aequationum series:

I.

$$\frac{d^2\sin\mathrm{am}\,u}{du^2} = \qquad\qquad - (1+k^2)\sin\mathrm{am}\,u + 2k^2\sin^3\mathrm{am}\,u$$
$$\frac{d^2\sin^3\mathrm{am}\,u}{du^2} = 6\sin\mathrm{am}\,u - 9(1+k^2)\sin^3\mathrm{am}\,u + 12k^2\sin^5\mathrm{am}\,u$$
$$\frac{d^2\sin^5\mathrm{am}\,u}{du^2} = 20\sin^3\mathrm{am}\,u - 25(1+k^2)\sin^5\mathrm{am}\,u + 30k^2\sin^7\mathrm{am}\,u$$
$$\frac{d^2\sin^7\mathrm{am}\,u}{du^2} = 42\sin^5\mathrm{am}\,u - 49(1+k^2)\sin^7\mathrm{am}\,u + 56k^2\sin^9\mathrm{am}\,u$$

etc. etc.

II.

$$\frac{d^2\sin^2\mathrm{am}\,u}{du^2} = 2 \qquad\qquad - 4(1+k^2)\sin^2\mathrm{am}\,u + 6k^2\sin^4\mathrm{am}\,u$$
$$\frac{d^2\sin^4\mathrm{am}\,u}{du^2} = 12\sin^2\mathrm{am}\,u - 16(1+k^2)\sin^4\mathrm{am}\,u + 20k^2\sin^6\mathrm{am}\,u$$
$$\frac{d^2\sin^6\mathrm{am}\,u}{du^2} = 30\sin^4\mathrm{am}\,u - 36(1+k^2)\sin^6\mathrm{am}\,u + 42k^2\sin^8\mathrm{am}\,u$$
$$\frac{d^2\sin^8\mathrm{am}\,u}{du^2} = 56\sin^6\mathrm{am}\,u - 64(1+k^2)\sin^8\mathrm{am}\,u + 72k^2\sin^{10}\mathrm{am}\,u$$

etc. etc.

Ex aequationibus I., II. eruis successive, posito $\Pi n = 1.2.3\ldots n$:

I. a.

$$\Pi 2 . k^2 \sin^3 \operatorname{am} u = \frac{d^2 \sin \operatorname{am} u}{du^2} + (1+k^2) \sin \operatorname{am} u$$

$$\Pi 4 . k^4 \sin^5 \operatorname{am} u = \frac{d^4 \sin \operatorname{am} u}{du^4} + 10(1+k^2)\frac{d^2 \sin \operatorname{am} u}{du^2} + 3(3+2k^2+3k^4) \sin \operatorname{am} u$$

$$\Pi 6 . k^6 \sin^7 \operatorname{am} u = \frac{d^6 \sin \operatorname{am} u}{du^6} + 35(1+k^2)\frac{d^4 \sin \operatorname{am} u}{du^4} + 7(37+38k^2+37k^4)\frac{d^2 \sin \operatorname{am} u}{du^2} + 45(5+3k^2+3k^4+5k^6) \sin \operatorname{am} u$$

$$\begin{aligned}\Pi 8 . k^8 \sin^9 \operatorname{am} u = {} & \frac{d^8 \sin \operatorname{am} u}{du^8} + 84(1+k^2)\frac{d^6 \sin \operatorname{am} u}{du^6} + 42(47+58k^2+47k^4)\frac{d^4 \sin \operatorname{am} u}{du^4} \\ & + 4(3229+3315k^2+3315k^4+3229k^6)\frac{d^2 \sin \operatorname{am} u}{du^2} \\ & + 315(35+20k^2+18k^4+20k^6+35k^8) \sin \operatorname{am} u\end{aligned}$$

etc. etc.

II. a.

$$\Pi 3 . k^2 \sin^4 \operatorname{am} u = \frac{d^2 \sin^2 \operatorname{am} u}{du^2} + 4(1+k^2) \sin^2 \operatorname{am} u - 2$$

$$\Pi 5 . k^4 \sin^6 \operatorname{am} u = \frac{d^4 \sin^2 \operatorname{am} u}{du^4} + 20(1+k^2)\frac{d^2 \sin^2 \operatorname{am} u}{du^2} + 8(8+7k^2+8k^4) \sin^2 \operatorname{am} u - 32(1+k^2)$$

$$\begin{aligned}\Pi 7 . k^6 \sin^8 \operatorname{am} u = {} & \frac{d^6 \sin^2 \operatorname{am} u}{du^6} + 56(1+k^2)\frac{d^4 \sin^2 \operatorname{am} u}{du^4} + 112(7+8k^2+7k^4)\frac{d^2 \sin^2 \operatorname{am} u}{du^2} \\ & + 128(18+15k^2+15k^4+18k^6) \sin^2 \operatorname{am} u - 48(24+23k^2+24k^4)\end{aligned}$$

etc. etc.

Ita videmus, generaliter poni posse:

(2.)
$$\begin{aligned} & \Pi 2n . k^{2n} \sin^{2n+1} \operatorname{am} u \\ = {} & \frac{d^{2n} \sin \operatorname{am} u}{du^{2n}} + A_n^{(1)} \frac{d^{2n-2} \sin \operatorname{am} u}{du^{2n-2}} + A_n^{(2)} \frac{d^{2n-4} \sin \operatorname{am} u}{du^{2n-4}} + \cdots + A_n^{(n)} \sin \operatorname{am} u\end{aligned}$$

(3.)
$$\begin{aligned} & \Pi(2n-1) . k^{2n-2} \sin^{2n} \operatorname{am} u \\ = {} & \frac{d^{2n-2} \sin^2 \operatorname{am} u}{du^{2n-2}} + B_n^{(1)} \frac{d^{2n-4} \sin^2 \operatorname{am} u}{du^{2n-4}} + B_n^{(2)} \frac{d^{2n-6} \sin^2 \operatorname{am} u}{du^{2n-6}} + \cdots + B_n^{(n-1)} \sin^2 \operatorname{am} u + B_n^{(n)},\end{aligned}$$

designantibus $A_n^{(m)}$, $B_n^{(m)}$ functiones ipsius k^2 integras rationales m^{ti} ordinis, excepta $B_n^{(n)}$, quae est $(n-2)^{ti}$. Porro e formula, unde profecti sumus, generali:

$$\frac{d^2 \sin^n \operatorname{am} u}{du^2} = n(n-1) \sin^{n-2} \operatorname{am} u - n^2(1+k^2) \sin^n \operatorname{am} u + n(n+1)k^2 \sin^{n+2} \operatorname{am} u$$

patet, fore:

(4.) $$A_n^{(m)} = A_{n-1}^{(m)} + (2n-1)^2(1+k^2)A_{n-1}^{(m-1)} - (2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2 A_{n-2}^{(m-2)}$$

(5.) $$B_n^{(m)} = B_{n-1}^{(m)} + (2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(m-1)} - (2n-3)^2(2n-2)(2n-4)k^2 B_{n-2}^{(m-2)},$$

quibus in formulis, quoties $m > n$, poni debet $A_n^{(m)} = 0$, $B_n^{(m)} = 0$.

Mutato u in $u + iK'$, cum $\sin \operatorname{am} u$ abeat in $\frac{1}{k \sin \operatorname{am} u}$, in formulis propositis loco $\sin \operatorname{am} u$ poni poterit $\frac{1}{k \sin \operatorname{am} u}$, unde proveniunt sequentes:

$$\frac{\Pi 2}{\sin^3 \operatorname{am} u} = \frac{d^2}{du^2}\frac{1}{\sin \operatorname{am} u} + (1+k^2)\frac{1}{\sin \operatorname{am} u}$$

$$\frac{\Pi 3}{\sin^4 \operatorname{am} u} = \frac{d^2}{du^2}\frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u} + 4(1+k^2)\frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u} - 2k^2$$

$$\frac{\Pi 4}{\sin^5 \operatorname{am} u} = \frac{d^4}{du^4}\frac{1}{\sin \operatorname{am} u} + 10(1+k^2)\frac{d^2}{du^2}\frac{1}{\sin \operatorname{am} u} + \frac{3(3+2k^2+3k^4)}{\sin \operatorname{am} u}$$

$$\frac{\Pi 5}{\sin^6 \operatorname{am} u} = \frac{d^4}{du^4}\frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u} + 20(1+k^2)\frac{d^2}{du^2}\frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u} + \frac{8(8+7k^2+8k^4)}{\sin^2 \operatorname{am} u} - 32k^2(1+k^2)$$

etc. etc.,

ac generaliter:

(6.)
$$\begin{aligned} & \frac{\Pi 2n}{\sin^{2n+1} \operatorname{am} u} \\ = {} & \frac{d^{2n}}{du^{2n}}\frac{1}{\sin \operatorname{am} u} + A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}}{du^{2n-2}}\frac{1}{\sin \operatorname{am} u} + A_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}}{du^{2n-4}}\frac{1}{\sin \operatorname{am} u} + \cdots + A_n^{(n)}\frac{1}{\sin \operatorname{am} u}\end{aligned}$$

(7.)
$$\begin{aligned} & \frac{\Pi(2n-1)}{\sin^{2n} \operatorname{am} u} \\ = {} & \frac{d^{2n-2}}{du^{2n-2}}\frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u} + B_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}}{du^{2n-4}}\frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u} + B_n^{(2)}\frac{d^{2n-6}}{du^{2n-6}}\frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u} + \cdots + B_n^{(n-1)}\frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u} + k^2 B_n^{(n)}.\end{aligned}$$

44.

Quum inventum sit antecedentibus, siquidem ponitur $u = \frac{2Kx}{\pi}$, expressiones

$$\sin^n \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}, \quad \frac{1}{\sin^n \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}$$

per hasce:

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi},\quad \sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi},\quad \frac{1}{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}},\quad \frac{1}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}$$

earumque differentialia, secundum argumentum u seu x sumpta, lineariter exprimi posse, iam ex harum evolutionibus, secundum sinus vel cosinus multiplorum ipsius x progredientibus, illarum sponte demanant.

Ita nanciscimur:

I.

e formula:

$$\frac{2kK}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = 4\left\{\frac{\sqrt{q}\sin x}{1-q}+\frac{\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3}+\frac{\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5}+\cdots\right\}$$

sequentes:

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^3\sin^3\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\\
&= 4\left\{(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-1\right\}\frac{\sqrt{q}\sin x}{1-q}\\
&+4\left\{(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-3^2\right\}\frac{\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3}\\
&+4\left\{(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-5^2\right\}\frac{\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5}\\
&+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2.3.4\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^5\sin^5\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\\
&= 4\left\{3(3+2k^2+3k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4-10(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2+1\right\}\frac{\sqrt{q}\sin x}{1-q}\\
&+4\left\{3(3+2k^2+3k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4-3^2.10(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2+3^4\right\}\frac{\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3}\\
&+4\left\{3(3+2k^2+3k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4-5^2.10(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2+5^4\right\}\frac{\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5}\\
&+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}$$

etc. etc.

II.

e formula:

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E^{1}}{\pi}-4\left\{\frac{2q\cos 2x}{1-q^2}+\frac{4q^2\cos 4x}{1-q^4}+\frac{6q^3\cos 6x}{1-q^6}+\cdots\right\}$$

sequentes:

$$\begin{aligned}
&2.3\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^4\sin^4\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\\
&= 4(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\left(\frac{2K}{\pi}-\frac{2E^{1}}{\pi}\right)-2k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4\\
&-4\left\{2.4(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-2^3\right\}\frac{q\cos 2x}{1-q^2}\\
&-4\left\{4.4(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-4^3\right\}\frac{q^2\cos 4x}{1-q^4}\\
&-4\left\{6.4(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-6^3\right\}\frac{q^3\cos 6x}{1-q^6}\\
&-\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2.3.4.5\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^6\sin^6\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\\
&= 8(8+7k^2+8k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^5\left(\frac{2K}{\pi}-\frac{2E^{1}}{\pi}\right)-32k^2(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6\\
&-4\left\{2.8(8+7k^2+8k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4-2^3.20(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2+2^5\right\}\frac{q\cos 2x}{1-q^2}\\
&-4\left\{4.8(8+7k^2+8k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4-4^3.20(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2+4^5\right\}\frac{q^2\cos 4x}{1-q^4}\\
&-4\left\{6.8(8+7k^2+8k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4-6^3.20(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2+6^5\right\}\frac{q^3\cos 6x}{1-q^6}\\
&-\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}$$

etc. etc.

III.

e formula:

$$\frac{\frac{2K}{\pi}}{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{1}{\sin x}+\frac{4q\sin x}{1-q}+\frac{4q^3\sin 3x}{1-q^3}+\frac{4q^5\sin 5x}{1-q^5}+\cdots$$

sequentes:

$$\frac{2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}{\sin^3 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}$$

$$= (1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\sin x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sin x}$$

$$+ 4\left\{(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 1\right\}\frac{q \sin x}{1-q}$$

$$+ 4\left\{(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 3^2\right\}\frac{q^3 \sin 3x}{1-q^3}$$

$$+ 4\left\{(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 5^2\right\}\frac{q^5 \sin 5x}{1-q^5}$$

$$+ \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{2.3.4\left(\frac{2K}{\pi}\right)^5}{\sin^5 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}$$

$$= \frac{3(3+2k^2+3k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4}{\sin x} + 10(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sin x} + \frac{d^4}{dx^4}\frac{1}{\sin x}$$

$$+ 4\left\{3(3+2k^2+3k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 - 10(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 + 1\right\}\frac{q \sin x}{1-q}$$

$$+ 4\left\{3(3+2k^2+3k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 - 3^2.10(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 + 3^4\right\}\frac{q^3 \sin 3x}{1-q^3}$$

$$+ 4\left\{3(3+2k^2+3k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 - 5^2.10(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 + 5^4\right\}\frac{q^5 \sin 5x}{1-q^5}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad .$$

etc. etc.

IV.

e formula:

$$\frac{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}$$

$$= \frac{2K}{\pi}\left(\frac{2K}{\pi} - \frac{2E^1}{\pi}\right) + \frac{1}{\sin^2 x} - 4\left\{\frac{2q^2 \cos 2x}{1-q^2} + \frac{4q^4 \cos 4x}{1-q^4} + \frac{6q^6 \cos 6x}{1-q^6} + \cdots\right\}$$

sequentes:

$$\frac{2.3\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4}{\sin^4 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}$$

$$= 4(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\left(\frac{2K}{\pi} - \frac{2E^1}{\pi}\right) - 2k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4$$

$$+ \frac{4(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}{\sin^2 x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$- 4\left\{2.4(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 2^3\right\}\frac{q^2 \cos 2x}{1-q^2}$$

$$- 4\left\{4.4(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 4^3\right\}\frac{q^4 \cos 4x}{1-q^4}$$

$$- 4\left\{6.4(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 6^3\right\}\frac{q^6 \cos 6x}{1-q^6}$$

$$- \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{2.3.4.5\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6}{\sin^6 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}$$

$$= 8(8+7k^2+8k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^5\left(\frac{2K}{\pi} - \frac{2E^1}{\pi}\right) - 32k^2(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6$$

$$+ \frac{8(8+7k^2+8k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4}{\sin^2 x} + 20(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{d^4}{dx^4}\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$- 4\left\{2.8(8+7k^2+8k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 - 2^3.20(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 + 2^5\right\}\frac{q^2 \cos 2x}{1-q^2}$$

$$- 4\left\{4.8(8+7k^2+8k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 - 4^3.20(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 + 4^5\right\}\frac{q^4 \cos 4x}{1-q^4}$$

$$- 4\left\{6.8(8+7k^2+8k^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 - 6^3.20(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 + 6^5\right\}\frac{q^6 \cos 6x}{1-q^6}$$

$$- \quad . \quad . \quad . \quad .$$

etc. etc.

45.

Exempla antecedentibus proposita docent, quomodo e formulis (2.), (3.), (6.), (7.) §. 43. evolutiones functionum $\sin^n \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$, $\frac{1}{\sin^n \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}$ inveniantur. Quantitates $A_n^{(m)}$, $B_n^{(m)}$, a quibus illae pendent, ope formularum (4.), (5.) ibidem successive eruere licet. At expressiones earum generales indagandi quaestio, cum nimis illae complicatae evadant, quam ut eas per inductionem assequi liceat, paullo altius est repetenda. Quem in finem sequentia antemittimus.

Nota est formula elementaris:

$$\sin\mathrm{am}(u+v)-\sin\mathrm{am}(u-v) = \frac{2\sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

qua integrata secundum u, prodit:

$$(1.)\qquad \int_0^u du\left\{\sin\mathrm{am}(u+v)-\sin\mathrm{am}(u-v)\right\} = \frac{1}{k}\log\left(\frac{1+k\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v}{1-k\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v}\right).$$

E theoremate Tayloriano fit:

$$\sin\mathrm{am}(u+v)-\sin\mathrm{am}(u-v) = 2\left\{\frac{d\sin\mathrm{am}\,u}{du}\cdot v+\frac{d^3\sin\mathrm{am}\,u}{du^3}\cdot\frac{v^3}{\Pi 3}+\frac{d^5\sin\mathrm{am}\,u}{du^5}\cdot\frac{v^5}{\Pi 5}+\cdots\right\},$$

unde:

$$\int_0^u du\left\{\sin\mathrm{am}(u+v)-\sin\mathrm{am}(u-v)\right\} = 2\left\{\sin\mathrm{am}\,u.v+\frac{d^2\sin\mathrm{am}\,u}{du^2}\cdot\frac{v^3}{\Pi 3}+\frac{d^4\sin\mathrm{am}\,u}{du^4}\cdot\frac{v^5}{\Pi 5}+\cdots\right\}.$$

Facile enim constat, posito $u=0$, et $\sin\mathrm{am}\,u$ et generaliter $\frac{d^{2m}\sin\mathrm{am}\,u}{du^{2m}}$ evanescere. Hinc aequatio (1.), etiam altera eius parte evoluta, in hanc abit:

$$(2.)\qquad \sin\mathrm{am}\,u.v+\frac{d^2\sin\mathrm{am}\,u}{du^2}\cdot\frac{v^3}{\Pi 3}+\frac{d^4\sin\mathrm{am}\,u}{du^4}\cdot\frac{v^5}{\Pi 5}+\cdots$$
$$= \sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v+\frac{k^2}{3}\sin^3\mathrm{am}\,u\sin^3\mathrm{am}\,v+\frac{k^4}{5}\sin^5\mathrm{am}\,u\sin^5\mathrm{am}\,v+\cdots$$

Porro aequationibus notis:

$$\sin\mathrm{am}(u+v)+\sin\mathrm{am}(u-v) = \frac{2\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,v\Delta\,\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v}$$

$$\sin\mathrm{am}(u+v)-\sin\mathrm{am}(u-v) = \frac{2\sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,u\Delta\,\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v}$$

in se ductis, obtinemus:

$$(3.)\qquad \sin^2\mathrm{am}(u+v)-\sin^2\mathrm{am}(u-v)$$
$$= \frac{4\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\Delta\,\mathrm{am}\,u.\sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,v\Delta\,\mathrm{am}\,v}{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v]^2} = \frac{d\sin^2\mathrm{am}\,u.d\sin^2\mathrm{am}\,v}{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v]^2du\,dv}.$$

Integratione facta secundum v, provenit:

$$\int_0^v dv\left\{\sin^2\mathrm{am}(u+v)-\sin^2\mathrm{am}(u-v)\right\}$$
$$= \frac{2\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\Delta\,\mathrm{am}\,u.\sin^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v} = \frac{\sin^2\mathrm{am}\,v.d\sin^2\mathrm{am}\,u}{(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v)du}.$$

Qua denuo integrata secundum alterum elementum u, obtinemus:

$$(4.)\qquad \int_0^u du\int_0^v dv\left\{\sin^2\mathrm{am}(u+v)-\sin^2\mathrm{am}(u-v)\right\} = -\frac{1}{k^2}\log(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v).$$

E theoremate Tayloriano fit:

$$\sin^2\mathrm{am}(u+v)-\sin^2\mathrm{am}(u-v)$$
$$= 2\left\{\frac{d\sin^2\mathrm{am}\,u}{du}\cdot v+\frac{d^3\sin^2\mathrm{am}\,u}{du^3}\cdot\frac{v^3}{\Pi 3}+\frac{d^5\sin^2\mathrm{am}\,u}{du^5}\cdot\frac{v^5}{\Pi 5}+\cdots\right\},$$

unde:

$$\int_0^v dv\left\{\sin^2\mathrm{am}(u+v)-\sin^2\mathrm{am}(u-v)\right\}$$
$$= 2\left\{\frac{d\sin^2\mathrm{am}\,u}{du}\cdot\frac{v^2}{\Pi 2}+\frac{d^3\sin^2\mathrm{am}\,u}{du^3}\cdot\frac{v^4}{\Pi 4}+\frac{d^5\sin^2\mathrm{am}\,u}{du^5}\cdot\frac{v^6}{\Pi 6}+\cdots\right\}$$

$$\int_0^u du\int_0^v dv\left\{\sin^2\mathrm{am}(u+v)-\sin^2\mathrm{am}(u-v)\right\}$$
$$= 2\left\{\sin^2\mathrm{am}\,u\cdot\frac{v^2}{\Pi 2}+\frac{d^2\sin^2\mathrm{am}\,u}{du^2}\cdot\frac{v^4}{\Pi 4}+\frac{d^4\sin^2\mathrm{am}\,u}{du^4}\cdot\frac{v^6}{\Pi 6}+\cdots\right\}-2\left\{U^{(2)}\frac{v^4}{\Pi 4}+U^{(4)}\frac{v^6}{\Pi 6}+\cdots\right\},$$

siquidem per characterem $U^{(2m)}$ valorem expressionis $\frac{d^{2m}\sin^2\mathrm{am}\,u}{du^{2m}}$ denotamus, quem obtinet, posito $u=0$. Hinc aequatio (4.), etiam altera eius parte evoluta, in hanc abit:

$$(5.)\qquad \sin^2\mathrm{am}\,u\cdot\frac{v^2}{\Pi 2}+\frac{d^2\sin^2\mathrm{am}\,u}{du^2}\cdot\frac{v^4}{\Pi 4}+\frac{d^4\sin^2\mathrm{am}\,u}{du^4}\cdot\frac{v^6}{\Pi 6}+\cdots-\left\{U^{(2)}\frac{v^4}{\Pi 4}+U^{(4)}\frac{v^6}{\Pi 6}+\cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v+\frac{k^2}{4}\sin^4\mathrm{am}\,u\sin^4\mathrm{am}\,v+\frac{k^4}{6}\sin^6\mathrm{am}\,u\sin^6\mathrm{am}\,v+\cdots$$

His rite praeparatis, ponatur:

$$u = \sin\operatorname{am} u + R_1 \sin^3\operatorname{am} u + R_2 \sin^5\operatorname{am} u + R_3 \sin^7\operatorname{am} u + \cdots,$$

ac generaliter:

$$\begin{aligned} u^n &= [\sin\operatorname{am} u + R_1 \sin^3\operatorname{am} u + R_2 \sin^5\operatorname{am} u + R_3 \sin^7\operatorname{am} u + \cdots]^n \\ &= \sin^n\operatorname{am} u + R_1^{(n)} \sin^{n+2}\operatorname{am} u + R_2^{(n)} \sin^{n+4}\operatorname{am} u + R_3^{(n)} \sin^{n+6}\operatorname{am} u + \cdots, \end{aligned}$$

porro e reversione seriei:

$$u = \sin\operatorname{am} u + R_1 \sin^3\operatorname{am} u + R_2 \sin^5\operatorname{am} u + R_3 \sin^7\operatorname{am} u + \cdots$$

oriatur haec:

$$\sin\operatorname{am} u = u + S_1 u^3 + S_2 u^5 + S_3 u^7 + \cdots,$$

ac sit rursus:

$$\sin^n\operatorname{am} u = [u + S_1 u^3 + S_2 u^5 + S_3 u^7 + \cdots]^n = u^n + S_1^{(n)} u^{n+2} + S_2^{(n)} u^{n+4} + S_3^{(n)} u^{n+6} + \cdots$$

Iam ex aequatione (2.):

$$\begin{aligned} &\sin\operatorname{am} u . v + \frac{d^2 \sin\operatorname{am} u}{du^2} \cdot \frac{v^3}{\Pi 3} + \frac{d^4 \sin\operatorname{am} u}{du^4} \cdot \frac{v^5}{\Pi 5} + \cdots \\ &= \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am} v + \frac{k^2}{3} \sin^3\operatorname{am} u \sin^3\operatorname{am} v + \frac{k^4}{5} \sin^5\operatorname{am} u \sin^5\operatorname{am} v + \cdots, \end{aligned}$$

evolutis v, v^3, v^5, etc. in series secundum dignitates ipsius $\sin\operatorname{am} v$ progredientes, in utraque aequationis parte coefficientibus eiusdem dignitatis $\sin^{2n+1}\operatorname{am} v$ inter se comparatis, provenit:

$$(6.) \qquad \frac{k^{2n} \sin^{2n+1}\operatorname{am} u}{2n+1}$$
$$= R_n^{(1)} \sin\operatorname{am} u + R_{n-1}^{(3)} \frac{d^2 \sin\operatorname{am} u}{\Pi 3 . du^2} + R_{n-2}^{(5)} \frac{d^4 \sin\operatorname{am} u}{\Pi 5 . du^4} + \cdots + \frac{d^{2n} \sin\operatorname{am} u}{\Pi(2n+1) du^{2n}}.$$

Eodem modo e formula (5.) provenit:

$$(7.) \qquad \frac{k^{2n-2} \sin^{2n}\operatorname{am} u}{2n}$$
$$\begin{aligned} &= R_{n-1}^{(2)} \frac{\sin^2\operatorname{am} u}{\Pi 2} + R_{n-2}^{(4)} \frac{d^2 \sin^2\operatorname{am} u}{\Pi 4 . du^2} + R_{n-3}^{(6)} \frac{d^4 \sin^2\operatorname{am} u}{\Pi 6 . du^4} + \cdots + \frac{d^{2n-2} \sin^2\operatorname{am} u}{\Pi 2n . du^{2n-2}} \\ &\quad - \left\{ \frac{R_{n-2}^{(4)}}{3.4} + \frac{R_{n-3}^{(6)}}{5.6} S_1^{(2)} + \frac{R_{n-4}^{(8)}}{7.8} S_2^{(2)} + \cdots + \frac{S_{n-2}^{(2)}}{(2n-1)2n} \right\} \text{*)} \end{aligned}$$

*) Fit enim e notatione proposita: $\sin^2\operatorname{am} u = u^2 + S_1^{(2)} u^4 + S_2^{(2)} u^6 + S_3^{(2)} u^8 + \ldots$, unde, cum sit $U^{(2m)} = \frac{d^{2m} \sin^2\operatorname{am} u}{du^{2m}}$, pro valore $u = 0$: $U^{(2m)} = \Pi 2m . S_{m-1}^{(2)}$.

E (6.), (7.), mutato u in $u + iK'$, sequitur:

$$(8.) \qquad \frac{1}{(2n+1) \sin^{2n+1}\operatorname{am} u}$$
$$= \frac{R_n^{(1)}}{\sin\operatorname{am} u} + \frac{R_{n-1}^{(3)}}{\Pi 3} \cdot \frac{d^2}{du^2} \frac{1}{\sin\operatorname{am} u} + \frac{R_{n-2}^{(5)}}{\Pi 5} \cdot \frac{d^4}{du^4} \frac{1}{\sin\operatorname{am} u} + \cdots + \frac{1}{\Pi(2n+1)} \cdot \frac{d^{2n}}{du^{2n}} \frac{1}{\sin\operatorname{am} u}$$

$$(9.) \qquad \frac{1}{2n \sin^{2n}\operatorname{am} u}$$
$$\begin{aligned} &= \frac{R_{n-1}^{(2)}}{\Pi 2 . \sin^2\operatorname{am} u} + \frac{R_{n-2}^{(4)}}{\Pi 4} \cdot \frac{d^2}{du^2} \frac{1}{\sin^2\operatorname{am} u} + \frac{R_{n-3}^{(6)}}{\Pi 6} \cdot \frac{d^4}{du^4} \frac{1}{\sin^2\operatorname{am} u} + \cdots + \frac{1}{\Pi 2n} \cdot \frac{d^{2n-2}}{du^{2n-2}} \frac{1}{\sin^2\operatorname{am} u} \\ &\quad - k^2 \left\{ \frac{R_{n-2}^{(4)}}{3.4} + \frac{R_{n-3}^{(6)}}{5.6} S_1^{(2)} + \frac{R_{n-4}^{(8)}}{7.8} S_2^{(2)} + \cdots + \frac{S_{n-2}^{(2)}}{(2n-1)2n} \right\}. \end{aligned}$$

Quae sunt formulae, quas quaesivimus, generales, quarum ope $\sin^n\operatorname{am} u$, $\frac{1}{\sin^n\operatorname{am} u}$ e $\sin\operatorname{am} u$, $\sin^2\operatorname{am} u$, $\frac{1}{\sin\operatorname{am} u}$, $\frac{1}{\sin^2\operatorname{am} u}$ eorumque differentialibus inveniuntur.

Adnotabo hac occasione, ubi vice versa $\sin\operatorname{am} v$, $\sin^2\operatorname{am} v$, $\sin^3\operatorname{am} v$, etc. secundum dignitates ipsius v evolvis, e formulis (2.), (5.) erui:

$$(10.) \qquad \frac{d^{2n} \sin\operatorname{am} u}{\Pi(2n+1) du^{2n}}$$
$$= S_n^{(1)} \sin\operatorname{am} u + \frac{k^2}{3} S_{n-1}^{(3)} \sin^3\operatorname{am} u + \frac{k^4}{5} S_{n-2}^{(5)} \sin^5\operatorname{am} u + \cdots + \frac{k^{2n}}{2n+1} \sin^{2n+1}\operatorname{am} u$$

$$(11.) \qquad \frac{d^{2n} \sin^2\operatorname{am} u}{\Pi(2n+2) du^{2n}} - \frac{S_{n-1}^{(2)}}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$= \frac{1}{2} S_n^{(2)} \sin^2\operatorname{am} u + \frac{k^2}{4} S_{n-1}^{(4)} \sin^4\operatorname{am} u + \frac{k^4}{6} S_{n-2}^{(6)} \sin^6\operatorname{am} u + \cdots + \frac{k^{2n}}{2n+2} \sin^{2n+2}\operatorname{am} u.$$

Pauca adhuc de inventione ipsarum $R_m^{(n)}$, $S_m^{(n)}$ adiicienda sunt. Posito $\sin\operatorname{am} u = y$, fit e definitione proposita:

$$u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = y + R_1 y^3 + R_2 y^5 + R_3 y^7 + \cdots$$

sive:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 1 + 3R_1 y^2 + 5R_2 y^4 + 7R_3 y^6 + \cdots;$$

unde:

$$3R_1 = \frac{1+k^2}{2},\quad 5R_2 = \frac{1.3}{2.4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}k^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4$$

$$7R_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}k^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6$$

$$9R_4 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2}k^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}k^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}k^8$$

etc. etc.

sive etiam:

$$3R_1 = \frac{1}{2}\cdot(1+k^2)$$

$$5R_2 = \frac{1.3}{2.4}(1+k^2)^2 - \frac{1}{2}\cdot k^2$$

$$7R_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6}(1+k^2)^3 - \frac{1.3}{2.2}k^2(1+k^2)$$

$$9R_4 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(1+k^2)^4 - \frac{1.3.5}{2.4.2}k^2(1+k^2)^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4$$

$$11R_5 = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}(1+k^2)^5 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.2}k^2(1+k^2)^3 + \frac{1.3.5}{2.2.4}k^4(1+k^2)$$

$$13R_6 = \frac{1.3\ldots 11}{2.4\ldots 12}(1+k^2)^6 - \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.2}k^2(1+k^2)^4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.2.4}k^4(1+k^2)^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6$$

etc. etc.

sive etiam:

$$3R_1 = 1 - \frac{1}{2}\cdot k'^2$$

$$5R_2 = 1 - \frac{1}{2}\cdot 2k'^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot k'^4$$

$$7R_3 = 1 - \frac{1}{2}\cdot 3k'^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot 3k'^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot k'^6$$

$$9R_4 = 1 - \frac{1}{2}\cdot 4k'^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot 6k'^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot 4k'^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}k'^8$$

etc. etc.

sive denique:

$$3R_1 = k^2 + \frac{1}{2}\cdot k'^2$$

$$5R_2 = k^4 + \frac{1}{2}\cdot 2k^2k'^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot k'^4$$

$$7R_3 = k^6 + \frac{1}{2}\cdot 3k^4k'^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot 3k^2k'^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot k'^6$$

$$9R_4 = k^8 + \frac{1}{2}\cdot 4k^6k'^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot 6k^4k'^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot 4k^2k'^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}k'^8$$

etc. etc.

Ex his quatuor quantitates R_m exprimendi modis modus secundus repraesentationem earum satis memorabilem et concinnam suppeditat, siquidem introducitur quantitas:

$$r = \frac{1+k^2}{2k}.$$

Ita exempli gratia fit:

$$\frac{13R_6}{k^6} = \frac{1.3\ldots 11}{1.2\ldots 6}r^6 - \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.2}r^4 + \frac{1.3.5.7}{1.2.2.4}r^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6},$$

qua expressione sex vicibus secundum r integratis, obtinemus:

$$13\int^6 \frac{R_6 dr^6}{k^6} = \frac{r^{12}}{2.4\ldots 12} - \frac{r^{10}}{2.4.6.8.10.2} + \frac{r^8}{2.4.6.8.2.4} - \frac{r^6}{2.4.6.2.4.6} + C'r^4 - C''r^2 + C''',$$

designantibus C', C'', C''' constantes arbitrarias. Quibus commode determinatis prodit:

$$13\int^6 \frac{R_6\, dr^6}{k^6} = \frac{(r^2-1)^6}{2^6.\Pi 6},$$

unde vicissim:

$$13R_6 = \frac{k^6 d^6(r^2-1)^6}{2^6.\Pi 6.dr^6};$$

eodemque modo obtinetur generaliter:

$$(12.)\qquad (2m+1)R_m = \frac{k^m d^m(r^2-1)^m}{2^m.\Pi m.dr^m}.$$

Conferatur commentatiuncula (*Crelle Journal II. p.* 223) inscripta:

»Ueber eine besondere Gattung algebraischer Functionen, die aus der »Entwicklung der Function $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ entstehn.«

Inventis quantitatibus R_m, per algorithmos notos pervenitur ad eruendas quantitates $R_m^{(n)}$, $S_m^{(n)}$ eas, ut sit:

$$[1+R_1x+R_2x^2+R_3x^3+\cdots]^n = 1+R_1^{(n)}x+R_2^{(n)}x^2+R_3^{(n)}x^3+\cdots,$$

porro ubi ponitur:

$$y = x[1+R_1x^2+R_2x^4+R_3x^6+\cdots],$$

fiat:

$$x^n = y^n[1+S_1^{(n)}y^2+S_2^{(n)}y^4+S_3^{(n)}y^6+\cdots];$$

quae cum definitione quantitatum $R_m^{(n)}$, $S_m^{(n)}$ supra proposita conveniunt. Fit autem, posito:

$$\varphi(x) = 1 + R_1 x + R_2 x^2 + R_3 x^3 + \cdots,$$

e theorematis a Cl[is] Maclaurin et Lagrange inventis:

$$R_m^{(n)} = \frac{d^m [\varphi x]^n}{\Pi m \,.\, dx^m}$$

$$S_m^{(n)} = \frac{n}{2m+n} \cdot \frac{d^m [\varphi x]^{-(2m+n)}}{\Pi m \,.\, dx^m},$$

siquidem transactis differentiationibus ponitur $x = 0$.

46.

Formularum (6.), (7.), (8.), (9.), §. 45. beneficio nanciscimur evolutiones generales:

$$(1.) \qquad \frac{\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^{2n+1} \sin^{2n+1} \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
= \; & 4\left\{R_n^{(1)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n} - \frac{R_{n-1}^{(3)}}{\Pi 3}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2} + \frac{R_{n-2}^{(5)}}{\Pi 5}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-4} - \cdots + \frac{(-1)^n}{\Pi(2n+1)}\right\} \frac{\sqrt{q}\sin x}{1-q} \\
& + 4\left\{R_n^{(1)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n} - \frac{3^2 R_{n-1}^{(3)}}{\Pi 3}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2} + \frac{3^4 R_{n-2}^{(5)}}{\Pi 5}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-4} - \cdots + \frac{(-1)^n 3^{2n}}{\Pi(2n+1)}\right\} \frac{\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3} \\
& + 4\left\{R_n^{(1)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n} - \frac{5^2 R_{n-1}^{(3)}}{\Pi 3}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2} + \frac{5^4 R_{n-2}^{(5)}}{\Pi 5}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-4} - \cdots + \frac{(-1)^n 5^{2n}}{\Pi(2n+1)}\right\} \frac{\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5} \\
& + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

$$(2.) \qquad \frac{\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^{2n} \sin^{2n} \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}{2n}$$

$$\begin{aligned}
= & \frac{R_{n-1}^{(2)}}{\Pi 2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-1}\left(\frac{2K}{\pi} - \frac{2E^{I}}{\pi}\right) - k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n}\left\{\frac{R_{n-2}^{(4)}}{3\,.\,4} + \frac{R_{n-3}^{(6)}}{5\,.\,6} S_1^{(2)} + \frac{R_{n-4}^{(8)}}{7\,.\,8} S_2^{(2)} + \cdots + \frac{S_{n-2}^{(2)}}{(2n-1)2n}\right\} \\
& - 4\left\{\frac{2R_{n-1}^{(2)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2}}{\Pi 2} - \frac{2^3 R_{n-2}^{(4)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-4}}{\Pi 4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{\Pi 2n}\right\} \frac{q\cos 2x}{1-q^2} \\
& - 4\left\{\frac{4R_{n-1}^{(2)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2}}{\Pi 2} - \frac{4^3 R_{n-2}^{(4)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-4}}{\Pi 4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 4^{2n-1}}{\Pi 2n}\right\} \frac{q^2\cos 4x}{1-q^4} \\
& - 4\left\{\frac{6R_{n-1}^{(2)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2}}{\Pi 2} - \frac{6^3 R_{n-2}^{(4)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-4}}{\Pi 4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 6^{2n-1}}{\Pi 2n}\right\} \frac{q^3\cos 6x}{1-q^6} \\
& - \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

$$(3.) \qquad \frac{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n+1}}{(2n+1)\sin^{2n+1} \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}$$

$$\begin{aligned}
= & \frac{R_n^{(1)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n}}{\sin x} + \frac{R_{n-1}^{(3)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2}}{\Pi 3} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sin x} + \cdots + \frac{1}{\Pi(2n+1)} \cdot \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\frac{1}{\sin x} \\
& + 4\left\{R_n^{(1)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n} - \frac{R_{n-1}^{(3)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2}}{\Pi 3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{\Pi(2n+1)}\right\} \frac{q\sin x}{1-q} \\
& + 4\left\{R_n^{(1)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n} - \frac{3^2 R_{n-1}^{(3)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2}}{\Pi 3} + \cdots + \frac{(-1)^n 3^{2n}}{\Pi(2n+1)}\right\} \frac{q^3\sin 3x}{1-q^3} \\
& + 4\left\{R_n^{(1)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n} - \frac{5^2 R_{n-1}^{(3)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2}}{\Pi 3} + \cdots + \frac{(-1)^n 5^{2n}}{\Pi(2n+1)}\right\} \frac{q^5\sin 5x}{1-q^5} \\
& + \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

$$(4.) \qquad \frac{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n}}{2n \,.\, \sin^{2n} \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}$$

$$\begin{aligned}
= & \frac{1}{2} R_{n-1}^{(2)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-1}\left(\frac{2K}{\pi} - \frac{2E^{I}}{\pi}\right) - k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n}\left\{\frac{1}{3.4} R_{n-2}^{(4)} + \frac{1}{5.6} R_{n-3}^{(6)} S_1^{(2)} + \frac{1}{7.8} R_{n-4}^{(8)} S_2^{(2)} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} S_{n-2}^{(2)}\right\} \\
& + \frac{R_{n-1}^{(2)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2}}{\Pi 2 \,.\, \sin^2 x} + \frac{R_{n-2}^{(4)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-4}}{\Pi 4} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sin^2 x} + \cdots + \frac{1}{\Pi 2n} \cdot \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}\frac{1}{\sin^2 x} \\
& - 4\left\{\frac{2R_{n-1}^{(2)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2}}{\Pi 2} - \frac{2^3 R_{n-2}^{(4)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-4}}{\Pi 4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{\Pi 2n}\right\} \frac{q^2\cos 2x}{1-q^2} \\
& - 4\left\{\frac{4R_{n-1}^{(2)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2}}{\Pi 2} - \frac{4^3 R_{n-2}^{(4)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-4}}{\Pi 4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 4^{2n-1}}{\Pi 2n}\right\} \frac{q^4\cos 4x}{1-q^4} \\
& - 4\left\{\frac{6R_{n-1}^{(2)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-2}}{\Pi 2} - \frac{6^3 R_{n-2}^{(4)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2n-4}}{\Pi 4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 6^{2n-1}}{\Pi 2n}\right\} \frac{q^6\cos 6x}{1-q^6} \\
& - \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

E formulis (6.), (7.), (8.), (9.) §. 45. aliae deduci possunt, quae respectu functionum $\cos\mathrm{am}\, u$, $\mathrm{tang}\,\mathrm{am}\, u$, $\Delta\,\mathrm{am}\, u$ easdem partes agunt, quas illae respectu functionis $\sin\mathrm{am}\, u$. Etenim e formula:

$$\sin\mathrm{am}\left(k'u,\ \frac{ik}{k'}\right) = \cos\mathrm{coam}\, u,$$

unde etiam:

$$\sin\mathrm{am}\left(k'(K-u),\ \frac{ik}{k'}\right) = \cos\mathrm{am}\, u,$$

videmus, in formulis propositis, ubi ponitur $\frac{ik}{k'}$ loco k et $k'(K-u)$ loco u, abire $\sin\mathrm{am}\, u$ in $\cos\mathrm{am}\, u$, unde inveniuntur similes formulae, quae ipsi $\cos\mathrm{am}\, u$ respondent. Porro ex aequatione:

$$\sin\mathrm{am}\, iu = i\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}\,(u, k')$$

patet, simul mutari posse u in iu, k in k', $\sin\mathrm{am}\, u$ in $i\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}\, u$; unde formulas pro $\mathrm{tang}\,\mathrm{am}\, u$ eruimus. Ex his deinde, quia

$$\mathrm{cotang}\,\mathrm{am}\,(u+iK') = -i\Delta\,\mathrm{am}\, u,$$

formulas pro $\Delta\,\mathrm{am}\, u$ eruere licet, quae formulis (6.), (7.), (8.), (9.) §. 45. respondent. Quibus inventis, methodo plane simili ex evolutionibus functionum:

$$\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi},\quad \cos^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi},\quad \Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi},\quad \Delta^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

$$\frac{1}{\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}},\quad \frac{1}{\cos^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}},\quad \frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}},\quad \frac{1}{\Delta^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}},$$

a nobis propositis, evolutiones generales deducis functionum:

$$\cos^n\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi},\quad \Delta^n\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}.$$

Quae sufficiat addigitasse.

Transformationes insignes serierum, in quas functiones ellipticas evolvimus, nanciscimur, posito ix loco x et adhibitis formulis, quas de reductione argumenti imaginarii ad argumentum reale in primis fundamentis dedimus. Quae vero cum in promptu sint, hoc loco diutius his nolumus immorari.

INTEGRALIUM ELLIPTICORUM SECUNDA SPECIES IN SERIES EVOLVITUR.

47.

Integrata formula supra exhibita §. 41. (1.):

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2K}{\pi}\frac{2K}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\frac{2E^1}{\pi} - 4\left\{\frac{2q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{4q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{6q^3\cos 6x}{1-q^6} + \cdots\right\}$$

inde a $x = 0$ usque ad $x = x$, provenit:

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\int_0^x \sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\,dx$$

$$= \left\{\frac{2K}{\pi}\frac{2K}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\frac{2E^1}{\pi}\right\}x - 4\left\{\frac{q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4x}{1-q^4} + \frac{q^3\sin 6x}{1-q^6} + \frac{q^4\sin 8x}{1-q^8} + \cdots\right\}.$$

Designemus in sequentibus per characterem $\frac{2K}{\pi}Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ expressionem:

$$\text{(1.)}\qquad \frac{2K}{\pi}Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{2Kx}{\pi}\left(\frac{2K}{\pi} - \frac{2E^1}{\pi}\right) - \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\int_0^x \sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\,dx$$

$$= 4\left\{\frac{q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4x}{1-q^4} + \frac{q^3\sin 6x}{1-q^6} + \frac{q^4\sin 8x}{1-q^8} + \cdots\right\}.$$

E Cl^i. Legendre notatione erit, posito $\frac{2Kx}{\pi} = u$, $\varphi = \mathrm{am}\, u$:

$$\text{(2.)}\qquad Z(u) = \frac{F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)}{F^1}.$$

Functionem $Z(u)$ loco ipsius $E(\varphi)$ in analysin functionum ellipticarum introducere convenit; quam ceterum ope formulae (2.) ad terminos Cl^o. Legendre usitatos revocare in promptu est. Adumbremus paucis, quomodo ex ipsa evolutione functionis Z, quam formula (1.) suppeditat, complures eius proprietates, etsi notas, derivare liceat.

Mutetur in (1.) x in $x+\frac{\pi}{2}$, prodit:

$$\frac{2K}{\pi}Z\left(\frac{2Kx}{\pi}+K\right) = -4\left\{\frac{q\sin 2x}{1-q^2} - \frac{q^2\sin 4x}{1-q^4} + \frac{q^3\sin 6x}{1-q^6} - \cdots\right\},$$

unde:

$$\frac{2K}{\pi}Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) - \frac{2K}{\pi}Z\left(\frac{2Kx}{\pi}+K\right) = 8\left\{\frac{q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^3\sin 6x}{1-q^6} + \frac{q^5\sin 10x}{1-q^{10}} + \cdots\right\}.$$

Porro mutetur in (1.) x in $2x$, q in q^2, simulque k in $k^{(2)}$, K in $K^{(2)}$, prodit:

$$\frac{2K^{(2)}}{\pi} Z\left(\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right) = 4\left\{\frac{q^2 \sin 4x}{1-q^4} + \frac{q^4 \sin 8x}{1-q^8} + \frac{q^6 \sin 12x}{1-q^{12}} + \cdots\right\},$$

unde:

$$\frac{2K}{\pi} Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) - \frac{2K^{(2)}}{\pi} Z\left(\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right) = 4\left\{\frac{q \sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \frac{q^5 \sin 10x}{1-q^{10}} + \cdots\right\}.$$

At supra invenimus:

$$\frac{2kK}{\pi} \sin\operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = 4\left\{\frac{\sqrt{q}\sin x}{1-q} + \frac{\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3} + \frac{\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5} + \cdots\right\},$$

unde, mutato q in q^2, x in $2x$:

$$\frac{2k^{(2)}K^{(2)}}{\pi} \sin\operatorname{am}\left(\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right) = 4\left\{\frac{q \sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \frac{q^5 \sin 10x}{1-q^{10}} + \cdots\right\}.$$

Hinc sequitur:

(3.) $$\frac{2K}{\pi}\left\{Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) - Z\left(\frac{2Kx}{\pi} + K\right)\right\} = \frac{4k^{(2)}K^{(2)}}{\pi} \sin\operatorname{am}\left(\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right)$$

(4.) $$\frac{2K}{\pi} Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) - \frac{2K^{(2)}}{\pi} Z\left(\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right) = \frac{2k^{(2)}K^{(2)}}{\pi} \sin\operatorname{am}\left(\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right)$$

(5.) $$\frac{2K}{\pi} Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) + \frac{2K}{\pi} Z\left(\frac{2Kx}{\pi} + K\right) - \frac{4K^{(2)}}{\pi} Z\left(\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right) = 0.$$

In quibus formulis, quarum (4.), (5.) transformationem functionis Z secundi ordinis suppeditant, est:

$$k^{(2)} = \frac{1-k'}{1+k'},\ K^{(2)} = \frac{1+k'}{2}\cdot K,\ \sin\operatorname{am}\left(\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right) = (1+k')\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\cdot \sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi},$$

uti de transformatione secundi ordinis, a Cl°. Legendre proposita, constat. Unde formulam (3.) ita quoque repraesentare licet, posito $u = \frac{2Kx}{\pi}$:

(6.) $$Z(u) - Z(u+K) = k^2 \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{coam} u.$$

Ponamus brevitatis causa: $\operatorname{am}\left(\frac{2mK^{(m)}x}{\pi}, k^{(m)}\right) = \varphi^{(m)}$, e formula (4.), posito successive $k^{(2)}, k^{(4)}, k^{(8)}, \ldots$ loco k; $2x$, $4x$, $8x$, … loco x, prodit:

(7.) $$K.Z(u) = F^1E(\varphi) - E^1F(\varphi) = k^{(2)}K^{(2)}\sin\varphi^{(2)} + k^{(4)}K^{(4)}\sin\varphi^{(4)} + k^{(8)}K^{(8)}\sin\varphi^{(8)} + \cdots,$$

quam dedit Cl. Legendre formulam.

Simili modo e formula §$^{\text{i}}$ 41:

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{2K}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\,\frac{2E^1}{\pi} = 8\left\{\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} + \frac{q^7}{(1-q^7)^2} + \cdots\right\},$$

quam etiam hunc in modum evolvere licet:

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{2K}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\,\frac{2E^1}{\pi} = 8\left\{\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \frac{4q^4}{1-q^8} + \cdots\right\},$$

comparata cum hac, quam supra invenimus:

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 = 16\left\{\frac{q}{1-q^2} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \frac{5q^5}{1-q^{10}} + \frac{7q^7}{1-q^{14}} + \cdots\right\},$$

prodit:

(8.) $$2K(K-E^1) = (kK)^2 + 2(k^{(2)}K^{(2)})^2 + 4(k^{(4)}K^{(4)})^2 + 8(k^{(8)}K^{(8)})^2 + \cdots,$$

quae cum ea convenit, quam Cl. Gauss dedit in commentatione *Determinatio Attractionis* etc. §. 17.

48.

Eadem methodo, qua §. 41. eruimus evolutionem expressionis $\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, inquiramus in expressionem $\left\{\frac{2K}{\pi} Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)\right\}^2$ in seriem evolvendam. Ponamus:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 16\left\{\frac{q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2 \sin 4x}{1-q^4} + \frac{q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \cdots\right\}^2$$
$$= 8\left\{A + A'\cos 2x + A''\cos 4x + A'''\cos 6x + \cdots\right\},$$

quam expressionem propositam induere videmus formam, dum loco $2\sin 2mx \sin 2m'x$ ubique ponitur $\cos 2(m-m')x - \cos 2(m+m')x$. Fit primum:

$$A = \frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^4}{(1-q^4)^2} + \frac{q^6}{(1-q^6)^2} + \frac{q^8}{(1-q^8)^2} + \cdots$$

Deinde generaliter obtinemus $A^{(n)} = 2B^{(n)} - C^{(n)}$, siquidem ponitur:

$$B^{(n)} = \frac{q^{n+2}}{(1-q^2)(1-q^{2n+2})} + \frac{q^{n+4}}{(1-q^4)(1-q^{2n+4})} + \frac{q^{n+6}}{(1-q^6)(1-q^{2n+6})} + \cdots$$

$$C^{(n)} = \frac{q^n}{(1-q^2)(1-q^{2n-2})} + \frac{q^n}{(1-q^4)(1-q^{2n-4})} + \cdots + \frac{q^n}{(1-q^{2n-2})(1-q^2)}.$$

In singulis harum expressionum terminis substituatur respective:

$$\frac{q^{n+m}}{(1-q^m)(1-q^{2n+m})} = \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q^m}{1-q^m} - \frac{q^{2n+m}}{1-q^{2n+m}}\right\}$$

$$\frac{q^n}{(1-q^m)(1-q^{2n-m})} = \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q^m}{1-q^m} + \frac{q^{2n-m}}{1-q^{2n-m}} + 1\right\},$$

prodit:

$$\begin{aligned} B^{(n)} &= \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^4}{1-q^4} + \frac{q^6}{1-q^6} + \cdots\right\} \\ &\quad - \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q^{2n+2}}{1-q^{2n+2}} + \frac{q^{2n+4}}{1-q^{2n+4}} + \frac{q^{2n+6}}{1-q^{2n+6}} + \cdots\right\} \\ &= \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^4}{1-q^4} + \frac{q^6}{1-q^6} + \cdots + \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right\} \end{aligned}$$

$$C^{(n)} = \frac{(n-1)q^n}{1-q^{2n}} + \frac{2q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^4}{1-q^4} + \frac{q^6}{1-q^6} + \cdots + \frac{q^{2n-2}}{1-q^{2n-2}}\right\};$$

unde:

$$A^{(n)} = 2B^{(n)} - C^{(n)} = -\frac{(n-1)q^n}{1-q^{2n}} + \frac{2q^{3n}}{(1-q^{2n})^2} = -\frac{nq^n}{1-q^{2n}} + \frac{q^n(1+q^{2n})}{(1-q^{2n})^2}.$$

His collectis, invenitur evolutio quaesita:

$$(1.)\quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 8A - 8\left\{\frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} + \cdots\right\}$$
$$+ 8\left\{\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1-q^2)^2} + \frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1-q^4)^2} + \frac{q^3(1+q^6)\cos 6x}{(1-q^6)^2} + \cdots\right\}.$$

Ipsum $A = \frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^4}{(1-q^4)^2} + \frac{q^6}{(1-q^6)^2} + \cdots$ cum etiam hunc in modum evolvere liceat:

$$A = \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{2q^4}{1-q^4} + \frac{3q^6}{1-q^6} + \frac{4q^8}{1-q^8} + \cdots,$$

invenimus e §. 42. (6.):

$$(2.)\qquad 8A = \frac{(2-k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 3\,\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E^1}{\pi} + 1}{3}.$$

Porro autem constat esse:

$$8A = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) dx;$$

integrata enim aequatione (1.) a $x = 0$ usque ad $x = \frac{\pi}{2}$, termini omnes praeter primum evanescunt; unde, si Cl$^{\text{i}}$. Legendre notationibus uti placet:

$$(3.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[F^1E(\varphi) - E^1F(\varphi)]^2}{\Delta(\varphi)}\,d\varphi = \frac{(2-k^2)F^1F^1F^1 - 3F^1F^1E^1_{\flat} + \frac{1}{4}\pi\pi F^1}{3},$$

quae est integralis definiti satis abstrusi determinatio.

INTEGRALIA ELLIPTICA TERTIAE SPECIEI INDEFINITA AD CASUM REVOCANTUR DEFINITUM, IN QUO AMPLITUDO PARAMETRUM AEQUAT.

49.

Antequam ad tertiam speciem integralium ellipticorum in seriem evolvendam accedamus, paucis, quae theoriae illorum adiicere contigit, seorsim exponemus, idque fere ipsis signis claro eius autori usitatis. Mox idem novis adhibitis denominationibus proponetur.

Proficiscimur a theorematibus quibusdam notis de specie secunda integralium ellipticorum. Fit:

$$\sin\mathrm{am}(u+a) + \sin\mathrm{am}(u-a) = \frac{2\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u}$$

$$\sin\mathrm{am}(u+a) - \sin\mathrm{am}(u-a) = \frac{2\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

unde:

$$\sin^2\mathrm{am}(u+a) - \sin^2\mathrm{am}(u-a) = \frac{4\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u}{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u]^2},$$

qua integrata formula secundum u, prodit:

$$(1.)\quad \int_0^u du.[\sin^2\mathrm{am}(u+a) - \sin^2\mathrm{am}(u-a)] = \frac{2\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

uti iam supra invenimus.

Ponatur: $\mathrm{am}\,u = \varphi$, $\mathrm{am}\,a = \alpha$, $\mathrm{am}(u+a) = \sigma$, $\mathrm{am}(u-a) = \vartheta$, erit e notatione Cl$^{\text{i}}$. Legendre:

$$k^2\int_0^u du\sin^2\mathrm{am}\,u = F(\varphi) - E(\varphi),$$

unde etiam, cum sit $F(\sigma)-F(\alpha)=F(\varphi)$, $F(\vartheta)+F(\alpha)=F(\varphi)$:

$$k^2\int_0^u du \sin^2 \operatorname{am}(u+a) = F(\varphi)-E(\sigma)+E(\alpha)$$

$$k^2\int_0^u du \sin^2 \operatorname{am}(u-a) = F(\varphi)-E(\vartheta)-E(\alpha).$$

Hinc aequatio (1.) in hanc abit:

$$2E(\alpha)-[E(\sigma)-E(\vartheta)] = \frac{2k^2\sin\alpha\cos\alpha\Delta\alpha\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}. \tag{2.}$$

Commutatis inter se u et a, abit α in φ, ϑ in $-\vartheta$, σ immutatum manet, unde ex (2.) prodit:

$$2E(\varphi)-[E(\sigma)+E(\vartheta)] = \frac{2k^2\sin\varphi\cos\varphi\Delta\varphi\sin^2\alpha}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi},$$

qua addita aequationi (2.), provenit:

$$E(\varphi)+E(\alpha)-E(\sigma) = k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\sigma, \tag{3.}$$

quod est theorema de additione functionis E, a Cl°. Legendre prolatum. l. c. cap. IX. pag. 43. c′.

Integralia formae:

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{[1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)}$$

secundum eam, quam Cl. Legendre instituit, integralium ellipticorum distributionem in species, speciem *tertiam* constituunt. Quantitatem $-k^2\sin^2\alpha$, quam per n designat, parametrum vocat; nos in sequentibus ipsum angulum α *parametrum* dicemus. Quorum integralium, multiplicata aequatione (2.) per

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma)} = \frac{d\vartheta}{\Delta(\vartheta)}$$

ac integratione instituta a $\varphi=0$ usque ad $\varphi=\varphi$, quo facto ipsius σ limites erunt: $\sigma=\alpha$, $\sigma=\sigma$, ipsius ϑ limites: $\vartheta=-\alpha$, $\vartheta=\vartheta$, expressionem eruimus sequentem:

$$\int_0^\varphi \frac{2k^2\sin\alpha\cos\alpha\Delta\alpha\sin^2\varphi\, d\varphi}{[1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)} = 2F(\varphi)E(\alpha)-\int_\alpha^\sigma \frac{E(\sigma)\,d\sigma}{\Delta(\sigma)}+\int_{-\alpha}^\vartheta \frac{E(\vartheta)\,d\vartheta}{\Delta(\vartheta)}.$$

Facile constat, cum sit $E(-\varphi)=-E(\varphi)$, esse:

$$\int_0^\varphi \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int_0^{-\varphi} \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} \quad \text{sive} \quad \int_{-\varphi}^{+\varphi} \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} = 0,$$

unde, cum sit:

$$\int_\alpha^\sigma \frac{E(\sigma)\,d\sigma}{\Delta(\sigma)} = \int_0^\sigma \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int_0^\alpha \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

$$\int_{-\alpha}^\vartheta \frac{E(\vartheta)\,d\vartheta}{\Delta(\vartheta)} = \int_0^\vartheta \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int_0^{-\alpha} \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int_0^\vartheta \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int_0^\alpha \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

nacti sumus novum ac memorabile

Theorema I.

Determinentur anguli ϑ, σ *ita, ut sit:*

$$F(\varphi)+F(\alpha) = F(\sigma),\quad F(\varphi)-F(\alpha) = F(\vartheta),$$

erit:

$$\int_0^\varphi \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\sin^2\varphi\, d\varphi}{[1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)}$$

$$= F(\varphi)E(\alpha)-\frac{1}{2}\int_\vartheta^\sigma \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} = F(\varphi)E(\alpha)-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)}+\frac{1}{2}\int_0^\vartheta \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

ita ut tertia species integralium ellipticorum, quae ab elementis tribus pendet, modulo k, amplitudine φ, parametro α, revocata sit ad speciem primam et secundam et transcendentem novam.:

$$\int_0^\varphi \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

quae tantum a duobus elementis pendent omnes.

50.

Ponamus $F(\alpha_2)=2F(\alpha)$, quoties $\varphi=\alpha$, fit $\sigma=\alpha_2$, $\vartheta=0$, quo igitur casu e theoremate proposito nanciscimur:

$$\int_0^\alpha \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\sin^2\varphi\, d\varphi}{[1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)} = F(\alpha)E(\alpha)-\frac{1}{2}\int_0^{\alpha_2} \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)}. \tag{1.}$$

Quae docet formula, in locum transcendentis novae substitui posse et hanc:

$$\int_0^\alpha \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{[1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)},$$

quod est integrale tertiae speciei *definitum*, in quo amplitudo parametrum aequat, quod igitur et ipsum tantum a duobus elementis pendet, a modulo k et quantitate illa, quae simul et parameter est et amplitudo.

Ponamus $2F(\mu) = F(\varphi)+F(\alpha) = F(\sigma)$, $2F(\delta) = F(\varphi)-F(\alpha) = F(\vartheta)$, erit ex (1.):

$$\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} = F(\mu)E(\mu)-\int_0^\mu \frac{k^2\sin\mu\cos\mu\,\Delta\mu\sin^2\varphi\,d\varphi}{[1-k^2\sin^2\mu\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\vartheta \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} = F(\delta)E(\delta)-\int_0^\delta \frac{k^2\sin\delta\cos\delta\,\Delta\delta\sin^2\varphi\,d\varphi}{[1-k^2\sin^2\delta\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)},$$

quibus in theoremate, in §° antecedente proposito, substitutis formulis, obtinemus sequens

Theorema II.

Determinentur anguli μ, δ *ita, ut sit:*

$$F(\mu) = \frac{F(\varphi)+F(\alpha)}{2},\quad F(\delta) = \frac{F(\varphi)-F(\alpha)}{2},$$

erit:

$$\begin{aligned} k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha.\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{[1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)} &= F(\varphi)E(\alpha)-F(\mu)E(\mu)+F(\delta)E(\delta)\\ &+k^2\sin\mu\cos\mu\,\Delta\mu.\int_0^\mu \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{[1-k^2\sin^2\mu\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)}\\ &-k^2\sin\delta\cos\delta\,\Delta\delta.\int_0^\delta \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{[1-k^2\sin^2\delta\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)}, \end{aligned}$$

qua formula integralia tertiae speciei indefinita revocantur ad definita, in quibus amplitudo parametrum aequat, ideoque, quae ab elementis tribus pendebant, ad alias transcendentes, quae tantum duobus constant.

Commutatis inter se α et φ, abit ϑ in $-\vartheta$, σ immutatum manet, unde, cum insuper sit:

$$\int_{-\vartheta}^\sigma \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int_{+\vartheta}^\sigma \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

e theoremate I:

$$\int_0^\varphi \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\sin^2\varphi\,d\varphi}{[1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)} = F(\varphi)E(\alpha)-\frac{1}{2}\int_\vartheta^\sigma \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

obtinemus:

$$\int_0^\alpha \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi\sin^2\alpha\,d\alpha}{[1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha]\Delta(\alpha)} = F(\alpha)E(\varphi)-\frac{1}{2}\int_\vartheta^\sigma \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Hinc, subductione facta, prodit:

$$(2.)\quad \int_0^\varphi \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\sin^2\varphi\,d\varphi}{[1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)}-\int_0^\alpha \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi\sin^2\alpha\,d\alpha}{[1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha]\Delta(\alpha)} = F(\varphi)E(\alpha)-F(\alpha)E(\varphi),$$

quae docet formula, *integrale tertiae speciei semper revocari posse ad aliud, in quo, qui erat parameter, fit amplitudo, quae erat amplitudo, fit parameter.*

Ubi in formula (2.) ponitur $\varphi = \frac{\pi}{2}$, obtinemus:

$$(3.)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\sin^2\varphi\,d\varphi}{[1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)} = F^1E(\alpha)-E^1F(\alpha).$$

Formulae (2.), (3.) cum iis conveniunt, quae a Cl°. Legendre exhibitae sunt cap. XXIII. pag. 141. (n'), (p').

INTEGRALIA ELLIPTICA TERTIAE SPECIEI IN SERIEM EVOLVUNTUR. QUOMODO ILLA PER TRANSCENDENTEM NOVAM Θ COMMODE EXPRIMUNTUR.

51.

E formula:

$$\begin{aligned} &\sin^2\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}(x+A)-\sin^2\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}(x-A)\\ &= \frac{4\sin\mathrm{am}\frac{2KA}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2KA}{\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2KA}{\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2KA}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\right\}^2}, \end{aligned}$$

quae ex elementis constat, eruimus integrando:

$$(1.)\quad \begin{aligned} &\frac{2K}{\pi}\int_0^x dx\left\{\sin^2\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}(x+A)-\sin^2\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}(x-A)\right\}\\ &= \frac{2\sin\mathrm{am}\frac{2KA}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2KA}{\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2KA}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2KA}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}. \end{aligned}$$

Iam dedimus §. 41. formulam:

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{2K}{\pi}\frac{2K}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\frac{2E^1}{\pi} - 4\left\{\frac{2q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{4q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{6q^3\cos 6x}{1-q^6} + \cdots\right\},$$

unde:

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \left\{\sin^2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(x+A) - \sin^2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(x-A)\right\}$$

$$= 4\left\{\frac{2q\cos 2(x-A)}{1-q^2} + \frac{4q^2\cos 4(x-A)}{1-q^4} + \frac{6q^3\cos 6(x-A)}{1-q^6} + \cdots\right\}$$

$$-4\left\{\frac{2q\cos 2(x+A)}{1-q^2} + \frac{4q^2\cos 4(x+A)}{1-q^4} + \frac{6q^3\cos 6(x+A)}{1-q^6} + \cdots\right\}$$

$$= 8\left\{\frac{2q\sin 2A\sin 2x}{1-q^2} + \frac{4q^2\sin 4A\sin 4x}{1-q^4} + \frac{6q^3\sin 6A\sin 6x}{1-q^6} + \cdots\right\}.$$

Hinc fit ex (1.):

$$\text{(2.)}\qquad \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2k^2\sin\operatorname{am}\frac{2KA}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2KA}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{2KA}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2KA}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}$$

$$= \text{const.} + 4\left\{\frac{q\sin 2(x-A)}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4(x-A)}{1-q^4} + \frac{q^3\sin 6(x-A)}{1-q^6} + \cdots\right\}$$

$$-4\left\{\frac{q\sin 2(x+A)}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4(x+A)}{1-q^4} + \frac{q^3\sin 6(x+A)}{1-q^6} + \cdots\right\}$$

$$= \text{const.} - 8\left\{\frac{q\sin 2A\cos 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4A\cos 4x}{1-q^4} + \frac{q^3\sin 6A\cos 6x}{1-q^6} + \cdots\right\},$$

ubi ita determinari debet *constans*, ut expressio proposita pro $x = 0$ evanescat, unde e §. 47. (1.):

$$\text{const.} = 8\left\{\frac{q\sin 2A}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4A}{1-q^4} + \frac{q^3\sin 6A}{1-q^6} + \cdots\right\} = 2\cdot\frac{2K}{\pi}Z\left(\frac{2KA}{\pi}\right).$$

Formula (2.) a $x = 0$ usque ad $x = \frac{\pi}{2}$ integrata, cum prodeat $\frac{\pi}{2}\cdot$const., reliquis evanescentibus terminis, posito $\frac{2KA}{\pi} = a$, $\frac{2Kx}{\pi} = u$, eruimus integrale definitum:

$$\int_0^K \frac{k^2\sin\operatorname{am}a\cos\operatorname{am}a\,\Delta\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u} = K.Z(a),$$

quod idem est atque (3.) §. 50.

Designabimus in sequentibus per characterem $\Pi(u, a, k)$ seu brevius per $\Pi(u, a)$ *) integrale:

$$\Pi(u,a) = \int_0^u \frac{k^2\sin\operatorname{am}a\cos\operatorname{am}a\Delta\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u} = \int_0^\varphi \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\Delta\alpha\sin^2\varphi\,d\varphi}{[1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)},$$

siquidem $\varphi = \operatorname{am}u$, $\alpha = \operatorname{am}a$. Quibus positis, aequatione (2.) rursus integrata a $x = 0$ usque ad $x = x$, prodit:

$$\text{(3.)}\qquad \Pi\left(\frac{2Kx}{\pi}, \frac{2KA}{\pi}\right)$$

$$= \frac{2Kx}{\pi}Z\left(\frac{2KA}{\pi}\right) - \left\{\frac{q\cos 2(x-A)}{1-q^2} + \frac{q^2\cos 4(x-A)}{2(1-q^4)} + \frac{q^3\cos 6(x-A)}{3(1-q^6)} + \cdots\right\}$$

$$+ \quad \frac{q\cos 2(x+A)}{1-q^2} + \frac{q^2\cos 4(x+A)}{2(1-q^4)} + \frac{q^3\cos 6(x+A)}{3(1-q^6)} + \cdots$$

$$= \frac{2Kx}{\pi}Z\left(\frac{2KA}{\pi}\right) - 2\left\{\frac{q\sin 2A\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4A\sin 4x}{2(1-q^4)} + \frac{q^3\sin 6A\sin 6x}{3(1-q^6)} + \cdots\right\},$$

quae est integralis elliptici tertiae speciei evolutio quaesita.

Ubi adnotatur evolutio nota:

$$-\log(1-2q\cos 2x+q^2) = 2\left\{q\cos 2x + \frac{q^2\cos 4x}{2} + \frac{q^3\cos 6x}{3} + \frac{q^4\cos 8x}{4} + \cdots\right\},$$

videmus formulam (3.), singulis evolutis denominatoribus $1-q^2$, $1-q^4$, $1-q^6$, etc., hanc induere formam:

$$\text{(4.)}\qquad \Pi\left(\frac{2Kx}{\pi}, \frac{2KA}{\pi}\right)$$

$$= \frac{2Kx}{\pi}Z\left(\frac{2KA}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\log\left\{\frac{(1-2q\cos 2(x-A)+q^2)(1-2q^3\cos 2(x-A)+q^6)\cdots}{(1-2q\cos 2(x+A)+q^2)(1-2q^3\cos 2(x+A)+q^6)\cdots}\right\}.$$

52.

Integrata formula (1.) §. 47:

$$\frac{2K}{\pi}Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 4\left\{\frac{q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4x}{1-q^4} + \frac{q^3\sin 6x}{1-q^6} + \cdots\right\}$$

*) Cl. Legendre paullo alia est denotatio; ponit enim ille $\Pi(n, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{[1+n\sin^2\varphi]\Delta(\varphi)}$, ita ut, quod nobis est $\Pi(u, a)$, illi sit:

$$\frac{-\cos\alpha\Delta\alpha}{\sin\alpha}F(\varphi) + \frac{\cos\alpha\Delta\alpha}{\sin\alpha}\Pi(-k^2\sin^2\alpha, \varphi).$$

Quod signum Π ne cum signo multiplicatorio Π, saepius a nobis adhibito, commutetur, vix moneri debet.

a $x = 0$ usque ad $x = x$, prodit:

$$\frac{2K}{\pi}\int_0^x Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)dx = -2\left\{\frac{q\cos 2x}{1-q^2}+\frac{q^2\cos 4x}{2(1-q^4)}+\frac{q^3\cos 6x}{3(1-q^6)}+\cdots\right\}+\text{const.}$$
$$= \log[(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots]+\text{const.},$$

ubi *constans*, ita determinata, ut integrale pro $x = 0$ evanescat, fit:

$$= 2\left\{\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{2(1-q^4)}+\frac{q^3}{3(1-q^6)}+\cdots\right\} = -\log[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots]^2,$$

ideoque:

$$(1.)\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^x Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)dx = \log\left\{\frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots]^2}\right\}.$$

Designabimus in posterum per characterem $\Theta(u)$ expressionem:

$$\Theta(u) = \Theta(0)e^{\int_0^u Z(u)\,du},$$

designante $\Theta(0)$ constantem, quam adhuc indeterminatam relinquimus, dum commodam eius determinationem infra obtinebimus; erit ex (1.):

$$(2.)\quad \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots]^2},$$

unde formula (4.) §. 51. in hanc abit:

$$\Pi\left(\frac{2Kx}{\pi}, \frac{2KA}{\pi}\right) = \frac{2Kx}{\pi}Z\left(\frac{2KA}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta\left(\frac{2K}{\pi}(x-A)\right)}{\Theta\left(\frac{2K}{\pi}(x+A)\right)},$$

sive, rursus posito $\frac{2Kx}{\pi} = u$, $\frac{2KA}{\pi} = a$:

$$(3.)\quad \Pi(u, a) = uZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} = u\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

siquidem ponitur: $\frac{d\Theta(u)}{du} = \Theta'(u)$. Quae est commoda expressio integralis elliptici Π per transcendentem novam Θ.

Facile constat, esse $\Theta(-u) = \Theta(u)$, unde, commutatis inter se a et u e (3.) prodit:

$$\Pi(a, u) = aZ(u)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

quibus a (3.) subductis, fit:

$$(4.)\quad \Pi(u, a)-\Pi(a, u) = uZ(a)-aZ(u),$$

quae eadem est atque formula (2.) §. 50. Hinc posito $\Pi(K, a) = \Pi^1(a)$, evanescente $\Pi(a, K)$, $Z(K)$, fit:

$$\Pi^1(a) = KZ(a),$$

quae est Cl$^{\text{i}}$. Legendre, quam supra exhibuimus (3.) §. 50., formula.

Posito $u = a$, e (3.) fit:

$$(5.)\quad \Pi(a, a) = aZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(0)}{\Theta(2a)} = aZ(a)-\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(2a)}{\Theta(0)}.$$

Videmus igitur, transcendentem novam sive per integrale $\int\frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)}$ definiri posse ope formulae:

$$(6.)\quad \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = e^{\int_0^u Z(u)\,du} = e^{\int_0^\varphi \frac{F^1E(\varphi)-E^1F(\varphi)}{F^1\Delta(\varphi)}\cdot d\varphi},$$

sive per integrale definitum tertiae speciei ope formulae:

$$(7.)\quad \frac{\Theta(2a)}{\Theta(0)} = e^{2aZ(a)-2\Pi(a, a)}.$$

E formula (5.) nanciscimur:

$$\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} = \frac{u-a}{2}Z\left(\frac{u-a}{2}\right)-\Pi\left(\frac{u-a}{2}, \frac{u-a}{2}\right)$$
$$-\frac{u+a}{2}Z\left(\frac{u+a}{2}\right)+\Pi\left(\frac{u+a}{2}, \frac{u+a}{2}\right),$$

unde (3.) in hanc abit formulam:

$$(8.)\quad \Pi(u, a) = uZ(a)+\frac{u-a}{2}Z\left(\frac{u-a}{2}\right)-\frac{u+a}{2}Z\left(\frac{u+a}{2}\right)$$
$$-\Pi\left(\frac{u-a}{2}, \frac{u-a}{2}\right)+\Pi\left(\frac{u+a}{2}, \frac{u+a}{2}\right),$$

quae est pro reductione integralis tertiae speciei indefiniti ad definita, atque cum Theoremate II. §. 50. convenit.

Corollarium.

Uti iam supra ex evolutionibus inventis algorithmos ad computum idoneos deduximus, minus ut nova proferantur, quam quo melius earum perspiciatur natura: idem rursus agamus de inventa evolutione functionis:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = e^{\int_0^{\varphi} \frac{F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)}{F^1 \Delta(\varphi)} d\varphi}$$

$$= \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^2}.$$

Quem in finem antemittamus sequentia.

Ponatur productum infinitum:

$$T = \left(\frac{1-q}{1+q}\right)\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^8}{1+q^8}\right)^{\frac{1}{8}}\dots,$$

siquidem iteratis vicibus substituitur:

$$1-q^2 = (1-q)(1+q),\ 1-q^4 = (1-q^2)(1+q^2),\ 1-q^8 = (1-q^4)(1+q^4),\ \dots,$$

prodit:

$$T = (1-q)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\frac{1-q^8}{1+q^8}\right)^{\frac{1}{16}}\dots$$

$$= (1-q)(1-q)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{\frac{1}{16}}\dots$$

$$= (1-q)(1-q)^{\frac{1}{2}}(1-q)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{16}}\dots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

unde videmus, fore:

(1.) $$T = (1-q)(1-q)^{\frac{1}{2}}(1-q)^{\frac{1}{4}}(1-q)^{\frac{1}{8}}(1-q)^{\frac{1}{16}}\dots = (1-q)^2$$

Sive etiam, cum sit:

$$T = \left(\frac{1-q}{1+q}\right)\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^8}{1+q^8}\right)^{\frac{1}{8}}\dots$$

$$= (1-q)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{\frac{1}{8}}\dots,$$

fit $T = (1-q)\sqrt{T}$, unde $T = (1-q)^2$.

Itaque fit

(2.) $$1-q = \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{\frac{1}{8}}\dots,$$

qua in formula loco q successive ponamus $q, q^3, q^5, q^7, \dots$ et instituamus infinitam multiplicationem. Advocata formula supra exhibita:

$$\sqrt[4]{k'} = \left(\frac{1-q}{1+q}\right)\left(\frac{1-q^3}{1+q^3}\right)\left(\frac{1-q^5}{1+q^5}\right)\left(\frac{1-q^7}{1+q^7}\right)\dots,$$

prodit:

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\cdots = [k']^{\frac{1}{8}}[k^{(2)\prime}]^{\frac{1}{16}}[k^{(4)\prime}]^{\frac{1}{32}}\dots,$$

siquidem designamus, ut supra, per $k^{(r)\prime}$ quantitatem, quae eodem modo a q^r pendet atque k' a q, sive complementum moduli per transformationem primam r^{ti} ordinis eruti.

Porro invenimus §. 36:

$$\{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\cdots\}^6 = \frac{2\sqrt[4]{q}\,k'}{\sqrt{k}},$$

unde iam:

(3.) $$q = e^{\frac{-\pi K'}{K}} = \frac{kk}{16k'}[k^{(2)\prime}]^{\frac{3}{2}}[k^{(4)\prime}]^{\frac{3}{4}}[k^{(8)\prime}]^{\frac{3}{8}}\dots$$

Posito $m = 1,\ n = k';\ \frac{m+n}{2} = m',\ \sqrt{mn} = n';\ \frac{m'+n'}{2} = m'',\ \sqrt{m'n'} = n''$; etc., notum est fieri $k^{(2)\prime} = \frac{n'}{m'},\ k^{(4)\prime} = \frac{n''}{m''},\ k^{(8)\prime} = \frac{n'''}{m'''}$, etc., unde:

(4.) $$q = \frac{mm-nn}{16mn}\cdot\left\{\left(\frac{n'}{m'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n''}{m''}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{n'''}{m'''}\right)^{\frac{1}{8}}\dots\right\}^3.$$

Hinc etiam fluit, designante $\mu = \frac{\pi}{2K}$ limitem communem, ad quem quantitates $m^{(p)}, n^{(p)}$ convergunt:

(5.) $$K' = \frac{1}{2\mu}\left\{\log\frac{16mn}{mm-nn} + \frac{3}{2}\log\frac{m'}{n'} + \frac{3}{4}\log\frac{m''}{n''} + \frac{3}{8}\log\frac{m'''}{n'''} + \cdots\right\},$$

quae formulae computum expeditissimum suppeditant. Docet (5.), quomodo ex eadem quantitatum serie, quam ad inveniendum valorem functionis K calculatam habere debes, ipsius etiam K' valor confestim proveniat.

Formulam (3.) transformemus. Fit, ut notum est:

$$k' = \frac{1-k^{(2)}}{1+k^{(2)}}; \quad k = \frac{2\sqrt{k^{(2)}}}{1+k^{(2)}}, \quad \text{unde} \quad \frac{kk}{k'} = \frac{4k^{(2)}}{k^{(2)\prime}k^{(2)\prime}}.$$

Hinc obtinemus, siquidem iteratis vicibus simul loco k substituimus $k^{(2)}$ atque radicem quadraticam extrahimus:

$$\frac{kk}{16k'} \cdot \left\{k^{(2)\prime}\right\}^{\frac{3}{2}} = \left\{\frac{k^{(2)}k^{(2)}}{16k^{(2)\prime}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\{\frac{k^{(2)}k^{(2)}}{16k^{(2)\prime}}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{k^{(4)\prime}\right\}^{\frac{3}{4}} = \left\{\frac{k^{(4)}k^{(4)}}{16k^{(4)\prime}}\right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$\left\{\frac{k^{(4)}k^{(4)}}{16k^{(4)\prime}}\right\}^{\frac{1}{4}} \left\{k^{(8)\prime}\right\}^{\frac{3}{8}} = \left\{\frac{k^{(8)}k^{(8)}}{16k^{(8)\prime}}\right\}^{\frac{1}{8}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ,$$

unde, posito $r = 2^p$:

$$\frac{kk}{16k'} \left\{k^{(2)\prime}\right\}^{\frac{3}{2}} \left\{k^{(4)\prime}\right\}^{\frac{3}{4}} \left\{k^{(8)\prime}\right\}^{\frac{3}{8}} \dots \left\{k^{(r)\prime}\right\}^{\frac{3}{r}} = \left\{\frac{k^{(r)}k^{(r)}}{16k^{(r)\prime}}\right\}^{\frac{1}{r}}.$$

Hinc videmus e formula (3.), $q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$ limitem fore expressionis $\left\{\frac{k^{(r)}k^{(r)}}{16}\right\}^{\frac{1}{r}}$, crescente p seu r in infinitum, quod est theorema a Cl^{o}. Legendre inventum.

Nec non vel ipso intuitu formulae a nobis exhibitae:

$$k = 4\sqrt{q}\left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\dots}\right\}^4$$

patet, neglectis quantitatibus ordinis q^r, fore:

$$q = \sqrt[r]{\frac{k^{(r)}k^{(r)}}{16}},$$

quod cum dicto theoremate convenit.

Iam in formula nostra:

$$1-q = \left\{\frac{1-q}{1+q}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{1-q^2}{1+q^2}\right\}^{\frac{1}{4}} \left\{\frac{1-q^4}{1+q^4}\right\}^{\frac{1}{8}} \dots$$

loco q substituamus successive duplicem quantitatum seriem:

$$\begin{matrix} qe^{2ix}, & q^3e^{2ix}, & q^5e^{2ix}, & q^7e^{2ix}, \dots \\ qe^{-2ix}, & q^3e^{-2ix}, & q^5e^{-2ix}, & q^7e^{-2ix}, \dots \end{matrix}$$

et infinitam instituamus multiplicationem. Advocetur formula §^{i} 36:

$$\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\,\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots},$$

ac designemus per $\Delta^{(r)}$ expressionem

$$\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{2rK^{(r)}x}{\pi}, k^{(r)}\right) = \sqrt{k^{(r)\prime}}\,\frac{(1+2q^r\cos 2rx+q^{2r})(1+2q^{3r}\cos 2rx+q^{6r})(1+2q^{5r}\cos 2rx+q^{10r})\dots}{(1-2q^r\cos 2rx+q^{2r})(1-2q^{3r}\cos 2rx+q^{6r})(1-2q^{5r}\cos 2rx+q^{10r})\dots},$$

provenit:

$$\frac{1}{\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{(2)\frac{1}{4}}\Delta^{(4)\frac{1}{8}}\Delta^{(8)\frac{1}{16}}\dots} = \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^2}.$$

Factorem constantem, quem adiecimus, $\frac{1}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^2}$, ex supra inventis sive eo determinavimus, quod utraque expressio, posito $x = 0$, unitati aequalis evadat. Iam vero invenimus:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^2},$$

unde:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = \frac{1}{\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{(2)\frac{1}{4}}\Delta^{(4)\frac{1}{8}}\Delta^{(8)\frac{1}{16}}\dots}.$$

Hinc, posito $\frac{2Kx}{\pi} = u$, $\mathrm{am}\,u = \varphi$, et advocatis formulis, quas Cl. Legendre de transformatione secundi ordinis proposuit, nanciscimur sequens, quod computum expeditum functionis Θ suppeditat,

Theorema.

Ponatur $\mathrm{am}\,u = \varphi$, $m = 1$, $n = k'$, $\Delta(\varphi) = \sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi} = \Delta$ et calculetur series quantitatum:

$$m' = \frac{m+n}{2}, \quad m'' = \frac{m'+n'}{2}, \quad m''' = \frac{m''+n''}{2}, \quad \dots,$$

$$n' = \sqrt{mn}, \quad n'' = \sqrt{m'n'}, \quad n''' = \sqrt{m''n''}, \quad \dots,$$

$$\Delta' = \frac{\Delta\Delta + n'n'}{2\Delta}, \quad \Delta'' = \frac{\Delta'\Delta' + n''n''}{2\Delta'}, \quad \Delta''' = \frac{\Delta''\Delta'' + n'''n'''}{2\Delta''}, \dots,$$

erit:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = e^{\int_0^\varphi \frac{F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)}{F^1 \Delta(\varphi)} d\varphi} = \left\{\frac{m}{\Delta}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\frac{m'}{\Delta'}\right\}^{\frac{1}{4}} \cdot \left\{\frac{m''}{\Delta''}\right\}^{\frac{1}{8}} \cdot \left\{\frac{m'''}{\Delta'''}\right\}^{\frac{1}{16}} \cdots$$

Cuius theorematis absque evolutionum consideratione per formulas notas ac finitas demonstrandi negotio, cum in promptu sit, supersedemus.

DE ADDITIONE ARGUMENTORUM ET PARAMETRI ET AMPLITUDINIS IN TERTIA SPECIE INTEGRALIUM ELLIPTICORUM.

53.

Formulam in analysi functionis Θ fundamentalem, et cuius nobis in sequentibus frequentissimus usus erit, nanciscimur consideratione sequente. Etenim quia positum est:

$$\Pi(u,a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, a\, \Delta\, \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u\, du}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u},$$

fit:

$$\frac{d\Pi(u,a)}{du} = \frac{k^2 \sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, a\, \Delta\, \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u}.$$

Qua formula secundum a integrata ab $a = 0$ usque ad $a = a$, prodit:

$$(1.) \qquad \int_0^a da \frac{d\Pi(u,a)}{du} = -\frac{1}{2} \log(1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u).$$

Fit autem e (3.) §. 52:

$$(2.) \qquad \frac{d\Pi(u,a)}{du} = Z(a) + \frac{1}{2} \frac{\Theta'(u-a)}{\Theta(u-a)} - \frac{1}{2} \frac{\Theta'(u+a)}{\Theta(u+a)},$$

unde:

$$\int_0^a da \frac{d\Pi(u,a)}{du} = \log \frac{\Theta(a)}{\Theta(0)} - \frac{1}{2} \log \Theta(u-a) - \frac{1}{2} \log \Theta(u+a) + \log \Theta(u),$$

quibus substitutis, dum a logarithmis ad numeros transis, e (1.) obtines:

$$(3.) \qquad \Theta(u+a)\Theta(u-a) = \left\{\frac{\Theta(u)\Theta(a)}{\Theta(0)}\right\}^2 (1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u).$$

Formulam (2.) ita repraesentare possumus:

$$\frac{k^2 \sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, a\, \Delta\, \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u} = Z(a) + \frac{1}{2} Z(u-a) - \frac{1}{2} Z(u+a),$$

unde, commutatis a et u:

$$\frac{k^2 \sin \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am}\, u\, \Delta\, \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, a}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u} = Z(u) - \frac{1}{2} Z(u-a) - \frac{1}{2} Z(u+a),$$

quibus additis formulis prodit:

$$(4.) \qquad Z(u) + Z(a) - Z(u+a) = k^2 \sin \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{am}\, a \sin \mathrm{am}(u+a),$$

quae est pro additione functionis Z atque convenit cum formula (3.) §. 49:

$$E(\varphi) + E(\alpha) - E(\sigma) = k^2 \sin \varphi \sin \alpha \sin \sigma.$$

Posito $a = K$, cum facile constet esse $Z(K) = \frac{F^1 E^1 - E^1 F^1}{F^1} = 0$, prodit e (4.):

$$(5.) \qquad Z(u) - Z(u+K) = k^2 \sin \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{coam}\, u,$$

quam §. 47. ex evolutione ipsius Z derivavimus. Posito $-u$ loco u, $K - u = v$, e formula (5.) obtinemus:

$$(6.) \qquad Z(u) + Z(v) = k^2 \sin \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{am}\, v.$$

Posito $u = v = \frac{K}{2}$, fit: $2Z\left(\frac{K}{2}\right) = 1 - k'$ *).

Formulam (5.) inde a $u = 0$ usque ad $u = u$ integremus. Cum sit $\int_0^u Z(u) du = \log \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}$, prodit:

$$\log \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} - \log \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(K)} = -\log \Delta\, \mathrm{am}\, u$$

sive:

$$(7.) \qquad \frac{\Theta(0)}{\Theta(K)} \cdot \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)} = \Delta\, \mathrm{am}\, u.$$

Posito $u = -K$, eruimus e (7.) valorem ipsius:

$$(8.) \qquad \frac{\Theta(K)}{\Theta(0)} = \frac{1}{\sqrt{k'}},$$

unde (7.) formam induit:

$$(9.) \qquad \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)} = \frac{\Delta\, \mathrm{am}\, u}{\sqrt{k'}}.$$

---

*) Est enim $\sin \mathrm{am} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}$, $\cos \mathrm{am} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$, $\Delta\, \mathrm{am} \frac{K}{2} = \sqrt{k'}$, $\mathrm{tg}\, \mathrm{am} \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{k'}}$.

Formulam (9.) ex inventa evolutione:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2}$$

facile confirmamus. Fit enim, mutato x in $x+\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+K\right)}{\Theta(0)} = \frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2},$$

unde:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+K\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = \frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

quam ipsam expressionem invenimus §. 35. $= \dfrac{\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\sqrt{k'}}$, uti debet.

E formula (9.) expressiones $\Pi(u+K,a)$, $\Pi(u,a+K)$ statim ad ipsum $\Pi(u,a)$ revocamus. Fit enim:

$$(10.)\quad \Pi(u+K,a) = (u+K)Z(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+K-a)}{\Theta(u+K+a)}$$

$$= (u+K)Z(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}+\frac{1}{2}\log\frac{\Delta\operatorname{am}(u-a)}{\Delta\operatorname{am}(u+a)}$$

$$= \Pi(u,a)+KZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Delta\operatorname{am}(u-a)}{\Delta\operatorname{am}(u+a)},$$

$$(11.)\quad \Pi(u,a+K) = uZ(a+K)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a-K)}{\Theta(u+a+K)}$$

$$= uZ(a)-k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{coam}a\,.\,u+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}+\frac{1}{2}\log\frac{\Delta\operatorname{am}(u-a)}{\Delta\operatorname{am}(u+a)}$$

$$= \Pi(u,a)-k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{coam}a\,.\,u+\frac{1}{2}\log\frac{\Delta\operatorname{am}(u-a)}{\Delta\operatorname{am}(u+a)}.$$

54.

E formula fundamentali, cuius ope functio Π per functiones Z, Θ definitur:

$$(\text{I.})\qquad \Pi(u,a) = uZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

advocatis sequentibus et ipsis in analysi functionum Z, Θ fundamentalibus:

$$(\text{II.})\quad Z(u)+Z(a)-Z(u+a) = k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+a)$$

$$(\text{III.})\qquad \Theta(u+a)\Theta(u-a) = \left\{\frac{\Theta(u)\Theta(a)}{\Theta(0)}\right\}^2(1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u),$$

iam facile formulas obtines et pro exprimendo $\Pi(u+v,a)$ per $\Pi(u,a)$, $\Pi(v,a)$ quod vocabimus de *additione argumenti amplitudinis*, et pro exprimendo $\Pi(u,a+b)$ per $\Pi(u,a)$, $\Pi(u,b)$, quod vocabimus de *additione argumenti parametri* theorema. Quem in finem adnotamus sequentia.

E formulis:

$$\Pi(u,a) = uZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

$$\Pi(v,a) = vZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(v-a)}{\Theta(v+a)}$$

$$\Pi(u+v,a) = (u+v)Z(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+v-a)}{\Theta(u+v+a)}$$

sequitur:

$$(1.)\quad \Pi(u,a)+\Pi(v,a)-\Pi(u+v,a) = \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)\Theta(v-a)\Theta(u+v+a)}{\Theta(u+a)\Theta(v+a)\Theta(u+v-a)}.$$

Expressionem sub signo logarithmico contentam:

$$\frac{\Theta(u-a)\Theta(v-a)\Theta(u+v+a)}{\Theta(u+a)\Theta(v+a)\Theta(u+v-a)}$$

ope theorematis fundamentalis (III.) duplici ratione ad functiones ellipticas revocare licet. Fit enim ex eo primum:

$$\Theta(u-a)\Theta(v-a) = \left\{\frac{\Theta\left(\frac{u-v}{2}\right)\Theta\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{\Theta(0)}\right\}^2\left(1-k^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right)$$

$$\Theta(u+a)\Theta(v+a) = \left\{\frac{\Theta\left(\frac{u-v}{2}\right)\Theta\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}{\Theta(0)}\right\}^2\left(1-k^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u+v}{2}+a\right)\right)$$

$$\Theta(u+v-a)\Theta(a) = \left\{\frac{\Theta\left(\frac{u+v}{2}\right)\Theta\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{\Theta(0)}\right\}^2\left(1-k^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right)$$

$$\Theta(u+v+a)\Theta(a) = \left\{\frac{\Theta\left(\frac{u+v}{2}\right)\Theta\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}{\Theta(0)}\right\}^2\left(1-k^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u+v}{2}+a\right)\right),$$

quarum formularum prima et quarta in se ductis ac per secundam et tertiam divisis, provenit:

$$(2.)\qquad \frac{\Theta(u-a)\,\Theta(v-a)\,\Theta(u+v+a)}{\Theta(u+a)\,\Theta(v+a)\,\Theta(u+v-a)}$$

$$= \frac{\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right\}\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}+a\right)\right\}}{\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}+a\right)\right\}\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right\}}.$$

Sic etiam, quae est altera ratio, ubi theorema fundamentale (III.) hunc in modum repraesentas:

$$\left\{\frac{\Theta(u)\,\Theta(v)}{\Theta(0)}\right\}^2 = \frac{\Theta(u+v)\,\Theta(u-v)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

fit:

$$\left\{\frac{\Theta(u-a)\,\Theta(v-a)}{\Theta(0)}\right\}^2 = \frac{\Theta(u-v)\,\Theta(u+v-2a)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u-a)\sin^2\mathrm{am}(v-a)}$$

$$\left\{\frac{\Theta(u+a)\,\Theta(v+a)}{\Theta(0)}\right\}^2 = \frac{\Theta(u-v)\,\Theta(u+v+2a)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u+a)\sin^2\mathrm{am}(v+a)}$$

$$\left\{\frac{\Theta(a)\,\Theta(u+v-a)}{\Theta(0)}\right\}^2 = \frac{\Theta(u+v)\,\Theta(u+v-2a)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,\sin^2\mathrm{am}(u+v-a)}$$

$$\left\{\frac{\Theta(a)\,\Theta(u+v+a)}{\Theta(0)}\right\}^2 = \frac{\Theta(u+v)\,\Theta(u+v+2a)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,\sin^2\mathrm{am}(u+v+a)},$$

quarum formularum rursus prima et quarta in se ductis ac per secundam et tertiam divisis, extractisque radicibus provenit:

$$(3.)\qquad \frac{\Theta(u-a)\,\Theta(v-a)\,\Theta(u+v+a)}{\Theta(u+a)\,\Theta(v+a)\,\Theta(u+v-a)}$$

$$= \sqrt{\frac{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u+a)\sin^2\mathrm{am}(v+a)][1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,\sin^2\mathrm{am}(u+v-a)]}{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u-a)\sin^2\mathrm{am}(v-a)][1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,\sin^2\mathrm{am}(u+v+a)]}}.$$

Ut ex ipsis elementis cognoscatur, quomodo expressiones (2.), (3.) altera in alteram transformari possint, adnoto sequentia.

Ubi in formula, iam saepius adhibita:

$$\sin\mathrm{am}(u+v)\sin\mathrm{am}(u-v) = \frac{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,v}$$

loco u, v resp. ponis $u+v$, $u-v$, prodit:

$$\sin\mathrm{am}\,2u\,\sin\mathrm{am}\,2v = \frac{\sin^2\mathrm{am}(u+v)-\sin^2\mathrm{am}(u-v)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u+v)\sin^2\mathrm{am}(u-v)}.$$

Porro dedimus formulam:

$$\sin^2\mathrm{am}(u+v)-\sin^2\mathrm{am}(u-v) = \frac{4\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,v\,\Delta\mathrm{am}\,v}{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,v]^2},$$

unde, multiplicatione facta, obtinemus:

$$(4.)\quad 1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u+v)\sin^2\mathrm{am}(u-v) = \frac{4\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,v\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,2u\,\sin\mathrm{am}\,2v\,[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,v]^2}$$

$$= \frac{[1-k^2\sin^4\mathrm{am}\,u][1-k^2\sin^4\mathrm{am}\,v]\;{}^{*)}}{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,v]^2},$$

cuius formulae beneficio formulae (2.), (3.) iam facile altera in alteram abeunt.

E formula (4.) adhuc deduci potest haec generalior:

$$(5.)\qquad \frac{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,v][1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u'\,\sin^2\mathrm{am}\,v']}{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,u'][1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v\,\sin^2\mathrm{am}\,v']}$$

$$= \sqrt{\frac{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u+u')\sin^2\mathrm{am}(u-u')][1-k^2\sin^2\mathrm{am}(v+v')\sin^2\mathrm{am}(v-v')]}{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u+v)\sin^2\mathrm{am}(u-v)][1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u'+v')\sin^2\mathrm{am}(u'-v')]}}.$$

At Cl. Legendre eo loco, quo de additione argumenti amplitudinis agit, (cap. XVI. *Comparaison des fonctions elliptiques de la troisième espèce*) eam, quae sub signo logarithmico invenitur, quantitatem sub forma exhibet hac:

$$\frac{1-k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\sin\mathrm{am}(u+v-a)}{1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\sin\mathrm{am}(u+v+a)},$$

quae non primo intuitu patet, quomodo cum expressionibus a nobis inventis sive (2.) sive (3.) conveniat. Transformatio satis abstrusa hunc in modum peragitur.

E formula elementari, cuius frequentissimam iam fecimus applicationem, fit:

$$\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v = \frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)-\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)}$$

$$\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}(u+v-a) = \frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)-\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)};$$

quibus in se ductis aequationibus, prodit:

*) Nota enim est formula: $\sin\mathrm{am}\,2u = \dfrac{2\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^4\mathrm{am}\,u}$.

$$\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\right\}\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right\}$$
$$\times\left\{1-k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\sin\mathrm{am}(u+v-a)\right\}$$
$$=\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\right\}\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right\}$$
$$-k^2\left\{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)-\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\right\}\left\{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)-\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right\}.$$

Altera aequationis pars evoluta, terminis

$$-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\left\{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)+\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right\}$$
$$+k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\left\{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)+\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right\}$$

se mutuo destruentibus, fit:

$$1+k^4\sin^4\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)$$
$$-k^2\sin^4\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)$$
$$=\left\{1-k^2\sin^4\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\right\}\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right\},$$

unde tandem prodit:

$$\text{(6.)}\quad \frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)}{1-k^2\sin^4\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)}\left\{1-k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\sin\mathrm{am}(u+v-a)\right\}$$
$$=\frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}.$$

Hinc, mutato a in $-a$, eruimus:

$$\frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)}{1-k^2\sin^4\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)}\left\{1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\sin\mathrm{am}(u+v+a)\right\}$$
$$=\frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}+a\right)},$$

unde, divisione facta:

$$\text{(7.)}\quad \frac{1-k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\sin\mathrm{am}(u+v-a)}{1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\sin\mathrm{am}(u+v+a)}$$
$$=\frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}\cdot\frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)},$$

quae est transformatio quaesita expressionis a Cl°. Legendre propositae in expressionem (2.).

Formulam (6.), posito u, a, v loco $\frac{u-v}{2}$, $\frac{u+v}{2}$, $\frac{u+v}{2}-a$, ita quoque repraesentare licet:

$$\text{(8.)}\quad 1-k^2\sin\mathrm{am}(a+u)\sin\mathrm{am}(a-u)\sin\mathrm{am}(a+v)\sin\mathrm{am}(a-v)$$
$$=\frac{[1-k^2\sin^4\mathrm{am}\,a][1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v]}{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u][1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,v]},$$

unde formula (4.) ut casus specialis fluit, posito $u=v$.

55.

E formulis §[i] antecedentis (1.), (2.), (3.), (7.) sequitur:

$$\text{(1.)}\quad \Pi(u,a)+\Pi(v,a)-\Pi(u+v,a)$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right\}\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}+a\right)\right\}}{\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u-v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}+a\right)\right\}\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right\}}$$
$$=\frac{1}{4}\log\frac{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u+a)\sin^2\mathrm{am}(v+a)][1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}(u+v-a)]}{[1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u-a)\sin^2\mathrm{am}(v-a)][1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}(u+v+a)]}$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\sin\mathrm{am}(u+v-a)}{1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\sin\mathrm{am}(u+v+a)},$$

quod est theorema de additione argumenti *amplitudinis*. Prorsus eadem methodo investigari potest alterum de additione argumenti *parametri*, at ope theorematis de reductione parametri ad amplitudinem, quod nobis suppeditavit formula (4.) §. 52:

$$\text{(IV.)}\quad \Pi(u,a)-\Pi(a,u)=uZ(a)-aZ(u),$$

e formula (1.) idem sponte fluit. Etenim e (IV.) fit:

$$\begin{aligned}
\Pi(a,u) \quad -\Pi(u,a) \quad &= aZ(u) \qquad -uZ(a) \\
\Pi(b,u) \quad -\Pi(u,b) \quad &= bZ(u) \qquad -uZ(b) \\
\Pi(a+b,u)-\Pi(u,a+b) &= (a+b)Z(u)-uZ(a+b),
\end{aligned}$$

unde:

$$\begin{aligned}
&\Pi(u,a)+\Pi(u,b)-\Pi(u,a+b) \\
&= \Pi(a,u)+\Pi(b,u)-\Pi(a+b,u)+u[Z(a)+Z(b)-Z(a+b)],
\end{aligned}$$

sive cum sit ex (1.):

$$\Pi(a,u)+\Pi(b,u)-\Pi(a+b,u) = \frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}(a+b-u)}{1+k^2\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}(a+b+u)},$$

porro e (II.):

$$Z(a)+Z(b)-Z(a+b) = k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}(a+b),$$

fit:

$$\text{(2.)} \qquad \Pi(u,a)+\Pi(u,b)-\Pi(u,a+b)$$

$$= k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}(a+b).u+\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}(a+b-u)}{1+k^2\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}(a+b+u)},$$

quod est theorema quaesitum de additione argumenti *parametri*.

Alias eruimus formulas satis memorabiles consideratione sequente. Fit enim e theoremate (III.):

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{\Theta(u-a)\,\Theta(v-b)}{\Theta(0)}\right\}^2 &= \frac{\Theta(u+v-a-b)\,\Theta(u-v-a+b)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(u-a)\sin^2\operatorname{am}(v-b)} \\
\left\{\frac{\Theta(u+a)\,\Theta(v+b)}{\Theta(0)}\right\}^2 &= \frac{\Theta(u+v+a+b)\,\Theta(u-v+a-b)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\sin^2\operatorname{am}(v+b)}.
\end{aligned}$$

Iam e theoremate (I.) erit:

$$\Pi(u,a)+\Pi(v,b) = uZ(a)+vZ(b)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)\,\Theta(v-b)}{\Theta(u+a)\,\Theta(v+b)}$$

$$\begin{aligned}
&\Pi(u+v,a+b)+\Pi(u-v,a-b) \\
&= (u+v)Z(a+b)+(u-v)Z(a-b)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+v-a-b)\,\Theta(u-v-a+b)}{\Theta(u+v+a+b)\,\Theta(u-v+a-b)},
\end{aligned}$$

unde:

$$\text{(3.)} \qquad \Pi(u+v,a+b)+\Pi(u-v,a-b)-2\Pi(u,a)-2\Pi(v,b)$$

$$=(u+v)Z(a+b)+(u-v)Z(a-b)-2uZ(a)-2vZ(b)+\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(u-a)\sin^2\operatorname{am}(v-b)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\sin^2\operatorname{am}(v+b)},$$

sive cum sit:

$$\begin{aligned}
Z(a)+Z(b)-Z(a+b) &= k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}(a+b) \\
Z(a)-Z(b)-Z(a-b) &= -k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}(a-b),
\end{aligned}$$

prodit:

$$\text{(4.)} \qquad \Pi(u+v,a+b)+\Pi(u-v,a-b)-2\Pi(u,a)-2\Pi(v,b)$$

$$\begin{aligned}
&= -k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b[\sin\operatorname{am}(a+b)\cdot(u+v)-\sin\operatorname{am}(a-b)\cdot(u-v)] \\
&\qquad +\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(u-a)\sin^2\operatorname{am}(v-b)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\sin^2\operatorname{am}(v+b)}.
\end{aligned}$$

Commutatis inter se u et v, obtinemus:

$$\text{(5.)} \qquad \Pi(u+v,a+b)-\Pi(u-v,a-b)-2\Pi(v,a)-2\Pi(u,b)$$

$$\begin{aligned}
&= -k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b[\sin\operatorname{am}(a+b)\cdot(u+v)+\sin\operatorname{am}(a-b)\cdot(u-v)] \\
&\qquad +\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(v-a)\sin^2\operatorname{am}(u-b)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(v+a)\sin^2\operatorname{am}(u+b)}.
\end{aligned}$$

Additis (4.) et (5.), obtinemus:

$$\text{(6.)} \qquad \Pi(u+v,a+b)-\Pi(u,a)-\Pi(u,b)-\Pi(v,a)-\Pi(v,b)$$

$$\begin{aligned}
&= \quad -k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}(a+b)\cdot(u+v) \\
&\quad +\frac{1}{4}\log\left\{\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(u-a)\sin^2\operatorname{am}(v-b)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\sin^2\operatorname{am}(v+b)}\cdot\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(v-a)\sin^2\operatorname{am}(u-b)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(v+a)\sin^2\operatorname{am}(u+b)}\right\}.
\end{aligned}$$

Posito $v = 0$, e (4.), (5.) prodit:

$$\text{(7.)} \qquad \Pi(u,a+b)+\Pi(u,a-b)-2\Pi(u,a)$$

$$=-k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b[\sin\operatorname{am}(a+b)-\sin\operatorname{am}(a-b)]u+\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}b\sin^2\operatorname{am}(u-a)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}b\sin^2\operatorname{am}(u+a)}$$

$$\text{(8.)} \qquad \Pi(u,a+b)-\Pi(u,a-b)-2\Pi(u,b)$$

$$=-k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b[\sin\operatorname{am}(a+b)+\sin\operatorname{am}(a-b)]u+\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}(u-b)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}(u+b)}.$$

Posito $b = 0$, e (4.), (5.) prodit:

$$\text{(9.)} \qquad \Pi(u+v,a)+\Pi(u-v,a)-2\Pi(u,a) = \frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}v\sin^2\operatorname{am}(u-a)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}v\sin^2\operatorname{am}(u+a)}$$

$$\text{(10.)} \qquad \Pi(u+v,a)-\Pi(u-v,a)-2\Pi(v,a) = \frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}(v-a)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}(v+a)}.$$

REDUCTIONES EXPRESSIONUM $Z(iu)$, $\Theta(iu)$ AD ARGUMENTUM REALE. REDUCTIO GENERALIS TERTIAE SPECIEI INTEGRALIUM ELLIPTICORUM, IN QUIBUS ARGUMENTA ET AMPLITUDINIS ET PARAMETRI IMAGINARIA SUNT.

56.

Revertimur ad analysin functionum Z, Θ, quarum insignem usum in theoria nostra antecedentibus comprobavimus. Quaeramus de reductione expressionum $Z(iu)$, $\Theta(iu)$ ad argumentum reale. Idem primum signis Cl°. Legendre usitatis exsequemur, deinde ad notationes nostras accommodabimus.

Novimus in elementis §. 19. pag. 85, simul locum habere aequationes:

$$\sin\varphi = i\operatorname{tg}\psi, \quad \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{id\psi}{\Delta(\psi,k')}, \quad F(\varphi) = iF(\psi,k').$$

Hinc fit:

$$d\varphi\,\Delta(\varphi) = \frac{id\psi(1+kk\operatorname{tg}^2\psi)}{\Delta(\psi,k')} = \frac{id\psi\,\Delta(\psi,k')}{\cos^2\psi},$$

unde, integratione facta:

$$\int_0^{\varphi}\Delta(\varphi)\,d\varphi = i\left\{\operatorname{tg}\psi\,\Delta(\psi,k') + \int_0^{\psi}\frac{k'k'\sin^2\psi}{\Delta(\psi,k')}\,d\psi\right\}$$

sive:

$$\text{(1.)}\qquad E(\varphi) = i[\operatorname{tg}\psi\,\Delta(\psi,k') + F(\psi,k') - E(\psi,k')].$$

Multiplicando per $\dfrac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \dfrac{id\psi}{\Delta(\psi,k')}$ et integrando eruimus:

$$\text{(2.)}\qquad \int_0^{\varphi}\frac{E(\varphi)}{\Delta(\varphi)}\,d\varphi = \log\cos\psi - \frac{1}{2}\left\{F(\psi,k')\right\}^2 + \int_0^{\psi}\frac{E(\psi,k')}{\Delta(\psi,k')}\,d\psi.$$

Ex aequatione (1.) sequitur:

$$\frac{F^1E(\varphi) - E^1F(\varphi)}{i} = F^1\operatorname{tg}\psi\,\Delta(\psi,k') - [F^1E(\psi,k') + (E^1 - F^1)F(\psi,k')].$$

Iam adnotetur theorema egregium Cl^{i}. Legendre (pag. 61):

$$F^1E^1(k') + F^1(k')E^1 - F^1F^1(k') = \frac{\pi}{2},$$

unde:

$$F^1E(\psi,k') + (E^1 - F^1)F(\psi,k') = \frac{F^1}{F^1(k')}[F^1(k')E(\psi,k') - E^1(k')F(\psi,k')] + \frac{\pi F(\psi,k')}{2F^1(k')},$$

ideoque:

$$\text{(3.)}\qquad \frac{F^1E(\varphi) - E^1F(\varphi)}{iF^1} = \operatorname{tg}\psi\,\Delta(\psi,k') - \frac{F^1(k')E(\psi,k') - E^1(k')F(\psi,k')}{F^1(k')} - \frac{\pi F(\psi,k')}{2F^1F^1(k')}.$$

E notatione nostra erat:

$$\varphi = \operatorname{am}(iu), \quad \psi = \operatorname{am}(u,k'), \quad F(\varphi) = iu, \quad F(\psi,k') = u;$$

porro:

$$\frac{F^1E(\varphi) - E^1F(\varphi)}{F^1} = Z(iu,k), \quad \frac{F^1(k')E(\psi,k') - E^1(k')F(\psi,k')}{F^1(k')} = Z(u,k'),$$

unde aequatio (3.) ita repraesentatur:

$$\text{(4.)}\qquad iZ(iu,k) = -\operatorname{tg}\operatorname{am}(u,k')\,\Delta\operatorname{am}(u,k') + \frac{\pi u}{2KK'} + Z(u,k').$$

Hinc prodit integrando:

$$\int_0^u i\,du\,Z(iu,k) = \log\cos\operatorname{am}(u,k') + \frac{\pi uu}{4KK'} + \int_0^u Z(u,k')\,du,$$

sive cum sit $\displaystyle\int_0^u du\,Z(u) = \log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}$:

$$\text{(5.)}\qquad \frac{\Theta(iu,k)}{\Theta(0,k)} = e^{\frac{\pi uu}{4KK'}}\cos\operatorname{am}(u,k')\,\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')}.$$

Formulae (4.), (5.) functiones $Z(iu)$, $\Theta(iu)$ ad argumentum reale revocant.

57.

Mutetur in (5.) §^{i} praecedentis u in $u+2K'$, prodit:

$$\frac{\Theta(iu+2iK')}{\Theta(0)} = -e^{\frac{\pi(u+2K')^2}{4KK'}}\cos\operatorname{am}(u,k')\,\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')}{}^{*)} = -e^{\frac{\pi(K'+u)}{K}}\,\frac{\Theta(iu)}{\Theta(0)},$$

sive posito u loco iu:

$$\text{(1.)}\qquad \Theta(u+2iK') = -e^{\frac{\pi(K'-iu)}{K}}\,\Theta(u).$$

Ponatur in (5.) §^{i} praecedentis $u+K'$ loco u: cum sit

$$\cos\operatorname{am}(u+K',k') = -\frac{k\sin\operatorname{am}(u,k')}{\Delta\operatorname{am}(u,k')}$$

$$\Theta(u+K',k') = \frac{\Delta\operatorname{am}(u,k')}{\sqrt{k}}\,\Theta(u,k'), \text{ v. §. 53. (9.)},$$

*) Fit enim $\Theta(u+2K,k) = \Theta(u)$ ideoque etiam $\Theta(u+2K',k') = \Theta(u,k')$.

prodit:

$$\frac{\Theta(iu+iK')}{\Theta(0)} = -e^{\frac{\pi(u+K')^2}{4KK'}}\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(u,k')\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')}$$
$$= -e^{\frac{\pi(2u+K')}{4K}}\sqrt{k}\operatorname{tg}\operatorname{am}(u,k')\frac{\Theta(iu)}{\Theta(0)},$$

unde posito rursus u loco iu:

$$(2.)\qquad \Theta(u+iK') = ie^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}}\sqrt{k}\sin\operatorname{am} u\,\Theta(u).$$

Sumptis logarithmis et differentiando, ex (1.), (2.) prodit:

$$(3.)\qquad Z(u+2iK') = \frac{-i\pi}{K} + Z(u)$$

$$(4.)\qquad Z(u+iK') = \frac{-i\pi}{2K} + \operatorname{cotg}\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} u + Z(u).$$

Posito $u=0$, ex (1.)—(4.) fit:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \Theta(2iK') = -e^{\frac{\pi K'}{K}}\Theta(0), & \Theta(iK') = 0 \\ Z(2iK') = \dfrac{-i\pi}{K}, & Z(iK') = \infty \end{cases}$$

Formulae (1.), (2.) egregiam inveniunt confirmationem e natura producti infiniti, in quod functionem Θ evolvimus:

$$(6.)\qquad \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^2}$$
$$= \frac{[(1-qe^{2ix})(1-q^3e^{2ix})(1-q^5e^{2ix})\dots][(1-qe^{-2ix})(1-q^3e^{-2ix})(1-q^5e^{-2ix})\dots]}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^2}.$$

Ubi enim mutatur x in $x+\frac{i\pi K'}{K}$, quo facto abit e^{ix} in qe^{ix}, abit productum

$$[(1-qe^{2ix})(1-q^3e^{2ix})(1-q^5e^{2ix})\dots][(1-qe^{-2ix})(1-q^3e^{-2ix})(1-q^5e^{-2ix})\dots]$$

in hoc:

$$\frac{-1}{qe^{2ix}}[(1-qe^{2ix})(1-q^3e^{2ix})(1-q^5e^{2ix})\dots][(1-qe^{-2ix})(1-q^3e^{-2ix})(1-q^5e^{-2ix})\dots],$$

unde:

$$(7.)\qquad \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+2iK'\right) = -\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{qe^{2ix}}.$$

Mutato vero x in $x+\frac{i\pi K'}{2K}$, abit e^{ix} in $\sqrt{q}\,e^{ix}$, unde productum:

$$[(1-qe^{2ix})(1-q^3e^{2ix})(1-q^5e^{2ix})\dots][(1-qe^{-2ix})(1-q^3e^{-2ix})(1-q^5e^{-2ix})\dots]$$

in hoc:

$$(1-e^{-2ix})[(1-q^2e^{2ix})(1-q^4e^{2ix})\dots][(1-q^2e^{-2ix})(1-q^4e^{-2ix})\dots]$$
$$= \frac{i}{e^{ix}}\cdot 2\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\dots$$

At dedimus §. 36. formulam:

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\dots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots},$$

unde videmus, fore:

$$(8.)\qquad \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+iK'\right) = \frac{i\sqrt{k}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\sqrt[4]{q}\,e^{ix}}.$$

Formulae (7.), (8.) autem, posito $\frac{2Kx}{\pi}=u$, cum formulis (1.), (2.) conveniunt.

E formula (9.) §. 53:

$$\Theta(u+K) = \frac{\Delta\operatorname{am} u}{\sqrt{k'}}\cdot\Theta(u),$$

posito iu loco u, sequitur:

$$\Theta(iu+K) = \frac{\Delta\operatorname{am}(u,k')}{\sqrt{k'}\cos\operatorname{am}(u,k')}\cdot\Theta(iu),$$

unde e (5.) §. 56:

$$\frac{\Theta(iu+K)}{\Theta(0)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}e^{\frac{\pi uu}{4KK'}}\Delta\operatorname{am}(u,k')\cdot\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')}$$

sive e formula allegata (9.) §. 53:

$$(9.)\qquad \frac{\Theta(iu+K)}{\Theta(0)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,e^{\frac{\pi uu}{4KK'}}\frac{\Theta(u+K',k')}{\Theta(0,k')}.$$

Hinc sumendo logarithmos et differentiando obtinemus:

$$(10.)\qquad iZ(iu+K) = \frac{\pi u}{2KK'} + Z(u+K',k').$$

58.

Formularum §§. 56. 57. inventarum facilis fit applicatio ad analysin functionum Π casibus, quibus argumenta sive amplitudinis sive parametri sive utriusque imaginaria sunt.

Demonstremus primum, expressionem $\Pi(u, a+iK')$ revocari posse ad $\Pi(u, a)$, unde patet, posito $n = -k^2 \sin^2 \operatorname{am} a$, integralia:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left(1+n\sin^2\varphi\right)\Delta(\varphi)}, \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left(1+\frac{k^2}{n}\sin^2\varphi\right)\Delta(\varphi)}$$

alterum ab altero pendere; quod est insigne theorema a Cl°. Legendre prolatum cap. XV.

Invenimus:

$$\Pi(u, a+iK') = uZ(a+iK') + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(a-u+iK')}{\Theta(a+u+iK')}.$$

Fit autem e (2.), (4.) §. 57:

$$\frac{\Theta(a-u+iK')}{\Theta(a+u+iK')} = e^{\frac{i\pi u}{K}} \frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)} \cdot \frac{\Theta(a-u)}{\Theta(a+u)}$$

$$uZ(a+iK') = -\frac{i\pi u}{2K} + u \operatorname{cotg}\operatorname{am} a \,\Delta\operatorname{am} a + uZ(a),$$

unde, terminis $\frac{i\pi u}{2K} - \frac{i\pi u}{2K}$ se destruentibus:

$$\text{(1.)} \quad \Pi(u, a+iK') = \Pi(u, a) + u\operatorname{cotg}\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a + \frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)}.$$

Ponamus in hac formula ia loco a, fit:

$$\operatorname{cotg}\operatorname{am} ia\,\Delta\operatorname{am} ia = \frac{-i\Delta\operatorname{am}(a,k')}{\sin\operatorname{am}(a,k')\cos\operatorname{am}(a,k')}$$

$$\frac{\sin\operatorname{am}(ia-u)}{\sin\operatorname{am}(ia+u)} = \frac{\Delta\operatorname{am} u - \operatorname{cotg}\operatorname{am} ia\,\Delta\operatorname{am} ia \operatorname{tg}\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u + \operatorname{cotg}\operatorname{am} ia\,\Delta\operatorname{am} ia\operatorname{tg}\operatorname{am} u},$$

sive posito brevitatis gratia:

$$\frac{\Delta\operatorname{am}(a,k')}{\sin\operatorname{am}(a,k')\cos\operatorname{am}(a,k')} = \sqrt{\alpha},$$

fit:

$$\frac{\sin\operatorname{am}(ia-u)}{\sin\operatorname{am}(ia+u)} = \frac{\Delta\operatorname{am} u + i\sqrt{\alpha}\operatorname{tg}\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u - i\sqrt{\alpha}\operatorname{tg}\operatorname{am} u},$$

unde (1.) abit in:

$$\text{(2.)} \quad \frac{\Pi(u, ia+iK') - \Pi(u, ia)}{i} = -\sqrt{\alpha}\,.\,u + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha}\operatorname{tg}\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},$$

quae cum formula (f') a Cl°. Legendre exhibita convenit.

59.

Alias formulas, pro reductione argumenti imaginarii ad reale fundamentales, obtinemus e (9.), (10.) §. 57. Quarum primum observo hanc, qua argumenta et amplitudinis et parametri imaginaria ad argumenta realia revocantur:

$$\text{(1.)} \quad \Pi(iu, ia+K) = \Pi(u, a+K', k'),$$

quae hunc in modum demonstratur. Fit enim:

$$\Pi(iu, ia+K) = iuZ(ia+K) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(ia-iu+K)}{\Theta(ia+iu+K)};$$

porro e (10.) §. 57:

$$iuZ(ia+K) = \frac{\pi u a}{2KK'} + uZ(a+K', k'),$$

e (9.) §. 57:

$$\frac{\Theta(ia-iu+K)}{\Theta(0,k)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, e^{\frac{\pi(a-u)^2}{4KK'}} \frac{\Theta(a-u+K', k')}{\Theta(0,k')}$$

$$\frac{\Theta(ia+iu+K)}{\Theta(0,k)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, e^{\frac{\pi(a+u)^2}{4KK'}} \frac{\Theta(a+u+K', k')}{\Theta(0,k')},$$

unde:

$$\frac{\Theta(ia-iu+K)}{\Theta(ia+iu+K)} = e^{\frac{-\pi a u}{KK'}} \frac{\Theta(a-u+K', k')}{\Theta(a+u+K', k')},$$

ideoque, terminis $\frac{\pi u a}{2KK'} - \frac{\pi u a}{2KK'}$ se destruentibus:

$$\Pi(iu, ia+K) = uZ(a+K', k') + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(a-u+K', k')}{\Theta(a+u+K', k')} = \Pi(u, a+K', k'),$$

quod demonstrandum erat.

Mutato in (1.) a in $-ia$, prodit:

$$\text{(2.)} \quad \Pi(iu, a+K) = -\Pi(u, ia+K', k').$$

Formula (1.) facile etiam probatur consideratione ipsius integralis, per quod functionem Π definivimus:

$$\Pi(u,a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u} \, du,$$

unde:

$$\Pi(iu, ia+K) = \int_0^u \frac{ik^2 \sin \operatorname{am}(ia+K) \cos \operatorname{am}(ia+K) \, \Delta \operatorname{am}(ia+K) \sin^2 \operatorname{am} iu}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia+K) \sin^2 \operatorname{am} iu} \, du.$$

Fit enim e formulis $§^{\text{i}}$ 19:

$$\begin{aligned}
\sin \operatorname{am}(ia+K) &= \sin \operatorname{coam} ia = \frac{\Delta \operatorname{coam}(a,k')}{k} = \frac{\Delta \operatorname{am}(a+K',k')}{k} \\
\cos \operatorname{am}(ia+K) &= -\cos \operatorname{coam} ia = \frac{-ik'}{k} \cos \operatorname{coam}(a,k') = \frac{ik'}{k} \cos \operatorname{am}(a+K',k') \\
\Delta \operatorname{am}(ia+K) &= \Delta \operatorname{coam} ia = k' \sin \operatorname{coam}(a,k') = k' \sin \operatorname{am}(a+K',k'),
\end{aligned}$$

unde:

$$\begin{aligned}
& ikk \sin \operatorname{am}(ia+K) \,.\, \cos \operatorname{am}(ia+K) \,.\, \Delta \operatorname{am}(ia+K) \\
&= -k'k' \sin \operatorname{am}(a+K',k') \cos \operatorname{am}(a+K',k') \, \Delta \operatorname{am}(a+K',k').
\end{aligned}$$

Porro fit:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin^2 \operatorname{am} iu}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia+K) \sin^2 \operatorname{am} iu} = \frac{-\operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(u,k')}{1+\Delta^2 \operatorname{am}(a+K',k') \operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(u,k')} \\
&= \frac{-\sin^2 \operatorname{am}(u,k')}{\cos^2 \operatorname{am}(u,k') + \Delta^2 \operatorname{am}(a+K',k') \sin^2 \operatorname{am}(u,k')} = \frac{-\sin^2 \operatorname{am}(u,k')}{1-k'k' \sin^2 \operatorname{am}(a+K',k') \sin^2 \operatorname{am}(u,k')},
\end{aligned}$$

unde:

$$\Pi(iu, ia+K) = \int_0^u \frac{k'k' \sin \operatorname{am}(a+K',k') \cos \operatorname{am}(a+K',k') \, \Delta \operatorname{am}(a+K',k') \sin^2 \operatorname{am}(u,k')}{1-k'k' \sin^2 \operatorname{am}(a+K',k') \sin^2 \operatorname{am}(u,k')} \, du,$$

sive:

$$\Pi(iu, ia+K) = \Pi(u, a+K', k'),$$

quod demonstrandum erat.

E formulis (9.), (10.) $§^{\text{i}}$ 57. simili modo atque (1.) comprobare possumus formulam sequentem, quae docet, functiones binas argumenti imaginarii parametri, quarum moduli alter alterius complementum, ad se invicem revocari posse:

$$\text{(3.)} \qquad i\Pi(u, ia+K) + i\Pi(a, iu+K', k') = \frac{\pi a u}{2KK'} + uZ(a+K',k') + aZ(u+K,k).$$

Fit enim:

$$\begin{aligned}
i\Pi(u, ia+K) &= iuZ(ia+K) + \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(ia+K-u)}{\Theta(ia+K+u)} \\
i\Pi(a, iu+K', k') &= iaZ(iu+K',k') + \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(iu+K'-a,k')}{\Theta(iu+K'+a,k')},
\end{aligned}$$

Iam fit:

$$\begin{aligned}
\frac{\Theta(ia+K-u)}{\Theta(0)} &= \frac{\Theta(i(a+iu)+K)}{\Theta(0)} = \sqrt{\frac{k}{k'}} \, e^{\frac{\pi(a+iu)^2}{4KK'}} \frac{\Theta(a+iu+K',k')}{\Theta(0,k')} \\
\frac{\Theta(ia+K+u)}{\Theta(0)} &= \frac{\Theta(i(a-iu)+K)}{\Theta(0)} = \sqrt{\frac{k}{k'}} \, e^{\frac{\pi(a-iu)^2}{4KK'}} \frac{\Theta(a-iu+K',k')}{\Theta(0,k')},
\end{aligned}$$

unde, cum sit $\Theta(u+K) = \Theta(K-u)$:

$$\frac{\Theta(ia+K-u)}{\Theta(ia+K+u)} = e^{\frac{i\pi a u}{KK'}} \frac{\Theta(iu+K'+a,k')}{\Theta(iu+K'-a,k')},$$

ideoque:

$$\frac{i}{2} \log \frac{\Theta(ia+K-u)}{\Theta(ia+K+u)} + \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(iu+K'-a,k')}{\Theta(iu+K'+a,k')} = -\frac{\pi a u}{2KK'}.$$

Porro fit:

$$\begin{aligned}
iuZ(ia+K) &= \frac{\pi a u}{2KK'} + uZ(a+K',k') \\
iaZ(iu+K',k') &= \frac{\pi a u}{2KK'} + aZ(u+K,k),
\end{aligned}$$

unde:

$$i\Pi(u, ia+K) + i\Pi(a, iu+K', k') = \frac{\pi a u}{2KK'} + uZ(a+K',k') + aZ(u+K,k),$$

q. d. e.

60.

Patet e formulis:

$$\begin{aligned}
\sin \operatorname{am}(K+iu) &= \frac{1}{k} \Delta \operatorname{coam}(u,k') \\
\sin \operatorname{am}(u+iK') &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sin \operatorname{am} u},
\end{aligned}$$

argumentum u, quod, dum $\sin \operatorname{am} u$ a 0 usque ad 1 crescit, a 0 ad K transit, ubi $\sin \operatorname{am} u$ a 1 usque ad $\frac{1}{k}$ crescere pergat, imaginarium induere valorem formae $K+iv$, ita ut simul v a 0 usque ad K' crescat; deinde crescente

$\sin\operatorname{am} u$ a $\frac{1}{k}$ usque ad ∞, induere u formam $v+iK'$, ita ut simul v a K usque ad 0 decrescat*).

Hinc videmus, siquidem in tertia specie integralium ellipticorum, quae schemate contenta est:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)},$$

ponatur, uti fecimus, $n = -k^2\sin^2\operatorname{am} a$, quoties sit n negativum

$$\begin{array}{llll} \text{inter} & 0 \text{ et } -kk, & \text{poni debere} & n = -k^2\sin^2\operatorname{am} a \\ ,, & -kk \text{ et } -1, & ,, \quad ,, & n = -k^2\sin^2\operatorname{am}(ia+K) \\ ,, & -1 \text{ et } -\infty, & ,, \quad ,, & n = -k^2\sin^2\operatorname{am}(a+iK'), \end{array}$$

designante a quantitatem realem. Porro cum sit $-kk\sin^2\operatorname{am} ia = kk\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(a,k')$, patet, quoties sit n positivum quodlibet, poni debere:

$$n = -kk\sin^2\operatorname{am} ia.$$

Hinc quatuor classes integralium ellipticorum tertiae speciei nacti sumus, quae respondent schematis, quae argumenta induunt:

$$1)\ a, \qquad 2)\ ia+K, \qquad 3)\ a+iK', \qquad 4)\ ia,$$

quarum tres primae pertinent ad n negativum, quarta ad positivum.

At per formulam (1.) $\S^{\text{i}}$ 58. videmus, functionem $\Pi(u, a+iK')$ reduci ad $\Pi(u,a)$, sive classem tertiam, in qua n est inter -1 et $-\infty$, reduci ad primam, in qua n est inter 0 et $-kk$. Porro e formula (11.) $\S^{\text{i}}$ 53.**), functionem $\Pi(u, ia)$ semper reduci ad $\Pi(u, ia+K)$, sive classem quartam, in qua n est positivum, ad secundam, in qua n est negativum inter $-kk$ et -1. Unde iam nacti sumus theorema, *propositum integrale:*

---

*) Obtinebitur simul:

$$\begin{array}{llllllll} \sin\operatorname{am} u = 0, & \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, & 1, & \frac{1}{\sqrt{k}}, & \frac{1}{k}, & \frac{\sqrt{1+k'}}{k}, & \infty \\ u = 0, & \frac{K}{2}, & K, & K+\frac{iK'}{2}, & K+iK', & \frac{K}{2}+iK', & iK'. \end{array}$$

**) Haec formula scilicet, posito ia loco a, in sequentem abit:

$$\frac{\Pi(u, ia+K) - \Pi(u, ia)}{i} = -\alpha u + \operatorname{arc\,tg}[\alpha \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{coam} u],$$

siquidem ponitur $\alpha = \frac{kk\operatorname{tg}\operatorname{am}(a,k')}{\Delta\operatorname{am}(a,k')}$. Quae facile per formulas elementares $\S^{\text{i}}$ 19. succedit transformatio.

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)},$$

quaecunque sit n quantitas realis positiva seu negativa, semper reduci posse ad integrale simile, in quo n negativum est inter 0 *et* -1. Quod est egregium inventum Cl$^{\text{i}}$. Legendre.

Iam vero consideremus casum generalem, quo et amplitudo et parameter formam habent imaginariam quamlibet: constat, eum casum amplecti expressionem:

$$\Pi(u+iv, a+ib),$$

designantibus u, v, a, b quantitates reales. At e formulis $\S^{\text{i}}$ 55. videmus, eiusmodi expressionem reduci ad quatuor hasce:

$$1)\ \Pi(u,a), \qquad 2)\ \Pi(iv,ib), \qquad 3)\ \Pi(u,ib), \qquad 4)\ \Pi(iv,a),$$

vel, si placet, ad quatuor hasce:

$$1)\ \Pi(u,a-K), \quad 2)\ \Pi(iv,ib+K), \quad 3)\ \Pi(u,ib+K), \quad 4)\ \Pi(iv,a-K).$$

Generaliter enim expressio $\Pi(u+v, a+b)$ in expressiones $\Pi(u,a)$, $\Pi(v,b)$, $\Pi(u,b)$, $\Pi(v,a)$ redit, e quibus quatuor propositae prodeunt, siquidem loco v ponis iv, loco a, b vero $a-K$ et $K+ib$. Porro e formulis (1.), (2.) $\S^{\text{i}}$ 59. fit:

$$\begin{aligned} \Pi(iv, ib+K) &= \quad \Pi(v, b+K', k') \\ \Pi(iv, a-K) &= -\Pi(v, ia+K', k'), \end{aligned}$$

unde expressiones 1), 2) in classem primam redeunt $\Pi(u,a)$, expressiones 3), 4) in classem secundam $\Pi(u, ia+K)$; id quod nobis suppeditat

Theorema.

Integrale propositum formae

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)},$$

quodcunque sit n et φ, sive reale sive imaginarium, revocari potest ad integralia similia, in quibus et φ reale et n reale negativum inter 0 *et* -1.

Et hoc theorema debetur Cl$^{\text{o}}$. Legendre, nisi quod ille reales tantum amplitudines contemplatus est.

Formulis (4.), (5.) $\S^{\text{i}}$ 55. reducitur $\Pi(u+v, a+b) + \Pi(u-v, a-b)$ ad $\Pi(u,a)$ et $\Pi(v,b)$, $\Pi(u+v, a+b) - \Pi(u-v, a-b)$ ad $\Pi(u,b)$ et $\Pi(v,a)$. Hinc patet, posito:

$$\Pi(u+iv, a+ib)+\Pi(u-iv, a-ib) = L$$
$$\frac{\Pi(u+iv, a+ib)-\Pi(u-iv, a-ib)}{i} = M,$$

pendere L a functionibus $\Pi(u, a-K)$, $\Pi(iv, ib+K)$, M a functionibus $\Pi(u, ib+K)$, $\Pi(iv, a-K)$, ideoque redire L in classem primam, M in classem secundam.

Haec sunt fundamenta theoriae tertiae speciei integralium ellipticorum, e principiis novis deducta. Alia infra videbuntur.

FUNCTIONES ELLIPTICAE SUNT FUNCTIONES FRACTAE. DE FUNCTIONIBUS H, Θ, QUAE NUMERATORIS ET DENOMINATORIS LOCUM TENENT.

61.

Evolutiones §. 35. exhibitae genuinam functionum ellipticarum naturam declarant, videlicet esse eas functiones fractas, ut quas iam ex elementis novimus, pro innumeris argumenti valoribus inter se diversis et evanescere et in infinitum abire. Iam antecedentibus ad functionem delati sumus, quae fractionis, in quam evolvimus ipsum

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

denominatorem constituit, functionem dico:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots]^2}.$$

Iam et numeratorem particulari charactere denotemus, atque ponamus:

$$\frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots]^2}$$

erit:

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}.$$

Reliquis advocatis evolutionibus §. 36. traditis, invenimus:

$$\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{H\left(\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$$

$$\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta\left(\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)},$$

unde, posito $\frac{2Kx}{\pi} = u$:

(1.) $\sin\mathrm{am}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H(u)}{\Theta(u)}$; $\cos\mathrm{am}\,u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{H(u+K)}{\Theta(u)}$; $\Delta\mathrm{am}\,u = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}$.

Hinc fluunt formulae speciales:

(2.) $\Theta(K) = \frac{\Theta(0)}{\sqrt{k'}}$; $H(K) = \sqrt{\frac{k}{k'}}\Theta(0)$.

Posito $H'(u) = \frac{dH(u)}{du}$, cum sit:

$$H'(u) = \sqrt{k}\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u\,\Theta(u)+\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\,u\,\Theta'(u),$$

pro valoribus $u = 0$, $u = K$ obtinemus:

(3.) $H'(0) = \sqrt{k}\,\Theta(0) = \frac{H(K)\Theta(0)}{\Theta(K)}$; $H'(K) = \sqrt{k}\,\Theta'(K) = 0$ *).

E (2.) sequitur adhuc:

(4.) $\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta(K)}$; $\sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta(K)}$.

Ceterum fit:

(5.) $\Theta(u+2K) = \Theta(-u) = \Theta(u)$

(6.) $H(u+2K) = H(-u) = -H(u)$; $H(u+4K) = H(u)$.

E formula (2.) §. 57.:

$$\Theta(u+iK') = ie^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}}\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\,u\,\Theta(u)$$

*) Fit enim $Z(K) = 0$, unde etiam $\Theta'(K) = \Theta(K)Z(K) = 0$.

sequitur:

$$\Theta(u+iK') = ie^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}} H(u). \tag{7.}$$

Mutato in hac formula u in $u+iK'$ et advocata (1.) §. 57.:

$$\Theta(u+2iK') = -e^{\frac{\pi(K'-iu)}{K}} \Theta(u), \tag{8.}$$

prodit:

$$H(u+iK') = ie^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}} \Theta(u), \tag{9.}$$

unde, rursus mutato u in $u+iK'$, e (7.):

$$H(u+2iK') = -e^{\frac{\pi(K'-iu)}{K}} H(u). \tag{10.}$$

E formulis (7.) — (10.) derivari possunt generaliores:

$$e^{\frac{\pi uu}{4KK'}} \Theta(u) = (-1)^m e^{\frac{\pi(u+2miK')^2}{4KK'}} \Theta(u+2miK') \tag{11.}$$

$$e^{\frac{\pi uu}{4KK'}} H(u) = (-1)^m e^{\frac{\pi(u+2miK')^2}{4KK'}} H(u+2miK') \tag{12.}$$

$$e^{\frac{\pi uu}{4KK'}} H(u) = (-i)^{2m+1} e^{\frac{\pi(u+(2m+1)iK')^2}{4KK'}} \Theta(u+(2m+1)iK') \tag{13.}$$

$$e^{\frac{\pi uu}{4KK'}} \Theta(u) = (-i)^{2m+1} e^{\frac{\pi(u+(2m+1)iK')^2}{4KK'}} H(u+(2m+1)iK'). \tag{14.}$$

E (12.), (13.) fit:

$$\Theta((2m+1)iK') = 0; \quad H(2miK') = 0. \tag{15.}$$

Formulae (5.), (6.) demonstrant, functiones $\Theta(u)$, $H(u)$, mutato u in $u+4K$, formulae (11.), (12.), functiones

$$e^{\frac{\pi uu}{4KK'}} \Theta(u), \quad e^{\frac{\pi uu}{4KK'}} H(u),$$

mutato u in $u+4iK'$, immutatas manere; unde illae cum functionibus ellipticis alteram periodum realem, hae alteram periodum imaginariam communem habent.

E formula (5.) §. 56.:

$$\frac{\Theta(iu,k)}{\Theta(0,k)} = e^{\frac{\pi uu}{4KK'}} \cos\operatorname{am}(u,k') \frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')}$$

sequitur:

$$\frac{H(iu,k)}{\Theta(0,k)} = \sqrt{k}\sin\operatorname{am}(iu,k) \frac{\Theta(iu,k)}{\Theta(0,k)} = ie^{\frac{\pi uu}{4KK'}} \sqrt{k}\sin\operatorname{am}(u,k') \frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')},$$

unde e (1.):

$$\frac{\Theta(iu,k)}{\Theta(0,k)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, e^{\frac{\pi uu}{4KK'}} \frac{H(u+K',k')}{\Theta(0,k')} \tag{16.}$$

$$\frac{H(iu,k)}{\Theta(0,k)} = i\sqrt{\frac{k}{k'}}\, e^{\frac{\pi uu}{4KK'}} \frac{H(u,k')}{\Theta(0,k')}. \tag{17.}$$

E (16.) sequitur, mutato u in iu et commutatis k et k':

$$\frac{H(iu+K,k)}{\Theta(0,k)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, e^{\frac{\pi uu}{4KK'}} \frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')}, \tag{18.}$$

cui adiungatur (9.) §. 57.:

$$\frac{\Theta(iu+K,k)}{\Theta(0,k)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, e^{\frac{\pi uu}{4KK'}} \frac{\Theta(u+K',k')}{\Theta(0,k')}. \tag{19.}$$

E formula supra inventa:

$$\Theta(u+v)\,\Theta(u-v) = \frac{\Theta^2(u)\,\Theta^2(v)}{\Theta^2(0)} (1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v)$$

sequitur:

$$\Theta(u+v)\,\Theta(u-v) = \frac{\Theta^2(u)\,\Theta^2(v)-H^2(u)\,H^2(v)}{\Theta^2(0)}. \tag{20.}$$

Qua ducta formula in:

$$k\sin\operatorname{am}(u+v)\sin\operatorname{am}(u-v) = \frac{k\sin^2\operatorname{am}u - k\sin^2\operatorname{am}v}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v} = \frac{H^2(u)\,\Theta^2(v)-\Theta^2(u)\,H^2(v)}{\Theta^2(u)\,\Theta^2(v)-H^2(u)\,H^2(v)},$$

prodit:

$$H(u+v)\,H(u-v) = \frac{H^2(u)\,\Theta^2(v)-\Theta^2(u)\,H^2(v)}{\Theta^2(0)}. \tag{21.}$$

DE EVOLUTIONE FUNCTIONUM H, Θ IN SERIES. EVOLUTIO TERTIA FUNCTIONUM ELLIPTICARUM.

62.

Evolvamus functiones:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^2}$$

$$\frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\dots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^2}$$

in series:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = A-2A'\cos 2x+2A''\cos 4x-2A'''\cos 6x+2A^{\mathrm{IV}}\cos 8x-\cdots$$

$$\frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = 2\sqrt[4]{q}[B'\sin x-B''\sin 3x+B'''\sin 5x-B^{\mathrm{IV}}\sin 7x+\cdots].$$

Determinationem ipsarum $A, A', A'', A''', \dots;$ $B', B'', B''', B^{\mathrm{IV}}, \dots$ nanciscimur ope aequationum (7.)—(10.) §i antecedentis, quae, posito $u = \frac{2Kx}{\pi}$, $q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$, in sequentes abeunt:

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = -qe^{2ix}\,\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+2iK'\right)$$

$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = -qe^{2ix}\,H\left(\frac{2Kx}{\pi}+2iK'\right)$$

$$i\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \sqrt[4]{q}\,e^{ix}\,H\left(\frac{2Kx}{\pi}+iK'\right)$$

$$iH\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \sqrt[4]{q}\,e^{ix}\,\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+iK'\right).$$

Quem in finem evolutiones propositas ita exhibemus:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = A-A'e^{2ix}+A''e^{4ix}-A'''e^{6ix}+A^{\mathrm{IV}}e^{8ix}-\dots$$
$$-A'e^{-2ix}+A''e^{-4ix}-A'''e^{-6ix}+A^{\mathrm{IV}}e^{-8ix}-\dots$$

$$\frac{iH\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = \sqrt[4]{q}[B'e^{ix}-B''e^{3ix}+B'''e^{5ix}-B^{\mathrm{IV}}e^{7ix}+\cdots]$$
$$-\sqrt[4]{q}[B'e^{-ix}-B''e^{-3ix}+B'''e^{-5ix}-B^{\mathrm{IV}}e^{-7ix}+\cdots].$$

Mutato x in $x-i\log q$, abit e^{mix} in $q^m e^{mix}$, e^{-mix} in $\frac{e^{-mix}}{q^m}$; porro $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, $H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ in $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+2iK'\right)$, $H\left(\frac{2Kx}{\pi}+2iK'\right)$. Hinc nanciscimur:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = -qe^{2ix}.\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+2iK'\right)}{\Theta(0)}$$
$$= \frac{A'}{q}-Aqe^{2ix}+A'q^3e^{4ix}-A''q^5e^{6ix}+A'''q^7e^{8ix}-\dots$$
$$-\frac{A''}{q^3}e^{-2ix}+\frac{A'''}{q^5}e^{-4ix}-\frac{A^{\mathrm{IV}}}{q^7}e^{-6ix}+\frac{A^{\mathrm{V}}}{q^9}e^{-8ix}-\dots$$

$$\frac{iH\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = -qe^{2ix}.\frac{iH\left(\frac{2Kx}{\pi}+2iK'\right)}{\Theta(0)}$$
$$= \sqrt[4]{q}\left\{B'e^{ix}-B'q^2e^{3ix}+B''q^4e^{5ix}-B'''q^6e^{7ix}+\cdots\right\}$$
$$-\sqrt[4]{q}\left\{\frac{B''}{q^2}e^{-ix}-\frac{B'''}{q^4}e^{-3ix}+\frac{B^{\mathrm{IV}}}{q^6}e^{-5ix}-\frac{B^{\mathrm{V}}}{q^8}e^{-7ix}+\cdots\right\}.$$

Quibus cum expressionibus propositis comparatis, eruimus:

$$A' = Aq,\quad A'' = A'q^3,\quad A''' = A''q^5,\quad A^{\mathrm{IV}} = A'''q^7,\dots,$$
$$B'' = B'q^2,\quad B''' = B''q^4,\quad B^{\mathrm{IV}} = B'''q^6,\quad B^{\mathrm{V}} = B^{\mathrm{IV}}q^8,\dots$$

ideoque:

$$A' = Aq,\quad A'' = Aq^4,\quad A''' = Aq^9,\quad A^{\mathrm{IV}} = Aq^{16},\dots,$$
$$B'' = B'q^2,\quad B''' = B'q^6,\quad B^{\mathrm{IV}} = B'q^{12},\quad B^{\mathrm{V}} = B'q^{20},\dots,$$

unde evolutiones quaesitae fiunt:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = A[1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots]$$

$$\frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = 2\sqrt[4]{q}\,B'[\sin x-q^2\sin 3x+q^{2.3}\sin 5x-q^{3.4}\sin 7x+q^{4.5}\sin 9x-\cdots]$$
$$= B'[2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x+\cdots].$$

Evolutiones inventas alteram ex altera derivare licuisset ope formulae:

$$iH\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \sqrt[4]{q}\,e^{ix}\,\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+iK'\right).$$

Inventa enim serie:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = A[1-q(e^{2ix}+e^{-2ix})+q^4(e^{4ix}+e^{-4ix})-q^9(e^{6ix}+e^{-6ix})+\cdots],$$

mutando x in $x-i\log\sqrt{q}$, quo facto e^{2mix}, e^{-2mix} abeunt in $q^m e^{2mix}$, $\frac{e^{-2mix}}{q^m}$, $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ in $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+iK'\right)$, et multiplicando per $\sqrt[4]{q}\,e^{ix}$, obtinemus:

$$\frac{iH\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = \sqrt[4]{q}\,e^{ix}\,\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+iK'\right)}{\Theta(0)}$$

$$= A[\sqrt[4]{q}(e^{ix}-e^{-ix})-\sqrt[4]{q^9}(e^{3ix}-e^{-3ix})+\sqrt[4]{q^{25}}(e^{5ix}-e^{-5ix})-\cdots]$$

sive:

$$\frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)} = A[2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x+\cdots].$$

Qua insuper analysi eruimus:

$$B' = A.$$

63.

Determinatio ipsius A artificia particularia poscit. Ponamus, quod ex antecedentibus licet:

$$(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots$$
$$= P(q)[1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots]$$
$$\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots$$
$$= P(q)[\sin x-q^{1\cdot 2}\sin 3x+q^{2\cdot 3}\sin 5x-q^{3\cdot 4}\sin 7x+q^{4\cdot 5}\sin 9x-\cdots];$$

fit:

$$A = \frac{P(q)}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2}.$$

Expressio secunda immutata manet, ubi ducitur in primam, et post factum productum ponitur q^2 loco q. Hinc obtinemus aequationem identicam:

$$P(q^2)\,P(q^2)[\sin x-q^4\sin 3x+q^{12}\sin 5x-q^{24}\sin 7x+\cdots]$$
$$\times[1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-2q^{18}\cos 6x+\cdots]$$
$$= P(q)[\sin x-q^2\sin 3x+q^6\sin 5x-q^{12}\sin 7x+\cdots].$$

Ipsam iam instituamus multiplicationem, ita ut ubique loco $2\sin mx\cos nx$ scri-

batur $\sin(m+n)x+\sin(m-n)x$: facile patet, coefficientem ipsius $\sin x$ in producto evoluto fore:

$$1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots,$$

ita ut prodeat:

$$\frac{P(q)}{P(q^2)\,P(q^2)} = 1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots$$

At invenimus e secunda formularum propositarum, posito $x = \frac{\pi}{2}$:

$$[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^2 = P(q)[1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots],$$

unde:

$$\frac{P(q)\,P(q)}{P(q^2)\,P(q^2)} = [(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^2$$

sive:

$$\frac{P(q)}{P(q^2)} = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots$$
$$= \frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}.$$

Hinc e methodo iam saepius adhibita *) sequitur:

$$P(q) = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}.$$

Hinc tandem provenit:

$$A = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}\cdot\frac{1}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2}$$
$$= \frac{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}$$

sive ex iis, quas §. 36. dedimus, evolutionibus:

$$\frac{1}{A} = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}.$$

Quantitatem illam, quam hactenus indeterminatam reliquimus, $\Theta(0)$ ponamus iam:

$$\Theta(0) = \frac{1}{A} = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

invenitur:

(1.) $$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots$$

(2.) $$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x+\cdots$$

*) Videlicet ponendo successive q^2, q^4, q^8, $q^{16}\ldots$ loco q et instituendo multiplicationem infinitam.

64.

Aequationem identicam, quam antecedentibus comprobatum ivimus:

$$(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots$$
$$=\frac{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots}$$

alia adhuc via, a praecedente omnino diversa, investigare placet. Quem in finem tamquam lemmata antemittamus formulas duas sequentes:

$$(1.)\qquad (1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)(1+q^7z)\dots$$
$$=1+\frac{qz}{1-q^2}+\frac{q^4z^2}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^9z^3}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\frac{q^{16}z^4}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)}+\cdots$$

$$(2.)\qquad \frac{1}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)(1-q^4z)\dots}$$
$$=1+\frac{q}{1-q}\cdot\frac{z}{1-qz}+\frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)}\cdot\frac{z^2}{(1-qz)(1-q^2z)}$$
$$+\frac{q^9}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}\cdot\frac{z^3}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)}+\cdots$$

Ad demonstrationem prioris observo, expressionem:

$$(1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)(1+q^7z)\dots,$$

posito q^2z loco z et multiplicatione facta per $(1+qz)$, immutatam manere; unde, posito:

$$(1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)\dots = 1+A'z+A''z^2+A'''z^3+\cdots,$$

eruitur:

$$1+A'z+A''z^2+A'''z^3+\cdots = (1+qz)(1+A'q^2z+A''q^4z^2+A'''q^6z^3+\cdots)$$

ideoque, facta evolutione:

$$A' = q+q^2A',\quad A'' = q^3A'+q^4A'',\quad A''' = q^5A''+q^6A''',\ \dots$$

sive:

$$A' = \frac{q}{1-q^2},\quad A'' = \frac{q^3A'}{1-q^4},\quad A''' = \frac{q^5A''}{1-q^6},\dots,$$

unde:

$$A' = \frac{q}{1-q^2},\quad A'' = \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)},\quad A''' = \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)},\dots,$$

sicut propositum est.

Ad demonstrationem formulae (2.) observo, expressionem:

$$\frac{1}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)(1-q^4z)\dots},$$

posito qz loco z et multiplicatione facta per $\frac{1}{1-qz}$, immutatam manere; unde, posito:

$$\frac{1}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)(1-q^4z)\dots}$$
$$=1+\frac{A'z}{1-qz}+\frac{A''z^2}{(1-qz)(1-q^2z)}+\frac{A'''z^3}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)}+\cdots,$$

obtinemus:

$$1+\frac{A'z}{1-qz}+\frac{A''z^2}{(1-qz)(1-q^2z)}+\frac{A'''z^3}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-qz}+\frac{A'qz}{(1-qz)(1-q^2z)}+\frac{A''q^2z^2}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)}+\frac{A'''q^3z^3}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)(1-q^4z)}+\cdots$$
$$=1+\frac{(q+A'q)z}{1-qz}+\frac{(q^3A'+q^2A'')z^2}{(1-qz)(1-q^2z)}+\frac{(q^5A''+q^3A''')z^3}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)}+\cdots\text{*)}.$$

Hinc fluit:

$$A' = q+A'q,\quad A'' = q^3A'+q^2A'',\qquad A''' = q^5A''+q^3A''',\dots$$

ideoque:

$$A' = \frac{q}{1-q},\quad A'' = \frac{q^3A'}{1-q^2},\qquad A''' = \frac{q^5A''}{1-q^3},\dots,$$

unde:

$$A' = \frac{q}{1-q},\quad A'' = \frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)},\quad A''' = \frac{q^9}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)},\dots,$$

sicuti propositum est.

Iam formemus productum:

$$\Big\{(1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)\cdots\Big\}\Big\{\Big(1+\frac{q}{z}\Big)\Big(1+\frac{q^3}{z}\Big)\Big(1+\frac{q^5}{z}\Big)\cdots\Big\}$$
$$=\Big\{1+\frac{q}{1-q^2}\,z+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}\,z^2+\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}\,z^3+\cdots\Big\}$$
$$\times\Big\{1+\frac{q}{1-q^2}\,\frac{1}{z}+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}\,\frac{1}{z^2}+\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}\,\frac{1}{z^3}+\cdots\Big\}.$$

Coefficientem ipsius z^n sive etiam $\frac{1}{z^n}$, quem ponemus $B^{(n)}$, eruimus sequentem:

*) Substituendo scilicet in singulis terminis resp. $\frac{1}{1-qz} = 1+\frac{qz}{1-qz}$, $\frac{1}{1-q^2z} = 1+\frac{q^2z}{1-q^2z}$, $\frac{1}{1-q^3z} = 1+\frac{q^3z}{1-q^3z}$, etc.

$$B^{(n)} = \frac{q^{nn}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}$$
$$\times \left\{ \begin{array}{l} 1+\dfrac{q^2}{1-q^2}\cdot\dfrac{q^{2n}}{1-q^{2n+2}}+\dfrac{q^8}{(1-q^2)(1-q^4)}\cdot\dfrac{q^{4n}}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})} \\ +\dfrac{q^{18}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}\cdot\dfrac{q^{6n}}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})(1-q^{2n+6})}+\cdots \end{array} \right\}.$$

At e formula (2.), posito q^2 loco q et $z = q^{2n}$, expressionem, quae uncis inclusa conspicitur, invenimus

$$= \frac{1}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})(1-q^{2n+6})(1-q^{2n+8})\cdots},$$

unde:

$$B^{(n)} = \frac{q^{nn}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\cdots}$$

ideoque:

$$\left\{(1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)\cdots\right\}\left\{\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\left(1+\frac{q^5}{z}\right)\cdots\right\}$$
$$= \frac{1+q\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+q^9\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\cdots}$$

sive, posito $z = e^{2ix}$ et mutato q in $-q$:

$$(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots$$
$$= \frac{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\cdots}.$$

Quod demonstrandum erat.

Ubi ponitur $-qz^2$ loco z atque per $\sqrt[4]{q}\,z$ multiplicatur, prodit:

$$\sqrt[4]{q}\left(z-\frac{1}{z}\right)\left\{(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)(1-q^6z^2)\cdots\right\}\left\{\left(1-\frac{q^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{q^4}{z^2}\right)\left(1-\frac{q^6}{z^2}\right)\cdots\right\}$$
$$= \frac{\sqrt[4]{q}\left(z-\frac{1}{z}\right)-\sqrt[4]{q^9}\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)+\sqrt[4]{q^{25}}\left(z^5-\frac{1}{z^5}\right)-\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\cdots}$$

sive, posito $z = e^{ix}$:

$$2\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\cdots$$
$$= \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x+\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\cdots},$$

quae est altera evolutio inventa.

65.

Evolutiones functionum:

$$(1.)\qquad \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots$$

$$(2.)\qquad H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x+\cdots$$

sponte ad evolutionem novam functionum ellipticarum ducunt. Etenim e formulis (1.) §. 61., ponendo $u = \frac{2Kx}{\pi}$, obtinemus:

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{H\left(\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$$

$$\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta\left(\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)},$$

unde:

$$(3.)\qquad \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots}$$

$$(4.)\qquad \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+2\sqrt[4]{q^{49}}\cos 7x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots}$$

$$(5.)\qquad \Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\cdot\frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots}.$$

Porro e (2.), (3.) §. 61., cum positum sit $\Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$, obtinemus:

$$\Theta(K) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},\quad H(K) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},\quad \Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},\quad H'(0) = \sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}},$$

unde e (1.), (2.):

$$(6.)\qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+\cdots$$

$$(7.)\qquad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+2\sqrt[4]{q^{49}}+2\sqrt[4]{q^{81}}+\cdots$$

$$(8.)\qquad \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = 1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-2q^{25}+\cdots$$

$$(9.)\qquad \sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3} = 2\sqrt[4]{q}-6\sqrt[4]{q^9}+10\sqrt[4]{q^{25}}-14\sqrt[4]{q^{49}}+18\sqrt[4]{q^{81}}-\cdots\text{*)},$$

unde etiam:

$$(10.)\qquad \sqrt{k} = \frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+2\sqrt[4]{q^{49}}+2\sqrt[4]{q^{81}}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots}$$

$$(11.)\qquad \sqrt{k'} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-2q^{25}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+\cdots}.$$

Fit porro, cum sit $Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$, $\Pi(u,a) = uZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$:

$$(12.)\qquad \frac{2K}{\pi}\cdot Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{4q\sin 2x-8q^4\sin 4x+12q^9\sin 6x-16q^{16}\sin 8x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots}$$

$$(13.)\qquad \Pi\left(\frac{2Kx}{\pi},\frac{2KA}{\pi}\right)$$

$$= \frac{2Kx}{\pi}\cdot Z\left(\frac{2KA}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\log\frac{1-2q\cos 2(x-A)+2q^4\cos 4(x-A)-2q^9\cos 6(x-A)+\cdots}{1-2q\cos 2(x+A)+2q^4\cos 4(x+A)-2q^9\cos 6(x+A)+\cdots}.$$

Quae est evolutio tertia functionum ellipticarum.

66.

Ex evolutionibus inventis:

$$(1.)\qquad [(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots](1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots$$
$$= 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots$$
$$[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots]\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\cdots$$
$$= \sin x-q^2\sin 3x+q^6\sin 5x-q^{12}\sin 7x+q^{20}\sin 9x-\cdots,$$

quarum postremam, posito $\sqrt{q}$ loco q, ita quoque exhibere licet:

$$(2.)\qquad [(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots]\sin x(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\cdots$$
$$= \sin x-q\sin 3x+q^3\sin 5x-q^6\sin 7x+q^{10}\sin 9x-q^{15}\sin 11x+\cdots,$$

sequitur, posito $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$:

*) Etenim, cum sit $\frac{dH}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{dH}{du}$, differentiata (2.) secundum x et posito deinde $x=0$, prodit $\frac{2K}{\pi}H'(0) = \sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}$

$$(3.)\qquad \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\cdots} = 1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots$$

$$(4.)\qquad \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\cdots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\cdots} = 1+q+q^3+q^6+q^{10}+q^{15}+\cdots$$

$$(5.)\qquad [(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots]^3 = 1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\cdots$$

Ponamus in (2.) $x=\frac{\pi}{3}$, fit $\sin x = +\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sin 3x = 0$, $\sin 5x = -\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sin 7x = +\sqrt{\frac{3}{4}}$, etc.; porro $(1-q)(1-2q\cos 2x+q^2) = 1-q^3$, unde (2.) in hanc abit formulam:

$$(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)(1-q^{12})\cdots = 1-q^3-q^6+q^{15}+q^{21}-q^{36}-\cdots$$

sive:

$$(6.)\qquad (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots = 1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-\cdots,$$

cuius seriei terminus generalis est:

$$(-1)^n q^{\frac{3nn\pm n}{2}}.$$

Comparatis inter se (5.), (6.), obtinemus:

$$(7.)\qquad [1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-\cdots]^3 = 1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\cdots,$$

Formulam (4.) etiam Cl. Gauss invenit in commentatione: ***Summatio serierum quarundam singularium.*** Comm. Gott. Vol. I. a. 1808—1811. Quam ille deduxit e sequente formula memorabili:

$$(8.)\qquad \frac{(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)(1-q^7z)\cdots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\cdots}$$
$$= 1+\frac{q(1-z)}{1-q}+\frac{q^3(1-z)(1-qz)}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^6(1-z)(1-qz)(1-q^2z)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots,$$

posito $z=q$. Cui addi possunt formulae similes, quarum demonstrationem hoc loco omitto:

$$(9.)\qquad \frac{1}{2}\frac{(1+z)(1+qz)(1+q^2z)\cdots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots}+\frac{1}{2}\frac{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)\cdots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots}$$
$$= 1-\frac{q(1-z^2)}{1-q^2}+\frac{q^4(1-z^2)(1-q^2z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots$$

$$(10.)\qquad \frac{q}{2z}\frac{(1+z)(1+qz)(1+q^2z)\cdots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots}-\frac{q}{2z}\frac{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)\cdots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots}$$
$$= q-\frac{q^4(1-z^2)}{1-q^2}+\frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^{16}(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots,$$

quarum (9.), posito $z=q$, praebet:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots}=1-q+q^4-q^9+\cdots$$

sive:

$$\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\dots}=1-2q+2q^4-2q^9+\cdots,$$

quae est formula (3.).

Formula (6.), quae profundissimae indaginis est, ut quae a trisectione functionum ellipticarum pendet, iam e longo tempore a Cl°. Euler inventa est et luculenter demonstrata. De qua insigni demonstratione alibi nobis fusius agendum erit.

His addamus evolutiones sequentes:

$$(11.)\quad \frac{\sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}=\frac{2\sqrt[4]{q}\,[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots]^2}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}$$

$$=\frac{2\sqrt[4]{q}\,(1-q^2)}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{2\sqrt[4]{q^9}\,(1-q^6)}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\frac{2\sqrt[4]{q^{25}}\,(1-q^{10})}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}}-\dots$$

$$(12.)\quad \frac{\sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}}{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}=\frac{[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots]^2}{\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\dots}$$

$$=\frac{1}{\sin x}-\frac{4q^2(1+q^2)\sin x}{1-2q^2\cos 2x+q^4}+\frac{4q^6(1+q^4)\sin x}{1-2q^4\cos 2x+q^8}-\frac{4q^{12}(1+q^6)\sin x}{1-2q^6\cos 2x+q^{12}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{\sin x}\left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)}{1-2q^2\cos 2x+q^4}-\frac{q^2(1-q^4)(1-q^8)}{1-2q^4\cos 2x+q^8}+\frac{q^6(1-q^6)(1-q^{12})}{1-2q^6\cos 2x+q^{12}}-\dots\right\},$$

quae e nota theoria resolutionis fractionum compositarum in simplices facile obtinentur.

Hinc deducuntur evolutiones speciales:

$$(13.)\quad \frac{2kK}{\pi}=4\sqrt{q}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)-4\sqrt{q^9}\left(\frac{1+q^6}{1-q^6}\right)+4\sqrt{q^{25}}\left(\frac{1+q^{10}}{1-q^{10}}\right)-\cdots$$

$$(14.)\quad \frac{2k'K}{\pi}=1-\frac{4q}{1+q}+\frac{4q^3}{1+q^2}-\frac{4q^6}{1+q^3}+\frac{4q^{10}}{1+q^4}-\cdots$$

Quibus cum evolutionibus expressionum $\frac{2kK}{\pi}$, $\frac{2k'K}{\pi}$ supra exhibitis comparatis, prodit

$$\frac{\sqrt{q}}{1-q}-\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}+\frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}-\frac{\sqrt{q^7}}{1-q^7}+\cdots=\sqrt{q}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)-\sqrt{q^9}\left(\frac{1+q^6}{1-q^6}\right)+\sqrt{q^{25}}\left(\frac{1+q^{10}}{1-q^{10}}\right)-\cdots$$

$$1-\frac{4q}{1+q}+\frac{4q^3}{1+q^3}-\frac{4q^5}{1+q^5}+\frac{4q^7}{1+q^7}-\cdots=1-\frac{4q}{1+q}+\frac{4q^3}{1+q^2}-\frac{4q^6}{1+q^3}+\frac{4q^{10}}{1+q^4}-\cdots$$

Simili modo Cl. Clausen nuper observavit *), seriem:

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^4}{1-q^4}+\cdots$$

transformari posse in hanc:

$$q\left(\frac{1+q}{1-q}\right)+q^4\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)+q^9\left(\frac{1+q^3}{1-q^3}\right)+q^{16}\left(\frac{1+q^4}{1-q^4}\right)+\cdots$$

Invenimus supra evolutiones ipsorum $\frac{2K}{\pi}$, $\frac{2kK}{\pi}$ eorumque dignitatum secundae, tertiae, quartae in series. Quae igitur evolutiones dignitatis secundae, quartae, sextae, octavae expressionum:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots$$

$$\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}=2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+2\sqrt[4]{q^{49}}+\cdots$$

suppeditant, unde varia theoremata arithmetica fluunt. Ita exempli gratia e formula:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2=\{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots\}^4$$

$$=1+8\left\{\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1+q^2}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\frac{4q^4}{1+q^4}+\cdots\right\}$$

$$=1+8\Sigma\varphi(p)\{q^p+3q^{2p}+3q^{4p}+3q^{8p}+\cdots\},$$

ubi p numerus impar quilibet, $\varphi(p)$ summa factorum ipsius p, fluit tamquam corollarium theorema inclytum Fermatianum, numerum unumquemque esse summam quatuor quadratorum.

---

*) Crelle Journal etc. Tom. III. pag. 95.

ADDITION

AU MÉMOIRE DE M. ABEL

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

VOL. II. P. 101 DU JOURNAL DE M. CRELLE

PAR

M. C. G. J. JACOBI

A KŒNIGSBERG.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 3. p. 85.

ADDITION
AU MÉMOIRE DE M. ABEL SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

VOL. II. P. 101 DU JOURNAL DE M. CRELLE.

M. Abel dans son excellent Mémoire sur les fonctions elliptiques a prouvé le premier, que les équations du degré nn, desquelles dépend la division d'une fonction elliptique de première espèce en n parties, peuvent être résolues algébriquement. Cependant la méthode de cet auteur est susceptible d'une grande simplification. Je veux la proposer ici en deux mots, en me servant de la notation de M. Abel.

Si l'on désigne par p, q deux racines quelconques de l'équation $x^{2n+1}-1=0$, on aura l'expression

$$\sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \varphi\left(\beta+\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}\right)p^m q^\mu$$

égale à une expression de la forme

$$\sqrt[2n+1]{A+Bf((2n+1)\beta)F((2n+1)\beta)}\,,$$

A et B étant des fonctions rationnelles et entières de $\varphi((2n+1)\beta)$. Or, en donnant à p et q toutes leurs valeurs possibles, on pourra au moyen de ces expressions, qui seront au nombre de $(2n+1)^2$, exprimer linéairement toutes les racines, sans avoir besoin de résoudre encore une équation du $n^{ième}$ degré. Aussi on saura exprimer toutes les racines au moyen des puissances entières de deux de ces expressions.

Kœnigsberg, 25. Janvier 1828.

NOTE
SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE DONNÉ
EN QUATRE CARRÉS

PAR

M. C. G. J. JACOBI
PROF. EN PHIL. A KŒNIGSBERG.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 3. p. 191.

NOTE SUR LA DECOMPOSITION D'UN NOMBRE DONNE EN QUATRE CARRÉS.

Soit n un nombre impair quelconque, on sait que $4n$ peut être décomposé en quatre carrés impairs.

S'il s'agit de tous les quatre nombres possibles a, b, c, d, tels que $a^2+b^2+c^2+d^2=4n$, une même décomposition en quatre carrés différents entre eux donnera $24=1.2.3.4$ manières de déterminer a, b, c, d. Si deux de ces carrés sont égaux, ce nombre se réduit à $12=\frac{1.2.3.4}{1.2}$. Si encore les deux autres sont égaux, le nombre sera $6=\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2}$, et il sera $4=\frac{1.2.3.4}{1.2.3}$, si trois des quatre carrés sont égaux; enfin il sera 1, si les carrés sont égaux tous les quatre.

Cela posé, je tire de la *théorie des fonctions elliptiques* le théorème suivant:

Soit n un nombre impair quelconque, si l'on peut trouver de m manières quatre nombres impairs a, b, c, d tels que $a^2+b^2+c^2+d^2=4n$, en ayant attention de compter une même solution autant de fois que les quatre carrés peuvent être permutés entre eux, m sera égal à la somme des facteurs du nombre n. Donc si, par exemple, n est un nombre premier, on aura $m=n+1$.

Soit par exemple $n=15$, on a $4.15=60=1+1+3^2+7^2=5^2+5^2+1+3^2$. Puisque deux carrés dans ces deux solutions sont égaux entre eux, on a $m=12+12=24$.

Ce théorème remarquable parait être assez difficile à démontrer par les méthodes connues de la théorie des nombres. La démonstration fournie par la théorie des fonctions elliptiques est entièrement analytique.

24. Avril 1828.

NOTICES

SUR

LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

M. C. G. J. JACOBI

PROF. EN PHIL. A KŒNIGSBERG.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik,
Bd. 3. p. 192—195, 303—310, 403—404, Bd. 4. p. 185—193.

NOTE SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

(Extrait d'une lettre à M. Crelle.)

Je commence par rappeler ma notation à la mémoire. Soit

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u,$$

je désigne l'amplitude φ par $\varphi = \mathrm{am}\,u$. Puis je suppose

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = K, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} = K',$$

où $k^2+k'^2 = 1$, k' étant le complément de k.

Cela posé, si l'on fait $e^{\frac{-K'\pi}{K}} = q$, je trouve entre autres:

$$(1.) \qquad \sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \frac{q^{\frac{1}{4}}\sin x - q^{\frac{9}{4}}\sin 3x + q^{\frac{25}{4}}\sin 5x - q^{\frac{49}{4}}\sin 7x + \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \cdots}.$$

Voilà encore d'autres formules:

$$(2.) \qquad \cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = 2\sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{q^{\frac{1}{4}}\cos x + q^{\frac{9}{4}}\cos 3x + q^{\frac{25}{4}}\cos 5x + q^{\frac{49}{4}}\cos 7x + \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \cdots},$$

$$(3.) \sqrt{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \sqrt{k'} \cdot \frac{1+2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x + \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \cdots},$$

$$(4.) \qquad \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sin\frac{x}{2} + q\sin\frac{3x}{2} - q^3\sin\frac{5x}{2} - q^6\sin\frac{7x}{2} + q^{10}\sin\frac{9x}{2} + \cdots}{\cos\frac{x}{2} - q\cos\frac{3x}{2} - q^3\cos\frac{5x}{2} + q^6\cos\frac{7x}{2} + q^{10}\cos\frac{9x}{2} - \cdots}.$$

Les exposants des coefficients des trois premières formules sont les nombres carrés, ceux de la dernière formule les nombres trigonaux. Donc les séries convergent si rapidement, que leur calcul est très-aisé.

De $q = e^{\frac{-K'\pi}{K}}$ on tire les séries suivantes pour k et K:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+\cdots$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{k} = \frac{q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+q^{\frac{49}{4}}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+\cdots}.$$

Je passe sous silence d'autres formules. Dans l'état actuel des choses on peut dire qu'une série soit sommée, si elle a été réduite aux fonctions elliptiques.

L'analyse se trouve extrèmement enrichie par là. Euler, par exemple, remarque dans son *Introductio*, chapitre *de partitione numerorum* que le produit $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots$ est égal à

$$1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+q^{22}+\cdots,$$

où les exposants sont les nombres pentagonaux, résultat qu'il a démontré dans les *Acta Petrop.*, qui m'a toujours paru très-remarquable et qui était un fait isolé dans l'analyse. Cette série peut être sommée par les fonctions elliptiques. Si $q = e^{\frac{-K'\pi}{K}}$, je trouve:

$$\sqrt[24]{\frac{k^2}{q}}\sqrt[3]{2k'}\sqrt{\frac{K}{\pi}}.$$

Il existe encore nombre de résultats semblables.

D'ici on peut jeter un beau coup d'oeil sur la théorie de la transformation. Je ferai voir dans un mémoire plus étendu, non encore fini à mon grand regret, qu'un module donné peut toujours être transformé en $n+1$ autres, au moyen d'une substitution qui se rapporte au nombre n, ce nombre étant premier (voyez ma première lettre à M. Schumacher, no. 123. de son journal d'astronomie)*). Je trouve ces $n+1$ modules et les expressions qui s'y rapportent, en mettant

$$q^n,\ q^{\frac{1}{n}},\ \alpha q^{\frac{1}{n}},\ \alpha^2 q^{\frac{1}{n}},\ \alpha^3 q^{\frac{1}{n}},\ldots\ \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}} \text{ au lieu de } q, \text{ où } \alpha^n = 1.$$

Deux seulement de ces modules sont réels. Ils sont:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda} = \frac{q^{\frac{n}{4}}+q^{\frac{9n}{4}}+q^{\frac{25n}{4}}+q^{\frac{49n}{4}}+\cdots}{1+2q^n+2q^{4n}+2q^{9n}+2q^{16n}+\cdots},\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda} = \frac{q^{\frac{1}{4n}}+q^{\frac{9}{4n}}+q^{\frac{25}{4n}}+q^{\frac{49}{4n}}+\cdots}{1+2q^{\frac{1}{n}}+2q^{\frac{4}{n}}+2q^{\frac{9}{n}}+2q^{\frac{16}{n}}+\cdots},$$

où λ est le module transformé. Si n n'est pas premier, il y en a encore plusieurs.

*) Voir p. 31 de ce volume.

Le résultat suivant entre autres me semble remarquable. Il existe toujours une équation différentielle du troisième ordre entre deux modules k et λ, tels qu'ils peuvent être transformés l'un dans l'autre. Voici cette équation:

$$3\left(\frac{d^2\lambda}{dk^2}\right)^2 - 2\frac{d\lambda}{dk}\cdot\frac{d^3\lambda}{dk^3} + \left(\frac{d\lambda}{dk}\right)^2\left\{\left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2 - \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dk}\right)^2\right\} = 0,$$

où dk est constant. On voit que cette équation différentielle admet un nombre infini de solutions algébriques, savoir toutes les équations algébriques entre les modules qui se rapportent aux transformations de divers ordres. Mais ce ne sont qué des solutions particulières. Ce sont les transcendantes elliptiques, qui offrent la solution générale. Si l'on suppose

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}} = \Lambda, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda'^2\sin^2\varphi}} = \Lambda',$$

où $\lambda^2+\lambda'^2 = 1$, comme ci-dessus, on a:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{mK+m'K'}{pK+p'K'},$$

où m, m', p, p' sont des constantes arbitraires. Ces équations aux modules qui, d'après ce qui a été dit plus haut, s'élèvent au degré $n+1$, n étant un nombre premier, ont trois propriétés essentielles. Elles restent invariables,

1) si l'on change k et λ,
2) en posant k' et λ' au lieu de k et λ,
3) en mettant $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{\lambda}$ au lieu de k et λ.

Il est d'ailleurs remarquable, qu'elles prennent la forme la plus simple pour la racine quatrième des modules. Si par exemple on met $\sqrt[4]{k} = u$, $\sqrt[4]{\lambda} = v$, on trouve:

$$u^4-v^4-2uv(1-u^2v^2) = 0, \quad \text{pour } n = 3,$$
$$u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)-4uv(1-u^4v^4) = 0, \quad \text{pour } n = 5.$$

Donc il faut que ces équations satisfassent à l'équation différentielle rapportée ci-dessus.

J'ajoute encore une remarque.

M. Abel a proposé tome II. page 286. du Journal de M. Crelle le théorème suivant:

„Si l'équation différentielle séparée

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}},$$

où α, β, γ, δ, ε, a sont réelles, est algébriquement intégrable, il faut nécessairement, que la quantité a soit un nombre rationnel.“

On voit sans peine que ce théorème est semblable à celui de la trigonométrie analytique, savoir que n doit être un nombre rationnel, si l'on veut que $\sin nx$ puisse être exprimé algébriquement par $\sin x$. Mais il faut étendre ce théorème beaucoup plus pour les fonctions elliptiques. Il existe un nombre infini d'échelles de modules pour lesquelles a peut aussi avoir la forme $a+b\sqrt{-1}$. Ce sont tous ceux, où le module par la transformation se change dans son complément. Un de ces modules par exemple est $k=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Cette nouvelle méthode pour la multiplication est encore remarquable, parcequ'elle a lieu dans les cas, où la transformation rentre dans la multiplication, c'est-à-dire où le module transformé devient égal à celui d'où l'on est parti. Par exemple pour $n=5$, $k=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $u=\sqrt[8]{\tfrac{1}{2}}$, on trouve que l'équation

$$u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)-4uv(1-u^4v^4) = 0$$

a la racine $v=(1+\sqrt{-1})u^5$, d'où l'on tire $v^8=\lambda^2=\tfrac{1}{2}$, de sorte qu'on a ici $\lambda^2=k^2$. Tout cela découle immédiatement des principes établis par M. Abel.

Kœnigsberg, 2. Avril 1828.

SUITE DES NOTICES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

(Extrait d'une lettre à M. Crelle.)

J'ajoute aux formules données dans ma dernière lettre les développements des fonctions elliptiques de seconde et de troisième espèce.

Soit, en adoptant la notation de M. Legendre,

$$\Delta=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},\quad E(\varphi)=\int_0^{\varphi}\Delta\,d\varphi,\quad E^1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\,d\varphi,\quad F(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta},\quad F^1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta},$$

de manière que F^1 soit ce que je désigne par K: si l'on met

$$\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi},\qquad q = e^{\frac{-K'\pi}{K}},$$

conformément à la notation dont j'ai coutume de me servir pour ma part, on aura:

$$(1.)\quad F^1E(\varphi)-E^1F(\varphi) = 2\pi\,\frac{q\sin 2x-2q^4\sin 4x+3q^9\sin 6x-4q^{16}\sin 8x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots}$$

$$= 2\pi\left\{\frac{q\sin 2x}{1-q^2}+\frac{q^2\sin 4x}{1-q^4}+\frac{q^3\sin 6x}{1-q^6}+\cdots\right\}.$$

M. Legendre a démontré que l'expression suivante, dépendante des fonctions elliptiques de seconde et de troisième espèce:

$$(2.)\qquad \int_0^{\varphi}\frac{2k^2\sin A\cos A\,\Delta A\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2 A\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}-\frac{2F(\varphi)}{F^1}\big(F^1E(A)-E^1F(A)\big),$$

reste la même si l'on échange entre eux les angles A et φ. Si l'on met $\varphi=\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, $A=\operatorname{am}\frac{2K\alpha}{\pi}$, je trouve qu'elle est égale à

$$\log\frac{1-2q\cos 2(x-\alpha)+2q^4\cos 4(x-\alpha)-2q^9\cos 6(x-\alpha)+\cdots}{1-2q\cos 2(x+\alpha)+2q^4\cos 4(x+\alpha)-2q^9\cos 6(x+\alpha)+\cdots}$$

$$= -4\left\{\frac{q\sin 2\alpha\sin 2x}{1-q^2}+\frac{q^2\sin 4\alpha\sin 4x}{2(1-q^4)}+\frac{q^3\sin 6\alpha\sin 6x}{3(1-q^6)}+\cdots\right\},$$

formules symétriques en α et x, et dont la première embrasse tous les cas des fonctions elliptiques de troisième espèce, pourvu qu'on donne à α des valeurs réelles ou imaginaires quelconques.

On peut remplacer les fonctions elliptiques par la nouvelle transcendante:

$$1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\cdots = \Theta(x).$$

Si l'on met $-\log q = \frac{\pi K'}{K} = \omega$, $i=\sqrt{-1}$, on aura:

$$\text{(3.)} \qquad \Theta(x+\pi) = \Theta(x),$$

$$\text{(4.)} \qquad \Theta(x+i\omega) = -\frac{e^{-2ix}}{q}\Theta(x),$$

$$\text{(5.)} \qquad \Theta\left(\frac{i\omega}{2}\right) = 0,$$

$$\text{(6.)} \qquad \Theta\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \Theta(x,-q).$$

Soit

$$-i\sqrt[4]{q}.e^{ix}\Theta\left(x+\frac{i\omega}{2}\right) = i\sqrt[4]{q}.e^{-ix}\Theta\left(x-\frac{i\omega}{2}\right) = \mathrm{H}(x),$$

on aura:

$$\mathrm{H}(x) = 2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x+\cdots$$

On aura de plus:

$$\text{(7.)} \qquad \mathrm{H}(x+\pi) = -\mathrm{H}(x),$$

$$\text{(8.)} \qquad \mathrm{H}\left(x+\frac{i\omega}{2}\right) = \frac{ie^{-ix}}{\sqrt[4]{q}}\Theta(x),$$

$$\text{(9.)} \qquad \Theta\left(x+\frac{i\omega}{2}\right) = \frac{ie^{-ix}}{\sqrt[4]{q}}\mathrm{H}(x),$$

$$\text{(10.)} \qquad \mathrm{H}(i\omega) = 0,$$

$$\text{(11.)} \qquad \mathrm{H}(x+i\omega) = -\frac{e^{-2ix}}{q}\mathrm{H}(x).$$

Les fonctions elliptiques peuvent être exprimées par les fonctions $\Theta(x)$ et $\mathrm{H}(x)$ qu'on peut réduire à une seule, au moyen des formules:

$$\text{(12.)} \qquad \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},$$

$$\text{(13.)} \qquad \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\mathrm{H}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta(x)},$$

$$\text{(14.)} \qquad \Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta(x)}.$$

Les constantes k, k', K se trouvent à l'aide des formules:

$$\text{(15.)} \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots$$

$$\text{(16.)} \qquad \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = \Theta(0) = 1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots$$

$$\text{(17.)} \qquad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = \sqrt[4]{q}.\Theta\left(\frac{\pi}{2}+i\omega\right) = \mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots$$

La fonction elliptique de troisième espèce (2.) devient simplement:

$$\log\frac{\Theta(x-\alpha)}{\Theta(x+\alpha)}.$$

On tire de l'équation (12.) les deux autres (13.), (14.), le théorème d'Euler sur la sommation des fonctions elliptiques, l'équation différentielle

$$d\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2K}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,dx$$

et quantité d'autres formules, à l'aide de l'équation identique:

$$\text{(18.)} \qquad \mathrm{H}(x,q)\,\Theta(X,q)-\mathrm{H}(X,q)\,\Theta(x,q) = \mathrm{H}\left(\frac{x-X}{2},\sqrt{q}\right)\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x+X}{2},\sqrt{q}\right),$$

ou en d'autres termes:

$$\begin{aligned}\text{(19.)}\ & [\sqrt[4]{q}\sin x-\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots][1-2q\cos 2X+2q^4\cos 4X-2q^9\cos 6X+\cdots]\\ & -[\sqrt[4]{q}\sin X-\sqrt[4]{q^9}\sin 3X+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5X-\cdots][1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots]\\ & = 2\left[\sqrt[8]{q}\sin\frac{x-X}{2}-\sqrt[8]{q^9}\sin\frac{3(x-X)}{2}+\sqrt[8]{q^{25}}\sin\frac{5(x-X)}{2}-\cdots\right]\\ & \times\left[\sqrt[8]{q}\cos\frac{x+X}{2}+\sqrt[8]{q^9}\cos\frac{3(x+X)}{2}+\sqrt[8]{q^{25}}\cos\frac{5(x+X)}{2}+\cdots\right],\end{aligned}$$

équation remarquable et facile à démontrer au moyen des premiers éléments de la trigonométrie.

Les fonctions $\Theta(x)$ et $\mathrm{H}(x)$ peuvent être résolues en facteurs. On trouve

$$\Theta(x) = C(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots$$

$$\mathrm{H}(x) = 2\sqrt[4]{q}\,C\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots,$$

C étant une constante. En appliquant seulement à ces formules le théorème de Côtes, on trouve sur-le-champ la théorie générale de la transformation et de la multiplication des fonctions Θ ou H, et par suite en même temps celle des fonctions elliptiques. En effet, on a suivant le théorème de Côtes, n étant un nombre impair quelconque:

$$\Theta(x)\,\Theta\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\Theta\left(x+\frac{4\pi}{n}\right)\cdots\Theta\left(x+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = C'\Theta(nx,q^n) \tag{20.}$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{H}(x)\,\mathrm{H}\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\mathrm{H}\left(x+\frac{4\pi}{n}\right)\cdots\mathrm{H}\left(x+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = C'\mathrm{H}(nx,q^n), \tag{21.}$$

C' étant une autre constante. Nommons $K^{(n)}$, $k^{(n)}$ les quantités qui dépendent de la même manière de q^n que K, k de q: on tire de la formule

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(x,q)}{\Theta(x,q)}$$

la suivante:

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{2K^{(n)}x}{\pi},k^{(n)}\right) = \frac{1}{\sqrt{k^{(n)}}}\,\frac{\mathrm{H}(x,q^n)}{\Theta(x,q^n)}.$$

Cela posé, les équations (20.), (21.) étant divisées l'une par l'autre, on en tire:

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{2nK^{(n)}x}{\pi},k^{(n)}\right)$$

$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{k^n}{k^{(n)}}}\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\sin\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{4\pi}{n}\right)\cdots\sin\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right),$$

formule générale pour la transformation des fonctions elliptiques, telle que je l'ai établie le premier. On trouve d'une manière analogue les autres transformations réelles ou imaginaires attachées au nombre n.

Puisque les fonctions elliptiques s'expriment aisément à l'aide de la fonction $\Theta(x)$, on peut essayer réciproquement d'exprimer celle-ci par les fonctions elliptiques. On y parvient en intégrant l'équation (1.). Cela donne:

$$\log\frac{\Theta(x)}{\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}} = \int_0^{\varphi}\frac{F^1E(\varphi)-E^1F(\varphi)}{F^1\Delta\varphi}\,d\varphi, \tag{22.}$$

φ étant toujours l'amplitude de $\frac{2Kx}{\pi}$. On peut aussi exprimer la fonction $\log\frac{\Theta(x)}{\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}}$ au moyen d'une intégrale définie. En effet, la formule (2.) donne

$$-\log\frac{\Theta(2\alpha)}{\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}} = \int_0^A\frac{2k^2\sin A\cos A\,\Delta A\sin^2\varphi}{(1-k^2\sin^2 A\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}\,d\varphi-2\frac{F(A)}{F^1}\left(F^1E(A)-E^1F(A)\right). \tag{23.}$$

Passons à d'autres objets. Étant mis, comme ci-dessus,

$$\omega = -\log q = \frac{\pi K'}{K},$$

on a

$$\Theta(x) = 1-2e^{-\varpi}\cos 2x+2e^{-4\varpi}\cos 4x-2e^{-9\varpi}\cos 6x+\cdots$$

$$\mathrm{H}(x) = 2e^{-\frac{\varpi}{4}}\sin x-2e^{-\frac{9\varpi}{4}}\sin 3x+2e^{-\frac{25\varpi}{4}}\sin 5x-2e^{-\frac{49\varpi}{4}}\sin 7x+\cdots.$$

De là on tire

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 4\frac{\partial\Theta}{\partial\omega},\quad \frac{\partial^2\mathrm{H}}{\partial x^2} = 4\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\omega}. \tag{24.}$$

Il existe entre les deux intégrales $z=\Theta$, $z=\mathrm{H}$ de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4\frac{\partial z}{\partial\omega}$ la relation

$$\mathrm{H}(x) = ie^{-\left(ix+\frac{\varpi}{4}\right)}\Theta\left(x-\frac{i\omega}{2}\right),$$

$$\Theta(x) = ie^{-\left(ix+\frac{\varpi}{4}\right)}\mathrm{H}\left(x-\frac{i\omega}{2}\right).$$

Généralement $z=\mathfrak{S}(x)$ étant une intégrale de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4\frac{\partial z}{\partial\omega}$, une autre sera

$$z = e^{-\left(ix+\frac{\varpi}{4}\right)}\mathfrak{S}\left(x-\frac{i\omega}{2}\right),$$

théorème facile à vérifier.

Soit

$$u = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = 1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots$$

$$v = \sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3} = 2\sqrt[4]{q}-6\sqrt[4]{q^9}+10\sqrt[4]{q^{25}}-14\sqrt[4]{q^{49}}+\cdots,$$

on tire des équations $\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 4\frac{\partial\Theta}{\partial\omega}$, $\frac{\partial^2\mathrm{H}}{\partial x^2} = 4\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\omega}$ les développements suivants de Θ et de H, savoir:

$$\Theta = u+\frac{(2x)^2}{2}\frac{du}{d\omega}+\frac{(2x)^4}{2.3.4}\frac{d^2u}{d\omega^2}+\frac{(2x)^6}{2.3.4.5.6}\frac{d^3u}{d\omega^3}+\cdots \tag{25.}$$

$$2H = 2xv + \frac{(2x)^3}{2.3}\frac{dv}{d\omega} + \frac{(2x)^5}{2.3.4.5}\frac{d^2v}{d\omega^2} + \frac{(2x)^7}{2.3.4.5.6.7}\frac{d^3v}{d\omega^3} + \cdots \tag{26.}$$

Cela donne:

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{2xv + \frac{(2x)^3}{2.3}\frac{dv}{d\omega} + \frac{(2x)^5}{2.3.4.5}\frac{d^2v}{d\omega^2} + \frac{(2x)^7}{2.3.4.5.6.7}\frac{d^3v}{d\omega^3} + \cdots}{u + \frac{(2x)^2}{2}\frac{du}{d\omega} + \frac{(2x)^4}{2.3.4}\frac{d^2u}{d\omega^2} + \frac{(2x)^6}{2.3.4.5.6}\frac{d^3u}{d\omega^3} + \cdots}. \tag{27.}$$

On trouve les valeurs de $\frac{d^n u}{d\omega^n}$, $\frac{d^n v}{d\omega^n}$ au moyen de la formule:

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{-2}{k(1-k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2} \tag{28.}$$

qui se déduit aisément des formules connues.

M. Poisson, dans ses savantes recherches sur les intégrales définies, a fait connaître plusieurs propriétés de la fonction $\Theta(x)$. Les méthodes délicates, propres à cet illustre géomètre, trouvent une belle vérification dans la théorie des fonctions elliptiques. Par exemple M. Poisson démontre dans le dix-neuvième cahier du Journal de l'école polytechnique la formule remarquable:

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1+2e^{-\pi x}+2e^{-4\pi x}+2e^{-9\pi x}+2e^{-16\pi x}+\cdots}{1+2e^{-\frac{\pi}{x}}+2e^{-\frac{4\pi}{x}}+2e^{-\frac{9\pi}{x}}+2e^{-\frac{16\pi}{x}}+\cdots}.$$

Soit $x = \frac{K'}{K}$, en mettant au lieu du module k son complément $k' = \sqrt{1-k^2}$, x deviendra $\frac{K}{K'} = \frac{1}{x}$. Or on a:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots$$
$$= 1+2e^{-\pi x}+2e^{-4\pi x}+2e^{-9\pi x}+2e^{-16\pi x}+\cdots,$$

et par suite, en changeant k en k':

$$\sqrt{\frac{2K'}{\pi}} = 1+2e^{-\frac{\pi}{x}}+2e^{-\frac{4\pi}{x}}+2e^{-\frac{9\pi}{x}}+2e^{-\frac{16\pi}{x}}+\cdots$$

De là on tire sur-le-champ la formule de M. Poisson.

Nous ferons encore quelques remarques sur la théorie de la transformation. Le module k étant changé en λ par une transformation attachée au nombre n, on aura une équation algébrique entre k et λ dont le degré, relatif à l'une ou

l'autre des deux variables, est égal à la somme des facteurs du nombre n. On trouve toutes les valeurs de $\sqrt{\lambda}$ en mettant dans l'équation

$$\sqrt{k} = \frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^{16}+\cdots}$$

$q^{\frac{a'}{a}}$ au lieu de q, aa' étant égal au nombre n. Soit

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{\mathfrak{M}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

l'équation différentielle à laquelle on satisfait par une expression rationnelle de y en x, dans laquelle x monte jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ puissance: on pourra exprimer $\mathfrak{M}$ rationnellement en k et λ au moyen de la formule générale

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{n(k-k^3)\,d\lambda}{(\lambda-\lambda^3)\,dk}.$$

Éliminant λ au moyen de l'équation modulaire, on aura une équation du même degré entre k et $\mathfrak{M}$. Ces équations entre k et $\mathfrak{M}$ jouissent d'une propriété remarquable. Savoir, n étant un nombre premier quelconque, on peut exprimer linéairement la moitié des valeurs de $\sqrt{\mathfrak{M}}$ au moyen de l'autre moitié. En effet si l'on désigne par $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \mathfrak{M}''', \ldots, \mathfrak{M}^{(n)}$ les racines de l'équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré trouvée entre $\mathfrak{M}$ et k, on aura:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathfrak{M}} &= \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n}\,.\,A,\\
\sqrt{\mathfrak{M}'} &= A + A' + A'' + A''' + \cdots + A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)},\\
\sqrt{\mathfrak{M}''} &= A + \alpha A' + \alpha^4 A'' + \alpha^9 A''' + \cdots + \alpha^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)},\\
\sqrt{\mathfrak{M}'''} &= A + \beta A' + \beta^4 A'' + \beta^9 A''' + \cdots + \beta^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

α, β, etc. étant les racines imaginaires de l'équation $x^n = 1$. Donc on peut exprimer linéairement les racines carrées des $n+1$ racines par d'autres quantités dont le nombre n'est que $\frac{n+1}{2}$. Cela donne le théorème énoncé, un des plus importants dans la théorie algébrique de la transformation et de la division des fonctions elliptiques. On aura le même théorème par rapport aux équations qui donnent $\lambda\mathfrak{M}$, $\lambda'\mathfrak{M}$, etc. en k. Une équation semblable pour $n = 5$, $x = \lambda\mathfrak{M}$ est:

$$x^6 - 10kx^5 + 35k^2x^4 - 60k^3x^3 + 55k^4x^2 - [26k^5 + 256(k-k^3)]x + 5k^6 = 0.$$

Si l'on fait $x = y + k$, cette équation se change en l'équation plus simple:

$$y^6 - 4ky^5 - 256(k - k^3)(y + k) = 0.$$

On pourra satisfaire par l'analyse des fonctions elliptiques à une demande d'Euler à l'égard du théorème de Fermat, que tout nombre entier est la somme de quatre nombres carrés: savoir de démontrer que la quatrième puissance d'une série

$$A + A'q + A''q^4 + A'''q^9 + A^{\text{IV}}q^{16} + \cdots$$

puisse contenir toutes les puissances de q. En effet je trouve:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 &= [1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots]^4 \\
&= 1 + \frac{8q}{1-q} + \frac{16q^2}{1+q^2} + \frac{24q^3}{1-q^3} + \frac{32q^4}{1+q^4} + \cdots \\
&= 1 + \frac{8q}{(1-q)^2} + \frac{8q^2}{(1+q^2)^2} + \frac{8q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{8q^4}{(1+q^4)^2} + \cdots \\
&= 1 + 8\Sigma\varphi(p)[q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + 3q^{16p} + 3q^{32p} + \cdots],
\end{aligned}$$

p étant un nombre impair quelconque et $\varphi(p)$ la somme des facteurs du nombre p; formule dont le théorème de Fermat est un corollaire. On tire encore de cette formule et d'autres semblables des théorèmes sur le nombre de toutes les décompositions possibles d'un nombre donné en quatre nombres carrés. Un théorème semblable a été proposé dans le deuxième cahier p. 191 du troisième volume de votre Journal*). En examinant avec attention l'algorithme de l'analyse qui conduit à ces résultats remarquables, on parviendra à établir de nouvelles méthodes dans la théorie des nombres.

Les fonctions elliptiques diffèrent essentiellement des transcendantes ordinaires. Elles ont une manière d'être pour ainsi dire absolue. Leur caractère principal est d'embrasser tout ce qu'il y a de périodique dans l'analyse. En effet, les fonctions trigonométriques ayant une période réelle, les exponentielles une période imaginaire, les fonctions elliptiques embrassent les deux cas, puisqu'on a en même temps

$$\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}(u + 4K) &= \sin\operatorname{am} u \\
\sin\operatorname{am}(u + 2iK') &= \sin\operatorname{am} u,
\end{aligned}$$

i étant $= \sqrt{-1}$. D'ailleurs on démontre aisément qu'une fonction analytique

*) Voir p. 247 de ce volume.

ne saurait avoir plus de deux périodes, l'une réelle et l'autre imaginaire ou l'une et l'autre imaginaires. Ce dernier cas répond à un module k imaginaire. Le quotient $\frac{K'}{K}$ des deux périodes d'une fonction proposée détermine le module k des fonctions elliptiques par lesquelles elle doit être exprimée au moyen des formules (15.), (17.). Il conviendra peut-être d'introduire dans l'analyse des fonctions elliptiques ce quotient $\frac{K'}{K}$ comme module au lieu de k. À l'égard de ce quotient j'ai trouvé:

que k ne change pas de valeur, si l'on écrit au lieu de $\frac{K'}{K}$ l'expression

$$\frac{1}{i}\,\frac{bK + ib'K'}{aK + ia'K'} = \frac{KK' - i(abKK + a'b'K'K')}{aaKK + a'a'K'K'},$$

a, a', b, b' étant des nombres entiers quelconques, a un nombre impair, b un nombre pair, tels que $ab' - a'b = 1$;

théorème remarquable et qui doit être envisagé comme un des théorèmes fondamentaux de l'analyse des fonctions elliptiques.

Les méthodes qui m'ont conduit à la théorie générale de la transformation des fonctions elliptiques s'appliquent également à une classe très-étendue d'intégrales doubles, triples, et même d'intégrales multiples d'un ordre quelconque. Un premier essai sur cette matière épineuse à été donné dans un petit mémoire qui a pour titre:

De singulari quadam duplicis integralis transformatione,

inséré dans le second volume de votre Journal.

Vous voyez, Monsieur, que la théorie des fonctions elliptiques est un vaste objet de recherches qui dans le cours de ses développements embrasse presque toute l'algèbre, la théorie des intégrales définies et la science des nombres. Quel titre de gloire pour l'illustre auteur du *Traité des fonctions elliptiques*, que d'avoir créé cette belle théorie et d'avoir allumé ce flambeau à la postérité.

Kœnigsberg, 21. Juillet 1828.

SUITE DES NOTICES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. Les formules données dans le troisième cahier vol. 3. de ce Journal*) contiennent la découverte importante, *que les fonctions elliptiques de troisième espèce, dans lesquelles entrent trois variables, peuvent être ramenées à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux.* De là on tire aisément toute la théorie des fonctions elliptiques de troisième espèce.

II. Soit $q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$, $q' = e^{\frac{-\pi K}{K'}}$, de sorte que l'on trouve q' en place de q, en mettant k' au lieu de k, ou en changeant le module et son complément. Si l'on met

$$\Theta(x,q) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots$$
$$\mathrm{H}(x,q) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \cdots,$$

on aura:

$$\Theta(ix,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{Kxx}{\pi K'}}\, \mathrm{H}\left(\frac{Kx}{K'} + \frac{\pi}{2}, q'\right),$$
$$\mathrm{H}(ix,q) = i\sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{Kxx}{\pi K'}}\, \mathrm{H}\left(\frac{Kx}{K'}, q'\right),$$

i étant toujours $= \sqrt{-1}$, formules très-remarquables. On pourra déduire l'une de l'autre au moyen de la formule $\sin\mathrm{am}(iu,k) = i\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}(u,k')$.

III. Je suis parvenu à résoudre un problème dont la difficulté avait éludé long-temps tous mes efforts, savoir de trouver l'expression générale et algébrique des formules de multiplication. En effet, on sait qu'en supposant $z = \sin\mathrm{am}\,nu$, $x = \sin\mathrm{am}\,u$, n étant un nombre impair quelconque, on a:

*) Voir p. 255 de ce volume.

$$z = \frac{A'x + A'''x^3 + A^{\mathrm{v}}x^5 + \cdots + A^{(nn)}x^{nn}}{1 + A''x^2 + A^{\mathrm{IV}}x^4 + \cdots + A^{(nn-1)}x^{nn-1}} = \frac{U}{V},$$

$A', A'', A''', \ldots$ étant des fonctions rationnelles et entières de k. On peut aussi trouver successivement pour chaque valeur donnée de n, par exemple pour $n = 3, 5, 7, \ldots$, les expressions de U et de V; mais trouver généralement pour un nombre indéfini n les valeurs algébriques de $A', A'', A''', \ldots$ en k, est un problème, où toutes les méthodes connues paraissent être en défaut. Or, $z = \frac{U}{V}$ étant une substitution rationnelle quelconque qui sert ou à la transformation ou à la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce, je suis parvenu à sommer par parties le numérateur et le dénominateur de la substitution à faire et à définir l'un et l'autre au moyen d'une équation aux différences partielles entre x et k. Dans le cas de la multiplication on tire de cette équation les expressions générales de $A', A'', A''', \ldots$. On trouve par exemple:

$$A'' = 0, \quad A^{\mathrm{IV}} = -\frac{n^2(n^2-1)k^2}{3.4}, \quad A^{\mathrm{VI}} = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)k^2(1+k^2)}{3.5.6},$$
$$A^{\mathrm{VIII}} = -\frac{2n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)k^2(1+k^4)}{3.3.5.7.8} - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(17n^2-69)k^4}{3.3.4.5.7.8},$$

etc. etc. etc.

On trouve très-facilement chaque terme $A^{(m)}$ par les deux termes $A^{(m-2)}, A^{(m-4)}$ qui le précèdent. En vertu d'une remarque faite dans une autre occasion, savoir qu'étant mis $\frac{1}{kx}$ au lieu de x, z se change en $\frac{1}{\lambda z}$, λ étant le module transformé, on tire aussitôt le numérateur U du dénominateur et réciproquement. Le cas de n pair ne demande que quelques légères modifications.

Kœnigsberg le 3. Oct. 1828.

SUITE DES NOTICES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I.

Je vais rapporter ici l'équation aux différences partielles qui sert à définir les substitutions à faire pour parvenir à une transformation des fonctions elliptiques, et dont j'ai donné la notice dans le troisième volume de ce Journal *).

Soit, en faisant usage de la notation dont je me sers ordinairement,

$$x = \sqrt{k}\,\sin\operatorname{am}(u,k); \quad y = \sqrt{\lambda}\,\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}},\lambda\right),$$

λ étant le module dans lequel se change le module k par la transformation correspondante à un nombre n impair, on sait qu'on a

$$(-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} y = \frac{x\{B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} + B^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}x^2 + \cdots + Bx^{n-1}\}}{B + B'x^2 + B''x^4 + \cdots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}},$$

les quantités λ, M, B, B', ... $B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ étant déterminées convenablement en fonctions de k. On aura ici

$$B = \sqrt{\frac{\lambda'}{k'\mathrm{M}}}, \quad B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\lambda\lambda'}{kk'\mathrm{M}^3}}.$$

Soit

$$U = x\{B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} + B^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}x^2 + \cdots + Bx^{n-1}\},$$

$$V = B + B'x^2 + B''x^4 + \cdots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}$$

et de plus $\alpha = \frac{1+kk}{k}$, les fonctions U, V satisferont l'une et l'autre à l'équation aux différences partielles suivante:

*) Voir p. 264 de ce volume.

$$(1.) \quad n(n-1)x^2z + (n-1)(\alpha x - 2x^3)\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - \alpha x^2 + x^4)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2n(\alpha\alpha - 4)\frac{\partial z}{\partial \alpha}.$$

L'équation modulaire étant supposée connue, l'équation (1.) suffit pour trouver toutes les quantités B, B', ... $B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ exprimées en fonctions rationnelles des deux modules k et λ. On pourra donc dire en quelque sorte que cette équation contienne la solution générale du problème de la transformation des fonctions elliptiques, et sous une forme tout à fait différente de celle sous laquelle nous l'avons fait connaître, M. Abel et moi, dans nos recherches sur cette matière. Elle donne aussi d'une manière directe les formules relatives à la multiplication. En effet, étant supposé $x = \sqrt{k}\,\sin\operatorname{am} u$, $y = \sqrt{k}\,\sin\operatorname{am} nu$, si l'on met:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} y = \frac{Bx^{nn} + B'x^{nn-2} + B''x^{nn-4} + \cdots + B^{\left(\frac{nn-1}{2}\right)}x}{B + B'x^2 + B''x^4 + \cdots + B^{\left(\frac{nn-1}{2}\right)}x^{nn-1}},$$

on trouve:

$$\begin{aligned}
B = \sqrt{n}, \quad B' &= 0, \\
n^2(n^2-1)B + \quad * \quad + 3.4\,B'' &= 0, \\
* \quad + 4(n^2-4)\alpha B'' + 5.6\,B''' &= 0, \\
(n^2-4)(n^2-5)B'' + 6(n^2-6)\alpha B''' + 7.8\,B^{\mathrm{IV}} &= 2n^2(\alpha\alpha-4)\frac{\partial B'''}{\partial \alpha}, \\
(n^2-6)(n^2-7)B''' + 8(n^2-8)\alpha B^{\mathrm{IV}} + 9.10\,B^{\mathrm{V}} &= 2n^2(\alpha\alpha-4)\frac{\partial B^{\mathrm{IV}}}{\partial \alpha}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
5.4B^{\left(\frac{nn-5}{2}\right)} + (n^2-3)3\alpha B^{\left(\frac{nn-3}{2}\right)} + (n^2-2)(n^2-1)B^{\left(\frac{nn-1}{2}\right)} &= 2n^2(\alpha\alpha-4)\frac{\partial B^{\left(\frac{nn-3}{2}\right)}}{\partial \alpha}, \\
3.2B^{\left(\frac{nn-3}{2}\right)} + (n^2-1)\alpha B^{\left(\frac{nn-1}{2}\right)} + \quad * \quad &= 0, \\
B^{\left(\frac{nn-1}{2}\right)} &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n^3}.
\end{aligned}$$

On tire aisément de ces équations les valeurs de $B, B', B'', \ldots B^{\left(\frac{nn-1}{2}\right)}$, soit en partant de $B = \sqrt{n}$ ou de $B^{\left(\frac{nn-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n^3}$. Tout cela s'applique aussi, de légères modifications étant faites, au cas où n est un nombre pair.

Il est très-remarquable que l'équation (1.) ait des intégrales algébriques. Son intégration générale peut être réduite à celle de l'équation connue et plus simple:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial z}{\partial \omega}.$$

En effet soit $z = \psi(v, \omega)$ une intégrale quelconque de celle-ci, si l'on met $x = \sqrt{k}\sin\varphi$, on aura, en employant la notation de M. Legendre, l'intégrale suivante de l'équation (1.):

$$z = \frac{\psi\left(\frac{n\pi F(\varphi)}{2F^1}, \frac{n\pi F^1(k')}{4F^1}\right)}{\sqrt{k'F^1}\, e^{n\int_0^\varphi \frac{F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)}{F^1 \Delta\varphi} d\varphi}}.$$

II.

Supposant $x = \sin\operatorname{am} u$, les quantités $\sin\operatorname{am} 2u$, $\sin\operatorname{am} 3u$, $\sin\operatorname{am} 4u$, ... peuvent être exprimées d'une manière assez remarquable au moyen des différentielles des quantités $\sqrt{x^2(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, $\sqrt{\frac{(1-x^2)(1-k^2x^2)}{x^2}}$, prises par rapport à x^2. Soit:

$$\sqrt{x^2(1-x^2)(1-k^2x^2)} = A, \quad \sqrt{\frac{(1-x^2)(1-k^2x^2)}{x^2}} = B,$$

on trouve:

$$\sin\operatorname{am} 2u = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{\frac{dB}{d(x^2)}},$$

$$\sin\operatorname{am} 3u = -x^3\frac{\frac{d^2B}{d(x^2)^2}}{\frac{d^2A}{d(x^2)^2}},$$

$$\sin\operatorname{am} 4u = -\frac{1}{x^4}\frac{\frac{1}{2.3}\frac{d^3A}{d(x^2)^3}}{\frac{1}{2}\frac{d^2B}{d(x^2)^2}\frac{1}{2}\frac{d^2B}{d(x^2)^2} - \frac{dB}{d(x^2)}\frac{1}{2.3}\frac{d^3B}{d(x^2)^3}},$$

$$\sin\operatorname{am} 5u = x^5\cdot\frac{\frac{1}{2.3}\frac{d^3B}{d(x^2)^3}\frac{1}{2.3}\frac{d^3B}{d(x^2)^3} - \frac{1}{2}\frac{d^2B}{d(x^2)^2}\frac{1}{2.3.4}\frac{d^4B}{d(x^2)^4}}{\frac{1}{2.3}\frac{d^3A}{d(x^2)^3}\frac{1}{2.3}\frac{d^3A}{d(x^2)^3} - \frac{1}{2}\frac{d^2A}{d(x^2)^2}\frac{1}{2.3.4}\frac{d^4A}{d(x^2)^4}},$$

. . . .

La loi générale de la composition de ces expressions est aisée à saisir. On aura des formules analogues si l'on veut employer au lieu des différentielles de

$$\sqrt{x^2(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad \sqrt{\frac{(1-x^2)(1-k^2x^2)}{x^2}}$$

celles des quantités:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)(1-k^2x^2)}{x^2}}}.$$

III.

Nous allons établir dans ce qui suit les formules générales relatives à la transformation des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce.

Soit n un nombre impair quelconque, ω une quantité telle que $\sin\operatorname{am} 2n\omega = 0$ et soit en même temps n le nombre le plus petit pour lequel $\sin\operatorname{am} 2n\omega$ s'évanouit, si l'on met

$$\lambda = k^n\{\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega \ldots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega\}^4,$$

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega \ldots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega}{\sin\operatorname{am} 2\omega \sin\operatorname{am} 4\omega \ldots \sin\operatorname{am}(n-1)\omega}\right\}^2,$$

on a la formule connue:

$$(1.)\quad \frac{\lambda}{kM}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \sin\operatorname{am} u + \sin\operatorname{am}(u+4\omega) + \sin\operatorname{am}(u+8\omega) + \cdots + \sin\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega).$$

Cela posé, je remarque qu'on a:

$$\sin^2\operatorname{am}(u+a') - \sin^2\operatorname{am}(u+a) = \sin\operatorname{am}(a'-a)\frac{d\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+a')}{du},$$

formule facile à vérifier. Soit $a' = a+b$, $a'' = a+2b$, et généralement $a^{(m)} = a+mb$; en mettant successivement a', a''; a'', a'''; ... $a^{(n-1)}, a^{(n)}$ au lieu de a, a' et ajoutant, il vient:

$$\sin^2\operatorname{am}(u+a^{(n)}) - \sin^2\operatorname{am}(u+a) = \sin\operatorname{am} b\cdot\frac{d\Sigma\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+a')}{du}.$$

Or, on a en même temps:

$$\sin^2\operatorname{am}(u+a^{(n)}) - \sin^2\operatorname{am}(u+a) = \sin\operatorname{am} nb\cdot\frac{d\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+a^{(n)})}{du};$$

de là on tire, en intégrant, cette formule remarquable:

$$(2.)\quad \sin\operatorname{am} b\,\Sigma\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+a') = \sin\operatorname{am} nb\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+a^{(n)}) + \text{const.}$$

Soit $\sin\operatorname{am} nb = 0$, il vient:

$$(3.)\quad \Sigma\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+a') = \text{const.}$$

Au moyen de cette formule on tire de la formule (1.) la suivante:

$$\frac{\lambda^2}{k^2M^2}\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sin^2\mathrm{am}\,u + \sin^2\mathrm{am}(u+4\omega) + \cdots + \sin^2\mathrm{am}(u+4(n-1)\omega) + \text{const.},$$

ou, puisqu'on a $\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = 0$ pour $u = 0$, celle qui suit:

$$(4.)\quad \frac{\lambda^2}{k^2M^2}\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sin^2\mathrm{am}\,u + \sin^2\mathrm{am}(u+4\omega) + \cdots + \sin^2\mathrm{am}(u+4(n-1)\omega)$$
$$-2[\sin^2\mathrm{am}\,4\omega + \sin^2\mathrm{am}\,8\omega + \cdots + \sin^2\mathrm{am}\,2(n-1)\omega].$$

Cela donne aussi:

$$(5.)\quad \frac{\lambda^2}{k^2M^2}\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \cos^2\mathrm{am}\,u + \cos^2\mathrm{am}(u+4\omega) + \cdots + \cos^2\mathrm{am}(u+4(n-1)\omega)$$
$$-2[\cos^2\mathrm{coam}\,4\omega + \cos^2\mathrm{coam}\,8\omega + \cdots + \cos^2\mathrm{coam}\,2(n-1)\omega],$$

$$(6.)\quad \frac{1}{M^2}\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \Delta^2\mathrm{am}\,u + \Delta^2\mathrm{am}(u+4\omega) + \cdots + \Delta^2\mathrm{am}(u+4(n-1)\omega)$$
$$+2[\mathrm{cotg}^2\mathrm{am}\,4\omega + \mathrm{cotg}^2\mathrm{am}\,8\omega + \cdots + \mathrm{cotg}^2\mathrm{am}\,2(n-1)\omega].$$

En intégrant on a, pour la fonction complète de la seconde espèce:

$$(7.)\quad \frac{E^1(\lambda)}{M^2F^1(\lambda)} - n\frac{E^1(k)}{F^1(k)} = 2[\mathrm{cotg}^2\mathrm{am}\,4\omega + \mathrm{cotg}^2\mathrm{am}\,8\omega + \cdots + \mathrm{cotg}^2\mathrm{am}\,2(n-1)\omega].$$

Soit $\varphi = \mathrm{am}\,u$, si l'on met

$$Z(u) = \frac{F^1E(\varphi) - E^1F(\varphi)}{F^1},$$

on tire des formules (6.), (7.) cette autre qui offre la transformation des intégrales elliptiques indéfinies de la seconde espèce:

$$(8.)\quad \frac{1}{M}Z\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = Z(u) + Z(u+4\omega) + \cdots + Z(u+4(n-1)\omega),$$

formule qui peut être transformée en celle-ci:

$$(9.)\quad nZ(u) - \frac{1}{M}Z\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = 2k^2\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u\,\Sigma\frac{\sin^2\mathrm{am}\,2m\omega}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,2m\omega\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

où l'on donnera à m toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$.

Soit $\alpha = \mathrm{am}\,a$, je considère les fonctions elliptiques de la troisième espèce sous la forme:

$$k^2\sin\alpha\cos\alpha\Delta\alpha\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,.\,d\varphi}{[1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\Delta\varphi} = \Pi(u,a).$$

En introduisant la nouvelle transcendante

$$\sqrt{\frac{2k'F^1}{\pi}}\,e^{\int_0^\varphi\frac{F^1E(\varphi)-E^1F(\varphi)}{F^1\Delta\varphi}d\varphi} = \Theta(u),$$

on a:

$$Z(u) = \frac{1}{\Theta(u)}\frac{d\Theta(u)}{du},$$
$$\Pi(u,a) = uZ(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}.$$

Cette dernière formule fait voir que les fonctions elliptiques de la troisième espèce, qui dépendent de trois éléments, peuvent être réduites à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux. L'intégration de la formule (9.) donne les formules générales pour la transformation de la fonction $\Theta(u)$, desquelles on peut déduire celles des fonctions elliptiques de la troisième espèce. Quant à ces dernières, on trouve:

$$(10.)\quad \Pi\left(\frac{u}{M},\frac{a}{M},\lambda\right) - n\Pi(u,a,k)$$
$$= \frac{u}{M}Z\left(\frac{a}{M},\lambda\right) - nuZ(a,k) + \tfrac{1}{2}\log\prod\frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,2m\omega\sin^2\mathrm{am}(u-a)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,2m\omega\sin^2\mathrm{am}(u+a)},$$

en désignant par $\prod$ le produit de tous les facteurs que l'on obtient en donnant à m les valeurs $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$.

On peut aussi parvenir directement de la fonction $\Theta(u)$ aux formules de transformation en partant de son développement en produit infini, comme nous l'avons montré dans le troisième volume de ce Journal *). De là, en suivant une marche inverse de celle qu'on vient de présenter, on tire sur-le-champ les formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques de la première et de la troisième espèce, et en différentiant, celles de la transformation des fonctions elliptiques de la seconde espèce. Tout cela s'applique encore, à quelques légères modifications près, au cas où n est un nombre pair.

IV.

Pour exprimer $\sin\mathrm{am}(u,k)$ par $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$ ou $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$ par $\sin\mathrm{am}\,nu$, il y a à résoudre une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré. Nous allons présenter les expressions algébriques et générales de ses racines.

*) Voir p. 257, 258 de ce volume.

Désignons par $\Phi(u, \omega, k)$ l'expression suivante:

$$\Pi[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,2m\omega\,\sin^2\mathrm{am}\,u],$$

en donnant toujours à m les valeurs $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$; soit ω' une quantité telle qu'on ait

$$k = \lambda^n[\sin\mathrm{coam}(2\omega', \lambda)\sin\mathrm{coam}(4\omega', \lambda)\ldots\sin\mathrm{coam}((n-1)\omega', \lambda)]^4 \text{ *)},$$

soit de plus

$$A_p = \frac{\Phi(4p\omega', \omega', \lambda)\,\Phi\left(\frac{u}{M}, \omega', \lambda\right)}{\Phi\left(\frac{u}{M}+4p\omega', \omega', \lambda\right)},$$

on aura, en désignant par p l'un des nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$:

$$(1.)\qquad \frac{nkM}{\lambda}\sin\mathrm{am}(u+4p\omega, k)$$

$$= \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)+\alpha\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+4\omega', \lambda\right)\sqrt[n]{A_1}+\alpha^2\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+8\omega', \lambda\right)\sqrt[n]{A_2}+\cdots$$

$$+\alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+4(n-1)\omega', \lambda\right)\sqrt[n]{A_{n-1}},$$

α étant une racine quelconque de l'équation $x^n = 1$. En mettant au lieu de α toutes ses valeurs, on aura toutes les racines de l'équation proposée, qui répondent aux différentes valeurs du nombre p. Il faut remarquer encore qu'on a:

$$\sqrt[n]{A_p}\sqrt[n]{A_{n-p}} = 1-\lambda^2\sin^2\mathrm{am}(4p\omega', \lambda)\,\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right).$$

On pourra exprimer généralement tous les radicaux $\sqrt[n]{A_1}, \sqrt[n]{A_2}, \ldots, \sqrt[n]{A_{n-1}}$, par les puissances de l'un d'entre eux.

Ce théorème est un des plus importants, trouvés jusqu'ici dans la théorie des fonctions elliptiques. Il fournit aussi la solution algébrique et générale de l'équation du degré nn, de laquelle dépend la division de la fonction elliptique en n parties, comme on va le voir dans ce qui suit.

Supposons pour plus de simplicité que n soit un nombre premier **), le nombre de toutes les transformations correspondantes au nombre n sera $n+1$. Ce sont celles qui répondent aux valeurs suivantes de ω:

*) Soit $\omega = \frac{mK+m'iK'}{n}$, on aura $\omega' = \frac{\mu K+\mu' iK'}{nM}$, μ, μ' étant des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs, tels que $m\mu'-\mu m' = 1$.

**) Il n'y a qu'à faire de légères modifications dans le cas où n est un nombre composé.

$$\frac{K}{n},\ \frac{iK'}{n},\ \frac{iK'}{n}+\frac{K}{n},\ \frac{iK'}{n}+\frac{2K}{n}, \ldots, \frac{iK'}{n}+\frac{(n-1)K}{n}.$$

Soient les valeurs de λ et de M qui répondent à ces différentes valeurs de ω:

$$\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \ldots, \lambda_n,$$
$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3, \ldots, M_n;$$

on prouvera aisément la formule remarquable:

$$(2.)\qquad \sin\mathrm{am}(nu, k)+\sin\mathrm{am}(u, k)$$

$$= \frac{\lambda}{nkM}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)+\frac{\lambda_1}{nkM_1}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_1}, \lambda_1\right)+\frac{\lambda_2}{nkM_2}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2}, \lambda_2\right)+\cdots+\frac{\lambda_n}{nkM_n}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_n}, \lambda_n\right).$$

En changeant dans la formule (1.) u en $\frac{u}{M_p}$, k en λ_p, λ en k, M en $\frac{1}{nM_p}$, $\frac{u}{M}$ en nu, on parviendra à exprimer toutes les quantités

$$\frac{\lambda_p}{nkM_p}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_p}, \lambda_p\right) \text{ par } \sin\mathrm{am}(nu, k).$$

Soit

$$\frac{\Phi(4p\omega, \omega)\,\Phi(nu, \omega)}{\Phi(nu+4p\omega, \omega)} = B_p,$$

et désignons par $B_p, B'_p, B''_p, B'''_p, \ldots, B^{(n)}_p$ les valeurs de B_p qui répondent aux différentes valeurs de ω, et par $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$ les différentes valeurs de ω, on a:

$$(3.)\qquad n\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right)$$

$$= \begin{cases} \sin\mathrm{am}\,nu \\ +\ \alpha\sin\mathrm{am}(nu+4\omega)\sqrt[n]{B_1}+\cdots\cdots+\alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}(nu+4(n-1)\omega)\sqrt[n]{B_{n-1}} \\ +\ \beta\sin\mathrm{am}(nu+4\omega_1)\sqrt[n]{B'_1}+\cdots\cdots+\beta^{n-1}\sin\mathrm{am}(nu+4(n-1)\omega_1)\sqrt[n]{B'_{n-1}} \\ +\ \alpha\beta\sin\mathrm{am}(nu+4\omega_2)\sqrt[n]{B''_1}+\cdots\cdots+\alpha^{n-1}\beta^{n-1}\sin\mathrm{am}(nu+4(n-1)\omega_2)\sqrt[n]{B''_{n-1}} \\ +\ \alpha^2\beta\sin\mathrm{am}(nu+4\omega_3)\sqrt[n]{B'''_1}+\cdots\cdots+\alpha^{2(n-1)}\beta^{n-1}\sin\mathrm{am}(nu+4(n-1)\omega_3)\sqrt[n]{B'''_{n-1}} \\ \cdot \\ +\ \alpha^{n-1}\beta\sin\mathrm{am}(nu+4\omega_n)\sqrt[n]{B^{(n)}_1}+\cdots\cdots+\alpha^{(n-1)^2}\beta^{n-1}\sin\mathrm{am}(nu+4(n-1)\omega_n)\sqrt[n]{B^{(n)}_{n-1}}, \end{cases}$$

m et m' étant des nombres entiers quelconques, et α, β des racines de l'équation $x^n = 1$. En donnant à α, β toutes les valeurs dont elles sont susceptibles, on aura les valeurs différentes de l'expression $\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right)$, qui sont au nombre de nn. Ce sont les nn racines de l'équation à résoudre, présentées sous la forme la plus simple, telle que je l'avais présentée dans le troisième volume de ce Journal (cah. 1.)*). Je remarque encore que l'on peut exprimer tous les radicaux, qui sont au nombre de $nn-1$, par les puissances de deux quelconques d'entre eux qui ne se trouvent pas dans la même série horizontale.

V.

Puisqu'on peut exprimer rationnellement $\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$, $\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right)$, ..., $\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_n},\lambda_n\right)$ par $\sin\operatorname{am}(u,k)$, on pourra aussi exprimer les premières quantités par une quelconque d'entre elles; mais pour cela il y a à résoudre une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré dans chaque cas. Nous allons rapporter dans ce qui suit les expressions générales et algébriques des racines de ces équations.

En conservant les notations du numéro précédent, soit

$$C_p = \frac{\Phi\left(\frac{u}{M},\omega',\lambda\right)}{\Phi\left(\frac{u}{M}+4p\omega',\omega',\lambda\right)},$$

on aura:

$$(1.)\qquad \sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda}}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_m},\lambda_m\right)$$
$$= \frac{\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\alpha\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}+4\omega',\lambda\right)\sqrt[n]{C_1}+\cdots+\alpha^{(n-1)^2}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}+4(n-1)\omega',\lambda\right)\sqrt[n]{C_{n-1}}}{1+\alpha\sqrt[n]{C_1}+\alpha^4\sqrt[n]{C_2}+\cdots+\alpha^{(n-1)^2}\sqrt[n]{C_{n-1}}},$$

α étant une racine quelconque de l'équation $x^n=1$. En donnant à α toutes ses valeurs, on aura les n expressions qui répondent aux différents modules $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Chaque expression, telle que

$$\sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda}}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_m},\lambda_m\right),$$

étant donnée par la résolution d'une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré dont les racines ont pour expression générale

$$\sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda}}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_m}+4p\omega'_m,\lambda_m\right),$$

ω'_m étant la même chose par rapport au module λ_m que ω' l'est par rapport à λ: on aura les expressions algébriques de toutes ces racines, qui sont au nombre de n et qui répondent à un même module λ_m, en multipliant les radicaux par $\alpha^{pp}\beta^p$ au lieu de α^{pp}, β étant encore une racine quelconque de l'équation $x^n=1$. On pourra aussi exprimer tous les radicaux par les puissances de l'un d'entre eux. Du reste, ayant supposé que n est un nombre premier, la formule (1.) aura à subir quelques modifications lorsque n sera un nombre quelconque.

---

*) Voir p. 243 de ce volume.

VI.

Je termine ces remarques par l'énoncé du théorème suivant, fourni par les mêmes méthodes qui m'ont conduit aux résultats précédents.

Etant supposés connus tous les modules dans lesquels on peut transformer un module donné k à l'aide d'une transformation correspondante au nombre n, on peut exprimer par ces modules toutes les quantités de la forme $\sin^2\operatorname{am}\frac{2mK+2m'iK'}{n}$, m, m' étant des nombres quelconques, sans qu'il soit nécessaire de résoudre une équation algébrique.

Les résultats dont je viens de donner ici une exposition rapide, font partie de ceux qu'on trouvera dans la seconde partie de mon ouvrage sur les fonctions elliptiques (*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*). La première partie de cet ouvrage paraîtra incessament.

Kœnigsberg, le 11. Janvier 1829.

UEBER DIE ANWENDUNG

DER ELLIPTISCHEN TRANSCENDENTEN

AUF EIN BEKANNTES PROBLEM DER ELEMENTARGEOMETRIE

VON

HERRN PROFESSOR DR. C. G. J. JACOBI
ZU KÖNIGSBERG IN PREUSSEN

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 3. p. 376.

UEBER DIE ANWENDUNG DER ELLIPTISCHEN TRANSCENDENTEN AUF EIN BEKANNTES PROBLEM DER ELEMENTARGEOMETRIE:

DIE RELATION ZWISCHEN DER DISTANZ DER MITTELPUNKTE UND DEN RADIEN ZWEIER KREISE ZU FINDEN, VON DENEN DER EINE EINEM UNREGELMÄSSIGEN POLYGON EINGESCHRIEBEN, DER ANDERE DEMSELBEN UMGESCHRIEBEN IST.

1.

Bei einem jeden Dreieck findet bekanntlich eine Gleichung zwischen den Radien des eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreises und der Distanz ihrer Mittelpunkte Statt, welche Euler zuerst aufgestellt hat. Weniger bekannt scheint die ähnliche Relation bei einem Viereck zu sein, das zu gleicher Zeit einem Kreise eingeschrieben und einem anderen umgeschrieben werden kann; doch kann sie hier noch leicht auf mannichfachen Wegen gefunden werden; wie denn die Theorie dieser Vierecke häufiger untersucht worden ist. Schwieriger ist das Problem beim Fünfeck und bei den höheren Polygonen, so dafs Herr Steiner, der es gewohnt ist, die bekannten Grenzen hinter sich zu lassen, diese Theorie wesentlich erweitert zu haben schien, indem er im 2ten Bande des Crelleschen Journals S. 289, nachdem er zuvor S. 96 desselben Bandes das Problem wieder in Anregung gebracht hatte, noch für das Fünfeck, Sechseck und Achteck die entsprechenden Gleichungen aufstellte. Leider aber hat dieser grofse Geometer nicht die Analysis dieser interessanten Resultate mitgetheilt.

Ehe wir nun aber selbst unsere Weise dieses Problem zu behandeln den Geometern vorlegen, sehen wir uns genöthigt, im Namen des vor Kurzem verstorbenen Russischen Staatsraths Nicolaus Fufs, die von Herrn Steiner gegebenen Resultate in Anspruch zu nehmen; welcher, ohne es zu wollen und ohne es zu wissen, dieselben und noch überdies die Gleichung für das Siebeneck, bei weitem die schwierigste, gefunden hat. Dieser ausgezeichnete Analyst war nämlich in dem leider nicht häufigen Irrthum, das Problem, das er sich stellte, nur in einem particulären Falle aufgelöst zu haben, während er in der That die allgemeine Lösung gab.

Man liest nämlich in dem 13ten Bande der Petersburger *Nova Acta* S. 166—189 eine Abhandlung von diesem Verfasser vom Jahre 1798, welche den Titel führt:

De Polygonis symmetrice irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis. Schon im 10ten Bande der *Nova Acta* für das Jahr 1792 hatte derselbe verschiedene und zum Theil neue Probleme über die Vierecke gelöst, welche zugleich einem Kreise eingeschrieben und umgeschrieben sind, und auch die Relation gegeben, welche zwischen den Radien beider Kreise und der Distanz ihrer Mittelpunkte Statt hat. Er habe seitdem, erzählt er, diese Untersuchungen auf Polygone von mehr als vier Seiten auszudehnen gesucht; es sei ihm aber nicht gelungen. Denn mit der wachsenden Seitenzahl würden die Fundamentalformeln so verwickelt, dass man an ihre Entwirrung Oel und Mühe verschwende. Er habe daher das mit den gröſsten Schwierigkeiten behaftete allgemeine Problem verlassen, und wolle sich hier auf solche Polygone beschränken, welche man symmetrisch unregelmäſsige (*symmetrice irregularia*) nennen könne, die nämlich einen Durchmesser haben, der durch beide Centra geht, und das Polygon in zwei gleiche und ähnliche Theile theilt.

Es thut aber diese Beschränkung bei dem Problem, das sich Fuſs in seiner Abhandlung stellt, nämlich jene Gleichung zwischen den Radien und der Distanz der Centra zu finden, keineswegs der Allgemeinheit Eintrag. Denn zuerst ist klar, dass, wenn eine Ecke des Polygons in jenem durch beide Centra gehenden Durchmesser sich befindet, das Polygon auch zu beiden Seiten des Durchmessers symmetrisch liegen wird. Es kann aber immer eine Ecke des Polygons in dem Umfange des Kreises, in welchen es eingeschrieben sein soll, beliebig angenommen werden. Denn Herr J. V. Poncelet hat in seinem berühmten Werke, *Traité des Propriétés projectives des Figures,* S. 361, den schönen Satz bewiesen, dass,

> wenn irgend ein Polygon zugleich einem Kegelschnitt eingeschrieben und einem andern umgeschrieben ist, es eine unendliche Menge ähnlicher giebt, welche diese Eigenschaft in Bezug auf die beiden Curven haben; oder, wenn man nach dieser Bedingung von einem beliebigen Anfangspunkte aus irgend ein anderes Polygon construiren will, es sich immer von selbst schlieſsen wird; und umgekehrt, wenn man, von irgend einem Punkte aus, einem Kegelschnitt ein Polygon einschreiben will, dessen Seiten einen andern berühren, und es sich nicht von selbst schlieſst, kein anderes diese Eigenschaft haben wird.

Für unsern Fall sind die Kegelschnitte nur Kreise. Aber auf diesen Fall läſst sich der allgemeinere leicht reduciren, indem man, wie Herr Poncelet an einem andern Orte gezeigt hat, zwei Kegelschnitte, wofern sie nur nicht vier Punkte gemein haben, immer so perspectivisch projiciren kann, dass man in der Projection zwei Kreise erhält.

Da also die Annahme, die Fuſs gemacht, dass eine Ecke in dem Durchmesser liege, welcher durch beide Centra geht, der Allgemeinheit nicht schadet, so ist es auch nicht zu verwundern, wenn die Formeln, die er in seinem beschränkten Falle findet, wirklich allgemein sind und mit den von Herrn Steiner gegebenen übereinkommen. Dieses letzte wollen wir kürzlich im Folgenden zeigen, da es nicht sogleich in die Augen fällt.

2.

Nennt man den Radius des umgeschriebenen Kreises R, des eingeschriebenen r, und die Distanz der beiden Mittelpunkte a, so giebt Herr Steiner für das Fünfeck zwischen R, r, a die Gleichung:

$$r(R-a) = (R+a)\sqrt{(R-r+a)(R-r-a)} + (R+a)\sqrt{(R-r-a)2R}.$$

Setzt man mit Fuſs

$$R+a = p, \quad R-a = q,$$

so verwandelt sich diese Gleichung in

$$qr = p\sqrt{(p-r)(q-r)} + p\sqrt{(q-r)(p+q)}.$$

Fuſs findet S. 174 die Gleichung:

$$\frac{ppqq - rr(pp+qq)}{ppqq + rr(pp-qq)} = \pm\sqrt{\frac{q-r}{p+q}}.$$

Er bemerkt, dass dieser Gleichung die Werthe $r = -p$ und $r = \frac{pq}{p+q}$ Genüge thun, und dass sich daher die Gleichung, nachdem man das Wurzelzeichen weggeschafft, durch $p+r$ und $pq - r(p+q)$ werde dividiren lassen. Nach diesen Reductionen giebt er die Gleichung:

$$p^3q^3+ppqqr(p+q)-pqrr(p+q)^2-r^3(p+q)(p-q)^2 = 0.$$

Wenn man Herrn Steiners Gleichung:

$$qr = p\sqrt{(p-r)(q-r)}+p\sqrt{(q-r)(p+q)}$$

quadrirt, so erhält man:

$$q^2r^2-p^2(q-r)(2p+q-r) = 2p^2(q-r)\sqrt{(p-r)(p+q)}.$$

Wird diese Gleichung wieder quadrirt, so erhält man:

$$q^4r^4-2p^2q^2r^2(q-r)(2p+q-r)+p^4(q-r)^2(q+r)^2 = 0.$$

Nun ist:

$$2(q-r)(2p+q-r) = 2(q-r)^2+4p(q-r) = (q-r)^2+(q+r)^2+4[pq-r(p+q)],$$

wonach sich die Gleichung so darstellen läſst:

$$q^4r^4-p^2q^2r^2(q-r)^2-4p^2q^2r^2[pq-r(p+q)]+p^2(q+r)^2[(q-r)^2p^2-q^2r^2] = 0.$$

Es ist aber

$$q^4r^4-p^2q^2r^2(q-r)^2 = -q^2r^2(qr+pq-pr)(pq-pr-qr),$$
$$(q-r)^2p^2-q^2r^2 = [(q-r)p+qr](pq-pr-qr).$$

Man kann daher, wie bei Fuſs, durch $pq-pr-qr$ dividiren und erhält dann:

$$q^2r^2(pr-qr-pq)-4p^2q^2r^2+p^2(q+r)^2(pq+qr-pr) = 0.$$

Entwickelt man nach den Potenzen von r, so erhält man genau die von Fuſs gegebene Gleichung. Nach den Potenzen von p geordnet, wird sie:

$$p^3(q+r)^2(q-r)+p^2qr(q-r)^2-pq^2r^2(q-r)-q^3r^3 = 0.$$

Fuſs giebt ferner noch die Bedeutung seiner überflüssigen Factoren $p+r$ und $pq-r(p+q)$; und für diesen Fall, wie für die übrigen, numerische Beispiele.

3.

Für das Sechseck findet Herr Steiner:

$$3(R^2-a^2)^4 = 4r^2(R^2+a^2)(R^2-a^2)^2+16r^4a^2R^2,$$

welche Gleichung sich, wenn man wieder $R+a=p$, $R-a=q$ setzt, in folgende verwandelt:

$$3p^4q^4 = 2r^2(p^2+q^2)p^2q^2+r^4(p+q)^2(p-q)^2,$$

welche mit der von Fuſs S. 180 gegebenen übereinkommt:

$$3p^4q^4-2ppqqrr(pp+qq) = r^4(pp-qq)^2.$$

Für das Siebeneck findet Fuſs die Gleichung:

$$[pq-r(p-q)-2rr]2pqr\sqrt{(p-r)(p+q)}+[ppqq-rr(pp+qq)]2r\sqrt{(q-r)(p+q)}$$
$$= \pm[pq-r(p-q)][ppqq+rr(pp-qq)].$$

Für das Achteck giebt Fuſs die Gleichung:

$$ppr\sqrt{qq-rr}+qqr\sqrt{pp-rr} = pqrr-pq\sqrt{(pp-rr)(qq-rr)}.$$

Quadrirt man diese Gleichung, so resultirt:

$$4p^2q^2r^2\sqrt{(pp-rr)(qq-rr)} = p^2q^2r^4+p^2q^2(p^2-r^2)(q^2-r^2)-p^4r^2(q^2-r^2)-q^4r^2(p^2-r^2)$$
$$= r^4(p^2+q^2)^2-2r^2p^2q^2(p^2+q^2)+p^4q^4 = [r^2(p^2+q^2)-p^2q^2]^2.$$

Die Gleichung, rational gemacht, wird also:

$$[r^2(p^2+q^2)-p^2q^2]^4 = 16p^4q^4r^4(p^2-r^2)(q^2-r^2).$$

Aber diese Gleichung scheint nicht mit der sehr verwickelten, welche Herr Steiner giebt, in Übereinstimmung gebracht werden zu können.

Fuſs bemerkt noch, dass wenn man einen Winkel μ aus dem Winkel ν durch die Gleichung $\cos\nu = -\operatorname{cotg}\mu$ bestimmt, man setzen könne:

$$a = R\frac{\sin\frac{\mu-\nu}{2}-\sin\frac{\mu+\nu}{2}}{\sin\frac{\mu-\nu}{2}+\sin\frac{\mu+\nu}{2}} = -R\frac{\operatorname{tang}\frac{\nu}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\mu}{2}},$$

$$r = 2R\frac{\sin\frac{\mu-\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu}{2}}{\sin\frac{\mu-\nu}{2}+\sin\frac{\mu+\nu}{2}} = R\frac{\sin\frac{\mu-\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu}{2}}{\sin\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}},$$

woraus auch

$$p = R+a = R\frac{\sin\frac{\mu-\nu}{2}}{\sin\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}},$$

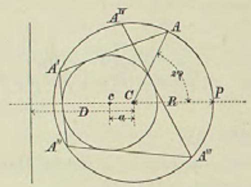
$$q = R-a = R\frac{\sin\frac{\mu+\nu}{2}}{\sin\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}}$$

folgt, welche Formeln durch ihre Eleganz sich empfehlen.

Ich habe diese Formeln anführen wollen, weil es vielleicht Einigen interessant scheinen dürfte, sie mit den Resultaten zu vergleichen, welche sich aus der Theorie der elliptischen Transcendenten ergeben.

4.

Wir wollen jetzt die Fundamentalformeln aufstellen, auf welchen die hier anzustellenden Betrachtungen beruhen. Es seien demnach zwei Kreise gegeben, von denen der eine, mit dem Halbmesser R und Mittelpunkt C, den andern mit dem Halbmesser r und Mittelpunkt c umschliefsen möge. Die Distanz der Mittelpunkte cC heifse a. Aus irgend einem Punkte A des Kreises C ziehe man eine Tangente an den Kreis c, welche den ersten wieder in A' schneidet; auf gleiche Weise ziehe man an den Kreis c die Tangenten $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A^{IV}$ u. s. w., wo A, A', A'', A''', A^{IV} u. s. w. in dem gröfsern Kreise C liegen und $AA'A''A'''\ldots$ ein Stück eines Polygons oder ein ungeschlossenes Polygon ist, das dem Kreise C eingeschrieben, dem Kreise c umgeschrieben ist. Man ziehe den Durchmesser cC, welcher den Kreis C in P schneiden möge, so dass $CP = R$, $cP = R+a$. Jetzt nenne man die Winkel $ACP = 2\varphi$, $A'CP = 2\varphi'$, $A''CP = 2\varphi''$, $A'''CP = 2\varphi'''$, u.s.w., so ist leicht zu sehen, dass zwischen je zwei Winkeln, die aufeinander folgen, die Gleichungen stattfinden:



$$\begin{aligned} R\cos(\varphi'-\varphi) + a\cos(\varphi'+\varphi) &= r, \\ R\cos(\varphi''-\varphi') + a\cos(\varphi''+\varphi') &= r, \\ R\cos(\varphi'''-\varphi'') + a\cos(\varphi'''+\varphi'') &= r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

welche Gleichungen man auch so darstellen kann:

$$\begin{aligned} (R+a)\cos\varphi'\cos\varphi + (R-a)\sin\varphi'\sin\varphi &= r, \\ (R+a)\cos\varphi''\cos\varphi' + (R-a)\sin\varphi''\sin\varphi' &= r, \\ (R+a)\cos\varphi'''\cos\varphi'' + (R-a)\sin\varphi'''\sin\varphi'' &= r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Zieht man jede dieser Gleichungen von der folgenden ab und bemerkt, dass immer

$$\frac{\cos x - \cos y}{\sin y - \sin x} = \operatorname{tang}\frac{x+y}{2},$$

so folgt sogleich:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\frac{\varphi''+\varphi}{2} &= \frac{R-a}{R+a}\operatorname{tang}\varphi', \\ \operatorname{tang}\frac{\varphi'''+\varphi'}{2} &= \frac{R-a}{R+a}\operatorname{tang}\varphi'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

In dieser Form der Gleichungen springt es sogleich in die Augen, dass sie mit denjenigen übereinkommen, welche zur Vervielfachung der elliptischen Transcendenten aufgestellt werden.

Setzt man nämlich das elliptische Integral, in dem k irgend eine Constante bedeutet,

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-kk\sin^2\varphi}} = u,$$

und nach einer von mir angegebenen Bezeichnung die Amplitude φ

$$\varphi = \operatorname{am} u;$$

ferner ebenso

$$\alpha = \operatorname{am} t,$$

wo α irgend einen Winkel bedeuten möge,

$$\begin{aligned} \varphi' &= \operatorname{am}(u+t), \\ \varphi'' &= \operatorname{am}(u+2t), \end{aligned}$$

so wird in den Elementen der Theorie der elliptischen Functionen die Gleichung gegeben:

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi+\varphi''}{2} = \Delta\operatorname{am} t \operatorname{tang}\varphi',$$

wo

$$\Delta\operatorname{am} t = \sqrt{1-kk\sin^2\alpha} = \sqrt{1-kk\sin^2\operatorname{am} t}.$$

Bestimmt man also in unserem Falle die Gröfsen k und t oder α durch die beiden Gleichungen:

$$\frac{R-a}{R+a} = \Delta\operatorname{am} t = \sqrt{1-kk\sin^2\alpha}; \quad \varphi' = \operatorname{am}(u+t),$$

so wird man haben:

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{am} u, \\ \varphi' &= \operatorname{am}(u+t), \\ \varphi'' &= \operatorname{am}(u+2t), \\ \varphi''' &= \operatorname{am}(u+3t), \\ \varphi^{IV} &= \operatorname{am}(u+4t), \\ \ldots\ldots \end{aligned}$$

wo $2\varphi'$, $2\varphi''$, $2\varphi'''$, $2\varphi^{\text{IV}}$ durch die §. 4. angegebene Construction gefunden werden.

5.

Wir wollen jetzt die Gröfsen α und k bestimmen, welches vermittelst der Gleichungen $\varphi = \operatorname{am} u$, $\alpha = \operatorname{am} t$, $\varphi' = \operatorname{am}(u+t)$, $\Delta \operatorname{am} t = \sqrt{1-kk\sin^2\alpha} = \frac{R-a}{R+a}$ geschieht. Die Elemente der Theorie der elliptischen Functionen geben uns die Gleichung:

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\sqrt{1-kk\sin^2\alpha} = \cos\alpha.$$

Nach unseren obigen Formeln ist:

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\frac{R-a}{R+a} = \frac{r}{R+a}.$$

Dieses giebt uns zur Bestimmung von α und k die beiden Gleichungen:

$$\sqrt{1-kk\sin^2\alpha} = \frac{R-a}{R+a} \text{ und } \cos\alpha = \frac{r}{R+a},$$

woraus folgt:

$$kk = \frac{4Ra}{(R+a)^2-rr}, \quad 1-kk = k'k' = \frac{(R-a)^2-rr}{(R+a)^2-rr}.$$

Ferner hat man:

$$R+a = \frac{r}{\cos\alpha}, \quad 2R = \frac{r(1+\Delta)}{\cos\alpha}, \quad r = \frac{2R\cos\alpha}{1+\Delta},$$
$$R-a = \frac{r\Delta}{\cos\alpha}, \quad 2a = \frac{r(1-\Delta)}{\cos\alpha}, \quad a = R\frac{(1-\Delta)}{1+\Delta},$$

wo der Kürze halber für $\Delta \operatorname{am} t$ blofs Δ geschrieben ist.

Diese Formeln geben ein leichtes Mittel, wenn man $\operatorname{am} u = \varphi$, und $\operatorname{am} t = \alpha$ kennt, daraus $\operatorname{am}(u+mt)$ zu finden, was die Aufgabe der Multiplication der elliptischen Functionen ist, und zwar durch eine Construction der Elementargeometrie. Man beschreibe nämlich aus einem Punkte c mit einem beliebigen Radius r einen Kreis, und aus dem Mittelpunkte C, der um $a = cC$ von c entfernt ist, einen zweiten Kreis mit dem Radius R, wo a und R durch die Gleichungen

$$a = \frac{r(1-\Delta)}{2\cos\alpha}, \quad R = \frac{r(1+\Delta)}{2\cos\alpha}$$

bestimmt werden. Bestimmt man nun den Punkt A in der Peripherie des Kreises C, indem man $ACP = 2\varphi$ macht (§. 4.), und die Punkte

A', A'', A''', . . ., $A^{(m)}$ durch die §. 4. angegebene Construction, so wird $\frac{1}{2}A^{(m)}CP = \varphi^{(m)} = \operatorname{am}(u+mt)$.

Will man blofs $\operatorname{am} mt$ bestimmen, so fällt der Punkt A mit dem Punkt P zusammen. Uebrigens bemerke ich, dass die Winkel 2φ, $2\varphi'$, $2\varphi''$, $2\varphi'''$, . . . immerfort wachsend angenommen werden, so dass sie auch 360^0 überschreiten können.

Diese Construction scheint vor der Construction, die Lagrange mittelst des sphärischen Dreiecks gegeben hat, nicht ohne Vorzüge zu sein.

6.

Es ist ein bemerkenswerther Umstand, dass die Gröfsen k, α gänzlich von φ oder u unabhängig sind. Wo man daher den Punkt A in der Peripherie des Kreises C annimmt, wird immer, wenn man $\frac{1}{2}ACP = \varphi = \operatorname{am} u$, $\frac{1}{2}A'CP = \varphi' = \operatorname{am}(u+t)$ macht, die Linie AA' einen Kreis berühren, dessen Lage und Gröfse durch die Gleichungen $a = \frac{R(1-\Delta)}{1+\Delta}$, $r = \frac{2R\cos\alpha}{1+\Delta}$ bestimmt werden. Man denkt sich dann nämlich CP als eine feste Linie, von welcher an der Winkel 2φ gezählt wird, und in welcher der Mittelpunkt des Kreises c zu liegen kommt. Ebenso wird immer, wo man auch A angenommen hat, die Linie AA'' einen Kreis berühren, dessen Lage und Gröfse durch die Gleichungen $a = \frac{R(1-\Delta^{(2)})}{1+\Delta^{(2)}}$, $r = \frac{2R\cos\alpha^{(2)}}{1+\Delta^{(2)}}$ bestimmt werden, wenn man $\alpha^{(2)} = \operatorname{am} 2t$, $\Delta^{(2)} = \sqrt{1-kk\sin^2\alpha^{(2)}}$ setzt. Und allgemein wird immer, wo man auch den Anfangspunkt A angenommen hat, die Linie $AA^{(m)}$, welche das Polygon schliefst, einen Kreis berühren, dessen Elemente durch die Gleichungen $a = \frac{R(1-\Delta^{(m)})}{1+\Delta^{(m)}}$, $r = \frac{2R\cos\alpha^{(m)}}{1+\Delta^{(m)}}$ gegeben sind, wo $\alpha^{(m)} = \operatorname{am} mt$, $\Delta^{(m)} = \sqrt{1-kk\sin^2\alpha^{(m)}}$. Die Mittelpunkte aller dieser Kreise liegen in der festen Linie CP.

Wir wollen jetzt beweisen, dass diese Kreise ein System bilden, welche dieselbe Linie zum Orte der gleichen Tangenten haben, welche zweckmäfsige Benennung Herr Steiner in seinen geometrischen Arbeiten in dem Crelleschen Journal eingeführt hat. Es ist dieses bei zwei Kreisen eine gerade Linie, welche auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrecht steht, und eben, was ihr Name andeutet, die Eigenschaft hat, dass wenn man von irgend einem ihrer Punkte die Tangenten an die beiden Kreise legt, diese Tangenten gleich werden. Da wir schon wissen, dass jene Kreise ihre Mittelpunkte in derselben geraden Linie haben, so brauchen wir blofs zu zeigen, dass für irgend einen Punkt die von ihm aus an alle Kreise gelegten Tangenten gleich sind, indem dieselbe Eigenschaft dann alle Punkte der durch ihn gehenden und auf CP senkrecht stehenden Linie haben werden.

Zu diesem Ende wollen wir den Punkt in der Linie CP selbst aufsuchen, welcher diese Eigenschaft in Bezug auf die beiden Kreise C, c hat. Wir wollen D die Distanz dieses Punktes von C nennen, so wird seine Distanz von c, $D-a$. Die Tangente an den ersten Kreis wird $\sqrt{DD-RR}$, an den zweiten Kreis $\sqrt{(D-a)^2-rr}$. Beides gleich gesetzt giebt

$$DD-RR = (D-a)^2-rr,$$

oder

$$D = \frac{RR+aa-rr}{2a} = \frac{(R+a)^2-rr}{2a} - R.$$

Oben aber fanden wir

$$kk = \frac{4Ra}{(R+a)^2-rr},$$

woraus

$$\frac{(R+a)^2-rr}{2a} = \frac{2R}{kk},$$

und also

$$D = \frac{2R}{kk} - R.$$

Wir sehen, dass a in dem Ausdruck für D gar nicht vorkommt, sondern dass es blofs von k abhängt. Für alle jene Kreise aber ist dieses k dasselbe, und nur im a unterscheiden sie sich. Hätten wir daher für C und irgend einen anderen Kreis den Ort ihrer gleichen Tangenten gesucht, so hätten wir denselben Ausdruck für D gefunden, so dass also alle jene Kreise einen gemeinschaftlichen Ort der gleichen Tangenten haben.

Die analytische Bestimmung der Elemente des Kreises, den die Linie $AA^{(m)}$ beständig berührt, während der Punkt A sich in der Peripherie des Kreises C bewegt, wäre selbst für kleinere m ein Problem von kaum zu übersteigender Schwierigkeit gewesen, welches auf diese Weise auf die Elemente einer bekannten Theorie zurückgeführt und dadurch in aller Allgemeinheit gelöst ist.

Der specielle Satz, dass AA'' beständig einen Kreis während seiner Bewegung berührt, läfst sich auch folgendermafsen aussprechen:

> Wenn man in einen Kreis einen Winkel einschreibt, der einem andern zu gleicher Zeit umgeschrieben ist, und man denselben sich unter diesen Bedingungen bewegen läfst, d. h. so, dass seine Spitze die Peripherie des Kreises durchläuft, während seine Schenkel den anderen Kreis berühren, so wird die Sehne, die er in dem ersten Kreise, in den er eingeschrieben ist, abschneidet, während der Bewegung beständig einen dritten Kreis berühren, welcher mit den gegebenen denselben Ort der gleichen Tangenten hat.

Diesen Satz giebt Herr Poncelet S. 326 seines angeführten Werkes. Durch die oben angedeutete Weise perspectivischer Projection lassen sich diese Sätze auf das System zweier Ellipsen ausdehnen.

7.

Aber Herr Poncelet giebt diesen Sätzen noch eine weit gröfsere Ausdehnung. Wir haben angenommen, dass die Seiten des Polygons einen und denselben Kreis, oder in der Projection, denselben Kegelschnitt berühren. Poncelet bestimmt nur, dass sie überhaupt in einer bestimmten Folge gegebene Kegelschnitte berühren, so dass auch, wenn man will, ein Kegelschnitt mehrere Seiten berühren kann, wo dann gedacht werden kann, dass in diesen Kegelschnitt mehrere zusammen fallen. Er unterwirft diese Kegelschnitte blofs der Bedingung, dass sie alle mit dem Kegelschnitt, in welchen das Polygon eingeschrieben ist, die reellen oder idealen Secanten *) gemeinschaftlich haben. Er giebt demnach S. 327 folgenden Satz:

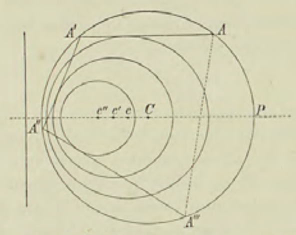
*) Herr Poncelet bestimmt eine gemeinschaftliche Secante zweier Kegelschnitte aus folgenden Eigenschaften, welche zugleich zu ihrer allgemeinsten Definition dienen. Man bestimme in ihnen die Durchmesser AB, $A'B'$, welche zur Richtung der gemeinschaftlichen Secante conjugirt sind; so müssen erstens beide Durchmesser, wenn es nöthig ist, verlängert, sie in demselben Punkt O schneiden. Wenn ferner $AB = a$, $A'B' = a'$, und die mit der gegebenen Linie parallelen, diesen conjugirten Durchmesser resp. b, b' sind, so muss zweitens

$$\frac{bb}{aa} OA.OB = \frac{b'b'}{a'a'} OA'.OB'$$

sein. Diese Bestimmungen, welche augenscheinlich erfüllt sind, wenn die Linie beide Kegelschnitte wirklich schneidet, behalten ihren Sinn auch, wenn sie aufserhalb beider fällt, in welchem Falle sie Poncelet die ideale Secante nennt. Für zwei Kreise, die sich nicht schneiden, ist die ideale gemeinschaftliche Secante der Ort der gleichen Tangenten bei Herrn Steiner.

Wenn man einem Kegelschnitt ein Polygon einschreibt, dessen Seiten, mit Ausnahme einer, andere Kegelschnitte berühren, die mit einander und mit jenem gemeinschaftliche Secanten haben, und man das Polygon unter diesen Bedingungen variiren läſst, so werden die freie Seite und alle Diagonalen sich auf anderen Kegelschnitten wälzen, die mit den gegebenen gemeinschaftliche Secanten haben.

Aber auch diese Verallgemeinerung ergiebt sich leicht aus unseren Betrachtungen für Kreise, worauf man sogleich sie durch Projection auf Kegelschnitte erweitern kann. Ja wir erhalten sogleich unmittelbar wieder den analytischen Ausdruck für die Elemente des gesuchten Kreises in aller Allgemeinheit.



Es seien die Kreise, wie sie aufeinander folgen, $c, c', c'', c''', \ldots, c^{(m-1)}$, wie oben nach ihren Mittelpunkten benannt, ihre Radien resp. $r, r', r'', r''', \ldots, r^{(m-1)}$; die Distanzen ihrer Mittelpunkte von C, $cC = a$, $c'C = a'$, $c''C = a''$, $c'''C = a'''$, $\ldots$, $c^{(m-1)}C = a^{(m-1)}$. Man bestimme ferner die Winkel α, α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_{m-1}$ durch die Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{r}{R+a}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{r'}{R+a'}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{r''}{R+a''}, \ldots, \cos\alpha_{m-1} = \frac{r^{(m-1)}}{R+c^{(m-1)}},$$

und setze

$$\alpha = \operatorname{am} t, \quad \alpha_1 = \operatorname{am} t', \quad \alpha_2 = \operatorname{am} t'', \quad \ldots, \quad \alpha_{m-1} = \operatorname{am} t^{(m-1)}.$$

Jetzt ziehe man aus einem beliebigen Punkte A des Kreises C die Tangente AA' an den Kreis c, die Tangente $A'A''$ an den Kreis c', die Tangente $A''A'''$ an den Kreis c'', u. s. w., die Tangente $A^{(m-1)}A^{(m)}$ an den Kreis $c^{(m-1)}$, wo $A, A', A'', \ldots, A^{(m)}$ alle in der Peripherie des Kreises C liegen, und nenne wieder

$$ACP = 2\varphi, \quad A'CP = 2\varphi', \quad A''CP = 2\varphi'', \quad \ldots, \quad A^{(m)}CP = 2\varphi^{(m)},$$

so hat man, wenn $\varphi = \operatorname{am} u$:

$$\varphi' = \operatorname{am}(u+t), \quad \varphi'' = \operatorname{am}(u+t+t'), \quad \varphi''' = \operatorname{am}(u+t+t'+t''), \ldots$$
$$\ldots \varphi^{(m)} = \operatorname{am}(u+t+t'+\cdots+t^{(m-1)}).$$

Nach §. 6. also wird, wenn man $t+t'+t''+\cdots+t^{(m-1)} = s$ setzt, die Linie $A^{(m)}A$, welche das Polygon schlieſst, während der Drehung einen Kreis berühren, dessen Elemente durch die Gleichungen

$$r_m = \frac{2R\cos\operatorname{am} s}{1+\Delta\operatorname{am} s},$$
$$a_m = \frac{R(1-\Delta\operatorname{am} s)}{1+\Delta\operatorname{am} s}$$

bestimmt sind, wo r_m seinen Radius, a_m die Distanz seines Mittelpunktes in der Linie CP von C bedeutet. Die Bedingung, dass die Kreise einen gemeinschaftlichen Ort der gleichen Tangenten haben, kommt mit der Identität des Moduls überein.

Das Vorhergehende giebt eine Construction der Addition mehrerer elliptischen Functionen, wie wir oben die Construction der Multiplication fanden. Uebrigens erhellt aus unsern Formeln noch der Satz, dass, in welcher Ordnung auch die Seiten AA', $A'A''$, $A''A'''$ u. s. w. die gegebenen Kreise berühren, der Endpunkt $A^{(m)}$ immer derselbe sein wird.

8.

Man bestimme jetzt K durch die Gleichung $\operatorname{am} K = \frac{\pi}{2}$, so hat man bekanntlich $\operatorname{am}(u+2K) = \operatorname{am} u + \pi$, und allgemein, wenn h eine ganze Zahl ist, $\operatorname{am}(u+2hK) = \operatorname{am} u + h\pi$. Dieses vorausgeschickt, hätten wir eigentlich, wenn $AA'A''\ldots A^{(m)}A$ die ganze Peripherie h mal durchmiſst, genauer setzen müssen: $s = 2hK - (t+t'+t''+\cdots+t^{(m-1)})$. Doch ändert dies die Formeln für a_m und r_m nicht. Reduciren sich alle Kreise $c, c', c'', \ldots, c^{(m-1)}, c^{(m)}$ auf den einen c, so wird für diesen Fall das Polygon ein geschlossenes, dem Kreise c umgeschriebenes und dem Kreise C eingeschriebenes Polygon. Für diesen Fall wird $s = t = t' = t'' = \ldots = t^{(m-1)}$, wodurch man erhält:

$$(m+1)t = 2hK \quad \text{oder} \quad t = \frac{2hK}{m+1}.$$

Dieses ist der analytische Ausdruck für die Relation, die zwischen der Gröſse und Lage zweier Kreise stattfinden mufs, damit sich dem einen ein $(m+1)$-eck einschreiben lasse, das dem andern umgeschrieben ist, und h mal die ganze Peripherie durchmifst. Für diejenigen, welche weniger an die hier gebrauchte Bezeichnung gewöhnt sind, wollen wir sie folgendermafsen als Theorem hinstellen:

Theorem.

Wenn R und r die Radien zweier Kreise sind, von denen jener einem n-eck umgeschrieben, dieser demselben eingeschrieben ist, die Distanz ihrer Mittelpunkte a heifst, und man die Gröfsen k und α durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{r}{R+a},\ kk = \frac{4Ra}{(R+a)^2-rr}$$

bestimmt, so ist immer:

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-kk\sin^2\varphi}} = \frac{h}{n}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-kk\sin^2\varphi}},$$

wo h die Zahl der Umläufe des Vielecks durch die ganze Peripherie bedeutet. Diese Gleichung giebt zugleich die zwischen r, R, a stattfindende Bedingungsgleichung.

Da die Bedingungsgleichung $t = \frac{2hK}{n}$ von u gänzlich unabhängig ist, so folgt daraus, dass die Wahl des Anfangspunktes A von keinem Einfluss ist, wie Poncelet in dem zu Anfang angeführten Satze gezeigt hat. Übrigens kann man immer annehmen, dass h und n keinen Factor gemein haben, weil sonst das Vieleck in sich zurückkehrt.

So ist die in der Überschrift bezeichnete Aufgabe vollständig und in ihrer ganzen Allgemeinheit gelöst.

9.

Es sei $n = 2m$, also das Polygon von einer geraden Seitenzahl; dann sind A und $A^{(m)}$, A' und $A^{(m+1)}$, A'' und $A^{(m+2)}$, ... $A^{(m-1)}$ und $A^{(2m-1)}$ gegenüberstehende Ecken; und $AA^{(m)}$, $A'A^{(m+1)}$, $A''A^{(m+2)}$, ... die diese verbindenden Diagonalen. Diese werden dem Obigen zufolge einen Kreis berühren, dessen Elemente durch die Gleichungen

$$a = \frac{R(1-\Delta\,\mathrm{am}\,mt)}{1+\Delta\,\mathrm{am}\,mt},\quad r = \frac{2R\cos\mathrm{am}\,mt}{1+\Delta\,\mathrm{am}\,mt}$$

gegeben sind. Aber da $t = \frac{2hK}{2m}$, wo h eine ungerade Zahl ist, so wird $mt = hK$, woraus $\mathrm{am}\,mt = \frac{h\pi}{2}$. Es wird daher $r = 0$, $a = R\frac{1-\sqrt{1-kk}}{1+\sqrt{1-kk}}$. Der Kreis reducirt sich daher auf einen Punkt, in welchem sich alle jene Diagonalen schneiden, und welcher für alle die unendlich vielen Vielecke, die sich nach einem verschiedenen Anfangspunkte A unter den gegebenen Bedingungen construiren lassen, derselbe bleibt, da seine Bestimmung, die in der Gleichung $a = R\frac{1-\sqrt{1-kk}}{1+\sqrt{1-kk}}$ enthalten ist, von u oder φ gänzlich frei ist. Dieser Punkt ist einer der beiden, welche für die Schaar Kreise, welche denselben Ort der gleichen Tangenten haben, eine Art Grenze bilden, und durch welche alle jene Kreise, welche diese Schaar Kreise rechtwinklig schneiden und ihren Mittelpunkt in der Linie der gleichen Tangenten haben, gehen müssen. S. die Abhandlung von Herrn Steiner im 1sten Bande des Crelleschen Journals S. 161 ff.

Dieser Satz findet sich bei Herrn Poncelet am angeführten Ort S. 364 auf das System zweier Kegelschnitte erweitert.

Es dürfte nicht ohne Interesse für die Theorie der elliptischen Functionen sein, ähnliche Betrachtungen unmittelbar für das System zweier Kegelschnitte anzustellen. Das Integral dürfte dann in einer complicirteren Form erscheinen, die sich jedoch auf jene einfachere reduciren lassen muss. Vielleicht nehme ich später Gelegenheit, hierauf wieder zurückzukommen.

Den 1. April 1828.

DE
FUNCTIONIBUS ELLIPTICIS

COMMENTATIO PRIMA ET ALTERA

AUCTORE

C. G. J. JACOBI

PROF. MATH. REGIOM.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik,
Bd. 4. p. 371—390, Bd. 6. p. 397—403.

DE FUNCTIONIBUS ELLIPTICIS COMMENTATIO PRIMA *).

A. De transformatione functionum $E(u)$, $\Pi(u, a)$, quae ad speciem secundam et tertiam integralium ellipticorum pertinent. De transformatione functionis $\Omega(u)$.

1.

Iisdem, quas in *Fundamentis* proposui, adhibitis denominationibus, sit n numerus quilibet impar, sint m, m' numeri quilibet, per eundem ipsius n factorem uterque simul non divisibiles: demonstravi in *Fundamentis* theorema in theoria transformationis functionum ellipticarum fundamentale, posito $\omega = \frac{mK + m'iK'}{n}$

$$\lambda = k^n \{\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega \ldots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega\}^4,$$

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{\frac{\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega \ldots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega}{\sin\operatorname{am} 2\omega \sin\operatorname{am} 4\omega \ldots \sin\operatorname{am}(n-1)\omega}\right\}^2$$

atque insuper

$$x = \sin\operatorname{am} u, \quad y = \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$$

fore

$$y = \frac{x}{M} \cdot \frac{\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am} 2\omega}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am} 4\omega}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega}\right)}{(1 - k^2\sin^2\operatorname{am} 2\omega . x^2)(1 - k^2\sin^2\operatorname{am} 4\omega . x^2) \ldots (1 - k^2\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega . x^2)}.$$

E qua deinde formula derivavimus (*Fund.* §. 23) aequationem identicam, quae valet, quaecunque sit x quantitas:

$$(1.) \qquad x\prod(x^2 - \sin^2\operatorname{am} 2p\omega) - \frac{\lambda}{kM}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)\prod\left(x^2 - \frac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} 2p\omega}\right)$$
$$= [x - \sin\operatorname{am} u][x - \sin\operatorname{am}(u + 4\omega)] \ldots [x - \sin\operatorname{am}(u + 4(n-1)\omega)],$$

*) Prima haec commentatio seriem incipit commentationum, quae ut continuatio *Fundamentorum* spectari potest.

siquidem in productis praefixo Π designatis numero p tribuuntur valores $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$.

Formula (1.), singulis elementi x dignitatibus in utraque aequationis parte inter se comparatis, suppeditat nobis summas combinationum expressionum

$$\sin\operatorname{am} u, \quad \sin\operatorname{am}(u+4\omega), \quad \sin\operatorname{am}(u+8\omega), \quad \ldots, \quad \sin\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega).$$

Fit exempli gratia summa harum expressionum

$$= \frac{\lambda}{kM} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right);$$

summa *ambarum*

$$= -[\sin^2\operatorname{am} 2\omega + \sin^2\operatorname{am} 4\omega + \cdots + \sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega],$$

quam quantitatem constantem designabimus per $-\rho$. Hinc etiam deducitur summa quadratorum

$$\sin^2\operatorname{am} u + \sin^2\operatorname{am}(u+4\omega) + \cdots + \sin^2\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega) = \frac{\lambda^2}{k^2M^2} \sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + 2\rho,$$

sive

$$(2.) \qquad \frac{\lambda^2}{k^2M^2} \sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \Sigma \sin^2\operatorname{am} u - 2\rho,$$

siquidem per $\Sigma\varphi(u)$ designamus expressionem

$$\Sigma\varphi(u) = \varphi(u) + \varphi(u+4\omega) + \varphi(u+8\omega) + \cdots + \varphi(u+4(n-1)\omega).$$

E (2.) sequitur etiam:

$$(3.) \qquad \frac{\lambda^2}{k^2M^2} \cos^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \Sigma \cos^2\operatorname{am} u - 2\sigma,$$

$$(4.) \qquad \frac{1}{M^2} \Delta^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \Sigma \Delta^2\operatorname{am} u + 2\tau,$$

siquidem

$$(5.) \qquad \frac{\lambda^2}{k^2M^2} = n - 2\rho - 2\sigma,$$

$$(6.) \qquad \frac{1}{M^2} = n - 2k^2\rho + 2\tau.$$

Expressio $\cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ cum evanescat, posito $u = K$, obtinemus e (3.):

$$(7.) \qquad \sigma = \cos^2\operatorname{coam} 2\omega + \cos^2\operatorname{coam} 4\omega + \cdots + \cos^2\operatorname{coam}(n-1)\omega.$$

Expressio $\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ cum evanescat, posito $u = K + iK'$, atque insuper sit:

$$\Delta\operatorname{am}(u+K+iK') = \Delta\operatorname{coam}(u+iK') = ik'\operatorname{tg}\operatorname{am} u$$

(v. *Fund.* §. 19), e (4.) obtinemus:

$$(8.) \qquad \tau = k'k'[\operatorname{tg}^2\operatorname{am} 2\omega + \operatorname{tg}^2\operatorname{am} 4\omega + \cdots + \operatorname{tg}^2\operatorname{am}(n-1)\omega].$$

2.

Formulas (2.), (3.), (4.) etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$(9.) \quad \frac{\lambda^2}{k^2M^2} \sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \sin^2\operatorname{am} u + \Sigma[\sin^2\operatorname{am}(u+2p\omega) + \sin^2\operatorname{am}(u-2p\omega)] - 2\rho,$$

$$(10.) \quad \frac{\lambda^2}{k^2M^2} \cos^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \cos^2\operatorname{am} u + \Sigma[\cos^2\operatorname{am}(u+2p\omega) + \cos^2\operatorname{am}(u-2p\omega)] - 2\sigma,$$

$$(11.) \quad \frac{1}{M^2} \Delta^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \Delta^2\operatorname{am} u + \Sigma[\Delta^2\operatorname{am}(u+2p\omega) + \Delta^2\operatorname{am}(u-2p\omega)] + 2\tau,$$

semper tribuendo numero p valores $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$.

Ponatur iam:

$$\int_0^u \Delta^2\operatorname{am} u\, du = E(u),$$

qui paulo discrepat notationis modus ab eo, quem Cl. Legendre adhibuit, quo etiam in *Fundamentis* passim usi sumus. Posito enim $\varphi = \operatorname{am} u$, designat ille integralia elliptica, quae ad speciem secundam pertinent, per:

$$E(\varphi) = E(\operatorname{am} u) = \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi = \int_0^u \Delta^2\operatorname{am} u\, du,$$

ita ut nobis $E(u)$, quod illi $E(\operatorname{am} u)$. Porro per characterem E, argumento non adiecto, semper designabimus functionem:

$$E = E(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi,$$

quam ille per E^{I} denotat, eodemque modo per E' functionem:

$$E' = E(K', k') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\varphi, k')\, d\varphi.$$

His stabilitis, fit:

$$\int_0^u [\Delta^2\operatorname{am}(u+2p\omega) + \Delta^2\operatorname{am}(u-2p\omega)]\, du = E(u+2p\omega) + E(u-2p\omega).$$

Constans non adiicienda erit, quia utraque aequationis pars, posito $u = 0$, evanescit*). Unde e (11.), integratione facta ab $u = 0$ usque ad $u = u$:

$$(12.) \qquad \frac{1}{M} E\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = E(u) + \Sigma[E(u+2p\omega) + E(u-2p\omega)] + 2\tau u.$$

Formulam (12.) transformare licet ope theorematis noti de additione integralium ellipticorum, quae ad speciem secundam pertinent:

$$E(u+a) + E(u-a) = 2E(u) - \frac{2k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u},$$

quod, differentiatione facta, facile ex elementis comprobatur (v. *Fund.* §. 49). Cuius ope (12.) in hanc abit:

$$(13.) \quad nE(u) - \frac{1}{M} E\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + 2\tau u = 2k^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u \sum \frac{\sin^2 \operatorname{am} 2p\omega}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 2p\omega \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

Formulae (12.), (13.) concernunt transformationem integralium ellipticorum, quae ad speciem secundam pertinent. Easdem mox sub forma commodiore exhibebimus.

Ponamus:

$$\int_0^u E(u)\, du = \log \Omega(u),$$

cum sit:

$$\frac{2k^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} 2p\omega}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 2p\omega \sin^2 \operatorname{am} u} = -\frac{d \log(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 2p\omega \sin^2 \operatorname{am} u)}{du},$$

nanciscimur e (13.), iterum integratione facta ab $u = 0$ usque ad $u = u$:

$$n \log \Omega(u) - \log \Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + \tau uu = -\Sigma \log(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 2p\omega \sin^2 \operatorname{am} u),$$

sive:

$$(14.) \qquad e^{-\tau uu} \cdot \frac{\Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u)} = \Pi(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 2p\omega \sin^2 \operatorname{am} u)$$

siquidem, ut supra, designatur per $\Pi\varphi(p)$ productum

$$\Pi\varphi(p) = \varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\ldots\varphi\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

Posito $\sin \operatorname{am} u = x$, (14.) ita repraesentatur:

*) Fit enim generaliter $E(-u) = -E(u)$.

$$(15.) \quad e^{-\tau uu} \cdot \frac{\Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u)} = (1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 2\omega . xx)(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 4\omega . xx)\ldots(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(n-1)\omega . xx).$$

Haec expressio denominatorem constituit substitutionis rationalis, quae ad transformationem functionum ellipticarum adhibita est (v. supra),

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{\frac{x}{M}\left(1 - \frac{xx}{\sin^2 \operatorname{am} 2\omega}\right)\left(1 - \frac{xx}{\sin^2 \operatorname{am} 4\omega}\right)\cdots\left(1 - \frac{xx}{\sin^2 \operatorname{am}(n-1)\omega}\right)}{(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 2\omega . xx)(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 4\omega . xx)\ldots(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(n-1)\omega . xx)};$$

quem igitur denominatorem ope transcendentis novae $\Omega(u)$ seorsim exprimere licet. Quod est gravissimum theorema et maximi usus in universa theoria functionum ellipticarum.

Sit substitutio illa, siquidem $x = \sin \operatorname{am} u$:

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{x}{M} \cdot \frac{1 + A'x^2 + A''x^4 + \cdots + A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{n-1}}{1 + B'x^2 + B''x^4 + \cdots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{n-1}},$$

posito

$$1 + A'x^2 + A''x^4 + \cdots + A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{n-1} = \Pi\left(1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} 2p\omega}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} 2\omega}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} 4\omega}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(n-1)\omega}\right),$$

$$1 + B'x^2 + B''x^4 + \cdots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{n-1} = \Pi(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 2p\omega \sin^2 \operatorname{am} u)$$

$$= (1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 2\omega \sin^2 \operatorname{am} u)(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 4\omega \sin^2 \operatorname{am} u)\cdots(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(n-1)\omega \sin^2 \operatorname{am} u),$$

erit:

$$(16.) \quad e^{-\tau uu} \cdot \frac{\Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u)} = 1 + B' \sin^2 \operatorname{am} u + B'' \sin^4 \operatorname{am} u + \cdots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-1} \operatorname{am} u.$$

Hinc sequitur, sumptis logarithmis et differentiatione instituta,

$$(17.) \qquad nE(u) - \frac{1}{M} E\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + 2\tau u$$

$$= -\frac{\cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u \left[2B' \sin \operatorname{am} u + 4B'' \sin^3 \operatorname{am} u + \cdots + (n-1) B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-2} \operatorname{am} u\right]}{1 + B' \sin^2 \operatorname{am} u + B'' \sin^4 \operatorname{am} u + \cdots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-1} \operatorname{am} u}.$$

Quae docet formula elegantissima, quomodo ex ipso denominatore expressionis, pro functione transformata $\sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ inventae, continuo eruatur transformatio integralis elliptici, quod ad speciem secundam pertinet.

Valorem constantis τ eruis e (17.), ponendo u infinite parvum, quo facto $E(u)=u$, $\sin\operatorname{am} u = u$, $\cos\operatorname{am} u = \Delta\operatorname{am} u = 1$; unde fit:

$$n-\frac{1}{MM}+2\tau = -2B',$$

id quod, cum sit $B' = -k^2\rho$, cum formula (6.) convenit.

Adnotemus adhuc, ubi a formula (12.) proficisceris, integratione facta obtineri:

$$\text{(18.)}\qquad \Omega\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = e^{\tau uu}\cdot\left\{\begin{matrix}\Omega(u)\dfrac{\Omega(u+2\omega)\Omega(u+4\omega)\dots\Omega(u+(n-1)\omega)}{\Omega(2\omega)\Omega(4\omega)\dots\Omega((n-1)\omega)}\\ \times\dfrac{\Omega(u-2\omega)\Omega(u-4\omega)\dots\Omega(u-(n-1)\omega)}{\Omega(2\omega)\Omega(4\omega)\dots\Omega((n-1)\omega)}\end{matrix}\right\}.$$

3.

Ponamus brevitatis causa, siquidem $x=\sin\operatorname{am} u$,

$$U = \frac{x}{M}\left(1+A'x^2+A''x^4+\dots+A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}\right),$$

$$V = \quad 1+B'x^2+B''x^4+\dots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1},$$

ita ut:

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \frac{U}{V}.$$

Fit (17.):

$$nE(u)-\frac{1}{M}E\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+2\tau u = -\frac{dV}{Vdu},$$

unde, differentiatione facta,

$$n\Delta^2\operatorname{am} u-\frac{1}{M^2}\Delta^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+2\tau = \frac{dVdV-Vd^2V}{VVdu^2},$$

quae formula, advocata (6.):

$$\frac{1}{M^2} = n-2k^2\rho+2\tau,$$

in hanc abit:

$$\text{(19.)}\quad -nk^2\sin^2\operatorname{am} u+\frac{\lambda^2}{M^2}\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+2k^2\rho = \frac{dVdV-Vd^2V}{VVdu^2},$$

sive, multiplicatione facta per VV, in hanc:

$$k^2(2\rho-n\sin^2\operatorname{am} u)VV+\frac{\lambda^2}{M^2}UU = \frac{dV}{du}\frac{dV}{du}-V\frac{d^2V}{du^2}.$$

Porro vidimus in *Fundamentis* §. 21, posito $u+iK'$ loco u, sive $\frac{1}{k\sin\operatorname{am} u}$ loco $\sin\operatorname{am} u$, abire

$$V \text{ in } \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}}\cdot\frac{U}{\sin^n\operatorname{am} u},\quad \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) \text{ in } \frac{1}{\lambda\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)},$$

unde expressio:

$$\frac{dVdV-Vd^2V}{VVdu^2} = -\frac{d^2\log V}{du^2}$$

abit in:

$$\frac{nd^2\log\sin\operatorname{am} u}{du^2}-\frac{d^2\log U}{du^2} = n\left\{k^2\sin^2\operatorname{am} u-\frac{1}{\sin^2\operatorname{am} u}\right\}-\frac{d^2\log U}{du^2}\,{}^{*)},$$

ideoque (19.) in:

$$-nk^2\sin^2\operatorname{am} u+\frac{1}{M^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}+2k^2\rho = \frac{dUdU-Ud^2U}{UUdu^2},$$

unde, multiplicatione facta per UU, fit:

$$k^2(2\rho-n\sin^2\operatorname{am} u)UU+\frac{1}{M^2}VV = \frac{dU}{du}\frac{dU}{du}-U\frac{d^2U}{du^2}.$$

Formulis inventis:

$$\text{(20.)}\qquad k^2(2\rho-n\sin^2\operatorname{am} u)VV+\frac{\lambda^2}{M^2}UU = \frac{dV}{du}\frac{dV}{du}-V\frac{d^2V}{du^2},$$

$$\text{(21.)}\qquad k^2(2\rho-n\sin^2\operatorname{am} u)UU+\frac{1}{M^2}VV = \frac{dU}{du}\frac{dU}{du}-U\frac{d^2U}{du^2}$$

adiungi debet haec:

$$\text{(22.)}\qquad V\frac{dU}{du}-U\frac{dV}{du} = \frac{1}{M}\sqrt{(VV-UU)(VV-\lambda^2UU)},$$

quae e differentiatione aequationis $\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \frac{U}{V}$ prodit; cuius ope e (20.), (21.) quantitatum U, V alterutram eliminare licet; quo facto pervenietur ad aequationem differentialem tertii ordinis. Quod sane est theorema memorabile, satis reconditum, numeratorem et denominatorem substitutionis, U, V singulos definiri posse per aequationem differentialem tertii ordinis.

Ipsas aequationes differentiales tertii ordinis prolixitatis causa non

*) v. *Fund.* §. 42 (1.).

apponam; omnibus casibus commodius videbitur, aequationibus (20.)—(22.), quae earum locum tenent, iunctis uti. Quarum usum insignem ad formationem algebraicam functionum U, V, sive ipsius, quae ad transformationem ducit, substitutionis alio loco fusius demonstrabo. Hoc loco tantum adnotemus adhuc verificationem formularum (20.), (21.) sequentem.

Divisa enim (20.) per VV, (21.) per UU, prodit:

$$k^2(2\rho - n\sin^2\mathrm{am}\, u) + \frac{\lambda^2}{M^2}\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = -\frac{d^2\log V}{du^2},$$

$$k^2(2\rho - n\sin^2\mathrm{am}\, u) + \frac{1}{M^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)} = -\frac{d^2\log U}{du^2},$$

unde, subtractione facta:

$$\frac{1}{M^2}\left\{\lambda^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) - \frac{1}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}\right\} = \frac{d^2\log\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{du^2},$$

quae statim prodit e formula:

$$\frac{d^2\log\sin\mathrm{am}\, u}{du^2} = k^2\sin^2\mathrm{am}\, u - \frac{1}{\sin^2\mathrm{am}\, u},$$

posito $\frac{u}{M}$ loco u et λ loco k.

Integrale completum aequationum differentialium tertii ordinis, quibus functiones U, V definiuntur, in promptu esse non videtur.

4.

Integrata formula supra allegata §. 2.:

$$(23.)\qquad E(u+a) + E(u-a) = 2E(u) - \frac{2k^2\sin^2\mathrm{am}\, a\sin\mathrm{am}\, u\cos\mathrm{am}\, u\,\Delta\mathrm{am}\, u}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\, a\sin^2\mathrm{am}\, u}$$

inde a $u = 0$ usque ad $u = u$, obtinemus:

$$\log\frac{\Omega(u+a)}{\Omega(a)} + \log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(a)} = 2\log\Omega(u) + \log(1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\, a\sin^2\mathrm{am}\, u),$$

unde prodit formula in analysi functionis Ω fundamentalis:

$$(24.)\qquad \frac{\Omega(u+a)\Omega(u-a)}{\Omega^2(a)\Omega^2(u)} = 1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\, a\sin^2\mathrm{am}\, u.$$

E formula (23.), a et u inter se commutatis, fit:

$$(25.)\qquad E(u+a) - E(u-a) = 2E(a) - \frac{2k^2\sin\mathrm{am}\, a\cos\mathrm{am}\, a\,\Delta\mathrm{am}\, a\sin^2\mathrm{am}\, u}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\, a\sin^2\mathrm{am}\, u},$$

qua integrata inde a $u = 0$, obtinemus:

$$\log\frac{\Omega(u+a)}{\Omega(u-a)} - 2uE(a) = -2k^2\sin\mathrm{am}\, a\cos\mathrm{am}\, a\,\Delta\mathrm{am}\, a\int_0^u\frac{\sin^2\mathrm{am}\, u\, du}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\, a\sin^2\mathrm{am}\, u}.$$

Designavi in ***Fundamentis*** per characterem $\Pi(u, a)$ integrale, quod secundum eam, quam Cl. Legendre instituit, distributionem integralium ellipticorum in classes, ad speciem tertiam pertinet,

$$\Pi(u, a) = k^2\sin\mathrm{am}\, a\cos\mathrm{am}\, a\,\Delta\mathrm{am}\, a\int_0^u\frac{\sin^2\mathrm{am}\, u\, du}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\, a\sin^2\mathrm{am}\, u},$$

qua adhibita denotatione, fit:

$$(26.)\qquad \Pi(u, a) = uE(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)}.$$

Quae est formula fundamentalis pro reductione integralium ellipticorum, quae ad speciem tertiam pertinent, ad functiones $E(u)$, $\Omega(u)$. Cf. ***Fund.*** §§. 49. sqq.

Ope formulae (26.) e formulis pro transformatione functionum $E(u)$, $\Omega(u)$ inventis, extemplo nanciscimur eas, quae transformationem integralium ellipticorum tertiae speciei sive functionis Π concernunt. Fit enim e (26.), posito $\frac{u}{M}$, $\frac{a}{M}$, λ loco u, a, k:

$$(27.)\qquad \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) = \frac{u}{M}E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega\left(\frac{u-a}{M}, \lambda\right)}{\Omega\left(\frac{u+a}{M}, \lambda\right)},$$

de qua formula subtrahamus sequentem:

$$n\Pi(u, a) = nuE(a) + \frac{n}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)},$$

prodit:

$$(28.)\qquad \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - n\Pi(u, a)$$

$$= u\left\{\frac{1}{M}E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) - nE(a)\right\} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega\left(\frac{u-a}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u-a)} - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega\left(\frac{u+a}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u+a)},$$

quae formula ope (16.), (17.) in sequentem abit:

$$(29.)\qquad \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - n\Pi(u, a)$$
$$= \left\{\frac{\cos\operatorname{am} a\, \Delta\operatorname{am} a\,[2B'\sin\operatorname{am} a + 4B''\sin^3\operatorname{am} a + \cdots + (n-1)B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-2}\operatorname{am} a]}{1 + B'\sin^2\operatorname{am} a + B''\sin^4\operatorname{am} a + \cdots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\operatorname{am} a}\right\} u$$
$$+ \tfrac{1}{2}\log\frac{1 + B'\sin^2\operatorname{am}(u-a) + B''\sin^4\operatorname{am}(u-a) + \cdots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\operatorname{am}(u-a)}{1 + B'\sin^2\operatorname{am}(u+a) + B''\sin^4\operatorname{am}(u+a) + \cdots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\operatorname{am}(u+a)},$$

quae formula fundamentalis docet, quomodo ex ipso denominatore substitutionis confestim eruatur transformatio integralium ellipticorum, quae ad speciem tertiam pertinent.

Eandem aliter exhibere licet per formulas (12.), (18.), quarum ope fit e (27.):

$$\Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - \frac{u}{M} E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) + 2\tau a u$$
$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)} + \Sigma\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u+2p\omega-a)}{\Omega(u+2p\omega+a)} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-2p\omega-a)}{\Omega(u-2p\omega+a)}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)} + \Sigma\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a+2p\omega)}{\Omega(u+a-2p\omega)} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a-2p\omega)}{\Omega(u+a+2p\omega)}\right\},$$

unde sequentes duas deducimus formulas:

$$(30.)\quad \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) + u\left\{nE(a) - \frac{1}{M} E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) + 2\tau a\right\}$$
$$= \Pi(u, a) + \Pi(u+2\omega, a) + \Pi(u+4\omega, a) + \cdots + \Pi(u+(n-1)\omega, a)$$
$$+ \Pi(u-2\omega, a) + \Pi(u-4\omega, a) + \cdots + \Pi(u-(n-1)\omega, a),$$

$$(31.)\quad \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) = \Pi(u, a) + \Pi(u, a+2\omega) + \Pi(u, a+4\omega) + \cdots + \Pi(u, a+(n-1)\omega)$$
$$+ \Pi(u, a-2\omega) + \Pi(u, a-4\omega) + \cdots + \Pi(u, a-(n-1)\omega);$$

quae et ipsae sunt formulae novae fundamentales. Dedimus in *Fund.* §. 55. (7.) formulam:

$$\Pi(u, a+b) + \Pi(u, a-b) - 2\Pi(u, a)$$
$$= -2k^2\sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a\,\frac{\sin^2\operatorname{am} b}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} b\sin^2\operatorname{am} a}\cdot u + \tfrac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am} b\sin^2\operatorname{am}(u-a)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} b\sin^2\operatorname{am}(u+a)},$$

cuius ope fit e (31.):

$$(32.)\qquad \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - n\Pi(u, a)$$
$$= -2k^2\sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a\,\Sigma\frac{\sin^2\operatorname{am} 2p\omega}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} 2p\omega\sin^2\operatorname{am} a}\cdot u + \Sigma\tfrac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am} 2p\omega\sin^2\operatorname{am}(u-a)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} 2p\omega\sin^2\operatorname{am}(u+a)},$$

siquidem numero p valores tribuis $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Quae facile etiam e (29.) sequitur formula.

B. De functionibus simpliciter periodicis $\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u)$ earumque singularibus proprietatibus.

5.

Accuratius examinemus functionem nostram $\Omega(u)$, eiusque primum reductionem pro argumento imaginario formae iu ad argumentum reale tradamus.

Posito $\sin\varphi = i\operatorname{tg}\psi$, fit:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{i\,d\psi}{\Delta(\psi, k')},$$
$$\Delta\varphi\, d\varphi = \frac{i\Delta(\psi, k')\,d\psi}{\cos^2\psi},$$

unde, integratione facta:

$$\int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi = i\left\{\operatorname{tg}\psi\,\Delta(\psi, k') + \int_0^\psi \frac{k'k'\sin^2\psi}{\Delta(\psi, k')}\,d\psi\right\}.$$

Haec formula, posito:

$$\varphi = \operatorname{am}(iu, k), \quad \text{unde} \quad \psi = \operatorname{am}(u, k'),$$

e notatione nostra ita repraesentatur:

$$(1.)\qquad E(iu) = i[\operatorname{tg}\operatorname{am}(u, k')\,\Delta\operatorname{am}(u, k') + u - E(u, k')],$$

unde, integratione facta:

$$\log\Omega(iu) = \log\cos\operatorname{am}(u, k') - \frac{uu}{2} + \log\Omega(u, k'),$$

sive:

$$(2.)\qquad \Omega(iu) = e^{-\frac{uu}{2}}\cos\operatorname{am}(u, k')\,\Omega(u, k').$$

Cf. *Fund.* §. 56. (1.), (2.).

6.

His praemissis, quaeramus iam, quasnam subeat mutationes functio $\Omega(u)$, dum functiones ellipticae immutatae manent, i. e. dum argumentum u mutatur in $u + 4mK + 4m'iK'$, designantibus m, m' numeros positivos sive negativos.

Nota est ex elementis formula:

$$(3.)\qquad E(u + 2mK) = E(u) + 2mE,$$

siquidem per simplicem litteram E, argumento non addito, designamus functionem integram $E(K)$, quam Cl. Legendre designat per E^{1}; plagula apposita, per characterem E' designabimus functionem integram, quae ad complementum moduli pertinet, sive functionem $E' = E(K', k')$, sicuti initio indicavimus. Integrata (3.), obtinemus:

$$\log \frac{\Omega(u+2mK)}{\Omega(2mK)} = 2mE.u + \log \Omega(u),$$

sive:

$$\frac{\Omega(u+2mK)}{\Omega(2mK)} = e^{2mE.u}\,\Omega(u). \tag{4.}$$

Posito in hac formula $u = -2mK$, cum sit $\Omega(-u) = \Omega(u)$, $\Omega(0) = 1$, prodit:

$$\Omega(2mK) = e^{2mmEK},$$

cuius ope (4.) abit in:

$$\Omega(u+2mK) = e^{2mE.(u+mK)}\,\Omega(u), \tag{5.}$$

sive in:

$$e^{-\frac{E}{2K}(u+2mK)^2}\,\Omega(u+2mK) = e^{-\frac{Euu}{2K}}\,\Omega(u), \tag{6.}$$

quae docet formula, functionem

$$e^{-\frac{Euu}{2K}}\,\Omega(u),$$

mutato u in $u+2mK$, immutatam manere ideoque cum functionibus ellipticis argumenti u periodum realem communem habere.

Ponatur in formula (2.) $u+2m'K'$ loco u, fit:

$$\Omega(iu+2m'iK') = (-1)^{m'} e^{-\frac{(u+2m'K')^2}{2}} \cos \operatorname{am}(u, k')\, \Omega(u+2m'K', k'),$$

unde, cum sit e (6.):

$$e^{-\frac{E'}{2K'}(u+2m'K')^2}\,\Omega(u+2m'K', k') = e^{-\frac{E'uu}{2K'}}\,\Omega(u, k'),$$

obtinemus:

$$e^{-\frac{E'}{2K'}(u+2m'K')^2}\,\Omega(iu+2m'iK') = (-1)^{m'} e^{-\frac{(u+2m'K')^2}{2}} \cos \operatorname{am}(u, k')\, e^{-\frac{E'uu}{2K'}}\,\Omega(u, k'),$$

sive:

$$\begin{aligned} e^{\frac{K'-E'}{2K'}(u+2m'K')^2}\,\Omega(iu+2m'iK') &= (-1)^{m'} e^{-\frac{E'uu}{2K'}} \cos \operatorname{am}(u, k')\, \Omega(u, k') \\ &= (-1)^{m'} e^{\frac{(K'-E')uu}{2K'}}\,\Omega(iu), \end{aligned}$$

unde, posito $-iu$ loco u, sive u loco iu:

$$e^{-\frac{K'-E'}{2K'}(u+2m'iK')^2}\,\Omega(u+2m'iK') = (-1)^{m'} e^{-\frac{K'-E'}{2K'}uu}\,\Omega(u), \tag{7.}$$

quae docet formula, expressionem

$$e^{-\frac{(K'-E')uu}{2K'}}\,\Omega(u),$$

mutato u in $u+4m'iK'$, immutatam manere, sive cum functionibus ellipticis argumenti u alteram periodum imaginariam communem habere.

Adnotare convenit, e formula nota, a Cl. Legendre inventa,

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}$$

sive:

$$\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{\pi}{2KK'}$$

sequi:

$$-\frac{K'-E'}{2K'} = \frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K},$$

unde formulam (7.) etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$e^{\left(\frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K}\right)(u+2m'iK')^2}\,\Omega(u+2m'iK') = (-1)^{m'} e^{\left(\frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K}\right)uu}\,\Omega(u). \tag{8.}$$

Mutato in hac formula u in $u+2mK$, prodit e (6.):

$$e^{\left(\frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K}\right)(u+2mK+2m'iK')^2}\,\Omega(u+2mK+2m'iK') = (-1)^{m'} e^{\frac{\pi}{4KK'}(u+2mK)^2} e^{-\frac{Euu}{2K}}\,\Omega(u).$$

Fit autem:

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{4KK'}[(u+2mK+2m'iK')^2 - (u+2mK)^2] \\ &= \frac{m'i\pi}{4K}[4u+4mK+4m'iK'] + mm'i\pi \\ &= \frac{m'i\pi}{4K(mK+m'iK')}[(u+2mK+2m'iK')^2 - uu] + mm'i\pi. \end{aligned}$$

Hinc ubi adnotamus, esse $e^{mm'i\pi} = (-1)^{mm'}$, atque brevitatis causa ponimus:

$$r = \frac{m'i\pi}{4K(mK+m'iK')} - \frac{E}{2K},$$

obtinemus formulam:

$$(9.)\qquad e^{r(u+2mK+2m'iK')^2}\Omega(u+2mK+2m'iK') = (-1)^{m'(m+1)}e^{ruu}\Omega(u),$$

quae docet formula, expressionem

$$e^{\left(\frac{m'i\pi}{4K(mK+m'iK')}-\frac{E}{2K}\right)uu}\Omega(u) = e^{ruu}\Omega(u),$$

mutato u in $u+4mK+4m'iK'$, immutatam manere, unde et ipsa cum functionibus ellipticis argumenti u periodum communem habet.

Adnotare convenit, valorem ipsius r non mutari, ubi loco m, m' ponitur pm, pm'.

Formula (9.) etiam hunc in modum repraesentari potest:

$$\begin{aligned}(10.)\quad \Omega(u+2mK+2m'iK') &= (-1)^{m'(m+1)}e^{-4r(mK+m'iK')(u+mK+m'iK')}\Omega(u)\\ &= (-1)^{m'(m+1)}e^{\frac{2E(mK+m'iK')-m'i\pi}{K}(u+mK+m'iK')}\Omega(u),\end{aligned}$$

quae docet formula generalis, quasnam functio $\Omega(u)$ mutationes patitur, dum functiones ellipticae immutatae manent. Posito $u=0$, obtinemus e (10.):

$$(11.)\qquad \Omega(2mK+2m'iK') = (-1)^{m'}e^{\frac{2E}{K}(mK+m'iK')^2+m'm'\pi\frac{K'}{K}}.$$

Sumptis logarithmis et differentiatione instituta, e (10.) obtinemus:

$$\begin{aligned}(12.)\qquad E(u+2mK+2m'iK') &= E(u)+\frac{2E(mK+m'iK')}{K}-\frac{m'i\pi}{K}\\ &= E(u)+2mE+2m'i(K'-E'),\end{aligned}$$

unde, posito $u=0$,

$$(13.)\qquad E(2mK+2m'iK') = 2mE+2m'i(K'-E').$$

7.

Ponamus in sequentibus:

$$\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u),$$

erit e (9.), posito $2m$, $2m'$ loco m, m':

$$\chi(u+4mK+4m'iK') = \chi(u),$$

ita ut $\chi(u)$ sit functio periodica. Iam igitur pro innumeris valoribus, quos r induere potest, dum numeris m, m' alios et alios tribuis valores, innumeras nacti sumus functiones periodicas $\chi(u)$, quae singulae cum functionibus ellipticis unam periodum communem habent. Et vice versa, quamcunque ex innumeris

periodis, quas functiones ellipticae habent, eligere placet, quantitatem r ita semper determinare licet, ut functio:

$$\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u)$$

eadem gaudeat periodo. E variis functionibus illis periodicis $\chi(u)$ in *Fundamentis* eam elegimus, quae cum functionibus ellipticis periodum realem communem habet, pro qua $m'=0$ ideoque $r=-\frac{E}{2K}$. Quam functionem ibidem designavimus per characterem particularem Θ, ita ut:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = e^{-\frac{Euu}{2K}}\Omega(u),$$

omniaque, quae loco citato de functione Θ proposita sunt, vel nulla vel levi mutatione facta, ad functionem generaliorem $\chi(u)$ extenduntur.

E formulis supra exhibitis:

$$\frac{\Omega(u+a)\Omega(u-a)}{\Omega^2(a)\Omega^2(u)} = 1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u,$$

$$\Pi(u,a) = \frac{u}{\Omega(a)}\cdot\frac{d\Omega(a)}{da}+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)},$$

sequitur etiam, posito:

$$\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u),$$

quaecunque sit r constans:

$$(14.)\qquad \frac{\chi(u+a)\chi(u-a)}{\chi^2(a)\chi^2(u)} = 1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u,$$

$$(15.)\qquad \Pi(u,a) = \frac{u}{\chi(a)}\cdot\frac{d\chi(a)}{da}+\tfrac{1}{2}\log\frac{\chi(u-a)}{\chi(u+a)}.$$

8.

Ponamus, ut supra:

$$mK+m'iK' = n\omega,$$

designante n numerum imparem, m, m' numeros quoslibet positivos seu negativos eiusmodi, ut numeri m, m', n per eundem non divisibiles sint numerum; ex antecedentibus fit:

$$\chi(u+4n\omega) = \chi(u).$$

Formemus iam productum

$$\frac{\chi(u)\chi(u+4\omega)\chi(u+8\omega)\ldots\chi(u+4(n-1)\omega)}{\chi^2(4\omega)\chi^2(8\omega)\ldots\chi^2(2(n-1)\omega)} = \psi(u),$$

patet, posito $u+4\omega$ loco u, quemlibet factorem in subsequentem abire, ultimum vero in primum; unde, cum productum ex omnibus conflatum nil mutetur, fit:

$$\psi(u+4\omega) = \psi(u),$$

ideoque etiam, designante p numerum quemlibet positivum seu negativum:

$$\psi(u+4p\omega) = \psi(u).$$

Jam cum generaliter sit:

$$\chi(u+4(n-p)\omega) = \chi(u-4p\omega),$$

fit e (14.):

$$\frac{\chi(u+4\omega)\,\chi(u+4(n-1)\omega)}{\chi^2(4\omega)} = (1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4\omega\sin^2\mathrm{am}\,u)\chi^2(u),$$
$$\frac{\chi(u+8\omega)\,\chi(u+4(n-2)\omega)}{\chi^2(8\omega)} = (1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,8\omega\sin^2\mathrm{am}\,u)\chi^2(u),$$

. . . .

unde productum $\psi(u)$ etiam hunc in modum exhibere licet:

$$(16.)\quad \psi(u) = \chi^n(u)[1+B'\sin^2\mathrm{am}\,u+B''\sin^4\mathrm{am}\,u+\cdots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u],$$

siquidem, ut supra, ponis denominatorem substitutionis:

$$(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4\omega\sin^2\mathrm{am}\,u)\dots(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,2(n-1)\omega\sin^2\mathrm{am}\,u)$$
$$= 1+B'\sin^2\mathrm{am}\,u+B''\sin^4\mathrm{am}\,u+\cdots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u.$$

Iam cum sit $\psi(u+4p\omega) = \psi(u)$, fluit e (16.) formula fundamentalis maximi momenti,

$$(17.)\quad \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)}$$
$$= \sqrt[n]{\frac{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,u+B''\sin^4\mathrm{am}\,u+\cdots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u}{1+B'\sin^2\mathrm{am}(u+4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(u+4p\omega)+\cdots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}(u+4p\omega)}}.$$

Posito $u=0$, fit e (17.):

$$(18.)\quad \chi(4p\omega) = \frac{1}{\sqrt[n]{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega+B''\sin^4\mathrm{am}\,4p\omega+\cdots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,4p\omega}}.$$

9.

Posito $\sin\mathrm{am}\,u = x$, cum sit:

$$\sin\mathrm{am}(u\pm a) = \frac{x\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\,\mathrm{am}\,a\pm\sqrt{(1-xx)(1-k^2xx)}\sin\mathrm{am}\,a}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,.\,xx},$$

videmus, expressionem

$$\frac{1+B'\sin^2\mathrm{am}(u\pm 4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(u\pm 4p\omega)+\cdots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}(u\pm 4p\omega)}{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega+B''\sin^4\mathrm{am}\,4p\omega+\cdots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,4p\omega}$$

induere formam:

$$\frac{V^{(p)}\pm\sqrt{(1-xx)(1-k^2xx)}\,W^{(p)}}{(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega\,.\,xx)^{n-1}},$$

designantibus $V^{(p)}$, $W^{(p)}$ functiones ipsius x integras rationales. Hinc, ubi insuper ponitur:

$$V = 1+B'\sin^2\mathrm{am}\,u+B''\sin^4\mathrm{am}\,u+\cdots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u,$$

fit e (17.), (18.):

$$(19.)\qquad \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\frac{V(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega\,.\,xx)^{n-1}}{V^{(p)}+\sqrt{(1-xx)(1-k^2xx)}\,W^{(p)}}},$$

$$(20.)\qquad \frac{\chi(u-4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\frac{V(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega\,.\,xx)^{n-1}}{V^{(p)}-\sqrt{(1-xx)(1-k^2xx)}\,W^{(p)}}}.$$

Quibus in se ductis, cum sit e (14.):

$$\frac{\chi(u+4p\omega)\,\chi(u-4p\omega)}{\chi^2(4p\omega)\,\chi^2(u)} = 1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega\,.\,xx,$$

obtinemus:

$$[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega\,.\,xx]^n = \frac{VV(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega\,.\,xx)^{2n-2}}{V^{(p)}V^{(p)}-(1-xx)(1-k^2xx)\,W^{(p)}W^{(p)}},$$

sive:

$$V^{(p)}V^{(p)}-(1-xx)(1-k^2xx)\,W^{(p)}W^{(p)} = VV(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega\,.\,xx)^{n-2}.$$

Iam vero functio V factorem continet $1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega\,.\,xx$, ita ut, posito

$$V = V_p(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega\,.\,xx),$$

sit V_p functio integra: qua substituta, fit:

$$(21.)\quad V^{(p)}V^{(p)}-(1-xx)(1-k^2xx)\,W^{(p)}W^{(p)} = V_pV_p(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega\,.\,xx)^n.$$

Hinc e (19.), (20.) facile sequitur:

$$(22.)\qquad \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\frac{V^{(p)}-\sqrt{(1-xx)(1-k^2xx)}\,W^{(p)}}{V_p}},$$

$$(23.)\qquad \frac{\chi(u-4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\frac{V^{(p)}+\sqrt{(1-xx)(1-k^2xx)}\,W^{(p)}}{V_p}}.$$

Erit insuper $V^{(p)}$ functio ipsius x par ordinis $2n-4$,
$W^{(p)}$ - - impar ordinis $2n-5$,
V_p - - par ordinis $n-3$.

10.

Ponamus brevitatis causa:

$$\Phi(u) = 1+B'\sin^2\mathrm{am}\,u+B''\sin^4\mathrm{am}\,u+\cdots+B^{(\frac{n-1}{2})}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u,$$

fit e (17.):

$$\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)} = \sqrt[n]{\frac{\Phi(u)}{\Phi(u+4p\omega)}}; \tag{24.}$$

sumptis logarithmis et differentiatione instituta, prodit:

$$\frac{\chi'(u+4p\omega)}{\chi(u+4p\omega)}-\frac{\chi'(u)}{\chi(u)} = \frac{1}{n}\,\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)}-\frac{1}{n}\,\frac{\Phi'(u+4p\omega)}{\Phi(u+4p\omega)}, \tag{25.}$$

siquidem ponitur

$$\chi'(u) = \frac{d\chi(u)}{du},\quad \Phi'(u) = \frac{d\Phi(u)}{du}.$$

Fit porro, cum sit $\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u)$:

$$\frac{\chi'(u)}{\chi(u)} = 2ru+\frac{\Omega'(u)}{\Omega(u)} = 2ru+E(u),$$

siquidem $\Omega'(u) = \frac{d\Omega(u)}{du}$. Iam posito $u = 0$, e (25.) eruis:

$$\frac{\chi'(4p\omega)}{\chi(4p\omega)} = -\frac{1}{n}\,\frac{\Phi'(4p\omega)}{\Phi(4p\omega)},$$

sive, posito brevitatis causa $\mathrm{am}\,4p\omega = \alpha_p$:

$$E(4p\omega)+8rp\omega = -\frac{1}{n}\,\frac{\Phi'(4p\omega)}{\Phi(4p\omega)} \tag{26.}$$

$$= -\frac{1}{n}\,\frac{\cos\alpha_p\Delta\alpha_p[2B'\sin\alpha_p+4B''\sin^3\alpha_p+\cdots+(n-1)B^{(\frac{n-1}{2})}\sin^{n-2}\alpha_p]}{1+B'\sin^2\alpha_p+B''\sin^4\alpha_p+\cdots+B^{(\frac{n-1}{2})}\sin^{n-1}\alpha_p}.$$

Quae formula docet, quomodo species secunda integralium ellipticorum, casu, quo argumentum est pars aliquota ipsius $4(mK+m'iK')$, exhiberi possit.

E formula (15.) obtinemus:

$$\Pi(u,a) = u\frac{\chi'(a)}{\chi(a)}+\tfrac{1}{2}\log\frac{\chi(u-a)}{\chi(u+a)} = u[E(a)+2ra]+\tfrac{1}{2}\log\frac{\chi(u-a)}{\chi(u+a)},$$

unde, advocata (24.):

$$\Pi(4p\omega,a) = 4p\omega[E(a)+2ra]+\tfrac{1}{2}\log\frac{\chi(a-4p\omega)}{\chi(a+4p\omega)} \tag{27.}$$

$$= 4p\omega[E(a)+2ra]+\frac{1}{2n}\log\frac{\Phi(a+4p\omega)}{\Phi(a-4p\omega)},$$

$$\Pi(u,4p\omega) = u[E(4p\omega)+8rp\omega]+\tfrac{1}{2}\log\frac{\chi(u-4p\omega)}{\chi(u+4p\omega)} \tag{28.}$$

$$= -\frac{u}{n}\cdot\frac{\Phi'(4p\omega)}{\Phi(4p\omega)}+\frac{1}{2n}\log\frac{\Phi(u+4p\omega)}{\Phi(u-4p\omega)},$$

sive:

$$\Pi(4p\omega,a) = 4p\omega[E(a)+2ra] \tag{29.}$$

$$+\frac{1}{2n}\log\frac{1+B'\sin^2\mathrm{am}(a+4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(a+4p\omega)+\cdots+B^{(\frac{n-1}{2})}\sin^{n-1}\mathrm{am}(a+4p\omega)}{1+B'\sin^2\mathrm{am}(a-4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(a-4p\omega)+\cdots+B^{(\frac{n-1}{2})}\sin^{n-1}\mathrm{am}(a-4p\omega)},$$

$$\Pi(u,4p\omega) \tag{30.}$$

$$= -\frac{u}{n}\cdot\frac{\cos\alpha_p\Delta\alpha_p[2B'\sin\alpha_p+4B''\sin^3\alpha_p+\cdots+(n-1)B^{(\frac{n-1}{2})}\sin^{n-2}\alpha_p]}{1+B'\sin^2\alpha_p+B''\sin^4\alpha_p+\cdots+B^{(\frac{n-1}{2})}\sin^{n-1}\alpha_p}$$

$$+\frac{1}{2n}\log\frac{1+B'\sin^2\mathrm{am}(u+4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(u+4p\omega)+\cdots+B^{(\frac{n-1}{2})}\sin^{n-1}\mathrm{am}(u+4p\omega)}{1+B'\sin^2\mathrm{am}(u-4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(u-4p\omega)+\cdots+B^{(\frac{n-1}{2})}\sin^{n-1}\mathrm{am}(u-4p\omega)}.$$

Quae formulae docent, quomodo exhiberi possit species tertia integralium ellipticorum casibus, quibus sive amplitudinis sive parametri argumentum (v. *Fund.* §. 49.) est pars aliquota ipsius $4(mK+m'iK')$.

11.

In formula fundamentali (24.):

$$\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)} = \sqrt[n]{\frac{\Phi(u)}{\Phi(u+4p\omega)}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,u+B''\sin^4\mathrm{am}\,u+\cdots+B^{(\frac{n-1}{2})}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u}{1+B'\sin^2\mathrm{am}(u+4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(u+4p\omega)+\cdots+B^{(\frac{n-1}{2})}\sin^{n-1}\mathrm{am}(u+4p\omega)}}$$

altera aequationis pars functionem continet $\chi(u)$, quae unam habet periodum, altera autem functione $\sin\mathrm{am}\,u$ constat, quae praeter hanc alia adhuc gaudet, ut quae dupliciter periodica est. Dum igitur ad eam alteram applicas periodum, expressio

$$\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)}$$

mutabitur quidem, neque tamen aliam subire potest mutationem, nisi quae oritur ex ambiguitate n^{ti} radicalis. Quod theorema gravissimum, expressionem

$$\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)},$$

quae cum functionibus ellipticis unam habet periodum communem, dum ei aliam, qua illae gaudent, applicas periodum, aliam mutationem non pati, nisi quod per radicem aequationis $x^n = 1$ multiplicatur, ex ipsa natura functionis $\chi(u)$ iam comprobemus.

Ponamus

$$mK+m'iK' = Q, \quad \mu K+\mu'iK' = Q',$$

sit porro:

$$aK+a'iK' = pQ+p'Q',$$

unde, quoties p, p', m, m', μ, μ' quantitates reales:

$$a = pm+p'\mu, \qquad a' = pm'+p'\mu'$$

ideoque:

$$p = \frac{\mu'a-\mu a'}{m\mu'-m'\mu}, \quad p' = \frac{ma'-m'a}{m\mu'-m'\mu}.$$

Sint m, m', μ, μ' numeri integri positivi vel negativi quilibet eiusmodi, ut

$$m\mu'-m'\mu = 1,$$

erit:

$$p = \mu'a-\mu a', \quad p' = ma'-m'a,$$

unde patet, quicunque sint numeri integri a, a', etiam p, p' integros fore et vice versa. Fit porro:

$$K = \mu'Q-m'Q', \quad iK' = mQ'-\mu Q.$$

Iam quicunque sint numeri integri positivi seu negativi a, a', erit

$$\sin\operatorname{am}(u+4aK+4a'iK') = \sin\operatorname{am} u,$$

unde etiam, quicunque sint numeri integri positivi seu negativi p, p':

$$\sin\operatorname{am}(u+4pQ+4p'Q') = \sin\operatorname{am} u.$$

Innumerae periodi, quibus gaudent functiones ellipticae, componi possunt omnes e binis, quae continentur aequationibus:

$$\sin\operatorname{am}(u+4K) = \sin\operatorname{am} u, \quad \sin\operatorname{am}(u+4iK') = \sin\operatorname{am} u.$$

Quarum in locum ex antecedentibus patet substitui posse has:

$$\sin\operatorname{am}(u+4Q) = \sin\operatorname{am} u, \quad \sin\operatorname{am}(u+4Q') = \sin\operatorname{am} u,$$

siquidem:

$$Q = mK+m'iK', \quad Q' = \mu K+\mu'iK',$$

designantibus m, m', μ, μ' numeros integros positivos vel negativos eiusmodi, ut sit $m\mu'-m'\mu = 1$. Unde videmus, periodos, quibus functiones ellipticae gaudent, inumeris modis e binis componi posse. Eiusmodi autem binas periodos, e quibus reliquae componi possunt omnes, vocabimus periodos **coniugatas**.

Posito, ut supra, $\omega = \frac{Q}{n} = \frac{mK+m'iK'}{n}$, quaeramus iam, quod propositum est, quaenam evadat expressio

$$\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)} = \frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)},$$

mutato u in $u+4Q'$ seu generalius in $u+4p'Q'$, designante p' numerum positivum vel negativum quemlibet. Vidimus, posito:

$$r = \frac{m'i\pi}{4K(mK+m'iK')} - \frac{E}{2K} = \frac{m'i\pi}{4KQ} - \frac{E}{2K},$$

fore:

$$e^{r(u+4Q)^2}\Omega(u+4Q) = e^{ruu}\Omega(u);$$

unde etiam, posito μ, μ' loco m, m', ideoque Q' loco Q, atque

$$r' = \frac{\mu'i\pi}{4KQ'} - \frac{E}{2K},$$

fit:

$$e^{r'(u+4Q')^2}\Omega(u+4Q') = e^{r'uu}\Omega(u).$$

Mutato u in $u+\frac{4pQ}{n} = u+4p\omega$, prodit:

$$e^{r'\left(u+\frac{4pQ}{n}+4Q'\right)^2}\Omega\left(u+\frac{4pQ}{n}+4Q'\right) = e^{r'\left(u+\frac{4pQ}{n}\right)^2}\Omega\left(u+\frac{4pQ}{n}\right),$$

unde:

$$e^{r'.\frac{32pQQ'}{n}}.\frac{\Omega\left(u+\frac{4pQ}{n}+4Q'\right)}{\Omega(u+4Q')} = \frac{\Omega\left(u+\frac{4pQ}{n}\right)}{\Omega(u)}.$$

Sequitur autem e formula $\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u)$:

$$\frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}+4Q'\right)}{\chi(u+4Q')} = e^{r.\frac{4pQ}{n}\left(2u+8Q'+\frac{4pQ}{n}\right)}.\frac{\Omega\left(u+\frac{4pQ}{n}+4Q'\right)}{\Omega(u+4Q')}$$

$$= e^{r.\frac{4pQ}{n}\left(2u+8Q'+\frac{4pQ}{n}\right)-r'.\frac{32pQQ'}{n}}.\frac{\Omega\left(u+\frac{4pQ}{n}\right)}{\Omega(u)},$$

unde:

$$\frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}+4Q'\right)}{\chi(u+4Q')} = e^{\frac{32pQQ'}{n}(r-r')}.\frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)}.$$

Fit autem

$$r-r' = \frac{m'i\pi}{4KQ}-\frac{\mu'i\pi}{4KQ'} = \frac{i\pi}{K}.\frac{m'Q'-\mu'Q}{4QQ'}$$

ideoque, cum sit $m'Q'-\mu'Q = -K$:

$$\frac{32pQQ'}{n}(r-r') = -\frac{8ip\pi}{n},$$

unde obtinemus formulam fundamentalem:

$$\text{(31.)} \qquad \frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}+4Q'\right)}{\chi(u+4Q')} = e^{-\frac{8ip\pi}{n}}.\frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)}$$

sive hanc generaliorem:

$$\text{(32.)} \qquad \frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}+4p'Q'\right)}{\chi(u+4p'Q')} = e^{-\frac{8pp'i\pi}{n}}.\frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)}.$$

Videmus igitur, quod demonstrandum erat, expressionem

$$\frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)} = \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)},$$

quae cum functionibus ellipticis unam periodum communem habet sive immutata manet, mutato u in $u+4Q$, dum ei periodum coniugatam applicas sive u in $u+4Q'$ mutatur, multiplicari per n^{tam} radicem unitatis.

Quin adeo ipsius, quam eligere debes, n^{tae} radicis unitatis expressionem analyticam suggerit formula (32.); quae satis delicata est quaestio.

Haec iam ad maiora viam sternunt. Hisce enim ut fundamentis in commentationibus subsequentibus transformationes inversas et sectionem functionum ellipticarum superstruemus, intricatam et elegantem quaestionem.

Regiomonti, m. Apr. 1829.

DE FUNCTIONIBUS ELLIPTICIS COMMENTATIO ALTERA.

De summis serierum functionum ellipticarum, quarum argumenta seriem arithmeticam constituunt.

Proponemus in sequentibus formulas quasdam elementares circa summas functionum ellipticarum, quarum argumenta seriem arithmeticam constituunt. Quae cum in aliis quaestionibus usui esse possunt tum summa facilitate formulas generales de functionum ellipticarum transformatione suppeditant.

Proficiscor a formula nota de additione integralium ellipticorum, quae ad secundam speciem pertinent:

$$\text{(1.)} \qquad E(a)+E(u)-E(a+u) = k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}(u+a),$$

in qua e notatione in commentatione priore de functionibus ellipticis proposita:

$$E(u) = \int_0^u \Delta^2 \mathrm{am}\, u\, du.$$

Scribamus in formula (1.) pa loco a, unde illa fit:

$$E(pa)+E(u)-E(u+pa) = k^2 \sin\mathrm{am}\, pa \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}(u+pa);$$

atque posito successive u, $u+a$, $u+2a$, … $u+(n-1)a$ loco u, summationem instituamus. Designata generaliter per $\Sigma^{(n)}F(u)$ summa:

$$\Sigma^{(n)}F(u) = F(u)+F(u+a)+F(u+2a)+\cdots+F(u+(n-1)a),$$

fit:

$$nE(pa)+\Sigma^{(n)}E(u)-\Sigma^{(n)}E(u+pa) = k^2 \sin\mathrm{am}\, pa\, \Sigma^{(n)} \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}(u+pa).$$

Eodem modo e formula:

$$E(na)+E(u)-E(u+na) = k^2 \sin\mathrm{am}\, na \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}(u+na),$$

loco u posito successive $u,\ u+a,\ u+2a,\ \dots\ u+(p-1)a$ et summatione facta, obtines:

$$pE(na)+\Sigma^{(p)}E(u)-\Sigma^{(p)}E(u+na) = k^2\sin\operatorname{am}na\,\Sigma^{(p)}\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+na).$$

Iam observo, esse:

$$\Sigma^{(n+p)}E(u) = \Sigma^{(n)}E(u)+\Sigma^{(p)}E(u+na) = \Sigma^{(p)}E(u)+\Sigma^{(n)}E(u+pa)$$

ideoque:

$$\Sigma^{(n)}E(u)-\Sigma^{(n)}E(u+pa) = \Sigma^{(p)}E(u)-\Sigma^{(p)}E(u+na).$$

Unde e duabus formulis appositis invenimus:

$$(2.)\qquad \left.\begin{matrix} k^2\sin\operatorname{am}pa\,\Sigma^{(n)}\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+pa) \\ -k^2\sin\operatorname{am}na\,\Sigma^{(p)}\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+na) \end{matrix}\right\} = nE(pa)-pE(na).$$

Casus est memorabilis, quo $\sin\operatorname{am}na$ neque simul $\sin\operatorname{am}pa$ evanescit, quo casu (2.) fit:

$$(3.)\qquad \Sigma^{(n)}\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+pa) = \frac{nE(pa)-pE(na)}{k^2\sin\operatorname{am}pa}.$$

Iam observo, in elementis probari formulas:

$$\begin{aligned} \cos\operatorname{am}a &= \cos\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u+a) + \Delta\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+a), \\ \Delta\operatorname{am}a &= \Delta\operatorname{am}u\ \Delta\operatorname{am}(u+a)+k^2\cos\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+a), \end{aligned}$$

unde e (3.) nanciscimur etiam:

$$(4.)\qquad \Sigma^{(n)}\cos\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u+pa) = n\cos\operatorname{am}pa-\frac{\Delta\operatorname{am}pa}{k^2\sin\operatorname{am}pa}[nE(pa)-pE(na)],$$

$$(5.)\qquad \Sigma^{(n)}\ \Delta\operatorname{am}u\ \Delta\operatorname{am}(u+pa) = n\,\Delta\operatorname{am}pa-\operatorname{cotg}\operatorname{am}pa\,[nE(pa)-pE(na)].$$

Videmus igitur, quoties $\sin\operatorname{am}na$ evanescat, neque simul $\sin\operatorname{am}pa$, expressiones

$$\begin{gathered} \Sigma^{(n)}\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+pa), \\ \Sigma^{(n)}\cos\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u+pa), \\ \Sigma^{(n)}\ \Delta\operatorname{am}u\ \Delta\operatorname{am}(u+pa) \end{gathered}$$

ab argumento u independentes esse. Ceterum posito, ut in *Fundamentis*,

$$\omega = \frac{mK+m'iK'}{n},$$

designantibus m, m' numeros quoslibet positivos seu negativos, qui cum ipso n utrique eundem non habent factorem communem: ut $\sin\operatorname{am}na$ neque simul

$\sin\operatorname{am}pa$ evanescat, fieri debet $a = 2\mu\omega$, designante μ numerum integrum quemlibet, dummodo μp per n non divisibilis sit.

Alias circa summas functionum ellipticarum formulas hunc in modum nancisceris. Posito enim:

$$\operatorname{am}u = \alpha,\quad \operatorname{am}v = \beta,\quad \operatorname{am}(u+v) = \sigma,\quad \operatorname{am}(u-v) = \vartheta,$$

e formulis *Fundam.* §. 18. (24.) — (29.) sequitur:

$$\begin{aligned} \cos\sigma\,\Delta\vartheta+\cos\vartheta\ \Delta\sigma &= \frac{2\cos\beta\,\Delta\beta\cos\alpha\,\Delta\alpha}{1-k^2\sin^2\beta\sin^2\alpha}, \\ \Delta\sigma\sin\vartheta+\ \Delta\vartheta\sin\sigma &= \frac{2\cos\beta\sin\alpha\,\Delta\alpha}{1-k^2\sin^2\beta\sin^2\alpha}, \\ \sin\sigma\cos\vartheta+\sin\vartheta\cos\sigma &= \frac{2\,\Delta\beta\sin\alpha\cos\alpha}{1-k^2\sin^2\beta\sin^2\alpha}. \end{aligned}$$

Simul autem dedimus formulas §. 18. (4.) — (6.):

$$\begin{aligned} \sin\sigma-\sin\vartheta &= \frac{2\sin\beta\cos\alpha\,\Delta\alpha}{1-k^2\sin^2\beta\sin^2\alpha}, \\ \cos\vartheta-\cos\sigma &= \frac{2\sin\beta\,\Delta\beta\sin\alpha\,\Delta\alpha}{1-k^2\sin^2\beta\sin^2\alpha}, \\ \Delta\vartheta-\ \Delta\sigma &= \frac{2k^2\sin\beta\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha}{1-k^2\sin^2\beta\sin^2\alpha}, \end{aligned}$$

quibus cum prioribus combinatis, prodit:

$$(6.)\qquad \cos\sigma\,\Delta\vartheta+\cos\vartheta\,\Delta\sigma = \frac{\Delta\beta}{\operatorname{tg}\beta}(\sin\sigma-\sin\vartheta),$$

$$(7.)\qquad \Delta\sigma\sin\vartheta+\ \Delta\vartheta\sin\sigma = \frac{1}{\Delta\beta\operatorname{tg}\beta}(\cos\vartheta-\cos\sigma),$$

$$(8.)\qquad \sin\sigma\cos\vartheta+\sin\vartheta\cos\sigma = \frac{\Delta\beta}{k^2\sin\beta\cos\beta}(\Delta\vartheta-\Delta\sigma).$$

Posito $u+\frac{a}{2}$ loco u et $v = \frac{a}{2}$, fit:

$$\beta = \operatorname{am}\frac{a}{2},\quad \sigma = \operatorname{am}(u+a),\quad \vartheta = \operatorname{am}u,$$

unde (6.) — (8.) ita repraesentantur:

$$\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}(u+a)+\cos\operatorname{am}(u+a)\,\Delta\operatorname{am}u = \frac{\Delta\operatorname{am}\frac{a}{2}}{\operatorname{tg}\operatorname{am}\frac{a}{2}}[\sin\operatorname{am}(u+a)-\sin\operatorname{am}u],$$

$$\Delta\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+a)+\Delta\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}u = \frac{1}{\Delta\operatorname{am}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\operatorname{am}\frac{a}{2}}[\cos\operatorname{am}u-\cos\operatorname{am}(u+a)],$$

$$\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u+a)+\sin\operatorname{am}(u+a)\cos\operatorname{am}u = \frac{\Delta\operatorname{am}\frac{a}{2}}{k^2\sin\operatorname{am}\frac{a}{2}\cos\operatorname{am}\frac{a}{2}}[\Delta\operatorname{am}u-\Delta\operatorname{am}(u+a)].$$

In his formulis loco a scribatur pa, atque loco u successive posito u, $u+a, \dots$ $u+(n-1)a$, summatio instituatur; deinde in iisdem formulis loco a scribatur na, atque loco u successive posito u, $u+a, \dots$ $u+(p-1)a$, rursus summatio instituatur. Utrisque summis inter se comparatis, ubi insuper observas, generaliter esse:

$$\Sigma^{(n)}F(u)-\Sigma^{(n)}F(u+pa) = \Sigma^{(p)}F(u)-\Sigma^{(p)}F(u+na),$$

obtines:

$$\text{(9.)}\qquad \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}\frac{pa}{2}}{\Delta\operatorname{am}\frac{pa}{2}}\Sigma^{(n)}[\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}(u+pa)+\cos\operatorname{am}(u+pa)\Delta\operatorname{am}u]$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}\frac{na}{2}}{\Delta\operatorname{am}\frac{na}{2}}\Sigma^{(p)}[\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}(u+na)+\cos\operatorname{am}(u+na)\Delta\operatorname{am}u],$$

$$\text{(10.)}\qquad \operatorname{tg}\operatorname{am}\frac{pa}{2}\Delta\operatorname{am}\frac{pa}{2}\Sigma^{(n)}[\Delta\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+pa)+\Delta\operatorname{am}(u+pa)\sin\operatorname{am}u]$$

$$= \operatorname{tg}\operatorname{am}\frac{na}{2}\Delta\operatorname{am}\frac{na}{2}\Sigma^{(p)}[\Delta\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+na)+\Delta\operatorname{am}(u+na)\sin\operatorname{am}u],$$

$$\text{(11.)}\qquad \frac{\sin\operatorname{am}\frac{pa}{2}\cos\operatorname{am}\frac{pa}{2}}{\Delta\operatorname{am}\frac{pa}{2}}\Sigma^{(n)}[\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u+pa)+\sin\operatorname{am}(u+pa)\cos\operatorname{am}u]$$

$$= \frac{\sin\operatorname{am}\frac{na}{2}\cos\operatorname{am}\frac{na}{2}}{\Delta\operatorname{am}\frac{na}{2}}\Sigma^{(p)}[\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u+na)+\sin\operatorname{am}(u+na)\cos\operatorname{am}u].$$

Casu speciali, quo $\sin\operatorname{am}\frac{na}{2}$ neque simul $\sin\operatorname{am}pa$ evanescit, e (9.) — (11.) sequuntur formulae memorabiles:

$$\text{(12.)}\qquad \Sigma^{(n)}[\cos\operatorname{am}u\;\Delta\operatorname{am}(u+pa)+\cos\operatorname{am}(u+pa)\;\Delta\operatorname{am}u] = 0,$$

$$\text{(13.)}\qquad \Sigma^{(n)}[\Delta\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+pa)+\Delta\operatorname{am}(u+pa)\sin\operatorname{am}u] = 0,$$

$$\text{(14.)}\qquad \Sigma^{(n)}[\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u+pa)+\sin\operatorname{am}(u+pa)\cos\operatorname{am}u] = 0.$$

Iam ope formularum (3.) — (5.), (12.) — (14.) formulas generales de functionum ellipticarum transformatione condimus.

Demonstratio nova formularum fundamentalium de transformatione functionum ellipticarum.

Consideremus expressiones:

$$R = \sin\operatorname{am}u+\sin\operatorname{am}(u+4\omega)+\sin\operatorname{am}(u+8\omega)+\cdots+\sin\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega),$$
$$S = \cos\operatorname{am}u+\cos\operatorname{am}(u+4\omega)+\cos\operatorname{am}(u+8\omega)+\cdots+\cos\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega),$$
$$T = \Delta\operatorname{am}u+\Delta\operatorname{am}(u+4\omega)+\Delta\operatorname{am}(u+8\omega)+\cdots+\Delta\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega),$$

in quibus n sit numerus impar, $\omega = \frac{mK+m'iK'}{n}$, uti supra atque in *Fundamentis*, ita ut, posito $4\omega = a$, quoties $p<n$ aut certe p per n non divisibilis, $\sin\operatorname{am}\frac{na}{2} = 0$ neque tamen simul $\sin\operatorname{am}pa = 0$.

Ubi brevitatis causa designamus per $\Sigma F(u)$ summam:

$$\Sigma F(u) = F(u)+F(u+4\omega)+\cdots+F(u+4(n-1)\omega),$$

expressiones R, S, T brevius ita repraesentare licet:

$$R = \Sigma\sin\operatorname{am}u,\quad S = \Sigma\cos\operatorname{am}u,\quad T = \Sigma\,\Delta\operatorname{am}u.$$

Quaeramus expressionum R, S, T quadrata et producta binarum.

Fit, uti ipsa multiplicatione instituta apparet:

$$\begin{aligned} RR = \Sigma\sin^2\operatorname{am}u &+ \Sigma\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+4\omega)\\ &+ \Sigma\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+8\omega)\\ &+ \cdots\cdots\cdots\\ &+ \Sigma\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega),\\ SS = \Sigma\cos^2\operatorname{am}u &+ \Sigma\cos\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u+4\omega)\\ &+ \Sigma\cos\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u+8\omega)\\ &+ \cdots\cdots\cdots\\ &+ \Sigma\cos\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TT = \Sigma\,\Delta^2\mathrm{am}\,u &+ \Sigma\,\Delta\,\mathrm{am}\,u\;\Delta\,\mathrm{am}(u+4\omega) \\ &+ \Sigma\,\Delta\,\mathrm{am}\,u\;\Delta\,\mathrm{am}(u+8\omega) \\ &+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &+ \Sigma\,\Delta\,\mathrm{am}\,u\;\Delta\,\mathrm{am}(u+4(n-1)\omega). \end{aligned}$$

Iam ex iis, quae supra proposuimus, apparet, expressiones huiusmodi:

$$\begin{gathered} \Sigma \sin\mathrm{am}\,u \sin\mathrm{am}(u+4p\omega), \\ \Sigma \cos\mathrm{am}\,u \cos\mathrm{am}(u+4p\omega), \\ \Sigma\;\Delta\;\mathrm{am}\,u\;\;\Delta\;\mathrm{am}(u+4p\omega), \end{gathered}$$

in quibus uti in antecedentibus $p<n$, constantibus aequales esse, sive ab argumento u non pendere. Unde ponere licet:

$$\text{(15.)}\qquad \begin{cases} RR = \Sigma \sin^2\mathrm{am}\,u - 2\rho, \\ SS = \Sigma \cos^2\mathrm{am}\,u - 2\sigma, \\ TT = \Sigma\;\Delta^2\;\mathrm{am}\,u + 2\tau, \end{cases}$$

designantibus ρ, σ, τ constantes, quarum valores e valoribus specialibus ipsius u peti possunt. Quem in finem adnoto formulas elementares:

$$\begin{aligned} \sin\mathrm{am}\,4(n-n')\omega &= -\sin\mathrm{am}\,4n'\omega, \\ \cos\mathrm{am}(K+4(n-n')\omega) &= -\cos\mathrm{am}(K+4n'\omega), \\ \Delta\,\mathrm{am}(K+iK'+4(n-n')\omega) &= -\;\Delta\;\mathrm{am}(K+iK'+4n'\omega), \end{aligned}$$

porro formulas:

$$\sin\mathrm{am}\,0 = \cos\mathrm{am}\,K = \Delta\,\mathrm{am}(K+iK') = 0,$$

e quibus patet, posito resp. $u=0$, $u=K$, $u=K+iK'$, expressiones R, S, T ideoque etiam RR, SS, TT evanescere. Hinc cum insuper sit:

$$\Delta\,\mathrm{am}(K+iK'+u) = ik'\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,u,$$

eruimus e (15.), posito resp. $u=0$, $u=K$, $u=K+iK'$:

$$\begin{aligned} \rho &= \sin^2\mathrm{am}\,4\omega + \sin^2\mathrm{am}\,8\omega + \cdots + \sin^2\mathrm{am}\,2(n-1)\omega, \\ \sigma &= \cos^2\mathrm{coam}\,4\omega + \cos^2\mathrm{coam}\,8\omega + \cdots + \cos^2\mathrm{coam}\,2(n-1)\omega, \\ \tau &= k'k'[\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\,4\omega + \mathrm{tg}^2\,\mathrm{am}\,8\omega + \cdots + \mathrm{tg}^2\,\mathrm{am}\,2(n-1)\omega]. \end{aligned}$$

Quantitates ρ, σ, τ eaedem sunt, quas et in commentatione priore de functionibus ellipticis eadem denotatione exhibuimus.

E formulis (15.) sequitur:

$$\begin{aligned} RR+SS &= n-2\rho-2\sigma, \\ k^2RR+TT &= n-2k^2\rho+2\tau, \end{aligned}$$

unde ponere licet:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{n-2\rho-2\sigma}\,.\sin\psi, \\ S &= \sqrt{n-2\rho-2\sigma}\,.\cos\psi, \\ T &= \sqrt{n-2k^2\rho+2\tau}\,\sqrt{1-\frac{k^2(n-2\rho-2\sigma)}{n-2k^2\rho+2\tau}\sin^2\psi}, \end{aligned}$$

sive, posito:

$$\frac{k^2(n-2\rho-2\sigma)}{n-2k^2\rho+2\tau} = \lambda\lambda, \qquad n-2k^2\rho+2\tau = \frac{1}{MM},$$

fit:

$$R = \frac{\lambda}{kM}\sin\psi, \qquad S = \frac{\lambda}{kM}\cos\psi, \qquad T = \frac{1}{M}\sqrt{1-\lambda\lambda\sin^2\psi}.$$

Quaeramus iam producta binarum expressionum R, S, T. Instituta multiplicatione, invenitur:

$$\begin{aligned} ST = &\;\Sigma\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u \\ &+ \tfrac{1}{2}\Sigma[\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}(u+4\omega) + \cos\mathrm{am}(u+4\omega)\,\Delta\,\mathrm{am}\,u] \\ &+ \tfrac{1}{2}\Sigma[\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}(u+8\omega) + \cos\mathrm{am}(u+8\omega)\,\Delta\,\mathrm{am}\,u] \\ &+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &+ \tfrac{1}{2}\Sigma[\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}(u+4(n-1)\omega) + \cos\mathrm{am}(u+4(n-1)\omega)\,\Delta\,\mathrm{am}\,u]. \end{aligned}$$

Adiecimus factorem $\frac{1}{2}$, cum in summis, quibus adiectus est, unusquisque terminus bis occurrat. Iam vero e (12.), posito $a=4\omega$, quoties, ut in antecedentibus, $p<n$, fit:

$$\Sigma[\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}(u+4p\omega) + \cos\mathrm{am}(u+4p\omega)\,\Delta\,\mathrm{am}\,u] = 0,$$

unde simpliciter:

$$ST = \Sigma\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u.$$

Eodem modo invenitur ope formularum (13.), (14.):

$$\begin{aligned} TR &= \Sigma\;\Delta\;\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,u, \\ RS &= \Sigma\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u. \end{aligned}$$

Sequitur autem e formulis:

$$R = \Sigma\sin\mathrm{am}\,u, \qquad S = \Sigma\cos\mathrm{am}\,u, \qquad T = \Sigma\,\Delta\,\mathrm{am}\,u,$$

instituta differentiatione:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{du} &= \;\;\;\Sigma\cos\mathrm{am}\,u\;\Delta\;\mathrm{am}\,u = \;\;ST, \\ \frac{dS}{du} &= -\;\Sigma\;\Delta\;\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,u = -TR, \\ \frac{dT}{du} &= -k^2\Sigma\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u = -k^2RS \end{aligned}$$

unde, cum ex antecedentibus sit:

$$R = \frac{\lambda}{kM}\sin\psi,\quad S = \frac{\lambda}{kM}\cos\psi,\quad T = \frac{1}{M}\sqrt{1-\lambda\lambda\sin^2\psi},$$

fit:

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{1}{M}\sqrt{1-\lambda\lambda\sin^2\psi},\quad \text{sive}\quad \frac{du}{M} = \frac{d\psi}{\sqrt{1-\lambda\lambda\sin^2\psi}},$$

unde, cum ψ et u simul evanescant:

$$\psi = \operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right).$$

Nacti igitur sumus valores ipsarum R, S, T:

$$R = \frac{\lambda}{kM}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right),$$
$$S = \frac{\lambda}{kM}\cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right),$$
$$T = \frac{1}{M}\;\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right),$$

sive quod idem est:

$$\frac{\lambda}{kM}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sin\operatorname{am}u + \sin\operatorname{am}(u+4\omega) + \cdots + \sin\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega),$$
$$\frac{\lambda}{kM}\cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \cos\operatorname{am}u + \cos\operatorname{am}(u+4\omega) + \cdots + \cos\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega),$$
$$\frac{1}{M}\;\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \Delta\operatorname{am}u + \Delta\operatorname{am}(u+4\omega) + \cdots + \Delta\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega).$$

Quae sunt formulae de functionum ellipticarum transformatione fundamentales.

NOTE

SUR UNE NOUVELLE APPLICATION

DE L'ANALYSE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

A L'ALGÈBRE

PAR

M. C. G. J. JACOBI

PROF. EN MATH. A KŒNIGSBERG

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 7. p. 41—43.

NOTE SUR UNE NOUVELLE APPLICATION DE L'ANALYSE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES A L'ALGÈBRE.

Dans une des notes sur les fonctions elliptiques insérées dans les tomes précédents de ce Journal j'ai avancé que les fonctions elliptiques doivent entrer dans toutes les parties de l'analyse mathématique et contribuer essentiellement à leur progrès. Je veux présenter dans ce qui suit un exemple assez remarquable d'une application de la théorie des fonctions elliptiques aux fractions continues.

Tout le monde connaît les algorithmes qui servent à réduire la racine carrée d'un nombre en fraction continue. On sait aussi que par des procédés analogues on peut réduire en fraction continue la racine carrée d'une expression algébrique et rationnelle, et qu'il est possible de donner dans chaque moment le quotient complet qui rend la fraction exacte et qui aura la forme $\frac{\sqrt{R}+J}{N}$, $\sqrt{R}$ étant la racine à réduire en fraction continue, et J et N des expressions rationnelles de la variable. Supposons que R soit une fonction entière qui ne surpasse pas le quatrième degré. On prouve aisément que J et N sont aussi des fonctions entières, l'une du second degré, l'autre seulement du premier. On donne facilement les règles générales pour passer d'un quotient complet au suivant. Mais en voulant effectuer les calculs algébriques qu'exige la recherche des quotients complets et par suite celle des dénominateurs de la fraction continue cherchée, on se trouve arrêté dès les premiers pas par la longueur rebutante du calcul. En effet les expressions algébriques que l'on rencontre en opérant sur la racine proposée deviennent tellement embrouillées qu'il paraît être impossible d'y trouver une espèce d'ordre et de régularité. Et comme il est extrêmement difficile de passer même au second ou troisième dénominateur, l'on ne pourra espérer d'autant moins de trouver par induction une loi générale. Toutefois en approfondissant les relations qui lient entre eux les quotients complets successifs, et en examinant en même temps la formation des expressions algébriques qui donnent la multiplication des fonctions elliptiques, on parvient à exprimer généralement au moyen de ces dernières par des formules simples et élégantes un quelconque des quotients complets. C'est ce qu'on verra dans la solution du problème suivant.

Problème.

Supposons:

$$\begin{aligned} R &= z(z-1)\left(z-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(z-\frac{1}{\Delta^2\alpha}\right) \\ &= z^4-az^3+bz^2-cz, \end{aligned}$$

où l'on a:

$$a = \frac{3-2(1+k^2)\sin^2\alpha+k^2\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha\,\Delta^2\alpha},$$

$$b = \frac{3-(1+k^2)\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\,\Delta^2\alpha},$$

$$c = \frac{1}{\cos^2\alpha\,\Delta^2\alpha},$$

$\Delta\alpha$ étant, comme à l'ordinaire, $=\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}$: la racine $\sqrt{R}$ réduite en fraction continue prendra la forme:

$$\sqrt{R} = zz-\tfrac{1}{2}az+i_1+\cfrac{1}{M_1z+m_1+\cfrac{1}{M_2z+m_2+\ddots+\cfrac{1}{M_{n-1}z+m_{n-1}+\cfrac{1}{\frac{\sqrt{R}+zz-\frac{1}{2}az+i_n}{q_n(r_nz-1)}}}}},$$

$\dfrac{\sqrt{R}+zz-\frac{1}{2}az+i_n}{q_n(r_nz-1)}$ étant le $n^{ième}$ quotient complet: il s'agit de donner l'expression générale de i_n, r_n, q_n.

Solution.

Soit $\alpha = \mathrm{am}\,u$, $\alpha_n = \mathrm{am}\,nu$, on aura:

$$i_n = \frac{1}{2\cos^2\alpha\,\Delta^2\alpha}\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n}}\right),$$

$$r_n = 1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n+1}},$$

et de plus, n étant un nombre impair:

$$q_n = \frac{1}{4\cos^4\alpha\,\Delta^4\alpha}\left\{\frac{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_6}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n}}\right)}{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_4}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_8}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n-2}}\right)}\right\}^2,$$

n étant pair:

$$q_n = -\left\{\frac{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_4}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_8}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n}}\right)}{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_6}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n-2}}\right)}\right\}^2.$$

Entre deux q_n successifs, on aura l'équation:

$$q_nq_{n-1} = -i_n^2.$$

On peut aussi donner à ces formules la forme suivante:

$$i_n = \frac{1}{2\cos^2\alpha\,\Delta^2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha_{2n+1}\sin\alpha_{2n-1}}{\sin^2\alpha_{2n}}(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n}),$$

$$r_n = \frac{\sin\alpha_{2n+2}\sin\alpha_{2n}}{\sin^2\alpha_{2n+1}}(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n+1}),$$

et n étant impair:

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{\sin^2\alpha}{4\cos^4\alpha\,\Delta^4\alpha}\sin^2\alpha_{2n+1}\left(\frac{\sin\alpha_4\sin\alpha_8\ldots\sin\alpha_{2n-2}}{\sin\alpha_2\sin\alpha_6\ldots\sin\alpha_{2n}}\right)^4 \\ &\times\left\{\frac{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_2)(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_6)\ldots(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n})}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_4)(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_8)\ldots(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n-2})}\right\}^2, \end{aligned}$$

n étant pair:

$$\begin{aligned} q_n &= -\frac{\sin^2\alpha_{2n+1}}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\sin\alpha_2\sin\alpha_6\ldots\sin\alpha_{2n-2}}{\sin\alpha_4\sin\alpha_8\ldots\sin\alpha_{2n}}\right)^4 \\ &\times\left\{\frac{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_4)(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_8)\ldots(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n})}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_2)(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_6)\ldots(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n-2})}\right\}^2. \end{aligned}$$

Lorsque R surpasse le quatrième degré, la fraction continue dans laquelle on convertit $\sqrt{R}$ dépend des formules de multiplication de transcendantes plus élevées que les transcendantes elliptiques.

FORMULAE NOVAE

IN THEORIA TRANSCENDENTIUM ELLIPTICARUM

FUNDAMENTALES

AUCTORE

C. G. J. JACOBI

PROF. ORD. MATH. REGIOM.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 15. p. 199—204.

FORMULAE NOVAE IN THEORIA TRANSCENDENTIUM ELLIPTICARUM FUNDAMENTALES.

1.

Extat inter differentias quatuor quantitatum w, x, y, z relatio identica nota et frequentissimi usus:

$$(w-x)(y-z)+(w-y)(z-x)+(w-z)(x-y) = 0.$$

Quae relatio, quod et ipsum notum est, ea insigni gaudet proprietate, ut valeat adhuc, si in locum differentiarum earum sinus ponantur, unde prodit:

$$\sin(w-x)\sin(y-z)+\sin(w-y)\sin(z-x)+\sin(w-z)\sin(x-y) = 0.$$

Quae formula, posito:

$$w-x = a, \quad x-y = u, \quad y-z = b,$$

etiam sic exhiberi potest:

$$\sin a \sin b+\sin u \sin(u+a+b) = \sin(u+a)\sin(u+b).$$

Formulam quaerens antecedenti similem in theoria functionum ellipticarum, ita egi.

In formula nota pro additione integralium ellipticorum:

$$\sin\operatorname{am}(u+v) = \frac{\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}v\,\Delta\operatorname{am}v+\sin\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v}$$

statuamus $u+a$ loco u, $u+b$ loco v ac consideremus a, b ut constantes, u ut variabilem: formulam antecedentem ita repraesentare licet:

$$(1.)\qquad \sin\operatorname{am}(2u+a+b) = \frac{d[\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)]}{[1-k^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\sin^2\operatorname{am}(u+b)]du},$$

unde, integratione facta, prodit:

$$(2.)\quad \int_0^u \sin\operatorname{am}(2u+a+b)du = \frac{1}{2k}\log\frac{1+k\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)}{1-k\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)} - \frac{1}{2k}\log\frac{1+k\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b}{1-k\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b}.$$

Expressio ad laevam eadem manet, quoties $a+b$ eadem fit; unde etiam expressio ad dextram valorem mutare non debet, si b ponimus $=0$ atque loco a scribimus $a+b$. Hinc si a logarithmis ad numeros ascendimus, provenit aequatio:

$$(3.)\quad \frac{[1+k\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)][1-k\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b]}{[1-k\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)][1+k\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b]} = \frac{1+k\sin\operatorname{am}(u+a+b)\sin\operatorname{am}u}{1-k\sin\operatorname{am}(u+a+b)\sin\operatorname{am}u}.$$

Si expressionem ad laevam ponimus:

$$\frac{P+kQ}{P-kQ} = \frac{1+k\sin\operatorname{am}(u+a+b)\sin\operatorname{am}u}{1-k\sin\operatorname{am}(u+a+b)\sin\operatorname{am}u},$$

ubi:

$$P = 1-k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b),$$
$$Q = \sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)-\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b,$$

sequitur e (3.):

$$P\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+a+b) = Q,$$

quod suggerit formulam quaesitam:

$$(4.)\quad \sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b+\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+a+b)-\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b) = k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)\sin\operatorname{am}(u+a+b).$$

Quae est formula nova, maximi momenti per totam theoriam functionum ellipticarum.

Si rursus introducimus differentias quatuor quantitatum, formulam (4.) sic repraesentare licet:

$$\sin\operatorname{am}(w-x)\sin\operatorname{am}(y-z)+\sin\operatorname{am}(w-y)\sin\operatorname{am}(z-x)+\sin\operatorname{am}(w-z)\sin\operatorname{am}(x-y) + k^2\sin\operatorname{am}(w-x)\sin\operatorname{am}(w-y)\sin\operatorname{am}(w-z)\sin\operatorname{am}(x-y)\sin\operatorname{am}(y-z)\sin\operatorname{am}(z-x) = 0.$$

Similitudo formularum functiones trigonometricas et ellipticas spectantium maior adhuc existit, si loco sinuum introducimus tangentes. Ponendo enim $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $u\sqrt{-1}$ loco a, b, u, prodit e (4.), cum sit $\sin\operatorname{am}(u\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\operatorname{tg}\operatorname{am}(u,k')$, si loco k' restituimus modulum k, formula haec:

$$(5.)\quad \operatorname{tg}\operatorname{am}a\operatorname{tg}\operatorname{am}b+\operatorname{tg}\operatorname{am}u\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+a+b)-\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+a)\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+b) = k'^2\operatorname{tg}\operatorname{am}a\operatorname{tg}\operatorname{am}b\operatorname{tg}\operatorname{am}u\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+a)\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+b)\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+a+b).$$

Quae, posito $k=0$, in formulam trigonometricam abit:

$$(6.)\quad \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}u\operatorname{tg}(u+a+b)-\operatorname{tg}(u+a)\operatorname{tg}(u+b) = \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}u\operatorname{tg}(u+a)\operatorname{tg}(u+b)\operatorname{tg}(u+a+b).$$

In qua igitur formula, si loco tangentium ponimus tangentes amplitudinis, nil mutabitur, nisi quod terminus ad dextram nanciscitur factorem k'^2.

E formula pro additione integralium secundae speciei:

$$E(u)+E(v)-E(u+v) = k^2\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}v\sin\operatorname{am}(u+v)$$

habetur:

$$E(a)+E(b)-E(a+b) = k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}(a+b),$$
$$E(u)+E(a+b)-E(u+a+b) = k^2\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(a+b)\sin\operatorname{am}(u+a+b),$$

quibus additis, fit e (4.):

$$(7.)\quad E(a)+E(b)+E(u)-E(u+a+b) = k^2\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)\sin\operatorname{am}(a+b)[1+k^2\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u+a+b)],$$

quae est formula respectu ipsorum a, b, u symmetrica. Cuiusmodi adnotari merentur, quia per additiones successivas ducimur ad formulas, quae, cum natura sua symmetricae sint, tamen sub forma insymmetrica prodeant, quam non semper in promptu est quomodo ad symmetriam idonee revocemus.

Formula (4.), methodo assignata a me inventa, variis aliis modis demonstrari potest. Cl. Richelot hanc eius demonstrationem mihi communicavit.

Sit:

$$\frac{w+x-y-z}{2} = \alpha,\qquad \frac{w-x+y-z}{2} = \beta,\qquad \frac{w-x-y+z}{2} = \gamma,$$

erit:

$$w-x = \beta+\gamma,\qquad w-y = \gamma+\alpha,\qquad w-z = \alpha+\beta,$$
$$y-z = \beta-\gamma,\qquad z-x = \gamma-\alpha,\qquad x-y = \alpha-\beta,$$

unde, cum generaliter sit:

$$\sin\operatorname{am}(u+v)\sin\operatorname{am}(u-v) = \frac{\sin^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}v}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v},$$

obtinemus:

$$\sin\operatorname{am}(w-x)\sin\operatorname{am}(y-z) = \frac{\sin^2\operatorname{am}\beta-\sin^2\operatorname{am}\gamma}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\beta\sin^2\operatorname{am}\gamma},$$
$$\sin\operatorname{am}(w-y)\sin\operatorname{am}(z-x) = \frac{\sin^2\operatorname{am}\gamma-\sin^2\operatorname{am}\alpha}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\gamma\sin^2\operatorname{am}\alpha},$$
$$\sin\operatorname{am}(w-z)\sin\operatorname{am}(x-y) = \frac{\sin^2\operatorname{am}\alpha-\sin^2\operatorname{am}\beta}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha\sin^2\operatorname{am}\beta}.$$

Theorema demonstrandum est, summam trium expressionum ad laevam aequare earum productum per $-k^2$ multiplicatum, sive, posito brevitatis causa:

$$\sin^2\mathrm{am}\,\alpha = t, \qquad \sin^2\mathrm{am}\,\beta = t', \qquad \sin^2\mathrm{am}\,\gamma = t'',$$

haberi identice:

$$\frac{t'-t''}{1-k^2t't''}+\frac{t''-t}{1-k^2t''t}+\frac{t-t'}{1-k^2tt'} = \frac{-k^2(t'-t'')(t''-t)(t-t')}{(1-k^2t't'')(1-k^2t''t)(1-k^2tt')},$$

quod facile patet, cum sit:

$$(t'-t'')t+(t''-t)t'+(t-t')t'' = 0,$$
$$(t'^2-t''^2)t+(t''^2-t^2)t'+(t^2-t'^2)t'' = (t'-t'')(t''-t)(t-t').$$

Observo adhuc, e (2.), posito $b = 0$, fluere formulam:

$$(8.)\qquad \int_0^u \sin\mathrm{am}(2u+a)\,du = \frac{1}{2k}\log\frac{1+k\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a)}{1-k\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a)}.$$

Iam e formula (4.) profecti aliam formulam in theoria transcendentium $\Theta(u)$ seu $\Omega(u)$ fundamentalem et quae altioris indaginis est adstruamus.

2.

E formula pro additione integralium ellipticorum secundae speciei fit:

$$E(u+a)+E(u+b)-E(2u+a+b) = k^2\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b)\sin\mathrm{am}(2u+a+b),$$
$$E(u)+E(u+a+b)-E(2u+a+b) = k^2\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)\sin\mathrm{am}(2u+a+b),$$

quarum formularum altera de altera subducta, provenit:

$$E(u+a)+E(u+b)-E(u)-E(u+a+b)$$
$$= k^2\sin\mathrm{am}(2u+a+b)[\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b)-\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)],$$

sive e (4.):

$$E(u+a)+E(u+b)-E(u)-E(u+a+b)$$
$$= k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,b\sin\mathrm{am}(2u+a+b)[1-k^2\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b)\sin\mathrm{am}(u+a+b)].$$

Habetur porro e (4.):

$$[1-k^2\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b)\sin\mathrm{am}(u+a+b)]$$
$$\times[1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,b\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)]$$
$$= 1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}(u+a+b),$$

unde prodit:

$$E(u+a)+E(u+b)-E(u)-E(u+a+b)$$
$$= \frac{k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,b\,\sin\mathrm{am}(2u+a+b)[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}(u+a+b)]}{1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,b\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)},$$

sive, cum sit:

$$\sin\mathrm{am}(2u+a+b)[1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}(u+a+b)] = \frac{d[\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)]}{du},$$

prodit:

$$E(u+a)+E(u+b)-E(u)-E(u+a+b)$$
$$= \frac{d\log[1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,b\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)]}{du}.$$

Unde, integratione facta inde a $u = 0$ usque ad $u = u$ positoque:

$$\int_0^u E(u)\,du = \log\Omega(u),$$

si a logarithmis ad numeros ascendis, provenit formula nova fundamentalis:

$$(9.)\qquad \frac{\Omega(u+a)\,\Omega(u+b)\,\Omega(a+b)}{\Omega(a)\,\Omega(b)\,\Omega(u)\,\Omega(u+a+b)} = 1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,b\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b).$$

Quam formulam etiam sub hac forma exhibere convenit:

$$(10.)\qquad \frac{\Omega(u+a)}{\Omega(a)\,\Omega(u)}\cdot\frac{\Omega(u+b)}{\Omega(b)\,\Omega(u)} = \frac{\Omega(u+a+b)}{\Omega(u)\,\Omega(a+b)}[1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,b\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)].$$

Quae, ponendo $b = -a$, cum sit $\Omega(-u) = \Omega(u)$, $\Omega(0) = 1$, in formulam abit, in commentatione prima de functionibus ellipticis *) §. 4 (24.) traditam:

$$\frac{\Omega(u+a)\,\Omega(u-a)}{\Omega^2(a)\,\Omega^2(u)} = 1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,\sin^2\mathrm{am}\,u.$$

Facile etiam theorema de additione integralium ellipticorum tertiae speciei e (9.) deducitur. Habetur enim (ibidem (26.)):

$$\Pi(u,a) = uE(a)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)}$$

ideoque:

$$\Pi(u,a)+\Pi(v,a)-\Pi(u+v,a) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)\,\Omega(v-a)\,\Omega(u+v+a)}{\Omega(u+a)\,\Omega(v+a)\,\Omega(u+v-a)}.$$

Iam si in (9.) scribimus u, v loco a, b atque a ac deinde $-a$ loco u, obtinemus:

$$\frac{\Omega(u+a)\,\Omega(v+a)\,\Omega(u+v)}{\Omega(u)\,\Omega(v)\,\Omega(a)\,\Omega(u+v+a)} = 1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\sin\mathrm{am}(u+v+a),$$
$$\frac{\Omega(u-a)\,\Omega(v-a)\,\Omega(u+v)}{\Omega(u)\,\Omega(v)\,\Omega(a)\,\Omega(u+v-a)} = 1-k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\sin\mathrm{am}(u+v-a),$$

*) p. 304 huius voluminis.

unde, altera formula per alteram divisa:

$$\frac{\Omega(u-a)\,\Omega(v-a)\,\Omega(u+v+a)}{\Omega(u+a)\,\Omega(v+a)\,\Omega(u+v-a)} = \frac{1-k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\sin\mathrm{am}\,(u+v-a)}{1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\sin\mathrm{am}\,(u+v+a)}$$

ideoque:

$$\Pi(u,a)+\Pi(v,a)-\Pi(u+v,a) = \tfrac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\sin\mathrm{am}\,(u+v-a)}{1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\sin\mathrm{am}\,(u+v+a)},$$

quae est formula nota.

Posito, uti loco citato §. 7. *):

$$\Omega(u) = e^{-ruu}\chi(u),$$

ubi r est constans, cum sit:

$$(u+a)^2+(u+b)^2+(a+b)^2 = a^2+b^2+u^2+(u+a+b)^2,$$

habetur e (9.) etiam pro functionibus $\chi(u)$:

$$(11.)\quad \frac{\chi(u+a)\chi(u+b)\chi(a+b)}{\chi(a)\chi(b)\chi(u)\chi(u+a+b)} = 1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,b\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,(u+a+b).$$

Si functionem in *Fundamentis* adhibitam $\Theta(u)$ introducere placet, habetur pro $r = \frac{-E}{2K}$,

$$\chi(u) = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = e^{\frac{-Euu}{2K}}\,\Omega(u),$$

unde e (11.) prodit:

$$(12.)\quad \frac{\Theta(0)\,\Theta(u+a)\,\Theta(u+b)\,\Theta(a+b)}{\Theta(a)\Theta(b)\,\Theta(u)\,\Theta(u+a+b)} = 1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,b\,\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,(u+a+b).$$

Posito:

$$\Omega'(u) = \frac{d\Omega(u)}{du},\qquad \Theta'(u) = \frac{d\Theta(u)}{du},$$

habetur:

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{\Omega'(u)}{\Omega(u)} - \frac{E}{K}u = E(u)-\frac{E}{K}u,$$

unde:

$$E(a)+E(b)+E(u)-E(u+a+b) = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}+\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}-\frac{\Theta'(u+a+b)}{\Theta(u+a+b)}.$$

Porro si, uti in *Fundamentis*, ponimus:

$$H(u) = \sqrt{k}\sin\mathrm{am}\,u\,\Theta(u),$$

*) p. 310 huius voluminis.

erit:

$$k^2\sin\mathrm{am}\,(a+b)\sin\mathrm{am}\,(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b) = \sqrt{k}\cdot\frac{H(a+b)\,H(u+a)\,H(u+b)}{\Theta(a+b)\,\Theta(u+a)\,\Theta(u+b)},$$

unde e (7.), (12.) prodit:

$$\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}+\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}-\frac{\Theta'(u+a+b)}{\Theta(u+a+b)} = \sqrt{k}\cdot\frac{\Theta(0)\,H(a+b)\,H(u+a)\,H(u+b)}{\Theta(a)\,\Theta(b)\,\Theta(u)\,\Theta(u+a+b)},$$

sive, cum sit (*Fund.* §. 65.):

$$\sqrt{k}.\Theta(0) = H'(0),$$

prodit formula:

$$(13.)\quad \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}+\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}-\frac{\Theta'(u+a+b)}{\Theta(u+a+b)} = \frac{H'(0)\,H(a+b)\,H(u+a)\,H(u+b)}{\Theta(a)\,\Theta(b)\,\Theta(u)\,\Theta(u+a+b)},$$

quam data occasione adnotare volui.

Dedi olim sine demonstratione expressiones algebraicas generales radicum aequationum n^{ti} gradus, quae transformationem functionum ellipticarum concernunt. Quae formulae, quae spectari debebant ut id, quod hactenus in theoria functionum ellipticarum maxime reconditum est, per principium novum ac latissime patens a me inventae sunt; post ope formulae memorabilis (10.) eas demonstratione maxime eleganti atque elementari comprobare contigit. Quod suo tempore in lucem proferemus.

Regiomonti 21. Sept. 1835.