C. G. J. JACOBI'S

GESAMMELTE WERKE.

ERSTER BAND.

C. G. J. Jacobi.

Lichtdruck von J. Albert, München.

C. G. J. JACOBI'S

GESAMMELTE WERKE.

HERAUSGEGEBEN AUF VERANLASSUNG DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ERSTER BAND.

MIT DEM BILDNISSE JACOBI'S.

HERAUSGEGEBEN

VON

C. W. BORCHARDT.

BERLIN.
VERLAG VON G. REIMER.
1881.

VORREDE.

Die hiesige Akademie der Wissenschaften hat bereits vor mehreren Jahren auf den Antrag der Mitglieder ihrer mathematischen Section die Veranstaltung einer Gesammtausgabe der Werke Jacobi's, Lejeune Dirichlet's und Steiner's beschlossen und die dazu erforderlichen Geldmittel bewilligt. Dabei ist festgesetzt worden, diese Ausgabe solle in würdiger Ausstattung und zu einem verhältnissmässig billigen Preise alle Arbeiten der genannten Mathematiker enthalten, welche von ihnen selbst veröffentlicht oder im Wesentlichen druckfertig hinterlassen worden sind*). Jede einzelne Arbeit solle aber vor dem Abdruck einer sorgfältigen Revision**) unterworfen und nicht nur von Druck- und Schreibfehlern, sondern auch von sonstigen, offenbar bloss durch

*) Aus dem von Borchardt sorgfältig geordneten Nachlass Jacobi's ist bereits eine beträchtliche Anzahl von Abhandlungen veröffentlicht worden; es haben sich aber noch mehrere andere vorgefunden, die jetzt zum erstenmale erscheinen werden.

**) Von vielen der in Crelle's Journal erschienenen Abhandlungen haben sich die Manuscripte erhalten und sind im Besitz der Akademie. Selbstverständlich werden von diesen die in Betracht kommenden bei der Revision benutzt.

Versehen entstandenen Unrichtigkeiten möglichst gereinigt, im Uebrigen aber der ursprüngliche Text als historisches Document treu beibehalten werden.

Von der diesem Programm gemäss auszuführenden Arbeit hatte den ohne Vergleich schwierigsten Theil, die Herausgabe der Werke Jacobi's, mein verewigter Freund C. W. Borchardt übernommen, der dazu wie kein anderer befähigt und berufen war. Sein unerwarteter Tod war der härteste Schlag, der das geplante Unternehmen treffen konnte, und nur der grofsen Umsicht, mit der er für seinen Antheil an demselben seit Jahren alles Erforderliche vorbereitet hatte, ist es zu danken, dass gleichzeitig mit dem von mir herausgegebenen ersten Bande von Steiner's Werken auch der vorliegende erste Band von Jacobi's Werken ausgegeben werden kann. In demselben findet sich keine Seite, die nicht vor dem Drucke zuerst von einem mit dem Inhalt vertrauten Mathematiker und darauf von Borchardt selbst auf das genaueste durchgesehen worden ist. Mein Antheil an der Herausgabe beschränkt sich darauf, dass ich vom 51sten Bogen an die letzte Revision des Druckes besorgt und die am Schlusse des Bandes zusammengestellten Anmerkungen nach den von Borchardt hinterlassenen Notizen ausgearbeitet und mit einigen Zusätzen versehen habe.

Nach dem von Borchardt entworfenen Plane sollen die Arbeiten Jacobi's, nach den behandelten Gegenständen in Gruppen vertheilt und innerhalb einer jeden Gruppe soweit als thunlich chronologisch geordnet, in sieben Bänden erscheinen. Von diesen bilden die beiden ersten insofern ein für sich bestehendes Werk, als sie bestimmt sind, alle auf die Theorie und Anwendung der elliptischen und Abel'schen Transcendenten sich beziehenden Arbeiten Jacobi's aufzunehmen, eine Anordnung, die ohne Zweifel allgemeinen Beifall finden wird. Dass der erste Band mit Dirichlet's vortrefflicher Gedächtnissrede auf Jacobi beginnt, wird man ebenfalls billigen. Ob es ausführbar und zweckmässig sei, den für jetzt in Aussicht genommenen sieben Bänden noch Supplementbände mit Mittheilungen aus wohlbeglaubigten Nachschriften von Jacobi's Universitäts-Vorlesungen *), sowie aus fragmentarischen Stücken des Nachlasses und Briefen hinzuzufügen, muss späterer Erwägung vorbehalten bleiben.

Schliesslich habe ich noch anzuführen, dass ein wesentlicher Theil der Vorarbeiten für die Herausgabe des ersten Bandes von den Herren Professoren Mertens, Netto und H. A. Schwarz besorgt worden ist. Die beiden ersten haben die *Fundamenta nova*, Herr Schwarz die Abhandlungen aus *Schumacher's Astronomischen Nachrichten* und dem *Crelle'schen Journal* vor dem Wiederabdruck revidirt; Herr Mertens hat überdies die erste und dritte der nachgelassenen Abhandlungen druckfertig gemacht und einen grossen Theil der übrigen einer zweiten Durchsicht unterworfen. Alle drei Herren haben sich ferner, ein jeder für die von ihm durchgesehenen Stücke, an der Correctur des Druckes betheiligt. Aufser ihnen sind Herr Dr. K. Schering für den ganzen Band, und die Herren Professoren Roethig, Lampe und Wangerin für Theile desselben als Correctoren thätig gewesen. Endlich hat Herr Ch. Hermite die grofse Güte gehabt, von der *Correspondance mathématique avec Legendre* eine Correctur zu lesen. Indem ich an Stelle meines dahingeschiedenen Freundes den genannten Herren für den uneigennützigen Eifer

*) Von den wichtigsten der in Königsberg und hier gehaltenen Vorlesungen Jacobi's sind in Borchardt's Nachlass gute Ausarbeitungen vorhanden; dieselben sollen mit dem gesammten wissenschaftlichen Nachlass Jacobi's im Archiv der Akademie aufbewahrt werden.

und die grofse Sorgfalt, womit sie die übernommenen mühsamen und zeitraubenden Arbeiten ausgeführt haben, den gebührenden Dank ausspreche, gebe ich mich gern der Hoffnung hin, dass ich, unterstützt von einer gleichen Bereitwilligkeit meiner Berufsgenossen, das begonnene Unternehmen werde fortführen können.

Berlin, den 18. December 1880.

Weierstrass.

INHALTSVERZEICHNISS DES ERSTEN BANDES.

	Seite
1. Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi von Lejeune Dirichlet	1—28
2. Extrait de deux Lettres de M. Jacobi de l'université de Kœnigsberg à M. Schumacher	29—36
3. Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis	37—48
4. Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum	49—239
5. Addition au mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques Vol. II, p. 101 du Journal de M. Crelle	241—243
6. Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés	245—247
7. Notices sur les fonctions elliptiques	249—275
8. Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementar-Geometrie	277—293
9. De functionibus ellipticis commentatio prima et altera	295—326
10. Note sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'algèbre	327—331
11. Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales	333—341
12. Ueber die zur numerischen Berechnung der elliptischen Functionen zweckmässigsten Formeln	343—368
13. Ueber einige die elliptischen Functionen betreffenden Formeln	369—372
14. Anzeige von Legendre: Théorie des fonctions elliptiques, troisième supplément	373—382

NACHLASS.

15. Correspondance mathématique avec Legendre	385—461
16. De transformationibus functionum ellipticarum irrationalibus sive inversis	463—482

		Seite
17.	De divisione integralium ellipticorum in *n* partes aequales	483—488
18.	De multiplicatione functionum ellipticarum per quantitatem imaginariam pro certo quodam modulorum systemate	489—496
19.	Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet	497—538
20.	Anmerkungen	539—546

GEDÄCHTNISSREDE

AUF

CARL GUSTAV JACOB JACOBI

VON

LEJEUNE DIRICHLET.

Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
aus dem Jahre 1852.

GEDÄCHTNISSREDE

AUF

CARL GUSTAV JACOB JACOBI

VON

LEJEUNE DIRICHLET.

[Gehalten in der Akademie der Wissenschaften am 1. Juli 1852.]

Indem ich es unternehme, die wissenschaftlichen Leistungen des gröfsten Mathematikers zu schildern, welcher seit Lagrange unserer Körperschaft als anwesendes Mitglied angehört hat, treten mir lebhaft die Schwierigkeiten der Aufgabe vor Augen, die ganze Bedeutung der Schöpfungen eines Mannes darzustellen, welcher mit starker Hand in fast alle Gebiete einer durch zweitausendjährige Arbeit zu unermesslichem Umfange angewachsenen Wissenschaft eingegriffen, überall, wohin er seinen schöpferischen Geist gerichtet, wichtige oft tief verborgene Wahrheiten zu Tage gefördert und, neue Grundgedanken in die Wissenschaft einführend, die mathematische Speculation in mehr als einer Richtung auf eine höhere Stufe erhoben hat. Nur die Überzeugung, dass solchen der Wissenschaft und ihren Pflegern geleisteten Diensten gegenüber eine Pflicht der Dankbarkeit zu erfüllen ist, kann die Bedenken, welche das Bewusstsein meiner Unzulänglichkeit in mir hervorruft, zum Schweigen bringen: denn wem könnte die Erfüllung dieser Pflicht mehr obliegen als mir, der ich, wie alle meine Fachgenossen durch Jacobis wissenschaftliche Productionen so wesentlich gefördert, überdies eine nicht geringere Belehrung meinem vieljährigen, so nahen Verkehr mit dem grofsen Forscher verdanke. —

Carl Gustav Jacob Jacobi wurde den 10. Dec. 1804 zu Potsdam geboren, wo sein Vater ein begüterter Kaufmann war. Die erste Unterweisung in den alten Sprachen und den Elementen der Mathematik erhielt er von seinem mütterlichen Oheim, Hrn. Lehmann, der den regsamen Knaben weniger zu unterrichten als zu lenken hatte, und unter dessen einsichtiger Leitung dieser so rasche Fortschritte machte, dass er noch nicht zwölf Jahre alt in die zweite Klasse des Potsdamer Gymnasiums und schon nach einem halben Jahre in die erste aufgenommen wurde. In dieser blieb er volle 4 Jahre, da er nicht füglich vor zurückgelegtem 16ten Jahre die Universität besuchen konnte. Der mathematische Unterricht, der ganz als Gedächtnisssache behandelt wurde, konnte dem jungen Primaner nicht zusagen. Sein Verhältniss zum Lehrer war daher längere Zeit sehr unangenehm, gestaltete sich jedoch zuletzt besser, da der Lehrer einsichtig genug war den ungewöhnlichen Schüler gewähren zu lassen und es zu gestatten, dass dieser sich mit Eulers *Introductio* beschäftigte, während die übrigen Schüler mühsam erlernte Elementarsätze hersagten. Wie weit Jacobis geistige Entwicklung damals schon vorgeschritten war, zeigt der Versuch, den er um diese Zeit zur Auflösung der Gleichungen des 5ten Grades anstellte, und dessen er in einer seiner Abhandlungen später erwähnt hat.

An dieser Aufgabe hat mehr als einer von denen, welche später einen grofsen Namen erlangt haben, zuerst seine Kräfte geübt, und man begreift in der That leicht, welchen Reiz gerade dieses Problem auf ein erwachendes Talent ausüben musste, so lange die Unmöglichkeit desselben noch nicht erwiesen war. Zu der Berühmtheit, welche so viele fruchtlose Bemühungen dieser Untersuchung gegeben hatten, gesellte sich der besondere Umstand, dass das Problem, als einem Gebiete angehörig, welches unmittelbar an die Elemente grenzt, ohne ein grofses Mafs von Vorkenntnissen zugänglich schien.

Auf der hiesigen Universität theilte Jacobi seine Zeit zwischen philosophischen, philologischen und mathematischen Studien. Als Theilnehmer an den Übungen des philologischen Seminars erregte er die Aufmerksamkeit unseres Collegen Böckh, des Vorstehers dieses Instituts, welcher den jungen Mann wegen seines scharfen und eigenthümlichen Geistes sehr lieb gewann und durch besonderes Wohlwollen auszeichnete.

Mathematische Vorlesungen scheint er wenig besucht zu haben, da diese damals auf der hiesigen Universität einen zu elementaren Charakter hatten, als dass sie Jacobi, der schon mit einigen der Hauptwerke von Euler und Lagrange vertraut war, wesentlich hätten fördern können. Desto eifriger sah er

sich in der mathematischen Litteratur um und suchte namentlich eine allgemeine Übersicht der grofsen wissenschaftlichen Schätze zu gewinnen, welche die akademischen Sammlungen enthalten. Jacobi, dessen Natur das blofse Einsammeln von Kenntnissen nicht zusagte und der das Bedürfniss fühlte, der Dinge, womit er sich beschäftigte, ganz Herr zu werden, erkannte nach etwa zweijährigen Universitätsstudien die Nothwendigkeit einen Entschluss zu fassen, und entweder der Philologie oder der Mathematik zu entsagen. Da die Entscheidung, welche er traf, nicht nur für ihn, sondern auch für die Wissenschaft, welcher er sich von nun an ausschliefslich widmete, so wichtige Folgen gehabt hat, so wird man die Gründe, welche seine Wahl bestimmten, gern von ihm selbst erfahren. Er schreibt darüber an seinen schon genannten Oheim: »Indem ich so doch einige Zeit mich ernstlich mit der Philologie beschäftigte, gelang es mir einen Blick wenigstens zu thun in die innere Herrlichkeit des alten hellenischen Lebens, so dass ich wenigstens nicht ohne Kampf dessen weitere Erforschung aufgeben konnte. Denn aufgeben muss ich sie für jetzt ganz. Der ungeheure Koloss, den die Arbeiten eines Euler, Lagrange, Laplace hervorgerufen haben, erfordert die ungeheuerste Kraft und Anstrengung des Nachdenkens, wenn man in seine innere Natur eindringen will und nicht blofs äusserlich daran herumkramen. Über diesen Meister zu werden, dass man nicht jeden Augenblick fürchten muss von ihm erdrückt zu werden treibt ein Drang, der nicht rasten und ruhen lässt, bis man oben steht und das ganze Werk übersehen kann. Dann ist es auch erst möglich mit Ruhe an der Vervollkommnung seiner einzelnen Theile recht zu arbeiten und das ganze, grofse Werk nach Kräften weiter zu führen, wenn man seinen Geist erfasst hat.«

Zu seiner Doctordissertation wählte Jacobi einen schon vielfach behandelten Gegenstand, die Zerlegung der algebraischen Brüche. Er beweist darin zuerst merkwürdige Formeln, welche Lagrange ohne Beweis in den Abhandlungen unserer Akademie gegeben hatte, geht dann zu einer neuen Art der Zerlegung über, welche nicht, wie die bis dahin ausschliefslich betrachtete, völlig bestimmt ist, und beschliefst die Abhandlung mit Untersuchungen über die Umformung der Reihen, wobei schon ein neues Princip bemerklich wird, von welchem er in späteren Arbeiten mehrfach Gebrauch gemacht hat.

Gleich nach seiner Promotion habilitirte sich Jacobi bei der Universität und hielt eine Vorlesung über die Theorie der krummen Flächen und Curven im

Raume. Nach dem Zeugniss eines seiner damaligen Zuhörer muss sein Lehrtalent bei diesem ersten Auftreten schon sehr entwickelt gewesen sein und er es verstanden haben, sein Thema mit groſser Klarheit und auf eine seine Zuhörer sehr anregende Weise zu behandeln. Der 21jährige Docent zeigte auch darin eine sehr frühe Reife des Urtheils, dass er, unbeirrt durch den Misskredit, in welchen die Methode des Unendlichkleinen um jene Zeit durch eine groſse Autorität gekommen war, gerade dieser in seiner Darstellung folgte und seine Zuhörer mit dem besten Erfolge zu überzeugen sich bemühte, dass die verdächtigte Methode nur in ihrer abgekürzten Form von der strengen Methode der Alten unterschieden ist, aber gerade durch diese Form bei allen zusammengesetzteren Fragen unentbehrlich wird.

Die Aufmerksamkeit, welche Jacobi zu erregen anfing, veranlasste die höchste Unterrichtsbehörde ihn aufzufordern, seine Lehrthätigkeit vorläufig als Privatdocent in Königsberg fortzusetzen, wo durch die eben vacant gewordene Professur der Mathematik sich zu seiner Beförderung mehr Aussichten als in Berlin darboten.

Bei seiner Übersiedlung nach Königsberg war es für Jacobi ein wichtiges Ereigniss den groſsen Astronomen Bessel persönlich kennen zu lernen und zum ersten Male in einem dem seinigen so nahe verwandten Fache ein Genie in der Nähe zu sehen. Die tägliche Anschauung des Feuereifers dieses ausserordentlichen Mannes übte selbst auf ihn, der es doch von seiner frühsten Jugend an gewohnt war, die gröſsten Anstrengungen von sich zu fordern, den mächtigsten Einfluss, dessen er später oft dankbar erwähnt hat.

Es war für Jacobis schriftstellerische Laufbahn ein glücklicher Umstand, dass der Anfang derselben mit der Gründung der mathematischen Zeitschrift zusammenfiel, durch deren Herausgabe sich unser College Crelle ein so groſses und bleibendes Verdienst nicht nur um die Verbreitung sondern auch um die Belebung des Studiums der Wissenschaft erworben hat. Jacobi, der zu den frühsten Mitarbeitern der Zeitschrift gehörte, ist ihr bis zu seinem Tode treu geblieben, und wenn man die beiden besondern Werke ***Fundamenta nova*** und ***Canon arithmeticus*** ausnimmt, so sind fast alle seine andern Arbeiten zuerst im Crelleschen Journal erschienen.

Jacobis erste Abhandlungen zeigen ihn schon als durchaus vollendeten Mathematiker, mag er nun, wie in den Aufsätzen »über Gauſs neue Methode zur genäherten Bestimmung der Integrale« und »über die Pfaffsche Methode für die Integration der partiellen Differentialgleichungen«, bekannte Theorieen aus einem neuen Gesichtspunkte betrachten und wesentlich vereinfachen oder noch nicht gelöste Probleme behandeln und zu neuen Resultaten gelangen. Unter den Arbeiten der letzteren Art sind hier zwei besonders zu erwähnen: eine Abhandlung von wenigen Seiten, in der er eine bis dahin unbekannt gebliebene Grundeigenschaft der merkwürdigen Function kennen lehrt, welche von Legendre zuerst in die Wissenschaft eingeführt, in allen spätern allgemeinen Untersuchungen über die Anziehung eine so groſse Rolle gespielt hat, und eine andere »über die cubischen Reste«. Diese letztere enthält zwar nur Sätze ohne Beweise, aber diese Sätze sind der Art, dass sie nicht das Ergebniss der Induction sein können und keinen Zweifel darüber lassen, dass Jacobi schon damals in dem wissenschaftlichen Gebiete, welches Gauſs ein Vierteljahrhundert früher der mathematischen Speculation eröffnet hatte und welches eben so sehr der höheren Algebra als der Theorie der Zahlen angehört, im Besitze neuer, fruchtbarer Principien sein musste, was auch durch eine spätere Publication bestätigt wird, in der er ausdrücklich erwähnt, dass er diese Principien schon damals Gauſs brieflich mitgetheilt habe.

Von der weiteren Verfolgung dieses Gegenstandes wurde Jacobi zu jener Zeit durch eine andere Arbeit, seine Untersuchungen über die elliptischen Functionen abgezogen, welche ihm bald eine so groſse Berühmtheit verleihen und eine Stelle unter den ersten Mathematikern der Zeit anweisen sollten.

Der junge Mathematiker, der sich schon in so vielen Richtungen mit Erfolg versucht hatte, schien längere Zeit in der Theorie der elliptischen Functionen vom Glücke nicht begünstigt zu werden. Einer seiner Freunde, der ihn eines Tages auffallend verstimmt fand, erhielt auf die Frage nach dem Grunde dieser Verstimmung von ihm die Antwort: Sie sehen mich eben im Begriff dieses Buch (Legendres *exercices*) auf die Bibliothek zurückzuschicken, mit welchem ich entschiedenes Unglück habe. Wenn ich sonst ein bedeutendes Werk studirt habe, hat es mich immer zu eigenen Gedanken angeregt und ist dabei immer etwas für mich abgefallen. Diesmal bin ich ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfalle inspirirt worden.

Wenn die eignen Gedanken in diesem Falle etwas lange auf sich warten lieſsen, so stellten sie sich dafür später um so reichlicher ein, so reichlich, dass sie in Verbindung mit den gleichzeitigen Gedanken Abels eine unerwartete Erweiterung und die völlige Umgestaltung eines der wichtigsten Zweige der Analysis zur Folge hatten.

Indem der Fortschritt hier zu derselben Zeit von zwei verschiedenen Seiten ausging, wird es erforderlich neben Jacobis Untersuchungen die gleichzeitigen Arbeiten Abels zu erwähnen. Im Ursprunge von einander unabhängig, greifen die Entdeckungen beider später so in einander ein, dass die Darstellung der einen ohne Berücksichtigung der andern kaum verständlich sein würde.

Die Theorie der elliptischen Functionen, mit welcher Abels und Jacobis Namen auf immer verbunden sind, reicht in ihren Anfängen nicht über die erste Hälfte des vorigen Jahrhunderts zurück. Ein italienischer Mathematiker von ungewöhnlichem Scharfsinn, der Graf Fagnano aus dem Kirchenstaate, machte die merkwürdige Entdeckung, dass das Integral, welches den Bogen der Curve ausdrückt, welche damals die Mathematiker unter dem Namen Lemniscate vielfach beschäftigte, ähnliche Eigenschaften besitzt wie das einfachere Integral, welches einen Kreisbogen darstellt, und dass z. B. zwischen den Grenzen zweier Integrale dieser Art, deren eines dem doppelten Werthe des andern gleich ist, ein einfacher algebraischer Zusammenhang Statt findet, so dass ein Lemniscatenbogen, wenn gleich eine Transcendente höherer Art, doch wie ein Kreisbogen durch geometrische Construction verdoppelt oder gehälftet werden kann. Euler fand einige Jahre später die eigentliche Quelle dieser und anderer ähnlicher Eigenschaften in einem Satze, der zu den schönsten Bereicherungen gehört, welche die Wissenschaft diesem grofsen Forscher verdankt. Nach diesem Eulerschen Satze hängt ein gewisses Integral, welches allgemeiner ist als das von Fagnano betrachtete und in unserer jetzigen Terminologie elliptisches Integral der ersten Gattung heifst, so von seiner Grenze ab, dass zwei solche Integrale mit beliebigen Grenzen immer in ein drittes vereinigt werden können, dessen Grenze eine einfache algebraische Verbindung der Grenzen jener ist, gerade so wie der Sinus eines zweitheiligen Bogens algebraisch aus den Sinus seiner Bestandtheile gebildet werden kann. Aber das elliptische Integral ist allgemeiner als dasjenige, welches einen Kreisbogen ausdrückt. Auf die einfachste Form gebracht hängt es nicht wie dieses blofs von seiner Grenze, sondern auch von einer andern in der Function enthaltenen Gröfse, dem sogenannten Modul, ab. Das Eulersche Theorem ergab nur Beziehungen zwischen Integralen mit demselben Modul. Das erste Beispiel eines Zusammenhanges zwischen Integralen, die sich durch ihre Moduln unterscheiden, bot eine spätere von Landen und in etwas anderer Form von Lagrange gemachte Entdeckung dar, nach welcher ein elliptisches Integral durch eine einfache algebraische Substitution in ein anderes Integral derselben Art verwandelt werden kann.

Es ist Legendres unvergänglicher Ruhm in den eben erwähnten Entdeckungen die Keime eines wichtigen Zweiges der Analysis erkannt und durch die Arbeit eines halben Lebens auf diesen Grundlagen eine selbständige Theorie errichtet zu haben, welche alle Integrale umfasst, in denen keine andere Irrationalität enthalten ist als eine Quadratwurzel, unter welcher die Veränderliche den 4ten Grad nicht übersteigt. Schon Euler hatte bemerkt, mit welchen Modificationen sein Satz auf solche Integrale ausgedehnt werden kann; Legendre, indem er von dem glücklichen Gedanken ausging, alle diese Integrale auf feste canonische Formen zurückzuführen, gelangte zu der für die Ausbildung der Theorie so wichtig gewordenen Erkenntniss, dass sie in drei wesentlich verschiedene Gattungen zerfallen. Indem er dann jede Gattung einer sorgfältigen Untersuchung unterwarf, entdeckte er viele ihrer wichtigsten Eigenschaften, von welchen namentlich die, welche der dritten Gattung zukommen, sehr verborgen und ungemein schwer zugänglich waren. Nur durch die ausdauerndste Beharrlichkeit, die den grofsen Mathematiker immer von neuem auf den Gegenstand zurückkommen liefs, gelang es ihm hier Schwierigkeiten zu besiegen, welche mit den Hülfsmitteln, die ihm zu Gebote standen, kaum überwindlich scheinen mussten.

Die Theorie, wie Abel und Jacobi sie vorfanden, bot mehrere höchst räthselhafte Erscheinungen dar, zu deren Aufklärung die damals bekannten Principien nicht ausreichten. So hatte man, um nur eine dieser Erscheinungen zu erwähnen, gefunden, dass der Grad der mit Hülfe des Eulerschen Satzes gebildeten Gleichung, von deren Lösung die Theilung des elliptischen Integrals abhängt, nicht wie in der analogen Frage der Kreistheilung der Anzahl der Theile sondern dem Quadrate dieser Anzahl gleich ist. Die Bedeutung der reellen Wurzeln, deren Anzahl mit jener übereinstimmt, war leicht ersichtlich, wogegen die zahlreichern imaginären ganz unerklärlich erscheinen mussten. Aber dass hier ein Geheimniss verborgen liege, darüber hatte man vor Abel und Jacobi kein Bewusstsein, und ihnen war es vorbehalten sich zuerst über diese und ähnliche Erscheinungen zu wundern, was in der Mathematik wie in anderen Gebieten oft schon eine halbe Entdeckung ist.

Obgleich die Umgestaltung der Theorie der elliptischen Functionen, welche man Abel und Jacobi verdankt, aus dem Zusammenwirken mehrerer sich gegenseitig unterstützender Gedanken hervorgegangen ist, so scheint doch zweien dieser Gedanken die gröfste Wichtigkeit zugeschrieben werden zu müssen, weil sie alle Theile der neuen Theorie innig durchdringen. Während die früheren Bearbeiter dieses Gegenstandes das elliptische Integral der ersten Gattung als eine Function seiner Grenze ansahen, erkannten Abel und Jacobi unabhängig von einander, wenn auch der erstere einige Monate früher, die Nothwendigkeit die Betrachtungsweise umzukehren und die Grenze nebst zwei einfachen von ihr abhängigen Gröfsen, die so unzertrennlich mit ihr verbunden sind wie der Sinus zum Cosinus gehört, als Functionen des Integrals zu behandeln, gerade wie man schon früher zur Erkenntniss der wichtigsten Eigenschaften der vom Kreise abhängigen Transcendenten gelangt war, indem man den Sinus und Cosinus als Functionen des Bogens und nicht diesen als eine Function von jenen betrachtete.

Ein zweiter Abel und Jacobi gemeinsamer Gedanke, der Gedanke das Imaginäre in diese Theorie einzuführen, war von noch gröfserer Bedeutung und Jacobi hat es später oft wiederholt, dass die Einführung des Imaginären allein alle Räthsel der früheren Theorie gelöst habe. Wäre es nicht eine so alte Erfahrung, dass das nahe Liegende sich fast immer zuletzt darbietet, so würde man es auffallend finden müssen, dass dieser Gedanke Euler entgangen ist, zu dessen frühsten und schönsten Leistungen es gehört, die Theorie der Kreisfunctionen, indem er diese als imaginäre Exponentialgröfsen behandelte, in solchem Grade vereinfacht und erweitert zu haben, dass fast das ganze Gebiet der Analysis eine wesentliche Umgestaltung dadurch erfuhr.

Indem Abel und Jacobi in die vorhin erwähnten, durch Umkehrung aus dem elliptischen Integral der ersten Gattung gebildeten Functionen, welche nach unserer jetzigen Terminologie ausschliefslich elliptische Functionen genannt werden, das Imaginäre einführten, erkannten sie, dass diese Functionen gleichzeitig an der Natur der Kreisfunctionen und an der der Exponentialgröfsen Theil haben, und dass, während jene nur für reelle, diese nur für imaginäre Werthe des Argumentes periodisch sind, die elliptischen Functionen beide Arten der Periodicität in sich vereinigen.

Durch den Besitz dieser Grundgedanken auf einen neuen Boden gestellt, richteten Abel und Jacobi ihre Untersuchungen auf zwei verschiedene Regionen der Theorie. Abels Thätigkeit wandte sich den Problemen zu, welche die Vervielfältigung und Theilung der elliptischen Integrale betreffen, und indem er mit Hülfe des Princips der doppelten Periode in die Natur der Wurzeln der Gleichung, von welcher die Theilung abhängt, tief eindrang, gelangte er zu der ganz unerwarteten Entdeckung, dass die allgemeine Theilung des elliptischen Integrals mit beliebiger Grenze immer algebraisch d. h. durch blofse Wurzelausziehungen bewerkstelligt werden kann, sobald die besondere Theilung der sogenannten vollständigen Integrale als schon ausgeführt vorausgesetzt wird. Die eben genannte besondere Theilung scheint nur für specielle Module möglich, unter welchen derjenige der einfachste ist, dem die Lemniscate entspricht. Indem er die Lösung des Problems für diesen Fall durchführte, zeigte er, dass die Theilung der ganzen Lemniscate der Kreistheilung völlig analog ist und in denselben Fällen durch geometrische Construction geleistet werden kann, in welchen nach der schönen 25 Jahre früher von Gaufs gegebenen Theorie der Kreis eine solche Theilung zulässt.

An diese letztere Arbeit Abels knüpft sich eine erwähnenswerthe historische Merkwürdigkeit. In der Einleitung zum letzten Abschnitte der *Disquisitiones arithmeticae*, welcher der Kreistheilung gewidmet ist, hatte Gaufs im Vorbeigehen bemerkt, dass dasselbe Princip, worauf seine Kreistheilung beruht, auch auf die Theilung der Lemniscate anwendbar sei, und in der That liegt das Gaufsische Princip, nach welchem die Wurzeln der zu lösenden Gleichung so in einen Cyclus zu bringen sind, dass jede von der vorhergehenden auf dieselbe Weise abhängt, der Abhandlung Abels über die Theilung der Lemniscate wesentlich zu Grunde; wenn aber für die Kreistheilung längst bekannte Eigenschaften der trigonometrischen Functionen genügten, um die Wurzeln dem Gaufsischen Principe gemäfs zu ordnen, so war für den Fall der Lemniscate zu einer ähnlichen Anordnung, ja um nur die Möglichkeit einer solchen zu erkennen, eine Einsicht in die Natur der Wurzeln erforderlich, welche nur das Princip der doppelten Periodicität gewähren konnte. Die vorhin erwähnte Äufserung ist also durch Abels Abhandlung zu einem unwidersprechlichen Zeugnisse geworden, dass Gaufs, seiner Zeit weit vorauseilend, schon zu Anfange des Jahrhunderts das Princip der doppelten Periode erkannt hatte. Dieses Zeugniss ist jedoch erst durch die spätere Arbeit Abels verständlich geworden, und thut daher seinem und Jacobis Anrecht an diese Erfindung keinen Abbruch.

Aufser den schon erwähnten auf die Theilung bezüglichen Resultaten hatten Abels Untersuchungen noch eine andere nicht weniger wichtige Entdeckung zur Folge. Indem er in den Formeln, durch welche er die elliptischen Functionen eines vielfachen Argumentes durch die Functionen des einfachen dargestellt hatte, den Multiplicator unendlich werden liefs, erhielt er merkwürdige Ausdrücke für die elliptischen Functionen in Form von unendlichen Reihen, so wie von Quotienten unendlicher Producte, eine Entdeckung, welche für die Analysis vielleicht von noch gröfserer Bedeutung ist, als die von Abel nachgewiesene algebraische Lösbarkeit der Gleichungen für die Theilung.

Zu derselben Zeit als Abel diese schönen Untersuchungen ausführte, war Jacobi in einem andern Theile desselben Gebietes nicht weniger erfolgreich beschäftigt. Die oben erwähnte Substitution, durch welche ein elliptisches Integral in ein Integral derselben Form übergeht, war bis dahin die einzige ihrer Art. Zwar hatte Legendre nicht lange vor der Zeit, wo Jacobi sich diesem Gegenstande zuwandte, eine zweite Transformation der elliptischen Integrale aufgefunden, aber diese zweite Transformation, mit welcher er den Gegenstand für abgeschlossen hielt, war damals in Deutschland noch nicht bekannt, und es gehörte daher ein seltener Scharfsinn dazu aus einem sichtbaren Ringe auf das Vorhandensein einer unendlichen Kette zu schliefsen, und eine eben so grofse Kühnheit, sich die Erkenntniss der Natur dieser Kette als Aufgabe zu stellen.

Eine glückliche Induction, bei welcher der feine und ganz neue Gedanke eine wesentliche Rolle spielte, die Transformation und die Multiplication aus einem gemeinschaftlichen Gesichtspuncte und letztere als einen speciellen Fall der erstern zu betrachten, leitete Jacobi auf die Vermuthung, dass rationale Functionen jedes Grades geeignet seien, ein elliptisches Integral in ein Integral derselben Form zu verwandeln. Diese Vermuthung bestätigte sich sogleich, indem sich ergab, dass die Anzahl der willkürlichen Coefficienten, über welche man für jeden Grad zu verfügen hatte, ausreichte, um allen Bedingungen zu genügen, welche zu erfüllen waren, wenn das transformirte Integral der Form nach mit dem ursprünglichen übereinstimmen sollte. Aber wenn eine so einfache Betrachtungsweise über die Möglichkeit der Sache kaum einen Zweifel lassen konnte, so war noch ein grofser Schritt zu thun, um die innere analytische Natur der zur Transformation geeigneten gebrochenen Ausdrücke zu erkennen. Von welcher Art die hierbei zu besiegenden Schwierigkeiten waren, und durch welche geistreiche Betrachtungen Jacobi diese überwand, kann hier nicht ausgeführt werden, eben so wenig als es mir gestattet ist alle wichtigen Folgerungen aufzuzählen, die sich aus dem vollständig gelösten Probleme ergaben. Ich erwähne nur des merkwürdigen Ergebnisses dieser Untersuchung, dass die Multiplication immer aus zwei Transformationen zusammengesetzt werden kann.

Indem Abel und Jacobi so die Theorie gleichzeitig in zwei verschiedenen Richtungen vervollkommneten, schien es, als habe das Schicksal die Ehre des zu vollbringenden Fortschrittes gleichmäfsig unter die jungen Wettkämpfer vertheilen wollen, denn die Art wie bald darauf einer die Erfindung des andern weiter führte, liefs keinen Zweifel, dass jeder von ihnen, wäre ihm der andere nicht in einem Theile der Arbeit zuvorgekommen, den ganzen Fortschritt allein vollbracht haben würde.

Jacobi war in seinen Untersuchungen von der Annahme ausgegangen, dass bei der Transformation die ursprüngliche Variable rational durch die neue ausgedrückt sei. Abel behandelte das Problem in der weiteren Voraussetzung, dass zwischen beiden irgend eine algebraische Gleichung Statt finde, und gelangte zu dem Resultate, dass das so verallgemeinerte Problem immer auf den Fall zurückgeführt werden kann, den Jacobi so vollständig behandelt hatte.

Nicht minder erfolgreich griff Jacobi in die von Abel gegebene Theorie der allgemeinen Theilung ein. Die Art, wie Abel das Problem gelöst hatte, zeigte zwar, dass die Wurzeln immer algebraisch ausdrückbar sind, erforderte aber zur wirklichen Darstellung derselben die Bildung von gewissen symmetrischen Wurzelverbindungen, die nur in jedem besondern Falle bewerkstelligt werden konnte. Aus einem neuen Principe, welches bald näher zu erwähnen sein wird, leitete Jacobi die schliefslichen, für jeden Grad geltenden und unmittelbar aus den Daten des Problems gebildeten Ausdrücke der Wurzeln ab, welche Ausdrücke überdies vor den Abelschen eine gröfsere Einfachheit ihrer Form voraus haben. Als Jacobi das Resultat dieser Arbeit in einer kurzen Notiz bekannt machte, hoffte er Abel durch die Vervollkommnung der Lösung des Theilungsproblems in Verwunderung zu setzen, aber diese Hoffnung blieb unerfüllt. — Abel war eben gestorben, kaum 27 Jahre alt, weniger als zwei Jahre nach der Bekanntmachung seiner ersten Arbeiten über die elliptischen Functionen. Ein so frühes Ziel hatte der Tod der glänzenden Laufbahn dieses tiefsinnigen und umfassenden Geistes gesetzt.

Jacobis weitere Untersuchungen über die elliptischen Transcendenten, wie auch die zuletzt erwähnte, sind aus einem Gedanken hervorgegangen, dem man wegen der Folgen, die er gehabt, vielleicht die erste Stelle unter seinen Conceptionen einräumen muss. Es war dies der Gedanke, die unendlichen Producte, durch deren Quotienten Abel die elliptischen Functionen ausgedrückt hatte, als selbständige Transcendenten in die Analysis einzuführen. Als es ihm gelungen war diese Producte, die übrigens alle von derselben Natur und als besondere Fälle einer Transcendente anzusehen sind, in Reihenform darzustellen, erkannte er eine Function, welche sich französischen Mathematikern schon in Untersuchungen der mathematischen Physik dargeboten hatte, wo sie aber wenig beachtet und nur eine ihrer Eigenschaften bemerkt worden war. Jacobi unterwarf sie einer tief eindringenden Untersuchung, erforschte ihre analytische Natur und führte sie dann in die Theorie der Integrale der 2ten und 3ten Gattung ein, was nicht nur die Erkenntniss des inneren Zusammenhanges schon bekannter, isolirt stehender Eigenschaften dieser Integrale, sondern auch die wichtige Entdeckung zur Folge hatte, dass die Integrale der 3ten Gattung, welche von drei Elementen abhangen, vermittelst der neuen Transcendente, welche deren nur zwei enthält, ausgedrückt werden können.

Bei der spätern Darstellung der ganzen Theorie, wie Jacobi sie in seinen Vorlesungen zu geben pflegte, bildet die Betrachtung der erwähnten Function den Ausgangspunkt. Die ganze Lehre gewinnt dadurch nicht nur einen überraschenden Grad von Einfachheit und Durchsichtigkeit, sondern dieser umgekehrte Gang ist auch dadurch bemerkenswerth, dass er für andere später zu erwähnende Untersuchungen das Vorbild geworden ist.

Bedenkt man, dass die neue Function jetzt das ganze Gebiet der elliptischen Transcendenten beherrscht, dass Jacobi aus ihren Eigenschaften wichtige Theoreme der höheren Arithmetik abgeleitet hat, und dass sie eine wesentliche Rolle in vielen Anwendungen spielt, von welchen hier nur die vermittelst dieser Transcendente gegebene Darstellung der Rotationsbewegung erwähnt werden mag, welche eine von Jacobis letzten und schönsten Arbeiten ist, so wird man dieser Function die nächste Stelle nach den längst in die Wissenschaft aufgenommenen Elementartranscendenten einräumen müssen. Auffallender Weise hat eine

so wichtige Function noch keinen andern Namen, als den der Transcendente Θ, nach der zufälligen Bezeichnung, mit der sie zuerst bei Jacobi erscheint, und die Mathematiker würden nur eine Pflicht der Dankbarkeit erfüllen, wenn sie sich vereinigten ihr Jacobis Namen beizulegen, um das Andenken des Mannes zu ehren, zu dessen schönsten Entdeckungen es gehört, die innere Natur und hohe Bedeutung dieser Transcendente zuerst erkannt zu haben.

Abels oben erwähnte Arbeiten sind nicht die einzige Leistung ersten Ranges dieses hervorragenden Mathematikers, sie sind nicht einmal die bedeutendste seiner Leistungen. Seine gröfste Entdeckung hat er in einem Satze niedergelegt, welcher seinen Namen führt, und ganz das Gepräge seines aufserordentlichen Geistes trägt, dessen charakteristische Eigenschaft es war, die Fragen der Wissenschaft in der umfassendsten Allgemeinheit zu behandeln.

Das schon oben bezeichnete Eulersche Theorem — ich rede hier von demselben als Princip, nicht von den daraus gezogenen Folgerungen, die sich täglich weiter erstreckten — bildete damals auf dem Gebiete, dem es angehört, die Grenze der Wissenschaft, über welche hinauszugehen Euler selbst, Lagrange und andere Vorgänger Abels sich vergebens bemüht hatten. Welche Bewunderung musste daher eine Entdeckung hervorrufen, welche, die Integrale aller algebraischen Functionen umfassend, die Grundeigenschaft derselben enthüllte.

Legendre nennt das Abelsche Theorem ein *monumentum aere perennius*, und Jacobi bezeichnet denselben Satz, »wie er in einfacher Gestalt und ohne Apparat von Calcul den tiefsten und umfassendsten mathematischen Gedanken ausspreche, als die gröfste mathematische Entdeckung unserer Zeit, obgleich erst eine künftige, vielleicht späte, grofse Arbeit ihre ganze Bedeutung aufweisen könne.«

Diese Arbeit hat bereits begonnen und Jacobi selbst hat daran den wesentlichsten Antheil gehabt.

Der nahe liegende Versuch, die umgekehrten Functionen der Abelschen Integrale auf dieselbe Weise, wie es bei den elliptischen mit so grofsem Erfolge geschehen war, in die Analysis einzuführen, erwies sich bald als unausführbar und verwickelte in unauflöslichen Widerspruch, denn Jacobi erkannte sogleich, dass diese umgekehrten Functionen vier- oder mehrfach periodisch sein müssten, während doch eine analytische Function, wenn sie wie die elliptischen und Kreisfunctionen einwerthig, und wo sie nicht unendlich wird, stetig sein soll, nur zwei Perioden zulässt. Es bedurfte also hier eines neuen verborgenen Gedankens, wenn das Abelsche Theorem nicht unfruchtbar bleiben, wenn es die Basis einer grofsen analytischen Theorie werden sollte.

Nachdem Jacobi mehrere Jahre hindurch den Gegenstand nach allen Seiten erwogen hatte, fand er endlich die Lösung des Räthsels darin, dass hier gleichzeitig vier oder mehr Integrale zu betrachten, und aus ihnen durch Umkehrung zwei oder mehr Functionen von eben so vielen Argumenten zu bilden sind. Diese Divination machte er in einer Abhandlung von 10 Seiten bekannt, der zwei Jahre später eine umfangreichere folgte, in welcher die analytische Natur dieser umgekehrten Functionen im hellsten Lichte erschien.

Gehört auch die später gefundene Darstellung dieser Functionen nicht Jacobi, sondern zwei jüngern Mathematikern von ungewöhnlichem Talente, so muss ich doch auch dieses wichtigen Fortschrittes hier in so fern erwähnen, als Jacobis Einfluss unverkennbar darin hervortritt. Goepel und Rosenhain haben beide, Jacobis oben erwähnte zweite Behandlung der Theorie der elliptischen Functionen zum Vorbilde nehmend, ihren schönen Arbeiten die Betrachtung von unendlichen Reihen zu Grunde gelegt, deren Bildungsgesetz allgemeiner aber von derselben Art wie das der Reihe ist, durch welche die Jacobische Function ausgedrückt wird.

Obgleich ich mich bei der eben gegebenen Darstellung von Jacobis Entdeckungen im Gebiete der elliptischen und Abelschen Transcendenten auf das Wesentlichste beschränkt habe, so ist dieselbe dennoch zu einem Umfange angewachsen, der mich zwingt, die noch zu erwähnenden Leistungen Jacobis hier in eine kurze Übersicht zusammenzufassen, aus welcher ich viele Arbeiten, welche nur einzelne Fragen betreffen und das Detail der Wissenschaft vervollkommnet haben, ausschliefsen muss.

Schon oben ist von Jacobis Untersuchungen über die Kreistheilung und die Anwendungen derselben auf die höhere Arithmetik als zu seinen frühesten Arbeiten gehörend die Rede gewesen. Bei diesen Untersuchungen, denen er die Form zum Grunde legte, welche die zuerst von Gaufs gegebene Auflösung der zweigliedrigen Gleichungen später durch Lagrange erhalten hatte, traf er in einigen Resultaten mit dem grofsen Mathematiker Cauchy zusammen, der zu derselben Zeit mit ähnlichen Forschungen beschäftigt war und dieses Umstandes

erwähnte, als er während Jacobis ersten Aufenthaltes in Paris seine Arbeiten im Auszuge veröffentlichte.

Aus einem schönen aus der Kreistheilung abgeleiteten Satze, auf den auch Cauchy gekommen war, und nach welchem alle Primzahlen, die bei der Division durch eine gegebene Primzahl oder das Vierfache derselben die Einheit zum Reste lassen, auf eine bestimmte Potenz erhoben, deren Exponent blofs von der letzteren Primzahl abhängt, durch die sogenannte quadratische Hauptform dargestellt werden, welche die negativ genommene gegebene Primzahl zur Determinante hat, schöpfte Jacobi die Vermuthung, dass jener Exponent mit der Anzahl der von einander verschiedenen quadratischen Formen übereinstimmen müsse, welche der erwähnten Determinante entsprechen. Da sich diese Vermuthung in allen numerischen Beispielen bestätigte, so trug er kein Bedenken diese Bemerkung in einer kurzen Notiz zu veröffentlichen. Ich glaube den bisher unbekannt gebliebenen Ursprung dieses Resultats nach Jacobis mündlicher Mittheilung als ein merkwürdiges Beispiel scharfsinniger Induction hier erwähnen zu müssen, obgleich der strenge Beweis desselben nicht auf die Kreistheilung gegründet werden zu können, sondern wesentlich verschiedene, der Integralrechnung und der Reihenlehre entnommene Principien zu erfordern scheint, die erst später in die Wissenschaft eingeführt worden sind.

Die im Jahre 1832 erschienene zweite Abhandlung von Gaufs über die biquadratischen Reste, die durch den tiefsinnigen Gedanken, complexe ganze Zahlen in der höheren Arithmetik gerade so wie reelle zu behandeln, und durch das darin aufgestellte Reciprocitätsgesetz Epoche macht, welches in der Theorie der biquadratischen Reste zwischen zwei complexen Primzahlen Statt findet, gab Jacobi Veranlassung seine früheren Untersuchungen wieder aufzunehmen, und es gelang ihm den erwähnten schönen Satz von Gaufs und einen ähnlichen, welcher sich auf die cubischen Reste bezieht, mit grofser Einfachheit aus der Kreistheilung abzuleiten.

Obgleich Jacobi die eben angeführten Untersuchungen und andere damit zusammenhängende, die ich nicht einmal andeutungsweise bezeichnen kann, in den Jahren 1836—39 vollständig niedergeschrieben hat, so ist er doch nie dazu gekommen, sie durch den Druck zu veröffentlichen. Seine Zögerung entsprang aus dem Wunsche einigen seiner Resultate eine gröfsere Ausdehnung zu geben, wozu er, von so vielen andern Arbeiten in Anspruch genommen, die nöthige

Mufse nicht gefunden hat. Ein Theil seiner Forschungen und namentlich die schon erwähnten Beweise der Reciprocitätssätze sind jedoch einigen deutschen Mathematikern durch Nachschriften der Vorlesungen bekannt geworden, welche er im Winter 1836—37 in Königsberg über die Kreistheilung und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen gehalten hat.

Eine andere höchst ergiebige Quelle für die höhere Arithmetik hat Jacobi in der Theorie der elliptischen Functionen entdeckt, aus welcher er schöne Sätze über die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in 2, 4, 6 und 8 Quadrate, so wie andere über solche Zahlen abgeleitet hat, welche gleichzeitig in mehreren quadratischen Formen enthalten sind. Diese wichtigen Bereicherungen der Wissenschaft sind eine Frucht der oben erwähnten Einführung der Jacobischen Function in die Theorie der elliptischen Transcendenten.

Jacobi hat sich wiederholt mit der Reduction und Werthbestimmung doppelter und vielfacher Integrale beschäftigt. Ich erwähne hier besonders der einfachen Methode, durch welche er die Bestimmung der Oberfläche eines ungleichaxigen Ellipsoides auf elliptische Integrale der ersten und zweiten Gattung zurückführt, welche Zurückführung Legendre, zu dessen schönsten Leistungen sie gehört, nur mit Hülfe sehr verborgener Eigenschaften der Integrale der dritten Gattung gelungen war. In einer andern hierher gehörigen Abhandlung hat Jacobi das Eulersche Additionstheorem auf doppelte Integrale ausgedehnt und bald darauf bemerkt, wie auch der Abelsche Satz einer ähnlichen Erweiterung fähig sei.

Von Jacobis Arbeiten über das eben genannte Kapitel der Integralrechnung ist nur ein Theil veröffentlicht worden. Eine grofse Abhandlung, welche die Attraction der Ellipsoide zum Gegenstande hat, obgleich seit langer Zeit beinahe vollendet, ist bisher ungedruckt geblieben und nur durch einige gelegentliche Notizen bekannt geworden. Als er sich mit dem erwähnten Problem beschäftigte, kam er auch auf den schönen von Poisson um dieselbe Zeit gefundenen Satz, nach welchem die Anziehung, welche eine unendlich dünne, von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden ellipsoidischen Flächen begrenzte Schale auf einen Punkt im äusseren Raume ausübt, ohne Integralzeichen dargestellt werden kann. Jacobi hat dieses Umstandes nie öffentlich Erwähnung gethan, obgleich er sich dabei auf das Zeugniss mehrerer Mathematiker hätte berufen können, denen er den Satz mitgetheilt hatte, ehe die erste Anzeige der Poissonschen Abhandlung erschienen war.

Mit den eben besprochenen Untersuchungen hängt eine andere Arbeit Jacobis zusammen, die wegen ihres überraschenden Resultates hier nicht unerwähnt bleiben darf. Maclaurin hat bekanntlich zuerst gezeigt, dass eine homogene flüssige Masse mit Beibehaltung ihrer äufsern Gestalt sich gleichförmig um eine feste Axe drehen kann, wenn diese Gestalt die eines Rotationsellipsoides ist, und dieses schöne Resultat ist später von d'Alembert und Laplace durch den Nachweis vervollständigt worden, dass jedem Werthe der Winkelgeschwindigkeit, wenn dieser unter einer gewissen Grenze liegt, zwei und nur zwei solche Ellipsoide entsprechen. Lagrange scheint zuerst an die Möglichkeit gedacht zu haben, dass auch ein ungleichaxiges Ellipsoid den Bedingungen der Permanenz genügen könne; wenigstens geht dieser grofse Mathematiker in seiner analytischen Mechanik bei Behandlung dieser Frage von Formeln aus, welche für ein beliebiges Ellipsoid gelten. Indem er aber so zu zwei zu erfüllenden Gleichungen gelangt, in welchen die beiden Äquatorialaxen auf eine symmetrische Weise enthalten sind, zieht er aus dieser Symmetrie den Schluss, dass jene Axen gleich sein müssen, während doch nur daraus folgt, dass sie gleich sein können, wo dann beide Gleichungen in eine und mit der von Maclaurin zuerst aufgestellten und von d'Alembert und Laplace discutirten zusammenfallen.

Der Verfasser eines bekannten Lehrbuchs, der in der Darstellung dieses Gegenstandes Lagrange gefolgt ist und den eben erwähnten übereilten Schluss mit dem Worte »nothwendig« begleitet, erregte zuerst Jacobis Verdacht, welcher bei genauerer Betrachtung jener zwei Gleichungen zu seiner und gewiss aller Mathematiker grofsen Überraschung bald fand, dass auch ein ungleichaxiges Ellipsoid den Bedingungen des Gleichgewichts genügen kann.

Der Veranlassung, welche Jacobi in seinen Untersuchungen über die Attraction der Ellipsoide fand, sich mit den Flächen zweiten Grades zu beschäftigen, verdankt man die Kenntniss mehrerer interessanter Eigenschaften und einer höchst eleganten Erzeugungsweise dieser Flächen. Die mir gestellten Grenzen zwingen mich, mich auf diese Andeutung zu beschränken und Jacobis übrige der Geometrie gewidmeten Arbeiten nur dem Gegenstand nach zu bezeichnen. Ich nenne daher nur die Abhandlung über ein Problem der Elementargeometrie, welche vor ihm nur in speciellen Fällen behandelt worden war, und dessen vollständige Lösung er aus der Theorie der elliptischen Transcendenten ableitet, seine Untersuchungen über die Anzahl der Doppeltangenten algebraischer Curven und einige kleinere Aufsätze, in welchen er Sätze über die Krümmung der Flächen und kürzeste Linien mit grofser Einfachheit auf rein synthetischem Wege beweist.

Zu Jacobis wichtigsten Untersuchungen gehören diejenigen über die analytische Mechanik. Hamilton hatte die interessante Entdeckung gemacht, dass die Integration der Differentialgleichungen der Mechanik sich immer auf die Lösung von zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen zurückführen lässt, aber diese Entdeckung war, wie merkwürdig sie auch erscheinen musste, völlig unfruchtbar geblieben, bis Jacobi sie von einer unnöthigen Complication befreite, indem er zeigte, dass die zu findende Lösung nur einer der beiden partiellen Differentialgleichungen zu genügen braucht. Indem er vermittelst der so vereinfachten Theorie, um nur eine der zahlreichen Anwendungen anzuführen, das noch ungelöste Problem behandelte, die geodätische Linie auf dem ungleichaxigen Ellipsoid zu bestimmen, gelang es ihm, mit Hülfe eines analytischen Instruments, welches sich schon früher in seinen Händen als sehr wirksam gezeigt hatte und jetzt unter dem Namen der elliptischen Coordinaten allgemein bekannt ist, die partielle Differentialgleichung zu integriren und so die Gleichung der geodätischen Linie in Form einer Relation zwischen zwei Abelschen Integralen darzustellen. Diese Jacobische Entdeckung ist die Grundlage eines der schönsten Kapitel der höheren Geometrie geworden, welches deutsche, französische und englische Mathematiker wetteifernd ausgebildet haben.

Durch den oben erwähnten Zusammenhang zwischen einem Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen und einer partiellen Differentialgleichung wurde er, die Sache in umgekehrter Ordnung betrachtend, zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt, mit welcher er sich schon in einer seiner frühesten Abhandlungen über die Pfaffsche Methode beschäftigt hatte, und gelangte jetzt zu dem Resultate, dass von der ganzen Reihe von Systemen, deren successive Integration Pfaff fordert, die Behandlung des ersten alle übrigen überflüssig macht, dass also schon der erste Schritt der früheren Methode vollständig zum Ziele führt.

Einen ähnlichen Charakter hat die Vervollkommnung, welche die Variationsrechnung Jacobi verdankt. Während zur Existenz eines Maximums oder Minimums das Verschwinden der ersten Variation nothwendig ist, so ist diese Bedingung allein nicht ausreichend und erst die Beschaffenheit der zweiten Variation entscheidet, ob ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden stattfindet. Zufolge der Theorie, wie sie Jacobi vorfand, waren nach den Integrationen, die durch das Verschwinden der ersten Variation gefordert werden, neue Integrationen zu leisten, um die zweite Variation zu discutiren; Jacobi zeigte, dass die ersteren die letzteren involviren, so dass also auch hier die vollständige Lösung der Aufgabe bereits mit der Vollendung des ersten Schrittes gegeben ist.

Wenn es die immer mehr hervortretende Tendenz der neueren Analysis ist Gedanken an die Stelle der Rechnung zu setzen, so giebt es doch gewisse Gebiete, in denen die Rechnung ihr Recht behält. Jacobi, der jene Tendenz so wesentlich gefördert hat, leistete vermöge seiner Meisterschaft in der Technik auch in diesen Gebieten Bewundernswürdiges. Dahin gehören seine Abhandlungen über die Transformation homogener Functionen des zweiten Grades, über Elimination, über die simultanen Werthe, welche einer Anzahl von algebraischen Gleichungen genügen, über die Umkehrung der Reihen und über die Theorie der Determinanten. In dem letztgenannten Kapitel verdankt man ihm eine ausgebildete Theorie der von ihm mit dem Namen der Functional-Determinanten bezeichneten Ausdrücke. Indem er die Analogie dieser Ausdrücke mit den Differentialquotienten weit verfolgte, gelangte er zu einem allgemeinen Princípe, welches er das Princip des letzten Multiplicators nannte, und welches bei fast allen in den Anwendungen vorkommenden Integrationsproblemen die letzte Integration zu bewerkstelligen das Mittel giebt, indem es den dazu erforderlichen integrirenden Factor *a priori* angiebt.

Der Einfluss, welchen Jacobi auf die Fortschritte der Wissenschaft geübt hat, würde nur unvollständig hervortreten, wenn ich nicht seiner Thätigkeit als öffentlicher Lehrer Erwähnung thäte. Es war nicht seine Sache Fertiges und Überliefertes von neuem zu überliefern; seine Vorlesungen bewegten sich sämmtlich aufserhalb des Gebietes der Lehrbücher und umfassten nur diejenigen Theile der Wissenschaft, in denen er selbst schaffend aufgetreten war, und das hiess bei ihm, sie boten die reichste Fülle der Abwechselung. Seine Vorträge zeichneten sich nicht durch diejenige Deutlichkeit aus, welche auch der geistigen Armuth oft zu Theil wird, sondern durch eine Klarheit höherer Art. Er suchte vor Allem die leitenden Gedanken, welche jeder Theorie zu Grunde liegen, darzustellen, und indem er Alles, was den Schein der Künstlichkeit an sich trug, entfernte, entwickelte sich die Lösung der Probleme so naturgemäfs vor seinen Zuhörern, dass diese Ähnliches schaffen zu können die Hoffnung fassen konnten. Wie er die schwierigsten Gegenstände zu behandeln wusste, konnte er seine Zuhörer mit Recht durch die Versicherung ermuthigen, dass sie in seinen Vorlesungen sich nur ganz einfache Gedanken anzueignen haben würden.

Der Erfolg einer so ungewöhnlichen Lehrart, wie ich sie eben geschildert habe, und wie sie nur einem schöpferischen Geiste zu Gebote steht, war wahrhaft aufserordentlich. Wenn jetzt in Deutschland die Kenntniss der Methoden der Analysis in einem Grade verbreitet ist wie zu keiner frühern Zeit, wenn zahlreiche jüngere Mathematiker die Wissenschaft nach allen Richtungen erweitern und bereichern: so hat Jacobi an einer so erfreulichen Erscheinung den wesentlichsten Antheil. Fast alle sind seine Schüler gewesen, selten ist ein aufkeimendes Talent seiner Aufmerksamkeit entgangen, keinem, sobald er es erkannt, hat sein fördernder Rath, seine aufmunternde Theilnahme gefehlt.

Ich habe mich eben bemüht, Jacobi als Erfinder und in seiner Wirksamkeit als Lehrer darzustellen. Soll ich jetzt den Versuch wagen, ihn zu schildern, wie er aufserhalb der wissenschaftlichen Sphäre denen erschien, die den mathematischen Wissenschaften fern stehen, so muss ich es als den Grundzug seines Wesens bezeichnen, dass er ganz in der Welt der Gedanken lebte und dass in ihm Das, wozu es bei den meisten, selbst bedeutenden Menschen eines besondern Anlaufs bedarf, das Denken, zum habituellen Zustande und wie zur zweiten Natur geworden war. Wenn etwas im Leben oder in der Wissenschaft einmal seine Aufmerksamkeit erregt hatte, so ruhte er nicht, bis er es zu eignen Gedanken verarbeitet hatte, und mit dieser ununterbrochenen geistigen Thätigkeit war in ihm ein so seltenes Gedächtniss vereinigt, dass er Alles, womit er sich einmal beschäftigt hatte, sich sogleich vergegenwärtigen und darüber verfügen konnte.

Der unerschöpfliche Vorrath an Wissen und eigenen Gedanken, welcher Jacobi jeden Augenblick zu Gebote stand, eine seltene geistige Beweglichkeit, durch die er sich jedem Alter, jeder Fassungskraft anzupassen wusste, und eine eigenthümlich humoristische, die Dinge scharf bezeichnende Ausdrucksweise

verliehen dem grofsen Mathematiker auch im geselligen Verkehr eine ungewöhnliche Bedeutung, die noch durch die Bereitwilligkeit wissenschaftliche Fragen aus dem Stegreif zu behandeln erhöht wurde. Diese Bereitwilligkeit entsprang aus dem innersten Wesen seiner Natur, die in der Überwindung von Schwierigkeiten ihre eigentliche Befriedigung fand, und es lag daher für ihn ein ganz besonderer Reiz darin, wissenschaftliche Ergebnisse durch einfache Betrachtungen selbst solchen verständlich zu machen, denen die dazu scheinbar unentbehrlichen Vorkenntnisse fehlten. Nur musste er, um einen solchen Versuch anzustellen, die Überzeugung haben, dass die, mit welchen er sich unterhielt, ein wirkliches Interesse an der Sache nahmen. Wo er hingegen gedankenlose Neugier zu bemerken glaubte oder entschiedene Meinungen mit Selbstgefälligkeit von solchen aussprechen hörte, die sich nie die harte Arbeit des Selbstdenkens zugemuthet hatten, verliefs ihn die Geduld, und er machte dann gewöhnlich der Unterhaltung durch eine ironische, nicht selten scharf abweisende Bemerkung ein Ende. Man hat ihm oft vorgeworfen, dass er sich bei solchen Anlässen seiner geistigen Kraft zu sehr bewusst gezeigt habe. Aber die, welche ihn so beurtheilten, würden vielleicht ihre Meinung geändert haben, hätten sie den Preis gekannt, um welchen er das Recht auf ein solches Bewusstsein erlangt hatte. Ein Brief aus dem Jahr 1824, aus einer Zeit also, zu welcher Jacobi noch völlig unbekannt war und daher durchaus kein Interesse haben konnte seine geistigen Kämpfe mit übertriebenen Farben zu schildern, enthält folgende Stelle, die ich als merkwürdigen Beitrag zur Charakteristik des aufserordentlichen Mannes hier wörtlich mittheile. Jacobi war damals eben 20 Jahre alt geworden und seit etwa einem Jahre ausschliefslich mit mathematischen Studien beschäftigt.

»Es ist eine saure Arbeit, die ich gethan habe, und eine saure Arbeit, in der ich begriffen bin. Nicht Fleifs und Gedächtniss sind es, die hier zum Ziele führen, sie sind hier die untergeordnetsten Diener des sich bewegenden reinen Gedankens. Aber hartnäckiges, hirnzersprengendes Nachdenken erheischt mehr Kraft als der ausdauerndste Fleifs. Wenn ich daher durch stete Übung dieses Nachdenkens einige Kraft darin gewonnen habe, so glaube man nicht, es sei mir leicht geworden, durch irgend eine glückliche Naturgabe etwa. Saure, saure Arbeit hab' ich zu bestehen, und die Angst des Nachdenkens hat oft mächtig an meiner Gesundheit gerüttelt. Das Bewusstsein freilich der erlangten Kraft giebt den schönsten Lohn der Arbeit, so wie wiederum die Ermuthigung fortzufahren und nicht zu erschlaffen. Gedankenlose Menschen, denen jene Arbeit und jenes Bewusstsein also auch ein ganz fremdes ist, suchen diesen Trost, der doch allein machen kann, dass man auf der schwierigen Bahn den Muth nicht sinken lässt, dadurch zu verkümmern, dass sie das Bewusstsein ein eignes, freies zu sein — denn nur in der Bewegung des Gedankens ist der Mensch frei und bei sich — unter dem Namen Eigendünkel oder Anmafsung gehässig machen. Jeder, der die Idee einer Wissenschaft in sich trägt, kann nicht anders als die Dinge darnach abschätzen, wie sich der menschliche Geist in ihnen offenbart: nach diesem grofsen Mafsstab muss ihm daher manches als geringfügig vorkommen, was den andern ziemlich preiswürdig erscheinen kann. So hat man auch mir oft Anmafsung vorgeworfen, oder, wie man mich am schönsten gelobt hat, indem man einen Tadel auszusprechen meinte, ich sei stolz gegen alles Niedre und nur demüthig gegen das Höhere. Aber jener unendliche Mafsstab, den man an die Welt in sich und aufser sich legt, hindert vor aller Überschätzung seiner selbst, indem man immer das unendliche Ziel im Auge hat und seine beschränkte Kraft. In jenem Stolze und jener Demuth will ich immer zu beharren streben, ja immer stolzer und immer demüthiger werden.«

Dass es bei Jacobi keine blofse Phrase war, wenn er von sich sagt, dass er die Dinge danach abschätze, wie sich der menschliche Geist in ihnen offenbare, und dass er wirklich Alles, was die Welt der Gedanken nicht berührte, wenn nicht mit Gleichgültigkeit, doch mit Gleichmuth behandelte, hat er in den schwierigsten Lagen seines Lebens gezeigt. Am bewunderungswürdigsten offenbarte sich dieser wahrhaft philosophische Gleichmuth, als ihn das Unglück traf sein ganzes von seinem Vater ererbtes Vermögen zu verlieren, ein Verlust, der ihm um so empfindlicher hätte sein können, als er, seit zehn Jahren verheirathet, für eine zahlreiche Familie zu sorgen hatte. Wer ihn damals sah, als er herbeigeeilt war, um seiner von ähnlichem Verluste betroffenen Mutter mit Rath und That beizustehen, konnte in seiner Stimmung nicht die geringste Veränderung wahrnehmen. Er sprach mit demselben Interesse wie immer von wissenschaftlichen Dingen und klagte nur darüber, dass die unerwartete Reise ihn aus einer Untersuchung gerissen habe, die ihn gerade lebhaft beschäftigte.

Wie Jacobis Gedankencultus sich in der Anerkennung von Abels grofser Entdeckung kund gab, habe ich schon früher erwähnt. Einen ähnlichen Sinn zeigte er für alles geistig Bedeutende, und auf ihn findet der Ausspruch eines alten Schriftstellers keine Anwendung, dass die Menschen eigentlich nur das bewundern, was sie selbst vollbringen zu können glauben. Seine Anerkennung umfasste das ganze geistige Gebiet, und in seiner Wissenschaft war Jacobis Freude über eine fremde Erfindung um so lebhafter, je mehr sich diese durch ihr Gepräge von seinen eignen Schöpfungen unterschied. Es war eine ihm natürliche Bewegung in solchem Falle den Ausdruck seines Beifalls durch das Geständniss zu verstärken, dass er diesen Gedanken nie gehabt haben würde.

Es bleibt mir nun noch übrig das, was ich oben von Jacobis äufsern Lebensverhältnissen erwähnt habe, mit wenigen Worten zu vervollständigen.

Als er seine Untersuchungen über die elliptischen Functionen bekannt zu machen anfing, war er noch Privatdocent; die Bewunderung, welche seine Entdeckungen bei allen denen erregten, denen in solchen Dingen ein Urtheil zustand, hatte die Folge, dass er sogleich zum aufserordentlichen und bald darauf zum ordentlichen Professor befördert wurde.

Indem ich von der Aufnahme rede, welche Abels und Jacobis Entdeckungen — denn beide Namen sind hier unzertrennlich — bei allen Fachgenossen fanden, kann ich nicht umhin des Mannes namentlich zu erwähnen, der durch seine vieljährigen Forschungen ganz besonders berufen war, den unerwarteten Fortschritt nach seiner ganzen Bedeutung zu würdigen. Legendre, der seine Zeitgenossen so oft der Theilnahmlosigkeit angeklagt und noch kurz vor jener Zeit das Bedauern ausgesprochen hatte, dass seine Lieblingswissenschaft, von allen andern verlassen, durch ihn allein erst nach 40jähriger Arbeit, wie er glaubte, zum Abschluss gekommen sei, begrüfste Abels und Jacobis Entdeckungen, welche die Theorie weit über die Grenzen hinausführten, die ihm selbst durch die Natur des Gegenstandes gesetzt schienen, mit so warmer, ja enthusiastischer Anerkennung, dass es schwer zu sagen ist, wen eine solche Anerkennung mehr ehrte, die jungen Mathematiker, welchen sie am Eingange ihrer Laufbahn zu Theil ward, oder den edlen Altmeister, der, fast am Ziele angelangt, sich solcher Gefühlswärme fähig zeigte.

Eine nicht minder ehrenvolle Auszeichnung war es, als bald darauf die Pariser Akademie, obgleich sie keine Preisbewerbung über die Theorie der elliptischen Functionen eröffnet hatte, Abels und Jacobis Arbeiten als der wichtigsten Entdeckung der Zeit einen ihrer grofsen mathematischen Preise zuerkannte und zwischen Jacobi und Abels Erben theilte.

Ich muss mich darauf beschränken, hier die Beweise der Anerkennung zu erwähnen, welche Jacobis Eintritt in die wissenschaftliche Laufbahn bezeichneten; die mir gesteckten Grenzen gestatten mir nicht alle die Auszeichnungen anzuführen, die ihm auch später in so reichem Maſse zu Theil wurden, und deren Erwähnung in einer ausführlichen Biographie nicht fehlen dürfte.

Bald nachdem Jacobi im Jahre 1829 seine *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, die nur einen Theil seiner Untersuchungen über diesen Gegenstand enthalten, veröffentlicht hatte, machte er die erste gröſsere Reise ins Ausland, schlug den Weg über Göttingen ein, um Gauſs persönlich kennen zu lernen, und wandte sich dann nach Paris, wo er mehrere Monate sich aufhielt, und wo damals ausser Legendre, mit dem er seit längerer Zeit in naher brieflicher Verbindung stand und für den er immer eine groſse Pietät bewahrt hat, noch Fourier, Poisson und andere hervorragende Mathematiker, die Jacobi überlebt haben, vereinigt waren.

Eine zweite Reise ins Ausland unternahm Jacobi, der seit 1831 mit einer Frau von hervorragender Geistesbildung verheirathet war, erst wieder im Jahre 1842 in Gesellschaft seiner Frau. Die Veranlassung zu dieser Reise war für ihn zu ehrenvoll, als dass ich sie unerwähnt lassen könnte. Dem erleuchteten Staatsmanne, welcher damals an der Spitze der Verwaltung in der Provinz Preuſsen stand, schien es im Interesse der Wissenschaft wünschenswerth, dass Bessel und Jacobi einmal der schon oft an sie ergangenen Aufforderung zur Theilnahme an der jährlich in England Statt findenden Gelehrtenversammlung Folge leisteten, und er stellte daher bei dem Könige den Antrag auf Bewilligung der Kosten zu einer solchen Reise, welchem Antrage Se. Majestät mit Königlicher Munificenz zu willfahren geruhte.

Bald nach seiner Rückkehr von dieser Reise zeigten sich bei Jacobi die Symptome einer leider unheilbaren Krankheit. Er schwebte längere Zeit in der gröſsten Gefahr, und als diese endlich für den Augenblick beseitigt war, erklärten seine Ärzte zu seiner Kräftigung einen längeren Aufenthalt in einem südlichen Klima für nothwendig. Diese ärztliche Erklärung setzte Jacobi in nicht geringe Verlegenheit, aber diese Verlegenheit war nicht von langer Dauer; denn die Lage der Sache war nicht sobald durch unsern Collegen Alexander von Humboldt, dessen gewichtige Vermittelung nirgend fehlt, wo es die Ehre der Wissenschaft und das Wohl ihrer Vertreter gilt, zur Kenntniss Sr. Majestät des

Königs gelangt, als durch einen neuen Act Königlicher Groſsmuth eine ansehnliche Summe zu einer Reise nach Italien angewiesen wurde.

Das milde Klima von Rom, wo Jacobi den Winter zubrachte, wirkte so wohlthätig auf ihn, dass die, welche ihn dort sahen, weit entfernt, in ihm einen Reconvalescenten zu erkennen, über seine wahrhaft auſserordentliche Thätigkeit erstaunen mussten. Er schrieb nicht nur während der 5 Monate seines dortigen Aufenthaltes auſser mehreren kleinern Aufsätzen, welche in einer wissenschaftlichen Zeitschrift in Rom selbst erschienen, eine wichtige sehr umfangreiche für das Crellesche Journal bestimmte Abhandlung, sondern unternahm auch die Vergleichung der im Vatican aufbewahrten Handschriften des Diophantus, mit welchem er sich seit längerer Zeit angelegentlich beschäftigt hatte.

In sein Vaterland zurückgekehrt, wurde er von Königsberg nach Berlin versetzt, wo das wenigstens relativ mildere Klima seine Gesundheit weniger zu bedrohen schien. Ohne hier der Universität anzugehören, hatte er nur die Verpflichtung Vorlesungen zu halten, so weit es mit der Schonung, deren sein Gesundheitszustand so sehr bedurfte, verträglich sein würde. Seine schriftstellerische Thätigkeit während seines hiesigen Aufenthaltes stand gegen die der besten Königsberger Zeit kaum zurück, wie es die hier in etwa 6 Jahren geschriebenen Abhandlungen bezeugen, welche 2 starke Quartbände füllen.

Zu Anfang des Jahres 1851 hatte er einen Anfall der Grippe zu bestehen; da er sich jedoch schnell erholte und wieder mit groſsem Eifer zu arbeiten anfing, so durften seine Freunde sich der Hoffnung überlassen, dass er ihnen und der Wissenschaft noch lange erhalten bleiben würde, als er plötzlich am 11ten Februar von neuem erkrankte. Sein Zustand erregte sogleich die gröſsten Besorgnisse, und als man nach einigen Tagen erkannte, dass er von den Blattern ergriffen sei, die auf dem durch das alte Übel unterwühlten Boden den bösartigsten Charakter zeigten, schwand jede Hoffnung. Den 18ten Februar Abends 11 Uhr, acht Tage nach seiner Erkrankung, erlag er ohne Kampf.

Jacobis wissenschaftliche Laufbahn umfasst gerade ein Vierteljahrhundert, also einen weit kürzern Zeitraum als die der meisten frühern Mathematiker ersten Ranges und kaum die Hälfte der Zeit, über welche sich Eulers Wirksamkeit erstreckt hat, mit dem er wie durch Vielseitigkeit und Fruchtbarkeit so auch darin die gröſste Ähnlichkeit hat, dass ihm alle Hülfsmittel der Wissenschaft immer gegenwärtig waren und jeden Augenblick zu Gebote standen.

Der Tod, welcher ihn so früh und so plötzlich im Besitze seiner vollen Kraft von der Arbeit hinweggenommen, hat der Wissenschaft die grofsen Bereicherungen nicht gegönnt, die sie von Jacobis nie ermüdender Thätigkeit noch erwarten durfte. Indem ich dies ausspreche, thue ich es nicht nur in der Voraussetzung, dass in einem solchen Geiste die schöpferische Kraft nur mit der physischen zugleich erlöschen konnte, ich habe auch eine Reihe von fast vollendeten Arbeiten vor Augen, an die er selbst in kurzer Zeit — vielleicht während des Drucks, wie er es in der letzten Zeit so gern that — die letzte Hand hätte legen können, und die jetzt durch seine Freunde als Bruchstücke, in unvollkommener Form ans Licht treten müssen. Noch während seiner Krankheit, kaum vier Tage vor seinem Tode, beklagte er das Missgeschick, welches über vielen seiner gröfsern Arbeiten gewaltet habe, die Krankheit oder häusliches Unglück unterbrochen habe. Wenn ich dann, setzte er wehmüthig hinzu, später an die Arbeit zurückkehrte, habe ich lieber etwas Neues anfangen als Untersuchungen wieder aufnehmen wollen, die so traurige Erinnerungen in mir erweckten. Aber ich sehe ein, dass ich nicht länger zögern darf, jene ältern Arbeiten, denen ich einen so grofsen Theil meiner besten Kraft gewidmet habe, der Öffentlichkeit zu übergeben, wenn sie noch erfolgreich in den Gang der Wissenschaft eingreifen sollen. Glücklicher Weise bedarf es dazu nur noch sehr kurzer Zeit, die mir ja hoffentlich nicht fehlen wird.

EXTRAITS DE DEUX LETTRES

DE

M. JACOBI
DE L'UNIVERSITÉ DE KÖNIGSBERG

À

M. SCHUMACHER.

Schumacher Astronomische Nachrichten, Band 6. Nr. 123. September 1827.

EXTRAITS DE DEUX LETTRES
DE M. JACOBI DE L'UNIVERSITÉ DE KÖNIGSBERG
À M. SCHUMACHER.

Königsberg, 13 Juin 1827.

— Veuillez bien, Monsieur, insérer dans votre journal les notices sur les transcendantes elliptiques, que j'ai l'honneur de vous adresser. C'est que je me flatte d'avoir fait quelques découvertes assez intéressantes dans cette théorie, dont je vais soumettre l'exposé au jugement des géomètres.

Les intégrales de la forme $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-cc\sin^2\varphi}}$ appartiennent d'après la diversité du module c à des transcendantes diverses. On ne connait qu'un seul système de modules qu'on peut réduire l'un à l'autre, et M. Legendre dans ses Exercices*) dit même qu'il n'y avait que ce seul. Mais en effet il y a autant de ces systèmes qu'il y a de nombres premiers, c'est-à-dire il y a un nombre infini de ces systèmes indépendants l'un de l'autre, dont chacun répond à un nombre premier, et dont le système connu répond au nombre premier 2.

Si nous désignons par n un nombre premier quelconque, je pose

$$\sin\varphi = \frac{U}{V}$$

U contenant toutes les puissances impaires de $\sin\psi$ jusqu'à la $n^{\text{ième}}$, et V les puissances paires jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$, et je montre, comment on peut déterminer les coefficients de la substitution, pour qu'on obtienne

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-cc\sin^2\varphi}} = m\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-kk\sin^2\psi}}.$$

Or chacune de ces substitutions donne un nouveau système de modules. La

*) M. Jacobi n'a pas vu le Traité des Fonctions elliptiques. (note de Schumacher).

même chose a lieu, si n n'est pas un nombre premier, mais on peut partager alors la substitution en plusieurs autres, d'après le nombre des facteurs de n, et quoiqu'on n'obtienne pas ainsi un nouveau système, on obtiendra une combinaison de systèmes qui répondent aux facteurs de n.

Après avoir fait la première substitution, j'exprime $\sin\psi$ par $\sin\theta$, d'une manière presque analogue à celle qui donne $\sin\varphi$ exprimé par $\sin\psi$, et de sorte qu'on ait

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-cc\sin^2\varphi}} = n\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-cc\sin^2\theta}}.$$

Ainsi la substitution qui sert à donner le n-tuple de la transcendante peut se diviser en deux plus simples. Cette substitution donne pour $\sin\varphi$ une fraction, dont le numérateur contient les puissances impaires de $\sin\theta$ jusqu'à la $nn^{\text{ième}}$, et le dénominateur les paires jusqu'à la $(nn-1)^{\text{ième}}$. Elle peut donc toujours être divisée en deux substitutions successives, dans chacune desquelles le numérateur ne monte que jusqu'à la $n^{\text{ième}}$, et le dénominateur jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ puissance, et chacune de ces substitutions intermédiaires donne un nouveau système de modules réductibles l'un à l'autre.

J'ajoute deux exemples qui répondent aux nombres premiers 3 et 5, et qu'on peut vérifier immédiatement. Pour éviter l'embarras des radicaux je donnerai une expression rationnelle des deux modules par d'autres quantités.

Théorème I.

A) En posant

$$\sin\varphi = \frac{\sin\psi\left[ac+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2\sin^2\psi\right]}{cc+\frac{a-c}{2}\cdot\frac{a+3c}{2}\sin^2\psi},$$

on obtient

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^3c-\frac{a-c}{2}\left(\frac{a+3c}{2}\right)^3\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{c^3a-\left(\frac{a-c}{2}\right)^3\frac{a+3c}{2}\sin^2\psi}}.$$

B) En posant de nouveau

$$\sin\psi = \frac{\sin\theta\left[-3ac+\left(\frac{a+3c}{2}\right)^2\sin^2\theta\right]}{aa-3\,\frac{a-c}{2}\cdot\frac{a+3c}{2}\sin^2\theta}$$

et

$$\varkappa = \frac{a-c}{2c}\left(\frac{a+3c}{2a}\right)^3,$$

on aura

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa\sin^2\varphi}} = \frac{3\,d\theta}{\sqrt{1-\varkappa\sin^2\theta}}.$$

De $\varkappa$ on tire $\frac{a}{c}$ par une équation biquadratique; $\sin\psi$ dérive de $\sin\theta$ par une équation cubique, $\sin\varphi$ de $\sin\psi$ de même par une équation cubique; ainsi je donne ici pour la première fois la solution algébrique de l'équation du $9^{\text{ième}}$ degré, dont la trisection de notre transcendante dépend.

Théorème II.

A) Soit

$$a^3 = 2b(1+a+b)$$

et

$$\sin\varphi = \frac{\sin\psi[1+2a+(aa+2ab+2b)\sin^2\psi+bb\sin^4\psi]}{1+(aa+2a+2b)\sin^2\psi+b(b+2a)\sin^4\psi},$$

on aura

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(a-2b)(1+2a)^2-(2-a)(b+2a)^2\sin^2\varphi}} = \int\frac{d\psi}{\sqrt{a-2b-bb(2-a)\sin^2\psi}}.$$

B) Soit

$$\alpha = \frac{2-a}{1+2a}$$
$$\beta = -\frac{b+2a}{1+2a}\cdot\frac{2-a}{a-2b},$$
$$\varkappa = \frac{2-a}{a-2b}\left(\frac{b+2a}{1+2a}\right)^2,$$

en posant

$$\sin\psi = \frac{\sin\theta[1+2\alpha+(\alpha\alpha+2\alpha\beta+2\beta)\sin^2\theta+\beta\beta\sin^4\theta]}{1+(\alpha\alpha+2\alpha+2\beta)\sin^2\theta+\beta(\beta+2\alpha)\sin^4\theta},$$

on aura

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa\sin^2\varphi}} = 5\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-\varkappa\sin^2\theta}}.$$

Königsberg, 2 Août 1827.

— Je vous prie, Monsieur, d'insérer encore les remarques suivantes. Elles contiennent des préceptes pour l'évaluation des transcendantes elliptiques de la première espèce, et ces préceptes, si je ne me trompe, ne laissent rien à désirer pour l'élégance et la commodité du calcul. On trouve ainsi en même temps la manière la plus convenable de former des tables pour ces transcendantes.

Je commence par un théorème général sur la transformation de ces transcendantes, dont dérivent les préceptes pour le calcul. Ce théorème est d'autant plus intéressant, que, pour le cas où la transcendante se change en fonction circulaire, il se présente sans changement de forme comme théorème de la trigonométrie analytique.

Théorème.

Soit p un nombre impair quelconque, φ' un tel angle qu'on ait, en désignant l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-kk\sin^2\varphi}}$ prise de 0 jusqu'à φ par $F(k,\varphi)$:

$$F(k,\varphi') = \frac{1}{p}F(k,90^0)$$

et en général $\varphi^{(m)}$ un tel angle qu'on ait:

$$F(k,\varphi^{(m)}) = \frac{m}{p}F(k,90^0).$$

Soit encore l'angle ψ déterminé par l'équation

$$\operatorname{tg}(45^0-\tfrac{1}{2}\psi) = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi)}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi'''+\varphi)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi)}\cdots\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi^{(p-2)}\pm\varphi)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi^{(p-2)}\mp\varphi)}\cdot\operatorname{tg}(45^0\mp\tfrac{1}{2}\varphi),$$

je dis qu'on aura:

$$F(k,\varphi) = \mu F(\lambda,\psi).$$

On doit prendre le signe supérieur, si p est de la forme $4n+1$, et l'inférieur, si p est de la forme $4n-1$. On doit prendre ψ entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$, si φ tombe entre $\varphi^{(m)}$ et $\varphi^{(m+1)}$. Les constantes μ et λ se déterminent de différentes manières. On a par exemple

$$\mu = \frac{1}{2(\operatorname{cosec}\varphi' - \operatorname{cosec}\varphi''' + \cdots \mp \operatorname{cosec}\varphi^{(p-2)} \pm \frac{1}{2})}$$

$$\lambda = 2k\mu(\sin\varphi' - \sin\varphi''' + \cdots \mp \sin\varphi^{(p-2)} \pm \tfrac{1}{2}).$$

Dans la nouvelle transcendante elliptique $F(\lambda,\psi)$ le module λ est toujours très-petit en comparaison de k, ce qui facilite le calcul de cette transcendante. En négligeant les quantités de l'ordre $\lambda\lambda$, on obtient tout de suite

$$F(k,\varphi) = \mu\psi.$$

La constante μ ne diffère de $\frac{2}{p\pi}F(k,90^0)$ que par des quantités de l'ordre λ, et il est avantageux d'employer cette constante au lieu de μ, parcequ'ainsi on tient aussi compte de la partie non périodique de la correction. Elle devient alors seulement $= \frac{\mu\lambda\lambda}{8}\sin 2\psi$. En exprimant l'angle ψ en secondes comme on le trouve dans les tables, et en posant $\mu' = \frac{F(k,90^0)}{324000.p}$, on a

$$F(k,\varphi) = \mu'\psi.$$

Si kk n'est pas plus grand que $\frac{1}{2}$, ou si k n'excède pas $\sin 45^0$, on n'aura pas besoin de prendre p plus grand que 5, en se contentant de 7 décimales. Pour $k = \sin 45^0$ je trouve dans les Exercices III. p. 215

$$\varphi' = 21^0\ 0'\ 36'',02754\ 43$$
$$\varphi''' = 58^0\ 38'\ 10'',31402\ 70.$$

La seconde table donne alors

$$F(k,90^0) = 1,85407\ 46773\ 01$$

donc

$$\mu' = 0,00000\ 11444\ 90541\ 544.$$

La formule pour le calcul devient donc

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(90^0-\psi) = \frac{\operatorname{tg}(10^0 30' 18'',01 - \frac{1}{2}\varphi)}{\operatorname{tg}(10^0 30' 18'',01 + \frac{1}{2}\varphi)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(29^0 19' 5'',16 + \frac{1}{2}\varphi)}{\operatorname{tg}(29^0 19' 5'',16 - \frac{1}{2}\varphi)}\cdot\operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$F(\varphi) = 0,00000\ 11444\ 90541.\psi$$

$$\text{la correction} = -0,00000\ 007.\sin 2\psi.$$

Soit par exemple $\varphi = 30^0$, le calcul se fera de la manière suivante:

$$
\begin{array}{rcl}
\log \operatorname{tg}\ 4^\circ 29' 41,''99 & = & 8,89549\ 90\ n \\
\log \operatorname{tg}\ 44^\circ 19'\ 5,''16 & = & 9,98966\ 16 \\
\text{Compl. } \log \operatorname{tg}\ 25^\circ 30' 18,''01 & = & 0,32140\ 63 \\
\text{Compl. } \log \operatorname{tg}\ 14^\circ 19'\ 5,''16 & = & 0.59306\ 27 \\
\log \operatorname{tg}\ 30^\circ\ 0'\ 0,''00 & = & 9,76143\ 94 \\
\hline
\log \operatorname{tg}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi) & = & 9,56106\ 90\ n \\
45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi & = & -20^\circ 0' 0,''47 \\
\psi & = & 468000,''95 \\
\mu'\psi & = & 0,53562\ 266 \\
\text{Correction} & & +7 \\
\hline
F(\varphi) & = & 0,53562\ 273 \\
\text{M. Legendre trouve} & & 0,53562\ 27328\ 22
\end{array}
$$

Si l'on voulait arranger une table, il faudrait qu'elle donnât avec l'argument k les quantités correspondantes $\frac{1}{2}\varphi'$, $\frac{1}{2}\varphi'''$, μ'. Si $k > \sin 45^\circ$ il faut ou ajouter le coefficient de la correction, ou prendre $p = 7$, ce qui augmenterait la table d'une colonne, et augmenterait le calcul de deux logarithmes à chercher dans les tables trigonométriques. Il est probable que les nouvelles méthodes trouvées pour traiter ces transcendantes fourniront aussi des moyens pour le calcul commode de la table.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS

AD

THEORIAM FUNCTIONUM ELLIPTICARUM SPECTANTIS

AUCTORE

C. G. J. JACOBI.

Schumacher Astronomische Nachrichten, Bd. 6. Nr. 127. December 1827.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS

AD THEORIAM FUNCTIONUM ELLIPTICARUM SPECTANTIS.

Proprietates functionum ellipticarum quasdam in n°. 123 Astr. N. tradidi, quae novae atque attentione geometrarum non indignae videbantur. Disquisitiones, quibus illae originem debent, exinde ulterius continuatae sunt egregiamque, ni fallor, amplificationem theoriae a Legendre datae praebent. Cum autem tempus, quo tractatui, hasce disquisitiones complectenti, finem imponere licebit, definire nondum queam, geometris non ingratum fore spero, si fragmentum harum disquisitionum, demonstrationem scilicet theorematis in doctrina de transformatione functionum ellipticarum fundamentalis, hic breviter exponam. Multifariis idem modis variari posse, quisquis, perlecta demonstratione, facile intelliget.

Formula

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-\alpha y)(1-\alpha' y)(1-\alpha'' y)(1-\alpha''' y)}},$$

quando pro y valor $\frac{U}{V}$ substituitur, designantibus U et V functiones rationales integras alius indeterminatae factore communi non gaudentibus, abit in

$$\frac{VdU-UdV}{\sqrt{(V-\alpha U)(V-\alpha' U)(V-\alpha'' U)(V-\alpha''' U)}}.$$

Ut expressio haec illi, unde profecti sumus, similis fiat, formae scilicet

$$\frac{dx}{M\sqrt{(1-\beta x)(1-\beta' x)(1-\beta'' x)(1-\beta''' x)}},$$

designante M quantitatem constantem, haberi debet:

$$(V-\alpha U)(V-\alpha' U)(V-\alpha'' U)(V-\alpha''' U)$$
$$= MM(1-\beta x)(1-\beta' x)(1-\beta'' x)(1-\beta''' x)\left\{V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right\}^2,$$

quod conditiones duas, determinationi functionum U et V inservientes, suppeditat.

1) Inter factores simplices producti $(V-\alpha U)(V-\alpha' U)(V-\alpha'' U)(V-\alpha''' U)$, si quatuor diversos exceperis, bini aequales semper reperiri debent, ita ut habeatur:

$$(V-\alpha U)(V-\alpha' U)(V-\alpha'' U)(V-\alpha''' U) = (1-\beta x)(1-\beta' x)(1-\beta'' x)(1-\beta''' x)\,TT,$$

designante T functionem ipsius x rationalem integram.

2) Productum e factoribus, qui in expressionibus*) $V-\alpha U$, $V-\alpha' U$, $V-\alpha'' U$, $V-\alpha''' U$, excluso, si quis forte adest, factore constanti, bis reperiuntur, ipsi $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ aequale esse debet, ita ut sit

$$V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}=\frac{T}{M},$$

designante M quantitatem constantem.

Quamvis haud difficile perspiciatur, attamen dignum est notatu, posteriorem harum conditionum a priori involvi. Factorem enim quemvis, qui in expressionibus $V-\alpha U$, $V-\alpha' U$, $V-\alpha'' U$, $V-\alpha''' U$ bis reperitur, in illa $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ semel occurrere, ex aequatione

$$V dU - U dV = (V-\alpha U)dU - U d(V-\alpha U)$$

statim elucet.

Omnis itaque ipsius T factor etiam in expressione $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ continetur, ita ut $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ per T sit divisibilis. Exponens maximae in expressione $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ ipsius x potestatis major tamen quam illa in T esse nequit. Sit enim n exponens maximae ipsius x potestatis in functionibus U, V, erit T functio $(2n-2)^{\text{ti}}$ gradus, quod ex aequatione

$$(V-\alpha U)(V-\alpha' U)(V-\alpha'' U)(V-\alpha''' U) = (1-\beta x)(1-\beta' x)(1-\beta'' x)(1-\beta''' x)\,TT$$

*) Facile enim intelligitur, cum V et U factorem communem non involvant, duas quantitatum $V-\alpha U$, $V-\alpha' U$, $V-\alpha'' U$, $V-\alpha''' U$ per eundem factorem dividi non posse. Si itaque in producto $(V-\alpha U)(V-\alpha' U)(V-\alpha'' U)(V-\alpha''' U)$ factores duo aequales reperiuntur, necessario una quantitatum $V-\alpha U$, $V-\alpha' U$, $V-\alpha'' U$, $V-\alpha''' U$ utrumque implicat.

sponte sequitur. In expressione vero $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ coefficiens ipsius x^{2n-1}, quando potestas illa adest, evanescit. $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ itaque altioris quam $(2n-2)^{\text{ti}}$ gradus ideoque altioris quam gradus ipsius T esse nequit. Hinc sequitur, ut statuere liceat

$$V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}=\frac{T}{M},$$

ubi M quantitas est constans. Inde sequens colligimus

Theorema.

»Designent U, V, T functiones rationales integras ipsius x tales, ut sit:

$$(V-\alpha U)(V-\alpha' U)(V-\alpha'' U)(V-\alpha''' U) = (1-\beta x)(1-\beta' x)(1-\beta'' x)(1-\beta''' x)\,TT,$$

tunc expressio

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-\alpha y)(1-\alpha' y)(1-\alpha'' y)(1-\alpha''' y)}}$$

per substitutionem $y=\frac{U}{V}$ transit in

$$\frac{dx}{M\sqrt{(1-\beta x)(1-\beta' x)(1-\beta'' x)(1-\beta''' x)}},$$

designante M quantitatem constantem.«

Theoremate hoc fundamentum tranformationis transcendentium ellipticarum continetur.

Corollaria e fonte hoc uberrimo sponte demanantia praeteriens, expressionem functionum U et V generalem in sequentibus derivabo. Casum specialem, ad quem generalior facile reducitur, considerabo, quo scilicet expressio

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} \text{ in similem } \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

est transformanda, considerationibus quibusdam auxiliaribus praemissis, quae partim jam aliunde innotuere.

Designetur ut in opere Legendri valor integralis

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ a } \varphi=0 \text{ usque ad } \varphi=\varphi \text{ sumti per } F(\varphi),$$

tunc, si

$$F(\varphi)+F(\psi) = F(\sigma), \quad F(\varphi)-F(\psi) = F(\vartheta)$$

ponitur, notum est haberi

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+\sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}-\sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Unde statim sequitur:

$$\sin\sigma+\sin\vartheta = \frac{2\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

atque reductionibus factis

$$\sin\sigma\sin\vartheta = \frac{\sin^2\varphi-\sin^2\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Inde demanat

$$(1-\sin\sigma)(1-\sin\vartheta) = \frac{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi-2\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+\sin^2\varphi-\sin^2\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Ut expressio haec simplicior reddatur, notandum est, si

$$F(\psi)+F(\psi') = K$$

statuatur, designante

K integrale definitum $\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ a $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sumtum,

aequationes notas:

$$\sin\psi = \frac{\cos\psi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi'}}, \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{1-k^2}.\sin\psi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi'}}, \quad \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi'}}$$

locum habere.

Hisce valoribus substitutis numerator expressionis $(1-\sin\sigma)(1-\sin\vartheta)$ post debitas reductiones transit in

$$\frac{(1-k^2)(\sin\psi'-\sin\varphi)^2}{1-k^2\sin^2\psi'}.$$

Obtinemus itaque

$$\frac{(\sin\psi'-\sin\varphi)^2}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} = \frac{1-k^2\sin^2\psi'}{1-k^2}(1-\sin\sigma)(1-\sin\vartheta),$$

unde sequitur aequatio

$$\text{(I.)} \qquad \frac{\left(1-\frac{\sin\varphi}{\sin\psi'}\right)^2}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} = \frac{(1-\sin\sigma)(1-\sin\vartheta)}{\cos^2\psi}.$$

Notatione nova simplicioreque abhinc utar. Sit scilicet $F(\varphi) = \Xi$, tunc vulgo φ amplitudo ipsius Ξ nominatur, quamobrem φ in sequentibus per $\mathrm{am}\,\Xi$ denotabitur. Si itaque

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \Xi,$$

$x = \sin\mathrm{am}\,\Xi$ erit. $K-\Xi$ complementum ipsius Ξ vocetur; loco vero $\mathrm{am\,compl}\,\Xi$ expeditius $\mathrm{coam}\,\Xi$ scribetur. Modulus, ut facile perspicitur, hisce expressionibus semper est adjiciendus; ubi vero in sequentibus hoc neglectum est, notationes ad modulum k pertinere sunt putandae.

Expressionem nunc explicemus

$$\text{(II.)} \quad \frac{\{1\mp x\}\left\{1\pm\frac{x}{\sin\mathrm{coam}\frac{2K}{2n+1}}\right\}^2\left\{1\mp\frac{x}{\sin\mathrm{coam}\frac{4K}{2n+1}}\right\}^2\cdots\left\{1-\frac{x}{\sin\mathrm{coam}\frac{2nK}{2n+1}}\right\}^2}{\left\{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2K}{2n+1}\right\}\left\{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{4K}{2n+1}\right\}\cdots\left\{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2nK}{2n+1}\right\}} = 1-y,$$

signo superiore sumto, quando n est numerus par, inferiore, quando impar.

Statuatur $x = \sin\mathrm{am}\,\Xi$, tunc per aequationem (I.) habetur

$$\frac{\left\{1-\frac{x}{\sin\mathrm{coam}\frac{2mK}{2n+1}}\right\}^2}{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2mK}{2n+1}} = \frac{\left\{1-\sin\mathrm{am}\left(\Xi+\frac{2mK}{2n+1}\right)\right\}\left\{1-\sin\mathrm{am}\left(\Xi-\frac{2mK}{2n+1}\right)\right\}}{\cos^2\mathrm{am}\frac{2mK}{2n+1}}$$

eodemque modo

$$\frac{\left\{1+\frac{x}{\sin\mathrm{coam}\frac{2mK}{2n+1}}\right\}^2}{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2mK}{2n+1}} = \frac{\left\{1+\sin\mathrm{am}\left(\Xi+\frac{2mK}{2n+1}\right)\right\}\left\{1+\sin\mathrm{am}\left(\Xi-\frac{2mK}{2n+1}\right)\right\}}{\cos^2\mathrm{am}\frac{2mK}{2n+1}}.$$

Cum vero generaliter sit

$$\sin\mathrm{am}\,\Xi = \sin\mathrm{am}(2K-\Xi) = -\sin\mathrm{am}(\Xi-2K) = -\sin\mathrm{am}(\Xi+2K),$$

expressionem posteriorem ita exhibeamus:

$$\frac{\left\{1-\sin\operatorname{am}\left(\Xi-\frac{4n+2-2m}{2n+1}K\right)\right\}\left\{1-\sin\operatorname{am}\left(\Xi+\frac{4n+2-2m}{2n+1}K\right)\right\}}{\cos^2\operatorname{am}\frac{2mK}{2n+1}}.$$

Inde sequitur loco valoris ipsius $1-y$ supra dati substitui posse

$$\text{(III.)}\quad 1-y=$$

$$\frac{\{1\mp\sin\operatorname{am}\Xi\}\left\{1\mp\sin\operatorname{am}\left(\Xi+\frac{4K}{2n+1}\right)\right\}\left\{1\mp\sin\operatorname{am}\left(\Xi+\frac{8K}{2n+1}\right)\right\}\cdots\left\{1\mp\sin\operatorname{am}\left(\Xi+\frac{8nK}{2n+1}\right)\right\}^{*)}}{\cos^2\operatorname{am}\frac{2K}{2n+1}\cos^2\operatorname{am}\frac{4K}{2n+1}\cdots\cdots\cos^2\operatorname{am}\frac{2nK}{2n+1}};$$

loco $\sin\operatorname{am}\left(\Xi-\frac{4mK}{2n+1}\right)$ hic $\sin\operatorname{am}\left(\Xi+\frac{8n+4-4m}{2n+1}K\right)$ scriptus est, ne per signorum varietatem perspicuitas legis expressionis turbetur. Haec formula ostendit valorem ipsius $1-y$, substituto $\Xi+\frac{4K}{2n+1}$ pro Ξ, immutatum manere; quivis enim factor numeratoris eo modo in sequentem permutatur, ultimus vero in primum. Ideoque etiam tunc non mutatur, quando pro Ξ substituitur $\Xi+\frac{4mK}{2n+1}$, designante m numerum quemcunque integrum positivum vel negativum. Ex aequatione (II.) vero sequitur $1-y=1$ vel $y=0$ pro $x=0$ vel $\Xi=0$ ideoque etiam pro $\Xi=\frac{4mK}{2n+1}$, vel pro valoribus ipsius x:

$$0,\quad \sin\operatorname{am}\frac{4K}{2n+1},\quad \sin\operatorname{am}\frac{8K}{2n+1},\quad \sin\operatorname{am}\frac{12K}{2n+1},\cdots \sin\operatorname{am}\frac{8nK}{2n+1},$$

vel, quod idem est, pro valoribus ipsius x:

$$\begin{array}{lllll} 0, & \sin\operatorname{am}\frac{2K}{2n+1}, & \sin\operatorname{am}\frac{4K}{2n+1}, & \cdots\cdots & \sin\operatorname{am}\frac{2nK}{2n+1}, \\ & -\sin\operatorname{am}\frac{2K}{2n+1}, & -\sin\operatorname{am}\frac{4K}{2n+1}, & \cdots\cdots & -\sin\operatorname{am}\frac{2nK}{2n+1}, \end{array}$$

qui omnes diversi sunt.

Adjumento aequationum praecedentium y facile in factores suos simplices dissolvitur. Si enim statuitur $y=\frac{U}{V}$, ubi

*) Sumatur signum superius quando n est numerus par, inferius, quando impar.

$$V=\left\{1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{2n+1}\right\}\left\{1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{2n+1}\right\}\cdots\left\{1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2nK}{2n+1}\right\},$$

tum ex aequatione (II.) perspicitur U esse functionem rationalem integram ipsius x gradus $(2n+1)^{\text{ti}}$. Jam vero nobis innotuere $2n+1$ valores diversi ipsius x aequationi y vel $U=0$ satisfacientes. Fit igitur

$$U=\frac{x}{\mathrm{M}}\left\{1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{2n+1}}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{2n+1}}\right\}\cdots\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2nK}{2n+1}}\right\},$$

designante M quantitatem constantem.

Ut ipsum M determinemus aequationem (II.) revocemus, ex qua sequitur $1-y$ esse $=0$, sive y vel $\frac{U}{V}=1$, quando n est numerus par et $x=+1$, vel quando n est impar et $x=-1$. Cum desuper habeatur

$$\frac{1-\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}\Xi}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\Xi}=-\frac{\sin^2\operatorname{coam}\Xi}{\sin^2\operatorname{am}\Xi},$$

in casu utroque erit:

$$\mathrm{M}=\frac{\sin^2\operatorname{coam}\frac{2K}{2n+1}\sin^2\operatorname{coam}\frac{4K}{2n+1}\cdots\cdots\sin^2\operatorname{coam}\frac{2nK}{2n+1}}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{2n+1}\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{2n+1}\cdots\cdots\sin^2\operatorname{am}\frac{2nK}{2n+1}}.$$

Relatio inter functiones U et V memorabilis subsistit. Etenim si pro x substituitur $\frac{1}{kx}$, tum U transit in

$$\frac{\frac{1}{kx\mathrm{M}}V}{(-1)^n x^{2n}k^{2n}\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{2n+1}\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{2n+1}\cdots\cdots\sin^2\operatorname{am}\frac{2nK}{2n+1}}$$

atque V in

$$(-1)^n\frac{\mathrm{M}U}{xx^{2n}}\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{2n+1}\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{2n+1}\cdots\cdots\sin^2\operatorname{am}\frac{2nK}{2n+1}$$

ideoque $\frac{U}{V}$ in

$$\frac{V}{U}\cdot\frac{1}{k^{2n+1}\mathrm{M}^2\sin^4\mathrm{am}\frac{2K}{2n+1}\sin^4\mathrm{am}\frac{4K}{2n+1}\cdots\sin^4\mathrm{am}\frac{2nK}{2n+1}},$$

vel, valore ipsius M substituto, in

$$\frac{V}{U}\cdot\frac{1}{k^{2n+1}\sin^4\mathrm{coam}\frac{2K}{2n+1}\sin^4\mathrm{coam}\frac{4K}{2n+1}\cdots\cdots\sin^4\mathrm{coam}\frac{2nK}{2n+1}}.$$

Si itaque ponitur

$$\lambda = k^{2n+1}\sin^4\mathrm{coam}\frac{2K}{2n+1}\sin^4\mathrm{coam}\frac{4K}{2n+1}\cdots\cdots\sin^4\mathrm{coam}\frac{2nK}{2n+1},$$

tum y in $\frac{1}{\lambda y}$, quando x in $\frac{1}{kx}$, mutatur.

Applicemus hasce considerationes ad aequationem (II.), quae, ut modo ostendi, etiam tunc valet, si pro x et y resp. substituitur $\frac{1}{kx}$, $\frac{1}{\lambda y}$. Quo facto aequatio haec per $-\lambda y$ multiplicata reductionibus facilibus factis transit in

$$\text{(IV.)}\quad 1-\lambda y =$$
$$\frac{\{1\mp kx\}\left\{1\pm kx\sin\mathrm{coam}\frac{2K}{2n+1}\right\}^2\left\{1\mp kx\sin\mathrm{coam}\frac{4K}{2n+1}\right\}^2\cdots\left\{1-kx\sin\mathrm{coam}\frac{2nK}{2n+1}\right\}^2}{\left\{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2K}{2n+1}\right\}\left\{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{4K}{2n+1}\right\}\cdots\left\{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2nK}{2n+1}\right\}}.$$

Aequatio $y=\frac{U}{V}$ primo intuitu docet y in $-y$ transire, quando x in $-x$ transit. Obtinemus igitur pro aequatione (II.) et (IV.) valores $1+y$ et $1+\lambda y$, $-x$ in illis loco x scripta.

Priusquam ad finem propero, expressionem pro $y=\frac{U}{V}$ simplicem tradam:

$$y=(-1)^n\frac{\sin\mathrm{am}\,\Xi.\sin\mathrm{am}\left(\Xi+\frac{4K}{2n+1}\right)\sin\mathrm{am}\left(\Xi+\frac{8K}{2n+1}\right)\cdots\sin\mathrm{am}\left(\Xi+\frac{8nK}{2n+1}\right)}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{2K}{2n+1}\sin^2\mathrm{coam}\frac{4K}{2n+1}\cdots\sin^2\mathrm{coam}\frac{2nK}{2n+1}},$$

quae e formula supra allata

$$\sin\sigma\sin\vartheta = \frac{\sin^2\varphi-\sin^2\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

sequitur.

Expressiones pro $1-y$, $1-\lambda y$, $1+y$, $1+\lambda y$ eundem habent denominatorem V. Videmus desuper esse

$$V(1-y) = V-U,\qquad V(1-\lambda y) = V-\lambda U,$$
$$V(1+y) = V+U,\qquad V(1+\lambda y) = V+\lambda U$$

quadrata functionum integrarum rationalium ipsius x in factores simplices $1\mp x$, $1\mp kx$, $1\pm x$, $1\pm kx$ resp. multiplicata. Statui itaque potest

$$(V-U)(V-\lambda U)(V+U)(V+\lambda U) = (1-x^2)(1-k^2x^2)\,TT,$$

designante T functionem rationalem integram ipsius x. Fit desuper per considerationem initio allatam $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ aequalis ipsi T in factorem constantem multiplicata. Hic ita invenitur: perspicitur constantem in T esse $=1$, in $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ vero $\frac{1}{\mathrm{M}}$, ut e formulis pro U et V sequitur. Habemus igitur $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}=\frac{T}{\mathrm{M}}$. His omnibus collectis sequens nanciscimur

Theorema.

»Si statuitur

$$\lambda = k^{2n+1}\sin^4\mathrm{coam}\frac{2K}{2n+1}\sin^4\mathrm{coam}\frac{4K}{2n+1}\cdots\cdot\sin^4\mathrm{coam}\frac{2nK}{2n+1},$$

$$\mathrm{M} = \frac{\sin^2\mathrm{coam}\frac{2K}{2n+1}\sin^2\mathrm{coam}\frac{4K}{2n+1}\cdots\cdot\sin^2\mathrm{coam}\frac{2nK}{2n+1}}{\sin^2\mathrm{am}\frac{2K}{2n+1}\quad\sin^2\mathrm{am}\frac{4K}{2n+1}\cdots\cdot\quad\sin^2\mathrm{am}\frac{2nK}{2n+1}},$$

tunc habetur:

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{\Xi}{\mathrm{M}},\lambda\right)=(-1)^n.\frac{\sin\mathrm{am}\,\Xi\sin\mathrm{am}\left(\Xi+\frac{4K}{2n+1}\right)\sin\mathrm{am}\left(\Xi+\frac{8K}{2n+1}\right)\cdots\sin\mathrm{am}\left(\Xi+\frac{8nK}{2n+1}\right)}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{2K}{2n+1}\sin^2\mathrm{coam}\frac{4K}{2n+1}\cdots\sin^2\mathrm{coam}\frac{2nK}{2n+1}},$$

vel si pro $\sin \operatorname{am}\left(\frac{\Xi}{M}, \lambda\right)$ quantitas y substituitur,

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.\text{“}$$

Theorema hoc generaliter valet, non tamen omnes problematis solutiones amplectitur. Ulteriores vero hujus argumenti disquisitiones in tractatu supra nominato reperientur.

Regiomonti die 18. Novembris 1827.

FUNDAMENTA NOVA THEORIAE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM

AUCTORE

D. CAROLO GUSTAVO JACOBO JACOBI
PROF. ORD. UNIV. REGIOM.

Regiomonti. Sumptibus fratrum Bornträger 1829.

PROŒMIUM.

Ante biennium fere, cum theoriam functionum ellipticarum accuratius examinare placuit, incidi in quaestiones quasdam gravissimas, quae et theoriae illi novam faciem creare et universam artem analyticam insigniter promovere videbantur. Quibus ad exitum felicem et propter difficultatem rei vix exspectatum perductis, prima earum momenta breviter et sine demonstratione, mox cum vehementius illa desiderari et invento novo vix fides tribui videretur, addita demonstratione, cum geometris communicavi. Urgebar simul, ut systema completum quaestionum a me susceptarum in publicum ederem. Cui desiderio ut ex parte saltem satisfacerem, fundamenta, quibus quaestiones meae superstructae sunt, in publicum edere constitui. Quae fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum iam indulgentiae geometrarum commendamus.

Scribebam m. Febr. a. 1829 ad Univ. Regiom.

INDEX RERUM.

De Transformatione Functionum Ellipticarum. §§ 1—34 . . . pag. 55—138

Expositio problematis generalis de transformatione. §§ 1. 2 . . . . pag. 55

Principia transformationis. §§ 3. 4 . . . . — 57

Proponitur expressio $\frac{dy}{\sqrt{\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$ in formam simpliciorem redigenda $\frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$. §§ 5—9 — 60

De transformatione expressionis $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}$ in aliam ejus similem $\frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$. §§ 10—12 . . . . — 69

Proponitur transformatio tertii ordinis. §§ 13. 14 . . . . — 74

Proponitur transformatio quinti ordinis. § 15 . . . . — 77

Quomodo transformatione bis adhibita pervenitur ad multiplicationem. § 16 . . . . — 80

De notatione nova functionum ellipticarum. § 17 . . . . — 81

Formulae in analysi functionum ellipticarum fundamentales. § 18 . . . . — 83

De imaginariis functionum ellipticarum valoribus. Principium duplicis periodi. § 19 . . . . . — 85

Theoria analytica transformationis functionum ellipticarum. § 20 . . . . — 87

Demonstratio formularum analyticarum pro transformatione. §§ 21—23 . . . . — 90

De variis ejusdem ordinis transformationibus. Transformationes duae reales, majoris moduli in minorem et minoris in majorem. § 24 . . . . — 100

De transformationibus complementariis seu quomodo e transformatione moduli in modulum alia derivatur complementi in complementum. § 25 . . . . — 108

De transformationibus supplementariis ad multiplicationem. §§ 26. 27 . . . . — 111

Formulae analyticae generales pro multiplicatione functionum ellipticarum. § 28 . . . . — 120

De aequationum modularium affectibus. § 29—34 . . . . — 122

Theoria Evolutionis Functionum Ellipticarum. §§ 35—66 . . . . pag. 141—239

De evolutione functionum ellipticarum in producta infinita. §§ 35—38 . . . . pag. 141

Evolutio functionum ellipticarum in series secundum sinus vel cosinus multiplorum argumenti progredientes. §§ 39—42 . . . . — 155

Formulae generales pro functionibus $\sin^n \mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, $\frac{1}{\sin^n \mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$ in series evolvendis, secundum sinus vel cosinus multiplorum ipsius x progredientes. §§ 43—46 . . . . — 170

Integralium ellipticorum secunda species in series evolvitur. §§ 47. 48 . . . . — 187

Integralia elliptica tertiae speciei indefinita ad casum revocantur definitum, in quo amplitudo parametrum aequat. §§ 49. 50 . . . . — 191

Integralia elliptica tertiae speciei in seriem evolvuntur. Quomodo illa per transcendentem novam Θ commode exprimuntur. §§ 51. 52 . . . . — 195

De additione argumentorum et amplitudinis et parametri in tertia specie integralium ellipticorum. §§ 53—55 . . . . — 204

Reductiones expressionum $Z(iu)$, $\Theta(iu)$ ad argumentum reale. Reductio generalis tertiae speciei integralium ellipticorum, in quibus argumenta et amplitudinis et parametri imaginaria sunt. §§ 56—60 . . . . — 214

Functiones ellipticae sunt functiones fractae. De functionibus H, Θ, quae numeratoris et denominatoris locum tenent. § 61 . . . . — 224

De evolutione functionum H, Θ in series. Evolutio tertia functionum ellipticarum. §§ 62—66 . — 228

FUNDAMENTA NOVA

THEORIAE

FUNCTIONUM ELLIPTICARUM

AUCTORE

D. CAROLO GUSTAVO JACOBO JACOBI

PROF. ORD. IN UNIV. REGIOM.

REGIOMONTI

SUMTIBUS FRATRUM BORNTRAEGER

1829.

PROOEMIUM.

Ante biennium fere, cum theoriam functionum ellipticarum accuratius examinare placuit, incidi in quaestiones quasdam gravissimas, quae et theoriae illi novam faciem creare et universam artem analyticam insigniter promovere videbantur. Quibus ad exitum felicem et propter difficultatem rei vix exspectatum perductis, prima earum momenta breviter et sine demonstratione, mox cum vehementius illa desiderari et invento novo vix fides tribui videretur, addita demonstratione, cum geometris communicavi. Urgebar simul, ut systema completum quaestionum a me susceptarum in publicum ederem. Cui desiderio ut ex parte saltem satisfacerem, fundamenta, quibus quaestiones meae superstructae sunt, in publicum edere constitui. Quae fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum iam indulgentiae geometrarum commendamus.

Scribebam m. Febr. a. 1829 ad Univ. Regiom.

DE

TRANSFORMATIONE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM.

EXPOSITIO PROBLEMATIS GENERALIS DE TRANSFORMATIONE.

1.

Integralia maxime memorabilia, quae formula exhibentur $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, et quae functionum ellipticarum, quae dicuntur, primam speciem constituunt, ab argumento duplici pendent, et ab amplitudine φ et a modulo k. Eiusmodi functionis inter se comparatis valoribus, quos illa pro diversis amplitudinibus obtinet, eodem manente modulo, egregia multa detexerant analystae, quae ad eorum additionem et multiplicationem spectant. Quam nuper vidimus quaestionem a Cl°. Abel in commentatione, nostra laude majore, mirum in modum provectam esse (Crelle Journal für reine und angewandte Mathematik Vol. II.).

Alia est quaestio nec minoris momenti — immo sensu latissimo capta illam involvens — de comparatione functionum ellipticarum pro modulis instituenda diversis. Quam quaestionem post praeclara inventa Cl$^{\text{l}}$. Legendre — theoriae functionum ellipticarum conditoris — ad principia certa nos primi revocavimus eiusque solutionem dedimus generalem (*Astronomische Nachrichten*, 1827. n°. 123. 127). Hanc nostram de transformatione theoriam et, quae alia inde in analysin functionum ellipticarum redundant, iam fusius exponemus.

2.

Problema, quod nobis proponimus, generale hoc est:

»*Quaeritur functio rationalis y elementi x eiusmodi, ut sit:*

$$\frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4}} = \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}.\text{«}$$

Quod problema et multiplicationem videmus amplecti et transformationem.

Innumera iam diu constabant exempla eiusmodi functionum rationalium y, quae problemati proposito satisfaciunt. Primum notum erat, quicunque datus sit numerus integer impar n, eiusmodi functionem rationalem y exhiberi posse, ut sit:

$$\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}};$$

quod est de multiplicatione theorema. Quem in finem adhiberi debet forma:

$$y = \frac{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\cdots+a^{(nn)}x^{nn}}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\cdots+b^{(nn)}x^{nn}},$$

coefficientibus $a, a', a'', \ldots.; b, b', b'', \ldots$ rite determinatis. Satis diu etiam exploratum est, formam hanc:

$$y = \frac{a+a'x+a''x^2}{b+b'x+b''x^2},$$

seu hanc generaliorem:

$$y = \frac{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\cdots+a^{(2^m)}x^{2^m}}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\cdots+b^{(2^m)}x^{2^m}},$$

quae ex illius substitutionis repetitione ortum ducit, ita determinari posse, ut solvat problema. Nuper admodum etiam probatum est a Cl°. Legendre, eum in finem adhiberi posse formam hanc rite determinatam:

$$y = \frac{a+a'x+a''x^2+a'''x^3}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3},$$

seu rursus, eadem substitutione repetita, hanc generaliorem:

$$y = \frac{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\cdots+a^{(3^m)}x^{3^m}}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\cdots+b^{(3^m)}x^{3^m}}.$$

His inter se iunctis formis patet problemati satisfieri posse, idonea facta coefficientium electione, posito:

$$y = \frac{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\cdots+a^{(p)}x^p}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\cdots+b^{(p)}x^p},$$

siquidem p sit numerus formae $2^\alpha 3^\beta (2m+1)^2$. Iam sequentibus probabitur, idem valere, *quicunque sit p numerus.*

PRINCIPIA TRANSFORMATIONIS.

3.

Designentur per U, V functiones rationales integrae elementi x, sit porro $y = \frac{U}{V}$, fit:

$$\frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4}} = \frac{V\,dU-U\,dV}{\sqrt{Y}},$$

brevitatis causa posito:

$$Y = A'V^4+B'V^3U+C'V^2U^2+D'VU^3+E'U^4.$$

Fractionem $\frac{V\,dU-U\,dV}{\sqrt{Y}}$ in formam simpliciorem redigere licet, quoties Y factores duplices habet; quin adeo, ubi praeter quatuor factores lineares inter se diversos e reliquorum numero bini inter se aequales existunt, fractio illa sponte in differentiale functionis ellipticae redit $\frac{dx}{M\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$, designante M functionem elementi x rationalem. Quem accuratius examinemus casum ac videamus, quot et quales sibi poscat conditiones.

Sint functiones U, V altera p^{ti}, altera m^{ti} ordinis, ita ut $m \leqq p$: erit Y ordinis $(4p)^{\text{ti}}$. Iam ut, quatuor factoribus linearibus exceptis, e reliquis functionis Y factoribus, quorum est numerus $4p-4$, bini inter se aequales evadant, $2p-2$ conditionibus satisfaciendum erit. Quot enim functio proposita duplices habere debet factores lineares, tot inter coefficientes eius intercedere debent aequationes conditionales.

At functionibus U, V quantitates constantes indeterminatae insunt $m+p+2$ seu potius $m+p+1$, quippe e quarum numero unam aliquam $=1$ ponere liceat. Quarum igitur numero vel aequatur numerus conditionum $2p-2$ vel ab eo superatur, modo supponatur, m esse aliquem e numeris $p-3$, $p-2$, $p-1$, p, quibus casibus numerus indeterminatarum fit resp. $2p-2$, $2p-1$, $2p$, $2p+1$. Duos priores casus reiiciendos esse cum infra demonstrabitur, tum hunc in modum patet. Namque inventis functionibus U, V, quae functioni Y formam illam praescriptam conciliant, ubi loco x substituitur $\alpha+\beta x$, neque ordo mutatur functionum U, V, Y neque numerus factorum duplicium functionis Y: unde in solutionem inventam statim duas quantitates arbitrarias inferre licet. Itaque numerus indeterminatarum numerum conditionum duabus saltem unitatibus superare debet, unde casus $m = p-3$, $m = p-2$ reiiciendi sunt. Porro videmus, loco x posito $\frac{\alpha+\beta x}{1+\gamma x}$, tertium casum ad quartum reduci et quartum minime mutari, quo igitur casu indeterminatarum tres et arbitrariae manent et manere debent.

Iam igitur evictum est, quantum quidem e numero indeterminatarum et numero conditionum inter se comparatis concludere licet, *quicunque sit p numerus, formam:*

$$y = \frac{a+a'x+a''x^2+\cdots+a^{(p)}x^p}{1+b'x+b''x^2+\cdots+b^{(p)}x^p}$$

ita determinari posse, ut sit:

$$\frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4}} = \frac{dx}{M\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

designante M functionem rationalem ipsius x; immo solutionem tres quantitates arbitrarias involvere posse.

4.

Ut determinetur functio illa M, sit

$$Y = (A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)\,T\,T,$$

designante T functionem elementi x integram rationalem: erit

$$M = \frac{T}{V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}}.$$

Ipsa T erit ordinis $(2p-2)^{\text{ti}}$, nec maioris esse potest $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$. Iam casibus quibusdam constat, scilicet ubi numerus p formam illam habet $2^{\alpha}3^{\beta}(2n+1)^2$, M adeo fieri constantem. Idem generaliter probabitur sequentibus, quicunque sit p numerus.

Functiones U, V supponere possumus factorem communem non habere; adiecto enim factore communi, fractio $\frac{U}{V} = y$ non mutatur. Resolvamus expressionem

$$A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4$$

in factores lineares, ita ut sit:

$$A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4 = A'(1-\alpha'y)(1-\beta'y)(1-\gamma'y)(1-\delta'y),$$

unde etiam:

$$Y = A'V^4+B'V^3U+C'V^2U^2+D'VU^3+E'U^4 = A'(V-\alpha'U)(V-\beta'U)(V-\gamma'U)(V-\delta'U).$$

Iam existere non potest factor, qui quantitatibus $V-\alpha'U$, $V-\beta'U$, $V-\gamma'U$, $V-\delta'U$ vel omnibus vel immo duabus tantum ex earum numero communis sit; idem enim et V et U simul metiretur, quas factorem communem non habere supposuimus. Itaque ubi factor aliquis linearis functionem Y bis metitur, idem unam aliquam e quantitatibus $V-\alpha'U$, $V-\beta'U$, $V-\gamma'U$, $V-\delta'U$ et ipsam bis metiatur necesse est.

Iam notentur aequationes sequentes:

$$(V-\alpha'U)\frac{dU}{dx}-\frac{d(V-\alpha'U)}{dx}\,U = V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$$
$$(V-\beta'U)\frac{dU}{dx}-\frac{d(V-\beta'U)}{dx}\,U = V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$$
$$(V-\gamma'U)\frac{dU}{dx}-\frac{d(V-\gamma'U)}{dx}\,U = V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$$
$$(V-\delta'U)\frac{dU}{dx}-\frac{d(V-\delta'U)}{dx}\,U = V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx},$$

e quibus sequitur, factorem, qui unam aliquam e quantitatibus $V-\alpha'U$, $V-\beta'U$, $V-\gamma'U$, $V-\delta'U$ bis ideoque etiam eius differentiale metiatur, eundem metiri expressionem $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$. Productum vero ex omnibus istis factoribus, ipsam etiam Y bis metientibus, conflatum posuimus $= T$, unde T ipsam $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ metietur. At T inferioris ordinis non est quam ipsa $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$, unde videmus

$$M = \frac{T}{V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}}$$

abire in constantem.

Ceterum adnotemus, ubi functionum U, V altera inferioris ordinis fuisset quam $(p-1)^{\text{ti}}$, futurum fuisse, ut ipsa etiam $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ inferioris ordinis esset quam T, quae tamen illam metiri debet; quod cum absurdum sit, reiici debebant casus $m = p-2$, $m = p-3$.

Iam igitur demonstratum est, *formam:*

$$y = \frac{a+a'x+a''x^2+\cdots+a^{(p)}x^p}{b+b'x+b''x^2+\cdots+b^{(p)}x^p},$$

quicunque sit numerus p, ita determinari posse, ut prodeat:

$$\frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4}} = \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}.$$

Quod est principium in theoria transformationum functionum ellipticarum fundamentale.

PROPONITUR EXPRESSIO $\frac{dy}{\sqrt{\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$ IN FORMAM SIMPLICIOREM REDIGENDA $\frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$.

5.

Trium constantium arbitrariarum ope, quas solutionem problematis nostri admittere vidimus, expressio $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$ in simpliciorem redigi potest hanc: $A(1-x^2)(1-k^2x^2)$. Ut hoc et reliqua, quae modo demonstrata sunt, exemplis etiam monstrentur, proposita sit data expressio:

$$\frac{dy}{\sqrt{\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$$

facta substitutione:

$$y = \frac{a+a'x+a''x^2}{b+b'x+b''x^2}$$

transformanda in simpliciorem hanc:

$$\frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Quaeritur de substitutione adhibenda, de modulo k et de factore constante M e datis quantitatibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ determinandis.

Ponatur $a+a'x+a''x^2 = U$, $b+b'x+b''x^2 = V$, $y = \frac{U}{V}$: e principiis modo expositis fieri debet:

$$(U-\alpha V)(U-\beta V)(U-\gamma V)(U-\delta V) = K(1-x^2)(1-k^2x^2)(1+mx)^2(1+nx)^2,$$

designante K constantem aliquam arbitrariam. Hinc videmus duos e numero factorum $U-\alpha V$, $U-\beta V$, $U-\gamma V$, $U-\delta V$, qui erunt secundi ordinis, adeo fieri quadrata.

Ponamus igitur:

$$U-\gamma V = C(1+mx)^2$$
$$U-\delta V = D(1+nx)^2.$$

Iam quod reliquos attinet factores $U-\alpha V$, $U-\beta V$, poni poterit aut:

$$U-\alpha V = A(1-x^2), \qquad U-\beta V = B(1-k^2x^2)$$

aut:

$$U-\alpha V = A(1-x)(1-kx),\quad U-\beta V = B(1+x)(1+kx),$$

designantibus A, B, C, D quantitates constantes. Prius reiiciendum erit. Prodiret enim $\frac{U-\alpha V}{U-\beta V} = \frac{y-\alpha}{y-\beta} = \frac{A}{B}\cdot\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}$, unde sequeretur, elemento x in $-x$ mutato y immutatum manere, quod absurdum esse patet ex aequationibus:

$$\frac{U-\alpha V}{U-\gamma V} = \frac{y-\alpha}{y-\gamma} = \frac{A}{C}\cdot\frac{1-x^2}{(1+mx)^2}$$
$$\frac{U-\alpha V}{U-\delta V} = \frac{y-\alpha}{y-\delta} = \frac{A}{D}\cdot\frac{1-x^2}{(1+nx)^2}.$$

Poni igitur debet:

$$(1)\qquad U-\alpha V = A(1-x)(1-kx)$$
$$(2)\qquad U-\beta V = B(1+x)(1+kx)$$
$$(3)\qquad U-\gamma V = C(1+mx)^2$$
$$(4)\qquad U-\delta V = D(1+nx)^2.$$

Adnotare convenit e constantibus A, B, C, D unam aliquam ex arbitrio determinari posse.

6.

Videmus ex aequatione (1) et posito $x=1$ et posito $x=\frac{1}{k}$ fieri $U=\alpha V$. Hinc ex aequatione:

$$\frac{U-\gamma V}{U-\beta V} = \frac{C}{B}\cdot\frac{(1+mx)^2}{(1+x)(1+kx)},$$

posito $x=1$, prodit:

$$\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta} = \frac{C}{B}\cdot\frac{(1+m)^2}{2(1+k)},$$

posito $x=\frac{1}{k}$:

$$\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta} = \frac{C}{B}\cdot\frac{\left(1+\frac{m}{k}\right)^2}{2\left(1+\frac{1}{k}\right)},$$

unde:

$$(1+m)^2 = k\left(1+\frac{m}{k}\right)^2.$$

Prorsus simili modo invenitur:

$$(1+n)^2 = k\left(1+\frac{n}{k}\right)^2,$$

unde $m = \sqrt{k}$, $n = -\sqrt{k}$. Neque enim aequales ponere licet m et n; tum enim expressio $\frac{U-\gamma V}{U-\delta V} = \frac{y-\gamma}{y-\delta}$ ideoque ipsa y abiret in constantem.

Iam in aequatione:

$$\frac{U-\gamma V}{U-\delta V} = \frac{y-\gamma}{y-\delta} = \frac{C}{D}\cdot\left\{\frac{1+\sqrt{k}.x}{1-\sqrt{k}.x}\right\}^2$$

ponatur primum $x = +1$, quo casu $U = \alpha V$, deinde $x = -1$, quo casu $U = \beta V$: prodeunt duae aequationes sequentes:

$$\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta} = \frac{C}{D}\cdot\left\{\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right\}^2$$

$$\frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta} = \frac{C}{D}\cdot\left\{\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right\}^2.$$

Quibus in se ductis aequationibus, fit:

$$\frac{C}{D} = \sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}},$$

unde ponere licet:

$$C = \sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$$

$$D = \sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)};$$

nam e quantitatibus A, B, C, D una ex arbitrio determinari poterat.

Ex iisdem aequationibus, altera per alteram divisa, obtinemus:

$$\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} = \frac{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}}{\sqrt[4]{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}},$$

unde:

$$\sqrt{k} = \frac{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}-\sqrt[4]{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}+\sqrt[4]{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}.$$

Adnotetur adhuc formula:

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}} = 2\cdot\frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}+\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}-\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}},$$

unde:

$$(1-\sqrt{k})\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{-4\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}-\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}$$

$$(1+\sqrt{k})\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{4\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}-\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}.$$

Ut constantes A, B definiantur observo, ex aequationibus (1), (2), (3), posito $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$, quo facto $U = \delta V$, erui:

$$\frac{\delta-\alpha}{\delta-\gamma} = \frac{A(1-\sqrt{k})\left(1-\sqrt{\frac{1}{k}}\right)}{4\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}$$

$$\frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma} = \frac{B(1+\sqrt{k})\left(1+\sqrt{\frac{1}{k}}\right)}{4\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}},$$

unde:

$$A = -\frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}}{\gamma-\delta}\left\{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}-\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}\right\}$$

$$B = \frac{\sqrt{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}}{\gamma-\delta}\left\{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}-\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}\right\}.$$

7.

E principiis generalibus supra a nobis stabilitis sequitur, in exemplo nostro expressionem $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ aequalem fore producto $(1+\sqrt{k}.x)(1-\sqrt{k}.x)$ in quantitatem constantem ducto, quod ita facto calculo comprobatur.

Fit, uti evolutione facta constat:

$$(\gamma-\delta)\left(U\frac{dV}{dx}-V\frac{dU}{dx}\right) = (U-\gamma V)\frac{d(U-\delta V)}{dx}-(U-\delta V)\frac{d(U-\gamma V)}{dx}.$$

Nacti autem sumus:

$$U-\gamma V = C(1+\sqrt{k}.x)^2$$

$$U-\delta V = D(1-\sqrt{k}.x)^2,$$

unde:

$$\frac{d(U-\gamma V)}{dx} = 2C(1+\sqrt{k}.x)\sqrt{k}$$

$$\frac{d(U-\delta V)}{dx} = -2D(1-\sqrt{k}.x)\sqrt{k}.$$

Unde prodit:

$$(\gamma-\delta)\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right) = 4\sqrt{k}.CD(1+\sqrt{k}.x)(1-\sqrt{k}.x).$$

His omnibus rite collectis, obtinemus:

$$\frac{dy}{\sqrt{-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = \frac{4\sqrt{k}}{\gamma-\delta}\cdot\sqrt{\frac{CD}{-AB}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

unde:

$$M = \frac{\gamma-\delta}{4\sqrt{k}}\sqrt{\frac{-AB}{CD}} = \frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}-\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}{4\sqrt{k}}$$
$$= \left\{\frac{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}+\sqrt[4]{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}{2}\right\}^2,$$

$$\frac{dy}{\sqrt{-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$= \frac{dx}{\sqrt{[1-x^2]\left[\left(\frac{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}+\sqrt[4]{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}{2}\right)^4-\left(\frac{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}-\sqrt[4]{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}{2}\right)^4x^2\right]}}.$$

Posito $(\alpha-\gamma)(\beta-\delta) = G$, $(\alpha-\delta)(\beta-\gamma) = G'$, fit:

$$\frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{[1-x^2]\left[\left(\frac{\sqrt[4]{G}+\sqrt[4]{G'}}{2}\right)^4-\left(\frac{\sqrt[4]{G}-\sqrt[4]{G'}}{2}\right)^4x^2\right]}}.$$

Sit $G = mm$, $G' = nn$, sit porro:

$$m' = \frac{1}{2}(m+n),\quad n' = \sqrt{mn}$$
$$m'' = \frac{1}{2}(m'+n'),\quad n'' = \sqrt{m'n'},$$

erit, posito $x = \sin\varphi$:

$$\frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{m''m''\cos^2\varphi+n''n''\sin^2\varphi}}.$$

Ceterum valor ipsius x facillime computatur ope formulae:

$$\frac{1-\sqrt{k}.x}{1+\sqrt{k}.x} = \sqrt[4]{\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}}\cdot\sqrt{\frac{y-\delta}{y-\gamma}},$$

ubi:

$$\sqrt{k} = \frac{\sqrt[4]{G}-\sqrt[4]{G'}}{\sqrt[4]{G}+\sqrt[4]{G'}} = \sqrt[4]{\frac{m''m''-n''n''}{m''m''}}.$$

8.

Quantitates $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in formulis propositis ex arbitrio inter se permutare licet. Quod in arbitrio nostro positum certum fit ac definitum, quando conditio additur, ut, siquidem fieri possit, transformatio per substitutionem realem succedat. Id quod accuratius examinemus.

Ponamus quantitates $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reales esse omnes, sit porro $\alpha>\beta>\gamma>\delta$, ita ut $\alpha-\beta$, $\alpha-\gamma$, $\alpha-\delta$ sint quantitates positivae. Iam distinguendum erit pro limitibus, inter quos valor argumenti y continetur:

1) δ et γ, 2) γ et β, 3) β et α, 4) α et δ.

Casu postremo transitum ab α ad δ per infinitum fieri puta. Expressionem

$$\frac{1}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$$

non nisi casu secundo et quarto, expressionem

$$\frac{1}{\sqrt{-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$$

non nisi casu primo et tertio realem fieri videmus. Substitutiones reales, quae quatuor illis casibus respondent, tabula I. indicabit. Deinde tabula II. formulas amplectamur, quae expressioni

$$\frac{dy}{\sqrt{\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)}}$$

per substitutionem realem in simpliciorem transformandae inserviunt, pro limitibus, inter quos valor argumenti y continetur:

1) $-\infty$ et γ, 2) γ et β, 3) β et α, 4) α et $+\infty$.

Quas formulas, dividendo intra radices per $-\delta$ ac tum ponendo $\delta = \infty$, facile e tabula I. derivare licet.

TABULA I.

(A.)
$$\frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(L^4-N^4x^2)}}$$

$$L = \frac{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}+\sqrt[4]{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}}{2}, \qquad N = \frac{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}-\sqrt[4]{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}}{2}$$

(I.) Limites: $\alpha \,.\,.\, \pm\infty \,.\,.\, \delta$: $\dfrac{L-Nx}{L+Nx} = \sqrt[4]{\dfrac{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\gamma-\delta)}}\cdot\sqrt{\dfrac{y-\gamma}{y-\beta}}$

(II.) Limites: $\gamma \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \beta$: $\dfrac{L-Nx}{L+Nx} = \sqrt[4]{\dfrac{(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha-y}{y-\delta}}$.

(B.)
$$\frac{dy}{\sqrt{-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(L^4-N^4x^2)}}$$

$$L = \frac{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}+\sqrt[4]{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}{2}, \qquad N = \frac{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}-\sqrt[4]{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}{2}$$

(I.) Limites: $\beta \,.\,.\,.\,.\,.\, \alpha$: $\dfrac{L-Nx}{L+Nx} = \sqrt[4]{\dfrac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}}\cdot\sqrt{\dfrac{y-\delta}{y-\gamma}}$

(II.) Limites: $\delta \,.\,.\,.\,.\,.\, \gamma$: $\dfrac{L-Nx}{L+Nx} = \sqrt[4]{\dfrac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}}\cdot\sqrt{\dfrac{\beta-y}{\alpha-y}}$.

TABULA II.

(A.)
$$\frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(L^4-N^4x^2)}}$$

$$L = \frac{\sqrt[4]{\alpha-\gamma}+\sqrt[4]{\alpha-\beta}}{2}, \qquad N = \frac{\sqrt[4]{\alpha-\gamma}-\sqrt[4]{\alpha-\beta}}{2}$$

(I.) Limites: $\alpha \,.\,.\,.\, +\infty$: $\dfrac{L-Nx}{L+Nx} = \sqrt[4]{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\cdot\sqrt{\dfrac{y-\gamma}{y-\beta}}$

(II.) Limites: $\gamma \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \beta$: $\dfrac{L-Nx}{L+Nx} = \dfrac{\sqrt{\alpha-y}}{\sqrt[4]{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}$.

(B.)
$$\frac{dy}{\sqrt{-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(L^4-N^4x^2)}}$$

$$L = \frac{\sqrt[4]{\alpha-\gamma}+\sqrt[4]{\beta-\gamma}}{2}, \qquad N = \frac{\sqrt[4]{\alpha-\gamma}-\sqrt[4]{\beta-\gamma}}{2}$$

(I.) Limites: $\beta \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \alpha$: $\dfrac{L-Nx}{L+Nx} = \dfrac{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}{\sqrt{y-\gamma}}$

(II.) Limites: $-\infty \,.\,.\,.\, \gamma$: $\dfrac{L-Nx}{L+Nx} = \sqrt[4]{\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}\cdot\sqrt{\dfrac{\beta-y}{\alpha-y}}$.

9.

In formulis hisce pro limitibus assignatis simul x a -1 usque ad $+1$ atque y ab altero limite ad alterum transit. Limitibus autem, qui formulis (I.) et (II.) respondent, inter se commutatis, expressioni $\frac{L-Nx}{L+Nx}$ videmus valorem imaginarium creari formae $\pm iR$, posito $i=\sqrt{-1}$ ac designante R quantitatem aliquam realem, ipsi x autem conciliari formam $\frac{Le^{i\varphi}}{N} = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{k}}$, unde

$$\frac{L-Nx}{L+Nx} = \frac{1-e^{i\varphi}}{1+e^{i\varphi}} = \frac{e^{-\frac{i\varphi}{2}}-e^{\frac{i\varphi}{2}}}{e^{-\frac{i\varphi}{2}}+e^{\frac{i\varphi}{2}}} = -i\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}.$$

Formam, ad quam hac occasione delati sumus, $x = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{k}}$ in expressione $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ substituamus. Prodit:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{ie^{i\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{e^{2i\varphi}}{k}\right)\left(1-ke^{2i\varphi}\right)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1-ke^{2i\varphi}\right)\left(1-ke^{-2i\varphi}\right)}}$$

$$= \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2k\cos 2\varphi+kk}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k)^2\cos^2\varphi+(1+k)^2\sin^2\varphi}}.$$

Quae nobis quidem substitutio satis memorabilis esse videtur. E qua etiam generalior formula fluit sequens, ponendo $x=\sin\psi$:

$$\frac{k^n\sin^{2n}\psi\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \frac{(\cos 2n\varphi+i\sin 2n\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-2k\cos 2\varphi+kk}},$$

unde pro limitibus 0 et π obtinetur, evanescente parte imaginaria:

$$\int_0^\pi \frac{k^n\sin^{2n}\psi\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^\pi \frac{\cos 2n\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-2k\cos 2\varphi+kk}} = \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-2k\cos\varphi+kk}},$$

quae est demonstratio succincta formulae memorabilis a Cl°. Legendre proditae. E tabulis I. et II. duas alias derivare licet sequentes, commutatis limitibus, inter quos valor ipsius y continetur, ac posito $x = \frac{Le^{i\varphi}}{N}$. Pro limitibus assignatis angulus φ inde a 0 usque ad π crescit, dum y ab altero limite ad alterum transit.

TABULA III.

(A.) $$\frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi}}$$

$$m = \sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}, \qquad n = \frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}+\sqrt{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}}{2}$$

(I.) Limites: $\gamma \ldots\ldots\ldots \beta$: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\gamma-\delta)}}\cdot\sqrt{\frac{y-\gamma}{\beta-y}}$

(II.) Limites: $\alpha \ldots \pm\infty \ldots \delta$: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{\frac{(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}\cdot\sqrt{\frac{y-\alpha}{y-\delta}}$.

(B.) $$\frac{dy}{\sqrt{-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi}}$$

$$m = \sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}, \qquad n = \frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}+\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}}{2}$$

(I.) Limites: $\delta \ldots\ldots \gamma$: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}}\cdot\sqrt{\frac{y-\delta}{\gamma-y}}$

(II.) Limites: $\beta \ldots\ldots \alpha$: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}}\cdot\sqrt{\frac{y-\beta}{\alpha-y}}$.

TABULA IV.

(A.) $$\frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi}}$$

$$m = \sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}, \qquad n = \frac{\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\alpha-\beta}}{2}$$

(I.) Limites: $\gamma \ldots\ldots \beta$: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\cdot\sqrt{\frac{y-\gamma}{\beta-y}}$

(II.) Limites: $\alpha \ldots +\infty$: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{y-\alpha}}{\sqrt[4]{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}$.

(B.) $$\frac{dy}{\sqrt{-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi}}$$

$$m = \sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}, \qquad n = \frac{\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma}}{2}$$

(I.) Limites: $-\infty \ldots \gamma$: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt[4]{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}{\sqrt{\gamma-y}}$

(II.) Limites: $\beta \ldots \alpha$: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}\cdot\sqrt{\frac{y-\beta}{\alpha-y}}$.

Fusius hanc quaestionem tractavimus, ut adesset exemplum elaboratum. Restant adhuc casus, quibus quantitatum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vel duae vel quatuor imaginariae sunt. Casus prior et ipse solutionem realem admittit, quae tamen specie imaginarii laborat. Casus posterior eiusmodi solutionem realem omnino non admittit. Quare ut omnia ad realia revocentur, novis transformationibus opus erit, unde concinnitas formularum perit. Cui igitur quaestioni supersedemus.

Substitutioni propositae alia respondet, eius inversa, formae

$$x = \frac{a+a'y+a''y^2}{b+b'y+b''y^2},$$

quae et ipsa formulas elegantissimas suppeditat. Cum vero fortasse iam nimis diu huic quaestioni immorari videamur, eius investigationem ad aliam occasionem relegamus. Revertimur ad quaestiones generales.

DE TRANSFORMATIONE EXPRESSIONIS $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}$ IN ALIAM EIUS SIMILEM $\frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$.

10.

Vidimus datam expressionem:

$$\frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4}}$$

per substitutionem adhibitam huiusmodi:

$$y = \frac{a+a'x+a''x^2+\cdots\cdots+a^{(p)}x^p}{b+b'x+b''x^2+\cdots\cdots+b^{(p)}x^p} = \frac{U}{V},$$

quicunque sit numerus p, in aliam eius similem transformari posse:

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}.$$

Eiusmodi substitutio cum a datis coefficientibus A', B', C', D', E' pendet tum vero maxime a numero p, quippe qui exponentem designet dignitatis summae, quae in functionibus rationalibus U, V invenitur. Quamobrem in sequentibus dicemus eiusmodi substitutionem seu transformationem p^{ti} *ordinis esse sive ad* p^{tum} *ordinem sive simplicius ad numerum* p *pertinere.*

Iam indolem harum substitutionum accuratius examinaturi, missam faciamus formam illam complexiorem:

$$\frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4}},$$

ac quaeramus de simpliciore hac $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}$, ad quam illam revocari posse et vidimus et notum est, in aliam eius similem $\frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ transformanda.

Quaestionis propositae natura rite perpensa, problemati satisfieri invenitur, siquidem functionum U, V altera impar, altera par esse statuatur, id quod iam exempla innuunt ab analystis hactenus explorata. Qua in re maxime distinguendum erit inter casum, quo imparis functionis ordo paris ordine minor, et eum, quo maior est paris ordine, sive inter casum, quo transformatio ad numerum parem, et eum, quo ad numerum imparem pertinet.

Iam igitur *primum* probemus transformationem succedere, adhibita substitutione ordinis paris seu formae:

$$y = \frac{x(a+a'x^2+a''x^4+\cdots+a^{(m-1)}x^{2m-2})}{1+b'x^2+b''x^4+\cdots+b^{(m)}x^{2m}} = \frac{U}{V}.$$

Hic functiones $V+U$, $V-U$, $V+\lambda U$, $V-\lambda U$ et ipsae erunt ordinis paris, unde ponamus:

$$\begin{array}{ll}
(1.) & V+U = (1+x)(1+kx)AA \\
(2.) & V-U = (1-x)(1-kx)BB \\
(3.) & V+\lambda U = CC \\
(4.) & V-\lambda U = DD,
\end{array}$$

designantibus A, B, C, D functiones elementi x rationales integras. Quibus aequationibus simulac satisfactum erit, eruetur, uti probavimus:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Mutato x in $-x$ cum U in $-U$ abeat, V autem non mutetur, ex aequationibus (1.), (3.) reliquae (2.), (4.) sponte fluunt. Ut aequationibus (1.), (3.) satisfiat, $V+\lambda U$ debet m vicibus, $V+U$ autem $m-1$ vicibus duos inter se aequales habere factores lineares; insuper ipsi $V+U$ etiam factor $1+x$ assignari debet. Quae omnia aequationes conditionales sibi poscunt numero $m+m-1+1 = 2m$,

qui et ipse est numerus indeterminatarum $a, a', \ldots a^{(m-1)}$; $b', b'', \ldots b^{(m)}$. Unde problema propositum est determinatum.

Secundo loco probemus succedere etiam transformationem, adhibita substitutione huiusmodi:

$$y = \frac{x(a+a'x^2+a''x^4+\ldots.+a^{(m)}x^{2m})}{1+b'x^2+b''x^4+\ldots.+b^{(m)}x^{2m}} = \frac{U}{V},$$

quae ad numerum imparem pertinet. Hic $V+U$, $V-U$, $V+\lambda U$, $V-\lambda U$ et ipsae sunt imparis ordinis, unde ponamus:

$$\begin{array}{ll}
(1.) & V+U = (1+x)AA \\
(2.) & V-U = (1-x)BB \\
(3.) & V+\lambda U = (1+kx)CC \\
(4.) & V-\lambda U = (1-kx)DD.
\end{array}$$

Hic quoque solummodo aequationibus (1.), (3.) satisfaciendum erit, quippe e quibus mutando x in $-x$ duae reliquae sponte manant. Ut illis satisfiat, et $V+U$ et $V+\lambda U$ singulae m vicibus duos inter se aequales habeant factores lineares necesse est, quem in finem $2m$ aequationibus conditionalibus satisfaciendum erit, quibus una accedit, ut insuper $V+U$ nanciscatur factorem $(1+x)$. Hinc numerum aequationum conditionalium esse videmus $2m+1$, qui et ipse est numerus indeterminatarum $a, a', a'', \ldots a^{(m)}$; $b', b'', \ldots b^{(m)}$. Unde et hoc casu determinatum est problema.

11.

Designentur per U', V' functiones elementi y integrae rationales eiusmodi, ut, posito $z = \frac{U'}{V'}$, eruatur:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2z^2)}} = \frac{dy}{M'\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}.$$

Sit ea, quae adhibita est, substitutio $z = \frac{U'}{V'}$ ordinis p'^{ti}, ac per aliam substitutionem $y = \frac{U}{V}$ (designantibus U, V, ut supra, functiones elementi x rationales integras), quae sit ordinis p^{ti}, eruatur, ut supra:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Iam substituto valore $y = \frac{U}{V}$ in expressione $z = \frac{U'}{V'}$, nascatur $z = \frac{U''}{V''}$: erit una illa substitutio $z = \frac{U''}{V''}$, qua adhibita eruitur:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2 z^2)}} = \frac{dx}{MM'\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

ordinis $(pp')^{\text{ti}}$. Ita videmus, e pluribus transformationibus, quae resp. ad numeros $p, p', p'', \ldots$ pertinent, successive adhibitis, unam componi posse, quae ad numerum $pp'p'' \ldots$ pertinet. Nec non vice versa, quod tamen in praesentia non probabimus, transformationem, quae ad numerum aliquem compositum $pp'p'' \ldots$ pertinet, semper ex aliis successive adhibitis componere licet, quae resp. ad numeros $p, p', p'', \ldots$ pertinent. Quamobrem eas tantummodo investigari oportet transformationes, quae ad numerum pertineant *primum*, quippe e quibus cunctas componere liceat reliquas. Iam igitur in sequentibus missum faciamus casum primum, qui ordinem transformationis parem spectat, quippe quem semper componere liceat e transformatione imparis ordinis et transformatione, quae ad numerum 2 pertinet, identidem, ubi opus erit, repetita. Casum *secundum* autem seu transformationes imparis ordinis iam propius examinemus.

12.

Videmus eo casu functiones duas, alteram V parem $2m^{\text{ti}}$ ordinis, alteram U imparem $(2m+1)^{\text{ti}}$ ordinis ita determinandas esse, ut sit:

$$V + U = (1+x)AA, \qquad V + \lambda U = (1+kx)CC.$$

Iam dico, si quidem ita functiones U, V determinentur, ut, loco x posito $\frac{1}{kx}$, abeat $y = \frac{U}{V}$ in $\frac{1}{\lambda y} = \frac{V}{\lambda U}$, aequationes illas alteram ex altera sponte sequi.

Ponamus $V = \varphi(x^2)$, $U = xF(x^2)$; videmus expressionem $y = \frac{xF(x^2)}{\varphi(x^2)}$, loco x posito $\frac{1}{kx}$, abire in

$$\frac{F\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)}{kx\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)} = \frac{x^{2m}F\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)}{kx \,.\, x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)},$$

ubi $x^{2m}F\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)$, $x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)$ sunt functiones integrae. Quod ut aequale fiat expressioni $\frac{1}{\lambda y} = \frac{V}{\lambda U} = \frac{\varphi(x^2)}{\lambda x F(x^2)}$, sequentes obtinere debent aequationes:

$$\varphi(x^2) = px^{2m}F\left(\frac{1}{k^2x^2}\right), \qquad \lambda F(x^2) = pkx^{2m}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right),$$

designante p quantitatem constantem. Ubi in his aequationibus rursus ponimus $\frac{1}{kx}$ loco x, nanciscimur: $\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) = \frac{p}{k^{2m}x^{2m}}F(x^2)$, $\qquad \lambda F\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) = \frac{pk}{k^{2m}x^{2m}}\varphi(x^2)$. Quibus cum prioribus comparatis aequationibus, obtinemus $\frac{p}{k^{2m}} = \frac{\lambda}{pk}$, unde $p = \sqrt{\lambda k^{2m-1}}$. Hinc fit:

$$\varphi(x^2) = \sqrt{\lambda k^{2m-1}}\,x^{2m}F\left(\frac{1}{k^2x^2}\right), \quad F(x^2) = \sqrt{\frac{k^{2m+1}}{\lambda}}\,x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right),$$

quarum aequationum altera ex altera sequitur.

Iam quoties expressio:

$$\frac{V+U}{1+x} = \frac{\varphi(x^2)+xF(x^2)}{1+x}$$

quadratum est functionis elementi x integrae rationalis, idem etiam valebit de altera, quae ex illa derivatur ponendo $\frac{1}{kx}$ loco x ac multiplicando per $\sqrt{\lambda k^{2m-1}}\,x^{2m}$. Quo facto obtinemus, *siquidem $\frac{V+U}{1+x}$ quadratum sit, functionem:*

$$\sqrt{\lambda k^{2m-1}}\,x^{2m}\,\frac{\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)+\frac{1}{kx}F\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)}{1+\frac{1}{kx}} = \frac{\sqrt{\lambda k^{2m-1}}\,x^{2m}F\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)+\sqrt{\lambda k^{2m+1}}\,x^{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)}{1+kx}$$

$$= \frac{\varphi(x^2)+\lambda xF(x^2)}{1+kx} = \frac{V+\lambda U}{1+kx}$$

et ipsam quadratum fore. Q. D. E.

Itaque eo revocatum est problema, ut expressio:

$$\frac{\varphi(x^2)+\sqrt{\frac{k^{2m+1}}{\lambda}}\,x^{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)}{1+x} = \frac{V+U}{1+x}$$

quadratum reddatur, designante $\varphi(x^2)$ expressionem huiusmodi:

$$\varphi(x^2) = V = 1 + b'x^2 + b''x^4 + \cdots + b^{(m)}x^{2m}.$$

Fit autem, posito $U = xF(x^2) = x(a + a'x^2 + a''x^4 + \cdots + a^{(m)}x^{2m})$,

cum sit $\qquad U = xF(x^2) = \sqrt{\frac{k^{2m+1}}{\lambda}}\,x^{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)$:

$$(*)\begin{cases} \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\cdot\frac{b^{(m)}}{k^m}, \qquad a' = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\cdot\frac{b^{(m-1)}}{k^{m-2}}, \qquad a'' = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\cdot\frac{b^{(m-2)}}{k^{m-4}}, \ldots \\ a^{(m)} = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\cdot k^m, \quad a^{(m-1)} = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\cdot b'k^{m-2}, \quad a^{(m-2)} = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\cdot b''k^{m-4}, \ldots \end{cases}$$

Iam ad exempla delabimur.

PROPONITUR TRANSFORMATIO TERTII ORDINIS.

13.

Sit $m = 1$, qui est casus simplicissimus, $V = 1 + b'x^2$, $U = x(a + a'x^2)$. Posito $A = 1 + \alpha x$, eruimus:

$$AA = (1+\alpha x)^2 = 1 + 2\alpha x + \alpha\alpha x^2,$$

unde:

$$V + U = (1+x)AA = 1 + (1+2\alpha)x + \alpha(2+\alpha)x^2 + \alpha\alpha x^3.$$

Hinc fit:

$$b' = \alpha(2+\alpha), \quad a = 1 + 2\alpha, \quad a' = \alpha\alpha.$$

Aequationes (✱) §. 12. in sequentes abeunt:

$$a = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \cdot \frac{b'}{k}, \quad a' = \sqrt{\frac{k^3}{\lambda}},$$

unde obtinemus:

$$1 + 2\alpha = \frac{\alpha(2+\alpha)}{\sqrt{k\lambda}}, \quad \alpha\alpha = \sqrt{\frac{k^3}{\lambda}}, \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{k^3}{\lambda}}.$$

Ponatur $\sqrt[4]{k} = u$, $\sqrt[4]{\lambda} = v$, erit $\alpha = \frac{u^3}{v}$, $1 + 2\alpha = \frac{v + 2u^3}{v}$, $\alpha(2+\alpha) = \frac{u^3(2v+u^3)}{v^2}$. Hinc aequatio:

$$1 + 2\alpha = \frac{\alpha(2+\alpha)}{\sqrt{k\lambda}}$$

abit in sequentem:

$$\frac{v + 2u^3}{v} = \frac{u(2v + u^3)}{v^4},$$

sive:

$$(1.) \qquad u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0.$$

Fit praeterea:

$$a = 1 + 2\alpha = \frac{v + 2u^3}{v}$$

$$a' = \alpha\alpha = \frac{u^6}{v^2}$$

$$b' = \alpha(2+\alpha) = \frac{u^3(2v+u^3)}{v^2} = vu^2(v + 2u^3).$$

Hinc obtinemus:

$$(2.) \qquad y = \frac{(v+2u^3)vx + u^6x^3}{v^2 + v^3u^2(v+2u^3)x^2}.$$

Praeterea obtinemus, quia $1 + y = \frac{(1+x)AA}{V}$:

$$(3.) \qquad 1 + y = \frac{(1+x)(v+u^3x)^2}{v^2 + v^3u^2(v+2u^3)x^2}$$

$$(4.) \qquad 1 - y = \frac{(1-x)(v-u^3x)^2}{v^2 + v^3u^2(v+2u^3)x^2}$$

$$(5.) \qquad \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{v - u^3x}{v + u^3x}$$

$$(6.) \qquad \sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}.(v^2 - u^6x^2)}{v^2 + v^3u^2(v+2u^3)x^2}.$$

Porro loco x ponendo $\frac{1}{kx} = \frac{1}{u^4x}$, cum y abeat in $\frac{1}{\lambda y} = \frac{1}{v^4y}$, eruimus sequentium formularum systema:

$$(7.) \qquad 1 + v^4y = \frac{(1+u^4x)(1+uvx)^2}{1 + vu^2(v+2u^3)x^2}$$

$$(8.) \qquad 1 - v^4y = \frac{(1-u^4x)(1-uvx)^2}{1 + vu^2(v+2u^3)x^2}$$

$$(9.) \qquad \sqrt{\frac{1-v^4y}{1+v^4y}} = \sqrt{\frac{1-u^4x}{1+u^4x}} \cdot \frac{1-uvx}{1+uvx}$$

$$(10.) \qquad \sqrt{1-v^8y^2} = \frac{\sqrt{1-u^8x^2}.(1-u^2v^2x^2)}{1 + vu^2(v+2u^3)x^2}.$$

14.

Posito

$$V + U = (1+x)AA, \qquad V + \lambda U = (1+kx)CC,$$
$$V - U = (1-x)BB, \qquad V - \lambda U = (1-kx)DD,$$

vidimus, fieri:

$$ABCD = M\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right),$$

designante M quantitatem constantem, quam ex unius eiusdem dignitatis coefficientis comparatione, in utraque expressione $ABCD$, $V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}$ instituta, eruere licet. Iam posito $V = b + b'x^2 +$ etc., $U = ax + a'x^3 +$ etc., in singulis expressionibus A, B, C, D fit constans $\sqrt{b}$, unde in producto ex iis conflato bb, in expressione autem $V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}$ constantem fieri videmus ab, unde:

$$M = \frac{b}{a}.$$

Hinc in exemplo nostro fit, quia $b = 1$, $a = \frac{v+2u^3}{v} = \frac{u(2v+u^3)}{v^4}$:

$$M = \frac{v}{v+2u^3} = \frac{v^4}{u(2v+u^3)},$$

unde:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-v^8y^2)}} = \frac{(v+2u^3)}{v} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-u^8x^2)}}.$$

Moduli k, λ, quos per aequationem quarti gradus a se invicem pendere vidimus §. 13. (1.), facile per eandem quantitatem α rationaliter exprimuntur. E formulis enim supra allatis:

$$\alpha = \frac{u^3}{v}, \quad 1+2\alpha = \frac{\alpha(2+\alpha)}{\sqrt{k\lambda}} = \frac{\alpha(2+\alpha)}{u^2v^2}$$

sequitur:

$$\alpha = \frac{u^3}{v}, \quad u^2v^2 = \frac{\alpha(2+\alpha)}{1+2\alpha},$$

unde:

$$u^8 = \frac{\alpha^3(2+\alpha)}{1+2\alpha} = k^2, \qquad v^8 = \alpha\left(\frac{2+\alpha}{1+2\alpha}\right)^3 = \lambda^2.$$

Fit insuper: $M = \frac{1}{1+2\alpha}$, unde, posito $y = \sin T'$, $x = \sin T$, aequatio:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

in sequentem abit:

$$\frac{dT'}{\sqrt{(1+2\alpha)^3-\alpha(2+\alpha)^3\sin^2 T'}} = \frac{dT}{\sqrt{1+2\alpha-\alpha^3(2+\alpha)\sin^2 T}},$$

sive in hanc:

$$\frac{dT'}{\sqrt{(1+2\alpha)^3\cos^2 T'+(1-\alpha)^3(1+\alpha)\sin^2 T'}} = \frac{dT}{\sqrt{(1+2\alpha)\cos^2 T+(1+\alpha)^3(1-\alpha)\sin^2 T}},$$

ad quam pervenitur, substitutione facta:

$$\sin T' = \frac{(1+2\alpha)\sin T+\alpha^2\sin^3 T}{1+\alpha(2+\alpha)\sin^2 T}.$$

PROPONITUR TRANSFORMATIO QUINTI ORDINIS.

15.

Iam ad exemplum, quod simplicitate proximum est, transeamus, in quo $m = 2$,

$$V = 1+b'x^2+b''x^4, \quad U = x(a+a'x^2+a''x^4), \quad A = 1+\alpha x+\beta x^2.$$

Eruimus:

$$AA = 1+2\alpha x+(2\beta+\alpha\alpha)x^2+2\alpha\beta x^3+\beta\beta x^4,$$

unde:

$$AA(1+x) = 1+x(1+2\alpha)+x^2(2\alpha+2\beta+\alpha\alpha)+x^3(2\beta+\alpha\alpha+2\alpha\beta)+x^4(2\alpha\beta+\beta\beta)+\beta\beta x^5.$$

Hinc nanciscimur:

$$b' = 2\alpha+2\beta+\alpha\alpha, \quad b'' = \beta(2\alpha+\beta)$$
$$a = 1+2\alpha, \quad a' = 2\beta+\alpha\alpha+2\alpha\beta, \quad a'' = \beta\beta.$$

Aequationes (*) §. 12. fiunt:

$$a = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \cdot \frac{b''}{k^2}, \quad a' = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \cdot b', \quad a'' = \sqrt{\frac{k^5}{\lambda}}.$$

Ex his sequitur:

$$\frac{a'a'}{aa''} = \frac{b'b'}{b''},$$

sive, cum habeatur $b' = (2\alpha+\beta)+(\beta+\alpha\alpha)$, $a' = \beta(1+2\alpha)+(\beta+\alpha\alpha)$.

$$\frac{[(2\alpha+\beta)+(\beta+\alpha\alpha)]^2}{2\alpha+\beta} = \frac{[\beta(1+2\alpha)+(\beta+\alpha\alpha)]^2}{\beta(1+2\alpha)},$$

unde:

$$2\alpha+\beta+\frac{(\beta+\alpha\alpha)^2}{2\alpha+\beta} = \beta(1+2\alpha)+\frac{(\beta+\alpha\alpha)^2}{\beta(1+2\alpha)}.$$

Hinc facile sequitur:

$$\beta(1+2\alpha)(2\alpha+\beta) = (\beta+\alpha\alpha)^2,$$

quod evolutum ac per α divisum abit in:

$$\alpha^3 = 2\beta(1+\alpha+\beta).$$

Hanc aequationem his etiam duobus modis repraesentare licet:

$$\begin{aligned}(\alpha\alpha+\beta)(\alpha-2\beta) &= \beta(2-\alpha)(1+2\alpha)\\ (\alpha\alpha+\beta)(2-\alpha) &= (\alpha-2\beta)(2\alpha+\beta),\end{aligned}$$

unde sequitur:

$$\left(\frac{2-\alpha}{\alpha-2\beta}\right)^2 = \frac{2\alpha+\beta}{\beta(1+2\alpha)}.$$

His praeparatis, reliqua facile transiguntur. Invenimus enim, posito $k = u^4$, $\lambda = v^4$:

$$\frac{2\alpha+\beta}{\beta(1+2\alpha)} = \frac{b''}{aa''} = \frac{b'b'}{a'a'} = \frac{\lambda}{k} = \frac{v^4}{u^4},$$

unde etiam:

$$\frac{2-\alpha}{\alpha-2\beta} = \frac{v^2}{u^2}.$$

Est insuper $\beta = \sqrt{a''} = \sqrt[4]{\frac{k^5}{\lambda}} = \frac{u^5}{v}$, unde aequationes:

$$\frac{v^4}{u^4} = \left(\frac{2-\alpha}{\alpha-2\beta}\right)^2 = \frac{2\alpha+\beta}{\beta(1+2\alpha)}, \qquad \frac{2-\alpha}{\alpha-2\beta} = \frac{v^2}{u^2}$$

in sequentes abeunt:

$$\begin{aligned}2\alpha v+u^5 &= uv^4(1+2\alpha)\\ u^2(2-\alpha) &= v(v\alpha-2u^5),\end{aligned}$$

sive:

$$\begin{aligned}2\alpha v(1-uv^3) &= u(v^4-u^4)\\ \alpha(v^2+u^2) &= 2u^2(1+u^3v),\end{aligned}$$

unde:

$$(u^2+v^2)(u^4-v^4)+4uv(1+u^3v)(1-uv^3) = 0.$$

Facta evolutione, prodit:

$$(1.)\qquad u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4) = 0.$$

Reliqua ita inveniuntur. Ex aequationibus:

$$\begin{aligned}2\alpha v(1-uv^3) &= u(v^4-u^4)\\ \alpha(u^2+v^2) &= 2u^2(1+u^3v)\end{aligned}$$

sequitur:

$$\alpha = \frac{u(v^4-u^4)}{2v(1-uv^3)} = \frac{2u^2(1+u^3v)}{u^2+v^2}.$$

Hinc fit:

$$\begin{aligned}a &= 1+2\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{v-u^5}{1-uv^3}\right)\\ \beta+2\alpha &= \frac{u^5}{v}+2\alpha = uv^2\left(\frac{v-u^5}{1-uv^3}\right)\\ \alpha-2\beta &= \alpha-\frac{2u^5}{v} = \frac{2u^2}{v}\left(\frac{v-u^5}{u^2+v^2}\right)\\ 2-\alpha &= 2v\left(\frac{v-u^5}{u^2+v^2}\right)\\ \alpha\alpha+\beta &= \frac{(\alpha-2\beta)(2\alpha+\beta)}{2-\alpha} = u^3\left(\frac{v-u^5}{1-uv^3}\right).\end{aligned}$$

Hinc tandem deducitur:

$$\begin{aligned}b' &= \beta+2\alpha+\alpha\alpha+\beta = \frac{u(u^2+v^2)(v-u^5)}{1-uv^3}\\ b'' &= \frac{u^5}{v}(2\alpha+\beta) = u^6v\left(\frac{v-u^5}{1-uv^3}\right)\\ a &= \frac{1}{v}\left(\frac{v-u^5}{1-uv^3}\right)\\ a' &= \frac{u^2}{v^2}\cdot b' = u^3\left(\frac{u^2+v^2}{v^2}\right)\left(\frac{v-u^5}{1-uv^3}\right)\\ a'' &= \frac{u^{10}}{v^2}.\end{aligned}$$

Iam cum sit $M = \frac{1}{a} = v\left(\frac{1-uv^3}{v-u^5}\right)$, transformatio quinti ordinis continebitur theoremate sequente:

Theorema.

Posito:

$$(1.)\qquad u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4) = 0$$

$$(2.)\qquad y = \frac{v(v-u^5)x+u^3(u^2+v^2)(v-u^5)x^3+u^{10}(1-uv^3)x^5}{v^2(1-uv^3)+uv^2(u^2+v^2)(v-u^5)x^2+u^6v^3(v-u^5)x^4},$$

fit:

$$\frac{v(1-uv^3)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-v^8y^2)}} = \frac{(v-u^5)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-u^8x^2)}}.$$

QUOMODO TRANSFORMATIONE BIS ADHIBITA PERVENITUR AD MULTIPLICATIONEM.

16.

Inspicientem aequationes inter u et v duobus exemplis propositis inventas:

$$u^4-v^4+2uv(1-u^2v^2) = 0$$
$$u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4) = 0,$$

fugere non potest, immutatas eas manere, ubi u loco v, loco u autem $-v$ ponitur. Hinc e theoremate exemplo primo invento, videlicet posito:

$$u^4-v^4+2uv(1-u^2v^2) = 0$$
$$y = \frac{v(v+2u^3)x+u^6x^3}{v^2+v^3u^2(v+2u^3)x^2},$$

fieri:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-v^8y^2)}} = \frac{v+2u^3}{v}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-u^8x^2)}},$$

alterum statim derivatur hoc, posito:

$$z = \frac{u(u-2v^3)y+v^6y^3}{u^2+u^3v^2(u-2v^3)y^2},$$

fieri:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-u^8z^2)}} = \frac{u-2v^3}{u}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-v^8y^2)}}.$$

Iam vero est:

$$\left(\frac{v+2u^3}{v}\right)\left(\frac{u-2v^3}{u}\right) = \frac{2(u^4-v^4)+uv(1-4u^2v^2)}{uv} = -3,$$

unde sequitur:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-u^8z^2)}} = \frac{-3dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-u^8x^2)}}.$$

Ut loco -3 eruatur $+3$, sive z in $-z$, sive x in $-x$ mutari debet.

Simili modo e theoremate exemplo secundo proposito alterum deducitur, videlicet posito:

$$z = \frac{u(u+v^5)y-v^3(u^2+v^2)(u+v^5)y^3+v^{10}(1+u^3v)y^5}{u^2(1+u^3v)-u^2v(u^2+v^2)(u+v^5)y^2+u^3v^6(u+v^5)y^4},$$

erui:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-u^8z^2)}} = \frac{u+v^5}{u(1+u^3v)}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-v^8y^2)}}.$$

Iam cum ex aequatione:

$$u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4) = 0$$

sequatur:

$$\frac{(u+v^5)(v-u^5)}{uv(1+u^3v)(1-uv^3)} = \frac{uv(1-u^4v^4)-(u^6-v^6)}{uv(1+u^3v)(1-uv^3)} = 5,$$

fieri videmus:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-u^8z^2)}} = \frac{5dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-u^8x^2)}}.$$

Ita transformatione bis adhibita pervenitur ad multiplicationem.

Haec duo exempla, videlicet transformationes tertii et quinti ordinis, iam prius in litteris exhibui, quas mense Iunio a. 1827 ad Cl^{m}. Schumacher dedi. Vide *Nova Astronomica* Nr. 123. Nec non ibidem methodi, qua eruta sunt, generalitatem praedicabam. Alterum biennio ante iam a Cl^{o}. Legendre inventum erat.

DE NOTATIONE NOVA FUNCTIONUM ELLIPTICARUM.

17.

Missis factis quaestionibus algebraicis, accuratius inquiramus in naturam analyticam functionum nostrarum. Antea autem notationis modum, cuius in sequentibus usus erit, indicemus necesse est.

Posito $\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u$, angulum φ *amplitudinem* functionis u vocare geometrae consueverunt. Hunc igitur angulum in sequentibus denotabimus per ampl u seu brevius per:

$$\varphi = \operatorname{am} u.$$

Ita, ubi

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

erit:

$$x = \sin\operatorname{am} u.$$

Insuper posito:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = K,$$

vocabimus $K-u$ complementum functionis u; complementi amplitudinem designabimus per *coam*, ita ut sit:

$$\mathrm{am}(K-u) = \mathrm{coam}\, u.$$

Expressionem $\sqrt{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{d\, \mathrm{am}\, u}{du}$, duce Cl°. Legendre, denotabimus per:

$$\Delta \mathrm{am}\, u = \sqrt{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u}.$$

Complementum, quod vocatur a Cl°. Legendre, moduli k designabo per k', ita ut sit:

$$kk + k'k' = 1.$$

Porro e notatione nostra erit:

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'k'\sin^2\varphi}}.$$

Modulus, qui subintelligi debet, ubi opus erit, sive uncis inclusus addetur sive in margine adiicietur. Modulo non addito, in sequentibus eundem ubique modulum k subintelligas.

Ipsas expressiones $\sin \mathrm{am}\, u$, $\sin \mathrm{coam}\, u$, $\cos \mathrm{am}\, u$, $\cos \mathrm{coam}\, u$, $\Delta \mathrm{am}\, u$, $\Delta \mathrm{coam}\, u$ etc. ac generaliter *functiones trigonometricas amplitudinis* in sequentibus *functionum ellipticarum* nomine insignire convenit, ita ut ei nomini aliam quandam tribuamus notionem atque hactenus factum est ab analystis. Ipsam u dicemus *argumentum functionis ellipticae*, ita ut, posito $x = \sin \mathrm{am}\, u$, sit $u = \arg \sin \mathrm{am}\, x$. E notatione proposita erit:

$$\sin \mathrm{coam}\, u = \frac{\cos \mathrm{am}\, u}{\Delta \mathrm{am}\, u}$$

$$\cos \mathrm{coam}\, u = \frac{k' \sin \mathrm{am}\, u}{\Delta \mathrm{am}\, u}$$

$$\Delta \mathrm{coam}\, u = \frac{k'}{\Delta \mathrm{am}\, u}$$

$$\mathrm{tg}\, \mathrm{coam}\, u = \frac{1}{k' \mathrm{tg}\, \mathrm{am}\, u}$$

$$\mathrm{cotg}\, \mathrm{coam}\, u = \frac{k'}{\mathrm{cotg}\, \mathrm{am}\, u}.$$

FORMULAE IN ANALYSI FUNCTIONUM ELLIPTICARUM FUNDAMENTALES.

18.

Ponamus $\mathrm{am}\, u = a$, $\mathrm{am}\, v = b$, $\mathrm{am}(u+v) = \sigma$, $\mathrm{am}(u-v) = \vartheta$; notae sunt formulae additionis et subtractionis functionum ellipticarum fundamentales:

$$\sin\sigma = \frac{\sin a \cos b \Delta b + \sin b \cos a \Delta a}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\cos\sigma = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b \Delta a \Delta b}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta a \Delta b - k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sin a \cos b \Delta b - \sin b \cos a \Delta a}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\cos\vartheta = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b \Delta a \Delta b}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\Delta\vartheta = \frac{\Delta a \Delta b + k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b}.$$

Ut in promptu sint omnia, quorum in posterum usus erit, adnotemus adhuc formulas sequentes, quae facile demonstrantur, et quarum facile augetur numerus:

$$\sin\sigma + \sin\vartheta = \frac{2 \sin a \cos b \Delta b}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b} \tag{1.}$$

$$\cos\sigma + \cos\vartheta = \frac{2 \cos a \cos b}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b} \tag{2.}$$

$$\Delta\sigma + \Delta\vartheta = \frac{2 \Delta a \Delta b}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b} \tag{3.}$$

$$\sin\sigma - \sin\vartheta = \frac{2 \sin b \cos a \Delta a}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b} \tag{4.}$$

$$\cos\vartheta - \cos\sigma = \frac{2 \sin a \sin b \Delta a \Delta b}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b} \tag{5.}$$

$$\Delta\vartheta - \Delta\sigma = \frac{2 k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b}{1-k^2\sin^2 a \sin^2 b} \tag{6.}$$

$$\sin\sigma\,\sin\vartheta = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{7.}$$

$$1+k^2\sin\sigma\,\sin\vartheta = \frac{\Delta^2 b + k^2\sin^2 a\cos^2 b}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{8.}$$

$$1+\sin\sigma\,\sin\vartheta = \frac{\cos^2 b + \sin^2 a\,\Delta^2 b}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{9.}$$

$$1+\cos\sigma\cos\vartheta = \frac{\cos^2 a + \cos^2 b}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{10.}$$

$$1+\Delta\sigma\,\Delta\vartheta = \frac{\Delta^2 a + \Delta^2 b}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{11.}$$

$$1-k^2\sin\sigma\,\sin\vartheta = \frac{\Delta^2 a + k^2\sin^2 b\cos^2 a}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{12.}$$

$$1-\sin\sigma\,\sin\vartheta = \frac{\cos^2 a + \sin^2 b\,\Delta^2 a}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{13.}$$

$$1-\cos\sigma\cos\vartheta = \frac{\sin^2 a\,\Delta^2 b + \sin^2 b\,\Delta^2 a}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{14.}$$

$$1-\Delta\sigma\,\Delta\vartheta = \frac{k^2(\sin^2 a\cos^2 b + \sin^2 b\cos^2 a)}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{15.}$$

$$(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\vartheta) = \frac{(\cos b \pm \sin a\,\Delta b)^2}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{16.}$$

$$(1\pm\sin\sigma)(1\mp\sin\vartheta) = \frac{(\cos a \pm \sin b\,\Delta a)^2}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{17.}$$

$$(1\pm k\sin\sigma)(1\pm k\sin\vartheta) = \frac{(\Delta b \pm k\sin a\cos b)^2}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{18.}$$

$$(1\pm k\sin\sigma)(1\mp k\sin\vartheta) = \frac{(\Delta a \pm k\sin b\cos a)^2}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{19.}$$

$$(1\pm\cos\sigma)(1\pm\cos\vartheta) = \frac{(\cos a \pm \cos b)^2}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{20.}$$

$$(1\pm\cos\sigma)(1\mp\cos\vartheta) = \frac{(\sin a\,\Delta b \mp \sin b\,\Delta a)^2}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{21.}$$

$$(1\pm\Delta\sigma)(1\pm\Delta\vartheta) = \frac{(\Delta a \pm \Delta b)^2}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{22.}$$

$$(1\pm\Delta\sigma)(1\mp\Delta\vartheta) = \frac{k^2\sin^2(a\mp b)}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{23.}$$

$$\sin\sigma\cos\vartheta = \frac{\sin a\cos a\,\Delta b + \sin b\cos b\,\Delta a}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{24.}$$

$$\sin\vartheta\cos\sigma = \frac{\sin a\cos a\,\Delta b - \sin b\cos b\,\Delta a}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{25.}$$

$$\sin\sigma\,\Delta\vartheta = \frac{\cos b\sin a\,\Delta a + \cos a\sin b\,\Delta b}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{26.}$$

$$\sin\vartheta\,\Delta\sigma = \frac{\cos b\sin a\,\Delta a - \cos a\sin b\,\Delta b}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{27.}$$

$$\cos\sigma\,\Delta\vartheta = \frac{\cos a\cos b\,\Delta a\,\Delta b - k'k'\sin a\sin b}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{28.}$$

$$\cos\vartheta\,\Delta\sigma = \frac{\cos a\cos b\,\Delta a\,\Delta b + k'k'\sin a\sin b}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{29.}$$

$$\sin(\sigma+\vartheta) = \frac{2\sin a\cos a\,\Delta b}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{30.}$$

$$\sin(\sigma-\vartheta) = \frac{2\sin b\cos b\,\Delta a}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{31.}$$

$$\cos(\sigma+\vartheta) = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a\,\Delta^2 b}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b} \tag{32.}$$

$$\cos(\sigma-\vartheta) = \frac{\cos^2 b - \sin^2 b\,\Delta^2 a}{1-k^2\sin^2 a\,\sin^2 b}. \tag{33.}$$

DE IMAGINARIIS FUNCTIONUM ELLIPTICARUM VALORIBUS. PRINCIPIUM DUPLICIS PERIODI.

19.

Ponamus $\sin\varphi = i\,\mathrm{tg}\,\psi$, ubi i loco $\sqrt{-1}$ positum est more plerisque geometris usitato, erit $\cos\varphi = \sec\psi = \frac{1}{\cos\psi}$, unde $d\varphi = \frac{i\,d\psi}{\cos\psi}$. Hinc fit:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{i\,d\psi}{\sqrt{\cos^2\psi + k^2\sin^2\psi}} = \frac{i\,d\psi}{\sqrt{1-k'k'\sin^2\psi}}.$$

Quam e notatione nostra in hanc abire videmus aequationem:

$$\sin\mathrm{am}(iu,k) = i\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(u,k'). \tag{1.}$$

Hinc sequitur:

$$\cos\mathrm{am}(iu,k) = \sec\mathrm{am}(u,k') \tag{2.}$$

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(iu,k) = i\sin\mathrm{am}(u,k') \tag{3.}$$

$$\Delta\,\mathrm{am}(iu,k) = \frac{\Delta\,\mathrm{am}(u,k')}{\cos\mathrm{am}(u,k')} = \frac{1}{\sin\mathrm{coam}(u,k')} \tag{4.}$$

$$\sin\mathrm{coam}(iu,k) = \frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}(u,k')} \tag{5.}$$

$$\cos\mathrm{coam}(iu,k) = \frac{ik'}{k}\cos\mathrm{coam}(u,k') \tag{6.}$$

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{coam}(iu,k) = \frac{-i}{k'\sin\mathrm{am}(u,k')} \tag{7.}$$

$$\Delta\,\mathrm{coam}(iu,k) = k'\sin\mathrm{coam}(u,k'). \tag{8.}$$

Aliud, quod hinc fluit, formularum systema hoc est:

$$\sin\mathrm{am}\,2iK' = 0 \tag{9.}$$

$$\sin\mathrm{am}\,iK' = \infty, \text{ vel si placet } \pm i\infty \tag{10.}$$

$$\sin\mathrm{am}(u+2iK') = \sin\mathrm{am}\,u \tag{11.}$$

$$\cos\mathrm{am}(u+2iK') = -\cos\mathrm{am}\,u \tag{12.}$$

$$\Delta\,\mathrm{am}(u+2iK') = -\Delta\,\mathrm{am}\,u \tag{13.}$$

$$\sin\mathrm{am}(u+iK') = \frac{1}{k\sin\mathrm{am}\,u} \tag{14.}$$

$$\cos\mathrm{am}(u+iK') = \frac{-i\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{k\sin\mathrm{am}\,u} = \frac{-ik'}{k\cos\mathrm{coam}\,u} \tag{15.}$$

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(u+iK') = \frac{i}{\Delta\,\mathrm{am}\,u} \tag{16.}$$

$$\Delta\,\mathrm{am}(u+iK') = -i\,\mathrm{cotg}\,\mathrm{am}\,u \tag{17.}$$

$$\sin\mathrm{coam}(u+iK') = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{k\cos\mathrm{am}\,u} = \frac{1}{k\sin\mathrm{coam}\,u} \tag{18.}$$

$$\cos\mathrm{coam}(u+iK') = \frac{ik'}{k\cos\mathrm{am}\,u} \tag{19.}$$

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{coam}(u+iK') = \frac{-i}{k'}\Delta\,\mathrm{am}\,u \tag{20.}$$

$$\Delta\,\mathrm{coam}(u+iK') = ik'\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,u. \tag{21.}$$

E formulis praecedentibus, quae et ipsae tamquam fundamentales in analysi functionum ellipticarum considerari debent, elucet:

a) functiones ellipticas argumenti imaginarii iv, moduli k, transformari posse in alias argumenti realis v, moduli $k' = \sqrt{1-k^2}$. Unde generaliter

functiones ellipticas argumenti imaginarii $u+iv$, moduli k, componere licet e functionibus ellipticis argumenti u, moduli k, et aliis argumenti v, moduli k'.

b) functiones ellipticas duplici gaudere periodo, altera reali, altera imaginaria, siquidem modulus k est realis. Utraque fit imaginaria, ubi modulus et ipse est imaginarius. Quod *principium duplicis periodi* nuncupabimus. E quo, cum universam, quae fingi potest, amplectatur periodicitatem analyticam, elucet functiones ellipticas non aliis adnumerari debere transcendentibus, quae quibusdam gaudent elegantiis, fortasse pluribus illas aut maioribus, sed speciem quandam iis inesse perfecti et absoluti.

THEORIA ANALYTICA TRANSFORMATIONIS FUNCTIONUM ELLIPTICARUM.

20.

Vidimus in antecedentibus, quoties functiones elementi x rationales integrae A, B, C, D, U, V ita determinentur, ut sit:

$$\begin{aligned} V+U &= (1+x)AA \\ V-U &= (1-x)BB \\ V+\lambda U &= (1+kx)CC \\ V-\lambda U &= (1-kx)DD, \end{aligned}$$

posito $y = \frac{U}{V}$, fore:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

designante M quantitatem constantem. Iam expressiones illarum functionum analyticas generales proponamus.

Sit n numerus impar quilibet, sint m, m' numeri integri quilibet positivi seu negativi, qui tamen factorem communem non habeant, qui et ipse numerum n metitur, ponamus:

$$\omega = \frac{mK+m'iK'}{n};$$

fit:

$$U = \frac{x}{M}\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am}\, 8\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega}\right)$$

$$V = \left(1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega\right)\left(1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 8\omega\right)\cdots\left(1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega\right)$$

$$A = \left(1+\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 4\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 8\omega}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 2(n-1)\omega}\right)$$

$$B = \left(1-\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 4\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 8\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 2(n-1)\omega}\right)$$

$$C = \left(1+kx\sin \mathrm{coam}\, 4\omega\right)\left(1+kx\sin \mathrm{coam}\, 8\omega\right)\cdots\left(1+kx\sin \mathrm{coam}\, 2(n-1)\omega\right)$$

$$D = \left(1-kx\sin \mathrm{coam}\, 4\omega\right)\left(1-kx\sin \mathrm{coam}\, 8\omega\right)\cdots\left(1-kx\sin \mathrm{coam}\, 2(n-1)\omega\right)$$

$$\lambda = k^n \left\{\sin \mathrm{coam}\, 4\omega \sin \mathrm{coam}\, 8\omega \ldots\ldots \sin \mathrm{coam}\, 2(n-1)\omega\right\}^4$$

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{\frac{\sin \mathrm{coam}\, 4\omega \sin \mathrm{coam}\, 8\omega \ldots\ldots \sin \mathrm{coam}\, 2(n-1)\omega}{\sin \mathrm{am}\, 4\omega \ \sin \mathrm{am}\, 8\omega \ldots\ldots \sin \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega}\right\}^2.$$

Quibus positis, ubi $x = \sin \mathrm{am}\, u$, fit $y = \frac{U}{V} = \sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$.

Antequam ipsam aggrediamur formularum demonstrationem, earum transformationem quandam indicabimus. Quem in finem sequentes adnotamus formulas, quae statim e formulis §. 18. decurrunt:

$$\text{(1.)}\qquad \sin \mathrm{am}(u+\alpha)\sin \mathrm{am}(u-\alpha) = \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u - \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha}{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha}$$

$$\text{(2.)}\qquad \frac{[1+\sin \mathrm{am}(u+\alpha)][1+\sin \mathrm{am}(u-\alpha)]}{\cos^2 \mathrm{am}\, \alpha} = \frac{\left(1+\frac{\sin \mathrm{am}\, u}{\sin \mathrm{coam}\, \alpha}\right)^2}{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha}$$

$$\text{(3.)}\qquad \frac{[1-\sin \mathrm{am}(u+\alpha)][1-\sin \mathrm{am}(u-\alpha)]}{\cos^2 \mathrm{am}\, \alpha} = \frac{\left(1-\frac{\sin \mathrm{am}\, u}{\sin \mathrm{coam}\, \alpha}\right)^2}{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha}$$

$$\text{(4.)}\qquad \frac{[1+k\sin \mathrm{am}(u+\alpha)][1+k\sin \mathrm{am}(u-\alpha)]}{\Delta^2 \mathrm{am}\, \alpha} = \frac{(1+k\sin \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{coam}\, \alpha)^2}{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha}$$

$$\text{(5.)}\qquad \frac{[1-k\sin \mathrm{am}(u+\alpha)][1-k\sin \mathrm{am}(u-\alpha)]}{\Delta^2 \mathrm{am}\, \alpha} = \frac{(1-k\sin \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{coam}\, \alpha)^2}{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha}.$$

E quibus formulis etiam sequitur:

$$\text{(6.)}\qquad \frac{\cos \mathrm{am}(u+\alpha)\cos \mathrm{am}(u-\alpha)}{\cos^2 \mathrm{am}\, \alpha} = \frac{1-\frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{coam}\, \alpha}}{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha}$$

$$\text{(7.)}\qquad \frac{\Delta \mathrm{am}(u+\alpha)\Delta \mathrm{am}(u-\alpha)}{\Delta^2 \mathrm{am}\, \alpha} = \frac{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{coam}\, \alpha}{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha}.$$

Posito $x = \sin \mathrm{am}\, u$, nanciscimur e formula (1.):

$$\frac{1-\frac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am}\, \alpha}}{1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, \alpha} = \frac{-\sin \mathrm{am}(u+\alpha)\sin \mathrm{am}(u-\alpha)}{\sin^2 \mathrm{am}\, \alpha},$$

e formulis (2.), (3.):

$$\frac{\left(1\pm\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, \alpha}\right)^2}{1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, \alpha} = \frac{[1\pm\sin \mathrm{am}(u+\alpha)][1\pm\sin \mathrm{am}(u-\alpha)]}{\cos^2 \mathrm{am}\, \alpha},$$

e formulis (4.), (5.):

$$\frac{(1\pm kx\sin \mathrm{coam}\, \alpha)^2}{1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, \alpha} = \frac{[1\pm k\sin \mathrm{am}(u+\alpha)][1\pm k\sin \mathrm{am}(u-\alpha)]}{\Delta^2 \mathrm{am}\, \alpha}.$$

Hinc ubi loco α successive ponitur 4ω, 8ω, $\ldots 2(n-1)\omega$, loco $-\alpha$ autem $4n\omega-\alpha$, obtinemus:

$$\text{(8.)}\qquad \frac{U}{V} = \frac{\frac{x}{M}\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am}\, 8\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega}\right)}{[1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega][1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 8\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega]}$$

$$= \frac{\sin \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{am}(u+4\omega)\sin \mathrm{am}(u+8\omega)\cdots\sin \mathrm{am}(u+4(n-1)\omega)}{[\sin \mathrm{coam}\, 4\omega \sin \mathrm{coam}\, 8\omega\cdots\sin \mathrm{coam}\, 2(n-1)\omega]^2}$$

$$\text{(9.)}\qquad \frac{(1+x)AA}{V} = \frac{(1+x)\left\{\left(1+\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 4\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 8\omega}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 2(n-1)\omega}\right)\right\}^2}{[1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega][1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 8\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega]}$$

$$= \frac{[1+\sin \mathrm{am}\, u][1+\sin \mathrm{am}(u+4\omega)][1+\sin \mathrm{am}(u+8\omega)]\cdots[1+\sin \mathrm{am}(u+4(n-1)\omega)]}{[\cos \mathrm{am}\, 4\omega \cos \mathrm{am}\, 8\omega\cdots\cos \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega]^2}$$

$$\text{(10.)}\qquad \frac{(1-x)BB}{V} = \frac{(1-x)\left\{\left(1-\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 4\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 8\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\sin \mathrm{coam}\, 2(n-1)\omega}\right)\right\}^2}{[1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega][1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 8\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega]}$$

$$= \frac{[1-\sin \mathrm{am}\, u][1-\sin \mathrm{am}(u+4\omega)][1-\sin \mathrm{am}(u+8\omega)]\cdots[1-\sin \mathrm{am}(u+4(n-1)\omega)]}{[\cos \mathrm{am}\, 4\omega \cos \mathrm{am}\, 8\omega\cdots\cos \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega]^2}$$

$$\text{(11.)}\qquad \frac{(1+kx)CC}{V} = \frac{(1+kx)\left\{[1+kx\sin \mathrm{coam}\, 4\omega][1+kx\sin \mathrm{coam}\, 8\omega]\cdots[1+kx\sin \mathrm{coam}\, 2(n-1)\omega]\right\}^2}{[1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega][1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 8\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega]}$$

$$= \frac{[1+k\sin \mathrm{am}\, u][1+k\sin \mathrm{am}(u+4\omega)][1+k\sin \mathrm{am}(u+8\omega)]\cdots[1+k\sin \mathrm{am}(u+4(n-1)\omega)]}{[\Delta \mathrm{am}\, 4\omega\, \Delta \mathrm{am}\, 8\omega\cdots\Delta \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega]^2}$$

$$\text{(12.)}\qquad \frac{(1-kx)DD}{V} = \frac{(1-kx)\left\{[1-kx\sin \mathrm{coam}\, 4\omega][1-kx\sin \mathrm{coam}\, 8\omega]\cdots[1-kx\sin \mathrm{coam}\, 2(n-1)\omega]\right\}^2}{[1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega][1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 8\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega]}$$

$$= \frac{[1-k\sin \mathrm{am}\, u][1-k\sin \mathrm{am}(u+4\omega)][1-k\sin \mathrm{am}(u+8\omega)]\cdots[1-k\sin \mathrm{am}(u+4(n-1)\omega)]}{[\Delta \mathrm{am}\, 4\omega\, \Delta \mathrm{am}\, 8\omega\cdots\Delta \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega]^2}$$

Hinc etiam sequuntur formulae:

$$(13.)\quad \frac{\sqrt{1-x^2}AB}{V} = \sqrt{1-x^2}\,\frac{\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{coam}4\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{coam}8\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{coam}2(n-1)\omega}\right)}{[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}4\omega][1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}8\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}2(n-1)\omega]}$$

$$= \frac{\cos\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u+4\omega)\cos\operatorname{am}(u+8\omega)\cdots\cos\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega)}{[\cos\operatorname{am}4\omega\cos\operatorname{am}8\omega\cdots\cos\operatorname{am}2(n-1)\omega]^2}$$

$$(14.)\quad \frac{\sqrt{1-k^2x^2}CD}{V} = \sqrt{1-k^2x^2}\,\frac{[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{coam}4\omega][1-k^2x^2\sin^2\operatorname{coam}8\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{coam}2(n-1)\omega]}{[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}4\omega][1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}8\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}2(n-1)\omega]}$$

$$= \frac{\Delta\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}(u+4\omega)\,\Delta\operatorname{am}(u+8\omega)\cdots\Delta\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega)}{[\Delta\operatorname{am}4\omega\,\Delta\operatorname{am}8\omega\cdots\Delta\operatorname{am}2(n-1)\omega]^2}.$$

DEMONSTRATIO FORMULARUM ANALYTICARUM PRO TRANSFORMATIONE.

21.

Iam demonstremus, posito:

$$1-y = (1-x)\frac{\left\{\left(1-\frac{x}{\sin\operatorname{coam}4\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\operatorname{coam}8\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\sin\operatorname{coam}2(n-1)\omega}\right)\right\}^2}{[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}4\omega][1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}8\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}2(n-1)\omega]}$$

$$= \frac{[1-\sin\operatorname{am}u][1-\sin\operatorname{am}(u+4\omega)][1-\sin\operatorname{am}(u+8\omega)]\cdots[1-\sin\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega)]}{[\cos\operatorname{am}4\omega\cos\operatorname{am}8\omega\cdots\cos\operatorname{am}2(n-1)\omega]^2},$$

et reliquas erui formulas et hanc:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

siquidem:

$$\lambda = k^n[\sin\operatorname{coam}4\omega\sin\operatorname{coam}8\omega\cdots\sin\operatorname{coam}2(n-1)\omega]^4$$

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{[\sin\operatorname{coam}4\omega\sin\operatorname{coam}8\omega\cdots\sin\operatorname{coam}2(n-1)\omega]^2}{[\sin\operatorname{am}4\omega\sin\operatorname{am}8\omega\cdots\sin\operatorname{am}2(n-1)\omega]^2}.$$

E formula proposita apparet minime mutari y, quoties u abit in $u+4\omega$. Tum enim quivis factor in subsequentem abit, ultimus vero in primum. Unde generaliter y non mutatur, siquidem loco u ponatur $u+4p\omega$, designante p numerum integrum positivum seu negativum. Ubi vero $u=0$, fit:

$$1-y = \frac{[1-\sin\operatorname{am}4\omega][1-\sin\operatorname{am}8\omega]\cdots[1-\sin\operatorname{am}4(n-1)\omega]}{[\cos\operatorname{am}4\omega\cos\operatorname{am}8\omega\cdots\cos\operatorname{am}2(n-1)\omega]^2} = 1,$$

sive $y=0$. Facile enim patet fore:

$$-\sin\operatorname{am}4(n-1)\omega = \sin\operatorname{am}4\omega$$
$$-\sin\operatorname{am}4(n-2)\omega = \sin\operatorname{am}8\omega,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

unde:

$$[1-\sin\operatorname{am}4\omega][1-\sin\operatorname{am}4(n-1)\omega] = \cos^2\operatorname{am}4\omega$$
$$[1-\sin\operatorname{am}8\omega][1-\sin\operatorname{am}4(n-2)\omega] = \cos^2\operatorname{am}8\omega$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$[1-\sin\operatorname{am}2(n-1)\omega][1-\sin\operatorname{am}2(n+1)\omega] = \cos^2\operatorname{am}2(n-1)\omega.$$

Iam quia $y=0$, quoties $u=0$, neque mutatur y, ubi loco u ponitur $u+4p\omega$, generaliter evanescit y, quoties u valores induit:

$$0,\ 4\omega,\ 8\omega,\ \ldots\ldots,\ 4(n-2)\omega,\ 4(n-1)\omega,$$

quibus respondent valores quantitatis $x=\sin\operatorname{am}u$:

$$0,\ \sin\operatorname{am}4\omega,\ \sin\operatorname{am}8\omega,\ \ldots,\ \sin\operatorname{am}4(n-2)\omega,\ \sin\operatorname{am}4(n-1)\omega,$$

quos ita etiam exhibere licet:

$$0,\ \pm\sin\operatorname{am}4\omega,\ \pm\sin\operatorname{am}8\omega,\ \ldots,\ \pm\sin\operatorname{am}2(n-1)\omega,$$

sive etiam hunc in modum:

$$0,\ \pm\sin\operatorname{am}2\omega,\ \pm\sin\operatorname{am}4\omega,\ \ldots,\ \pm\sin\operatorname{am}(n-1)\omega.$$

Qui valores elementi x, quos evanescente y induere potest, omnes inter se diversi erunt, eorumque numerus erit n. Iam ex aequatione inter x et y supposita, e qua profecti sumus, elucet, positis:

$$V = [1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}4\omega][1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}8\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}2(n-1)\omega]$$
$$= [1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}2\omega][1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}4\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega],$$

$y=\frac{U}{V}$, fieri U functionem elementi x rationalem integram n^{ti} ordinis. Quae cum simul cum y evanescat pro valoribus quantitatis x numero n et inter se diversis sequentibus:

$$0,\ \pm\sin\operatorname{am}2\omega,\ \pm\sin\operatorname{am}4\omega,\ \ldots,\ \pm\sin\operatorname{am}(n-1)\omega,$$

necessario formam induit:

$$U = \frac{x}{M}\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}2\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}4\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega}\right)$$
$$= \frac{x}{M}\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}4\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}8\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}2(n-1)\omega}\right),$$

designante M constantem. Cum, posito $x = 1$, fiat $1-y = 0$, $y = 1$, obtinemus ex aequatione $y = \frac{U}{V}$:

$$1 = \frac{\left(1-\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}2\omega}\right)\left(1-\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}4\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega}\right)}{M[1-k^2\sin^2\operatorname{am}2\omega][1+k^2\sin^2\operatorname{am}4\omega]\cdots[1-k^2\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega]}$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}[\sin\operatorname{coam}2\omega\sin\operatorname{coam}4\omega\cdots\sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^2}{M[\sin\operatorname{am}2\omega\sin\operatorname{am}4\omega\cdots\sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^2},$$

unde:

$$M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}[\sin\operatorname{coam}2\omega\sin\operatorname{coam}4\omega\cdots\sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^2}{[\sin\operatorname{am}2\omega\sin\operatorname{am}4\omega\cdots\sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^2}.$$

Inter functiones U, V memorabilis intercedit correlatio, illam dico supra memoratam, cuius beneficio fit, ut, posito $\frac{1}{kx}$ loco x, simul y in $\frac{1}{\lambda y}$ abeat, designante λ constantem.

Posito enim $\frac{1}{kx}$ loco x, abit:

$$U = \frac{x}{M}\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}2\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}4\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega}\right)$$

in hanc expressionem:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{V}{Mx^n}\cdot\frac{1}{k^n[\sin\operatorname{am}2\omega\sin\operatorname{am}4\omega\cdots\sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^2}.$$

Contra vero, eadem substitutione facta,

$$V = [1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}2\omega][1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}4\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega]$$

in hanc expressionem abit:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{U}{x^n}\cdot M[\sin\operatorname{am}2\omega\sin\operatorname{am}4\omega\cdots\sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^2.$$

Unde, loco x posito $\frac{1}{kx}$, $y = \frac{U}{V}$ abit in:

$$\frac{V}{U}\cdot\frac{1}{MM.k^n[\sin\operatorname{am}2\omega\sin\operatorname{am}4\omega\cdots\sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^4},$$

sive y in $\frac{1}{\lambda y}$, siquidem ponitur:

$$\lambda = MMk^n[\sin\operatorname{am}2\omega\sin\operatorname{am}4\omega\cdots\sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^4$$
$$= k^n[\sin\operatorname{coam}2\omega\sin\operatorname{coam}4\omega\cdots\sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^4.$$

Id quod demonstrandum erat.

Ex aequatione proposita:

$$1-y = (1-x)\frac{\left\{\left(1-\frac{x}{\sin\operatorname{coam}4\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\operatorname{coam}8\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\sin\operatorname{coam}2(n-1)\omega}\right)\right\}^2}{[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}4\omega][1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}8\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}2(n-1)\omega]},$$

posito $\frac{1}{kx}$ loco x, $\frac{1}{\lambda y}$ loco y, quod ex antecedentibus licet, eruimus:

$$\frac{1}{\lambda y}-1 = \frac{1-kx}{\lambda U}\{[1-kx\sin\operatorname{coam}4\omega][1-kx\sin\operatorname{coam}8\omega]\cdots[1-kx\sin\operatorname{coam}2(n-1)\omega]\}^2,$$

quod ductum in $\lambda y = \frac{\lambda U}{V}$ praebet:

$$1-\lambda y = (1-kx)\frac{\{[1-kx\sin\operatorname{coam}4\omega][1-kx\sin\operatorname{coam}8\omega]\cdots[1-kx\sin\operatorname{coam}2(n-1)\omega]\}^2}{V}.$$

Ceterum patet $y = \frac{U}{V}$ abire in $-y$, ubi x in $-x$ mutatur, quo facto igitur statim etiam $1+y$, $1+\lambda y$ ex $1-y$, $1-\lambda y$ obtinemus.

Iam igitur eiusmodi invenimus functiones elementi x rationales integras U, V, ut sit:

$$\begin{aligned} V+U &= V(1+y) = (1+x)AA \\ V-U &= V(1-y) = (1-x)BB \\ V+\lambda U &= V(1+\lambda y) = (1+kx)CC \\ V-\lambda U &= V(1-\lambda y) = (1-kx)DD, \end{aligned}$$

designantibus A, B, C, D et ipsis functiones elementi x rationales integras. Hinc autem secundum principia transformationis initio stabilita statim sequitur:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Multiplicatorem M, quem vocabimus, ex observatione §. 14. facta obtinemus. Unde iam omnes formulae analyticae generales, quae theoriam transformationis functionum ellipticarum concernunt, demonstratae sunt.

22.

Demonstratio proposita ex ea, quam dedimus in *Novis Astronomicis* a Cl°. Schumacher editis Nr. 127, eruitur, ubi ponitur ω loco $\frac{K}{n}$, $(-1)^{\frac{n-1}{2}}M$ loco M, aliis omnibus immutatis manentibus. Ipsum theorema analyticum generale de transformatione sub forma paulo alia iam prius ibidem Nr. 123 cum analystis communicaveram. Demonstrationem Cl. Legendre, summus in hac doctrina arbiter, ibidem Nr. 130 benigne et praeclare recensere voluit. Observat ibi vir multis nominibus venerandus aequationem:

$$V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx} = \frac{ABCD}{M} = \frac{T}{M},$$

cuius beneficio demonstratio conficitur, et quae nobis e principiis transformationis mere algebraicis sequebatur, etiam sine illis analytice probari posse. Quod cum ex ipsa viri clarissimi sententia egregiam theorematí nostro lucem affundat, praeeunte illo, paucis hunc in modum demonstremus.

Aequationem propositam:

$$V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx} = \frac{ABCD}{M} = \frac{T}{M}$$

ita quoque exhibere licet:

$$\frac{dU}{Udx} - \frac{dV}{Vdx} = \frac{d\log U}{dx} - \frac{d\log V}{dx} = \frac{ABCD}{MUV} = \frac{T}{MUV}.$$

Invenimus autem:

$$U = \frac{x}{M}\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}2\omega}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}4\omega}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega}\right)$$

$$V = [1 - k^2x^2\sin^2\operatorname{am}2\omega][1 - k^2x^2\sin^2\operatorname{am}4\omega]\cdots[1 - k^2x^2\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega],$$

unde:

$$\frac{d\log U}{dx} - \frac{d\log V}{dx} = \frac{1}{x} + \Sigma\left\{\frac{-2x}{\sin^2\operatorname{am}2q\omega - x^2} + \frac{2k^2x\sin^2\operatorname{am}2q\omega}{1 - k^2x^2\sin^2\operatorname{am}2q\omega}\right\},$$

numero q in summa designata tributis valoribus $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Porro invenimus:

$$AB = \left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\operatorname{coam}2\omega}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\operatorname{coam}4\omega}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\operatorname{coam}(n-1)\omega}\right)$$

$$CD = [1 - k^2x^2\sin^2\operatorname{coam}2\omega][1 - k^2x^2\sin^2\operatorname{coam}4\omega]\cdots[1 - k^2x^2\sin^2\operatorname{coam}(n-1)\omega],$$

unde:

$$\frac{T}{MUV} = \frac{ABCD}{MUV} = \frac{x\Pi\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\operatorname{coam}2p\omega}\right)(1 - k^2x^2\sin^2\operatorname{coam}2p\omega)}{x^2\Pi\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}2p\omega}\right)(1 - k^2x^2\sin^2\operatorname{am}2p\omega)},$$

siquidem in productis, brevitatis causa praefixo signo Π denotatis, elemento p valores tribuuntur $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Hanc expressionem in fractiones simplices discerpere licet, ita ut formam induat:

$$\frac{1}{x} + \Sigma\left(\frac{A^{(q)}x}{\sin^2\operatorname{am}2q\omega - x^2} + \frac{B^{(q)}x}{1 - k^2x^2\sin^2\operatorname{am}2q\omega}\right),$$

quo facto ut evictum habeamus, quod propositum est, demonstrari debet fore:

$$A^{(q)} = -2, \quad B^{(q)} = 2k^2\sin^2\operatorname{am}2q\omega.$$

Denotabimus in sequentibus praefixo signo $\Pi^{(q)}$ productum ita formatum, ut elemento p valores tribuantur $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$, omisso tamen valore $p = q$. Hinc e praeceptis fractionum simplicium theoriae abunde notis sequitur:

$$A^{(q)} = (1 - k^2\sin^2\operatorname{am}2q\omega\sin^2\operatorname{coam}2q\omega)\frac{\Pi\left(\dfrac{1 - \frac{\sin^2\operatorname{am}2q\omega}{\sin^2\operatorname{coam}2p\omega}}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}2q\omega\sin^2\operatorname{am}2p\omega}\right)}{\Pi^{(q)}\left(\dfrac{1 - \frac{\sin^2\operatorname{am}2q\omega}{\sin^2\operatorname{am}2p\omega}}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}2q\omega\sin^2\operatorname{coam}2p\omega}\right)}.$$

Iam e formulis supra a nobis exhibitis fit:

$$\frac{1 - \frac{\sin^2\operatorname{am}2q\omega}{\sin^2\operatorname{coam}2p\omega}}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}2q\omega\sin^2\operatorname{am}2p\omega} = \frac{\cos\operatorname{am}(2q+2p)\omega\cos\operatorname{am}(2q-2p)\omega}{\cos^2\operatorname{am}2p\omega}$$

$$\frac{1 - \frac{\sin^2\operatorname{am}2q\omega}{\sin^2\operatorname{am}2p\omega}}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}2q\omega\sin^2\operatorname{coam}2p\omega} = \frac{\cos\operatorname{coam}(2p+2q)\omega\cos\operatorname{coam}(2p-2q)\omega}{\cos^2\operatorname{coam}2p\omega}.$$

Facile autem patet, sublatis qui in denominatore et numeratore iidem inveniuntur factoribus, fieri:

$$\Pi \frac{\cos\operatorname{am}(2q+2p)\omega \cos\operatorname{am}(2q-2p)\omega}{\cos^2\operatorname{am} 2p\omega} = \frac{\pm 1}{\cos\operatorname{am} 2q\omega}$$

$$\Pi^{(q)} \frac{\cos\operatorname{coam}(2p+2q)\omega \cos\operatorname{coam}(2p-2q)\omega}{\cos^2\operatorname{coam} 2p\omega} = \frac{\mp 1}{\cos\operatorname{coam} 2q\omega}\cdot\frac{\cos^2\operatorname{coam} 2q\omega}{\cos\operatorname{coam} 4q\omega} = \frac{\mp\cos\operatorname{coam} 2q\omega}{\cos\operatorname{coam} 4q\omega},$$

unde:

$$A^{(q)} = \frac{-(1-k^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega \sin^2\operatorname{coam} 2q\omega)\cos\operatorname{coam} 4q\omega}{\cos\operatorname{am} 2q\omega \cos\operatorname{coam} 2q\omega}.$$

At e nota de duplicatione formula fit:

$$\begin{aligned}\cos\operatorname{coam} 4q\omega &= \frac{2k'\sin\operatorname{am} 2q\omega \cos\operatorname{am} 2q\omega\,\Delta\operatorname{am} 2q\omega}{1-2k^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega + k^2\sin^4\operatorname{am} 2q\omega}\\ &= \frac{2k'\sin\operatorname{am} 2q\omega \cos\operatorname{am} 2q\omega\,\Delta\operatorname{am} 2q\omega}{\Delta^2\operatorname{am} 2q\omega - k^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega \cos^2\operatorname{am} 2q\omega}\\ &= \frac{2\cos\operatorname{am} 2q\omega \cos\operatorname{coam} 2q\omega}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega \sin^2\operatorname{coam} 2q\omega},\end{aligned}$$

unde tandem, quod demonstrandum erat, $A^{(q)} = -2$. Prorsus simili modo alteram aequationem: $B^{(q)} = 2k^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega$ probare licet; quod tamen, iam invento $A^{(q)} = -2$, facilius ita fit.

Facile patet, loco x posito $\frac{1}{kx}$, non mutari expressionem:

$$\Pi \frac{\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{coam} 2p\omega}\right)(1-k^2x^2\sin^2\operatorname{coam} 2p\omega)}{(1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am} 2p\omega)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am} 2p\omega}\right)},$$

quam vidimus aequalem poni posse expressioni:

$$1+\Sigma\frac{-2x^2}{\sin^2\operatorname{am} 2q\omega - x^2} + \Sigma\frac{B^{(q)}x^2}{1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega}.$$

Haec autem expressio, posito $\frac{1}{kx}$ loco x, abit in hanc:

$$1+\Sigma\frac{2}{1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega} + \Sigma\frac{-B^{(q)}}{k^2(\sin^2\operatorname{am} 2q\omega - x^2)}$$

$$= 1+\Sigma\left(2-\frac{B^{(q)}}{k^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega}\right) + \Sigma\frac{2k^2x^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega}{1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega} + \Sigma\frac{-B^{(q)}}{k^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega}\cdot\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am} 2q\omega - x^2},$$

unde ut immutata illa maneat, quod debet, fieri oportet:

$$B^{(q)} = 2k^2\sin^2\operatorname{am} 2q\omega.$$

Q. D. E.

23.

E formula (14.) §. 20. sequitur:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\lambda^2y^2} &= \sqrt{1-k^2x^2}\,\frac{CD}{V}\\ &= \sqrt{1-k^2x^2}\,\frac{[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{coam} 2\omega][1-k^2x^2\sin^2\operatorname{coam} 4\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{coam}(n-1)\omega]}{[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am} 2\omega]\,[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am} 4\omega]\cdots[1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}(n-1)\omega]}.\end{aligned}$$

Posito $x = 1$, unde etiam $y = 1$, ac $\sqrt{1-\lambda^2} = \lambda'$, fit:

$$\lambda' = k'\left\{\frac{\Delta\operatorname{coam} 2\omega\,\Delta\operatorname{coam} 4\omega\cdots\Delta\operatorname{coam}(n-1)\omega}{\Delta\operatorname{am} 2\omega\,\Delta\operatorname{am} 4\omega\cdots\Delta\operatorname{am}(n-1)\omega}\right\}^2.$$

Iam vero est:

$$\Delta\operatorname{coam} u = \frac{k'}{\Delta\operatorname{am} u},$$

unde:

$$(1.)\qquad \lambda' = \frac{k'^n}{[\Delta\operatorname{am} 2\omega\,\Delta\operatorname{am} 4\omega\cdots\Delta\operatorname{am}(n-1)\omega]^4}.$$

Porro in usum vocatis formulis:

$$(2.)\qquad \lambda = k^n[\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega\cdots\sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^4$$

$$(3.)\qquad M = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{[\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega\cdots\sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^2}{[\sin\operatorname{am} 2\omega \sin\operatorname{am} 4\omega\cdots\sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^2},$$

nanciscimur:

$$(4.)\qquad \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{M}\sqrt{\frac{\lambda}{k^n}} = [\sin\operatorname{am} 2\omega \sin\operatorname{am} 4\omega\cdots\sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^2$$

$$(5.)\qquad \sqrt{\frac{\lambda k'^n}{\lambda' k^n}} = [\cos\operatorname{am} 2\omega \cos\operatorname{am} 4\omega\cdots\cos\operatorname{am}(n-1)\omega]^2$$

$$(6.)\qquad \sqrt{\frac{k'^n}{\lambda'}} = [\Delta\operatorname{am} 2\omega\,\Delta\operatorname{am} 4\omega\cdots\Delta\operatorname{am}(n-1)\omega]^2$$

$$(7.)\qquad \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{M}\sqrt{\frac{\lambda'}{k'^n}} = [\operatorname{tg}\operatorname{am} 2\omega\,\operatorname{tg}\operatorname{am} 4\omega\cdots\operatorname{tg}\operatorname{am}(n-1)\omega]^2$$

$$(8.)\qquad \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}} = [\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega\cdots\sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^2$$

$$(9.)\qquad \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{M}\sqrt{\frac{\lambda\lambda' k'^{n-2}}{k^n}} = [\cos\operatorname{coam} 2\omega \cos\operatorname{coam} 4\omega \cdots\cdot \cos\operatorname{coam}(n-1)\omega]^2$$

$$(10.)\qquad \sqrt{\lambda' k'^{n-2}} = [\Delta\operatorname{coam} 2\omega\, \Delta\operatorname{coam} 4\omega \cdots\cdot \Delta\operatorname{coam}(n-1)\omega]^2$$

$$(11.)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} M\sqrt{\frac{1}{\lambda' k'^{n-2}}} = [\operatorname{tg}\operatorname{coam} 2\omega\, \operatorname{tg}\operatorname{coam} 4\omega \cdots\cdot \operatorname{tg}\operatorname{coam}(n-1)\omega]^2.$$

Harum formularum ope formulae (8.), (13.), (14.), §. 20. in sequentes abeunt:

$$(12.)\quad \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+4\omega)\sin\operatorname{am}(u+8\omega)\cdots\sin\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega)$$

$$(13.)\quad \cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}}\cos\operatorname{am} u \cos\operatorname{am}(u+4\omega)\cos\operatorname{am}(u+8\omega)\cdots\cos\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega)$$

$$(14.)\quad \Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{\frac{\lambda'}{k'^n}}\,\Delta\operatorname{am} u\, \Delta\operatorname{am}(u+4\omega)\,\Delta\operatorname{am}(u+8\omega)\cdots\Delta\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega),$$

unde etiam:

$$(15.)\quad \operatorname{tg}\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{\frac{k'^n}{\lambda'}}\operatorname{tg}\operatorname{am} u\, \operatorname{tg}\operatorname{am}(u+4\omega)\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+8\omega)\cdots\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega).$$

Aliud ita invenitur formularum systema. Ex aequatione (4.) sequitur:

$$\frac{\lambda}{M^2 k^n} = [\sin\operatorname{am} 2\omega \sin\operatorname{am} 4\omega \cdots\cdot \sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^4,$$

unde:

$$y = \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \frac{x}{M}\Pi\,\frac{1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am} 2p\omega}}{1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am} 2p\omega} = \frac{kM}{\lambda}x\Pi\,\frac{x^2-\sin^2\operatorname{am} 2p\omega}{x^2-\frac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} 2p\omega}},$$

sive:

$$0 = x\Pi\,(x^2-\sin^2\operatorname{am} 2p\omega) - \frac{\lambda}{kM}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)\Pi\left(x^2-\frac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} 2p\omega}\right).$$

Radices huius aequationis n^{ti} ordinis sunt:

$$x = \sin\operatorname{am} u,\quad \sin\operatorname{am}(u+4\omega),\quad \sin\operatorname{am}(u+8\omega),\ldots,\quad \sin\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega),$$

unde aequationem nanciscimur identicam:

$$x\Pi\,(x^2-\sin^2\operatorname{am} 2p\omega) - \frac{\lambda}{kM}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)\Pi\left(x^2-\frac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} 2p\omega}\right)$$
$$= [x-\sin\operatorname{am} u][x-\sin\operatorname{am}(u+4\omega)][x-\sin\operatorname{am}(u+8\omega)]\cdots[x-\sin\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega)].$$

Hinc prodit summa radicum:

$$(16.)\qquad \sum \sin\operatorname{am}(u+4q\omega) = \frac{\lambda}{kM}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right).$$

Eodem modo invenitur:

$$(17.)\qquad \sum \cos\operatorname{am}(u+4q\omega) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\lambda}{kM}\cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$

$$(18.)\qquad \sum \Delta\operatorname{am}(u+4q\omega) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{M}\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$

$$(19.)\qquad \sum \operatorname{tg}\operatorname{am}(u+4q\omega) = \frac{\lambda'}{k'M}\operatorname{tg}\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right),$$

in quibus formulis numero q tribuuntur valores $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Quas formulas etiam hunc in modum repraesentare convenit:

$$\frac{\lambda}{kM}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sin\operatorname{am} u + \sum[\sin\operatorname{am}(u+4q\omega)+\sin\operatorname{am}(u-4q\omega)]$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\lambda}{kM}\cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \cos\operatorname{am} u + \sum[\cos\operatorname{am}(u+4q\omega)+\cos\operatorname{am}(u-4q\omega)]$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{M}\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \Delta\operatorname{am} u + \sum[\Delta\operatorname{am}(u+4q\omega)+\Delta\operatorname{am}(u-4q\omega)]$$

$$\frac{\lambda'}{k'M}\operatorname{tg}\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \operatorname{tg}\operatorname{am} u + \sum[\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+4q\omega)+\operatorname{tg}\operatorname{am}(u-4q\omega)],$$

ubi numero q tribuuntur valores $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Iam adnotentur formulae:

$$\sin\operatorname{am}(u+4q\omega)+\sin\operatorname{am}(u-4q\omega) = \frac{2\cos\operatorname{am} 4q\omega\, \Delta\operatorname{am} 4q\omega \sin\operatorname{am} u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} 4q\omega \sin^2\operatorname{am} u}$$

$$\cos\operatorname{am}(u+4q\omega)+\cos\operatorname{am}(u-4q\omega) = \frac{2\cos\operatorname{am} 4q\omega \cos\operatorname{am} u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} 4q\omega \sin^2\operatorname{am} u}$$

$$\Delta\operatorname{am}(u+4q\omega)+\Delta\operatorname{am}(u-4q\omega) = \frac{2\Delta\operatorname{am} 4q\omega\, \Delta\operatorname{am} u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} 4q\omega \sin^2\operatorname{am} u}$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+4q\omega)+\operatorname{tg}\operatorname{am}(u-4q\omega) = \frac{2\Delta\operatorname{am} 4q\omega \sin\operatorname{am} u \cos\operatorname{am} u}{\cos^2\operatorname{am} 4q\omega - \Delta^2\operatorname{am} 4q\omega \sin^2\operatorname{am} u}\,^{*}),$$

quarum ope formulae (16.)—(19.) in has abeunt:

*) cf. §. 18. formulas (1.), (2.), (3.); formula postrema e formulis (10.), (30.) fluit, ubi reputas esse $\operatorname{tg}\sigma + \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin(\sigma+\vartheta)}{\cos\sigma\cos\vartheta}$.

$$\frac{\lambda}{kM}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sin\operatorname{am}u + \sum\frac{2\cos\operatorname{am}4q\omega\,\Delta\operatorname{am}4q\omega\sin\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}4q\omega\sin^2\operatorname{am}u} \tag{20.}$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\lambda}{kM}\cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \cos\operatorname{am}u + \sum\frac{2\cos\operatorname{am}4q\omega\cos\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}4q\omega\sin^2\operatorname{am}u} \tag{21.}$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{M}\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \Delta\operatorname{am}u + \sum\frac{2\Delta\operatorname{am}4q\omega\,\Delta\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}4q\omega\sin^2\operatorname{am}u} \tag{22.}$$

$$\frac{\lambda'}{k'M}\operatorname{tg}\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \operatorname{tg}\operatorname{am}u + \sum\frac{2\Delta\operatorname{am}4q\omega\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}u}{\cos^2\operatorname{am}4q\omega-\Delta^2\operatorname{am}4q\omega\sin^2\operatorname{am}u}, \tag{23.}$$

quae etiam obtinentur, ubi formulae supra propositae e methodis notis in fractiones simplices resolvuntur.

DE VARIIS EIUSDEM ORDINIS TRANSFORMATIONIBUS. TRANSFORMATIONES DUAE REALES, MAIORIS MODULI IN MINOREM ET MINORIS IN MAIOREM.

24.

Elemento ω vidimus tribui posse valorem quemlibet schematis $\frac{mK+m'iK'}{n}$, designantibus m, m' numeros integros positivos seu negativos, qui tamen, quoties n est numerus compositus, nullum ipsius n factorem communem habent. Facile autem patet, ubi q sit primus ad n, valores $\omega = \frac{qmK+qm'iK'}{n}$ substitutiones diversas non exhibituros esse. Hinc ubi ipse n est numerus primus, valores elementi ω, qui transformationes diversas suppeditant, erunt omnes:

$$\frac{K}{n},\quad \frac{iK'}{n},\quad \frac{K+iK'}{n},\quad \frac{K+2iK'}{n},\quad \frac{K+3iK'}{n},\quad \dots,\quad \frac{K+(n-1)iK'}{n},$$

sive etiam:

$$\frac{K}{n},\quad \frac{iK'}{n},\quad \frac{K+iK'}{n},\quad \frac{2K+iK'}{n},\quad \frac{3K+iK'}{n},\quad \dots,\quad \frac{(n-1)K+iK'}{n},$$

aut, si placet:

$$\frac{K}{n},\quad \frac{iK'}{n},\quad \frac{K\pm iK'}{n},\quad \frac{K\pm 2iK'}{n},\quad \frac{K\pm 3iK'}{n},\quad \dots,\quad \frac{K\pm\frac{n-1}{2}iK'}{n},$$

sive etiam:

$$\frac{K}{n},\quad \frac{iK'}{n},\quad \frac{K\pm iK'}{n},\quad \frac{2K\pm iK'}{n},\quad \frac{3K\pm iK'}{n},\dots,\frac{\frac{n-1}{2}K\pm iK'}{n},$$

quorum est numerus $n+1$. Ac reapse vidimus in transformationibus tertii et quinti ordinis, supra tamquam exemplis propositis, aequationes inter $u=\sqrt[4]{k}$ et $v=\sqrt[4]{\lambda}$, quas *aequationes modulares* nuncupabimus, resp. ad quartum et sextum gradum ascendisse. Quoties vero n est numerus compositus, iste valde augetur numerus; accedunt enim casus, quibus sive m, sive m' sive etiam uterque factorem habet cum n communem, modo ne utrisque m, m' idem communis sit cum n. Generaliter autem valet theorema:

»*numerum substitutionum n^{ti} ordinis inter se diversarum, quarum ope transformare liceat functiones ellipticas, aequare summam factorum ipsius n, qui tamen numerus, quoties n per quadratum dividitur, et substitutiones amplectitur ex transformatione et multiplicatione mixtas, adeoque, quoties n ipsum est quadratum, ipsam multiplicationem.*«

Ista igitur factorum summa designabit gradum, ad quem pro dato numero n aequatio modularis ascendet, ubi adnotandum est, quoties n sit numerus quadratus, unam e radicum numero praebituram esse $k=\lambda$, ac generaliter, quoties $n=m^2v$, designante m^2 quadratum maximum, per quod numerum n dividere licet, e numero radicum fore etiam omnes radices aequationis modularis, quae ad ipsum v pertinet.

Inter valores elementi ω supra propositos, qui casu, quo n est primus, quem, cum in eum reliqui redeant, sive unice sive prae ceteris considerare convenit, universam transformationum copiam suggerunt, duo tantum generaliter loquendo *) inveniuntur, qui transformationes reales suppeditant, hos dico $\omega=\frac{K}{n}$, $\omega'=\frac{iK'}{n}$. Illam in sequentibus vocabimus transformationem *primam*, hanc *secundam*; modulosque, qui his respondent, designabimus resp. per λ, λ_1, eorumque complementa per λ', λ'_1. Argumenta amplitudinis $\frac{\pi}{2}$, quae his modulis respondent, (functiones integras vocat Cl. Legendre), designabimus per Λ, Λ_1, Λ', Λ'_1. Formulae nostrae generales pro his casibus evadunt sequentes.

---

*) Nam infinitis casibus pro modulis specialibus fit, ut par radicum imaginariarum aequationum modularium sibi aequale evadat ideoque reale fiat.

I.

FORMULAE PRO TRANSFORMATIONE REALI PRIMA MODULI k IN MODULUM λ.

$$\lambda = k^n \left\{ \sin\operatorname{coam}\frac{2K}{n} \sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n} \cdots\cdots \sin\operatorname{coam}\frac{(n-1)K}{n} \right\}^4$$

$$\lambda' = \frac{k'^n}{\left\{ \Delta\operatorname{am}\frac{2K}{n}\, \Delta\operatorname{am}\frac{4K}{n} \cdots\cdots \Delta\operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n} \right\}^4}$$

$$\mathrm{M} = \left\{ \frac{\sin\operatorname{coam}\frac{2K}{n} \sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n} \cdots\cdots \sin\operatorname{coam}\frac{(n-1)K}{n}}{\sin\operatorname{am}\frac{2K}{n} \sin\operatorname{am}\frac{4K}{n} \cdots\cdots \sin\operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n}} \right\}^2$$

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right) = \frac{\frac{\sin\operatorname{am} u}{\mathrm{M}} \left(1 - \frac{\sin^2\operatorname{am} u}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{n}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\operatorname{am} u}{\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{n}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2\operatorname{am} u}{\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n}}\right)}{\left(1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right)\left(1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right) \cdots \left(1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right)}$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}} \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}\left(u + \frac{4K}{n}\right) \sin\operatorname{am}\left(u + \frac{8K}{n}\right) \cdots \sin\operatorname{am}\left(u + \frac{4(n-1)K}{n}\right)$$

$$\cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right) = \frac{\cos\operatorname{am} u \left(1 - \frac{\sin^2\operatorname{am} u}{\sin^2\operatorname{coam}\frac{2K}{n}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\operatorname{am} u}{\sin^2\operatorname{coam}\frac{4K}{n}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2\operatorname{am} u}{\sin^2\operatorname{coam}\frac{(n-1)K}{n}}\right)}{\left(1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right)\left(1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right) \cdots \left(1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}} \cos\operatorname{am} u \cos\operatorname{am}\left(u + \frac{4K}{n}\right) \cos\operatorname{am}\left(u + \frac{8K}{n}\right) \cdots \cos\operatorname{am}\left(u + \frac{4(n-1)K}{n}\right)$$

$$\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right) = \frac{\Delta\operatorname{am} u \left(1 - k^2\sin^2\operatorname{coam}\frac{2K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right)\left(1 - k^2\sin^2\operatorname{coam}\frac{4K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right) \cdots \left(1 - k^2\sin^2\operatorname{coam}\frac{(n-1)K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right)}{\left(1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right)\left(1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right) \cdots \left(1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n}\sin^2\operatorname{am} u\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda'}{k'^n}} \Delta\operatorname{am} u\, \Delta\operatorname{am}\left(u + \frac{4K}{n}\right) \Delta\operatorname{am}\left(u + \frac{8K}{n}\right) \cdots \Delta\operatorname{am}\left(u + \frac{4(n-1)K}{n}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1 \mp \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right)}{1 \pm \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \sin\operatorname{am} u}{1 + \sin\operatorname{am} u}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\sin\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n}}\right)\left(1 - \frac{\sin\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{coam}\frac{8K}{n}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)K}{n}}\right)}{\left(1 + \frac{\sin\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n}}\right)\left(1 + \frac{\sin\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{coam}\frac{8K}{n}}\right) \cdots \left(1 + \frac{\sin\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)K}{n}}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{1 \mp \lambda \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right)}{1 \pm \lambda \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - k\sin\operatorname{am} u}{1 + k\sin\operatorname{am} u}} \cdot \frac{\left(1 - k\sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n}\sin\operatorname{am} u\right)\left(1 - k\sin\operatorname{coam}\frac{8K}{n}\sin\operatorname{am} u\right) \cdots \left(1 - k\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)K}{n}\sin\operatorname{am} u\right)}{\left(1 + k\sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n}\sin\operatorname{am} u\right)\left(1 + k\sin\operatorname{coam}\frac{8K}{n}\sin\operatorname{am} u\right) \cdots \left(1 + k\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)K}{n}\sin\operatorname{am} u\right)}$$

$$\frac{\lambda}{k\mathrm{M}} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right) = \sin\operatorname{am} u + 2\sum \frac{(-1)^q \cos\operatorname{am}\frac{2qK}{n}\, \Delta\operatorname{am}\frac{2qK}{n} \sin\operatorname{am} u}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2qK}{n}\sin^2\operatorname{am} u}$$

$$\frac{\lambda}{k\mathrm{M}} \cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right) = \cos\operatorname{am} u + 2\sum \frac{(-1)^q \cos\operatorname{am}\frac{2qK}{n} \cos\operatorname{am} u}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2qK}{n}\sin^2\operatorname{am} u}$$

$$\frac{1}{\mathrm{M}} \Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right) = \Delta\operatorname{am} u + 2\sum \frac{\Delta\operatorname{am}\frac{2qK}{n}\, \Delta\operatorname{am} u}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2qK}{n}\sin^2\operatorname{am} u}$$

$$\frac{\lambda'}{k'\mathrm{M}} \operatorname{tg}\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right) = \operatorname{tg}\operatorname{am} u + 2\sum \frac{\Delta\operatorname{am}\frac{2qK}{n} \sin\operatorname{am} u \cos\operatorname{am} u}{\cos^2\operatorname{am}\frac{2qK}{n} - \Delta^2\operatorname{am}\frac{2qK}{n}\sin^2\operatorname{am} u}.$$

II.

A. FORMULAE PRO TRANSFORMATIONE REALI SECUNDA, MODULI k IN MODULUM λ_1, SUB FORMA IMAGINARIA.

$$\lambda_1 = k^n \left\{ \sin\mathrm{coam}\frac{2iK'}{n} \sin\mathrm{coam}\frac{4iK'}{n} \cdots\cdots \sin\mathrm{coam}\frac{(n-1)iK'}{n} \right\}^4$$

$$\lambda_1' = \frac{k'^n}{\left\{ \Delta\,\mathrm{am}\frac{2iK'}{n}\, \Delta\,\mathrm{am}\frac{4iK'}{n} \cdots\cdots \Delta\,\mathrm{am}\frac{(n-1)iK'}{n} \right\}^4}$$

$$\mathrm{M}_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \frac{\sin\mathrm{coam}\frac{2iK'}{n} \sin\mathrm{coam}\frac{4iK'}{n} \cdots \sin\mathrm{coam}\frac{(n-1)iK'}{n}}{\sin\mathrm{am}\frac{2iK'}{n} \sin\mathrm{am}\frac{4iK'}{n} \cdots \sin\mathrm{am}\frac{(n-1)iK'}{n}} \right\}^2$$

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right) = \frac{\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\mathrm{M}_1}\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{2iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{4iK'}{n}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(n-1)iK'}{n}}\right)}{\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{3iK'}{n}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(n-2)iK'}{n}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{k^n}{\lambda_1}} \sin\mathrm{am}\,u \sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4iK'}{n}\right) \sin\mathrm{am}\left(u+\frac{8iK'}{n}\right) \cdots\cdots \sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4(n-1)iK'}{n}\right)$$

$$\cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right) = \frac{\cos\mathrm{am}\,u\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{2iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{4iK'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{(n-1)iK'}{n}}\right)}{\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{3iK'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(n-2)iK'}{n}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda_1' k^n}{\lambda_1 k'^n}} \cos\mathrm{am}\,u \cos\mathrm{am}\left(u+\frac{4iK'}{n}\right) \cos\mathrm{am}\left(u+\frac{8iK'}{n}\right) \cdots\cdots \cos\mathrm{am}\left(u+\frac{4(n-1)iK'}{n}\right)$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right) = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{3iK'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{(n-2)iK'}{n}}\right)}{\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{3iK'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(n-2)iK'}{n}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda_1'}{k'^n}} \Delta\,\mathrm{am}\,u\, \Delta\,\mathrm{am}\left(u+\frac{4iK'}{n}\right) \Delta\,\mathrm{am}\left(u+\frac{8iK'}{n}\right) \cdots\cdots \Delta\,\mathrm{am}\left(u+\frac{4(n-1)iK'}{n}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right)}{1+\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\sin\mathrm{am}\,u}{1+\sin\mathrm{am}\,u}} \cdot \frac{\left(1-\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{2iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{4iK'}{n}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{(n-1)iK'}{n}}\right)}{\left(1+\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{2iK'}{n}}\right)\left(1+\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{4iK'}{n}}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{(n-1)iK'}{n}}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{1-\lambda_1 \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right)}{1+\lambda_1 \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-k\sin\mathrm{am}\,u}{1+k\sin\mathrm{am}\,u}} \cdot \frac{\left(1-\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{3iK'}{n}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{(n-2)iK'}{n}}\right)}{\left(1+\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{iK'}{n}}\right)\left(1+\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{3iK'}{n}}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{coam}\frac{(n-2)iK'}{n}}\right)}$$

$$\frac{\lambda_1}{k\mathrm{M}_1} \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right) = \sin\mathrm{am}\,u - \frac{2}{k} \sum \frac{\cos\mathrm{am}\frac{(2q-1)iK'}{n}\, \Delta\,\mathrm{am}\frac{(2q-1)iK'}{n} \sin\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(2q-1)iK'}{n} - \sin^2\mathrm{am}\,u}$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\lambda_1}{k\mathrm{M}_1} \cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right) = \cos\mathrm{am}\,u + \frac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{ik} \sum \frac{(-1)^q \sin\mathrm{am}\frac{(2q-1)iK'}{n}\, \Delta\,\mathrm{am}\frac{(2q-1)iK'}{n} \cos\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(2q-1)iK'}{n} - \sin^2\mathrm{am}\,u}$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\mathrm{M}_1} \Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right) = \Delta\,\mathrm{am}\,u + \frac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{i} \sum \frac{(-1)^q \sin\mathrm{am}\frac{(2q-1)iK'}{n} \cos\mathrm{am}\frac{(2q-1)iK'}{n}\, \Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(2q-1)iK'}{n} - \sin^2\mathrm{am}\,u}$$

$$\frac{\lambda_1'}{k'\mathrm{M}_1} \mathrm{tg}\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right) = \mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,u + 2 \sum \frac{(-1)^q \Delta\,\mathrm{am}\frac{2qiK'}{n} \sin\mathrm{am}\,u \cos\mathrm{am}\,u}{\cos^2\mathrm{am}\frac{2qiK'}{n} - \Delta^2\mathrm{am}\frac{2qiK'}{n} \sin^2\mathrm{am}\,u}.$$

B. FORMULAE PRO TRANSFORMATIONE REALI SECUNDA SUB FORMA REALI.

$$\lambda_1 = \frac{k^n}{\left\{\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{2K'}{n},k'\right)\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{4K'}{n},k'\right)\cdots\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{(n-1)K'}{n},k'\right)\right\}^4}$$

$$\lambda_1' = k'^n\left\{\sin\mathrm{coam}\left(\frac{2K'}{n},k'\right)\sin\mathrm{coam}\left(\frac{4K'}{n},k'\right)\cdots\sin\mathrm{coam}\left(\frac{(n-1)K'}{n},k'\right)\right\}^4$$

$$\mathrm{M}_1 = \left\{\frac{\sin\mathrm{coam}\left(\frac{2K'}{n},k'\right)\sin\mathrm{coam}\left(\frac{4K'}{n},k'\right)\cdots\sin\mathrm{coam}\left(\frac{(n-1)K'}{n},k'\right)}{\sin\mathrm{am}\left(\frac{2K'}{n},k'\right)\ \sin\ \mathrm{am}\left(\frac{4K'}{n},k'\right)\cdots\ \sin\ \mathrm{am}\left(\frac{(n-1)K'}{n},k'\right)}\right\}^2$$

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1},\lambda_1\right) = \frac{\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\mathrm{M}_1}\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{2K'}{n},k'\right)}\right\}\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{4K'}{n},k'\right)}\right\}\cdots\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{(n-1)K'}{n},k'\right)}\right\}}{\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{K'}{n},k'\right)}\right\}\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{3K'}{n},k'\right)}\right\}\cdots\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{(n-2)K'}{n},k'\right)}\right\}}$$

$$\cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1},\lambda_1\right) = \frac{\cos\mathrm{am}\,u\left\{1-\sin^2\mathrm{am}\,u\,\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{2K'}{n},k'\right)\right\}\left\{1-\sin^2\mathrm{am}\,u\,\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{4K'}{n},k'\right)\right\}\cdots\left\{1-\sin^2\mathrm{am}\,u\,\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{(n-1)K'}{n},k'\right)\right\}}{\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{K'}{n},k'\right)}\right\}\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{3K'}{n},k'\right)}\right\}\cdots\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{(n-2)K'}{n},k'\right)}\right\}}$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1},\lambda_1\right) = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u\left\{1-\sin^2\mathrm{am}\,u\,\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{K'}{n},k'\right)\right\}\left\{1-\sin^2\mathrm{am}\,u\,\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{3K'}{n},k'\right)\right\}\cdots\left\{1-\sin^2\mathrm{am}\,u\,\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{(n-2)K'}{n},k'\right)\right\}}{\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{K'}{n},k'\right)}\right\}\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{3K'}{n},k'\right)}\right\}\cdots\left\{1+\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\left(\frac{(n-2)K'}{n},k'\right)}\right\}}$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1},\lambda_1\right)}{1+\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1},\lambda_1\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\sin\mathrm{am}\,u}{1+\sin\mathrm{am}\,u}}\cdot\frac{\left\{1-\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\left(\frac{2K'}{n},k'\right)\right\}\left\{1-\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\left(\frac{4K'}{n},k'\right)\right\}\cdots\left\{1-\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\left(\frac{(n-1)K'}{n},k'\right)\right\}}{\left\{1+\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\left(\frac{2K'}{n},k'\right)\right\}\left\{1+\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\left(\frac{4K'}{n},k'\right)\right\}\cdots\left\{1+\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\left(\frac{(n-1)K'}{n},k'\right)\right\}}$$

$$\sqrt{\frac{1-\lambda_1\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1},\lambda_1\right)}{1+\lambda_1\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1},\lambda_1\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-k\sin\mathrm{am}\,u}{1+k\sin\mathrm{am}\,u}}\cdot\frac{\left\{1-\Delta\mathrm{am}\left(\frac{K'}{n},k'\right)\sin\mathrm{am}\,u\right\}\left\{1-\Delta\mathrm{am}\left(\frac{3K'}{n},k'\right)\sin\mathrm{am}\,u\right\}\cdots\left\{1-\Delta\mathrm{am}\left(\frac{(n-2)K'}{n},k'\right)\sin\mathrm{am}\,u\right\}}{\left\{1+\Delta\mathrm{am}\left(\frac{K'}{n},k'\right)\sin\mathrm{am}\,u\right\}\left\{1+\Delta\mathrm{am}\left(\frac{3K'}{n},k'\right)\sin\mathrm{am}\,u\right\}\cdots\left\{1+\Delta\mathrm{am}\left(\frac{(n-2)K'}{n},k'\right)\sin\mathrm{am}\,u\right\}}$$

$$\frac{\lambda_1}{k\mathrm{M}_1}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1},\lambda_1\right) = \sin\mathrm{am}\,u+\frac{2}{k}\sum\frac{\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{(2q-1)K'}{n},k'\right)\sin\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{(2q-1)K'}{n},k'\right)+\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{(2q-1)K'}{n},k'\right)\sin^2\mathrm{am}\,u}$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\lambda_1}{k\mathrm{M}_1}\cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1},\lambda_1\right) = \cos\mathrm{am}\,u-\frac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{k}\sum\frac{(-1)^q\sin\mathrm{am}\left(\frac{(2q-1)K'}{n},k'\right)\Delta\mathrm{am}\left(\frac{(2q-1)K'}{n},k'\right)\cos\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{(2q-1)K'}{n},k'\right)+\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{(2q-1)K'}{n},k'\right)\sin^2\mathrm{am}\,u}$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\mathrm{M}_1}\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1},\lambda_1\right) = \Delta\,\mathrm{am}\,u-2(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sum\frac{(-1)^q\sin\mathrm{am}\left(\frac{(2q-1)K'}{n},k'\right)\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{(2q-1)K'}{n},k'\right)+\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{(2q-1)K'}{n},k'\right)\sin^2\mathrm{am}\,u}$$

$$\frac{\lambda_1'}{k'\mathrm{M}_1}\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1},\lambda_1\right) = \mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,u+2\sum\frac{(-1)^q\cos\mathrm{am}\left(\frac{2qK'}{n},k'\right)\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{2qK'}{n},k'\right)\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u}{1-\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{2qK'}{n},k'\right)\sin^2\mathrm{am}\,u}.$$

In formulis pro transformatione prima positum est $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{M}$ loco M. Formulas pro transformatione secunda dupliciter exhibere placuit, et sub forma imaginaria et sub forma reali, in quibus praeterea loco $k\sin\mathrm{am}\frac{2miK'}{n}$, $k\sin\mathrm{coam}\frac{2miK'}{n}$, etc. ubique scriptum est $\frac{-1}{\sin\mathrm{am}\frac{(n-2m)iK'}{n}}$, $\frac{1}{\sin\mathrm{coam}\frac{(n-2m)iK'}{n}}$, etc.: id quod, sicuti reductio in formam realem, ope formularum §$^{\mathrm{i}}$. 19. facile transactum est. Ubi signum ambiguum $\pm$ positum est, alterum $+$ eligendum est, ubi $\frac{n-1}{2}$ est numerus par, alterum $-$, ubi $\frac{n-1}{2}$ est numerus impar; de signo $\mp$ contrarium valet. In summis praefixo Σ designatis numero q valores $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$ tribuendi sunt.

E formulis pro transformatione prima propositis patet, quoties u fiat successive:

$$0,\quad \frac{K}{n},\quad \frac{2K}{n},\quad \frac{3K}{n},\quad \frac{4K}{n},\quad \dots,$$

fore $\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right)$:

$$0,\quad \frac{\pi}{2},\quad \pi,\quad \frac{3\pi}{2},\quad 2\pi,\quad \dots,$$

unde obtinemus:

$$\frac{K}{n\mathrm{M}} = \Lambda.$$

Contra vero videmus in transformatione secunda, quoties u fiat: $0, K, 2K, 3K, \dots$ sive $\operatorname{am} u$: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$, fieri $\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right)$ et ipsam $= 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$, unde hoc casu:

$$\frac{K}{\mathrm{M}_1} = \Lambda_1.$$

Ceterum e formulis pro modulis $\lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_1'$ exhibitis elucet, crescente n, modulos λ, λ_1' rapide ad nihilum convergere, ideoque simul modulos λ', λ_1 proxime accedere ad unitatem. Itaque transformationem moduli primam dicere convenit *maioris in minorem*, secundam *minoris in maiorem*.

DE TRANSFORMATIONIBUS COMPLEMENTARIIS SEU QUOMODO E TRANSFORMATIONE MODULI IN MODULUM ALIA DERIVATUR COMPLEMENTI IN COMPLEMENTUM.

25.

In formula supra inventa:

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \sqrt{\frac{k'^n}{\lambda'}}\operatorname{tg}\operatorname{am} u \operatorname{tg}\operatorname{am}(u+4\omega)\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+8\omega)\cdots\operatorname{tg}\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega)$$

ponamus $u = iu'$, $\omega = i\omega'$, ita ut sit $\omega = \frac{mK+m'iK'}{n}$, $\omega' = \frac{m'K'-miK}{n}$. Iam vero est (§. 19.):

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(iu', k) = i\sin\operatorname{am}(u', k')$$
$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(iu', \lambda) = i\sin\operatorname{am}(u', \lambda'),$$

unde formulam allegatam in sequentem abire videmus:

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{u'}{M}, \lambda'\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{k'^n}{\lambda'}}\sin\operatorname{am} u' \sin\operatorname{am}(u'+4\omega')\sin\operatorname{am}(u'+8\omega')\cdots\sin\operatorname{am}(u'+4(n-1)\omega') \quad (\text{mod. } k').$$

Porro invenimus formulas:

$$\lambda' = \frac{k'^n}{[\Delta\operatorname{am} 2\omega\, \Delta\operatorname{am} 4\omega \cdots \Delta\operatorname{am}(n-1)\omega]^4}$$

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{[\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega \cdots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^2}{[\sin\operatorname{am} 2\omega \sin\operatorname{am} 4\omega \cdots \sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^2},$$

quae e formulis:

$$\Delta\operatorname{am}(iu, k) = \frac{1}{\sin\operatorname{coam}(u, k')}$$
$$\sin\operatorname{coam}(iu, k) = \frac{1}{\Delta\operatorname{am}(u, k')},$$

unde etiam sequitur:

$$\frac{\sin\operatorname{coam}(iu, k)}{\sin\operatorname{am}(iu, k)} = \frac{-i}{\operatorname{tg}\operatorname{am}(u, k')\,\Delta\operatorname{am}(u, k')} = \frac{-i\sin\operatorname{coam}(u, k')}{\sin\operatorname{am}(u, k')},$$

in sequentes abeunt:

$$\lambda' = k'^n[\sin\operatorname{coam} 2\omega' \sin\operatorname{coam} 4\omega' \cdots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega']^4 \quad (\text{mod. } k')$$

$$M = \frac{[\sin\operatorname{coam} 2\omega' \sin\operatorname{coam} 4\omega' \cdots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega']^2}{[\sin\operatorname{am} 2\omega' \sin\operatorname{am} 4\omega' \cdots \sin\operatorname{am}(n-1)\omega']^2} \quad (\text{mod. } k')$$

His formulis comparatis cum illis, quae transformationi moduli k in modulum λ inserviunt:

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+4\omega)\sin\operatorname{am}(u+8\omega)\cdots\sin\operatorname{am}(u+4(n-1)\omega)$$

$$\lambda = k^n[\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega \cdots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^4$$

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{[\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega \cdots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^2}{[\sin\operatorname{am} 2\omega \sin\operatorname{am} 4\omega \cdots \sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^2},$$

elucet theorema, quod maximi momenti censeri debet in theoria transformationis:

Quaecunque de transformatione moduli k in modulum λ proponi possint formulae, easdem valere, mutato k in k', λ in λ', ω in $\omega' = \frac{\omega}{i}$, M in $(-1)^{\frac{n-1}{2}} M$.

Transformationem autem complementi in complementum, dicto modo e transformatione proposita derivatam, dicemus *transformationem complementariam*.

Facile patet, transformationum realium moduli k transformationes reales moduli k' complementarias esse, ita tamen ut primae moduli k secunda moduli k', secundae moduli k prima moduli k' complementaria sit. Ubi enim in theoremate modo proposito ponitur $\omega = \frac{\pm K}{n}$, $\omega = \frac{\pm iK'}{n}$, quod transformationibus moduli k primae et secundae respondet, fit $\omega' = \frac{\omega}{i} = \frac{\mp iK}{n}$, $\omega' = \frac{\omega}{i} = \frac{\pm K'}{n}$, quod transformationibus moduli k' respondet resp. secundae et primae. Nec non, cum crescente modulo decrescat complementum ac vice versa, transformatio moduli in modulum ubi est maioris in minorem, transformatio complementi in complementum seu transformatio complementaria minoris in maiorem esse debet ac vice versa. Videmus igitur, mutato k in k', abire λ in λ_1', λ_1 in λ'. Nec non multiplicator M, transformationi primae eiusque complementariae communis *), abibit in M_1, qui ad transformationem secundam eiusque complementariam pertinet, ac vice versa M_1 in M. Hinc e formulis supra inventis:

$$\Lambda = \frac{K}{n\mathrm{M}}, \quad \Lambda_1 = \frac{K}{\mathrm{M}_1}$$

sequuntur hae:

$$\Lambda_1' = \frac{K'}{n\mathrm{M}_1}, \quad \Lambda' = \frac{K'}{\mathrm{M}},$$

unde proveniunt formulae summi momenti in hac theoria:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}; \quad \frac{\Lambda_1'}{\Lambda_1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{K'}{K}.$$

Hae formulae genuinum transformationis propositae characterem constituunt, unde patet, bono iure singulas nos transformationes ad singulos numeros n retulisse. Adnotabo, quoties n sit numerus compositus $= n'n''$, e singulis radicibus realibus aequationum modularium seu e singulis modulis realibus, in quos datum modulum k per substitutionem n^{ti} ordinis transformare liceat, provenire aequationes huiusmodi:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{n'}{n''}\cdot\frac{K'}{K},$$

*) Hoc generaliter tantum neglecto signo valet; vidimus enim, quod in altera transformatione erat M, in complementaria esse $(-1)^{\frac{n-1}{2}} M$; at nostris casibus eo, quod in transformatione prima loco M positum est $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ M (v. supra), signi ambiguitas tollitur, ita ut transformationibus realibus complementariis omnino idem sit multiplicator M.

quae singulis discerptionibus numeri n in duos factores respondent. E quarum igitur numero, quoties n est numerus quadratus, erit etiam haec:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{K'}{K}, \quad \text{unde } \lambda = k,$$

quae docet, casu quo n est quadratum, e numero substitutionum esse unam, quae multiplicationem suppeditet.

DE TRANSFORMATIONIBUS SUPPLEMENTARIIS AD MULTIPLICATIONEM.

26.

Revocemus formulas:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}, \quad \frac{\Lambda_1'}{\Lambda_1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{K'}{K},$$

quibus hunc in modum scriptis:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}$$
$$\frac{K'}{K} = n\frac{\Lambda_1'}{\Lambda_1},$$

elucet, *eodem modo pendere modulum λ a modulo k atque modulum k a modulo λ_1, sive eodem modo pendere modulum k a modulo λ atque modulum λ_1 a modulo k.* Itaque per transformationem primam seu maioris in minorem, qua k in λ, transformabitur λ_1 in k; per transformationem secundam seu minoris in maiorem, qua k in λ_1, transformabitur λ in k. Itaque *post transformationem primam adhibita secunda seu post secundam adhibita prima, modulus k in se redit, seu transformationes prima et secunda successive adhibitae, utro ordine placet, multiplicationem praebent.*

Vocemus M' multiplicatorem, qui eodem modo a λ pendet atque M_1 a k, M_1 multiplicatorem, qui eodem modo a λ_1 pendet atque M a k, ita ut obtineantur aequationes:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{\mathrm{M}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{dy}{\mathrm{M}'\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}},$$

quarum altera transformationi moduli k in modulum λ per transformationem primam, altera transformationi moduli λ in modulum k per transformationem secundam respondet. Ex his aequationibus provenit:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{dx}{\mathrm{M}\mathrm{M}'\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \text{unde } z = \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{MM}'}\right).$$

At ex aequatione $\Lambda_1 = \frac{K}{\mathrm{M}_1}$ mutando k in λ, quo facto K in Λ, λ_1 in k, Λ_1 in K, M_1 in M' abit, obtinetur $K = \frac{\Lambda}{\mathrm{M}'}$, qua aequatione comparata cum illa $\Lambda = \frac{K}{n\mathrm{M}}$, provenit $\frac{1}{\mathrm{MM}'} = n$, unde:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Eodem modo ex aequatione $\Lambda = \frac{K}{n\mathrm{M}}$ mutando k in λ_1, quo facto K in Λ_1, λ in k, Λ in K, M_1 in M_1' abit, provenit $K = \frac{\Lambda_1}{n\mathrm{M}_1'}$, qua aequatione comparata cum hac $\Lambda_1 = \frac{K}{\mathrm{M}_1}$, provenit $\frac{1}{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_1'} = n$; unde videmus, duobus illis casibus post binas transformationes successive adhibitas multiplicari argumentum per numerum n.

Ubi post transformationem moduli k in modulum λ modulus λ rursus in modulum k transformatur, ita ut multiplicatio proveniat, hanc transformationem illius *supplementariam ad multiplicationem* seu simpliciter *supplementariam* nuncupabimus.

Apponamus cum exempli causa tum in usum sequentium formulas pro transformatione *primae supplementaria* seu moduli λ in modulum k, quae erit ipsius λ secunda, eas tamen sub altera tantum forma imaginaria, cum reductio ad realem in promptu sit. Quas confestim obtinemus formulas, ubi in iis, quae supra de transformatione moduli k secunda propositae sunt (v. tab. II. A. §. 24.), loco k ponimus λ, k loco λ_1, $\frac{u}{\mathrm{M}}$ loco u, $\mathrm{M}' = \frac{1}{n\mathrm{M}}$ loco M_1, unde $\frac{u}{\mathrm{MM}'} = nu$ loco $\frac{u}{\mathrm{M}_1}$. In his formulis, sed in his tantum, modulus λ valebit, nisi diserte adiectus sit modulus k; ceterum brevitatis causa positum est $y = \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right)$; numero q, ut supra, tribuendi sunt valores:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}.$$

FORMULAE PRO TRANSFORMATIONE MODULI λ IN MODULUM k, SEU PRIMAE SUPPLEMENTARIA *).

27.

$$k = \lambda^n \left\{\sin\mathrm{coam}\frac{2i\Lambda'}{n}\sin\mathrm{coam}\frac{4i\Lambda'}{n}\cdots\sin\mathrm{coam}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}\right\}^4$$

$$k' = \frac{\lambda'^n}{\left\{\Delta\mathrm{am}\frac{2i\Lambda'}{n}\Delta\mathrm{am}\frac{4i\Lambda'}{n}\cdots\Delta\mathrm{am}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}\right\}^4}$$

$$\frac{1}{n\mathrm{M}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{\sin\mathrm{coam}\frac{2i\Lambda'}{n}\sin\mathrm{coam}\frac{4i\Lambda'}{n}\cdots\sin\mathrm{coam}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}}{\sin\mathrm{am}\frac{2i\Lambda'}{n}\sin\mathrm{am}\frac{4i\Lambda'}{n}\cdots\sin\mathrm{am}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}}\right\}^2$$

$$\sin\mathrm{am}(nu,k) = \frac{n\mathrm{M}y\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{2i\Lambda'}{n}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{4i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}}\right)}{\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{i\Lambda'}{n}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{3i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(n-2)i\Lambda'}{n}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda^n}{k}}\sin\mathrm{am}\frac{u}{\mathrm{M}}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{4i\Lambda'}{n}\right)\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{8i\Lambda'}{n}\right)\cdots\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{4(n-1)i\Lambda'}{n}\right)$$

$$\cos\mathrm{am}(nu,k) = \frac{\sqrt{1-y^2}\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{2i\Lambda'}{n}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{4i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}}\right)}{\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{i\Lambda'}{n}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{3i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(n-2)i\Lambda'}{n}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{k'\lambda^n}{k\lambda'^n}}\cos\mathrm{am}\frac{u}{\mathrm{M}}\cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{4i\Lambda'}{n}\right)\cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{8i\Lambda'}{n}\right)\cdots\cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{4(n-1)i\Lambda'}{n}\right)$$

$$\Delta\mathrm{am}(nu,k) = \frac{\sqrt{1-\lambda^2y^2}\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{i\Lambda'}{n}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{3i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{(n-2)i\Lambda'}{n}}\right)}{\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{i\Lambda'}{n}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{3i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(n-2)i\Lambda'}{n}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{k'}{\lambda'^n}}\Delta\mathrm{am}\frac{u}{\mathrm{M}}\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{4i\Lambda'}{n}\right)\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{8i\Lambda'}{n}\right)\cdots\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{4(n-1)i\Lambda'}{n}\right)$$

*) In formulis huius paragraphi omnes functiones ellipticae, quibus modulus non adscriptus est, modulo λ gaudent. B.

$$\sqrt{\frac{1-\sin\operatorname{am}(nu,k)}{1+\sin\operatorname{am}(nu,k)}} = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{2i\Lambda'}{n}}\right)\left(1-\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{4i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1-\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}}\right)}{\left(1+\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{2i\Lambda'}{n}}\right)\left(1+\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{4i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1+\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{1-k\sin\operatorname{am}(nu,k)}{1+k\sin\operatorname{am}(nu,k)}} = \sqrt{\frac{1-\lambda y}{1+\lambda y}}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{i\Lambda'}{n}}\right)\left(1-\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{3i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1-\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{(n-2)i\Lambda'}{n}}\right)}{\left(1+\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{i\Lambda'}{n}}\right)\left(1+\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{3i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1+\dfrac{y}{\sin\operatorname{coam}\frac{(n-2)i\Lambda'}{n}}\right)}$$

$$\sin\operatorname{am}(nu,k) = \frac{\lambda y}{kn\mathrm{M}} - \frac{2y}{kn\mathrm{M}}\sum\frac{\cos\operatorname{am}\frac{(2q-1)i\Lambda'}{n}\,\Delta\operatorname{am}\frac{(2q-1)i\Lambda'}{n}}{\sin^2\operatorname{am}\frac{(2q-1)i\Lambda'}{n}-y^2}$$

$$\cos\operatorname{am}(nu,k) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\lambda\sqrt{1-y^2}}{kn\mathrm{M}} + \frac{2\sqrt{1-y^2}}{ikn\mathrm{M}}\sum\frac{(-1)^q\sin\operatorname{am}\frac{(2q-1)i\Lambda'}{n}\,\Delta\operatorname{am}\frac{(2q-1)i\Lambda'}{n}}{\sin^2\operatorname{am}\frac{(2q-1)i\Lambda'}{n}-y^2}$$

$$\Delta\operatorname{am}(nu,k) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\mathrm{M}}\sqrt{1-\lambda^2y^2} + \frac{2\sqrt{1-\lambda^2y^2}}{in\mathrm{M}}\sum\frac{(-1)^q\sin\operatorname{am}\frac{(2q-1)i\Lambda'}{n}\cos\operatorname{am}\frac{(2q-1)i\Lambda'}{n}}{\sin^2\operatorname{am}\frac{(2q-1)i\Lambda'}{n}-y^2}$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(nu,k) = \frac{\lambda'}{k'n\mathrm{M}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{2\lambda' y\sqrt{1-y^2}}{k'n\mathrm{M}}\sum\frac{(-1)^q\Delta\operatorname{am}\frac{2qi\Lambda'}{n}}{\cos^2\operatorname{am}\frac{2qi\Lambda'}{n}-y^2\Delta^2\operatorname{am}\frac{2qi\Lambda'}{n}}.$$

Theorema analyticum generale, transformationem illam primae supplementariam concernens, iam initio mensis Augusti a. 1827 cum Cl°. Legendre communicavi, cuius etiam ille in nota supra citata (*Nova Astronomica* a. 1827. Nr. 130) mentionem iniicere voluit. Simile formularum systema pro transformatione altera secundae supplementaria seu transformatione moduli λ_1 in modulum k stabiliri potuisset. Quae omnia ut dilucidiora fiant, adiecta tabula formulas fundamentales pro transformationibus prima et secunda earumque complementariis et supplementariis conspectui exponere placuit*).

Nec non e numero transformationum imaginariarum una quaeque suam habet supplementariam ad multiplicationem. Supponamus, quod licet, numeros m, m' §. 20. factorem communem non habere: sit porro $m\mu'-\mu m' = 1$, designantibus μ, μ' numeros integros positivos seu negativos. Iam si in formulis nostris generalibus de transformatione propositis §. 20. sqq. ponitur $\omega = \frac{\mu K+\mu' iK'}{n\mathrm{M}}$, ac k et λ inter se commutantur, formulas obtines, quae ad supplementariam transformationis pertinent. Posito $m = 1$, $m' = 0$, fit $\mu = 0$, $\mu' = 1$, unde $\frac{\mu K+\mu' iK'}{n\mathrm{M}} = \frac{iK'}{n\mathrm{M}} = \frac{i\Lambda'}{n}$, quod primae supplementariam praebet, uti vidimus.

---

*) In quatuor paginis sequentibus inveniuntur:

Transformationes reales functionum ellipticarum earumque complementariae et supplementariae, quae primae huius operis editioni in tabula separata adiectae erant.

B.

A. TRANSFORMATIO PRIMA CUM SUPPLEMENTARIA.

$$\text{(a)}\qquad \lambda = k^n \sin^4 \operatorname{coam}\frac{2K}{n}\sin^4 \operatorname{coam}\frac{4K}{n}\cdots\sin^4 \operatorname{coam}\frac{(n-1)K}{n} \qquad (\text{mod.}\, k)$$

$$\text{(aa)}\qquad k = \lambda^n \sin^4 \operatorname{coam}\frac{2i\Lambda'}{n}\sin^4 \operatorname{coam}\frac{4i\Lambda'}{n}\cdots\sin^4 \operatorname{coam}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n} \qquad (\text{mod.}\, \lambda)$$

$$= \frac{\lambda^n}{\Delta^4 \operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}\,\Delta^4 \operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\Delta^4 \operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}} \qquad (\text{mod.}\, \lambda')$$

$$\text{(b)}\qquad \mathrm{M} = \frac{\sin^2 \operatorname{coam}\frac{2K}{n}\sin^2 \operatorname{coam}\frac{4K}{n}\cdots\sin^2 \operatorname{coam}\frac{(n-1)K}{n}}{\sin^2 \operatorname{am}\frac{2K}{n}\sin^2 \operatorname{am}\frac{4K}{n}\cdots\sin^2 \operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n}} \qquad (\text{mod.}\, k)$$

$$\text{(bb)}\qquad \frac{1}{n\mathrm{M}} = \frac{\sin^2 \operatorname{coam}\frac{2\Lambda'}{n}\sin^2 \operatorname{coam}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\sin^2 \operatorname{coam}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}{\sin^2 \operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}\sin^2 \operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\sin^2 \operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}} \qquad (\text{mod.}\, \lambda')$$

$$\sin\operatorname{am}(u,k) = x;\quad \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}},\lambda\right) = y;\quad \sin\operatorname{am}(nu,k) = z$$

$$\text{(c)}\qquad y = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\sin\operatorname{am}u\,\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{4K}{n}\right)\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{8K}{n}\right)\cdot\cdot\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{4(n-1)K}{n}\right) (\text{mod.}\, k)$$

$$= \frac{\frac{x}{\mathrm{M}}\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{n}}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n}}\right)}{\left(1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{n}\right)\left(1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{4K}{n}\right)\cdot\cdot\left(1-k^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n}\right)} \qquad (\text{mod.}\, k)$$

$$\text{(cc)}\qquad z = \sqrt{\frac{\lambda^n}{k}}\sin\operatorname{am}\frac{u}{\mathrm{M}}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{4i\Lambda'}{n}\right)\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{8i\Lambda'}{n}\right)\cdot\cdot\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{4(n-1)i\Lambda'}{n}\right) (\text{mod.}\, \lambda)$$

$$= \frac{n\mathrm{M}y\left(1+\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}}\right)\left(1+\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1+\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right)}{\left(1+\lambda^2y^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}\right)\left(1+\lambda^2y^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}\right)\cdots\left(1+\lambda^2y^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}\right)} \qquad (\text{mod.}\, \lambda')$$

TRANSFORMATIONES COMPLEMENTARIAE.

$$\text{(a)}\qquad \lambda' = k'^n \sin^4 \operatorname{coam}\frac{2iK}{n}\sin^4 \operatorname{coam}\frac{4iK}{n}\cdots\sin^4 \operatorname{coam}\frac{(n-1)iK}{n} \qquad (\text{mod.}\, k')$$

$$= \frac{k'^n}{\Delta^4 \operatorname{am}\frac{2K}{n}\,\Delta^4 \operatorname{am}\frac{4K}{n}\cdots\Delta^4 \operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n}} \qquad (\text{mod.}\, k)$$

$$\text{(aa)}\qquad k' = \lambda'^n \sin^4 \operatorname{coam}\frac{2\Lambda'}{n}\sin^4 \operatorname{coam}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\sin^4 \operatorname{coam}\frac{(n-1)\Lambda'}{n} \qquad (\text{mod.}\, \lambda')$$

(b) et (bb) caedem atque supra.

$$\sin\operatorname{am}(u,k') = x;\quad \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}},\lambda'\right) = y;\quad \sin\operatorname{am}(nu,k') = z$$

$$\text{(c)}\qquad y = \sqrt{\frac{k'^n}{\lambda'}}\sin\operatorname{am}u\,\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{4iK}{n}\right)\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{8iK}{n}\right)\cdots\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{4(n-1)iK}{n}\right) (\text{mod.}\, k')$$

$$= \frac{\frac{x}{\mathrm{M}}\left(1+\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{2K}{n}}\right)\left(1+\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{4K}{n}}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n}}\right)}{\left(1+k'^2x^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{2K}{n}\right)\left(1+k'^2x^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{4K}{n}\right)\cdots\left(1+k'^2x^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}\frac{(n-1)K}{n}\right)} \qquad (\text{mod.}\, k)$$

$$\text{(cc)}\qquad z = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{\lambda'^n}{k'}}\sin\operatorname{am}\frac{u}{\mathrm{M}}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{4\Lambda'}{n}\right)\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{8\Lambda'}{n}\right)\cdot\cdot\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}+\frac{4(n-1)\Lambda'}{n}\right) (\text{mod.}\, \lambda')$$

$$= \frac{n\mathrm{M}y\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right)}{\left(1-\lambda'^2y^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}\right)\left(1-\lambda'^2y^2\sin^2\operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}\right)\cdots\left(1-\lambda'^2y^2\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}\right)} \qquad (\text{mod.}\, \lambda')$$

$$\Lambda = \frac{K}{n\mathrm{M}};\qquad \Lambda' = \frac{K'}{\mathrm{M}}$$

B. TRANSFORMATIO SECUNDA CUM SUPPLEMENTARIA.

(a) $$\lambda_1 = k^n \sin^4 \operatorname{coam} \frac{2iK'}{n} \sin^4 \operatorname{coam} \frac{4iK'}{n} \cdots \sin^4 \operatorname{coam} \frac{(n-1)iK'}{n} \qquad (\text{mod}. k)$$

$$= \frac{k^n}{\Delta^4 \operatorname{am} \frac{2K'}{n} \Delta^4 \operatorname{am} \frac{4K'}{n} \cdots \Delta^4 \operatorname{am} \frac{(n-1)K'}{n}} \qquad (\text{mod}. k')$$

(aa) $$k = \lambda_1^n \sin^4 \operatorname{coam} \frac{2\Lambda_1}{n} \sin^4 \operatorname{coam} \frac{4\Lambda_1}{n} \cdots \sin^4 \operatorname{coam} \frac{(n-1)\Lambda_1}{n} \qquad (\text{mod}. \lambda_1)$$

(b) $$\mathrm{M}_1 = \frac{\sin^2 \operatorname{coam} \frac{2K'}{n} \sin^2 \operatorname{coam} \frac{4K'}{n} \cdots \sin^2 \operatorname{coam} \frac{(n-1)K'}{n}}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{2K'}{n} \sin^2 \operatorname{am} \frac{4K'}{n} \cdots \sin^2 \operatorname{am} \frac{(n-1)K'}{n}} \qquad (\text{mod}. k')$$

(bb) $$\frac{1}{n\mathrm{M}_1} = \frac{\sin^2 \operatorname{coam} \frac{2\Lambda_1}{n} \sin^2 \operatorname{coam} \frac{4\Lambda_1}{n} \cdots \sin^2 \operatorname{coam} \frac{(n-1)\Lambda_1}{n}}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{2\Lambda_1}{n} \sin^2 \operatorname{am} \frac{4\Lambda_1}{n} \cdots \sin^2 \operatorname{am} \frac{(n-1)\Lambda_1}{n}} \qquad (\text{mod}. \lambda_1)$$

$$\sin \operatorname{am}(u, k) = x; \quad \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1\right) = y; \quad \sin \operatorname{am}(nu, k) = z$$

(c) $$y = \sqrt{\frac{k^n}{\lambda_1}} \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}\left(u + \frac{4iK'}{n}\right) \sin \operatorname{am}\left(u + \frac{8iK'}{n}\right) \cdots \sin \operatorname{am}\left(u + \frac{4(n-1)iK'}{n}\right) (\text{mod}. k)$$

$$= \frac{\frac{x}{\mathrm{M}_1}\left(1 + \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{2K'}{n}}\right)\left(1 + \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{4K'}{n}}\right) \cdots \left(1 + \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{(n-1)K'}{n}}\right)}{\left(1 + k^2 x^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{2K'}{n}\right)\left(1 + k^2 x^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{4K'}{n}\right) \cdots \left(1 + k^2 x^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{(n-1)K'}{n}\right)} \qquad (\text{mod}. k')$$

(cc) $$z = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda_1^n}{k}} \sin \operatorname{am} \frac{u}{\mathrm{M}_1} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1} + \frac{4\Lambda_1}{n}\right) \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1} + \frac{8\Lambda_1}{n}\right) \cdots \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1} + \frac{4(n-1)\Lambda_1}{n}\right) (\text{mod}. \lambda_1)$$

$$= \frac{n\mathrm{M}_1 y \left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{2\Lambda_1}{n}}\right)\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{\Lambda_1}{n}}\right) \cdots \left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{(n-1)\Lambda_1}{n}}\right)}{\left(1 - \lambda_1^2 y^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2\Lambda_1}{n}\right)\left(1 - \lambda_1^2 y^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{4\Lambda_1}{n}\right) \cdots \left(1 - \lambda_1^2 y^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{(n-1)\Lambda_1}{n}\right)} \qquad (\text{mod}. \lambda_1)$$

TRANSFORMATIONES COMPLEMENTARIAE.

(a) $$\lambda_1' = k'^n \sin^4 \operatorname{coam} \frac{2K'}{n} \sin^4 \operatorname{coam} \frac{4K'}{n} \cdots \sin^4 \operatorname{coam} \frac{(n-1)K'}{n} \qquad (\text{mod}. k')$$

(aa) $$k' = \lambda_1'^n \sin^4 \operatorname{coam} \frac{2i\Lambda_1}{n} \sin^4 \operatorname{coam} \frac{4i\Lambda_1}{n} \cdots \sin^4 \operatorname{coam} \frac{(n-1)i\Lambda_1}{n} \qquad (\text{mod}. \lambda_1')$$

$$= \frac{\lambda_1'^n}{\Delta^4 \operatorname{am} \frac{2\Lambda_1}{n} \Delta^4 \operatorname{am} \frac{4\Lambda_1}{n} \cdots \Delta^4 \operatorname{am} \frac{(n-1)\Lambda_1}{n}} \qquad (\text{mod}. \lambda_1)$$

(b) et (bb) eaedem atque supra.

$$\sin \operatorname{am}(u, k') = x; \quad \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1}, \lambda_1'\right) = y; \quad \sin \operatorname{am}(nu, k') = z$$

(c) $$y = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k'^n}{\lambda_1'}} \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}\left(u + \frac{4K'}{n}\right) \sin \operatorname{am}\left(u + \frac{8K'}{n}\right) \cdots \sin \operatorname{am}\left(u + \frac{4(n-1)K'}{n}\right) (\text{mod}. k')$$

$$= \frac{\frac{x}{\mathrm{M}_1}\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{2K'}{n}}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{4K'}{n}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{(n-1)K'}{n}}\right)}{\left(1 - k'^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2K'}{n}\right)\left(1 - k'^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{4K'}{n}\right) \cdots \left(1 - k'^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{(n-1)K'}{n}\right)} \qquad (\text{mod}. k')$$

(cc) $$z = \sqrt{\frac{\lambda_1'^n}{k'}} \sin \operatorname{am} \frac{u}{\mathrm{M}_1} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1} + \frac{4i\Lambda_1}{n}\right) \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1} + \frac{8i\Lambda_1}{n}\right) \cdots \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}_1} + \frac{4(n-1)i\Lambda_1}{n}\right) (\text{mod}. \lambda_1')$$

$$= \frac{n\mathrm{M}_1 y \left(1 + \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{2\Lambda_1}{n}}\right)\left(1 + \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{4\Lambda_1}{n}}\right) \cdots \left(1 + \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{(n-1)\Lambda_1}{n}}\right)}{\left(1 + \lambda_1'^2 y^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{2\Lambda_1}{n}\right)\left(1 + \lambda_1'^2 y^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{4\Lambda_1}{n}\right) \cdots \left(1 + \lambda_1'^2 y^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} \frac{(n-1)\Lambda_1}{n}\right)} \qquad (\text{mod}. \lambda_1)$$

$$\Lambda_1 = \frac{K}{\mathrm{M}_1}; \qquad \Lambda_1' = \frac{K'}{n\mathrm{M}_1}$$

FORMULAE ANALYTICAE GENERALES PRO MULTIPLICATIONE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM.

28.

E binis transformationibus supplementariis componere licet ipsas pro multiplicatione formulas, seu formulas, quibus functiones ellipticae argumenti nu per functiones ellipticas argumenti u exprimuntur. Quod ut exemplo demonstretur, multiplicationem e transformatione prima eiusque supplementaria componamus. Quem in finem revocetur formula:

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{4K}{n}\right)\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{8K}{n}\right)\cdots\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{4(n-1)K}{n}\right),$$

quam etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\prod\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{2mK}{n}\right),$$

designante m numeros $0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm\frac{n-1}{2}$. In hac formula loco u ponamus $u+\frac{2m'iK'}{n}$, unde $\frac{u}{M}$ abit in $\frac{u}{M}+\frac{2m'iK'}{nM}=\frac{u}{M}+\frac{2m'i\Lambda'}{n}$: prodit

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}+\frac{2m'i\Lambda'}{n},\lambda\right)=\sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\prod\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right).$$

Iam ubi et ipsi m' tribuuntur valores $0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm\frac{n-1}{2}$, ita ut utrisque $m,\ m'$ isti conveniant valores, facto producto obtinemus:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}+\frac{2m'i\Lambda'}{n},\lambda\right)=\sqrt{\frac{k^{nn}}{\lambda^n}}\prod\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right),$$

ubi in altero producto numero m', in altero utrique $m,\ m'$ valores $0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm\frac{n-1}{2}$ tribuendi sunt.

At vidimus in §° praecedente, esse:

$$\sin\operatorname{am}(nu,k)=\sqrt{\frac{\lambda^n}{k}}\sin\operatorname{am}\frac{u}{M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}+\frac{4i\Lambda'}{n}\right)\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}+\frac{8i\Lambda'}{n}\right)\cdots\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}+\frac{4(n-1)i\Lambda'}{n}\right)(\operatorname{mod}.\lambda),$$

quam ita quoque repraesentare licet formulam:

$$\sin\operatorname{am}(nu,k)=\sqrt{\frac{\lambda^n}{k}}\prod\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}+\frac{2m'i\Lambda'}{n},\lambda\right),$$

unde iam:

$$(1.)\qquad \sin\operatorname{am}nu=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{k^{nn-1}}\prod\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right).$$

Eodem modo invenitur:

$$(2.)\qquad \cos\operatorname{am}nu=\sqrt{\left(\frac{k}{k'}\right)^{nn-1}}\prod\cos\operatorname{am}\left(u+\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right)$$

$$(3.)\qquad \Delta\operatorname{am}nu=\sqrt{\left(\frac{1}{k'}\right)^{nn-1}}\prod\Delta\operatorname{am}\left(u+\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right).$$

Quae facile etiam in hanc formam rediguntur formulae:

$$(4.)\qquad \sin\operatorname{am}nu=n\sin\operatorname{am}u\prod\frac{1-\dfrac{\sin^2\operatorname{am}u}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2mK+2m'iK'}{n}}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2mK+2m'iK'}{n}\sin^2\operatorname{am}u}$$

$$(5.)\qquad \cos\operatorname{am}nu=\cos\operatorname{am}u\prod\frac{1-\dfrac{\sin^2\operatorname{am}u}{\sin^2\operatorname{coam}\frac{2mK+2m'iK'}{n}}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2mK+2m'iK'}{n}\sin^2\operatorname{am}u}$$

$$(6.)\qquad \Delta\operatorname{am}nu=\Delta\operatorname{am}u\prod\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{coam}\frac{2mK+2m'iK'}{n}\sin^2\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2mK+2m'iK'}{n}\sin^2\operatorname{am}u}.$$

Quibus addere placet sequentes:

$$(7.)\qquad \prod\sin^2\operatorname{am}\frac{2mK+2m'iK'}{n}=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n}{k^{\frac{nn-1}{2}}}$$

$$(8.)\qquad \prod\cos^2\operatorname{am}\frac{2mK+2m'iK'}{n}=\left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{nn-1}{2}}$$

$$(9.)\qquad \prod\Delta^2\operatorname{am}\frac{2mK+2m'iK'}{n}=k'^{\frac{nn-1}{2}}.$$

In sex formulis postremis numero m valores tantum positivi $0, 1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$ conveniunt, ita tamen, ut quoties $m = 0$, et ipsi m' valores tantum positivi $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$ tribuantur. Et has et alias pro multiplicatione formulas iam prius Cl. Abel mutatis mutandis proposuit, unde nobis breviores esse licuit.

DE AEQUATIONUM MODULARIUM AFFECTIBUS.

29.

Quia eodem modo λ a k atque k a λ_1 nec non λ'_1 a k', k' a λ' pendet: patet, ubi secundum eandem legem modulorum scalas condas, qui in se invicem transformari possunt, alteram modulum k, alteram complementum eius k' continentem, in iis terminos fore eodem ordine se excipientes:

$$\begin{array}{c} \ldots\ldots,\ \lambda,\quad k,\ \lambda_1,\ \ldots \\ \ldots,\ \lambda'_1,\ \ k',\ \lambda',\ \ldots\ldots, \end{array}$$

id quod in transformationibus secundi et tertii ordinis iam prius a Cl°. Legendre observatum et facto calculo confirmatum est. Similia cum de omnibus modulis transformatis et imaginariis valeant, patet, designante λ modulum transformatum quemlibet, aequationes algebraicas inter k et λ, seu inter $u = \sqrt[4]{k}$ et $v = \sqrt[4]{\lambda}$, quas *aequationes modulares* nuncupavimus, immutatas manere,

1.) ubi k et λ inter se commutentur,
2.) ubi k' loco k, λ' loco λ ponatur.

Alterum iam supra in aequationibus modularibus, quae ad transformationes tertii et quinti ordinis pertinent:

$$(1.)\qquad u^4 - v^4 + 2uv(1-u^2v^2) = 0$$
$$(2.)\qquad u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2-v^2) + 4uv(1-u^4v^4) = 0,$$

observavimus eiusque observationis ope expressiones algebraicas pro transformationibus supplementariis exhibuimus. Ut alterum quoque his exemplis probetur, aequationes illas in alias transformemus inter $kk = u^8$ et $\lambda\lambda = v^8$, quod non sine calculo prolixo fit. Quo subducto obtinentur aequationes:

$$(1.)\qquad (k^2-\lambda^2)^4 = 128\,k^2\lambda^2(1-k^2)(1-\lambda^2)(2-k^2-\lambda^2+2\,k^2\lambda^2)$$
$$(2.)\qquad (k^2-\lambda^2)^6 = 512\,k^2\lambda^2(1-k^2)(1-\lambda^2)(L-L'k^2+L''k^4-L'''k^6),$$

siquidem in secunda ponitur:

$$\begin{aligned} L &= 128 - 192\lambda^2 + \ 78\lambda^4 - \ \ 7\lambda^6 \\ L' &= 192 + 252\lambda^2 - 423\lambda^4 - \ 78\lambda^6 \\ L'' &= \ 78 + 423\lambda^2 - 252\lambda^4 - 192\lambda^6 \\ L''' &= \ \ 7 - \ 78\lambda^2 + 192\lambda^4 - 128\lambda^6. \end{aligned}$$

Quae in formam multo commodiorem abeunt aequationes, introductis quantitatibus $q = 1-2k^2$, $l = 1-2\lambda^2$. Quo facto aequationes propositae evadunt:

$$(1.)\quad (q-l)^4 = \ 64(1-q^2)(1-l^2)[3+ql]$$
$$\begin{aligned}(2.)\quad (q-l)^6 &= 256(1-q^2)(1-l^2)[16\,ql(9-ql)^2+9(45-ql)(q-l)^2] \\ &= 256(1-q^2)(1-l^2)[405(q^2+l^2)+486\,ql-9\,ql(q^2+l^2)-270q^2l^2+16q^3l^3].\end{aligned}$$

Quae aequationes, ubi k' loco k, λ' loco λ ponitur, unde q in $-q$, l in $-l$ abit, immutatae manent, id quod demonstrandum erat.

Corollarium. Quia aequationes modulares inter $q = 1-2k^2$ et $l = 1-2\lambda^2$ propositas formam satis commodam induere vidimus, interesse potest et ipsas functiones K, K' secundum quantitatem q evolvere. Quod non ineleganter fit per series:

$$\begin{aligned} K &= J\left(1+\frac{q^2}{2.4}+\frac{5.5.q^4}{2.4.6.8}+\frac{5.5.9.9.q^6}{2.4.6.8.10.12}+\cdots\right) \\ &\quad -\frac{\pi}{2J}\left(\frac{q}{2}+\frac{3.3.q^3}{2.4.6}+\frac{3.3.7.7q^5}{2.4.6.8.10}+\frac{3.3.7.7.11.11.q^7}{2.4.6.8.10.12.14}+\cdots\right) \\ K' &= J\left(1+\frac{q^2}{2.4}+\frac{5.5.q^4}{2.4.6.8}+\frac{5.5.9.9.q^6}{2.4.6.8.10.12}+\cdots\right) \\ &\quad +\frac{\pi}{2J}\left(\frac{q}{2}+\frac{3.3.q^3}{2.4.6}+\frac{3.3.7.7.q^5}{2.4.6.8.10}+\frac{3.3.7.7.11.11.q^7}{2.4.6.8.10.12.14}+\cdots\right), \end{aligned}$$

ubi brevitatis causa positum est:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = J.$$

30.

Faciliore negotio pro transformatione tertii ordinis aequationem:

$$u^4 - v^4 + 2uv(1-u^2v^2) = 0$$

ita transformare licet, ut correlatio illa inter modulos et complementa eluceat. Obtinemus enim ex illa:

$$(1-u^4)(1+v^4) = 1-u^4v^4+2uv(1-u^2v^2) = (1-u^2v^2)(1+uv)^2$$
$$(1+u^4)(1-v^4) = 1-u^4v^4-2uv(1-u^2v^2) = (1-u^2v^2)(1-uv)^2,$$

quibus in se ductis aequationibus prodit:

$$(1-u^8)(1-v^8) = (1-u^2v^2)^4.$$

Iam sit:

$$1-u^8 = k'k' = u'^8$$
$$1-v^8 = \lambda'\lambda' = v'^8;$$

extractis radicibus fit:

$$u'^2v'^2 = 1-u^2v^2$$

sive:

$$u^2v^2+u'^2v'^2 = \sqrt{k\lambda}+\sqrt{k'\lambda'} = 1,$$

quam ipsam elegantissimam formulam iam Cl. Legendre exhibuit. Neque ineleganter illa per formulas nostras analyticas probatur, quippe e quibus casu $n=3$ fluit:

$$\lambda = k^3\sin^4\operatorname{coam}4\omega, \quad \lambda' = \frac{k'^3}{\Delta^4\operatorname{am}4\omega},$$

unde:

$$\sqrt{k\lambda} = k^2\sin^2\operatorname{coam}4\omega = \frac{k^2\cos^2\operatorname{am}4\omega}{\Delta^2\operatorname{am}4\omega}$$
$$\sqrt{k'\lambda'} = \frac{k'^2}{\Delta^2\operatorname{am}4\omega},$$

unde cum sit:

$$k'k'+kk\cos^2\operatorname{am}4\omega = 1-kk\sin^2\operatorname{am}4\omega = \Delta^2\operatorname{am}4\omega,$$

obtinemus, quod demonstrandum erat:

$$\sqrt{k\lambda}+\sqrt{k'\lambda'} = 1.$$

Ut exemplo secundo simpliciorem inter u, v, u', v' eruam aequationem, ita ago. Aequationem propositam:

$$u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4) = 0$$

exhibeo, ut sequitur:

$$(u^2-v^2)(u^4+6u^2v^2+v^4)+4uv(1-u^4v^4) = 0,$$

quam facile patet induere posse formas duas sequentes:

$$(u^2-v^2)(u+v)^4 = -4uv(1-u^4)(1+v^4)$$
$$(u^2-v^2)(u-v)^4 = -4uv(1+u^4)(1-v^4),$$

quibus in se ductis aequationibus prodit:

$$(u^2-v^2)^6 = 16u^2v^2(1-u^8)(1-v^8) = 16u^2v^2u'^8v'^8.$$

Quia simul, ut supra probatum est, u^8 in u'^8, v^8 in v'^8 abit, obtinemus etiam:

$$(v'^2-u'^2)^6 = 16u'^2v'^2(1-u'^8)(1-v'^8) = 16u'^2v'^2u^8v^8.$$

Hinc facta divisione et extractis radicibus, eruitur:

$$\frac{u^2-v^2}{v'^2-u'^2} = \frac{u'v'}{uv}, \quad \text{sive} \quad uv(u^2-v^2) = u'v'(v'^2-u'^2)$$

sive:

$$\sqrt[4]{k\lambda}(\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}) = \sqrt[4]{k'\lambda'}(\sqrt{\lambda'}-\sqrt{k'}).$$

31.

Alia adhuc aequationum modularium:

$$u^4-v^4+2uv(1-u^2v^2) = 0$$
$$u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4) = 0$$

insignis proprietas vel ipso intuitu invenitur, videlicet immutatas eas manere, siquidem loco u, v ponatur $\frac{1}{u}, \frac{1}{v}$. Quod ut generaliter de aequationibus modularibus demonstretur, adnotentur sequentia, quae ad alias etiam quaestiones usui esse possunt.

Ubi ponitur $y = kx$, obtinetur:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}} = \frac{k\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

unde cum simul $x=0$, $y=0$:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}} = k\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Hinc posito:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u,$$

fit:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}} = ku,$$

unde $x = \sin\operatorname{am}(u,k)$, $y = \sin\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$. Hinc provenit aequatio:

$$\sin\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k\sin\operatorname{am}(u,k),$$

unde etiam:

$$\cos\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \Delta\operatorname{am}(u,k)$$

$$\Delta\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \cos\operatorname{am}(u,k)$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{k}{k'}\cos\operatorname{coam}(u,k)$$

$$\sin\operatorname{coam}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\sin\operatorname{coam}(u,k)}$$

$$\cos\operatorname{coam}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = ik'\operatorname{tg}\operatorname{am}(u,k)$$

$$\Delta\operatorname{coam}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{ik'}{k\cos\operatorname{am}(u,k)}$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{coam}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{-i}{\cos\operatorname{coam}(u,k)}.$$

Porro ponendo iu loco u, quia complementum moduli $\frac{1}{k}$ fit $\frac{ik'}{k}$, obtinemus adiumento formularum §[i] 19.:

$$\sin\operatorname{am}\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \cos\operatorname{coam}(u,k')$$

$$\cos\operatorname{am}\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \sin\operatorname{coam}(u,k')$$

$$\Delta\operatorname{am}\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{1}{\Delta\operatorname{am}(u,k')}$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \operatorname{cotg}\operatorname{coam}(u,k')$$

$$\sin\operatorname{coam}\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \cos\operatorname{am}(u,k')$$

$$\cos\operatorname{coam}\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \sin\operatorname{am}(u,k')$$

$$\Delta\operatorname{coam}\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{\Delta\operatorname{am}(u,k')}{k}$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{coam}\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \operatorname{cotg}\operatorname{am}(u,k').$$

Iam investigemus, quaenam evadant K, K' seu arg. $\operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, arg. $\operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}, k'\right)$, siquidem loco k ponitur $\frac{1}{k}$; seu investigemus valores expressionum arg. $\operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{k}\right)$, arg. $\operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{ik'}{k}\right)$, quae expressiones e notatione a Cl? Legendre adhibita forent $F^1\left(\frac{1}{k}\right)$, $F^1\left(\frac{ik'}{k}\right)$. Fit autem primum:

$$\arg\operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{k}\right) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}} = \int_0^k \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}} + \int_k^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}}.$$

Posito $y = kx$, fit:

$$\int_0^k \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}} = k\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = kK.$$

Ut alterum eruatur integrale $\int_k^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}}$, ponamus $y = \sqrt{1-k'k'x^2}$, unde $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(\frac{y^2}{k^2}-1\right)}} = \frac{-kdx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'k'x^2)}}$. Iam quia x inde a 0 usque ad 1 crescit, simul atque y inde a 1 usque ad k decrescit, obtinemus:

$$\int_k^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}} = -i\int_k \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(\frac{y^2}{k^2}-1\right)}} = -i\int_0^1 \frac{kdx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'k'x^2)}} = -ikK'.$$

Hinc prodit:

$$\arg.\operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{k}\right) = k\left\{\arg.\operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - i\arg.\operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}, k'\right)\right\} = k\{K-iK'\},$$

sive ubi k in $\frac{1}{k}$ mutatur, abit K in $k\{K-iK'\}$.

Posito secundo loco $y = \cos\varphi$, fit:

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1+\frac{k'k'}{kk}y^2\right)}} = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'k'\sin^2\varphi}} = kK',$$

unde:

$$\arg.\operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{ik'}{k}\right) = k\arg.\operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = kK',$$

seu ubi k in $\frac{1}{k}$ mutatur, abit K' in kK'.

Generaliter igitur, mutato k in $\frac{1}{k}$, abit $mK+im'K'$ in $k\{mK+(m'-m)iK'\}$, unde $\sin\operatorname{coam}\left\{\frac{p(mK+m'iK')}{n}, k\right\}$ in $\sin\operatorname{coam}\left\{\frac{kp(mK+(m'-m)iK')}{n}, \frac{1}{k}\right\}$, id quod e formula
$$\sin\operatorname{coam}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\sin\operatorname{coam}(u, k)}$$
fit:
$$\sin\operatorname{coam}\left\{\frac{kp(mK+(m'-m)iK')}{n}, \frac{1}{k}\right\} = \frac{1}{\sin\operatorname{coam}\left\{\frac{p(mK+(m'-m)iK')}{n}, k\right\}}.$$
Iam igitur, posito $\frac{mK+m'iK'}{n} = \omega$, $\frac{mK+(m'-m)iK'}{n} = \omega_1$, expressio:
$$\lambda = k^n[\sin\operatorname{coam} 2\omega \sin\operatorname{coam} 4\omega \sin\operatorname{coam} 6\omega \ldots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^4,$$
mutato k in $\frac{1}{k}$, in hanc abit:
$$\frac{1}{k^n[\sin\operatorname{coam} 2\omega_1 \sin\operatorname{coam} 4\omega^1 \sin\operatorname{coam} 6\omega_1 \ldots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega_1]^4} = \frac{1}{\mu},$$
ubi μ et ipsa est radix aequationis modularis, seu e modulorum numero, in quos per transformationem n^{ti} ordinis modulum propositum k transformare licet. Namque e valoribus, quos ω induere potest, ut prodeat modulus transformatus, erit etiam ille ω_1. Unde iam causa patet, cur generaliter aequationes modulares, mutato k in $\frac{1}{k}$, λ in $\frac{1}{\lambda}$, immutatae manere debeant.

Adnotabo adhuc, ubi secundum eandem transformationis legem quampiam simul transformatur k in $k^{(m)}$, λ in $\lambda^{(m)}$, quoties $k^{(m)}$ loco k ponatur, etiam λ in $\lambda^{(m)}$ abire; unde aequationes modulares, ubi simul k in $k^{(m)}$, λ in $\lambda^{(m)}$ mutatur, immutatae manere debent. Ita ex. g. aequatio $\sqrt{k\lambda}+\sqrt{k'\lambda'} = 1$, quae est pro transformatione tertii ordinis, immutata manere debet, ubi loco k, λ resp. ponitur $\frac{1-k'}{1+k'}$, $\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}$, unde loco k', λ' ponetur $\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, $\frac{2\sqrt{\lambda'}}{1+\lambda'}$, id quod per transformationem secundi ordinis fieri notum est. Quippe aequatio $\sqrt{k\lambda}+\sqrt{k'\lambda'} = 1$ in hanc abit:
$$\sqrt{\frac{(1-k')(1-\lambda')}{(1+k')(1+\lambda')}} + \frac{2\sqrt[4]{k'\lambda'}}{\sqrt{(1+k')(1+\lambda')}} = 1,$$
sive:
$$2\sqrt[4]{k'\lambda'} = \sqrt{(1+k')(1+\lambda')} - \sqrt{(1-k')(1-\lambda')}.$$
Qua in se ipsa ducta prodit:

$$4\sqrt{k'\lambda'} = 2(1+k'\lambda') - 2k\lambda, \quad \text{sive} \quad k\lambda = 1+k'\lambda'-2\sqrt{k'\lambda'},$$
quae extractis radicibus in propositam redit:
$$\sqrt{k\lambda} = 1-\sqrt{k'\lambda'} \quad \text{sive} \quad \sqrt{k\lambda}+\sqrt{k'\lambda'} = 1.$$
Quod exemplum iam a Cl°. Legendre propositum est. Generaliter autem de compositione transformationum probari potest, transformationibus duabus aut pluribus successive adhibitis, ad eandem perveniri, quocunque illae adhibeantur ordine.

32.

At inter affectus aequationum modularium id maxime memorabile ac singulare mihi videor animadvertere, *quod eidem omnes aequationi differentiali tertii ordinis satisfaciunt.* Cuius tamen investigatio paullo longius repetenda erit.

Satis notum est*), posito
$$aK+bK' = Q,$$
fore:
$$k(1-k^2)\frac{d^2Q}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dQ}{dk} = kQ,$$
designantibus a, b constantes quaslibet. Ita etiam posito
$$a'K+b'K' = Q',$$
designantibus a', b' alias constantes quaslibet, erit
$$k(1-k^2)\frac{d^2Q'}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dQ'}{dk} = kQ'.$$
Quibus combinatis aequationibus, obtinetur:
$$k(1-k^2)\left\{Q\frac{d^2Q'}{dk^2}-Q'\frac{d^2Q}{dk^2}\right\}+(1-3k^2)\left\{Q\frac{dQ'}{dk}-Q'\frac{dQ}{dk}\right\} = 0,$$
unde integratione facta:
$$k(1-k^2)\left\{Q\frac{dQ'}{dk}-Q'\frac{dQ}{dk}\right\} = (ab'-a'b)k(1-k^2)\left\{K\frac{dK'}{dk}-K'\frac{dK}{dk}\right\} = (ab'-a'b)C.$$
Constans C a Cl°. Legendre e casu speciali inventa est $= -\frac{\pi}{2}$, unde iam:
$$Q\frac{dQ'}{dk}-Q'\frac{dQ}{dk} = -\tfrac{1}{2}\frac{\pi(ab'-a'b)}{k(1-k^2)},$$
sive
$$d\frac{Q'}{Q} = -\tfrac{1}{2}\frac{\pi(ab'-a'b)dk}{k(1-k^2)QQ}.$$

*) Cf. Legendre Traité des F. E. Tom. I. Cap. XIII.

Similiter designante λ alium modulum quemlibet, erit posito

$$\alpha\Lambda+\beta\Lambda' = L, \qquad \alpha'\Lambda+\beta'\Lambda' = L',$$

$$d\frac{L'}{L} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\pi(\alpha\beta'-\alpha'\beta)d\lambda}{\lambda(1-\lambda^2)LL}.$$

Sit λ modulus, in quem k per transformationem primam n^{ti} ordinis transformatur; sit porro $Q = K$, $Q' = K'$, $L = \Lambda$, $L' = \Lambda'$; erit:

$$\frac{L'}{L} = \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{nK'}{K} = \frac{nQ'}{Q},$$

unde:

$$\frac{ndk}{k(1-k^2)KK} = \frac{d\lambda}{\lambda(1-\lambda^2)\Lambda\Lambda}.$$

Invenimus autem pro ea transformatione $\Lambda = \frac{K}{n\mathrm{M}}$, unde iam:

$$\mathrm{MM} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda(1-\lambda^2)dk}{k(1-k^2)d\lambda}.$$

In transformatione secunda vidimus esse $\frac{\Lambda_1'}{\Lambda_1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{K'}{K}$, $\Lambda_1 = \frac{K}{\mathrm{M}_1}$, unde:

$$\frac{dk}{k(1-k^2)KK} = \frac{nd\lambda_1}{\lambda_1(1-\lambda_1^2)\Lambda_1\Lambda_1},$$

unde et hic:

$$\mathrm{M}_1\mathrm{M}_1 = \frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda_1(1-\lambda_1^2)dk}{k(1-k^2)d\lambda_1}.$$

Generaliter autem, quicunque sit modulus λ, sive realis sive imaginarius, in quem per transformationem n^{ti} ordinis transformari potest modulus propositus k, valebit aequatio:

$$MM = \frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda(1-\lambda^2)dk}{k(1-k^2)d\lambda}.$$

Quod ut probetur, adnotabo generaliter obtineri aequationes formae:

$$\alpha\Lambda+i\beta\Lambda' = \frac{aK+ibK'}{nM}$$

$$\alpha'\Lambda'+i\beta'\Lambda = \frac{a'K'+ib'K}{nM},$$

designantibus a, a', α, α' numeros impares, b, b', β, β' numeros pares, utrosque

positivos vel negativos eiusmodi, ut sit $aa'+bb' = n$, $\alpha\alpha'+\beta\beta' = 1$ *). Hinc posito:

$$aK+ibK' = Q, \qquad a'K'+ib'K = Q'$$

$$\alpha\Lambda+i\beta\Lambda' = L, \qquad \alpha'\Lambda'+i\beta'\Lambda = L',$$

obtinemus, quia $aa'+bb' = n$, $\alpha\alpha'+\beta\beta' = 1$:

$$d\frac{Q'}{Q} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{n\pi dk}{k(1-k^2)QQ}, \qquad d\frac{L'}{L} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\pi d\lambda}{\lambda(1-\lambda^2)LL},$$

unde cum sit: $\frac{Q'}{Q} = \frac{L'}{L}$, $\quad L = \frac{Q}{nM}$,

generaliter fit: $MM = \frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda(1-\lambda^2)dk}{k(1-k^2)d\lambda}$.

Adnotabo adhuc, aequationem inventam ita quoque exhiberi posse:

$$MM = \frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda^2(1-\lambda^2)d(k^2)}{k^2(1-k^2)d(\lambda^2)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda'^2(1-\lambda'^2)d(k'^2)}{k'^2(1-k'^2)d(\lambda'^2)},$$

unde videmus, expressionem MM non mutari, ubi loco k, λ complementa ponuntur k', λ', sive quod supra demonstravimus, transformationibus complementariis, signi ratione non habita, eundem esse multiplicatorem M. Porro mutando k in λ, λ in k, quo facto transformatio in supplementariam abit, mutatur MM in

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{k(1-k^2)d\lambda}{\lambda(1-\lambda^2)dk} = \frac{1}{nnMM}, \quad \text{sive } M \text{ in } \frac{1}{nM},$$

quod et ipsum supra probatum est.

33.

Posito $Q = aK+ibK'$, $L = \alpha\Lambda+i\beta\Lambda'$, constantes a, b, α, β ita semper determinare licet, ut sit $L = \frac{Q}{M}$, sive $Q = ML$. Porro habentur aequationes:

$$(k-k^3)\frac{d^2Q}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dQ}{dk}-kQ = 0 \tag{1.}$$

$$(\lambda-\lambda^3)\frac{d^2L}{d\lambda^2}+(1-3\lambda^2)\frac{dL}{d\lambda}-\lambda L = 0, \tag{2.}$$

*) Accuratior numerorum a, a', b, b' etc. determinatio pro singulis eiusdem ordinis transformationibus gravibus laborare difficultatibus videtur. Immo haec determinatio, nisi egregie fallimur, maxime a limitibus pendet, inter quos modulus k versatur, ita ut pro limitibus diversis plane alia evadat: quod quam intricatam reddat quaestionem, expertus cognoscet. Ante omnia autem accuratius in naturam modulorum imaginariorum inquirendum esse videtur, quae adhuc tota iacet quaestio.

quas etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$\text{(3.)}\qquad \frac{d}{dk}\left\{\frac{(k-k^3)dQ}{dk}\right\}-kQ = 0$$

$$\text{(4.)}\qquad \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{(\lambda-\lambda^3)dL}{d\lambda}\right\}-\lambda L = 0.$$

Substituamus in aequatione:

$$(k-k^3)\frac{d^2Q}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dQ}{dk}-kQ = 0$$

$Q = ML$, prodit:

$$\left.\begin{array}{r} L\left\{(k-k^3)\dfrac{d^2M}{dk^2}+(1-3k^2)\dfrac{dM}{dk}-kM\right\} \\ +\dfrac{dL}{dk}\left\{2(k-k^3)\dfrac{dM}{dk}+(1-3k^2)M\right\}+(k-k^3)M\dfrac{d^2L}{dk^2} \end{array}\right\} = 0,$$

qua per M multiplicata, obtinemus:

$$\text{(5.)}\qquad LM\left\{(k-k^3)\frac{d^2M}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dM}{dk}-kM\right\}+\frac{d}{dk}\left\{\frac{(k-k^3)MMdL}{dk}\right\} = 0.$$

At e §° antecedente fit:

$$MM = \frac{(\lambda-\lambda^3)dk}{n(k-k^3)d\lambda},\quad \text{unde}\quad \frac{(k-k^3)MMdL}{dk} = \frac{(\lambda-\lambda^3)dL}{n\,d\lambda}.$$

Porro ex aequatione (4.) fit:

$$d\left\{\frac{(\lambda-\lambda^3)dL}{d\lambda}\right\} = \lambda L d\lambda,$$

unde:

$$\frac{d}{dk}\left\{\frac{(k-k^3)MMdL}{dk}\right\} = \frac{1}{n}\,\frac{d}{dk}\left\{\frac{(\lambda-\lambda^3)dL}{d\lambda}\right\} = \frac{\lambda L d\lambda}{n dk}.$$

Hinc aequatio (5.) divisa per L in hanc abit:

$$\text{(6.)}\qquad M\left\{(k-k^3)\frac{d^2M}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dM}{dk}-kM\right\}+\frac{\lambda d\lambda}{n dk} = 0.$$

Ubi in hac aequatione valor ipsius M ex aequatione $MM = \frac{(\lambda-\lambda^3)dk}{n(k-k^3)d\lambda}$ substituitur, obtinetur aequatio differentialis inter ipsos modulos k, λ, quam facile patet ad ordinem tertium ascendere. Facto calculo paullo molesto invenitur:

$$\text{(7.)}\qquad \frac{3d^2\lambda^2}{dk^4}-\frac{2d\lambda}{dk}\cdot\frac{d^3\lambda}{dk^3}+\frac{d\lambda^2}{dk^2}\left\{\left[\frac{1+k^2}{k-k^3}\right]^2-\left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right]^2\frac{d\lambda^2}{dk^2}\right\} = 0.$$

In hac aequatione dk ut differentiale constans consideratum est. Quam ubi in aliam transformare placet, in qua differentiale nullum constans positum est, ponendum erit:

$$\frac{d^2\lambda}{dk^2} = \frac{d^2\lambda}{dk^2}-\frac{d\lambda d^2k}{dk^3}$$

$$\frac{d^3\lambda}{dk^3} = \frac{d^3\lambda}{dk^3}-\frac{3d^2\lambda d^2k}{dk^4}-\frac{d\lambda d^3k}{dk^4}+\frac{3d\lambda d^2k^2}{dk^5}$$

unde:

$$\frac{3d^2\lambda^2}{dk^4}-\frac{2d\lambda}{dk}\,\frac{d^3\lambda}{dk^3} = \frac{3d^2\lambda^2}{dk^4}-\frac{3d\lambda^2d^2k^2}{dk^6}+\frac{2d\lambda^2d^3k}{dk^5}-\frac{2d\lambda d^3\lambda}{dk^4}.$$

Hinc aequatio (7.) multiplicata per dk^6 in sequentem abit, in qua differentiale nullum constans positum est, vel in qua ut tale, quodcunque placet, considerari potest:

$$\text{(8.)}\quad 3\left\{dk^2d^2\lambda^2-d\lambda^2d^2k^2\right\}-2dk\,d\lambda\left\{dk\,d^3\lambda-d\lambda\,d^3k\right\}+dk^2d\lambda^2\left\{\left[\frac{1+k^2}{k-k^3}\right]^2dk^2-\left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right]^2d\lambda^2\right\} = 0.$$

Hanc patet, elementis k et λ inter se commutatis, immutatam manere aequationem, id quod supra de aequationibus modularibus probavimus.

Operae pretium est, alia adhuc methodo aequationem illam differentialem tertii ordinis investigare. Quem in finem introducamus in aequationem, unde proficiscimur:

$$(k-k^3)\frac{d^2Q}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dQ}{dk}-kQ = 0,$$

quantitatem

$$(k-k^3)QQ = s.$$

Fit

$$\frac{ds}{dk} = (1-3k^2)QQ+2(k-k^3)Q\frac{dQ}{dk}$$

$$\frac{d^2s}{dk^2} = -6kQQ+4(1-3k^2)Q\frac{dQ}{dk}+2(k-k^3)\left[\frac{dQ}{dk}\right]^2+2(k-k^3)Q\frac{d^2Q}{dk^2}.$$

Qua in aequatione ubi ponitur:

$$(k-k^3)\frac{d^2Q}{dk^2} = kQ-(1-3k^2)\frac{dQ}{dk},$$

prodit:

$$\frac{d^2s}{dk^2} = -4kQQ+2(1-3k^2)Q\frac{dQ}{dk}+2(k-k^3)\left[\frac{dQ}{dk}\right]^2$$

$$= 2\frac{dQ}{dk}\left\{(1-3k^2)Q+(k-k^3)\frac{dQ}{dk}\right\}-4kQQ.$$

Qua aequatione ducta in $2s = 2(k-k^3)QQ$, obtinetur:

$$\frac{2s\,d^2s}{dk^2} = 2(k-k^3)Q\frac{dQ}{dk}\left\{2(1-3k^2)QQ+2(k-k^3)Q\frac{dQ}{dk}\right\}-8k^2(1-k^2)Q^4,$$

sive cum sit:

$$2(k-k^3)Q\frac{dQ}{dk} = \frac{ds}{dk}-(1-3k^2)QQ$$

$$2(1-3k^2)QQ+2(k-k^3)Q\frac{dQ}{dk} = \frac{ds}{dk}+(1-3k^2)QQ,$$

obtinemus:

$$\frac{2s\,d^2s}{dk^2} = \left[\frac{ds}{dk}\right]^2-(1-3k^2)^2Q^4-8k^2(1-k^2)Q^4 = \left[\frac{ds}{dk}\right]^2-(1+k^2)^2Q^4,$$

seu

$$(9.)\qquad \frac{2s\,d^2s}{dk^2}-\left[\frac{ds}{dk}\right]^2+\left[\frac{1+k^2}{k-k^3}\right]^2 ss = 0.$$

Iam vero posito $a'K+b'K' = Q'$, $\frac{Q'}{Q} = t$, vidimus esse $\frac{dt}{dk} = \frac{m}{(k-k^3)QQ} = \frac{m}{s}$, designante m constantem; unde $s = \frac{mdk}{dt}$. Aequationem (9.) in aliam transformemus, in qua dt constans positum est. Erit $\frac{ds}{dk} = \frac{md^2k}{dt\,dk}$, $\frac{d^2s}{dk^2} = \frac{md^3k}{dt\,dk^2}-\frac{md^2k^2}{dt\,dk^3}$; quibus substitutis ex aequatione (9.) prodit:

$$\frac{2d^3k}{dt^2dk}-\frac{3d^2k^2}{dt^2dk^2}+\left[\frac{1+k^2}{k-k^3}\right]^2\frac{dk^2}{dt^2} = 0.$$

sive

$$(10.)\qquad 2d^3k\,dk-3d^2k^2+\left[\frac{1+k^2}{k-k^3}\right]^2 dk^4 = 0,$$

ubi secundum t, quod ex aequatione evasit, differentiandum est.

Ponendo $\frac{\alpha'\Lambda+\beta'\Lambda'}{\alpha\Lambda+\beta\Lambda'} = \omega$, constantes $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, quoties λ est modulus transformatus, ita determinari poterunt, ut sit $t = \omega$: nec non simili modo obtinemus:

$$(11.)\qquad 2d^3\lambda\,d\lambda-3d^2\lambda^2+\left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right]^2 d\lambda^4 = 0,$$

in qua aequatione et ipsa secundum $\omega = t$ differentiandum erit. Multiplicetur aequatio (10.) per $d\lambda^2$, aequatio (11.) per dk^2: subtractione facta obtinetur:

$$(12.)\quad 2dk\,d\lambda\left\{d\lambda\,d^3k-dk\,d^3\lambda\right\}-3\left\{d\lambda^2d^2k^2-dk^2d^2\lambda^2\right\}+dk^2\,d\lambda^2\left\{\left[\frac{1+k^2}{k-k^3}\right]^2dk^2-\left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right]^2d\lambda^2\right\} = 0.$$

At haec aequatio cum aequatione (8.) convenit, in qua scimus, differentiale quodcunque placeat tamquam constans considerari posse, ideoque etsi inventa sit suppositione facta, dt esse differentiale constans, valebit etiam, quodcunque aliud ut tale consideratur.

Ecce igitur aequationem differentialem tertii ordinis, quae innumeras habet solutiones algebraicas, particulares tamen, videlicet aequationes quas diximus modulares. At integrale completum a functionibus ellipticis pendet, quippe quod est $t = \omega$, sive

$$\frac{a'K+b'K'}{aK+bK'} = \frac{\alpha'\Lambda+\beta'\Lambda'}{\alpha\Lambda+\beta\Lambda'}.$$

quam ita etiam repraesentare licet aequationem:

$$mK\Lambda+m'K'\Lambda'+m''K\Lambda'+m'''K'\Lambda = 0,$$

designantibus m, m', m'', m''' constantes arbitrarias. Quam integrationem altissimae indaginis esse censemus.

Inquirere possemus, an aequationes modulares pro transformationibus tertii et quinti ordinis reapse, quod debent, aequationi nostrae differentiali tertii ordinis satisfaciant. Quod vero cum nimis prolixos calculos sibi poscere videatur, idem de transformatione secundi ordinis, ubi $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$, demonstrare sufficiat.

Consideretur dk' ut constans, fit:

$$\lambda = \frac{1-k'}{1+k'} = -1+\frac{2}{1+k'} \qquad k^2+k'^2 = 1$$

$$\frac{d\lambda}{dk'} = \frac{-2}{(1+k')^2} \qquad \frac{dk}{dk'} = \frac{-k'}{k}$$

$$\frac{d^2\lambda}{dk'^2} = \frac{4}{(1+k')^3} \qquad \frac{d^2k}{dk'^2} = \frac{-1}{k}-\frac{k'^2}{k^3} = \frac{-1}{k^3}$$

$$\frac{d^3\lambda}{dk'^3} = \frac{-12}{(1+k')^4} \qquad \frac{d^3k}{dk'^3} = \frac{-3k'}{k^5}.$$

Hinc fit:

$$\frac{dk^2d^2\lambda^2-d\lambda^2d^2k^2}{dk'^6} = \frac{16k'^2}{k^2(1+k')^6}-\frac{4}{k^6(1+k')^4}$$

$$= \frac{4[4k^4k'^2-(1+k')^2]}{k^6(1+k')^6} = \frac{4[4k'^2(1-k')^2-1]}{k^6(1+k')^4}.$$

Porro obtinetur:

$$\frac{dk\,d^3\lambda - d\lambda\,d^3k}{dk'^4} = \frac{12k'}{k(1+k')^4} - \frac{6k'}{k^5(1+k')^2} = \frac{6k'[2(1-k')^2-1]}{k^5(1+k')^2}$$

$$\frac{dk\,d\lambda[dk\,d^3\lambda - d\lambda\,d^3k]}{dk'^6} = \frac{12k'^2[2(1-k')^2-1]}{k^6(1+k')^4},$$

unde:

$$\frac{3[dk^2d^2\lambda^2 - d\lambda^2d^2k^2] - 2dk\,d\lambda[dk\,d^3\lambda - d\lambda\,d^3k]}{dk'^6} = \frac{12(2k'^2-1)}{k^6(1+k')^4}.$$

Porro fit

$$\left[\frac{1+k^2}{k-k^3}\right]^2\frac{dk^2}{dk'^2} = \frac{(1+k^2)^2}{k^4k'^2}$$

$$\left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right]^2\frac{d\lambda^2}{dk'^2} = \frac{4}{(1+k')^4}\left[\frac{1+k'}{1-k'}\right]^2\left[\frac{1+k'^2}{2k'}\right]^2 = \frac{(1+k'^2)^2}{k'^2k^4},$$

unde:

$$\left[\frac{1+k^2}{k-k^3}\right]^2\frac{dk^2}{dk'^2} - \left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right]^2\frac{d\lambda^2}{dk'^2} = \frac{3(1-2k'^2)}{k^4k'^2}$$

$$\frac{dk^2d\lambda^2}{dk'^4}\left\{\left[\frac{1+k^2}{k-k^3}\right]^2\frac{dk^2}{dk'^2} - \left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right]^2\frac{d\lambda^2}{dk'^2}\right\} = \frac{12(1-2k'^2)}{k^6(1+k')^4}.$$

Hinc tandem fit, quod debet:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3[dk^2d^2\lambda^2 - d\lambda^2d^2k^2] - 2dk\,d\lambda[dk\,d^3\lambda - d\lambda\,d^3k]}{dk'^6} \\ + \dfrac{dk^2d\lambda^2}{dk'^4}\left\{\left[\dfrac{1+k^2}{k-k^3}\right]^2\dfrac{dk^2}{dk'^2} - \left[\dfrac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right]^2\dfrac{d\lambda^2}{dk'^2}\right\}\end{array}\right\} = \frac{12(2k'^2-1)}{k^6(1+k')^4} + \frac{12(1-2k'^2)}{k^6(1+k')^4} = 0.$$

Ubi methodi expeditae in promptu essent, si quas aequatio differentialis solutiones algebraicas habet, eas eruendi omnes: e sola aequatione differentiali a nobis proposita aequationes modulares, quae singulos transformationum ordines spectant, elicere possemus omnes. Quam tamen materiem arduam qui attigerit, praeter Cl^{m}. Condorcet, scio neminem, attentione analystarum dignam.

34.

Aequatio supra inventa:

$$MM = \frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda(1-\lambda^2)}{k(1-k^2)}\cdot\frac{dk}{d\lambda},$$

cuius ope ex aequatione modulari inventa statim etiam quantitatem M determinare licet, digna esse videtur, cui adhuc paulisper immoremur. Non patet primo aspectu, quomodo valores quantitatis M in transformationibus tertii et quinti ordinis inventi cum aequatione illa conveniant. Quod igitur accuratius examinemus.

a) In transformatione *tertii* ordinis, posito $u = \sqrt[4]{k}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$, invenimus:

$$(1.)\qquad u^4 - v^4 + 2uv(1-u^2v^2) = 0,$$

quam ita quoque exhibuimus aequationem (§. 16.):

$$(2.)\qquad \left(\frac{v+2u^3}{v}\right)\left(\frac{u-2v^3}{u}\right) = -3.$$

Porro fieri vidimus:

$$(3.)\qquad M = \frac{v}{v+2u^3} = \frac{2v^3-u}{3u}.$$

Differentiata aequatione (1.), obtinemus:

$$\frac{du}{dv} = \frac{2v^3-u+3u^3v^2}{2u^3+v-3u^2v^3},$$

sive loco 3 posito $\left(\frac{v+2u^3}{v}\right)\left(\frac{2v^3-u}{u}\right)$:

$$(4.)\qquad \frac{du}{dv} = \frac{2v^3-u}{2u^3+v}\cdot\frac{1+u^2v^2+2u^5v}{1+u^2v^2-2uv^5}.$$

Ex aequatione (1.) sequitur:

$$\begin{aligned}1-u^8 &= (1+u^4)[1-v^4+2uv(1-u^2v^2)] \\ &= 1-u^4v^4+u^4-v^4+2uv(1+u^4)(1-u^2v^2) \\ &= 1-u^4v^4+2u^5v(1-u^2v^2) = (1-u^2v^2)(1+u^2v^2+2u^5v).\end{aligned}$$

Eodem modo invenitur:

$$1-v^8 = (1-u^2v^2)(1+u^2v^2-2uv^5),$$

unde:

$$\frac{1-v^8}{1-u^8} = \frac{1+u^2v^2-2uv^5}{1+u^2v^2+2u^5v},$$

sive ex aequatione (4.):

$$\frac{1-v^8}{1-u^8}\cdot\frac{du}{dv} = \frac{2v^3-u}{2u^3+v}.$$

Qua aequatione ducta in

$$\frac{v}{3u} = \frac{v^2}{(2u^3+v)(2v^3-u)},$$

prodit:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{v(1-v^8)}{u(1-u^8)}\cdot\frac{du}{dv} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda(1-\lambda^2)}{k(1-k^2)}\cdot\frac{dk}{d\lambda} = \left[\frac{v}{v+2u^3}\right]^2 = MM,$$

Q. D. E.

b) In transformatione *quinti* ordinis, posito $u = \sqrt[4]{k}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$, invenimus:

$$(1.)\qquad u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0,$$

quam his etiam modis exhibuimus aequationem (§§. 16. 30.):

$$(2.)\qquad \frac{u + v^5}{u(1 + u^3v)} \cdot \frac{v - u^5}{v(1 - uv^3)} = 5$$

$$(3.)\qquad (u^2 - v^2)^6 = 16u^2v^2(1 - u^8)(1 - v^8).$$

Porro invenimus:

$$(4.)\qquad M = \frac{v(1 - uv^3)}{v - u^5} = \frac{u + v^5}{5u(1 + u^3v)}.$$

Differentiata aequatione (3.), obtinemus:

$$6uv(1 - u^8)(1 - v^8)(u\,du - v\,dv) = u(u^2 - v^2)(1 - u^8)(1 - 5v^8)dv + v(u^2 - v^2)(1 - v^8)(1 - 5u^8)du,$$

sive:

$$(5.)\qquad v(1 - v^8)[5u^2 - u^{10} + v^2 - 5u^8v^2]du = u(1 - u^8)[5v^2 - v^{10} + u^2 - 5u^2v^8]dv.$$

Aequatione (1.) ducta in u^4, v^4, eruitur:

$$5u^2 - u^{10} + v^2 - 5u^8v^2 = (1 - u^4v^4)(v^2 + 5u^2 + 4u^5v)$$
$$5v^2 - v^{10} + u^2 - 5u^2v^8 = (1 - u^4v^4)(u^2 + 5v^2 - 4uv^5),$$

unde aequatio (5.) in hanc abit:

$$(6.)\qquad \frac{v(1 - v^8)}{u(1 - u^8)} \cdot \frac{du}{dv} = \frac{u^2 + 5v^2 - 4uv^5}{v^2 + 5u^2 + 4u^5v}.$$

Ponatur $u + v^5 = A$, $u + u^4v = B$, $v - u^5 = C$, $v - uv^4 = D$, ita ut:

$$\frac{AC}{BD} = 5, \quad \text{sive } AC = 5BD$$
$$\frac{D}{C} = \frac{A}{5B} = M;$$
$$u^2 + 5v^2 - 4uv^5 = uA + 5vD$$
$$v^2 + 5u^2 + 4u^5v = vC + 5uB,$$

erit:

$$(7.)\qquad \frac{v(1 - v^8)}{u(1 - u^8)} \cdot \frac{du}{dv} = \frac{uA + 5vD}{vC + 5uB} = \frac{uAB + vAC}{vCD + uAC} \cdot \frac{D}{B}$$
$$= \frac{uB + vC}{vD + uA} \cdot \frac{AD}{BC} = \frac{AD}{BC} = 5MM.$$

Fit enim:

$$uB + vC = vD + uA = u^2 + v^2.$$

Unde etiam:

$$MM = \frac{1}{5} \cdot \frac{v(1 - v^8)}{u(1 - u^8)} \cdot \frac{du}{dv} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\lambda(1 - \lambda^2)}{k(1 - k^2)} \cdot \frac{dk}{d\lambda}.$$

Q. D. E.

THEORIA EVOLUTIONIS FUNCTIONUM ELLIPTICARUM.