rechnen, eine Kurve von der Eigenschaft zu finden, daß die Halbierungslinie des Winkels, den eine beliebige Kurventangente mit einer festen Geraden bildet, eine Kurvennormale ist (vgl. S. 515); auf die Eulersche Behandlungsweise kann hier nicht eingegangen werden.

Variationsrechnung.

Die Variationsrechnung hatte durch Euler einen gewissen Abschluß gefunden, doch verdient sie in diesem Zustand den Namen Rechnung noch nicht, weil geometrische Überlegungen zu sehr im Vordergrund der Untersuchung stehen, die ganze Behandlungsweise auch noch nicht einheitlich, umfassend genug ist, um auf jedes Problem sofort angewandt werden zu können. Diesen Übelstand überwand erst Lagrange mit Hilfe eines neuen Algorithmus, der eine vollkommen gleichartige, systematisch rechnerische Behandlung aller Variationsprobleme ermöglicht. Der Fortschritt war so bedeutend, daß Lagrange die Grenzen der Integrale als variabel ansehen und auch Doppelintegrale behandeln konnte. Lagrange teilte nach eigener Aussage seine Methode schon 1755 Euler mit und fand dessen Beifall;[1]) veröffentlicht hat er sie erst 1762.[2]) Nach kurzem geschichtlichen Überblick entwickelt Lagrange seinen Grundgedanken, daß nämlich die Variationsrechnung kein anderes Prinzip erfordere als den Gebrauch der Differential- und Integralrechnung (wie die gewöhnliche Maxima- und Minimaberechnung auch), nur habe er, damit die beiden auftretenden Variationen (die infolge der Maximalbedingung und die bereits vorhandenen Differentiationen) nicht verwechselt werden, eine neue „Charakteristik" δ eingeführt. So stelle δZ eine Änderung von Z dar, die nicht das Nämliche sei wie dZ, aber doch nach denselben Regeln gebildet werde; neben einer Gleichung $dZ = m\delta x$ (verdruckt für dx) bestehe also in gleicher Weise $\delta Z = m\delta x$. Ohne weitere Ausführung oder Begründung schreitet Lagrange sofort zu folgender Aufgabe: Z sei eine Funktion von

$$x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots,$$

man soll die Bedingung finden, daß $\int Z$ ein Maximum oder Minimum wird. Nach der „bekannten Methode" der Maxima und Minima hat

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 163. Vgl. hierzu Cantor, Zeitschrift für Math. u. Phys. (2) 23 (1878), hist.-lit. Abtlg. 1. [2]) Miscellanea Taurinensia, t. II², p. 173—195. Diese Abhandlung mit der von 1770 und der Legendres von 1786 in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 47; diese Ausgabe wurde im folgenden wiederholt benutzt.

man, sagt Lagrange, das gegebene $\int Z$ zu „differentiieren", wobei die Größen

$$x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots$$

als variabel anzusehen sind, und das so entstehende Differential gleich Null zu setzen; bezeichnet man diese Variationen mit δ, so erhält man zunächst

$$\delta \int Z = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\int \delta Z = 0.$$

Diese Stelle ist von großer Wichtigkeit; sie erklärt, warum Lagrange keine eingehendere Begründung seines Algorithmus bringt: Er erblickt darin keine neue, von der gewöhnlichen Maximabestimmung prinzipiell verschiedene, sondern die schon längst geübte, „bekannte" Methode; nur enthält eben der Ausdruck $\int Z$ bereits Differentiale, und es müssen daher, lediglich um „Verwechselungen" zu vermeiden, die neuerdings notwendigen Differentiationen anders, also etwa durch das Zeichen δ ausgedrückt werden. Diese Auffassung erklärt auch, warum Lagrange den im folgenden oft benutzten Satz von der Vertauschbarkeit der Symbole d und δ nicht beweist: d und δ sind zwei verschiedene Differentiationen, die ganz unabhängig nebeneinander hergehen. Ist nun Z so beschaffen, sagt Lagrange, daß

$$\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + r\delta d^3x + \cdots$$
$$+ N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \cdots + \nu\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2z + \cdots$$

so kommt

$$\int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2x + \cdots$$
$$+ \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + \cdots$$
$$+ \int \nu\delta z + \int \pi\delta dz + \int \chi\delta d^2z + \cdots = 0.$$

Aber man sieht leicht

$$\delta dx = d\delta x; \quad \delta d^2x = d^2\delta x \text{ usw.};$$

überdies findet man durch partielle Integration

$$\int p d\delta y = p\delta x - \int dp\delta x; \quad \int q d^2\delta x = q d\delta x - dq\delta x + \int d^2q\delta x; \text{ usf.}$$

Damit wird

$$\int(n - dp + d^2q - d^3r + \cdots)\,\delta x + \int(N - dP + d^2Q - d^3R + \cdots)\,\delta y$$
$$+ \int(\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\varrho + \cdots)\,dz$$
$$+ (p - dq + d^2r - \cdots)\,\delta x + (q - dr + \cdots)\,d\delta x + (r - \cdots)\,d^2\delta x + \cdots$$
$$+ (P - dQ + d^2R - \cdots)\,\delta y + (Q - dR + \cdots)\,d\delta y$$
$$+ (R - \cdots)\,d^2\delta y + \cdots$$
$$+ (\pi - d\chi + d^2\varrho - \cdots)\,\delta z + (\chi - d\varrho + \cdots)\,d\delta z$$
$$+ (\varrho - \cdots)\,d^2\delta z + \cdots = 0.$$

Lagrange trennt diese Gleichung in zwei; die erste „unbestimmte" Gleichung erhält alle Glieder, die unter Integralzeichen vorkommen, die andere bestimmt alle übrigen Glieder. Letztere Gleichung bringt Lagrange mit den Grenzen des Integrals $\int Z$ in Zusammenhang; um die gefundenen Gleichungen von den Größen $\delta x, \delta y, \ldots$ zu befreien, hat man zu prüfen, ob der Natur des Problems nach zwischen ihnen eine Beziehung besteht;[1]) sind sie dann mit deren Hilfe auf die kleinste Zahl zurückgeführt, so sind die Koeffizienten der noch vorhandenen Größen $\delta x, \delta y, \ldots$ gleich Null zu setzen. Sind sie vollständig unabhängig voneinander, so kommt

$$n - dp + d^2q - d^3r + \cdots = 0;$$
$$N - dP + d^2Q - d^3R + \cdots = 0; \quad \nu - d\pi + d^2\chi - d^3\varrho + \cdots = 0.$$

Nach Untersuchungen über die Brachistochrone überhaupt und diejenige auf einer gegebenen Oberfläche weist Lagrange nach, daß von den letzterwähnten drei Gleichungen immer eine die Folge der beiden andern ist[2]), und wendet sich sodann der Aufgabe zu, $\int Z$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wenn Z außer den Variabeln x, y, z und ihren Differentialen auch noch das Integral $\Pi = \int Z'$ enthält, wo Z' aus den nämlichen Veränderlichen und ihren Differentialen sich zusammensetzt. Diese Aufgabe, sowie das Problem der Maxima-Minimabestimmung von $\int Z$, wo Z durch eine Differentialgleichung 1. Ordnung definiert ist, hat schon Euler behandelt und gelöst, was Lagrange ausdrücklich anerkennt, der auch den Fall einer Differentialgleichung 2. oder höherer Ordnung für Z bespricht.

[1]) In der Mécanique analytique von 1788, p. 45—46 hat Lagrange den Fall von Nebenbedingungen durch Einführung unbestimmter Multiplikatoren auf das Problem ohne solche reduziert. [2]) Miscellanea Taurinensia, t. II[2], p. 182.

Um die Brauchbarkeit seiner Methode zu erläutern, leitet Lagrange die Bedingungen her, daß eine Fläche von allen denen, die denselben Umfang oder aber gleiches Volumen haben, die kleinste ist, und beweist[1]) den Cramerschen Satz, daß das flächengrößte Polygon von gegebenen Seiten einem Kreise einbeschrieben ist, aufs neue, desgleichen zeigt er, daß unter allen Polygonen gleichen Umfangs[2]) das reguläre den größten Inhalt besitzt. Eine weitere Abhandlung[3]) bringt Anwendungen der Variationsrechnung auf die Dynamik; hier findet sich gleich zu Beginn der Eulersche Satz, daß das Integral der in das Bahnelement multiplizierten Geschwindigkeit eines Massenpunktes ein Maximum oder Minimum ist, auf ein Massensystem ausgedehnt, doch ist der dabei vorzunehmende Variationsprozeß nicht genau definiert, was in der Folge zu Mißverständnissen Anlaß gab[4]). Überhaupt fand der neue Kalkül außer bei Euler zunächst wenig Verständnis; in einer schon erwähnten Abhandlung[5]) erhob Borda verschiedene Bedenken gegen die Behandlung des Brachistochronenproblems durch Lagrange, die diesen zu einer nochmaligen genaueren und allgemeineren Auseinandersetzung in seiner sogleich zu erwähnenden zweiten Abhandlung veranlaßten; ganz ungerechtfertigt sind die Angriffe von Fontaine[6]), der seine eigene Methode, die nur Eulersche und Lagrangesche Ideen in höchst unübersichtlicher Weise mit den Punkten der Fluxionsrechnung und dem Zeichen d nebeneinander ausdrückt, allen anderen überlegen hält. Euler hat in verschiedenen Abhandlungen die Lagrangesche Methode ausführlich auseinandergesetzt, und neben der Regel $\delta d = d\delta$ verschiedene alte Sätze (vgl. S. 904) neu bewiesen[7]); interessanter ist sein Versuch einer geometrischen Deutung des Variationsprozesses[8]) und die darauf beruhende Herleitung der betr. Rechnungsregeln. Die Variationsrechnung — dieser Name stammt von Euler —, sagt er, scheint zunächst eine völlig selbständige Rechnungsart zu sein, und dem-

[1]) Hierbei kommt Lagrange auf die Variationsrechnung für endliche Differenzen zu sprechen; an diese Stelle hat dann Condorcet wieder angeknüpft. [2]) Über isoperimetrische Probleme handelt u. a. ein Aufsatz von Paolo Frisi, Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. VII, 1658/59 (1761), p. 227 ff. Der Lagrangesche Algorithmus ist hier noch nicht benutzt. [3]) Miscellanea Taurinensia, t. II[2], p. 196—298. [4]) Wegen der Geschichte des Prinzips der kleinsten Wirkung vgl. man Ostwalds Klassiker a. a. O., Anmkg. 9, ferner Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Zürich, 2. Teil, S. 373 ff. [5]) Histoire de l'Académie des Sciences 1767 (1770), p. 551 ff. [6]) Ebenda, p. 588 ff. [7]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. X, 1764 (1766), p. 94 ff. (Ebenda, p. 156 ff. über die Tautochrone im widerstehenden Mittel.) Endlich Institutiones calculi integralis, vol. III, Anhang, p. 461—596. [8]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XVI, 1771 (1772), p. 35 ff.

gemäß führt auch Lagrange ein eigenes Zeichen δ ein, zum Unterschied von der Differentiation, die durch d bezeichnet wird. Euler stellt sich die Aufgabe, die Variationsrechnung auf die Prinzipien der Infinitesimalrechnung allein zurückzuführen und zwar durch Einführung einer Hilfsvariabeln t, die als Parameter einer Kurvenschar mit den laufenden Koordinaten x und y gedeutet wird. Er denkt sich mit anderen Worten y als Funktion von x und der neuen Variabeln t; $dx\left(\frac{dy}{dx}\right)$ stellt dann die eigentliche Differentiation dy, $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$ die Variation δy von y dar; Variation ist also nichts als partielle Differentiation nach t. Im folgenden führt Euler die wichtigsten Aufgaben der Variationsrechnung auf Grund seiner neuen Auffassung auf wirkliche Differentiationen nach t zurück und befreit sich dann von der Variabeln t schließlich wieder in geschickter Weise durch partielle Integration[1]); die Endresultate treten in der gewöhnlichen Form auf wie sonst auch. Von Anwendungen der Variationsrechnung seien eine Abhandlung Eulers von 1779 über Raumkurven mit einer Maximal- oder Minimaleigenschaft[2]), ferner Untersuchungen desselben Forschers über Brachistochronen, wenn die wirkenden Kräfte nicht in einer Ebene liegen, und über Brachistochronen im widerstehenden Mittel erwähnt[3]).

In einer Abhandlung vom Jahre 1770[4]) ist Lagrange wieder auf die Variationsrechnung zurückgekommen; er geht von allgemeinen Gesichtspunkten aus, die alle Spezialuntersuchungen seines ersten Aufsatzes gleichzeitig umfassen. Es sei φ die Funktion, von der man die Variation $\delta\varphi$ finden will; φ soll durch eine Differentialgleichung von irgend einer Ordnung zwischen $\varphi, x, y, z, \ldots$ und den Differentialen dieser Variabeln gegeben sein. Heißt diese Gleichung $\Phi = 0$, so wird $\delta\Phi = 0$; $\delta\Phi$ wird gebildet, indem man jede der Größen $\varphi, x, y, \ldots d\varphi, dx, dy, \ldots$, aus denen sich die Funktion Φ zusammensetzt, als besondere Veränderliche ansieht. Indem Lagrange die Operation der Variation wirklich ausführt, kommt er nach Multiplikation mit einer nachträglich passend bestimmten Hilfsgröße ξ und partieller Integration auf eine Gleichung der Form

$$\Pi + \int \Psi = \text{const.},$$

welche die Grundlage der weiteren Untersuchung bildet. Hierbei ist

[1]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XVI, 1771 (1772), p. 42, 43. [2]) In den Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg, t. IV, 1811 (1813). [3]) Ebenda, t. VIII, 1817/18 (1822), p. 17—28 bzw. p. 41—45. (Aus dem Jahre 1780.) [4]) Miscellanea Taurinensia, t. IV[2], 1766/69, p. 163—187.

$$\Psi = P\delta\varphi + Qdx + R\delta y + Sdz + \cdots,$$

wo die Koeffizienten $P, Q, R, S, \ldots$ sich in bestimmter Weise aus Φ berechnen lassen. Die Bedingung $\delta\varphi = 0$ für das Maximum oder Minimum von φ führt nun nach einigen Überlegungen bezüglich der Grenzen des Integrals $\int \Psi$ auf die Gleichung

$$Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \cdots = 0,$$

die je nach Zahl der Relationen zwischen den $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ in weniger oder mehr Einzelgleichungen zerfällt. Lagrange bringt späterhin[1]) einen einfachen Beweis seines Theorems, daß eine dieser Einzelgleichungen immer die Folge aller übrigen sei. Er benutzt hierzu den Umstand, daß in der gegebenen Differentialgleichung $\Phi = 0$ der Ausdruck Φ immer auf die Form $\Phi = \Sigma dx^m$ gebracht werden kann, wo Σ eine Funktion der Veränderlichen $\varphi, x, y, z, \ldots$ und ihrer Abgeleiteten nach x bedeutet. Dann ist

$$\delta\Phi = m\Sigma dx^{m-1}\delta dx + dx^m\delta\Sigma;$$

wegen $\Phi = 0$ ist aber auch $\Sigma = 0$, also $\delta\Phi = dx^m\delta\Sigma$. Sei nun

$$\begin{aligned}\delta\Sigma = \pi\delta\varphi &+ \pi'\delta\frac{d\varphi}{dx} + \pi''\delta\frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \cdots \\ + \varrho\delta y &+ \varrho'\delta\frac{dy}{dx} + \varrho''\delta\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} + \cdots \\ + \sigma\delta z &+ \sigma'\delta\frac{dz}{dx} + \sigma''\delta\frac{d\frac{dz}{dx}}{dx} + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \tau\delta x&,\end{aligned}$$

so wird man nach Multiplikation mit ξdx^m und partieller Integration (wobei nur die Größen $\delta x, \delta\varphi, \delta z, \ldots$ unter dem Integralzeichen bleiben dürfen) wieder auf den Ausdruck $\Pi + \int\Psi$ stoßen. Lagrange zeigt nun, daß der Ausdruck Π identisch Null wird, wenn man das Zeichen δ durch d ersetzt; er betrachtet zu diesem Zweck die einzelnen Glieder von $\delta\Sigma$. $\pi\delta\varphi$ ist keiner partiellen Integration der verlangten Art fähig, es wird daher ganz unter dem Integralzeichen bleiben. Das Glied $\pi'\delta\frac{d\varphi}{dx}$ wird zuerst $\pi'\left(\frac{\delta d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi\,\delta dx}{dx^2}\right)$; nach Multiplikation mit ξdx^m, Vertauschung von $\delta d\varphi$, δdx mit $d\delta\varphi$ bzw. $d\delta x$ und partieller Integration erhält man als Glied außerhalb des Integralzeichens den Ausdruck $\xi\pi' dx^m\left(\frac{\delta\varphi}{dx} - \frac{d\varphi\,\delta x}{dx^2}\right)$, der, wie un-

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. IV[2], 1766/69, p. 175.

mittelbar ersichtlich, bei Verwandlung von δ in d identisch verschwindet. Gleiches ergibt sich für die übrigen Glieder von $\delta\Sigma$, d. h. es wird, wenn man δ in d verwandelt, Π immer zu Null und damit $\int\Psi =$ const., also $\Psi = 0$. Ersetzt man also in dem Ausdruck $\Psi = P\delta\varphi + Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \cdots$ das Zeichen δ durch d, so wird identisch $Pd\varphi + Qdx + Rdy + Sdz + \cdots = 0$, d. h. eine von den Maximum-Minimumbedingungen ist eine Folge der andern. Lagrange knüpft hieran die Bemerkung, daß die Möglichkeit, Φ in der Form Σdx^m vorauszusetzen, für den Beweis wesentlich war, und weist darauf hin, daß bei Differenzengleichungen diese Voraussetzung im allgemeinen nicht zutrifft. Endlich wird die Aufgabe, $\varphi = \int Z$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wenn Z selbst wieder Integralzeichen enthält, mit Hilfe der vom Integralzeichen freien Differentialgleichung für φ gelöst, und das Problem der Brachistochrone nochmals eingehend behandelt.

Die Frage, ob im einzelnen Fall ein Maximum oder ein Minimum vorliegt, wurde nach einem mißglückten Versuch von Laplace[1]) von Legendre behandelt, aber erst Jacobi gelang es, hinreichende Kriterien hierfür aufzustellen. Als einfachsten Fall untersucht Legendre „die Variation zweiter Ordnung"[2]) von $\int v dx$, wo v eine Funktion von x, y und $p = \frac{dy}{dx}$ allein ist. Er findet unter der Annahme $\delta x = 0$ mit Hilfe des Taylorschen Satzes

$$\delta\int v dx = \int dx\left(\frac{\partial\partial v}{2\partial y^2}\cdot\delta y^2 + \frac{\partial\partial v}{2\partial y\partial p}\cdot 2\delta y\delta p + \frac{\partial\partial v}{2\partial p^2}\cdot\delta p^2\right),$$

wofür zur Abkürzung

$$\int dx(P\delta y^2 + 2Q\delta y\delta p + R\delta p^2)$$

gesetzt wird. Dann ist identisch

$$\delta\int v dx = \text{const.} - \alpha\delta y^2$$
$$+ \int dx\left[\left(P + \frac{d\alpha}{dx}\right)\delta y^2 + 2(Q+\alpha)\delta y\delta p + R\delta p^2\right],$$

wo α beliebig ist. Legendre nimmt nun α so an, daß sich der Ausdruck unter dem Integralzeichen in zwei gleiche Faktoren spalten läßt, wozu die Gleichung

$$\left(P + \frac{d\alpha}{dx}\right)R = (Q+\alpha)^2$$

erforderlich ist. Dann ergibt sich bei festen Integrationsgrenzen

$$\delta\int v dx = (\alpha\delta y^2)^0 - (\alpha\delta y^2)^I + \int R dx\left(\delta p + \frac{Q+\alpha}{R}\delta y\right)^2,$$

und hierin kann man, da sich ja α aus einer Differentialgleichung bestimmt, also eine willkürliche Konstante enthält, α immer so annehmen, daß $(\alpha\delta y^2)^0 - (\alpha\delta y^2)^I$ entweder Null ist, oder dasselbe Vorzeichen wie R hat; daraus folgt aber, sagt Legendre, daß $\int v dx$ ein Maximum ist, wenn

$$R = \frac{\partial\partial v}{2\partial p^2}$$

negativ, ein Minimum hingegen, wenn dieselbe Funktion positiv ist. Legendre geht sodann zu dem Fall über, daß v eine Funktion von x, y, p und q ist, wo

$$dy = p dx \quad \text{und} \quad dp = q dy.$$

Die Variation der 1. Ordnung ist Null, die 2. Ordnung läßt sich auf die Form bringen

$$\begin{aligned}\delta\int v dx = \int dx(M\delta y^2 &+ 2N\delta y\delta p + Q\delta p^2\\ &+ 2P\delta y\delta q + 2R\delta p\delta q\\ &+ S\delta q^2),\end{aligned}$$

wofür Legendre schreibt

$$\delta\int v dx = (\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)^0 - (\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)^I$$
$$+ \int dx\left\{\begin{aligned}&\left(M + \frac{d\alpha}{dx}\right)\delta y^2 + 2\left(N + \alpha + \frac{d\beta}{dx}\right)\delta y\delta p + 2(P+\beta)\delta y\delta q\\ &\quad + \left(Q + 2\beta + \frac{d\gamma}{dx}\right)\delta p^2 + 2(R+\gamma)\delta p\delta q + S\delta q^2\end{aligned}\right\}.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen soll sich wieder in ein Quadrat zerfällen lassen; aus der Annahme, der Inhalt der geschweiften Kammer sei gleich

$$S(\delta q + \mu\delta p + \lambda\delta y)^2,$$

ergeben sich aber fünf Bedingungsgleichungen für α, β, γ, μ, λ. Man erkennt, daß bei ihrer Integration drei willkürliche Konstante auftreten, die so gewählt werden können, daß die außerhalb des Integralzeichens stehende Differenz Null ist oder dasselbe Vorzeichen wie S besitzt. Legendre schließt wieder, daß damit das Vorzeichen von S für die ganze zweite Variation maßgebend und für die Existenz eines Maximums oder Minimums entscheidend ist, gibt sodann die Verall-

[1]) Nova Acta Eruditorum 1772, p. 293.

[2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1786 (1788), p. 9. Kurz zuvor unterscheidet Legendre zwischen $\frac{\partial v}{\partial x}$ als dem Koeffizienten von dx in dem Differential von v und $\frac{dv}{dx}$, d. i. dem durch dx geteilten vollständigen Differential von v. Vielleicht hat Jacobi, der diese Unterscheidung einbürgerte, diese Stelle gekannt.

gemeinerung für den Fall, daß ν Differentialquotienten beliebiger Ordnung enthält, und behandelt noch einige ähnliche Fragen unter der Annahme, daß x nicht konstant, also δx von Null verschieden ist. Von den praktischen Beispielen, die Legendre untersucht, seien das Problem des Körpers von kleinstem Widerstand, der Kettenlinie und der Brachistochrone erwähnt. Herleitung und Ergebnis der vorerwähnten Kriterien sind bekanntermaßen unvollständig. Die ersten Bedenken äußerte Legendre selbst[1]); in einer späteren Abhandlung sucht er die stillschweigende Voraussetzung, daß die Hilfsgrößen α, β, γ immer reell bestimmt werden können, sowie die Möglichkeit, die Differenz

$$(\alpha\delta y^2 + 2\beta\,\delta y\,\delta p + \gamma\delta p^2)^0 - (\alpha\delta y^2 + 2\beta\,\delta y\,\delta p + \gamma\delta p^2)^I$$

zum Verschwinden bringen zu können, durch Reihenentwicklungen zu erweisen; der Nachweis ist indessen für beide Behauptungen, von denen die erste richtig ist, unzureichend. Den Haupteinwand hat jedoch Lagrange erhoben[2]): das Integral kann das Vorzeichen wechseln, wenn auch der Ausdruck unter dem Integralzeichen dies nicht tut, wie an dem Beispiel

$$\frac{x}{1-x} = \int \frac{dx}{(1-x)^2}$$

ersichtlich ist. Das Theorem von Legendre gilt nur, solange der Ausdruck unter dem Integralzeichen endlich bleibt; um aber darüber zu entscheiden, braucht man die Funktionen α, β, γ selbst, und die Erkenntnis ihrer Existenz allein genügt noch nicht. Immerhin bedeutet Legendres Versuch, die schwierige Frage zu lösen, und die Art seines Vorgehens einen großen Fortschritt.

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 348. [2]) Oeuvres, t. IX, p. 303. Vgl. Ostwalds Klassiker a. a. O., Anm. 12.

ABSCHNITT XXVIII

ÜBERBLICK ÜBER DIE ZEIT VON 1758 BIS 1799

VON

M. CANTOR

Überblick über die Zeit von 1758 bis 1799.

Die Abschnitte XIX bis XXVII dieses Bandes haben die Geschichte der einzelnen Teilgebiete der Mathematik in ähnlich ausführlicher Weise wie die drei früher erschienenen Bände bis zum Ende des 18. Jahrhundert weiter geführt. Die Zeit, welche behandelt wurde, war eine wesentlich kürzere als in dem III. Bande, der selbst schon eine kleinere Zeitspanne als der II. Band umfaßte, von den vielen Jahrhunderten zu schweigen, durch welche der I. Band als Führer dienen wollte, und dennoch ist der Umfang dieses IV. Bandes weit über den der ihm vorhergehenden gewachsen. Welche Gründe diese Erscheinung hervorgebracht haben, ist leicht ersichtlich. Je mehr wir der Jetztzeit uns nähern, um so reichlicher fließen die Quellen unseres Wissens. Sie sind überdies gefaßt, wenn das Bild der Quelle beibehalten werden soll. Die Akademieschriften und Zeitschriften vermehren sich (vgl. S. 4—7) und sammeln, was in einzelnen Rinnseln da oder dort hervorquillt. Ihre Herausgeber sind weitherzig in der Aufnahme von Beiträgen auch von solchen Verfassern, welche nicht gerade einer Akademie angehören. Und diese Leichtigkeit das, was der Einzelne für veröffentlichungswert hielt, tatsächlich an die Öffentlichkeit zu bringen, mußte eine Stoffvermehrung zur Folge haben. Manches davon verdiente nicht, geschichtlich aufbewahrt zu werden und ist in diesem Bande mit Fug und Recht übergangen, aber Anderes hat, zur Zeit seiner Entstehung kaum beachtet, nachträgliche Bedeutung erhalten. Einzelne besonders begabte Männer haben wie in früheren Zeiten auch im Verlaufe der letzten Jahrzehnte des 18. Jahrhunderts in der Mathematik ihre Lieblingswissenschaft gefunden, haben sich ihr ganz oder doch vorzugsweise gewidmet, und mit einer riesigen Arbeitskraft neue Gebiete urbar gemacht. Wir brauchen nur auf die einzelnen Abschnitte dieses IV. Bandes zu verweisen, welche die hier ausgesprochenen Sätze des Näheren belegen. Den Bearbeitern der einzelnen Abschnitte gestaltete sich so eine dankbare Aufgabe in der Schilderung des Wachstums der einzelnen Teilgebiete, aber was bei der Feststellung des allgemeinsten Planes zum IV. Bande in den Augusttagen des Jahres 1904 schon vorausgesehen wurde, bewahrheitete sich: der Zusammenhang zwischen den einzelnen Abschnitten lockerte sich. Sogar die Tätigkeit eines einzelnen Verfassers zu verfolgen, ist schwierig geworden, geschweige daß die Einwirkung genügend hervorträte, welche jeder auf seine Zeit ausübte. Dazu ist ein Überblick erforderlich, welcher das zeitliche Nebeneinanderauftreten wichtiger Gedanken bemerkbar mache, und diese Aufgabe soll der XXVIII. und letzte Abschnitt dieses Bandes zu lösen suchen.

Schon damals, als wir den XXVIII. Abschnitt bearbeiten zu dürfen uns erbaten, schwebte uns ein Gedanke vor, den wir im folgenden zur Ausführung bringen. Gewiß ist die Schlußfolgerung irrig, das in der Zeit Frühere müsse zu dem Späteren den Anstoß gegeben haben, aber soviel steht fest, daß der Anstoß zu einem Späteren, wenn er stattfand, nur von einem Früheren gegeben sein kann. Man muß daher vor allen Dingen und unbekümmert um den besonderen Gegenstand der einzelnen Untersuchung sämtliche besonders hervorragende Leistungen in ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge zur Anschauung bringen, und das ist es, was die nachfolgenden Seiten bezwecken. Wenn dabei auf einige wenige Dinge hingewiesen ist, von denen die Verfasser der Abschnitte, in welche jene gehören, schwiegen, so liegt darin der Beweis, daß die Ansichten über Beachtenswertes und nicht Beachtenswertes verschieden sind, und daß bei der Selbständigkeit, mit welcher die Bearbeiter der einzelnen Abschnitte von vornherein ausgestattet waren, es nur zu verwundern ist, wenn nicht häufigere Meinungsverschiedenheiten dem Leser begegnen. Gleicherweise sind wir darauf vorbereitet, daß dieser oder jener Leser nicht mit uns übereinstimme und Dinge erwähnt wünsche, über welche wir schwiegen, dagegen von uns Erwähntes als ganz unerheblich betrachte.

Was die äußere Form der nun folgenden nach den Jahreszahlen geordneten Liste betrifft, so bemerken wir, daß die eingeklammerten Seitenzahlen sich auf den vorliegenden Band beziehen und die Stellen angeben, wo von den in der Liste genannten Arbeiten die Rede ist. Außerdem haben wir über die Art uns zu äußern, in welcher Eulers Leistungen verwertet sind. Euler ist bekanntlich 1783 gestorben, und unser geschätzter Mitarbeiter H. Vivanti hat daraus (S. 700 Anmerkung) gefolgert, alle nachgelassenen Schriften Eulers gehörten, weil vor 1783 verfaßt, in diesen Band. Wir haben eine davon abweichende Meinung. Wer eine Monographie über Euler herauszugeben wünscht, wird sicherlich das Todesjahr des großen Mathematikers als Endpunkt seiner Leistungsmöglichkeit zu betrachten haben und wird für jenes Jahr in Anspruch nehmen, was immer aus Eulers Kopfe stammend, nach 1783 gedruckt worden ist. Anders scheint

uns die Sache zu liegen, wenn die Geschichte der Mathematik der Behandlung unterworfen ist. Was handschriftlich in den Aufbewahrungsräumen einer Akademie verschlossen liegt, kann nun und nimmermehr als wirksam in dem Sinne betrachtet werden, daß es sich befruchtend und fördernd erwiesen habe, und demzufolge ist für die Geschichte der Mathematik unserer Ansicht nach erst das Druckjahr einer Abhandlung ihr Geburtsjahr, und diese Ansicht war für uns bei Anfertigung unseres Verzeichnisses maßgebend.

1758.

Hamilton, *Treatise of conic sections* bedient sich streng euklidischer Form und vermeidet sogar das Gleichheitszeichen (S. 462).

Kaestners Arithmetik betrachtet nicht nur die negative Zahl als eine Zahl besonderer Art (S. 80), sie ist auch das erste Werk, in welchem näher begründet ist, daß und warum man mit Irrationalzahlen rechnen dürfe.

Lamberts angenäherte Gleichungsauflösung mittels Reihen (S. 140).

Lambert über periodische Dezimalbrüche (S. 160).

1759.

Braikenridge über Konoide, insbesondere über das hyperbolische Paraboloid (S. 556).

Daviet de Foncenex versucht den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen und äußert sich über das Imaginäre (S. 306).

Hube, Abhandlung über Kegelschnitte in durchaus analytischer Form (S. 454).

Lagrange gibt Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen (S. 772).

Lagranges Aufsatz, in welchem man die Fouriersche Reihe hat finden wollen (S. 984).

Lambert, Freie Perspektive in 1. Auflage, eine 2. Auflage 1774 (S. 607).

1760.

Eulers Beweis, daß $x^3 + y^3 \mathrel{\underline{\top}} z^3$ (S. 154).

Eulers Bewußtsein von den Vorzügen seiner trigonometrischen Bezeichnungen (S. 405).

Eulers Satz über die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte einer Fläche (S. 545).

Joh. Kies betrachtet das ebene Dreieck als Grenzwert des sphärischen mittels $\sin A = A$, $\cos A = 1$, $\operatorname{tg} A = A$ (S. 408).

Lacailles Tafeln, deren spätere Auflagen (1781—1832) von Lalande herausgegeben wurden (S. 434).

Lagrange findet mittels Variationsrechnung die Gleichung der Minimalflächen (S. 550).

1761.

D'Alembert verteidigt die Behauptung $\log(-a) = \log(a)$ (S. 303).

Lagrange findet die Richtigkeit der Infinitesimalrechnung in der Ausgleichung von Fehlern (S. 644).

1762.

Euler schlägt für die Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades die Form $w + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + \cdots + Q\sqrt[n]{v^{n-1}}$ vor (S. 96).

Lagranges erste Abhandlung über Variationsrechnung, welche Euler seit 1755 handschriftlich bekannt war (S. 1066).

Waring, Miscellanea analytica (S. 93).

Waring, Proprietates algebraicarum curvarum (S. 467, 472).

1763.

Basedow, Überzeugende Methode der Arithmetik ist eines der ersten und besten Schulbücher (S. 51).

Bayessche Regel für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die aus gegebenen Versuchen ermittelte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zwischen gegebenen Grenzen liege (S. 240).

Euler sieht in den trigonometrischen Funktionen nicht mehr Linien, sondern Verhältnisse von Linien (S. 405).

Euler beginnt mit Transformationen elliptischer Integrale (S. 836).

G. B. Fagnano beweist den 1754 von Euler vorgeschlagenen Satz (S. 820).

Klügel, Geschichte der Parallelenlehre (S. 385).

Mauduit zeigt zwei Scharen von Geraden auf dem hyperbolischen Paraboloid (S. 556).

1764.

Bayes bestimmt aus dem Eintreten eines Ereignisses dessen Wahrscheinlichkeit (S. 240).

Bézouts Abhandlung über Gleichungen (S. 98).

Eulers Kettenbruchalgorithmus (S. 155).

Landen, Residual analysis (S. 661).

1765.

Euler macht auf die später nach ihm benannte Gerade aufmerksam, welche den Höhenschnittpunkt, den Schwerpunkt und den Mittelpunkt des Umkreises eines ebenen Dreiecks enthält.

Lambert faßt in seinen „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik" die Neperschen Regeln so auf, daß die Fälle gruppenweise geordnet sind. Er bedient sich zum Beweise derselben unbewußt der Gruppentheorie (S. 409).

Vinc. Riccati und Saladini geben zwei Bände *Institutiones analyticae* heraus, in welchen analytische und geometrische Betrachtungsweisen angewandt werden, und in welchen zum großen Entsetzen der Zeitgenossen Differentiationen und Integrationen vereinigt vorgetragen sind (S. 677).

1766.

Daniel Bernoulli über Sterblichkeit bei Pocken (S. 232, 237).

Euler über den Rösselsprung (S. 220).

Euler will Kegelschnittbögen in die Analysis eingebürgert wissen, wie man es schon mit Kreislinien gemacht habe (S. 836).

Euler erblindet auch auf dem zweiten Auge.

Lagranges Adjungierte (S. 928) und seine Lehre von den linearen Differentialgleichungen (S. 930).

1767.

Bézouts Aufsatz über den Grad der Resultante von Gleichungen mit mehreren Unbekannten (S. 101).

D'Alembert betrachtet das Unendliche als Grenze (S. 642).

Euler benutzt den 1764 veröffentlichten Kettenbruchalgorithmus (S. 156).

Euler über Bevölkerungszunahme (S. 239).

Euler über die Gestattung unstetiger Funktionen in der Analysis, besonders bei der Integration partieller Differentialgleichungen (S. 790).

Lagrange benutzt die Wurzeldifferenzen einer Gleichung als Wurzeln einer neuen Gleichung (S. 130).

Lambert über die Irrationalität von π (S. 447).

1768.

Daniel Bernoulli wendet Infinitesimalrechnung auf Fragen der Wahrscheinlichkeit an (S. 238).

D'Alembert über Reihenkonvergenz (S. 261).

Euler integriert die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$$

(S. 804).

Eulers Integralrechnung, Band I.

Lagranges Umkehrungsformel (S. 258).

Lambert benutzt Hyperbelfunktionen (S. 411).

Vinc. Riccati über rekurrente Reihen (S. 261).

1769.

Eulers Integralrechnung, Band II.

Euler sucht Flächen, deren über demselben Stücke der xy-Ebene stehende Flächenstücke einander gleich sind (S. 550).

Lagranges „Résolution des équations numériques" (S. 141).

Lagranges erste zahlentheoretische Veröffentlichungen in den Turiner und in den Berliner Akademieschriften (S. 161).

Lagrange über die Eulersche (vgl. 1768) Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}}\pm\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0$ (S. 807).

1770.

Daniel Bernoulli, das Geschlechtsverhältnis bei Geburten (S. 239).

Bézout, Cours de mathématiques (S. 676).

D'Alembert gibt Integrabilitätsbedingungen (S. 873).

D'Alembert behandelt eine Randwertaufgabe (S. 883).

Eulers Integralrechnung, Band III.

Eulers Algebra erscheint in erster Auflage.

Euler führt mehrfache Integrale ein, und zwar zunächst Doppelintegrale, welchen er den Namen *formula integralis duplicata* beilegt (S. 738).

G. B. Fagnano löst die 1754 von Euler vorgeschlagene Aufgabe (S. 829).

Klügel erfindet den Namen *trigonometrische Funktionen* und definiert sie, einem Eulerschen Gedanken (vgl. 1763) folgend, als Quotienten (S. 413).

Lagrange wendet Kettenbrüche bei der Behandlung bestimmter Gleichungen an (S. 143).

Lagranges zweite Abhandlung über Variationsrechnung (vgl. (1762). In ihr kommt schon eine den *Lagrangeschen Multiplikator* zur Behandlung von Extremwerten impliziter Funktionen anbahnende Betrachtung vor (S. 1070).

Lamberts *Anlage zur Tetragonometrie* (S. 430).

Lamberts Tafeln (S. 435).

Waring, Meditationes algebraicae. Aus ihrem reichen Inhalt sei der Goldbachsche Erfahrungssatz und der Wilsonsche Satz erwähnt (S. 106, 167).

1771.

Eulers Abhandlung *De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet* handelt von abwickelbaren Flächen und nimmt x, y, z als Funktionen von zwei Variablen t, u (S. 529).

Landens erste Arbeiten über elliptische Transzendenten (S. 844).

Malfattis Resolvente (vgl. den von Bortolotti herausgegebenen Briefwechsel zwischen Ruffini und Paoli) (S. 117).

1772.

Bossuts großer Cours de Mathématiques beginnt zu erscheinen.

Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations (S. 110).

Lagrange, Sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre (S. 966).

Lagrange gebraucht symbolische Bezeichnungen wie z. B. $d^{-1}=\int$ usw. (S. 1048).

Waring, Proprietates algebraicarum curvarum (S. 467, 618 Note).

1773.

Euler führt das Wort *Primitivwurzel* ein (S. 173).

Lagrange über Divisoren quadratischer Formen (S. 175).

Lagrange über Berechnung von Beobachtungen unter Berücksichtigung der Fehlerwahrscheinlichkeit (S. 247).

Lagrange, Solution analytique de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires (S. 523).

Lagrange handelt von dreifachen Integralen (S. 740).

De Marguerie muß sich erfolgreich mit der Auffindung von Gleichungsresolventen und mit dem Eliminationsprobleme beschäftigt haben (S. 118).

Monge über die Bestimmung der willkürlichen Funktionen, welche bei der Integration partieller Differentialgleichungen vorkommen (S. 882).

Monge spricht sich in einer 1771 der Pariser Akademie vorgelegten, aber erst 1773 gedruckten Abhandlung dahin aus, daß sich für $Mp+Nq=0$ $\left(\text{wo } p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right.$ und M, N Funktionen von

x, y, z sind) dieselbe Integralgleichung ergebe, ob man z als Konstante oder als Variable betrachte (S. 950).

1774.

Condorcet stützt sich bei dem Beweise des Satzes, daß, unter der Voraussetzung einer homogenen Gleichung m^{ten} Grades zwischen x und y, ydx sich auf die Form $Pdx + Qdy$ bringen lasse mit rationalem P und Q, und daß überdies $Pdx + Qdy$ ein exaktes Differential sei, auf die Methode der Konstantenabzählung, von deren Sicherheit er aber selbst nicht überzeugt ist. Ganz ähnliche Zweifel hegt auch Lagrange (S. 724).

Euler dehnt den Gültigkeitsbereich des Binomialsatzes auf gebrochene und negative Exponenten aus, wie Newton es schon gewagt hatte, ohne einen Beweis dafür zu haben (S. 203).

Lagranges Zusätze zu Eulers Algebra von 1770 (S. 171).

Lagrange gibt die Grundzüge seiner Infinitesimalrechnung bekannt (S. 644).

Lagrange erkennt Entstehung und Bedeutung des singulären Integrals einer Differentialgleichung (S. 885, 890, 896, 969).

Lambert veröffentlicht seine Freie Perspektive (vgl. 1759) in zweiter Auflage. In den Zusätzen befindet sich eine Geometrie des Lineals (S. 607).

Laplace über die Wahrscheinlichkeit von Ursachen. In der gleichen Abhandlung wird gegen die Anwendung des arithmetischen Mittels bei der Beobachtungsberechnung Stellung genommen (S. 241, 249).

Monge, Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes (S. 535).

1775.

Euler führt die Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen ein (S. 737).

Karstens Optik unter wesentlichem Einflusse von Lamberts Freier Perspektive von 1759, wenn nicht von 1774 (S. 614).

Lagranges Fortsetzung der Abhandlung von 1773 über Divisoren quadratischer Formen (S. 177).

Landens zweite (1771 schon angekündigte) Abhandlung über elliptische Transzendenten, in welcher die *Landensche Transformation* und die Darstellung eines Hyperbogens durch zwei Ellipsenbögen vorkommt (S. 846).

Laplace wendet rekurrierende Reihen bei Wahrscheinlichkeitsaufgaben an (S. 236).

Laplace unterscheidet *solution particulière* von *intégrale particulière* (S. 888).

Laplace bedient sich der Variation der Konstanten (S. 920).

Laplace über Funktionalgleichungen (S. 1051).

Lexell schafft die Polygonometrie (S. 431).

Monge benutzt zum ersten Male das Schlußverfahren: sind p und q unter einer gewissen geometrischen Voraussetzung konstant, unter einer anderen wieder konstant, aber von anderem Werte, dann muß p eine Funktion von q sein oder umgekehrt q eine Funktion von p (S. 536, 561, 948).

Die Pariser Akademie faßt den Beschluß, künftighin Einsendungen, welche eine genaue Quadratur des Kreises, Dreiteilung eines beliebigen Winkels mittels Zirkel und Lineal oder das Perpetuum mobile herzustellen verheißen, nicht mehr anzunehmen (S. 377).

1776.

Euler behauptet, keine Kurve lasse sich durch Kreisbögen rektifizieren (S. 488), vgl. 1781.

Eulers Abhandlung De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata vom 2. September 1776 über partielle Differentialgleichungen (S. 551).

Eulers Abhandlung über Kurven, deren Rektifikation sich durch Parabelbögen vollzieht (S. 489).

Felkels Faktorentafeln (S. 435).

Lagrange verwertet Kettenbrüche zur Integration von Differentialgleichungen (S. 916).

Laplace gebraucht das Wort *Résultante* (S. 123).

Vandermondes der Pariser Akademie 1772 vorgelegte Determinantenbezeichnung erscheint im Drucke (S. 122, 791).

Waring, Meditationes analyticae (S. 275).

1777.

Eulers Arbeit über die Ellipse kleinsten Inhaltes durch vier gegebene Punkte (S. 469).

Euler lehrt flächentreue und winkeltreue (konforme) Abbildung, letztere unter Anwendung komplexer Größen. Abbildung in der allgemeinsten Bedeutung des Wortes heißt bei ihm *repraesentatio* (S. 573).

Lagrange äußert sich in einem an Lorgna gerichteten Briefe über die ungemeine Wichtigkeit der nunmehr unbeanstandeten Benutzung imaginärer Größen in der Analysis (S. 148).

Lagrange wendet rekurrierende Reihen und Differenzenrechnung auf Wahrscheinlichkeitsaufgaben an (S. 233).

Lagrange benutzt die Variation der Konstanten bei dem Übergang von der unvollständigen zur vollständigen linearen Differentialgleichung (S. 932).

Laplace, Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles (S. 964).

Laplace Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung (S. 999).

1778.

D. Bernoulli über Berechnung von Beobachtungen unter Einführung einer Fehlerkurve (S. 248).

Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques (S. 332, 390).

Hindenburgs erste kombinatorische Arbeit über den polynomischen Lehrsatz (S. 205).

Schulzes Tabellen (S. 436).

1779.

Bézout gibt eine Eliminationsmethode für Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten (S. 127).

Eulers Abhandlung vom 25. Januar 1779 De linea brevissima in superficie quacumque ducenda behandelt die drei Koordinaten eines Punktes in symmetrischer Weise (S. 538, 540).

Lagrange über die Anzahl imaginärer Wurzeln einer Gleichung (S. 125).

1780.

Landen, Mathematical memoirs I (S. 711), vgl. 1789.

Nieuport über parallele Kurven (S. 510).

1781.

Euler findet durch Kreisbögen rektifizierbare Kurven (S. 491), vgl. 1776.

Kant gründet den Zahlbegriff auf die Zeit (S. 79).

Laplace findet $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (S. 767).

Waring, Meditationes analyticae mit modernen Anschauungen über Reihenkonvergenz. Insbesondere lehrt er die Benutzung des Gliederquotienten und weiß er, daß

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

konvergiert (divergiert), sofern $n \gtrless 1$ (S. 275).

1782.

Euler, Methodus facilis symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi ist zur Grundlage der heutigen Theorie der Raumkurven geworden, insofern s als unabhängige Variable dient und die sphärische Abbildung benutzt wird (S. 525).

Laplace benutzt *erzeugende Funktionen* (S. 273, 1050).

1783.

Eulers Veröffentlichung des *Reziprozitätssatzes*, welchen er schon 1746 geahnt hatte (S. 186).

Euler bedient sich des von ihm durch S bezeichneten sphärischen Exzesses (S. 416).

Euler †.

Vegas kleinere Tafeln.

1784.

Euler, De mirabilibus proprietatibus unciarum (S. 183).

Fontana bedient sich des Namens *equazione polare* (S. 513).

Laplace sucht Werte von Formeln zu ermitteln, in welche sehr große oder sehr viele Faktoren eingehen (S. 281).

Waring verbreitet sich weiter über Reihenkonvergenz und deren Notwendigkeit (S. 286), vgl. 1781.

1785.

Boscowich gibt die vier Fehlergleichungen der Trigonometrie (S. 420).

Charles gibt Beispiele von Unstetigkeiten (S. 881).

Condorcet über die nach Stimmenmehrheit erfolgten Entscheidungen (S. 253).

Euler, Opuscula analytica.

Huttons Tafeln (S. 439).

Laplaces Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ (S. 943).

Legendre führt *Kugelfunktionen* ein. Laplace gelangt nur wenig später zu den gleichen Funktionen und stellt deren Differentialgleichung zweiter Ordnung auf (S. 792).

Meusniers Satz von den Krümmungen einer Fläche; in der gleichen Abhandlung sind zwei Minimalflächen behandelt, ebenda auch das Schmiegungsparaboloid (S. 547).

Monges schon 1771 der Pariser Akademie übergebene Abhandlung: Sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure erscheint im Drucke (S. 531).

1786.

Bring führt mittels Gleichungen niedrigeren Grades die Gleichung fünften Grades auf die Form

$$y^5 + Gy + H = 0$$

zurück (S. 131).

Cagnolis Trigonometrie (S. 418).

Charles überträgt den Begriff des singulären Integrals auf Differenzengleichungen (S. 1052).

Lambert über Parallellinien (S. 399).

Lhuilier, Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs (S. 645).

1787.

Eulers zweite Abhandlung über den allgemeinen binomischen Lehrsatz (S. 204), vgl. 1774.

Fuß untersucht sphärische Kegelschnitte (S. 387).

Hutton, Elements of conic sections enthalten die formal wichtige Neuerung, daß die vorkommenden Gleichungen aus dem Texte heraustretend stets auf neue Zeilen gedruckt sind (S. 465).

Legendres Satz vom sphärischen Dreieck mit kleinen Seiten, welches als eben behandelt wird, nachdem jeder Winkel um den dritten Teil des sphärischen Exzesses vermindert worden ist (S. 423).

Monges Aufsatz, in welchem *Berührungstransformationen* benutzt sind (S. 982, 1037).

1788.

Lagrange, Mécanique analytique. In ihr ist auf S. 45—46 der Gedanke des *Lagrangeschen Multiplikators* (vgl. 1770) abermals benutzt (S. 1068).

Legendres erste zahlentheoretische Abhandlung, in welcher schon der *Reziprozitätssatz* vorkommt (S. 190), vgl. 1783.

Legendre erkennt die Wichtigkeit der Landenschen Entdeckung von 1775, daß ein Hyperbelbogen zu zwei Bögen zweier Ellipsen in Beziehung gesetzt werden kann (S. 847, 857).

Legendre untersucht die zweite Variation (S. 1072).

Pfaff, Versuch einer Summationsmethode (S. 291).

1789.

Encyclopédie méthodique erscheint im Drucke.

Eschenbach über Reihenumkehrung (S. 215).

Landen, Mathematical memoirs II (S. 711), vgl. 1780.

Lhuiliers erstes Lehrbuch der Polygonométrie. Als Ausgangspunkt wird die Bestimmung des Flächeninhaltes benutzt (S. 432).

Schubert benutzt erstmalig den Namen *konforme Abbildung* (S. 575).

1790.

Brissons erster Vorschlag, der zum metrischen System führte.

Kaestner, Geometrische Abhandlungen, Bd. I, S. 463—464 ist zuerst die geometrische Wahrheit $AB + BA = 0$ ausgesprochen, vgl. 1798.

Mascheronis Anmerkungen zu Eulers Integralrechnung, Bd. I. Unter vielem anderem ist bemerkenswert, daß auf S. 731 die Behauptung ausgesprochen ist, eine imaginäre Kurve könne eine reelle Länge besitzen, was damit zusammenhängt, daß man damals über den Geltungsbereich von Funktionen noch im Unklaren war (S. 485), vgl. 1792.

1791.

Arbogast unterscheidet *discontinuité* von *discontiguité* (S. 880).

Gesetz vom 30. März über Einführung des metrischen Systems in Frankreich.

1792.

Fischer (Ernst Gottfried) veröffentlicht seine Dimensionszeichen, wegen derer eine heftige Polemik geführt wird (S. 217).

Lotteri über Parallelkurven (S. 510).

Mascheronis Anmerkungen zu Eulers Integralrechnung, Bd. II, vgl. 1790.

Maskelynes Regel zur Auffindung von log sin x und log tg x, wenn $x < 5^0\,33'$ (S. 422).

1793.

Eulers bereits 1777 vollendete Abhandlung, in welcher die Hauptformeln zwischen partiellen Differentialquotienten, welche der Riemannschen Funktionentheorie zugrunde liegen, bereits angegeben sind, erscheint im Drucke (S. 711).

Kaestner über Parallelkurven (S. 510).

Lagranges Interpolationsformel (S. 1048).

Legendres sehr seltenes *Mémoire sur les transcendantes ellipti-*

ques, in welchem drei Typen elliptischer Integrale unterschieden sind (S. 860).

Rothes Reihenumkehrung (S. 216).

1794.

Eulers Integralrechnung, Bd. IV. Darin auch die Anwendung von i um $\sqrt{-1}$ zu bezeichnen (S. 315).

Hulbe lehrt Gleichungsumformungen, welche unter Umständen zu deren Auflösung führen (S. 135).

Legendre, Éléments de géométrie. Darin treten erstmalig symmetrisch gleiche Gebilde auf (S. 336, 381, 393).

Pronys Tabellenberechnung angefangen (S. 439).

Vega, Thesaurus (S. 438).

1795.

Callets Tafeln (S. 438).

École Normale wird in Paris gegründet. In ihr wurde erstmalig Darstellende Geometrie durch Monge gelehrt, und Lagrange und Laplace hielten an ihr elementararithmetische Vorlesungen (S. 625).

Monge, *Feuilles d'analyse,* in welchen neben zahlreichen anderen Dingen auch die Entdeckung der Krümmungslinien enthalten ist (S. 559).

Paoli über rekurrente Reihen (S. 296).

1796.

Hindenburgs kombinatorisches Hauptwerk (S. 206).

1797.

Carnot, Réflexions sur la metaphysique du calcul infinitésimal (S. 647).

Lacroix, Traité d'arithmétique (S. 345).

Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral S. 694).

Lagrange, Théorie des fonctions (S. 688).

Legendre über singuläre Integrale (S. 896).

Wessel gibt die geometrische Deutung des Imaginären (S. 315).

1798.

Bossut schafft in Anschluß an D'Alembert (1757) eine Kleinkreistrigonometrie (S. 408).

Busse berücksichtigt, jedenfalls in Anschluß an Kaestner (vgl.

1790), die Vorzeichen der Strecken bei geometrischen Untersuchungen (S. 479).

Condillac, Langue des calculs (S. 42).

Euler gebrauchte in einer in diesem Jahre gedruckten Abhandlung astronomische Zeichen ☉ ♄ ♃ ♂ als Abkürzungen für gewisse Funktionen (S. 300).

Legendre, Essai sur la théorie des nombres (2. Auflage 1808, 3. Auflage 1830). Der Essai enthält den Namen *Reziprozitätssatz* (vgl. 1783) und das Legendresche Symbol (S. 194).

Monge, Géométrie déscriptive (S. 626).

Schubert beschäftigt sich mit der Zerlegung von Polynomen in reelle Faktoren (S. 137).

1799.

Kramps Abhandlung, welche die Grundlage der Lehre von den Falkultäten bildet (S. 296).

Lhuilier gründet die Polyedrometrie (S. 432).

Ruffinis erste Arbeit über Gleichungen fünften Grades (S. 139).

Betrachtet man diese Zusammenstellung, so ist, wie uns scheint, eine Tatsache hervorstechend: die überwiegende Zahl der Leistungen, für welche auf Euler und auf Lagrange verwiesen ist, gegenüber von der Erwähnung anderer Schriftsteller. Sind doch, wenn wir richtig gezählt haben, 34 verschiedene Schriften Eulers und 32 verschiedene Schriften Lagranges in unserer Übersicht genannt, Zahlen, mit welchen kein anderer Schriftsteller in Wettbewerb treten kann. Dabei ist nicht außer Acht zu lassen, daß unter den einfach gezählten Schriften Eulers seine zweibändige Algebra, seine zweibändigen Opuscula analytica, seine vierbändige Integralrechnung enthalten ist, von welcher letzteren wir vielleicht eine ganz gedrängte Inhaltsangabe hier einschalten dürfen, weil in den vorhergehenden Abschnitten das große Werk bald hier bald dort als Quelle genannt ist, ohne daß sich Gelegenheit bot, ein übersichtlicheres Gesamtbild zu entwerfen, als es S. 679 geschah.

Eulers Integralrechnung setzt sich aus vier Bänden zusammen. Der I. Band (1768) lehrt zuerst die Ausführung von Integrationen, sei es in endlicher Form, sei es angenähert mittels unendlicher Reihen oder Faktorenfolgen. Dann werden Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades integriert, wobei besonderes Gewicht auf die Lehre vom integrierenden Faktor gelegt wird. Auch singuläre Lösungen kommen zur Sprache, über deren Entstehung und Sinn sich Euler freilich nicht klar ist. Man weiß, daß erst Lagrange (1774) diesen gewaltigen Fortschritt vollzog. Endlich werden Differentialgleichungen erster Ordnung aber höheren Grades behandelt. Der Inhalt des II. Bandes (1769) läßt sich als Integration von Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung zwischen zwei Veränderlichen bezeichnen. Die Gleichungen zweiter Ordnung sind vorzugsweise berücksichtigt, und unter denen höherer Ordnung die linearen Differentialgleichungen, namentlich die mit konstanten Koeffizienten. Bezüglich der zur Integration benutzten Methoden betont Euler wiederum die Anwendung integrierender Faktoren. Auch von bestimmten Integralen ist mehrfach die Rede. Der III. Band (1770) ist seinem Hauptteile nach den partiellen Differentialgleichungen gewidmet, und zwar solchen, in welchen zuerst von Funktionen zweier, dann von Funktionen dreier unabhängiger Veränderlichen die Rede ist. In beiden Fällen sind Differentialgleichungen erster Ordnung von solchen höherer Ordnung unterschieden. Darauf folgt ein Anhang von der Variationsrechnung, endlich ein Supplement, das fast ausschließlich von der Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ (X und Y sind Polynome 4. Grades in x bzw. y) handelt, die schon im I. Bande integriert worden war. Der IV. Band (1794) setzt sich aus einzelnen teilweise schon vorher im Drucke erschienenen Abhandlungen zusammen, welche als Ergänzungen der drei ersten Bände dienen sollen. Von ihrem allgemeinen Inhalte seien bestimmte Integrale genannt, deren Differentiation unter dem Integralzeichen, elliptische Transzendenten und einzelne Differentialgleichungen sowohl zweiter als erster Ordnung. Unter den letztgenannten tritt wieder die Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ hervor. Den Schluß des Bandes bildet eine Ergänzung zu Eulers Arbeiten über die Variationsrechnung.

Wir würden dem ganzen Werke nicht gerecht werden, wenn wir nicht an zwei Tatsachen erinnerten, welche den Lesern dieses Bandes zwar genugsam bekannt sind, aber doch ins Gedächtnis zurückgerufen werden sollen: Euler, der 1735 sein eines Auge eingebüßt hatte, ist seit 1766 auf beiden Augen blind gewesen, er ist 1783 gestorben. Die drei ersten Bände sind also entstanden, ohne daß Euler eine Zeile derselben im Manuskript oder im Drucke selbst lesen konnte, an dem vierten Bande war überhaupt seine irgendwie geartete Mitwirkung ausgeschlossen. Damit erklärt es sich, wenn im II. Bande §§ 1163 und 1179 Euler Selbstentschuldigungen gemachter Fehler ausspricht, wenn er im III. Bande Differentialgleichungen für nicht integrierbar hält, welche er selbst schon im Jahre 1730 integriert hat (S. 1033—1034).

Wie Eulers Integralrechnung, sind auch mit dem Namen Lagrange als Verfasser Arbeiten vorgekommen, welche einzeln einen ganzen Band erfüllten, und über welche man an den Stellen nachlesen mag, wo jene Schriften besprochen wurden. Freilich ist dieses bezüglich der Mécanique analytique von 1788 untunlich, da, dem Plane unseres Geschichtswerkes entsprechend, von der Mechanik als solcher abgesehen wurde und Lagranges Meisterwerk nur nebenbei erwähnt wurde, weil Lagrange in ihm, wie bereits in der Abhandlung von 1770 über Variationsrechnung, von dem in neuerer Zeit nach Lagrange benannten Multiplikator zur Ermittelung von Extremwerten impliziter Funktionen Gebrauch macht.

Es hält schwer die beiden hier in den Vordergrund gestellten Persönlichkeiten einem bestimmten Lande zuzuweisen, dem ihre Entdeckungen zur Ehre gereichen. Der in der Schweiz geborene Euler hat seine Werke abwechselnd in Petersburg, in Berlin, dann wieder seit 1766 in Petersburg verfaßt. Der in Italien geborene Lagrange wirkte vorzugsweise in Berlin (1766—1787) und in Paris (seit 1787), und was beide, was Euler und Lagrange, geschrieben haben, das ward alsbald schulebildend für ganz Europa. Man könnte, man sollte vielleicht die beiden großen, soeben vereint genannten Gelehrten jeder besonderen Nationalität entkleiden und sie als europäische Mathematiker bezeichnen.

Nach ihrem Ausschlusse bleiben unter den häufiger genannten Mathematikern folgende, deren Namen wir die Ziffern beifügten, welche zählen, wie oft der Name in unserem Überblicke vorkommt: Laplace (12), Lambert (10), Legendre (9), Monge (8), Waring (7), Deutsche Kombinatoriker seit 1778 (6). Unzweifelhaft liegt hier ein erhebliches Übergewicht auf französischer Seite und verlangt die unumwundene Anerkennung, daß innerhalb der in unserem Bande behandelten vier Jahrzehnte Frankreich die erste Stelle unter Europas Völkern einnimmt, soweit mathematische Leistungen in Frage kommen.

Neben den von uns hervorgehobenen Zahlen, welche immerhin einem wenn auch eigentümlichen Zufalle ihre Entstehung verdanken könnten, reden gewisse, wir könnten sagen offizielle, Tatsachen die gleiche Sprache.

Im Jahre 1775 faßte die Pariser Akademie den Beschluß, künftighin keine Einsendung mehr anzunehmen, welche eine elementare Quadratur des Kreises oder eine ebensolche Dreiteilung eines beliebigen Winkels oder die Herstellung eines Perpetuum mobile zusagte. Mag man auch auf den schon 1767 durch Lambert versuchten Beweis der Irrationalität von π abheben, so ist mindestens fraglich, ob die in Berlin gedruckte Abhandlung den Mitgliedern der Pariser Akademie bekannt war, da eine Einwirkung derselben auf irgendwelche Zeitgenossen nicht nachweisbar erscheint, und jedenfalls war es doch die Pariser und nicht die Berliner Akademie, welche den erwähnten Beschluß faßte und die Ablehnung von als fruchtlos erkannten Versuchen über die Kreisquadratur hinaus auf zwei andere Aufgaben ausdehnte, welche zu oft die Geduld der ihre vermeintlichen Auflösungen Prüfenden auf harte Proben gestellt hatten.

In Frankreich war in den Jahren 1751—1781 nach englischem Muster, aber dieses weit hinter sich lassend, die große *Encyclopédie* entstanden (Bd. III², S. 510). In Frankreich empfand man aber auch die Unhandlichkeit des nur zu umfangreich angelegten Werkes und ließ ihm 1789 die *Encyclopédie méthodique* folgen, die dazu bestimmt war, die Bestandteile des großen Sammelwerkes nach Wissenschaften zu ordnen, und deren drei mathematische Bände bald auch außerhalb Frankreichs in den Bibliotheken der Fachgelehrten zu finden waren.

In Frankreich wurde 1791 durch Gesetz das metrische System eingeführt. Der Gedanke, ein allgemein verwertbares, der Natur entstammendes und eben dadurch natürliches Maßsystem zu ermitteln, war ja keineswegs neu. Huygens hat daran gedacht, in England sind Versuche in dieser Richtung aufgetaucht, ein Italiener Buratini hat 1675 den Sekundenpendel als allgemeine Einheit empfohlen, aber über den Gedanken ist man nirgend hinausgekommen. Es bedurfte einer kühn veranlagten gesetzgebenden Behörde, eines von dieser Behörde gefaßten Beschlusses, um jene Gedanken in eine Tat umzusetzen, und dazu schwang sich das revolutionäre Frankreich 1791 auf, ein Jahr bevor das Todesurteil über den unglücklichen König Ludwig XVI. gefällt wurde.

Der Verurteilung des königlichen Paares folgten seit 1792 die Revolutionskriege. Französische Heere zogen über die Grenzen Frankreichs hinaus und wußten das Mutterland jahrelang vor den unmittelbaren Verwüstungen des Krieges zu schützen. In dieser Zeit entwickelten sich neue mathematische Lehren, entstanden Anstalten, an welchen sie vorgetragen werden konnten. Das Jahr 1795 ist das Geburtsjahr der École Normale wie der École Polytechnique in Paris. An ihnen lehrten Lagrange, Laplace, Monge.

Das sind die Tatsachen, an welche wir dachten, als wir das Übergewicht Frankreichs in den letzten vier Jahrzehnten des 18. Jahrhunderts, soweit es um Mathematik sich handelt, als feststehend erklärten. Wir können diese Erklärung jetzt um so zuversichtlicher aussprechen, allerdings mit der gleichen Einschränkung, welche wir am Anfang dieser Erörterung vorausschickten, und welche sich auf Euler und Lagrange bezog: Die in diesem Bande erzählte Geschichte der Mathematik ist in erster Linie die Geschichte der Entdeckungen von Euler und Lagrange. An zweiter Stelle treten französische Mathematiker auf, in die dritte Stelle erst teilen sich Mathematiker aus den sonstigen Ländern Europas. Da finden wir in unserer Übersicht unter

Einhaltung der alphabetischen Reihenfolge der Länder sowohl als der Schriftsteller den Dänen Wessel, die Deutschen Kästner, Lambert, die Engländer Landen, Maskelyne, Waring, den Finländer Lexell, die Italiener G. F. Fagnano, Malfatti, Mascheroni, Ruffini, den Schweden Bring, die Schweizer Daniel Bernoulli, Bertrand, Lhuilier, von welchen Bernoulli lange in Rußland lebte.

Stellen wir nach der Frage nach den Persönlichkeiten und den Ländern, welchen sie angehören, die sachlich wichtigere Frage nach den bearbeiteten Gebieten, so können wir uns die Antwort bequem machen, indem wir sagen: alle damals vorhandenen Gebiete der Mathematik wurden bearbeitet von den niedersten bis zu den höchsten; dessen sind sämtliche Abschnitte dieses Bandes ebensoviele Zeugnisse. Sehen wir jeden einzelnen Abschnitt uns besonders an, so wird uns in denselben das Wachstum der einzelnen Teilgebiete erzählt, und werfen wir einen Blick in die von uns angefertigte Zusammenstellung, so erkennen wir einen Wechsel zwischen den behandelten Gegenständen, der nicht bunter sein könnte. Es war damals so wie es früher war, wie es bis heute geblieben ist. Ganz besonders veranlagte Schriftsteller wußten neue überraschende Gedanken zu äußern, die sich sofort als fruchtbar erwiesen und dadurch das Interesse und die Mitarbeit der ähnlich begabten Zeitgenossen auf sich zogen. Andere nicht minder fruchtbare Gedanken mußten warten, bis vielleicht erst nach Jahrzehnten ein anderer sie wieder aufnahm oder in unabhängiger Weise abermals dachte.

Wenn Euler immer und immer wieder auf die Benutzung eines integrierenden Faktors, den er Multiplikator zu nennen pflegte, zurückkam, so fällt es schwer nicht die Meinung zu hegen, Lagrange möge davon beeinflußt gewesen sein, als er 1770, mithin zwei Jahre nach dem Erscheinen des I. Bandes der Eulerschen Integralrechnung, abermals einen Multiplikator unter Benutzung des gleichen Kunstausdruckes in der Lehre von den Extremwerten anwandte. Wahrscheinlicher ist allerdings noch, daß Lagrange diese Methode dem VI. Kapitel der Eulerschen *Methodus inveniendi* von 1774 entnahm, in welcher sie, wie H. Stäckel bemerkt hat, schon angewandt ist.

Wenn Euler 1768 die Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ mittels algebraischer Funktionen integrierte, so war dieser Anstoß für Lagrange genügend, ihn zu Untersuchungen über die gleiche Differentialgleichung anzuspornen, und Lagranges Arbeit von 1769 reizte wiederum Euler zur erneuten Behandlung der merkwürdigen Gleichung.

Wenn Euler in dem I. Bande der Integralrechnung Beispiele von singulären Lösungen vorführte und Lagrange 1774 Sinn und

Entstehung solcher Lösungen zu erklären wußte, so liegt der Zusammenhang auf der Hand.

Wenn, um nicht immer wieder nur die beiden Männer anzuführen, welchen ohnehin der Löwenanteil an dem Inhalte dieses Bandes gehört, Hutton 1787 zum ersten Male dem mathematischen Drucke die Anordnung geben ließ, daß Gleichungen stets auf neue Zeilen gesetzt wurden, so verbreitete sich diese Sitte überall hin, vielleicht ohne daß die meisten wußten, wem sie nachfolgten.

Wenn Kästner 1790 die geometrische Wahrheit $AB + BA = 0$ zuerst aussprach, wenn Busse 1798 sicherlich nicht ohne Kenntnis von Kästners Geometrischen Abhandlungen, welche damals, gleich allen Kästnerschen Schriften, von jedem deutschen Mathematiker gelesen wurden, die Vorzeichen der Strecken berücksichtigte, und 1801 in seinem Buche: Neue Erörterung über das Plus und Minus, I. Abteilung (Köthen 1801) darauf zurückkam, so ist hier ganz gewiß eine Abhängigkeit vorhanden, während es — wenn man uns gestattet über die Zeitgrenze dieses Bandes noch weiter hinauszugehen — schon zweifelhafter ist, ob Moebius in seinem Barycentrischen Calcul von 1827 nicht eine selbständige Nacherfindung machte, was man ganz gewiß dem noch erheblich späteren mit der deutschen Sprache vollständig unbekannten Chasles wird zugestehen müssen.

Der Einfluß, welchen Monges darstellende Geometrie, die sich soweit über alle ihr vorausgegangenen annähernd ähnlichen Schriften erhob, daß man von einer Neuerfindung zu reden berechtigt ist, sofort bei ihrem Erscheinen ausübte, ist unverkennbar.

Nicht minder plötzlich und zugleich nachhaltig wirkten Monges Arbeiten auf dem Gebiete der Flächentheorie und der partiellen Differentialgleichungen.

Daniel Bernoullis kühne Neuerung von 1768, Infinitesimalbetrachtungen in die Wahrscheinlichkeitsrechnung einzuführen, wurde dagegen erst ganz allmählich Gemeingut. Und ganz zum Schlusse dürfen wir nicht unterlassen auf Gedanken hinzuweisen, deren volle Bedeutung über das Verständnis der Zeit, in welcher sie entstanden, vielfach über das Verständnis derjenigen, welche sie äußerten, hinausging. Die Funktionentheorie des XIX. Jahrhunderts hat ihre Keime in dem vorhergehenden Jahrhunderte. Man vergleiche doch, was in unserer Übersicht 1758 von Kaestner, 1759 von Daviet de Foncenex, 1767 von Euler, 1777 von Euler und von Lagrange, 1785 von Charles, 1787 von Monge, 1791 von Arbogast, 1793 von Euler, 1797 von Wessel berichtet ist, und man wird begreifen, wie wir diesen Ausspruch meinen.

Ihn ausführlicher zu erörtern sind diejenigen berufen, welche vielleicht weitere Bände dieses Werkes zu schreiben unternehmen.

Verbesserungen und Zusätze zu den Abschnitten XXI und XXVI von F. Müller.

S. 202 Z. 2 v. o. „1741“ statt „1739“.
Z. 14 v. u. „Berlin, 5 Bde., 1782—1784“.

S. 204 Z. 15 v. o. „vierzehn“ statt „dreizehn“.
Z. 1 v. u. „1787“ statt „1887“.

S. 205 Z. 2 v. u. „Lips.“ statt „Gotting.“.

S. 415 Z. 16 v. o. „combinatoriis“ statt combinatoribus“.
Z. 2 v. u. „maxime“ statt „maxima“.
„reversionem“ statt „recursionem“.

S. 218 Z. 11 v. u. „J. Fr.“ statt „W.“.

S. 219 Z. 9 v. u. „Bezout“ statt „Bézout“.

S. 220 Z. 9 v. u. „57“ statt “ 37“.
Z. 1 v. u. „Hist. Mém.“ statt „Mém.“.

S. 228 Z. 4 v. u. hinter „math.“ fehlt „prés.“.

S. 229 Z. 1 v. u. hinter „Mémoires“ fehlt „prés.“.

S. 230 Z. 1 v. u. hinter „1770“ fehlt „P.I“.

S. 231 Z. 15 v. o. hinter „1769“ fehlt „P.I“.
Z. 6 v. u. hinter „1782“ fehlt „[1785]“.

S. 234 Z. 12 v. o. „Commentat.“ statt „Comm.“.
Z. 13 v. o. hinter „1796“ fehlt „P. II“.

S. 235 Z. 3 v. o. hinter „Mém.“ fehlt „prés.“.
„[1774]“ statt „1774“.
Z. 14 v. o. „231“ statt „271“.

S. 236 Z. 3 v. u. „[1774]“ statt „1775“.

S. 240 Z. 2 v. u. hinzuzufügen „Vgl. auch Fußnote zu S. 229“.

S. 243 Z. 4 v. o. „Commentat.“ statt „Comm.“.
hinter „1799“ zuzufügen „P. II“.

S. 248 Z. 21 v. o. hinter „1777“ zuzufügen „P. I“.

S. 252 Z. 18 v. u. vor „April“ zuzufügen „März oder“.

S. 255 Z. 6 v. u. „657“ statt „617“.

S. 259 Z. 12 v. o. '„auf anderen Wegen bewiesen hatte: 1. in den Comm. Acad. Petrop. 7, 1784/5, p. 123—134 [1740]; 2. in einem Briefe an Joh. Bernoulli v. 27. August 1737, dann 3. in der ‚Introductio‘, — daß“.

S. 262 Z. 2 v. u. hinter „1769“ fehlt „P.I“.

S. 265 Z. 2 v. u. „230“ statt „220“.

S. 272 Z. 14 v. u. lies „In einer späteren“ statt „In der zweiten“.
Z. 2 v. u. vor „Mém.“ zuzufügen „Nouv.“.
lies: „*) Act. Acad. Petrop. 3; 1779, P. II, 29—51 [1783]“.

S. 275 Z. 1 v. u. lies „1773, 1784, 1785“.

S. 276 Z. 1 v. u. lies „V“ statt „IV“.
Z. 11 v. u. lies „analyticae“ statt „algebraicae“.

S. 277 Z. 2 v. u. lies „V“ statt „IV“.

S. 278 Z. 12 v. u. lies „300“ statt „200“.

S. 284 Z. 10 v. o. lies „Bandes, p. 48“.

S. 285 Z. 1 v. u. lies „36“ statt „33“.

S. 288 Z. 2 v. u. lies „123“ statt „133“.

S. 289 Z. 3 v. u. lies „386“ statt „886“.

S. 645 Z. 19 v. u. lies „Name“ statt „Namen“.

S. 655 Z. 1 v. u. Rogg, Handb. d. math. Lit., Tüb. 1830, S. 569 hat ebenfalls „Milano 1770“.

Zu S. 667 (Anm. 2):

James Glenie, The general mathematical laws which regulate and extend proportion universally; or a method of comparing magnitudes of any kind together, in all the possible degrees of increase and decrease. Phil. Trans. Lond. 1777, p. 450.

James Glenie, The doctrine of universal comparison or general proportion. London 1789. 4°.

James Glenie, The antecedental Calculus: or a geometrical methodus of reasoning, without any consideration of motion or velocity, applicable to every purpose to which fluxions have been or can be applied, with the geometrical principles of increments. London 1793. 18 p. 4°.

S. 667 Z. 15 v. u. Pasquich, Erste Gründe einer neuen Exponentialrechnung. Neuere Abh. Böhm. Ges. 3, Phys., S. 46.

S. 671 Z. 18 v. u. und Z. 6 v. u. „Die Bücher von **Mako von Kerek** und von **Rohde** befinden sich in der Stadtbibliothek zu Hamburg, Speersort.

S. 672 Z. 3 v. u. „1788" statt „1786". ‚Analysis und höhere Geometrie' ist II, 2 des ‚Lehrbegriff der gesammten Mathematik', 8 Teile, Rost. u. Greifsw. 1767—1777; 2. Aufl. 1786—1795.
Karsten schrieb auch: ‚Beiträge zur Aufnahme der theoretischen Mathematik', 4 Stücke 8°, Lpz. u. Rostock. St. I, p. 1: ein Versuch, worin man die Grundsätze der Diff.- u. Int.-R. so vortragen könne, daß auch in diesem Theile der theoretischen Mathematik die alte geometrische Evidenz herrsche. St. II, p. 91: Fortsetzung der Abhandlung von den Grundsätzen der Diff.- u. Int.-R.

S. 675 Z. 1 v. u. lies „Bezout" statt „Bézout".

S. 679 Z. 15 v. o. hinter „denen": „in der 2. Aufl. von 1792—1794".

S. 680 Z. 13 v. u. „1770" statt „1769". Der Titel heißt: „Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen". Im Jahre 1769 erschienen: „Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen".

S. 684 Z. 6 v. u. „Bd. I. Arithmetik und Algebra, erschien 1782, Bd. II. Geom., Trig., Kegelschnitte, Diff.- u. Int.-R. erschien 1784".

S. 684 Z. 8 v. o. Die späteren Auflagen enthalten 4 Bände: III. Die Mechanik der festen Körper. IV. Hydrodynamik.

S. 700 Z. 3 v. u. streiche „Nova".

S. 703 Z. 2 v. u. lies „IV (1784)" statt „III".

S. 712 Anm. 1. „Siehe P. Stäckel, Integration durch imag. Gebiet. Bibl. math. (3) 1, 1900, p. 109—128".

S. 716 Z. 11 v. u. hinter „1780, p. 3—31" fehlt „[1783]".

S. 723 Z. 2 v. u. lies „Hist. Mém." statt „Mém.".

S. 725 Z. 3 v. u. lies „XII, a. 1756 [1758]".

S. 738 Z. 3 v. u. vor „p. 72—103" fehlt „P. I".

S. 740 Z. 1 v. u. lies „a. 1773, p. 122—148 [1775]".

S. 749 Z. 3 v. u. hinter „p. 3—28" fehlt „[1780]".

S. 766 Z. 1 v. u. lies „Hist. Mém.".

S. 767 Z. 5 v. o. Die erste Tafel der Integralwerte $\int_0^\infty e^{t^2}dt$ gab Ch. Kramp, Analyse des réfractions astron. et terr. Straßb. u. Lpz. 1797. Von ihm rührt auch das Wort ‚Fakultät' her.

Zu S. 772. Als fernere Lit. über Max. u. Min.:
J. Ch. de Borda, Sur la méthode de trouver les courbes, qui jouissent de quelque propriété du maximum et minimum. Hist. Mém. Ac. Paris a. 1767, H. 90, M. 551 [1770].
A. Fontaine, Addition à la méthode pour la solution des problèmes de maximis et minimis, ib. H. 90, M. 588.
G. A. Lejonmark, Et sätt at söka maximum och minimum. Nya Handl. Svensk. Vet. Ak. a. 1794, p. 134.

S. 775 Z. 4 v. u. lies „a. 1773, p. 150—176 [1775]".

S. 790 Z. 5 v. u. Fontana, Memoria ..., erschien Pavia, 1793. (S. Rogg, Hdb. d. m. Lit., S. 499).

S. 799 Z. 1 v. u. „cartesische" statt „kartesische".

S. 804 Z. 4 v. u. lies „Hist. Mém.".

S. 815 Z. 1 v. u. hinter „p. 20—57" fehlt „[1780]".

S. 818 Z. 1 v. u. lies „1827" statt „1802". (Der Band erschien besonderer Umstände wegen sehr spät.)

S. 866 Z. 11 v. u. lies „XXV, a. 1769 [1771]".

S. 869 Z. 4 v. u. lies „1827" statt „1802".

Register.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

X.

Y.

Z.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.