



ABSCHNITT XXVII

TOTALE UND PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
DIFFERENZEN- UND SUMMENRECHNUNG
VARIATIONSRECHNUNG

VON

C. R. WALLNER



Totale und partielle Differentialgleichungen.

Um die Mitte des 18. Jahrhunderts sehen wir die Theorie der Differentialgleichungen bereits als eine selbständige mathematische Disziplin vor uns. Während die Untersuchung von Differentialgleichungen anfänglich nur Mittel zum Zweck war, während ihre Lösung ursprünglich sozusagen nur als Nebenrechnung bewerkstelligt wurde, war ihre Integration mittlerweile Selbstzweck geworden. Auch die Problemstellung hat sich geändert. In den ersten Zeiten werden Integrationen in geschlossener Form durch elementare Transzendenten verlangt, bald beschränkt man sich auf bloße Quadraturen; aber auch diese Forderung wird fallen gelassen; man ist zufrieden, überhaupt die durch die gegebene Differentialgleichung definierte Abhängigkeit diskutieren und womöglich durch unendliche Reihen oder bestimmte Integrale ausdrücken zu können. Trotz dieses freiwilligen Aufgebens zu hoch geschraubter Forderungen ist natürlich die Frage nach Integrationen in endlicher, geschlossener Form nicht erloschen; aber während man früher schlechthin für jede Differentialgleichung ein derartiges Integral verlangte, fragt man jetzt umgekehrt nach Gleichungen, welche eine Integration durch eine endliche Zahl elementarer Funktionen erlauben. Derartige Nachforschungen haben die Entdeckung größerer Gruppen integrierbarer Typen zur Folge. Solche enthält z. B. eine Arbeit von d'Alembert in den Memoiren der französischen Akademie von 1767.¹⁾ D'Alembert sucht zuerst Ausdrücke, die sich mit Hilfe der Exponentialfunktion, des Integrallogarithmus, von Logarithmen und elliptischen Integralen integrieren lassen. Im folgenden gibt er eine Reihe von eigentlichen Differentialgleichungen, meistens 2. Ordnung, die aber viel zu speziell sind, als daß wir hier darauf eingehen könnten, und Bedingungen für ihre Integrabilität. Wie er diese Gleichungen erhalten hat, legt er in einem späteren Aufsatze dar²⁾: Seine Methode besteht darin,

¹⁾ Histoire de l'Académie Royale des Sciences (avec les Mémoires de Mathématique et de Physique) 1767 (1770), p. 573 ff. (s. o. S. 728, 838). Die Seitenzahl bezieht sich hier, wie bei den Petersburger Akademieschriften, nur wenn besonders bemerkt auf die Histoire selber. ²⁾ Ebenda 1769 (1772), p. 73 ff.



aus einer integralen Gleichung durch verschiedene Kunstgriffe wieder neue abzuleiten. Ähnlich leitet Euler¹⁾ aus der Gleichung $ddy = Ydx^2$, wo Y eine Funktion von y allein ist, und die mit Hilfe des Multiplikators $2 \frac{dy}{dx}$ integriert werden kann, neue Typen ab, indem er z. B. x als abhängige Variable auffaßt. So ergibt sich

$$dyd^2x = -Ydx^3,$$

d. i. in unserer Schreibweise

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -Y \left(\frac{dx}{dy} \right)^3.$$

Eine neue Gleichung liefert die Einführung von

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

usw. Aus

$$SSddx + SdSdz - aazdx^2 = 0$$

leitet er²⁾ durch Substitutionen wie $z = \frac{y}{P}$ und $S = \frac{P}{R}$, wo P und R Funktionen von x sind, neue Gleichungen und im Falle der Integrierbarkeit neue Fälle integraler Gleichungen ab. Ähnlich erkennt er, daß die Gleichung

$$\frac{1}{a\alpha} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{i(i+1)}{xx} z$$

ein endliches Integral besitzt.³⁾ Ein von Euler oft geübtes Verfahren, in endlicher Form integrale Differentialgleichungen zu finden, besteht darin, daß er die Bedingungen aufsucht, unter welchen die das Integral darstellende unendliche Reihe abbricht (vgl. S. 913, 989 und 992). So integriert⁴⁾ er die Gleichung

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{cyy}{x^{2m+2}} = 0$$

allgemein in der Form

$$y = kx^{\frac{m+1}{2}} (1 - Bx^{2m} + Dx^{4m} - \dots) \sin \left(\frac{c}{m x^m} + \theta \right) \\ - kx^{\frac{m+1}{2}} (Ax^m - Cx^{3m} + \dots) \cos \left(\frac{c}{m x^m} + \theta \right),$$

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. II, 1769, p. 25. ²⁾ Ebenda, p. 142.
³⁾ Miscellanea Taurinensia t. III₂ (der Index 2 deutet die 2. Paginierung an) 1762/65 (1766), p. 70. Die Klammern deuten, wie überall im folgenden, partielle Differentialquotienten an. ⁴⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. IX, 1762/63 (1764), p. 298.

wo k und θ die Integrationskonstanten sind; er untersucht, für welche Werte von m die Reihen abbrechen. Denselben Gedankengang wendet Laplace auf die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung an (vgl. S. 1001).

Naturgemäß mußte sich bei eingehender Beschäftigung mit der Theorie der Differentialgleichungen rasch eine Einteilung derselben herausbilden: man schied in die zwei Hauptgruppen der totalen und partiellen Gleichungen. Des weiteren wurden die Begriffe Ordnung¹⁾ und Grad einer Differentialgleichung zur Abgrenzung einzelner Typen herangezogen und zwar in der Weise, daß man bald Gleichungen gegebener (meist 1. oder 2.) Ordnung aber beliebigen Grades, bald Gleichungen gegebenen (besonders 1.) Grades und beliebiger Ordnung ins Auge faßte. Einen anderen Gesichtspunkt bildete die Zahl der Variablen, und hier ist es wieder die Gleichung mit 2 bzw. 3 Veränderlichen, die am meisten untersucht wurde. Diese Art der Einteilung ergibt sich als die natürliche, wenn man die Integration der Differentialgleichungen als rein mathematisches Problem auffaßt, und demgemäß werden auch die einfachsten Fälle, die sich bei dieser Unterscheidung ergeben, wegen ihrer theoretischen Bedeutung eifrig behandelt. Die Praxis freilich führt sehr häufig gerade auf viel schwierigere und kompliziertere Fälle; Simultansysteme und große Zahl von Variablen sind in Astronomie und Mechanik Regel, und es ist nichts Seltenes, daß alle die schönen Integrationstheorien der reinen Mathematik vollständig versagen und man zu Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen muß. Trotzdem haben hierher gehörige Probleme wegen ihrer eminenten Bedeutung die hervorragendsten Geister dauernd beschäftigt, und wir begreifen, daß die Weiterentwicklung der Theorie der Differentialgleichungen der Verfolgung von zweierlei Absichten zuzuschreiben ist: erstlich war es das Streben nach — soweit möglich — vollständigen und erschöpfenden Theorien für die theoretisch interessanten Fälle; andererseits war es das Verlangen, die aus der Anwendung hervorgegangenen Methoden und Kenntnisse so allgemein und einheitlich als möglich zu gestalten. Diese Anregung aus der Praxis, dies Verlangen nach Ausbau wichtiger theoretischer Fragen lösen sich fortwährend ab und fördern, sich gegenseitig beständig ergänzend, in gleicher Weise die schon gewonnenen Resultate.

Indessen ist doch wenigstens zu Beginn des hier geschilderten Zeitabschnittes ein deutlicher Unterschied hinsichtlich des Objektes dieser treibenden Momente zu konstatieren. Der Gesichtspunkt prak-

¹⁾ Im Lateinischen „gradus“.



tischer Verwertbarkeit kommt vorzüglich für partielle Differentialgleichungen in Frage, während von den totalen Gleichungen hauptsächlich solche behandelt werden, die formal, also vermöge Grad, Ordnung, Variablenzahl eine ausgezeichnete Rolle spielen. Doch bietet auch bei totalen Gleichungen die Anwendung noch oft genug den Ausgangspunkt, die Veranlassung zur Untersuchung; es sei hier nur auf das Vorkommen der natürlichen Gleichungen bei Nils Landerbeck (1735—1810, Professor zu Upsala) hingewiesen. In einer Abhandlung aus dem Jahre 1783 wird zunächst ein *index variationis curvaturae* $T = \frac{dR}{dz}$,¹⁾ wo R den Krümmungsradius, dz das Bogenelement einer ebenen Kurve bedeutet, sowie eine Hilfsgröße p , die mit unserem $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ identisch ist, definiert. Es werden nun Kurven gesucht, die durch eine Relation zwischen T und p oder verwandten Gebilden definiert sind. Interesse für uns besitzt nur ein Scholion²⁾, das die Aufgabe enthält, aus einer Gleichung zwischen T und R , also einer speziellen Gattung natürlicher Gleichungen die betreffende Kurve zu ermitteln. Landerbeck benutzt zur Integration einen Hilfssatz

$$\frac{dR}{RT} = -\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}},$$

der sich leicht verifizieren läßt. Die Integrationen selbst bieten, weil an ganz speziellen Beispielen vorgenommen, keinerlei mathematisches Interesse. In einer Fortsetzung dieses Aufsatzes³⁾ ist auf die Möglichkeit hingewiesen, aus einer Relation zwischen T und z oder zwischen R und z die Gleichung der Kurve in x und y Koordinaten zu bestimmen. An die umgekehrte Aufgabe, eine gegebene Kurve durch eine Gleichung zwischen R und z darzustellen, ist in keiner Weise gedacht; sind doch auch die erwähnten Probleme für Landerbeck nur Aufgaben unter vielen anderen und in keiner Weise ausgezeichnet.

Wir haben heutzutage für die Einteilung der Differentialgleichungen außer den oben genannten noch andere Gesichtspunkte mehr funktionentheoretischer Natur, wie die Art der Unstetigkeiten des Integrals (z. B. ob fest oder verschiebbar), das Verhalten im Unendlichen u. a. m. Derartige Untersuchungen kommen natürlich vor Ausbildung der Funktionentheorie fast nicht vor, doch sei hier auf

¹⁾ Philosophical Transactions, vol. 73, 1783, p. 458. ²⁾ Ebenda, p. 467

³⁾ Das negative Vorzeichen rührt von geometrischen Betrachtungen her.

⁴⁾ Philosophical Transactions, vol. 74, 1784, p. 478, Schol. 2.

eine Stelle bei Euler¹⁾ hingewiesen, an der gezeigt ist, wie eine gewisse Methode der Integration durch Approximation infolge bestimmter Unstetigkeiten des Integrals hinfällig werden kann. Es ist speziell von der Differentialgleichung

$$ddy + \frac{2xdy}{x} - \frac{ff y dx^2}{x^4} = 0$$

die Rede, deren vollständiges Integral

$$y = A \sin \left(\frac{f}{x} + a \right)$$

ist. Hier geht, sagt Euler, während x von 0 bis w , d. i. einer sehr kleinen Größe, wächst, der Winkel $\frac{f}{x} + a$ aus dem Unendlichen ins Endliche über, so daß sein Sinus inzwischen alle Zwischenwerte von $+1$ bis -1 unendlich oft annimmt.

Die Frage nach der Existenz der Integrale, die nach unserer Ansicht den speziellen Untersuchungen voranzugehen hat, existiert vor Cauchy überhaupt nicht. Einerseits war die Zeit für derartig kritische Fragestellungen noch nicht reif, andererseits mochte die geometrisch oder physikalisch evidente Existenz der Lösung von Problemen, die aus der Praxis genommen waren, die Überzeugung erwecken, daß auch der entsprechenden mathematischen Formulierung der Aufgabe eine Bedeutung zukommen muß. Indessen findet sich doch, wiederum bei Euler, eine Überlegung, die, wenngleich mit der Frage nach der Existenz der Integrale in keinerlei Zusammenhang stehend, doch Cauchy nachmals bei seinen Untersuchungen genützt haben kann. Euler stellt nämlich an die Spitze eines Kapitels seiner Integralrechnung, das speziell von der Integration durch Approximation handelt²⁾, folgende Auslegung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = V$, wo V eine gegebene Funktion von x und y ist (s. o. S. 734): Nimmt x der Reihe nach die Werte a, a', a'', a''', \dots an, so nehmen, wenn die Differenzen $a' - a, a'' - a', \dots$ sehr kleine Zahlen sind, y und V die Werte b, b', b'', b''', \dots bzw. A, A', A'', A''', \dots an, wo die a, b, A durch die Gleichungen

$$b' = b + A(a' - a); \quad b'' = b' + A'(a'' - a'); \\ b''' = b'' + A''(a''' - a''); \dots$$

verbunden sind. Euler hat also hier ähnlich wie Cauchy ein Inte-

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 355. ²⁾ Ebenda, vol. I, 1768, p. 498.



grationsintervall ax in Teilintervalle $a'a', a'a'', \dots$ zerlegt und die vorgelegte Differentialgleichung näherungsweise als Differenzengleichung angesehen.

Unter der stillschweigenden Voraussetzung also, daß eine Integration immer möglich sei, war man zu verschiedenen Erkenntnissen über die Natur der Integrale gelangt. Die Tatsache, daß in das Integral der totalen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit 2 Variablen immer n Konstante eintreten, ist längst bekannt¹⁾; über die Zahl der willkürlichen Funktionen im Falle partieller Differentialgleichungen finden sich Untersuchungen in den Memoiren der Pariser Akademie²⁾. Umgekehrt wird die Frage nach der Ordnung der Differentialgleichung, die durch Elimination von n Konstanten entsteht, behandelt. So zeigt Lagrange³⁾, daß aus einer Gleichung mit 3 Variablen und 5 Konstanten immer eine partielle Differentialgleichung mit 3 Variablen und 5 Differentialquotienten hervorgeht, so daß also die gegebene Gleichung einer partiellen Gleichung 2. Ordnung gleichwertig ist.

Einen größeren Reiz übte auf viele Mathematiker das Problem, von vornherein, a priori, ganz allgemein den Bau, die analytische Form der Integrale und die Natur der darin auftretenden Transzendenten zu bestimmen. Die betreffenden Mathematiker waren sich natürlich der Schwierigkeit und Unbestimmtheit dieser Fragestellung gar nicht bewußt; man denke nur, welche Hilfsmittel allein die Theorie der Integrale von Funktionen mit ausschließlich algebraischen Irrationalitäten erfordert, wie sie das abgelaufene Jahrhundert geschaffen hat, und man wird die Zwecklosigkeit jener Versuche einsehen. Insbesondere hat sich der Marquis de Condorcet mit diesem Problem beschäftigt⁴⁾, ohne allgemein gültige Resultate zu erhalten; auch Laplace ist in dieser Hinsicht tätig, steckt sich aber von Anfang an engere Grenzen. Er versucht von vornherein, ohne wirklich Integrationen durchzuführen, lediglich auf Grund funktionentheoretischer, sehr interessanter, allerdings nicht ganz korrekter Schlüsse die Form des Integrals der partiellen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung festzustellen⁵⁾, d. h. die Art der Verknüpfung der darin auftretenden willkürlichen Funktionen zu bestimmen. Die Ergebnisse seiner Untersuchung bilden die wesentliche Grundlage seiner Theorie der Integration der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung.

¹⁾ Siehe z. B. Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 367. ²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 1 ff. ³⁾ Oeuvres de Lagrange publ. par Serret, t. IV, p. 89. ⁴⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), Histoire, p. 66. Viele spezielle brauchbare Erkenntnisse: Ebenda, Mémoires, p. 1 ff. ⁵⁾ Ebenda 1773 (1777), p. 347 ff.

Ein wichtiges sich zwar nicht auf den äußeren Bau, so doch ebenfalls auf die Natur der Integrale beziehendes Problem wirft man mit der Frage auf, welcherlei Unstetigkeiten in den willkürlichen Funktionen einer Integralgleichung auftreten dürfen. Wir wissen aus dem vorigen Band¹⁾, daß dieses Problem durch die Integration der Differentialgleichung der Saitenschwingungen veranlaßt wurde und ein Gegenstand lebhaften Streites unter den einzelnen Mathematikern war. Der vorsichtige d'Alembert, welcher von seinen Zeitgenossen am meisten Sinn für Präzision und Exaktheit, für Strenge in der Rechnung zeigte, wollte, wie wir uns erinnern, nur solche Funktionen zulassen, die nach Taylors Reihe entwickelbar sind, Euler glaubt diesen Funktionen keinerlei Beschränkung auferlegen zu dürfen. Beide Forscher bleiben bis zu Ende ihres Lebens hartnäckig auf ihrer Meinung bestehen und geben ihrer Ansicht wiederholt bestimmtesten Ausdruck, d'Alembert besonders in seinem Briefwechsel und in seinen Opuscles mathématiques, Euler u. a. in seiner Integralrechnung²⁾. Die willkürliche Funktion f , sagt dieser, kann so gewählt werden, daß die durch $\xi - f(\eta)$ dargestellte Kurve mit freier Hand gezogen und aus Teilen verschiedener Kurven zusammengesetzt ist. Derartige Funktionen nennt Euler „discontinuas seu nexu continuitatis destitutas“; die Fähigkeit, auch diskontinuierlich sein zu dürfen, bezeichnet er als eine „vis praecipua“ der willkürlichen Funktionen. Zur Begründung für seine Behauptungen benutzt er gleich darauf das Beispiel der schwingenden Saite: Die willkürlichen Funktionen des Integrals, heißt es, stellen die Anfangsbedingungen dar im Fall, daß sie (analytisch) bestimmt werden können; da diese Lösung allgemein sein muß, jedem Anfangszustand genügen muß, ist sie notwendig auch für jene Fälle tauglich, in welchen man der Saite zu Beginn der Schwingungen eine ganz unregelmäßige, diskontinuierliche Form gibt, und die Integrationsfunktion muß sich auch diesen Fällen anpassen lassen.

Während nun Euler und d'Alembert, neben Daniel Bernoulli die Häupter der beiden Parteien, ihrer ursprünglichen Ansicht unerschütterlich treu blieben, hat Lagrange, der den fast beruhigten, weil aussichtslosen Streit durch seine beiden großen Aufsätze über Natur und Fortpflanzung des Schalles neu entfachte und darin sich auf die Seite Eulers stellte, sich von d'Alembert zwar nicht völlig überzeugen, aber doch wenigstens zu dem Zugeständnis drängen lassen, seine Lösung sei nicht von jeglicher Beschränkung frei, sondern setze die Endlichkeit sämtlicher Differentialquotienten in allen

¹⁾ Vgl. diese Vorlesungen, III², S. 900 ff. ²⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, 1770, p. 39.



Punkten der gegebenen Anfangsfigur implizite voraus¹⁾. Nach und nach flaute die Debatte ab, da eine Einigung nicht zu erzielen war; die späteren Forscher begnügten sich damit, gelegentlich zu der Sache Stellung zu nehmen. Auf diese Weise wird ersichtlich, daß Condorcet²⁾ und Laplace mehr auf der Seite d'Alemberts standen, insofern als auch sie die willkürlichen Funktionen gewissen Beschränkungen unterworfen wissen wollten. So fordert Laplace für das Integral einer Gleichung n^{ter} Ordnung die Stetigkeit der Ableitungen aber nur bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschließlich.³⁾ Für seine Auffassung ist folgende Überlegung maßgebend: Man kann jede Differentialgleichung als Spezialfall einer Differenzgleichung auffassen, es sind lediglich die Differenzen unendlich klein geworden. Für die Differenzgleichungen brauchen aber (wie durch geometrische Konstruktion der Integrale solcher Gleichungen gezeigt wird) die willkürlichen Funktionen durchaus nicht stetig zu sein. Die übrigen Geometer nehmen fast alle Eulers Standpunkt ein. Der Streit hat übrigens eine wichtige Unterscheidung der bei Kurven möglichen Unstetigkeiten geschaffen; nach einer von der Petersburger Akademie preisgekrönten Arbeit⁴⁾ ist „discontinuité“, d. i. Unstetigkeit in unserem Sinne (etwa durch Sprung), von „discontinuité“ zu trennen. Letztere Art von Unstetigkeit besteht darin, daß die Funktion in verschiedenen Intervallen verschiedenen Gesetzen gehorcht. Der Verfasser, L. F. A. Arbogast (S. 667, Note 1), ist der Ansicht, daß beiderlei Gattungen von Unstetigkeiten in den Integralgleichungen zuzulassen sind; die Differentialgleichung verlange ja nur, daß ein Sprung des einen Differentialquotienten durch einen analogen Sprung des übrigen kompensiert werde. Die Unstetigkeiten im zweiten Sinne werden überhaupt von den meisten Mathematikern zugelassen; erwähnt sei z. B. der Abbé T. Valperga di Caluso⁵⁾ (1737—1825). Einen wirk-

¹⁾ Nach Burkhardt, Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen, Heft 1, S. 40. Dieser Aufsatz, im folgenden einfach als Burkhardt zitiert, findet sich in den Jahresberichten der deutschen Mathematiker-Vereinigung; derselbe ist der ganze Streit bezüglich des Problems der schwingenden Saiten ausführlich dargestellt. Der Briefwechsel zwischen d'Alembert und Lagrange in Oeuvres de Lagrange, t. XIII. Man vgl. auch d'Alembert, Oeuvres mathématiques, t. I, 1761, p. 65 ff. ²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1771 (1774), p. 49 ff. und p. 69. Seine Schlüsse sind nicht streng, die Darstellung ist schwer verständlich. ³⁾ Ebenda 1779 (1782), p. 299 ff. ⁴⁾ Vgl. Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. V, 1787 (1789), Histoire, p. 5. Die Arbeit heißt Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires, qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles, St. Pétersbourg 1791. Vgl. auch Burkhardt a. a. O. ⁵⁾ Nach Burkhardt, Heft 1, S. 44 Mem. Tor. 1786/87 (1788), p. 571.

lichen und zwar hochwertigen Fortschritt bedeutet eine Arbeit von Jacques Charles (1746—1823, erst Beamter im französischen Finanzministerium, später Professor der Physik am Conservatoire des arts et métiers und Mitglied der Académie des sciences). Dieser unterscheidet zunächst zwischen Kurven, die vollkommen willkürlich, etwa aus freier Hand gezogen sind, die also, wie er sagt, nicht durch analytische Formeln ausgedrückt werden können, und Kurven, die in verschiedenen Abschnitten ihres Verlaufes verschiedenen Gesetzen gehorchen. Von letzteren behauptet er, daß sie immer durch einen einzigen analytischen Ausdruck dargestellt werden können und behandelt auch die Aufgabe, ein gegebenes „Gemisch“ von Flächen, Linien und Punkten durch eine einzige Formel auszudrücken. Als Vorbereitung zu dieser Aufgabe gibt er umgekehrt analytische Ausdrücke an, welche derartige Unstetigkeiten aufweisen. Ich bringe hiervon nur folgendes Beispiel¹⁾. Sei

$$z = g + kx + \left(\frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{1-\frac{x}{a}}} + \frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{\frac{x}{b}-1}} \right) \sqrt{(x-a)(b-x)},$$

wo $a < b$. Charles untersucht diese Gleichung für den Fall

$$F\left(\frac{y}{a}\right) = 0.$$

Für $a < x < b$ sind $1 - \frac{x}{a}$ und $\frac{x}{b} - 1$ beide negativ und die Gleichung reduziert sich auf $z = g + kx$. Liegt hingegen x außerhalb dieses Intervalls, so ist eine von den Differenzen $1 - \frac{x}{a}$ und $\frac{x}{b} - 1$ positiv, die andere negativ, die Gleichung reduziert sich auf

$$z = g + kx + \sqrt{(x-a)(b-x)};$$

dieser Ausdruck ist aber dann imaginär. Die Schnittlinie der Ebene $F\left(\frac{y}{a}\right) = 0$ mit der gegebenen Fläche ist demnach ein Geradenstück mit der Gleichung $z = g + kx$, wenn x von a bis b läuft. Analog läßt sich eine Fläche angeben, die mit $F\left(\frac{y}{a}\right) = 0$ ein Geradenstück $z = g' + k'x$ gemeinsam hat, wenn x von b bis c läuft. Das Produkt aller der erwähnten Gleichungen stellt schließlich eine Fläche dar, von der $F\left(\frac{y}{a}\right) = 0$ einen gebrochenen Linienzug ausschneidet. Einzelne Punkte stellt Charles analytisch dar, indem er sie als isolierte Punkte von Kurven auffaßt.

¹⁾ Mémoires de mathématique et de physique présentés par divers Savans, t. X, 1785, p. 686.



Als ganz entschiedener Anhänger Eulers ist endlich Monge zu nennen, der von geometrischen Überlegungen geleitet wird. In einem Aufsatz über die Bestimmung der willkürlichen Funktionen einiger partieller Differentialgleichungen¹⁾ zeigt er, daß dies Problem bei gegebenen Anfangsbedingungen auch auf rein geometrischem Wege durch Konstruktion der Integrale behandelt werden kann. Da ergibt sich denn, daß unter Umständen diese Konstruktion, m. a. W. die geometrische Lösung des Problems noch einen Sinn behält, wenn jene willkürlichen Funktionen wegen auftretender Unstetigkeiten in den Anfangsbedingungen nicht mehr angebar (inassignable)²⁾ geworden sind (vgl. auch oben S. 561). So ist ihm z. B. die Aufgabe, die willkürliche Funktion φ in der Gleichung $Z = \varphi\{V(x, y)\}$ zu bestimmen, wenn für ein gegebenes $y = \Delta(x)$ gleichzeitig $z = \psi(x)$ sein soll, identisch mit der Forderung, diejenige Fläche einer gewissen Flächenfamilie zu finden, welche durch eine gewisse Raumkurve, nämlich $y = \Delta(x)$ und $z = \psi(x)$, hindurchgeht. Die betreffende Konstruktion wird sehr anschaulich und einfach durch Einführung der Schar von Zylinderflächen

$$V(x, y) = b,$$

welche auf der gesuchten Fläche eine Schar von ebenen Kurven abschneidet. Monge geht im folgenden zu Integralgleichungen mit mehreren willkürlichen Funktionen über, immer an einzelnen speziellen Aufgaben rechnerisches und konstruktives Verfahren erprobend. Dies ist übrigens nicht der erste Aufsatz von Monge über diesen Gegenstand³⁾, und auch später ist er wiederholt darauf zurückgekommen.⁴⁾ Er bringt indessen nichts wesentlich Neues mehr; zu den schwierigeren späteren Aufgaben gehört z. B. folgende⁵⁾: Sei $z = \varphi(U) + \psi(V)$, wo U und V gegebene Funktionen von x und y sind; es sollen φ und ψ so bestimmt werden, daß für $y = Fx$ von selbst $z = fx$ und für $y = F'x$ analog $z = f'x$ wird. Die Schwierigkeiten der Konstruktion von $z = M + N\varphi(V) + P\psi(W) + \dots$ kann er nicht allgemein überwinden⁶⁾; die Konstruktion gelingt ihm nur, wenn die willkürlichen Funktionen alle das nämliche Argument besitzen. Im ersten Fall wird Monge zu Differenzgleichungen geführt (vgl. S. 1051). Im Supplement zur Applikation kommt er endlich noch einmal auf diese Aufgaben zu sprechen.

Die Bestimmung der willkürlichen Funktionen unter gegebenen

¹⁾ Miscellanea Taurinensia V², 1770—1773, p. 16 ff. ²⁾ Ebenda, p. 21.
³⁾ Vgl. ebenda, p. 18: dans un mémoire précédent. ⁴⁾ Mémoires présentés par divers Savans, t. VIII², 1773 (1776), p. 267 ff. Vgl. auch p. XIII der Vorrede.
⁵⁾ Ebenda, p. 305. ⁶⁾ Ebenda, t. IX (1780), p. 345 ff. Der Aufsatz wurde 1774 der Akademie vorgelegt.

Anfangsbedingungen tritt noch viel häufiger in der mathematischen Physik auf, und hier hat Euler für eine Reihe spezieller Probleme die Aufgabe rechnerisch gelöst. Die Erfüllbarkeit der gegebenen Anfangsbedingungen schien, auch wenn sie in analytischer Form vorlagen, gemäß ihrer geometrisch-physikalischen Bedeutung bei allen derartigen Problemen schon von vornherein gesichert und wurde deshalb nie Gegenstand besonderer Untersuchungen.

Im Anschluß daran behandeln wir einen interessanten Fall einer Randwertaufgabe bei d'Alembert.¹⁾ Vom Problem der schwingenden ungleichförmigen Saite ausgehend, kommt er zu der Gleichung

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = \lambda X \cdot \xi,$$

wo X eine gegebene positive Funktion von x bedeutet. Er fragt nun, ob man den Parameter λ so bestimmen kann, daß diese Gleichung eine Lösung zuläßt, welche in a und b verschwindet, ohne identisch zu verschwinden. Um diese Frage zu beantworten, führt er die obige Gleichung in eine Riccatische Gleichung über durch Einführung der neuen abhängigen Veränderlichen $z = \frac{\xi}{y}$. Durch Untersuchung dieser Gleichung kommt er zu dem Resultat, daß die gewünschte Parameterbestimmung stets möglich ist, und zwar so, daß die betr. Lösung zwischen a und b nicht verschwindet. Daß es aber nur einen solchen Parameterwert gibt, wird nicht erwähnt, ebenso wenig ist von den unendlich vielen Parameterwerten die Rede, welche man bekommt, wenn man Nullstellen zwischen a und b zuläßt.

Man hat ziemlich von allem Anfang an die Integrale in vollständige (bzw. allgemeine) und partikuläre unterschieden. Dazu kam dann später unser singuläres Integral hinzu.²⁾ Endlich unterschied Lagrange bezüglich der Integrale partieller Differentialgleichungen zwischen vollständigem und allgemeinem Integral (vgl. indessen S. 969 und S. 972 Anm. 2).³⁾ — Bezüglich des Integrals, das aus

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \quad b = \varphi(a), \quad \frac{dz}{da} + \frac{dz}{db} \varphi'(a) = 0^4)$$

¹⁾ Histoire de l'Académie de Berlin, t. XIX, 1763 (1770), p. 244. Nach dem Artikel „Randwertaufgaben bei totalen Differentialgleichungen“ in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II A 7 a, S. 439. ²⁾ Eine Definition des partikulären Integrals bei Euler, Institutiones calculi integralis, vol. I, sect. 2, cap. 4. Ferner bei Laplace, Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 174 (verdruckt statt 274), Définition des singulären Integrals bei Condorcet, ebenda, t. IV², 1766/69, p. 6 (solution particulière); siehe auch Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 7. ³⁾ Die Benennung der verschiedenen Arten von Integralen war jedoch beständigem Wechsel unterworfen. ⁴⁾ Wir haben bei den partiellen
CANTON, Geschichte der Mathematik IV. 57



durch Elimination von a und b hervorgeht, sagt Lagrange¹⁾, es sei beaucoup plus générale als das vollständige Integral und nennt es daher intégrale générale. Bald darauf²⁾ sagt er, das allgemeine Integral schließe die vollständigen Integrale ein comme des cas particuliers. Lagrange beschäftigt sich auch mit dem Zusammenhang zwischen vollständigem und allgemeinem Integral und sucht letzteres im Falle der Differentialgleichung 2. Ordnung sowohl aus dem endlichen vollständigen Integral als aus ersten Integralen herzuleiten. Er zeigt dabei³⁾, daß das allgemeine Integral dieser Gleichung viel leichter aus den beiden vollständigen ersten Integralen als aus dem vollständigen endlichen Integral entwickelt werden kann und sucht deshalb aus dem letzteren auf das erste Integral zu schließen. Durch Einführung der partiellen Differentialquotienten 1. Ordnung geht aber aus der vollständigen Integralgleichung mit 5 willkürlichen Konstanten im allgemeinen eine Gleichung mit 3 Konstanten hervor, die nicht als erstes Integral der ursprünglichen Gleichung angesehen werden kann, da ein solches nur zwei Konstanten besitzen darf⁴⁾. Doch kann man durch geschickte Kombination der einzelnen Gleichungen in speziellen Fällen eine Gleichung mit bloß zwei Konstanten erhalten, wie Lagrange an einigen Beispielen zeigt.

Auch Monge beschäftigte sich⁵⁾ mit der Aufsuchung erster Integrale besonders für Differentialgleichungen, von denen zu seiner Zeit wohl das endliche, aber nicht das erste Integral bekannt war; von den Zwischenintegralen einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung verlangt er⁶⁾: sie dürfen keine Differentiationen 2. Ordnung aufweisen, müssen aber dafür eine willkürliche Funktion enthalten und sich durch einmalige totale Differentiation der Integralgleichung und nachfolgender Elimination einer der zwei willkürlichen Funktionen samt ihrer Derivierten ergeben. J. Trembley (1749—1811) kommt gelegentlich⁷⁾ auf die Ergebnisse von Monge zu reden und spricht dessen Gleichungen den Charakter von ersten Integralen ab.

Differentialgleichungen die Schreibweise des Originals durchweg beibehalten, weil die sehr verschiedenartigen Manieren in der Bezeichnung das Suchen nach einer vorteilhaften Schreibweise am besten erkennen lassen. Lagrange deutet wie dies zum Teil noch heute üblich ist, die partielle Differentiation nicht besonders an.

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 74. Dieser Aufsatz stammt aus den Memoiren der Berliner Akademie für 1774. ²⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 88. ³⁾ Ebenda, p. 101. ⁴⁾ Ebenda, p. 104. ⁵⁾ In seinem großen Aufsatz über Differentialgleichungen in der Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), der unten eingehend besprochen wird. ⁶⁾ Ebenda, p. 135. ⁷⁾ Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XI, 1793 (1798), p. 79.

Eine gemischte Form des Integrals, die neben willkürlichen Funktionen auch eine Integrationskonstante a enthält, will Monge zu lassen.¹⁾ Die Gleichung

$$z = \varphi [ax - y + \psi (bx - y)]$$

ist Integral von

$$\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \delta z}{\partial x} - \left[\frac{\partial z}{\partial x} - b \frac{\partial z}{\partial y} \right] \frac{\partial \delta z}{\partial x \partial y} - b \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \delta z}{\partial y^2} = 0^2).$$

Schließlich darf nicht unerwähnt bleiben, daß Laplace auf die Existenz trivialer Lösungen einer Differentialgleichung hingewiesen hat, die nicht als Integrale zu betrachten sind.³⁾ So wird

$$\mu M \partial x + \mu N \partial y = 0$$

durch $\mu = 0$ erfüllt; aber die „eigentliche“ Lösung muß die Gleichung $\partial y = p \partial x$ erfüllen, wo p eine Funktion von x und y ist. Eine genaue Definition, was als Integral zu gelten hat und was nicht, läßt sich bekanntermaßen bei Verwendung Monge-Liescher Vorstellungen in besonders anschaulicher Weise geben.

Von größter Wichtigkeit sind die Untersuchungen, die sich auf die Theorie der singulären Integrale beziehen. Clairaut⁴⁾ und Euler fanden auf diesem Gebiet zunächst keine Nachfolger; dieser leitet 1768 für Gleichungen 1. Ordnung ein allerdings wenig allgemeines Kriterium ab, durch das ein partikuläres Integral von einem singulären unterschieden werden kann, ohne daß das vollständige Integral der Gleichung bekannt ist. D'Alembert fügt in einer Abhandlung aus dem Jahre 1769⁵⁾ wenig Neues hinzu; höchstens kann man sagen, daß er Eulers Überlegung strenger und schärfer macht. Erst Laplace faßt 1772 das Problem bedeutend weiter. Er verlangt ein für Gleichungen beliebiger Ordnung mit beliebiger Variablenzahl geltendes, dem Eulerschen ähnliches Kriterium; außerdem stellt er die Forderung, es sollen sämtliche singuläre Integrale einer gegebenen Differentialgleichung angegeben werden. Durch Laplaces Arbeit angeregt, nimmt endlich Lagrange 1774 das Problem von neuem vor; er erkennt als erster die wahre Natur des singulären Integrals und seinen Zusammenhang mit dem vollständigen Integral. Die dar-

¹⁾ Mémoires présentés par divers Savans 1773 (1776), p. 322. Auf eine ähnliche Form des Integrals bei Monge (Mémoires de Turin, t. V, p. 52) kommt Trembley eingehend zu sprechen in Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XIII, 1795/96 (1802), p. 134. ²⁾ Wegen der Schreibweise vgl. S. 1012 u. 1019. ³⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 344. ⁴⁾ Vgl. diese Vorl., III³, S. 889. ⁵⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1769 (1772), p. 85 ff.



auf gegründete Methode zur Bestimmung der singulären Integrale durch Elimination der Konstanten der Integralgleichung ist der Laplaceschen Herleitung an Eleganz, Sicherheit und Leichtigkeit der Handhabung bedeutend überlegen und hat deshalb das ältere Verfahren vollständig verdrängt. Die zweite, schon von Clairaut und Euler geübte Methode wiederholter Differentiation, die nicht vom Integral, sondern von der Differentialgleichung ausgeht, besitzt Lagrange ebenfalls, auch gibt er erweiterte Kriterien. Endlich behandelt er die geometrische Deutung des singulären Integrals als Enveloppe einer Kurvenschar¹⁾, und ist der Ansicht, daß im allgemeinen ein [singuläres] Integral vorhanden ist. Daß ein Ort der Spitzen oder anderer Singularitäten auftreten kann, ist ihm dabei entgangen; ebensowenig weiß er, daß es Integrale gibt, die zugleich partikulär und singular sind, d. h. geometrisch gesprochen, daß ein Zweig der Enveloppe zu den Kurven der Schar gehören kann. 1774 dehnt Lagrange seine Untersuchungen auf Differentialgleichungen höherer Ordnung und partielle Differentialgleichungen aus; endlich sind noch die Arbeiten von Trembley²⁾ und Legendre zu erwähnen.

Wir können uns nicht versagen, näher auf die Aufsätze von Euler, Laplace, Lagrange und Legendre einzugehen. Euler sucht³⁾, wie schon erwähnt, ein Kriterium, das gestattet, ein singuläres oder partikuläres gegebenes Integral als solches zu erkennen. In gewohnter Weise geht er allmählich von einfachen Fällen zu schwierigeren über. So kommt er unter der Voraussetzung, das vollständige Integral laute $y = C + P$, zu dem Schlusse, daß L für $x = a$ nicht unendlich werden darf, wenn $x = a$ partikuläres und nicht singuläres Integral von $dy = \frac{dx}{L}$ sein soll. Es ist dabei natürlich angenommen, daß $x = a$ die letztgenannte Differentialgleichung befriedigt. Er untersucht noch weitere Fälle, wie

$$dy = \frac{Pdx}{\sqrt{S}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{Pdx}{\sqrt{S^m}},$$

und bildet an ihnen folgende Untersuchungsmethode heraus⁴⁾: Sei

$$dy = \frac{Pdx}{Q},$$

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 38. Die Deutung des singulären Integrals partieller Differentialgleichungen: ebenda, p. 67. ²⁾ Mémoires de l'Académie royale des sciences de Turin 1790/91. Ferner Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1792/93 (1798), p. 341—416. Vgl. unten S. 908. ³⁾ Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 393. ⁴⁾ Ebenda, p. 402.

wo Q für $x = a$ verschwindet, P aber nicht. Man setze $x = a \pm \omega$, und „betrachte ω als unendlich klein“, so wird Q die Form $R\omega^\lambda$ annehmen; $x = a$ wird dann immer partikuläres Integral sein, außer wenn $\lambda < 1$. Als Beispiel gibt er:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{\left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right)}},$$

wo sich der Nenner für $x = a - \omega$ bei sehr kleinem ω auf $\frac{\pi\omega}{a\sqrt{2}}$ reduziert, wie durch Reihenentwicklung unmittelbar zu sehen ist. Hier ist $\lambda = 1$; hätte man aber statt der Quadratwurzel eine dritte Wurzel im Nenner, so wäre offenbar $\lambda < 1$. Im folgenden gibt Euler die naturgemäße Erweiterung dieser Regel für Differentialgleichungen der Form $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$, wo X und Y Funktionen von x bzw. y allein sind, und geht endlich¹⁾ zu dem Fall $Pdx = Qdy$ über, wo P und Q irgendwelche Funktionen von x und y sind. Dieser Gleichung genüge die endliche Auflösung $y = X$, wo X eine Funktion von x allein. Euler sagt, man ersetze in der gegebenen Differentialgleichung y durch $X + \omega$ und bestimme $\frac{d\omega}{dx}$ für unendlich kleine ω . Es wird $\frac{d\omega}{dx} = Sdx$ werden, und $y = X$ ist ein Integral oder nicht, je nachdem $\lambda \geq 1$ oder $\lambda < 1$. Nach dieser Ausdrucksweise sieht es fast so aus, als ob Euler die singulären Integrale nicht als Integrale gelten lassen wollte; Namen hat er keinen dafür. Die oben beschriebene Methode führt z. B. bei

$$ady - adx = dx\sqrt{(yy - xx)},$$

wo $X = x$, auf

$$a \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = dx\sqrt{2x}, \quad \text{d. i.} \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Hieran knüpft Euler die weitere Bemerkung²⁾: das Integral der gegebenen Differentialgleichung ist:

$$2a\sqrt{\omega} - C + \frac{2}{3}x\sqrt{2x},$$

wo ω nach Voraussetzung unendlich klein ist. Es wird aber, heißt es weiter, wie man auch die Konstante C bestimmen mag, ω einen endlichen Wert erhalten, woraus notwendig folgt, daß die Gleichung $y = x$ kein Integral sein kann.

Auf diese Abhandlung Eulers weist Laplace hin und sagt, sie

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 408. ²⁾ Ebenda, p. 411.



habe den Anstoß zu seinen eigenen Untersuchungen gegeben¹⁾. Zunächst schafft er das, was Euler fehlt, nämlich eine besondere Benennung für die singulären Integrale. Er definiert allgemein als „solution“²⁾ jede Gleichung, die eine gegebene Differentialgleichung befriedigt, behält aber dann diesen Ausdruck mit dem Beiwort „particulière“ speziell für unser singuläres Integral und spricht im Gegensatz dazu von einem „intégrale particulière“ bzw. „générale“ (auch „résolution complète“). Sodann stellt sich Laplace die Aufgabe: Eine Lösung von $\partial y = p \partial x$ ist bekannt; man soll feststellen, ob sie im allgemeinen Integral enthalten ist oder nicht, ohne dieses zu kennen. Laplace geht von der geometrischen Versinnlichung der Integralgleichung

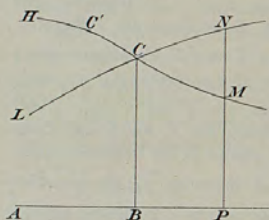


Fig. 100.

aus. $\mu = 0$ sei die gegebene Lösung, $\varphi = 0$ das unbekannte vollständige Integral. Man konstruiere die Kurve HCM mit der Gleichung $\mu = 0$ und diejenige Kurve $\varphi = 0$, welche durch einen gegebenen Punkt C von HCM geht. Heißt sie LCN, so ist also LCN Repräsentantin eines partikulären Integrals. Ist nun $\mu = 0$ im allgemeinen Integral enthalten, so muß, behauptet Laplace, HCM Punkt für Punkt mit LCN zusammenfallen. Indem er jetzt die Ordinaten von LCN mit Y, die zugehörigen Differentiale mit ∂ , die Ordinaten von HCM mit y, die Differentiale mit δ bezeichnet und Y und y für die Umgebung des Punktes C nach der Taylorschen Reihe entwickelt, erhält er als Bedingung für das Zusammenfallen beider Kurven, d. i. als Bedingung dafür, daß HCM, also $\mu = 0$, ein partikuläres Integral ist, folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

usw. Diese Relationen sind zunächst nur für den Punkt C, d. i. für ein bestimmtes Wertepaar x, y abgeleitet; nimmt man aber einen anderen Punkt C der Kurve HCM, deren Zugehörigkeit zu den partikulären

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 343. Vgl. auch die Zusätze p. 641 und die Histoire desselben Jahres, p. 67 ff. Ferner eine bereits früher veröffentlichte Notiz am Schlusse eines Aufsatzes über Wahrheitsrechnung in den Mémoires présentés par divers Savans, t. VI (1774), p. 654. Dasselbst ist noch auf einen Aufsatz in den Actes de Leipsic für 1771 hingewiesen, der indessen nach Laplaces eigenem Zugeständnis Fehlerhaftes enthält.

²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 344.

oder singulären Kurven in Frage steht, und legt durch C' die entsprechende partikuläre Kurve¹⁾, so erhält man dieselben Bedingungen; demnach müssen letztere, wenn HCM ein partikuläres Integral darstellen soll, für jedes x gültig sein.

Nun lassen sich aber die ∂ -Derivierten aus der gegebenen Differentialgleichung leicht bilden; man erhält nämlich der Reihe nach

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \cdot p \text{ usw.}^2);$$

p ist hierbei eine gegebene Funktion von x und y. Andererseits können auch die δ -Derivierten aus der bekannten Gleichung der Kurve HCM erhalten werden.

Laplace bemerkt sodann, daß natürlich die Gleichung

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

von selbst schon erfüllt ist; hierauf geht er zu subtileren Untersuchungen über, deren Gang und Ergebnisse hier nur kurz angedeutet werden können. Er formt zunächst die ursprüngliche Differentialgleichung so um, daß der Buchstabe μ der gegebenen Integralgleichung $\mu = 0$ darin auftritt, und erhält schließlich die Gleichungen:

$$\partial \mu = \mu^n \cdot h \partial x$$

oder unter gewissen Voraussetzungen

$$- \mu^n q \partial x = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) \partial x + \partial y,$$

wo h immer endlich, solange $\mu = 0$. Diese Gleichung gibt er als Kriterium für den Charakter von $\mu = 0$: im Falle $n \geq 1$ handelt es sich um ein partikuläres, im Falle $n < 1$ um ein singuläres Integral. So liefert die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{y - \sqrt{(xx + yy - aa)}}$$

mit dem Integral

$$\mu = xx + yy - aa = 0$$

unschwer

$$\mu^n q = \frac{x}{y - \sqrt{(xx + yy - aa)}} - \frac{x}{y} = \mu^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{x}{yy - y\sqrt{(xx + yy - aa)}} \right]$$

¹⁾ Man beachte, daß Laplace nur immer einzelne Integralkurven LCN und nie die ganze Schaar ins Auge faßt, was ihn wahrscheinlich zu tieferer Einsicht in das Wesen der singulären Lösungen geführt hätte. ²⁾ Die Klammern bedeuten, wie immer, partielle Differentiation.



Da $n = \frac{1}{2} < 1$, so ist das Integral ein singuläres. Die ganze Darstellung hat vor der Eulerschen den Vorzug, daß sie nicht mit bloßen Worten geschildert, beschrieben, sondern mit den Symbolen p, μ, ∂ usw. wirklich rechnerisch durchgeführt ist. Beide Gedankengänge betonen in gleicher Weise das Endlichbleiben oder Unendlichwerden gewisser im Lauf der Untersuchung auftretender Ausdrücke. Im folgenden¹⁾ zeigt Laplace, daß μ , wenn $\mu = 0$ ein singuläres Integral von $\partial y = p \partial x$ sein soll, gemeinschaftlicher Faktor von

$$p + \frac{\left(\frac{\partial \partial p}{\partial x \partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \partial p}{\partial y^2}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}$$

ist. Dieses Theorem verwertet er zur Bestimmung der singulären Integrale, wenn nur die Differentialgleichung gegeben ist. Er behandelt speziell den Fall, daß μ eine Funktion von x oder y allein ist. Endlich geht Laplace zu Differentialgleichungen 2. Ordnung und zu solchen mit 3 Variablen über, welche die Integrabilitätsbedingungen erfüllen. Als Kriterium für die Natur eines Integrals $\mu = 0$ der Gleichung $\partial x = p \partial x + q \partial y$ gibt er die Regel: man bilde

$$\partial \mu = -\mu^n \cdot K \cdot \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) \partial x - \mu^{n'} \cdot K' \cdot \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) \partial y;$$

je nachdem der kleinere der beiden Exponenten n und $n' \geq 1$ oder < 1 ist, hat man ein partikuläres oder singuläres Integral vor sich.²⁾

Lagrange gibt zu Beginn seiner Arbeit³⁾ einen kurzen geschichtlichen Überblick über die Theorie der singulären Lösungen. Er verweist auf Eulers Mechanik⁴⁾ und Integralrechnung, auf d'Alembert, Condorcet und besonders Laplace. Er definiert sodann integrale particulière als unser singuläres Integral und verlangt ausdrücklich, daß es nicht durch Spezialisierung aus dem vollständigen Integral erhalten werde.⁵⁾ Dann betrachtet er, in welcher Weise eine Integralgleichung $V(x, y, a) = 0$, wo a die Integrationskonstante bedeutet, einer Differentialgleichung

$$Z(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

Genüge leisten kann, m. a. W. wie die Differentialgleichung aus der

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 355.
²⁾ Ebenda, p. 367. ³⁾ Oeuvres, t. IV, p. 5 ff. (Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1774.) ⁴⁾ Lagrange selbst zitiert t. II, Articles 268, 303, 335. ⁵⁾ Dies erkennt schon Euler, vgl. S. 887.

Integralgleichung entstehen könne. Die Gleichung $V = 0$ gibt durch Differentiation, sagt Lagrange, eine Gleichung

$$dy = p(x, y, a) dx,$$

und die Gleichung $Z = 0$ folgt hieraus und aus $V = 0$ durch Elimination von a . Hierbei ist der Wert von a vollkommen gleichgültig. Das Resultat der Elimination wird immer dasselbe, nämlich $Z = 0$, bleiben, ob a konstant oder variabel ist, so lange nur die beiden Eliminationsgleichungen $V = 0$ und $dy = p dx$ heißen. Faßt man aber den Fall eines variablen a ins Auge¹⁾, so erhält man aus $V = 0$ die Gleichung $dy = p dx + q da$, wo p und q Funktionen von x, y und a sind. Letztere Gleichung kann sich aber bei variablem a nur dann auf $dy = p dx$ reduzieren, wenn $q = 0$ ist. Der Wert von a aus

$$\frac{dy}{da} - q = 0^2)$$

berechnet und in $V = 0$ substituiert, wird ein singuläres Integral geben. Desgleichen wird $\frac{dx}{da} = 0$ ein singuläres Integral liefern. Lagrange betrachtet auch den Fall, daß die Bestimmungsgleichungen für a dieses a entweder nur in Verbindung mit Konstanten oder überhaupt nicht enthalten; im ersten Fall, sagt er, haben wir kein eigentlich singuläres Integral, im zweiten wird eine besondere Prüfung notwendig sein. Den Fall $a = \frac{0}{0}$ weist er als unbrauchbar zurück.

Nach dieser Voruntersuchung fragt er nach einer Methode, welche die singulären Integrale ohne Kenntnis des vollständigen Integrals zu finden gestattet. Er weist zunächst darauf hin, daß die singulären Integrale einer Differentialgleichung Integrale der aus diesen abgeleiteten Differentialgleichungen nur unter besonderen Bedingungen sind, was für die Integrale einer auf niedrigere Ordnung reduzierbaren Differentialgleichung höherer Ordnung von großer Wichtigkeit ist. So hat z. B. die Gleichung $x dx + y dy - dy \sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0$ ein singuläres Integral $x^2 + y^2 - b^2 = 0$; letzteres ist aber kein Integral der Differentialgleichung 2. Ordnung $x d^2 y - dy dx = 0$, von der jene Gleichung 1. Ordnung erstes Integral ist.³⁾ Lagrange zeigt dann, daß, wenn die erwähnten Bedingungsgleichungen

¹⁾ Lagrange macht in der Bezeichnung totaler und partieller Differentialquotienten keinen Unterschied. ²⁾ Schon Euler läßt den Parameter einer Integralgleichung nachträglich variieren (vgl. S. 925). ³⁾ Diese etwas ungewöhnliche Form erhält man aus dem ersten Integral, wie es sich zunächst ergibt, bei Benutzung des vollständigen Integrals.



$$\frac{dy}{da} = 0; \quad \frac{d^2y}{dx da} = 0; \quad \frac{d^3y}{dx^2 da} = 0; \dots$$

(und analog, wenn x mit y vertauscht wird) alle bis ins Unendliche erfüllt sind, d. h. wenn das in Frage kommende Integral sämtliche aus $Z = 0$ durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen befriedigt dieses Integral kein singuläres, sondern nur ein partikuläres Integral ist. Für den Fall eines singulären Integrals dürfen also diese Gleichungen nur bis zu einer bestimmten erfüllt sein; wie bei Laplace ist der Charakter eines partikulären Integrals von unendlich vielen Bedingungsgleichungen abhängig gemacht.

Diese Bemerkung dient nun als Grundlage zu der folgenden Untersuchung, welche die Bestimmung der singulären Integrale unmittelbar aus der gegebenen Differentialgleichung bezweckt. Lagrange sagt: da Z die Größe a nicht enthält, so ist zunächst $\frac{dZ}{da} = 0$. Nun kann aber das in Z auftretende y gemäß der Gleichung $V = 0$ als Funktion von x und y angesehen werden; es ist demnach

$$\frac{dZ}{da} = A \cdot \frac{d^2y}{dx da} + B \frac{dy}{da} = 0.$$

Handelt es sich jetzt um ein singuläres Integral, so ist fernerhin

$$\frac{dy}{da} = 0,$$

und es ergibt sich

$$A \frac{d^2y}{dx da} = 0,$$

da B unter der Voraussetzung, daß Z eine ganze rationale Funktion von x und $\frac{dy}{dx}$ ist, nicht unendlich werden kann. Für den Fall, daß $\frac{d^2y}{dx da} = 0$ ist, betrachtet Lagrange die höheren Ableitungen. Er kommt zu dem Ergebnis, daß dann $A \frac{d^2y}{dx^2 da}$ usw. gleich Null sein müssen. Da aber das Nullsein sämtlicher derivierten $\frac{dy}{da}, \frac{d^2y}{dx da}, \dots$ nach dem Obigen den Charakter eines partikulären Integrals anzeigen würde, so folgert Lagrange, daß für ein singuläres Integral $A = 0$ sein muß. Da aber

$$dZ = A \cdot d \frac{dy}{dx} + B dy + C dx = 0,$$

so folgt

$$B dy + C dx = 0;$$

d. h. im Falle des singulären Integrals muß der aus $Z = 0$ abgeleitete Wert

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{B \frac{dy}{dx} + C}{A} = 0$$

werden, und diese Gleichung wird umgekehrt als Bedingung für das Auftreten eines singulären Integrals hingestellt. Sie liefert zwei Gleichungen, die mit $Z = 0$ simultan bestehen müssen.

Nach der geometrischen Deutung des singulären Integrals als Enveloppe wendet sich Lagrange zu den totalen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Lautet die Integralgleichung wieder $V = 0$, wo V eine Funktion von x, y und den Integrationskonstanten a und b ist, so faßt Lagrange die Größe b zunächst als willkürliche Funktion von a auf. Die Bedingungen für das Vorhandensein eines singulären Integrals $\frac{dy}{da} = 0$ und $\frac{d^2y}{dx da} = 0$ verwandeln sich dann in

$$1. \quad \frac{dy}{da} + \frac{dy}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx da} + \frac{d^2y}{dx db} \cdot \frac{db}{da} = 0.$$

Durch Elimination von $\frac{db}{da}$ ergibt sich

$$2. \quad \frac{dy}{da} \frac{d^2y}{dx db} - \frac{dy}{db} \frac{d^2y}{dx da} = 0.$$

Es ist ferner

$$dy = p dx + \frac{dy}{da} da + \frac{dy}{db} db,$$

folglich

$$3. \quad dy - p dx = 0.$$

Dazu kommt noch die Integralgleichung

$$4. \quad V = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen sind a, b und $\frac{db}{da}$ zu eliminieren. Durch Vertauschung von x und y ergibt sich eine Reihe analoger Gleichungen.

Später¹⁾ gibt dann Lagrange eine Methode an, aus einem ersten Integral der gegebenen Differentialgleichung 2. Ordnung, also aus einer Differentialgleichung 1. Ordnung das singuläre Integral der ursprünglichen Gleichung zu ermitteln, die dem Verfahren, das singuläre Integral einer Differentialgleichung 1. Ordnung aus deren endlichem Integral herzuleiten, völlig analog ist. Die Methode läßt sich auf Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung übertragen.²⁾

Wichtiger sind die Untersuchungen über die singulären Integrale partieller Differentialgleichungen. Die zu einer Integralgleichung

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 53. ²⁾ Ebenda, p. 59.



$$V(x, y, z, a, b) = 0$$

gehörige partielle Differentialgleichung $Z = 0$ entsteht nämlich durch Elimination von a und b aus den Gleichungen

$$V = 0; \quad \frac{dz}{dx} - p = 0; \quad \frac{dz}{dy} - q = 0,$$

wo p und q Funktionen von x, y, z, a und b sind. Das Resultat dieser Elimination wird dasselbe sein, ob a und b konstant sind oder nicht, wenn nur die drei Gleichungen, aus denen a und b eliminiert werden sollen, dieselben sind. Dazu ist aber im Fall variabler a und b das Bestehen der Gleichung $rda + sdb = 0$ notwendig, wie sich aus $dz = pdx + qdy + rda + sdb$ ergibt. Die einfachste Manier, dieser Gleichung Genüge zu leisten, sagt Lagrange, besteht darin, daß man getrennt $r = 0$ und $s = 0$ setzt. Während Lagrange soeben r und s für sich gleich Null setzte, leistet er der Gleichung $rda + sdb = 0$ im folgenden allgemeiner dadurch Genüge, daß er die Existenz einer Relation zwischen a und b annimmt und demzufolge $b = \varphi(a)$ setzt. So wird er, von der Theorie der singulären Integrale ausgehend, wieder zum allgemeinen Integral geführt. Um das singuläre Integral aus der Differentialgleichung selbst zu ermitteln, gibt Lagrange¹⁾ folgende Regel: Differentiiert man die Gleichung $Z = 0$, so erhält man

$$Md \frac{dz}{dx} + Nd \frac{dz}{dy} + Pdx + Ldy = 0,$$

wo M, N, P, L ganze Funktionen von $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ sind, denn dz kann vermöge der Relation

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$$

immer eliminiert werden. Man setze jetzt M, N, P, L jedes für sich gleich Null, was mit $Z = 0$ nach Elimination von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ drei Gleichungen in x, y, z gibt, die gleichzeitig statthaben müssen. Besitzen sie einen gemeinschaftlichen Faktor, so ist dieser als das gesuchte singuläre Integral anzusehen. Reduziert sich dZ auf

$$Ad \frac{dz}{dx} + Bd \frac{dz}{dy} = 0,$$

so hat man nur die drei Gleichungen $Z = 0, A = 0, B = 0$, die immer ein singuläres Integral liefern. Durch Besprechung dieses Falles kommt er zu der Einsicht, daß dann das vollständige Integral

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 71.

$$Z = ax + by + f(a, b)$$

und die gegebene Differentialgleichung

$$Z = x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} + f\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)$$

sein muß. Auf die Ähnlichkeit mit der Clairautschen totalen Gleichung ist bei Lagrange nicht hingewiesen.

Weiterhin¹⁾ zeigt Lagrange, daß das singuläre Integral nicht im allgemeinen Integral enthalten ist, an einem speziellen, in alle Lehrbücher übergegangenen Beispiel und geht dann auf die geometrische Interpretation der Integrale partieller Differentialgleichungen ein. Die durch das singuläre Integral dargestellte Fläche, sagt er, berührt alle im vollständigen Integral enthaltenen Flächen; die durch das allgemeine Integral bei Wahl eines bestimmten Wertes der willkürlichen Funktion φ dargestellte Fläche berührt nur jene Flächen des vollständigen Integrals, welche bei der speziellen Annahme $b = \varphi(a)$ herausgegriffen werden.

Auch über die singulären Integrale partieller Gleichungen 2. Ordnung macht Lagrange einige Angaben; um das singuläre Integral aus dem vollständigen Integral $V = 0$ zu finden, gibt er folgende Regel an²⁾: Man lasse in den Gleichungen

$$V = 0; \quad \frac{dz}{dx} = p; \quad \frac{dz}{dy} = q$$

die fünf Integrationskonstanten a, b, c, g, h variieren und halte währenddessen x, y und z konstant, setze dV, dp und dq gleich Null und eliminiere aus diesen drei Gleichungen zwei der fünf Differentiale da, db, dc, dg, dh . Endlich setze man in der Eliminationsgleichung die Koeffizienten der übrigen drei Differentiale gleich Null. Bei Kombination mit den oben angeführten drei Gleichungen

$$V = 0; \quad \frac{dz}{dx} - p = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} - q = 0$$

erhält man durch Elimination der Integrationskonstanten a, b, c, g, h eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, die als singuläres Integral der gegebenen Gleichung 2. Ordnung aufzufassen ist. Ist hingegen die Differentialgleichung allein, nicht aber ihr Integral gegeben, so bilde man das vollständige Differential der gegebenen Gleichung in der Form

$$Md \frac{dz}{dx} + Nd \frac{dz}{dy} + Pd \frac{dz}{dx dy} + Qdx + Rdy = 0$$

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 79. ²⁾ Ebenda, p. 91.



und setze die Koeffizienten M, N, P, Q, R für sich gleich Null. So erhält man fünf Gleichungen, die mit der gegebenen Differentialgleichung zusammen bestehen müssen. Durch Elimination der drei partiellen Differentialquotienten 2. Ordnung erhält man simultane Gleichungen in $x, y, z, \frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$; ein gemeinschaftlicher Faktor derselben ist als singuläres Integral aufzufassen; der Spezialfall $Q = 0, R = 0$ ist wie bei der Gleichung 1. Ordnung von besonderem Interesse.

Lagrange charakterisiert den Unterschied zwischen seinen und den Arbeiten seiner Vorgänger mit den Worten¹⁾: „Ich habe zuerst die wahren Prinzipien dieser Theorie gegeben. Man hat Regeln mehr oder weniger allgemeiner Art aufgefunden, ein gegebenes Integral von vornherein als singuläres oder partikuläres zu erkennen, auch für die Auffindung der singulären Integrale sind Regeln entdeckt worden. Aber niemand hat meines Wissens den Ursprung dieser Integrale entwickelt.“ Das berechtigte Selbstbewußtsein, den freudigen Stolz dieser Worte wird wohl jeder nachfühlen, der Gelegenheit hat, den Entwicklungsgang der Theorie aus den Originalarbeiten selbst kennen zu lernen.

Legendre kommt zu seinen Resultaten durch Benutzung des Prinzips, daß das singuläre Integral immer weniger willkürliche Konstanten enthält als das vollständige; er stellt diese Eigenschaft als Fundamentalsatz an die Spitze seiner Abhandlung. Von diesem Theorem aus gelangt er folgendermaßen zur Bestimmung der singulären Integrale aus der Differentialgleichung²⁾: sei ein Wert von y , welcher der Gleichung genügt, bekannt, ein benachbarter Wert $y + \delta y$ gesucht. Zu diesem Zweck variire man, sagt Legendre, in der gegebenen Gleichung von der Ordnung n bei konstantem x die Größen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ und man wird wegen der Relationen

$$\delta dy = d\delta y, \quad \delta d\delta y = dd\delta y \text{ usw.}$$

eine lineare Gleichung der Form

$$A \frac{d^n \delta y}{dx^n} + B \frac{d^{n-1} \delta y}{dx^{n-1}} + \dots + T \delta y = 0$$

erhalten, die als Differentialgleichung für δy aufgefaßt werden kann. Nun läßt sich aber die Form dieser Größe δy aus der Integralgleichung erschließen; differenziert man diese nämlich, indem man die

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 585. ²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1790 (1797), p. 222.

Integrationskonstanten a, b, c, \dots variieren läßt, so ergibt sich eine Beziehung:

$$\delta y = \frac{d\varphi}{da} \delta a + \frac{d\varphi}{db} \delta b + \frac{d\varphi}{dc} \delta c + \dots +$$

Diese Gleichung ist aber nach Legendres Auffassung das Integral der vorerwähnten linearen Differentialgleichung für δy ; die Größen $\delta a, \delta b, \delta c, \dots$ sind hierbei die Integrationskonstanten. Wenn nun y ein vollständiges Integral ist, wird die Zahl der Größen a, b, c, \dots gleich n sein, δy enthält demnach ebenfalls n Integrationskonstanten, und die Differentialgleichung für δy wird n^{ter} Ordnung. In diesem Falle kann der Koeffizient A von $\frac{d^n \delta y}{dx^n}$ niemals Null sein. Im Fall des singulären Integrals hingegen enthält y und damit δy höchstens $n - 1$ Konstante, die Differentialgleichung für δy wird deshalb höchstens $(n - 1)^{\text{er}}$ Ordnung; es muß also jedenfalls $A = 0$ sein, wobei außerdem auch die Relationen $B = 0, C = 0, \dots$ bestehen können. So liefert die Differentialgleichung

$$y^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2xy \frac{dy}{dx} + b^2 - y^2 = 0,$$

indem man y und $\frac{dy}{dx}$ variirt,

$$\left(y^2 \frac{dy}{dx} + xy\right) \delta \frac{dy}{dx} + \left(y \frac{dy^2}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y\right) \delta y = 0.$$

Setzt man den Koeffizienten von $\delta \frac{dy}{dx}$ gleich Null, so kommt $y = 0$ und $y \frac{dy}{dx} + x = 0$. Letztere Gleichung gibt im Verein mit der vorgegebenen das singuläre Integral $y^2 + x^2 - b^2 = 0$.

Aus einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung¹⁾ erhält man durch Variation von $z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ nach Unterdrückung der Nenner eine Relation der Form

$$A \delta \frac{dz}{dx} + B \delta \frac{dz}{dy} + C \delta z = 0,$$

die als partielle Gleichung für δz aufgefaßt werden kann. Soll sie also ein singuläres Integral liefern, so müssen gleichzeitig $A = 0$ und $B = 0$ sein, da eine gegenteilige Annahme eine willkürliche Funktion in den Ausdruck für δz einführen würde. Bei partiellen Gleichungen 2. Ordnung kann das singuläre Integral höchstens eine einzige willkürliche Funktion besitzen, die partielle Gleichung für δz daher höchstens 1. Ordnung sein. Variirt man daher in der gegebenen Differentialgleichung die Größen

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1790 (1797), p. 236.



$$\frac{ddz}{dx^2}, \frac{ddz}{dx dy}, \frac{ddz}{dy^2}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, z,$$

so müssen im Falle eines singulären Integrals außer der gegebenen Gleichung noch drei Relationen bestehen, die man durch Nullsetzen der Koeffizienten von

$$\delta \frac{ddz}{dx^2}, \delta \frac{ddz}{dx dy}, \delta \frac{ddz}{dy^2}$$

erhält.

Wir sahen im vorhergehenden — bei der Konstruktion willkürlicher Funktionen unter gegebenen Anfangsbedingungen durch Monge sowie bei der Theorie der singulären Integrale — wiederholt geometrische Vorstellungen zur Aufhellung der Theorie herangezogen. Man muß sich aber hüten, den Einfluß solcher Hilfsmittel auf die Entwicklung dieser Theorie zu überschätzen, zumal es sich um eine vorwiegend analytische Epoche der Mathematikgeschichte handelt. Monge kommt rückwärts von geometrischen Problemen aus zu seinen Differentialgleichungen und gewinnt durch Übersetzung erprobter Verfahren und Überlegungen geometrischer Natur in die Sprache der Analysis viele seiner rechnerischen Methoden; aber es ist ihm nicht umgekehrt darum zu tun, eine eigentliche geometrische Theorie der Differentialgleichungen und ihrer Integrale zu entwickeln, d. h. eine Theorie, welche in konsequenter Weise analytische Operationen durch geometrische Konstruktionen ersetzt. Und wenn es auch manchmal den Anschein hat, daß er Differentialgleichungen durch geometrische Überlegungen löst, so darf man doch sicher sein, daß er in allen diesen Fällen das Resultat schon vorher besessen und die betreffende Differentialgleichung erst nachträglich aufgestellt hat. Es finden sich demgemäß bei Monge Stellen genug, welche die geometrische Bedeutung gewisser Gleichungen anschaulich und klar machen, und die, zusammengetragen, eine geometrische Theorie der Differentialgleichungen liefern würden, aber Monge scheint selbst nicht an eine solche Zusammenstellung zu denken. Die bedeutendsten Überlegungen dieser Art vor dem Erscheinen der „Application de l'analyse à la géométrie“ sind auf S. 561 ff. und S. 1037 ff. dargestellt. Schwierigere Probleme dieser Art, wie wir sie heutzutage behandeln, so die Frage nach der Gestalt der durch eine Differentialgleichung definierten Kurven, oder die Untersuchung einzelner Punkte und ihrer Umgebung werden naturgemäß überhaupt gar nicht aufgeworfen.

Wir wenden uns im folgenden zu den allgemeinen Methoden, welche dem Charakter des jeweiligen Problems angepaßt in veränderter Form auf die verschiedensten Gattungen von Differentialgleichungen Anwendung finden. Dabei ist auch einiger Versuche zu gedenken, einen unbedingt gangbaren Weg zu finden, auf dem sich alle Diffe-

rentialgleichungen, gleichviel welcher Beschaffenheit, integrieren lassen. Man möchte meinen, daß die Existenz von so vielen und dabei so verschiedenen Lösungsmethoden, die Leichtigkeit der Integration in den einen, die ungeheure Schwierigkeit in den anderen Fällen, es hätte wahrscheinlich machen müssen, daß eine einheitliche, unter allen Umständen zum Ziele führende Integrationsmethode nicht existiert; und dieser Vorwurf trifft den Marquis de Condorcet, der mit seinen zahlreichen Arbeiten sich das Lob der Zeitgenossen, wie Lagranges und d'Alemberts¹⁾ erwarb, aber doch gerade auf diesen seinem Lieblingsgebiete keine wirklich lebensfähige Integrationsmethode in Umlauf zu setzen wußte, in viel höherem Grade als den bedeutend früheren Fontaine (1705—1771), zu dessen Zeiten ein derartiger Versuch noch nicht so aussichts- und zwecklos erscheinen mußte als später. Fontaines Abhandlung von 1738 erschien erst 1764 im Druck²⁾; sie enthält eine eigenartige, von der herkömmlichen abweichende Bezeichnungsweise, die mir, da ich das Original nicht zur Verfügung hatte, nicht recht verständlich wurde.³⁾ Condorcet sucht das Integrationsgeschäft auf eine kanonische Reihe von Fundamentaloperationen, wie Differentiation, Elimination, Substitution usw. zurückzuführen⁴⁾ und erläutert seine Methode an einigen einfachen Beispielen; es ist aber nicht recht einzusehen, was er mit seinen Spekulationen eigentlich will, bis wie weit er seine Behauptungen für richtig hält, und in welchem Umfang er seine Regeln für die Integration auch praktisch anwendbar und ausführbar ansieht; auf die Arbeiten der anderen Mathematiker sind gerade diese Untersuchungen Condorcets ohne allen Einfluß geblieben.

Sehen wir von unmittelbar integrierbaren Gleichungen, wie dem Fall separierter Wurzeln, oder anderen, durch Kunstgriffe zu behandelnden Gleichungen spezieller Form ab, so ist als eine der ältesten Integrationsmethoden allgemeinerer Art die Reduktion auf integrierbare oder wenigstens diskutierbare Gleichungen durch Einführung neuer Variablen zu nennen. In der ersten Zeit war überhaupt mehr oder minder bewußt die Ansicht herrschend, daß in der Separation durch Anwendung von Substitutionen „die Integrationsmethode“ zu erblicken sei. Bald dachte man kühler. Euler zeigt, daß alle Fälle, in denen Differentialgleichungen durch Trennung der Veränderlichen integriert werden können, auch mittels Multiplikator integrierbar sind, aber nicht umgekehrt, und sieht deshalb im integrierenden Faktor die umfassen-

¹⁾ Vgl. Nouvelle Biographie générale über Condorcet. ²⁾ Vgl. diese Vorl. III², S. 883. ³⁾ Einiges bei Montucla, Histoire des Mathématiques, t. III, p. 137. ⁴⁾ Du calcul intégral 1765, Sect. II. Ferner Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 1 ff.



dere, allgemeinere Methode. Er weist ferner¹⁾ auf die Unmöglichkeit hin, bestimmte Prinzipien für die Auffindung von Substitutionen, die auf integrable Gleichungen führen, anzugeben, sowie auf das Versagen der Separationsmethode bei Differentialgleichungen höherer Ordnung. Die Auffindung von Substitutionen, welche Trennung der Variablen ermöglichen, erfordert, wie er sagt²⁾, nicht weniger Scharfsinn als die Integration selbst.

Wenn auch im allgemeinen bei einer beliebig gegebenen Differentialgleichung jene Transformationen, welche eine Integration, sei es durch vorgeschriebene Transzendenten, ermöglichen, nicht angegeben werden können, weil die Angabe dieser Transformationen mit der Integration der Gleichung selbst identisch wäre, so sind es doch Transformationsverfahren, welche, selbst wenn sie nicht auf integrable Typen führten, immer noch die theoretisch bedeutendsten Resultate zeitigten. Viele Methoden der Ordnungserniedrigung, die Eulersche und die Laplacesche Theorie der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung, die Theorie der Eulerschen homogenen partiellen Differentialgleichung, in gewissem Sinne auch die Methode der Variation der Konstanten beruhen auf solchen Verfahren. Schließlich dürfen Transformationen höherer Ordnung nicht unerwähnt bleiben, welche auch Differentialquotienten enthalten; es sei nur an die d'Alembertsche Gleichung³⁾ erinnert.

Die eben erwähnte Methode der Ordnungserniedrigung ist im Grunde genommen die vorbildliche klassische Integrationsmethode für alle Differentialgleichungen höherer Ordnung und beliebigen Grades. Man hat entweder mit Hilfe von passenden Substitutionen oder mit Benutzung eines Multiplikators ein erstes Integral zu finden, das dann ebenso weiter behandelt wird. Dieser allgemeine Gedankengang liegt den meisten speziellen Integrationsmethoden zugrunde, und besonders Euler hat versucht ihn brauchbar zu machen; freilich ist seine Durchführung in der Praxis im allgemeinen nicht möglich. Aber man hat in Verfolgung dieser Idee wenigstens eine Reihe von allgemeinen Gleichungstypen gefunden, auf die sie mit Erfolg angewendet werden kann. Auf Ordnungserniedrigung durch Substitution beruhen die Theorie gewisser zuerst von Monge behandelter partieller Gleichungen beliebiger Ordnung (vgl. S. 1019), die Theorie des Zusammenhangs zwischen homogener linearer Gleichung 2. Ordnung und Riccatischer Gleichung, die Reduktion der totalen Differentialgleichung 2. Ordnung, welche die unabhängige Variable

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 290. ²⁾ Ebenda, vol. III, p. 600.
³⁾ Vgl. diese Vorl., III², S. 897.

nicht explizite enthält¹⁾, die Verwandlung von Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein Simultansystem von Gleichungen 1. Ordnung. So führt z. B. Euler²⁾ die Gleichung beliebiger Ordnung

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + \dots$$

durch die Substitutionen

$$dy = p dx; \quad dp = q dx; \dots$$

in ein System linearer Gleichungen 1. Ordnung über, ohne gerade besonderen Nachdruck auf die Bedeutung dieses Schrittes zu legen.

Hier sei noch folgende originelle Methode von Lagrange für eine spezielle Gleichung erwähnt³⁾: Ist

$$0 = \text{fonct.} \left(\frac{x}{y}, p, qx, rx^2, \dots \right),$$

wo

$$p = \frac{dy}{dx}; \quad q = \frac{dp}{dx}; \quad r = \frac{dq}{dx}; \dots,$$

so ergibt sich mittels der Substitutionen

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{t}$$

der Reihe nach:

$$p = u + t, \quad qx = \frac{t \cdot d(u+t)}{du}; \quad rx^2 = \frac{t \cdot d \left(\frac{t \cdot d(u+t)}{du} \right)}{du}; \dots$$

Setzt man diese Ausdrücke in die ursprüngliche Gleichung ein, so ist die Ordnung um 1 Grad erniedrigt.

Im Anschluß an die Verwertung der Transformationen überhaupt sei noch auf das Auftreten von Berührungstransformationen bei Monge hingewiesen (vgl. S. 980 ff.).

Wie schon erwähnt hat Euler die Anwendung von Multiplikatoren zwecks Ordnungserniedrigung der Integration durch Substitution vorgezogen und sich deshalb eingehend mit der Theorie der Multiplikatoren als der „wahren und natürlichen Quelle aller Integrationen“⁴⁾ beschäftigt. Er geht dabei auf zwei gänzlich ver-

¹⁾ Die Reduktion gelingt, wenn man den 1. Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen als neue Variable einführt; x und y ergeben sich dann als Funktionen dieser Variablen in Parameterdarstellung. Siehe Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 40. ²⁾ Ebenda, vol. II, p. 373. Diese Reduktion, nach einer gütigen Mitteilung von Herrn Prof. v. Braunmühl schon bei d'Alembert, Histoire de l'Académie de Berlin, t. IV, 1748 (1750), p. 289. ³⁾ Miscellanea Taurinensia, t. IV², p. 342. ⁴⁾ Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 314.



schiedenen Wegen vor; einmal sucht er Gleichungen, welche einen Multiplikator von gegebener Form besitzen, das andere Mal sucht er zu gegebenen Differentialgleichungen einen integrierenden Faktor zu finden. Das erste, leichtere Problem ist in der Integralrechnung ausführlich behandelt¹⁾. Euler nimmt dabei die Form der Differentialgleichungen bis auf gewisse unbestimmte Funktionen schon von vornherein an, wozu natürlich viel Geschick und mathematischer Blick gehören, damit die Aufgabe lösbar wird. Die Bestimmung der unbestimmt gelassenen Funktionen erfolgt natürlich mit Zuhilfenahme der Integrabilitätsbedingungen; die Resultate sind aber viel zu speziell, zu wenig interessant und übersichtlich, als daß wir darauf eingehen könnten.

Auch Trembley sucht Differentialgleichungen

$$Rdx + Sdy = 0,$$

die durch einen gegebenen Multiplikator M integrabel werden. Aus der Bedingung

$$R\left(\frac{dM}{dy}\right) - S\left(\frac{dM}{dx}\right) + \left(\left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right)\right)M = 0$$

folgt vermöge $R = -S\frac{dy}{dx}$ die Gleichung

$$-S\left(\left(\frac{dM}{dy}\right)dy + \left(\frac{dM}{dx}\right)dx\right) + M\left(\left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right)\right)dx = 0,$$

d. h.

$$\frac{dM}{M} = \frac{\left(\left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right)\right)dx}{S}.$$

Auf diese Gleichung gründet Trembley seine Rechnung; ihre Einzelheiten müssen hier übergangen werden; sie bietet, sagt Trembley²⁾, keinerlei Schwierigkeiten als ihre Länge. Und daran ist ihm, wie wir noch sehen werden, gar nichts gelegen. Schwieriger ist die Aufgabe, zu einer gegebenen Differentialgleichung einen integrierenden Faktor zu finden; so verlangt Euler³⁾, die Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, die zunächst das Integral in transzendenter Form liefert, mit Hilfe eines geeigneten Multiplikators unmittelbar in algebraischer Form zu integrieren. Für Gleichungen n^{ter} Ordnung verwendet Euler einen Multiplikator, welcher die Differentialquotienten bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ einschließlich enthält. So versucht⁴⁾ er z. B. für die Gleichung

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 351 ff. ²⁾ Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1790/91 (1796), p. 328. ³⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 603 ff. ⁴⁾ Ebenda, vol. II, p. 153.

$$ddy + \frac{A y dx^2}{(B y y + C + 2 D x + E x x)^2} = 0$$

einen Multiplikator der Form

$$2 P dy + 2 Q y dx,$$

wo P und Q Funktionen von x sein sollen, und zwar verlangt er das Integral in der Form

$$P dy^2 + 2 Q y dx dy + V dx = \text{Const. } dx^2,$$

wo V eine Funktion von x und y sein soll. Durch Anwendung der Integrabilitätsbedingungen erhält er schließlich den Multiplikator

$$2 dy (C + 2 D x + E x x) - 2 y dx (D + E x).$$

Besondere Eleganz und Übersichtlichkeit ist bei dieser Rechnung allerdings nicht zu finden; Euler benutzt die Formel, um aus ihr Spezialfälle abzuleiten. Für die Gleichung

$$y y ddy + y dy^2 + A x dx^2 = 0$$

wird, wie Euler sagt¹⁾, vergeblich der Versuch mit einem Multiplikator der Form

$$L dy + M dx$$

gemacht; möge also, fährt er fort, der Versuch mit der Form

$$3 L dy^2 + 2 M dx dy + N dx^2$$

und dem Integral

$$L y y dy^2 + M y y dx dy^2 + N y y dx^2 dy + V dx^3 = C dx^3$$

gemacht werden. Es ergibt sich

$$L = y, \quad M = 0, \quad N = 3 A x$$

mit

$$V = -A y^2 + A A x^3$$

als eine brauchbare Lösung. Die folgende Behandlung dieses Beispiels, wobei von der Substitution $\frac{y dy}{dx} = z$ Gebrauch gemacht wird, ist nicht uninteressant. Übrigens sind wir auf diese Beispiele nur eingegangen, weil sie zeigen, welcher Art die Differentialgleichungen sind, an die sich Euler wagt. Daß er schon früher einfachere Beispiele behandelt hat²⁾, wird niemand wundern.

Für die Theorie der Multiplikatoren von Differentialgleichungen

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 162. ²⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. VII, 1758/59 (1761), p. 163 ff.



höherer Ordnung wird ein Integrabilitätskriterium von höchster Wichtigkeit, das Euler bei seinen Untersuchungen über die Variationsrechnung nebenbei gefunden hat. Er fragt nach der Bedingung dafür, daß $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum werde und findet, wie schon früher¹⁾, dafür die Gleichung

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2L}{dx^2} + \dots,$$

wo

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \dots$$

und

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx} \dots$$

Am Schluß der betreffenden Abhandlung endlich erwähnt er²⁾ ganz kurz und ohne Beweis, daß die identische Erfüllung jener Maximalbedingung die Integrabilität von Zdx zur Folge habe. Diese Bemerkung blieb anscheinend unbeachtet; wenigstens knüpft Lexell, der sich eingehend mit diesem Kriterium beschäftigt hat (vgl. unten), erst an Eulers Integralrechnung an, deren 3. Band in einem Anhang über Variationsrechnung den genannten Satz wieder enthält. Man beachte, daß Euler nicht von vornherein nach einem Integrabilitätskriterium für Zdx , wo Z Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung enthält, gesucht hat; vielmehr ist er von ganz anderen Problemen aus zu jener Gleichung gelangt, nach deren tieferer Bedeutung er sich nachträglich gefragt hat. Euler verwendet seinen Satz zur Auffindung integrierbarer Zdx . So geht er einmal³⁾ von dem Ausdruck

$$\frac{(x\partial x + y\partial y)(\partial y\partial\partial x - \partial x\partial\partial y)}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

aus, der ein Integral

$$\frac{y\partial x - x\partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$$

besitzt und fragt nach ähnlichen integrierbaren Fällen. Er gibt dabei dem zu integrierenden Ausdruck von vornherein schon eine bestimmte Form und sucht die darin unbestimmt gelassenen Funktionen so zu bestimmen, daß sie die Integrabilitätsbedingung erfüllen, ganz ähnlich wie er früher Differentialgleichungen suchte, die einen Multiplikator von gegebener Form zulassen.

Unabhängig von Euler beschäftigte sich Condorcet mit der

¹⁾ Vgl. diese Vorl., III², S. 863. ²⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. X, 1764 (1766), p. 134. ³⁾ Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XI, 1793 (1798), p. 3. Zu diesem Aufsatz steht ein anderer Artikel von Euler aus dem Jahre 1777 in Beziehung: Ebenda, t. IX, 1791 (1795), p. 81 ff.

Frage nach der Integrabilität von Ausdrücken mit 2 Variablen; er kommt auf ziemlich mühsamen Wegen zu derselben Gleichung¹⁾. Am eingehendsten hat sich Lexell mit dieser Frage beschäftigt. Zunächst verlangt er²⁾ einen von den Prinzipien der Variationsrechnung freien, rein analytischen Beweis des Eulerschen Kriteriums. Sei also V eine Funktion von x, y, p, q, r, \dots und

$$dy = p dx; \quad dp = q dx; \quad dq = r dx; \dots; \quad dt = u dx,$$

und sei weiterhin

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \dots + Udu.$$

Nun kann man, sagt Lexell, jedenfalls setzen:

$$Vdx = \mu dx + \nu dy + \pi dp + \dots + \tau dt$$

und demzufolge

$$V = \mu + \nu p + \pi q + \dots + \tau u;$$

hieraus gewinnt man

$$dV = d\mu + p d\nu + q d\pi + \dots + u d\tau \\ + \nu dp + \pi dq + \dots + \tau du.$$

Vergleicht man diese Form mit der ursprünglichen, so ergeben sich die Gleichungen:

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p \left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q \left(\frac{d\pi}{dx}\right) + \dots,$$

$$N = \left(\frac{d\mu}{dy}\right) + p \left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q \left(\frac{d\pi}{dy}\right) + \dots,$$

$$P = \left(\frac{d\mu}{dp}\right) + p \left(\frac{d\nu}{dp}\right) + q \left(\frac{d\pi}{dp}\right) + \dots + \nu,$$

$$Q = \left(\frac{d\mu}{dq}\right) + p \left(\frac{d\nu}{dq}\right) + q \left(\frac{d\pi}{dq}\right) + \dots + \pi,$$

Bei allen Differentiationen sind dabei x, y, p, \dots, u , wie vollständig voneinander unabhängige Variable zu behandeln, so daß also z. B. $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ und ähnliche Ausdrücke Null zu setzen sind. Soll jetzt Vdx ein exaktes Differential sein, so müssen Gleichungen bestehen, wie

¹⁾ Condorcet, Du calcul intégral. Paris 1765. An Stelle dieses Werkes, das mir leider nicht zur Verfügung stand, benutzte ich die eingehende zeitgenössische Besprechung durch Pietro Ferroni in den Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., tomo V, 1790, p. 130 ff. ²⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XV, 1770 (1771), p. 128.



$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) - \left(\frac{d\nu}{dx}\right); \left(\frac{d\mu}{dy}\right) - \left(\frac{d\pi}{dx}\right); \left(\frac{d\nu}{dy}\right) - \left(\frac{d\pi}{dx}\right);$$

usw. Dann wird aber

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p \left(\frac{d\mu}{dy}\right) + q \left(\frac{d\mu}{dp}\right) + \dots,$$

$$N = \left(\frac{d\nu}{dx}\right) + p \left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q \left(\frac{d\nu}{dp}\right) + \dots,$$

$$P = \left(\frac{d\pi}{dx}\right) + p \left(\frac{d\pi}{dy}\right) + q \left(\frac{d\pi}{dp}\right) + \dots + \nu,$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit dx durch und berücksichtigt die Gleichungen

$$pdx = dy; \quad qdx = dp,$$

usw., so erhält man

$$\mu = \int Mdx; \quad \nu = \int Ndx; \quad \pi = \int (P - \nu)dx; \quad \kappa = \int (Q - \pi)dx; \dots$$

Daraus ergeben sich aber die μ, ν, π, \dots durch die M, P, Q, \dots ausgedrückt und zwar in Form von Summen mehrfacher Integrale.

Diese Werte in

$$V = \mu + \nu p + \pi q + \dots + \tau u$$

eingeführt, ergeben in leicht verständlicher Bezeichnungweise die Gleichung

$$\begin{aligned} V = & \int Mdx + p \int Ndx + q \left(\int Pdx - \int Ndx \right) \\ & + r \left(\int Qdx - \int Pdx + \int Ndx \right) + \dots \\ & + u \left(\int Pdx + \dots \pm \int Pdx \mp \int Ndx \right) \\ = & \int Mdx + \left[p \int Ndx - q \int Ndx + \dots \mp u \int Ndx \right] \\ & + \left[q \int Pdx - r \int Pdx + \dots \pm u \int Pdx \right] \\ & + \dots \end{aligned}$$

Nun ist identisch

$$\begin{aligned} Ndy \mp du \int Ndx &= (pNdx + dp \int Ndx) \\ &- \left(dp \int Ndx + dq \int Ndx \right) + \dots \\ &\mp \left(dt \int Ndx + du \int Ndx \right) \\ &= d \cdot p \int Ndx - d \cdot q \int Ndx + \dots \mp d \cdot u \int Ndx. \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} Pdp \pm du \int Pdx &= d \cdot q \int Pdx - d \cdot r \int Pdx + \dots \pm d \cdot u \int Pdx \\ &= d \left[q \int Pdx - r \int Pdx + \dots \pm u \int Pdx \right] \end{aligned}$$

usw.

Durch Benutzung dieser Gleichungen folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} dV = & Mdx + Ndy + Pdp + \dots + Tdt \\ & \mp du \left(\int Ndx - \int Pdx + \int Qdx + \dots \mp \int Tdx \right). \end{aligned}$$

Da aber nach Voraussetzung

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + \dots + Udu,$$

so folgt

$$U = \mp \int Ndx \pm \int Pdx \mp \dots + \int Tdx.$$

Hieraus endlich gewinnt man durch wiederholte Differentiation und Umstellung als notwendige Bedingung für die Integrierbarkeit von Vdx die Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \dots = 0^1);$$

Im folgenden sucht Lexell ähnliche Kriterien für den Fall dreier Variablen x, y, z^2 ; in einer späteren Abhandlung kommt er nochmals auf das Problem zurück und rechnet²⁾ auch ein praktisches Beispiel durch, des weiteren kommt er auf die wichtige Frage eines Multiplikators für nichtintegrabile Vdx zu sprechen. Wegen einer Anwendung dieser Untersuchungen vgl. S. 1032.

¹⁾ Wir sind gegen Schluß unwesentlich von der etwas unübersichtlichen Darstellung des Originals abgewichen.

²⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XV, 1770 (1771), p. 193.

³⁾ Ebenda, t. XVI, 1771 (1772), p. 189.



Wir haben diese Fragen im Anschluß an die Theorie des integrierenden Faktors gebracht; in dieser Hinsicht ist noch einiges zu sagen. Schon Condorcet beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen Integral und Multiplikator¹⁾. Euler zeigt²⁾, daß jeder Multiplikator M von $Pdx + Qdy = 0$ ein partikuläres Integral $M = 0$ liefert, sofern nicht einer der Koeffizienten P oder Q dadurch unendlich wird; analoges gilt von einem integrierenden Divisor. An anderer Stelle hat er den leicht beweisbaren Satz³⁾: Ist L ein Multiplikator von $Pdx + Qdy$, so ist auch $L \cdot \Phi(Z)$ ein solcher, wo Φ eine willkürliche Funktion bedeutet, und Z sich aus $dZ = L(Pdx + Qdy)$ bestimmt. Dieser Satz ist nur eine andere Form des bekannteren, daß der Quotient zweier Multiplikatoren, einer Konstanten gleichgesetzt, das vollständige Integral der Differentialgleichung gibt. Der Zusammenhang zwischen Partikulärintegral und Multiplikator hat für Trembley großen Reiz; seine Absicht ist, aus einem bekannten partikulären oder singulären Integral einen Multiplikator herzuleiten und mit diesem das vollständige Integral zu ermitteln. Er braucht also vor allem ein Integral, das er sich mit Hilfe unbestimmter Koeffizienten folgendermaßen zu verschaffen sucht.⁴⁾ Ist die gegebene Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} + U = 0$, so bildet er zunächst den Ausdruck

$$\frac{dU}{dx} = \left(\frac{dU}{dx}\right) + \left(\frac{dU}{dy}\right) \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dU}{dx}\right) - U \left(\frac{dU}{dy}\right)^{5)}$$

In diesem Ausdruck, der eine Summe von Funktionen von x und y sein wird, ersetzt er die Koeffizienten der einzelnen Summanden durch Buchstaben, die er so zu bestimmen sucht, daß der ganze Ausdruck, gleich Null gesetzt, die gegebene Differentialgleichung erfüllt. Ist z. B.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{ay^3}{c} - \frac{by^2}{c\sqrt{x}} = 0$$

gegeben, so ist

$$U = -\frac{ay^3}{c} - \frac{by^2}{c\sqrt{x}};$$

dann findet man

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) - U \left(\frac{dU}{dy}\right)$$

bis auf die Koeffizienten gleich

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 7 ff. Nach Lagrange auch Du Calcul intégral, p. 67.

²⁾ Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 414 bzw. 416. ³⁾ Ebenda, vol. I, p. 329. Vgl. diese Vorl., III², S. 883. Eine Verallgemeinerung des im Text erwähnten Satzes bei Condorcet: Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 14. ⁴⁾ Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1792/93 (1798), p. 341—416. Diesem Aufsatz geht ein Artikel ähnlichen Inhalts in den Turiner Memoiren für 1790 voran. ⁵⁾ Man vergleiche die Bedingungengleichungen von Lagrange für das Auftreten eines singulären Integrals S. 893 oben.

$$y^5 + \frac{y^4}{\sqrt{x}} + \frac{y^3}{x} + \frac{y^2}{x\sqrt{x}}.$$

Mit Unterdrückung des Faktors y^2 ¹⁾ setzt Trembley:

$$0 = \Phi - \alpha y^3 + \frac{\beta y^2}{\sqrt{x}} + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta}{x\sqrt{x}}.$$

Substitution in

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) - U \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = 0$$

— so kann nämlich die ursprüngliche Differentialgleichung geschrieben werden, wenn sie das Integral $\Phi = 0$ besitzt — gibt die Gleichung

$$\frac{3\alpha\alpha}{c} y^3 + \left(\frac{3\alpha\beta}{c} + \frac{2\beta\alpha}{c}\right) \cdot \frac{y^4}{\sqrt{x}} + \left(\frac{2\beta\gamma}{c} + \frac{\gamma\alpha}{c}\right) \frac{y^3}{x} + \left(\frac{\gamma\beta}{c} - \frac{\beta}{2}\right) \frac{y^2}{x\sqrt{x}} - \frac{\gamma\gamma}{xx} - \frac{3}{x^2\sqrt{x}} \frac{\delta}{x} = 0.$$

Daraus lassen sich mit Hilfe von

$$\Phi = \alpha y^3 + \frac{\beta y^2}{\sqrt{x}} + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta}{x\sqrt{x}} = 0$$

die Glieder mit y^5 und y^4 eliminieren; der Ausdruck wird dadurch noch umfänglicher; es resultiert eine Gleichung, die sich von $\Phi = 0$ nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle der α, β, \dots komplizierte Funktionen dieser Größen getreten sind. Da aber die Schlußgleichung bis auf einen Faktor mit $\Phi = 0$ identisch sein muß, ist Koeffizientenvergleichung statthaft, und es ergibt sich schließlich

$$\Phi = \alpha y^3 + \frac{\beta y^2}{\sqrt{x}} + \frac{\gamma y}{2x} = 0.$$

Die Methode erfordert umfangreiche Rechnungen; weit einfacher hätte Trembley gleich das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$Cx = y^{\alpha} \cdot \left(y - \frac{w_1}{\sqrt{x}}\right)^{\beta} \cdot \left(y - \frac{w_2}{\sqrt{x}}\right)^{\gamma},$$

wo w_1 und w_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{a}{c} w^2 + \frac{b}{c} w + \frac{1}{2} = 0,$$

und α, β, γ leicht zu bestimmende Konstante sind, abgeleitet; das von Trembley gefundene Integral läßt sich unschwer in der Form schreiben:

¹⁾ Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1792/93 (1798), p. 343.



$$0 = ay \left(y - \frac{w_1}{\sqrt{x}} \right) \left(y - \frac{w_2}{\sqrt{x}} \right).$$

Trembley gibt noch zahlreiche andere Beispiele, die indes zum großen Teil auf ganz ungeheuerliche Rechnungen führen; dann nimmt er als Integralgleichung statt des einfachen $\Phi = 0$ das kompliziertere $e^\mu \Phi = C$, wo μ und Φ Funktionen von x und y sein sollen¹⁾; ja er dehnt seine Methode auf totale Differentialgleichungen mit 3 Variablen²⁾ und auf Differentialgleichungen 2. Ordnung aus³⁾. Auf das letztgenannte Problem kommt er in einem späteren Aufsatz⁴⁾ zurück; er rechnet hauptsächlich Beispiele, die Euler und andere schon behandelt haben, und sucht auch Multiplikatoren zu bestimmen. Endlich geht er auf ein interessantes Paradoxon ein; man findet, sagt er⁵⁾, in den Beispielen bei Euler und Waring algebraische integrierende Faktoren, die gleich Null gesetzt, kein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung liefern, was der Theorie zu widersprechen scheint. Aber diese Gleichungen werden in Wahrheit durch Exponentialfunktionen integriert, und die von den genannten Autoren gefundenen Faktoren sind das Resultat der Kombination zweier erster Integrale, wobei sich die Exponentialfunktionen gegenseitig aufheben. Den Satz, daß ein Multiplikator M gleich Null gesetzt ein partikuläres Integral gibt, überträgt Trembley auf Gleichungen n^{ter} Ordnung.⁶⁾

Wirklichen Erfolg und praktische Bedeutung hat die Methode des integrierenden Faktors nur in wenigen Fällen errungen; hier ist in erster Linie ihre Anwendung bei der totalen linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwecks Ordnungerniedrigung zu nennen⁷⁾; man wird hier zu der sogenannten Lagrangeschen Adjungierten geführt, von der an einschlägiger Stelle die Rede sein wird (vgl. S. 928). Dann ist auf die Benutzung von Multiplikatorensystemen bei Simultansystemen von Differentialgleichungen hinzuweisen; so sei z. B. an die elegante Behandlung der Differentialgleichungen der Bewegung mit Nebenbedingungen mittels unbestimmter Multiplikatoren erinnert.

Im Gegensatz zur Methode des integrierenden Faktors war die Integration der Differentialgleichungen durch unendliche Reihen stets von höchster praktischer Bedeutung⁸⁾, sei es nun, daß man die

¹⁾ Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1792/93 (1796), p. 386.

²⁾ Ebenda, p. 391. ³⁾ Ebenda, p. 397. ⁴⁾ Ebenda, 1794/95 (1799), p. 3—68.
⁵⁾ Ebenda, p. 69. ⁶⁾ Ebenda, p. 90. ⁷⁾ Auch Euler behandelt die vollständige lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten mittels eines integrierenden Faktors: Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 402. ⁸⁾ Laplace z. B. stellt sich in der Histoire de l'Académie des Sciences

gesuchten Reihen direkt oder erst durch sukzessive Annäherung bestimmte. Entwicklung nach Potenzreihen mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten treffen wir in Eulers Integralrechnung; besonders die Differentialgleichung 2. Ordnung ist dort eingehend behandelt.¹⁾ Wie gewöhnlich ist von einfacheren Beispielen zu solchen schwierigerer Art übergegangen. So behandelt Euler²⁾ z. B. die Gleichung

$$d^2y + ax^ny dx^2 = 0.$$

Er setzt eine Reihenentwicklung mit steigenden Exponenten an:

$$y = Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+n+2} + Cx^{\lambda+2n+4} + \dots$$

und erhält durch Einsetzen in die gegebene Differentialgleichung zunächst die Bedingung

$$\lambda(\lambda-1) = 0.$$

Daraus folgt $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$, weshalb Euler die neue Reihe ansetzt:

$$y = A + Bx^{n+2} + Cx^{2n+4} + \dots \\ + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^{n+3} + \mathfrak{C}x^{2n+5} + \dots$$

Die B, C, \dots und $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ drücken sich dann leicht durch die beiden Integrationskonstanten A und \mathfrak{A} aus. Ein Ansatz mit abnehmenden Exponenten führt, wie er sagt, zu keinem Ergebnis. Im folgenden integriert er durch Reihen die Gleichung

$$xx(a + bx^n)d^2y + x(c + ex^n)dx dy + (f + gx^n)y dx^2 = 0,$$

und Spezialfälle davon, weil gerade bei ihr die Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Reihenentwicklung ganz besonders einfach werden; es drückt sich nämlich jeder Koeffizient durch den unmittelbar vorhergehenden aus. Diese Bemerkung veranlaßt Euler zur Behandlung des Problems³⁾, alle linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung von der Eigenschaft aufzusuchen, daß in den zugehörigen Reihenentwicklungen jeder Koeffizient sich durch die zwei unmittelbar vorhergehenden Koeffizienten ausdrückt. Hier sei auch noch auf das Auftreten der Zylinderfunktionen bei Euler hingewiesen; das Problem der Schwingungen einer Membran führt ihn nämlich⁴⁾ auf die Differentialgleichung

1782 (1785), p. 5 bzw. p. 31 ff. die Aufgabe, Reihenentwicklungen für gewisse Integrale zu finden, die durch starke Konvergenz für die Praxis brauchbar sind. Vgl. o. S. 735.

²⁾ Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 182 ff. ³⁾ Reihen mit unbestimmten Koeffizienten auch in Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XVII, 1772 (1773), p. 129, und Institutiones calculi integralis, vol. II, Sect. I, cap. VII, VIII, IX. ⁴⁾ Ebenda (Inst. calc. int.), p. 252. ⁵⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. X, 1764 (1766), p. 243.



$$\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\right)u + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2} = 0,$$

die mit der bekannten Besselschen Differentialgleichung identisch ist. Euler entwickelt in eine unendliche Reihe. Eine andere nicht uninteressante Reihenentwicklung für die Gleichung

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{m}{x} \frac{dM}{dx} = kM$$

findet sich bei Lagrange.¹⁾ Für $m = 0$ hat man das Integral

$$M = A \sin x \sqrt{-k},$$

für $m = 2$ aber

$$M = A \sin x \sqrt{-k} - Ax \frac{d \sin x \sqrt{-k}}{dx};$$

daraus läßt sich, sagt Lagrange, für $m = 4, 6, \dots$ auf die Form

$$M = A \sin x \sqrt{-k} + Bx \frac{d \sin x \sqrt{-k}}{dx} + Cx^2 \frac{d^2 \sin x \sqrt{-k}}{dx^2} + \dots$$

schließen, wo A, B, C, \dots Funktionen von x sind. Durch Substitution in die gegebene Differentialgleichung ergibt sich eine Folge von Differentialgleichungen zur Bestimmung von A, B, C, \dots . Lagrange findet

$$A = f + h x^{m+1}; \quad B = -fx - h x^{m+2};$$

$$C = f \frac{(m-2)}{2(m-1)} x^2 + h \frac{(m+4)}{2(m+3)} x^{m+3};$$

$$D = -f \frac{(m-2)(m-4)}{2 \cdot 3(m-1)(m-2)} x^3 - h \frac{(m+4)(m+6)}{2 \cdot 3(m+3)(m+4)} x^{m+4}; \quad \text{usw.}$$

wo f und h Integrationskonstanten sind, und bemerkt hierzu: ist m eine positive gerade Zahl ≥ 2 , so bricht die Reihe der mit f multiplizierten Terme ab, ist m negativ und gerade ≤ -4 , so ist die Anzahl der in h multiplizierten Terme eine endliche; man erhält dann Integrale in endlicher Form, indem man h bzw. f gleich Null setzt; für $m = 0$ und $m = -2$ wird die Formel unbrauchbar; Lagrange macht dann hinsichtlich der Brauchbarkeit dieser Entwicklung eine Reihe von Bemerkungen; insbesondere spricht er von einer Unannehmlichkeit, die allen allgemeinen Integrationsformeln anhafte, daß sie nämlich in gewissen Fällen, die dann eine Sonderuntersuchung erfordern, ungiltig werden. Auch auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen hat die Entwicklung nach unendlichen Reihen oft Dienste geleistet; Angaben über die Zahl der dabei auftretenden will-

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II³, 1760/61, p. 81 ff. Vgl. auch S. 930 dieses Bandes.

kürlichen Funktionen, die ja kleiner als die Ordnung der Differentialgleichung sein kann, haben wir nicht gefunden. So behandelt Euler¹⁾ die Gleichung

$$(x+y)^2 \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + m(x+y) \left(\frac{dz}{dx}\right) + m(x+y) \left(\frac{dz}{dy}\right) + nz = 0;$$

er setzt das Integral in der Form

$$z = A(x+y)^2 f(x) + B(x+y)^{2+1} f'(x) + C(x+y)^{2+2} f''(x) + \dots$$

an und drückt die Koeffizienten B, C, D, \dots durch A aus. Die Rekursionsformeln hierfür, die quadratische Gleichung

$$n + 2m\lambda + \lambda\lambda - \lambda = 0$$

mit eingeschlossen, nennt er determinaciones. Bei Vertauschung von x mit y muß man wieder ein Integral haben; daraus ergibt sich

$$z = A(x+y)^2 (f(x) + F(y)) + B(x+y)^{2+1} (f'(x) + F'(y)) + \dots$$

In die Gleichung für λ setzt Euler

$$\lambda + m = -i$$

und erhält so

$$n = (m+i)(m-i-1);$$

durch passende Wahl von i bricht dann die Reihe von selbst ab.

Im Anschluß daran behandelt Euler die Frage, wann sich die Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - Q \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + R \left(\frac{dz}{dy}\right) + S \left(\frac{dz}{dx}\right) + Tz = 0$$

auf die eben integrierte Gleichung zurückführen läßt, und gewinnt so viele Fälle integrierbarer Gleichungen.

Hier sei eine Aufgabe von Condorcet angefügt, der zur Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{1+x}{1+y} = 0$$

die unendliche Reihe

$$z = F(x+y) + P \cdot \frac{\partial F(x+y)}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial^2 F(x+y)}{\partial x^2} + \dots$$

ansetzt²⁾, wo P, Q, \dots Funktionen von x und y sind. Durch Substitution in die gegebene Gleichung und Nullsetzen der Koeffizienten

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 262 ff. ²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1772 (1775), p. 40.



bzw. der 1., 2., ... Ableitung von F erhält er eine Reihe von partiellen Gleichungen. So liefert der Koeffizient von

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

die Gleichung

$$(1+y) \left(1 + \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (1+x) \left(1 + \frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

mit dem partikulären Integral $P = xy$. Die 2. Ableitung von F ergibt

$$\left(P + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)(1+y) - \left(P + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)(1+x) = 0;$$

wegen $P = xy$ ist aber

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(1+x) - \frac{\partial Q}{\partial y}(1+y) = -x^2y + xy^2.$$

Diese Gleichung wird durch

$$Q = \frac{x^2y^2}{2}$$

befriedigt. So kann man fortfahren; aber, wie leicht ersichtlich, die unmittelbare Aufstellung des allgemeinen Integrals in endlicher Form kostet weniger Zeit und Mühe als die Berechnung der von Condorcet angegebenen Reihen. Wir sind dabei der größeren Deutlichkeit halber von der Schreibweise des Originals abgewichen, indem wir Klammern gesetzt haben, wo auch schon zu Condorcets Zeit solche geschrieben wurden, und verschiedene Druckfehler verbessert haben.

Lagrange versucht (1788¹⁾) bei der Integration von

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

eine Reihe

$$\varphi = \varphi' + z\varphi'' + z^2\varphi''' + \dots,$$

wo die φ' , φ'' , φ''' , ... Funktionen von x , y , t , aber nicht von z bedeuten; er erhält durch Einführung der Reihe in die vorgegebene Differentialgleichung die Beziehungen

$$\varphi''' = -\frac{d^2\varphi'}{2dx^2} - \frac{d^2\varphi'}{2dy^2}; \quad \varphi^{IV} = -\frac{d^2\varphi''}{2 \cdot 3dx^2} - \frac{d^2\varphi''}{2 \cdot 3dy^2} \text{ usw.},$$

φ' und φ'' bleiben hierbei unbestimmt und stellen die beiden willkürlichen Funktionen dar. Vielfach wird das Integrationsgeschäft durch die Annahme komplizierterer Reihenformen sehr erleichtert; hierbei können schon bekannte partikuläre Integrale mit Vorteil ver-

¹⁾ Mécanique analytique, 3. édit. par Bertrand, t. II, p. 280. Nach einer liebenswürdigen Mitteilung von Herrn Prof. v. Braunmühl.

wendet werden; so beruht die eben angeführte Reihenentwicklung von Euler auf der Kenntnis eines partikulären Integrals

$$z = (x+y)^2,$$

die Integration der Gleichung der Saitenschwingungen durch trigonometrische Reihen ebenso auf der Einsicht, daß trigonometrische Funktionen partikuläre Lösungen sind. In interessanter Weise verwendet Condorcet die unendlichen Reihen¹⁾ für Differentialgleichungen wie

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m dz}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{c^2 dz}{dy^2};$$

er integriert zunächst, wobei die Koeffizienten willkürlich bleiben, und sucht sodann aus der Reihendarstellung das Integral, welches willkürliche Funktionen enthält, in endlicher Form zu ermitteln. Dieser Gedanke ist deshalb von Wichtigkeit, weil man mit seiner Hilfe hätte schließen können, daß, wie schon D. Bernoulli behauptet hatte, eine derartige Entwicklung mit unendlich vielen Integrationskonstanten unter Umständen gerade so allgemein sein kann wie das Integral mit willkürlichen Funktionen; man erinnere sich, daß Euler z. B. die Integration der Gleichung der Saitenschwingungen durch trigonometrische Funktionen, die nach Vielfachen des Arguments fortschreiten, für weniger allgemein als das sog. allgemeine Integral hielt²⁾ (vgl. S. 995). Condorcets Methode besteht nun einfach darin, daß er das Integral z. B. von

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m dz}{dy}$$

zunächst in der Form

$$z = a + bx + by + cx^2 + c'xy + c'y^2 + \dots$$

ansetzt, und aus

$$a + b \left(x + \frac{y}{m}\right) + c \left(x + \frac{y}{m}\right)^2 + \dots$$

wo a , b , c , ... Integrationskonstante sind, dann auf

$$z = \varphi \left(x + \frac{y}{m}\right) + N$$

schließt (vgl. S. 998). Schließlich sind noch die Methoden von Cousin zu erwähnen (vgl. S. 952 ff.).

Auf Reihenentwicklungen nach bestimmten Funktionen, wie trigonometrischen Funktionen, Kugelfunktionen, kann hier nicht einge-

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1769 (1772), p. 193 ff. ²⁾ Vgl. diese Vorl., III², S. 906. Wegen der Entwickelbarkeit einer Funktion nach Vielfachen des Arguments des Sinus vgl. man u. a. besonders Lagrange: Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 221.



gangen werden; wir verweisen deshalb auf den XXVI. Abschnitt dieses Bandes.

Unter den Näherungsverfahren, welche nicht von vornherein gleich die ganze Reihe bis auf gewisse erst zu bestimmende Koeffizienten in Form der Taylorschen Reihe event. mit veränderlichen Koeffizienten ansetzen, können wir zwei Gruppen unterscheiden, solche, welche die gegebene Differentialgleichung ohne weiteres in der gegebenen Form benutzen und lediglich durch beständige Korrektion das Integral zu finden suchen, und solche, welche von vornherein sich nicht der vollständigen Differentialgleichung, sondern nur einer genäherten Form derselben bedienen, wobei natürlich die Schätzung der erreichten Genauigkeit viel schwieriger wird. Das letztgenannte Verfahren wird besonders häufig in der Astronomie geübt; unter den ersten steht die Integration durch Kettenbrüche wegen ihrer Eleganz und Allgemeinheit obenan. Hierzu bemerkt Lagrange¹⁾ in den Berliner Memoiren für 1776, die Methode der Integration durch unendliche Reihen habe den Nachteil, daß rationale endliche Ausdrücke als solche nicht erkannt werden; die Kettenbruchentwicklung habe dagegen alle Vorteile der Reihenentwicklung und sei von dem letzt-erwähnten Übelstand frei, da ein endlicher und rationaler Wert des betr. Ausdrucks als Kettenbruch von selbst abbrechen wird. Sein Verfahren ist etwa folgendes: ein erster Näherungswert von y für sehr kleine x sei ξ ; setzt man jetzt

$$y = \frac{\xi}{1 + y'}$$

in die gegebene Differentialgleichung ein, so erhält man eine neue Gleichung derselben Ordnung und desselben Grades zwischen x und y' . In derselben Weise sucht man jetzt für sehr kleine x einen Näherungswert ξ' von y' , und setzt

$$y' = \frac{\xi'}{1 + y''}$$

Die Größen ξ, ξ', ξ'', \dots müssen von der Form ax^a sein, und zwar muß a (außer für die Größe ξ selbst) immer positiv sein. Die fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens liefert den gewünschten Kettenbruch; die Bestimmung von a und α bietet hierbei die einzige Schwierigkeit. Mittels dieser Methode erhält Lagrange bei Differentialgleichungen, die durch bekannte Transzendenten integrabel sind, die Kettenbruchentwicklung von Funktionen wie $\log, \operatorname{tg}, \operatorname{arctg}$, die übrigens schon Euler gegeben hatte (vgl. S. 270).

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 301.

Auf die Entwicklung der übrigen Näherungsverfahren war die theoretische Astronomie von großem Einfluß. Da die Exzentrizitäten der Planetenbahnen, sowie ihre Neigungen meistens ziemlich klein sind, nahm man seit d'Alembert die Kreisbahn als genäherte Lösung an¹⁾ und suchte diese durch Korrekturen in der Weise zu verbessern, daß man schließlich Reihen erhielt, welche nach Potenzen dieser kleinen Größen fortschritten. Die verschiedenen Methoden, deren man sich hierzu bediente, charakterisiert Condorcet²⁾, der sich selbst sehr viel mit der Integration durch Reihen beschäftigt hat³⁾: entweder setzt man, sagt er, die Unbekannte gleich einem angenäherten Wert vermehrt um ein Korrekturenglied, dessen 2., 3., ... Potenz man vernachlässigt. Diesen Ausdruck substituiert man in die ursprüngliche Gleichung, integriert und bestimmt das Korrekturenglied angenähert. Mit dem so verbesserten Wert der Unbekannten wiederholt man das Verfahren. Diese Methode ist vereinfacht von d'Alembert in den Turiner Memoiren und in seinen Opuscles, auch von Euler in seiner preisgekrönten Abhandlung über die Mondbewegung von 1770 benutzt. Bei der zweiten Methode vernachlässigt man nicht alle höheren Potenzen des Korrekturengliedes.⁴⁾ Endlich geht Condorcet auf die Methoden von Lagrange und d'Alembert des näheren ein. Von welcher Wichtigkeit diese Verfahren für die Praxis sind, kann aus der großen Zahl von diesbezüglichen Abhandlungen entnommen werden.

Unter den speziellen Näherungsverfahren, die wir hier genauer darlegen wollen, sei zuerst eine Methode von Euler zur Integration totaler Differentialgleichungen genannt. Die Gleichung 1. Ordnung denkt sich Euler⁵⁾ auf die Form

$$\frac{dy}{dx} = V$$

gebracht, wo V eine Funktion von x und y ist. Für die höheren Differentialquotienten ergibt sich leicht

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dV}{dx}\right) + V\left(\frac{dV}{dy}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) + 2V\left(\frac{d^2V}{dx dy}\right) + V\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + VV\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) \text{ usw.};$$

¹⁾ Nach einer Arbeit, die mir Herr Professor von Braunmühl in liebenswürdigster Weise im Manuskript zur Verfügung stellte. ²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1771 (1774), p. 281. ³⁾ Vgl. auch den bereits erwähnten Aufsatz: Ebenda 1769 (1772), p. 193; ferner 1770 (1773), p. 191. ⁴⁾ Hierzu zitiert er Lagrange, Miscellanea Taurinensia, t. III. Vgl. die dritt nächste Anmerkung und d'Alembert, Opuscles mathématiques, t. V. ⁵⁾ Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 498. Vgl. auch o. S. 734.



Anwendung der Taylorsche Reihe liefert die gewünschte Reihenentwicklung. So führt die Gleichung

$$dy = dx(x^n + cy)$$

auf

$$y = b + \omega(a^n + cb) + \frac{1}{2}\omega^2(ccb + ca^n + na^{n-1}) \\ + \frac{1}{6}\omega^3(c^2b + cca^n + nca^{n-1} + n(n-1)a^{n-2}) + \dots,$$

wo b der zu $x = a$, y der zu $x = a + \omega$ gehörige Wert von y ist. Bei der Gleichung 2. Ordnung

$$\frac{dp}{dx} = V^2,$$

wo $dy = p dx$, und V eine Funktion von x, y, p ist, seien die Anfangswerte $x = a, y = b, p = c$. Für das Intervall

$$x = a \text{ bis } x = a + \omega$$

ist

$$p = c + V(x-a) - \int (x-a) dV.$$

Die Größe dV ergibt sich aus der gegebenen Differentialgleichung zu

$$dV = P dx + Q dy + R dp = (P + Qp + RV) dx.$$

Die Annahme, daß $P + Qp + RV$ in dem Intervall a bis x konstant ist, führt auf

$$p = c + F(x-a) - \frac{1}{2}(P + Qc + RF)(x-a)^2,$$

wo F den Anfangswert von V bedeutet. Integration dieser Gleichung liefert endlich

$$y = b + c(x-a) + \frac{1}{2}F(x-a)^2 - \frac{1}{6}(P + Qc + RF)(x-a)^3.$$

Aus diesem Näherungswert von y läßt sich sodann derjenige eines benachbarten y finden; auf diese Weise läßt sich allmählich das Intervall zwischen dem gegebenen a und einem beliebig großen x zurücklegen; auf das eventuelle Auftreten von Unstetigkeiten macht Euler aufmerksam.

Ein sehr eigentümliches Verfahren wendet Lagrange an²⁾: Die partielle Differentialgleichung

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 352. ²⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 118. Im Original ist aus Versehen in der ersten Gleichung die Größe c weggelassen.

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c \frac{d^2z}{dt(dx+dz)} + c \frac{2dz}{dx(x+z)} - c \frac{2z}{x(x+z)}$$

führt er mit Hilfe von Reihen zurück auf

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2d\frac{z}{x}}{dx} \right) - c \left(\frac{dz d^2z}{dx^3} + 2\frac{z}{x} \times \frac{d\frac{z}{x}}{dx} \right) \\ + c \left(\frac{dz^2 d^2z}{dx^3} + 2\frac{z^2}{x^2} \times \frac{d\frac{z}{x}}{dx} \right) + \dots$$

Indem er auf der rechten Seite nur die ersten zwei Klammerausdrücke berücksichtigt, alle folgenden Glieder aber vernachlässigt, ohne natürlich den Einfluß dieser Unterdrückung auf die Integralgleichung festzustellen, gewinnt er eine Gleichung, die er auf Grund der Besonderheit, daß

$$\left(\frac{dz d^2z}{dx^3} + 2\frac{z}{x} \times \frac{d\frac{z}{x}}{dx} \right) dx$$

ein totales Differential ist, weiter behandeln kann.

Im folgenden gehen wir auf die Integration einer Gleichung ein, die für die Erfindung der Methode der Variation der Konstanten von Wichtigkeit geworden ist. Lagrange behandelt¹⁾ die für die Astronomie wichtige Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMy^2 + i^2Ny^3 + \dots = 0$$

mit konstanten Koeffizienten K, L, M, \dots , wo i eine sehr kleine Größe ist. Es wird sich zeigen, daß die einzelnen Näherungsgleichungen immer die Form

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + a \cos at + b \cos \beta t + \dots$$

annehmen. Das Integral dieser Gleichung ist aber

$$y = f \cos Kt + \frac{g}{K} \sin Kt + \frac{L}{K^2} (\cos Kt - 1) + \frac{a}{K^2 - a^2} (\cos Kt - \cos at) \\ + \frac{b}{K^2 - \beta^2} (\cos Kt - \cos \beta t) + \dots;$$

für den Fall — und der tritt gerade in unserm speziellen Problem ein —, daß eine der Zahlen $a, \beta, \dots = K$ wird, findet Lagrange den Wert des dadurch unbestimmt werdenden Terms durch Grenz-

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 262 ff.



übergang in bekannter Weise. Als erste Näherungsgleichung nimmt Lagrange

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L = 0.$$

Das Integral hiervon kann aus der oben angegebenen allgemeinen Formel entnommen werden, indem man $a = b = \dots = 0$ setzt. So ergibt sich als erste Näherung

$$y = f \cos Kt + \frac{g}{K} \sin Kt + \frac{L}{K^2} (\cos Kt - 1);$$

Lagrange setzt „der Einfachheit halber“ $g = 0$. Führt man diesen Wert von y in das Schlußglied der zweiten Näherungsgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMy^2 = 0$$

ein, so ergibt sich als integrable Form der zweiten Näherungsgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iM \left(\frac{f^2}{2} + \frac{L^2}{K^2} \right) - 2i \frac{MLf}{K^2} \cos Kt + i \frac{ML^2}{2} \cos 2Kt = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$f + \frac{1}{K^2} = F$$

gesetzt wurde. Das Integral dieser Differentialgleichung kann wieder aus der allgemeinen Formel entnommen werden, und man erhält nach Auswertung des dabei auftretenden Terms $\frac{0}{0}$ einen zweiten Näherungswert. Indessen geht bei Ausführung des Grenzübergangs ein Summand von der Form $At \sin Kt$ in das Integral ein, und bei Fortsetzung der Methode würden auch Glieder auftreten, die in t^2, t^3 usw. multipliziert sind. Dieser Umstand macht die gefundene Reihenentwicklung für die Praxis unbrauchbar. Lagrange sucht deshalb die Reihe so umzuformen, daß sie derartige Terme nicht mehr enthält. Sein Verfahren ist jedoch ziemlich mühevoll¹⁾; verständlicher ist eine Abhandlung von Laplace über denselben Gegenstand.²⁾ Laplace bezeichnet sein Verfahren als eine nouvelle méthode d'approximation. Sie besteht darin, sagt er, daß man die willkürlichen Konstanten in den angenäherten Integralen variieren läßt und so womöglich die Kreisbogen (er meint damit die Potenzen von t) zum Verschwinden bringt. Diese Methode ist, fährt er fort, wenn ich mich nicht

¹⁾ Das Schlußresultat Miscellanea Taurinensia, t. III³, 1762/65 (1766), p. 273.

²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1776), p. 651 ff.

täusche, vollständig neu und von großer Fruchtbarkeit für die Rechnung. Diese Worte beweisen, daß sich Laplace der Neuheit, Eigenart und Wichtigkeit seiner Methode vollkommen bewußt ist. Zur Integration von

$$0 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y - l + \alpha y^2,$$

wo α sehr klein und konstant ist, setzt Laplace ganz ähnlich wie Lagrange zuerst

$$0 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y - l,$$

woraus

$$y = l + p \sin t + q \cos t,$$

wo p und q zwei willkürliche Konstante sind. Setzt man jetzt

$$y = l + p \sin t + q \cos t + \alpha z$$

in die ursprüngliche Differentialgleichung ein, wobei l, p, q, α konstant sind und z eine Funktion von t ist, vernachlässigt hierbei α^2 und α^3 und dividiert mit α weg, so ergibt sich

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z + l^2 + p^2 \sin^2 t + q^2 \cos^2 t + 2lp \sin t + 2lq \cos t + 2pq \sin t \cos t = 0.$$

Diese Gleichung liefert ein Integral

$$z = - \frac{[2l^2 + p^2 + q^2]}{2} - lqt \sin t + lpt \cos t + \frac{q^2 - p^2}{6} \cos 2t + \frac{pq}{3} \sin 2t.$$

Bis hierher unterscheidet sich das Verfahren von dem Lagranges nicht wesentlich; um die mit t behafteten Glieder unschädlich zu machen, wird folgender Gedankengang benutzt: Substituiert man in der ursprünglichen Differentialgleichung $T + t_1$ an Stelle von t , so wird sie in ihrer Form nicht geändert. Man kann also das oben abgeleitete Integral durch ein anderes ersetzen, in welchem statt p und q die Konstanten $'p$ und $'q$, statt t die Variable $T + t_1$ auftreten. Nun ist der Umstand von Bedeutung, daß für $T = 0$ und $\alpha = 0$ die Gleichungen $'p = p$ und $'q = q$ statthaben, woraus Laplace schließt, daß $'p$ und p bzw. $'q$ und q sich um Größen von derselben Ordnung wie α unterscheiden. Er setzt demzufolge

$$'p = p + \delta p \quad \text{und} \quad 'q = q + \delta q.$$

Die beiden Integralgleichungen für y liefern dann bei Vernachlässigung aller Größen, die mit $\alpha^2, \alpha^3, \dots$ gleiche Rangordnung haben, durch Subtraktion

$$0 = [\delta p + \alpha l T q] \cdot \sin t + (\delta q - \alpha l T p) \cdot \cos t.$$



Diese Gleichung zerfällt aber, da t variabel und T konstant, in die beiden folgenden

$$\delta p = -\alpha t \cdot q \quad \text{und} \quad \delta q = \alpha t \cdot p.$$

Hieraus folgert Laplace

$'p = f \cdot \cos \alpha t T - h \cdot \sin \alpha t T$ und $'q = f \cdot \sin \alpha t T + h \cdot \cos \alpha t T$.)
Später²⁾ kommt Laplace noch einmal auf das Problem der Entfernung der Potenzen von t zurück. Er geht jetzt von der allgemeineren Gleichung

$$0 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + h^2 y + T + \alpha Y$$

aus, wo Y eine ganze rationale Funktion von α , y und den Sinus und Kosinus von t sein soll. Ein Ansatz der Form

$$y = z + \alpha z^I + \alpha^2 z^{II} + \alpha^3 z^{III} + \dots$$

liefert, wenn man die Terme gleicher Ordnung in α allemal gleich Null setzt, die Gleichungen

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + h^2 z + T; \quad 0 = \frac{\partial^2 z^I}{\partial t^2} + h^2 z^I + T^I;$$

$$0 = \frac{\partial^2 z^{II}}{\partial t^2} + h^2 z^{II} + T^{II} \quad \text{usw.},$$

wo $T^{(n)}$ eine Funktion von $z, z^I, \dots, z^{(n-1)}$, sowie der Sinus und Cosinus von t ist. Treibt man die Annäherung bis zur Ordnung von α^n , so hat man damit $n+1$ Gleichungen, deren sukzessive Integration aber im allgemeinen Kreisbogen in die Lösung einführt. Laplace behandelt nun zunächst das spezielle Beispiel

$$Y = my \cos 2t$$

nach dieser Methode und schließt aus der Form des Integrals, daß im allgemeinen Fall die Lösung folgende Form besitzen wird:

$$y = [p + At + Bt^2 + \dots] \sin ht + [q + Mt + Nt^2 + \dots] \cos ht + R.$$

Hierbei sind A, B, \dots, M, N, \dots ganze rationale Funktionen von p, q und α ; R ist eine ganze rationale Funktion von p, q, α, t und verschiedenen Sinus und Cosinus, worunter jedoch $\sin ht$ und $\cos ht$ sich nicht befinden. Laplace formt diesen Ausdruck so um, daß an

¹⁾ Macht man die Probe, so wird $\delta \alpha$ an Stelle von α auftreten. Eine jener kleinen Ungenauigkeiten, wie sie in diesen für die Praxis geschriebenen Aufsätzen häufig zu finden sind. ²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1777 (1780), p. 373 ff. Vgl. auch die Histoire desselben Bandes, p. 55.

Stelle der Potenzen von t solche von $t - \theta$ auftreten, wo θ eine neue Konstante ist. Trotzdem kann der Ausdruck, wie er sagt, dadurch nicht allgemeiner werden, da er bereits die zwei Integrationskonstanten p und q enthält. Auf Grund einer Überlegung, welche der oben auseinandergesetzten analog ist, findet Laplace endlich folgende Regel zur Bildung eines Integrals, welches die Potenzen von t nicht enthält: Stellt man das Integral aus dem Gleichungssystem für z, z^I usw. nach gewöhnlichen Methoden in der vorerwähnten Form dar und unterdrückt nachträglich alle Glieder, die t und seine Potenzen explizite enthalten, so hat man das Integral in der gewünschten Form, sofern man nur für p und q die Werte einsetzt, welche sich durch Integration der Gleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A \quad \text{und} \quad \frac{\partial q}{\partial t} = M$$

ergeben; das gesuchte Integral wird wieder zwei Integrationskonstanten enthalten. Im folgenden zeigt Laplace¹⁾, wie sich seine Methode auf ein in der Störungstheorie brauchbares Simultansystem ausdehnen läßt. Dasselbe lautet:

$$0 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + h^2 y + T + \alpha Y; \quad 0 = \frac{\partial^2 y^I}{\partial t^2} + h^2 y^I + T^I + \alpha Y^I; \dots,$$

die $T, T^I \dots$ sind hierbei ganze rationale Funktionen der Sinus und Cosinus von t , die Y, Y^I, \dots ganze rationale Funktionen derselben Größen, sowie von α und den n Variablen y, y^I, \dots . Endlich überträgt Laplace seinen Gedankengang noch auf die Integration von

$$0 = \frac{\partial^n y}{\partial t^n} + p,$$

wo p eine Funktion von y , seinen Ableitungen nach t , Sinus, Cosinus, Exponentialfunktionen mit dem Argument t , nicht aber den Potenzen von t ist.

Die Entfernung der Kreisbogen aus dem Integral, die Lagrange und Laplace durch geistreiche Überlegungen bewerkstelligt hatten, leistet Trembley, dem die Methode der Variation der Konstanten, und nicht bloß in der Laplaceschen, sondern auch in der viel durchsichtigeren, weniger anfechtbaren Lagrangeschen Form von 1775 (vgl. S. 932), verdächtig erscheint, auf anderem Wege vermöge seiner Geduld und Ausdauer im Rechnen.²⁾ Trembley erkennt ganz richtig, daß das Auftreten der Kreisbogen nur auf Täuschung beruht; denn

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1777 (1780), p. 384. ²⁾ Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1786/87 (1792), p. 363 ff.



führt man die Rechnung soweit durch, daß das Fortschrittzgesetz der einzelnen Terme erkannt wird, so findet man, daß sich die Kreisbogen zu Potenzreihen zusammenfassen lassen, die durch Exponentialfunktionen summierbar sind. Da aber die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y - l + ay^2 = 0$$

bzw. die Ableitung des von Laplace gegebenen von Kreisbogen freien Integrals bei Trembley allein zehn Quartseiten erfordert, zeigen wir sein Verfahren an einem einfacheren Beispiel. Sei gleichzeitig

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 2ix)z \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = -(1 + 2ix)y,$$

wo i eine sehr kleine Größe bedeutet. $i = 0$ gibt zwei Näherungsgleichungen, aus denen durch Kombination die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

folgt. Korrigiert man die daraus erhältlichen Näherungswerte von y und z durch die Zusatzglieder iy' bzw. iz' , so ist

$$y = Ae^{x\sqrt{-1}} + Be^{-x\sqrt{-1}} + iy';$$

$$z = A\sqrt{-1}e^{x\sqrt{-1}} - B\sqrt{-1}e^{-x\sqrt{-1}} + iz'.$$

Indem man B einstweilen gleich Null setzt, ergibt sich durch Substitution in das ursprüngliche System das genäherte System

$$\frac{dy'}{dx} = 2Ax\sqrt{-1} \cdot e^{x\sqrt{-1}} + z'; \quad \frac{dz'}{dx} = -2Ax e^{x\sqrt{-1}} - y'.$$

Man erhält hieraus y' und z' und hieraus verbesserte Werte von y und z , die man sogleich wieder mit Zusatzgliedern i^2y'' und i^2z'' versieht. Fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens ergibt schließlich:

$$y = Ae^{x\sqrt{-1}} \left(1 + \frac{i}{1} x^2 \sqrt{-1} - \frac{i^2}{1 \cdot 2} x^4 - \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^6 \sqrt{-1} + \dots \right)$$

$$z = A\sqrt{-1} e^{x\sqrt{-1}} \left(1 + \frac{i}{1} x^2 \sqrt{-1} - \frac{i^2}{1 \cdot 2} x^4 - \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^6 \sqrt{-1} + \dots \right)$$

d. h. $y = Ae^{x\sqrt{-1} + ix^2\sqrt{-1}}$; $z = A\sqrt{-1} \cdot e^{x\sqrt{-1} + ix^2\sqrt{-1}}$.

Ähnlich hätte man von vornherein statt B die Integrationskonstante A gleich Null setzen können; man hätte dann

$$y = B \cdot e^{-x\sqrt{-1} - ix^2\sqrt{-1}}; \quad z = -B\sqrt{-1} \cdot e^{-x\sqrt{-1} - ix^2\sqrt{-1}}$$

erhalten. Aus beiden partikulären Integralen läßt sich sofort das

vollständige Integral zusammensetzen. Im folgenden¹⁾ verbessert Trembley eine von d'Alembert 1769 in den Pariser Memoiren entwickelte Näherungsmethode, deren Grundgedanke darin besteht, daß man eine gegebene Differentialgleichung wiederholt differenziert und die so erhaltenen Gleichungen derart zu kombinieren sucht, daß man eine integrable Gleichung höherer Ordnung erhält, welche die ursprüngliche näherungsweise zu ersetzen vermag.

Wir haben im vorausgehenden die Methode der Variation der Konstanten zum erstenmal bei Laplace mit vollem Bewußtsein ihrer Eigenart auftreten sehen; die Idee selbst, eine Größe zeitweilig als konstant und dann als variabel aufzufassen, ist indessen schon lange genug vorbereitet. Zunächst sei an die Bestimmung des Integrals der totalen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten im Fall gleicher Wurzeln erinnert (vgl. S. 928, Note 1), die bewerkstelligt wurde, indem man den Wurzeln, d. i. in Wirklichkeit konstanten Größen, sehr kleine, gegen Null abnehmende Differenzen erteilte, ohne sich mit der Frage nach der Berechtigung eines solchen Schrittes aufzuhalten. Euler behandelt²⁾ folgende Aufgabe: Sei V eine gegebene Funktion von x und y , es soll das Differential von

$$Z = \int V dx,$$

wo die Integration bei konstantem y vorgenommen wurde, bestimmt werden, wenn dabei auch y variabel angenommen wird. Euler erhält unschwer

$$dZ = V dx + dy \int dx \left(\frac{dV}{dy} \right).$$

Kurz darauf stellt er die Aufgabe, aus einer gegebenen Differentialgleichung, die einen Parameter enthält, jene Gleichung abzuleiten, welche entsteht, wenn man die Integralgleichung so differenziert, daß dabei auch jener Parameter variabel ist. Die Störungsgleichungen des Mondes worden von Euler und späteren mit Benutzung des Umstandes abgeleitet, daß gewisse Bewegungsgleichungen sowohl bei Konstanz als bei Variabilität bestimmter Bahnelemente bestehen müssen. Nach ihm hat Lagrange dieselbe Methode in seiner Abhandlung über die Theorie von Jupiter und Saturn benutzt³⁾ und das Prinzipielle und Eigenartige dieser Methode noch besonders betont; er ist es auch, der die Methode zuerst in weitestem Umfang

¹⁾ Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1786/1787 (1792), p. 387. Siehe auch p. 397. ²⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 31. Vgl. auch Klügels mathematisches Wörterbuch, I. Abtlg., unter „Differentialgleichung“, S. 891. ³⁾ Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 323.



gebraucht hat. Von Variation der Konstanten kann man auch bei Lagranges Herleitung des singulären Integrals aus dem vollständigen Integral reden; in allen diesen Fällen handelt es sich jedoch nicht um die uns geläufige Methode der Variation der Konstanten. Diese besteht vielmehr darin, daß man statt einer gegebenen Differentialgleichung eine andere, die aus der ursprünglichen entweder durch Vernachlässigung einzelner Glieder oder dadurch, daß man einzelne Variable konstant setzt, hervorgeht, behandelt, und in dem Integral dieser Hilfsgleichung nachträglich die Integrationskonstanten oder einstweilen konstant gesetzten Veränderlichen variieren läßt. In diesem Sinne ist die Variation der Konstanten nur eine spezielle Näherungsmethode, die durch passende Korrektur einen halbwegs brauchbaren Wert genau richtig macht. Hierher könnte man z. B. die Integration totaler Differentialgleichungen mit mehr als 2 Variablen, welche die Integrabilitätsbedingungen erfüllen, rechnen, die man bekanntermaßen dadurch vollzieht, daß man in der ursprünglichen Gleichung nur 2 Variable variieren läßt, integriert und nachträglich die Integrationskonstante als Funktion der konstant gelassenen Variablen ansieht; diese Methode ist zu Beginn des hier behandelten Zeitabschnitts bereits bekannt. Ganz analog geht man bei partiellen Differentialgleichungen vor, die nur die Ableitung nach einer Variablen enthalten, und wir werden sehen, daß Lagrange einen ähnlichen Gedankengang in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit großem Erfolg verwertet hat (vgl. S. 970). Die eleganteste Anwendung der Variation der Konstanten hat Lagrange mit der Integration der vollständigen linearen totalen Differentialgleichung und Differenzgleichung n^{ter} Ordnung gegeben (vgl. S. 932). Derselbe geht auch auf die Möglichkeit der Integration von

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P = \Pi,$$

wo P und Π Funktionen von $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ sind, mittels Variation der Konstanten ein, falls das vollständige Integral von

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P = 0$$

bekannt ist.¹⁾ Ferner erwähnt er, daß die Methode der Variation der Konstanten mit Vorteil auf die durch Vernachlässigung sehr kleiner Größen erhaltenen angenäherten Integrale von Simultansystemen angewendet werden kann²⁾, daß jedoch für ein beliebiges vollständiges

¹⁾ Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1775 (1777), p. 192.

²⁾ Ebenda, p. 195.

Integral einer Gleichung 2. Ordnung dieselbe Methode plus curieuse qu'utile sei.¹⁾

In Verbindung mit der Methode der unendlichen Reihen ist die Integration durch bestimmte Integrale zu nennen. Besonders Euler hat sich mit dieser Aufgabe beschäftigt; und wie er in der Theorie des Multiplikators die zu einem gegebenen integrierenden Faktor gehörige Differentialgleichung sucht, geht er auch hier von einem gegebenen Integral aus und fragt nach der äquivalenten Differentialgleichung. Bezüglich der Integration der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung nach diesem Verfahren, per quadraturas curvarum, wie er sich ausdrückt, bemerkt er selbst²⁾, es sei dabei zu beachten, daß die Wahl jenes Integrals nicht völlig von der Willkür des Rechners abhängt, sondern von vornherein die Anlage haben muß, bei der Entwicklung der zugehörigen Differentialgleichung auf die 2. Ordnung zu führen; es stehe daher nicht zu hoffen, auf diesem Wege jemals zu einer beliebig vorgegebenen Differentialgleichung zu gelangen. Letzterer Aufgabe, eine gegebene Differentialgleichung durch ein bestimmtes Integral zu integrieren, sucht Euler dadurch beizukommen, daß er das Integral zuerst in Form einer unendlichen Reihe entwickelt und diese nachträglich in ein bestimmtes Integral verwandelt³⁾; das Integral der auf Seite 911 erwähnten Differentialgleichung erhält er auf diesem Weg in mehrfach verschiedener Form. Dieselbe Methode wendet, wie wir sehen werden (vgl. S. 1006), Laplace auf die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung an; er stellt das Integral als unendliche Reihe dar, die er in ein bestimmtes Integral umformt.

Mit der Schilderung dieser Methoden haben wir die Gesichtspunkte, welche für totale wie partielle Differentialgleichungen in gleicher Weise in Betracht kommen, ziemlich erschöpft und wir wenden uns zunächst ausschließlich den totalen Differentialgleichungen zu. Hier ist es die lineare Gleichung, d. h. die Gleichung, deren Koeffizienten Funktionen der unabhängigen Variablen allein sind, welche das Hauptinteresse der Mathematiker auf sich gezogen hat, und ihrer Untersuchung ist eine ganze Reihe von Abhandlungen gewidmet. Auf diesem Gebiet hatten schon Euler und d'Alembert viel geleistet; sie hatten zunächst die unvollständige, dann aber auch die vollständige Gleichung mit konstanten Koeffizienten

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 101. Hier mag noch erwähnt werden, daß auch Euler gelegentlich aus partikulären Integralen die vollständigen durch Variation der Konstanten herleitet; man vgl. einen Aufsatz vom Jahre 1778 in Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XIII, 1795/96 (1802), p. 3 ff.

²⁾ Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 308.

³⁾ Ebenda, vol. II, p. 310 ff.



integriert, auch den Fall gleicher und komplexer Wurzeln der dabei auftretenden Hilfsgleichung behandelt.¹⁾ Den Fortschritt zu nicht-konstanten Koeffizienten macht Lagrange²⁾; er wird dabei zu einer Gleichung geführt, die wir heutzutage die Lagrangesche Adjungierte nennen. Multipliziert man die Gleichung

$$Ly + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2y}{dt^2} + \dots = T,$$

wo $L, M, N, \dots T$ Funktionen von t sind, mit $z dt$, wo z eine noch zu bestimmende Funktion von t ist, und integriert, so erhält man durch partielle Integration

$$\int Mz \frac{dy}{dt} dt = Mzy - \int \frac{d \cdot Mz}{dt} y dt$$
$$\int Nz \frac{d^2y}{dt^2} dt = Nz \frac{dy}{dt} - \frac{d \cdot Nz}{dt} y + \int \frac{d^2 \cdot Nz}{dt^2} \cdot y dt$$

.....

Setzt man diese Ausdrücke in die ursprüngliche Differentialgleichung ein, so kommt

$$y \left(Mz - \frac{d \cdot Nz}{dt} + \dots \right) + \frac{dy}{dt} \left(Nz - \frac{d \cdot Pz}{dt} + \dots \right) + \dots$$
$$+ \int \left(Lz - \frac{d \cdot Mz}{dt} + \frac{d^2 \cdot Nz}{dt^2} - \dots \right) y dt = \int Tz dt.$$

Ist der Klammerausdruck unter dem Integralzeichen gleich Null — eine Relation, die man als Differentialgleichung für z auffassen kann — so bleibt eine Differentialgleichung für y stehen, deren Ordnung im Vergleich zu der gegebenen Differentialgleichung um einen Grad niedriger ist. Die Relation zur Bestimmung von z behandelt Lagrange auf dieselbe Art weiter; er verlangt eine Funktion y von t zu finden, deren Kenntnis, genau wie vorher die der Funktion z , Ordnungserniedrigung ermöglicht. Er wird dabei auf eine Differentialgleichung für y zurückgeführt, die sich von der Anfangsgleichung in y nur dadurch unterscheidet, daß die rechte Seite nicht T , sondern 0 ist. Lagrange wird damit zum Entdecker des Satzes, daß die Adjungierte der Adjungierten die ursprüngliche unvollständige Gleichung ist; da er aber für die Adjungierte keinen besonderen Namen hat, so hebt er diese auffällige Tatsache nicht besonders scharf hervor. Euler kommt in

¹⁾ Vgl. diese Vorl., III², S. 892—895 bzw. S. 898. Den Fall gleicher Wurzeln behandelt d'Alembert auch unter Tangentes im Dictionnaire des mathématiques der Encyclopédie méthodique. ²⁾ Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 179 ff.

einer Abhandlung von 1778 wieder auf die Frage der Ordnungserniedrigung, scheint aber die Resultate der Lagrangeschen Abhandlung, die er jedenfalls gelesen hatte, vollständig vergessen zu haben, wenigstens hält er sein Ergebnis für vollkommen neu; er formuliert¹⁾ folgendes Gesetz: Die Gleichung

$$pz + qdz + rddz + sd^2z + td^3z + \dots = 0^2)$$

wird ein totales Differential mittels eines Multiplikators Z , welcher sich aus der „konjugierten Gleichung“

$$PZ + QdZ + Rd^2Z + Sd^3Z + Td^4Z + \dots = 0$$

bestimmt, wo

$$P = p - dq + ddr - d^2s + d^4t - \dots$$
$$Q = -q + 2dr - 3dds + 4d^2t - \dots$$
$$R = r - 3ds + 6ddt - \dots$$
$$S = -s + 4dt - \dots$$
$$T = t - \dots$$

.....

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach p, q, r, \dots findet Euler, daß diese Größen durch die P, Q, R, \dots genau in derselben Weise ausgedrückt werden, wie letztere durch jene; daraus schließt er, daß von den beiden Gleichungen für z bzw. Z eine die konjugierte der anderen ist. Eulers Darstellung bedeutet insofern einen Fortschritt gegenüber Lagrange, als in ihr erst die vollkommen gleiche Bauart, die durchgehende Dualität zweier adjungierter Gleichungen erkannt und durch eine übersichtliche Bezeichnungsweise (kleine und große Buchstaben) angedeutet ist; Lagrange hatte nur beobachtet, daß bei zweimaliger Anwendung seines Verfahrens schließlich die ursprüngliche, aber unvollständige Gleichung resultiert.

Lagranges Hauptverdienst ist in der Aufstellung allgemeiner Sätze über die Integrale der linearen Differentialgleichungen zu sehen, m. a. W. in der Schaffung einer Theorie dieser Integrale; die Form des vollständigen Integrals als Summe von unabhängigen, mit willkürlichen Konstanten multiplizierten Partikulärintegralen, der Zusammenhang zwischen vollständiger und unvollständiger Gleichung³⁾, insbesondere aber die Einsicht, daß die Kenntnis von m Partikulärintegralen (valeur particulière) der letzteren eine Ordnungserniedrigung

¹⁾ Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XIV, 1797/98 (1805), p. 58. ²⁾ Die Potenzen des Differentials der unabhängigen Veränderlichen sind hier einfach weggelassen. ³⁾ Für die Gleichung 2. Ordnung eingehend besprochen.



der ersteren um m Grad ermöglicht¹⁾, sind nach meiner Ansicht die vornehmsten Resultate der erwähnten Abhandlung. In der Praxis muß natürlich Lagrange häufig zu Reihenentwicklungen seine Zuflucht nehmen; so setzt er²⁾ z. B. für

$$\frac{d^2x}{du^2} + \left(2k + \frac{n}{u}\right) \frac{dx}{du} + \frac{nkx}{u} = 0,$$

auf welche Form er von

$$axt^{2m} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

ausgehend kommt, die Reihe

$$x = Au^r + Bu^{r+1} + Cu^{r+2} + \dots$$

an und bestimmt die unbestimmten Koeffizienten in gewohnter Weise. Die Lagrangesche Theorie der linearen Gleichung beliebiger Ordnung läßt sich sehr vorteilhaft auf die Gleichung

$$Ay + B(h + kt) \frac{dy}{dt} + C(h + kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \dots = T$$

anwenden, wo h, k, A, B, \dots Konstante sind. Lagrange bildet³⁾ die Adjungierte und setzt versuchsweise deren Integral $(h + kt)^r$. Das gibt eine Gleichung für r , nämlich

$$A - Bk(r + 1) + Ck^2(r + 1)(r + 2) - \dots = 0.$$

Lagrange geht dann auf die Ermittlung des vollständigen Integrals der ursprünglichen Gleichung ein. Als Anwendung bringt er⁴⁾ die Behandlung einer Gleichung, die eine unbekannte, zu bestimmende Funktion enthält; das Problem führt mit Zuhilfenahme des Taylorschen Satzes auf eine Gleichung der erwähnten Art von unendlich hoher Ordnung. Solche Gleichungen, allerdings nur mit konstanten Koeffizienten, hatte schon Euler vor ihm behandelt (vgl. diese Vorl. III³, S. 896); in seiner Integralrechnung finden sich wieder eine Menge, teils schon früher gelöster derartiger Gleichungen⁵⁾, aber weder Euler noch Lagrange erkennen oder erwähnen, daß in die Lösung dieser Gleichungen, weil sie im Grunde genommen nichts als Differenzengleichungen sind, eine willkürliche Funktion eingeht. Die unendlich vielen Integrationskonstanten ihrer Lösung konnten sie deshalb nicht zu dieser Einsicht führen, da ihnen die Darstellbarkeit einer beliebigen Funktion durch trigonometrische Funktionen unbekannt war.⁶⁾ Gleichungen von unendlich hoher Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten behandelt Euler nicht, obwohl er z. B.

chungen von unendlich hoher Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten behandelt Euler nicht, obwohl er z. B.

$$X = Ay + \frac{Bxdy}{dx} + \frac{Cx^2ddy}{dx^2} + \dots$$

für beliebige Ordnungen untersucht.

An die Möglichkeit der Ordnungserniedrigung bei Kenntnis von Partikulärintegralen knüpft d'Alembert in einem Schreiben an Lagrange¹⁾ wieder an und bringt einen neuen Beweis dafür; derselbe Forscher gibt an anderer Stelle den bekannten Satz, daß das vollständige Integral der vollständigen Gleichung aus zwei Teilen sich additiv zusammensetzt, nämlich aus einem Partikulärintegral der vollständigen und dem vollständigen Integral der unvollständigen Gleichung.

Laplace behandelt die lineare Differentialgleichung²⁾ nicht wie Lagrange mit Hilfe eines einzigen Multiplikators, sondern bedient sich gleich eines ganzen Multiplikatorsystems. Sei

$$X = y + H \cdot \frac{dy}{dx} + H' \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + H^{n-1} \frac{d^ny}{dx^n},$$

wo X, H, H', \dots Funktionen von x sind. Laplace setzt

$$\omega \frac{dy}{dx} + y = T,$$

wo ω und T erst näher zu bestimmende Funktionen von x sind. Durch Differentiation ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \omega \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d\omega}{dx} + 1\right) \frac{dy}{dx} &= \frac{dT}{dx} \\ \dots & \\ \omega \frac{d^ny}{dx^n} + \left(\frac{n-1}{1} \frac{d\omega}{dx} + 1\right) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen multipliziert Laplace bzw. mit ω', ω'', \dots und addiert unter Hinzuziehung von

$$\omega \frac{dy}{dx} + y = T.$$

So ergibt sich eine Gleichung, die durch Vergleichung mit der ursprünglichen auf folgendes System führt:

$$X = T + \omega' \cdot \frac{dT}{dx} + \omega'' \frac{d^2T}{dx^2} + \dots + \omega^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}}$$

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 183. ²⁾ Ebenda, p. 187. ³⁾ Ebenda, p. 190. ⁴⁾ Ebenda, p. 201. ⁵⁾ Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 459, 463, 476, 477, 480. ⁶⁾ Vgl. diese Vorl., III², S. 907.

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 381—396. Vgl. auch die Pariser Memoiren für 1767 und 1769. ²⁾ Ebenda (Misc. Taur.), t. IV², 1766/69, p. 173 ff. (verdrückt statt 273).



$$\begin{aligned} \omega \omega^{(n-1)} &= H^{(n-1)} \\ \omega \omega^{(n-2)} + \omega^{(n-1)} + \frac{n-1}{1} \cdot \omega^{(n-1)} \frac{d\omega}{dx} &= H^{(n-2)} \\ \dots &\dots \\ \omega + \omega' + \omega \frac{d\omega}{dx} + \dots &= H. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gestatten aber die ω', ω'', \dots durch ω und die H', H'', \dots auszudrücken. Durch Substitution der so erhaltenen Werte in

$$H = \omega + \omega' + \omega \frac{d\omega}{dx} + \omega'' \frac{d^2\omega}{dx^2} + \dots$$

und

$$X = T + \omega' \frac{dT}{dx} + \omega'' \frac{d^2T}{dx^2} + \dots$$

ergeben sich endlich zwei Differentialgleichungen für ω und T ; dabei ist Ordnungsniedrigung erzielt worden. Hat man aus den letzt-erwähnten beiden Gleichungen eine Reihe Partikulärlösungen β, β', \dots von ω und die zugehörigen T, T', \dots gefunden, so erhält man mit Hilfe von

$$\omega \frac{dy}{dx} + y = T$$

das Integral

$$y = e^{-\int \frac{dx}{\beta}} \cdot \left(C + \int \frac{T}{\beta} \cdot e^{\int \frac{dx}{\beta}} \cdot dx \right) + e^{-\int \frac{dx}{\beta'}} \cdot \left(C + \int \frac{T'}{\beta'} \cdot e^{\int \frac{dx}{\beta'}} \cdot dx \right) + \dots$$

Auf die weitere Theorie der bei Anwendung dieser Methode auftretenden Ausdrücke, insbesondere für den Fall konstanter H, H', \dots ¹⁾ kann hier nicht näher eingegangen werden, da die Resultate nicht neu und die auftretenden Formeln alle ziemlich kompliziert sind. Laplace behandelt speziell auch die Gleichung 2. Ordnung, welche auf die allgemeine Riccatische Differentialgleichung führt.²⁾

Der nächste bedeutende Fortschritt ist die Heranziehung der Methode der Variation der Konstanten zur Nutzbarmachung des Zusammenhangs zwischen vollständiger und unvollständiger Differentialgleichungen durch Lagrange.³⁾ Sei die lineare Gleichung n^{ter} Ordnung gegeben:

$$Py + Q \frac{dy}{dx} + R \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + V \frac{d^ny}{dx^n} = X,$$

wo X, P, Q, R, \dots Funktionen von x sind. Im Fall $X = 0$ sei das

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 295. ²⁾ Ebenda, p. 297.
³⁾ Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1775 (1777), p. 190.

vollständige Integral der Gleichung bekannt; dieses besitzt notwendig die Form

$$y = ap + bq + cr + \dots,$$

wo $a, b, c, \dots n$ Integrationskonstanten, p, q, r, \dots ebensoviele partikuläre Werte von y darstellen. Betrachtet man, fährt Lagrange fort, die willkürlichen Größen a, b, c, \dots als unbestimmte Variable und setzt in den Ausdrücken $dy, d^2y, \dots d^n y$ den Teil, der von der Variabilität von a, b, c, \dots herrührt, immer gleich Null, so ergibt sich

$$\begin{aligned} dy &= a dp + b dq + c dr + \dots \\ 0 &= p da + q db + r dc + \dots \\ d^2y &= a d^2p + b d^2q + c d^2r + \dots \\ 0 &= dp da + dq db + dr dc + \dots \\ \dots &\dots \\ d^{n-1}y &= a d^{n-1}p + b d^{n-1}q + c d^{n-1}r + \dots \\ 0 &= d^{n-2}p da + d^{n-2}q db + d^{n-2}r dc + \dots \end{aligned}$$

und endlich

$$\begin{aligned} d^ny &= a d^n p + b d^n q + c d^n r + \dots \\ &+ d^{n-1}p da + d^{n-1}q db + d^{n-1}r dc + \dots \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten also die Ausdrücke für $dy, d^2y, \dots d^{n-1}y$ genau dieselbe Form, wie wenn a, b, c, \dots konstant wären, und auch d^ny unterscheidet sich von dem d^ny im Fall konstanter Koeffizienten nur durch das Zusatzglied $d^{n-1}p da + d^{n-1}q db + d^{n-1}r dc + \dots$. Da aber bei konstanten Koeffizienten die Ausdrücke für $y, dy, \dots d^ny$ nach den Voraussetzungen über die Größen $a, b, c, \dots p, q, r, \dots$ der unvollständigen Differentialgleichung Genüge leisten, so müssen auch jetzt, im Fall der vollständigen Gleichung, bei Substitution obiger Ausdrücke für $y, dy, \dots d^ny$ alle Terme sich gegenseitig fort-heben, und nur das zu d^ny gehörige Zusatzglied und der Term X werden davon eine Ausnahme machen. Es resultiert also die Gleichung

$$d^{n-1}p da + d^{n-1}q db + d^{n-1}r dc + \dots = \frac{X}{V} dx^n,$$

welche mit den $n - 1$ Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= p da + q db + r dc + \dots \\ \dots &\dots \\ 0 &= d^{n-2}p da + d^{n-2}q db + d^{n-2}r dc + \dots \end{aligned}$$

zusammen n Gleichungen zur Bestimmung der Differentiale da, db, dc, \dots liefert.



Von späteren Arbeiten¹⁾ über die lineare Gleichung sei nur noch eine Abhandlung von Lorgna besprochen.²⁾ Lorgna geht zunächst auf die vollständige Gleichung mit konstanten Koeffizienten ein; er substituiert für die abhängige Variable y den Ausdruck

$$y = u \int^z dx \int^x (u dx \cdot u^{-\int^z dx}),$$

wo u und z neue Variable sind, während u konstant ist, und drückt dy, ddy, \dots durch z, u, y, du und das Differential dx der unabhängigen Veränderlichen x aus. Nach Einführung dieser Werte in die ursprüngliche Differentialgleichung setzt er den Teil, welcher den Faktor y besitzt, für sich gleich Null und erhält so zwei Gleichungen, deren eine nur z und seine Ableitungen nach u enthält, also als Bestimmungsgleichung für z benutzt werden kann. Zugleich ist Ordnungserniedrigung erreicht. Interessanter sind die Untersuchungen über die Gleichung 2. Ordnung³⁾

$$Mdx^2 = x^2(a + bx^m)ddy + x(e + fx^m)dx dy + (g + hx^m)ydx^2,$$

von der uns der Fall $M=0$ schon wiederholt begegnet ist (vgl. S. 911 und 927). Durch die Substitution $y = \frac{z}{x}$ ergibt sich

$$xMdx^2 = x^2(a + bx^m)ddz + x(-2a + e + (-2b + f)x^m)dx dz + (2a - e + g + (2b - f + h)x^m)zdx^2,$$

und diese Gleichung ist genau von derselben Form wie die ursprüngliche. Die wiederholte Anwendung analoger Substitutionen

$$z' = \frac{z''}{x}, \quad z'' = \frac{z'''}{x}, \quad \dots$$

wird daher wieder eine Gleichung der alten Form hervorbringen, nämlich

$$x^m M dx^2 = x^2(a + bx^m)ddz^{(m-1)} + x(c - 2ma + (f - 2mb)x^m)dx dz^{(m-1)} + ((m + m^2)a - me + g + ((m + m^2)b - m(f + h)x^m)z^{(m-1)})dx^2.$$

Ist nun das letzte Glied gleich Null, so wird die Differentialgleichung bedeutend vereinfacht, und man kann ihr Integral leicht angeben. Ein derartiges Verschwinden wird eintreten, wenn die Gleichungen

$$m^2 a + m(a - e) + g = 0 \quad \text{und} \quad m^2 b + m(b - f) + h = 0$$

¹⁾ Siehe auch *Memorie di Mat. e Fis. Soc. It.*, t. VIII, 1799, parte I, p. 307 ff. ²⁾ Ebenda, t. II, 1784, parte I, p. 177 ff. ³⁾ Ebenda, p. 197.

bei gegebenen Koeffizienten a, b, c, \dots beide durch das nämliche ganzzahlige m gelöst werden; dieses Kriterium hat die besondere Eigentümlichkeit von n unabhängig zu sein. Die Methode erinnert an die Laplacesche Kaskadenmethode für partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung (vgl. S. 1001 ff.). Auf dem nämlichen Wege leitet Lorgna ein ähnliches Kriterium für die Gleichung beliebiger Ordnung

$$Mdx^n = x^{m+1}(a + bX)ydx^n + x^{m+2}(c + eX)dydx^{n-1} + x^{m+3}(f + gX)d^2ydx^{n-2} + \dots$$

ab; die Substitution, die hier zum Ziel führt, ist

$$y = \frac{v}{x^{m+1}}.$$

Von den nichtlinearen Differentialgleichungen ist wegen ihres Zusammenhangs mit der linearen Gleichung 2. Ordnung, sowie wegen ihrer Bedeutung für die Flächentheorie, Physik usw., die Riccatische Differentialgleichung wohl die interessanteste. Man versteht darunter heutzutage die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x) \cdot y + a_2(x) \cdot y^2,$$

und es scheint, daß d'Alembert als einer der ersten den Namen in weiterem Umfang als früher üblich gebraucht hat, wenn er die aus

$$\frac{dd\xi}{dx^2} = \frac{-k^2 x \pi^2 \xi}{2aLe}$$

vermöge

$$\xi = c \int^p dx$$

hervorgehende Gleichung als Riccatische bezeichnet.¹⁾ Spezielle Formen der allgemeinen Gleichung treten natürlich viel früher auf (vgl. Cantor III²⁾, S. 880³⁾), aber Lagrange³⁾ und Euler bezeichnen gewöhnlich nur die Gleichung, die das Glied mit y^2 nicht enthält, als Riccatische; allerdings sagt Lagrange⁴⁾ von der Gleichung

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{m}{x} \frac{dM}{dx} = k \cdot M$$

(vgl. S. 912), sie falle unter „le cas général de Riccati“, sagt aber

¹⁾ Histoire de l'Académie de Berlin, t. XIX, 1763 (1770), p. 242. ²⁾ Nach einer gültigen Mitteilung von Herrn Professor von Bräunmühl schon 1738 bei Euler: *Commentarii Academiae Petropolitanae* (1747), p. 46. ³⁾ Z. B. *Miscellanea Taurinensia*, t. III²⁾, 1762/65 (1766), p. 189. ⁴⁾ Ebenda, t. II²⁾, 1760/61, p. 81.



nicht, was darunter zu verstehen sei; die angegebene Gleichung führt mittels

$$M = e^{\int z dx}$$

auf

$$\frac{dz}{dx} + z^2 - \frac{m}{x} \cdot z - k = 0,$$

doch ist die Substitution selbst an der betr. Stelle nicht angegeben. Der Zusammenhang mit der linearen Gleichung

$$ddy + Pxdy + Qydx^2 = 0,$$

wo also P und Q Funktionen von x allein sind, sei hier im Anschluß an Eulers Integralrechnung¹⁾ dargestellt. Euler verlangt zunächst Ordnungserniedrigung, schreibt in üblicher Weise

$$q + Pp + Qy = 0$$

und erhält mittels der Substitutionen $p = uy$ und $q = vy$ die Gleichung

$$v = -Pu - Q.$$

Es ist aber

$$dy = u y dx \quad \text{und} \quad u dy + y du = v y dx.$$

Also

$$\frac{dy}{y} - u dx = \frac{v dx - du}{u};$$

daraus folgt mit Hilfe von

$$v = -Pu - Q$$

endlich

$$du + u u dx + P u dx + Q dx = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt bei Anwendung der Transformation

$$u = \frac{K + Mz}{L + Nz}$$

eine Gleichung von der Form

$$dz + Pzdx + Rzzdx + Qdx = 0,$$

die sich von der vorhergehenden nur durch das Auftreten der Funktion R unterscheidet; der am meisten ausgezeichnete Fall ist, sagt Euler, die Riccatische Gleichung

$$dz + zzdx = ax^n dx.$$

Endlich ist zu erwähnen, daß Euler imstande ist, die Riccatische Gleichung bei Kenntnis eines partikulären Integrals v durch die Sub-

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 88 ff.

stitution $z = v + u^{-1}$ in eine lineare Gleichung überzuführen¹⁾ und bei Kenntnis zweier Partikulärlösungen durch Quadraturen zu erfüllen; der Satz von der Konstanz des Doppelverhältnisses von vier partikulären Integralen scheint erst in jüngerer Zeit gefunden worden zu sein.²⁾

Von anderen speziellen Gleichungen, wie sie meist bei praktischen Aufgaben auftreten, sei beispielshalber die von Euler behandelte Gleichung

$$\frac{4n dds}{dn^2} + \frac{4ds}{dn} + \frac{ns}{1-nn} = 0$$

angeführt³⁾; Nikolaus Fuß schreibt⁴⁾ über die Gleichung

$$t(1 + 4t) \frac{d^2 s}{dt^2} - [(4n - 6)t + n] \frac{ds}{dt} + (nn - n)s = 0,$$

welche einen Spezialfall der Gaußischen Differentialgleichung darstellt, entwickelt s in eine Reihe nach Potenzen von t und leitet aus der ursprünglichen Differentialgleichung durch Transformation verschiedene neue ab. Eine Gleichung, die sich von der Riccatischen dadurch unterscheidet, daß die abhängige Variable auch in der 3. Potenz auftritt, findet Euler gelegentlich eines mechanischen Problems.⁵⁾ Auf eine Menge interessanter, spezieller Gleichungen 2. Ordnung kommt Legendre in einem Aufsatz über die Figur der Planeten zu sprechen.⁶⁾ Ungleich mehr Interesse beansprucht die Theorie der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

wo X und Y Polynome in x bzw. y sind, die allerdings im Zusammenhang mit der Theorie der elliptischen Integrale zu betrachten ist (vgl. S. 795 ff.). Hier sei nur eine Untersuchung angeführt, welche ausschließlich auf Methoden beruht, wie sie für Differentialgleichungen in Anwendung gebracht werden. In einer Arbeit aus dem Jahre 1768, die sich die Auffindung von Differentialgleichungen, welche ein Additionstheorem zulassen, zur Aufgabe macht, behandelt Lagrange in direktem Anschlusse an Eulers einschlagende Arbeiten (s. o. S. 807) zunächst⁷⁾ die Gleichung

¹⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. VIII, 1760/61 (1763), p. 32 ff. Ebenda, t. IX, 1762/63 (1764), p. 162. ²⁾ Hier sei noch ein Aufsatz von Lorgna über die Gleichung $Qdx + Py^2 dx + dy = 0$ in Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. III, 1786 erwähnt. ³⁾ Acta Academiae Petropolitanae 1780 (1784), pars II, p. 8. ⁴⁾ Ebenda 1782 (1785), pars I, p. 107. ⁵⁾ Ebenda, 1778, pars II, p. 162. Auf diese Gleichung geht Stephan Rumovski (1734 bis 1815) ebenda 1781 (1784), pars I, p. 147 ff. wieder ein. Eine andere spezielle Gleichung 1. Ordnung behandelt derselbe Nova Acta Acad. Petrop., t. XII, 1794 (1801), p. 192–195 (der Aufsatz stammt aus dem Jahre 1797). ⁶⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1789 (1793), p. 372 ff. ⁷⁾ Miscellanea Taurinensia, t. IV^o, 1766/69, p. 104.



$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2}} = dt.$$

Aus

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \quad \text{und} \quad \frac{dy^2}{dt^2} = \alpha + \beta y + \gamma y^2$$

erhält er durch Differentiation und darauffolgender Division mit $\frac{dx}{dt}$ bzw. $\frac{dy}{dt}$ die Gleichungen

$$2 \frac{dx^2}{dt^2} = \beta + 2\gamma x \quad \text{und} \quad 2 \frac{dy^2}{dt^2} = \beta + 2\gamma y.$$

Die Substitution $x + y = p$ liefert

$$2 \frac{d^2 p}{dt^2} = 2\beta + 2\gamma p,$$

also

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{k + 2\beta p + \gamma p^2};$$

hierbei bedeutet k die Integrationskonstante. Mit Berücksichtigung von

$$p = x + y \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dt} = \frac{dx + dy}{dt}$$

folgt sofort die Gleichung

$$\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} + \sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2)} = \sqrt{[k + 2\beta(x+y) + \gamma(x+y)^2]},$$

welche den Zusammenhang zwischen x und y algebraisch ausdrückt. Analog führt die Substitution $x - y = q$ zu

$$2 \frac{d^2 q}{dt^2} = 2\gamma q$$

und damit zu

$$\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} - \sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2)} = \sqrt{[H + \beta(x-y)^2]}.$$

Lagrange wendet seine Methode auch auf elliptische Integrale an und behandelt dann¹⁾ allgemein die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

wo X und Y dieselbe ganze rationale Funktion beliebigen Grades von x bzw. y darstellen; er probiert verschiedene mögliche Formen der Integralgleichung²⁾, führt aber die Untersuchung wegen ihrer Schwierigkeit nicht zu Ende; nach seiner Ansicht ist die Entdeckung weiterer Differentialgleichungen, die zunächst auf Transzendenten führen, aber auch durch eine algebraische Gleichung integrabel sind, nicht ausgeschlossen.

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t IV², 1766/69, p. 111. ²⁾ Ebenda, p. 114, 124. Vgl. S. 810 dieses Bandes.

Totale Differentialgleichungen höheren Grades finden sich in Eulers Integralrechnung viel behandelt; der wichtigste Fall ist derjenige, in welchem die eine Variable nicht explizite in die Differentialgleichung eingeht. Man erhält dann das Integral zunächst in Parameterdarstellung. So liefert¹⁾

$$x^3 + p^3 = apx,$$

wo $p = \frac{dy}{dx}$, bei Anwendung der Substitution $p = ux$ die Gleichungen

$$x = \frac{au}{1+u^2} \quad \text{und} \quad p = \frac{auu}{1+u^2},$$

also vermöge $dy = p dx$ auch

$$y = aa \int \frac{uudu(1-2u^2)}{(1+u^2)^3}.$$

Die Schlußgleichung zwischen x und y , welche gerade bei diesem Beispiel leicht aufzustellen ist, gibt Euler nicht an. Dagegen bemerkt er, daß jede Gleichung zwischen x , y und p , die in x und y homogen ist, eine derartige Integration in Parameterdarstellung gestattet. Durch die Substitution $y = ux$ wird nämlich die Gleichung auf eine solche zwischen u und p reduziert; die beiden Gleichungen

$$dy = u dx + x du \quad \text{und} \quad dy = p dx$$

ergeben

$$p dx - u dx = x du,$$

woraus

$$lx = \int \frac{du}{p-u}$$

folgt. Da sich aber p durch u ausdrückt, so ist damit x als Funktion von u und wegen $y = ux$ auch y als Funktion von u gefunden. Hier sei auch noch eine Gleichung behandelt, auf welche Lagrange²⁾ bei Gelegenheit der Untersuchung der Evolvente einer ebenen Kurve stößt:

$$y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \varphi \left[x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \frac{dy}{dx} \right].$$

Er ersetzt das Argument von φ durch p und erhält mittels der Substitution $\frac{dy}{dx} = z$ die Gleichungen

$$x - \frac{(1+z^2)z dx}{dz} = p \quad \text{und} \quad y + \frac{(1+z^2)dx}{dz} = \varphi(p).$$

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 514. ²⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 594 ff.



Daraus folgt zunächst

$$y + \frac{x-p}{z} = \varphi(p)$$

und durch Differentiation und Elimination von dz (mit Hilfe der ersten der beiden Gleichungen)

$$-\frac{dp}{z} = \varphi'(p) dp.$$

Hier hat man entweder $dp = 0$, d. h. p ist konstant, was in Verbindung mit

$$y + \frac{x-p}{z} = \varphi(p)$$

die Gleichung

$$(x-p)^2 + [y - \varphi(p)]^2 = r^2$$

gibt. Im anderen Fall hat man die Gleichung

$$-\frac{1}{z} = \varphi'(p),$$

die sich auf die Form $p = Z$ bringen läßt; Z ist hierbei eine Funktion von z . Dann läßt sich aber

$$x - \frac{(1+z^2)z dx}{dz} = p$$

in der Form

$$dx = \frac{x-Z}{(1+z^2)z} dz$$

schreiben, was

$$\frac{x\sqrt{1+z^2}}{z} = -\int \frac{Z dz}{z^2\sqrt{1+z^2}} + \text{const.}$$

gibt; berechnet man endlich z aus

$$y + \frac{x-Z}{z} = \varphi Z$$

und setzt diesen Wert in die vorhergehende Gleichung ein, so ist das Integral der ursprünglichen Gleichung gefunden.

Tiefer in das Wesen der Gleichungen höheren Grades und ihrer Integrale dringt Monge ein.¹⁾ Er nimmt an, die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = & Ay^m + Bxy^{m-1} + Cx^2y^{m-2} + \dots \\ & + A'y^{m-1} + B'xy^{m-2} + \dots \\ & + A''y^{m-2} + \dots \end{aligned}$$

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786) (Monge selbst zitiert 1782), p. 719–724. Ausführlicher: ebenda 1784 (1787), p. 164 ff.

sei das „allgemeine“ Integral einer Differentialgleichung, diese selbst sei gesucht. Monge zeigt, daß die auf normalem Weg, also durch wiederholte Differentiation und Elimination der Integrationskonstanten A, B, \dots entstehende Differentialgleichung in bezug auf den höchsten darin auftretenden Differentialquotienten immer vom ersten Grad ist und erläutert diese Ausführungen an dem Beispiel

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1,$$

das nacheinander die Gleichungen

$$2Axdx + B(xdy + ydx) + 2Cyd y = 0;$$

$$2Adx^2 + B(xd^2y + 2dxdy) + 2C(dy^2 + yd^2y) = 0; \text{ usw.}$$

liefert.¹⁾ Aus dem Umstand, daß derartige Elimination der Integrationskonstanten stets auf Gleichungen 1. Grades führt, folgert Monge, daß Differentialgleichungen nur dann in bezug auf die höchste darin vorkommende Derivierte von höherem Grade sein können, wenn die zugehörige Integralgleichung nicht alle ihre willkürlichen Konstanten in der 1. Potenz enthält, und man wird auch, wenn man die A, B, \dots als Funktionen von neuen Konstanten a, b, \dots ansieht, bei Elimination der a, b, \dots auf Gleichungen höheren Grades stoßen; das Gleiche findet statt, wenn zwischen den A, B, \dots irgendwelche Relationen bestehen; darauf gründet er nun seine Integrationsmethode für Gleichungen höheren Grades: man ersetze letztere durch die zugehörige Differentialgleichung ersten Grades und höherer Ordnung, integriere und entferne die dabei auftretenden überzähligen Konstanten durch Substitution des Integrals in die ursprüngliche Differentialgleichung. Als Beispiel gibt Monge die Gleichung²⁾

$$\frac{dy^2}{dx^2} (a^2 - x^2) + 2xy \frac{dy}{dx} + a^2 - y^2 = 0.$$

Durch Differentiation folgt unmittelbar

$$(a^2 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + xy d^2y = 0.$$

Diese Gleichung ist in bezug auf den 2. Differentialquotienten vom 1. Grad; $d^2y = 0$ gibt $\frac{dy}{dx} = A$. Setzt man diesen Wert in die ursprüngliche Gleichung ein, so erhält man ohne weiteres

¹⁾ Dasselbe Verfahren auf die weitaus einfachere Gleichung

$$Ax + By + Cxy = 1$$

angewandt hätte Monge auf die Schwarzsche Abgeleitete geführt.

²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 726.



$$A^2(a^2 - x^2) + 2Axy + a^2 - y^2 = 0;$$

überzählige Konstante tritt hier natürlich keine auf. Monge sagt zwar nicht, daß sich die gefundene Gleichung in zwei Linearfaktoren spalten läßt; gibt aber dafür die geometrische Bedeutung der Integralgleichung an. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß der andere Faktor

$$(a^2 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

in Verbindung mit der ursprünglichen Differentialgleichung deren singuläres Integral (intégrale particulière)

$$x^2 + y^2 = a^2$$

liefert. Eine andere Methode, die Monge in Vorschlag bringt, wird in Zusammenhang mit seiner Theorie der Berührungstransformationen erörtert werden (vgl. S. 983).

Totale Differentialgleichungen mit mehreren Variablen und Simultansysteme von totalen Gleichungen behandeln wir aus praktischen Gründen erst nach den partiellen Gleichungen, zu deren Besprechung wir hiermit übergehen. Wie schon erwähnt geht die Veranlassung zur Untersuchung bestimmter partieller Gleichungen zu Beginn unseres Abschnitts, abgesehen von Fragen der Differentialgeometrie (vgl. Abschnitt XXIV, bes. S. 550 ff.), noch hauptsächlich auf die Probleme der Praxis zurück; das rein theoretische Interesse erwacht erst viel später. Es sind hauptsächlich die Probleme der Störungstheorie, der Potentialtheorie und der Hydrodynamik, speziell der Saitenschwingungen, welche in diesem Sinne anregend gewirkt haben. Das Potential wurde schon lange vor Green und Gauß benutzt, wenn auch anscheinend vor diesen beiden ein Name dafür fehlt¹⁾; von der unter gewissen Umständen bestehenden Möglichkeit, die Komponenten der auf einen Punkt wirkenden Kraft als Differentialquotienten ein und derselben Funktion darzustellen, wurde mit mehr oder minder deutlichem Bewußtsein von der Wichtigkeit dieses Umstandes Gebrauch gemacht. Schon bei D. Bernoulli²⁾ und Lagrange³⁾ tritt die Kräftefunktion auf, bei letzterem sogar für kontinuierliche Massen; Niveauflächen finden wir bei Maclaurin in seinem Treatise of fluxions 1742 und in der Figure de la terre 1743 von Clairaut. Die berühmte Differentialgleichung 2. Ordnung, welcher

¹⁾ Nach einer gütigen Mitteilung von Herrn Prof. Stäckel findet sich der Name schon in D. Bernoullis Hydrodynamik. ²⁾ Histoire de l'Académie de Berlin, t. IV, 1748 (1750), p. 361. Im folgenden wurden teils der vorerwähnte Aufsatz von Burkhardt teils verschiedene Ansätze der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften benutzt. ³⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 402 (aus dem Jahr 1777) und t. VI, p. 349.

das Potential V eines beliebigen Körpers auf einen außerhalb gelegenen Punkt mit den Polarkoordinaten r , ϑ und ω gehorcht, ist von Laplace 1782¹⁾ angegeben; dieser setzt für V in der Gleichung

$$0 = \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial \mu} \right) \right] \right\} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \omega^2} \right)}{1 - \mu^2} + r \left(\frac{\partial \partial r V}{\partial r^2} \right),$$

wo $\cos \vartheta = \mu$, eine Reihenentwicklung mit fallenden Potenzen von r und bestimmt die Entwicklungskoeffizienten dieser Reihe. 1787 endlich gibt er auch die Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

die nach ihm benannt ist.²⁾ Letztere Gleichung tritt zwar schon früher in der Dynamik inkompressibler Flüssigkeiten bei Lagrange³⁾ auf, aber nur nebenbei, zufällig, weil sie eben der Natur des behandelten Problems nach notwendig auftreten muß; bei Laplace hingegen bildet die Bestimmung der Eigenschaften der Funktion V den Kernpunkt der Untersuchung, die Differentialgleichung ist bei ihm mit voller Einsicht ihrer Bedeutung in den Vordergrund gerückt. Den direkten Anlaß zu Laplaces Arbeit gab das Problem der Attraktion der Sphäroide und das Problem der Erdfigur, mit dem sich auch Legendre beschäftigt hat⁴⁾. Die Untersuchungen auf diesem für die Astronomie bedeutungsvollen Gebiet führten zur Benutzung wichtiger Reihenentwicklungen und zur Verwendung der Kugelfunktionen⁵⁾ (s. o. S. 792); insbesondere die Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse, deren Teilchen sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, war schon früher besonders von Clairaut in seiner Figure de la terre behandelt. Es waren also Mechanik, Hydrodynamik und Astronomie in gleicher Weise, welche auf die Einführung des Potentialbegriffes hinwiesen. Auf die Untersuchungen über den Fall, daß der Punkt μ , ϑ , ω innerhalb der anziehenden Masse liegt, auf das Auftreten des logarithmischen Potentials und ähnliche Fragen kann hier nicht eingegangen werden.

Die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen versucht Lagrange zu integrieren (vgl. S. 1024); es sind indessen begreiflicherweise nur speziellere Probleme, die zu brauchbaren interessanten Er-

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1782 (1785), p. 135. Dieser Aufsatz handelt von der Anziehung der Sphäroide und der Figur der Planeten. Man vgl. hierzu auch: ebenda, 1783 (1786), p. 25. ²⁾ Ebenda 1787 (1789), p. 252 in einer Abhandlung über die Saturnringe. ³⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 273. Vgl. auch oben S. 914. ⁴⁾ Vgl. Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 370 ff. Ebenda 1789 (1793), p. 372 ff. ⁵⁾ Ebenda 1785 (1788), p. 64 ff.



gebnissen geführt haben. Um von der Art der untersuchten Probleme eine Vorstellung zu gewinnen, seien einige Beispiele aufgeführt. Euler behandelt das Problem der Fortpflanzung von Wellen, die von einem Störungszentrum ausgehen, sowohl für die Ebene, wie für den Raum; diese Aufgabe führt auf die Gleichung

$$\frac{1}{2gh} \left(\frac{dds}{dt^2} \right) = \frac{n}{V} \left(\frac{ds}{dV} \right) + \left(\frac{dds}{dV^2} \right),$$

wo V den Radius einer Welle bedeutet, und zwar ist n beim ebenen Problem gleich 3, beim entsprechenden räumlichen Problem gleich 4 zu setzen. Die Fortpflanzung von Wellen an der Oberfläche eines Kanals von konstanter Tiefe behandelt Laplace 1778¹⁾ unter der Voraussetzung, daß die Breite des Kanals nicht in Betracht kommt. Seien X, Z die Koordinaten eines Flüssigkeitsteilchens zur Zeit $t=0$, $X+\alpha x, Z+\alpha z$ die Koordinaten desselben Teilchens zur Zeit t (α eine sehr kleine Größe), δ die Dichtigkeit, p der Druck, g das Gewicht des Teilchens, so findet Laplace:

$$0 = \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial Z} \right);$$

$$0 = g\delta \cdot (Z + \alpha z) + \alpha \delta X \cdot \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2} \right) + \alpha \delta Z \cdot \left(\frac{\partial \partial z}{\partial t^2} \right) + \frac{dV}{dt};$$

d bedeutet dabei eine Differentiation, bei der t als konstant behandelt wird. Die letztere Gleichung kann nur bestehen, wenn auch ihr 2. und 3. Glied zusammen ein vollständiges Differential in bezug auf X und Z bilden. Aus der Bedingung hierfür erhält man durch zweimalige Integration nach t die Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial Z} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial X} \right)$$

und durch Kombination mit

$$\left(\frac{\partial x}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial Z} \right) = 0$$

die beiden folgenden:

$$z = \varphi \{ X + Z\sqrt{-1} \} + \psi \{ X - Z\sqrt{-1} \}$$

und

$$x = -\sqrt{-1} \cdot \{ \varphi [X + Z\sqrt{-1}] + \psi [X - Z\sqrt{-1}] \},$$

dabei muß $\varphi(X) = -\psi(X)$ sein, da für $Z=0$, d. h. am Boden des Kanals, z überall und beständig Null ist. Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen lassen sich z und x für alle Punkte der Flüssigkeit be-

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1776 (1779), p. 544 ff. Das Folgende nach Burkhardt a. a. O.

stimmen, sobald man ihre Werte an der Oberfläche kennt. Sei für diese $Z=l+\alpha u$, wo u eine beliebige Funktion von X ist, so erhält man unter Vernachlässigung höherer Potenzen von α :

$$0 = g \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right) + g \left(\frac{\partial z}{\partial X} \right) + g \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2} \right);$$

Laplace begnügt sich mit der Angabe eines partikulären Integrals dieser Gleichung. Lagrange beschäftigt sich nach sorgfältigen Literaturstudien mit der Untersuchung der Wellenbewegung an der Oberfläche eines beinahe horizontalen Gewässers von sehr geringer Tiefe¹⁾ und kommt zu dem Resultat, daß sie den Gesetzen der Schallfortpflanzung in einer ebenen Luftschicht gehorcht. Das wichtigste hierher gehörige Problem ist aber das der schwingenden Saiten und überhaupt der musikalischen Instrumente. Abgesehen von der physikalischen Bedeutung dieses Problems hat seine Behandlung nach den verschiedensten Richtungen hin fördernd und fruchtbringend auf die Mathematik eingewirkt. Der ganze Streit über die Art der in den willkürlichen Funktionen einer Integralgleichung zulässigen Unstetigkeiten, die intensive Beschäftigung mit den partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung, die schließlich notwendig zu einer Theorie dieser Gleichungen führen mußte, wurde durch die genannte Aufgabe veranlaßt. Eben dieselbe führte — und das war, wenn man auch das Geleistete nicht zu erkennen vermochte, immerhin ein bedeutender Schritt — unbewußt zur Darstellung einer Funktion nach Vielfachen von sinus und cosinus²⁾; die Physik verdankt diesem Problem die Erfindung des Prinzips der Superposition der Wellen durch D. Bernoulli³⁾ und des Begriffs der Freiheitsgrade eines Systems, von dem Euler bei Untersuchung einer nicht in einer Ebene, sondern räumlich schwingenden Saite Gebrauch macht.⁴⁾ Um die in Frage kommenden, für die Probleme der bezeichneten Art charakteristischen Differentialgleichungen der Bewegung bzw. deren Integral zu finden, stehen zwei Wege offen; der eine geht von den Bewegungsgleichungen einer kompressiblen Flüssigkeit aus, der andere bildet zunächst das Gleichungssystem, das die Schwingungen einer endlichen Anzahl von Massenpunkten darstellt, integriert sie und sucht dann durch Grenzübergang das für einen kontinuierlichen Komplex von Punkten gel-

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 746 (Berliner Memoiren für 1781).

²⁾ Vgl. diese Vorl., III², S. 905 ff. ³⁾ Histoire de l'Académie de Berlin 1763 (1765), p. 187, 189. Vgl. Journal des sçavans 1758, p. 158.

⁴⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XIX, 1774 (1775), p. 340 ff. Das Problem der Schwingungen einer Saite mit Berücksichtigung ihres Gewichts: Acta Academiae Petropolitanae 1781 (1784), pars I, p. 178 ff.



tende Integral daraus abzuleiten; den letztgenannten Weg schlägt als besonders sicher und unanfechtbar Lagrange in seiner großen Abhandlung über die Fortpflanzung des Schalles ein, da er den Anschauungen seiner Zeit gemäß die dem Grenzübergang innewohnenden prinzipiellen Schwierigkeiten nicht erkennt. Euler behandelt Saiten von ungleichmäßiger Dicke, und zwar will er von einer Saite, die aus einer endlichen Anzahl von Stücken verschiedener Dicke zusammengesetzt ist, zu der Saite mit kontinuierlich veränderlicher Dicke übergehen.¹⁾ Euler legte auf diese Untersuchungen viel Wert, da er glaubte, mit dem Nachweis, daß bei derartigen Saiten im allgemeinen disharmonische Obertöne auftreten, die (gerade von der modernen Musiktheorie wieder aufgenommenen) Versuche widerlegen zu können, welche Konsonanz und Dissonanz, überhaupt die Harmonielehre mit der Anordnung der Obertöne in Zusammenhang bringen.²⁾ Die Theorie der Pfeifen wurde von D. Bernoulli sehr gefördert³⁾, der aus den Ergebnissen seiner Studien über die Verhältnisse an offenen und geschlossenen Enden auf den Grundton offener und gedeckter Pfeifen schließt, auch den Satz findet, daß bei der gedeckten Pfeife die Schwingungszahlen der Obertöne ungerade Vielfache der Schwingungszahl des Grundtons sind; er behandelt auch das der Saite von verschiedener Dicke analoge Problem einer Pfeife von veränderlichem Durchmesser. Pfeifen von nicht zylindrischer Form wurden von verschiedenen Forschern untersucht⁴⁾; eine Theorie der Blasinstrumente für beliebige Gestalt der Begrenzungsfläche sucht Lagrange abzuleiten und die allgemeine Lösung durch Superposition einfacher Schwingungen zusammensetzen.⁵⁾ Endlich ist noch der Theorie der Schwingungen von Lamellen, Membranen und Glocken zu gedenken; die diesbezüglichen Differentialgleichungen werden an Ort und Stelle angegeben werden.

Auf alle hierher gehörigen Abhandlungen konnte hier nur dann eingegangen werden, wenn darin die eigentlich physikalische Seite des Problems, obwohl ursprünglich Veranlasserin und Urheberin der ganzen Untersuchung, doch hinter den zur Lösung erforderlichen neuen Methoden und Theorien in solchem Maße zurücktritt, daß ihr Inhalt mehr den Mathematiker als den Physiker interessiert. So konnte z. B. die große

¹⁾ *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae*, t. IX, 1762/63 (1764), p. 271 und ebenda, t. XVII, 1772 (1773), p. 432 ff. Endlich *Miscellanea Taurinensia*, t. III², 1762/65 (1766), p. 27—59. ²⁾ Vgl. auch D. Bernoulli in *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae*, t. XVI, 1771 (1772), p. 268. ³⁾ *Histoire de l'Académie de Berlin 1753 (1755)*, p. 150. *Histoire de l'Académie des Sciences 1762 (1764)*, p. 431 ff. ⁴⁾ *Ebenda*, p. 470. ⁵⁾ Wegen dieses Principis beruft er sich in den *Miscellanea Taurinensia*, t. II², 1760/61, p. 171 auf D. Bernoulli.

Abhandlung von Lagrange über Natur und Fortpflanzung des Schalls Berücksichtigung finden; des gleichen Verfassers Aufsatz über Hydrodynamik in den Berliner Memoiren von 1781 mußte dagegen übergangen werden, da er inhaltlich wie auch äußerlich den ausgesprochenen Charakter einer Untersuchung auf dem Gebiet der theoretischen Physik besitzt; die darin auftretenden Gleichungen sind meistens zu speziell und die zu ihrer Lösung benutzten Kunstgriffe bei allem Scharfsinn zu wenig allgemein, als daß sie die Aufstellung rein mathematischer Theorien hätten zur Folge haben können.

Was die Integration der partiellen Differentialgleichungen betrifft, so erkannte man bald, daß das Vorkommen gerade der partiellen Differentialquotienten in einer Gleichung auf die Integralgleichung keinen anderen Einfluß ausübt, als daß in diese willkürliche Funktionen eingehen, so daß also das eigentliche Integrationsgeschäft keinerlei Operationen erfordert, die von den bei gewöhnlichen Differentialgleichungen notwendigen prinzipiell verschieden wären. Das Problem der Integration partieller Differentialgleichungen läßt sich demnach in zwei voneinander unabhängige Aufgaben trennen, einmal in die Aufdeckung der Art und Weise, wie die willkürlichen Funktionen in das Integral eintreten, sodann aber in die Forderung, alle durch die ursprüngliche Gleichung definierten eigentlichen Integrationen für sich allein, d. i. durch Gleichungen darzustellen, deren Lösung keine willkürlichen Funktionen mehr in sich birgt; das sind eben totale Gleichungen.

Deshalb begnügen sich auch die Mathematiker, sofern es sich nicht um spezielle Gleichungen handelt, meistens damit, die partiellen Differentialgleichungen auf totale zurückzuführen und den Zusammenhang zwischen den Integralgleichungen der partiellen und totalen Gleichungen anzugeben. Diese Reduktion wird wiederholt als das Grundprinzip der Integration partieller Differentialgleichungen ausgesprochen; Laplace sagt¹⁾ klar und deutlich: je regarde une equation aux différences partielles comme intégrée, lorsqu'elle est ramenée à l'intégration d'une équation aux différences ordinaires. Wegen einer ähnlichen Stelle bei Lagrange vergleiche man S. 972.

Diese Reduktion auf totale Gleichungen hat am konsequentesten Monge in einer großen Abhandlung in den Pariser Memoiren von 1784 durchgeführt.²⁾ Er findet für die verschiedensten partiellen Gleichungen die entsprechenden totalen dadurch, daß er die partiellen Differentialquotienten mit Hilfe der Gleichungen, welche diese mit den totalen Differentialen verbinden, so weit als möglich eliminiert

¹⁾ *Histoire de l'Académie des Sciences 1773 (1777)*, p. 344. Vgl. auch die *Histoire desselben Jahres*, p. 44. ²⁾ *Ebenda 1784 (1787)*, p. 118—192.



und die so erhaltenen Schlußgleichungen derart zerfällt, daß sie unabhängig von darin noch auftretenden partiellen Derivierten Geltung haben. Sei z. B. die lineare Gleichung 1. Ordnung

$$Mp + Nq + L = 0$$

zu integrieren, wo M, N, L gegebene Funktionen von x, y und z , p und q die partiellen Differentialquotienten von z nach x bzw. y sind.¹⁾ Diese Gleichung stellt, wie Monge sagt, lediglich eine Beziehung zwischen p und q dar, aus welcher allein, d. h. ohne das Hinzukommen einer weiteren Gleichung, p und q nicht jedes für sich berechnet werden können. Eliminiert man also p bzw. q mit Hilfe der immer bestehenden Gleichung

$$dz = p dx + q dy,$$

so ergibt sich

$$M dz + L dx = q (M dy - N dx)$$

und

$$N dz + L dy = p (M dy - N dx);$$

damit das aber nicht zwei Bestimmungsgleichungen für q und p sind, müssen nach Monge die drei Gleichungen

$$M dz + L dx = 0; \quad M dy - N dx = 0; \quad N dz + L dy = 0$$

gleichzeitig bestehen, die indes nur zwei voneinander unabhängige Gleichungen darstellen. Genau denselben Gedankengang verwendet Monge zur Behandlung aller anderen partiellen Gleichungen, wie wir in den einzelnen Fällen an Ort und Stelle sehen werden; hier sei nur mitgeteilt, wie Monge den Zusammenhang zwischen den Integralen der partiellen und der totalen Gleichungen herstellt. Er betrachtet es nämlich als wesentlich, daß, wenn wir das eben erwähnte Beispiel beibehalten, von den beiden totalen Schlußgleichungen nicht jede einzelne für sich, sondern beide zusammen statthaben, und kommt sodann durch eigentümliche Deutung des Wortes simultan zum Integral (*intégrale complète*) der gegebenen partiellen Gleichung. Er erklärt den Begriff simultan folgendermaßen: Sind $V = a$ und $U = b$ die vollständigen Integrale des der partiellen Gleichung äquivalenten Systems, so müssen, wenn beide gleichzeitig bestehen sollen, nicht V und U jedes einzeln konstant sein, sondern es muß U konstant sein, solange V es ist und umgekehrt; ist hingegen das eine variabel, so ist es das andere auch, ou autrement...elles sont fonctions l'une de l'autre, sans rien statuer d'ailleurs sur la forme de cette fonction. (Vgl. o. S. 536 und 561.) Man kann dieser glücklichen Dialektik, durch welche Monge die Gleichung $V = \varphi(U)$ plausibel macht, nicht die Bewunderung versagen, wobei zu

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 121.

bedenken ist, daß das Resultat, weil längst bekannt, niemanden in Erstaunen setzte und deshalb auch einige Nachsicht bezüglich seiner Herleitung erwarten konnte. Verständlicher wird dieser ganze Gedankengang, wenn man berücksichtigt, daß Monge die Bildung des Integrals der partiellen Gleichung aus den Integralen der totalen Gleichungen als die „opération inverse“ zur Elimination der willkürlichen Funktion aus einer gegebenen Integralgleichung angesehen haben will. Um diese Elimination möglichst einfach zu gestalten, verwandelt er z. B. die Gleichung $V = \varphi(U)$ mittels der Substitution $U = a$ in die beiden Gleichungen

$$U = a; \quad V = \varphi(a) = b,$$

die zu gleicher Zeit statthaben müssen und zwar in der Art, daß die eine die notwendige Folge der andern ist. Aus $dU = 0$ und $dV = 0$ erhält er

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy = 0$$

und

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy = 0,$$

woraus durch Elimination „der unbestimmten Größe“ $\frac{dy}{dx}$ die partielle Gleichung folgt:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) \left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dV}{dx}\right) \left(\frac{dU}{dy}\right) = 0.$$

Statt $\frac{dy}{dx}$ zu eliminieren, kann, wie Monge noch erwähnt, dieselbe Schlußgleichung durch Elimination einer Unbestimmten ω aus zwei anderen Gleichungen hervorgehen; letztere stellen dann ebenfalls ein der Schlußgleichung äquivalentes System dar. Den hier entwickelten Prozeß faßt dann Monge in folgende Regel zusammen: Man setze das totale Differential des Arguments der in der Integralgleichung auftretenden willkürlichen Funktion gleich Null, differenziere sodann die Integralgleichung selbst derart total, daß dabei die willkürliche Funktion als Konstante behandelt wird und eliminiere endlich aus den beiden so erhaltenen Gleichungen, sowie der Integralgleichung die willkürliche Funktion $\frac{dy}{dx}$, so erhält man die zur gegebenen Integralgleichung gehörige Differentialgleichung für den Fall, daß auch noch die Differentialquotienten der willkürlichen Funktion in der Integralgleichung auftreten, ist wenigstens hingewiesen. Nun ist diese Methode, aus dem Integral auf die Differentialgleichung zu schließen, in einem anderen Aufsatz¹⁾ desselben Bandes der Pariser Memoiren bereits ausführlich auseinandergesetzt und an Beispielen erläutert;

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 85 ff.



sie bildet nach Monges eigener Aussage die Grundlage für den Inhalt der eben besprochenen größeren Abhandlung¹⁾, woraus zwar nicht auf die zeitliche Abfassung der beiden Artikel, wohl aber auf die Vorgeschichte des Gedankenganges, der Methode, die in den erwähnten Aufsätzen bereits vollständig durchgebildet, sicher, abgerundet und klar dargestellt und gehandhabt wird, ein Schluß gezogen werden kann. In dieser ersten Abhandlung stellt sich nun Monge die Aufgabe, irgendwelche geometrisch oder mechanisch erzeugten Flächentypen analytisch, zunächst mit Zuhilfenahme willkürlicher Funktionen und dann mit Hilfe partieller Differentialgleichungen, darzustellen; er gewinnt so, wie jedenfalls schon früher, rückwärts verschiedene komplizierte und dennoch integrierbare Differentialgleichungen. Sehen wir also in diesen Untersuchungen die Grundlage, den Ausgangspunkt für die eigentlichen Forschungen Monges auf dem Gebiete der Differentialgleichungen selbst, so können wir eine erste Entwicklungsreihe für diese aufstellen: Beschäftigung mit Problemen der Flächentheorie²⁾, Aufstellung der Gleichungen von Flächenfamilien, Übergang zu den gleichwertigen Differentialgleichungen durch Elimination der willkürlichen Funktionen jener Gleichungen, Vereinfachung des Eliminationsprozesses, Umkehrung dieser Methode. Daneben ist aber auch eine Anmerkung zu berücksichtigen, welche Monge dem erwähnten Aufsatz über partielle Differentialgleichungen vorangeschickt hat: Dieses Memoire sei durch einen Lehrsatz veranlaßt (*a été fait à l'occasion d'une proposition*), den er der Akademie mitgeteilt habe; nach seiner Vollendung habe man ihn darauf aufmerksam gemacht, daß der Grundgedanke, allerdings nur in Anwendung auf Gleichungen 1. Ordnung, bereits in einem Memoire von Lagrange in den Berliner Memoiren für 1779 veröffentlicht sei. Monge weist sodann auf einen früheren, verwandten Gedanken hin, den er 1771 der Akademie vorgelegt und hernach in den *Savans Étrangers* für 1773 veröffentlicht hatte, nämlich auf die Tatsache, daß sich für die partielle Gleichung $Mp + Nq = 0$, wo M und N Funktionen von x , y und z sind, dieselbe Integralgleichung ergibt, ob man jetzt z als Konstante oder als Variable behandelt. *On y verra, fährt er fort, que cette proposition, dont j'étois dès-lors fortement occupé, est le germe de ce qui fait l'objet du Mémoire actuel, et qu'elle a dû me conduire aux résultats que je présente.* In der zitierten Abhandlung sind aber wiederum

¹⁾ Tout ce que je me propose de dire sur cet objet, étant fondé sur le procédé que j'ai exposé dans le Mémoire précédent. *Histoire de l'Académie des Sciences* 1784 (1787), p. 118. ²⁾ Hierbei empfang Monge u. a. mancherlei Anregungen durch die diesbezüglichen Arbeiten von Euler und Meusnier, die er auf p. 92 bzw. p. 106 zitiert.

geometrische Überlegung und Behandlungsweise in den Vordergrund gerückt, ist geometrische Versinnlichung das Ziel der Untersuchung; Monge konstruiert nämlich genau wie früher nichts als Flächen, die durch eine gegebene Raumkurve hindurchgehen und eine gegebene Integralgleichung erfüllen; bei Besprechung von einzelnen Beispielen wird er dann zu dem erwähnten Satz geführt; er schreibt¹⁾ die Differentialgleichung in der Form

$$M \frac{\delta z}{\delta x} + N \frac{\delta z}{\delta y} = 0,$$

deutet hierbei durch die Symbole δ , δ , d die verschiedenen Differentiationen an (vgl. S. 885) und erwähnt, daß sich statt des Integrals $z = \varphi(V)$ auch $z = \varphi(V + \psi z)$ schreiben läßt. Nachdem er den Satz auch analytisch bewiesen hat, weist er zum besseren Verständnis noch auf die Gleichungen

$$dy\delta z - dx\delta z = 0; \quad dy\delta z - dx\delta z = 0; \quad dy\delta z - Zdx\delta z = 0$$

hin, wo Z eine Funktion von z ist; diese Gleichungen haben bzw. die Integrale

$$z = \varphi(ax + y); \quad z = \varphi(xz + y); \quad z = \varphi(Zx + y),$$

so daß also die Variablen z und Z auf dieselbe Weise in das Integral eintreten wie die Konstante a .

Das allgemeine Prinzip der Behandlung partieller Differentialgleichungen, wie Laplace, Lagrange und Monge es üben, d. i. einfach die Reduktion auf totale Gleichungen, unbekümmert darum, ob diese integrierbar sind oder nicht, hat Trembley mißverstanden; er betont nämlich — was nichts Neues ist —, daß die zwei totalen Gleichungen, auf welche Lagrange die lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung zurückgeführt hat, ebenso schwierig zu integrieren sind als die ursprüngliche Gleichung, und geht deshalb unmittelbar auf die partielle Gleichung selbst ein. An diese Untersuchung knüpft sich eine ganze Reihe anderer Aufsätze, die alle dieselbe Methode in ungeheuren Rechnungen durchführen; wir werden bei Gelegenheit der Gleichung 2. Ordnung darauf zurückkommen.

Auch Cousin zieht die direkte Behandlung der partiellen Differentialgleichung der Diskussion der gleichwertigen totalen Gleichungen vor; ja während die zeitgenössischen Mathematiker froh sind, die partiellen Gleichungen auf totale reduzieren zu können, verwandelt er gerade umgekehrt gewöhnliche Differentialgleichungen in partielle; er und nach ihm Trembley suchen integrierbare Fälle, die sich in vorgegebener

¹⁾ *Mémoires présentés par divers Savans* 1773 (1776), p. 283 corollaire II.



Weise integrieren lassen, und gehen deshalb im allgemeinen von einer gegebenen Integralgleichung aus. Die totale Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{1}{dx} dz + \mu = 0,$$

wo μ eine Funktion von x, y und $\frac{dy}{dx}$ darstellt, verwandelt Cousin¹⁾ durch die Substitution $\frac{dy}{dx} = z$ vermöge $dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$ in die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} + \mu = 0,$$

wobei die partielle Differentiation in der Schreibweise nicht besonders angedeutet wird; er ersetzt also mit anderen Worten das Simultansystem

$$\frac{dz}{dx} + \mu = 0; \quad \frac{dy}{dx} = z$$

durch eine partielle Gleichung, während man gewöhnlich an Stelle letzterer das erwähnte Simultansystem betrachtet. Ist jetzt z. B.

$$\mu = \alpha z^2 + \beta z + \gamma,$$

wo α, β, γ Funktionen von x und y allein sind, so setzt Cousin als Integral die Gleichung an:

$$z = e^{\int(\sigma dx - \alpha dy)} \left\{ \alpha - \int e^{-\int(\sigma dx - \alpha dy)} [\gamma dx + (\beta + \sigma) dy] \right\}.$$

Damit die hier angedeuteten Integrationen ausgeführt werden können, müssen aber die Bedingungsgleichungen

$$\frac{d\sigma}{dy} + \frac{d\alpha}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d(\beta + \sigma)}{dx} - \sigma(\beta + \sigma) = \frac{d\gamma}{dy} + \alpha\gamma$$

bestehen; aus ihnen folgert Cousin die Gleichung

$$\sigma = \frac{\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{d^2\beta}{dx dy} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \frac{d \cdot \alpha\gamma}{dy} - \beta \frac{d\alpha}{dx}}{2 \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}}$$

und bespricht auch den Fall, daß ihr Nenner Null ist. Interessanter werden die Untersuchungen, die sich an die Annahme knüpfen, das Integral von

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1778 (1781), p. 442. Vgl. auch Histoire, p. 42.

$$\frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} + \mu = 0$$

lasse sich in der Form

$$B + F(K) = 0$$

darstellen, wo B und K Funktionen von x, y und z sind. Cousin leitet aus dem Integral durch partielle Differentiation nach x bzw. y , wobei z als Funktion von x und y zu gelten hat, und Elimination von F' eine Gleichung her, von der er verlangt, daß sie bis auf einen Faktor ψ mit der gegebenen Differentialgleichung übereinstimme. Auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{dK}{dz} \frac{dB}{dy} - \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dy} = \psi; \quad \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dx} - \frac{dK}{dz} \frac{dB}{dx} = \psi z;$$

$$\frac{dK}{dx} \frac{dB}{dy} - \frac{dK}{dy} \frac{dB}{dx} = \psi \mu.$$

Durch Elimination von ψ folgen endlich die Gleichungen:

$$(\Gamma) \quad \frac{dK}{dz} \left(\frac{dB}{dx} + z \frac{dB}{dy} \right) - \frac{dB}{dz} \left(\frac{dK}{dx} + z \frac{dK}{dy} \right) = 0;$$

$$(\mathcal{A}) \quad \frac{dK}{dy} \left(\frac{dB}{dx} - \mu \frac{dB}{dz} \right) - \frac{dB}{dy} \left(\frac{dK}{dx} - \mu \frac{dK}{dz} \right) = 0;$$

Cousin nimmt nun spezielle Formen für B und K an, um integrale Fälle aufzufinden; so setzt er

$$B = mz + n \quad \text{und} \quad K = Mz + N,$$

wo m, n, M, N Funktionen von x und y allein sind. Ist wieder

$$\mu = \alpha z^2 + \beta z + \gamma,$$

so folgen bei Substitution dieser speziellen Werte in (Γ) durch Nullsetzen der Koeffizienten von z und z^2 Relationen zwischen m, n, M und N , aus deren einer die Gleichung

$$m = M \cdot \varphi_1(x)$$

gefolgert werden kann. Interessant ist nun, daß Cousin eine eigene Bezeichnung für die Funktionaldeterminante einführt, indem er¹⁾ $m \dot{M}$ statt $\frac{dm}{dy} \frac{dM}{dx} - \frac{dm}{dx} \frac{dM}{dy}$ und analoge Symbole an Stelle ähnlicher Ausdrücke schreibt. Damit geht die Gleichung (\mathcal{A}) mit Berücksichtigung von $m = M \cdot \varphi_1(x)$ in

$$-\mu M^2 \varphi_1'(x) = \dot{m} \dot{M} z^2 + (\dot{m} \dot{N} + \dot{n} \dot{M}) z + \dot{n} \dot{N}$$

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1778 (1781), p. 449.



über; es soll aber

$$\mu = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

sein. Durch geschickte Kombination der verschiedenen allmählich aufgestellten Relationen und Integration erhält Cousin die Größen m, n, M, N in ziemlich verwickelter Form ausgedrückt durch α, β, γ , sowie durch vier willkürliche Funktionen $\varphi_1(x); \varphi_2(x); f_1(x); f_2(x)$; da aber diese Größen teilweise unter Integralzeichen auftreten, müssen noch gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein, welche die praktische Anwendung der ohnehin komplizierten Cousinschen Formeln erschweren. Im folgenden¹⁾ geht Cousin zu Gleichungen höherer Ordnung über; für die Gleichung

$$\frac{1}{dx} dZ + \alpha Z^2 + \beta Z + \gamma = 0,$$

wo Z einen Differentialquotienten beliebiger Ordnung von y nach x bedeutet, und die α, β, γ Funktionen von x, y, z und sämtlichen Ableitungen von z bis Z sind, versucht er ein erstes Integral von der Form

$$(mZ + n) + F(MZ + N) = 0.$$

Endlich²⁾ nimmt er

$$B = mz + n; \quad K = Mz^2 + Nz^{2-1} + \dots,$$

was auf ganz ungeheure Ausdrücke führt. In einer späteren Abhandlung³⁾, die vor der früheren größere Übersichtlichkeit voraus hat, kommt er auf diese Untersuchungen zurück; er erwähnt, daß man die beiden vollständigen ersten Integrale einer totalen Differentialgleichung 2. Ordnung erhält, indem man in dem Integral der zugehörigen partiellen Gleichung einmal die willkürliche Funktion selbst, das andere Mal ihr Argument gleich einer Konstanten setzt. Ist wieder $B + F(K) = 0$ das Integral von

$$\frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} + \mu = 0,$$

so ergeben sich genau wie früher die Gleichungen (Γ) und (\mathcal{A}). Cousin nimmt jetzt allgemeiner

$$B = m \cdot z + m_1 + \frac{m_2}{z} + \frac{m_3}{z^2} + \dots$$

und

$$K = Mz + M_1 + \frac{M_2}{z} + \frac{M_3}{z^2} + \dots$$

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1778 (1781), p. 452. Die im Text angeführte Gleichung p. 468. ²⁾ Ebenda, p. 469. ³⁾ Ebenda 1783 (1786), p. 649 ff.

und führt der Kürze halber Größen n, n_1, n_2, \dots ein, wo

$$m \frac{dM}{dx} - M \frac{dm}{dx} = n; \quad m \frac{dM_1}{dx} - M \frac{dm_1}{dx} = n_1; \\ m \frac{dM_2}{dx} - M \frac{dm_2}{dx} - m_2 \frac{dM}{dx} + M_2 \frac{dm}{dx} = n_2; \dots$$

Es möge hier gestattet sein, die vielen einzelnen Gleichungen, die Cousin angibt, um das Bildungsgesetz erkennen zu lassen, mittels eines allgemeinen Index i in eine zusammenzufassen:

$$m \frac{dM_i}{dx} - M \frac{dm_i}{dx} - m_2 \frac{dM_{i-2}}{dx} + M_2 \frac{dm_{i-2}}{dx} \\ - 2 m_3 \frac{dM_{i-3}}{dx} + 2 M_3 \frac{dm_{i-3}}{dx} \\ \dots \\ - (i-1) m_i \frac{dM}{dx} + (i-1) M_i \frac{dm}{dx} = n_i.$$

Diese Gleichung gilt in sinngemäßer Anwendung schon für $i=0$ und $i=1$. Setzt man jetzt die unendlichen Reihen für B und K in die Gleichung (Γ) ein, wobei B und K wie Funktionen von drei voneinander unabhängigen Variablen x, y, z zu behandeln sind, so ergibt sich durch Nullsetzen aller Koeffizienten der einzelnen Potenzen von z eine 2. Gruppe von Ausdrücken für die Größen n , die wir wieder mit Hilfe des Buchstaben i in eine Gleichung sammeln:

$$M \frac{dm_i}{dy} - m \frac{dM_i}{dy} - M_2 \frac{dm_{i-2}}{dy} + m_2 \frac{dM_{i-2}}{dx} \\ - 2 M_3 \frac{dm_{i-3}}{dy} + 2 m_3 \frac{dM_{i-3}}{dy} \\ \dots \\ - (i-1) M_i \frac{dm}{dy} + (i-1) m_i \frac{dM}{dy} = n_{i-1};$$

unter n_{i-1} , das sich für $i=0$ ergibt, ist hierbei die Zahl 0 zu verstehen. Mit Hilfe der eben gefundenen Relationen folgt aber

$$\frac{dB}{dy} \frac{dK}{dz} - \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dy} = n + \frac{n_1}{z} + \frac{n_2}{z^2} + \dots$$

Führt man für die Funktionaldeterminante

$$\frac{dm}{dy} \frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dx} \frac{dm}{dy}$$

wieder das Symbol mM ein (Cousin läßt jetzt die Punkte weg), so kann man schreiben



$$\frac{dB}{dy} \frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dy} = m M x^2 + (m_1 M + m M_1) x + m_2 M + m_1 M_1 + m M_2 \\ + (m_3 M + m_2 M_1 + m_1 M_2 + m M_3) x^{-1} + \dots;$$

und setzt man endlich die zwei zuletzt erhaltenen Gleichungen in (\mathcal{A}) ein, so ergibt sich unter der Annahme, daß μ von der Form

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\delta}{x} + \frac{\epsilon}{x^2} + \dots$$

ist, nachstehende Folge von Gleichungen:

$$\begin{aligned} m M &= \alpha n; \\ m_1 M + m M_1 &= \alpha n_1 + \beta n; \\ m_2 M + m_1 M_1 + m M_2 &= \alpha n_2 + \beta n_1 + \gamma n; \\ m_3 M + m_2 M_1 + m_1 M_2 + m M_3 &= \alpha n_3 + \beta n_2 + \gamma n_1 + \delta n \end{aligned}$$

usw. Mittels dieser Gleichungen berechnet nun Cousin sukzessive die Größen m , m_1 , M_1 , m_2 , M_2 usw. Die Gleichung

$$n_{-1} = M \frac{dm}{dy} - m \frac{dM}{dy} = 0,$$

die in der 2. Gruppe von Ausdrücken für die n_i enthalten ist, liefert nämlich $m = M \cdot x_1$, wo x_1 eine zunächst willkürliche Funktion von x allein bedeutet. Mit Hilfe von $n_{-1} = 0$ ergibt sich aus $m M = \alpha n$ bei Berücksichtigung der Bedeutung von $m M$ und n die Gleichung

$$\frac{dM}{dy} = \alpha M,$$

d. h.

$$M = e^{\int \alpha dy} \cdot X_1,$$

wo X_1 eine neue willkürliche Funktion von x allein bedeutet. So kann man fortfahren, indem man immer zuerst ein m_i und dann das zugehörige M_i berechnet; es hat aber keinen Zweck, die sehr komplizierten Formeln hier mitzuteilen. Die dabei auftretenden willkürlichen Funktionen $x_1, X_1, x_2, X_2, \dots$ müssen dem jeweils vorgelegten speziellen Problem entsprechend gewählt werden; ihre Bestimmung erläutert Cousin an einem konkreten Fall, um sodann zur totalen Gleichung 3. Ordnung, die auf eine partielle 2. Ordnung führt, überzugehen.

Wir wenden uns im folgenden zur partiellen Gleichung 1. Ordnung und beliebigen Grades mit drei oder mehr Veränderlichen. Da die Gleichung 2. Ordnung wegen ihrer physikalischen Bedeutung anfänglich im Vordergrund des Interesses stand, so kam

es erst sehr spät zu einer eigentlichen Theorie der Gleichungen 1. Ordnung, und alles, was auf diesem Gebiet vor Lagrange geleistet wurde, verdankt weniger planmäßiger Überlegung als Kunstgriffen und geistreichen Versuchen sein Entstehen. So wird begreiflich, was im ersten Augenblick wundernehmen muß, daß lange Zeit die Gleichung 1. Ordnung nicht mehr Fortschritte machte als die Gleichungen höheren Grades: man integrierte eben, was man integrieren konnte, und da lagen einfache Gleichungen höheren Grades oft viel näher als komplizierte 1. Ordnung; allerdings sind die derart gefundenen integrablen Typen meist wenig allgemein. Als erste Abhandlung haben wir einen Aufsatz von Euler zu nennen¹⁾; die Fragestellung ist etwas kompliziert und die partielle Gleichung tritt nur nebenbei verschleiert auf. So stellt Euler die Aufgabe

$$P dx + Q dy$$

zu einem totalen Differential dV zu machen, wenn gleichzeitig die Relation

$$Px + Qy = 0$$

besteht; zur Lösung der Aufgabe schreibt er

$$dV = P dx + Q dy - Py \cdot \frac{y dx - x dy}{yy}$$

und erkennt daraus, daß V und Py Funktionen von $S = \frac{x}{y}$ sein müssen.²⁾ Ziemlich nebenbei, im Corollar I³⁾ tritt der eigentliche Charakter der Aufgabe deutlicher hervor; es ist nämlich darauf hingewiesen, daß

$$P = \left(\frac{dY}{dx} \right) \quad \text{und} \quad Q = \left(\frac{dV}{dy} \right)$$

ist. In einer Menge von Einzelbeispielen behandelt Euler sodann die allgemeinere Aufgabe, V aus

$$dV = P dx + Q dy$$

zu bestimmen, wenn P und Q durch eine beliebige Nebenbedingung, wie z. B.

$$PP + QQ = xx + yy,⁴⁾$$

verbunden sind. Der wichtigste Fall ist aber der, daß Q eine Funktion von P allein ist.⁵⁾ Ist

¹⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. IX, 1762/63 (1764), p. 170 ff.

²⁾ Diese Schlußweise ist durchaus nicht neu; vgl. Cantor III², S. 901.

³⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. IX, 1762/63 (1764), p. 176.

⁴⁾ Ebenda, p. 196.

⁵⁾ Ebenda, p. 192.



so muß, wie Euler findet,
 $dQ = R dP,$
 $x + Ry = H$

sein, wo H irgend eine Funktion von P bedeutet, und es wird

$$V = Px + Qy - \int H dP.$$

Auch Relationen zwischen V , P und Q nimmt Euler an, so

$$P = nV; \quad V = mPx + nQy;$$

endlich verlangt er, daß V eine beliebige Funktion von P und Q allein sei.¹⁾ Es ist leicht, die zugehörigen Differentialgleichungen, auf die diese Aufgaben im Grunde genommen hinauslaufen, anzugeben, wenn man nur bedenkt, daß P und Q eigentlich partielle Differentialquotienten sind; nur die Fassung der Aufgaben ist für uns ein wenig fremdartig: Euler faßt, wenn wir den Unterschied noch einmal auseinandersetzen sollen,

$$dV = P dx + Q dy$$

als Ausgangsgleichung und die partielle Gleichung als Nebenbedingung, während wir gerade umgekehrt letztere als Hauptproblem, erstere als Hilfsgleichung ansehen.

Wenig systematischer und übersichtlicher sind die Bemerkungen d'Alemberts über die lineare partielle Differentialgleichung; wie Euler benützt er zur eigentlichen Integration totale Gleichungen. Die Gleichung

$$\frac{dq}{dx} + \frac{Adq}{dz} + Cq = 0,$$

wo A und C Konstante sind, verwandelt er²⁾ mittels der Substitution $q = \varepsilon^w$ in

$$\frac{dw}{dx} + \frac{Adw}{dz} + C = 0,$$

d. i., wenn

$$d\omega = a dx + \beta dz$$

gesetzt wird,

$$\alpha + A\beta + C = 0.$$

Da aber

$$a dx + \beta dz$$

mit anderen Worten

$$\beta dz - C dx - A\beta dx$$

ein totales Differential, nämlich $d\omega$, sein soll, muß

¹⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. IX, 1762/63 (1764), bzw. p. 199, 203, 209. ²⁾ Opuscules mathématiques, t. IV (1768), p. 236.

$$\beta = \varphi(z - Ax);$$

hieraus ergeben sich unmittelbar α und ω . Die Gleichung

$$\frac{dq}{dx} + \frac{\xi dq}{dz} + \omega = 0,$$

in der ξ und ω Funktionen von x und z sind, geht vermöge

$$dz = a dx + \beta dz$$

in

$$\alpha + \xi\beta + \omega = 0$$

über, und das Problem reduziert sich auf die Aufgabe,

$$\beta dz - \xi\beta dx - \omega dx$$

zu einem vollständigen Differential zu machen. D'Alembert unterscheidet einzelne Fälle, in welchen ihm die Integration gelingt, wenn nämlich βdz oder $\xi\beta dx$ oder endlich $dz - \xi dx$ vollständige Differentiale sind. Kurz darauf untersucht er die Gleichung

$$\frac{dq}{dx} + \frac{\xi dq}{dz} + \xi q = 0,$$

die sich mittels $q = \varepsilon^v$ auf den vorigen Fall reduziert, sowie die Gleichung, die sich durch Addition einer weiteren Funktion ergibt.

Wie ungeordnet, unzusammenhängend und unübersichtlich die Kenntnisse auf dem Gebiet der Gleichung 1. Ordnung waren, zeigt der diesbezügliche Abschnitt in Eulers Integralrechnung. Trotzdem ist daselbst wenigstens ein Versuch gemacht, die verschiedenen gesammelten Resultate in eine gewisse Ordnung zu bringen und stufenweise vom Einfachen zum Schwierigeren vorzudringen. Der einfachste Fall ist der, daß die Gleichung nur eine der beiden partiellen Ableitungen enthält. Die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$$

integriert Euler dadurch, daß er das gleichwertige

$$dz = a dx + q dy$$

nach den für totale Gleichungen mit 3 Variablen geltenden Methoden behandelt. Er nimmt also zunächst y konstant an, woraus $dy = 0$ folgt, und erhält aus $dz = a dx$ die Gleichung

$$z = ax + \text{const.}$$

Indem er jetzt die Integrationskonstante als Funktion von y auffaßt, hat er das gesuchte Integral bereits gewonnen; durch Differentiation erhält er nämlich rückwärts



$$dz = a dx + dy \cdot f'(y)$$

und daraus $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, wie verlangt. Euler weist auch auf die Tatsache hin, daß die Integrabilitätsbedingung für

$$dz = a dx + q dy$$

nur dann erfüllt ist, wenn q eine Funktion von y allein ist. Nachdem er weiterhin die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = X,$$

wo X eine Funktion von x und y bzw. von x und z oder gar von allen 3 Variablen x, y, z^1) ist, genau auf dieselbe Weise in der Form

$$z = \int X dx + f(y)$$

integriert hat, wendet er sich zu Gleichungen, die beide Abgeleitet

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q,$$

aber keine der 3 Variablen x, y, z enthalten, d. i. zu den Gleichungen der abwickelbaren Flächen. $p = q$ z. B. führt auf

$$dz = p(dx + dy)$$

und bei Anwendung der Substitution $x + y = u$ auf

$$dz = p du,$$

woraus folgt, daß p eine Funktion von u allein sein muß; daraus ergibt sich endlich

$$z = f(x + y).$$

Die Gleichung

$$\alpha \left(\frac{dz}{dx}\right) + \beta \left(\frac{dz}{dy}\right) = \gamma$$

behandelt Euler der vorigen analog durch Einführung von

$$\beta x - \alpha y = u.$$

Partielle Integration zieht er in dem Beispiel $pq = 1$ heran²⁾;

$$dz = p dx + q dy$$

gibt nämlich

$$z = px + qy - \int (x dp + y dq)$$

(vgl. S. 1013) und damit

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, bzw. p. 41, 55, 58. ²⁾ Ebenda, p. 74.

$$dz = px + \frac{y}{p} - \int \left(x dp - \frac{y}{p^2} dp \right).$$

Hier muß notwendig

$$x - \frac{y}{p^2} = f'(p),$$

d. h. eine Funktion von p allein sein; das Integral — „solutio generalis“, wie Euler hier, oder „completa“, wie er bald darauf sagt — besteht dann aus den zwei Gleichungen

$$x = \frac{y}{p^2} + f'(p) \quad \text{und} \quad z = \frac{2y}{p} + p f'(p) - f(p),$$

zwischen denen man sich p eliminiert denken muß. Von den hierher gehörigen Gleichungen sei noch

$$pp + qq = 1$$

erwähnt, sowie der Fall, daß q eine beliebige Funktion von p ist. Enthält die gegebene Differentialgleichung außer p und q noch die Variablen x, y und z , so unterscheidet Euler wieder verschiedene Typen. Für die Behandlung der Gleichung $P = Q$, wo P eine Funktion von p und x , Q eine solche von q und y ist, gibt er folgende Regel¹⁾: Man setze $P = v$ und demzufolge auch $Q = v$, berechne p als Funktion von x und v , q als Funktion von y und v , bilde ferner bei konstantem v die Integrale

$$\int p dx = R \quad \text{und} \quad \int q dy = S.$$

Diese Integrale liefern aber²⁾ rückwärts, wenn man jetzt auch v als variabel ansieht, die Gleichungen

$$dR = p dx + V dv \quad \text{und} \quad dS = q dy + U dv;$$

damit aber dann

$$dz = dR + dS - dv(V + U)$$

integrabel werde, muß

$$V + U = f'(v),$$

welch letztere Gleichung mit

$$z = R + S - f(v)$$

zusammen das gewünschte Integral darstellt. Das Verfahren beruht im Prinzip auf der Variation der Konstanten. Den ganz allgemeinen Fall

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 130.



einer beliebigen Gleichung zwischen p, q, x, y und z erwähnt Euler zwar¹⁾, weiß ihn aber natürlich nur in speziellen Fällen zu behandeln. Um sich einen Begriff zu machen, wie er sich in solchen Einzelfällen zu helfen weiß, sei seine Integration²⁾ von

$$Z = pP + qQ$$

kurz skizziert, wo Z eine Funktion von z allein ist, P und Q Funktionen von x und y bedeuten. Ein Multiplikatorensystem L, M, N liefert hier

$$Ldz = Lpdx + Lqdy; \quad MZdx = MpPdx + MqQdx; \\ NZdy = NpPdy + NqQdy;$$

durch Addition folgt

$$Ldz + Z(Mdx + Ndy) = p(L + MP)dx + NPdy \\ + q(L + NQ)dy + MQdx).$$

Euler verlangt jetzt das Bestehen der Proportion

$$L + MP : NP = MQ : L + NQ,$$

d. h.

$$L = -MP - NQ,$$

und erhält so die Gleichung

$$-dz(MP + NQ) + Z(Mdx + Ndy) = (Mq - Np)(Qdx - Pdy).$$

Ein neuer Multiplikator R , der $Qdx - Pdy$ integrabel macht, habe die Gleichung

$$R(Qdx - Pdy) = dU$$

zur Folge; ferner sei $\frac{Mdx + Ndy}{MP + NQ}$ ebenfalls integrabel $= dV$, was durch geeignete Wahl von M und N immer erreicht werden kann. Durch Einführung der Größen U und V in die umgeformte Differentialgleichung ergibt sich endlich

$$(MP + NQ)(-dz + ZdV) = \frac{Mq - Np}{R} \cdot dU,$$

woraus ersichtlich wird, daß $\frac{Np - Mq}{RZ(MP + NQ)}$ eine Funktion von U allein sein muß. Diese Einsicht führt unmittelbar zu dem gesuchten Integral

$$\int \frac{dz}{Z} = V + f(U).$$

Aus den angeführten Beispielen geht hervor, wie Euler nach Bedarf

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 142. ²⁾ Ebenda, p. 168.

die verschiedensten Hilfsmittel als Substitutionen, teilweise Integrationen, Multiplikatoren zur Lösung heranzieht und durch die uneinheitliche Behandlungsweise, die ihm selbstverständlich in keiner Weise zum Vorwurf gemacht werden kann, nicht einmal den Gedanken an die Möglichkeit einer allgemeinen Integrationstheorie aufkommen läßt; das unausgesprochene Grundprinzip, das — abgesehen von den ersten Beispielen, die nach der für totale Gleichungen dreier Variablen üblichen Methode gelöst sind — bei allen seinen Aufgaben zur Anwendung kommt, besteht darin, daß er die partielle Gleichung zunächst in eine totale verwandelt, in dieser durch geschickte, dem gegebenen Fall angepaßte Umformung einen größtmöglichen integren additiven Teil absondert, und endlich aus dem Umstand, daß ja auch der übrige Teil der Gleichung ein exaktes Differential sein muß, Nutzen zu ziehen sucht.

Euler behandelt auch die Gleichung 1. Ordnung mit 4 Variablen. Sei v die abhängige, x, y, z seien die unabhängigen Veränderlichen,

$$dv = pdx + qdy + rdz.$$

Dann geht z. B. die Gleichung

$$\alpha p + \beta q + \gamma r = 0^1)$$

über in

$$\gamma dv = p(\gamma dx - \alpha dz) + q(\gamma dy - \beta dz),$$

und daraus wird mittels der Substitutionen

$$\gamma x - \alpha z = t \quad \text{und} \quad \gamma y - \beta z = u$$

die Gleichung

$$\gamma dv = p dt + q du.$$

Euler folgert

$$v = \Gamma(t \& u) = \Gamma(\gamma x - \alpha z \& \gamma y - \beta z)$$

oder auch

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} \& \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}\right).$$

Im folgenden behandelt er u. a. die Gleichungen

$$px + qy + rz = nv + S,$$

wo S eine Funktion von x, y, z ist, und

$$pL + qM + rN = 0,$$

wo L, M, N Funktionen von x bzw. y bzw. z allein sind. Von Gleichungen höheren Grades seien

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 423.



$$pqr = 1 \quad \text{und} \quad pqr = \frac{v^2}{xyz}$$

erwähnt¹⁾ (vgl. auch S. 552); auf ihre Integration kann hier nicht eingegangen werden. Euler macht sodann die besondere Annahme, daß sich v , d. i. eine Funktion der 3 Variablen x, y, z , auch als Funktion zweier Variablen von der speziellen Form $t = \alpha x + \beta z$ und $u = \gamma y + \delta z$ auffassen lasse, und drückt die Ableitungen von v nach x, y, z durch diejenigen nach t und u aus. Unter der Voraussetzung, daß die homogene Gleichung (vgl. S. 1025)

$$A \left(\frac{dv}{dx} \right) + B \left(\frac{dv}{dy} \right) + C \left(\frac{dv}{dz} \right) = 0,$$

wo A, B, C Konstante sind, in die geschilderte Kategorie gehöre, kommt durch Anwendung der beschriebenen Transformation die Gleichung

$$\left(\frac{dv}{dt} \right) (A\alpha + C\beta) + \left(\frac{dv}{du} \right) (B\gamma + C\delta) = 0,$$

welche vermöge $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{A}{C}$ und $\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{B}{C}$ zur Identität wird.

Der Zeit etwas vorgehend gehen wir hier auf die Methode von Laplace für die partielle Gleichung 1. Ordnung ein, um dann die Lagrangeschen Arbeiten auf diesem Gebiet im Zusammenhang bringen zu können. Zu Beginn seiner berühmten Abhandlung über die Gleichung 2. Ordnung kommt Laplace auch auf die Gleichung

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \alpha \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) + V$$

zu sprechen²⁾, wo α eine Funktion von x und y , V eine solche von x, y und z ist, und stellt sich ausdrücklich die Aufgabe, sie auf totale Gleichungen zurückzuführen. Durch Einführung einer neuen Variablen u , die eine noch zu bestimmende Funktion von x und y sein soll, erhält er, indem er z einmal als Funktion von x und y , das andere Mal als Funktion von x und u auffaßt:

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \partial x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \partial y,$$

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \partial x + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \partial u,$$

$$\partial u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \partial y.$$

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, bzw. p. 428, 432, 435, 440

²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1773 (1777), p. 344.

Führt man die dritte dieser Gleichungen in die zweite ein, so erhält man durch Vergleichung mit der ersten

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^I + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Demnach geht die vorgelegte Differentialgleichung über in

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^I + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + V.$$

Da u noch unbestimmt ist so kann man trennen in

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^I + V.$$

Die letzte Gleichung reduziert sich, wenn aus der vorletzten y als Funktion von x und u bekannt ist, auf eine totale Gleichung (weil man u während der Integration als konstant ansehen kann). Die vorletzte Gleichung führt, wie Laplace sich ausdrückt, durch Kombination mit $\partial u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \partial y$ auf die Integration von

$$\partial y - \alpha \partial x = 0.$$

Um das Argument der willkürlichen Funktion der Integralgleichung zu erhalten, braucht man, wie Laplace angibt, nur das Integral der letzten Gleichung nach der Integrationskonstanten aufzulösen. Laplace hat also im Grunde genau dieselben totalen Gleichungen wie Lagrange, denn die zwei Gleichungen

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^I + V \quad \text{und} \quad \partial y - \alpha \partial x = 0$$

sind, abgesehen von dem für die Integration unschädlichen Parameter u , nichts als die bekannten Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{\alpha} = -\frac{\partial z}{V}$$

in etwas anderer Form — und das ist nicht verwunderlich, da in letzter Linie alle Integrationsmethoden auf dieses charakteristische System zurückkommen werden; aber die klare, elegante, die Bedeutung jenes Vereins von Gleichungen viel schärfer betonende Darstellung von Lagrange zeigt deutlich, daß sich Lagrange seines Fortschritts, der die endgültige Erledigung der in Frage stehenden Gleichung bedeutet, vollkommen bewußt war; auch ist bei Lagrange von der Beschränkung des α Abstand genommen. Was das Entstehen der Laplaceschen Methode anlangt, so weist sie deutlich auf die Eulersche Behandlung partieller Differentialgleichungen durch Ein-



führung neuer Variabler hin (vgl. S. 994); für die Gleichung 2. Ordnung, die Laplace in dem nämlichen Aufsatz behandelt, gibt er selbst Eulers Integralrechnung als Quelle an.

Von den Lagrangeschen Abhandlungen ist zuerst ein größerer Aufsatz in den Memoiren der Berliner Akademie von 1772 zu nennen¹⁾, welcher der partiellen Gleichung 1. Ordnung beliebigen Grades gewidmet ist. Sei u eine Funktion von x und y allein, $p = \frac{du}{dx}$ und $q = \frac{du}{dy}$, wobei die partielle Differentiation nicht besonders angedeutet wird. Die Integration einer Gleichung beliebigen Grades zwischen u, x, y, p und q bedeutet dann nichts anderes als die Aufsuchung einer Gleichung zwischen u, x und y allein. Die gegebene Differentialgleichung gestattet nun, wie Lagrange sagt, etwa q durch u, x, y, p auszudrücken; „die Größe p ist hierbei noch unbestimmt, und die ganze Frage reduziert sich darauf, p derart zu bestimmen, daß die Gleichung $du = p dx + q dy$ oder vielmehr $du - p dx - q dy = 0$ integrierbar wird.“ Lagrange verlangt also, daß $M(du - p dx - q dy)$ das totale Differential einer Funktion N von u, x und y wird. Das ergibt sofort die drei Gleichungen

$$\frac{dN}{du} = M; \quad \frac{dN}{dx} = -Mp; \quad \frac{dN}{dy} = -Mq,$$

welche sich durch folgende drei ersetzen lassen

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{d(Mp)}{du}; \quad \frac{dM}{dy} = -\frac{d(Mq)}{du}; \quad -\frac{d(Mp)}{dy} = -\frac{d(Mq)}{dx}.$$

Die letzte Gleichung läßt sich aber auch in der Form

$$M \left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} \right) + p \frac{dM}{dy} - q \frac{dM}{dx} = 0$$

schreiben, woraus durch Einführung der beiden ersteren Gleichungen

$$M \left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} \right) - p \frac{d(Mq)}{du} + q \frac{d(Mp)}{du} = 0$$

kommt. Daraus folgt endlich

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - p \frac{dq}{du} + q \frac{dp}{du} = 0.$$

Diese Gleichung, von der Lagrange noch eine zweite Herleitung gibt, ist nichts anderes als die Integrabilitätsbedingung für die totale Gleichung

$$du - p dx - q dy = 0$$

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. III, p. 519. Die Lagrangeschen Arbeiten sind übersetzt in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften.

mit den drei Variablen u, x und y und ist als solche längst bekannt, wie Lagrange selbst mit den Worten „connue depuis longtemps“ zugibt; vollkommen neu ist indessen die Anwendung, die Lagrange von ihr macht. Er denkt sich nämlich mit Hilfe der gegebenen Differentialgleichung q (oder p) durch x, y, u und p ausgedrückt und in die genannte Integrabilitätsbedingung eingesetzt; diese definiert dann p als Funktion von u, x und y . Scheinbar ist damit wenig erreicht, denn die neue Gleichung hat vier Variable u, x, y und p ; bedenkt man aber, daß die Gleichung linear ist, daß ferner eine partikuläre Lösung, wenn sie nur eine willkürliche Konstante enthält, die „solution générale et complète“ der ursprünglichen Differentialgleichung liefert, so läßt sich schon ersehen, welche Bedeutung sie unter Umständen erlangen kann. Um letztere Behauptung zu erweisen, verwendet Lagrange einen auf der Variation der Konstanten beruhenden Gedankengang. Sei α die Integrationskonstante, welche, wie verlangt, in die partikuläre Lösung für p eingeht. Es ist dann

$$\text{est.} = \int M(du - p dx - q dy) = N$$

das Integral der Gleichung

$$du - p dx - q dy = 0;$$

N ist eine Funktion von u, x, y und α . Läßt man jetzt α variieren, so ist

$$N = \int M(du - p dx - q dy) + \int \frac{dN}{d\alpha} d\alpha;$$

da aber der Ausdruck unter dem ersten Integralzeichen ein vollständiges Differential ist, so muß auch, wie Lagrange folgert, $\frac{dN}{d\alpha} \cdot d\alpha$ ein solches sein, d. h. es muß $\frac{dN}{d\alpha}$ eine Funktion $f'(\alpha)$ von α allein sein. Somit erhält Lagrange die beiden Gleichungen

$$N - f(\alpha) = \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{dN}{d\alpha} = f'(\alpha)$$

mit der willkürlichen Funktion f , zwischen denen man sich α eliminiert denken muß; N bedeutet hierbei den durch Integration von

$$M(du - p dx - q dy)$$

bei konstantem α erhaltenen Ausdruck in u, x, y und α . Hier sei bemerkt, daß Lagranges Gedankengang nicht völlig unvorbereitet war. Wie schon gezeigt, führt Euler die Lösung von $\left(\frac{dx}{dx}\right) = a$ und einigen ähnlichen Problemen auf die Integration einer totalen Diffe-



rentialgleichung mit drei Variablen zurück, und es ist wohl nur die Einfachheit dieser Beispiele daran schuld, daß er die Integrabilitätsbedingung dieser Gleichung nicht stärker betont und mit zur Integration heranzieht (vgl. S. 960 oben); in seinem Aufsatz von 1762 formuliert er das Problem der Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung als die Aufgabe, $Pdx + Qdy$ zu einem totalen Differential zu machen, wenn zwischen P und Q eine Nebenbedingung besteht (vgl. S. 957), während Lagrange dasselbe von $du - pdx - qdy$ fordert; der Gedanke, die Integrationskonstante einer gegebenen Gleichung variieren zu lassen, findet sich endlich auch schon bei Euler (vgl. S. 959 unten). Von den Beispielen, an denen Lagrange seine Methode erörtert, sei nur eines mitgeteilt: Für $q = P$, wo P eine Funktion von p allein, erhält man als Integrabilitätsbedingung

$$\frac{dp}{dy} - P' \frac{dp}{dx} - P' p \frac{dp}{du} + P \frac{dp}{du} = 0.$$

Man findet leicht $p = \alpha$, d. h. $q = A$ und demnach

$$du - \alpha dx - A dy = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$N = u - \alpha x - Ay; \quad \frac{dN}{d\alpha} = -x - A'y - f(\alpha);$$

daraus ist α zu berechnen und in

$$u - \alpha x - Ay - f(\alpha) = 0$$

einzusetzen. In dieser Weise zählt Lagrange noch eine ganze Reihe, im ganzen neun, Fälle auf, in welchen man mit der erwähnten linearen Hilfsgleichung zum Ziele kommt; darunter befindet sich z. B. der Fall, daß die gegebene Differentialgleichung eine der beiden Variablen x oder y nicht enthält. Die erwähnte partielle Gleichung mit vier Variablen benutzt er hierbei lediglich als Hilfsgleichung, die unter Umständen, also etwa in den erwähnten neun Fällen, mit Erfolg benutzt werden kann; daß durch sie allgemein die Integration der Gleichung beliebigen Grades auf den linearen Typus zurückzuführen ist, vermag er nicht einzusehen¹⁾, und daran ist wohl die große Allgemeinheit dieser Idee schuld. Dafür weiß er aber seine Methode, aus einer Partikulärlösung („intégrales particulières“) das „intégrales complète“ herzustellen, ihrer vollen Bedeutung nach zu würdigen, indem er sie als ein besonderes „Prinzip“ hinstellt.²⁾ Endlich zeigt er,

¹⁾ In seiner Abhandlung von 1785 (vgl. unten) gesteht er selbst zu, die allgemeine Gleichung höheren Grades nicht lösen zu können. ²⁾ Oeuvres de Lagrange, t. III, p. 571.

daß statt eines partikulären Wertes von p oder q ein solcher von u mit zwei willkürlichen Konstanten und allgemein für den Fall, daß u eine Funktion der n Variablen x, y, z, \dots ist, ein partikulärer Wert von u mit n Konstanten genau dieselben Dienste leistet.¹⁾ Diese Bemerkung ist sehr wichtig; Lagrange zeigt damit den Zusammenhang zwischen vollständigem und allgemeinem Integral einer partiellen Gleichung; dabei ist beachtenswert, daß er in dieser Abhandlung den Wert von u mit n Konstanten noch nicht als vollständiges Integral, sondern nur als partikuläre Lösung ansieht.

In seiner großen Abhandlung über die singulären Integrale vom Jahre 1774 geht Lagrange, nachdem er den Zusammenhang von vollständigem, singulärem und allgemeinem Integral ausführlich dargelegt, wieder auf die Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung und beliebigen Grades ein und zwar gibt er Integrationsmethoden für verschiedene ausgezeichnete Gleichungstypen. Ist z. B. eine Gleichung der Form

$$f\left(\frac{dz}{dx}, x\right) = F\left(\frac{dz}{dx}, y\right)$$

vorgelegt²⁾, so setzt er³⁾ genau wie Euler, der diese Gleichung auch schon behandelt hat (vgl. S. 961), $f\left(\frac{dz}{dx}, x\right)$ gleich einer Konstanten a , berechnet aus dieser Gleichung $\frac{dz}{dx}$ als Funktion von x und a und integriert endlich bei konstantem a . So ergibt sich

$$z = X + \mathcal{P},$$

wo X eine Funktion von x und a , \mathcal{P} eine solche von y und a ist; ganz analog führt

$$a = F\left(\frac{dz}{y}, y\right)$$

auf eine Gleichung

$$z = Y + \mathcal{Z},$$

wo Y eine Funktion von y und a , \mathcal{Z} eine von x und a bedeutet. Da aber bis auf eine additive Konstante $\mathcal{P} = Y$ und $\mathcal{Z} = X$ sein muß, so ergibt sich

$$z = X + Y + b.$$

Letztere Gleichung ist, weil sie die zwei Konstanten a und b enthält, als das vollständige Integral der gegebenen Gleichung anzusehen. Die Gleichung

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. III, p. 572. ²⁾ Schon 1772, ebenda, p. 561. ³⁾ Ebenda, t. IV, p. 80.



$$f\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, z\right) = 0$$

führt mit Hilfe der Substitutionen $Z = \frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy} = \alpha Z$ auf

$$x + \alpha y = \int \frac{dz}{Z} + b,$$

wobei Z aus

$$f(Z, \alpha Z, z) = 0$$

als Funktion von z und α berechnet werden muß. Von größter Wichtigkeit ist das folgende Beispiel¹⁾, nämlich die auch von Laplace behandelte Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = V \frac{dz}{dy} + Z,$$

wo V eine Funktion von x und y , Z eine solche von x, y und z ist. Lagrange multipliziert mit dx , addiert beiderseits $\frac{dz}{dy} dy$, erhält dadurch

$$dz = (Vdx + dy) \frac{dz}{dy} + Zdx$$

und setzt, gewissermaßen versuchsweise,

$$Vdx + dy = 0.$$

Integriert man diese Gleichung, wobei die Integrationskonstante α auftritt, und differenziert wieder, indem man jetzt α als variabel ansieht, so ergibt sich eine Gleichung

$$Vdx + dy = A d\alpha,$$

wo A eine bekannte Funktion von x, y und α ist. Mit Benutzung dieses Wertes ergibt sich aber

$$dz = A \frac{dz}{dy} d\alpha + Zdx.$$

Lagrange verlangt nun, daß man y durch x und α darstelle und den betreffenden Ausdruck in die letzterwähnte Gleichung einsetze; diese reduziert sich dann bei konstantem α auf die totale Gleichung

$$dz = Z d\alpha.$$

Die Integrationskonstante dieser Gleichung, fährt Lagrange fort,

¹⁾ Ebenfalls schon 1772 behandelt, doch sind die der partiellen Gleichung entsprechenden totalen noch nicht erkennbar. Vgl. Oeuvres de Lagrange, t. III, p. 562.

fasse man als willkürliche Funktion von α auf, und hat somit, da bereits α als Funktion von x und y durch das Integral von

$$Vdx + dy = 0$$

bestimmt ist, ohne weiteres das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung. Hier sind also die beiden totalen Gleichungen

$$Vdx + dy = 0 \quad \text{und} \quad z = Z d\alpha$$

wirklich angeschrieben, wenn auch noch nicht in ihrer vollen Bedeutung erkannt. Lagrange sagt aber nicht, die Gleichung

$$dz = (Vdx + dy) \frac{dz}{dy} + Zdx$$

ist jedenfalls erfüllt, wenn gleichzeitig

$$Vdx + dy = 0 \quad \text{und} \quad z = Z d\alpha;$$

sein Gedankengang beruht vielmehr eher auf der Idee der Variation der Konstanten, deren Anwendung hier, in einer Abhandlung über singuläre Integrale, wo fortwährend Differentiationen nach Integrationskonstanten auftreten, besonders nahe lag, oder, wenn man will, auf der Einführung einer neuen Variablen α , die durch die Gleichung

$$Vdx + dy = 0$$

definiert wird. In ganz ähnlicher Weise behandelt Lagrange sodann die Gleichungen

$$x - Vy + Z,$$

wo V eine Funktion von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, Z eine solche von $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ und $z - x \frac{dz}{dx} - y \frac{dz}{dy}$ ist, und

$$\frac{dz}{dy} = Vy + Z,$$

wo V eine Funktion von x und $\frac{dz}{dy}$, Z eine solche von $x, \frac{dz}{dy}$ und $z - y \frac{dz}{dy}$ ist. Es ist noch darauf hinzuweisen, daß Lagrange der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = V \frac{dz}{dy} + Z$$

unter den angeführten Beispielen keine ausgezeichnete Rolle zuerkennt, sondern sie einfach als einen integrierbaren Fall unter anderen integrierbaren Fällen ansieht. Zur Beschäftigung mit diesen Beispielen gaben wahrscheinlich folgende Umstände die Veranlassung: Lagrange



suchte das singuläre Integral einer partiellen Differentialgleichung aus der Integralgleichung abzuleiten, fand, daß dies leichter ist, wenn nicht das allgemeine, sondern das bereits früher von ihm entdeckte, mittlerweile auch in seiner Bedeutung erkannte vollständige Integral gegeben ist, und suchte demgemäß das vollständige Integral für verschiedene Gleichungstypen zu bilden; dem ist nicht entgegen, daß er in dem speziellen Beispiel

$$\frac{dz}{dx} = V \frac{dz}{dy} + Z$$

gerade auf das allgemeine Integral geführt wird.

Mittlerweile fällt Lagrange auf, daß er in der eben besprochenen Abhandlung die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, in der die Differentialquotienten nur linear auftreten, integriert hat; er erkennt das Prinzipielle der Methode und gibt 1779 eine Verallgemeinerung derselben. Wie Laplace formuliert er¹⁾ vorher die Aufgabe: „Man weiß, daß die Kunst der Integration bei partiellen Differentialgleichungen nur in der Zurückführung dieser Integration auf die von gewöhnlichen Differentialgleichungen besteht, und daß man eine partielle Differentialgleichung dann als integriert betrachtet, wenn ihre Integration nur mehr von derjenigen einer oder mehrerer totalen Differentialgleichungen abhängt.“ Lagrange gibt sodann ohne weitere Begründung folgende Regel: Ist

$$\frac{dz}{dx} + P \frac{dz}{dy} + Q \frac{dz}{dt} + \dots = Z,$$

wo P, Q, \dots, Z beliebige gegebene Funktionen von x, y, t, \dots, z sind und z selbst eine unbekannte Funktion von x, y, t, \dots ist, so bilde man die „équations particulières“

$$dy - P dx = 0; \quad dt - Q dx = 0; \quad \dots; \quad dz - Z dx = 0,$$

integriere und löse nach den Integrationskonstanten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ auf. Das gesuchte Integral der ursprünglichen Gleichung ist dann

$$\alpha = \varphi(\beta, \gamma, \dots),$$

wo φ eine willkürliche und unbestimmte Funktion ist; das Integral wird „complète“²⁾ sein, weil es eine willkürliche Funktion enthält.

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 625. Im Anschluß an diesen Aufsatz steht eine Bemerkung von Charles für den Fall, daß die gegebene Differentialgleichung in den drei Variablen x, y, z homogen ist: Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 348. ²⁾ So schreibt Lagrange, obwohl er früher zwischen allgemeinem und vollständigem Integral unterschieden hat.

Einen Beweis gibt Lagrange nicht an, sondern verweist einfach auf seine Integration der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = V \frac{dz}{dy} + Z.$$

Erst im Jahre 1785 kommt Lagrange wieder auf die lineare Gleichung zurück, um einen Beweis für seine Methode zu geben.¹⁾ Für den Fall von drei Variablen u, x, y sei wie herkömmlich

$$\frac{du}{dx} = p \quad \text{und} \quad \frac{du}{dy} = q$$

gesetzt; die gegebene Differentialgleichung sei

$$Xp + Yq = U,$$

wo X, Y, U beliebige Funktionen von u, x und y sind. Es ist dann von selbst

$$du = p dx + q dy.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen folgt

$$(Xp + Yq) du = U(p dx + q dy)$$

oder

$$p(X du - U dx) + q(Y du - U dy) = 0.$$

Lagrange nimmt nun an, die beiden Gleichungen

$$X du - U dx = 0 \quad \text{und} \quad Y du - U dy = 0$$

seien in der Form integriert

$$\alpha = A, \quad \beta = B,$$

wo A und B bekannte Funktionen von u, x und y , ferner α, β die Integrationskonstanten sind. Lagrange führt jetzt statt x und y die eben bestimmten Ausdrücke A und B als neue Variable α und β in die ursprüngliche Differentialgleichung ein. Er erhält zunächst

$$d\alpha = \frac{dA}{du} du + \frac{dA}{dx} dx + \frac{dA}{dy} dy$$

und ganz analog

$$d\beta = \frac{dB}{du} du + \frac{dB}{dx} dx + \frac{dB}{dy} dy.$$

Für die hierin auftretenden Derivierten von A und B lassen sich aber zwei bemerkenswerte Relationen aufstellen. Betrachtet man nämlich die Funktionen A und B als Integrale von

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. V, p. 543 ff.



$$Xdu - Udx = 0 \quad \text{und} \quad Ydu - Udy = 0,$$

sind also A und B konstant, so ist

$$\frac{dA}{du} du + \frac{dA}{dx} dx + \frac{dA}{dy} dy = 0$$

und ebenso

$$\frac{dB}{du} du + \frac{dB}{dx} dx + \frac{dB}{dy} dy = 0,$$

d. h. es müssen die Gleichungen

$$\frac{dA}{du} + \frac{dA}{dx} \frac{X}{U} + \frac{dA}{dy} \frac{Y}{U} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dB}{du} + \frac{dB}{dx} \frac{X}{U} + \frac{dB}{dy} \frac{Y}{U} = 0$$

identisch bestehen, also auch wenn man A und B nicht mehr als Integrale, d. i. als Konstante, sondern als neue Variable auffaßt. Aus den letztangeführten Gleichungen kann man aber sofort $\frac{dA}{du}$ und $\frac{dB}{du}$ berechnen; mit Hilfe der so erhaltenen Ausdrücke lassen sich dann die Differentiale der Variablen α und β in der Form schreiben:

$$d\alpha = \frac{1}{U} \frac{dA}{dx} (Udx - Xdu) + \frac{1}{U} \frac{dA}{dy} (Udy - Ydu);$$

$$d\beta = \frac{1}{U} \frac{dB}{dx} (Udx - Xdu) + \frac{1}{U} \frac{dB}{dy} (Udy - Ydu);$$

daraus ergibt sich

$$Xdu - Udx = \frac{U}{T} \left(\frac{dB}{dy} d\alpha - \frac{dA}{dy} d\beta \right);$$

$$Ydu - Udy = \frac{U}{T} \left(\frac{dA}{dx} d\beta - \frac{dB}{dx} d\alpha \right),$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{dA}{dy} \frac{dB}{dx} - \frac{dB}{dy} \frac{dA}{dx} = T$$

gesetzt ist.

Lagrange führt jetzt diese Ausdrücke in die der gegebenen äquivalente totale Differentialgleichung

$$p(Xdu - Udx) + q(Ydu - Udy) = 0$$

ein und erhält dadurch

$$d\alpha + \frac{q}{p} \frac{dA}{dx} - \frac{p}{q} \frac{dA}{dy} d\beta = 0,$$

wobei der Faktor T , der, gleich Null gesetzt, unter Umständen auch eine Lösung liefert, stillschweigend fortgelassen ist. Da diese Differentialgleichung, fährt Lagrange fort, nur die beiden Differentiale

$d\alpha$ und $d\beta$ enthält, so kann sie nur in der Art bestehen, daß der Koeffizient von $d\beta$, wenn man für x und y ihre Werte in α , β und u einsetzt, wie sie sich aus $A = \alpha$, $B = \beta$ ergeben, eine Funktion von α und β allein ist, d. h. es muß nach ausgeführter Substitution u von selbst herausfallen. Setzt man also diesen Koeffizienten gleich einer beliebigen Funktion $f(\alpha, \beta)$, so geht die Differentialgleichung in die neue über

$$d\alpha + f(\alpha, \beta) d\beta = 0,$$

die sich immer in der Form

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

integrieren läßt. Ersetzt man endlich, sagt Lagrange, die Hilfsvariablen α und β wieder durch ihre Werte in x , y und u , so ergibt sich das Integral

$$F(A, B) = 0,$$

und F wird eine beliebige Funktion sein, da f eine solche ist. Lagrange führt den analogen Beweis noch für den Fall von vier Veränderlichen und weist darauf hin, daß er für noch mehr Variable in ähnlicher Weise erledigt werden kann. Lagrange betrachtet sodann¹⁾ den speziellen Fall

$$X \frac{du}{dx} + Y \frac{du}{dy} + Z \frac{du}{dz} + \dots = S + Tu,$$

wo X, Y, Z, \dots Funktionen der unabhängigen Variablen x, y, z, \dots allein, S und T von allen Variablen außer u sind. Das System

$$Xdu - (S + Tu)dx = 0; \quad Ydu - (S + Tu)dy = 0;$$

$$Zdu - (S + Tu)dz = 0; \dots$$

liefert dann

$$Ydx - Xdy = 0; \quad Zdx - Xdz = 0; \dots$$

d. h. Gleichungen, in welchen u nicht mehr vorkommt. Hieraus erhält man die y, z, \dots durch x und die willkürlichen Konstanten β, γ, \dots ausgedrückt. Endlich ist

$$u \cdot e^{-\int \frac{Tdx}{x}} = \int \frac{e^{-\int \frac{Tdx}{x}} S dx}{X} + \alpha,$$

so daß man nach Substitution der eben berechneten Ausdrücke für y, z, \dots auch u durch x ausgedrückt erhält.

An die Abhandlungen von Lagrange aus den Jahren 1772 und

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. V, p. 554.



1774 über die nichtlineare Gleichung 1. Ordnung knüpft Legendre an¹⁾; wichtiger erscheint hier der Hinweis auf eine Arbeit von Charpit über denselben Gegenstand, in der die zwei Methoden von Lagrange in glücklicher Weise vereinigt sind; Charpits Untersuchungen, der Akademie im Jahre 1784 überreicht, kamen nicht in den Druck; alle Nachrichten über ihn und seine Methode verdanken wir der Darstellung bei Lacroix.²⁾ „La mort“, heißt es da, „enleva ce jeune homme au moment où ses talens donnaient de grandes espérances.“ Die Integrabilitätsbedingung für die totale Gleichung dreier Variablen

$$dz = p dx + q dy$$

ist, wie wir uns erinnern,

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + q \frac{dp}{dz} - p \frac{dq}{dz} = 0,$$

wo p und q als Funktionen von x, y und z gedacht sind. Ist nun eine Relation $Z = 0$ zwischen den fünf Größen x, y, z, p und q gegeben, so kann man mit ihrer Hilfe p oder q in die Integrabilitätsbedingung einsetzen und hat damit eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung mit vier Variablen gewonnen (vgl. S. 966 ff.). Man erhält nämlich durch Differentiation

$$dZ = A dx + B dy + C dz + D dp + E dq = 0$$

und daraus

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{B + E \frac{dq}{dy}}{D} \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{C + E \frac{dq}{dz}}{D}.$$

Führt man diese Werte in die Integrabilitätsbedingung ein, so ergibt sich

$$D \frac{dq}{dx} + E \frac{dq}{dy} + (Eq + Dp) \frac{dq}{dz} + B + Cq = 0,$$

d. i. die gesuchte lineare Gleichung, wenn man noch p mittels $Z = 0$ eliminiert denkt. Auf diese Gleichung wendet jetzt Charpit die Lagrangesche Methode für lineare Gleichungen an (vgl. S. 972) und erhält dadurch unmittelbar

$$D dy - E dx = 0; \quad D dz - (Eq + Dp) dx = 0;$$

$$D dq + (B + Cq) dx = 0,$$

wo p durch seinen Wert in x, y, z und q zu ersetzen ist. Wenn

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 337. ²⁾ Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 2. édit. Paris 1814, t. II, p. 548.

$T = a, U = b$ und $V = c$ die Integrale dieser drei Gleichungen sind, so ist $V = \varphi(T, U)$ das allgemeine Integral der linearen Gleichung, d. h. eine zweite Relation zwischen x, y, z, p und q , die mit $Z = 0$ zusammen derartige Werte von p und q liefert, daß die Gleichung

$$dz = p dx + q dy$$

eventuell mit Hilfe eines Multiplikators integrabel wird. Man schreibt heutzutage seit Monge¹⁾ etwas allgemeiner und übersichtlicher

$$\frac{dp}{A + Cp} = \frac{dq}{B + Cq} = \frac{dz}{Dp + Eq} = \frac{dx}{D} = \frac{dy}{E}$$

und wird so auf eine Relation zwischen x, y, z, p und q geführt, die neben $Z = 0$ besteht.

Auf die Behandlung der linearen Gleichung mit drei Variablen durch Monge, die in einfacher Weise zu den Lagrangeschen Gleichungen führt, sind wir bereits eingegangen (vgl. S. 948).

Die lineare Gleichung mit beliebig vielen Variablen behandelt Monge nach derselben Methode²⁾: Zurückführung auf totale Gleichungen mit Hilfe der Relationen, die partielle Differentialquotienten und totale Differentiale untereinander verbinden. Zunächst ist auf die Gleichung mit drei unabhängigen Variablen u, x, y und der abhängigen Veränderlichen z eingegangen; hier ist

$$dz = p du + q dx + r dy.$$

Die Differentialgleichung

$$Ap + Bq + Cr + D = 0$$

verwandelt sich dann, je nachdem man eine der Größen p, q oder r mit Hilfe des Ausdruckes für dz eliminiert, in eine der drei Gleichungen

$$Adz + Ddu = q(Adx - Bdu) + r(Ady - Cdu),$$

$$Bdz + Ddx = -p(Adx - Bdu) + r(Bdy - Cdx),$$

$$Cdz + Ddy = -p(Ady - Cdu) - q(Bdy - Cdx).$$

Diese Gleichungen dürfen die Größen p, q, r nicht bestimmen, sondern müssen unabhängig von ihnen gelten; durch Nullsetzen ihrer Koeffizienten erhält Monge sechs Gleichungen, von welchen aber nur drei wesentlich verschieden sind. Lassen sich aus diesem System oder einem daraus hergeleiteten gleichwertigen drei vollständige Integral-

¹⁾ Application de l'analyse à la géométrie, Addition p. 437. ²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1781 (1787), p. 159.



gleichungen $V = a$, $U = b$ und $W = c$ mit den Integrationskonstanten a, b, c bilden, „so drücken diese drei Integrale zusammen (simultanées) dasselbe aus wie die vorgelegte Differentialgleichung: sie bedeuten nicht, daß die Größen V, U, W jede einzeln konstant sind, sondern daß, sobald eine davon konstant ist, auch die beiden anderen es notwendig sind, oder daß diese eine von ihnen eine willkürliche Funktion der beiden anderen ist; demnach bedeutet die Gleichung

$$V = \varphi(U \& W)$$

dasselbe wie die gegebene Differentialgleichung und bildet ihr vollständiges Integral.“ Mit der Begründung: „Es ist leicht zu sehen, daß die allgemeine lineare Gleichung mit beliebig vielen Variablen sich gerade so und mit Hilfe einer ähnlichen Überlegung behandeln läßt“, gibt Monge sodann kurz die entsprechende Integrationstheorie.

Hier sei angeführt, was derselbe Autor über die nichtlineare Gleichung sagt. Die diesbezüglichen Ausführungen sind im Anschluß an die analogen Untersuchungen über totale Gleichungen höheren Grades gemacht (vgl. S. 940); Monge findet¹⁾, daß eine partielle Differentialgleichung nur dann nichtlinear sein kann, wenn 1. die willkürlichen Funktionen im Integral in verschiedenen Potenzen vorkommen, oder 2. wenn die Argumente dieser Funktionen nicht unmittelbar, sondern durch weitere Gleichungen gegeben sind, in denen sie wieder als Argumente willkürlicher Funktionen und zwar nicht alle linear auftreten. Wenn man nun, sagt Monge im folgenden, in der Integralgleichung die verschiedenen Potenzen der nämlichen Größe, durch deren Elimination die nichtlineare Differentialgleichung entsteht, als ebensoviele verschiedene Größen auffaßt und eliminiert, so wird die jetzt entstehende Differentialgleichung linear sein. Ist die Integralgleichung selbst nicht gegeben, so handelt es sich einfach darum, aus der vorgelegten Differentialgleichung höheren Grades die entsprechende lineare Differentialgleichung, die natürlich höherer Ordnung sein wird als die ursprüngliche, herzuleiten.

Sei nun die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung $W = 0$ gegeben, wo W eine Funktion von x, y, z, p und q ist. Durch Differentiation ergibt sich

$$A dp + B dq + C dx + D dy = 0,$$

wobei dz mittels $dz = p dx + q dy$ eliminiert gedacht ist. Monge nimmt nun willkürlich an, es sei etwa

$$C dx + D dy = 0;$$

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 167.

dann ist von selbst

$$A dp + B dq = 0,$$

und es ergibt sich, indem man

$$dp = r dx + s dy; \quad dq = s dx + t dy$$

setzt, durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$ die Gleichung 2. Ordnung

$$A D r + (B D - A C) s - B C t = 0.$$

Monge verlangt von dieser Gleichung, daß sie nicht alle Konstanten der Gleichung $W = 0$ enthalte, und behandelt sie nach seiner Methode für die partielle Gleichung 2. Ordnung, auf die wir noch zu sprechen kommen (vgl. S. 1009); er erhält so das Simultansystem

$$A D dy^2 - (B D - A C) dx dy - B C dx^2 = 0$$

und

$$A D dp dy - B C dq dx = 0.$$

Die erste Gleichung hat die beiden Wurzeln

$$C dx + D dy = 0 \quad \text{und} \quad A dy - B dx = 0,$$

deren erste nichts Neues gibt, deren zweite aber auf das Simultansystem

$$A dy - B dx = 0; \quad C dq - D dp = 0$$

führt; das sind aber, wenn man die Verschiedenheit der Schreibweise bedenkt, zwei der Charpitschen Gleichungen. Lassen sich davon zwei Integrale $V = \alpha$ und $U = \varphi(\alpha)$ angeben, so erhält man das „intégrale complète“ der ursprünglichen Gleichung, indem man aus ihr und den Gleichungen $V = \alpha$ und $U = \varphi(\alpha)$ die Größen p und q eliminiert. Verschwindet der Parameter α dabei nicht von selbst, so ist das Endergebnis dieser Elimination noch partiell nach α zu differenzieren; das Integral besteht dann aus zwei Gleichungen, zwischen denen man sich α eliminiert denken muß. So führt die Gleichung

$$(ap - q)^2 + ax(ap + q) + a^2z = 0$$

auf

$$ady - dx = 0; \quad adp + dq = 0;$$

aus

$$ay - x = \alpha \quad \text{und} \quad ap + q = \varphi(\alpha) = \varphi(ay - x)$$

ergibt sich dann sofort das „intégrale complète“ in der Form

$$[\varphi(ay - x)]^2 + x \cdot \varphi(ay - x) + z = 0.$$

Wichtiger ist der Fall¹⁾, daß die gegebene Gleichung sich in irgend

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 172.



einer Weise aus den drei Größen p, q und $M = z - px - qy$ zusammensetzt; dann werden nämlich die Größen C und D beide notwendig 0, das Differential der ursprünglichen Gleichung wird von der Form

$$Mdp + Ndq = 0,$$

woraus Monge $p = \varphi(q)$ folgert, und das ist, wie er ausdrücklich bemerkt, die Gleichung der abwickelbaren Flächen. Setzt man diese Gleichung in die ursprüngliche ein, faßt q als Parameter auf und differenziert nach q partiell, so hat man zwei Gleichungen, die das gesuchte Integral repräsentieren. Bei dieser Gleichung, die als allgemeine Clairautsche Gleichung aufgefaßt werden kann, ließe sich das vollständige Integral noch leichter aufstellen.

Monge bemerkt sodann¹⁾, daß die Annahme

$$Cdx + Ddy = 0$$

vollkommen willkürlich war, und daß jede andere derartige Annahme, die auf eine bekannte Differentialgleichung 2. Ordnung mit einer Konstanten weniger führt, ebenso berechtigt sei; diese Überlegung habe ihn zu den folgenden merkwürdigen Resultaten geführt: Ist

$$F(L, M, N) = 0$$

eine Differentialgleichung, wo L, M, N gegebene Funktionen von x, y, z, p, q sind mit der ganz speziellen Eigenschaft, daß aus zweien der Gleichungen

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0$$

von selbst mit Notwendigkeit die dritte folgt, so wird das Resultat der Elimination von p, q und einer der willkürlichen Funktionen aus den vier Gleichungen

$$L = \alpha; \quad M = \varphi\alpha; \quad N = \psi\alpha; \quad F(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha) = 0$$

zusammen mit der partiellen Derivierten der Eliminationsgleichung nach α das „intégrale complète“ der gegebenen Differentialgleichung bilden. Nach dieser Methode der Integration durch Berührungstransformationen²⁾, wie wir heutzutage sagen, behandelt, führt das Beispiel

$$a\left(x + \frac{hp}{k}\right) + b\left(y + \frac{hq}{k}\right) + c\left(z - \frac{h}{k}\right) = 1,$$

wo

$$k^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

auf die drei Gleichungen

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 174. ²⁾ Auf dieses Vorkommen der Berührungstransformationen hat zuerst E. v. Weber, Math. Enzyklopädie, Bd. II, S. 359, Anm. 224 aufmerksam gemacht.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + (z - \psi\alpha)^2 = h^2;$$

$$a\alpha + b\varphi\alpha + c\psi\alpha = 1;$$

$$x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'\alpha = 0;$$

da, wie verlangt, von den drei Gleichungen

$$d\left(x + \frac{hp}{k}\right) = 0; \quad d\left(y + \frac{hq}{k}\right) = 0; \quad d\left(z - \frac{h}{k}\right) = 0$$

eine die Folge der beiden anderen ist. Monge gibt wie gewöhnlich auch die geometrische Deutung der Integralgleichungen; die erste stellt eine Kugelfläche mit unbestimmtem Mittelpunkt dar, die zweite verlangt, daß dieser Mittelpunkt auf der Ebene

$$ax + by + cz = 1$$

liegt, die dritte fordert, daß die Koordinaten x, y, z sich nicht ändern, wenn α variiert; alle Gleichungen zusammen bedeuten demnach die Enveloppe einer Schar von Kugeln mit dem Radius h , deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Kurve liegen, die man in einer gegebenen Ebene gezogen hat. Nach zwei weiteren Beispielen mit denselben Größen L, M, N bringt Monge eine Verallgemeinerung seiner Methode; sind die Größen L, M, N, P, \dots derart aus x, y, z, p, q zusammengesetzt, daß aus irgend zweien der Gleichungen

$$dL = 0; \quad dM = 0; \quad dN = 0; \quad dP = 0, \dots$$

die anderen alle von selbst schon folgen, so wird eine beliebig aus den Größen L, M, N, P, \dots zusammengesetzte Differentialgleichung

$$F(L, M, N, P, \dots) = 0$$

in der Weise integriert, daß man aus den Gleichungen

$$L = \alpha; \quad M = \varphi\alpha; \quad N = \psi\alpha; \quad P = \pi\alpha, \dots$$

zunächst die Größen p und q eliminiert. Indem man jetzt aus den überbleibenden Gleichungen und aus

$$F(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha, \pi\alpha, \dots) = 0$$

alle willkürlichen Funktionen bis auf eine eliminiert, erhält man eine Gleichung $V = 0$, die nur x, y, z, α und eine willkürliche Funktion enthält; diese Gleichung bildet dann mit der durch partielle Differentiation gebildeten $\frac{dV}{d\alpha} = 0$ zusammen das gesuchte Integral. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes für beliebig viele Variable findet sich



in dem nämlichen Bande der Pariser Memoiren.¹⁾ Monge weist endlich darauf hin, daß hierbei die Funktion V auch willkürliche Funktionen enthalten darf, d. h. daß die gegebene Differentialgleichung Integral einer Gleichung höherer Ordnung sein kann.

Im folgenden²⁾ stellt Monge die äußerst wichtige Behauptung auf: Es gibt keine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, welche nicht auf die betrachtete Form zurückführbar und nicht nach der angegebenen Methode integrierbar wäre, wenn man nur einen Prozeß hätte, die Größen L, M, N, P, \dots aufzufinden; aber ihre Aufsuchung, fährt Monge fort, bringt im allgemeinen ebenso große Schwierigkeiten mit sich als die Integration der partiellen Differentialgleichungen selbst³⁾; und der Inhalt der letzten Ausführungen kann nur in sehr speziellen Fällen nützlich werden; dessenungeachtet ist die Anzahl von solchen Systemen L, M, N, P, \dots unendlich groß. Nachdem er noch zwei Beispiele von Wertetripeln L, M, N gebracht hat, stellt er sich⁴⁾ die Aufgabe, a priori ein System von drei Größen L, M, N zu finden, welche aus x, y, z, p und q zusammengesetzt, die Eigenschaft haben, „daß eine beliebige von ihnen eine Funktion der beiden anderen ist“. Man nehme, heißt es, eine beliebige Gleichung $V = 0$ zwischen x, y, z und drei Parametern, und berechne aus ihr und $\frac{dV}{dx} = 0$ und $\frac{dV}{dy} = 0$ die Werte dieser drei Parameter, so werden diese die verlangte Eigenschaft besitzen, d. h. werden die totalen Differentiale von zweien derselben gleich Null gesetzt, so wird auch dasjenige des dritten Parameters gleich Null. Monge gibt kein Beispiel⁵⁾ und auch keinen Beweis für seine Behauptung; indessen folgt, wenn wir die erwähnten Parameter L, M und N nennen, aus den drei Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial L} dL + \frac{\partial V}{\partial M} dM + \frac{\partial V}{\partial N} dN = 0;$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial V}{\partial z} = 0; \quad \frac{dV}{dy} = \frac{\partial V}{\partial y} + q \cdot \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

mit Berücksichtigung von

$$dz = p dx + q dy$$

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 557. Monge bringt als Beispiel die Verallgemeinerung eines schon von Lagrange behandelten Falles. ²⁾ Ebenda, p. 183. ³⁾ Mais cette recherche comporte en général des difficultés aussi grandes que celles du calcul intégral des équations aux différences partielles. ⁴⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 185. ⁵⁾ In dem obigen Beispiel war offenbar

$$V = (x - L)^2 + (y - M)^2 + (z - N)^2 - h^2 = 0$$

zu setzen.

unmittelbar

$$\frac{\partial V}{\partial L} dL + \frac{\partial V}{\partial M} dM + \frac{\partial V}{\partial N} dN = 0.$$

Man erkennt leicht die Definition der Berührungstransformationen wieder, wie sie Lie für den dreidimensionalen Raum beim Bestehen einer einzigen Relation zwischen ursprünglichen und transformierten Koordinaten aufstellt; nur hat Lie noch zwei weitere Ausdrücke p_1 und q_1 , die, wenn L, M, N bzw. den Variablen x, y, z entsprechen, in der Mongeschen Schreibweise durch die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial L} + p_1 \cdot \frac{\partial V}{\partial N} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial M} + q_1 \cdot \frac{\partial V}{\partial N} = 0$$

definiert wären. Doch fehlt Monge die Vorstellung, daß es sich bei seiner Methode um eine Transformation handelt; um so mehr fehlt natürlich die Kenntnis der geometrischen Eigentümlichkeit dieser Transformation, die den Namen Berührungstransformation veranlaßt hat. Monge wendet seine Theorie auch auf totale Gleichungen an und integriert mit ihr die allgemeinen Gleichungstypen

$$F[p, (y - px)] = 0 \quad \text{und} \quad F\left[\left(x - \frac{ph}{\sqrt{1+p^2}}\right), \left(y + \frac{h}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] = 0$$

Sucht man zwei Funktionen M und N von x, y und $p = \frac{dy}{dx}$ von der Art, daß aus der einen der beiden Gleichungen $dM = 0$ und $dN = 0$ auch die andere folgt, so hat man nach Monge eine Funktion V von x, y und zwei Parametern zu nehmen und aus $V = 0$ und $dV = 0$ die zwei Parameter zu berechnen. Die allgemeine Theorie ist in folgendem Theorem enthalten¹⁾: Sind n Größen M, N, P, Q, \dots gegeben, die sich aus $x, y, p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{dp}{dx}, r = \frac{dq}{dx}, \dots$ bis zu den Differentialquotienten $(n-1)$ ter Ordnung einschließlich zusammensetzen, und folgen aus einer einzigen der Gleichungen

$$dM = 0, \quad dN = 0, \quad dP = 0, \quad dQ = 0, \dots$$

alle übrigen, so wird eine totale Differentialgleichung $(n-1)$ ter Ordnung $F(M, N, P, Q, \dots) = 0$ zum endlichen und vollständigen Integral der Gleichung besitzen, die sich durch Elimination der $n-1$ Größen p, q, r, \dots und einer der willkürlichen Konstanten a, b, c, d, \dots aus den $n+1$ Gleichungen

$$M = a; \quad N = b; \quad P = c; \quad Q = d; \quad \dots; \quad F(a, b, c, d, \dots) = 0$$

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 189.



ergibt; das Resultat dieser Elimination wird eine Gleichung zwischen x , y und n willkürlichen Konstanten sein. Eine elegante Methode für partielle Gleichungen 2. Ordnung, die auf Berührungstransformationen beruht, werden wir bei Legendre (vgl. S. 1013) antreffen.

Von den partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit drei Variablen wurde zuerst die Gleichung der Saitenschwingungen behandelt. Im vorigen Bande sind bereits die Bemühungen verschiedener Mathematiker um diese Gleichung geschildert; hier ist Lagrange zu nennen, der in den Abhandlungen der Turiner Akademie der Natur und Fortpflanzung des Schalles zwei eingehende Untersuchungen widmet und an das erwähnte Problem von vornherein mit der ganz bestimmten Absicht herangeht, Eulers Auffassung von der Natur der willkürlichen Funktionen einwandfrei zu beweisen. Bei dieser Gelegenheit hat Lagrange Ausdrücke aufgestellt, welche mit den Formeln für die Koeffizienten einer Fourierschen Reihe übereinstimmen, was zu der Behauptung Veranlassung gegeben hat, Lagrange habe bereits die Theorie der Fourierschen Reihe besessen; in Wirklichkeit ist die Lagrangesche Entwicklung prinzipiell davon verschieden; man könnte sie eher als eine Formel zur Interpolation durch trigonometrische Funktionen auffassen. Lagrange geht aus von einem Simultansystem¹⁾, das wir kürzer in die Gleichung

$$\frac{d^2 y^{(i)}}{dt^2} = e^{y^{(i+1)}} - 2y^{(i)} + y^{(i-1)}$$

zusammenfassen können, wenn i von 1 bis $m-1$ läuft und $y^{(0)}$ und $y^{(m)}$ beide Null sind; diese Gleichungen stellen die Schwingungen einer endlichen Zahl von Massenpunkten dar. Die Integration wird nach der d'Alembertschen Methode für derartige Simultansysteme mit Hilfe unbestimmter Multiplikatoren bewerkstelligt, dabei gehen auch die Geschwindigkeiten in die Rechnung ein. Nach ziemlich weitläufigen Rechnungen ergibt sich endlich für die Koordinate $y^{(i)}$ des i^{ten} Massenpunktes ein komplizierter Ausdruck²⁾, der überdies von den Anfangsbedingungen abhängig ist. Aus dieser Formel erhält Lagrange³⁾, indem er die Zahl der schwingenden Punkte unendlich groß annimmt,

$$y = \frac{2}{a} \int dx Y \left(\sin \frac{\pi X}{2a} \times \sin \frac{\pi x}{2a} \times \cos \frac{\pi Ht}{2T} + \sin \frac{2\pi X}{2a} \times \sin \frac{2\pi x}{2a} \times \cos \frac{2\pi Ht}{2T} + \dots \right),$$

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. I^o (1759), p. 26. ²⁾ Ebenda, p. 44.
³⁾ Ebenda, p. 56.

wozu noch ein additives Glied tritt, das er im folgenden gleich Null setzt.

X und Y sind hierbei die Anfangskordinaten, x und y die Kordinaten zur Zeit t , a die Länge der Saite und H eine bekannte konstante Größe. Lagrange bemerkt hierzu, daß das Zeichen \int nur ein Summenzeichen sei, sagt aber fast unmittelbar darauf, daß die Integrationen bei variablen X , Y und konstanten x , t auszuführen seien. Wesentlich ist nun, daß Lagrange die Reihe unter dem Integralzeichen nicht etwa gliedweise integriert, sondern vor der Integration diese Reihe zu summieren sucht, da er für y nicht eine unendliche Reihe, sondern die schon bekannte Form mit zwei willkürlichen Funktionen erhalten will. Zu diesem Zweck wird der Ausdruck $2 \sin \frac{\pi x}{2a} \times \cos \frac{\pi Ht}{2T}$ in bekannter Weise durch die Summe zweier Sinus ersetzt; es ergibt sich:

$$y = \pm \frac{1}{2a} \int \frac{dx Y \sin \frac{\pi X}{2a} \times \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T} \right)}{\cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T} \right) - \cos \frac{\pi X}{2a}} \pm \frac{1}{2a} \int \frac{dx Y \sin \frac{\pi X}{2a} \times \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{mx}{a} - \frac{mHt}{T} \right)}{\cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T} \right) - \cos \frac{\pi X}{2a}}$$

Da m unendlich groß ist, heißt es weiter, wird, was auch x und t , sein mögen, $m \left(\frac{x}{a} \pm \frac{Ht}{T} \right)$ immer eine ganze Zahl, der Sinus davon und folglich die betreffenden Integrale Null sein. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn gleichzeitig der Nenner Null wird; den Wert von $\frac{0}{0}$ bestimmt Lagrange durch Differentiation von Zähler und Nenner und kommt schließlich zum gesuchten allgemeinen Integral. Die ganze umständliche Ableitung des bekannten Resultats hat er hauptsächlich unternommen, um zu zeigen, daß es sich ohne alle Voraussetzungen über die Natur der darin auftretenden willkürlichen Funktionen gewinnen läßt; die Schwächen seiner Methode und insbesondere des benutzten Grenzübergangs hat neben anderen d'Alembert klar gestellt¹⁾. Noch ist zu bemerken, daß Spätere aus Gehässigkeit gegen Fourier

¹⁾ Besonders in verschiedenen Bemerkungen im 1. und 5. Band seiner Opuscles mathématiques. Man vgl. übrigens noch Riemann, Partielle Differentialgleichungen, bearb. von K. Hattendorf 1869, S. 200, und Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen 1889, S. 132.



dessen Reihen als Lagrangesche Formeln bezeichnet haben; man ist indessen längst davon zurückgekommen.

Die partielle Differentialgleichung der Saitenschwingungen selbst behandelt Lagrange auf eine ganz neue, eigenartige Weise; er führt sie nämlich auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung zurück, wenn er auch diese Reduktion nicht ausdrücklich als Ziel seiner Methode hinstellt. Naturgemäß ist die erwähnte Reduktion auch ein wenig umständlich, und es ist z. B. d'Alemberts Zurückführung des Problems auf ein Simultansystem von totalen Gleichungen¹⁾ unzweifelhaft eleganter; nichtsdestoweniger ist der Gedankengang Lagranges als äußerst geistreich und originell zu bezeichnen; wir können hierbei, weil ihn sein Erfinder konsequent für eine Reihe viel komplizierterer Gleichungen in Anwendung brachte, sogar von einer wirklichen Methode sprechen. Die partielle Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

multipliziert Lagrange²⁾ mit einer Funktion von x allein, die M heißen soll. Zweimalige partielle Integration nach x ergibt sodann

$$\int \frac{d^2 z}{dt^2} M dx = c \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) M - z \left(\frac{dM}{dx}\right) \right] + c \int z \left(\frac{d^2 M}{dx^2}\right) dx.$$

Die physikalischen Anfangsbedingungen der Aufgabe verlangen, daß z für zwei Werte $x = 0$ und $x = a$ beständig, d. h. für jedes t , gleich Null ist; das Gleiche verlangt Lagrange von der Funktion M . Wird jetzt zwischen den Grenzen 0 und a integriert, was in der Schreibweise nicht besonders ausgedrückt ist, so ergibt sich die Gleichung

$$\int \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) M dx = c \int z \left(\frac{d^2 M}{dx^2}\right) dx,$$

die auf Grund der Annahme

$$\left(\frac{d^2 M}{dx^2}\right) = k M$$

(k bedeutet hierbei eine Konstante) in

$$\int \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) M dx = kc \int z M dx$$

übergeht. Hieraus erhält man endlich mittels der Substitution

$$\int z M dx = s$$

¹⁾ Vgl. diese Vorl., III², S. 901. ²⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 20.

— wobei das Integral natürlich wieder zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$ zu nehmen ist, so daß s eine Funktion von t allein darstellt — die Gleichung

$$\int \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) M dx = \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) = k \cdot c \cdot s,$$

welche, wie Lagrange sagt, zu integrieren ist, indem man die Zeit t als einzige Variable ansieht. Damit ist die Integration der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung auf diejenige der beiden totalen Gleichungen

$$\left(\frac{d^2 M}{dx^2}\right) = k M \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) = kcs$$

zurückgeführt, die sich nur durch den konstanten Faktor c unterscheiden; nach ihrer Integration ist nur noch s so zu bestimmen, daß

$$\int z M dx = s.$$

Lagrange führt nun zunächst die Gleichung

$$s = S \cos t \sqrt{-ck} - \frac{R}{\sqrt{-ck}} \sin t \sqrt{-ck}$$

ein, wo S und R die Anfangswerte von s und $\left(\frac{ds}{dt}\right)$, d. i. von $\int z M dx$ bzw. $\int \left(\frac{dz}{dt}\right) M dx$ bedeuten, und kommt dann mit Hilfe verschiedener geschickter, allerdings nicht ganz korrekter und ausreichender Schlüsse zu dem Integral

$$z = \frac{Z(x+t\sqrt{c}) + Z(x-t\sqrt{c})}{2} + \frac{\int V dx - \int V dx}{2\sqrt{c}},$$

worin Z und V willkürliche Funktionen sind, die den Anfangsbedingungen entsprechend gewählt werden müssen; das erste Integral $\int V dx$ hat dabei die obere Grenze $x+t\sqrt{c}$, das zweite $x-t\sqrt{c}$. Nach derselben Methode behandelt Lagrange³⁾ die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + y,$$

wo y eine beliebige Funktion von x und t ist; die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = b \left(\frac{d^2 z}{dt dx}\right) + c \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + y^3$$

ersetzt er durch die beiden Gleichungen

$$\frac{dz}{dt} = u; \quad \frac{du}{dt} = b \frac{du}{dx} + c \frac{d^2 z}{dx^2} + y.$$

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 27. ²⁾ Ebenda, p. 104. ³⁾ Ebenda, p. 110.



Er multipliziert die erste mit N , die zweite mit M , integriert partiell nach x und addiert; so ergibt sich durch Nullsetzen aller Glieder, die nicht unter dem Integralzeichen stehen, die Gleichung

$$\int (N \frac{dz}{dt} + M \frac{du}{dt}) dx = \int (c \frac{d^2 M}{dx^2} z + [N - b \frac{dM}{dx}] u) dx + \int My dx.$$

Diese Gleichung werde erfüllt durch das Simultansystem

$$kN = c \frac{d^2 M}{dx^2} \quad \text{und} \quad kM = N - b \frac{dM}{dx};$$

aus diesen beiden Gleichungen folgt dann durch Elimination von N eine totale Gleichung für M , nämlich

$$k^2 M + bk \frac{dM}{dx} - c \frac{d^2 M}{dx^2} = 0,$$

so daß also

$$M = A e^{m^2 x} + B e^{n^2 x}$$

ist, wo m und n die Wurzeln der Gleichung

$$1 + by - cy^2 = 0$$

sind. Lagrange verlangt nun, daß M für $x=0$ und $x=a$ verschwindet, was $B = -A$, sowie $e^{m^2 a} - e^{n^2 a} = 0$, d. i. eine Bestimmungsgleichung für k , ergibt; endlich wird

$$N = ck(m^2 e^{m^2 x} - n^2 e^{n^2 x}),$$

wobei A stillschweigend gleich 1 gesetzt ist. Sind solchermaßen die Funktionen M und N bestimmt, so ist z aus der zwischen den Grenzen 0 und a genommenen Gleichung

$$\int (Nz + Mu) dx = s$$

zu bestimmen, wobei s selbst der Gleichung

$$\int (N \frac{dz}{dt} + M \frac{du}{dt}) dx = \frac{ds}{dt} = ks + \int My dx$$

genügen muß. Die weitere Behandlung des Problems bringt keinen neuen Gedanken herein. Lagrange vergleicht schließlich noch seine Resultate mit denen von d'Alembert.

Das Problem einer schwingenden Saite von ungleichmäßiger Dicke führt auf eine Gleichung, die sich von derjenigen der Saitenschwingungen dadurch unterscheidet, daß die Konstante c durch eine Funktion von x ersetzt ist; Lagrange führt diese Gleichung

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = X \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$$

auf die Integration von

$$kM = X \frac{d^2 M}{dx^2}$$

zurück¹⁾ und zeigt den Zusammenhang mit der Riccatischen Gleichung für spezielle Fälle. Dieselbe Reduktion führt kurz darauf²⁾ Euler aus und verwandelt seine totale Gleichung durch die Substitution

$$p = c \int y^{dx}$$

in eine solche 1. Ordnung. Er setzt auch versuchsweise

$$y = v \Phi(u),$$

wo u eine Funktion von x und t , v eine solche von x allein ist, und findet, daß v eine lineare Funktion von x ,

$$X = C \cdot v^{-4} \quad \text{und} \quad u = t + \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

ist.³⁾ In einer anderen Abhandlung aus derselben Zeit⁴⁾ nimmt Euler eine bestimmte Form des Integrals an, sucht aus ihr r als Funktion von x so zu bestimmen, daß die Gleichung

$$r r \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)$$

erfüllt wird, und erhält so verschiedene integrable Differentialgleichungen dieser Form. So führt ihn die Annahme

$$y = P \cdot \Gamma \left(\int u dx + t \right),$$

wo P und u Funktionen von x sein sollen, durch Einsetzen in die Differentialgleichung auf simultane totale Differentialgleichungen für P , u und r ; es ergibt sich

$$P = ax + \beta; \quad u = \frac{1}{r} = \frac{A}{(ax + \beta)^2}.$$

Im folgenden geht Euler zu Integralen der Form

$$y = P \Gamma \left(\int u dx + t \right) + Q \Gamma' \left(\int u dx + t \right) + \dots$$

über, wo P , Q , ..., u bestimmte Funktionen von x , Γ eine willkürliche Funktion und Γ' , ... ihre Ableitungen bedeuten; er behandelt der Reihe nach Fälle, in denen das Integral 1, 2 und mehr Glieder

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II^o, 1760/61, p. 98. ²⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. IX, 1762/63 (1764), p. 292. ³⁾ Burkhardt, a. a. O., Heft 2, S. 349, 355. ⁴⁾ Miscellanea Taurinensia, t. III^o, 1762/65 (1766), p. 27 bis 59.



besitzt und erhält so Gleichungen, die in endlicher Form integrabel sind; zu der Heranziehung der Derivierten der willkürlichen Funktion mag wohl der Umstand mitgewirkt haben, daß Euler bereits früher (vgl. unten S. 990) eine Gleichung integriert hatte, in deren Integral die Differentialquotienten der willkürlichen Funktion auftreten. Endlich ist noch d'Alembert zu erwähnen, der die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = X \frac{d^2 y}{dt^2}$$

durch eine Summe von Gliedern

$$\xi \cdot \cos \frac{\lambda \pi t}{T}$$

zu integrieren sucht, wo ξ eine Funktion von x allein ist¹⁾; er erhält

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = -\lambda^2 \pi^2 X \xi,$$

eine Gleichung, über deren Weiterbehandlung bereits berichtet wurde (vgl. S. 883).

Das Problem der von einem Störungszentrum ausgehenden Wellen führt Euler schon 1759 auf die partielle Gleichung mit veränderlichen Koeffizienten

$$\frac{1}{2gh} \left(\frac{dds}{dt^2} \right) - \frac{n}{V} \left(\frac{ds}{dt} \right) + \left(\frac{dds}{dV^2} \right)$$

zurück, die er auf eine Riccatische reduziert; er findet daraus, daß sich für 'das räumliche Problem, d. i. für $n=4$, die Aufgabe elementar lösen läßt und errät schließlich aus einigen partikulären Integralen die unten angegebene allgemeine Form des Integrals. Kurz darauf behandelt er das Problem wieder in einem Brief an Lagrange²⁾ ohne neues zu bringen. Er verlangt, daß die Geschwindigkeit in allen Punkten gleichen Abstandes von dem Zentrum dieselbe ist, und erhält die Gleichung

$$\frac{1}{2gh} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right) = -\frac{2u}{V^2} + \frac{2}{V} \left(\frac{du}{dt} \right) + \left(\frac{d^2 u}{dV^2} \right),$$

die aus der vorigen im Falle $n=4$ durch $s = \frac{u}{V}$ entsteht. Après plusieurs recherches, sagt er, j'ai enfin trouvé

¹⁾ Histoire de l'Académie de Berlin, t. XIX, 1763 (1770), p. 242. D'Alembert verweist bezüglich der Methode auf seine Opusculs mathématiques.

²⁾ Ebenda (Hist. Berlin), t. XV, 1759 (1766), p. 243. ³⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 1—10.

$$u = \frac{A}{V^2} \varphi [V + t\sqrt{(2gh)}] - \frac{A}{V} \varphi' [V + t\sqrt{(2gh)}] \\ + \frac{B}{V^2} \psi [V - t\sqrt{(2gh)}] - \frac{B}{V} \psi' [V - t\sqrt{(2gh)}],$$

wo φ und ψ willkürliche Funktionen, φ' , ψ' ihre Ableitungen bedeuten. Lagrange behandelt die von Euler aufgestellte Gleichung mittels seiner oben geschilderten Methode der Reduktion auf totale Gleichungen, nachdem er sie auf die Form

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) = c \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) + 2c \left(\frac{dz}{dx} \right)$$

gebracht hat, und erhält so für den Multiplikator M die Hilfsleichung

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{2dM}{x dx} = kM.$$

Diese Gleichung besitzt das für $x=0$ verschwindende Integral

$$M = A (\sin x \sqrt{-k} - x \sqrt{-k} \cos x \sqrt{-k}).¹⁾$$

Nach den physikalischen Bedingungen des Problems soll M auch für $x=a$ zu Null werden; das führt auf

$$a \sqrt{-k} = \operatorname{tg} a \sqrt{-k}$$

als Bestimmungsgleichung für k . Lagrange bemerkt²⁾ auch, daß die gegebene Gleichung durch die Substitutionen

$$z' = \frac{dzx^2}{x dx} = 2z + \frac{x dz}{dx}$$

oder auch durch

$$z = y - x \frac{dy}{dx}$$

auf das Problem der Saitenschwingungen zurückgeführt wird, und geht sodann zu der etwas allgemeineren Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) = c \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) + m c \left(\frac{dz}{dx} \right)$$

über³⁾; seine Methode führt hier zu der Gleichung

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{m}{x} \frac{dM}{dx} = kM,$$

deren Integration wir bereits besprochen haben (vgl. S. 912); der

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 58. ²⁾ Ebenda, p. 74. ³⁾ Ebenda, p. 81.



Übergang zum allgemeinen Integral der gegebenen partiellen Gleichung geschieht durch ähnliche Schlüsse wie beim Problem der Saitenschwingungen und ergibt

$$z = A \frac{\Gamma(x+t\sqrt{c}) + \mathcal{A}(x-t\sqrt{c})}{2} + B \frac{\Gamma'(x+t\sqrt{c}) + \mathcal{A}'(x-t\sqrt{c})}{2} \\ + C \frac{\Gamma''(x+t\sqrt{c}) + \mathcal{A}''(x-t\sqrt{c})}{2} + \dots,$$

wo Γ und \mathcal{A} willkürliche Funktionen, $\Gamma', \Gamma'', \dots, \mathcal{A}', \mathcal{A}'', \dots$ ihre Abgeleiteten und A, B, C, \dots die Entwicklungskoeffizienten der Lagrangeschen Form des Integrals der Riccatischen Gleichung sind (vgl. S. 912), wenn man in diesen $-m$ durch $m+2$ ersetzt. Lagrange knüpft daran auch die Bemerkung, daß die spezielle angewandte Methode stetige Änderung von z zugleich mit x voraussetze, weshalb Γ und \mathcal{A} nicht völlig beliebig seien.¹⁾ Endlich beschäftigt sich Euler²⁾ mit der Integration³⁾ von

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = aa \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{b}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c}{xx} z;$$

diese Gleichung wird durch die Substitution $z = x^2 u$ in eine Gleichung derselben Form übergeführt, was die Wegschaffung des Gliedes mit $\frac{du}{dx}$ durch passende Wahl von λ ermöglicht. Euler setzt ein Integral in folgender Form an:

$$z = Ax^n \Gamma(x+at) + Bx^{n+1} \Gamma'(x+at) + \dots^4)$$

und findet als Bedingung für das Bestehen dieser Gleichung die Relation

$$c = -n(n-1).$$

Ist n eine negative ganze Zahl, so bricht die Reihe von selbst ab, und man gewinnt auf diese Weise wieder integrable Fälle. Euler integriert die Gleichung auch in der Form, daß die willkürliche Funktion statt differenziert wiederholt integriert auftritt; interessanter scheinen verschiedene Bemerkungen, welche zeigen, daß sich Euler schon damals mit der Umformung partieller Gleichungen 2. Ordnung durch Transformation, wenigstens in speziellen Fällen, beschäftigt hat. So ist darauf hingewiesen, daß die Gleichung

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 92. ²⁾ Ebenda, t. III⁴, 1762/65 (1766), p. 60–91. ³⁾ Erwähnt sei folgende Ausdrucksweise: la solution complète qui nous découvre à la fois toutes les fonctions possibles (sc. welche die Differentialgleichung erfüllen). Ebenda, p. 60. ⁴⁾ Das ist dieselbe Form, die wir eben bei Lagrange getroffen haben; die beiden Resultate lassen sich leicht ineinander überführen.

$$\frac{1}{aa} \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} - \frac{kz}{xx},$$

in der also das Glied mit $\frac{dz}{dx}$ fehlt, durch die Substitutionen

$$m = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4k}); \quad k' = k+1 \pm \sqrt{1+4k}; \quad u = \frac{dz}{dx} + \frac{mz}{x}$$

in

$$\frac{1}{aa} \frac{ddu}{dt^2} = \frac{ddu}{dx^2} - \frac{k'u}{xx}$$

übergeführt wird. Setzt man $k=0$, so ergibt sich $k'=2$, daraus $k'=6$ usw. Ferner ist die Gleichung der Saitenschwingungen

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = aa \left(\frac{dz}{dx}\right)$$

vermöge der Substitution

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) + a \left(\frac{dz}{dx}\right) = u$$

auf

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = a \left(\frac{du}{dx}\right),$$

das ganze Problem also auf die Integration zweier linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückgeführt, die durch Benutzung der Gleichung

$$du = dt \left(\frac{du}{dt}\right) + dx \left(\frac{du}{dx}\right)$$

zunächst auf

$$u = \Gamma'(x+at)$$

und damit zum allgemeinen Integral führen.

Gegenüber diesen Untersuchungen, die alle den Charakter des Willkürlichen, Zufälligen an sich tragen, bedeutet die Behandlung der partiellen Gleichung 2. Ordnung in Eulers Integralrechnung einen ganz wesentlichen Fortschritt. Euler schiebt nämlich nach den Gleichungen 1. Ordnung, bevor er zu höheren Gleichungen übergeht, ein eigenes Kapitel ein, das nur von der Umformung der partiellen Differentialgleichungen durch Einführung neuer Variablen handelt, und zeigt so schon durch die ausgezeichnete Stellung, die er diesen Untersuchungen einräumt, sowie durch die eingehende Behandlung der ganzen Frage, daß er die Integration der höheren partiellen Gleichungen prinzipiell auf ihre Transformation in eine geeignete kanonische Form gegründet wissen will. Die von Euler behandelten Transformationen zerfallen in zwei Arten; die erste ersetzt nur die abhängige Variable z durch eine neue v , während die unabhängigen Veränderlichen x und y in der Gleichung belassen werden; hierher



gehören die Substitutionen $z = Pv^1)$ und $z = P + v$, wo unter P und v Funktionen von x und y zu verstehen sind. Wichtiger ist die Einführung neuer unabhängiger Variablen t und u an Stelle von x und y ; die Formeln, welche die Differentialquotienten nach x und y in den neuen Veränderlichen ausdrücken, stellt Euler für den späteren Gebrauch in übersichtlicher Weise zusammen. Der Behauptung, Euler behandle die Gleichung 2. Ordnung methodisch, planmäßig mittels Transformationen, scheint nun zu widersprechen, daß er in den zunächst folgenden Beispielen die Methode der Reduktion auf eine Normalform durch Einführung neuer Variablen nicht anwendet. Indessen handelt es sich hierbei um Beispiele, die sich eben auf anderem Wege einfacher oder rascher erledigen lassen als durch jene immerhin einen ziemlichen Formelapparat erfordernde Reduktion. So behandelt Euler zuerst ausschließlich Gleichungen, welche nur einen einzigen von den Differentialquotienten 2. Ordnung enthalten. Die Gleichung $\frac{dz}{dx^2} = P$, wo P eine Funktion von x, y und z ist, integriert Euler, indem er y als konstant ansieht und nachträglich diese Beschränkung fallen läßt; er erhält schließlich

$$z = \int dx \int P dx + xf(y) + F(y).$$

Die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx^2}\right) = P \left(\frac{dz}{dx}\right) + Q$$

läßt sich mittels der Substitution

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$$

behandeln, wenn P und Q die Variable z nicht enthalten. In letzterem Fall hat man sich y als konstant zu denken und die totale Gleichung

$$ddz = P dx dz + Q dx^2$$

mit dem Parameter y zu integrieren; das allgemeine Integral („integrals completum“) ergibt sich, wenn man die beiden Integrationskonstanten durch Funktionen von y ersetzt.²⁾ In der Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dx dy}\right) = az^2$$

setzt Euler

$$z = e^{ax} Y,$$

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 194. ²⁾ Ebenda, p. 209. Man beachte, daß ein derartiges Ersetzen von Konstanten durch variable Größen der Entstehung einer besonderen „Methode“ der Variation der Konstanten nur günstig sein konnte. ³⁾ Ebenda, p. 221.

wo Y eine Funktion von y allein sein soll, und erhält so die totale Gleichung

$$\frac{adY}{Y} = a dy$$

mit dem Integral

$$Y = e^{ay}.$$

Daraus schließt Euler auf das Integral der ursprünglichen Gleichung in der Form

$$z = Ae^{\alpha x + \frac{a}{\alpha} y} + Be^{\beta x + \frac{a}{\beta} y} + \dots,$$

bemerkt aber ganz im Einklang mit seinen früheren Ansichten über die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion, daß diese Darstellung mit unendlich vielen Integrationskonstanten dem Integral mit zwei willkürlichen Funktionen deshalb nicht gleichwertig zu erachten sei, weil man sie nicht beliebigen Anfangsbedingungen anpassen könne.¹⁾ Euler sucht sodann das Anwendungsgebiet der eben benutzten Substitution $z = e^{ax} Y$ bzw. $z = e^{ay} X$, wo X eine Funktion von x allein ist, zu erweitern; insbesondere²⁾ verwertet er sie für die Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dx dy}\right) + P \left(\frac{dz}{dx}\right) + Q \left(\frac{dz}{dy}\right) + Rz = 0,$$

wo die Koeffizienten Funktionen von x allein sind. Den allgemeinen Fall³⁾, daß P, Q, R, S Funktionen von x und y sind, unterwirft er der Transformation $z = e^t v$, wo V eine Funktion von x und y , v eine noch zu bestimmende Größe ist; dieser Gleichungstypus ist von großer Wichtigkeit. Gleichungen, die mehr als einen Differentialquotienten 2. Ordnung enthalten, behandelt Euler nur durch Transformation. In die Gleichung der Saitenschwingungen

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

setzt er⁴⁾

$$t = \alpha x + \beta y \quad \text{und} \quad u = \gamma x + \delta y$$

und erhält so die neue Gleichung

$$(\beta\beta - \alpha\alpha aa) \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + 2(\beta\delta - \alpha\gamma aa) \left(\frac{ddz}{dt du}\right) + (\delta\delta - \gamma\gamma aa) \left(\frac{ddz}{du^2}\right) = 0,$$

wobei jetzt z als Funktion von t und u aufzufassen ist. Die Annahme

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 1, \quad \beta = a, \quad \delta = -a$$

liefert

¹⁾ Vgl. S. 915. ²⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 224. ³⁾ Ebenda, p. 234. ⁴⁾ Ebenda, p. 225.



$$t = x + ay; \quad u = x - ay \quad \text{und} \quad \left(\frac{ddz}{dtdu}\right) = 0.$$

Daraus folgt dann unmittelbar

$$z = f(t) + F(u) = f(x + ay) + F(x - ay).$$

Nach einer kurzen Schilderung von d'Alemberts Methode¹⁾ bemerkt Euler, daß man auch versuchsweise

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = k \left(\frac{dz}{dx}\right)$$

setzen kann; dann wird

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = k \cdot \left(\frac{ddz}{dx dy}\right) = k^2 \cdot \left(\frac{ddz}{dx^2}\right).$$

Ein Vergleich mit der ursprünglichen Gleichung liefert

$$k = \pm a$$

und somit die zwei Gleichungen 1. Ordnung

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \pm a \left(\frac{dz}{dx}\right).$$

Die Schwingungsgleichung der Saite von veränderlicher Dicke

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = X \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

führt Euler für

$$X = Ax^{\frac{4m}{2m-1}}$$

auf die Riccatische Gleichung

$$dp + ppx = ax^{\frac{4m}{2m-1}} dx$$

zurück²⁾, die für positive oder negative ganzzahlige m mittels der Substitutionen

$$z = e^{av} v \quad \text{und} \quad v = e^{\int v dx}$$

integrabel ist, fügt aber hinzu: es ist fast nicht zu glauben, daß beide (nämlich die partielle und die totale) Differentialgleichungen nicht in denselben Fällen integrabel sein können. Wie er behauptet, ist für $m = \infty$ die Riccatische Differentialgleichung leicht zu integrieren, während die entsprechende partielle Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = Axx \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

¹⁾ Vgl. diese Vorl., III², S. 901.
vol. III, p. 286.

²⁾ Institutiones calculi integralis,

seiner Methode sich nicht fügt. Für diese Gleichung setzt er ein Integral in der Form

$$z = x^{\lambda} e^{\mu y} (A + \alpha lx + \beta y)$$

an; μ und $\frac{\alpha}{\beta}$ lassen sich hierbei durch λ ausdrücken. Die Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = P \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + Q \left(\frac{dz}{dx}\right) + Rz$$

hatte Euler von einem hydrodynamischen Problem ausgehend schon früher in einem speziellen Fall behandelt; jetzt verlangt er nur, daß P, Q, R Funktionen von x allein sind. Diese verallgemeinerte Gleichung soll nun mittels der Substitution

$$z = M \left(\frac{dv}{dx}\right) + Nv,$$

wo M und N Funktionen von x allein sind, wieder in die nämliche Form

$$\left(\frac{ddv}{dy^2}\right) = F \left(\frac{ddv}{dx^2}\right) + G \left(\frac{dv}{dx}\right) + Hv$$

übergeführt werden¹⁾, wo auch M, N, F, G, H Funktionen von x allein sind. Durch geschickte Kombination erhält Euler drei Bestimmungsgleichungen für P, Q, R , wenn F, G, H gegeben sind, nämlich

$$P = F; \quad Q = G + \frac{dF}{dx} - \frac{2FdM}{Mdx}$$

und

$$R = H - \frac{GdM}{Mdx} + \frac{dG}{dx} - \frac{FdM}{Mdx^2} - \frac{2Fds}{dx} + \frac{2FdM^2}{MMdx^2} - \frac{sdF}{dx} - \frac{dFdM}{Mdx^2};$$

hierbei bestimmt sich das Verhältnis $s = \frac{N}{M}$ aus der Gleichung

$$C = H - Gs - F \frac{ds}{dx} + Fss,$$

worin C eine willkürliche Konstante bedeutet. Ist also die transformierte partielle Gleichung mit der abhängigen Veränderlichen v integrabel, so ist es auch die Gleichung in z vermöge der Beziehung

$$z = M \left(sv + \left(\frac{dv}{dx}\right) \right).$$

Durch Spezialisierung der Funktionen F, G, H erhält Euler endlich verschiedene integrable Gleichungen. Die partielle Gleichung

$$\frac{1}{ec} \left(\frac{ddv}{dy^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dx^2}\right) + U \left(\frac{dv}{dx}\right) + vT,$$

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 292.



wo U und T Funktionen von x allein bedeuten, behandelt Euler auch an anderer Stelle¹⁾ in einer Abhandlung über die Luftbewegung in Tuben nach seiner früheren Methode (vgl. S. 989), indem er nach Integralen der Form

$$v = Lf(S \pm ct) + Mf'(S \pm ct) + \dots$$

sucht.

Es wurde behauptet, daß Euler in der Integralrechnung bei Gleichungen 2. Ordnung hauptsächlich durch Transformation, sei es der unabhängigen oder der abhängigen²⁾ Variablen — oft allerdings nur mittels mühsamer, weitschweifiger Rechnungen — zum Ziel kommt; er selbst sagt³⁾, seine Methode bestehe darin, die gegebene Gleichung durch Einführung neuer Variablen auf die Form zu bringen

$$\left(\frac{ddz}{dt du}\right) + P\left(\frac{dz}{dt}\right) + Q\left(\frac{dz}{du}\right) + Rz + S = 0.$$

Diese Gleichung fällt aber unter die Kategorie derjenigen Gleichungen, welche nur einen einzigen Differentialquotienten 2. Ordnung enthalten, und ist mit diesen Gleichungen ausführlich behandelt worden. Es ist sehr wesentlich, daß Euler das Methodische dieser Reduktion betont; allerdings ist der Raum, den er diesem Gedanken gönnt, gering im Vergleich zu dem Platz, der anderen Anwendungen der Einführung neuer Variablen, wie der Reduktion auf die Ausgangsform oder der Aufsuchung integrierbarer Fälle eingeräumt ist.

Condorcet nimmt als Integral der linearen Gleichung 2. und 3. Ordnung die Gleichung $z = Ae^{mx+ny}$ an und sucht von einer Reihe mit unendlich vielen derartigen Gliedern auf die Darstellung mit willkürlichen Funktionen überzugehen.⁴⁾ Die Gleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten sucht er mittels Reihen zu lösen.⁵⁾

D'Alembert behandelt⁶⁾ neben anderen Gleichungen 2. Ordnung den Fall

$$\xi q + \zeta \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{dx^2} + \frac{b ddq}{dt^2} = 0,$$

wo ξ und ζ Funktionen von x , b eine Konstante bedeuten, und versucht ein Integral der Form

¹⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XVI, 1771 (1772), p. 356.
²⁾ Von letzterer Art sei noch die Substitution

$$z = \left(\frac{d dv}{dx^2}\right) + r \left(\frac{dv}{dx}\right) + sv,$$

wo r und s Funktionen von x allein sind, erwähnt, von der Euler Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 323 Gebrauch macht. ³⁾ Ebenda, p. 261.
⁴⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 23 bzw. 30.
⁵⁾ Ebenda, p. 37. ⁶⁾ Opusculs mathématiques, t. IV (1768), p. 243.

$$q = Xu + \frac{X' du}{dx} + \frac{X'' ddu}{dx^2} + \dots,$$

wo X , X' , $X'' \dots$ passend zu bestimmende Funktionen von x sind.

Laplace hat die Eulersche Idee der Zurückführung der partiellen Gleichung 2. Ordnung auf die eben angegebene kanonische Form wieder aufgegriffen; er fragt daran anknüpfend nach Bedingungen, unter welchen diese in endlicher Form integrierbar ist. Für das Entstehen seiner Abhandlung sind Eulers Vorarbeiten in verschiedener Weise bedeutungsvoll geworden: die Transformation (transformation) selbst, die Ausnahmen, die sie erleiden kann, das Auftreten der Differentialquotienten oder Integrale der willkürlichen Funktion in der Integralgleichung, dies alles hat, wie Laplace selbst zugesteht¹⁾, schon Euler. Laplaces Verdienst ist, daß er die mögliche Form des Integrals genauer festlegt, daß er nicht wie Euler nur Differentialgleichungen sucht, die in geschlossener Form integrierbar sind, sondern die Bedingungen hierfür in Form von Gleichungen angibt, daß er endlich — und darauf legt er selbst großen Wert — alles analytisch, in bequemen Formeln darstellt. Laplace reduziert wie Euler die Gleichung

$$0 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + \alpha \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) + \beta \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \gamma \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \delta \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \lambda z + T,$$

in welcher alle Koeffizienten Funktionen von x und y , aber nicht von z sind, durch Einführung neuer Veränderlicher ω und θ auf die Normalform

$$0 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right) + n \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + lz + T,$$

wo jetzt m , n und l Funktionen von ω und θ sind. Hierbei sind die alten und die neuen Variablen durch die Gleichungen verknüpft:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \cdot \left[-\frac{1}{2} \alpha + \sqrt{\left(\frac{1}{4} \alpha^2 - \beta\right)}\right]$$

und

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) \cdot \left[-\frac{1}{2} \alpha - \sqrt{\left(\frac{1}{4} \alpha^2 - \beta\right)}\right].$$

Diese Gleichungen reduzieren sich, wenn gleichzeitig $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, auf $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = 0$ und $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = 0$, d. h. ω und θ sind Funktionen von y allein; in diesem Fall, den auch Euler schon eingehend behandelt hat, ist, wie Laplace im folgenden findet²⁾, ein „vollstän-

¹⁾ Vgl. hierzu Histoire de l'Académie des Sciences 1773 (1777), Histoire p. 43 ff. ²⁾ Ebenda, p. 360. Vgl. auch Mémoires présentés par divers Savans, t. VI (1774), p. 656.



diges“ Integral in endlicher Form nur dann möglich, wenn $\delta = 0$ ist; das schließt natürlich nicht aus, daß oft partikuläre Integrale in geschlossener Form angegeben werden können. Als zweiten Ausnahmefall nennt Laplace das Bestehen der Gleichung

$$\beta = \frac{1}{4} \alpha^2,$$

heutzutage als parabolischer Fall bezeichnet; hier sind die Gleichungen für ω und θ nicht mehr unterschieden, man erhält nämlich

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2} \alpha \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2} \alpha \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right).$$

Man kann aber, wie Laplace zeigt, diesen Fall auf den Typus $\alpha = 0$, $\beta = 0$ reduzieren, wenn man aus

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2} \alpha \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$$

die Variable x als Funktion von ω und y berechnet und den betr. Ausdruck in die gegebene Differentialgleichung einführt, so daß also eine Gleichung in z , ω , y entsteht.¹⁾ Für die folgende Untersuchung wird von Wichtigkeit, was Laplace über die Form der Integrale der linearen Gleichungen 2. Ordnung behauptet. Nach eigener Aussage hatte Laplace beobachtet, daß die willkürlichen Funktionen im Integral einer linearen Gleichung immer selber linear vorkommen. Differentialquotienten und Integrale der willkürlichen Funktionen zieht schon Euler zur Bildung des allgemeinen Integrals heran; berücksichtigt man endlich noch die Arbeiten Condorcets auf diesem Gebiet, so ist damit aufgezählt, was Laplace über den Gegenstand bekannt war. Auf die Methode, wie er sodann die Form des Integrals von vornherein zu ermitteln sucht, kann, wengleich auf die mühsame Untersuchung eminenten Scharfsinn verwendet ist, hier nicht eingegangen werden, da ihre Darstellung zu viel Platz beanspruchen würde, und der Wert der betr. funktionentheoretischen Schlüsse wenigstens ohne Modifikationen und Ergänzungen verhältnismäßig gering ist. Laplace kommt durch Überlegungen, die er für die Gleichung 1. Ordnung ausführlich angibt, zunächst zu dem Resultat, daß das Integral die willkürlichen Funktionen φ und ψ , wie bereits beobachtet, linear und wiederholt differenziert oder integriert

¹⁾ Auf diesen Fall, der sich immer auf die Gleichung der Wärmeleitung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$ reduzieren läßt, ist Laplace später wieder zurückgekommen: Journal de l'École polytechnique, cah. 15, 1809, p. 235.

enthält; des weiteren findet er, daß die Argumente von φ und ψ Funktionen von den Variablen ω bzw. θ allein sein müssen, ein Umstand, der eine ganz bedeutende Vereinfachung des Integrals zur Folge hat, da sich Ausdrücke wie $\int E \delta \theta \varphi(\omega)$ auf einfachere Formen, also hier $\varphi(\omega) \cdot \int E \delta \theta$, reduzieren lassen.

Nach diesen Voruntersuchungen wendet sich Laplace der eigentlichen Aufgabe zu; er verlangt, daß die willkürliche Funktion nicht unter dem Integralzeichen auftreten soll, setzt $T = 0$ und überdies zur Vereinfachung auch $\psi = 0$. Die einfachste Form, die das Integral dann haben kann, ist

$$z = A \cdot \varphi(\omega).$$

Laplace substituiert diesen Ausdruck in die kanonische Differentialgleichung und setzt — die Berechtigung hierzu ist leicht einzusehen — den Koeffizienten von $\varphi(\omega)$ sowie den der Abgeleiteten $\varphi'(\omega)$ gleich Null. Es ergibt sich so

$$0 = \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + mA \quad \text{und} \quad 0 = \left(\frac{\partial \partial A}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial \omega}\right) + n \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + lA.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich aber mit Hilfe der ersten und der daraus durch partielle Differentiation nach ω hervorgehenden Gleichung die Differentialquotienten von A eliminieren; man erhält nach Division mit A die Bedingung

$$0 = l - \left(\frac{\partial m}{\partial \omega}\right) - nm,$$

von deren Bestehen die Existenzmöglichkeit eines Integrals der Form

$$z = A \varphi(\omega)$$

abhängt. Diesen Weg schlägt indes Laplace nicht ein, sondern sagt, daß die Differentialgleichung

$$0 = \left(\frac{\partial \partial z}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right) + n \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + lz$$

mittels der Substitution

$$z^{(1)} = \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + mz$$

in

$$0 = \left(\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \omega}\right) + n z^{(1)} + z \cdot \left[l - \left(\frac{\partial m}{\partial \omega}\right) - mn\right]$$

übergeht; unter der Annahme

$$z = A \cdot \varphi(\omega)$$

reduziert sich dann die Gleichung





$$z^{(l)} = \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + m z$$

auf

$$z^{(l)} = 0,$$

was die erwähnte Relation zwischen m , n und l liefert. Ist diese Relation nicht erfüllt, so versucht Laplace die nächst einfache Annahme

$$z = A \cdot \varphi(\omega) + A' \cdot \varphi_I(\omega);$$

es ergeben sich dann drei Gleichungen für A , nämlich

$$0 = \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + m A;$$

$$0 = \left(\frac{\partial \partial A}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial \omega}\right) + n \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + l A + \left(\frac{\partial A'}{\partial \theta}\right) + m A';$$

$$0 = \left(\frac{\partial \partial A'}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m \cdot \left(\frac{\partial A'}{\partial \omega}\right) + n \cdot \left(\frac{\partial A'}{\partial \theta}\right) + l A'.$$

Wie schon erwähnt, verwandelt die Substitution

$$z^{(l)} = \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + m z$$

die ursprüngliche Gleichung in

$$0 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial z^{(l)}}{\partial \omega}\right) + \frac{n}{\mu} \cdot z^{(l)} + z,$$

wo zur Abkürzung

$$\mu = l - \left(\frac{\partial m}{\partial \omega}\right) - m n$$

gesetzt ist. Aus diesen Gleichungen erhält man nun durch geschickte Kombination bei Benutzung der weiteren Substitutionen

$$m - \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta}\right) = m'; \quad \mu + n m - n \cdot \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial n}{\partial \theta}\right) = l'$$

die Differentialgleichung

$$0 = \left(\frac{\partial \partial z^{(l)}}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m^{(l')} \cdot \left(\frac{\partial z^{(l)}}{\partial \omega}\right) + n \left(\frac{\partial z^{(l)}}{\partial \theta}\right) + l^{(l')} z^{(l)},$$

die genau die Form der ursprünglichen Gleichung hat. Mit Berücksichtigung der Annahme

$$z^{(l)} = A \varphi(\omega) + A' \varphi_I(\omega)$$

geht aber die Gleichung

$$z^{(l)} = \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + m z$$

in

$$z^{(l)} = \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + m A\right] \varphi(\omega) + \left[\left(\frac{\partial A'}{\partial \theta}\right) + m A'\right] \varphi_I(\omega)$$

über, die sich wegen der für A geltenden Relationen auf

$$z^{(l)} = \left[\left(\frac{\partial A'}{\partial \theta}\right) + m A'\right] \varphi_I(\omega)$$

reduziert. Das heißt nichts anderes, als $z^{(l)}$ ist Integral einer kanonischen Differentialgleichung 2. Ordnung und enthält nur eine willkürliche Funktion $\varphi_I(\omega)$, aber keinen ihrer Differentialquotienten. Dieser Fall ist aber als der einfachste bereits untersucht und die Bedingungsgleichung für sein Bestehen aufgestellt; sie lautet

$$0 = l^{(l)} - \left(\frac{\partial m^{(l)}}{\partial \omega}\right) - n m^{(l)}.$$

Die kanonische Gleichung 2. Ordnung in $z^{(l)}$, $m^{(l)}$, n , l' hat sich ganz unabhängig von der speziellen Annahme über die Form des Integrals z ergeben; sie wird also auch Geltung haben, wenn

$$z = A \cdot \varphi(\omega) + A' \cdot \varphi_I(\omega) + A'' \cdot \varphi_{II}(\omega).$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in die ursprüngliche Differentialgleichung (mit der abhängigen Veränderlichen z) ergeben sich aber Gleichungen für A , A' , A'' , deren Berücksichtigung

$$z^{(l)} = \left[\left(\frac{\partial A'}{\partial \theta}\right) + m A'\right] \cdot \varphi_I(\omega) + \left[\left(\frac{\partial A''}{\partial \theta}\right) + m A''\right] \cdot \varphi_{II}(\omega)$$

liefert. Und das heißt gar nichts anderes, als $z^{(l)}$ enthält eine willkürliche Funktion $\varphi_I(\omega)$ und deren erste Derivierte $\varphi_{II}(\omega)$, weshalb auf die Differentialgleichung 2. Ordnung $z^{(l)}$ die Überlegungen des eben untersuchten Falles angewendet werden können.

So kann man weiter schließen. Die bei dieser Methode — Kaskadenmethode hat man sie später genannt — auftretenden Größen $\mu^{(r)}$, $m^{(r)}$, $l^{(r)}$, $z^{(r)}$ mit dem Index r gehen aus den μ , m , l , z mit dem Index $r-1$ genau in derselben Weise hervor, wie die μ' , m' , l' , z' aus μ , m , l , z selbst. Der Wert von $z^{(r)}$ läßt sich indessen leicht independent darstellen, da, wie Laplace zeigt, die Gleichung

$$0 = \left(\frac{\partial z^{(r)}}{\partial \omega}\right) + n z^{(r-1)}$$

mit dem Integral

$$z^{(r)} = e^{-\int n d\omega} \cdot \psi(\theta)$$

¹⁾ Diese Gleichung gilt natürlich nicht für einen beliebigen, sondern nur für denjenigen Index r , der das Abbrechen der Reihe für z bewirkt.



besteht. Die Bedingung, daß x keinen höheren als den r^{ten} Differentialquotienten der willkürlichen Funktion φ enthält, ist dann, wie sofort ersichtlich,

$$0 = l^{(r)} - \left(\frac{\partial u^{(r)}}{\partial \omega}\right) - nm^{(r)};$$

ist sie für kein endliches r erfüllt, so ist die Gleichung — vorausgesetzt, daß die Laplaceschen Behauptungen über die notwendige Form des Integrals richtig sind — auch nicht in endlicher Form integrierbar, dieser Fall tritt z. B. im allgemeinen ein, wenn l, m, n konstant sind¹⁾. Ganz die gleiche Methode würde am Platze sein, wenn man von vorn herein nicht ψ , sondern φ gleich Null gesetzt hätte; Laplace geht deshalb gar nicht auf diese Frage ein, sondern wendet sich zur Betrachtung des Falles, daß T nicht identisch Null ist, welcher eine analoge Behandlung gestattet.

Indem Laplace des weiteren die angegebene Bedingungsgleichung für Integration in geschlossener Form als Bestimmungsgleichung für r auffaßt, erhält er in endlicher Form integrable Fälle.²⁾ Auch ist noch gezeigt, daß der Ausdruck für x , sobald er eine nur endliche Anzahl von Integralzeichen enthält, immer auch durch willkürliche Funktionen und deren Differentialquotienten allein dargestellt werden kann, oder, wie Laplace sich ausdrückt, notwendig von Integralzeichen frei ist³⁾; endlich ist noch auf die Integration unter gegebenen Anfangsbedingungen eingegangen.⁴⁾ Daß mit der Integration einer einzigen der Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich der Reihe nach ergeben, die aller übrigen durch Quadraturen oder Differentiationen gefunden wird, erwähnt Laplace, offenbar weil selbstverständlich, nicht.

Später⁵⁾ kommt Laplace auf seine Ergebnisse zurück und stellt sie in folgender Form dar: Jede lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, sagt er, kann in der Form dargestellt werden

$$0 = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s \partial s'}\right) + m \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + n \left(\frac{\partial u}{\partial s'}\right) + lu,$$

wo m, n und l gegebene Funktionen der Variablen s und s' sind. Versteht man unter $\varphi_1(s)$ das Integral $\int \partial s \cdot \varphi(s)$, unter $\varphi_2(s)$ das Integral $\int \partial s \varphi_1(s)$ usf., desgleichen unter $\psi_1(s')$ das Integral $\int \partial s' \psi(s')$, unter $\psi_2(s')$ das Integral $\int \partial s' \psi_1(s')$ usf., so ist

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1773 (1777), p. 369. ²⁾ Ebenda, p. 380. ³⁾ Ebenda, p. 382 ff., speziell p. 395. Auf die im Text angeführte Behauptung kommt Cousin ebenda 1784 (1787), p. 420 zurück und stellt einen entsprechenden Satz allgemein für Gleichungen n^{ter} Ordnung auf: ebenda, p. 429. ⁴⁾ Ebenda 1773 (1777), p. 396. ⁵⁾ Ebenda 1779 (1782), p. 268 ff.

$$u = A \cdot \varphi_1(s) + A^{(1)} \cdot \varphi_2(s) + A^{(2)} \cdot \varphi_3(s) + \dots \\ + B \cdot \psi_1(s') + B^{(1)} \cdot \psi_2(s') + B^{(2)} \cdot \psi_3(s') + \dots;$$

$\varphi(s)$ und $\psi(s')$ sind hierbei zwei willkürliche Funktionen; für ihre Koeffizienten gelten folgende Gleichungen:

$$0 = \left(\frac{\partial A}{\partial s'}\right) + mA; \\ 0 = \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial s'}\right) + mA^{(1)} + DA;^{1)} \\ 0 = \left(\frac{\partial A^{(2)}}{\partial s'}\right) + mA^{(2)} + DA^{(1)}; \\ \dots \dots \dots \\ 0 = \left(\frac{\partial B}{\partial s}\right) + nB; \\ 0 = \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial s}\right) + nB^{(1)} + DB; \\ 0 = \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial s}\right) + nB^{(2)} + DB^{(1)}; \\ \dots \dots \dots$$

Ergibt sich einer der Koeffizienten $A^{(u)}$ oder $B^{(v)}$, wo u eine positive ganze Zahl ist, zu Null, so bricht die Reihe für u ab. Im folgenden gelangt Laplace zur Darstellung von u in Form von bestimmten Integralen. Er bezeichnet nämlich die Summe

$$\varphi(0) + t\varphi(\partial s) + t^2\varphi(2\partial s) + \dots + t^{\frac{\partial s}{\partial s}} \cdot \varphi(s)$$

mit T und entwickelt $\frac{T \cdot \partial s}{1-t}$ nach Potenzen von t . Dann wird der Koeffizient von $t^{\frac{\partial s}{\partial s}}$ gleich

$$[\varphi(0) + \varphi(\partial s) + \varphi(2\partial s) + \dots + \varphi(s)] \cdot \partial s$$

gefunden; das ist aber nichts anderes als $\varphi_1(s)$. Allgemein ist der Koeffizient von $t^{\frac{\partial s}{\partial s}}$ in der Entwicklung von $T(1-t)^{-u} \varphi s^u$ nichts anderes als $\varphi_u(s)$. Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich, wenn man für T seinen Wert in $\varphi(0), \varphi(\partial s), \dots$ einsetzt, $\varphi_u(s)$ linear durch

¹⁾ Wir haben uns hier der Übersichtlichkeit halber der modernen Bezeichnungweise bedient, die statt der vorgelegten Differentialgleichung in u symbolisch $Du = 0$ schreibt.



die $\varphi(0)$, $\varphi(\hat{r}s)$, ... und gewisse Koeffizienten ausdrücken, die bestimmt werden sollen. Der Koeffizient von $\varphi(\hat{r}s)$ in dem Ausdruck $T(1-t)^{-\mu} \partial s^\mu$ ist $t^r(1-t)^{-\mu} \partial s^\mu$; auf $\varphi_\mu(s)$ trifft dabei nur der Koeffizient von $t^{\hat{r}s}$. Drückt man also $\varphi_\mu(s)$ in angedeuteter Weise durch $\varphi(0)$, $\varphi(\partial s)$, ... $\varphi(\hat{r}s)$, ... aus, so wird der Koeffizient von $\varphi(\hat{r}s)$ gleich dem Koeffizienten von $t^{\hat{r}s}$ in der Entwicklung von $t^r(1-t)^{-\mu} \partial s^\mu$, d. i. gleich dem von $t^{\hat{r}s-r}$ in der Entwicklung von $(1-t)^{-\mu} \partial s^\mu$ sein. Dieser ist aber gleich

$$\frac{\left(\frac{s}{\partial s} - r + 1\right) \left(\frac{s}{\partial s} - r + 2\right) \cdots \left(\frac{s}{\partial s} - r + \mu - 1\right)}{1 \cdot 2 \cdots (\mu - 1)} \partial s^\mu;$$

läßt man r so ins Unendliche wachsen, daß dabei $r\partial s$ gegen einen endlichen Wert z konvergiert, so geht er über in $\frac{(s-z)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \partial s$. Mit Hilfe dieser Darstellung läßt sich jetzt auch das Integral u statt durch φ_μ durch die $\varphi(0)$, $\varphi(\partial s)$, ... $\varphi(\hat{r}s)$, ... ausdrücken. Hierbei wird der Koeffizient von

$$\varphi(\hat{r}s) = \varphi(z)$$

gleich

$$\partial s \sum_{\mu=1}^{\infty} A^{(\mu-1)} \frac{(s-z)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} = \Gamma(s-z) \partial s,$$

wenn man

$$\sum A^{(\mu-1)} \frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!} = \Gamma(x)$$

setzt. Hieraus schließt Laplace auf die Gleichung

$$u = \int_0^{\hat{r}} \partial z \Gamma(s-z) \varphi(z) + \int_0^{\hat{r}} \partial z \Pi(s^t - z) \psi(z),$$

wo die Funktion Π analog der Funktion Γ , aber mit Hilfe der B gebildet ist. Hierbei sind aber, wie aus den Gleichungen für die A und B hervorgeht, $\Gamma(s-z)$ und $\Pi(s^t - z)$ selbst partikuläre Integrale der gegebenen Differentialgleichung, von denen das erstere für $s = z$ der Anfangsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial s^t} + mu = 0,$$

das letztere für $s^t = z$ der Anfangsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial s} + nu = 0$$

genügt. Durch dieses Ergebnis wird Laplace veranlaßt, den Ausdruck

$$u = \int p \partial z \cdot \varphi(z) + \int p^t \partial z \cdot \psi(z),$$

genommen von einem konstanten Wert von z bis $z = s$ bzw. $z = s^t$, zu untersuchen; er findet durch Differentiation, daß dieser Ausdruck der Differentialgleichung genügt, sobald p und p^t partikuläre Werte von u sind, die eine willkürliche Konstante z einschließen und für $z = s$ bzw. s^t in Funktionen P und P^t von der Art übergehen, daß

$$0 = \left(\frac{\partial P}{\partial s^t}\right) + mP \quad \text{und} \quad 0 = \left(\frac{\partial P^t}{\partial s}\right) + nP^t.$$

Da der Ausdruck für u zwei willkürliche Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ enthält, erklärt ihn Laplace für das allgemeine Integral. Endlich sind noch verschiedene andere Darstellungen des bestimmten Integrals angegeben; so erhält man vermöge der Substitutionen $z = st$ bzw. $z = s^t t$ die folgende zusammengezogene Form

$$u = \int \partial t \cdot \{sq \cdot \varphi(st) + s^t q^t \cdot \psi(s^t t)\},$$

wo zwischen den Grenzen 0 und 1 integriert wird, und q und q^t aus p und p^t hervorgehen. Besonders behandelt wird der Fall, daß l, m, n konstant sind; hier ist $\Gamma(s-z)$ gleich dem Produkt aus $e^{-ms^t - ns}$ und einer Funktion der einen Variablen

$$\theta = s_1(s-z),$$

die der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$0 = (l - mn) \cdot y + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \theta \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}\right)$$

und den Anfangsbedingungen

$$y = 1, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = +mn - l$$

für $\theta = 0$ genügt; diese Funktion war übrigens schon Bernoulli und Euler begegnet. Für

$$l - mn = 0$$

reduziert sich das Integral auf

$$u = e^{-ms^t - ns} \{\varphi_l(s) + \psi_l(s^t)\}^1,$$

Der schon in der ersten Abhandlung besprochene Fall

¹⁾ Größtenteils nach Burkhardt a. a. O., Heft 2, S. 398 ff.



$$m = \frac{f}{s+st}, \quad n = \frac{g}{s+st}, \quad l = \frac{h}{(s+st)^2},$$

wo f, g, h Konstante sind, wird nochmals vorgenommen; die bereits von Lagrange behandelte Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{m a^2}{x} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{m a^2 u}{x^2}$$

durch die Substitutionen

$$x + at = s \quad \text{und} \quad x - at = s'$$

auf eine Gleichung der eben erwähnten Art, nämlich

$$0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s'}\right) + \frac{m}{2(s+st)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial s'}\right) \right] - \frac{mu}{(s+st)^2},$$

reduziert.

Später¹⁾ überträgt dann Legendre die Laplacesche Kaskadenmethode auf die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in ihrer ursprünglichen Form, d. h. er zeigt, daß die Transformation auf die Euler-Laplacesche Normalform überflüssig ist. Legendre führt hierbei die Integrale der Gleichungen

$$dy - pdx = 0 \quad \text{und} \quad dy - Pdx = 0$$

ein, wo p und P die Wurzeln der Gleichung

$$p^2 - ap + b = 0$$

sind, und a und b die Koeffizienten von $\frac{dv}{dx dy}$ bzw. $\frac{dv}{dy^2}$ in der gegebenen Differentialgleichung — der Koeffizient von $\frac{dv}{dx^2}$ ist gleich 1 gesetzt — bedeuten; auf die Darstellung seiner Methode kann, da sie prinzipiell von der Laplaceschen nicht verschieden ist, hier verzichtet werden.

Das Ziel der Laplaceschen Arbeit war die Aufsuchung eines Kriteriums für die Möglichkeit einer Integration in geschlossener Form; der hierbei eingeschlagene Weg führte nebenbei noch auf die Lösung der Gleichung 2. Ordnung durch bestimmte Integrale. Von anderen Gesichtspunkten gehen die Untersuchungen aus, denen wir uns jetzt zuwenden. Lagrange, der Schöpfer der Theorie der partiellen Gleichung 1. Ordnung, derselbe, der durch seine Arbeiten über Natur und Fortpflanzung des Schalls das Interesse an der Gleichung 2. Ordnung so mächtig gefördert hat, ist später nur mehr gelegentlich

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 319.

auf diese zurückgekommen; erwähnt sei von ihm die Behauptung¹⁾, daß man bei Kenntnis zweier verschiedenen vollständigen ersten Integrale allgemein das vollständige endliche Integral finden könne, indem man zuerst $\frac{dz}{dx}$, sodann $\frac{dz}{dy}$ aus jenen eliminiere und die durch partielle Integration nach x bzw. y gebildeten Integralgleichungen miteinander vergleiche.

Weiterhin ist Monge zu nennen, der abweichend von Laplace unter einer linearen Gleichung 2. Ordnung jede Gleichung

$$Ar + Bs + Ct + D = 0$$

versteht, wo r, s, t in üblicher Weise die partiellen Ableitungen 2. Ordnung bedeuten und A, B, C, D beliebige Funktionen von x, y, z, p und q sind, der also nur verlangt, daß r, s und t linear auftreten.²⁾ Das Verfahren ist genau dasselbe wie sonst: Reduktion auf totale Gleichungen. Die Relationen

$$dp = r dx + s dy \quad \text{und} \quad dq = s dx + t dy,$$

„die nichts Neues sagen“, gestatten zwei von den drei Größen r, s, t zu eliminieren, und man erhält:

$$\begin{aligned} Bdpdy + Cdqdy - Cdpdx + Ddy^2 &= -r\{A dy^2 - B dx dy + C dx^2\} \\ Adpdy + Cdqdx + Ddx dy &= -s\{A dy^2 - B dx dy + C dx^2\} \\ Adpdx - Adqdy + Bdqdx + Ddx^2 &= -t\{A dy^2 - B dx dy + C dx^2\}. \end{aligned}$$

Damit diese Gleichungen nicht r, s, t in x, y, z, p, q bestimmen können, muß gleichzeitig

$$\begin{aligned} A dy^2 - B dx dy + C dx^2 &= 0 \\ Adpdy + Cdqdx + Ddx dy &= 0 \\ Bdpdy + C(dqdy - dpdx) + Ddy^2 &= 0 \\ A(dpdx - dqdy) + Bdqdx + Ddx^2 &= 0. \end{aligned}$$

Von diesen vier Gleichungen sind zwei die Folge der beiden übrigen; sie erfahren, wie Monge in seiner Application zeigt, mit Hilfe der Charakteristikentheorie eine einfache geometrische Deutung. Dieselbe Deutung des Wortes simultan, die schon früher den Zusammenhang zwischen totalen und partiellen Gleichungen vermitteln

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 95. Der Aufsatz stammt aus dem Jahre 1774. ²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 126 ff. Vgl. auch Mémoires de l'Académie de Turin 1784/85 (1786), p. 31 ff.; ferner Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 720, woselbst die speziellere Gleichung $Lr + Ms + Nt = 0$ auf totale Gleichungen reduziert, auch die Gleichung der Minimalflächen behandelt wird.



mußte, führt auch jetzt zu dem Schluß, daß $V = \varphi(U)$ ein erstes Integral (intégrale première) der vorgelegten Gleichung ist, wenn $V = a$ und $U = b$ die vollständigen Integrale zweier von den angegebenen vier totalen Gleichungen oder zweier gleichwertigen sind. Sind zwei derartige Gleichungen zwar integrierbar, läßt sich aber keine von ihnen auf den ersten Grad reduzieren, so ist besondere Vorsicht nötig, in welcher Weise die betr. Integrale zu kombinieren sind, da nicht alle Kombinationen brauchbare Resultate geben; Monge gibt diesbezügliche Vorschriften.¹⁾ Von Beispielen ist die Gleichung mit konstanten Koeffizienten behandelt, außerdem die Differentialgleichung der Minimalflächen, letztere in wenig brauchbarer Form und fehlerhaft. Monge schreibt diese Gleichung Borda zu, wohl weil dieser eine kurze Abhandlung über diesen Gegenstand gebracht hatte²⁾; Borda selbst weist dort auf einen noch zu besprechenden Aufsatz in den Miscellanea Taurinensia, in dem Lagrange seine Variationsrechnung bekannt macht. Legendre zeigt³⁾ von der Mongeschen Integration, daß die darin auftretenden Integralzeichen sich über mehrere Variable erstrecken, ohne daß die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, und findet die richtige Lösung durch einfache Änderung der Variablen; als Beispiele bringt er den Rotationskörper, dessen Meridiankurve die Kettenlinie ist, sowie die Minimalfläche zwischen zwei windschiefen Geraden.⁴⁾

In der erwähnten Abhandlung behandelt Monge auch Gleichungen, für welche sich nicht ein erstes Integral der Form $V = \varphi(U)$, sondern komplizierteren Baues ergibt; aber leider fragt er nicht nach den Bedingungen, unter welchen ein erstes Integral der Form $V = \varphi(U)$ existiert; er wäre sonst notwendig auf die allgemeinere sogenannte Ampèresche Form der Differentialgleichung 2. Ordnung geführt worden, die noch ein additives Glied $E(rt - s^2)$ besitzt, aber trotzdem prinzipiell nicht schwieriger zu integrieren ist als die von ihm betrachtete lineare Gleichung. Übrigens war Monge die Einsicht in die Wichtigkeit der Verbindung $rt - s^2$ nicht verschlossen; dieser Ausdruck, der schon 1760 in den Eulerschen Untersuchungen über Flächenkrümmung auftritt, findet sich in verschiedenen von Monge untersuchten Differentialgleichungen, wie

$$rt - s^2 + A = 0 \quad \text{und} \quad (rt - s^2)^2 + 4rs = 0,$$

wieder.⁵⁾

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 143. ²⁾ Ebenda, 1767 (1770), p. 561 ff. Borda bezeichnet die Aufgabe als Problem von Lagrange. ³⁾ Ebenda 1787 (1789), p. 309 ff. ⁴⁾ Vgl. diesen Band S. 550 oben und S. 569. ⁵⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 89, 157, endlich p. 561, 562.

Monge behandelt¹⁾ auch nichtlineare Gleichungen 2. Ordnung, indem er sie auf lineare Gleichungen höherer Ordnung zurückführt. Sei $W = 0$ eine beliebig aus x, y, z, p, q, r, s, t zusammengesetzte Differentialgleichung. Durch Differentiation erhalte man hieraus mit Benutzung der Relationen

$$dz = p dx + q dy; \quad dp = r dx + s dy; \quad dq = s dx + t dy$$

die Gleichung

$$A dr + B ds + C dt + D dx + E dy = 0.$$

Wenn jetzt, sagt Monge, auf Grund einer gewissen Annahme über den Wert von $\frac{dy}{dx}$ die partielle Gleichung 3. Ordnung, die man erhält, eine Konstante weniger besitzt und linear oder doch von brauchbarer Gestalt ist, und es ist möglich, zwischen den drei ersten Integralen dieser Gleichung (und der ursprünglichen) die fünf Größen p, q, r, s, t auf einmal zu eliminieren, so hat man in dem Resultat dieser Elimination das gesuchte endliche Integral vor sich. Monge nimmt speziell

$$D dx + E dy = 0$$

an, berechnet daraus $\frac{dy}{dx}$ und setzt diesen Wert in

$$A dr + B ds + C dt = 0$$

ein, wo man sich dr durch $\frac{d^2z}{dx^2} dx + \frac{d^2z}{dx dy} dy$ usw. ersetzt denken muß; dadurch entsteht die lineare Gleichung 3. Ordnung

$$A E \frac{d^2z}{dx^3} + (B E - A D) \frac{d^2z}{dx^2 dy} + (C E - B D) \frac{d^2z}{dx dy^2} - C D \frac{d^2z}{dy^3} = 0,$$

die nach der gewöhnlichen Methode auf totale Gleichungen reduziert wird. Aus diesen folgert Monge mit Ausschaltung der Gleichung

$$D dx + E dy = 0,$$

die wieder auf die ursprüngliche Gleichung führt, folgende zwei Gleichungen, welche die beiden anderen Integrale der Gleichung 3. Ordnung liefern:

$$A dy^2 - B dx dy + C dx^2 = 0$$

und

$$A E dy dr + ds(C E dx - A D dy) - C D dx dt = 0.$$

Monge gibt als Beispiel die Gleichung

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 190.



$2bx(a^2r + 2as + t) + a\sqrt{(a^2r + 2as + t) - 2ab(ap + q)} = 0$,
welche auf

$$a^2dr + 2ads + dt = 0; \quad dx - ady = 0$$

und damit auf das Integral

$$z = \psi(x - ay) + x\varphi(x - ay) + 2b^2x^2[\varphi(x - ay)]^2$$

führt. Es ist leicht, fügt er hinzu, ähnliche Überlegungen für die Gleichungen höherer Ordnung anzustellen, aber man sieht auch, daß mit wachsender Ordnung die Fälle, wo das geschilderte Verfahren eine „vollständige“ Integration erlaubt, immer seltener werden.

Nach Monge ist Legendres Behandlung der speziellen Gleichung

$$A \frac{dz}{dx^2} + B \frac{dz}{dx dy} + C \frac{dz}{dy^2} = 0,$$

deren Koeffizienten A, B, C Funktionen von

$$\frac{dz}{dx} = p \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = q$$

allein sind, zu erwähnen.¹⁾ Auf einen sehr speziellen Fall dieser Gleichung war schon Monge gestoßen, der erkannt hatte²⁾, daß die Gleichung

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Az \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + Bz \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z^2}{\partial x^2} - A \frac{\partial z \partial z}{\partial x \partial y} - B \frac{\partial z^2}{\partial y^2} = 0$$

durch die Substitution $z = e^v$ in

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$$

übergeht; Monge findet

$$z = [\varphi(Px - y)] \times [\psi(Px - y)],$$

wo P und P' die Wurzeln von

$$P^2 - AP + B = 0$$

sind, und im Fall gleicher Wurzeln

$$z = [\varphi(Px - y)]^2 \times [\psi(Px - y)].$$

Legendre behandelt nun die allgemeine Gleichung folgendermaßen:

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 314. ²⁾ Mémoires présentés par divers Savans, t. VII, 1773 (1776), p. 323.

statt z, p, q als Funktionen von x und y aufzufassen, sieht er vielmehr umgekehrt x, y, z als Funktionen von p und q an; dann ist $xdp + ydq$ ein exaktes Differential $d\omega$ und folglich

$$x = \frac{d\omega}{dp}; \quad y = \frac{d\omega}{dq}; \quad z = px + qy - \omega.$$

Man sieht leicht, daß diese Gleichungen eine Berührungstransformation darstellen, die sich nach den Vorschriften von Monge oder Lie aus

$$-z - z_1 + xx_1 + yy_1 = 0$$

ergibt, wo der Übersicht halber z_1, x_1, y_1 statt ω, p, q geschrieben sind; Legendre erkennt aber den Zusammenhang seiner Methode mit der Mongeschen Theorie der Berührungstransformationen nicht. Führt man nun ω als neue abhängige Veränderliche ein, so müssen auch die Ableitungen von z nach x bzw. y durch die Differentialquotienten von ω nach p und q ersetzt werden. Legendre erhält auf diese Weise bei stillschweigender Unterdrückung eines Nenners $\frac{dd\omega}{dp^2} \cdot \frac{dd\omega}{dq^2} - \left(\frac{dd\omega}{dpdq}\right)^2$ die neue Gleichung

$$A \frac{dd\omega}{dq^2} - B \frac{dd\omega}{dpdq} + C \frac{dd\omega}{dp^2} = 0,$$

von der die Gleichung der Minimalflächen ein spezieller Fall ist.

Legendre behandelt¹⁾ auch einen speziellen Typus von Gleichungen höheren Grades, nämlich

$$r = F(s, t),$$

wo r, s und t die übliche Bedeutung haben. Sein Gedankengang ist ähnlich wie bei der eben behandelten linearen Gleichung; er folgert aus

$$dp = rdx + sdy \quad \text{und} \quad dq = sdx + tdy,$$

daß $xdr + yds$ und $xds + ydt$ exakte Differentiale sind, betrachtet x und y als Funktionen von s und t und setzt

$$xds + ydt = d\omega;$$

dann ist

$$x = \frac{d\omega}{ds}; \quad y = \frac{d\omega}{dt}.$$

Durch Differentiation der gegebenen Differentialgleichung folgt aber eine Gleichung

$$dr = Ads + Bdt,$$

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 317.



wo A und B bekannte Funktionen von s und t sind; somit wird

$$xdr + yds = (Ax + y)ds + Bxd t.$$

Da aber $xdr + yds$ ein vollständiges Differential sein soll, so muß

$$\frac{d(Ax + y)}{dt} = \frac{dBx}{ds},$$

oder, mit Berücksichtigung von

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{ds},$$

endlich

$$A \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = B \frac{dx}{ds}.$$

Setzt man hierin für x und y die oben angegebenen Ausdrücke

$$x = \frac{d\omega}{ds}; \quad y = \frac{d\omega}{dt}$$

ein, so ergibt sich unmittelbar die lineare Gleichung 2. Ordnung

$$\frac{dd\omega}{dt^2} + A \frac{dd\omega}{dt ds} - B \frac{dd\omega}{ds^2} = 0,$$

welche die 1. Ableitungen von ω nicht enthält.

Im Anschluß an frühere Arbeiten über die lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung¹⁾ behandelt Trembley in ganz analoger Weise die lineare Gleichung 2. Ordnung.²⁾ Ausgangspunkt für ihn ist eine gegebene Form des Integrals; Ziel die Aufsuchung integrierbarer Fälle. Zunächst nimmt er

$$z = II' \cdot F(\Phi') + II'' \cdot f(\Phi'')$$

als Integralgleichung an, wo die II und Φ Funktionen der unabhängigen Variablen x und y , die Striche aber natürlich keine Differentiationen bedeuten. Bei Elimination der willkürlichen Funktionen F und f , sagt Trembley, erhält man nur dann eine lineare Gleichung 2. Ordnung, wenn zwischen den II' , II'' und Φ' , Φ'' gewisse Relationen bestehen. Um diese zu finden, bildet Trembley die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von z , multipliziert sie mit unbestimmten Funktionen G , A , B , ..., addiert und setzt

¹⁾ Besonders Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. IX, Histoire p. 88 ff. (prés. 1794). ²⁾ Ebenda, t. X, 1792 (1797), Histoire p. 27—104. Die besprochene Abhandlung ist 1795 der Akademie vorgelegt. Siehe auch ebenda, t. XI, 1798 (1798), Histoire p. 58 (prés. 1797).

$$Gz + A \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + B \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) + C \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + E \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die einzelnen Differentialquotienten durch ihre aus der gegebenen Integralgleichung berechneten Werte, so treten die willkürlichen Funktionen F und f nebst ihren Derivierten in verschiedenen Verbindungen auf. Die Koeffizienten dieser Kombinationen setzt Trembley, da die Gleichung keine willkürlichen Funktionen mehr enthalten soll, gleich Null und erhält so 6 Gleichungen für die Φ und II , wie z. B.

$$C \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2 + D \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y} \right)^2 + E \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y} \right) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich zunächst die Verhältnisse der Größen G , A , B , ... durch die Φ und II ausdrücken; haben also umgekehrt jene Verhältnisse diese Form, so ist die Gleichung sicher durch

$$z = II' \cdot F(\Phi') + II'' \cdot f(\Phi'')$$

integriert. Sind die G , A , B , ... gegebene Funktionen, so besteht die Aufgabe darin, die II und Φ zu bestimmen. Trembley löst die Aufgabe für spezielle Fälle. Zuerst nimmt er $II' = II'' = 1$ an¹⁾ und berechnet aus den erwähnten 6 Gleichungen die Ableitungen von II und Φ durch die G , A , B , ... dargestellt. Für Φ' und Φ'' ergeben sich, wie schon aus der einen angeführten Relation ersichtlich, die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y} \right) + \left[\frac{E - \sqrt{EE - 4CD}}{2D} \right] \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right) = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y} \right) + \left[\frac{E + \sqrt{EE - 4CD}}{2D} \right] \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x} \right) = 0,$$

und das sind, wie es der Natur der Aufgabe nach nicht anders sein kann, genau die Gleichungen, welche Laplace zur Transformation der Gleichung 2. Ordnung auf die kanonische Form benutzte. Trembley ersetzt beide Gleichungen durch die totale

$$[E \mp \sqrt{EE - 4CD}] \partial y - 2D \partial x = 0,$$

wobei also E , C und D als gegeben zu betrachten sind; des weiteren stellt er Formeln auf, welche nach Berechnung von Φ' und Φ'' die Funktionen II' und II'' durch die Koeffizienten G , A , B , ... der gegebenen Differentialgleichung ausdrücken. Analog wird der Fall

$$\Phi' = \Phi''$$

¹⁾ Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XI, 1792 (1797), Histoire p. 35.



untersucht.¹⁾ Noch mehr Gelegenheit zu rechnen gibt die Annahme²⁾ einer komplizierteren Integralgleichung

$$z = \sum_{i=0}^n \Pi^{(n-i)} \cdot [F^{(i)}(\Phi') + f^{(i)}(\Phi'')],$$

wobei die $F^{(i)}$ und $f^{(i)}$ die Derivierten von F bzw. f bedeuten, und die $\Pi^{(i)}$ nach einem gewissen Gesetz auseinander hervorgehen. Weiterhin geht Trembley von der Integralgleichung

$$\psi(x, y, z) = \Pi(x, y) \cdot F(\Phi(x, y))$$

aus³⁾, die ihn zunächst auf eine komplizierte partielle Gleichung mit den abhängigen Variablen ψ und z und drei Bedingungsgleichungen führt. Diese komplizierte Form vergleicht er sodann mit der allgemeinen partiellen Gleichung 2. Ordnung, welche die ersten Ableitungen von z in der 2. Potenz enthält, und stellt ψ durch die Koeffizienten der letzteren dar. Ist nun eine derartige Gleichung 2. Ordnung gegeben, so existiert, wenn ψ außerdem die erwähnten Bedingungsgleichungen erfüllt, ein Integral der angegebenen Form. Ein Anhang⁴⁾ bringt eine Abänderung der besprochenen allgemeinen Methode. Endlich ist zu erwähnen, daß Trembley eine Unmenge von Beispielen, besonders aus Eulers Integralrechnung, nach seiner Methode rechnet, die nur den Nachteil hat, daß man bei einer beliebig vorgelegten Differentialgleichung von vornherein ersehen sollte, welche Form das Integral haben wird.

Von den Gleichungen höherer Ordnung gesteht Euler in seiner Integralrechnung⁵⁾ zu, daß die Einführung neuer Veränderlicher hier wegen der allzuverwickelten Formeln wenig zweckmäßig ist. Euler beschränkt sich auf drei Typen von Gleichungen, deren erster dadurch entsteht, daß man eine einzige Derivierte höherer Ordnung gleich Null oder einer Funktion von x und y gleichsetzt.⁶⁾ Für die Gleichung

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = a^3 z$$

versucht Euler ein Integral

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = nz,$$

das auf die Bedingung $n^3 = a^3$ führt und so drei partikuläre Integrale der Form

¹⁾ Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XI, 1792 (1797), Histoire, p. 42 ff.
²⁾ Ebenda, p. 83 ff. ³⁾ Ebenda, p. 101 ff. ⁴⁾ Ebenda, p. 105—109.
⁵⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 348. ⁶⁾ Ebenda, p. 351 bzw. 355.

$$z = e^{ax} \Gamma(y)$$

mit der willkürlichen Funktion Γ liefert; eine ähnliche Methode hat Euler auch zur Integration der Gleichung der Saitenschwingungen benutzt (S. 996). Als zweiter Fall ist die Gleichung behandelt, welche die Ableitungen nach einer der beiden Variablen x und y gar nicht enthält. Man kann deswegen z. B. in der Gleichung

$$Px + Q \left(\frac{dz}{dx}\right) + R \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \dots = 0,$$

wo P, Q, R, \dots Funktionen von x und y sind, y als konstant ansehen und integrieren; man hat lediglich für die Integrationskonstanten nachträglich arbiträre Funktionen von y einzuführen. Euler betrachtet verschiedene integrable Gleichungen 3. Ordnung; hierauf die Gleichung der Schwingungen elastischer Lamellen

$$\left(\frac{d^4 z}{dx^4}\right) = a a \left(\frac{ddz}{dx^2}\right),$$

von der er als partikuläres Integral die Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + b \left(\frac{dz}{dx}\right)$$

mit der Bedingung $b = \pm a$ angibt.¹⁾ Der dritte Typus, von Euler als homogener bezeichnet, ist dadurch charakterisiert, daß die Differentialgleichung nur Derivierte derselben Ordnung und kein Absolutglied besitzt. Für die Lösung der Gleichung

$$A \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + B \left(\frac{d^2 z}{dx^2 - 1 dy}\right) + C \left(\frac{d^2 z}{dx^2 - 2 dy^2}\right) + \dots = 0,$$

wo A, B, C, \dots Konstante sind, gibt Euler die Regel an: man bilde die algebraische Gleichung $\lambda^{\text{ten}} \text{ Grades}$

$$A n^2 + B n^{2-1} + C n^{2-2} + \dots = 0$$

und bestimme ihre Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; dann ist das „vollständige Integral“ der vorgelegten Gleichung

$$z = \Gamma(y + \alpha x) + \mathcal{A}(y + \beta x) + \Sigma(y + \gamma x) + \dots,$$

wo $\Gamma, \mathcal{A}, \Sigma, \dots$ willkürliche Funktionen sind. Im Fall gleicher

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 374. Die Schwingungen elastischer Lamellen und Ruten unter verschiedenen Grenzbedingungen hat Euler ausführlich Acta Academiae Petropolitanae 1779 (1782), pars I, p. 103 ff. behandelt. Daran knüpft endlich ein Aufsatz von Lexell an: ebenda, 1781 (1785), pars II, p. 185 ff.



Wurzeln treten Faktoren x, x^2, \dots oder, was die Form des Integrals nur scheinbar ändert, y, y^2, \dots auf; ein Resultat, das Euler dadurch erhält, daß er die gleichen Wurzeln als unendlich wenig verschieden annimmt und nach geeigneter Umformung zur Grenze übergeht. Ist von den ersten Koeffizienten A, B, C, \dots eine Anzahl Null, so sind ebensoviele Wurzeln n unendlich groß¹⁾, und der entsprechende Teil des Integrals lautet $\Gamma(x) + y\mathcal{A}(x) + y^2\mathcal{B}(x) + \dots$.

Dieser Gleichungstypus begegnet uns bereits bei Laplace²⁾, der indessen auf der rechten Seite statt der Zahl 0 eine gegebene Funktion X von x annimmt. Laplace behandelt die Gleichung mit Hilfe einer Methode, die derjenigen für die lineare totale Gleichung n ter Ordnung vollkommen analog ist (vgl. S. 931); nach seiner Behauptung hat sie schon d'Alembert im 4. Band seiner *Opuscules* integriert. Man vergleiche hierzu auch die von Legendre behandelte Gleichung 2. Ordnung (vgl. S. 1012).

Euler hat noch verschiedene spezielle Gleichungen höherer Ordnung integriert; als Integral von

$$\left(\frac{d^4z}{dy^4}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + 2ab \left(\frac{dz}{dx}\right) + bbz$$

gibt er³⁾ an

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \pm a \left(\frac{dz}{dx}\right) \pm bz,$$

und knüpft daran die Bemerkung, daß man a posteriori, d. h. vom Integral ausgehend, noch weitere derartige Beispiele finden könne. Das Problem der Schwingungen von Glocken behandelt Euler durch Zerlegung der Glocke in Kreisringe und Betrachtung von deren Bewegung. Als Gleichung für die letztere erhält er

$$0 = \frac{1}{ffc} \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{1}{aa} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4$$

mit der partikulären Lösung

$$y = A \sin\left(\frac{ix}{a} + \alpha\right) \sin\left(\frac{ifct}{aa} \sqrt{(i^2 - 1) + \nu}\right),$$

wo i jede ganze Zahl bedeuten, jeder Sinus durch einen Cosinus ersetzt werden kann, und A, α, ν willkürliche Größen sind. Aus den Partikulärlösungen für die Kreisringe sucht er dann die Schwingungen der ganzen Glocke zu konstruieren.

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 387. ²⁾ Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 339. ³⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 377. ⁴⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. X, 1764 (1766), p. 269. Vgl. Burkhart, a. a. O., Heft 2, S. 364.

Monge behandelt¹⁾ durch sukzessive Ordnungserniedrigung einen weiteren Typus, welcher allgemeiner Behandlung zugänglich ist, nämlich die Gleichung

$$x^m \frac{\delta^m z}{dx^m} + m x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} + m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} d^2 dz}{dx^{m-2} dy^2} + \dots = 0$$

mit dem Integral

$$z = f\left(\frac{x}{y}\right) + yf'\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) + \dots + y^{m-1} \varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

wo $f, f', f'', \dots, \varphi$ willkürliche Funktionen bedeuten. Monge sagt: Setzt man

$$x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} z}{dx^{m-1}} + (m-1)x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} + \dots = V,$$

so ergibt sich mit Benutzung der vorgelegten Differentialgleichung

$$x \frac{\delta V}{dx} + y \frac{dV}{dy} - (m-1)V = 0^2),$$

also

$$V = y^{m-1} \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Dann ist

$$x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots = y^{m-1} \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

als *intégrale première* der gegebenen Gleichung aufzufassen und kann ebenso weiter behandelt werden, ohne daß durch die willkürliche Funktion φ die Integration erschwert würde. Weiterhin behauptet Monge, daß

$$z = g + k$$

das endliche und „vollständige“ Integral von

$$W = G + K$$

sei, wenn $z = g$ bzw. $z = k$ die endlichen vollständigen Integrale von $W = G$ bzw. $W = K$ seien, wo W, G, K Ausdrücke obiger Art sind. Mit Hilfe dieser Regel sucht er dann Gleichungen

$$W + AV + BV' + \dots = K$$

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. V², 1770/73, p. 94. Auch bei Condorcet findet sich in einem Aufsatz über partielle Differentialgleichungen *Histoire de l'Académie des Sciences* 1770 (1773), p. 151 ff. die Schreibweise $\delta^m d^m Z$, wo mit d die Differentiation nach x , mit δ diejenige nach y angedeutet ist. Siehe auch ebenda 1772, part. 1 (1775), p. 14. ²⁾ Ebenda (Misc. T.), t. V², 1770/73, p. 89.



zu behandeln, wo die W, V, V', \dots Gebilde obiger Art mit verschiedenen m bedeuten.

Nikolaus Fuß schreibt¹⁾ über die Integration der Gleichungen

$$Az + BP = 0; \quad Az + BP + CQ = 0$$

usw., wo A, B, C, \dots Konstante sind

$$P = x \left(\frac{dz}{dx} \right) + y \left(\frac{dz}{dy} \right); \quad Q = x^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) + 2xy \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) + y^2 \left(\frac{d^2z}{dy^2} \right)$$

usw. Legendre behandelt²⁾ in seinem mehrerwähnten Aufsatz die vervollständigte Gleichung dieser Art

$$T = av + b \left(x \frac{dv}{dx} + y \frac{dv}{dy} \right) + c \left(x^2 \frac{d^2v}{dx^2} + 2xy \frac{d^2v}{dx dy} + y^2 \frac{d^2v}{dy^2} \right) + \dots$$

und gibt an, daß sie sich entweder durch Ordnungserniedrigung behandeln läßt oder mittels der Substitutionen

$$\frac{x}{y} = \theta, \quad y = \pi$$

in die Gleichung

$$T = av + b\pi \frac{dv}{d\pi} + c\pi^2 \frac{d^2v}{d\pi^2} + \dots$$

übergeht, deren Integration keinerlei Schwierigkeiten macht.

Die allgemeine lineare Gleichung 3. Ordnung mit drei Variablen ist von Monge nach seiner bekannten Methode behandelt.³⁾ Sei

$$dr = \alpha dx + \beta dy; \quad ds = \beta dx + \gamma dy; \quad dt = \gamma dx + \varepsilon dy,$$

so daß also $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ die vier partiellen Differentialquotienten 3. Ordnung sind, sowie

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\varepsilon + E = 0,$$

wo A, B, C, D, E gegebene Funktionen von x, y, z, p, q, r, s, t bedeuten. Eliminiert man daraus drei von den vier Größen $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, so entstehen Gleichungen, welche, da sie die vierte der Größen $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ nicht bestimmen können, zerfallen müssen. So erhält Monge durch Elimination von $\beta, \gamma, \varepsilon$ die zwei totalen Gleichungen

$$A dy^3 - B dy^2 dx + C dy dx^2 - D dx^3 = 0;$$

$$dy^2(Bdr + Cds + Ddt) - dx dy(Cdr + Dds) + D dx^2 dr + E dy^3 = 0.$$

¹⁾ Acta Academiae Petropolitanae 1780 (1783), pars I, p. 76 ff. ²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 336. ³⁾ Ebenda 1784 (1787), p. 155.

Zwei Integrale

$$V = a \quad \text{und} \quad U = b$$

dieser Gleichungen liefern das erste Integral

$$V = \varphi(U)$$

der ursprünglichen Gleichung. Monge benützt diese Methode zur Integration der Differentialgleichung der Regelflächen (vgl. S. 571), die er in der Form

$$t^3 \alpha + 3t^2 u \beta + 3tu^2 \gamma + u^3 \varepsilon = 0$$

angibt, wo zur Abkürzung

$$-s + \sqrt{(s^2 - rt)} = u^2$$

gesetzt ist. Die eben aufgestellten totalen Gleichungen lauten in diesem Falle:

$$t^3 dy^3 - 3t^2 u dy^2 dx + 3tu^2 dy dx^2 - u^3 dx^3 = 0;$$

$$dy^2(3t^2 dr + 3tuds + u^2 dt) - dx dy(3utdr + u^2 ds) + u^2 dx^2 dr = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen hat drei gleiche Wurzeln

$$tdy - u dx = 0;$$

dadurch geht die zweite Gleichung in

$$u^2 dt + 2ut ds + t^2 dr = 0$$

mit dem Integral

$$\frac{u}{t} = a$$

über. Damit findet man aber aus

$$tdy - u dx = 0$$

die Gleichung

$$y = ax + b$$

und somit das erste Integral

$$y = \frac{u}{t} x + \varphi \left(\frac{u}{t} \right).$$

Setzt man für u seinen Wert in

$$\frac{u}{t} = a$$

ein, so kommt

$$r + 2as + a^2 t = 0$$

¹⁾ Diese Gleichung läßt sich mit der vorhergehenden gleichartig schreiben, nämlich $t^3 \cdot r + 2tu \cdot s + u^3 \cdot t = 0$.



mit dem intégrale complète

$$z = x\psi(ax - y) + \pi(ax - y).$$

Monge erhält endlich die beiden simultanen Gleichungen

$$y = ax + \varphi(a) \quad \text{und} \quad z = x\psi(a) + \pi(a),$$

aus denen man sich a eliminiert zu denken hat. Nach einer Bemerkung, wie die einzelnen Wurzeln der erwähnten totalen Gleichungen des allgemeinen Falles zu kombinieren sind, wenn jede dieser Gleichungen ungleiche Wurzeln besitzt, weist Monge darauf hin, daß seine Methode auch auf Gleichungen höherer Ordnung anwendbar ist und nennt den ihr zugrunde liegenden Gedankengang la vérité metaphysique du calcul aux différences partielles.¹⁾

Legendre verwandelt²⁾ die spezielle Gleichung 3. Ordnung, in welcher die abhängige Variable v höchstens einmal nach y differenziert auftritt, durch die Transformation

$$\frac{dv}{dx} + pv = v'$$

in eine Gleichung 2. Ordnung, wobei p eine einfache Differentialgleichung zu erfüllen hat.

Trembley hat außer der Gleichung 1. und 2. Ordnung auch diejenige 3. Ordnung aus dem gegebenen Integral konstruiert.³⁾ Er setzt

$$z = \Pi(x, y) \cdot F(\Phi(x, y)),$$

wo unter F eine willkürliche Funktion zu verstehen ist. Indem er aus den partiellen Ableitungen von z die allgemeine Gleichung 3. Grades bildet, welche diese Ableitungen nur in der ersten Potenz enthält, bekommt er vier Bedingungsgleichungen, von deren Erfülltsein das Bestehen der Differentialgleichung 3. Ordnung bzw. der angenommenen Integralgleichung abhängt. Die eine dieser Bedingungs-

gleichungen ist hinsichtlich der Unbekannten $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$ vom 3. Grade und $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 158. Es mag hier noch die Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dx^2dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dx dy^2}\right)$$

erwähnt werden, die ebenda p. 567 kurz besprochen ist. ²⁾ Ebenda 1787 (1789), p. 332. ³⁾ Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XIII, 1795/96 (1802), p. 101 ff. Aus dem Jahre 1798.

liefert somit drei Werte von Φ , die Φ' , Φ'' , Φ''' heißen mögen. Hiermit ergibt sich das Integral

$$z = \Pi' \cdot F(\Phi') + \Pi'' \cdot f(\Phi'') + \Pi''' \cdot \Sigma(\Phi'''),$$

wo F , f , Σ willkürliche, Π' , Π'' , Π''' passend zu bestimmende Funktionen sind. Die Methode hat den Nachteil, daß von vornherein nicht zu sehen ist, ob ein Integral der angenommenen Form existiert; trotzdem scheut Trembley nicht vor der Berechnung der kompliziertesten Ausdrücke und Formeln zurück.

Cousin ist, indem er die oben erwähnten Untersuchungen in anderer Richtung weiter verfolgte, zu einem Theorem über die Integration der allgemeinen im Mongeschen Sinne linearen Gleichung n^{ter} Ordnung gekommen¹⁾, das die Integrationsvorschriften von Monge für die Gleichung 1., 2. und 3. Ordnung als Spezialfälle umfaßt. Sei

$$\alpha \frac{d^n z}{dy^n} + \beta \frac{d^n z}{dy^{n-1} dx} + \gamma \frac{d^n z}{dy^{n-2} dx^2} + \dots + \varepsilon \frac{d^n z}{dx^n} = \tau,$$

wo α , β , γ , ... ε , τ Funktionen von x , y , z und den partiellen Abgeleiteten von z , die der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschließlich, bedeuten. Man berechne die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha m^n + \beta m^{n-1} + \gamma m^{n-2} + \dots + \varepsilon = 0$$

(vgl. Eulers homogene Gleichung S. 1017) und bilde die Größen

$$\alpha m + \beta = \alpha \lambda; \quad \alpha \lambda m + \gamma = \alpha \mu; \quad \alpha \mu m + \delta = \alpha \nu$$

usw. Dann ergeben sich alle Integrale der ursprünglichen partiellen Gleichung durch Integration folgender beiden totalen Gleichungen

$$m dy + dx = 0 \quad \text{und} \quad \alpha m(dy + \lambda dq + \mu dr + \nu ds + \dots) + \tau dx = 0,$$

wo p , q , r , s , ... die Differentialquotienten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}$, $\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2} dx}$, ... bedeuten. Cousin betrachtet sodann speziell diejenige Gleichung, welche keine Produkte oder Potenzen von Differentialquotienten enthält, in der also sämtliche Abgeleitete linear auftreten; er bezeichnet sie als lineare Gleichung, während Monge dabei nur das Linearsein der Derivierten n^{ter} Ordnung fordert.

Zu den frühest behandelten Differentialgleichungen von mehr Variablen und höherer Ordnung — die 1. Ordnung sind

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 688 ff. Im Text ist die Darstellung von ebenda 1784 (1787), p. 407 zugrunde gelegt.



bereits an Ort und Stelle besprochen worden — gehören die Grundgleichungen der Hydrodynamik. Euler gibt, wie schon erwähnt, in einem Brief an Lagrange die Gleichung

$$\frac{1}{2gh} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2 u}{dX^2} \right) + \left(\frac{d^2 u}{dY^2} \right) + \left(\frac{d^2 u}{dZ^2} \right)$$

an und sucht partikuläre Lösungen von ihr aufzufinden.¹⁾ Lagrange sucht fernerhin die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen in ihrer Lagrangeschen Form zu integrieren.²⁾ Durch Einführung der Multiplikatoren L, M, N , wo L, M, N Funktionen der drei Variablen (changeantes) X, Y, Z bedeuten, Addition und Integration über den von der Flüssigkeit eingenommenen Raum erhält er zunächst die Gleichung

$$\int \left(\frac{d^2 x}{dt^2} L + \frac{d^2 y}{dt^2} M + \frac{d^2 z}{dt^2} N \right) dX dY dZ \\ - c \int \left(\frac{d^2 x}{dX^2} L + \frac{d^2 y}{dX dY} L + \frac{d^2 z}{dX dZ} L + \frac{d^2 y}{dY^2} M + \frac{d^2 x}{dY dX} M \right. \\ \left. + \frac{d^2 z}{dY dZ} M + \frac{d^2 x}{dZ^2} N + \frac{d^2 y}{dZ dX} N + \frac{d^2 z}{dZ dY} N \right) dX dY dZ.$$

Die hier auftretenden dreifachen Integrale werden durch partielle Integration umgeformt, so daß z. B.

$$\int \frac{d^2 x}{dX^2} L dX dY dZ = \int x \frac{d^2 L}{dX^2} dX dY dZ + \int \left(\frac{dx}{dX} L - x \frac{dL}{dX} \right) dY dZ \text{ usw.}$$

Lagrange zeigt, daß unter gewissen Bedingungen, die allerdings in den meisten Fällen nicht angebar sein werden, alle auftretenden Doppelintegrale (Oberflächenintegrale) zum Verschwinden gebracht werden können und reduziert dann durch die Festsetzungen

$$\frac{d^2 L}{dX^2} + \frac{d^2 M}{dX dY} + \frac{d^2 N}{dX dZ} = kL; \quad \frac{d^2 M}{dY^2} + \frac{d^2 L}{dY dX} + \frac{d^2 N}{dY dZ} = kN; \\ \frac{d^2 N}{dZ^2} + \frac{d^2 L}{dZ dX} + \frac{d^2 M}{dZ dY} = kN$$

und die Substitution

$$s = \int (xL + yM + zN) dX dY dZ$$

— das Integral genommen über den von Flüssigkeit erfüllten Raum — die ursprüngliche Gleichung auf

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. i—10. Vgl. auch Histoire de l'Académie de Berlin, t. XV, 1759 (1766), p. 236 ff. ²⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II², p. 120. Mit Benutzung von Burkhardt, a. a. O., Heft 2, S. 365.

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = kcs.$$

Bestimmt man daraus s und berücksichtigt die physikalischen Anfangsbedingungen für $t = 0$, so läßt sich damit, wie Lagrange andeutet, die Berechnung von x, y, z auf die an einfacheren Differentialgleichungen 2. Ordnung auseinandergesetzten Methoden zurückführen. Die Berechnung von L, M, N gelingt Lagrange nur in speziellen Fällen; so führt die Annahme

$$L = A e^{pX+qY+rZ} \sqrt{V}; \quad M = B e^{pX+qY+rZ} \sqrt{V}; \quad N = C e^{pX+qY+rZ} \sqrt{V}$$

auf die Gleichungen

$$A = c(Ap^2 + Bpq + Cpr); \quad B = c(Bq^2 + Apq + Crq); \\ C = c(Cr^2 + Apr + Bqr)$$

zur Bestimmung von p, q, r . Schließlich¹⁾ sind noch Reihenentwicklungen abgeleitet, die jedoch sehr viel Raum einnehmen.

Unter allgemeinen Gesichtspunkten sucht die Gleichungen von mehr Variablen zuerst Euler zu behandeln. Er macht auch darauf aufmerksam, daß bei drei unabhängigen Variablen die willkürliche Funktion der Integralgleichung eine Funktion von zwei Variablen ist.²⁾ Er unterscheidet verschiedene Typen, die einer gleichartigen Behandlung zugänglich sind. Ist eine einzige Derivierte von v einer beliebigen Funktion der unabhängigen Variablen gleichgesetzt, so findet man das Resultat, indem man bei jeder Integration alle Veränderlichen bis auf eine konstant läßt und die Integrationskonstanten durch willkürliche Funktionen dieser Variablen ersetzt. Die Anzahl der willkürlichen Funktionen, bemerkt Euler ausdrücklich, ist immer gleich der Ordnung der Differentialgleichung. Ist weiterhin die Differentialgleichung von der Art, daß sie nur die Ableitung nach ein und derselben Variablen, etwa x enthält, so kann man wieder die übrigen Veränderlichen als konstant ansehen und nachher — wie wir sagen würden — die Variation der Konstanten anwenden. Treten nur die Ableitungen nach zweien der Variablen auf, so kann man wenigstens die dritte als konstant betrachten und die Gleichung als Differentialgleichung zweier unabhängigen Variablen behandeln.³⁾ Euler untersucht außerdem speziell die „homogene“ Gleichung 2. und 3. Ordnung, d. i. jene Gleichung, welche nur die Differentialquotienten der höchsten Ordnung und kein Absolutglied besitzt. Unter der Annahme, daß v nur von

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. II², p. 127. ²⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 397. ³⁾ Ebenda, bzw. p. 409, 416, 419.



$$t = \alpha x + \beta z \quad \text{und} \quad u = \gamma y + \delta z$$

abhängig, führt die Gleichung 2. Ordnung¹⁾

$$A \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) + B \left(\frac{d^2 v}{dy^2} \right) + C \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right) + 2D \left(\frac{d^2 v}{dx dy} \right) + 2E \left(\frac{d^2 v}{dx dz} \right) + 2F \left(\frac{d^2 v}{dy dz} \right) = 0$$

durch Einführung von t und u an Stelle von x, y, z zu den drei Gleichungen

$$A\alpha\alpha + C\beta\beta + 2E\alpha\beta = 0; \quad 2C\beta\delta + 2D\alpha\gamma + 2E\alpha\delta + 2F\beta\gamma = 0$$

und

$$B\gamma\gamma + C\delta\delta + 2F\gamma\delta = 0,$$

die sich zu der Bedingung

$$AFF + BEE + CDD = ABC + 2DEF$$

vereinigen lassen. Das ist aber, sagt Euler, die Bedingung dafür, daß sich

$$Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

in

$$(ax + by + cz)(fx + gy + hz)$$

spalten läßt. Nun lassen sich die Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\delta}{\gamma}$ durch die A, B, C, \dots , diese selbst aber durch die a, b, c, \dots ausdrücken; so gelingt es Euler, t und u (bis auf einen konstanten Faktor, der gleichgültig ist) durch die a, b, c, \dots darzustellen; beim Bestehen der erwähnten Bedingungsgleichung, welche, wie nebenbei²⁾ gezeigt wird, die homogenen Gleichungen 1. Ordnung

$$a \left(\frac{dv}{dx} \right) + b \left(\frac{dv}{dy} \right) + c \left(\frac{dv}{dz} \right) = 0 \quad \text{und} \quad f \left(\frac{dv}{dx} \right) + g \left(\frac{dv}{dy} \right) + h \left(\frac{dv}{dz} \right) = 0$$

im Gefolge hat, lautet dann das „vollständige“ Integral

$$v = \Gamma \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \& \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right) + \mathcal{A} \left(\frac{x}{f} - \frac{z}{h} \& \frac{y}{g} - \frac{z}{h} \right),$$

wo Γ und \mathcal{A} willkürliche Funktionen sind. Euler behandelt sodann die homogene Gleichung 3. Ordnung³⁾ unter der Annahme, daß ein Integral

$$a \left(\frac{dv}{dx} \right) + b \left(\frac{dv}{dy} \right) + c \left(\frac{dv}{dz} \right) = 0$$

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 447 ff. ²⁾ Ebenda, p. 451.

³⁾ Ebenda, p. 453.

existiert; diese Hypothese führt auf die Bedingung, daß ein gewisser algebraischer Ausdruck 3. Grades, gebildet aus x, y, z und den Koeffizienten A, B, C, \dots der gegebenen Differentialgleichung, sich in drei Linearfaktoren der Form $ax + by + cz$ spalten läßt; ist diese Bedingung erfüllt, so kann das „vollständige“ Integral ohne weiteres angegeben werden. Aber auch wenn vollständige Zerfällung in Linearfaktoren nicht möglich ist, sondern — und dies gilt allgemein auch für homogene Gleichungen höherer Ordnung — lediglich eine Zerspaltung in Faktoren höheren Grades möglich ist⁴⁾, kann man noch einen gewissen Nutzen aus dieser Faktorenerlegung ziehen; denn es ist dann wenigstens Ordnungserniedrigung anwendbar, so führt z. B. ein Faktor $xy - zz$ auf

$$\left(\frac{dv}{dx dy} \right) - \left(\frac{dv}{dz^2} \right) = 0.$$

Schließlich wird noch der Fall, daß eine der Größen a, b, c gleich Null ist, an einem Beispiel erläutert. Endlich sagt Euler⁵⁾ von der hydrodynamischen Gleichung mit vier unabhängigen Veränderlichen

$$\left(\frac{d^2 v}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) + \left(\frac{d^2 v}{dy^2} \right) + \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right),$$

daß ihr vollständiges Integral zwei willkürliche Funktionen von je drei Variablen haben müsse, und versucht ein Integral der Form

$$v = \Gamma(ax + \beta y + \gamma z + \delta t).$$

Es ergibt sich die Bedingung

$$\delta\delta = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma.$$

Ferner gibt Euler noch die Integrale

$$v = \frac{\Gamma(t \pm \sqrt{(xx + yy + zz)})}{\sqrt{(xx + yy + zz)}}; \quad v = \frac{\Gamma(x \pm \sqrt{(tt - yy - zz)})}{\sqrt{(tt - yy - zz)}},$$

sowie die beiden anderen an, welche sich durch Vertauschung von x mit y und z hieraus ergeben.

An anderer Stelle behandelt Euler spezielle Gleichungen von mehr Variablen; für die Schwingungen von Pauken stellt er⁶⁾ die Gleichung

$$\frac{1}{ec} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) + \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right)$$

auf; hier findet man leicht

⁴⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 457. ⁵⁾ Ebenda, p. 458.

⁶⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae t. X, 1764 (1766), p. 252.



wo

$$z = \Phi(\alpha x + \beta y + \gamma t),$$

$$\alpha\alpha + \beta\beta = \frac{\gamma\gamma}{ee}$$

ist. Er versucht¹⁾ auch für den Fall $e = 1$ eine Lösung der Form

$$z = \sin(\alpha t + \mathfrak{A}) \sin\left(\frac{\beta x}{a} + \mathfrak{B}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma y}{b} + \mathfrak{C}\right);$$

dann müssen die Konstanten α, β, γ der Bedingung

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

gehörten. Euler erkennt diese Lösung als den Fall der Schwingungen einer rechteckigen Membran, die an den Rändern ringsum befestigt ist. Um weitere Lösungen zu finden, transformiert er auf Polarkoordinaten und wird dabei schließlich auf unsere Zylinderfunktion geführt.

Monge behandelt²⁾ die lineare Gleichung 2. Ordnung mit drei unabhängigen Variablen; man erhält sie aus der Eulerschen homogenen Gleichung, indem man ein Absolutglied hinzufügt und die Koeffizienten als Funktionen der vier Variablen und der Derivierten 1. Ordnung auffaßt. Monge wendet sein oft bewährtes Verfahren an, indem er die drei Gleichungen, welche die Derivierten 2. Ordnung mit den totalen Differentialen der drei unabhängigen Variablen und der drei Derivierten 1. Ordnung verknüpfen, einführt, mit ihrer Hilfe drei Derivierte 2. Ordnung aus der ursprünglichen Gleichung eliminiert und wie immer das Resultat der Elimination in einzelne Gleichungen zerlegt. Er erhält so genau dieselbe Bedingungsgleichung wie Euler, nur in etwas anderer Bezeichnungsweise, und sagt von ihr: „la proposée n'est intégrable que lorsque les coefficients satisfont à cette condition“; daß sie die Bedingung für das Zerfallen eines gewissen Ausdrucks in Linearfaktoren ist, braucht er deshalb nicht anzugeben, weil er sie umgekehrt gerade aus diesen Linearfaktoren, die ihm seine Methode zuerst liefert, herleitet. Monge deutet auch kurz die Ausdehnung seines Verfahrens auf Gleichungen höherer Ordnung an; er findet, daß die Anzahl der Bedingungsgleichungen — im Fall von drei unabhängigen Variablen natürlich — immer gleich der Ordnung der Differentialgleichung, vermindert um die Einheit, ist. Im Anschluß daran erwähnt er wieder, daß seine totalen Gleichungen, auf die er das Problem reduziert, von derselben Allgemeinheit (de la même généralité) seien wie die partiellen Gleichungen. „Le travail

¹⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. X, 1764 (1766), p. 248.

²⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 161.

de l'intégration“ sagt er, „ne consiste donc plus, lorsqu'elle est possible, qu'à transformer ces équations en d'autres qui les comportent toutes et qui soient intégrables“. So eigentümlich diese Worte beim ersten Lesen anmuten, man muß sich hüten, ihnen allzu große Bedeutung beizumessen oder gar Liesche Ideen darin finden zu wollen; Lie sagt ausdrücklich, Integration ist nichts anderes als Transformation; Monge unterscheidet genau zwischen Transformation und Integration; was er verlangt, ist lediglich Transformation auf einen integrierbaren Typus.

Auch Legendre untersucht³⁾ die lineare Gleichung 2. Ordnung

$$0 = \frac{d^2v}{dx^2} + a \frac{d^2v}{dx dy} + b \frac{d^2v}{dx dz} + \dots,$$

verlangt aber im Gegensatz zu Monge, daß die Koeffizienten a, b, \dots die abhängige Variable v nicht enthalten, also Funktionen von x, y, z allein sind. Als „notwendige Bedingung“ für die Existenz eines Integrals, das nur eine endliche Zahl von Termen aufweist, bezeichnet auch er die Möglichkeit, das Polynom $x^2 + axy + byz + \dots$ in zwei rationale Faktoren zerspalten zu können. Er behauptet, daß für Gleichungen aller Ordnungen ein ähnliches Gesetz bestehe, und geht dann⁴⁾ endlich zu Gleichungen 2. Ordnung mit vier unabhängigen Veränderlichen über, bei denen das Prinzip der Zerspaltung wieder von Bedeutung wird.

Gleichungen mit mehreren abhängigen Variablen treten im allgemeinen nur bei Simultansystemen auf, wie sie schon frühzeitig bei hydrodynamischen Problemen untersucht wurden; so haben Lagrange⁵⁾ und d'Alembert⁶⁾ das System

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dx} = 0; \quad \frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dt} = 0$$

integriert. Der Fall einer einzigen Gleichung mit mehreren abhängigen Variablen findet sich bei Trembley, welcher die Gleichung

$$\left(\frac{dq}{dx}\right) \left(\frac{d\mu}{dy}\right) - \left(\frac{dq}{dy}\right) \left(\frac{d\mu}{dx}\right) = 0$$

durch $q = F(\mu)$ integriert⁷⁾; die Beziehung $q = F(\mu)$ sieht Trembley lediglich als Integral der gegebenen Differentialgleichung an, während

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 323. ²⁾ Ebenda, p. 331. ³⁾ Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 205. ⁴⁾ Opusculum mathematicum, t. V, 1768, p. 41. ⁵⁾ Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1792/93, p. 386. Vgl. hierzu auch Condorcet, Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 17. In obiger Form läßt sich bekanntermaßen auch die Gleichung der abwickelbaren Flächen $rt - s^2 = 0$ schreiben.



wir heutzutage diese als notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen einer Relation zwischen ρ und μ auffassen; Trembley hat also, wenn man so sagen darf, nur das „hinreichend“ eingesehen.

Von den Differentialgleichungen mit drei oder mehr Veränderlichen haben wir bis jetzt nur die partiellen betrachtet. Simultansysteme wenigstens von totalen Gleichungen sind uns wiederholt begegnet; wie wir uns erinnern, lag in ihrer Anwendung in zwei wichtigen Fällen Methode und zielbewußte Absicht. Der eine dieser Fälle ist die Reduktion einer totalen Gleichung n^{ter} Ordnung auf ein System von n totalen Gleichungen 1. Ordnung. Eine besondere Integrationsmethode für dieses Ersatzsystem wird indessen nirgends entwickelt, wohl deshalb, weil das betreffende System da, wo es aufgestellt wird, nicht die Integration erleichtern, sondern anderen Zwecken, wie z. B. der Herleitung irgend eines allgemeinen Satzes (vgl. S. 905) dienen soll. Doch wird angeblich in speziellen Fällen für $n=2$ und $n=3$ auch die Integration selbst durch Euler in Angriff genommen und zwar mit Hilfe eines Multiplikatorensystems, ohne daß jedoch deren allgemeine Existenz behauptet wäre.¹⁾ Wichtiger ist die Heranziehung von simultanen totalen Gleichungen zur Integration der partiellen Differentialgleichungen, wie sie von Laplace, Lagrange und Monge (vgl. insbes. S. 947, 972, 1009) geübt wurde. Monge selbst geht ja hierbei soweit, daß er den Verein totaler Gleichungen nicht nur als ein Hilfsmittel zur Integration der partiellen Gleichung, seine Integration nicht bloß als eine Aufgabe ansieht, auf welche sich diejenige der partiellen Gleichung stets zurückführen läßt, sondern den betreffenden Verein als ein der partiellen Gleichung vollkommen gleichwertiges Gebilde ansieht, weshalb er den Verein totaler Gleichungen selbst nicht durch eine Reihe einzelner Integralgleichungen, sondern durch ein Integral mit willkürlichen Funktionen integriert.

Speziellere Systeme hat zuerst d'Alembert integriert, dem man überhaupt die systematische Untersuchung von Simultansystemen verdankt.²⁾ Interessant ist die Behandlung des Systems von Differentialgleichungen der Schwingungen einer endlichen Zahl von Massenpunkten durch Lagrange bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über Saitenschwingungen³⁾; doch sind die Gleichungen zu speziell, als daß hier darauf eingegangen werden könnte. In demselben Aufsatz, der die Theorie der Adjungierten enthält, bringt Lagrange⁴⁾ ein

¹⁾ Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II A 4 b, S. 246.

²⁾ Vgl. diese Vorl., III², S. 898, 901. ³⁾ Miscellanea Taurinensia, t. I³ (1759), p. 26. ⁴⁾ Ebenda, t. III², 1762/65 (1766), p. 223.

System von Gleichungen, auf das sich diese Theorie übertragen läßt; die Verwendung seiner Variation der Konstanten auf ein spezielles Gleichungssystem haben wir bereits erwähnt (vgl. S. 926), desgleichen die Ausdehnung einer von Laplace herrührenden Näherungsmethode auf ein System von Störungsgleichungen (vgl. S. 923). Auf ein interessantes Simultansystem, das Cousin behandelt¹⁾, und seine approximative Berechnung kann hier, da die betreffenden Entwicklungen allzu umfangreich sind, nicht eingegangen werden. Endlich sei noch an die zahlreichen Simultansysteme, auf welche die Mechanik z. B. im Dreikörperproblem führt, erinnert.

Wir charakterisieren hier nur die Integration des Simultansystems

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y = 0;$$

$$ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y = 0$$

durch Lexell²⁾; dabei sind x und y als Funktion einer unabhängigen Variablen u zu denken, deren Differentiale du , du^2 usw. der Einfachheit halber fortgelassen sind. Durch zweimalige Differentiation beider Gleichungen ergeben sich vier weitere Gleichungen, die durch Einführung eines Multiplikatorsystems ρ , ν , μ , λ , 1 und Addition auf eine Gleichung 4. Ordnung führen. Bestimmt man hierin die Multiplikatoren so, daß nur mehr x und seine Differentiale überbleiben, so ergibt sich die Gleichung

$$d^4x + (\alpha + \beta')d^3x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta')ddx \\ + (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta\gamma' - \beta'\gamma)dx + (\delta'\gamma - \delta\gamma')x = 0,$$

wegen deren Integration auf Eulers Integralrechnung verwiesen ist; ebensogut hätte man natürlich auch in der Gleichung y allein belassen können.³⁾ Im folgenden betrachtet Lexell zwei lineare Gleichungen 3. Ordnung, ebenfalls mit konstanten Koeffizienten und stößt so auf eine Gleichung 6. Ordnung, welche nur x und seine Ableitungen enthält. Sind die zwei Ausgangsgleichungen vierter Ordnung, so wird analog die Schlußgleichung 8. Ordnung usw. Lexell nimmt sodann drei Gleichungen mit den drei abhängigen Veränderlichen x , y , z ; hier treten in den Schlußgleichungen viel kompliziertere Koeffizienten auf. Endlich ist das Problem mit der Frage der Integrabilität durch Verwendung passender Multiplikatoren, auf die wir für den Fall von bloß zwei Veränderlichen ausführlich eingegangen

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 674.

²⁾ Acta Academiae Petropolitanae 1777 (1778), pars I, p. 61 ff. Die Untersuchung verdankt nach Aussage des Autors ihre Entstehung der Anregung durch d'Alembert.

³⁾ Ebenda, p. 67.



sind (vgl. S. 905 ff.), in Zusammenhang gebracht; ist $V = 0$ eine Gleichung zwischen $p, q, r, \dots, p', q', r', \dots$, wo

$$dx = p du; \quad ddx = q du^2; \quad \dots \quad dy = p' du; \quad ddy = q' du^2; \quad \dots,$$

so ist das Integrabilitätskriterium durch folgende Gleichungen gegeben

$$N - \frac{dP}{du} + \frac{ddQ}{du^2} - \dots = 0; \quad N' - \frac{dP'}{du} + \frac{ddQ'}{du^2} - \dots = 0,$$

wenn

$$\begin{aligned} dV = Mdu + Ndx + N'dy + \dots \\ + Pdp + P'dp' + \dots \\ + Qdq + Q'dq' + \dots \\ \dots \end{aligned}$$

Durch Anwendung dieser Kriterien (vgl. S. 538) erhält Lexell schließlich totale Differentialgleichungen für die gesuchten Multiplikatoren, die den ursprünglichen Gleichungen sehr ähnlich sind; zur Integration der letzteren genügen indes schon partikuläre Lösungen der ersteren. Später hat Lexell diese Untersuchungen fortgesetzt.¹⁾

Wir betrachten jetzt den Fall, daß eine einzige totale Gleichung mit mehr als zwei Variablen vorliegt, und zwar sollen insbesondere die Differentiale aller dieser Veränderlichen vorkommen, da der gegenteilige Fall keinerlei Schwierigkeiten macht. Die hierher gehörigen Gleichungen 1. Ordnung und 1. Grades hat schon frühzeitig Clairaut eingehend behandelt²⁾ und die Bedingung ihrer Integrabilität, die event. mit Hilfe eines Multiplikators zu bewerkstelligen ist, aufgestellt. Diese Bedingungsgleichung bringt Euler in seiner Integralrechnung wieder³⁾, woselbst sich auch das entsprechende Kriterium für die spezielle Gleichung

$$dz = Pdx + Qdy$$

findet, ohne daß Euler die wichtige Anwendung zu machen weiß, die nachher Lagrange geglückt ist (vgl. S. 966). Letzterer Umstand ist indessen sehr begreiflich, da Euler von der totalen Gleichung ausgeht, bei der P und Q Funktionen bedeuten, die zumeist gegeben sind oder doch bestimmt angebar gedacht werden, während Lagrange eine gegebene Gleichung zwischen x, y, z, P, Q integrieren will, in der P und Q nichts als die Symbole für partielle Differentialquotienten, nichts als Zeichen, formale Gebilde sind. Ist die Integra-

¹⁾ Acta Academiae Petropolitanae 1779 (1783), pars II, p. 52 ff. ²⁾ Vgl. diese Vorl., III^a, S. 885. ³⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 5.

bilitätsbedingung nicht erfüllt, so ist die gegebene Differentialgleichung nach Eulers Ansicht völlig sinnlos. Man sieht, heißt es, daß man unendlich viele derartige Gleichungen mit drei Variablen vorlegen kann, denen keinerlei endliche Gleichung (d. i. Integralgleichung) zukommt, und die außerdem absolut nichts bedeuten („nihil plane definit“ und an anderer Stelle „nihilque omnino declararet“); es wäre lächerlich, ihre Integration zu versuchen, heißt es weiterhin.

Euler kann sich gar nicht genug tun in starken Ausdrücken, „aequatio nihil significans absurda“ nennt er diesen Fall im Gegensatz zur „aequatio realis“¹⁾. Ähnlich sagt er gleich darauf von der Gleichung 2. Grades mit drei Variablen, sie sei überhaupt immer absurd, wenn sie nicht durch Wurzelziehen²⁾ auf die Form

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

gebracht werden könne. Diese Anschauung kann in Erstaunen setzen, wenn man weiß, daß Newton bereits die Differentialgleichung

$$2dx + xdy - dz = 0$$

nicht allein durch die zwei Relationen

$$y^2 = x \quad \text{und} \quad z = 2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

erfüllt, sondern sogar die viel allgemeinere Vorschrift gegeben hat, eine Relation zwischen zweien der Variablen willkürlich anzunehmen, um mit ihrer Hilfe die gegebene Gleichung auf eine solche von nur zwei Veränderlichen zu reduzieren.³⁾ Noch viel wunderbarer erscheint aber die Tatsache, daß Euler schon lange vor dem Erscheinen der Integralrechnung Gleichungen, die er später als absurd und sinnlos bezeichnet, wirklich nach allen Regeln der Kunst integriert hat.

So löst er⁴⁾ schon 1730 die Gleichung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

durch

$$x = \frac{dP}{dp}; \quad y = px - P; \quad s = x\sqrt{1 + p^2} - Q,$$

wo

¹⁾ Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 4, 7, 9, 10. ²⁾ An Faktorenerlegung im allgemeinen scheint er nicht zu denken. ³⁾ Man vgl. eine Abhandlung von Stäckel in den Leipziger Berichten 1902, ferner einen diesbezüglichen Aufsatz von v. Braunmühl in den Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904.

⁴⁾ Commentarii Academiae Petropolitanae 1730/31. Nach Klügels mathematischem Wörterbuch, Artikel Rectification. Siehe auch Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 525.



$$Q = \int \frac{x p d p}{\sqrt{1+p^2}}$$

oder, wenn wir das Resultat nur ein wenig anders schreiben, durch

$$x = \frac{dP}{dp}; \quad y = p - \frac{dP}{dp}; \quad s = \frac{dP}{dp} \sqrt{1+p^2} - \int \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{dP}{dp} \cdot dp,$$

wo P eine Funktion von p bedeutet. Man darf nun nicht etwa glauben, daß Euler mit den oben zitierten Ausdrücken diese früheren Resultate widerrufen wollte; dazu hätte er sie doch wenigstens erwähnen müssen. Euler beruft sich aber in keiner Weise auf sie, denkt auch offenbar gerade gar nicht an sie — denn sonst müßte er den auffälligen Widerspruch doch merken; ja es macht beinahe den Eindruck, als hätte er sie vollständig vergessen. Beinahe, sage ich; denn mir erscheint viel wahrscheinlicher, daß Euler den Inhalt, die Tragweite seiner früheren Entdeckung nicht in ihrem vollen Umfange erkannt hat, ähnlich wie Lagrange nicht merkt, daß er die partielle Gleichung 1. Ordnung beliebigen Grades integriert hat. Hätte sich Euler seinerzeit klar und ausdrücklich die Aufgabe gestellt „ich will jetzt die Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

integrieren“, wäre er von dieser Formulierung aus zu dem erwähnten Resultat gekommen, so würde freilich nur die Annahme völligen Vergessens jenen rätselhaften Widerspruch erklären. Dann bliebe aber merkwürdig, daß Euler nicht wenigstens später, wo er wieder ähnliche Gleichungen behandelt und ähnliche Resultate erzielt, seinen Irrtum eingesehen hat. Meiner Ansicht nach ist an allem in erster Linie die Problemstellung schuld, wobei das Moment augenblicklichen Vergessens mitgewirkt haben mag; man hat zu bedenken, daß die betr. Gleichung nicht unmittelbar, von vornherein analytisch gegeben war, sondern in irgend welche geometrische Aufgaben eingekleidet, erst allmählich im Laufe der Untersuchung, scheinbar ganz zufällig und nebensächlich, unter einem Gewirr von ähnlichen Gleichungen unbemerkt auftauchte, ohne daß klar hervortrat, daß gerade sie das betr. Problem völlig zu umschreiben, zu ersetzen imstande sei, daß sie m. a. W. die analytische Fassung der Aufgabe vorstelle. Ich erinnere hier an Leibniz, der lange Gleichungen mit Differentialen praktisch handhabte, ohne das diesen Gleichungen gemeinsame Prinzip zu erkennen. Immerhin bleibt jener Widerspruch auffallend genug und gibt zu denken Anlaß. Und man sieht, wenn es wie hier geschehen konnte, daß ein Autor zu einem hochwichtigen Resultat gelangt, es explizite darstellt und doch nicht zu deuten weiß¹⁾, wie sehr man sich hüten muß, einem Forscher einen Gedankengang, eine Einsicht

¹⁾ Vgl. auch S. 968 unten und S. 1043.

zuschreiben, die er nach Zeitcharakter und eigenem Wissen noch nicht haben kann, und die erst Spätere, auch wenn sie dessen Vorarbeiten kannten, mit größter Anstrengung allmählich aufdeckten. Die Lösung irgend einer mathematischen Aufgabe ist zwar ohne die Einführung gewisser für sie charakteristischer Gedankengänge und Definitionen (z. B. des Grenzbegriffes) nicht möglich, man darf aber aus der faktischen Herstellung der Lösung noch nicht schließen, daß auch die Prinzipien, welche allein die Lösung ermöglichten, erkannt worden sind. Es ist ein Unterschied, ob man ein Theorem unbewußt anwendet und ob man sich über seine Bedeutung klar ist, und Newtons Verdienst liegt nicht so sehr darin, daß er das Gravitationsgesetz behauptete, als daß er zeigte, wie sich die kompliziertesten himmlischen Vorgänge mit seiner Hilfe erklären lassen. Der Nichthistoriker kann ja sagen: wie leicht hätte Euler auf die allgemeine totale Gleichung mit drei Variablen dasselbe Verfahren anwenden können, wie auf die spezielle Gleichung

$$dz = P dx + Q dy,$$

wo P und Q durch eine Relation verbunden waren (vgl. S. 957 und S. 963); hätte er doch wie sonst die ganze Gleichung bis auf ein einziges Glied in ein exaktes Differential umgeformt, und den Koeffizienten dieses Gliedes mit Zuhilfenahme einer willkürlichen Funktion so bestimmt, daß die ganze Gleichung ein vollständiges Differential geworden wäre! So naheliegend der Gedanke war, Euler hat ihn eben gerade hier nicht gedacht, und das ist für den Historiker das Wesentliche. In anderen Fällen hat er dann plötzlich die Fruchtbarkeit der eben geschilderten Methode wieder eingesehen; die Gleichungen

$$dx = p du + r dt \cos u \quad \text{und} \quad dy = r du - p dt \cos u,$$

auf die er gelegentlich eines Abbildungsproblems stößt¹⁾ (vgl. S. 573), multipliziert er mit α bzw. β , addiert und erhält auf Grund der Annahme

$$\alpha\alpha + \beta\beta = 0$$

die Gleichung

$$dx + dy \sqrt{-1} = \cos u (p + r \sqrt{-1}) \left(\frac{du}{\cos u} - \sqrt{-1} dt \right).$$

Hier sagt Euler kurz und klar, daß $\frac{du}{\cos u} - \sqrt{-1} dt$ ein vollständiges Differential dz sei, weswegen $\cos u (p + r \sqrt{-1})$ eine Funktion von z sein müsse. Er erhält sofort

$$x + y \sqrt{-1} = 2 \Gamma (s - t \sqrt{-1}),$$

wo zur Abkürzung

$$s = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right)$$

¹⁾ Acta Academiae Petropolitanae 1777 (1778), pars I, p. 124.



gesetzt ist, und ebenso, weil, wie er sagt, $\sqrt{-1}$ immer zwei Vorzeichen hat,

$$x - y\sqrt{-1} = 2\Gamma(ls + t\sqrt{-1}).$$

Daraus lassen sich jetzt unmittelbar x und $y\sqrt{-1}$ berechnen. Hier reiht sich gut die Integration von

$$dx^2 + dy^2 = m^2(ds^2 + q^2dt^2),$$

wo q eine Funktion von s ist, durch Lagrange in den Berliner Memoiren von 1779 an.¹⁾ (Vgl. S. 575.) Die Substitutionen

$$\frac{ds}{q} = du \quad \text{und} \quad mq = n$$

liefern

$$dx^2 + dy^2 = n^2(du^2 + dt^2).$$

Führt man durch den Multiplikator

$$1 = \sin^2\omega + \cos^2\omega$$

eine Hilfsgröße ω ein, so wird

$$dx^2 + dy^2 = n^2(\sin\omega du - \cos\omega dt)^2 + n^2(\cos\omega du + \sin\omega dt)^2;$$

da ω noch unbestimmt ist, kann man in

$$dx = n(\sin\omega du - \cos\omega dt) \quad \text{und} \quad dy = n(\cos\omega du + \sin\omega dt)$$

trennen. Wegen der Integration dieser Gleichungen verweist Lagrange auf d'Alembert; er findet

$$x = \frac{f(u + t\sqrt{-1}) + F(u - t\sqrt{-1})}{2};$$

$$y = \frac{f(u + t\sqrt{-1}) - F(u - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

$$m = \frac{\sqrt{f'(u + t\sqrt{-1})F'(u - t\sqrt{-1})}}{q},$$

wo f und F willkürliche Funktionen bedeuten. Aus der Eigenschaft, daß m nur von t und u , d. i. von t und s abhängt, folgert Lagrange, daß die Abbildung, die ihn auf die ursprüngliche Gleichung geführt hat, winkeltreu ist.

Die Eulersche Ansicht über die totalen Gleichungen mit mehr als zwei Variablen war bis Monge die allgemein verbreitete; die Anschauung „es sei lächerlich, im Falle des Nichterfülltseins der Integrabilitätsbedingung eine Integration zu versuchen“, erklärt hinreichend das Stillschweigen aller Mathematiker in betreff dieser Gleichungen;

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 643.

kaum daß sich da oder dort eine Bemerkung darüber findet, wie bei Laplace, der nach singulären Integralen von Gleichungen mit drei Variablen fragt und dabei auf die Integrabilitätsbedingungen zu sprechen kommt.¹⁾ Endlich 1784, gleichzeitig mit den beiden früher erwähnten Aufsätzen über Differentialgleichungen (vgl. S. 949 u.), erscheint die große Arbeit von Monge²⁾, die auf diese Fragen nicht nur neues Licht wirft, sondern sie unter großen, allgemeinen Gesichtspunkten behandelt und auch zu einem gewissen Abschluß bringt. Einleitend bezeichnet Monge die Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0$$

als Bestimmungsgleichung für die Tangentenrichtung der Integralcurven in dem Punkt (x, y) und deutet analog die entsprechende Gleichung 2. Ordnung. Von den Gleichungen mit mehr Variablen, heißt es weiter, hält man die höheren Grades alle für absurd; von den linearen alle jene, die nicht bestimmten Bedingungen genügen; diese Bedingungen, an Zahl immer um zwei weniger als die Anzahl der Variablen, werden kurz besprochen. Nach solchen orientierenden Bemerkungen kündigt Monge den Inhalt seiner Untersuchung an³⁾: „ich nehme mir vor, zu zeigen, daß es keine absurde Differentialgleichung gibt, absurd im Sinne von unmöglich, imaginär. Ich werde zeigen, daß alle Differentialgleichungen reelle Eigenschaften ausdrücken, ob sie jetzt den erwähnten Bedingungen gehorchen oder nicht; daß sie alle einer wirklichen Integration fähig sind.“ Zum besseren Verständnis des folgenden bringt jetzt Monge folgende Überlegung: Von allen Gleichungen 1. Ordnung mit zwei Variablen, sagt er, gibt es nur eine einzige nichtlineare, nämlich

$$M^2dx^{2m} + N^2dy^{2m} = 0,$$

wo unter M und N Funktionen von x und y zu verstehen sind; diese Gleichung könne nichts Reelles bedeuten, außer wenn gleichzeitig

$$M = 0 \quad \text{und} \quad N = 0,$$

oder

$$dx = 0 \quad \text{und} \quad dy = 0.$$

Das erste dieser zwei Ergebnisse könne nicht als Integral angesehen werden, da es keine willkürliche Konstante enthalte; als wirkliches Integral sei demnach der Verein der Gleichungen

$$x = a, \quad y = b,$$

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 368.

²⁾ Ebenda, 1784 (1787), p. 502—576. ³⁾ Ebenda, p. 504.



d. i. die Gleichung eines einzelnen Punktes anzusehen. Unter den Differentialgleichungen 1. Ordnung gebe es also solche, deren Integral aus einer bzw. zwei Gleichungen bestehe und eine bzw. zwei Integrationskonstanten enthalte. Die besprochene Eigenschaft der Gleichung höheren Grades sei schon früher beobachtet, aber als Ausnahme betrachtet worden, indessen sei sie nur der Anfang einer ungeheuren Kette. Dieses Bild erklärt Monge durch folgende Ausführungen: die totalen Gleichungen dreier Variablen gehören, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, alle krummen Oberflächen an, und ihr Integral besteht in einer einzigen Gleichung mit einer einzigen Integrationskonstanten. Aber alle die unendlich vielen Gleichungen, die jener Bedingung nicht genügen, gehören Raumkurven an, und ihr Integral besteht aus zwei simultanen Gleichungen. Indessen habe eine einzige von ihnen, nämlich

$$M^2 dx^{2m} + N^2 dy^{2m} + P^2 dz^{2m} = 0,$$

die drei simultanen Gleichungen

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

die zusammen einen Punkt darstellen, zum Integral. Nach Darlegung der analogen Verhältnisse für vier Variable, wobei Monge natürlich auf die geometrische Veranschaulichung verzichten muß, ist die neue Auffassung ausgesprochen, die sogen. Integrabilitätsbedingungen hätten nicht die Beurteilung, ob eine Integration möglich sei, sondern die Entscheidung, aus wieviel simultanen Gleichungen sich das Integral zusammensetze, zum Gegenstand.¹⁾ An einigen Beispielen wird sodann das Gesagte erörtert; die Einschaltung dieser Aufgaben hat aber für uns den großen Wert, daß wir aus ihnen wieder geometrische Untersuchungen als Quelle von Monges Ideen über die Differentialgleichungen, d. i. einen Zweig der Analysis, erkennen können, denn die Behandlung dieser Aufgaben macht es fast unzweifelhaft, daß Monge bei ausgedehnter Beschäftigung mit Problemen der Flächentheorie zuerst immer wieder auf derartige Gleichungen geführt wurde, bis er sie endlich in ihrer vollen Bedeutung erkannte und nun umgekehrt zum Gegenstand einer Sonderuntersuchung machte. Das erste dieser Beispiele ist

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$

in dem a eine gegebene Konstante bedeutet. Es ist offenkundig, sagt Monge, daß diese Gleichung derjenigen doppelt gekrümmten Kurve angehört, deren Elemente einen gewissen konstanten Winkel

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 506.

mit der xy -Ebene bilden; deshalb sind speziell die Gleichungen aller Geraden, die diesen Winkel mit der xy -Ebene bilden, Lösungen der gegebenen Gleichung.

Diese Geraden sind aber

$$x = \alpha z + \beta; \quad y = z \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2\right)} + \gamma,$$

wo α, β, γ drei willkürliche Konstanten sind. Nachdem sich Monge durch Differentiation überzeugt hat, daß diese beiden Gleichungen zusammen wirklich eine Lösung darstellen, geht er dazu über, das intégrale complète zu finden. Elimination von α gibt zunächst

$$(x - \beta)^2 + (y - \gamma)^2 = \frac{z^2}{\alpha^2},$$

und das ist die Gleichung aller Kegel, deren Spitzen in der xy -Ebene liegen, und deren Erzeugende mit dieser Ebene den erwähnten konstanten Winkel bilden. Die Annahme

$$\gamma = \varphi(\beta)$$

scheidet hieraus alle jene Kegel aus, deren Spitzen auf der in der xy -Ebene gezogenen Kurve

$$y = \varphi(x)$$

liegen. Zwei konsekutive Kegel dieser Schar schneiden sich nun, fährt Monge fort, in einer Geraden mit den Gleichungen

$$(x - \beta)^2 + (y - \varphi(\beta))^2 = \frac{z^2}{\alpha^2}; \quad x - \beta + (y - \varphi(\beta))\varphi'(\beta) = 0,$$

deren zweite durch partielle Differentiation nach β entstanden ist. Auch diese Gerade bildet immer noch mit der xy -Ebene jenen konstanten Winkel und ist daher eine Lösung der Differentialgleichung. Betrachtet man aber die Schar (suite) von Kegelflächen, so ergibt sich eine Reihe solcher Schnittgeraden wie die eben erwähnte. Da sich aber von diesen Geraden, deren Lage nur von dem variablen Parameter (paramètre variable) β abhängt, immer zwei konsekutive auf der nämlichen Kegelfläche befinden, so schneiden sie sich notwendig zu zweien konsekutiv und bilden folglich die Tangenten einer doppelt gekrümmten Kurve, die wegen der konstanten Neigung ihrer Elemente das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung darstellen wird. Nach ihrer geometrischen Entstehungsweise wird sie dargestellt durch die drei Gleichungen

$$(x - \beta)^2 + (y - \varphi(\beta))^2 = \frac{z^2}{\alpha^2};$$

$$x - \beta + (\varphi'(\beta))\varphi'(\beta) = 0; \quad -1 - (\varphi'(\beta))^2 + (y - \varphi(\beta))\varphi''(\beta) = 0,$$



worin φ als willkürliche Funktion aufzufassen ist. Durch ähnliche Überlegungen integriert Monge die Gleichungen

$$z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2)$$

und

$$(xdy - ydx)^2 + (ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 = a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

und leitet, vielleicht durch die Form der hierbei auftretenden Integrale zu tieferem Eindringen in deren Natur veranlaßt, einige allgemeine Sätze ab. So erhält man, heißt es¹⁾, das intégrale complète der Gleichung

$$F\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

welche die Variablen x, y, z selbst nicht enthält, durch Elimination von α aus den drei Gleichungen

$$F\left(\frac{x-\alpha}{z}, \frac{y-\varphi(\alpha)}{z}\right) = 0; \quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0; \quad \left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

wo die 2. und 3. Gleichung durch partielle Differentiation der 1. bzw. 2. Gleichung nach α entstehen. Für den Beweis, sagt Monge, ist zu beachten, daß man die 1. und 2. dieser Gleichungen differenzieren darf, als ob α konstant wäre, da ja die partiellen Abgeleiteten dieser beiden Gleichungen nach α Null sind. Führt man diese Differentiation wirklich aus, so ergibt sich mit Benutzung der Abkürzungen

$$\frac{x-\alpha}{z} = m \quad \text{und} \quad \frac{y-\varphi(\alpha)}{z} = n,$$

da sich die Gleichung

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0$$

auch

$$\left(\frac{dF}{dm}\right) + \left(\frac{dF}{dn}\right)\varphi'(\alpha) = 0$$

schreiben läßt:

$$\left(\frac{dF}{dm}\right)dm + \left(\frac{dF}{dn}\right)dn = 0;$$

$$\left[\left(\frac{ddF}{dm^2}\right) + \left(\frac{ddF}{dm\,dn}\right)\varphi'(\alpha)\right]dm + \left[\left(\frac{ddF}{dm\,dn}\right) + \left(\frac{ddF}{dn^2}\right)\varphi'(\alpha)\right]dn = 0.$$

Diese beiden Gleichungen können aber nicht unabhängig von dem Wert von F existieren, wenn nicht gleichzeitig

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 515. Auf den im Text erwähnten Typus läßt sich die eben behandelte Gleichung

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$$

ohne weiteres zurückführen.

d. i.

$$dm = 0 \quad \text{und} \quad dn = 0,$$

$$\frac{x-\alpha}{z} = \frac{dx}{dz} \quad \text{und} \quad \frac{y-\varphi(\alpha)}{z} = \frac{dy}{dz}$$

ist. Die verlangte Elimination von α führt dann sofort auf

$$F\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

In ganz analoger Weise wird das Integral von

$$F\left(\frac{dX}{dZ}, \frac{dY}{dZ}\right) = 0,$$

wo X, Y, Z Funktionen von x, y, z sind, durch

$$F\left(\frac{X-\alpha}{Z}, \frac{Y-\varphi(\alpha)}{Z}\right) = 0$$

und die beiden partiellen Ableitungen nach α dargestellt.

Im folgenden¹⁾ sucht Monge den Zusammenhang zwischen totalen und partiellen Differentialgleichungen von drei Variablen darzustellen. Er bedient sich hierzu folgender Überlegung: Ist eine Flächengleichung $M = 0$ gegeben, die einen Parameter α und eine willkürliche Funktion $\varphi(\alpha)$ dieses Parameters enthält, so werden bei variablem α und festem φ zwei konsekutive Flächen sich in einer Kurve

$$M = 0; \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$

schneiden. Alle diese Kurven zusammen bilden eine Fläche, nämlich die Enveloppe der Flächen $M = 0$. Man erhält die endliche, d. i. von Differentialen freie Gleichung derselben durch Elimination von α aus

$$M = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

doch wird die Elimination im allgemeinen wegen der willkürlichen Funktion φ nicht ausführbar sein. Die Kurven, welche diese Enveloppe zusammensetzen, besitzen aber selbst wieder eine Enveloppe, die Monge die Grenzkurve (limite) der Enveloppe nennt; ihre endlichen Gleichungen erhält man durch Hinzunahme von

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0$$

zu den früheren beiden Gleichungen und Elimination von α . Monge stellt nun die von φ freien Differentialgleichungen sowohl der En-

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 518.



veloppe als der Rückkehrkante auf; um die Gleichung der ersteren zu finden, differenziere man nach x und y , wobei α wegen

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$

als konstant betrachtet werden darf; Elimination von α und $\varphi(\alpha)$ aus den drei Gleichungen

$$M = 0; \quad \left(\frac{dM}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{dM}{dy}\right) = 0$$

führt endlich auf die partielle Differentialgleichung $V = 0$, welche φ nicht mehr enthält. Im zweiten Fall denkt sich Monge die für die Gleichung

$$F\left(\frac{x-\alpha}{z}, \frac{y-\varphi(\alpha)}{z}\right) = 0$$

angestellten Überlegungen wiederholt; wir haben bereits eingesehen, sagt er, daß man durch totale Differentiation von

$$M = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

wobei wegen

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0$$

die Größe α wie eine Konstante behandelt werden kann, und Elimination von α , $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$ aus

$$M = 0; \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0; \quad dM = 0; \quad d \cdot \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$

eine totale Gleichung 1. Ordnung höheren Grades $U = 0$ erhält, welche die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt.

Nun läßt sich aber, wenn von den beiden Gleichungen $V = 0$ und $U = 0$ die eine gegeben ist, die andere ohne Kenntnis der Integralgleichung daraus herleiten.¹⁾ Ist nämlich die partielle Gleichung $V = 0$ gegeben, so substituiere man hierin den Wert von p (oder q) aus der Gleichung

$$dz = p dx + q dy,$$

was eine Gleichung $V' = 0$ zwischen x, y, z, dx, dy, dz und q (bzw. p) ergibt; die totale Gleichung $U = 0$ erhält man dann durch Elimination von q aus

$$V' = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dV'}{dq}\right) = q.$$

Umgekehrt hat man, falls $U = 0$ gegeben ist, hierin statt dz den

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 520.

Ausdruck $p dx + q dy$ einzusetzen; das liefert eine Gleichung $U' = 0$ zwischen x, y, z, p, q und $\frac{dy}{dx} = \omega$; Elimination von ω aus

$$U' = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dU'}{d\omega}\right) = 0$$

gibt die gewünschte partielle Gleichung $V = 0$. Monge erläutert diese Vorschriften wieder an dem speziellen Beispiel

$$M = (x - \alpha)^2 + (y - \varphi(\alpha))^2 - \frac{z^2}{\alpha^2} = 0,$$

wo die Gleichungen

$$V = 0 \quad \text{und} \quad U = 0 \quad \text{bzw.} \quad p^2 + q^2 = a^2 \quad \text{und} \quad dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$$

lauten, und geht sodann zu ihrem allgemeinen Beweis über, der hier übergangen werden kann.

Diese Beziehung zwischen den Gleichungen $U = 0$ und $V = 0$ kann nun, wie Monge zeigt¹⁾, deshalb für ihre Integration, d. i. für die Auffindung der Gleichung $M = 0$, bedeutungsvoll werden, da sich die eine von ihnen oft unschwer integrieren läßt, die andere keiner der bekannten Integrationsmethoden sich fügt. Dahin gehört das dritte von den oben erwähnten Beispielen, das auf die partielle Gleichung

$$z - px - qy = a^2 \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

führt, die einem der von Lagrange integrierten Gleichungstypen (vgl. S. 968) angehört und auf

$$M = z - ax - \varphi(\alpha) \cdot y - a^2 \sqrt{1 + \alpha^2 + (\varphi(\alpha))^2}$$

führt. Umgekehrt läßt sich, wie Monge, der die Lagrangesche Arbeit von 1772 noch nicht in ihrer vollen Tragweite erfaßt, behauptet, die partielle Gleichung

$$bx^2(z + px - qy)^2 + aby^2(z - px + qy)^2 + az(z + px + qy)^2 = 0$$

nach keiner der bekannten Methoden integrieren; sie führt aber auf eine totale Gleichung der Form

$$F\left(\frac{dX}{dZ}, \frac{dY}{dZ}\right) = 0,$$

und damit zu der Gleichung

$$\left(\frac{xz - \alpha}{xy}\right)^2 + a \left(\frac{yz - \varphi(\alpha)}{xy}\right)^2 + b = M,$$

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 526.



woraus die Integrale sowohl der partiellen als der totalen Gleichung in bekannter Weise abzuleiten sind.

Monge kommt sodann¹⁾ auf die linearen Gleichungen zu sprechen; für die betr. Gleichung mit drei Variablen

$$Ldx + Mdy + Ndz = 0$$

sucht er zunächst die entsprechende partielle Gleichung genau nach der eben hierfür aufgestellten Regel. Einführung von $pdx + qdy$ an Stelle von dz gibt

$$(L + Np)dx + (M + Nq)dy = 0;$$

partielle Differentiation nach ω , d. i. $\frac{dy}{dx}$, und Elimination von ω liefert die zwei simultanen Gleichungen

$$L + Np = 0; \quad M + Nq = 0.$$

Man integriere, heißt es weiter, die eine dieser Gleichungen, wobei y bzw. x konstant betrachtet werden kann, und ergänze das Integral durch eine willkürliche Funktion von y bzw. x ; setzt man den aus dieser Gleichung berechneten Wert von q bzw. p in die andere von jenen simultanen Gleichungen ein, so erhält man eine Gleichung, die keine Differentiationen mehr aufweist; man hat auf diese Weise zwei endliche Gleichungen gewonnen, die einer Raumkurve angehören und das Integral der ursprünglichen Gleichung darstellen. Nach einigen Beispielen ist auf den Fall von mehr als drei Variablen eingegangen²⁾; man substituierere, sagt Monge, für dz seinen Wert

$$pdu + qdx + rdy + \dots$$

und differentiierere, indem man der Reihe nach immer nur eine einzige von den Größen $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, ... als variabel ansieht; so erhält man eine Anzahl von Gleichungen, die zur Elimination dieser Größen genügt. Die sich ergebenden partiellen Schlußgleichungen sind sodann ganz wie im Fall von drei Variablen weiter zu behandeln. Monge behauptet sodann³⁾, daß die Zahl der Integralgleichungen nicht immer um Eins kleiner ist als die Zahl der Variablen, sondern daß sie, wie an dem Beispiel

$$udu + xdx + xdy + zdz = 0$$

gezeigt ist, auch geringer sein kann. Doch scheint er das Vorhandensein von $n - 1$ Integralgleichungen bei n Veränderlichen für die

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 528. ²⁾ Ebenda, p. 532. ³⁾ Ebenda, p. 534.

Regel anzusehen. Dazu stimmt auch die Äußerung¹⁾, es hätte etwas Absurdes an sich, wenn eine totale Gleichung mit mehr Variablen sich durch eine einzige Gleichung integrieren lasse; so sei es z. B. (eher) absurd, wenn die Differentialgleichung mit drei Variablen, wie man bisher stillschweigend voraussetzte, einer Fläche angehöre; sie gehöre vielmehr einer Raumkurve an, die sich zwar durch eine einzige Differentialgleichung, aber bei Verwendung von endlichen Größen allein nur durch zwei simultane Gleichungen darstellen lasse. Unter der Überschrift „Gleichungen 2. Ordnung höheren Grades mit mehr als zwei Variablen“ behandelt Monge dann zunächst die Aufgabe, alle Raumkurven mit konstantem Krümmungsradius zu finden²⁾, zeigt dann analog dem früheren die Integration von

$$r \left(\frac{ddy}{dx^2}, \frac{ddx}{dx^2} \right) = 0$$

usw. und überträgt endlich die diesbezüglichen Sätze für Gleichungen 1. und 2. Ordnung allgemeiner auf den Fall beliebig vieler Veränderlicher.³⁾

Monge behauptet⁴⁾, daß auch partielle Gleichungen im allgemeinen nicht Flächen, sondern Raumkurven angehören. Setzt man in der Gleichung

$$p - Ay = \varphi(q + Ax),$$

wo A konstant und φ eine willkürliche Funktion ist, zur Abkürzung

$$q + Ax = \alpha,$$

also

$$p - Ay = \varphi(\alpha),$$

so wird aus

$$dz = pdx + qdy$$

die neue Gleichung

$$dz = dx\varphi(\alpha) + \alpha dy - A(xdy - ydx).$$

Man kann hier α konstant betrachten, sagt Monge, integrieren und die so gewonnene Integralgleichung nachträglich durch eine willkürliche Funktion von α zu der Gleichung $M = 0$ vervollständigen, wobei dann

$$\left(\frac{dM}{d\alpha} \right) = 0$$

sein muß; da aber die eben aufgestellte totale Gleichung die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt, so komme die weitere Gleichung

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 535. ²⁾ Ebenda, p. 536 ff. ³⁾ Ebenda, p. 547 bzw. 549. ⁴⁾ Ebenda, p. 551. Ähnliche Untersuchungen für Gleichungen 2. Ordnung ebenda, p. 568.



$$-Ax^2 = \psi' \left(\frac{y}{x} \right)$$

hinzu, so daß man im ganzen drei Gleichungen habe, die sich bei Elimination von a auf zwei Gleichungen zwischen x, y, z und einer willkürlichen Funktion ψ reduzieren. Offenbar hat Monge geglaubt, für die partiellen Gleichungen müsse dasselbe gelten wie für die totalen.

Endlich folgen noch einige Bemerkungen über partielle Differentialgleichungen 1. und höherer Ordnung; hier sei folgendes Theorem erwähnt¹⁾: Ist

$$dz = pdu + qdx + rdy \dots \quad \text{und} \quad F(z, pU, qX, rY, \dots) = 0$$

die gegebene Differentialgleichung, wo U, X, Y, \dots Funktionen von u , bzw. x , bzw. y, \dots sind, so ergibt sich das Integral durch bloße Quadraturen. Sei nämlich

$$pU = \alpha rY; \quad qX = \beta rY; \dots,$$

wo α, β, \dots unbestimmte Größen sind, so wird durch Substitution in die gegebene Differentialgleichung

$$f(z, \alpha, \beta, \dots, rY) = 0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich rY in der Form

$$rY = f(z, \alpha, \beta, \dots)$$

berechnen und man erhält

$$pU = \alpha f(z, \alpha, \beta, \dots); \quad qX = \beta f(z, \alpha, \beta, \dots); \dots$$

so daß also

$$\frac{dz}{f(z, \alpha, \beta, \dots)} = \frac{\alpha du}{U} + \frac{\beta dx}{X} + \frac{dy}{Y} + \dots$$

wird. Integration bei konstanten α, β, \dots ergibt unter Beifügung einer willkürlichen Funktion eben dieser Größen α, β, \dots eine Gleichung $M = 0$, zu der noch die Gleichungen

$$\left(\frac{dM}{d\alpha} \right) = 0; \quad \left(\frac{dM}{d\beta} \right) = 0; \dots$$

hinzutreten; aus allen diesen Gleichungen hat man sich die α, β, \dots eliminiert zu denken (vgl. S. 981). Endlich stellt Monge in einer conclusion générale die Hauptergebnisse der ganzen Arbeit nochmals übersichtlich zusammen und weist auf den großen Nutzen hin, den

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 556.

die Geometrie aus den darin niedergelegten neuen Gedanken und Methoden ziehen kann.¹⁾

Außer der großen Arbeit von Monge findet sich wenig über totale Gleichungen mit mehr Variablen; P. G. Fontana (vgl. Abschnitt XXVI passim) versucht sich mit Multiplikatoren für derartige Gleichungen²⁾; bedeutender ist eine Arbeit von Pietro Paoli über Differentialgleichungen, welche die Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllen.³⁾ Paoli schließt sich im allgemeinen eng an sein Vorbild Monge an; hier sei seine Integration der Gleichung mit vier Variablen

$$Adu + Bdz + Cdy + Ddx = 0$$

mitgeteilt.⁴⁾ Paoli nimmt zwei Gleichungen $M = \alpha$ und $N = \beta$, wo α und β Konstante bedeuten, zwischen x, y, z willkürlich an; aus ihnen lassen sich z und y als Funktionen von x berechnen. Diese Werte ergeben, in die gegebene Gleichung eingeführt, eine totale Gleichung zwischen u und x mit einem Integral $P = \gamma$. Betrachtet man jetzt in den Integralgleichungen

$$M = \alpha, \quad N = \beta, \quad P = \gamma$$

die Größen α, β, γ als variabel, so muß, wenn die gegebene Differentialgleichung noch erfüllt sein soll, eine Gleichung der Form

$$md\gamma + nd\alpha + pd\beta = 0$$

bestehen. Das ist aber eine totale Gleichung mit nur drei Variablen, die im allgemeinen die Integrabilitätsbedingungen nicht befriedigen wird, weshalb sie nach den für solche Gleichungen geltenden Methoden weiter behandelt wird. Paoli geht im folgenden noch auf die Gleichungen mit fünf Veränderlichen, auf die höheren Grades und endlich auf diejenigen 2. Ordnung ein.⁵⁾

Differenzen- und Summenrechnung.

Wir gehen zur Differenzen- und Summenrechnung über. Den ersten Aufschwung verdankt diese Disziplin der Untersuchung der arithmetischen Reihen höherer Ordnung, und die sich hierbei ergebenden Gesetzmäßigkeiten für den Zusammenhang zwischen Differenzen höherer und niederer Ordnung haben in mannigfacher Weise

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 573 bzw. 574.

²⁾ Memorie di Matematica e Fisica Soc. Ital. Verona, t. III, 1786, p. 516 ff.

³⁾ Ebenda, t. VI, 1792, p. 501 ff.

⁴⁾ Ebenda, p. 509.

⁵⁾ Ebenda, p. 513, 517, 522.



auf die Probleme der niederen Analysis befruchtend eingewirkt. Hier sei eine Abhandlung von Euler¹⁾ erwähnt, die sich die Umformung von Reihen mit Hilfe endlicher Differenzen zur Aufgabe stellt. Wichtiger wurden die hierher gehörigen Untersuchungen für das Interpolationsproblem, das gewöhnlich im Zusammenhang mit der Summen- und Differenzenrechnung behandelt zu werden pflegt. Hier ist allerdings nur wenig darüber zu sagen, da die meisten diesbezüglichen Methoden für eine ganz spezielle praktische Anwendung geschaffen und gleich im Zusammenhang mit dieser behandelt wurden; die meisten Notizen finden sich in großen Tafelwerken, astronomischen und ähnlichen Abhandlungen der angewandten Mathematik.²⁾ Rein mathematische Untersuchungen über das Interpolationsproblem im allgemeinen finden sich nur wenige; in speziellen Fällen wurde die Interpolation schon seit langem durch geistreiche Kunstgriffe geleistet, ich erinnere hier aus früherer Zeit nur an die Berechnung der Logarithmen, an das Wallissche Produkt und die Eulersche Interpolation der Fakultät (vgl. auch S. 781 ff.). Das allgemeine Problem behandelt insbesondere Lagrange und kommt hierbei³⁾ zu der bekannten, praktisch allerdings wenig brauchbaren Formel

$$y_x = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} y_2 + \cdots,$$

wobei y_1, y_2, \dots, y_n die Werte der Funktion y_x für

$$x = x_1, x_2, \dots, x_n$$

bedeuten. Von Lagrange stammen auch (aus dem Jahr 1772) die eleganten symbolischen Formeln⁴⁾

$$\Delta^2 u = \left(\frac{d u}{d x} \xi - 1 \right)^2; \quad \left(\frac{d u}{d x} \xi \right)^2 = [\log(1 + \Delta u)]^2;$$

$$\Delta^{-1} = \int \text{ usw.}; \quad \Delta^{-1} = \Sigma \text{ usw.},$$

¹⁾ Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, t. IV, 1811 (1813), p. 88 ff. ²⁾ So z. B. Lambert, Über das Einschalten in den „Beiträgen zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung“, Berlin 1765/77, Bd. III, § 5. Nach Klügels mathematischem Wörterbuch, Artikel Einschalten. Ferner Lambert, Über das Einschalten beim Gebrauch der Ephemeriden, Bodes Jahrbuch für 1776. Poggendorff I, S. 1357. ³⁾ Lagrange gewinnt diese Formel durch Umformung des bereits 1775 aufgestellten Ausdrucks für den allgemeinen Term einer rekurrenten Reihe bei bekannten Anfangstermen. Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, années 1792 et 1793. Oeuvres, t. V, p. 627 ff. ⁴⁾ Sur une nouvelle espèce de calcul, Oeuvres de Lagrange, t. III, bzw. p. 452, 457, 461. Auf diesen Aufsatz kommt Laplace, Histoire de l'Académie des Sciences 1777 (1780), p. 113 zurück.

in denen nach Auswertung der auftretenden Klammern (mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes) und Ausführung der angedeuteten Multiplikation mit u die Symbole $\Delta, \Delta^2, \Delta^3, \dots$ und $\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, \frac{d^3}{dx^3}, \dots$ nicht mehr Potenzen von Δ bzw. $\frac{d}{dx}$, sondern Differenzen und Differentialquotienten höherer Ordnung bedeuten (vgl. S. 696). Bei Aufstellung dieser Gleichungen mag sich Lagrange wohl der sogen. Leibnizschen Darstellung der höheren Differentialquotienten eines Produktes erinnern haben.¹⁾ Auch Edward Waring kommt in einem Aufsatz über Interpolation zur Lagrangeschen Formel; er verwendet seine Formeln aber nicht zur Einschaltung selbst, sondern zur Herleitung von Gleichungen, die der niederen Analysis angehören. So bringt er²⁾ z. B. den Satz, daß der Ausdruck

$$\frac{\alpha^m}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\cdots} + \frac{\beta^m}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\cdots} + \frac{\gamma^m}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)\cdots} + \cdots$$

Null oder Eins ist, je nachdem

$$m < n - 1 \text{ oder } m = n - 1$$

ist, wo n die Anzahl der Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ bedeutet. Von besonderer Wichtigkeit sind später diejenigen Interpolationsmethoden geworden, die trigonometrische Funktionen benutzen. Lagrange, dessen früher erwähnte Behandlung des Problems der Schwingungen einer endlichen Zahl von Punkten unschwer auf eine derartige Interpolationsformel führt, setzt später gelegentlich³⁾ das allgemeine Glied einer Reihe in der Form

$$y = a \sin(\alpha + x\varphi) + b \sin(\beta + x\chi) + c \sin(\gamma + x\psi) + \dots$$

an, und zeigt, wie die Größen $a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \chi, \psi, \dots$ aus gegebenen Werten von y bestimmt werden können; er wird hierbei auf rekurrente Reihen geführt. In anderer Weise verwendet Charles die trigonometrischen Funktionen; ihm werden die Gleichungen

¹⁾ Hier mag auch eine Methode von Lagrange aus dem Jahre 1783 Erwähnung finden, nach der (er eine Funktion $y = \varphi(x)$ näherungsweise durch $y = \beta + \gamma\xi$ (bzw. wenn $\gamma = 0$ ist, durch $\beta + \delta\xi^2$) ersetzt, wo ξ eine sehr kleine Zunahme von x bedeutet, wenn zwischen x und einer Funktion X von x und ebenso zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(X)$ zwei bekannte Relationen existieren. Lagrange zeigt die Anwendung seines Verfahrens für die Logarithmen Oeuvres, t. V, p. 617 ff. Man vgl. endlich Oeuvres, t. V, p. 663 ff. ²⁾ Philosophical Transactions, vol. 69, 1779, p. 64. ³⁾ Astronomisches Jahrbuch 1783, S. 41. Nach Klügel, a. a. O.



$$y = p \frac{a \sin \pi x}{\sin p \pi x} + q \frac{b \sin \pi(x-1)}{\sin q \pi(x-1)} + \dots;$$

$$\pi y = p \cdot \frac{a \sin \pi x}{e^{p x} - 1} + q \cdot \frac{b \sin \pi(x-1)}{e^{q(x-1)} - 1} + \dots;$$

$$\pi^2 y = (\sin \pi x)^2 \left[\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \dots \right]$$

zugeschrieben, wo y für $x = 0, 1, \dots$ die Werte a, b, \dots annimmt.¹⁾ Auch die rekurrenten Reihen sind im Zusammenhang mit dem Interpolationsproblem viel behandelt worden; indessen benutzen die meisten Arbeiten über rekurrente Reihen die Integrationsmethoden für Differenzgleichungen, die weiter unten besprochen werden sollen. Von mehr elementaren Arbeiten auf diesem Gebiet ist eine Untersuchung von Lagrange zu nennen²⁾, der das allgemeine Glied einer rekurrenten Reihe mit den n ersten Termen T, T', T'', \dots dadurch findet, daß er zunächst eine gebrochene rationale Funktion in möglichst einfacher Weise so zu bestimmen sucht, daß die bei wirklicher Ausführung der Division entstehende unendliche Reihe in der Form

$$T + T'x + T''x^2 + \dots$$

beginnt. Partialbruchzerlegung und Reihenentwicklung der einzelnen Partialbrüche liefert dann sofort das gesuchte allgemeine Glied der Reihe

$$T + T'x + T''x^2 + \dots$$

In gewissem Zusammenhang mit diesen Problemen steht auch eine Methode³⁾, die Laplace als calcul des fonctions génératrices bezeichnet (vgl. S. 273). Unter erzeugender Funktion ist nichts weiter als die Summe einer Reihe einzelner nach demselben Gesetz entstandener Größen zu verstehen. Die Abhandlung selbst enthält nichts wesentlich Neues; sie behandelt Aufgaben wie z. B. $\frac{1}{t^2}$ durch z auszudrücken, wenn

$$t \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^2 = z$$

ist, und löst sie mittels Reihenentwicklungen und Überlegungen, wie wir sie an der geistreichen Koeffizientenbestimmung S. 1005 bereits kennen gelernt haben.

¹⁾ Nach Klügel a. a. O. finden sich diese Formeln angegeben bei Prony, Nouvelle Architecture hydraulique 1790/96, t. II, Anmk. zu § 1373. Die letzte der angeführten Gleichungen steht auch Histoire de l'Académie des Sciences 1788 (1791), p. 582. ²⁾ Oeuvres de Lagrange, t. VI, p. 507. Die Abhandlung ist vom Jahr 1772. ³⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1779 (1782), p. 207 ff.

Differenzgleichungen treten in Praxis und Theorie oft auf; so im Zusammenhang mit der Bestimmung der willkürlichen Funktionen der Integrale partieller Differentialgleichungen, wenn gewisse Bedingungen zu erfüllen sind; dies hat nach Charles¹⁾ zuerst Condorcet bemerkt.²⁾ Einen anderen Ausgangspunkt, der auf Differenzgleichungen führt, bilden die Funktionalgleichungen. So reduziert Laplace³⁾ die Gleichung

$$\text{fonct.} [\varphi(x)] = H_x \cdot \text{fonct.} [\psi(x)] + X_x,$$

wo φ, ψ, H und X gegebene Funktionen sind und die unbekannt Funktion fonct. bestimmt werden soll, in folgender Weise auf eine Differenzgleichung: er setzt

$$u_x = \psi(x) \quad \text{und} \quad u_{x+1} = \varphi(x),$$

berechnet aus der ersten dieser Gleichungen durch Umkehrung

$$x = \Gamma(u_x)$$

und erhält so

$$u_{x+1} = \varphi(x) = \Pi(u_x).$$

Diese Rekursionsformel für u_x definiert aber u_x als Funktion von z ; somit können $x = \Gamma(u_x)$ und damit auch H_x und X_x als Funktionen von z dargestellt werden. Ersetzt man jetzt in der ursprünglichen Gleichung x überall durch z , so entsteht eine Gleichung der Form

$$y_{z+1} = L_z \cdot y_z + Z_z,$$

wo y_z für $\text{fonct.} [u_x]$ geschrieben ist. Ist

$$[\text{fonct.}(x)]^2 = \text{fonct.}(2x) + 2$$

gegeben⁴⁾, so setzt Laplace

$$u_x = x, \quad u_{x+1} = 2x, \quad \text{also} \quad u_{x+1} = 2u_x,$$

und erhält durch Anwendung der weiteren Substitution $\text{fonct.}(u_x) = t_x$ die Gleichung

$$t_{x+1} = (t_x)^2 - 2$$

mit dem Integral

¹⁾ Mémoires présentés par divers Savans, t. X (1785), p. 573 ff. ²⁾ Siehe Histoire de l'Académie des Sciences 1771 (1774), p. 49 ff. und 1772, part. 1 (1775), p. 32 und p. 57. Man vgl. hierzu auch Monge in Mémoires présentés par divers Savans, t. VII, 1773 (1776), p. 322. ³⁾ Ebenda (Mém. div. Sav.), p. 71. Laplace behauptet, seine Methode stamme aus dem Jahre 1772, und verweist auf die oben zitierte Abhandlung von Condorcet aus dem Jahre 1771. ⁴⁾ Ebenda, p. 74. Diese Gleichung findet sich schon Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 320.



$$t_2 = a^{2^2-1} + \frac{1}{a^{2^2-1}},$$

wo a eine willkürliche Konstante ist; die weitere Untersuchung bietet keine Schwierigkeiten. Auch Charles hat Funktionalgleichungen¹⁾:

$$\psi(ax^2 + mx + n) - P\psi(bx^2 + px + q) = R,$$

wo P und R Funktionen von x und a, m, n, b, p, q Konstante sind, geht, wenn

$$ax^2 + mx + n = b(x\omega + \varphi)^2 + p(x\omega + \varphi) + q$$

ist, wo ω und φ zwei neue Konstante sind, unschwer in eine Differenzgleichung über.

Die größte Anzahl von Arbeiten über Differenzgleichungen verdankt jedoch nicht einem praktischen Bedürfnisse ihren Ursprung, sondern vielmehr dem Umstand, daß sich sowohl alle allgemeinen Gesichtspunkte als die meisten in weiterem Umfange brauchbaren Integrationsmethoden, die bei Differentialgleichungen von Vorteil sind, mühelos auf die Theorie der Differenzgleichungen übertragen lassen. So sehen wir die Entwicklung der letzteren Theorie von den Fortschritten auf dem Gebiet der Differentialgleichungen abhängig, durch diese bedingt; dieser Zusammenhang ist so innig, daß häufig einer Abhandlung über Differentialgleichungen Bemerkungen über Differenzgleichungen anhangsweise beigefügt sind. Am geringsten ist die Analogie bezüglich der singulären Integrale. Charles hat diesen Begriff zuerst auf Differenzgleichungen übertragen²⁾ unter Berufung auf die Erklärung ihres Wesens, wie sie Lagrange gegeben hat; er kommt zu dem Ergebnis, daß eine Differenzgleichung zwei vollständige Integrale haben kann. Ist nämlich $V=0$ das Integral einer Differenzgleichung $Z=0$, so erhält man letztere aus dem Integral, indem man die Integrationskonstante a aus den Gleichungen $V=0$ und δV eliminiert; δV entsteht hierbei durch Variation von x und y bei konstantem a . Läßt man jetzt auch a variieren, so wird

$$\Delta V = \delta V + R\Delta a.$$

Ist nun $R=0$, so werden die beiden Gleichungen

$$V=0 \quad \text{und} \quad \delta V=0$$

wieder genau dieselbe Gleichung $Z=0$ liefern, wie zuerst auch, und es ist bei diesem Eliminationsprozeß ganz gleichgültig, ob a konstant

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1786 (1788), p. 695. ²⁾ Ebenda, 1783 (1786), p. 560.

ist oder nicht. Das singuläre Integral ergibt sich dann durch Elimination von a aus $V=0$ und $R=0$. Bis hierher ist die Analogie mit den Differentialgleichungen vollständig; jetzt kommt aber ein bedeutsamer Unterschied; während man nämlich bei den Differentialgleichungen die Größe a unmittelbar aus $R=0$ berechnen kann, enthält diese Gleichung bei den Differenzgleichungen neben a im allgemeinen auch noch die Differenz Δa . Um a eliminieren zu können, ist daher die Integration von $R=0$ erforderlich; infolge dieses Prozesses geht aber eine willkürliche Konstante in das singuläre Integral ein. Charles erläutert das Gesagte an einigen Beispielen. Das vollständige Integral von

$$gy = x\Delta y + \frac{\Delta y^2}{4n^2},$$

wo Δx , die Differenz von x , konstant und gleich g ist, lautet

$$gy = 2nax + a^2.$$

Daraus ergibt sich

$$\Delta y = 2na,$$

wenn a konstant ist, hingegen

$$\Delta y = 2na + \frac{\Delta a}{g} [2n(x+g) + 2a + \Delta a],$$

wenn a ebenfalls variiert. Zur Bildung des singulären Integrals erhält man also die Bedingung

$$2n(x+g) + 2a + \Delta a = 0.$$

Hieraus folgt

$$-a(-1)^{\frac{x}{g}} = b + n(-1)^{\frac{x}{g}} \left[\frac{g}{2} + x \right],$$

wo b eine willkürliche Konstante bedeutet, und damit endlich

$$gy = -n^2x^2 + \left[\frac{g^n}{2} + b(-1)^{\frac{x}{g}} \right]^2.$$

Charles weist auch noch darauf hin, daß man aus dieser Gleichung bei Anwendung desselben Prozesses wieder

$$gy = 2nax + a^2$$

erhalten würde, d. h. daß das singuläre Integral des singulären Integrals das ursprüngliche vollständige Integral ist. Später sucht Charles auch bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, die er als Grenzfall

¹⁾ Die Herleitung setzt voraus, daß $\frac{x}{g} = \frac{x}{\Delta x}$ eine ganze Zahl ist.



der Differenzgleichungen auffaßt, ähnliche Verhältnisse, d. i. die Existenz zweier vollständigen Integrale, von denen eins das singuläre des anderen ist, nachzuweisen und sie durch einen Ausdruck zu integrieren, der das singuläre Integral als Spezialfall enthält; seine Darstellung ist indessen nicht recht verständlich.¹⁾ Die erwähnte Eigentümlichkeit ist auch Monge nicht entgangen; aus

$$(\Delta y)^2 = b^2$$

erhält er zunächst

$$2\Delta y \Delta \Delta y + (\Delta \Delta y)^2 = 0$$

und hieraus

$$\Delta \Delta y = 0 \quad \text{und} \quad 2\Delta y + \Delta \Delta y = 0.$$

Der erste Fall gibt

$$y = \pm \frac{bx}{a} + A,$$

der zweite aber

$$y = C \pm \frac{b}{2} (-1)^{\frac{x}{a}}.$$

Monge behauptet²⁾ dann, das vollständige Integral der gegebenen Gleichung sei das Produkt der vier Gleichungen

$$y - A = +\frac{bx}{a}; \quad y - A = -\frac{bx}{a};$$

$$y - A = +\frac{b}{2} (-1)^{\frac{x}{a}}; \quad y - A = -\frac{b}{2} (-1)^{\frac{x}{a}}.$$

Die übrigen Untersuchungen zeigen mehr Analogie; Condorcet, der wie bei den Differentialgleichungen die Integration auf die Ausführung einer ganz bestimmten Reihenfolge gewisser Operationen als Multiplikationen, Substitutionen, Eliminationen, Umformungen und Integrationen zurückführen will³⁾, auch Näherungsmethoden für Differenzgleichungen bespricht⁴⁾, hat sich eingehend mit der Integrabilität gegebener Differentialausdrücke beschäftigt; in Analogie dazu sucht er die Bedingungen aufzustellen⁵⁾, wann eine gegebene Funktion V von $x, y, z, \dots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots, \Delta^2 x, \Delta^2 y, \Delta^2 z, \dots$ vollständige Differenz einer ähnlich gearteten Funktion B der nächstniederen Ordnung ist, so daß also $V = \Delta B$. Durch Benutzung der Gleichungen

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d\Delta B}{dx}, \quad \frac{dV}{d\Delta x} = \frac{d\Delta B}{d\Delta x}, \quad \dots, \quad \frac{dV}{dy} = \frac{d\Delta B}{dy}, \quad \dots,$$

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1788 (1791), p. 115 ff. Vgl. auch p. 580 ff. ²⁾ Ebenda 1783 (1786) p. 727. Die betreffende Abhandlung wurde 1785 gelesen. ³⁾ Ebenda 1770 (1773), p. 123 ff. ⁴⁾ Ebenda, p. 135.

⁵⁾ Ebenda, p. 110.

wo die d partielle Differenzenbildung andeuten, findet er zunächst

$$\frac{dV}{dx} = \Delta \frac{dB}{dx};$$

$$\frac{dV}{d\Delta x} = \Delta \frac{dB}{d\Delta x} + \frac{dB}{dx} + \Delta \frac{dB}{dx};$$

$$\frac{dV}{d\Delta^2 x} = \Delta \frac{dB}{d\Delta^2 x} + \frac{dB}{d\Delta x} + \Delta \frac{dB}{d\Delta x}; \quad \text{usw.}$$

und ähnlich gebaute Ausdrücke in y, z, \dots . Es ergibt sich schließlich die Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} + n \Delta \frac{dV}{dx} + \frac{n(n-1)}{2} \Delta^2 \frac{dV}{dx} + \dots + \Delta^n \frac{dV}{dx} \\ - \Delta \frac{dV}{d\Delta x} - (n-1) \Delta^2 \frac{dV}{d\Delta x} - \dots - \Delta^n \frac{dV}{d\Delta x} \\ + \Delta^2 \frac{dV}{d\Delta^2 x} + \dots + \Delta^n \frac{dV}{d\Delta^2 x} \\ \dots \\ \pm \Delta^n \frac{dV}{d\Delta^n x} = 0 \end{aligned}$$

und analoge Gleichungen in y, z, \dots ; hierbei ist n der Exponent der Ordnung der Funktion V . In derselben Abhandlung sucht Condorcet auch die Variationsrechnung für endliche Differenzen abzuleiten¹⁾, was nach seiner Aussage bereits Lagrange in einem speziellen, allerdings alle Schwierigkeiten des allgemeinen Problems enthaltenden Fall getan hatte. Soll ΣV ein Maximum oder Minimum werden, sagt Condorcet, wo V eine Funktion von x, y, z, \dots und den endlichen Differenzen dieser Variablen bedeutet, so ist die Bedingung

$$d\Sigma V = 0$$

gleichbedeutend mit

$$\frac{d\Sigma V}{dx} = 0; \quad \frac{d\Sigma V}{d\Delta x} = 0; \quad \dots$$

und ähnlichen Gleichungen in y, z, \dots ; Condorcet weist auch auf die verwandten Bedingungen dafür hin, daß V eine exakte Differenz ist.

Auch die allgemeinen Methoden der Differentialgleichungen wurden auf Differenzgleichungen übertragen. So übt Lorgna die Methode der Auffindung integrierbarer Gleichungen durch Ausgehen vom Integral; er stellt sich die Aufgabe, alle Differenzgleichungen mit variablen Koeffizienten zu finden, die ein vollständiges Integral

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1770 (1773), p. 119.



von gegebener Form zulassen.¹⁾ Die Verwendung von Multiplikatoren zwecks Integration von Differenzgleichungen faßt u. a. Pietro Paoli ins Auge²⁾; auch Trembley bedient sich dieser Methode. Sei

$$dy + My = N,$$

wo d eine endliche Differenz andeuten soll, die gegebene Gleichung³⁾ und $P + dP$ der Multiplikator. Die linke Seite der Gleichung

$$(P + dP)dy + (P + dP)My = (P + dP)N$$

wird dann wegen

$$d(Py) = Pdy + ydP + dPdy = (P + dP)dy + ydP$$

eine totale Differenz, wenn

$$y dP = (P + dP)My,$$

d. h.

$$\frac{dP}{P + dP} = M.$$

Die letztere Gleichung geht aber mit Hilfe der Substitution $P = e^t$ in

$$dt = \frac{1}{1 - M}$$

über; daraus folgt

$$P = \frac{1}{\pi(1 - M)},$$

wo π ein Produkt von lauter Faktoren $1 - M$ bedeutet. Trembley erhält unschwer

$$y = \pi(1 - M) \left(C + \int \frac{N}{\pi(1 - M)} \right),$$

wo M' den auf M folgenden Funktionswert, \int eine Summation bedeutet; er verweist übrigens auf Lagrange, welcher diese Aufgabe schon im ersten Bande der Turiner Miscellen integriert hatte. Auch Näherungsmethoden⁴⁾, sowie die Variation der Konstanten sind auf Differenzgleichungen übertragen worden.

Ehe wir zu den Methoden übergehen, die für spezielle Gleichungstypen ausgebildet worden sind, haben wir eine nicht unwichtige Unterscheidung zu erwähnen; während nämlich die ersten Untersuchungen über Differenzgleichungen die Differenz Δx konstant annehmen, hat man später auch den Fall betrachtet, daß Δx von x abhängig ist,

¹⁾ Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. I, 1782, p. 418 ff. ²⁾ Ebenda t. IV, 1788, p. 464. ³⁾ Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1799/1800 (1803), p. 18. ⁴⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1782 (1785), p. 31 ff.

die x selbst also keine arithmetische Reihe 1. Ordnung bilden. Diese Möglichkeit hat anscheinend zuerst Monge berücksichtigt, der durch seine Untersuchungen über die willkürlichen Funktionen bei partiellen Differentialgleichungen auch auf die angeblich von Euler entdeckten willkürlichen Funktionen bei Differenzgleichungen geführt wird. Hierbei stellt sich Monge die Aufgabe¹⁾, die Gleichung

$$\Delta y + Ay + B = 0$$

vollständig zu integrieren, wenn Δx 1. konstant $= a$; 2. $= a + bx$; 3. $= ax^n - x$ ist. Im ersten Fall ergibt sich

$$Ay + B = (1 - A)^{\frac{x}{a}} \times \varphi \left(\sin \frac{\pi x}{a} \& \cos \frac{\pi x}{a} \right),$$

wo φ eine willkürliche Funktion von zwei Veränderlichen ist; im 2. und 3. Fall sind die Integralgleichungen wesentlich komplizierter; Monge benutzt zu ihrer Herleitung die Substitutionen

$$a + bx = e^{\omega}, \quad \text{d. h.} \quad \Delta \omega = \lg(b + 1),$$

bzw.

$$x^n = e^{\omega}, \quad \text{d. h.} \quad \Delta \omega = (n - 1)\omega + n \lg a,$$

die Logarithmen ins Resultat einführen. Ausführlicher und allgemeiner ist die Voraussetzung variabler Δx von Lorgna behandelt, der Δx gleich irgend einer Funktion X von x setzt²⁾ und die Folgen dieser Annahme eingehend untersucht. Die Reihe y, y', y'', \dots ist dann dadurch definiert, daß jeder Term aus dem unmittelbar vorhergehenden durch Substitution von $x + X$ an Stelle von x hervorgeht. Analog gehe in der Reihe X, X', X'', \dots jedes Glied aus dem vorhergehenden dadurch hervor, daß man x durch den „Modul“ $x + X$ ersetzt. Dann kann, wie leicht ersichtlich, $y^{(n)}$ auch unmittelbar, d. i. ohne Zuhilfenahme der Terme $y^{(n-1)}, \dots$ aus y erhalten werden, indem man für x die Summe

$$x + X + X' + \dots + X^{(n-1)}$$

substituiert. Lorgna findet noch andere Beziehungen; so stellt er die $y^{(n)}$ und mit deren Hilfe schließlich auch die Differenzen von y beliebiger Ordnung durch

$$x + X + X' + \dots + X^{(n-1)}$$

¹⁾ Mémoires présentés par divers Savans, t. IX (1780), p. 357. Dieser Aufsatz wurde 1774 der Akademie vorgelegt. ²⁾ Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. I, 1782, p. 375 ff.



dar, was bei Benutzung des Taylorschen Satzes leicht gelingt. Er benutzt die betr. Formeln zur Integration der linearen Gleichung

$$\varphi = Ay + By' + Cy'' + \dots,^1)$$

in der φ eine Funktion von x bedeutet, bei variablem $\Delta x = X$. Pietro Paoli, der Lorgnas Arbeiten kennt und auch zitiert, behandelt ebenfalls den Fall variabler Δx . Sei eine Gleichung $M = 0$ zwischen x, y_x und deren Differenzen gegeben, ferner

$$\Delta x = \varphi(x) - x.^2)$$

Paoli verlangt nun $x = p_i$ und $\varphi(x) = p_{i+1}$, woraus

$$p_{i+1} = \varphi(p_i).$$

Aus dieser Gleichung kann aber bei gegebenem φ die Funktion $p_i = x$ ermittelt, somit x und seine Differenzen durch z ausgedrückt werden; dadurch geht y_x in eine Funktion t_i von z und die ursprüngliche Gleichung $M = 0$ in eine neue zwischen t und z über, wobei jetzt die Differenz von z konstant und zwar gleich 1 ist. Paoli hat damit nachgewiesen, daß der Unterscheidung von variablen und konstanten Δx keine prinzipielle Bedeutung zukommt.

Von speziellen Gleichungen wurde naturgemäß zuerst die lineare Gleichung in Angriff genommen. Hier ist an erster Stelle ein Aufsatz von Lagrange aus dem Jahre 1759 zu nennen.³⁾ Bezüglich der Gleichung

$$\Delta y + yM = N,$$

wo wir Δ statt d geschrieben haben, und wo M und N Funktionen von x bedeuten, erinnert Lagrange an die Integration der Differentialgleichung

$$dy + yXdx = Zdx,$$

die er nach folgender Methode behandelt: er setzt $y = uz$ und spaltet in

$$zdu + uzXdx = 0 \quad \text{und} \quad udx = Zdx;$$

daraus ergibt sich

$$u = e^{-\int X dx} \quad \text{und} \quad y = uz = u \int \frac{Z dx}{u} = \frac{\int e^{\int X dx} \cdot Z dx}{e^{\int X dx}}.$$

Auf dieselbe Weise läßt sich auch

¹⁾ Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. I, 1782, p. 409. Lorgna verweist auf die entsprechende Integration bei konstantem Δx durch Lagrange in den Turiner Miscellen und den Berliner Memoiren. ²⁾ Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. IV, 1788, p. 455. ³⁾ Miscellanea Taurinensia, t. I² (1759), p. 33 ff.

$$\Delta y + yM = N$$

integrieren. Aus $y = uz$ folgt

$$\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z;$$

Lagrange spaltet in

$$z\Delta u + uzM = 0 \quad \text{und} \quad u\Delta z + \Delta u\Delta z = N$$

und schreibt die erste Gleichung in der Form

$$\frac{\Delta u}{u} = -M,$$

woraus mittels $u = e^t$ wegen $\Delta u = e^t(e^{t'} - 1)$ die neue Gleichung

$$\frac{\Delta u}{u} = e^{t'} - 1 = -M$$

hervorgeht. Hieraus folgt

$$\Delta t = 1(1 - M),$$

also

$$t = \sum 1(1 - M) \quad \text{und} \quad u = e^t = \pi(1 - M),$$

wo π das Produktzeichen ist. Mit Hilfe dieses Resultats kann jetzt auch die zweite Gleichung

$$\Delta z = \frac{N}{u + \Delta u}$$

leicht integriert werden; es ergibt sich

$$y = \pi(1 - M) \times \left(A + \sum \frac{N}{\pi(1 - M)} \right),$$

wo wir \sum statt des Zeichens \int geschrieben haben, und wo M^t den auf M folgenden Wert bedeutet. Im folgenden¹⁾ geht Lagrange zur Gleichung beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten über. Er erinnert zu diesem Zweck an eine Methode von d'Alembert, die in den Memoiren der Berliner Akademie und im zweiten Band des Calcul intégral von Bougainville für die entsprechende Differentialgleichung

$$y + A \frac{dy}{dx} + B \frac{d^2y}{dx^2} + \dots = X$$

entwickelt ist; X bedeutet hierbei eine Funktion von x . Die Substitutionen

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dp}{dx} = q$$

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. I² (1759), p. 36. CANTOR, Geschichte der Mathematik IV.



führen bei Anwendung eines Multiplikatorensystems a, b, c, \dots auf die Gleichung

$$y + (A + a)p + (B + b)q + \dots - a \frac{dy}{dx} - b \frac{dp}{dx} - \dots = X.$$

Hierin ist

$$y + (A + a)p + (B + b)q + \dots$$

ein exaktes Vielfaches von

$$\int (ady + bdp + \dots),$$

wenn

$$dy + (A + a)dp + (B + b)dq + \dots = dy + \frac{b}{a}dp + \frac{c}{a}dq + \dots$$

ist. Durch Koeffizientenvergleichung erhält man hieraus

$$A + a = \frac{b}{a}; \quad B + b = \frac{c}{a}; \quad \text{usw.};$$

der letzte Koeffizient werde gleich 0 angenommen. Aus diesen Gleichungen ergibt sich aber jetzt durch allmähliche Elimination von b, c, \dots die Gleichung

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \dots = 0,$$

wo n die Ordnung der Differentialgleichung ist. Aus

$$y + (A + a)p + (B + b)q + \dots = z$$

folgt sodann

$$z - a \frac{dz}{dx} = X,$$

also

$$z = -e^{\frac{x}{a}} \int \frac{X}{ae^{\frac{x}{a}}} dx;$$

die n Werte von a liefern dann n Werte Z^I, Z^{II}, \dots von z ; y ergibt sich endlich aus den entsprechenden n linearen Gleichungen

$$y + (A + a)p + (B + b)q + \dots = z$$

mit den Unbekannten y, p, q, \dots . Diese Methode wendet Lagrange auf die Gleichung

$$y + A\Delta y + B\Delta^2 y + \dots = X$$

an; auch die Gleichung

$$y' + Ay'' + By''' + \dots = X,$$

die, wie er sagt, auf die erstere reduziert werden kann, behandelt er auf ähnliche Weise. Die Substitutionen

$$y'' = p'; \quad y''' = p'', \dots, p'' = q'; \quad p''' = q'', \dots$$

ergeben nämlich

$$y' + (A + a)p' + (B + b)q' + \dots - ay'' - bp'' - cq'' - \dots = X.$$

Die Gleichungen

$$A + a = \frac{b}{a}; \quad B + b = \frac{c}{a}; \dots$$

liefern wieder

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \dots = 0,$$

und die Transformation

$$y' + (A + a)p' + (B + b)q' + \dots = z$$

führt zu

$$z' - az'' = X;$$

die n Werte von a liefern wieder n Integrale z , und y selbst ergibt sich wieder aus n linearen Gleichungen. Laplace, der sich auf Condorcets allgemeine Untersuchungen über Differenzgleichungen und Eulers Integralrechnung beruft¹⁾, behandelt sodann die Gleichung

$$X^x = M^x y^x + V^x \Delta y^x + P^x \Delta^2 y^x + \dots$$

mit nichtkonstanten Koeffizienten und überträgt auf sie, nachdem er sie mittels der Relationen

$$\Delta y^x = y^{x+1} - y^x; \quad \Delta^2 y^x = y^{x+2} - 2y^{x+1} + y^x; \quad \text{usw.}$$

auf die Form

$$X^x = y^x + H^x \cdot y^{x+1} + H^x \cdot y^{x+2} + \dots$$

gebracht hat, seine Methode für die entsprechende Differentialgleichung (vgl. S. 931); die Aufgabe reduziert sich auch hier auf die Integration einer Gleichung nächstniederer Ordnung und eines Systems von Gleichungen der Form

$$\omega^x y^{x+1} + y^x = T^x.$$

Letztere Gleichung läßt sich aber auch $y^{x+1} = R^x y^x + Z^x$, d. i. als Rekursionsformel für y schreiben; durch sukzessive Substitution ergibt sich endlich

$$y^x = R \cdot R' \cdot R'' \dots R^{x-1} \left(A + \frac{Z}{R} + \frac{Z'}{R \cdot R'} + \dots + \frac{Z^{x-1}}{R \cdot R' \dots R^{x-1}} \right).$$

Laplace stellt diesen Ausdruck mit Hilfe der Zeichen Σ und ∇ für Summe und Produkt dar und bemerkt, daß auch für Differenzen-

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 300 ff.



gleichungen das „Theorem von Lagrange“ gilt, d. h. daß die Integration der Gleichung

$$X^x = y^x + H^x y^{x+1} + \dots$$

auf die von

$$0 = y^x + H^x y^{x+1} + \dots$$

hinauskommt.¹⁾ Bald darauf behandelt Laplace die Aufgabe noch einmal; er zeigt zuerst, daß die konstante Differenz zwischen den x unbeschadet der Allgemeinheit immer gleich 1 genommen werden kann.²⁾ Zur Vorbereitung der Aufgabe integriert er

$$y_x = H_x \cdot y_{x-1} + X_x$$

mittels der Substitution

$$y_x = u_x \cdot \nabla H_x,$$

die sofort auf

$$u_x = u_{x-1} + \frac{X_x}{\nabla H_x}$$

und damit auf

$$u_x = A + \sum \frac{X_{x+1}}{\nabla H_{x+1}}$$

führt. Laplace wählt diese wenig motivierte Substitution wohl deshalb, weil sie am raschesten zu dem schon längst bekannten Resultat führt. Die Gleichung

$$y_x = H_x \cdot y_{x-1} + {}^1H_x y_{x-2} + \dots + {}^{n-1}H_x y_{x-n} + X_x$$

bewältigt er mit Hilfe der Annahme

$$y_x = \alpha_x \cdot y_{x-1} + T_x;$$

α_x und T_x sind einstweilen noch unbestimmt. Diese Gleichung liefert mit den gleichwertigen

$$y_{x-1} = \alpha_{x-1} \cdot y_{x-2} + T_{x-1}; \dots, y_{x-n+1} = \alpha_{x-n+1} y_{x-n} + T_{x-n+1}$$

nach Multiplikation bzw. mit 1, $-{}^1\beta$, $-{}^2\beta$, ... und Addition die Beziehung

$$y_x = [\alpha_x + {}^1\beta] \cdot y_{x-1} + [-{}^1\beta \alpha_{x-1} + {}^2\beta] \cdot y_{x-2} + \dots - {}^{n-1}\beta \cdot \alpha_{x-n+1} \cdot y_{x-n} + T_x - {}^1\beta T_{x-1} - {}^2\beta T_{x-2} - \dots - {}^{n-1}\beta \cdot T_{x-n+1};$$

In dieser Gleichung werden jetzt die Größen ${}^1\beta, {}^2\beta, \dots$ so bestimmt, daß Glied für Glied mit der gegebenen Differenzgleichung übereinstimmt. Dann ergeben sich neben

¹⁾ Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 309. ²⁾ Mémoires présentés par divers Savans, t. VII, 1773 (1776), p. 40.

$$T_x = {}^1\beta T_{x-1} + {}^2\beta T_{x-2} + \dots + {}^{n-1}\beta T_{x-n+1} + X_n$$

noch n Bestimmungsgleichungen für die $n-1$ Größen

$${}^1\beta, {}^2\beta, \dots, {}^{n-1}\beta,$$

und man erhält durch ihre Auflösung nach β der Reihe nach:

$${}^1\beta = H_x - \alpha_x$$

$${}^2\beta = {}^1H_x - \alpha_{x-1} \cdot H_x - \alpha_x \cdot \alpha_{x-1}$$

$${}^3\beta = {}^2H_x - \alpha_{x-2} \cdot {}^1H_x + \alpha_{x-1} \cdot \alpha_{x-2} \cdot H_x - \alpha_x \cdot \alpha_{x-1} \cdot \alpha_{x-2}$$

$$\dots$$

$${}^{n-1}\beta = {}^{n-2}H_x - \alpha_{x-n+2} \cdot {}^{n-3}H_x + \dots - \alpha_x \cdot \alpha_{x-1} \cdot \dots \cdot \alpha_{x-n+2}.$$

Die n te Gleichung war

$$-{}^{n-1}\beta \cdot \alpha_{x-n+1} = {}^{n-1}H_x;$$

so daß ${}^{n-1}\beta$ auf zweierlei Arten dargestellt werden kann; durch Vergleichung ergibt sich

$$0 = 1 - \frac{H_x}{\alpha_x} - \frac{{}^1H_x}{\alpha_x \cdot \alpha_{x-1}} - \frac{{}^2H_x}{\alpha_x \cdot \alpha_{x-1} \cdot \alpha_{x-2}} - \dots - \frac{{}^{n-1}H_x}{\alpha_x \cdot \dots \cdot \alpha_{x-n+1}}.$$

Ist aus dieser Gleichung ein Wert von α ermittelt, so lassen sich die β unmittelbar angeben; dann ist noch T_x aus der oben angeführten Differenzgleichung zu bestimmen, die bezüglich ihrer Ordnung um 1 Grad niedriger ist als die ursprünglich gegebene. Laplace bringt als Beispiele die bekannten Aufgaben, den Sinus eines vielfachen Arguments durch die Potenzen des Cosinus des einfachen Arguments auszudrücken, sowie das Bildungsgesetz der höheren Differentialquotienten von $\arcsin x$ zu entwickeln.¹⁾ In einem Aufsatz²⁾ in den Berliner Memoiren vom Jahre 1775, an den später u. a. Malfatti anknüpft³⁾, beschäftigt sich endlich Lagrange speziell mit der Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$Ay_x + By_{x+1} + \dots + Ny_{x+n} = 0,$$

d. i. mit dem sogenannten Problem der rekurrenten Reihen, bringt die diesbezüglichen Gleichungen in bequeme, handliche Form und berücksichtigt auch den Fall mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$A + Ba + \dots + Na^n = 0;$$

diesen Fall betrachtet er übrigens auch noch in einer späteren Ab-

¹⁾ Mémoires présentés par divers Savans, t. VII, 1773 (1776), p. 65 bzw. 68. ²⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 151 ff. ³⁾ Memorie di Mat. e Fis. Soc. It. t. III, 1786, p. 571 ff.



handlung von einem neuen Gesichtspunkt aus.¹⁾ Die Behandlung der Gleichung mit konstanten Koeffizienten bei variablem Δ_x durch Lorgna haben wir bereits erwähnt; außer der linearen Gleichung konnte hier keine andere höherer Ordnung oder höheren Grades (vgl. das Beispiel von Monge S. 1054) Beachtung finden.²⁾

Für die Untersuchungen auf dem Gebiet der partiellen Differenzgleichungen wurde eine Arbeit von Laplace grundlegend; dieser ist nach eigener Aussage³⁾ durch Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Problem der „rekurre-rekurrenten Reihen“, wie er sich ausdrückt, geführt worden. Seien folgende Gleichungen gegeben:⁴⁾

$$\begin{aligned} & {}^1y^x + A \cdot {}^1y^{x-1} + B \cdot {}^1y^{x-2} + \dots + N = 0 \\ & {}^2y^x + A'' \cdot {}^2y^{x-1} + B'' \cdot {}^2y^{x-2} + \dots + N'' \\ & \qquad \qquad \qquad = H'' \cdot {}^1y^x + M'' \cdot {}^1y^{x-1} + P'' \cdot {}^1y^{x-2} + \dots \\ & {}^3y^x + A''' \cdot {}^3y^{x-1} + B''' \cdot {}^3y^{x-2} + \dots + N''' \\ & \qquad \qquad \qquad = H''' \cdot {}^2y^x + M''' \cdot {}^2y^{x-1} + P''' \cdot {}^2y^{x-2} + \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$(1) \quad {}^ny^x + A^n \cdot {}^ny^{x-1} + B^n \cdot {}^ny^{x-2} + \dots + N^n \\ = H^{n-1}y^x + M^{n-1}y^{x-1} + P^{n-1}y^{x-2} + \dots$$

Laplace zeigt nun, daß man (1), die letzte dieser Gleichungen, stets auf folgende Form bringen kann:

$$(2) \quad {}^ny^x = a^n \cdot {}^ny^{x-1} + b^n \cdot {}^ny^{x-2} + c^n \cdot {}^ny^{x-3} + \dots + u^n;$$

hierbei sind $a^n, b^n, c^n, \dots, u^n$ Funktionen von n . Aus (2) ergeben sich sodann die speziellen Gleichungen

$$\begin{aligned} H^{n-1}y^x &= H^n(a^{n-1} \cdot {}^{n-1}y^{x-1} + b^{n-1} \cdot {}^{n-1}y^{x-2} + \dots + u^{n-1}) \\ M^{n-1}y^{x-1} &= M^n(a^{n-1} \cdot {}^{n-1}y^{x-2} + b^{n-1} \cdot {}^{n-1}y^{x-3} + \dots + u^{n-1}) \\ P^{n-1}y^{x-2} &= P^n(a^{n-1} \cdot {}^{n-1}y^{x-3} + b^{n-1} \cdot {}^{n-1}y^{x-4} + \dots + u^{n-1}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Addition und Anwendung von (1) liefert

¹⁾ Oeuvres de Lagrange, t. V, p. 627 ff. (Berliner Memoiren 1792/93).
²⁾ Man vgl. die Notizen von Monge in dem bereits zitierten Aufsatz Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 725 ff. (gelesen 1785) und Trembley, Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1799/1800 (1803).
³⁾ Mémoires présentés par divers Savans, t. VII, 1773 (1776), p. 39. Hier findet sich ein kurzer Überblick über die Geschichte der Differenzgleichungen. Man vgl. auch Histoire de l'Académie des Sciences 1779 (1782), p. 207 ff.
⁴⁾ Mémoires présentés par divers Savans, t. VI (1774), p. 354.

$$\begin{aligned} & {}^ny^x + A^n \cdot {}^ny^{x-1} + B^n \cdot {}^ny^{x-2} + \dots + N^n \\ & \qquad \qquad \qquad = a^{n-1}({}^{n-1}y^{x-1} + A^{n-1} \cdot {}^{n-1}y^{x-2} + \dots + N^{n-1}) \\ & \qquad \qquad \qquad + b^{n-1}({}^{n-1}y^{x-2} + A^{n-1} \cdot {}^{n-1}y^{x-3} + \dots + N^{n-1}) \\ & \qquad \qquad \qquad + \dots \dots \dots \\ & \qquad \qquad \qquad + u^{n-1}(H^{n-1} + M^{n-1} + P^{n-1} \dots). \end{aligned}$$

Soll diese Gleichung mit (2) identisch sein, so muß:

$$\begin{aligned} a^n &= a^{n-1} - A^n \\ b^n &= b^{n-1} + a^{n-1}A^n - B^n \\ c^n &= c^{n-1} + b^{n-1}A^n + a^{n-1}B^n - C^n \\ &\dots \dots \dots \\ u^n &= u^{n-1}(H^n + M^n + P^n + \dots) - N^n(1 - a^{n-1} - b^{n-1} - \dots). \end{aligned}$$

Das Problem ist damit, genauer nach Bestimmung der $a^n, b^n, c^n, \dots, u^n$, auf die Integration des Systems der Gleichungen (2), d. i. eines Systems gewöhnlicher Differenzgleichungen zurückgeführt, die keine prinzipielle Schwierigkeit mehr bietet. In einer späteren Abhandlung¹⁾ behandelt Laplace das spezielle System (équation rentrante en elle-même)

$$y_x^i + Ay_{x-1}^i + {}^1Ay_{x-2}^i + \dots = By_x^{i+1} + {}^1By_{x-1}^{i+1} + {}^2By_{x-2}^{i+1} + \dots,$$

wo i von 1 bis n läuft, und für y^{n+1} wieder y^1 zu setzen ist; er untersucht sodann kompliziertere Annahmen und bringt Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von späteren Arbeiten auf dem Gebiete der partiellen Differenzgleichungen sei, abgesehen von Lagrange²⁾, nur noch eine Abhandlung³⁾ von Paoli erwähnt, der als Beispiel die Frage untersucht, wie oft sich eine gegebene Zahl als x gliedrige Summe von Termen der natürlichen Zahlenreihe oder überhaupt einer arithmetischen Reihe darstellen läßt.⁴⁾

Endlich sind noch Gleichungen zu erwähnen, die zu gleicher Zeit Differentialquotienten und endliche Differenzen enthalten; derartige Gleichungen treffen wir bei Laplace,⁵⁾ Lorgna⁶⁾ und Paoli⁷⁾ In gewissem Sinne kann man auch eine Aufgabe⁸⁾ von Euler hierher

¹⁾ Mémoires présentés par divers Savans, t. VII, 1773 (1776), p. 79. Im Text wurden die einzelnen Gleichungen des Originals durch einen Index i zusammengefaßt.
²⁾ Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 165 ff. ³⁾ Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. II, part. 2, 1784, p. 787 ff. ⁴⁾ Ebenda, p. 817 bzw. 829.
⁵⁾ Histoire de l'Académie des Sciences 1779 (1782), p. 302. Hier sind die fonctions génératrices benutzt. ⁶⁾ Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. IV, 1788, p. 156 ff. ⁷⁾ Ebenda, t. V, part. 2, 1790, p. 575. Hier ist auf die Laplacesche Methode der erzeugenden Funktionen verwiesen. ⁸⁾ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XVI, 1771 (1772), p. 140 ff.