$$\lim_{\varphi = 90^\circ} \frac{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\varphi} = 2$$

oder:

$$\lim_{\varphi = 90^\circ} \frac{\sec\varphi + \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi} = 2. \tag{12}$$

Die Gleichungen (11), (12) stehen zueinander in Widerspruch. Man muß aber erwägen, sagt Kästner, daß der rechte Winkel weder Sekante noch Tangente besitzt, so daß (11) nur aussagt, daß zwei nicht existierende Dinge zusammengenommen ein nicht existierendes Ding ausmachen. Nur für diejenigen, fährt er fort, besteht der Widerspruch, die das Unendliche als etwas Wirkliches betrachten.

3. Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Reihenlehre.

Diese Anwendungen erscheinen in unserer Periode um so häufiger, als man sich damals berechtigt glaubte, mit unendlichgroßen und unendlichkleinen Größen und mit unendlichen Reihen ganz rücksichtslos umzugehen. Eben darum aber bedürfen die bezüglichen Formeln einer genauen Prüfung, und einige von ihnen haben nur eine — wie man heute sagen würde — asymptotische Bedeutung. Solcherart ist gleich die erste, die wir anzuführen haben.

In die schon oben (S. 747) besprochene Formel:

$$\int_0^1 \frac{(x^m - x^n)\,dx}{x \log x} = \log\frac{m}{n}$$

setzt Euler[1] $j\left(x^{\frac{1}{j}} - 1\right)$ statt $\log x$ ein, wo j eine unendliche Zahl bezeichnet; es ergibt sich:

$$\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{jx\left(x^{\frac{1}{j}} - 1\right)}\,dx = \log\frac{m}{n},$$

und durch die Substitution $x = z^j$:

$$\int_0^1 \frac{z^{mj} - z^{nj}}{z(z-1)}\,dz = \log\frac{m}{n}.$$

[1] Speculationes analyticae, Novi Comm. Acad. Petrop. XX, 1775 (publ. 1776), p. 59—79.

Nehmen wir $m > n$ an, und entwickeln $\frac{z^{mj}}{z(z-1)}$, $\frac{z^{nj}}{z(z-1)}$ in Reihen, so folgt nach Integration:

$$\frac{1}{mj-1} + \frac{1}{mj-2} + \cdots - \frac{1}{nj-1} - \frac{1}{nj-2} - \cdots = \log\frac{m}{n},$$

oder:

$$\frac{1}{mj-1} + \frac{1}{mj-2} + \cdots + \frac{1}{nj} = \log\frac{m}{n}.$$

Es mag hier bemerkt werden, daß die Entwicklung nach fallenden Potenzen von z im Intervalle $0 \leq z \leq 1$ nicht konvergiert. Man kann aber, wenigstens für ganzzahlige m und n, dieser Schwierigkeit aus dem Wege gehen wie folgt. Es ist:

$$\frac{z^{mj} - z^{nj}}{z(z-1)} = z^{nj-1}\,\frac{z^{(m-n)j} - 1}{z-1} = z^{nj-1}\left(z^{(m-n)j-1} + z^{(m-n)j-2} + \cdots + 1\right)$$
$$= z^{mj-2} + z^{mj-3} + \cdots + z^{nj-1},$$

woraus sich durch Integration wiederum ergibt:

$$\int_0^1 \frac{z^{mj} - z^{nj}}{z(z-1)}\,dz = \frac{1}{mj-1} + \frac{1}{mj-2} + \cdots + \frac{1}{nj}.$$

Ein interessantes Problem der Differenzenrechnung ist folgendes[1]: Aus der als bekannt vorausgesetzten Summe:

$$f_n(x) = 1^n + 2^n + \cdots + x^n$$

die Summen:

$$f_{n+1}(x) = 1^{n+1} + 2^{n+1} + \cdots + x^{n+1},$$
$$f_{n-1}(x) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \cdots + x^{n-1}$$

abzuleiten. Dieses Problem löst Euler auf Grund einer von ihm früher aufgestellten Formel, welche den Ausdruck von $f_n(x)$ unter der Form einer ganzen rationalen Funktion von x von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung angibt. Man kann allgemeiner aus der Summe $\sum_{r=1}^{x} \varphi(r)$ die Summen $\sum_{r=1}^{x} \int \varphi(r)\,dr$ und $\sum_{r=1}^{x} \varphi'(r)$ ableiten.

Man hat oft versucht, die Summe einer Reihe durch ein bestimmtes Integral auszudrücken, wenn dieses auch manchmal nur eine scheinbare Vereinfachung ist, insofern als die Berechnung eines

[1] Euler, De singulari ratione differentiandi et integrandi quae in summis serierum occurrit (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VI, 1788 (publ. 1790), p. 3—15.

bestimmten Integrals nicht selten nur durch Reihenentwicklung geschehen kann. Euler[1]) hat dieses Problem für die Summe:

$$1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \cdots$$

gelöst, wo:

$$\alpha_h = \binom{-a:b}{h} = (-1)^h \frac{a}{b} \frac{a+b}{2b} \frac{a+2b}{3b} \cdots \frac{a+(h-1)b}{hb}$$

ist. Man kann durch Differentiation bestätigen, daß:

$$x^a y^c = a \int x^{a-1} y^{c-b} dx - (a+c) \int x^{a+b-1} y^{c-b} dx,$$

wo:

$$y = (1-x^b)^{\frac{1}{b}}.$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^1 x^{a+b-1} y^{c-b} dx = \frac{a}{a+c} \int_0^1 x^{a-1} y^{c-b} dx,$$

und analog:

$$\int_0^1 x^{a+2b-1} y^{c-b} dx = \frac{a+b}{a+b+c} \int_0^1 x^{a+b-1} y^{c-b} dx,$$

also:

$$\int_0^1 x^{a+2b-1} y^{c-b} dx = \frac{a}{a+c} \frac{a+b}{a+b+c} \int_0^1 x^{a-1} y^{c-b} dx,$$

usw. Setzt man insbesondere $c = b - a$, und beachtet, daß:

$$\int_0^1 x^{a-1} y^{-a} dx = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}},$$

ein Wert, den wir mit Δ bezeichnen wollen, so erhält man:

$$\int_0^1 x^{a+b-1} y^{-a} dx = \frac{a}{b} \Delta = \alpha_1 \Delta,$$

$$\int_0^1 x^{a+2b-1} y^{-a} dx = \frac{a}{b} \frac{a+b}{2b} \Delta = \alpha_2 \Delta,$$

usw. Es ist aber:

[1]) Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii formantur (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VIII, 1790 (publ. 1794), p. 32—68.

$$\int_0^1 x^{a-1} y^{-2a} dx = \int_0^1 x^{a-1} y^{-a} dx (1 + \alpha_1 x^b + \alpha_2 x^{2b} + \cdots)$$

$$= \int_0^1 x^{a-1} y^{-a} dx + \alpha_1 \int_0^1 x^{a+b-1} y^{-a} dx + \alpha_2 \int_0^1 x^{a+2b-1} y^{-a} dx + \cdots,$$

folglich:

$$\int_0^1 x^{a-1} y^{-2a} dx = \Delta(1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \cdots),$$

und hieraus:

$$1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \cdots = \frac{1}{\Delta} \int_0^1 x^{a-1} y^{-2a} dx.$$

Die Summen:

$$\begin{aligned} 1 &+ \alpha_1 \alpha_1' + \alpha_2 \alpha_2' + \cdots, \\ \alpha_1 &+ \alpha_2 \alpha_1' + \alpha_3 \alpha_2' + \cdots, \\ \alpha_2 &+ \alpha_3 \alpha_1' + \alpha_4 \alpha_2' + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo $\alpha_h' = \binom{-a':b}{h}$, lassen sich auf analoge Weise berechnen.

Ein Interpolationsproblem führte Euler[1]) dazu, die Größe:

$$A = \frac{f^2(f+2a)^2(f+4a)^2 \cdots}{(f+a)^2(f+3a)^2(f+5a)^2 \cdots}$$

durch bestimmte Integrale auszudrücken. Aus:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \frac{m+k}{m} \frac{m+k+n}{m+n} \cdots \int_0^1 \frac{x^\infty dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}$$

leitete er für $\begin{cases} k = a \\ m = f \\ n = 2a \end{cases}$ und für $\begin{cases} k = a \\ m = f + a \\ n = 2a \end{cases}$ ab:

$$\int_0^1 \frac{x^{f-1} dx}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \frac{(f+a)(f+3a)\cdots}{f(f+2a)\cdots} \int_0^1 \frac{x^\infty dx}{\sqrt{1-x^{2a}}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{f+a-1} dx}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \frac{(f+2a)(f+4a)\cdots}{(f+a)(f+3a)\cdots} \int_0^1 \frac{x^\infty dx}{\sqrt{1-x^{2a}}},$$

also:

[1]) De fractionibus continuis Wallisii (1780), Mém. Acad. St.-Pét. V, 1812 (publ. 1815), p. 24—44.

$$A = f\,\frac{\int\limits_0^1 \frac{x^{f+a-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2a}}}}{\int\limits_0^1 \frac{x^{f-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2a}}}}.$$

Ebenfalls mit der Differenzen- und Interpolationslehre hängt die Eulersche[1]) Formel zusammen:

$$f(x)+f(x+1)+f(x+2)+\cdots$$
$$=\int\limits_x^\infty f(x)\,dx+\tfrac{1}{2}f(x)-\tfrac{1}{2}Af'(x)+\tfrac{1}{8}Bf'''(x)-\tfrac{1}{32}Cf^{V}(x)+\cdots,$$

wo die Zahlen:

$$A=\tfrac{1}{6},\quad B=\tfrac{1}{90},\quad C=\tfrac{1}{945},\ \cdots$$

die nämlichen sind, welche in den Formeln:

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\cdots=A\pi^2,$$
$$1+\tfrac{1}{4^2}+\tfrac{1}{9^2}+\cdots=B\pi^4,$$
$$1+\tfrac{1}{4^3}+\tfrac{1}{9^3}+\cdots=C\pi^6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

vorkommen. Eine analoge Formel gilt für die Summe:

$$f(x)-f(x+1)+f(x+2)-\cdots.$$

Endlich drückt Euler[2]) den Binomialkoeffizienten $\binom{p}{q}$ durch ein bestimmtes Integral aus:

$$\binom{p}{q}=\frac{1}{q\int\limits_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-q}\,dx};$$

insbesondere ist:

$$\binom{0}{q}=\frac{1}{q\int\limits_0^1 x^{q-1}(1-x)^{-q}\,dx}=\frac{\sin q\pi}{q\pi}.$$

[1]) Methodus succincta summas serierum infinitarum per formulas differentiales investigandi (1780), Mém. Acad. St.-Pét. V, 1812 (publ. 1815), p. 45—56. [2]) De unciis potestatum binomii earumque interpolatione (1781), Mém. Acad. St.-Pét. IX, 1819—1820 (publ. 1824), p. 57—76.

Mit der Auswertung der Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p+qn},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+qn},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+qn)(r+sn)},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+qn)(r+sn)(t+un)},\ \cdots,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a+bn}{(p+qn)(r+sn)\cdots},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+bn)(c+dn)}{(p+qn)(r+sn)\cdots},\ \cdots$$

durch bestimmte Integrale beschäftigt sich Lorgna[1]). Antonio Maria Lorgna, geboren zu Cerea bei Verona am 18. Oktober 1735, gestorben zu Verona am 28. Juni 1796, war Oberst des Geniekorps und Professor an der Militärschule zu Verona und beschäftigte sich besonders mit hydraulischen Fragen; er war der Stifter und der erste Vorsteher der Società Italiana delle Scienze und veröffentlichte zahlreiche mathematische und hydraulische Werke und Abhandlungen.

Eine spätere Schrift von Lorgna[2]) bezweckt die Summierung der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n\pm 1}$, wo $a>1$. Setzen wir der Einfachheit wegen $a=e$ voraus. Es ist:

$$\sin\frac{n}{i}=\frac{e^n-e^{-n}}{2i},$$

also:

$$\frac{1}{2\sin\frac{n}{i}}=\frac{ie^n}{e^{2n}-1}.$$

Setzt man nun in die bekannte Formel:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^p+x^{q-p}}{1+x^q}\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}}$$

die Werte $p=\frac{n}{i\pi}$, $q=1$ ein, so folgt:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}}+x^{1-\frac{n}{i\pi}}}{1+x}\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{\sin\frac{n}{i}}=\frac{2i\pi e^n}{e^{2n}-1},$$

[1]) Specimen de seriebus convergentibus, Verona 1775. [2]) Delle progressioni reciproche delle potenze affette, Mem. Soc. It. sc. II, P. II, 1784, p. 210—236.

oder:

$$\frac{e^n \pm 1}{2 i \pi e^n} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}} + x^{1-\frac{n}{i\pi}}}{1+x} \frac{dx}{x} = \frac{1}{e^n \mp 1},$$

oder auch:

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}} + x^{1-\frac{n}{i\pi}}}{1+x} \frac{dx}{x} \pm e^{-n} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}} + x^{1-\frac{n}{i\pi}}}{1+x} \frac{dx}{x}\right] = \frac{1}{e^n \mp 1}.$$

Diese Relation läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{e^n \mp 1} = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}}\left(1 - x^{\frac{1}{i\pi}}\right)}{(1+x)\left(1 - x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{n}{i\pi}}\left(1 - x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)}{(1+x)\left(1 - x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}\right.$$

$$\left.\pm e^{-n} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}}\left(1 - e^{-1} x^{\frac{1}{i\pi}}\right)}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} \pm e^{-n} \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{n}{i\pi}}\left(1 - e^{-1} x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} - \int_0^1 \frac{x^{\frac{n+1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}\right.$$

$$+ \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{n}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} - \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{n+1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}$$

$$\pm e^{-n} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} \mp e^{-n-1} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n+1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}$$

$$\left.\pm e^{-n} \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} \mp e^{-n-1} \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{n+1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}\right].$$

Summiert man nach n von 1 bis ∞, so erhält man nach leichten Reduktionen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \mp 1} = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}\right.$$

$$\left.\pm e^{-1} \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} \pm e^{-1} \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}\right],$$

eine Formel, welche die Summe der beiden Reihen links durch bestimmte Integrale ausdrückt.

Auch Malfatti in einer schon oben angeführten Abhandlung[1]) beschäftigt sich mit der Summierung von Reihen durch bestimmte Integrale. Es ist:

$$\int \frac{x^{\frac{n}{m}}\,dx}{1+x} = \int \left[x^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{n+m}{m}} + x^{\frac{n+2m}{m}} - \cdots\right] dx$$

$$= m\left[\frac{x^{\frac{m+n}{m}}}{m+n} - \frac{x^{\frac{2m+n}{m}}}{2m+n} + \frac{x^{\frac{3m+n}{m}}}{3m+n} - \cdots\right] + C,$$

also:

$$\frac{1}{m} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}\,dx}{1+x} = \frac{1}{m+n} - \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} - \cdots.$$

Man erhält analog:

$$\frac{1}{m} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}\,dx}{1-x} = \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \cdots.$$

Es ist zu beachten, daß dieses letzte Integral unendlich ist; führt man nämlich die Substitution $x = y^m$ aus, zerlegt in einfache Brüche und integriert, so kommt das Glied:

$$\Big[\log(1-y)\Big]_0^1 \quad \text{oder} \quad \Big[\log\left(1 - x^{\frac{1}{m}}\right)\Big]_0^1$$

[1]) Essai analytique sur l'intégration de deux formules différentielles, et sur la somme générale des séries harmoniques à termes rationnels, Mém. Acad. Turin 1788—1789 (publ. 1790), p. 53—112. Siehe auch: Gratognini, Saggio analitico sopra una svista comune nel problema per la valutazione delle annuità, e sull' uso del Calcolo differenziale ed integrale nel sommare le serie armoniche relativamente a tale problema, Pavia 1782.

vor. Nichtsdestoweniger hat die Formel nach **Malfatti** eine Bedeutung; es ergibt sich nämlich für jedes n und p:

$$\frac{1}{m}\left[\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}}{1-x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{m}}}{1-x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \cdots - \frac{1}{m+p} - \frac{1}{2m+p} - \cdots,$$

und die links vorkommende Differenz ist endlich, weil die beiden Glieder $\left[\log\left(1 - x^{\frac{1}{m}}\right)\right]_0^1$ sich gegenseitig aufheben.

Andere Schriften setzen sich als Zweck vor, die Summe einer Reihe oder den Wert eines unendlichen Produktes in geschlossener Form mit Hilfe der Integralrechnung zu ermitteln. Um auch hier mit **Euler** zu beginnen, führen wir zunächst eine Schrift[1]) an, wo er die schon bekannte unendliche Produktenentwicklung von $\cos\frac{\pi}{2n}$:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{25n^2}\right)\cdots$$

vermittels Integrationen berechnet.

Ebenfalls **Euler** verdankt man die merkwürdige Formel:

$$(13)\quad \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots\right) + \left(\frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{6} - \log x \log y,$$

wo $x + y = 1$.[2]) Es sei:

$$p = \int \frac{dx}{x}\log y, \quad q = \int \frac{dy}{y}\log x,$$

woraus folgt:

$$p + q = \log x \log y + C.$$

Man hat für $x + y = 1$:

$$p = \int \frac{dx}{x}\log(1-x) = -\int \frac{dx}{x}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)$$

$$= -\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots\right),$$

---

[1]) Exercitatio analytica (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VIII, 1790 (publ. 1794), p. 69—72. [2]) De summatione serierum in hac forma contentarum:

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \text{etc.}$$

(1779), Mém. Acad. St.-Pét. III, 1809—1810 (publ. 1811), p. 26—42.

und analog:

$$q = -\left(\frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \cdots\right),$$

also:

$$\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots\right) + \left(\frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \cdots\right) = C - \log x \log y.$$

Für $x = 1$ ist:

$$y = 0, \quad \log x \log y = 0;$$

es folgt:

$$C = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

woraus (13) sich ergibt.

Man kann auf analoge Weise die folgenden Beziehungen finden:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \cdots\right) + \left(\frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \cdots\right) = \frac{\pi^2}{6} + \log x \log\frac{y}{\sqrt{x}},$$

wo $x - y = 1$;

$$\left(\frac{x}{c} + \frac{x^2}{4c^2} + \frac{x^3}{9c^3} + \cdots\right) + \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \cdots\right) + \left(\frac{y}{c} + \frac{y^2}{4c^2} + \frac{y^3}{9c^3} + \cdots\right)$$

$$+ \left(\frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \cdots\right) = \log c \log\frac{xy}{c} - \log x \log y + \frac{\pi^2}{6}$$

$$+ \left(\frac{c}{1} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{9} - \cdots\right),$$

wo $xy + x + y = c$.

Auch die Relation:

$$\frac{2}{1}\sin\omega\sin\omega - \frac{2^3}{3}\sin 3\omega\sin\omega^3 + \frac{2^5}{5}\sin 5\omega\sin\omega^5 - \cdots$$

$$= \frac{2^2}{2}\cos 2\omega\sin\omega^2 - \frac{2^4}{4}\cos 4\omega\sin\omega^4 + \frac{2^6}{6}\cos 6\omega\sin\omega^6 - \cdots$$

wird von **Euler**[1]) auf Grund der Integralrechnung bewiesen. Es mögen die beiden Seiten durch S bzw. T bezeichnet werden. Setzen wir $2\sin\omega = b$ und betrachten wir augenblicklich b, ω als voneinander unabhängig, so ist:

$$S = \frac{b\sin\omega}{1} - \frac{b^3\sin 3\omega}{3} + \cdots, \quad T = \frac{b^2\cos 2\omega}{2} - \frac{b^4\cos 4\omega}{4} + \cdots,$$

$$\frac{dS}{d\omega} = b\cos\omega - b^3\cos 3\omega + \cdots, \quad \frac{dT}{d\omega} = -b^2\sin 2\omega + b^4\sin 4\omega - \cdots,$$

woraus sich leicht ergibt:

---

[1]) De seriebus memorabilibus quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimere licet (1780), Mém. Acad. St.-Pét. V, 1812 (publ. 1815), p. 57—72.

$$\frac{dS}{d\omega}(1 + 2b^2 \cos 2\omega + b^4) = b(1 + b^2)\cos\omega,$$

$$\frac{dT}{d\omega}(1 + 2b^2 \cos 2\omega + b^4) = -b^2 \sin 2\omega,$$

und durch Integration:

$$S = \frac{1}{4}\log\frac{1 + b^2 + 2b\sin\omega}{1 + b^2 - 2b\sin\omega},$$

$$T = \frac{1}{4}\log[(1 + b^2 + 2b\sin\omega)(1 + b^2 - 2b\sin\omega)],$$

also:

$$T - S = \frac{1}{2}\log(1 + b^2 - 2b\sin\omega),$$

und durch Einsetzung des Wertes von b:

$$T = S.$$

Verschiedene Methoden zur Auswertung von unendlichen Reihen durch Integration wurden von Landen[1]) und Fontana[2]) entwickelt.

Transzendenten. Elliptische Integrale.

1. Verschiedene Transzendenten.

Bevor wir auf die elliptischen Integrale kommen, deren Behandlung beinahe das ganze Kapitel einnehmen wird, wollen wir uns mit einigen anderen Transzendenten von weit geringerer Wichtigkeit beschäftigen.

Nur wenige Worte werden wir einer Schrift Eulers über unstetige Funktionen[3]) widmen. Euler bezeichnet diejenigen Funktionen als „unstetig", die sich nicht durch einen einzigen analytischen Ausdruck darstellen lassen; so ist z. B. eine Polygonallinie das Bild einer unstetigen Funktion. Nun fragt sich Euler, ob man solche Funktionen in der Analysis zulassen darf. Dazu bemerkt er, daß die Integration der partiellen Differentialgleichungen willkürliche Funktionen einführt, und daß man sich folglich, wenn man alle Lösungen er-

[1]) A new method of obtaining the sums of certain series, Math. Mem. I, p. 67—118. [2]) Memoria sopra la somma di alcune serie (das mir zur Verfügung stehende, der Universitäts-Bibliothek zu Pavia angehörende Exemplar trägt weder Druckort noch Datum). [3]) De usu functionum discontinuarum in analysi, Novi Comm. Acad. Petrop. XI, 1765 (publ. 1767), p. 3—27.

halten will, erlauben muß, als solche nicht nur stetige, sondern auch unstetige Funktionen anzunehmen.

Vandermonde betrachtet in einer schon oben (S. 120) angeführten Schrift[1]) den später als „Fakultät" oder „Faktorielle" bezeichneten Ausdruck:

$$[p]^n = p(p-1)\cdots(p-n+1).$$

Er findet:

$$[\infty]^n = \infty^n, \quad [p]^n = [p]^m[p-m]^{n-m},$$

$$[p]^0 = 1, \quad [p]^{-m} = \frac{1}{[p+m]^m},$$

ferner:

$$(1) \qquad [p+m+n]^n[p]^{-n}$$
$$= 1 + [m]^1[0]^{-1}[n]^1[p]^{-1} + [m]^2[0]^{-2}[n]^2[p]^{-2} + \cdots,$$

und hieraus, da die rechte Seite in bezug auf m und n symmetrisch ist:

$$[p+m+n]^n[p]^{-n} = [p+m+n]^m[p]^{-m}.$$

Die Formel (1) kann als Definition des Ausdruckes:

$$[p+m+n]^n[p]^{-n}$$

für nicht ganzzahlige m und n dienen. Eine andere wichtige Formel ist:

$$(2) \qquad [q]^n[p]^{-n} = \frac{[p]^{-\infty}[q]^{-\infty}}{[p+n]^{-\infty}[q-n]^{-\infty}}$$
$$= \frac{(p+n+1)(p+n+2)\cdots(q-n+1)(q-n+2)\cdots}{(p+1)(p+2)\cdots(q+1)(q+2)\cdots}.$$

Die Binomialreihe läßt sich durch die hier eingeführte Bezeichnung schreiben:

$$(1+x)^r = 1 + [r]^1[0]^{-1}x + [r]^2[0]^{-2}x^2 + \cdots.$$

Man erhält demnach durch Reihenintegration:

$$I = \nu N\int_0^1 x^{\nu N-1}(1-x^\nu)^P dx = 1 - \frac{N}{N+1}[P]^1[0]^{-1}$$
$$+ \frac{N}{N+2}[P]^2[0]^{-2} + \cdots$$
$$= 1 + [P]^1[0]^{-1}[-N]^1[N]^{-1} + [P]^2[0]^{-2}[-N]^2[N]^{-2} + \cdots.$$

[1]) Mémoire sur les irrationnelles de différens ordres avec une application au cercle, Hist. Acad. Paris 1772, P. I, p. 489—498.

Dieselbe Entwicklung ergibt sich aber auch aus der rechten Seite von (1), wenn man $m = P$, $n = -N$, $p = N$ oder $m = -N$, $n = P$, $p = N$ darin setzt; es ist also:

$$I = [P]^{-N}[N]^{N} = [P]^{P}[N]^{-P},$$

oder wegen (2):

$$I = \frac{[P]^{-\infty}[N]^{-\infty}}{[P+N]^{-\infty}[0]^{-\infty}} = \frac{(P+N+1)(P+N+2)\cdots 1\cdot 2\cdots}{(P+1)(P+2)\cdots(N+1)(N+2)\cdots}.$$

Ist insbesondere $\nu = 2$, $N = \frac{1}{2}$, $P = -\frac{1}{2}$, so folgt:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

also:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots = \left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots}.$$

Eine andere merkwürdige Transzendente ist der „Hyperlogarithmus", wie Mascheroni[1]) das Integral $\int \frac{dx}{\log x}$ nennt. Diese Funktion entwickelt er für jeden Wert von x in eine konvergente Reihe, und zeigt, wie man mit Hilfe derselben andere Integrale berechnen kann; es ist z. B.:

$$\int \log\log x\, dx = x \log\log x - \int \frac{dx}{\log x}.$$

Er versucht auch, x durch $\int \frac{dx}{\log x} = u$ auszudrücken; dazu setzt er:

$$x = K + Au + Bu^2 + \cdots,$$

und bestimmt die Koeffizienten mit Hilfe der Relation:

$$x\frac{d^2x}{du^2} = \frac{dx}{du}.$$

Mascheroni betrachtet auch das Integral $\int \frac{dx}{\log\log x}$, das als „hypersecundus Logarithmus" bezeichnet wird.

Adrien Marie Legendre[2]) verdankt man die Einführung in die Analysis der heutzutage „Kugelfunktionen" genannten Polynome:

[1]) Adnotationes ad Calculum integralem Euleri etc. [2]) Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes, Mém. prés. par divers savants X, 1785, p. 411—434. — Recherches sur la figure des planètes, Hist. Acad. Paris 1784 (publ. 1787), p. 370—389. — Suite des recherches sur la figure des planètes, Hist. Acad. Paris 1789 (publ. 1793), p. 372 bis 454.

$$X_0 = 1,$$

$$X_1 = x,$$

$$X_2 = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$X_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right),$$

die aus der Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots$$

entstehen. Über diese Polynome beweist er die folgenden Sätze[1]):

a) $X_n(1) = 1;$

b) $|X_n(x)| < 1$ für $|x| < 1;$

c) die Wurzeln der Gleichung $X_n(x) = 0$ sind sämtlich reell, kleiner als 1 und voneinander verschieden;

d) $$\int_0^1 x^n X_r\, dx = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(n+r+1)(n+r-1)\cdots(n-r+3)},$$

insbesondere:

$$\int_0^1 x^{2n} X_{2r}\, dx = 0 \quad \text{für} \quad n < r;$$

e) $$\int_{-1}^1 X_m X_n\, dx = 0 \quad \text{für} \quad m + n;$$

f) $$\int_{-1}^1 X_n^2\, dx = \frac{2}{2n+1};$$

g) $$\int_{-1}^1 \frac{X_{2n}\, dx}{(1+kx^2)^{\frac{2n+3}{2}}} = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(-k)^n}{(1+k)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

Die erste Schrift von Legendre wurde der Pariser Akademie im Jahre 1784 vorgelesen, und bot Laplace[2]) Gelegenheit dar, die

[1]) Einige von diesen Sätzen wurden von Legendre zuerst für gerade, später aber für beliebige Indizes aufgestellt. [2]) Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes, Hist. Acad. Paris 1782

Theorie der Kugelfunktionen zu fördern und zu erweitern. Er führte die von zwei Paaren von Veränderlichen ϑ, ω, ϑ', ω' abhängigen Kugelfunktionen Y_n ein, stellte die Differentialgleichung auf, welcher dieselben genügen, nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial Y_n}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial \omega^2} + n(n+1)Y_n = 0,$$

wo $\mu = \cos\vartheta$; ferner entwickelte er Y_n nach den Kosinussen der Vielfachen von $\omega - \omega'$, und gab die Integralrelation:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_m Y_n \, d\mu \, d\omega = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n.$$

Die Untersuchungen von Laplace wurden von Legendre in der zuletzt angeführten Abhandlung wieder aufgenommen und vervollständigt.

2. Elliptische Integrale.[1])

Die Theorie der elliptischen Integrale, deren Geburt wir in der vorhergehenden Periode beigewohnt haben, nahm in der gegenwärtigen einen unerwarteten Aufschwung infolge einer von Euler in einer im Jahre 1754 herausgegebenen anonymen Schrift[2]) aufgeworfenen Frage. Es war eben diese Frage, die G. B. Fagnano dazu aufmunterte, die Untersuchungen seines Vaters wieder aufzunehmen, und dessen Prioritätsrechte zu behaupten, während für Euler selbst seine eigene Frage der Ausgangspunkt einer Reihe von wichtigen Arbeiten war.

Um uns inmitten der großen Menge von uns vorliegenden Schriften zu orientieren, werden wir versuchen, dieselben um zwei Grundfragen zu gruppieren, nämlich:

A. Beziehungen zwischen Bögen eines und desselben Kegelschnittes (Eulersche Differentialgleichung, Additionssätze);

(publ. 1785); Oeuvres X, Paris 1894, p. 341—419. Daß die Priorität der Erfindung der Kugelfunktionen Legendre zukommt, ist ganz unzweifelhaft; siehe Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, II. Aufl., Berlin 1878, Einleitung zum ersten Bande.

[1]) Über die Geschichte der elliptischen Integrale führen wir zwei wertvolle Werke an: Enneper, Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte, II. Aufl., Halle 1890; Bellacchi, Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche, Firenze 1894. [2]) Daß diese Schrift von Euler herrührt, ergibt sich aus Nova Acta Erud. 1770, p. 433 und aus Novi Comm. Acad. Petrop. VII, 1758—1759 (publ. 1761), p. 128.

B. Beziehungen zwischen Bögen verschiedener Kegelschnitte (Transformation, Normalformen).

Einige wenige Schriften, die zu keiner dieser Fragen in Beziehung stehen, werden wir behandeln unter dem Titel:

C. Vermischte Fragen.

A. Beziehungen zwischen Bögen eines und desselben Kegelschnittes.

Im Jahre 1754 erschien in den Nova Acta Eruditorum (p. 40) als Aufforderung, einen Satz zu beweisen und ein Problem aufzulösen, die soeben erwähnte anonyme Schrift Eulers.

Der Satz war: Ist (Fig. 82) O der Mittelpunkt, $A'A$ die größere Achse einer Ellipse und sind $P'P$, $Q'Q$ zwei konjugierte Durchmesser derselben, V', V die Projektionen von Q' Q auf $P'P$, verlängert man $P'P$ bis R, so daß $OR = OA$, und schneidet die zu $A'A$ senkrechte Gerade RT die Ellipse in S, so ist:

Bogen $Q'PS$ — Bogen QAS $= 2 \cdot OV = V'V$.

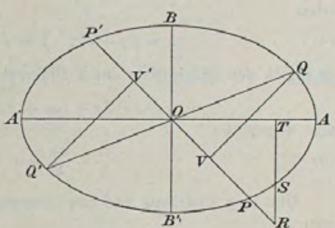

Fig. 82.

Das Problem war: Auf einem Ellipsenquadranten einen Bogen algebraisch zu bestimmen, dessen Länge die Hälfte der Länge des Quadranten sein möge.

Unzweifelhaft hatte der Versuch, die Untersuchungen von Giulio Fagnano zu verallgemeinern, Euler zu solchen Betrachtungen geführt. Die Ergebnisse seiner Forschungen in diesem Bereiche entwickelte Euler in einer Reihe von Abhandlungen, über welche wir zunächst zu berichten haben.

In seinen berühmten Untersuchungen über die Rektifikation der Kegelschnitte war G. Fagnano besonderen Differentialgleichungen von der Form:

$$F(x)dx \pm F(y)dy = 0$$

wiederholt begegnet (diese Vorl., III[2], S. 487), welche sich integrieren lassen, während jedes Glied für sich selbst nicht integrierbar ist. Nun setzt sich Euler[1]) das allgemeine Problem vor, Differential-

[1]) Specimen novae methodi curvarum quadraturas et rectifica-

gleichungen von solcher Beschaffenheit direkt aufzufinden. Dazu geht er von einer zweckmäßig gewählten Beziehung zwischen x und y aus, welche das Integral der zu bildenden Differentialgleichung darstellen soll.

a) Es sei erstens:

$$\alpha + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0. \tag{3}$$

Setzt man:

$$\sqrt{(\delta^2 - \gamma^2)x^2 - \alpha\gamma} = X, \quad \sqrt{(\delta^2 - \gamma^2)y^2 - \alpha\gamma} = Y,$$ [1]

so erhält man aus (3):

$$x = \frac{Y - \delta y}{\gamma}, \quad y = \frac{X - \delta x}{\gamma},$$

oder:

$$X = \gamma y + \delta x, \quad Y = \gamma x + \delta y; \tag{4}$$

es ergibt sich andererseits durch Differentiation von (3):

$$(\gamma x + \delta y)dx + (\gamma y + \delta x)dy = 0,$$

also wegen (4):

$$\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0. \tag{5}$$

Um diese Gleichung auf eine bessere Form zu bringen, setzen wir:

$$-\alpha\gamma = Ap, \quad \delta^2 - \gamma^2 = Cp, \quad \gamma = A, \quad p = Ak^2;$$

es folgt:

$$\alpha = -p, \quad \delta = \sqrt{A(A + Ck^2)}, \quad X = \sqrt{Ak^2(A + Cx^2)},$$

$$Y = \sqrt{Ak^2(A + Cy^2)},$$

und wir erhalten aus (3), (5), wenn wir $\sqrt{A}$, $\sqrt{A + Cy^2}$ mit negativem Vorzeichen annehmen:

$$-Ak^2 + A(x^2 + y^2) - 2xy\sqrt{A(A + Ck^2)} = 0, \tag{6}$$

---

tiones aliasque quantitates transcendentes inter se comparandi, Novi Comm. Acad. Petrop. VII, 1758—1759 (publ. 1761), p. 83—127. — Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi. De comparatione arcuum ellipsis, ebenda, p. 3—48. — Demonstratio theorematis et solutio problematis in Actis Eruditorum Lipsiensibus propositorum, ebenda, p. 128—162. — Institutiones calculi integralis, Bd. I, Art. 580 ff., Bd. III, p. 597, Supplementum: Evolutio casuum prorsus singularium circa integrationem aequationum differentialium.

[1] Das Vorzeichen der hier und in der Folge auftretenden Wurzelgrößen muß in jedem besonderen Falle gehörig bestimmt werden.

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2}} = \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2}}. \tag{7}$$

Da k in (6), nicht aber in (7) vorkommt, so stellt es die willkürliche Integrationskonstante dar, und (6) ist das vollständige Integral von (7).

Man kann solche Funktionen $f(x)$ finden, daß unter der Voraussetzung, daß zwischen x und y die Relation (7) besteht, die Gleichung:

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{A + Cx^2}} - \frac{f(y)dy}{\sqrt{A + Cy^2}} = dV$$

gilt, wo V eine algebraische Funktion von x, y bezeichnet. Es muß dann:

$$\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{A + Cx^2}} - \int\frac{f(y)dy}{\sqrt{A + Cy^2}} = V + \text{const.}$$

nur eine veränderte Form der Integralgleichung (6) von (7) sein. Ist z. B. $f(x) = x^2$, so ergibt sich:

$$V = \frac{kxy}{\sqrt{A}} + \text{const.}$$

b) Es sei:

$$\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0;$$

man erhält hieraus:

$$\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y} = 0, \tag{8}$$

wo:

$$X = \sqrt{(\beta^2 - \alpha\gamma) + 2\beta(\delta - \gamma)x + (\delta^2 - \gamma^2)x^2},$$

$$Y = \sqrt{(\beta^2 - \alpha\gamma) + 2\beta(\delta - \gamma)y + (\delta^2 - \gamma^2)y^2}.$$

c) Ist:

$$\alpha + mx^2 + ny^2 + 2\delta xy = 0,$$

so erhält man wieder Gl. (8), wo:

$$X = \sqrt{(\delta^2 - mn)x^2 - \alpha n}, \quad Y = \sqrt{(\delta^2 - mn)y^2 - \alpha m};$$

ferner:

$$\frac{f(x)dx}{X} - \frac{\varphi(y)dy}{Y} = dV, \tag{9}$$

wo:

$$V = -xy \quad \text{für} \quad f(x) = mx^2, \quad \varphi(y) = ny^2;$$

$$V = xy(\alpha + \delta xy) \quad \text{für} \quad f(x) = m^2x^4, \quad \varphi(y) = n^2y^4.$$

Hieraus folgt allgemein:

$$\int \frac{a + bmx^2 + cm^2x^4}{X} dx - \int \frac{a + bny^2 + cn^2y^4}{Y} dy$$
$$= xy[-b + c\alpha + c\delta xy] + \text{const.}$$

Für $m = n$ hat man:

$$\int \frac{a + bmx^2 + cm^2x^4}{X} dx - \int \frac{a + bmy^2 + cm^2y^4}{Y} dy$$
$$= xy(-b + c\alpha + c\delta xy) + \text{const.},$$

unter den Voraussetzungen:

$$X = \sqrt{(\delta^2 - m^2)x^2 - \alpha m}, \quad Y = \sqrt{(\delta^2 - m^2)y^2 - \alpha m},$$
$$\alpha + m(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0.$$

d) Ist:

$$\alpha + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy + \zeta x^2y^2 = 0,$$

so folgt wieder (8), wo:

$$X = \sqrt{\delta^2x^2 - (\alpha + \gamma x^2)(\gamma + \zeta x^2)}, \quad Y = \sqrt{\delta^2y^2 - (\alpha + \gamma y^2)(\gamma + \zeta y^2)}.$$

Es gilt ferner Gl. (9) für:

$$f(x) = x^2, \quad \varphi(y) = y^2, \quad V = -\frac{xy}{\gamma}$$

und für:

$$f(x) = x^4, \quad \varphi(y) = y^4, \quad V = \frac{xy}{3\gamma^2}[2\alpha - \gamma(x^2 + y^2) + \delta xy].$$

Hieraus ergibt sich:

$$\int \frac{a + bx^2 + cx^4}{X} dx - \int \frac{a + by^2 + cy^4}{Y} dy$$
$$= -\frac{bxy}{\gamma} + \frac{cxy}{3\gamma^2}[2\alpha - \gamma(x^2 + y^2) + \delta xy] + \text{const.}$$

Von den vier behandelten Fällen gehört nur der letzte unserer Frage eigentlich an; die in den drei übrigen Fällen auftretenden Integrale lassen sich durch elementare Funktionen ausdrücken.

Die ermittelten Resultate lassen wichtige geometrische Anwendungen zu.

Die Rektifikation des Kreises wird durch die Formel:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \arc \sin z$$

geliefert. Bezeichnen wir dieses Integral mit Πz, und wollen wir dasselbe mit dem unter c) vorkommenden:

(10) $$\int \frac{a + bmz^2 + cm^2z^4}{\sqrt{(\delta^2 - m^2)z^2 - \alpha m}} dz$$

identifizieren, so müssen wir setzen:

$$b = c = 0, \quad a = km, \quad \alpha = -k^2m, \quad \delta = -m\sqrt{1 - k^2},$$

wo k eine willkürliche Konstante bezeichnet; dann ist die Relation:

(11) $$\Pi x - \Pi y = \text{const.}$$

mit der anderen:

(12) $$k^2 - x^2 - y^2 + 2xy\sqrt{1 - k^2} = 0$$

gleichbedeutend. Zur Bestimmung der willkürlichen Konstante in (11) erwäge man, daß aus $y = 0$ wegen (12) $x = k$ folgt; es nimmt daher (11) die präzisere Form an:

$$\Pi x - \Pi y = \Pi k,$$

während sich aus (12) ergibt:

$$x = y\sqrt{1 - k^2} + k\sqrt{1 - y^2},$$
$$y = x\sqrt{1 - k^2} - k\sqrt{1 - x^2},$$
$$k = x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2}.$$

Setzt man:

$$x = \sin \xi, \quad y = \sin \eta, \quad k = \sin \gamma,$$

so lassen sich die obigen Formeln folgendermaßen schreiben:

$$\xi - \eta = \gamma,$$
$$\sin \xi = \sin \eta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \eta,$$
$$\sin \eta = \sin \xi \cos \gamma - \sin \gamma \cos \xi,$$
$$\sin \gamma = \sin \xi \cos \eta - \sin \eta \cos \xi,$$

oder kürzer:

$$\sin(\mu \pm \nu) = \sin \mu \cos \nu \pm \sin \nu \cos \mu,$$

eine Formel, welche den **Additions- und Subtraktionssatz** der Sinusfunktion darstellt.

Betrachten wir nunmehr die Parabel:

$$u = \frac{1}{2} z^2,$$

wo z, u kartesische Koordinaten bezeichnen; dann ist:

$$s = \int_0^z \sqrt{1+z^2}\,dz = \int_0^z \frac{1+z^2}{\sqrt{1+z^2}}\,dz.$$

Um dieses Integral, welches ebenfalls mit Πz bezeichnet werden möge, mit (10) zu identifizieren, setzen wir:

$$a = 1, \quad b = -k, \quad c = 0, \quad \alpha = k, \quad \delta = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}, \quad m = -\frac{1}{k};$$

es ist dann, nachdem die willkürliche Konstante wie oben bestimmt worden ist:

$$\Pi x - \Pi y = \Pi k + kxy,$$

unter der Voraussetzung:

$$k^2 - x^2 - y^2 + 2\sqrt{1+k^2}\,xy = 0,$$

oder:

$$x = y\sqrt{1+k^2} + k\sqrt{1+y^2},$$
$$y = x\sqrt{1+k^2} - k\sqrt{1+x^2},$$
$$k = x\sqrt{1+y^2} - y\sqrt{1+x^2}.$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{o}$ den Scheitel der Parabel, ferner allgemein mit $\mathfrak{z}$ den Kurvenpunkt, dessen Abszisse z ist; es folgt dann:

$$\Pi z = \mathfrak{o}\mathfrak{z},$$

also:

(13) $$\mathfrak{y}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}\mathfrak{k} + kxy,$$

wenn:

$$x\sqrt{1+y^2} - y\sqrt{1+x^2} = k.$$

Sind $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ zwei andere Punkte, deren Abszissen zu k in derselben Beziehung stehen als x, y, so folgt:

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{o}\mathfrak{k} + kpq,$$

also:

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p} - \mathfrak{y}\mathfrak{x} = k(pq - xy).$$

Diese Formeln liefern die Auflösung einiger geometrischer Probleme.

1. Sind zwei Kurvenpunkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{k}$ gegeben, so soll man einen dritten Punkt $\mathfrak{s}$ derart bestimmen, daß sich $\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{o}\mathfrak{k}$ durch die Abszissen r, k algebraisch ausdrücken läßt. — Setzen wir in (13) r, s statt y, x, so ist:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{o}\mathfrak{k} = krs,$$

$$s = k\sqrt{1+r^2} + r\sqrt{1+k^2}.$$

Diese selben Formeln dienen dazu, $\mathfrak{k}$ aufzufinden, wenn $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ gegeben sind; die letzte Gleichung kann in dieser Hinsicht die Form:

$$k = s\sqrt{1+r^2} - r\sqrt{1+s^2}$$

erhalten. Diese Beziehung läßt sich auch schreiben:

$$s + \sqrt{1+s^2} = \left(k + \sqrt{1+k^2}\right)\left(r + \sqrt{1+r^2}\right).$$

2. Sind drei Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ gegeben, so soll man einen vierten Punkt $\mathfrak{s}$ derart finden, daß sich $\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{h}\mathfrak{k}$ durch r, h, k algebraisch ausdrücken läßt. — Man bestimme zunächst einen solchen Punkt $\mathfrak{l}$, daß:

$$\mathfrak{h}\mathfrak{k} - \mathfrak{o}\mathfrak{l} = hkl = hk\left[k\sqrt{1+h^2} - h\sqrt{1+k^2}\right]$$

ist; dann wird der gesuchte Punkt $\mathfrak{s}$ durch die Beziehung:

$$s = r\sqrt{1+l^2} + l\sqrt{1+r^2}$$

bestimmt, und es ist:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{o}\mathfrak{l} = lrs,$$

folglich:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{h}\mathfrak{k} = l(rs - hk).$$

3. Sind drei Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ gegeben, und ist n eine ganze positive Zahl, so soll man einen Punkt $\mathfrak{s}_n$ derart bestimmen, daß:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{s}_n - n\mathfrak{h}\mathfrak{k}$$

algebraisch angebbar ist. — Ist z. B. $n = 2$, so bestimme man $\mathfrak{s}_2$ derart, daß es zu $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ in derselben Beziehung stehe, in welcher $\mathfrak{s}$ im vorhergehenden Probleme zu $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ steht; dann ist:

$$\mathfrak{s}\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{h}\mathfrak{k} = l(ss_2 - hk),$$

wo:

$$s_2 = s\sqrt{1+l^2} + l\sqrt{1+s^2},$$

und folglich:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{s}_2 - 2\mathfrak{h}\mathfrak{k} = l(rs + ss_2 - 2hk).$$

Die Bogenlänge der Ellipse:

$$\frac{z^2}{A^2} + \frac{u^2}{B^2} = 1$$

ist:

$$s = \int_0^z \sqrt{\frac{A^2 - nz^2}{A^2 - z^2}}\,dz = \int_0^z \frac{A^2 - nz^2}{Z}\,dz = \Pi z,$$

wo:

$$n = \frac{A^2 - B^2}{A^2}, \quad Z = \sqrt{(A^2 - z^2)(A^2 - nz^2)}.$$

Um Πz mit dem unter d) vorkommenden Integral:

$$\int \frac{a + bz^2 + cz^4}{\sqrt{\delta^2 z^2 - (\alpha + \gamma z^2)(\gamma + \zeta z^2)}}\, dz$$

in Übereinstimmung zu bringen, setzen wir:

$$a = A^2, \quad b = -n, \quad c = 0, \quad -\alpha\gamma = A^4,$$
$$\delta^2 - \alpha\zeta - \gamma^2 = -A^2(1+n), \quad -\gamma\zeta = n,$$

ferner, wenn $x = k$ für $y = 0$ sein muß:

$$\alpha + \gamma k^2 = 0;$$

es folgt dann, wenn $\sqrt{(A^2 - k^2)(A^2 - nk^2)} = K$ ist:

$$\alpha = kA^2, \quad \gamma = -\frac{A^2}{k}, \quad \delta = \frac{K}{k}, \quad \zeta = \frac{nk}{A^2},$$

also:

$$\Pi x - \Pi y = \Pi k - \frac{nkxy}{A^2},$$

und:

$$A^4(k^2 - x^2 - y^2) + nk^2x^2y^2 + 2A^2Kxy = 0,$$

woraus folgt:

$$x = \frac{A^2(Ky + kY)}{A^4 - nk^2y^2}, \quad y = \frac{A^2(Kx - kX)}{A^4 - nk^2x^2}, \quad k = \frac{A^2(Yx - yX)}{A^4 - nx^2y^2}.$$

Sind also die Kurvenpunkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{k}$ gegeben, und ist $\mathfrak{a}$ einer der Punkte, für welche $z = 0$, so läßt sich ein Punkt $\mathfrak{s}$ derart finden, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{a}\mathfrak{k}$ algebraisch angebbar ist; man hat nämlich:

(14) $$\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{a}\mathfrak{k} = \Pi s - \Pi r - \Pi k = -\frac{nkrs}{A^2},$$

(15) $$s = \frac{A^2(Kr + Rk)}{A^4 - nk^2r^2}.$$

Ist insbesondere $r = A$, und bezeichnet man mit $\mathfrak{b}$ den entsprechenden Kurvenpunkt (Fig. 83), so folgt $R = 0$, und:

(16) $$s = \frac{AK}{A^2 - nk^2} = A\sqrt{\frac{A^2 - k^2}{A^2 - nk^2}},$$

ferner:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{k} - \mathfrak{b}\mathfrak{s} = nk\sqrt{\frac{A^2 - k^2}{A^2 - nk^2}},$$

eine Gleichung, die mit einer von G. Fagnano gegebenen (diese Vorl., III², S. 490) übereinstimmt.

Man findet leicht, daß die rechte Seite der letzten Gleichung die Länge der zwischen dem Berührungspunkte $\mathfrak{k}$ und der Projektion $\mathfrak{p}$

des Mittelpunktes liegenden Strecke der Tangente in $\mathfrak{k}$ angibt. Ist ferner $\mathfrak{t}$ der Schnittpunkt der Achse $\mathfrak{o}\mathfrak{a}$ mit dieser Tangente, und nimmt man auf derselben $\mathfrak{t}\mathfrak{v} = A$, so ist der gesuchte Punkt $\mathfrak{s}$ der Schnittpunkt der Ellipse mit der durch $\mathfrak{v}$ gehenden Parallele zu $\mathfrak{o}\mathfrak{a}$. Derselbe Wert für s ergibt sich offenbar, wenn man den zu $\mathfrak{o}\mathfrak{k}$ konjugierten Durchmesser $\mathfrak{o}\mathfrak{h}$ bis $\mathfrak{l}$ derart verlängert, daß $\mathfrak{o}\mathfrak{l} = A$ ist, und $\mathfrak{l}$ auf $\mathfrak{o}\mathfrak{b}$ projiziert; die zu den beiden Schnittpunkten $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$ der projizierenden Geraden mit der Ellipse gemeinschaftliche Abszisse hat die durch (16) gegebene Größe. Man kann also schreiben:

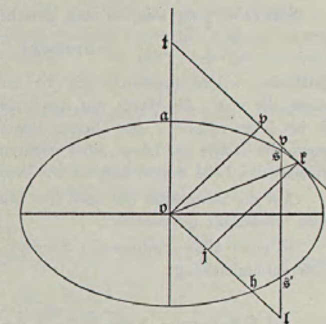

Fig. 83.

$$\mathfrak{a}\mathfrak{k} - \mathfrak{b}\mathfrak{s}' = \mathfrak{a}\mathfrak{k} - \mathfrak{b}\mathfrak{s} = \mathfrak{p}\mathfrak{k},$$

oder:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{k}\mathfrak{s}' = \mathfrak{p}\mathfrak{k};$$

ferner, wenn $\mathfrak{j}$ die Projektion von $\mathfrak{k}$ auf $\mathfrak{o}\mathfrak{h}$ ist:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{k}\mathfrak{s}' = \mathfrak{o}\mathfrak{j}.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar der Beweis des 1754 vorgeschlagenen Satzes. Man hat nämlich (siehe oben Fig. 82):

$$BA - QAS = OV,$$

und analog:

$$B'A - Q'PS = -OV',$$

woraus folgt:

$$Q'PS - QAS = V'V.$$

Setzt man in (14), (15) $r = k$, und bezeichnet man mit g den daraus entstehenden Wert von s, so folgt:

(17) $$\mathfrak{k}\mathfrak{g} - \mathfrak{a}\mathfrak{k} = -\frac{nk^2g}{A^2},$$

$$g = \frac{2A^2kK}{A^4 - nk^4}.$$

Aus (14), (17) ergibt sich:

$$2(\mathfrak{a}\mathfrak{k} - \mathfrak{r}\mathfrak{s}) - (\mathfrak{a}\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\mathfrak{g}) = \frac{nk}{A^2}(2rs - kg),$$

oder:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{g} - 2\mathfrak{r}\mathfrak{s} = \frac{nk}{A^2}(2rs - kg).$$

Soll $\mathfrak{r}\mathfrak{s} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}\mathfrak{g}$ sein, so muß zwischen r, s, k, g die Beziehung:

$$2rs = kg$$

stattfinden, welche zusammen mit (15) und dem soeben angegebenen Ausdrucke von g die Werte von r, s, k als Funktionen von g ergibt. Es ist daher möglich, einen Bogen algebraisch zu bestimmen, dessen Länge die Hälfte der Länge eines gegebenen Bogens ist, ein Problem, welches das 1754 vorgeschlagene als besonderen Fall einschließt.

Auf die Integration der nach ihm benannten Gleichung ist Euler noch wiederholt gekommen.[1])

In einer 1768 erschienenen Schrift[2]) zeigt Euler, wie man die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}}$$

direkt integrieren kann. Man muß zunächst die ungeraden Potenzen von x, y abschaffen, wonach die Gleichung die Form:

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2 + Dx^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2 + Dy^4}}$$

annimmt. Setzt man hier zuerst:

$$x = \sqrt{pq}, \quad y = \sqrt{\frac{p}{q}},$$

dann:

$$q = u + \sqrt{u^2 - 1},$$

endlich:

$$u = \frac{1}{4ADp}\left[-C(A + Dp^2) + (A + Dp^2)s\sqrt{4AD - C^2}\right],$$

so erhält man die durch elementare Funktionen integrierbare Gleichung:

[1]) Ein besonderer Fall dieser Gleichung wird integriert in der Schrift: Problème: Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique. Résolu par M. Euler, Mém. Acad. Berlin 1760 (publ. 1767), p. 228—249. [2]) Integratio aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}},$$

Novi Comm. Acad. Petrop. XII, 1766—1767 (publ. 1768), p. 3—16.

$$\frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} = 2\sqrt{AD}\,\frac{dp}{A - Dp^2}.$$

Die oben angegebene Methode zur Bildung von algebraisch integrierbaren Differentialgleichungen von der Form (5) oder (8) wurde später von Euler verallgemeinert[1]). Er geht von der Integralgleichung:

(18) $$\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x + y) + \zeta x^2y^2 = 0$$

aus, und findet eine Differentialgleichung von der gewünschten Form. Da ferner diese 4 Konstanten, (18) aber 5 enthält, so ist (18) das vollständige Integral. — Interessant sind die Betrachtungen Eulers über die Möglichkeit weiterer Verallgemeinerungen. Wäre es möglich, die Gleichung (8), wo X^2 ein beliebiges Polynom der sechsten Ordnung bezeichnen möge, algebraisch zu integrieren, so wäre insbesondere:

(19) $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q},$$

wo P ein beliebiges Polynom der dritten Ordnung ist, algebraisch integrierbar, was nicht immer stattfindet. Ist X^2 vom fünften Grade, so geht die Gleichung durch die Substitution:

$$x = u^2 + \alpha, \quad y = v^2 + \alpha,$$

wo α eine passend gewählte Konstante ist[2]), in:

$$\frac{du}{U} = \frac{dv}{V}$$

über, wo U^2 ein Polynom vom vierten Grade in u^2 darstellt; wäre aber diese Gleichung stets algebraisch integrierbar, so würde dasselbe von (19) folgen, wenn P ein Polynom vom zweiten Grade in x^2 wäre, was nicht immer wahr ist. Also ist (8) nicht im allgemeinen algebraisch integrierbar, wenn die Ordnung von X^2 vier übertrifft.

Die algebraische Integration ist auch im allgemeinen unmöglich, wenn X eine Wurzelgröße darstellt, deren Index > 2 ist.

[1]) Evolutio generalior formularum comparationi curvarum inservientium, Novi Comm. Acad. Petrop. XII, 1766—1767 (publ. 1768), p. 42—86.
[2]) Euler sagt einfach, daß man x^2, y^2 statt x, y setzen muß. — Ist:

$$X^2 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5,$$

so muß die Konstante α die Bedingung:

$$A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + F\alpha^5 = 0$$

erfüllen.

In seiner **Integralrechnung**[1]) kommt **Euler** auf den wichtigen Gegenstand wieder zurück. Er bemerkt, daß die von ihm behandelten Gleichungen dazu geeignet sind, die Vorzüge der Methode des integrierenden Faktors gegenüber derjenigen von der Trennung der Veränderlichen aufs beste zu zeigen; es ist nämlich leicht ersichtlich, daß das **Euler**sche Integrationsverfahren wesentlich in der Auffindung eines Multiplikators besteht. Es ist aber im allgemeinen nichts weniger als leicht, zu einer gegebenen Gleichung (5) einen passenden Multiplikator M zu finden. Man kann sich umgekehrt fragen, welche Gleichungen durch einen Multiplikator von gegebener Form integriert werden können. — Es sei z. B.:

$$M = \frac{XY}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2},$$

wo X, Y zwei gleichartige Funktionen von x bzw. y bezeichnen mögen; dann muß:

$$\frac{Y dx + X dy}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2}$$

ein vollständiges Differential sein. Integriert man nach x, so findet man:

$$\frac{-Y}{\beta(\alpha + \beta x + \gamma y)} + \Gamma(y); \tag{20}$$

integriert man dagegen nach y, so ergibt sich:

$$\frac{-X}{\gamma(\alpha + \beta x + \gamma y)} + \Delta(x). \tag{21}$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke erhält man:

$$\beta X - \gamma Y = \beta\gamma(\alpha + \beta x + \gamma y)[\Delta(x) - \Gamma(y)].$$

Da, wegen der Form der linken Seite, alle x und y zugleich enthaltenden Glieder rechts verschwinden müssen, so ist notwendig:

$$\Delta(x) = m\beta x + \text{const.}, \quad \Gamma(y) = m\gamma y + \text{const.},$$

wo m eine konstante Größe bezeichnet, folglich:

$$X = \gamma[m\beta^2 x^2 + \beta(m\alpha + n)x + p],$$
$$Y = \beta[m\gamma^2 y^2 + \gamma(m\alpha - n)y + q],$$

wo n, p, q konstante Größen sind, zwischen welchen die Beziehung:

$$p - q = \alpha n$$

besteht. Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in (20) oder in (21)

[1]) An den S. 796 angeführten Orten.

ergibt sich als Integral der betrachteten Gleichung, nach leichten Umformungen:

$$m\beta\gamma xy - \frac{n}{2}(\beta x - \gamma y) - f = g(\alpha + \beta x + \gamma y),$$

wo $f = p - \frac{\alpha n}{2} = q + \frac{\alpha n}{2}$, und g eine willkürliche Konstante ist.

Geht man von komplizierteren Formen von M aus, so erhält man die schon oben behandelten elliptischen Differentialgleichungen.

Die Arbeiten **Eulers** über die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{X} \pm \frac{dy}{Y} = 0$$

erregten die Aufmerksamkeit **Lagranges**.[1]) Ihm schien sonderbar genug, daß eine Differentialgleichung mit separierten Veränderlichen, deren Glieder einzeln nicht algebraisch integrierbar sind, sich nichtsdestoweniger algebraisch integrieren ließe; und er wollte die Sache näher betrachten. Ebenso wie **Euler** ging er vom einfachsten Falle aus:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{22}$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$\arcsin x = \arcsin y + \text{const.} = \arcsin y + \arcsin a;$$

es läßt sich aber auch auf algebraische Form bringen, denn es folgt, wegen bekannter trigonometrischer Sätze:

$$a = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}. \tag{23}$$

Es wäre jedoch wünschenswert, zu diesem Integrale auf algebraischem Wege direkt zu gelangen. Das läßt sich folgendermaßen erreichen. Man schreibe die Differentialgleichung so:

$$\sqrt{1-y^2}\,dx = \sqrt{1-x^2}\,dy,$$

und wende auf beide Seiten die partielle Integration an; man erhält die Gleichung:

$$x\sqrt{1-y^2} + \int\frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = y\sqrt{1-x^2} + \int\frac{xy\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \text{const.},$$

welche sich wegen (22) auf (23) reduziert.

[1]) Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable, Misc. Taur. IV, 1766—1769, p. 98—125; Oeuvres II, Paris 1868, p. 5—33.

Ist die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}$$

gegeben, so verifiziert man leicht durch Differentiation, daß ihr Integral die Form:

$$A+B(x+y)+C(x^2+y^2)+Dxy+E(x^2y+xy^2)+Fx^2y^2=0$$

hat; die Koeffizienten lassen sich durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ausdrücken mit Ausschluß eines einzigen, der als Integrationskonstante gilt, so daß die letzte Gleichung das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung bildet. Diese Integration ist aber, wie Lagrange sich ausspricht, nur zufällig; er versucht daher, eine direkte Integrationsmethode für derartige Gleichungen zu finden. Seine Methode ist auf folgendes Prinzip gegründet.

Liegt eine nicht integrierbare Differentialgleichung erster Ordnung vor, so differentiiere man sie, und sehe zu, ob es möglich ist, aus der gegebenen und der durch Differentiation aus dieser erhaltenen Gleichung eine neue Differentialgleichung erster Ordnung durch Kombination und Integration abzuleiten; dann liefert die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus den beiden Differentialgleichungen erster Ordnung das gesuchte Integral. Ist das nicht möglich, so kann man zweimal differentiieren usw.

Sehen wir zu, unter welchen Bedingungen die Methode auf die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

anwendbar ist, wo X, Y zwei gleichartige Funktionen von x bzw. y bezeichnen. Schreiben wir:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{dt}{T}, \tag{24}$$

wo t eine Hilfsveränderliche, T eine Funktion von t ist. Es folgt:

$$T^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=X,\quad T^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=Y,$$

und hieraus durch Differentiation:

$$\frac{2\,Td\,Tdx+2\,T^2d^2x}{dt^2}=\frac{dX}{dx},\quad \frac{2\,Td\,Tdy+2\,T^2d^2y}{dt^2}=\frac{dY}{dy}. \tag{25}$$

Setzen wir nunmehr:

$$x+y=p,\quad x-y=q,\quad dT=Mdp+Ndq;$$

es folgt dann, wegen (24), (25):

$$M=\frac{\partial T}{\partial p},\quad N=\frac{\partial T}{\partial q},\quad dp\,dq=\frac{(X-Y)\,dt^2}{T^2},$$

$$\frac{2\,Tdp(Mdp+Ndq)+2\,T^2d^2p}{dt^2}=\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy},$$

und hieraus:

$$\frac{2\,T(Mdp^2+Td^2p)}{dt^2}=\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}-\frac{2\,N(X-Y)}{T}.$$

Betrachtet man p als konstant, so ist:

$$\frac{dX}{dx}=2\frac{\partial X}{\partial q},\quad \frac{dY}{dy}=-2\frac{\partial Y}{\partial q},$$

also:

$$\frac{2\,T\left(\frac{\partial T}{\partial p}dp^2+Td^2p\right)}{dt^2}=2\left(\frac{\partial X}{\partial q}-\frac{\partial Y}{\partial q}\right)-\frac{2(X-Y)}{T}\frac{\partial T}{\partial q},$$

oder:

$$\frac{\partial\cdot\left[T\frac{dp}{dt}\right]^2}{\partial p}=2\,T\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{X-Y}{T}\right).$$

Um $\frac{dp}{dt}$ hieraus abzuleiten, muß man diese Gleichung derart umformen, daß sie nur p und q enthalten möge; das aber scheint mir, sagt Lagrange, nur dann möglich, wenn:

a) $T=PQ$ ist, wo P eine Funktion von p, Q eine Funktion von q bezeichnet, so daß die letzte Gleichung die Form:

$$\frac{\partial\left[P\frac{dp}{dt}\right]^2}{\partial p}=\frac{2}{Q}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{X-Y}{Q}\right) \tag{26}$$

erhält;

b) die rechte Seite von (26) eine Funktion $2\varphi(p)$ von p ist. Es folgt dann:

$$\frac{X-Y}{Q}=\varphi(p)\int Q\,dq+\psi(p), \tag{27}$$

$$\left(P\frac{dp}{dt}\right)^2=2\int\varphi(p)\,dp+C;$$

da aber:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=\frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{T}=\frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{PQ}$$

ist, so erhält man schließlich das gesuchte Integral:

$$\sqrt{X}+\sqrt{Y}=Q\sqrt{2\int\varphi(p)\,dp+C}. \tag{28}$$

Wie müssen X und Y beschaffen sein, damit (27) bestehen kann?

Setzen wir:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \cdots,$$
$$Y = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4 + \zeta y^5 + \cdots;$$

es folgt hieraus:

$$X - Y = q\Big[\Big(\beta + \gamma p + \delta\frac{3p^2+q^2}{4} + \varepsilon\frac{p^3+pq^2}{2} + \zeta\frac{5p^4+10p^2q^2+q^4}{16} + \cdots\Big]$$
$$= q\Big[\Big(\beta + \gamma p + \frac{3\delta}{4}p^2 + \frac{\varepsilon}{2}p^3 + \frac{5\zeta}{16}p^4 + \cdots\Big) + q^2\Big(\frac{\delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}p + \frac{5\zeta}{8}p^2 + \cdots\Big) + q^4\Big(\frac{\zeta}{16} + \cdots\Big) + \cdots\Big].$$

Es muß also wegen (27) zunächst $Q = q$ sein, ferner:

$$\beta + \gamma p + \frac{3\delta}{4}p^2 + \frac{\varepsilon}{2}p^3 + \frac{5\zeta}{16}p^4 + \cdots = \psi(p),$$
$$\frac{\delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}p + \frac{5\zeta}{8}p^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{1}{2}\varphi(p),$$
$$\frac{1}{16}\zeta + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

folglich:

$$\zeta = \cdots = 0, \quad \psi(p) = \beta + \gamma p + \frac{3\delta}{4}p^2 + \frac{\varepsilon}{2}p^3, \quad \varphi(p) = \frac{\delta}{2} + \varepsilon p,$$

und (28) reduziert sich auf:

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = q\sqrt{C + \delta p + \varepsilon p^2},$$

oder:

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = (x-y)\sqrt{C + \delta(x+y) + \varepsilon(x+y)^2},$$

wo:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4, \quad Y = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4.$$

Man kann auch versuchen, für X und Y nicht notwendig gleichartige Funktionen anzunehmen. Setzt man:

$$X = \Phi(2x) = \Phi(p+q), \quad Y = \Psi(2y) = \Psi(p-q),$$

so folgt aus (27):

$$\Phi(p+q) - \Psi(p-q) = Q\Big[\varphi(p)\int Q\,dq + \psi(p)\Big].$$

Differentiiert man zweimal nach p oder nach q, so kommt:

$$\Phi''(p+q) - \Psi''(p-q) = Q\Big[\varphi''(p)\int Q\,dq + \psi''(p)\Big],$$
$$\Phi''(p+q) - \Psi''(p-q) = \varphi(p)\frac{d^2}{dq^2}\Big(Q\int Q\,dq\Big) + \psi(p)\frac{d^2Q}{dq^2},$$

also:

$$Q\Big[\varphi''(p)\int Q\,dq + \psi''(p)\Big] = \varphi(p)\frac{d^2}{dq^2}\Big(Q\int Q\,dq\Big) + \psi(p)\frac{d^2Q}{dq^2}.$$

Da diese Gleichung identisch bestehen soll, so kann man zunächst setzen:

$$Q\psi''(p) = \frac{d^2Q}{dq^2}\psi(p),$$

also:

$$\frac{d^2Q}{dq^2} = -m^2Q,$$

wo m eine Konstante bezeichnet, und folglich:

$$Q = A\sin(mq + \alpha),$$

ferner:

$$\psi''(p) = -m^2\psi(p),$$

woraus sich ergibt:

$$\psi(p) = B\sin(mp + \beta).$$

Aus:

$$Q\int Q\,dq \cdot \varphi''(p) = \varphi(p)\frac{d^2}{dq^2}\Big(Q\int Q\,dq\Big)$$

folgt dann:

$$\varphi''(p) = -4m^2\varphi(p),$$

und hieraus durch Integration:

$$\varphi(p) = C\sin 2(mp + \gamma).$$

Durch Einsetzung der erhaltenen Ausdrücke ergibt sich, wenn man:

$$\frac{A^2C}{4m} = c, \quad -\frac{AB}{2} = b$$

macht:

$$\Phi(2x) - \Psi(2y) = \Phi(p+q) - \Psi(p-q)$$
$$= -2c\sin 2(mp+\gamma)\sin 2(mq+\alpha) - 2b\sin(mp+\beta)\sin(mq+\alpha)$$
$$= c[\cos 2(2mx+\gamma+\alpha) - \cos 2(2my+\gamma-\alpha)] + b[\cos(2mx+\beta+\alpha) - \cos(2my+\beta-\alpha)],$$

und folglich, wenn a eine weitere Konstante bezeichnet:

$$X = \Phi(2x) = a + b\cos(2mx+\beta+\alpha) + c\cos 2(2mx+\gamma+\alpha),$$
$$Y = \Psi(2y) = a + b\cos(2my+\beta-\alpha) + c\cos 2(2my+\gamma-\alpha),$$

welche nach Lagrange die allgemeinsten durch seine Methode zu erhaltenden Ausdrücke zu sein scheinen. Das Integral ist nach (28):

$$\sqrt{\Phi(2x)} + \sqrt{\Psi(2y)} = A \sin(mq + \alpha) \sqrt{H - \frac{C}{m} \cos(2mp + \gamma)},$$

wo H die willkürliche Konstante ist. Setzt man:

$$\cos 2mx + i \sin 2mx = u, \quad \cos 2my + i \sin 2my = v,$$
$$\cos(\beta + \alpha) = A, \quad \cos(\beta - \alpha) = E,$$
$$\cos 2(\gamma + \alpha) = B, \quad \cos 2(\gamma - \alpha) = F,$$

so folgt:

$$X = \frac{U}{2u^2}, \quad Y = \frac{V}{2v^2},$$

wo:

$$U = c(B - \sqrt{B^2 - 1}) + b(A - \sqrt{A^2 - 1})u + 2au^2$$
$$+ b(A + \sqrt{A^2 - 1})u^3 + c(B + \sqrt{B^2 - 1})u^4,$$
$$V = c(F - \sqrt{F^2 - 1}) + b(E - \sqrt{E^2 - 1})v$$
$$+ 2av^2 + b(E + \sqrt{E^2 - 1})v^3 + c(F + \sqrt{F^2 - 1})v^4,$$

und die Differentialgleichung nimmt die Form:

$$\frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{dv}{\sqrt{V}}$$

an, welche etwas allgemeiner ist als die frühere, insofern als in derselben nicht 5, sondern 6 Konstanten vorkommen[1]).

Zwei weitere Integrationsmethoden wurden von Lagrange in seiner Théorie des fonctions analytiques entwickelt.

Man setze wie oben:

$$x = \frac{p+q}{2}, \quad y = \frac{p-q}{2},$$

ferner:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}} = dt,$$

wo:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4, \quad Y = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4;$$

dann ist:

---

[1]) Die Konstanten sind zwar 7, nämlich A, B, E, F, a, b, c; aber es findet zwischen ihnen eine Relation statt. Es ist nämlich:

$$\cos \alpha = AE + \sqrt{1 - A^2}\sqrt{1 - E^2}, \quad \cos 2\alpha = BF + \sqrt{1 - B^2}\sqrt{1 - F^2},$$

folglich:

$$1 + BF + \sqrt{1 - B^2}\sqrt{1 - F^2} = 2[AE + \sqrt{1 - A^2}\sqrt{1 - E^2}]^2.$$

$$\frac{dp}{dt} = p' = x' + y', \quad \frac{d^2p}{dt^2} = p'' = x'' + y'',$$
$$\frac{dq}{dt} = q' = x' - y', \quad \frac{d^2q}{dt^2} = q'' = x'' - y'',$$
$$2x'x'' = X' = (\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3)x',$$
$$2y'y'' = Y' = (\beta + 2\gamma y + 3\delta y^2 + 4\varepsilon y^3)y',$$

und hieraus:

$$p'' = \beta + \gamma p + \frac{3\delta}{4}(p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{2}(p^3 + 3pq^2),$$
$$q'' = \gamma q + \frac{3\delta}{2}pq + \frac{\varepsilon}{2}(3p^2q + q^3),$$
$$p'q' = x'^2 - y'^2 = X - Y$$
$$= \beta q + \gamma pq + \frac{\delta}{4}(3p^2q + q^3) + \frac{\varepsilon}{2}(p^3q + pq^3),$$

folglich:

$$qp'' - p'q' = \left(\frac{\delta}{2} + \varepsilon p\right)q^3,$$

oder:

$$\frac{2p'(qp'' - p'q')}{q^3} = (\delta + 2\varepsilon p)p',$$

woraus sich durch Integration ergibt, wenn a eine Konstante bezeichnet:

$$\frac{p'^2}{q^2} = a + \delta p + \varepsilon p^2,$$

oder:

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = (x - y)\sqrt{a + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2}.$$

Man kann auch die gegebene Differentialgleichung auf die Form:

$$\frac{du}{\sqrt{A + B\cos u}} = \frac{dz}{\sqrt{A + B\cos z}} = dt$$

bringen. Dann ist:

$$2u'u'' = -B \sin u \cdot u', \quad 2z'z'' = -B \sin z \cdot z',$$

oder:

$$u'' = -\frac{B}{2}\sin u, \quad z'' = -\frac{B}{2}\sin z.$$

Setzt man:

$$p = \frac{z+u}{2}, \quad q = \frac{z-u}{2},$$

so folgt:

$$p' = \frac{z' + u'}{2}, \quad q' = \frac{z' - u'}{2},$$
$$p'' = \frac{z'' + u''}{2} = -\frac{B}{4}(\sin z + \sin u) = -\frac{B}{2}\sin p \cos q,$$
$$q'' = \frac{z'' - u''}{2} = -\frac{B}{4}(\sin z - \sin u) = -\frac{B}{2}\cos p \sin q,$$

und hieraus:

$$p'q' = \frac{z'^2 - u'^2}{4} = \frac{B}{4}(\cos z - \cos u) = -\frac{B}{2}\sin p \sin q,$$

also:

$$\frac{p''}{p'q'} = \operatorname{cotg} q, \qquad \frac{q''}{p'q'} = \operatorname{cotg} p.$$

Man erhält hieraus durch Integration:

$$p' = a \sin q, \qquad q' = b \sin p,$$

folglich:

$$b \sin p \cdot p' = a \sin q \cdot q',$$

und durch abermalige Integration:

(29) $$b \cos p = a \cos q + c,$$

wo a, b, c drei Konstanten bezeichnen.

Ist $z = m$ für $u = 0$, so hat man entsprechend:

$$p = q = \frac{m}{2}, \qquad z' = \sqrt{A + B\cos m} = P, \qquad u' = \sqrt{A + B} = Q,$$

$$p' = \frac{1}{2}(P + Q), \qquad q' = \frac{1}{2}(P - Q),$$

folglich:

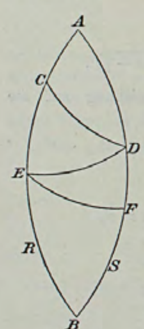

Fig. 84.

$$a = \frac{1}{2\sin\frac{m}{2}}(P + Q), \qquad b = \frac{1}{2\sin\frac{m}{2}}(P - Q),$$

$$c = -Q \operatorname{cotg}\frac{m}{2},$$

und hieraus, wenn man $\frac{P}{Q} = \cos M$ setzt, wegen (29):

(30) $$\cos\frac{m}{2} = \cos\frac{z}{2}\cos\frac{u}{2} + \sin\frac{z}{2}\sin\frac{u}{2}\cos M.$$

Diese Gleichung läßt eine elegante geometrische Interpretation zu. Hat man auf einer Kugel zwei größte Kreise (Fig. 84) ARB, ASB, deren gegenseitige Neigung M sein möge, und nimmt man auf diesen zwei Bögen:

$$AC = \frac{u}{2}, \quad AD = \frac{z}{2},$$

so ist $CD = \frac{m}{2}$. Ist auch $DE = \frac{m}{2}$, und setzt man $AE = \frac{y}{2}$, so ist:

$$\cos\frac{m}{2} = \cos\frac{z}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{z}{2}\sin\frac{y}{2}\cos M.$$

Ist $EF = \frac{m}{2}$ und setzt man $AF = \frac{x}{2}$, so hat man analog:

$$\cos\frac{m}{2} = \cos\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}\cos M,$$

usw. Die Gleichung (30) ist mit:

$$f(z) = f(u) + f(m)$$

gleichbedeutend, wo:

$$f(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + B\cos z}}$$

ist. Man hat dann:

$$f(y) = f(z) + f(m) = f(u) + 2f(m),$$

$$f(x) = f(y) + f(m) = f(u) + 3f(m),$$

usw.

Erst später erfuhr Euler zu seiner Verwunderung[1]), daß Lagrange seine Differentialgleichung integriert hatte, ohne von der Methode des integrierenden Faktors Gebrauch zu machen. Mit seiner unermüdlichen Tätigkeit wollte er gleich das sich auf Differentiation stützende Lagrangesche Verfahren beherrschen und erkannte, daß dasselbe in manchen Fällen gute Dienste leisten kann. Ist z. B. die Gleichung:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

vorhanden, wo:

$$X = \alpha + 2\beta x + \gamma x^2, \quad Y = \alpha + 2\beta y + \gamma y^2,$$

so schreibe man:

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

woraus folgt:

$$\frac{d\frac{dx}{dt}}{dx} + \frac{d\frac{dy}{dt}}{dy} = 4\beta + 2\gamma(x + y).$$

Setzt man $x - y = q$, so ist:

$$\frac{1}{q}\frac{dq}{dt} = \frac{X - Y}{x - y} = 2\beta + \gamma(x + y),$$

also:

---

[1]) Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris de la Grange usus est, in integranda aequatione differentiali

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

Acta Acad. Petrop. II P. 1, 1778, p. 20—57; Inst. calc. int. IV, p. 465—503.

$$\frac{d\frac{dx}{dt}}{dx} + \frac{d\frac{dy}{dt}}{dy} = 2\,\frac{\frac{dq}{dt}}{q},$$

und durch Integration:

$$\log\frac{dx}{dt} + \log\frac{dy}{dt} = 2\log q + \text{const.},$$

oder:

$$C = \frac{dx\,dy}{q^2dt^2} - \frac{XY}{(x-y)^2},$$

oder auch, durch Veränderung der willkürlichen Konstante:

$$C = \frac{XY}{(x-y)^2} + (\beta^2 - \alpha\gamma) = \frac{(\alpha + \beta(x+y) + \gamma xy)^2}{(x-y)^2},$$

was sich einfacher schreiben läßt:

$$C = \frac{\alpha + \beta(x+y) + \gamma xy}{x-y}.$$

Die Gleichung:

$$\frac{dx}{X} = -\frac{dy}{Y},$$

wo X, Y die obige Bedeutung haben, kann auf ähnliche Weise behandelt werden.

Nach diesen ganz einfachen Beispielen kommt Euler auf die Differentialgleichung:

(31) $$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

die er in den folgenden Fällen integriert:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$
$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4,$$
$$X = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6.$$

Wir beschränken uns hier auf den zweiten Fall, auf welchen die zwei übrigen zurückführbar sind. Euler setzt, nach Lagrange:

$$x + y = p,\quad x - y = q,$$

ferner, wenn das untere Vorzeichen angenommen wird:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}} = dt,$$

was darauf hinauskommt, daß er das Lagrangesche T gleich Eins annimmt. Es ist dann:

$$\frac{dp\,dq}{dt^2} = X - Y = q\left(\beta + \gamma p + \frac{\delta}{4}(3p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{2}(p^3 + pq^2)\right),$$

ferner:

$$2\,\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dX}{dx}\,\frac{dx}{dt},\quad 2\,\frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dY}{dy}\,\frac{dy}{dt},$$

woraus folgt:

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy}\right) = \beta + \gamma p + \frac{3\delta}{4}(p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{2}(p^3 + 3pq^2),$$

also:

$$\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp\,dq}{q\,dt^2} = \left(\frac{\delta}{2} + \varepsilon p\right)q^2.$$

Multipliziert man mit $\frac{2\,dp}{q^2dt}$, und integriert, so erhält man wie oben:

$$\frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = C + \delta p + \varepsilon p^2,$$

oder:

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = (x-y)\sqrt{C + \delta(x+y) + \varepsilon(x+y)^2}.$$

Bestimmt man die willkürliche Konstante derart, daß $x = k$ für $y = 0$ ist, so erhält man nach einigen leichten Umformungen:

(32) $$\frac{2\alpha + \beta(x+y) + 2\gamma xy + \delta xy(x+y) + 2\varepsilon x^2y^2 + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \frac{2\alpha + \beta k + 2\sqrt{\alpha K}}{k^2},$$

wo:

$$K = \alpha + \beta k + \gamma k^2 + \delta k^3 + \varepsilon k^4.$$

Nimmt man in (31) das obere Vorzeichen an, so hat man nur $\sqrt{Y}$ mit dem Minuszeichen zu behaften.

In dem besonderen Falle, wo:

$$X = (a + bx + cx^2)^2 = R^2,\quad Y = (a + by + cy^2)^2 = S^2$$

ist, kommt das merkwürdige Ergebnis vor, daß das Integral von (31), wenn das obere Vorzeichen angenommen wird, in eine Identität übergeht. Man kann dennoch das Integral durch die folgende Methode erhalten.

Setzen wir:

$$X = R^2 + \lambda,\quad Y = S^2 + \lambda,$$

wo λ beliebig klein ist; es folgt dann:

$$\sqrt{X} = R + \frac{\lambda}{2R},\quad \sqrt{Y} = S + \frac{\lambda}{2S},$$

und das Integral, wo $\delta = 2bc$, $\varepsilon = c^2$ ist, nimmt die Form an:

$$\frac{(R-S)\left(1 - \frac{\lambda}{2RS}\right)}{x-y} = \sqrt{C + 2bc(x+y) + c^2(x+y)},$$

oder:

$$(b+cp)\left(1-\frac{\lambda}{2RS}\right)=\sqrt{C+2bcp+c^2p^2}.$$

Quadriert man beiderseits, so ergibt sich:

$$(b+cp)^2-(b+cp)^2\frac{\lambda}{RS}=C+2bcp+c^2p^2,$$

oder:

$$\frac{(b+cp)^2}{RS}=\frac{b^2-C}{\lambda}=D,$$

wo D eine neue willkürliche Konstante bezeichnet. Hieraus folgt nach einigen leichten Reduktionen:

$$\frac{1}{D}=\frac{RS}{(b+cp)^2}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\,\frac{a-cu}{b+cp}+\left(\frac{a-cu}{b+cp}\right)^2,$$

wo $u=xy$, also:

$$\frac{a-cu}{b+cp}=\text{const.},$$

oder auch:

$$\frac{a(x+y)+bxy}{cxy-a}=\text{const.}$$

In einer weiteren Abhandlung[1]) vereinfacht Euler sein Verfahren, und zieht auch seine älteren geometrischen Interpretationen wieder in Betracht.

Die Eulersche Methode kann auch dazu dienen[2]), um partikuläre algebraische Integrale gewisser Differentialgleichungen zu erhalten, welche sich sonst wohl nicht leicht ermitteln ließen. Es ergibt sich z. B. aus Gleichung (32), wenn man:

$$\frac{2\alpha+\beta k+2\sqrt{\alpha K}}{2k^2}=H$$

setzt:

$$\sqrt{X}=\frac{1}{\sqrt{Y}}\left[H(x-y)^2-\alpha-\frac{\beta}{2}(x+y)-\gamma xy+\frac{\delta}{2}xy(x+y)-\varepsilon x^2y^2\right],$$

und folglich wegen (31) (wo das untere Vorzeichen angenommen wird):

---

[1]) Methodus succinctior comparationes quantitatum transcendentium in forma $\int\frac{Pdz}{\sqrt{A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4}}$ contentarum inveniendi, M. S. Acad. exhib. 1777; Inst. calc. int. IV, p. 504—524. [2]) Euler, Exempla quarundam memorabilium aequationum differentialium, quas adeo algebraice integrare licet, etiamsi nulla via pateat variabiles a se invicem separandi (1778), Nova Acta Acad. Petrop. XIII, 1795—1796 (publ. 1802), p. 3—13.

$$(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4)\,dx$$

$$+\left(-H(x-y)^2+\alpha+\frac{\beta}{2}(x+y)+\gamma xy-\frac{\delta}{2}xy(x+y)+\varepsilon x^2y^2\right)dy=0,$$

eine Differentialgleichung, welche (32) als partikuläres Integral besitzt.

Zwei andere Abhandlungen Eulers[1]) fügen dessen früheren Leistungen nichts wesentlich Neues hinzu.

Die Aufforderung vom Jahre 1754 konnte nicht umhin, G. B. Fagnano zu interessieren, um so mehr als sein Vater damals noch lebte. Und in der Tat beschäftigte er sich mit der Eulerschen Frage und verwandten Gegenständen in drei Schriften, welche die Data 1763, 1768, 1770 tragen[2]). Seinen Beweis des Eulerschen Theorems gründet er auf folgenden von seinem Vater aufgestellten Satz[3]): Sind:

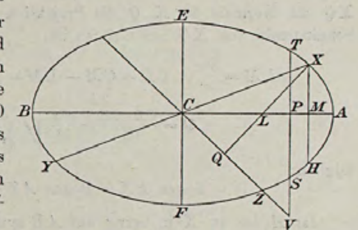

Fig. 85.

$$AB=2a,\quad EF=2b$$

(Fig. 85) die größere und die kleinere Achse einer Ellipse mit dem Mittelpunkt C, $CM=x$, $CP=z$ die Abszissen von zwei Kurvenpunkten X, T, und besteht zwischen x und z die Beziehung:

---

[1]) Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali $\int\frac{Zdz}{\sqrt{1+mz^2+nz^4}}$ contentarum, denotante Z functionem quamcunque rationalem ipsius z^2, Acta Acad. Petrop. 1781, P. II (publ. 1785), p. 3—22; Inst. calc. int. IV, p. 446—464. — Uberior evolutio comparationis quam inter arcus sectionum conicarum instituere licet, Acta Acad. Petrop. 1781, P. II (publ. 1785), p. 23—44. [2]) Demonstratio theorematis Actis Lipsiensibus propositi ad annum 1754, Nova Acta Erud. 1762 (publ. 1763), p. 458—466. — Nova arcuum parabolae apollonianae, atque hyperbolae aequilaterae mensura, Nova Acta Erud. 1766—1767 (publ. 1768), p. 27—35 (abgedruckt in Nuova Racc. d'opuscoli scientifici e filologici XVII, 1768, op. V, 17 S.). — Commentatio ad theorema paternum cui titulus: Theorema, da cui si deduce una nuova misura degli archi ellittici, iperbolici e cicloidali, sive de arcuum sectionum conicarum, aliarumque curvarum inter se comparatione, investigatio, Nova Acta Erud. 1770, p. 433—506. [3]) G. lett. it. 1716; diese Vorl., III[2], S. 489—490.

$$z = a\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}}},$$

wo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, so ist:

$$\text{Bogen } EX - \text{Bogen } AT = \frac{c^2x}{a^2}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}}}.$$

Es ist leicht, das Eulersche Theorem auf Grund dieses Hilfssatzes nachzuweisen. Nimmt man nämlich auf der Verlängerung von TP einen solchen Punkt V, daß $CV = a$, und schneidet CV die Ellipse in Z, so sind CX, CZ konjugierte Durchmesser[1]). Ist nun XQ die Normale in X, Q die Projektion von X auf CZ, L der Schnittpunkt von XQ mit CA, so ist:

$$LM = \frac{b^2x}{a^2}, \quad CL = CM - LM = x - \frac{b^2x}{a^2} = \frac{c^2x}{a^2},$$

$$CQ = \frac{CL \cdot CP}{CV} = \frac{c^2x}{a^2}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2}},$$

folglich:

$$\text{Bogen } EX - \text{Bogen } AT = CQ.$$

Ist H der zu X in bezug auf AB symmetrische Punkt, Y der zu X entgegengesetzte Kurvenpunkt, S der Schnittpunkt von PV mit der Ellipse, so ist:

$$EX = FH = YF, \quad XT = HS, \quad AT = AS,$$

folglich:

$$YFH - TAS = 2CQ,$$

oder schließlich:

$$YFS - XAS = 2CQ,$$

was zu beweisen war.

Die größte Differenz der Bögen YFS, XAS entspricht der Abszisse:

$$x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}};$$

es ist dann $z = x$, so daß T mit X zusammenfällt, und:

---

[1]) Aus:

$$CP = a^2\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^4 - c^2x^2}}, \quad CV = a$$

ergibt sich:

$$\operatorname{tang} ACV = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

woraus bekanntlich folgt, daß CX und CZ konjugierte Durchmesser sind.

$$YFS - XAS = 2(a - b).$$

In der zweiten Abhandlung beweist Fagnano einige die Bögen der Parabel und der gleichseitigen Hyperbel betreffende Sätze.

Die dritte Abhandlung ist der Auflösung des Eulerschen Problemes hauptsächlich gewidmet. Dazu stellt aber Fagnano mehrere allgemeinere Sätze auf, bei deren Auffindung, wie er erzählt, die Ratschläge seines mehr als achtzigjährigen Vaters ihm zustatten kamen.

a) Besteht zwischen x und z die Beziehung:

$$fhx^{2n}z^{2n} + fl(x^{2n} + z^{2n}) + gl = 0, \tag{33}$$

oder:

$$fhx^{2n}z^{2n} + gh(x^{2n} + z^{2n}) + gl = 0, \tag{34}$$

so ist:

$$\int x^{n-1}dx\sqrt{\frac{hx^{2n}+l}{fx^{2n}+g}} + \int z^{n-1}dz\sqrt{\frac{hz^{2n}+l}{fz^{2n}+g}}$$

$$= \int X + \int Z = \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{hx^nz^n}{n\sqrt{-fl}} + C, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{h}x^nz^n}{n\sqrt{-g}} + C. \end{array}\right.$$

Es folgt nämlich aus (33):

$$z^n = \sqrt{\frac{-l(fx^{2n}+g)}{f(hx^{2n}+l)}}, \quad x^n = \sqrt{\frac{-l(fz^{2n}+g)}{f(hz^{2n}+l)}},$$

also:

$$X + Z = \sqrt{\frac{-l}{f}}\left[\frac{x^{n-1}dx}{z^n} + \frac{z^{n-1}dz}{x^n}\right];$$

man erhält aber aus (33) durch Differentiation:

$$hz^{2n}x^{2n-1}dx + hx^{2n}z^{2n-1}dz + lx^{2n-1}dx + lz^{2n-1}dz = 0,$$

oder:

$$\frac{x^{n-1}dx}{z^n} + \frac{z^{n-1}dz}{x^n} = -\frac{h}{l}(z^nx^{n-1}dx + x^nz^{n-1}dz) = -\frac{h}{nl}d(x^nz^n),$$

folglich:

$$\int X + \int Z = -\frac{hx^nz^n}{n\sqrt{-fl}} + C.$$

Die Gl. (34) läßt sich analog behandeln.

b) Es ist unter denselben Voraussetzungen:

$$\int T + \int V = \int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{fhx^{4n} + (fl+gh)x^{2n} + gl}} + \int \frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{fhz^{4n} + (fl+gh)z^{2n} + gl}} = C.$$

c) Ebenfalls unter den obigen Voraussetzungen hat man:

$$\int Q + \int R = \int \frac{x^{3n-1}dx}{\sqrt{fhx^{4n} + (fl+gh)x^{2n} + gl}} + \int \frac{z^{3n-1}dz}{\sqrt{fhz^{4n} + (fl+gh)z^{2n} + gl}} = \begin{cases} -\dfrac{x^n z^n}{n\sqrt{-fl}} + C, \\ \dfrac{x^n z^n}{n\sqrt{-gh}} + C. \end{cases}$$

d) Ist:

(35)
$$p^2(fhx^{2n}z^{2n} + gl) - gl(x^{2n} + z^{2n}) \mp 2x^n z^n \sqrt{gl}\sqrt{(fp^2+g)(hp^2+l)} = 0,$$

wo p eine Konstante bezeichnet, so folgt:

(36)
$$\int T \pm \int V = C,$$

und (35) ist die allgemeinste Beziehung, für welche (36) besteht.

e)
$$\int Q \pm \int R = -\frac{px^n z^n}{n\sqrt{gl}} + C.$$

f)
$$\int K \pm \int I = \int \frac{gl x^{3n-1}dx}{fh\sqrt{glx^{4n} + (fl+gh)x^{2n} + fh}} \pm \int \frac{gl z^{3n-1}dz}{fh\sqrt{glz^{4n} + (fl+gh)z^{2n} + fh}} = \frac{p\sqrt{gl}\,x^n z^n}{nfh} = C.$$

g)
$$\int F + \int G = \int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{glx^{4n} + (fl+gh)x^{2n} + fh}} \pm \int \frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{glz^{4n} + (fl+gh)z^{2n} + fh}} = C.$$

h)
$$\int X \pm \int Z = -\frac{hpx^n z^n}{n\sqrt{gl}} + C.$$

i)
$$\int M \pm \int N = \int x^{n-1}dx\sqrt{\frac{lx^{2n}+h}{gx^{2n}+f}} \pm \int z^{n-1}dz\sqrt{\frac{lz^{2n}+h}{gz^{2n}+f}} = \frac{p\sqrt{gl}\,x^n z^n}{n} + C.$$

j) Ist:

$$gl(x^{2n} + z^{2n}) \pm 2x^n z^n \sqrt{gl}\sqrt{ghp^2 + gl} - glp^2 = 0,$$

so folgt:

$$\int L \pm \int O = \int x^{n-1}dx\sqrt{\frac{hx^{2n}+l}{g}} \pm \int z^{n-1}dz\sqrt{\frac{hz^{2n}+l}{g}} = -\frac{hpx^n z^n}{n\sqrt{gl}} + C.$$

k) Ist q eine ungerade Zahl, und besteht die Beziehung (33), so ist:

$$\int W_q \pm \int Z_q = \int \frac{x^{qn-1+4n}dx}{\sqrt{fhx^{4n} + (fl+gh)x^{2n} + gl}} \pm \int \frac{z^{qn-1+4n}dz}{\sqrt{fhz^{4n} + (fl+gh)z^{2n} + gl}}$$

eine algebraische Größe. Man hat nämlich:

$$\begin{aligned} d\left(x^{qn}\sqrt{fhx^{4n} + (fl+gh)x^{2n} + gl} \pm z^{qn}\sqrt{fhz^{4n} + (fl+gh)z^{2n} + gl}\right) \\ = nx^{qn-1}dx\,\frac{(q+2)fhx^{4n} + (q+1)(fl+gh)x^{2n} + qgl}{\sqrt{fhx^{4n} + (fl+gh)x^{2n} + gl}} \\ \pm nz^{qn-1}dz\,\frac{(q+2)fhz^{4n} + (q+1)(fl+gh)z^{2n} + qgl}{\sqrt{fhz^{4n} + (fl+gh)z^{2n} + gl}} \\ = n[(q+2)fh(W_q \pm Z_q) + (q+1)(fl+gh)(W_{q-2} \pm Z_{q-2}) \\ + qgl(W_{q-4} \pm Z_{q-4})], \end{aligned}$$

und $W_q \pm Z_q$ ist für $q = -3$ und für $q = -1$ wegen der Sätze b), c) algebraisch integrierbar.

Die obigen Sätze lassen zahlreiche geometrische Anwendungen zu, die zwar nicht sämtlich neu sind, und von welchen nur einige angeführt werden mögen.

a) Ist a die Halbachse einer Lemniskate, x der vom Doppelpunkt ausgehende Vektorradius, so ist der Elementarbogen der Kurve:

$$ds = \frac{a^2dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

Man erhält aber dieses Differential aus T, wenn man setzt:

$$n=1,\quad f=-1,\quad g=l=a^2,\quad h=1;$$

es folgt also aus (33):

$$x^2z^2+a^2(x^2+z^2)-a^4=0,$$

oder:

$$z=a\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}.$$

Ist daher $CB=x$, $CE=z$, so folgt (Fig. 86):

$$\text{Bogen } CE+\text{Bogen } CB=\text{const.}$$

Zur Bestimmung der Konstante beachte man, daß $z=a$ für $x=0$

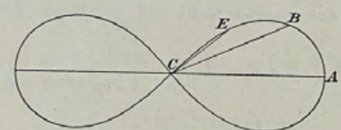

Fig. 86.

ist. Die Konstante ist also der Bogen CA, und man hat:

$$\text{Bogen } CE=\text{Bogen } BA.$$

Die Punkte E, B fallen zusammen, wenn:

$$x=z=a\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$$

oder $x=a\sqrt{\sqrt{2}-1}$ ist, eine Formel, welche das Mittel liefert, den Lemniskatenquadranten zu halbieren.

b) Ist a die Halbachse, x der vom Mittelpunkt ausgehende Vektorradius einer gleichseitigen Hyperbel, so ist:

$$ds=\frac{x^2dx}{\sqrt{x^4-a^4}}.$$

Um dieses Differential mit Q in Übereinstimmung zu bringen, muß man setzen:

$$n=1,\quad f=h=1,\quad g=-a^2,\quad l=a^2;$$

es folgt dann aus (34):

$$x^2z^2-a^2(x^2+z^2)-a^4=0,$$

oder:

$$z=a\sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}. \tag{37}$$

Ist also $CB=x$, $CE=z$ (Fig. 87), so folgt:

$$AB+AE=\frac{xz}{a}+C.$$

Ist B' ein anderer Kurvenpunkt, E' der wegen (37) demselben entsprechende Punkt, und bezeichnet man mit t, u die nach B', E' gehenden Vektorradien, so ist:

$$AB'+AE'=\frac{tu}{a}+C.$$

Hieraus folgt:

$$AB+AE-AB'-AE'$$
$$=\frac{xz-tu}{a},$$

oder:

$$E'E-BB'=\frac{xz-tu}{a}.$$

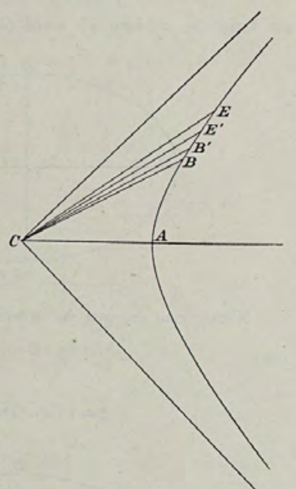

Fig. 87.

c) Setzt man:

$$n=1,\quad f=-a^2,\quad g=l=a^4,$$
$$h=-c^2,$$

so ergibt sich:

$$X=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-c^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx,$$

welches den Elementarbogen der Ellipse darstellt, deren Halbachsen a, $\sqrt{a^2-c^2}$ sind, ferner, wegen (35):

$$c^2p^2x^2z^2+a^6(p^2-x^2-z^2)\mp 2a^3xz\pi=0, \tag{38}$$

oder, wenn man das obere Vorzeichen annimmt:

$$z=\frac{(-\pi x+p\xi)a^3}{a^6-c^2p^2x^2},$$

wo:

$$\pi=\sqrt{(a^2-p^2)(a^4-c^2p^2)},\quad \xi=\sqrt{(a^2-x^2)(a^4-c^2x^2)};$$

ist dann (Fig. 88) $CM = x$, $CN = z$, $CQ = p$, so folgt:

$$DR + DS = \frac{c^2 pxz}{a^4} + \text{const.}$$

Bestimmt man die Konstante auf die gewöhnliche Weise, so erhält man:

$$DR + DS = \frac{c^2 pxz}{a^4} + DT,$$

oder:

$$DR - ST = \frac{c^2 pxz}{a^4},$$

ein Ergebnis, welchem wir schon oben (Formel (14)) begegnet sind.

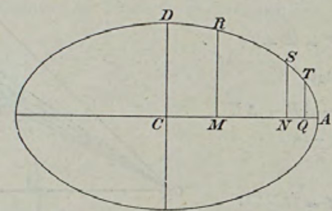

Fig. 88.

Nimmt man dagegen das untere Vorzeichen, so erhält man:

$$(39) \qquad z = \frac{a^3(\pi x + p\xi)}{a^6 - c^2p^2x^2}, \quad p = \frac{a^3(z\xi - x\zeta)}{a^6 - c^2x^2z^2},$$

wo:

$$\xi = \sqrt{(a^2 - z^2)(a^4 - c^2z^2)};$$

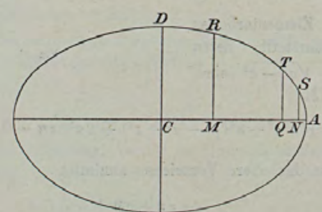

Fig. 89.

der Punkt T fällt zwischen S und D, und man hat (Fig. 89):

$$DR - DS = \frac{c^2 pxz}{a^4} - DT,$$

woraus wiederum die obige Beziehung folgt.

Fällt insbesondere R mit T zusammen, so ist $x = p$, $\xi = \pi$, folglich wegen der zweiten Gleichung (39):

$$a^3 z\xi = (a^6 - c^2x^2z^2 + a^3\zeta)x;$$

es ergibt sich andererseits aus (38):

$$c^2x^4z^2 - a^6z^2 + 2a^3xz\xi = 0,$$

folglich:

$$c^2x^4z^2 - a^6z^2 + 2x^2(a^6 - c^2x^2z^2 + a^3\zeta) = 0,$$

oder:

$$c^2z^2x^4 - 2a^3(a^3 + \zeta)x^2 + a^6z^2 = 0,$$

woraus man erhält:

$$(40) \qquad x = \frac{a}{cz}\sqrt{[a - \sqrt{a^2 - z^2}]\,[a^2 - \sqrt{a^4 - c^2z^2}]\,a}\,.$$

Ist also (Fig. 90) $CM = x = p$, $CN = z$, so hat man:

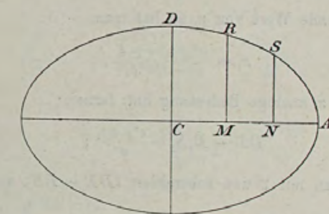

Fig. 90.

$$DR - RS = \frac{c^2x^2z}{a^4} = \frac{1}{az}[a - \sqrt{a^2 - z^2}]\,[a^2 - \sqrt{a^4 - c^2z^2}]\,.$$

Für $z = a$ findet man, wie oben, $x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a + b}}$, und:

$$DR - RA = a - b.$$

Nimmt man nun p, z statt x, p, und ist (Fig. 91) $z_1 = CN_1$ der entsprechende Wert von z, so hat man:

$$z_1 = \frac{a^3(\pi z + p\zeta)}{a^6 - c^2p^2z^2} = \frac{a^3(z\xi + x\zeta)}{a^6 - c^2x^2z^2},$$

ferner:

$$DR - SS_1 = \frac{c^2 p z z_1}{a^4} = \frac{c^2 x z z_1}{a^4},$$

und wenn man mit der oben gefundenen Gleichung summiert:

$$2DR - RS_1 = \frac{c^2 x z (x + z_1)}{a^4},$$

wo x den Wert (40) hat.

Nimmt man nun z_1 statt z, und ist $p_1 = CM_1$ der den Werten

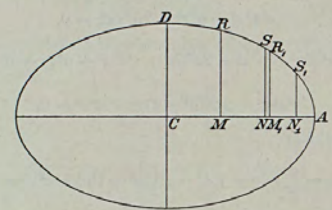

Fig. 91.

x, z_1 entsprechende Wert von p, so hat man:

(41) $$z_1 = \frac{a^3(x\pi_1 + p_1 \xi)}{a^6 - c^2 x^2 p_1^2},$$

wo π_1 eine zu π analoge Bedeutung hat, ferner:

$$DR - R_1 S_1 = \frac{c^2 p_1 x z_1}{a^4};$$

multipliziert man mit 2 und subtrahiert $(DR - RS)$, so folgt:

$$DS - 2R_1 S_1 = \frac{c^2 x}{a^4}(2p_1 z_1 - xz).$$

Damit $DS = 2R_1 S_1$ ist, muß die Beziehung:

(42) $$2p_1 z_1 = xz$$

bestehen. Setzt man nun in (38) z_1, p_1 statt z, p, so erhält man:

(43) $$c^2 p_1^2 x^2 z_1^2 + a^6(p_1^2 - x^2 - z_1^2) + 2a^3 x z_1 \pi_1 = 0.$$

Aus (41), (42), (43) ergibt sich:

$$\left.\begin{matrix} p_1 \\ z_1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2a^3}\Bigg[\sqrt{a^3 x z \xi + a^6 x^2 + \frac{c^2 x^4 z^2}{4} + a^6 x z}$$
$$\pm \sqrt{a^3 x z \xi + a^6 x^2 + \frac{c^2 x^4 z^2}{4} - a^6 x z}\Bigg],$$

wo:

$$z = \frac{2a^3 x \xi}{a^6 - c^2 x^4}.$$

Fällt insbesondere S mit A zusammen, so wird:

$$z = a, \quad x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \quad \xi = a^2 b \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},$$

also:

$$\left.\begin{matrix} p_1 \\ z_1 \end{matrix}\right\} = \frac{a}{4\sqrt{a+b}}\Big[\sqrt{5a + 3b + 4\sqrt{a(a+b)}}$$
$$\pm \sqrt{5a + 3b - 4\sqrt{a(a+b)}}\Big],$$

eine Formel, welche die Auflösung des Eulerschen Problems liefert.

Mit der Eulerschen Frage beschäftigten sich auch Charles Bossut (geb. zu Tartaras bei Lyon am 11. August 1730, gest. zu Paris am 14. Januar 1814) und Étienne Bézout.

Der Beweis von Bossut[1]) ist folgender.

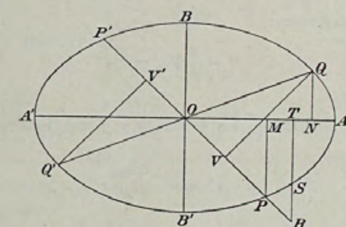

Fig. 92.

Es sei (Fig. 92):

$$OP = n, \quad A'N = x, \quad AT = u, \quad NQ = y;$$

man hat dann:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a},$$

und folglich:

$$d \cdot A'BQ = \frac{dx\sqrt{a^2b^2 + 2ac^2x - c^2x^2}}{a\sqrt{2ax - x^2}},$$

$$d \cdot AS = \frac{du\sqrt{a^2b^2 + 2ac^2u - c^2u^2}}{a\sqrt{2au - u^2}}.$$

---

[1]) Démonstration d'un théorème de géométrie énoncé dans les Actes de Leipsick, année 1754, Mém. prés. par div. sav. III, 1760, p. 314 bis 320.

Drücken wir alles durch n aus. Es ist bekanntlich:

$$OQ = \sqrt{a^2 + b^2 - n^2},$$

ferner:

$$OQ = \sqrt{ON^2 + NQ^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 - 2ac^2x + c^2x^2};$$

durch Gleichsetzung der beiden Werte von OQ ergibt sich:

$$x = a + \frac{a}{c}\sqrt{a^2 - n^2},$$

und hieraus:

$$d \cdot AQ' = d \cdot A'Q = -\frac{n^2dn}{R}, \quad d \cdot A'Q' = d \cdot AQ = -d \cdot A'Q = \frac{n^2dn}{R},$$

wo:

$$R = \sqrt{(a^2 - n^2)(n^2 - b^2)}.$$

Aus:

$$\frac{OM^2}{a^2} + \frac{MP^2}{b^2} = 1, \quad OM^2 + MP^2 = n^2$$

erhält man andererseits:

$$OM = \frac{a}{c}\sqrt{n^2 - b^2},$$

folglich:

$$OT = \frac{a}{n} OM = \frac{a^2}{cn}\sqrt{n^2 - b^2}, \quad u = a - \frac{a^2}{cn}\sqrt{n^2 - b^2},$$

und hieraus:

$$d \cdot AS = -\frac{a^2b^2dn}{n^2R}.$$

Es folgt:

$$d(Q'PS - QAS) = d \cdot Q'PA - d \cdot QA - 2d \cdot AS$$
$$= 2\frac{dn}{R}\left(-n^2 + \frac{a^2b^2}{n^2}\right).$$

Ist dieser Ausdruck das Differential einer algebraischen Funktion von n, so hat diese notwendig die Form pn^qR, wo p eine Konstante, q eine ganze Zahl ist. Durch Differentiation ergibt sich $p = 2$, $q = -1$, also:

$$d(Q'PS - QAS) = 2d\,\frac{R}{n},$$

und wenn man integriert:

$$Q'PS - QAS = 2\frac{R}{n},$$

wobei die Integrationskonstante, wie man leicht bestätigt, gleich Null zu setzen ist.

Es ist ferner, wegen einer bekannten Eigenschaft der konjugierten Durchmesser:

$$n \cdot Q'V' = ab,$$

also:

$$OV' = \sqrt{a^2 + b^2 - n^2 - \frac{a^2b^2}{n^2}} = \frac{R}{n},$$

und schließlich:

$$Q'PS - QAS = 2 \cdot OV'.$$

Der **Eulersche** Satz ließe sich, wie **Bossut** bemerkt, auf folgende Weise **a priori** entdecken. Setzen wir uns vor, zwei Ellipsenbögen anzugeben, deren Differenz algebraisch rektifizierbar sein möge. Es sei $A'BQ$ einer dieser Bögen, wo $A'Q = x$; dann ergibt sich wie oben:

$$d \cdot A'BQ = -\frac{n^2dn}{R},$$

wenn man setzt:

$$\sqrt{a^2b^2 + 2ac^2x - c^2x^2} = an,$$

woraus folgt:

$$x = a + \frac{a}{c}\sqrt{a^2 - n^2}.$$

Da aber identisch:

$$-\frac{n^2dn}{R} + \frac{a^2b^2dn}{n^2R} = d \cdot \frac{R}{n},$$

so ist das Problem gelöst, wenn $\frac{a^2b^2dn}{n^2R}$ das Differential eines Ellipsenbogens bildet. Daß dieses wirklich stattfindet, bestätigt man durch die Substitution $n = \frac{ab}{n_1}$, welche ergibt:

$$\frac{a^2b^2dn}{n^2R} = -\frac{n_1^2dn_1}{R_1},$$

wo:

$$R_1 = \sqrt{(a^2 - n_1^2)(n_1^2 - b^2)}$$

ist.

Bézout[1]) stellt die folgenden drei Sätze auf:

a) Das Differential:

$$d\sigma = d\left[gx^{rm}\left(\frac{a + bx^m}{e + fx^m}\right)^r\right]$$

läßt sich in zwei Differentiale von der Form:

---

[1]) Mémoire sur les quantités différentielles, qui n'étant point intégrables par elles-mêmes, le deviennent néanmoins quand on leur joint des quantités de même forme qu'elles, Mém. prés. par div. savans III, 1760, p. 326—343.

$$kx^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^{r-1}$$

zerlegen. — Die Zerlegung findet auf folgende Weise statt:

$$d\left[gx^{rm}\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^r\right]=\frac{mreg}{f}\,\frac{(af-be)x^{rm-1}dx}{(e+fx^m)^2}\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^{r-1}$$
$$+\frac{mrbg}{f}x^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^{r-1};$$

das zweite Glied rechts hat die verlangte Form, das erste wird auf dieselbe durch die Substitution:

$$\frac{a+bx^m}{e+fx^m}=-\frac{b}{e}z^m$$

gebracht, welche es in:

$$\frac{mrbg}{f}z^{rm-1}dz\left(\frac{a+bz^m}{e+fz^m}\right)^{r-1}$$

überführt, so daß:

$$d\sigma=\frac{mrbg}{f}x^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^{r-1}+\frac{mrbg}{f}z^{r-1}dz\left(\frac{a+bz^m}{e+fz^m}\right)^{r-1}.$$

b) Das Differential $d\sigma$ läßt sich in zwei Differentiale von der Form:

$$kx^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^r$$

zerlegen. — Es ist nämlich:

$$d\sigma=mrgx^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^r+\frac{mrg(be-af)}{(e+fx^m)^2}x^{rm+m-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^{r-1};$$

das erste Glied hat die gewünschte Form, das zweite geht durch die obige Substitution in:

$$mrgz^{rm-1}dz\left(\frac{a+bz^m}{e+fz^m}\right)^r$$

über, so daß:

$$d\sigma=mrgx^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^r+mrgz^{rm-1}dz\left(\frac{a+bz^m}{e+fz^m}\right)^r.$$

c) Das Differential:

$$d\tau=d[x^{-rm}(a+bx^m)^r(e+fx^m)^r]$$

läßt sich in zwei Differentiale von der Form:

$$kx^{-rm-1}dx(a+bx^m)^{r-1}(e+fx^m)^{r-1}$$

zerlegen. — Es ist:

$$d\tau=-rmaex^{-rm-1}dx(a+bx^m)^{r-1}(e+fx^m)^{r-1}$$
$$+rmbfx^{2m-rm-1}dx(a+bx^m)^{r-1}(e+fx^m)^{r-1};$$

das erste Glied hat die gewünschte Form, das zweite wird durch die Substitution:

$$z^m=\frac{ae}{bfx^m}$$

auf dieselbe gebracht, wonach man hat:

$$d\tau=-rmaex^{-rm-1}dx(a+bx^m)^{r-1}(e+fx^m)^{r-1}$$
$$-rmaez^{-rm-1}dz(a+bz^m)^{r-1}(e+fz^m)^{r-1}.$$

Diese Sätze lassen sich auf die Aufsuchung von Kurvenbögen anwenden, deren Summe algebraisch rektifizierbar ist.

Das Differential des Ellipsenbogens ist:

$$ds=\sqrt{\frac{\alpha^2-\varepsilon^2x^2}{\alpha^2-x^2}}\,dx,$$

wo α, β die Halbachsen bezeichnen, und:

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=\varepsilon^2$$

ist. Will man Satz a) verwerten, so muß man setzen:

$$m=2,\quad r=\frac{1}{2},\quad a=\alpha^2,\quad b=-1,\quad e=\alpha^2,\quad f=-\varepsilon^2,\quad g=1;$$

ist also:

$$z=\alpha\sqrt{\frac{\alpha^2-x^2}{\alpha^2-\varepsilon^2x^2}},$$

so folgt:

$$\sqrt{\frac{\alpha^2-\varepsilon^2x^2}{\alpha^2-x^2}}\,dx+\sqrt{\frac{\alpha^2-\varepsilon^2z^2}{\alpha^2-z^2}}\,dz=\frac{\varepsilon^2}{\alpha}d(xz),$$

eine Beziehung, welche den Beweis des Eulerschen Satzes liefert.

Für die Hyperbel ist:

$$ds=\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2-\alpha^2}{x^2-\alpha^2}}\,dx,$$

wo α, β die Halbachsen bezeichnen und:

$$\varepsilon^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}$$

ist. Vergleicht man mit b), so muß man setzen:

$$m = 2,\quad r = \frac{1}{2},\quad a = -\alpha^2,\quad b = \varepsilon^2,\quad e = -\alpha^2,\quad f = 1,\quad g = 1;$$

ist also:

$$z = \frac{\alpha}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - \alpha^2}{x^2 - \alpha^2}},$$

so folgt:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - \alpha^2}{x^2 - \alpha^2}}\,dx + \sqrt{\frac{\varepsilon^2 z^2 - \alpha^2}{z^2 - \alpha^2}}\,dz = \frac{\varepsilon}{\alpha}\,d(xz).$$

Satz c) kann auf die Kurven:

$$y = Mx^{\frac{4t+1}{4t+3}},\quad y = Mx^{\frac{4t-1}{4t+1}}$$

angewandt werden, wo $t \neq 0$.

Die bisher besprochenen Untersuchungen sind nicht nur in historischer, sondern auch in sachlicher Hinsicht von außerordentlicher Wichtigkeit. Ihr wesentlicher Inhalt läßt sich wie folgt zusammenfassen.

Bezeichnet Πx irgend eins von den betrachteten Integralen, also ein Integral, welches die Quadratwurzel eines Polynoms der vierten Ordnung als einzige Irrationalität enthält, und besteht zwischen x, y, a eine gewisse algebraische Beziehung:

$$a = \psi(x, y),$$

so ist:

$$\Pi x \pm \Pi y = \Pi a + \varphi(x, y, a),$$

wo $\varphi(x, y, a)$ eine algebraische Funktion[1]) von x, y, a bezeichnet; in den einfachsten Fällen ist diese Funktion identisch Null, so daß:

$$\Pi x \pm \Pi y = \Pi a$$

ist. Mit anderen Worten: Die Summe oder die Differenz zweier gleichartigen Integrale Πx mit verschiedenen oberen Grenzen ist, von einer algebraischen Funktion dieser Grenzen eventuell abgesehen, ein Integral von eben derselben Form, dessen obere Grenze von denjenigen der vorgegebenen Integrale algebraisch abhängt.

Diese Eigenschaft der elliptischen Integrale hat man sich gewöhnt als **Additionstheorem** zu bezeichnen; und **Euler** bemerkte auch, wie schon (S. 805) gesagt, daß dieselbe den hyperelliptischen Integralen

[1]) Erst gegen das Ende unserer Periode stellte sich, wie wir unten sehen werden, der Fall von den Integralen dritter Gattung ein, wo φ eine algebraisch-logarithmische Funktion ist.

nicht zukommt, was später den Ausgangspunkt des Umkehrproblems der **Abelschen** Integrale bildete.

Die Analogie mit den Kreisfunktionen entfiel weder **Euler** noch **Lagrange**; beide gingen, um eine Integrationsmethode für die elliptische Gleichung aufzufinden, von der einfacheren Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

aus, deren Integral sich unter den beiden gleichbedeutenden Formen:

$$x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2} = a,$$

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin a$$

schreiben läßt. Setzt man:

$$x = \sin t,\quad y = \sin u,$$

so erhält man hieraus, nach einer viel üblicheren Schreibweise:

$$\sin t\sqrt{1 - \sin u^2} \pm \sin u\sqrt{1 - \sin t^2} = \sin(t \pm u),$$

eine Formel, welche aussagt, daß zwischen $\sin t$, $\sin u$ und $\sin(t \pm u)$ eine algebraische Beziehung stattfindet. Es sollte ganz natürlich erscheinen, eine analoge Umformung in die elliptische Differentialgleichung einzuführen; man hatte nur:

$$\Pi x = u,\quad \Pi y = v,\quad \Pi a = c$$

zu setzen, und x, y, a als Funktionen von u, v bzw. c:

$$x = \lambda u,\quad y = \lambda v,\quad a = \lambda c$$

anzusehen, um schreiben zu können:

$$\lambda(u + v) = \psi(\lambda u, \lambda v).$$

Man sieht hieraus, wie nahe die beiden großen Mathematiker dem Begriffe der Umkehrung der elliptischen Integrale kamen. Und es mußten dennoch manche Jahrzehnte verfließen, ehe dieser Begriff ans Licht kommen möchte!

B. Beziehungen zwischen Bögen verschiedener Kegelschnitte.

Zu jedem beliebigen Bogen eines Kegelschnittes läßt sich, wie schon gesehen, ein anderer Bogen desselben Kegelschnittes derart angeben, daß die Differenz beider Bögen algebraisch ausdrückbar ist.

Es erhebt sich aber die Frage, ob es möglich ist, jeden beliebigen Kegelschnittbogen durch Bögen eines Kegelschnittes von **bestimmter** Art auszudrücken. Analytisch lautet die Frage, ob und wie man gewisse Integrale auf eine bestimmte Form bringen kann. Diese Frage enthält den Kern zweier Begriffe, die in der Theorie der elliptischen Funktionen eine Hauptrolle spielen, der **Transformation** und der **Reduktion auf Normalformen.**

Eigentliche Transformationen und Reduktionen sind die folgenden Probleme, die **Euler** gleich zu Anfang unserer Periode untersuchte[1]):

1. Das Differential:

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}=\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

durch Kegelschnittbögen zu integrieren;

2. die Bedingungen aufzusuchen, unter welchen:

$$\int\frac{(p+qy+ry^2)dy}{\sqrt{Y}} \tag{44}$$

auf die Form:

$$\int\frac{(p+qx+rx^2)dx}{\sqrt{\alpha+\gamma x^2+\varepsilon x^4}}$$

zurückführbar ist;

3. das Differential:

$$\frac{(p+rx^2)dx}{\sqrt{\alpha+\gamma x^2+\varepsilon x^4}}$$

durch Kegelschnittbögen zu integrieren, wenn das unter dem Wurzelzeichen stehende Polynom nicht in zwei reelle rein quadratische Faktoren $f+gx^2$, $h+kx^2$ auflösbar ist;

4. die Bedingungen anzugeben, unter welchen (44) sich auf die Form:

$$\int\frac{(p+qx+rx^2)dx}{\sqrt{2\beta x+\gamma x^2+2\delta x^3}}$$

bringen läßt.

Eine mehr systematische Behandlung erfährt das allgemeine Reduktionsproblem in einer späteren Schrift **Eulers.**[2]) Hier taucht ein neuer und fruchtbarer Gedanke auf; ein Gedanke, der auch geeignet war, zur Umkehrung der elliptischen Integrale zu führen.

---

[1]) **Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest**, Novi Comm. Acad. Petrop. VIII, 1760 und 1761 (publ. 1763), p. 129—149. [2]) **De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis et hyperbolae**, Novi Comm. Acad. Petrop. X, 1764 (publ. 1766), p. 3—50.

Euler will die Kegelschnittbögen als neue Transzendenten mit demselben Rechte in der Analysis einbürgern, mit welchem schon lange her die Logarithmen und die Kreisbögen in derselben auftreten. Und so wie man in der Trigonometrie den Radius $=1$ annimmt, so nimmt er den Halbparameter $=1$ an, so daß die Gleichung des auf einen Scheitel als Koordinatenursprung bezogenen Kegelschnittes lautet:

$$y^2=2x-\frac{x^2}{a},$$

wo $2a$ die Länge der durch den betrachteten Scheitel gehenden Achse bezeichnet. Hier ist:

$a>0$ für die Ellipse;

$a=1$ für den Kreis;

$a=\infty$ für die Parabel;

$a<0$ für die Hyperbel.

Die Bogenlänge $\Pi_a x$[1]) ist:

$$\Pi_a x=\int\sqrt{\frac{a^2-2a(1-a)x+(1-a)x^2}{a(2ax-x^2)}}\,dx;$$

Euler bringt dieses Integral auf die Form:

$$\int\sqrt{\frac{f+gz^2}{h+kz^2}}\,dz,$$

und unterscheidet zwölf für dieses letzte Integral mögliche Fälle, je nach dem Vorzeichen und der relativen Größe der Koeffizienten, wie aus folgender Tabelle erhellt, welche auch angibt, auf welche Weise das Integral in jedem besonderen Falle durch Kegelschnittbögen darstellbar ist:

	f	g	h	k		
1	+	+	+	+	$fk>gh$	alg. F., Ellipse und Hyperbel
2	+	+	+	+	$fk<gh$	Hyperbel
3	+	+	+	−		Ellipse
4	+	+	−	+		alg. F., Ellipse und Hyperbel
5	+	−	+	+		alg. F., Ellipse und Hyperbel
6	+	−	+	−	$fk>gh$	Ellipse
7	+	−	+	−	$fk<gh$	alg. F. und Hyperbel

---

[1]) **Euler** schreibt $\Pi x[a]$.

	f	g	h	k		
8	+	−	−	+	$fk > gh$	alg. F., Ellipse und Hyperbel
9	−	+	+	+		alg. F. und Ellipse
10	−	+	+	−	$fk < gh$	alg. F. und Hyperbel
11	−	+	−	+	$fk > gh$	alg. F. und Ellipse
12	−	+	−	+	$fk < gh$	Hyperbel.[1])

Das Problem der Zurückführung von Integralen auf Kegelschnittbögen hatte schon früher (diese Vorl., III², S. 871) Maclaurin und d'Alembert beschäftigt. Der letztere kommt auf den Gegenstand noch öfters wieder zurück. In seinen Opuscules mathématiques[2]) beweist er, mit Hilfe früher erhaltener Resultate, daß:

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{Ay^4 + Cy^2 + Dy + E}}$$

und andere ähnliche Integrale auf Kegelschnittbögen reduzierbar sind. Die Berichtigung und Vervollständigung einiger Punkte dieser Arbeit bildet den Zweck einer kurz darauf erschienenen Schrift.[3]) Auch in seinen schon oben (S. 728) besprochenen Recherches sur le calcul intégral gibt er einige auf Kegelschnittbögen zurückführbare Integrale, wie:

a) $$\int Udv[A + B\sin(a+v) + C\cos(c+v) + D\sin(g+v) + F\cos(l+v) + \cdots]^{\frac{n}{2}},$$

wo n eine ganze Zahl, U eine ganze rationale Funktion von Sinussen und Kosinussen von um konstante Größen vermehrten Vielfachen von v bezeichnet;

b) $$\int Udv(A + B\sin v)^{\frac{m}{2}}(C + D\sin v + E\sin v^2)^{\frac{n}{2}},$$

wo m, n ganze Zahlen sind und U eine ganze rationale Funktion von $\sin 2pv$ oder von $\cos qv$ bezeichnet;

[1]) Eine analoge Untersuchung bildet den Inhalt von zwei Kapiteln (T. II, L. I, C. 12, 13) der mehrmals angeführten Institutiones analyticae von Riccati und Saladini, wo die Frage auf Grund einer früheren Arbeit von Riccati (Opusculorum ad res physicas et mathematicas pertinentium, 2 Bde., Bononiae 1757—1762, T. II, Op. 2, p. 36—176) behandelt wird. Einige auf Kegelschnittbögen reduzierbare Integrale wurden auch von Lorgna (Opuscula mathematica et physica, Veronae 1770) angegeben.

[2]) T. IV, Paris 1768, p. 225—253: Recherches de calcul intégral, p. 254 bis 282: Supplément au mémoire précédent. [3]) Recherches mathématiques sur divers sujets, Misc. Taur. IV, 1766—1769, P. II, p. 127—161.

c) $$\int Udv(a + b\sin v^2)^{\frac{m}{2}}(g + h\sin v^2)^{\frac{n}{2}},$$

wo m und n ganzzahlig sind und U eine ganze rationale Funktion von $\cos qv$ oder von $\sin qv$ bezeichnet;

d) $$\int Udv(a + b\sin v^2)^{\frac{m}{2}}(c + d\sin v^2)^{\frac{n}{2}}(e + f\sin v^2)^{\frac{r}{2}},$$

wo m, n, r ganzzahlig sind und U eine ganze rationale Funktion von $\sin qv$ ist;

e) $$\int Udv(a + b\sin v + g\sin v^2)^n,$$

wo $3n$ oder $4n$ eine ganze positive Zahl ist und U eine ganze rationale Funktion von $\sin 2pv$ oder von $\cos qv$ bezeichnet;

f) $$\int \frac{z^\vartheta dz}{(f+gz^2)^{\frac{\omega}{2}}(p+qz^2)^{\frac{\lambda}{2}}(l+rz^2)^{\frac{\sigma}{2}}},$$

wo ω, λ, σ ganz und positiv sind, ϑ ganzzahlig ist, und:

$$-\frac{\vartheta}{2} - \frac{3}{2} + \frac{\lambda + \omega + \sigma}{2}$$

ganz und nicht negativ ist;

g) $$\int \frac{x^m dx}{(1-x^2)^{\frac{s}{2}}(a+bx)^{\frac{q}{2}}(e+fx)^{\frac{p}{2}}},$$

wo s, q, p positive ungerade Zahlen sind, m ganzzahlig ist, und:

$$-m - 2 + s + \frac{q+p}{2}$$

ganz und nicht negativ ist.

d'Alembert ergreift die Gelegenheit, um seine Priorität hinsichtlich der Integration von $\sqrt{\frac{f+gz^2}{p+qz^2}}$ durch Kegelschnittbögen Riccati[1]) gegenüber zu behaupten.

In einer späteren Schrift[2]) zeigt d'Alembert, wie sich die oben angeführte Eulersche Klassifikation auf Grund seiner eigenen älteren Methoden aufstellen läßt. Er bemerkt, daß seine Resultate einige Verschiedenheiten gegenüber den Eulerschen aufzeigen, insofern als gewisse nach Euler auf Bögen und algebraische Funktionen reduzier-

[1]) Riccati (Inst. an., T. II, P. II, C. 12) sagte, niemand vor ihm hätte dieses geleistet. [2]) Opuscules mathématiques, T. VII, Paris 1780, p. 61 bis 101: Sur des différentielles réductibles aux arcs de sections coniques, p. 390: Remarque pour la page 96.

bare Integrale von ihm selbst durch lauter Bögen ausgedrückt werden; daß dieses aber keinen Widerspruch bildet, da die Fagnano-Eulerschen Sätze in bestimmten Fällen das Mittel liefern, die Summe eines Bogens und einer algebraischen Funktion durch einen Bogen zu ersetzen.

Wiederum auf elliptische Integrale bezieht sich ein Schreiben von d'Alembert an Lagrange vom Jahre 1781.[1]) Hier berichtigt er eine Stelle seiner Schrift vom Jahre 1746 dadurch, daß er bemerkt, daß das dort als auf zwei Hyperbelbögen und einen Ellipsenbogen reduzierbar angegebene Integral:

$$\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z^2 + fz + b}},$$

wo:

$$z^2 + fz + b = (z + a)(z + c), \qquad a > 0, \quad c > 0,$$

durch einen einzigen Ellipsenbogen und eine algebraische Funktion darstellbar ist, da die beiden Hyperbelbögen sich gegenseitig aufheben. Ist dagegen:

$$z^2 + fz + b = (z - a)(z - c),$$

oder sind die Faktoren des Trinoms imaginär, so findet diese Aufhebung nicht mehr statt.

Lexell[2]) gibt für die Eulersche Klassifikation eigene Beweise, und leitet einige neue Sätze aus der Vergleichung der Ergebnisse verschiedener Reduktionen eines und desselben Integrales ab. Ist z. B. das Integral:

$$I = \int \sqrt{\frac{1 + mz^2}{1 + nz^2}}\, dz$$

vorhanden, und setzt man:

$$z = \frac{e}{\sqrt{m}} \frac{\sin\varphi}{1 + e\cos\varphi}$$

oder:

$$z = \frac{1}{e\sqrt{n}} \frac{1 + e\cos\psi}{\sin\psi},$$

wo:

$$e = \sqrt{\frac{m}{m-n}}$$

[1]) Extrait d'une lettre de M. D'Alembert à M. de la Grange du 14 décembre 1781, Nouv. Mém. Berlin 1780 (publ. 1782), p. 376—378.

[2]) De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipseos et hyperbolae, Acta Acad. Petrop. 1778, P. I (publ. 1780), p. 58 bis 101. — Ad dissertationem de reductione formularum integralium ad rectificationem ellipseos et hyperbolae additamentum, Acta Acad. Petrop. 1778, P. II (publ. 1781), p. 55—84.

ist, so erhält man:

$$I = \frac{e}{\sqrt{m}} \int \frac{R\,d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} = -\frac{\sqrt{m-n}}{m} \int \frac{(e + \cos\psi)^2}{S\sin\psi^2}\, d\psi,$$

wo:

$$R^2 = 1 + 2e\cos\varphi + e^2, \quad S^2 = 1 + 2e\cos\psi + e^2.$$

Es gelten aber die Beziehungen:

$$(45) \quad \int \frac{R\,d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} = \frac{R\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)(e + \cos\varphi)} - \int \frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{(e + \cos\varphi)^2 R}$$

$$= \frac{(e + \cos\varphi)R}{(e^2 - 1)(1 + e\cos\varphi)\sin\varphi} + \frac{1}{e^2 - 1} \int \frac{(e + \cos\varphi)^2\,d\varphi}{R\sin\varphi^2}$$

$$= \frac{e^2}{e^2 - 1} \frac{\sin\varphi(e + \cos\varphi)}{(1 + e\cos\varphi)R} - \frac{1}{e^2 - 1} \int \frac{(1 + e\cos\varphi)^2\,d\varphi}{R^3}$$

$$= \frac{R\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)(e + \cos\varphi)} + \frac{1}{e^2} \int \frac{(1 + e\cos\varphi)^2\,d\varphi}{(e + \cos\varphi)^2 R} - \frac{1}{e^2} \int \frac{R\,d\varphi}{(e + \cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{R\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)(e + \cos\varphi)} + \int \frac{d\varphi}{R} - \int \frac{R\,d\varphi}{(e + \cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{R^3}{e^2\sin\varphi(1 + e\cos\varphi)(e + \cos\varphi)} + \frac{1}{e^2} \int \frac{R\,d\varphi}{\sin\varphi^2} - \frac{1}{e^2} \int \frac{R\,d\varphi}{(e + \cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{\sin\varphi(e + \cos\varphi)}{(1 + e\cos\varphi)R} + \frac{R\sin\varphi}{e^2(1 + e\cos\varphi)(e + \cos\varphi)} + \int \frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{R^3} - \frac{1}{e^2} \int \frac{R\,d\varphi}{(e + \cos\varphi)^2}.$$

Vermittels der zweiten dieser Gleichungen hat man dann:

$$\int \frac{(e + \cos\psi)^2\,d\psi}{\sin\psi^2 S} = (e^2 - 1) \int \frac{S\,d\psi}{(1 + e\cos\psi)^2} - \frac{(e + \cos\psi)S}{(1 + e\cos\psi)\sin\psi},$$

folglich:

$$\int \frac{R\,d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} = -\frac{\sqrt{m(m-n)}}{en} \left[(e^2 - 1) \int \frac{S\,d\psi}{(1 + e\cos\psi)^2} - \frac{(e + \cos\psi)S}{(1 + e\cos\psi)\sin\psi}\right],$$

oder:

$$\int \frac{R\,d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} + \int \frac{S\,d\psi}{(1+e\cos\psi)^2} - \frac{(e+\cos\psi)S}{(e^2-1)(1+e\cos\psi)\sin\psi}$$
$$= \frac{e(e+\cos\psi)(e+\cos\varphi)}{(e^2-1)(1+e\cos\psi)(1+e\cos\varphi)},$$

eine Formel, welche eine selbstverständliche geometrische Interpretation gestattet, da die beiden Integrale links, von einem konstanten Faktor abgesehen, die Bögen eines auf den Brennpunkt bezogenen Kegelschnittes darstellen.

In anderen Fällen muß man sich der übrigen Formeln (45) bedienen.

Weitere auf I zurückführbare Integrale sind:

$\int \sqrt{\frac{1+mx^2}{1+nx^2}}\frac{dx}{x^2}$, durch die Substitution $z=\frac{1}{x}$;

$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+mx^2)(1+nx^2)}}$, " " " $z=\sqrt{1+nx^2}$;

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+mx^2)(1+nx^2)}}$, " " " $z=\frac{\sqrt{1+nx^2}}{x}$;

$\int \frac{\sqrt{1+mx^2}}{(1+nx^2)^{\frac{3}{2}}}dx$, " " " $z=\frac{1}{\sqrt{1+nx^2}}$;

$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+mx^2}\,(1+nx^2)^{\frac{3}{2}}}$, " " " $z=\frac{1}{\sqrt{1+nx^2}}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+mx^2}\,(1+nx^2)^{\frac{3}{2}}}$, " " " $z=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

Dagegen läßt sich:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+mx^2)(1+nx^2)}}$$

auf die Summe von zwei Integralen von der betrachteten Form zurückführen.

Die logische Folge hat uns von der chronologischen etwas abgewandt. Wir müssen jetzt um ein Jahrzehnt zurückgehen, um einiger jenseits der See erschienenen, auf dem Festlande lange unbekannt gebliebenen denkwürdigen Schriften Erwähnung zu tun. Ihr Verfasser ist der schon genannte John Landen, Mitglied der Royal Society of London.[1]) Selbstverständlich bedient er sich durchgängig

[1]) A disquisition concerning certain fluents, which are assignable by the arcs of the conic sections; where are investigated some new and useful theorems for computing the fluents, Phil. Trans.

der Fluxionenmethode; wir werden aber seine Untersuchungen in die übliche Schreibweise überführen.

Landen will zunächst den Grenzwert λ der negativ genommenen

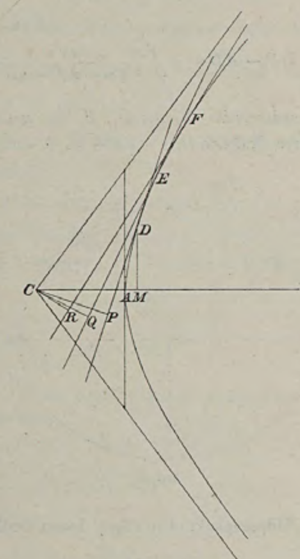

Fig. 93.

Differenz zwischen dem Hyperbelbogen und der entsprechenden Tangente bestimmen. Ist (Fig. 93):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

die Gleichung der Hyperbel, bezeichnen C, A, D, P den Mittelpunkt,

LXI, 1771, p. 298—309. — An investigation of a general theorem for finding the length of any arc of any conic hyperbola, by means of two elliptic arcs, with some other new and useful theorems deduced therefrom, Phil. Trans LXV, 1775, p. 283—289. — Math. Memoirs I, London 1780, p. 23—36: Of the ellipsis and hyperbola. — Math. Memoirs I, Appendix.

einen Scheitel, einen beliebigen Kurvenpunkt und den Fußpunkt der aus C auf die Tangente in D gefällten Normale, und setzt man:

$$z = \frac{CP^2}{a},$$

so ergibt sich:

(46) $$DP - AD = -\int_a^z \frac{a}{2}\,\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)(b^2+az)}}.$$

Nennt man andererseits C_1, A_1, D_1, P_1 die analogen Elemente einer Ellipse, deren Halbachsen $c = \sqrt{a^2+b^2}$, b sind (Fig. 94), wo-

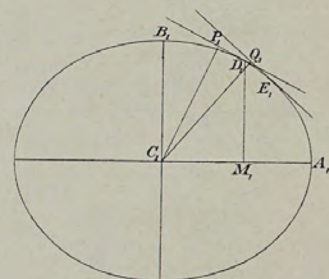

Fig. 94.

bei D_1 derjenige Ellipsenpunkt sein möge, dessen Ordinate:

$$D_1M_1 = b\sqrt{\frac{z}{a}}$$

ist, so ergibt sich:

$$D_1P_1 = a\sqrt{\frac{z(a-z)}{b^2+az}}.$$

Ist nun F der Punkt der Hyperbel, dem der Wert:

$$u = \frac{b^2(a-z)}{b^2+az}$$

von z zukommt, R der zu P analoge Fußpunkt, so folgt:

$$FR - AF = -\int_a^u \frac{a}{2}\,\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(a-u)(b^2+au)}} = \int_0^z \frac{ab^2}{2}\,\frac{\sqrt{a-z}\,dz}{\sqrt{z}\,(b^2+az)^{\frac{3}{2}}},$$

also:

$$DP - AD + FR - AF = \int_a^z \frac{a\,dz}{2}\left[-\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)(b^2+az)}} + \frac{b^2\sqrt{a-z}}{\sqrt{z}\,(b^2+az)^{\frac{3}{2}}}\right] + \text{const.}$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Größe ist aber $d \cdot D_1P_1$; also ist:

$$DP - AD + FR - AF = D_1P_1 + \text{const.}$$

Setzt man $z = 0$, so folgt:

$$DP - AD = \lambda, \quad u = a, \quad FR - AF = 0, \quad D_1P_1 = 0;$$

es ist also allgemein:

$$DP - AD + FR - AF = D_1P_1 + \lambda.$$

Ist insbesondere $u = z$, so fallen D und F mit einem und demselben Punkte E zusammen, P, R gehen in Q über, und man hat:

$$z = \frac{b^2(a-z)}{b^2+az}$$

oder:

$$z = \frac{b(c-b)}{a},$$

ferner, wenn E_1, Q_1 die zu E, Q entsprechenden, auf die Ellipse bezüglichen Punkte sind:

$$E_1Q_1 = c - b,$$

und schließlich:

$$\lambda = 2(EQ - AE) - (c - b).$$

Aus (46) folgt:

$$\lambda = \int_0^a \frac{a}{2}\,\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)(b^2+az)}},$$

also:

$$DP - AD - \lambda = -\int_0^z \frac{a}{2}\,\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)(b^2+az)}}$$

und:

$$-\int_0^z \frac{a}{2}\,\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)(b^2+az)}} + \int_u^a \frac{a}{2}\,\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(a-u)(b^2+au)}} = D_1P_1,$$

womit die Differenz zweier Hyperbelbögen durch eine Strecke dargestellt wird.

Diese Resultate stimmen wesentlich mit den G. Fagnanoschen überein. Am Ende seiner Abhandlung vom Jahre 1771 kündigt aber

Landen an, er habe einen allgemeinen Satz entdeckt, den er nächstens mitteilen werde. Die Mitteilung geschah jedoch erst 1775.

Setzt man:

$$z = a - \frac{t^2}{a},$$

so erhält man aus (46):

$$DP - AD = \int_0^t \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{c^2 - t^2}}\, dt, \tag{47}$$

ferner:

$$B_1 D_1 = -\int_a^z \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 + az}{z(a - z)}}\, dz = \int_0^t \sqrt{\frac{c^2 - t^2}{a^2 - t^2}}\, dt. \tag{48}$$

Betrachten wir nunmehr eine zweite Ellipse (Fig. 95) mit den Halbachsen:

$$\gamma = \frac{c + a}{2}, \quad \beta = \frac{c - a}{2},$$

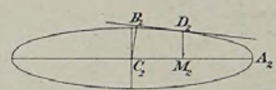

Fig. 95.

und bezeichnen mit A_2, B_2, ... die zu A_1, B_1, ... analogen, auf dieselbe bezüglichen Punkte. Der Punkt D_2 werde auf dieser Ellipse derartig gewählt, daß:

$$D_2 P_2 = t$$

sei; setzt man:

$$C_2 M_2 = \xi,$$

so ist:

$$B_2 D_2 = \frac{1}{\gamma}\int_0^\xi \sqrt{\frac{\gamma^4 - \alpha^2\xi^2}{\gamma^2 - \xi^2}}\, d\xi,$$

$$D_2 P_2 = t = \frac{\alpha^2 \xi}{\gamma}\sqrt{\frac{\gamma^2 - \xi^2}{\gamma^4 - \alpha^2\xi^2}},$$

wo $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$.

Wir wollen t als neue Integrationsveränderliche in das Integral $B_2 D_2$ einführen.[1]) Es ist:

$$\sqrt{\frac{\gamma^4 - \alpha^2\xi^2}{\gamma^2 - \xi^2}} = \frac{\alpha^2\xi}{\gamma t}, \quad \alpha^4\xi^4 - \alpha^2\gamma^2(\alpha^2 + t^2)\xi^2 + \gamma^6 t^2 = 0,$$

also:

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{\gamma^2}{2\alpha^2}\left[\alpha^2 + t^2 - \sqrt{\alpha^4 - 2(\beta^2 + \gamma^2)t^2 + t^4}\right] \\ &= \frac{\gamma^2}{2\alpha^2}\left[\alpha^2 + t^2 - \sqrt{[(\gamma + \beta)^2 - t^2][(\gamma - \beta)^2 - t^2]}\right] \\ &= \frac{\gamma^2}{2\alpha^2}\left[\alpha^2 + t^2 - \sqrt{(c^2 - t^2)(a^2 - t^2)}\right]. \end{aligned}$$

Differentiiert man, so ergibt sich:

$$\xi\, d\xi = \frac{\gamma^2 t\, dt}{4\alpha^2}\left[2 + \sqrt{\frac{c^2 - t^2}{a^2 - t^2}} + \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{c^2 - t^2}}\right],$$

folglich:

$$B_2 D_2 = \frac{1}{4}\int_0^t dt\left[2 + \sqrt{\frac{c^2 - t^2}{a^2 - t^2}} + \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{c^2 - t^2}}\right],$$

oder, wegen (47), (48):

$$4 B_2 D_2 = 2 D_2 P_2 + B_1 D_1 + DP - AD,$$

oder auch:

$$AD = B_1 D_1 - 4 B_2 D_2 + 2 D_2 P_2 + DP.$$

Ist also ein Hyperbelbogen vorgegeben, so kann man zwei zwei verschiedenen Ellipsen angehörige Bögen auffinden, deren Differenz sich von diesem Bogen nur um eine gerade Strecke unterscheidet. Oder kürzer: Ein Hyperbelbogen ist durch zwei Ellipsenbögen rektifizierbar.

Der Wert der Landenschen Entdeckung wurde zuerst von Legendre in zwei Abhandlungen aus dem Jahre 1786 ans Licht gesetzt. Bevor wir aber auf die Besprechung dieser wichtigen Abhandlungen kommen, müssen wir einige inzwischen erschienene Schriften erwähnen.

Dem Probleme, algebraische Kurven anzugeben, welche durch Kegelschnitte rektifizierbar sind, widmet Euler eine Reihe von Abhandlungen[1]), welche uns insofern interessieren, als sie die Bil-

[1]) Spätere Untersuchungen haben der Substitution:

$$t = \frac{\alpha^2\xi\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}}{\gamma\sqrt{\gamma^4 - \alpha^2\xi^2}},$$

die man üblich als „Landensche Transformation" bezeichnet, eine große Wichtigkeit erteilt. Setzt man:

$$\xi = \gamma\sin\varphi, \quad t = \sin\varphi_1, \quad \gamma = \frac{1}{1 - k'}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1 + k'}{1 - k'}},$$

so nimmt die Transformation die Form:

$$\sin\varphi_1 = \frac{(1 + k')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

an (Enneper, a. a. O., p. 352), wo:

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}, \quad k^2 = 1 - k'^2.$$

[1]) De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet (1776), Nova Acta Acad. Petrop. V, 1787

dung von auf elliptische Integrale zurückführbaren Integralen betreffen. Von dem vorgestellten Problem gibt Euler, unter der Voraussetzung, daß der betrachtete Kegelschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen 1, n ist, drei Lösungen.

1. Es muß sein:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{1-(1-n^2)v^2}{1-v^2}}\,dv,$$

wo x, y die Koordinaten eines Punktes der gesuchten Kurve bezeichnen, während v die Abszisse des entsprechenden Punktes der Ellipse ist. Man setze nun:

$$dx = \frac{p+q}{\sqrt{2(1+v)}}\,dv, \quad dy = \frac{p-q}{\sqrt{2(1-v)}}\,dv;$$

dann ist:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{p^2+q^2-2pqv}{1-v^2}}\,dv.$$

Nimmt man also für p, q zwei solche ganze rationale Funktionen von v, daß:

$$p^2 + q^2 - 2pqv = 1 - (1-n^2)v^2$$

ist, so sind die Differentialausdrücke dx, dy algebraisch integrierbar[1]),

---

(publ. 1789), p. 59—70. — De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet (1776), ebenda, p. 71 bis 85. — De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo indefinita arcui elliptico aequatur (1781), Mém. Acad. St. Pét. XI, 1830, p. 95 bis 99. — De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo arcui parabolico aequatur (1781), ebenda, p. 100—101. — De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat (1781), ebenda, p. 114—124. — Mit diesen Schriften hängt die von Fuß zusammen: De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet (1798), Nova Acta Acad. Petrop. XIV, 1797—1798 (publ. 1805), p. 111—138.

[1]) Ist nämlich:

$$p = \sum_h a_h v^h, \quad q = \sum_h b_h v^h,$$

und setzt man:

$$\sqrt{1+v} = t,$$

so folgt:

$$p + q = \sum (a_h + b_h)(t^2-1)^h, \quad \frac{dv}{\sqrt{1+v}} = 2\,dt,$$

also:

$$dx = \sqrt{2}\sum_h (a_h + b_h)(t^2-1)^h\,dt,$$

woraus sich durch Integration ein Polynom in t, also eine algebraische Funktion von v ergibt. Dasselbe findet für y statt.

und ihre Integrale liefern die Parametergleichungen der gesuchten Linie.

Einige einfachere Fälle sind folgende:

α) $$p = 1, \quad q = \alpha v.$$

Es ergibt sich $\alpha = 1 + n$, also:

$$x = \tfrac{1}{3}\sqrt{2(1+v)}\,[1 - 2n + (1+n)v],$$

$$y = \tfrac{1}{3}\sqrt{2(1-v)}\,[-1 + 2n + (1+n)v].$$

β) $$p = 1 + \beta v^2, \quad q = \alpha v.$$

Es muß sein:

$$\beta^2 - 2\alpha\beta = 0, \quad \alpha^2 + 2\beta - 2\alpha = -1 + n^2,$$

also:

$$\alpha = n - 1, \quad \beta = 2(n-1),$$

und:

$$x = \tfrac{1}{5}\sqrt{2(1+v)}\,[2n + 3 - (n-1)v + 2(n-1)v^2],$$

$$y = \tfrac{1}{5}\sqrt{2(1-v)}\,[-2n - 3 + (n-1)v - 2(n-1)v^2].$$

γ) $$p = 1 + \beta v^2, \quad q = \alpha v + \gamma v^3.$$

Es folgt hieraus:

$$\alpha = n + 3, \quad \beta = -2(n+1), \quad \gamma = -4(n+1).$$

δ) $$p = 1 + \beta v^2 + \delta v^4, \quad q = \alpha v + \gamma v^3.$$

Es muß sein:

$$\alpha^2 + 2\beta - 2\alpha = n^2 - 1, \quad \beta^2 + 2\delta + 2\alpha\gamma - 2\alpha\beta - 2\gamma = 0,$$
$$2\beta\delta + \gamma^2 - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma = 0, \quad \delta^2 - 2\gamma\delta = 0;$$

eine Lösung dieser Gleichungen ist:

$$\alpha = n - 3, \quad \beta = 4(n-2), \quad \gamma = -4(n-1), \quad \delta = -8(n-1).$$

2. Setzt man:

$$v = \sin\varphi,$$

also:

$$ds = \sqrt{\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}\,d\varphi,$$

so kann man annehmen:

$$dx = (\cos\varphi\cos\omega - n\sin\varphi\sin\omega)\,d\varphi,$$
$$dy = (\cos\varphi\sin\omega + n\sin\varphi\cos\omega)\,d\varphi,$$

wo ω eine auf passende Weise zu wählende Funktion von φ bezeichnet. Nimmt man $\omega = \lambda\varphi$, wo λ eine ganze von ± 1 verschiedene Zahl ist, so erhält man:

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{\lambda+1}\sin(\lambda+1)\varphi - \frac{n-1}{\lambda-1}\sin(\lambda-1)\varphi\right],$$

$$y = \frac{1}{2}\left[-\frac{n+1}{\lambda+1}\cos(\lambda+1)\varphi + \frac{n-1}{\lambda-1}\cos(\lambda-1)\varphi\right];$$

diese Gleichungen stellen eine algebraische Kurve dar.

3. Nehmen wir zunächst an, es sei $n > 1$. Wir können setzen:

$$dx = (\cos\lambda\varphi - m\sin\varphi\sin\lambda\varphi)d\varphi,\ dy = (\sin\lambda\varphi + m\sin\varphi\cos\lambda\varphi)d\varphi,$$

wo λ die obige Bedeutung beibehält, und $m^2 = n^2 - 1$ ist; hieraus folgt:

$$x = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda\varphi - \frac{m}{2(\lambda-1)}\sin(\lambda-1)\varphi + \frac{m}{2(\lambda+1)}\sin(\lambda+1)\varphi,$$

$$y = -\frac{1}{\lambda}\cos\lambda\varphi + \frac{m}{2(\lambda-1)}\cos(\lambda-1)\varphi - \frac{m}{2(\lambda+1)}\cos(\lambda+1)\varphi.$$

Ist dagegen $n < 1$, so setzen wir:

$$dx = (n\sin\lambda\varphi + m\cos\varphi\cos\lambda\varphi)d\varphi,$$

$$dy = (n\cos\lambda\varphi - m\cos\varphi\sin\lambda\varphi)d\varphi,$$

wo $m^2 = 1 - n^2$; es folgt dann:

$$x = -\frac{n}{\lambda}\cos\lambda\varphi + \frac{m}{\lambda-1}\sin(\lambda-1)\varphi + \frac{m}{\lambda+1}\sin(\lambda+1)\varphi,$$

$$y = \quad \frac{n}{\lambda}\sin\lambda\varphi + \frac{m}{\lambda-1}\cos(\lambda-1)\varphi + \frac{m}{\lambda+1}\cos(\lambda+1)\varphi.$$

Eine längere Abhandlung widmet der schon oben genannte Malfatti[1]) den elliptischen Integralen. Nachdem er die Ellipse und die Hyperbel durch Reihenintegration rektifiziert hat, bemerkt er, daß zwar das Bogenelement dieser Linien die Form:

$$\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}}\,dx$$

hat, daß aber nicht umgekehrt jedes Differential von dieser Form einen einzigen Kegelschnittbogen darstellt. Um die Differentiale von dieser Beschaffenheit zu untersuchen, schickt er einige Hilfssätze voraus, von denen die zwei ersten, wie Malfatti selbst anerkennt, V. Riccati angehören.

[1]) Delle formole differenziali la cui integrazione dipende dalla rettificazione delle sezioni coniche, Mem. Soc. It. II, P. II, 1784, p. 749 bis 786.

a) $$\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}}\,dx = \frac{(np-mq)x^2dx}{p\sqrt{(m+nx^2)(p+qx^2)}} + \frac{m\sqrt{p+qx^2}\,dx}{p\sqrt{m+nx^2}}$$

$$= \frac{(np-mq)\sqrt{-m+z^2}\,dz}{np\sqrt{np-mq+qz^2}} + \frac{m\sqrt{p+qx^2}}{p\sqrt{m+nx^2}}\,dx,$$

wo:

$$x^2 = \frac{-m+z^2}{n}.$$

b) Setzt man:

$$\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}} = u,$$

so erhält man durch partielle Integration:

$$\int\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}}\,dx = ux - \int x\,du = x\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}} - \int\sqrt{\frac{m-pu^2}{-n+qu^2}}\,du.$$

c) Setzt man:

$$\sqrt{\frac{p+qx^2}{m+nx^2}} = v,$$

so folgt:

$$\int\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}}\,dx = \frac{nx}{q}\sqrt{\frac{p+qx^2}{m+nx^2}} + \frac{m}{q}\int\sqrt{\frac{q-nv^2}{-p+mv^2}}\,dv.$$

Mit Hilfe dieser Sätze behandelt Malfatti die verschiedenen Fälle des Integrales $\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}}\,dx$, woraus eine Klassifikation entsteht, die der Eulerschen ganz ähnlich ist. Es ist aber zu beachten, daß die Eulerschen Schriften Malfatti wohl unbekannt waren; wenigstens tritt sein Name nicht unter den von Malfatti angeführten (Fagnano, Maclaurin, d'Alembert, Lexell, V. Riccati) auf.

Einen etwas verschiedenen Standpunkt nimmt Lagrange[1]) ein. Er geht von einer zu integrierenden rationalen Funktion von x und R aus, wo:

$$R = \sqrt{a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4},$$

und reduziert dieselbe zunächst auf die Form:

$$du = \frac{N\,dx}{R},$$

[1]) Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré, Mém. Acad. Turin II, 1784–1785, p. 218 bis 290; Oeuvres II, Paris 1868, p. 253–312.

wo N eine rationale Funktion von x ist. Kommt in R keine ungerade Potenz von x vor, und bringt man N auf die Form $T + Vx$, wo T, V rationale Funktionen von x^2 sind, so läßt sich $\frac{Vx\,dx}{R}$ durch elementare Funktionen integrieren, und es bleibt nur noch $\frac{T\,dx}{R}$. Im allgemeinen Falle setzen wir:

$$R^2 = f(m + nx + x^2)(m' + n'x + x^2);$$

es ergibt sich:

$$n = \frac{e + \sqrt{h}}{2f}, \quad n' = \frac{e - \sqrt{h}}{2f},$$

$$m = \frac{b - cn + en^2 - fn^3}{e - 2fn}, \quad m' = \frac{b - cn' + en'^2 - fn'^3}{e - 2fn'},$$

wo h die Gleichung:

$$h^3 - (3e^2 - 8cf)h^2 + (3e^4 - 16ce^2f + 16c^2f^2 + 16bef^2 - 64af^3)h$$
$$- (8bf^2 - 4cef + e^3)^2 = 0$$

erfüllen muß, welche offenbar stets eine reelle nicht negative Wurzel besitzt. Setzt man demnach:

(49) $$f\frac{m' + n'x + x^2}{m + nx + x^2} = y^2,$$

so ergibt sich:

$$R = (m + nx + x^2)y,$$

und das Differential nimmt die Form:

$$du = \frac{N\,dx}{(m + nx + x^2)y}$$

an. Es ist aber wegen (49):

$$2y\,dy = \frac{dx}{m + nx + x^2}[f(2x + n') - y^2(2x + n)],$$

oder:

$$\frac{dx}{(m + nx + x^2)y} = \frac{2\,dy}{2x(f - y^2) + (n'f - ny^2)};$$

es folgt andererseits wiederum aus (49):

$$2x(f - y^2) + (n'f - ny^2) = \sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4},$$

wo:

$$\alpha = f^2(n'^2 - 4m'), \quad \beta = -2f(nn' - 2m - 2m'), \quad \gamma = n^2 - 4m,$$

also:

$$du = \frac{2N\,dy}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}}.$$

Da:

$$x = \frac{ny^2 - n'f + \sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}}{2(f - y^2)}$$

ist, so erhält man:

$$N = \varphi(y^2) + \sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4} \cdot \psi(y^2),$$

wo $\varphi(y^2)$, $\psi(y^2)$ rationale Funktionen von y^2 bezeichnen, so daß du, von einem rationalen Differential abgesehen, in:

$$dv = \frac{Q\,dy}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}}$$

übergeht, wo Q eine rationale Funktion von y^2 ist.

Um dieses Differential behandeln zu können, muß man annehmen, daß $\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4$ in zwei reelle Binome zerlegbar ist, daß nämlich $\beta^2 > 4\alpha\gamma$. Ist dies nicht der Fall, so setze man:

$$z = \frac{y}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}};$$

man erhält dann, nach Vernachlässigung eines rationalen Differentiales, einen Ausdruck von der Form:

$$\frac{L\,dz}{\sqrt{1 - 2\beta z^2 + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)z^4}}$$

oder:

$$\frac{L\,dz}{\sqrt{1 + \beta' z^2 + \gamma' z^4}},$$

wo:

$$\beta'^2 - 4\gamma' = 16\alpha\gamma > 0$$

ist, da in dem betrachteten Falle $4\alpha\gamma$ positiv sein muß. Wir können also in allen Fällen setzen:

$$\frac{T\,dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} = \frac{T\,dx}{\sqrt{(m + nx^2)(p + qx^2)}},$$

wobei T eine rationale Funktion von x^2 bezeichnet und m, n, p, q reell sind.

Ist $n = 0$ oder $q = 0$ oder $\frac{q}{p} = \frac{n}{m}$, so ist das Integral auf elementare Weise berechenbar; bestehen diese Bedingungen nur annäherungsweise, so kann man einen angenäherten Wert des Integrales durch Reihenentwicklung erhalten. Es ist aber immer möglich, das vorgegebene Differential in ein anderes überzuführen, welches die verlangten Bedingungen mit größerer Annäherung erfüllt. Nehmen wir an, es sei $\left(\frac{n}{m}\right)^2 \geq \left(\frac{q}{p}\right)^2$, und setzen wir:

$$y = \frac{x}{m}\sqrt{\frac{m + nx^2}{p + qx^2}};$$

wir erhalten hieraus:

$$x^2 = \frac{1}{2n}\left[qm^2y^2 - m \pm m\sqrt{1 + 2(2np - mq)y^2 + m^2q^2y^4}\right],$$

und folglich, wenn L, M rationale Funktionen von y^2 bezeichnen:

$$\frac{P\,dx}{\sqrt{(m + nx^2)(p + qx^2)}} = L\,dy + \frac{M\,dy}{\sqrt{1 + 2(2np - mq)y^2 + m^2q^2y^4}}.$$

Das biquadratische Polynom ist, unter der Voraussetzung:

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 \geq \left(\frac{q}{p}\right)^2,$$

in zwei reelle Faktoren:

$$1 + \left[2np - mq \pm 2\sqrt{np(np - mq)}\right]y^2$$

zerlegbar; ferner sind die beiden in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke gleichbezeichnet, so daß man setzen kann:

$$2np - mq \pm 2\sqrt{np(np - mq)} = \pm r^2,$$
$$2np - mq \mp 2\sqrt{np(np - mq)} = \pm s^2,$$

wobei die oberen Vorzeichen für $np > 0$, die unteren für $np < 0$ gelten, r und s positiv sind und $r > s$ ist. Das zu behandelnde Differential ist also auf:

$$\frac{M\,dy}{\sqrt{(1 \pm r^2y^2)(1 \pm s^2y^2)}}$$

reduziert. Wendet man auf dasselbe das obige Verfahren an, so erhält man ein neues Differential:

$$\frac{M_1\,dy_1}{\sqrt{(1 \pm r_1^2y_1^2)(1 \pm s_1^2y_1^2)}},$$

wo:

$$r_1 = r + \sqrt{r^2 - s^2} > r, \quad s_1 = r - \sqrt{r^2 - s^2} < s$$

ist. Auf gleiche Weise kann man fortfahren, bis s so klein geworden ist, daß die Annäherungsformeln anwendbar sind.

Wie oben bemerkt, versuchte Euler die Ellipsenbögen in die Rechnungen als ein Analogon zu den Kreisbögen einzuführen. Legendre[1]) sprach auch den Wunsch aus, daß man Tafeln für Ellipsen-

[1]) Mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse, Hist. Acad.

bögen verfertigen möge; und zu diesem Zwecke versuchte er, Reihenentwicklungen zu liefern, welche dazu geeignet wären, die Berechnung solcher Bögen zu erleichtern.

Sind (Fig. 96):

$$CA = 1, \quad CB = b = \sqrt{1 - c^2}$$

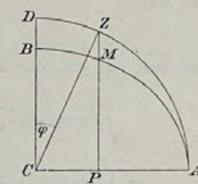

Fig. 96.

die Halbachsen der Ellipse, und ist:

$$DCZ = \varphi, \quad ACZ = \frac{\pi}{2} - \varphi = \psi,$$

$$CP = x = \sin\varphi, \quad PM = y = b\cos\varphi,$$

so folgt:

$$BM = E(c, \varphi) = \int_0^{\varphi} d\varphi\sqrt{1 - c^2\sin\varphi^2},$$

$$AM = F(c, \psi) = \int_0^{\psi} d\psi\sqrt{1 - c^2\cos\psi^2}.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich leicht die Werte von $E(c, \varphi)$, $F(c, \psi)$ unter der Form von konvergenten Reihen, wenn c nicht zu nahe an 1 ist; im entgegengesetzten Falle kann man den Fagnanoschen Satz gebrauchen.

Aus den obigen Formeln folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}E(c, \varphi) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1 + \frac{c^2}{1 - c^2}\cos\varphi^2}\,d\varphi,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}F(c, \psi) = \int_0^{\psi}\sqrt{1 + \frac{c^2}{1 - c^2}\sin\psi^2}\,d\psi.$$

Auf diese Formen sind:

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{f + g\sin\varphi^2}\,d\varphi, \quad \int_0^{\psi}\sqrt{f + g\cos\psi^2}\,d\psi$$

zurückführbar; dasselbe läßt sich aber nicht von:

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{g\cos\varphi^2 - f}\,d\varphi, \quad \int_0^{\varphi}\sqrt{f - g\sin\varphi^2}\,d\varphi$$

Paris 1786 (publ. 1788), p. 616—643. — Second mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse, et sur la comparaison de ces arcs, ebenda, p. 644—683.

für $g > f$ behaupten. Übt man auf diese letzten Integrale die Substitution:

$$\sin\varphi = \sin\alpha \sin\omega$$

aus, wo:

$$\alpha = \arccos\sqrt{\frac{f}{g}},$$

und setzt man $\sin\alpha = c$, so folgt:

$$\int_0^\varphi \sqrt{g\cos\varphi^2 - f}\,d\varphi = \int_0^\varphi \sqrt{g(\cos\varphi^2 - \cos\alpha^2)}\,d\varphi$$

$$= \int_0^\varphi \sqrt{g(\sin\alpha^2 - \sin\varphi^2)}\,d\varphi = c^2\sqrt{g}\int_0^\omega \frac{\cos\omega^2 d\omega^2}{\sqrt{1 - c^2\sin\omega^2}}$$

$$= c^2\sqrt{g}\left[\int_0^\omega \sqrt{1 - c^2\sin\omega^2}\,d\omega - (1 - c^2)\int_0^\omega \frac{\sin\omega^2 d\omega}{\sqrt{1 - c^2\sin\omega^2}}\right]$$

$$= \sqrt{g}\left[c^2 E(c,\omega) + c(1 - c^2)\frac{\partial E(c,\omega)}{\partial c}\right].$$

Die Integrale:

$$\int \sin\varphi^{2i}\cos\varphi^{2k}\Delta\varphi^{2m+1}d\varphi,$$

wo:

$$\Delta\varphi^2 = 1 - c^2\sin\varphi^2,$$

sind ebenfalls durch Ellipsenbögen ausdrückbar; sie lassen sich nämlich auf $\int\Delta\varphi^{2m+1}d\varphi$ zurückführen, welches für jedes positive oder negative ganzzahlige m durch E und $\frac{\partial E}{\partial c}$ ausdrückbar ist.

Die Rektifikation der Hyperbel kann man von derjenigen der Ellipse abhängig machen. — Sind (Fig. 97):

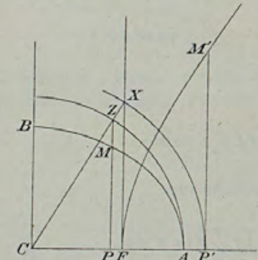

Fig. 97.

$$CA = 1, \quad CB = b$$

die Halbachsen einer Ellipse, und:

$$CF = c = \sqrt{1 - b^2}, \quad CB = b$$

diejenigen einer Hyperbel, wobei die beiden Kurven denselben Mittelpunkt und dieselbe Fokalachse haben; ist ferner CP' die Abszisse eines Hyperbelpunktes M', X der Schnittpunkt des um C mit dem Radius CP' gezogenen Kreises mit der Scheiteltangente der Hyberbel, Z der Schnittpunkt von

CX mit dem um C mit dem Radius CA gezogenen Kreise, M der Schnittpunkt der zu CA senkrechten Geraden ZP mit der Ellipse, und setzt man $ACZ = \varphi$, so ergibt sich leicht:

$$FM' = E = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}\sqrt{1 - c^2\cos\varphi^2},$$

$$AM = F = \int_0^\varphi \sqrt{1 - c^2\cos\varphi^2}\,d\varphi,$$

und hieraus:

$$E = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1 - c^2\cos\varphi^2} - c^2F - b^2c\frac{\partial F}{\partial c}.$$

Das Integral:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{A + Bz^2 + Cz^4}}$$

läßt sich in allen Fällen auf E, F und deren Ableitungen nach c zurückführen; dasselbe folgt von:

$$\int\frac{P\,dz}{\sqrt{A + Bz^2 + Cz^4}}, \quad \int\frac{dz}{\sqrt{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4}}.$$

Erst nachdem die erste Legendresche Abhandlung, deren Inhalt wir soeben wiedergegeben haben, der Pariser Akademie vorgelesen worden war, erfuhr ihr Verfasser, daß Landen den den Hyperbelbogen betreffenden Satz aufgestellt hatte. Er setzte sich dann vor, zu beweisen, daß sich der Landensche Satz aus seinen eigenen Resultaten herleiten läßt, und daß man auch eine unendliche Folge von Ellipsen auffinden kann, deren Rektifikation von derjenigen von zwei derselben abhängig ist.

Es sei neben der schon oben betrachteten Ellipse noch eine zweite vorhanden, deren Elemente c', b', F' usw. sein mögen, und setze man:

$$\frac{c'^2\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sqrt{1 - c'^2\sin\varphi'^2}} = (1 - b')\sin\varphi,$$

wo φ mit dem früheren $\frac{\pi}{2} - \varphi$ übereinstimmt; das ist nichts anderes als die Landensche Transformation. Es folgt:

$$\sin\varphi'^2 = \frac{1}{2}[1 + c\sin\varphi^2 \pm \cos\varphi\Delta\varphi],$$

wo $c = \frac{1 - b'}{1 + b'}$; ferner:

$$dF' = \sqrt{1 - c'^2\sin\varphi'^2}\,d\varphi' = \frac{c'^2\sin\varphi'\cos\varphi'\,d\varphi'}{(1 - b')\sin\varphi} = \frac{2\sin\varphi\ \cos\varphi'\,d\varphi'}{(1 + c)\sin\varphi}.$$

Nimmt man aber in der vorletzten Gleichung das untere Vorzeichen und differentiiert, so ergibt sich:

$$4 \sin\varphi' \cos\varphi' d\varphi' = 2c \sin\varphi \cos\varphi d\varphi + \sin\varphi \Delta\varphi d\varphi + \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi^2 d\varphi}{\Delta\varphi};$$

es ist also:

$$2(1+c)dF' = 2c\cos\varphi d\varphi + \Delta\varphi d\varphi + \frac{c^2\cos\varphi^2 d\varphi}{\Delta\varphi}$$
$$= 2c\cos\varphi d\varphi + 2\Delta\varphi d\varphi - \frac{b^2 d\varphi}{\Delta\varphi},$$

und man erhält hieraus durch Integration:

$$(50) \qquad 2(1+c)F' = 2c\sin\varphi + 2F - b^2\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$
$$= 2c\sin\varphi + 2F - b^2\left(F - c\frac{\partial F}{\partial c}\right)$$
$$= 2c\sin\varphi + (1+c^2)F + b^2 c\frac{\partial F}{\partial c}.$$

Der Bogen der Ellipse mit der Exzentrizität c' wird also durch den Bogen der Ellipse mit der Exzentrizität c und dessen Ableitung nach c ausgedrückt, wobei:

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}.$$

Es folgt aus (50) durch eine leichte Rechnung:

$$2(1+c')F'' = (2+b')F' - \frac{1}{2}b'(1+b')F - \frac{1}{2}b'(1-b')\sin\varphi$$
$$+ 2c'\sin\varphi',$$

wo F'' den Bogen einer dritten Ellipse mit der Exzentrizität:

$$c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}$$

bezeichnet. Fährt man auf gleiche Weise fort, so kann man eine unbeschränkte Folge von Ellipsen erhalten, deren Rektifikation von derjenigen von zwei derselben abhängig ist. Da $c' > \sqrt{c} > c$, während $\varphi' < \varphi$, so bilden die Exzentrizitäten eine zunehmende, die Amplituden dagegen eine abnehmende Folge.

Bevor wir die späteren Untersuchungen Legendres besprechen, müssen wir einige Worte einer hierher gehörigen Schrift des schon erwähnten Pietro Ferroni[1]) widmen. Um das Integral:

$$(51) \qquad \int\sqrt{\frac{f+gx^2}{h-kx^2}}\,dx$$

auf einen Ellipsenbogen zurückzuführen, befolgt er einen sehr langen

[1]) De calculo integralium exercitatio mathematica, Florenz 1792.

Weg. Er bedient sich dazu des folgenden Pascalschen Satzes[1]): Ist (Fig. 98) NA der Radius der Basis, XN die Höhe und XA die Erzeugende eines schiefen Zylinders, beschreibt man einen Kreis um N mit dem Radius NA und einen zweiten Kreis auf NA als Durchmesser, und sind G, S zwei Punkte der beiden Kreise, deren Verbin-

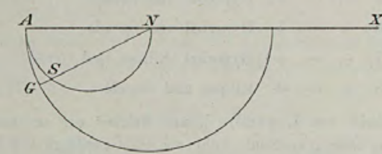

Fig. 98.

dungslinie durch N geht, so ist die Oberfläche des von den durch A und G gehenden Erzeugenden begrenzten Zylinderteiles gleich dem Vierfachen der Summe aller von X nach den Punkten des Bogens AS gehenden Strecken (d. i. des Integrales des Produktes einer solchen Strecke mit dem Elemente des Bogens AS). Diese Summe, oder dieses Integral, läßt sich auf die Form (51) bringen; da andererseits die betrachtete Zylinderfläche von dem Produkt der Erzeugenden mit einem Bogen des Orthogonalschnittes gegeben wird, und dieser Schnitt eine Ellipse ist, so ergibt sich von selbst das verlangte Resultat.

Ferroni zeigt auch, daß man ein Integral von der Form:

$$\int\sqrt{\frac{f-gx^2}{h-kx^2}}\,dx$$

erhält, wenn man eine Ellipse oder eine Hyperbel auf die Fokalachse bezieht; daß man dagegen:

$$\int\sqrt{\frac{f+gx^2}{h+kx^2}}\,dx$$

erhält, wenn man die Hyperbel auf die zweite Achse bezieht.

Er behandelt ferner das allgemeine Integral:

$$\int\frac{\sqrt{z}\,dz}{\sqrt{\pm z^2 \pm fz \pm b^2}},$$

wo z positiv ist und die Wurzeln des Trinoms als reell vorausgesetzt werden, und stellt die folgende Tafel der möglichen Fälle auf:

[1]) Pascal, Oeuvres V, La Haye 1779, p. 407. Der Pascalsche Satz ist etwas allgemeiner.

1	−	−	−	unmöglich
2	−	+	−	Ellipse
3	+	+	−	Hyperbel
4	+	−	−	Hyperbel
5	−	+	+	Hyperbel und Gerade
6	−	−	+	Hyperbel und Gerade
7	+	−	+	Hyperbel, Ellipse und Gerade
8	+	+	+	Ellipse und Gerade.

Die Schrift von Legendre[1]), mit welcher wir uns nunmehr zu beschäftigen haben, verdient wohl als die Grundlage der systematischen Behandlung der elliptischen Integrale bezeichnet zu werden; und vielleicht hätte die Theorie dieser Funktionen am Ende des 18. Jahrhunderts einen rascheren Fortschritt aufgezeigt, wenn nicht die Legendreschen Untersuchungen aus äußeren Umständen so gut wie unbekannt geblieben wären, bis sie zwanzig Jahre später durch die Exercices de calcul intégral verbreitet wurden.

Manche analytische Fragen, sagt Legendre, die sich nicht durch Ellipsenbögen auflösen lassen, führen zu Integralen von der Form $\int \frac{P\,dx}{R}$, wo P eine rationale Funktion von x, R die Quadratwurzel eines Polynoms vierten Grades bezeichnet. Man kann aber nachweisen, daß solche Integrale auf drei Typen reduzierbar sind, deren zwei ersten sich durch Ellipsenbögen ausdrücken lassen, während der dritte von verwickelterer Art ist; daß aber die zwei ersten Typen voneinander zu unterscheiden sind, hängt davon ab, daß der erste auf den zweiten zurückführbar ist, während das Umgekehrte nicht stattfindet.

[1]) Mémoire sur les transcendantes elliptiques, où l'on donne des méthodes faciles pour comparer et évaluer ces transcendantes qui comprennent les arcs d'ellipse, et qui se rencontrent fréquemment dans les applications du calcul intégral, Paris, an II (1793). — Diese Abhandlung, welche der Pariser Akademie im April 1792 vorgelesen wurde, erschien im darauffolgenden Jahre als selbständige Schrift wegen der inzwischen geschehenen Abschaffung der Akademie. Sie ist selbst in Frankreich sehr selten, und wir verdanken es der Freundlichkeit von Prof. A. Boulanger zu Lille, der die Gefälligkeit hatte, einen ausführlichen Auszug nach einem in der Bibliothek de la Sorbonne existierenden Exemplar für uns zu liefern, daß es uns möglich ist, über diese wichtige Schrift zu berichten. Das Wesentlichste des Inhaltes des Mémoire wurde von Legendre in seine Exercices de calcul intégral (T. I, Paris 1811) einverleibt.

Die Reduktion des allgemeinen Integrales auf die erwähnten drei Typen geschieht folgendermaßen.

Man kann vor allem R^2 in ein anderes nur gerade Potenzen der Veränderlichen enthaltendes Polynom von gleicher Ordnung durch eine lineare Substitution umwandeln; wir können also setzen:

$$R^2 = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4.$$

Man kann ferner voraussetzen, P sei eine rationale Funktion von x^2; zerlegt man nämlich P in die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion:

$$P = P_g + P_u,$$

so ist $\int \frac{P_u\,dx}{R}$ bekanntlich ein elementares Integral. Es existiert dann stets eine Substitution, die das Integral in $\int \frac{Q\,d\varphi}{\Delta\varphi}$ überführt, wo $\Delta\varphi = \sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}$, Q eine rationale Funktion von $\sin\varphi^2$ bezeichnet, und die Zahl c zwischen 0 und 1 liegt.

Ist nun Q zunächst eine ganze Funktion von $\sin\varphi^2$:

$$Q = \sum_{h=0}^{k} a_h \sin\varphi^{2h},$$

und setzt man:

$$\int \frac{\sin\varphi^{2h}\,d\varphi}{\Delta\varphi} = Z_h,$$

so folgt:

$$\int \frac{Q\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \sum_{h=0}^{k} a_h Z_h;$$

es ist aber identisch:

$$\Delta\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi^{2h-3} = (2h-3)Z_{h-2} - (1+c^2)(2h-2)Z_{h-1} + c^2(2h-1)Z_h,$$

wonach sämtliche Z_h durch Z_0 und Z_1 ausdrückbar sind. — Ist zweitens Q gebrochen, so kommen auch Teilintegrale von der Form:

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)^k \Delta\varphi} = \Pi_k$$

vor; setzt man aber augenblicklich $\sin\varphi = x$, so folgt:

$$\Pi_k = \int \frac{dx}{(1+nx^2)^k \sqrt{1 - (1+c^2)x^2 + c^2x^4}},$$

ein Integral, für welches die folgende Rekursionsformel gilt:

$$\frac{x\sqrt{1-(1+c^2)x^2+c^2x^4}}{(1+nx^2)^{k-1}} = (2k-2)\left(1+\frac{1+c^2}{n}+\frac{c^2}{n^2}\right)\Pi_k$$

$$-(2k-3)\left(1+2\frac{1+c^2}{n}+3\frac{c^2}{n^2}\right)\Pi_{k-1}+(2k-4)\left(\frac{1+c^2}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right)\Pi_{k-2}$$

$$-(2k-5)\frac{c^2}{n^2}\Pi_{k-3},$$

wonach sämtliche Π_k durch Π_1, Π_0 und Π_{-1}, oder, was dasselbe ist, durch Π_1, Z_0, Z_1 ausdrückbar sind. — Die erhaltenen Grundtypen subsumieren sich unter die Form:

$$H=\int\frac{(A+B\sin\varphi^2)\,d\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta\varphi}.$$

Legendre unterscheidet aber drei Gattungen von elliptischen Transzendenten, nämlich:

1. $$F=\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

2. $$G=\int(A+B\sin\varphi^2)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi};$$

besondere Fälle dieser Gattung sind der Ellipsenbogen:

$$E=\int\Delta\varphi\,d\varphi$$

und der Hyperbelbogen:

$$\Upsilon=\Delta\varphi\cdot\operatorname{tang}\varphi-c^2\int\frac{\cos\varphi^2 d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Zwischen F und E besteht die Beziehung:

$$F=E-c\frac{\partial E}{\partial c}.$$

3. $$H=\int\frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Für die Integrale erster Gattung hat man:

(52) $$F(\varphi)\pm F(\psi)=F(\mu),$$

wenn:

$$\cos\varphi\cos\psi\mp\sin\varphi\sin\psi\Delta\mu=\cos\mu$$

ist; hieraus ergeben sich die Additionsformeln:

$$\sin\mu=\frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta\psi\pm\sin\psi\cos\varphi\Delta\varphi}{1-c^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

$$\cos\mu=\frac{\cos\varphi\cos\psi\mp\sin\varphi\sin\psi\Delta\varphi\Delta\psi}{1-c^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

$$\Delta\mu=\frac{\Delta\varphi\Delta\psi\mp c^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-c^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

und als besonderer Fall die Multiplikationsformeln, aus welchen sich die Teilungsformeln ableiten lassen. Das n-Teilungsproblem hängt von einer algebraischen Gleichung der n^2-ten Ordnung ab, die sich auf eine der $\frac{n^2-1}{2}$-ten Ordnung reduziert, wenn n ungerade und $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ist.

Besteht zwischen φ, ψ und μ die Beziehung:

$$F(\varphi)+F(\psi)=F(\mu),$$

so folgt:

(53) $$E(\varphi)+E(\psi)-E(\mu)=c^2\sin\varphi\sin\psi\sin\mu,$$

(54) $$\Pi(\varphi)+\Pi(\psi)-\Pi(\mu)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arc\,tg}\frac{n\sqrt{\alpha}\sin\varphi\sin\psi\sin\mu}{1+n-n\cos\varphi\cos\psi\cos\mu},$$

wo:

$$\Pi(\varphi)=\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta\varphi},\quad \alpha=(1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right)$$

ist.[1])

In seiner zweiten Abhandlung von 1786 wurde Legendre dazu geführt, zwei Ellipsenbögen untereinander zu vergleichen, deren Exzentrizitäten c, c' und deren Argumente φ, φ' in den Beziehungen:

$$c'=\frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad \frac{c'^2\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sqrt{1-c'^2\sin\varphi'^2}}=\left(c-\sqrt{1-c'^2}\right)\sin\varphi$$

zueinander stehen. Diese letzte Gleichung läßt sich einfacher schreiben:

$$\sin(2\varphi'-\varphi)=c\sin\varphi.$$

Hier dehnt Legendre diese Vergleichung auf Integrale aller drei Gattungen aus. Es ergibt sich zunächst:

$$F(c',\varphi')=\frac{1+c}{2}F(c,\varphi);$$

wendet man diese Transformation wiederholt an, so folgt:

$$c''=\frac{2\sqrt{c'}}{1+c'},\quad c'''=\frac{2\sqrt{c''}}{1+c''},\ \cdots;$$

$$F(c'',\varphi'')=\frac{1+c'}{2}F(c',\varphi'),\quad F(c''',\varphi''')=\frac{1+c''}{2}F(c'',\varphi''),\ \cdots.$$

---

[1]) Die Formeln (52), (53), (54) gehören eigentlich der Abteilung A dieses Kapitels an; wir haben dieselben aber hier des Zusammenhangs wegen angeführt.

Wie schon bemerkt, bilden $c, c', c'', \ldots$ eine zu-, $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ eine abnehmende Folge. Man kann aber auch die Folge nach der umgekehrten Seite hin fortsetzen. Ist nämlich:

$$c = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}, \quad c_1 = \frac{2\sqrt{c_2}}{1+c_2}, \ldots,$$

$$\sin(2\varphi - \varphi_1) = c_1 \sin\varphi_1, \quad \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) = c_2 \sin\varphi_2, \cdots$$

(woraus sich ergibt:

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = \sqrt{1-c^2}\operatorname{tang}\varphi, \quad \operatorname{tang}(\varphi_2 - \varphi_1) = \sqrt{1-c_1{}^2}\operatorname{tang}\varphi_1, \cdots),$$

so hat man:

$$F(c, \varphi) = \frac{1+c_1}{2} F(c_1, \varphi_1), \quad F(c_1, \varphi_1) = \frac{1+c_2}{2} F(c_2, \varphi_2), \cdots;$$

$c, c_1, c_2, \ldots$ ist eine ab-, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine zunehmende Folge. Ist dann c_n so klein, daß es vernachlässigt werden darf, so ist annäherungsweise:

$$F(c_n, \varphi_n) = \varphi_n;$$

bezeichnet also Φ den Grenzwert, welchem sich die Folge $\varphi, \frac{\varphi_1}{2}, \frac{\varphi_2}{2^2}, \cdots$ unbeschränkt nähert, so ist:

$$F(c, \varphi) = \Phi(1+c_1)(1+c_2)\cdots = \Phi\frac{2\sqrt{c_1}}{c}\,\frac{2\sqrt{c_2}}{c_1}\cdots = K\Phi.$$

Ist insbesondere $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so folgt:

$$\frac{\varphi_1}{2} = \frac{\varphi_2}{2^2} = \cdots = \frac{\pi}{2},$$

also:

$$F\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = F^1(c) = K\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man ferner:

$$G_1 = \int (A_1 + B_1 \sin\varphi_1{}^2)\frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}, \quad \Delta_1\varphi_1 = \sqrt{1 - c_1{}^2 \sin\varphi_1{}^2},$$

so hat man:

$$G = \frac{1+c_1}{2}\left(G_1 - \frac{B}{2}\sin\varphi_1\right), \quad A_1 = A + \frac{1}{2}B, \quad B_1 = \frac{1}{2}Bc_1.$$

Es ergibt sich analog:

$$G_1 = \frac{1+c_2}{2}\left(G_2 - \frac{B_1}{2}\sin\varphi_2\right), \quad A_2 = A_1 + \frac{1}{2}B_1, \quad B_2 = \frac{1}{2}B_1c_2;$$

$$G_2 = \frac{1+c_3}{2}\left(G_3 - \frac{B_2}{2}\sin\varphi_3\right), \quad A_3 = A_2 + \frac{1}{2}B_2, \quad B_3 = \frac{1}{2}B_2c_3;$$

. . . .

Es ist zu bemerken, daß die Folge $B, B_1, B_2, \ldots$ rascher als die Folge $c, c_1, c_2, \ldots$ abnimmt. Können B_n, c_n vernachlässigt werden, so ist:

$$G_n = A_n\varphi_n = 2^n A_n \Phi,$$

wo:

$$A_n = A + \frac{B}{2}\left(1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_1c_2}{4} + \cdots + \frac{c_1c_2\cdots c_{n-1}}{2^{n-1}}\right);$$

bezeichnet also L den Grenzwert von A_n, so folgt:

$$G = KL - \frac{B}{c}\left(\frac{\sqrt{c_1}}{2}\sin\varphi_1 + \frac{\sqrt{c_1c_2}}{2^2}\sin\varphi_2 + \frac{\sqrt{c_1c_2c_3}}{2^3}\sin\varphi_3 + \cdots\right).$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ hat man $G = KL\frac{\pi}{2}$.

Setzt man $A = 1$, $B = -c^2$, so stellt G den Ellipsenbogen E dar; es ist also:

$$E(c, \varphi) = KL\Phi + \frac{c\sqrt{c_1}}{2}\sin\varphi_1 + \frac{c\sqrt{c_1c_2}}{2^2}\sin\varphi_2 + \cdots,$$

$$E\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = E^1(c) = KL\frac{\pi}{2}.$$

Die Integrale dritter Gattung H lassen sich analog behandeln; man kann aber auch auf dieselben eine oder die andere der beiden Substitutionen:

$$\sin\varphi' = \frac{(1+c)\sin\varphi}{1+c\sin\varphi^2}, \quad \sin\varphi^2 = \frac{1-\cos\psi}{1+\Delta\psi}$$

anwenden.

Die Integrale:

$$\int\frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4+\delta x^6}}, \quad \int P\,dx(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)^{\pm\frac{1}{4}},$$

$$\int P\,dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^{\pm\frac{1}{3}},$$

$$\int\frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\gamma x^4+\beta x^5+\alpha x^6}},$$

$$\int\frac{P\,dx}{\sqrt{\beta+\gamma x^2+\delta x^4+\gamma x^6+\beta x^8}},$$

wo P eine rationale Funktion von x bezeichnet, lassen sich auf elliptische Transzendenten zurückführen; dasselbe gilt von dem Eulerschen Integral erster Art:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-q}{n}}},$$

wenn $n = 3, 4, 6, 8, 12$.

C. Vermischte Fragen.

Unter diesem Titel wollen wir einige wenige Schriften kurz besprechen, die sich keinem der beiden oben als Leitfaden angenommenen Hauptprobleme anschließen.

Vor allem erwähnen wir zwei Abhandlungen Lagranges mechanischen Inhalts[1]), wo besondere elliptische Integrale berechnet werden, welche in elementare Integrale dadurch übergehen, daß entweder das Polynom vierter Ordnung einen zweifachen Faktor besitzt, oder eine unter dem Integrationszeichen auftretende Konstante sehr klein ist.

Hierher gehört auch eine Schrift Eulers[2]), welche den Zweck hat, eine stark konvergierende Reihe für den Umfang der Ellipse aufzustellen (s. o. S. 466) Ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Ellipse, so setzt Euler:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{1+z}{2}, \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{1-z}{2},$$

ferner:

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = n.$$

Es ist dann, wenn s die Ellipsenquadrante bezeichnet:

$$s = \frac{c}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-nz}{1-z^2}}\, dz = \frac{c}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \left(1 - \frac{1}{2} nz - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} n^2 z^2 - \cdots\right)$$

$$= \frac{c}{2\sqrt{2}} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{2} n \int_{-1}^{+1} \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} n^2 \int_{-1}^{+1} \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} - \cdots\right].$$

---

[1]) Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes, Misc. Taur. IV, 1766—1769; Oeuvres II, Paris 1868, p. 67—121. — Sur la force des ressorts pliés, Mém. Acad. Berlin XXV, 1771; Oeuvres III, Paris 1869, p. 77—110.

[2]) Nova series infinita maxime convergens perimetrum ellipsis exprimens, Novi Comm. Acad. Petrop. XVIII, 1773 (publ. 1774), p. 71—84. — Weitere Reihenentwicklungen für elliptische Integrale finden sich u. a. in: Lambert, Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung III, Berlin 1772, p. 35—55; Ivory, A new series for the rectification of the ellipsis; together with observations on the evolution of the formula $(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)^n$ (1796), Trans. R. Soc. Edinburgh IV, 1798, p. 177—190; Trembley, Observations sur l'attraction et l'équilibre des sphéroides, Hist. Acad. Berlin 1799—1800 (publ. 1803), p. 68 bis 109.

Es ist aber:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{z^{\lambda+2}\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\lambda+1}{\lambda+2} \int_{-1}^{+1} \frac{z^{\lambda}\,dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

also:

$$s = \frac{c\pi}{2\sqrt{2}} \Big[1 - \frac{1}{2}\,\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} n^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} n^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} n^6 - \cdots\Big],$$

eine Reihe, welche sehr stark konvergiert.

Wichtiger ist die Abhandlung Eulers über die elastische Kurve[1]) (s. o. S. 505 f.):

$$y = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

eine Linie, welche schon früher von Jakob Bernoulli und von Maclaurin[2]) betrachtet worden war. Ist (Fig. 99):

$$CP = x, \quad PM = CQ = y,$$

so ist die der Abszisse $CB = 1$ entsprechende Ordinate:

$$CD = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = a.$$

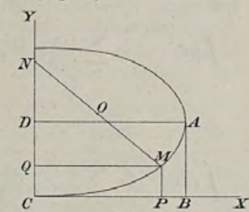

Fig. 99.

Die Kurve ist symmetrisch in bezug auf die durch D zur x-Achse parallel gezogene Gerade DA. Man findet ferner, wenn MN die Normale in M, N ihren Schnittpunkt mit der y-Achse, O den Krümmungsmittelpunkt bezeichnet:

$$CM = s = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad CA = c = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

$$MN = \frac{1}{x}, \quad MO = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} MN.$$

---

[1]) De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione

$$y = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

contentae, Acta Acad. Petrop. 1782, P. II (publ. 1786), p. 34—61. [2]) Siehe diese Vorl., III[2], S. 221; Enneper, a. a. O., p. 525.

Setzt man $P = ys$, so folgt:

$$P = \int y\,ds + \int s\,dy, \quad ac = \left[\int y\,ds + \int s\,dy\right]_{x=0}^{x=1};$$

es ist aber:

$$y = \int_0^x \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdots 2r}\, x^{4r+2}\,dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdots 2r}\,\frac{x^{4r+3}}{4r+3},$$

$$s = \int_0^x \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdots 2r}\, x^{4r}\,dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdots 2r}\,\frac{x^{4r+1}}{4r+1},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \frac{x^{4r+3}\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{4r}{4r+2}\int_0^1 \frac{x^{4r-1}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{4r(4r-4)\cdots 8\cdot 4}{(4r+2)(4r-2)\cdots 10\cdot 6}\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{2\cdot 4\cdots 2r}{3\cdot 5\cdots(2r+1)}\,\frac{1}{2},$$

folglich:

$$\left[\int y\,ds\right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdots 2r}\,\frac{1}{4r+3}\int_0^1 \frac{x^{4r+3}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)(4r+3)},$$

$$\left[\int s\,dy\right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdots 2r}\,\frac{1}{4r+1}\int_0^1 \frac{x^{4r+3}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)(4r+1)},$$

und hieraus:

$$ac = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2r+1}\left(\frac{1}{4r+1} + \frac{1}{4r+3}\right) = 2\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+1)(4r+3)}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4r+1} - \frac{1}{4r+3}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2r+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Man kann selbstverständlich für die elastische Kurve alle Rektifikationsprobleme auflösen, deren Behandlung für die Kegelschnitte schon oben besprochen wurde. Bezeichnen x_1, x_2 die Abszissen von zwei Kurvenpunkten M_1, M_2, so ist:

$$x_3 = \frac{x_1\sqrt{1-x_2^4} + x_2\sqrt{1-x_1^4}}{1 + x_1^2 x_2^2}$$

die Abszisse eines dritten Punktes M_3, der zu den oberen in der Beziehung:

$$CM_3 = CM_1 + CM_2$$

steht. Sind ferner P, Q, R drei Kurvenpunkte, so läßt sich ein vierter Punkt S derart angeben, daß $RS = PQ$ ist.

Unter den zahlreichen Schriften geometrischen Inhalts, welche elliptische Funktionen berücksichtigen, erwähnen wir hier eine Abhandlung von Euler über die Oberfläche des schiefen Kegels (s. o. S. 520)[1]), und eine von Schubert über die Abwicklung der ebenen Schnitte eines Zylinders[2]) (s. o. S. 521).

Wir können diesen Abschnitt nicht beschließen, ohne einen Namen auszusprechen, der in der künftigen Periode eine Hauptrolle spielen wird. Der princeps mathematicorum, Karl Friedrich Gauß (1777—1855), beschäftigte sich seit seiner ersten Jugend mit elliptischen Integralen, und es ist wohlbekannt, daß manche von den wichtigsten Entdeckungen Jacobis und Abels ihm seit lange angehörten. Leider hinterließ er von seinen jugendlichen Studien über diesen Gegenstand nur einige handschriftliche Fragmente, welche erst nach seinem Tode gedruckt wurden[3]), und aus welchen es nicht leicht zu ersehen ist, wie tief er während unseres Zeitabschnittes in die neue Theorie eingedrungen war. Wichtige Aufschlüsse hat jedoch das Tagebuch von Gauß gegeben.[4])

[1]) De superficie coni scaleni, ubi imprimis ingentes difficultates, quae in hac investigatione occurrunt, perpenduntur (1776), Nova Acta Acad. Petrop. III, 1785 (publ. 1788), p. 69—89. Siehe auch die oben besprochenen Schriften von Legendre von 1786 und 1793. [2]) De evolutione sectionum cylindri (1798), Nova Acta Acad. Petrop. XIII, 1795—1796 (publ. 1802), p. 190—204. [3]) Gauß, Werke III, Göttingen 1866, S. 404—406 (1797), 433—435 (1799); VIII, Göttingen 1901, S. 93—117. [4]) Über das von P. Stäckel entdeckte Tagebuch vgl. F. Klein, Mathem. Annal. LVII, 1903, p. 14—32.