Die Vorläufer Monges.

Die „perspektivische" Literatur des 18. Jahrhunderts, welche unter so guten Auspizien mit s'Gravesande begann, erreichte ihren höchsten Glanzpunkt mit Taylor und Lambert, fand in Zanotti und Karsten würdige Fortsetzer, offenbart aber dann in Torelli unzweideutige Zeichen eines Verfalles[1]). Wenn auch noch einige der späteren Werke sich bedeutend über das Niveau der Arbeit Torellis erhoben haben, so kann man doch sagen, daß die Ära der Perspektive mit dem eben besprochenen Jahrhundert ihr Ende erreicht hat. Das hat seinen Grund darin, daß gerade an der Wende des 18. Jahrhunderts ein neuer Zweig der Mathematik eine bis dahin ungeahnte Blüte und einen gewaltigen Ertrag hervorbrachte, welcher den bisher von der Perspektive eingenommenen Platz eines „Verbindungsstriches" zwischen der Mathematik und den Zeichenkünsten einnehmen sollte. Um aber die Quelle dieses neuen mächtigen Gedankenflusses aufzudecken, müssen wir um einige Jahrhunderte zurückkehren. Und, während wir in der Malerei die Ursprünge der modernen Perspektive gefunden haben, müssen wir uns nun zur Architektur wenden, um die Genealogie der neuen Lehre zu bestimmen und ihre Geburtsurkunde zu erlangen.

Zu diesem Zweck möge zunächst bemerkt werden, daß Vitruvius, der berühmte Baumeister der Epoche des Julius Cäsar und Augustus, im I. Buch seiner „Architectura", von der „ichonographia" und „orthographia", d. h. dem „Grundriß" und „Aufriß" eines Gebäudes, als Hilfsverfahren zur Darstellung desselben, spricht; er hat diese Methoden wahrscheinlich von den Griechen entlehnt, hat aber das Verdienst, sie allgemein verbreitet zu haben, so daß seine Nachfolger sie ohne Ausnahme anwandten. Aber diese Urform einer sehr bekannten Methode der darstellenden Geometrie gibt zwar eine leichte und bequeme Art an, um die dreidimensionalen Figuren darzustellen, zeigt aber den Weg nicht, um auf dieselben die gewöhnlichen Operationen der Geometrie anzuwenden. Und zwar lehrt sie es deshalb nicht, weil der reine Architekt dessen nicht bedarf. Aber der praktische Architekt muß auch die Handwerker bei der Bearbeitung des Materials, beim Holz- und Steinschnitt anleiten; daraus erwuchs die Notwendig-

[1]) Ein im 18. Jahrhundert erhaltenes Resultat rein theoretischer Natur verdient hier noch angeführt zu werden; wir meinen den Satz, daß die Ordnung einer Kurve durch Projektion nicht erhöht werden kann: vgl. Waring, „Proprietates curvarum algebraicarum" (Cantabridgae 1772), Prop. 24—26. Vgl. S. 522.

keit einer neuen Hilfswissenschaft, der „Stereotomie". Empirische Vorschriften dieser Lehre sind im „Traité d'architecture" zu finden, welchen im Jahre 1757 Philibert de Lorme, ein Almosenier Heinrichs II., herausgab, ferner in den „Sécrets d'architecture" (La Flèche 1642) von Maturin Jousse, und vollständiger in dem Werk „Architecture des voûtes ou l'art de trait et coupe des pierres" (Paris 1634) von Pater Derand, dessen Regeln in den Abschnitt „De lapidum sectionum" des berühmten „Mundus mathematicus" (1674) von Milliet-Dechales übergegangen sind. Derjenige aber, welcher zuerst auch diesen Teil der Ingenieurwissenschaft streng wissenschaftlich zu behandeln begann, ist wiederum Desargues, von dem wir noch ein Werkchen über den Steinschnitt besitzen (Oeuvres de Desargues, éd. Poudra, I. Bd., p. 303—362); aber da er auch bei dieser Gelegenheit sich damit begnügte, seine Gedanken nur unklar an einem Beispiele auseinanderzusetzen, so blieb er fast unverständlich und daher ohne Einfluß, auch nachdem Bosse seinen verehrten Lehrer kommentiert hatte[1]); wer heute die Methoden von Desargues kennen zu lernen wünscht, wird im Poudraschen Kommentar (Oeuvres de Desargues, I. Bd., p. 362—382) eine wertvolle Hilfe dazu finden, vermittels deren er leicht ihre Analogie mit denjenigen wahrnehmen wird, welche unsere darstellende Geometrie anwendet, um die Aufgaben von den mehrkantigen Ecken und den Polyedern aufzulösen.

Das, was Desargues und Bosse nicht erreichen konnten, nämlich der Stereotomie eine beständig rationelle Richtung zu geben, gelang ein Jahrhundert später Amédée François Frézier. Dieser, 1682 in Chambéry geboren, war von seiner Familie zum Studium der Jurisprudenz bestimmt; aber seine Abneigung gegen die Pandekten war so groß, daß er im Jahre 1700, gegen den Willen seiner Eltern, in die französische Infanterie eintrat; sieben Jahre später wurde er gewürdigt, in das Ingenieurkorps einzutreten; die französische Regierung vertraute ihm mehrere wichtige Missionen an (unter anderen eine nach der Insel St. Domingo im Jahre 1719); zuletzt (1740) wurde er Direktor der Festungswerke der Bretagne; im Jahre 1746 wurde er zur Ruhe gesetzt und starb am 26. Oktober 1773. Gerade nun auf seiner Rückkehr von Amerika faßte er die Idee, das große Werk zu schreiben, welches seinem Namen einen Ehrenplatz auch

[1]) „Oeuvres de Desargues", I. Bd., p. 470 und II. Bd., p. 4. „Bosse donna un système tout différent qu'il tenoit de Desargues, lequel, par son obscurité et la nouveauté de son language, ne fut pas gouté", bemerkt Frézier in der Einleitung eines Werkes, von dem wir bald sprechen werden.

in der Geschichte der Geometrie sichern sollte. Es ist „La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtiments civils et militaires, ou Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture“[1]) (vgl. III[2], S. 793) mit dem folgenden Satz des Vitruvius als Motto: „geometria plura praesidia praestat architecturae“. Frézier sieht, diesem Grundsatz folgend, von einer mechanischen Betrachtung vollständig ab und betrachtet den Steinschnitt ausschließlich vom geometrischen Standpunkt; infolgedessen besteht nach ihm diese Lehre aus folgenden Teilen: I. Untersuchung der Kurven, die entstehen, wenn Körper durch ebene oder nicht-ebene Flächen geschnitten werden; dieser Abschnitt der Stereotomie heißt „Tomomorphie“. II. Beschreibung von Kurven auf gegebenen Flächen; dies ist das Ziel der „Tomographie“. III. Untersuchung einfacher Methoden, um die Körper und ihre Schnitte auf einer Ebene darzustellen; diese Methoden, welche er unter dem Namen „Stereographie“ zusammenfaßt, sind: a) die Ikonographie und die Orthographie; b) die Abwicklung der krummen Flächen auf eine Ebene, oder „Epipedographie“[2]); c) die „Goniographie“. IV. Anwendung des Vorigen auf die Bestimmung der Flächenschnitte, die für den Stein- und Holzschnitt am wichtigsten sind („Tomotechnik“). Diese vier Hauptteile der Stereotomie werden der Reihe nach in den vier Büchern des Werkes von Frézier behandelt, dessen Inhalt wir jetzt kurz durchgehen wollen.

Das I. Buch besteht aus zwei Teilen. Der erste handelt von den ebenen Schnitten einiger Körper, wie Kugel, Kegel, Zylinder und „regulär-irregulärer“ Figuren (Quadriflächen, Ringflächen, Helikoiden). In der Einleitung zum zweiten Teile des I. Buches bemerkt Frézier, daß Pater Courcier (1604—1692) in seinem Werke „De sectione superficiei sphaericae per superficiem sphaericam, cylindricae per cylindricam et conicae per conicam“ (Divionae 1662) den Namen „curvitegae“ den von ihm untersuchten Kurven gegeben hat; Frézier hat es dagegen vorgezogen, denselben Namen zu geben, welche aus „imbrex“ (= hohler Dachziegel) abgeleitet sind; so entstanden folgende Neologismen: „cicloïmbre, ellipsimbre, ellipsoïdimbre, paraboloïdimbre, hyperboloïdimbre“, Namen, welche ein moderner Geometer

[1]) Straßburg, t. I, 1737; t. II, 1738; t. III, 1739; 4°. S. XVI + 424 + 503 + 417 + 65, mit 27 + 68 + 69 lith. Tafeln. Eine II. Auflage trägt das Datum 1769; trotz wiederholter Versuche konnten wir uns diese nicht verschaffen. Im Jahre 1759 wurde ein Auszug dieses Werkes, betitelt „Éléments de stéréotomie à l'usage de l'architecture“, veröffentlicht. [2]) Dieser Name wurde von Lagny (1660—1734) vorgeschlagen; man sehe die dritte seiner Abhandlungen über „La goniométrie“ in den Pariser Mém. 1727.

wieder in Gebrauch gebracht hat[1]). Von diesen Kurven, welche alle besondere gewundene Linien vierter Ordnung der I. Art sind, setzt Frézier die Grundeigenschaften auseinander.

Der erste Teil des II. Buches lehrt, wie man den Kreis, die Kegelschnitte, die spirischen Linien und einige Spiralen beschreiben kann, ferner die Zusammensetzung von Kurven, welche die Form einer Ellipse oder Spirale haben; endlich die Auflösung von Aufgaben, welche sich auf die Normalen von Kegelschnitten oder anderer geometrischer Kurven beziehen. Der zweite Teil dieses Buches handelt von der Beschreibung von Kurven auf krummen Flächen; man begegnet hier vor allem der Definition von der orthogonalen Projektion und der Beziehung, die zwischen einer Strecke und ihrer Projektion statthat, endlich die Auflösung einiger Probleme, von denen wir die folgenden anführen wollen: auf einer Kugelfläche einen Kreis zu beschreiben; die Kreisschnitte eines Kegels oder Zylinders zu finden[2]); auf einer Kegelfläche Kegelschnitte von vorgeschriebener Art zu zeichnen; usw. Im dritten Teil beschäftigt sich der Verfasser mit den unebenen Linien, die Schnittlinien von Kugel-, Kegel- oder Zylinderflächen sind, wobei er seine Aufmerksamkeit besonders auf ihre Beschreibung lenkt, welche er mittels eines Systems paralleler Ebenen ausführt. Wie bekannt ist dies dasselbe Prinzip, das man noch heute in der darstellenden Geometrie anwendet, um die Schnittlinie zweier Flächen zu konstruieren; aber diese Methode ist auf die Schraubenlinien („limaces“) nicht anwendbar, welche man auf einen Zylinder, einen Kegel oder eine Kugel zeichnen kann; und da diese Kurven sehr wichtig in der Theorie und Praxis sind, so lehrt Frézier, wie man sie nach besonderen Methoden beschreiben kann.

In direktem Zusammenhang mit der darstellenden Geometrie steht das III. Buch, wo der allgemeine Begriff „Projektion“ auf die Darstellung vermittels der Ikonographie und Orthographie der Gewölbe angewandt wird; es erhellt daraus die Notwendigkeit, zwei Projektionen einer Figur zu betrachten, um dieselbe eindeutig darzustellen; über die Perspektive bemerkt unser Ingenieur (T. I, S. 271), daß „on n'en peut tirer aucun secours pour la coupe des pierres, parce qu'elle change les mesures des solides représentez, en diminuant les parties qui s'éloignent du devant du tableau“. Alles das bildet

[1]) La Gournerie, „Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques“, Paris 1867. [2]) Für einen besonderen Fall dieses Problems gibt Frézier zwei Lösungen, welche ihm Johann und Daniel Bernoulli mitgeteilt hatten.

den Inhalt der vier ersten Kapitel des genannten Buches; das fünfte ist der Abwicklung auf einer Ebene der Oberflächen von polyedrischen, konischen und zylindrischen Körpern und der Bestimmung der entsprechenden Gestalt, welche gegebene Linien infolgedessen annehmen, gewidmet. Ein letztes Kapitel löst die Aufgabe, die Dieder eines durch seine Flächen bestimmten Trieders zu finden; Frézier gibt zwei Auflösungen, die eine vermittels Umlegungen, während die andere von der Betrachtung des Tetraeders ausgeht, welcher entsteht, wenn das Trieder durch eine Hilfsebene geschnitten wird.

Das IV. Buch, welches die zwei letzten Bände füllt, gehört eher der Praxis als der Theorie an, da es zum Gegenstand die „Tomotechnik" hat; dessenungeachtet finden sich im Anfang desselben einige Betrachtungen über die Flächen, welche diejenigen interessieren werden, welche die Höhe der Entwicklung, welche in jener Zeit die Flächentheorie erreicht hatte, kennen lernen, oder ein Verzeichnis der besonderen, damals bekannten Flächen aufstellen wollen.[1]) Wir müssen noch bemerken, daß es Frézier gelang, die Richtigkeit und Nützlichkeit der Desarguesschen Methoden zu beweisen (T. II, S. 191); eine gründlichere Prüfung des IV. Buches des „Traité" von Frézier würde ferner mit voller Klarheit zeigen, daß in ihm ein ausgedehnter Gebrauch von Hilfsebenen, Umlegungen usw. gemacht ist, was seinen Wert noch beträchtlich in unseren Augen erhöht.

„Je sais bien" (bemerkt traurig unser Verfasser, S. IX des I. Bd.) „qu'aujourd'hui la géométrie linéaire n'est plus guères à la mode, à que pour se donner un air de science, il faut faire parade de l'analyse"; heute ist nun kein Zweifel mehr daran, daß zu der Umwälzung der öffentlichen Meinung zugunsten der Geometrie, welche an dem Ende des 18. Jahrhunderts erfolgte, Frézier das Seinige beigetragen hat; aber das Hauptverdienst daran gebührt doch dem unsterblichen Mathematiker, zu dem wir uns jetzt wenden wollen.

[1]) Bemerkenswert ist, daß Frézier als „schiefe Flächen" diejenigen betrachtet, welche man folgendermaßen erzeugen kann: 1. durch die Bewegung einer Geraden, welche beständig parallel zu einer Ebene bleibt und zwei feste Geraden schneidet („planolime"); 2. und 3. durch die Bewegung einer Geraden, welche immer eine Gerade und eine Kurve („mixtilime") oder zwei Kurven („doliolime") schneidet; 4. durch die Bewegung einer Kurve, welche zwei feste Linien schneidet („sphericolime").

G. Monge als Begründer der darstellenden Geometrie.

Jakob Monge war ein armer umherziehender Kaufmann aus Beaune, einer kleinen Stadt des Département de la Côte d'or (Burgund), dessen ganzes Streben danach ging, seinen drei Söhnen den Unterricht angedeihen zu lassen, welchen das Kollegium seiner Vaterstadt ihnen geben konnte. Alle drei entsprachen in reichem Maße den Erwartungen ihres Vaters; unter ihnen aber war es der älteste, Gaspard, geboren am 10. Mai 1746, welcher den Namen Monge unsterblich machen sollte.[1]) Kaum 14 Jahre alt, erregte er schon die Bewunderung seiner Umgebung, indem er eine Feuerpumpe herstellte, und im Alter von 16 Jahren durch die Zeichnung eines prächtigen Planes seiner Vaterstadt. Die Kunde von seiner hohen Begabung gelangte auch bis zu den Ohren der Oratoristen von Lyon, welche dem hoffnungsvollen Knaben den Unterricht in der Physik in ihrem Kollegium anvertrauten, wobei sie ihn zugleich für ihren Orden zu gewinnen suchten. Jakob Monge riet seinem Sohn ab und suchte ihn dafür zu bestimmen, die Unterstützung eines Oberstleutnants anzunehmen, welcher jenen Plan von Beaune voller Bewunderung kennen gelernt hatte und nun versuchte, dem Autor den Eintritt in die Militärschule des Geniekorps zu Mézières zu verschaffen. Aber die niedrige Herkunft erlaubte dem jungen Monge nicht, den Offiziersdegen zu tragen; daher mußte er sich mit einer Stelle in der Untersektion jener Schule, die für Praktiker bestimmt war, begnügen (1765). In dieser Stelle hatte er sich besonders mit einer Operation zu beschäftigen, welche man „défiler un fort" nannte. Die geistreichen Modifikationen, welche er an den alten und sehr mühsamen Verfahren, nach welchen jene Operation bisher vollzogen wurde, vornehmen

[1]) Von Monge sprechen, mehr oder minder ausführlich, alle Geschichtswerke über das Kaiserreich und das Konsulat, wie auch die Denkschriften jener Zeit (vgl. z. B. „Mémoires de Madame Roland" Paris 1884, II. Bd., p. 286). Aber die ergiebigste und beste Quelle über sein Leben ist die geistreiche Lobrede, welche Arago am 11. Mai 1846 an der Pariser Akademie hielt („Oeuvres complètes de F. Arago", II. Bd., Paris 1854, S. 427 ff.). Man muß auch den „Essai sur les services et les travaux scientifiques de G. Monge" (Paris 1819) von C. Dupin heranziehen, obgleich in ihm die politische Leidenschaft der Epoche sich bemerkbar macht. Andere Quellen sind im Intermédiaire des mathématiciens, Bd. XII, 1905, p. 47—48, Bd. XIII, 1906, p. 118—119, 202—203, und Bd. XIV, 1907, p. 11—13. Diejenigen, welche die ganze Familie Monge, von dem Urgroßvater des großen Geometers bis zu den letzten Nachkommen, kennen lernen wollen, mögen auf die „Généalogie de la famille de Gaspard Monge" (Dijon et Paris 1904) von L. Morand verwiesen werden.

wollte, Modifikationen, welche im Keime bereits die Grundbegriffe der darstellenden Geometrie enthielten[1]), begegneten zuerst dem heftigsten Widerspruch seitens seiner Vorgesetzten; allein ihr Wert wurde endlich doch anerkannt, und nun erhielt unser Mathematiker dafür den Platz eines Repetitors. Gerade in diesen Jahren (1770—1773) faßte Monge zuerst seine epochemachenden Ideen über die Anwendung der Analysis auf die Geometrie (vgl. Abschn. XXIV), bearbeitete und veröffentlichte sie, damit sie ihm, in einer Zeit der Oberherrschaft der Algebra, als Reisepaß in das Reich der Mathematiker dienen sollten; und in der Tat soll, nach einer sehr verbreiteten Erzählung, Lagrange nach der Lektüre dieser Arbeiten Monges ausgerufen haben: „avec son application de l'analyse à la représentation des surfaces, ce diable d'homme sera immortel!“ Nachdem so Monge den ersten Schritt in der Lehrlaufbahn, allerdings nicht ohne Mühe, getan hatte, wurden ihm die folgenden bedeutend leichter. Im Jahre 1768 erhielt er die Professur für Mathematik und drei Jahre später wurde ihm auch der Lehrstuhl für Physik anvertraut. 1780 übernahm er den Unterricht in der Hydraulik im Louvre, mit der Verpflichtung jedes Jahr sechs Monate in Paris zu wohnen; zugleich öffnete ihm die Akademie der Wissenschaften ihre Tore. Endlich wurde er, als Bezout starb, zu seinem Nachfolger als „Examinateur“ der Marineschüler gewählt; infolgedessen siedelte er nun vollständig von Mézières nach der Hauptstadt über.

Es ist natürlich, daß Gaspard Monge, welcher aus dem Volke stammte und seinen Weg durch Kastenvorurteile zur Genüge versperrt gesehen hatte, sich mit ganzer Seele für die Prinzipien der französischen Revolution begeisterte. Ein glühender und schwärmerischer Charakter, warf er sich blindlings in den revolutionären Strom. Er war Mitglied der berühmten Kommission, welche der Welt ein allgemeines, auf vernünftiger Grundlage aufgebautes System der Maße und Gewichte gab, und wurde, nach dem 10. August 1792, Marineminister im zweiten Ministerium Roland; nachdem er die Verwaltung reorganisiert hatte, wollte er sich zurückziehen (12. Februar 1793), er mußte aber auf jenem Posten bis zum folgenden 10. Mai ausharren. Von den Regierungsgeschäften befreit, widmete Monge seine ganze wunderbare Arbeitskraft der Fabrikation von Kanonen- und Flinten-

[1]) Will man das Datum für die Entstehung dieser Lehren festsetzen, so sei darauf hingewiesen, daß in dem „Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces usw.“, welches Monge am 11. Januar 1775 der „Académie des Sciences“ vorlegte, die folgenden Sätze enthalten sind (p. 435—436): „les deux plans, l'un horizontal et l'autre vertical, auxquels on rapporte tout ce qui est dans l'espace par des projections orthogonales“.

pulver, weil sein Vaterland damals einen großen Mangel daran hatte[1]), und der Gründung und Organisation zweier berühmter Schulen, der Normalschule[2]) und der polytechnischen Schule[3]), in denen er einer der beliebtesten Lehrer war; in der ersteren konnte er endlich die darstellende Geometrie öffentlich vortragen. Auch an der zweiten blieb er bis 1809 eine der größten Zierden. Von seinem Anteil an der Reorganisation des „Institut de France“ müssen wir brevitatis causa schweigen und nur daran erinnern, daß Monge nach Italien gesandt wurde, um die Auswahl der Gemälde und Statuen, welche nach Paris geschickt werden sollten, zu leiten; bei dieser Gelegenheit lernte er den General Bonaparte kennen, mit dem ihn von da an eine Freundschaft fürs Leben verband. Von Bonaparte wurde er mit der Überbringung des Vertrages von Campo-Formio nach Paris betraut; mit Napoleon ging er dann auch nach Ägypten, wo er das „Institut d'Égypte“ gründete und leitete; nach Frankreich zurückgekehrt wurde er Senator (1799) und dann Graf von Pélouze.

Als Bewunderer des Genies Napoleons verzieh der alte Republikaner ihm die Annahme der Kaiserkrone, und beim Lesen des berühmten XXIX. Bulletins des russischen Krieges erlitt er einen Schlaganfall. Aber er erholte sich schnell, und so finden wir ihn während der „hundert Tage“ wieder an der Seite Napoleons. Es blieb der zweiten Restauration vorbehalten, sein Ende herbeizuführen. Als er nämlich das Dekret erfuhr (21. März 1816), das ihn nebst Carnot aus der Akademie ausstieß, verfiel er in einen Zustand der Apathie, aus dem ihn nicht einmal der Klang der „Marseillaise“ erwecken konnte, und in dem er bis zu seinem am 18. Juli 1818 erfolgten Tode verblieb. Die damalige französische Regierung vermochte es nicht zu verhindern, daß die École polytechnique und die Akademie der Wissenschaften ihm glänzende Ehren erwiesen.

Aus obiger biographischen Skizze erhellt, daß die mathematischen Arbeiten Monges in zwei Teile zerfallen, welche man, obgleich sie beträchtliche Beziehungen zueinander haben, doch getrennt betrachten

[1]) Vgl. Monge, „Déscription de l'art de fabriquer les canons“ (Paris, an II).
[2]) Diese durch ein Dekret des 9. Brumaire des III. Jahres der Republik (30. August 1794) gegründete Schule blieb nur während der vier ersten Monate des folgenden Jahres am Leben; Lagrange und Laplace lehrten an ihr Mathematik, Monge, mit Hilfe von Lacroix und Hachette, die darstellende Geometrie. Vgl. den prächtigen Band „Le centenaire de l'École normale“ (1795 bis 1895), Paris 1895. [3]) Vgl. Jacobi, „Über die Pariser polytechnische Schule“ (Werke, VII. Bd., Berlin 1891, S. 335—370). Der Organisationsplan dieser berühmten Anstalt ist im III. Cahier des „Journal de l'École polytechnique“ zu finden.

muß; der eine umfaßt die Arbeiten über die darstellende Geometrie, der andere diejenigen über die Anwendung der Analysis auf die Geometrie, worüber man im vorigen Abschnitte ausführlich berichtet hat.

Zu Beginn unseres Berichtes über die Arbeiten der ersten Gruppe muß man daran erinnern, daß Monge auf dieselben durch die Anwendungen geführt wurde, welche man mit der neuen Methode auf die militärische Topographie machen konnte. Und hier liegt auch der Grund zu dem Verbot der Veröffentlichung der neuen Methoden, welches bis 1795 (Gründung der Normalschule) aufrecht erhalten blieb. Diese Methoden verbreiteten sich über die Grenzen Frankreichs hinaus in der ganzen gelehrten Welt, als er drei Jahre später das Werk veröffentlichte: „Géométrie déscriptive. Leçons données aux Écoles normales, l'an 3 de la République. Paris, an VII.“[1])

In dem „Programm“, womit dieser Band beginnt, wird die neue Lehre, welche Monge ihren Namen und die Würde einer Wissenschaft verdankt, als eins der Mittel hingestellt „pour tirer la nation française de la dépendence où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère“[2]); in Wirklichkeit aber wird sie, gemäß den Zwecken der Schule, an welcher Monge lehrte, in der Sprache der reinen Wissenschaft auseinandergesetzt. Diese erhabene Richtung zeigt sich schon klar auf den ersten Seiten, wo der Verfasser, nachdem er die zwei Ziele der darstellenden Geometrie (Darstellung der dreidimensionalen Figuren auf einer Ebene, Ableitung der Eigenschaften einer Figur aus einer Darstellung derselben) aufgestellt hat, sich zur Methode der doppelten Orthogonalprojektion wendet, indem er sich die Frage stellt, welches die besten Beziehungselemente seien, um die Lage eines Raumpunktes zu bestimmen. Können drei Punkte dazu dienen? Nein, weil zwei Punkte existieren, welche gegebene Entfernungen von drei gegebenen Punkten haben. Können drei Geraden dazu dienen? Nein, weil acht Punkte vorhanden sind, welche gegebene Entfernungen von drei Geraden haben.[3]) Können drei Ebenen dazu dienen? Ja! Denn, wenn es auch acht Punkte gibt, welche gegebene Entfernungen von

[1]) Die „Géométrie déscriptive“, welche ins Deutsche von G. Schreiber frei übersetzt wurde („Lehrbuch der darstellenden Geometrie nach Monges Géométrie déscriptive vollständig bearbeitet“; Karlsruhe und Freiburg 1828), wurde kürzlich in die Sammlung „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften“ (Nr. 117) aufgenommen; die (treue) Übersetzung und die Noten gehören R. Haußner an. [2]) Anderswo (Journal polytechnique, T. I, p. 1) wird sie als „une espèce de langue nécessaire à tous les artistes“ bezeichnet. [3]) In einer Note am Ende des Bandes wird die Existenz solcher Punkte erklärt, aber nicht bewiesen.

drei Ebenen haben, so kann man durch eine geschickte Vorzeichenwahl doch alle diese auf einen reduzieren: es ist das System, welches die analytische Geometrie des Raumes gewöhnlich anwendet. „Mais dans la géométrie déscriptive, qui a été pratiquée depuis beaucoup plus longtemps par un beaucoup plus grand nombre d'hommes, et par des hommes dont le temps était précieux, les procédés se sont encore simplifiés; et au lieu de la considération des trois plans, on est parvenu, au moyen des projections, à n'avoir plus besoin explicitement que de celle de deux.“ Und hier stellt nun der Autor den Begriff der „Orthogonalprojektion“ auf und beweist die Nützlichkeit der Anwendung zweier untereinander rechtwinkliger Projektionsebenen, einer horizontalen und einer vertikalen, welche man durch Drehung um ihre Schnittlinie[1]) zusammenfallen läßt. Die zwei Projektionen eines beliebigen Punktes fallen infolgedessen immer auf eine zu dieser Schnittlinie rechtwinklig stehende Gerade; und Monge gibt eine vorteilhafte und noch heute angewandte Methode zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte, deren Projektionen bekannt sind. Nachdem die Methoden festgestellt sind, nach denen man die Punkte und die Geraden darstellen kann, müßte man mit denjenigen sich beschäftigen, welche man auf die Polyeder anwenden könnte; dafür aber existiert kein allgemeines Verfahren, eine Tatsache, bemerkt Monge, ähnlich derjenigen, die die Algebra darbietet, in der es keine sichere und allgemeine Methode gibt, um eine Aufgabe in eine Gleichung umzusetzen; dies ist nicht der einzige Berührungspunkt zwischen den beiden Wissenschaften, und daher gibt Monge den Rat, die beiden gleichzeitig zu studieren.

Kein neues Prinzip ist nötig, um durch zwei Projektionen eine Kurve darzustellen. Um aber eine Fläche darzustellen, muß man seine Zuflucht zu ihrer (unendlich vieldeutigen) Erzeugbarkeit durch die Bewegung einer (i. A. auch in der Form veränderlichen) Kurve nehmen. Um daher eine Fläche darzustellen, stellt man ein System ihrer Kurven dar; ja, es ist sogar nützlicher, zwei solcher Systeme darzustellen, die man derart wählen soll, daß durch jeden Punkt der Fläche eine Kurve jedes Systems geht. Die konischen, die zylindrischen und die Rotationsflächen bieten interessante Erklärungen dieser Dar-

[1]) Diese Gerade wird nicht von Monge „ligne de terre“ genannt, wie Chr. Wiener (o. a. W., I. Bd., S. 25) meint; sie wird immer durch die Buchstaben LM bezeichnet. Wir wollen noch bemerken, daß die zwei Projektionen eines Punktes P von Monge mit p, P bezeichnet werden; das jetzt übliche System P', P'' findet sich schon bei Lacroix und Brisson in ihren sogleich zu nennenden Veröffentlichungen.

stellungsmethoden; dasselbe gilt von den Regelflächen, deren Erzeugung durch die Bewegung einer Geraden, welche drei feste Direktrizen beständig schneidet, im I. Anhang zur 1. Auflage der „Géométrie descriptive“ gelehrt wird. Das Verfahren zur Darstellung der Erzeugenden einer solchen Fläche war von Monge schon 20 Jahre vorher in der Abhandlung „Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes“ (p. 435) bekannt gemacht; es ist zu bedauern, daß dieses Verfahren nicht nach Verdienst bekannt geworden ist, da es in einer Arbeit enthalten ist, welche scheinbar mit der darstellenden Geometrie nichts zu tun hatte.

Die einfachste aller Flächen ist die Ebene, welche man durch die Bewegung einer Geraden erzeugen kann, die eine andere Gerade immer schneidet und einer dritten parallel ist; als bestimmende Gerade einer Ebene ist es ratsam, diejenigen zu wählen, in welchen die betrachtete Ebene die Projektionsebenen schneidet; sie bilden die „traces“ (Spuren) der Ebene, ein von Monge vorgeschlagener und allgemein angenommener Name.

Diese Begriffe erlauben, eine große Menge wichtiger Probleme aufzulösen; unter den unendlich vielen, die man behandeln könnte, wählt Monge die neun folgenden aus: Durch einen Punkt die Gerade zu ziehen, welche einer anderen parallel ist oder eine Ebene rechtwinklig schneidet, oder die Ebene, welche einer anderen parallel ist oder eine andere Gerade rechtwinklig schneidet (I—IV); die Schnittlinie zweier Ebenen zu finden (V); den Winkel zweier Ebenen, zweier Geraden oder einer Ebene mit einer Geraden zu bestimmen (VI—VIII); einen Winkel am Horizont zu reduzieren (IX). Wenn man auch über die Reihenfolge und die Auswahl solcher Fragen einen gewissen Vorbehalt machen kann (da nicht immer die schwierigeren den einfacheren folgen, und man nicht verstehen kann, warum z. B. die Bestimmung der Schnittlinie zweier Ebenen ex professo behandelt wird, während dies für den Schnittpunkt einer Ebene mit einer Geraden nicht geschieht), so muß man doch anerkennen, daß die Auflösungen so geistreich und von so wunderbarer Einfachheit sind, daß die Epigonen Monges i. A. keine besseren zu finden vermochten; die schönste unter allen scheint uns die allgemein bekannte des VI. Problems zu sein.

Mit dieser Aufgabe schließt der I. Abschnitt. Der II. Abschnitt handelt von den Berührungsebenen und den Normalen der Flächen. Die Berührungsebene in einem Punkt einer Oberfläche ist bestimmt durch die Tangenten in jenem Punkte an die entsprechenden zwei Erzeugenden (s. o.) derselben; daß die Ebene von der Wahl der Erzeugenden unabhängig ist, wird von Monge nicht bewiesen, ja nicht

einmal gesagt[1]); daß der Begriff der Berührungsebene auch bei der Anwendung nützlich sei, wird an zwei Beispielen gezeigt, von denen er das eine aus der Malerei, das andere aus der Gewölbekonstruktion entlehnt. Dann wendet er sich zu der Konstruktion von Berührungsebenen an zylindrischen, konischen und Rotationsflächen mit vertikal vorausgesetzter Achse; von den Tangentenebenen der Regelflächen handelt der III. Anhang zur 1. Auflage. Es folgt dann die Bestimmung der kleinsten Entfernung zweier schiefen Geraden, welche Monge durch die Berührungsebene eines Kreiszylinders ausführt; die Ausführung einer elementaren Konstruktion dieser Entfernung wird dem Leser als Übung überlassen.

Der Verfasser wendet sich dann zur Bestimmung von Berührungsebenen, deren Berührungspunkt nicht gegeben ist. Die erste Aufgabe dieser Art versucht die Ebenen zu finden, welche durch eine gegebene Gerade gehen und eine gegebene Kugelfläche berühren; Monge gibt zwei Auflösungen: 1. durch Umlegung der Ebene, welche senkrecht zur Geraden ist und durch den Kugelmittelpunkt geht, oder 2. durch Betrachtung des Kegels, welcher diese Kugel von einem Punkt jener Geraden aus projiziert. Mit dieser zweiten Auflösung wird die Darlegung der Haupteigenschaften der Polaren in bezug auf Kreise, Kegelschnitte und Quadriflächen verbunden[2]). Auf das obige Problem können diejenigen zurückgeführt werden, welche darin bestehen, durch einen Punkt die Ebene zu ziehen, welche entweder zwei Kugelflächen oder drei Kugelflächen berührt. An das letztere knüpft Monge die Darlegung der charakteristischen Eigenschaften der Ähnlichkeitspunkte von Kreisen[3]) oder Kugeln[4]) an. Die Bestimmung der Ebenen, welche durch einen Punkt gehen und einen Kegel oder Zylinder berühren, ist der Zweck der zwei folgenden Aufgaben, während der inhaltsreiche Abschnitt mit der Konstruktion der durch eine gegebene Gerade gehenden Berührungsebenen einer Rotationsfläche mit Vertikalachse schließt. Diese Aufgabe wird von Monge wie noch heute, durch Benutzung der Fläche aufgelöst, die durch Drehung der gegebenen Geraden um die Achse der Fläche erzeugt wird.

[1]) Der erste Versuch, die Existenz der Berührungsebene geometrisch zu beweisen, findet sich bei C. Dupin, „Développements de géométrie“ (Paris 1813), p. 7.
[2]) Vgl. E. Kötter, „Die Entwicklung der synthetischen Geometrie“; Bd. V des Jahresber. der Deutsch. Math.-Ver., S. 48, 88 und 112. [3]) Nach N. Fuß (Nova Acta Petrop., T. XIV, 1805) wurde Monge von d'Alembert inspiriert.
[4]) In den diesbezüglichen Sätzen findet man einige Unrichtigkeiten, da Monge die Ebenen nicht betrachtete, von denen jede zwei innere und vier äußere Ähnlichkeitspunkte enthält.

„Die Schnittlinien krummer Flächen" bilden das Thema des IV. Abschnittes unseres Werkes. In der Einleitung zu demselben verweist Monge auf die bereits früher von ihm skizzierten Ideen betreffs der vollkommenen Übereinstimmung, welche zwischen den Operationen der Algebra und denen der darstellenden Geometrie besteht, und schließt mit der folgenden Bemerkung: „Il faut que l'élève s'accoutume de bonne heure à sentir la correspondance qu'ont entre elles les opérations de l'analyse et celle de la géométrie; il faut qu'il se mette en état, d'une part, de pouvoir écrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpetuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture". Nach diesen allgemeinen Betrachtungen setzt er die allgemeine Methode auseinander, um die Schnittlinie zweier Flächen F' und F'' punktweise zu zeichnen; der von Monge vorgeschlagene Kunstgriff ist derselbe, dessen wir uns heute noch bedienen; er besteht darin, daß man die gegebenen Flächen durch eine Reihe von Hilfsflächen F schneidet und die Kurven FF' und FF'', wie auch deren Schnittpunkte bestimmt. Wechselt man F, so wechseln auch diese Punkte, und so wird die verlangte Kurve $F'F''$ erzeugt. Im allgemeinen empfiehlt es sich, als Hilfsflächen horizontale oder vertikale Ebenen zu wählen; wenn aber F' und F'' Kegel oder Zylinder sind, so ist es vorteilhafter, andere Ebenen zu wählen; und wenn die Achsen zweier Rotationsflächen sich schneiden, so ist es das beste, F kugelförmig anzunehmen. Die von Monge untersuchten Fälle dieses allgemeinen Problems beziehen sich auf die Schnittlinien von Kegeln, Zylindern und Rotationsflächen, die sich entweder untereinander oder mit Ebenen schneiden; von den so entstehenden Kurven werden nicht nur die Projektionen der Punkte und Tangenten bestimmt, sondern, wenn es sich um Schnitte durch Ebenen handelt, auch die wahre Form und Größe (durch Umlegungen), oder ihre Abwicklung, falls sie auf Kegeln oder Zylindern beschrieben sind. Im allgemeinen ist dies alles in die folgenden Lehrbücher der darstellenden Geometrie ohne wesentliche Veränderungen übergegangen. Zu bemerken ist noch, daß Monge mehrmals von der Veränderung der Projektionsebenen spricht, ohne aber eine Anweisung zu geben, wie man dieselbe ausführen kann. Zum Schluß des besprochenen Abschnittes legt Monge die Robervalsche Tangentenmethode dar, ohne die Grenze ihrer Anwendbarkeit zu bestimmen[1]); er versucht auch, sie auf den Raum auszudehnen; die Kurve aber, welche er

[1]) Vgl. Duhamel, „Note sur la méthode des tangentes de Roberval" (Mém. des Sav. Étr., t. V, Paris 1838, p. 257—266).

als Beispiel wählte, ist nicht gewunden[1]) und die Anwendung selbst bedeutungslos!

Die Nützlichkeit obiger Konstruktionen für die Auflösung von Aufgaben von besonderem theoretischen und praktischen Interesse wird von Monge im IV. Abschnitte seines Werkes klar bewiesen, wo drei rein theoretische und drei praktische Aufgaben elegant aufgelöst werden.

Die ersteren haben zum Zweck die Bestimmung der Mittelpunkte der Um- und Inkugel eines Tetraeders und die Bestimmung der Punkte, deren Entfernungen von drei gegebenen Punkten gegeben sind (das analoge Problem der Bestimmung der Punkte, welche gegebene Entfernungen von drei gegebenen Geraden haben, wird dem Leser zur Übung aufgegeben).

Die übrigen drei Aufgaben betreffen die Vervollständigung einer topographischen Karte durch Winkelbeobachtungen von Bodenpunkten oder einem Ballon aus; gewiß sind sie während Monges Aufenthalt in Mézières entstanden. Bei diesen Aufgaben zeigt sich Monge mit der Methode der kotierten Projektionen in ihrer Anwendung auf die Topographie sehr vertraut, was nicht verwundern kann, da jene Methode in der Schule zu Mézières allgemein bekannt sein mußte. In der Tat ist es zwar wahr, daß der Geograph Ph. Bouache (1700—1773) die Niveaukurven (1738) einführte[2]), aber es war doch Châtillon[3]), der erste Direktor jener Schule, der auf die Idee kam, die bemerkenswerten Punkte eines Bodenstückes durch ihre Orthogonalprojektionen und ihre entsprechenden Höhen zu bestimmen; es war ferner ein anderer Genieoffizier, Milet de Mureau, welcher auf den Einfall kam, durch ein ähnliches Verfahren die Vertikalschnitte des Bodens darzustellen. Es sei zuletzt noch bemerkt, daß die Untersuchungen von Monge über die Tangentialebenen topographischer Flächen L. G. Dubuat-Nançay (1732—1787) dazu führten, die Ebenen durch ihre Geraden größter Neigung darzustellen; Monge selbst hat diese Darstellungsmethode auf beliebige Flächen ausgedehnt.

Nach dieser Abschweifung über die erste Entwicklungsstadie der Methode der kotierten Ebenen wollen wir zu unserem Hauptthema zurückkehren und bemerken, daß Monge jene praktischen Probleme auf die Bestimmung der Punkte zurückführt, welchen drei Rotationskegel oder drei Ringflächen mit parallelen Achsen gemeinschaftlich sind; die letzte Aufgabe, von der Monge irrtümlich annahm, daß sie

[1]) Eine Bemerkung von R. Haußner; vgl. S. 626, Fußnote 1. [2]) J. de la Gournerie, „Discours sur l'art du trait et de la géométrie déscriptive", Paris 1855, p. 22. [3]) Das Folgende ist aus dem o. a. „Essai" von Dupin entnommen.

64. Grades sei, wurde im nächsten Jahrhundert der Gegenstand längerer und fruchtbarer Untersuchungen in der Schule von Nicola Fergola.[1])

Mit dem IV. Abschnitt endet der Teil des Mongeschen Werkes, welcher streng genommen zur darstellenden Geometrie gehört und, wie der Verfasser richtig bemerkt, in allen höheren Schulen gelehrt werden müßte; das übrige ist ein Abriß der Haupteigenschaften der Kurven, Developpabeln und beliebigen Flächen. Hier bemüht sich Monge die Bekanntschaft der Begriffe zu verbreiten, welche er in dem „Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure" (Mém. prés. par div. savants, T. X, 1785; vgl. oben S. 531) und in den anderen Abhandlungen festgestellt hatte, die die Grundlage seiner „Application de l'analyse à la géométrie" bilden (vgl. den vorigen Abschnitt). Mit sichtbarem Vergnügen verweilt er bei den Haupteigenschaften der Krümmungslinien der Flächen[2]), um dann auch die Anwendungen bekannt zu machen, welche man davon beim Steinschnitte (Gewölbekonstruktion) machen kann.

Aus diesem Berichte über das erste Lehrbuch der darstellenden Geometrie erhellt, daß es nach unseren heutigen Begriffen nicht vollständig genannt werden kann[3]); in einigen seiner Teile erscheint es dessenungeachtet als durchaus vollkommen, indem es u. a. die Keime aller Lehren enthält, welche später in diesem Zweige der Mathematik aufgetaucht sind. Aber der, welcher glaubt, daß es eine erschöpfende Darstellung der Kenntnisse Monges in demselben sei, würde einen groben Irrtum begehen. In der Tat hat Monge, nach Hachettes Bericht[4]), die alte Aufgabe der „kürzesten Dämmerung" verwandelt in die Untersuchung der Ebenen, welche zwei konzentrische Kegel zugleich berühren. Ferner findet man in dem Aufsatz, mit welchem das „Journal polytechnique" (Mois de Germinal, an III) beginnt, mehrere andere Probleme erwähnt, welche den Schülern der berühmten École polytechnique zur Auflösung vorgelegt wurden, z. B. die Aufgaben über das Trieder

[1]) Vgl. G. Loria, „Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce", § 5 des IV. Kap. [2]) Man sehe auch den berühmten Aufsatz „Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde" (Journ. de l'Éc. pol., II. Cah., p. 145—165), wo solche Krümmungskurven sorgfältig gezeichnet sind. [3]) Als unvollständig erschien sie Hachette, welcher die Notwendigkeit der „Suppléments" erkannte, die er dann in den Jahren 1811 und 1818 herausgab. [4]) „Du plus petit crépuscule" (Corresp. sur l'Éc. pol., T. I, p. 148—151). Vgl. K. Zelbr, „Das Problem der kürzesten Dämmerung", Zeitschr. f. Math. u. Phys., 41. Bd., 1896, Hist.-lit. Abt., insbesondere S. 153—156.

„ce qui comporte toute la trigonométrie sphérique"[1]); weiter die Darstellung des regulären Dodekaeders[2]) und die Konstruktion der Geraden oder Ebenen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und gegebene Neigungen zu den Projektionsebenen haben; endlich die Rotationsflächen, welche im Monges Buch immer durch die Rotation ebener Kurven erzeugt werden, werden im Aufsatz durch beliebige Kurven beschrieben. Zu den behandelten Flächen gesellen sich noch die Quadriflächen, die Konoiden und einige Helikoiden. Andere Probleme findet man in den Nachrichten über die Mongeschen Vorlesungen, welche man Eisemann[3]) verdankt[4]). Es handelt sich hier um neue Fälle der Aufgabe, die Schnittkurve zweier Flächen zu finden, einige neue Schraubenflächen (z. B. die Schraube von St. Giles) und einige elementare Aufgaben, welche man vermittels der Flächendurchschnitte auflösen kann. Aus diesen Nachrichten ersieht man, daß in jenen Vorlesungen auch Fragen der angewandten darstellenden Geometrie behandelt wurden, wie z. B. die Schattenlehre und die Perspektive; die von Monge dazu angewandten Methoden fanden sich auf einigen Blättern kurz skizziert, die nach Monges Tod glücklicherweise in die Hände seines bedeutenden und von ihm sehr geliebten Neffen und Schülers B. Brisson (1777 bis 1827) fielen; dieser hat sie einer genauen Durchsicht unterzogen und dann in die 4. Aufl. (1820) der „Géométrie déscriptive" aufgenommen. Es ist unsere Pflicht, etwas darauf einzugehen.

Setzt man voraus, daß die Lichtquelle ein Punkt O sei, und daß alle zu betrachtenden Körper undurchsichtig seien, so kann man, wenn sie Polyeder sind, die Aufgabe der von diesen Körpern auf Ebenen geworfenen Schatten durch Anwendung der Grundaufgaben der darstellenden Geometrie leicht auflösen; auf dem Körper ist der beleuchtete Teil von dem dunklen durch ein schiefes Polygon abgesondert, welches man bestimmen kann auf Grund der Lage des Polyeders in bezug auf O. Wenn es sich aber um einen durch eine krumme Fläche begrenzten Körper handelt, so ist die Trennungslinie eine sehr wichtige Kurve, welche Monge in einer Abhandlung des Jahres 1775 schon betrachtet, und der er auf p. 694 seines „Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais" (Mém. de Paris 1781) den

[1]) Vgl auch Hachette, „Solution complète de la pyramide triangulaire" (Corresp. sur l'Éc. pol., T. I, p. 41—51). [2]) Es mag hier erinnert werden, daß die Perspektive der regulären (konvexen wie auch Stern-) Polyeder sich schon (1568) bei W. Jamitzer (Bd. II², S. 582) findet. [3]) Es ist der Gelehrte, dem man eine partielle Ausgabe von Pappus (vgl. Pappus ed. Hultsch, S. XVIII) verdankt. [4]) Journal de l'Éc. pol., II. Cah., p. 100—106, III. Cah., p. 440—442, IV. Cah., p. 619—622.

Namen „ligne de contour apparent d'une surface“ gegeben hatte, welchen sie beibehalten hat. Um diese Linie zu konstruieren, zieht man von O Ebenen σ, welche wir der Bequemlichkeit halber auf einer Projektionsebene normal annehmen wollen; jede schneidet die Fläche in einer Kurve, welche konstruierbar und darstellbar ist; die Berührungspunkte der von O an Γ geführten Tangenten gehören dem gesuchten Umrisse an. Läßt man σ um O herumgehen, so wird dieser punktweise beschrieben. Alles das besteht auch, wenn O unendlich entfernt liegt. Wenn aber die Lichtquelle nicht ein Punkt, sondern eine Fläche ist, so müssen beträchtliche Modifikationen vorgenommen werden, von denen Euler schon in seiner großen Abhandlung „De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet“ (Nova Comment. Petrop., T. XIV, 1772) gesprochen hatte (vgl. S. 531) und womit sich Monge schon, unabhängig von Euler, in dem „Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surface courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres“ (Mém. prés. par divers sav., T. IX, 1780, p. 382 bis 420) beschäftigt hatte (vgl. S. 537). Diese großen Geometer stimmen darin überein, daß es notwendig sei, die zwei Schalen der Developpabeln zu betrachten, welche aus den Ebenen besteht, welche die leuchtende und die beleuchtete Fläche zugleich berühren; so entstehen im Raume eine Schatten- und eine Halbschattenregion, und auf der betrachteten Oberfläche zwei Umrisse. Alles das wird evident klar in dem Falle, daß beide betrachteten Flächen Kugeln sind, ein Fall, welcher von Monge und Brisson eingehend untersucht wird.[1])

Wenden wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die Perspektive. Monge geht von der Voraussetzung aus, daß die objektive Figur F und das Auge O durch ihre Orthogonalprojektionen bestimmt und daß die Tafel beider Grundebenen normal sei. Infolgedessen (Fig. 71) kann man die Projektionen des Punktes P_1, welcher die Perspektive von P ist, sogleich zeichnen; um aber die wahre Form der erhaltenen Perspektive der gegebenen Figur F zu erhalten, muß man die Tafel in eine andere Lage bringen, was (Fig. 72) mittels der Koordinaten leicht geschehen kann. Ein ähnliches Verfahren kann in dem Falle angewandt werden, daß die Tafel nur auf der Horizontalebene normal

[1]) Man sehe auch: Monge und Hachette, „Sur la théorie des ombres et de la perspective; sur les points brillants des surfaces courbes“ (Corresp. sur l'Éc. pol., T. I, p. 295—305). Es möge noch der „Mémoire sur la détermination géométrique des teintes dans les desseins“ (Journ. de l'Éc. pol., I. Cah., p. 167—183) als ein Produkt des Mongeschen Unterrichts angeführt werden; er wurde von Dupuis bearbeitet auf Grund der verschiedenen von den „chefs de brigade“ der polytechnischen Schule gegebenen Materialien.

ist. Beide Fälle sind als Anwendungen der neuen von Monge geschaffenen Wissenschaft interessant; an Umfang und Allgemeinheit können sie sich gewiß mit denjenigen Taylors und Lamberts nicht messen. Um die Ausführung der Perspektive zu erleichtern, weist Monge noch darauf hin, daß es überflüssig ist, die Perspektive der Punkte zu zeichnen, welche von dem Augenpunkt aus unsichtbar sind, daß die Perspektive einer Geraden eine Gerade ist, und daß endlich die Perspektiven paralleler Geraden ein eigentliches Büschel bilden. Ist die Tafel uneben, so kann man (bemerkt Monge) die Aufgabe der Perspektive gleichwohl durch Anwendung der darstellenden Geometrie lösen. Monge (oder Brisson?) bemerkt weiter, daß man eine Raumfigur durch zwei Perspektiven bestimmen kann; andere Beobachtungen über die Luftperspektive sind unserem Gegenstand fremd; nur sei der folgende Satz wiedergegeben: „In jedem Punkte einer Fläche ist die Lichtstärke dem Sinus des Winkels direkt proportional, welchen der einfallende Strahl mit der Berührungsebene bildet und dem Quadrat der Entfernung vom leuchtenden Punkt umgekehrt proportional“.

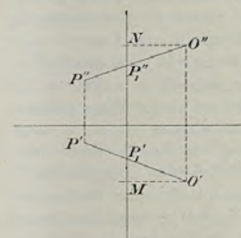

Fig. 71.

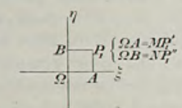

Fig. 72.

Zum Schluß unseres Berichtes über die Werke Monges über die darstellende Geometrie möge nicht unerwähnt bleiben, daß mit diesem großen Geometer die Wiedererweckung des Interesses der Mathematiker für die reine Geometrie zusammenhängt; ein solches Ergebnis verdanken wir nicht nur seinen unsterblichen Schriften, sondern auch seinem unübertrefflichen Unterricht an der Ecole polytechnique, welcher mehrere Hunderte von Studenten förmlich elektrisierte, so daß infolgedessen mehrere von ihnen bedeutende Gelehrte wurden.

Jetzt müssen wir noch bemerken, daß der Band „Géométrie descriptive“ von Monge später gedruckt worden ist, als die „Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes“ (Paris 1796)[1]) von

[1]) Unser Bericht stützt sich auf die Seconde édition revue et augmentée, Paris an X (1802).

S. F. Lacroix (1765—1843) (vgl. S. 344), der der Reihe nach Professor der Mathematik an der Artillerieschule von Besançon (1788), an der Normalschule von Paris (1795) und an der dortigen polytechnischen Schule (1799) war. Sein Buch soll gewiß kein Kommentar zu den Mongeschen Vorlesungen sein, ist aber auf jeden Fall von denselben nicht ganz unabhängig. Die Geschichte seiner Entstehung erzählt C. Dupin folgendermaßen[1]): Lacroix war einer der Zuhörer der freien Vorlesungen über Geometrie, welche Monge im Louvre hielt; in diesen sprach Monge oft von den wunderbaren Beziehungen, welche zwischen den Operationen der Algebra und denjenigen der Geometrie existieren, wobei er sich beklagte, daß es ihm verboten sei, seine geometrischen Entdeckungen vorzutragen. „Tout ce que je fais par le calcul", sagte er, „je pourrais l'exécuter avec la règle et le compas; mais il ne m'est pas permis de vous révéler ces sécrets." Diese Andeutung hat die Neugierde von Lacroix stark erregt; er versuchte die Analysis von Monge in geometrische Konstruktionen zu übersetzen, überzeugte sich dabei selbst von der Wichtigkeit der Projektionsmethode, und auf diesem Wege gelang es ihm, die Fundamentalaufgaben der darstellenden Geometrie aufzulösen. Der angeführte Band bildet nun die Frucht dieser Untersuchungen. Das Werk führt auch den Nebentitel „Compléments de géométrie", und dieser komplementäre Zweck seines Buches wird ausdrücklich vom Verfasser auch in seiner Vorrede hervorgehoben, wo man die Bemerkung findet, daß, während die Auflösungen der planimetrischen Probleme vollkommen ausführbar sind, die der stereometrischen einen rein theoretischen Charakter besitzen, welchen man in der Praxis ihnen unbedingt nehmen muß. Eben dies ist der Zweck der von Lacroix dargelegten Methoden.

Der erste Abschnitt seiner „Essais" enthält die Grundlagen der Methode der doppelten Orthogonalprojektion und der Anwendungen derselben auf Punkte, Geraden, Ebenen und Kugeln. Die Art der Darstellung ist bei Lacroix minder glänzend, aber etwas methodischer als bei Monge und ist der heute von uns angewandten ähnlicher, als der älteren. Im zweiten Abschnitte sind die Hauptprobleme über die krummen Flächen aufgelöst (Durchschnitte und Tangentenebenen), mit besonderen Anwendungen auf zylindrische, konische, Rotations- und Regelflächen. Zuletzt beschäftigt sich der Verfasser mit der Perspektive unter einem Gesichtspunkt, der dem von Monge gewählten ganz ähnlich ist; seine Behandlung ist aber allgemeiner und

[1]) Vgl. den o. a. „Essai". Diese Geschichte wird in der Vorrede des „Cours de géométrie déscriptive" (I. Partie, Paris 1852) von Th. Olivier anders erzählt.

verschieden von der älteren, da Lacroix nur annimmt, daß die Tafel auf einer der Grundebenen normal sei, und sich, um die wahre Figur der Perspektive zu finden, einer Umlegung bedient. Aber er deutet auch ein anderes Verfahren an, zum Entwerfen einer Perspektive, welches demjenigen Lamberts ähnlich ist und übrigens auch nicht als neu hingestellt wird. Zum Schluß findet sich die Bemerkung, daß die darstellende Geometrie auf die Gnomonik anwendbar ist, wenn man diese Lehre wie Montucla definiert[1]); diese Anwendung wurde später durch einen Schüler Monges vollständig entwickelt[2]). In einem eingehenderen Bericht über die „Essais" würde auch der vortrefflichen pädagogischen Bemerkungen Erwähnung getan werden müssen, welche sie enthalten, und welche gewiß nicht wunder nehmen werden bei einem der besten Schriftsteller der mathematischen Pädagogik.

Dies sind die Anfänge der neuen Lehre, mit der der Name Monge für immer verbunden sein wird; die Geschichte ihrer weiteren Entwicklungsstadien gehört dem 19. Jahrhundert an.

[1]) „Histoire des mathématiques", 2. éd., T. I, p. 725. [2]) Lefrançois, „Mémoire sur la gnomonique" (Journ. de l'Éc. pol., XI. Cah., p. 261—271).

ABSCHNITT XXVI

INFINITESIMALRECHNUNG

VON

G. VIVANTI

Die Grundlagen der Infinitesimalrechnung.[1])

In dem vorhergehenden Zeitabschnitte wohnten wir einem der wichtigsten Ereignisse der Geschichte der Mathematik, der Geburt der Infinitesimalrechnung, bei. Die mit diesem Namen bezeichnete Lehre unterscheidet sich dadurch von allen übrigen Teilen der Mathematik, daß sie sich, wenigstens in der Form, in der sie von ihren Hauptbegründern, Leibniz und Newton, vorgetragen wurde, auf nicht echt mathematische Prinzipien stützt. Newton geht von dem Geschwindigkeitsbegriffe aus; Leibniz verlangt, man dürfe, ja man solle gewisse nicht verschwindende Größen vernachlässigen. Suchen wir eine Erklärung darüber in ihren Schriften, so finden wir bei Newton so gut wie nichts; Leibniz sagt zwar wiederholt aus, seine eigene Methode sei von der Archimedischen nur der Form nach verschieden, aber einen Beweis seiner Behauptung finden wir nirgends. Auch seine unmittelbaren Nachfolger besorgten eher die Entwicklung der Rechnungsmethoden als die Grundlegung der Theorie. Der Verfasser des III. Bandes konnte ja den Gegenstand in einigen wenigen Seiten erledigen.

Der Periode der Schöpfung folgt aber, wie gewöhnlich, eine Periode, in welcher das Werk der Schöpfer geordnet und vervollkommnet wird, eine Periode, die, wenn auch etwa nicht so glänzend, doch ebenso wichtig und fruchtbar ist als die frühere[2]), denn aus dieser Anordnungsarbeit entsteht, wenn sie von genialen Geistern geleistet wird, wohl manches wesentlich Neue und Wertvolle; so z. B. die Theorie der elliptischen Funktionen.

Eine Aufgabe der neuen Periode sollte selbstverständlich die sein, die Prinzipien der Infinitesimalrechnung auf einen festen Boden zu gründen. In dieser Hinsicht zeigen sich zwei entgegengesetzte Tendenzen; einerseits bestrebt man sich, die Stichhaltigkeit der Infinitesimalrechnung nachzuweisen, andererseits versucht man, die Leibnizsche Methode durch andere, vermeintlich strengere zu ersetzen.

[1]) Siehe Vivanti, Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica, 2. Aufl., Napoli 1901. [2]) Siehe Marie, Hist. des sc. math. et phys., VIII, Paris 1886, p. 67.

Als Hauptvertreter der ersten Tendenz kann man d'Alembert und Carnot, als Hauptvertreter der zweiten kann man Lagrange nennen.

D'Alembert (1717—1783, diese Vorl., III², S. 510) behauptet[1], das Unendliche der Analysis sei nichts anderes als die Grenze, welcher das Endliche sich unbeschränkt nähert, ohne dieselbe jemals zu erreichen. Sagt man also, die Größe:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

sei unendlich, so ist damit nur gemeint, daß man stets so viele Glieder der Folge annehmen kann, daß die Summe derselben eine beliebig vorgeschriebene Größe übertrifft. Auf analoge Weise wird das Unendlichkleine erklärt. Die Differentialrechnung setzt sich vor, die Grenzwerte der Verhältnisse je zweier endlichen, durch bestimmte Gesetze verbundenen Größen auszuwerten; sie hat nur mit endlichen Größen zu tun; das Unendliche und das Unendlichkleine sind bloß Kunstwörter, die die Mathematiker erfunden haben, um die Ergebnisse ihrer Forschungen kürzer und einfacher aussprechen zu dürfen.

Dem d'Alembertschen Begriffe, nach welchem die Infinitesimalrechnung nur eine Grenzrechnung ist, schließt sich Kästner (1719—1800, diese Vorl., III², S. 576, IV, S. 456)[2]) an. Nimmt n unbeschränkt zu, so hat $\frac{an+b}{an}$ die Einheit zur Grenze; das läßt sich aber dadurch ausdrücken, daß man sagt, es dürfe die endliche Größe b gegen die unendliche Größe an vernachlässigt werden. Auf ähnliche Weise lassen sich die unendlichen und die unendlichkleinen Größen der verschiedenen Ordnungen rechtfertigen. Ist Z eine Funktion von z, welche für den Wert $z + e$ von z den Wert $Z + E$ annimmt, so heißt die Grenze, welcher sich $\frac{E}{e}$ bei abnehmenden E und e unbeschränkt nähert, das „Verhältnis der Differentiale" von Z und z; E und e heißen die „Differentiale". Auf Grund dieser Definition ergibt sich, unter der Voraussetzung, daß n eine ganze positive Zahl bezeichnet und $Z = z^n$ ist:

$$\lim \frac{E}{e} = nz^{n-1};$$

diese Formel läßt sich auf jeden reellen Wert von n erstrecken. Weiter unten mischt aber Kästner in die Definition des Differentials den Geschwindigkeitsbegriff ein. Die Differentiale dZ, dz von Z, z, sagt er, sind nicht die wirklichen Zuwächse dieser Größen, sondern die Zuwächse, welche dieselben in einer bestimmten Zeit erhalten

[1]) Mélanges de litt., d'hist. et de philos., Nouv. éd., T. 5, Amsterdam 1767, p. 239—252; Encyclopédie méthodique, Paris 1785, art. „Différentiel". [2]) Anfangsgründe der An. des Unendl., Halle, 1. Aufl. 1761, 2. Aufl. 1770.

würden, wenn sie sich diese ganze Zeit hindurch mit den Anfangsgeschwindigkeiten veränderten; das Verhältnis $\frac{dZ}{dz}$ ist also gleich dem Verhältnis der Geschwindigkeiten, es möge die Zeit endlich sein oder nicht, und wenn man die Zeit als unendlichklein ansieht, so geschieht das nur, um die Geschwindigkeiten als konstant betrachten zu dürfen. Die so verstandenen Differentiale sind nichts anderes als die Newtonschen Fluxionen. Man kann aber nach Maclaurin zeigen, daß das Verhältnis der Fluxionen von z^n und von z gleich nz^{n-1} ist; es stimmen also die Resultate der Fluxionsrechnung mit denjenigen der Leibnizschen Rechnung vollkommen überein, und man kann diese letztere mit Zuversicht gebrauchen.

Dieselben Ideen finden sich in Kästners Dissertation über das Unendliche[1]) wieder. Das Unendliche und das Unendlichkleine sind keine Größen; sie drücken bloß die Möglichkeit einer unbeschränkten Zu- oder Abnahme aus. Wenn wir sagen, das letzte Glied der Reihe:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

sei 0 und ihre Summe sei 1, so verstehen wir darunter nur, daß die Glieder der Reihe unbeschränkt abnehmen, und daß ihre Summe sich der 1 unbeschränkt nähert. Der Quotient zweier Funktionen einer Veränderlichen x nähert sich bei zunehmendem n dem Quotienten der Glieder höchster Ordnung; die Sache verhält sich daher ganz so, als wenn man alle übrigen Glieder unterdrückte.

Unter den Anhängern von d'Alembert muß auch Gerdil genannt werden. Hyacinth Sigismund Gerdil, Barnabit, geboren am 23. Juni 1718 zu Samoens in Savoyen, war der Sohn eines Notars. Kaum 19 Jahre alt, wurde er zum Professor der Philosophie an der Universität zu Macerata ernannt; später war er Professor der Philosophie und dann der Moraltheologie an der Turiner Universität. Der Ruhm seiner Gelehrsamkeit, Wohltätigkeit und Frömmigkeit ver-

[1]) Dissertationes mathematicae et physicae quas Societati Regiae Scientiarum Gottingensi annis 1756—1766 exhibuit A. G. Kästner, Altenburg 1771 (vgl. diese Vorlesungen, IV, S. 26), Diss. V: De vera infiniti notione (p. 35—38). Siehe auch Diss. XI: De translatis in dictione geometrarum (p. 79—88), Diss. XIII: De lege continui in natura (p. 142—149), wo ein früheres Inauguralprogramm des Verfassers mit dem Titel: De cautione in neglectu quantitatum infinite parvarum observanda (Leipzig 1746) zitiert wird. — Auf Kästners Ideen bezieht sich Ludolphus Hermannus Tobiesen (1771—1839) in seiner schon oben S. 26 erwähnten Schrift: Principia atque historia inventionis calculi differentialis et integralis nec non methodi fluxionum, Göttingen 1793.

breitete sich mehr und mehr. Der König wählte ihn zum Lehrer seines Sohnes, des späteren Karl Emanuel IV.; viele Akademien zählten ihn unter ihren Mitgliedern. Im Jahre 1777 wurde er Kardinal, und beim Tode von Pius VI. hätte er den päpstlichen Thron bestiegen, hätten sich nicht politische Gründe dagegen geltend gemacht. Er starb zu Rom am 12. August 1802. Seine Schriften sind sehr zahlreich und betreffen meistens Theologie und Philosophie.

Gerdil[1]) geht noch weiter als d'Alembert, indem er nicht nur behauptet, daß die unendlichen und unendlichkleinen Größen für die Infinitesimalrechnung entbehrlich sind, sondern auch, daß das absolut Unendliche unmöglich ist. Die sieben von ihm angeführten Beweise dieser Behauptung sind weder bündig noch wesentlich neu, und bieten für uns wenig Interesse dar.

Die Abhandlung von Gerdil gab zu einer ganz kurzen, aber interessanten Note Lagranges[2]) Veranlassung. In dieser Note bemerkt Lagrange, daß man in der Infinitesimalrechnung von unrichtigen Voraussetzungen ausgeht, daß aber andere in der Rechnung begangene Fehler die Unrichtigkeit aufheben; so z. B. ist es eine falsche Annahme, daß die Tangente die Verlängerung einer Seite eines Unendlichvieleckes sei; da man aber während der Rechnung Größen als verschwindend vernachlässigt, die bloß unendlichklein sind, so werden beide Unrichtigkeiten sich gegenseitig tilgen. Erst nachdem man bewiesen hat, daß eine solche Aufhebung wirklich stattfindet, sei man berechtigt, das Unendlichkleine als eine wirkliche Größe zu betrachten.

Der Begriff von der Ausgleichung der Fehler war nicht neu, er kommt schon ein Vierteljahrhundert früher bei Berkeley (diese Vorl., III², S. 741 ff.) vor, ob es gleich keinen Beleg dafür gibt, daß Lagrange dessen Schriften gekannt hat. Merkwürdig ist es, daß Lagrange, gleich zu Anfang seiner glänzenden Laufbahn, auf die Diskussion von der Stichhaltigkeit der Prinzipien der Infinitesimalrechnung geführt wurde, ein Gegenstand, der ihn bis zu seinen letzten Jahren beschäftigte und auf welchen er nach mehr oder minder langen Intervallen wiederholt gekommen ist. Während er aber anfangs die Strenge der Infinitesimalrechnung zu verteidigen suchte, kam er später auf den Gedanken, diese Rechnung durch eine strengere zu ersetzen. Einen Grundriß seiner neuen Methode gab er in einer Abhandlung von 1772[3]), aber erst 1797 entwickelte er dieselbe in seinen berühmten

[1]) De l'infini absolu considéré dans la grandeur, Misc. Taur., T. II, 1760—61, P. III, p. 1—45. [2]) Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal, Misc. Taur., T. II, 1760—61, P. III, p. 17—18; Oeuvres, T. VII, Paris 1877, p. 597—599. [3]) Sur une nouvelle espèce de calcul relatif

Vorlesungen über analytische Funktionen[1]). In der Zwischenzeit (1784) hatte er durch die Berliner Akademie, deren Vorsitzender er war, die Gelehrten der ganzen Welt aufgefordert, das hochwichtige Problem aufzulösen; woraus erhellt, erstens, daß er damals mit seiner eigenen Lösung nicht ganz zufrieden war, zweitens, daß, wenn auch die Akademie eine der vorgelegten Abhandlungen krönte, die darin vorgeschlagene Methode seinen Geist so wenig befriedigte, daß er bald seine alten Ideen wieder aufnahm.

Über die erwähnte Preisfrage müssen wir etwas ausführlicher berichten. Man verlangte[2]) „eine lichtvolle und strenge Theorie dessen, was man Unendlich in der Mathematik nennt". „Die höhere Geometrie", lautete die Aufforderung, „benutzt häufig unendlichgroße und unendlichkleine Größen; jedoch haben die alten Gelehrten das Unendliche sorgfältig vermieden, und einige berühmte Analysten unserer Zeit bekennen, daß die Wörter unendliche Größe widerspruchsvoll sind. Die Akademie verlangt also, daß man erkläre, wie aus einer widersprechenden Annahme so viele richtige Sätze entstanden sind, und daß man einen sicheren und klaren Grundbegriff angebe, welcher das Unendliche ersetzen dürfe, ohne die Rechnungen zu schwierig oder zu lang zu machen."

Der Preis wurde der Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs (Berlin 1786)[3]) erteilt. Verfasser dieser Abhandlung war Simon Antoine Jean Lhuilier, geboren in Genf 1750, gestorben daselbst 1840, seit 1795 Professor der Mathematik an der Akademie in Genf, dessen Namen in mehr als einem Abschnitte dieses Bandes erscheint (s. o. S. 84, 432).

Lhuilier erhebt wohlbekannte Bedenken gegen den Unendlichkeitsbegriff. Es zerlegt z. B. eine Ebene den Raum in zwei gleiche Teile[4]), und dasselbe tut eine der ersteren parallele Ebene; jedoch ist

à la différentiation et à l'intégration des quantités variables, Nouv. Mém. Berlin, 1772 (publ. 1774), p. 186—221; Oeuvres, T. III, Paris 1869, p. 441 bis 476.

[1]) Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies, 1. Aufl., Paris 1797, 2. Aufl., Paris 1813 (wieder abgedruckt in Oeuvres, T. IX, Paris 1881). Siehe auch: Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques, Journ. Éc. Polyt., VI. Cahier, T. II, 1799; Oeuvres, T. VII, Paris 1877, p. 325—328.
[2]) Nouv. Mém. Berlin 1784 (publ. 1786), p. 12—13. [3]) Eine lateinische Bearbeitung erschien 1795 in Tübingen unter dem Titel: Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris.
[4]) „. . . telles qu'on ne puisse rien dire de l'une qu'on ne puisse également dire de l'autre".

von den beiden letzteren Halbräumen der eine größer, der andere kleiner als einer der ersteren. Ferner kann der unendliche Raum keine Figur aufweisen; eine Figur setzt nämlich eine gewisse Einrichtung der Grenzen voraus, das Unendliche aber läßt keine Grenzen zu. Noch unbegreiflicher ist das Unendlichkleine; es sollte dieses eine jedes Größencharakters entbehrende Größe sein. In der Infinitesimalrechnung wird das Unendlichkleine bald als verschwindend, bald als nicht verschwindend betrachtet; jedoch gleichen sich die Rechnungen von selbst aus, da, was vernachlässigt wird, nicht unvergleichbar, sondern genau gleich Null ist. Es empfiehlt sich also, die Infinitesimalrechnung durch die Grenzmethode zu ersetzen, ohne jedoch die Ausdrucksweise und die Bezeichnungen der ersteren zu verlassen. Ob und wie Lhuilier seinen Gedanken ausgeführt hat, werden wir weiter unten sehen.

Die Berliner Preisfrage gab auch zu einer anderen Schrift Veranlassung, die aber der Akademie nicht vorgelegt wurde. Wenzeslaus Johann Gustav Karsten (s. o. S. 74, 357), Professor der Mathematik und Naturlehre in Halle, geboren 1732, gestorben 1787, war damals mit der Abfassung seines Handbuches der Analysis und höheren Geometrie beschäftigt und wurde natürlich dazu geleitet, die aufgeworfene Frage zu berücksichtigen. Hieraus entstand die erste seiner Mathematischen Abhandlungen, welche den folgenden Titel trägt: Vom Mathematisch-Unendlichen mit Rücksicht auf eine im Jahre 1784 aufgegebene Preisfrage. Wenn der Mathematiker sagt, es sei $\frac{1}{m} = 0$ für $m = \infty$, so bedeutet das nach Karsten, daß $\frac{1}{m}$ bei zunehmendem m beständig abnimmt, und daß die Gleichung $\frac{1}{m} = 0$ nur dann gelten würde, wenn m einen Wert erhielte, den es nicht erreichen kann, so lange man fortzählt. Auch das Unendlichkleine ist bloß eine Redensart; die Regeln der Infinitesimalrechnung lassen sich durch die Grenzmethode rechtfertigen, so daß es nutzlos erscheint, neue Methoden zu bilden, wie es die Akademie verlangt. Dieselben Begriffe, wenn auch unter einer etwas veränderten Form, finden sich in der fünften Abhandlung[1]) wieder, deren Titel ist: Vom Berührungswinkel und Krümmungskreise. Von den beiden entgegengesetzten Meinungen, deren Hauptvertreter Clavius

[1]) Die Titel der drei übrigen Abhandlungen lauten: 2. Von den Parallellinien, und den neueren Bemühungen, die Theorie davon zu ergänzen; 3. Über eine Stelle in des Herrn Lamberts Briefwechsel, von verneinten und unmöglichen Wurzelgrößen; 4. Von den Logarithmen der verneinten und unmöglichen Größen.

und Le Peletier sind[1]), schließt sich Karsten derjenigen des letzteren an, indem er behauptet, der Berührungswinkel sei genau gleich Null. Er zeigt aber, daß diese Behauptung nicht im mindesten hindert, die Verschiedenheit der Krümmungsmasse der eine gemeinschaftliche Tangente besitzenden Linien zu begreifen.

Der Berliner Preisfrage verdanken wir vermutlich auch Carnots Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal, die zwar erst im Jahre 1797 erschienen, die aber, wie der Verfasser in seiner Vorrede angibt, schon lange fertig standen[2]).

Lazare Nicolas Marguerite Carnot, geboren am 13. Mai 1753 zu Nolay in Frankreich, wurde Genieoffizier, dann Mitglied der Assemblée nationale und des Konvents (1791), wo er für das Todesurteil des Königs stimmte. Als Mitglied des Comité de salut public (1793) verdiente er den ehrenvollen Beinamen eines organisateur de la victoire. Später war er Minister unter Napoleon; als dieser aber die Kaiserkrone annahm, trat Carnot ins Privatleben zurück. Nach dem unglücklichen russischen Feldzuge bot er wieder seine Dienste dem Vaterlande an, und zeichnete sich bei der Verteidigung von Antwerpen aus. Er war wieder Minister beim hunderttägigen Kaisertum Napoleons, und wurde nach dessen Falle in eine Proskriptionsliste einbegriffen; er erhielt seinen Wohnsitz in Magdeburg angewiesen, wo er am 22. August 1823 starb.

In seinen Réflexions unternimmt es Carnot, nachzuweisen, daß die Infinitesimalmethode ganz streng ist, und daß es daher keinen Grund dafür gibt, auf diese Methode zu verzichten. Dazu untersucht er zunächst, wie der menschliche Verstand zu dem Grundbegriffe dieser Methode gelangt sein möge. Die Unmöglichkeit, eine genaue Auflösung gewisser Probleme zu erhalten, führte, meint er, zum Versuche, dieselben annäherungsweise aufzulösen, indem man die Daten der Probleme durch andere ersetzte, die von diesen so wenig verschieden wären, daß man die in den Endresultaten entstehenden Fehler vernachlässigen dürfte. Carnot führt das folgende Beispiel an: Es solle die Tangente MT zu einem Kreis MBD in einem Punkt M geführt werden (Fig. 73). Sei a der Radius, C der Mittelpunkt, BD ein Durchmesser, MP die zu BD senkrechte durch M gehende Gerade; man setze:

$$DP = x, \quad MP = y,$$

[1]) Bd. II[2] u. III[2] passim; Vivanti, a. a. O. [2]) Eine deutsche Übersetzung mit sehr interessanten Noten ist von J. K. Hauff herausgegeben worden unter dem Titel: Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung (Frankfurt a. M. 1800). Auch eine italienische Übersetzung von G. B. Magistrini (Pavia 1803) liegt vor.

und suche, die Subtangente TP zu bestimmen. Dazu betrachte man den Kreis als ein Vieleck, und es sei NM eine Seite desselben, NO die Senkrechte zu DB durch N, MQ die Senkrechte zu NO durch M; die Verlängerung von NM gibt annäherungsweise die Tangente an, so daß die angenäherte Beziehung stattfindet:

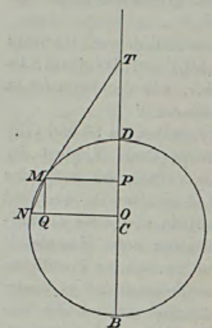

Fig. 73.

$$(1) \qquad \frac{MQ}{NQ} = \frac{TP}{y}.$$

Andererseits ist:

$$y^2 = 2ax - x^2,$$
$$NO^2 = 2a \cdot DO - DO^2;$$

diese letzte Gleichung läßt sich schreiben:

$$(y + NQ)^2 = 2a(x + MQ) - (x + MQ)^2,$$

und wenn man die erste Gleichung abzieht:

$$2y \cdot NQ + NQ^2 = 2(a - x) MQ - MQ^2,$$

oder:

$$\frac{MQ}{NQ} = \frac{2y + NQ}{2(a-x) - MQ},$$

also wegen (1):

$$(2) \qquad TP = y\,\frac{2y + NQ}{2(a-x) - MQ}.$$

Nun sind MQ und NQ kleiner als MN, folglich vernachlässigbar, und man hat annäherungsweise:

$$TP = \frac{y^2}{a-x}.$$

Es ist aber überraschend, daß diese Lösung nicht angenähert, sondern streng richtig ist. Woher kommt das? Da wir von einer ungenauen Voraussetzung ausgegangen sind, so ist die Gleichung (2) notwendig ungenau; sie ist es aber um so weniger, je kleiner MN ist, und wird ganz genau, wenn MN und somit MQ und NQ verschwinden. Es hat hier eine gegenseitige Aufhebung der Fehler stattgefunden[1]); und dasselbe geschieht in allen Fällen. Wie kann man

[1]) Es kommt hier der Begriff von der Ausgleichung der Fehler vor, welchen man schon bei Berkeley und bei Lagrange gefunden hat; ob Carnot seine Vorgänger gekannt hat oder nicht, möge dahingestellt bleiben. Einem anderen Vorgänger, N. Fiorentino, werden wir weiter unten begegnen. Es möge hier auch die Aussage von Segner (s. u.) erwähnt werden, daß das Gleichheitszeichen in einer Differentialgleichung nicht die Gleichheit, sondern das Streben nach Gleichheit bedeutet.

aber erkennen, daß die Fehler sich aufgehoben haben? Die in den Rechnungen vorkommenden Größen sind teils bestimmt, wie TP, MP, BP, teils unbestimmt, wie MN, MQ, NQ; die letzteren schleichen sich in die Rechnungen ein, wenn wir zur Erleichterung gewisse Grössen durch andere ersetzen, die von diesen wenig verschieden sind, und von diesen ausschließlich hängen daher die Fehler ab, mit welchen die Resultate behaftet sind. Sobald also sämtliche willkürliche Größen aus den Rechnungen entfernt worden sind, können wir mit Sicherheit annehmen, daß die Fehler sich aufgehoben haben.

Kann eine willkürliche Größe (wie NO) so wenig verschieden von einer bestimmten (wie MP) angenommen werden, als man will, so sagt man, die letztere sei die Grenze der ersteren, und die Differenz (nämlich NQ) sei unendlichklein; eine unendlichkleine Größe ist also eine willkürliche Größe, welche die Null zur Grenze hat. Die ungenauen Gleichungen (wie (2)) werden zu genauen, sobald man die in denselben vorkommenden willkürlichen Größen durch deren Grenzen ersetzt. Dadurch erklärt sich, wie die scheinbar ungenaue Regel von der Vernachlässigung der unendlichkleinen Größen zu genauen Resultaten führen kann.

Will man aber die Unbequemlichkeit vermeiden, mit ungenauen Größen zu tun zu haben, so kann man die unendlichkleinen Größen als streng verschwindend betrachten, mit der alleinigen Vorsicht, die etwa vorkommenden Verhältnisse je zwei solcher Größen durch deren Grenzen zu ersetzen.

Wird also gefragt, ob man die unendlichkleinen Größen als verschwindend betrachten muß oder nicht, ein Dilemma, das zu vielen Diskussionen Veranlassung gegeben hat, so läßt sich antworten: man kann nach Belieben ebenso den einen wie den anderen Standpunkt behalten.

Ist so die Strenge der Infinitesimalrechnung gesichert, so bleibt nur noch übrig, zu bemerken, daß sie die Grenzmethode, mit welcher sie in den Resultaten übereinstimmt, an Einfachheit weit übertrifft, insofern sie sich vorsetzt, jeder Grenzbestimmung zu entbehren und mit bloß algebraischen Rechnungen zu verfahren. Wird man also, fragt Carnot, auf die unermeßlichen Vorteile verzichten, die die Infinitesimalmethode darbietet, aus Furcht, sich auf einen Augenblick von dem genauen Verfahren der Elementargeometrie zu entfernen? Wird man einem ebenen und bequemen Wege einen dornigen Pfad vorziehen, auf welchem es so schwer ist, sich nicht zu verirren?

Der Standpunkt von Carnot ist richtig, aber sein Verfahren ist weder so einfach, als es sein dürfte, noch ganz vollständig. Um nachzuweisen, daß die ungenauen Gleichungen sich durch Vertilgung der unendlichkleinen Größen in genaue verwandeln, braucht man nur die unendlichkleine Größe als eine willkürliche Größe zu definieren; denn, da nach dieser Definition die unendlichkleinen Größen sich so klein annehmen lassen, daß die aus deren Vertilgung hervorgehenden Fehler kleiner sind als jede beliebig vorgegebene Größe, so sind diese Fehler genau gleich Null. Es findet also wirklich eine Aufhebung der Fehler statt, nicht aber durch gegenseitige Ausgleichung („compensation des erreurs"), wie Carnot meint, sondern dadurch, daß jeder Fehler für sich selbst zu Null wird. Es ist ferner zu beachten, daß sich Carnot mit der Bestätigung der Tatsache von der Fehleraufhebung begnügt, ohne nach deren Grunde zu suchen; hätte er das getan, so hätte er den Grund darin gefunden, daß, wie soeben gesagt, jeder Fehler für sich verschwindet.

Manche andere Schriftsteller bemühten sich, mit größerem oder kleinerem Erfolg, die Strenge der Leibnizschen Methode außer Zweifel zu legen.

Nach Johann Andreas von Segner (diese Vorl., III², S. 609, IV, S. 74)[1]) ist der Unendlichkeitsbegriff bloß ein negativer Begriff, denn unendlich ist was keine Grenzen hat; um auszudrücken, daß zwei parallele Linien nicht zusammentreffen, sagt man, sie schneiden sich im Unendlichen. Man kann aber dem Unendlichen eine positive Bedeutung geben. Behauptet man, zwei parallele Geraden haben einen im Endlichen liegenden gemeinschaftlichen Punkt, so begeht man einen desto kleineren Fehler, je größer der Abstand des Punktes ist; wäre also der Abstand größer als jede angebbare Größe, so würde der Fehler verschwinden. Bezeichnen wir mit M den Ozean, mit P einen Tropfen Wasser, so ist es uns unmöglich, das Verhältnis $\frac{M}{P}$ von $\frac{1}{0}$ zu unterscheiden, wenn sie auch voneinander sachlich verschieden sind, denn unser Begriff von M und von $M \pm P$ ist ganz derselbe; das zeigt, daß wir fähig sind, das Verhältnis $\frac{1}{0}$ gewissermaßen zu

[1]) Segner, Elementa analyseos finitorum, Halle 1758; Elementorum analyseos infinitorum Pars prima, Halle 1761, Pars secunda, Halle 1763.

begreifen. Die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{1}{0}$ ist nur dann möglich, wenn a beliebig zunehmen darf; sie drückt aus, daß die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{1}{n}$ für keinen nicht verschwindenden Wert von n besteht. Ist $\frac{a}{b} = \frac{1}{0}$, so heißt a unendlich in bezug auf b; ist b eine endliche Größe, so schreibt man $a = \infty$, und es folgt:

$$\infty \pm b = \infty,$$

wodurch sich alle Regeln der Differentialrechnung rechtfertigen lassen.

Jacopo Belgrado, Jesuit, geboren zu Udine 1704, gestorben daselbst 1789, Verfasser mehrerer mechanischer und physikalischer Schriften, veröffentlichte in höchst eleganter Ausstattung ein dem elfjährigen Herzog von Parma gewidmetes, zweibändiges Werk, welches über 200 meistens mechanische Probleme enthält.[1]) In der Einleitung zum zweiten Bande spricht Belgrado seine Meinung über das Unendliche aus. Die Linie, sagt er, besteht aus Punkten und wird durch das Fließen eines Punktes erzeugt; der Punkt ist ein Unendlichkleines in bezug auf die Linie. Das Unendlichkleine ist also kein bestimmter Teil des Endlichen, es ist kleiner als jeder noch so kleine Teil. Hieraus folgt, daß zwei Größen einander gleich sind oder als solche betrachtet werden dürfen, wenn ihre Differenz unendlichklein ist. Nach Belgrado sind die Antworten von Leibniz auf die Angriffe Nieuwentijts (diese Vorl., III², S. 254) keineswegs überzeugend; er schließt sich den von Torelli in seinem Werke De nihilo geometrico auseinandergesetzten Begriffen an.

Da der letztgenannte, von seinen Zeitgenossen sehr geschätzte Mathematiker im III. Bande nicht berücksichtigt worden ist, so möge es uns erlaubt werden, hier diese Lücke auszufüllen.

Giuseppe Torelli (diese Vorl., IV, S. 34 und 617)[2]), geboren zu

[1]) Belgrado, De utriusque analyseos usu in re physica, 2 Bde., Parma 1761—62. Der erste Band (De analyseos vulgaris usu in re physica) umfaßt 113 Probleme über Hydraulik (23), Mechanik (14), Astronomie (12), Optik (10), Ballistik (4), Zentrobarik (2), Pneumatik (6), Architektur (9), Meteorologie (2), Hygrometrie (1), Bewegung (8), Pendel (6), Stoß (4), Kohärenz (4), Akustik (1), Nautik (1), Geographie (1), Gnomonik (1), Zinse und Glücksspiele (4). Der zweite Band (De analyseos infinitorum usu in re physica) umfaßt 100 Probleme über Nautik (13), Hydrostatik (3), Hydraulik (9), Mechanik (7), Dynamik (14), Ballistik (3), Atmosphärik (3), Geographie (3), Architektur (2), Zentripetalkraft (14), Optik (9), Fortpflanzung der Bewegung (5), Schwingungsbewegung (6), Widerstände (9). [2]) Siehe drei Nachrufe von Ippolito Pindemonte (1753—1828) in dessen Werken; einer von diesen ist aus den Mem. Soc. It. (1) II, 2 (1784), p. III—XXXIV abgedruckt.

Verona am 3. November 1721, gestorben am 18. August 1781, war Dichter, Philosoph und Mathematiker. Sein Hauptwerk, welches neulich aus der Vergessenheit durch O. Stolz[1]) hervorgerufen wurde, ist: De nihilo geometrico libri duo (Verona 1758). Nach Torelli ist die Differentialrechnung nichts anderes als eine Rechnung mit Nullen. Man muß aber die metaphysische und die geometrische Null unterscheiden; die zwei Begriffe werden vom ersten bzw. zweiten Teil der folgenden Definition bestimmt: „Nihilum est, per quod unumquodque eorum, quae non sunt, dicitur nihilum. Dicitur autem unum non esse, quod antea cum esset, non esse amplius concipitur". Die geometrische Null steht zu sich selbst in demselben Verhältnis wie die Einheit zur Einheit. Die Vergleichung zweier gleichdimensionaler Größen ist „ejusdem generis" oder „diversi generis", je nachdem die beiden Größen von Null verschieden sind, oder eine derselben gleich Null ist. Auf diese Grundlagen sich stützend, beweist Torelli im ersten Buche eine Reihe von Sätzen, welche meistens die Vergleichung von Nullen oder von Unendlichen betreffen. Wird eine beliebige Größe von sich selbst subtrahiert, so entsteht die (geometrische) Null; denn dadurch hört auf zu sein, was früher war. Die Null $1-1$, welche aus der Subtraktion der Einheit von sich selbst entsteht, heißt „nihilum ordine primum"; und es ist $x-x=x(1-1)$. Bezeichnet x eine zweidimensionale Größe, und subtrahiert man jede ihrer Dimensionen von sich selbst, so ist das Produkt beider Differenzen $x(1-1)^2$; daher ist die Vergleichung der aus Subtraktion entstehenden Null $x(1-1)$ mit der aus Subtraktion und Multiplikation entstehenden $x(1-1)^2$ eine „comparatio diversi generis", da man dabei x mit x, $1-1$ mit $1-1$ und 1 mit $1-1$ vergleichen muß. Aus der Division von 1 mit 0 entsteht ∞. Es ist nämlich:

$$x(1-1)+x=x,$$

was beweist, daß man durch Division von x mit $1-1$ als Quotienten und als Rest x erhält; da aber der Rest dem Dividenden gleich ist, so kann die Division ohne Ende fortgeführt werden, und der Gesamtquotient ist eine Größe, welche keine Grenzen hat, d. i. eine unendliche Größe („quod autem nullos habet fines, illud infinitum esse dicitur"). — Daß die Torellische Methode nichts anderes ist als die maskierte Grenzmethode, erhellt aus den geometrischen Anwendungen, welche den Stoff des zweiten Buches bilden. Bezeichnen wir der Kürze wegen mit 0_α die aus der Größe α entstehende Null $\alpha(1-1)$, so ist allgemein:

[1]) Größen und Zahlen, Leipzig 1891.

$$\frac{0_\alpha}{0_\beta}=\frac{\alpha(1-1)}{\beta(1-1)}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ist insbesondere y die Ordinate, v die Subtangente einer Kurve, so hat man:

$$\frac{0_y}{0_v}=\frac{y}{v};$$

da aber zur Bestimmung der Tangente (d. i. derjenigen Geraden, welche früher die Kurve in zwei Punkten schnitt, jetzt aber sie nicht mehr schneidet) nötig ist, das Verhältnis $\frac{y}{v}$ zu kennen, so kann man sich statt dieses vorsetzen, das Verhältnis $\frac{0_y}{0_v}$ zu bestimmen. Diese Bestimmung geschieht für die Parabel folgendermaßen. Es seien (Fig. 74) A der Scheitel, F, E zwei beliebige Punkte der Kurve, BF, IE die zugehörigen Ordinaten, D der Durchschnitt von IE mit der durch F parallel zur Achse gezogenen Geraden, H, G die Schnittpunkte der Sehne FE und der Tangente in F mit der Achse, AC das latus rectum. Dann ist:

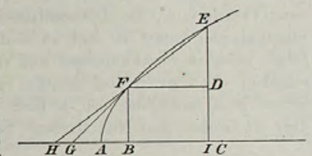

Fig. 74.

$$AC\cdot AI=IE^2,$$

oder:

$$AC(AB+BI)=(ID+DE)^2=(BF+DE)^2,$$

ferner:

$$AC\cdot AB=BF^2,$$

also:

$$AC\cdot BI=2BF\cdot DE+DE^2,$$

oder:

$$AC(HI-HB)=2BF(IE-BF)+(IE-BF)^2.$$

Fällt E mit F zusammen, so ist:

$$HI-HB=GB-GB=0_v,\quad IE-BF=BF-BF=0_y,$$

also:

$$AC\cdot 0_v=2BF\cdot 0_y+0_y^2.$$

Da aber die Vergleichung der beiden Glieder rechts eine comparatio diversi generis ist, so erhält man durch Vernachlässigung von 0_y^2 („neglecto ab altera parte nihilo orto ex BF in semetipsum ducto"):

$$\frac{0_y}{0_v}=\frac{AC}{2BF}.$$

Weitere Anwendungen seiner Methode hat **Torelli** in einer späteren Schrift mit dem Titel **Geometrica** (Verona 1769) gegeben, wo er einige geometrische Probleme zuerst durch die reine Geometrie, dann durch die Nullrechnung auflöst. Diese Schrift bietet nichts Merkwürdiges dar, ausgenommen etwa einen kuriosen Fehler (s. o. S. 617); **Torelli** meint, eine neue Quadratrix (**quadrataria scalena**) erfunden zu haben, und bemerkt nicht, daß diese mit der gewöhnlichen Quadratrix übereinstimmt.

Eine lange Diskussion über die Prinzipien der Infinitesimalrechnung enthält der höchst interessante Briefwechsel zwischen **Lambert** und von **Holland** aus den Jahren 1765 und 1766.[1]) Beide sind darüber einig, daß das Unendlichkleine bloß eine Fiktion ist. Der Infinitesimalbegriff gibt aber, wie von **Holland** bemerkt, der Meinung Veranlassung, die Differentialrechnung sei nur eine Annäherungsmethode; besser ist, Null zu nennen, was Null ist. Man muß jedoch zwischen verschwundenen und verschwindenden Größen unterscheiden; die ersteren sind sämtlich gleich, die letzteren dagegen können auch verschieden sein, je nach der Geschwindigkeit, mit welcher die Größen nach Null streben. So ist z. B.:

$$\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{0}{0} = 2a$$

für $x = a$. Die Vernachlässigung von dx^2 rechts in der Formel:

$$d(x^2) = 2x\,dx + dx^2$$

geschieht nicht **precario modo**, sondern notwendig; es ist nämlich:

$$d(x^2) = 2x\,dx + dx^2 = (2x + 0)0 = 2x \cdot 0 = 2x\,dx.$$

Ist $\frac{A}{C} = 1$ für $A = C = 0$, so kann man, „so oft von letzten Verhältnissen die Rede ist", A statt C und C statt A nehmen; so z. B. kann man den Bogen durch die Sehne ersetzen, was zum ungenauen und dem Stetigkeitsprinzip widersprechenden Begriffe einer aus unendlich vielen Strecken bestehenden Kurve geführt hat. Nicht minder fiktiv als das Unendlichkleine ist das Unendliche, welches ein negativer Begriff ist und eine Unmöglichkeit ausdrückt. Diese Unmöglichkeit ist aber, wie von **Holland** scharfsinnig bemerkt, von solcher Beschaffenheit, daß man sich derselben unbeschränkt annähern darf, während man das Gleiche von der Unmöglichkeit $a\sqrt{-1}$ nicht sagen kann; wollte man in positiver Form ausdrücken, daß Gott un-

[1]) **Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel**, herausgegeben von **Johann Bernoulli**, 5 Bde., Berlin 1781—87; Bd. I, S. 11 ff.

sterblich ist, so könnte man sagen, er sterbe nach der Zeit $a\sqrt{-1}$, nicht aber, er sterbe nach der Zeit ∞.

Der später als „Prinzip von der Ersetzung der Infinitesimalgrößen" bezeichnete Grundbegriff ist in das klarste Licht gesetzt worden von **Riccati** und **Saladini** in ihren noch weiter unten zu besprechenden **Institutiones analyticae** (2 Bde., Bologna 1765—1767). **Vincenzo Riccati** (vgl. diese Vorl., III^2, S. 474, IV, S. 457), Jesuit, Sohn des berühmten **Jacopo Riccati**, geboren den 11. Januar 1707 zu Castelfranco bei Treviso, gestorben daselbst den 17. Januar 1775, war Professor der Literatur und Rhetorik zu Piacenza, Padua und Parma, dann Professor der Mathematik zu Bologna; er schrieb über Mathematik, Physik und Mechanik, und beschäftigte sich auch mit hydraulischen Fragen. **Girolamo Saladini**, Cölestinermönch, geboren zu Lucca 1731, gestorben zu Bologna den 1. Juni 1813, lehrte an der Universität zu Bologna erst Geometrie, dann Astronomie, dann höhere Mathematik. Die Grundlagen der Infinitesimalmethode, so lehren **Riccati** und **Saladini**, lassen sich auf ein einziges Lemma reduzieren, daß nämlich zwei Größen, deren Unterschied kleiner werden kann als jede vorgegebene Größe, zuletzt einander gleich werden. Haben wir also mit zwei derartigen Größen zu tun, so können wir dieselben **der Kürze** wegen einander gleich setzen; dadurch wird gar nichts vernachlässigt, da unendlich kleine Differenzen weglassen nichts anderes ist als genaue Gleichungen zwischen den Grenzen schreiben.

Die Ideen von **Euler** über das Unendlichkleine sind schon bekannt (diese Vorl., III^2, S. 749) und kommen auch in seiner Integralrechnung (1768) wieder vor; dieselben zu rechtfertigen und ihre Übereinstimmung mit dem Grenzbegriff zu zeigen, bestrebt sich sein Kommentator **Johann Philipp Grüson** (s. o. S. 72)[1]), Professor der Mathematik am Kadettenkorps in Berlin, dann an der Bauakademie und an der Universität, geboren zu Neustadt-Magdeburg am 2. Februar 1768, gestorben zu Berlin am 16. November 1857, der aber seinerseits, sonderbar genug, die Notwendigkeit fühlte, die **Leibnizsche** Methode durch eine neue Methode zu ersetzen (siehe unten).

Auch eine kleine Schrift von **Luino** vom Jahre 1770[2]) ist, trotz

[1]) **Grüson, Supplement** zu L. **Eulers Differenzialrechnung, worin ausser den Zusätzen und Berichtigungen, auch noch andere nützliche analytische Untersuchungen, welche grösstentheils die combinatorische Analysis betreffen, enthalten sind**, Berlin 1798. [2]) **Oggetto e principii del metodo flussionario**, Milano 1770, nach **Poggendorff**.

ihres Titels, der Verteidigung nicht nur der Fluxions-, sondern auch der Infinitesimalmethode gegen die Angriffe von Berkeley (diese Vorl., III², S. 737 ff.) gewidmet. Francesco Luino, Jesuit, geboren zu Lugano am 25. März 1740, gestorben zu Mailand am 7. November 1792, lehrte Astronomie und Mathematik zu Mailand, dann an der Universität zu Pavia; mußte aber wegen seiner zu kühnen philosophischen Ansichten diese Stadt verlassen und wanderte nach Mantua, wo er eine philosophische Schule stiftete. — Luino sagt, er hätte von seiten Berkeleys einen Lobspruch der Mathematik und zugleich des Glaubens erwartet, sowie auch den Schluß, daß die Prinzipien der Mathematik freilich begreiflicher sind als die des Glaubens, daß aber die Klarheit der ersteren nicht größer ist als die Glaubwürdigkeit der letzteren, und daß die menschliche Vernunft so wenig verletzt wird durch Aneignung der dunkelsten Dogmen, als durch Anerkennung der überzeugendsten mathematischen Beweise. Nach dieser Vorbemerkung kommt Luino zu seinem Hauptgegenstande, wobei er aber zur Klarlegung der Prinzipien der Differentialrechnung keinen wesentlichen Beitrag liefert. Er erwähnt eine Schrift von Boscovich[1]: De natura et usu infinitorum, et infinite parvorum (Rom 1740), in welcher gezeigt wird, daß sich die Fehler, die man dadurch begeht, daß man Größen durch andere ersetzt, die sich von diesen um Größen niederer Ordnung unterscheiden, während der Rechnung gegenseitig aufheben.

Auch Odoardo Gherli, Dominikaner, Professor der Theologie und Mathematik, geboren zu Guastalla bei Reggio 1730, gestorben zu Parma am 6. Januar 1780, spricht in seinen Elementi[2]) analoge

Riccardi (Bibl. mat. it.) sagt, daß diese Schrift keine typographische Angabe enthält, und auch das von mir durchgesehene, der Universitäts-Bibliothek zu Pavia gehörende Exemplar trägt weder Druckort noch Datum.

[1]) Der Abt Ruggiero Giuseppe Boscovich (s. o. S. 420), geboren zu Ragusa am 18. Mai 1711, war zugleich Philosoph, Dichter, Geodät, Astronom und Archäolog. Er wurde oft vom Papst über technische und ökonomische Fragen zu Rate gezogen, beschäftigte sich mit einer Gradmessung im päpstlichen Staat, machte lange Reisen und entdeckte die Trümmer von Troja. Er lehrte in Pavia, Mailand und Pisa, worauf er nach Frankreich übersiedelte als Direktor der optischen Abteilung der Marine. Später war er wieder in Italien, um die Drucklegung seiner Werke zu besorgen, welche in Bassano in fünf Bänden erschienen; aber der Schmerz, dieselben nicht so sehr gesucht zu sehen, als er hoffte, trübte seinen Geist, und nicht viel später starb er in Mailand, am 13. Februar 1787 (A. Fabroni, Elogio dell' Ab. Ruggiero Giuseppe Boscovich, Mem. Soc. It. (1) IV (1788), p. VII—XLVI). [2]) Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure, 7 Bde., Modena 1770—1777 (s. o. S. 47, 76).

Ideen aus. Die veränderlichen Größen werden als aus dem Fließen eines erzeugenden Elementes entstanden gedacht. Die zwischen 0 und einem endlichen Zuwachse liegenden Größenstufen heißen, wenn sie kleiner sind als jede angebbare Größe, unendlichklein. Solche Größen kommen in der Differentialrechnung vor; diese ist aber nicht auf dieselben begründet, sondern bedient sich dieser Größen, um die Grenzen veränderlicher Größen zu bestimmen, so daß die Differentialrechnung nichts anderes ist, als die Methode von den letzten Verhältnissen. Da also bei der Berechnung dieser Verhältnisse die unendlichkleinen Differenzen der veränderlichen Größen verschwindend sind, so dürfen sie vernachlässigt werden.

Nur der Vollständigkeit wegen erwähnen wir eine kleine Schrift von H. W. J. von Stamford[1]), geboren zu Bourges, gestorben zu Hamburg am 16. Mai 1807, Hauptmann im preußischen Ingenieurkorps, welche nichts Interessantes darbietet.

Mit den Grundlagen der Infinitesimalrechnung beschäftigte sich lange und wiederholt Johannes Schultz[2]), Hofprediger und Professor der Mathematik in Königsberg, geboren zu Mühlhausen am 11. Juni 1739, gestorben zu Königsberg am 27. Juni 1805, welcher auch ein

[1]) Versuch, die Grundsäzze des Differential- und Integralkalkuls vorzutragen, ohne die Begriffe von den unendlichkleinen Größen hineinzubringen, Berl. Mag. der Wiss. und Künste, II 1 (1784), S. 3—36. [2]) De geometria acustica seu solius auditus ope exercenda, Diss. prima, Königsberg 1775; De geometria acustica nec non de ratione 0:0 ceu basi calculi differentialis, Diss. secunda, Königsberg 1787. — Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen, Königsberg-Leipzig 1788. — Anfangsgründe der reinen Mathematik, Königsberg 1790. — Kurzer Lehrbegriff der Mathematik, 3 Bde., Königsberg 1797—1806. — Da der Titel der ersten dieser Schriften den Leser wohl stutzig machen kann, so halten wir es für angemessen, etwas davon zu sagen. Schultz setzt sich als Zweck vor, die Probleme der Feldmessungskunst mit alleiniger Hilfe des Gehörs aufzulösen. Will man drei Punkte B, C, D mit einem unsichtbaren Punkte A verbinden, so kann man aus der Kenntnis der Zeiten, in welchen ein und derselbe in A geschehene Schuß in B, C, D gehört wird, die Differenz der Abstände AB, AC, AD entnehmen; es kommt also alles auf das folgende geometrische Problem an: Die Abstände AB, AC, AD zu bestimmen, wenn BC, BD, $\widehat{BCD}$, $AB - AC$, $AC - AD$ gegeben sind. Liegen die zu betrachtenden Punkte nicht sämtlich in einer Ebene, so muß man vier Stationen B, C, D, E annehmen, und es entsteht das Problem: Die Kanten AB, AC, AD, AE einer viereckigen Pyramide zu bestimmen, wenn die Differenzen dieser Kanten und die Basis $BCDE$ gegeben sind. — Gehören im ersten Problem B, C, D einer und derselben Geraden an, so kommt AB in der Form $\frac{0}{0}$ vor, was dem Verfasser die Gelegenheit darbietet, ein langes Scholium den Prinzipien der Differentialrechnung zu widmen.

besonderes Werk diesem Gegenstande widmete. Schultz denkt die Infinitesimalgrößen als genau gleich Null, und die Differentialrechnung als eine Rechnung mit Nullen, welche die Bestimmung der letzten Verhältnisse der Inkremente als Zweck hat; man erhält dieselben dadurch, daß man in den Verhältnissen der Inkremente die Inkremente selbst gleich Null setzt, woraus folgt, daß die Differentialrechnung ganz streng ist. Das von Null verschiedene Unendlichkleine ist bloß eine Fiktion, welche aus der Analysis verbannt werden muß. Daß $\frac{0}{0}$ einen verschwindenden, endlichen oder unendlichen Wert annehmen kann, läßt sich wie folgt beweisen. Betrachtet man $\frac{0}{0}$ als ein Verhältnis, so gelten die Relationen:

$$0:0::\begin{cases} a:b \\ \infty:1, \\ 0:a \end{cases}$$

weil:

$$b\cdot 0=a\cdot 0,\quad 1\cdot 0=\infty\cdot 0,\quad a\cdot 0=0\cdot 0;$$

betrachtet man dasselbe als einen Bruch, so gelten die Relationen:

$$\frac{0}{0}=\begin{cases} \frac{a}{b} \\ \infty, \\ 0 \end{cases}$$

weil:

$$\frac{a}{b}\cdot 0=0,\quad \infty\cdot 0=0,\quad 0\cdot 0=0.$$

Leitet man aus $x=y^2$ die Relation $\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{1}$ ab, so ist dieses nichts anderes als $\frac{0}{0}=\frac{2y}{1}$; die Nullen dx, dy sind der Quantität nach gleich, der Qualität nach verschieden. Die Ähnlichkeit mit den Eulerschen und Torellischen Nullen ist einleuchtend.

Weiter verbreitet sich Schultz über den Begriff vom Unendlichen. Einige von seinen Bemerkungen über diesen Gegenstand verdienen hervorgehoben zu werden, da sie manche Ideen im Keime enthalten, deren Entwicklung der G. Cantorschen Mannigfaltigkeitslehre vorbehalten war. Das absolut Unendliche hat eine reelle Existenz; die absolut unendlichen Größen sind nicht sämtlich gleich und lassen sich untereinander vergleichen. Die „allereinfachste und erste" unendliche Menge ist $1+1+\cdots$; sie kann durch ∞ bezeichnet werden. Dann ist auch $2+2+\cdots=\infty$, denn jedes 2 kann durch $1+1$ ersetzt werden. In anderer Beziehung ist aber $2+2+\cdots=2\infty$, denn man kann die Reihe $2+2+\cdots$ in die zwei Reihen $1+1+\cdots$, $1+1+\cdots$ spalten.

Welcher von den beiden Standpunkten der richtige sei, hängt von der Natur der in jedem besonderen Falle zu behandelnden Frage ab. Hat man mit einer Linie zu tun, so kann $2+2+\cdots$ nichts anderes als $1+1+\cdots$ bedeuten (m. a. W., es kommt auf dasselbe hinaus, ob man auf eine Gerade unendlich viele Strecken von der Länge 1 oder von der Länge 2 nimmt); bewegt man sich dagegen in der Ebene oder im Raume, so kann man die Reihe in andere zerlegen, so z. B. kann man die Strecken $1+1+\cdots$ auf einer Geraden und die Strecken $1+1+\cdots$ auf einer anderen nehmen, woraus $2+2+\cdots=2\infty$ folgt. In analogem Sinne kann man schreiben:

$$1+3+5+\cdots=\infty^2.$$

Der Satz, daß das Ganze größer ist als jeder Teil, besteht nicht unbedingt für unendliche Größen, wie sich leicht aus der Bemerkung folgern läßt, daß alle Halbstrahlen einander kongruent sind.

Die zweite Abteilung des Versuches ist der „Meßkunst des Unendlichgroßen" gewidmet. Es ist kaum nötig hervorzuheben, daß dieser Gegenstand jedes Interesses entbehrt; der Verfasser selbst schließt, nachdem er sich bemüht hat, einen unendlichen Kurvenast zu rektifizieren, daß die Länge eines solchen Astes immer $\infty\gamma$ ist, wo γ eine endliche Größe bezeichnet, so daß die Rektifikation nutzlos erscheint.

Eine andere mehr philosophische als mathematische Schrift ist der J. Schultz gewidmete Versuch von Bendavid.[1]) Lazarus Bendavid, geboren zu Berlin am 18. Oktober 1762, gestorben daselbst am 28. März 1832, ist wohl bekannt als eifriger Kantianer; er hatte aber eine so ausgezeichnete mathematische Bildung, daß Kästner von ihm sagte, er wäre würdig, jeden Lehrstuhl Deutschlands, mit alleiniger Ausnahme des von ihm selbst innegehabten, zu besteigen.

Bendavid wirft sich drei Fragen vor: Was ist das mathematische Unendliche? Darf man hoffen, in der Rechnung mit unendlichen Größen eine gleiche Evidenz zu erreichen, wie in der Elementargeometrie? Welchen Einfluß hat die Klarheit der Prinzipien auf die Stichhaltigkeit der Resultate? — Unendlich heißt eine Größe, wenn sie nicht meßbar ist; das Unendliche stellt also nicht eine Quantität, sondern eine Eigenschaft dar. Die Unmeßbarkeit kann entweder vom Fehlen jeder Quantität herrühren (wie z. B. für einen Punkt), oder von der Unmöglichkeit, die Quantität vollständig anzugeben (wie z. B.

[1]) Versuch einer logischen Auseinandersetzung des mathematischen Unendlichen, Berlin 1789.

für tang $\frac{\pi}{2}$); im ersten Falle heißt die Größe unendlichklein, im zweiten unendlichgroß. Das Unendliche fällt, als Gegenstand der Arithmetik betrachtet, mit der Null zusammen. Diese sonderbare Behauptung wird wie folgt bewiesen. Jede Größe kann, vom arithmetischen Standpunkte aus, nur in bezug auf eine Maßeinheit gedacht werden; nur die Null läßt sich absolut denken; da also das Unendliche nicht meßbar ist und daher nur absolut gedacht werden kann, so muß es mit der Null übereinstimmen. Dies festgesetzt, fragt sich Bendavid, wie ein solcher Begriff in der Arithmetik Platz finden kann. Diese Frage, welche aus den Prämissen ganz logisch folgt, hätte wohl Bendavid von der Unhaltbarkeit seiner Ideen überzeugen sollen; dagegen beantwortet er sie dadurch, daß er die mathematischen Resultate auf den Gewißheitsgrad von Analogieschlüssen herabsetzt. Es gibt, sagt er, physische und metaphysische Begriffe, die wir nur unvollständig besitzen, und aus welchen wir zwar nicht apodiktische, wohl aber problematische Sätze ableiten können; man kann z. B. aus der zwischen der Erde und dem Monde stattfindenden Ähnlichkeit schließen, daß es auch im Monde Berge, Flüsse, lebende Wesen gibt. Auf gleiche Weise verfährt man in der Mathematik. Die Ausdrücke $\infty + a$, $dx + a$, wo ∞ das Unendlichgroße, dx das Unendlichkleine bezeichnet, haben für sich selbst keine Bedeutung; denn man kann nicht eine Eigenschaft und eine Größe zusammenaddieren. Von den zwei Summanden muß also einer wegfallen. Im ersten Fall verschwindet der zweite Summand, da das Unendliche nicht mehr unendlich wäre, wenn es sich durch Hinzufügung einer Größe a vermehren ließe; im zweiten Fall ergibt sich $dx + a = a$ durch Analogie mit den sehr kleinen Größen. Das Produkt $n\infty$ drückt die Wiederholung eines und desselben Begriffes aus, wie z. B. n Tangenten von rechten Winkeln; als Summe betrachtet ist $n\infty = \infty$. Daß $\frac{a}{\infty} = dx$, folgt aus Analogie; man kann auch bemerken, daß $\frac{a}{\infty}$ eine auf ein unendliches Maß bezogene endliche Größe darstellt. Auf ähnliche Weise lassen sich andere infinitäre Ausdrücke, wie $\frac{a}{0}$, $dx + dx$, adx usw. deuten. Aus dem Gesagten schließt Bendavid, daß die Theorie des Unendlichen als eine „unmathematische Wissenschaft" angesehen werden darf, welche keineswegs die Evidenz der Elementarmathematik besitzen kann; daß aber dennoch ihre Schlüsse ganz streng sind, da der Begriff vom Unendlichen widerspruchsfrei ist. Wir möchten fast sagen: je unmathematischer die Bendavidsche Theorie des Unendlichen ist, desto unphilosophischer ist sein Schlußsatz!

Nachdem wir die Verteidiger der Infinitesimalmethode besprochen haben, kommen wir auf diejenigen, welche diese Methode durch andere bekannte oder neue zu ersetzen versuchten.

Noch am Anfang unserer Periode begegnen wir einem englischen Gelehrten, mit dessen Namen eine merkwürdige, am passenden Orte zu besprechende Entdeckung im Gebiete der elliptischen Integrale verbunden ist, John Landen, Mitglied der Royal Society, geboren am 23. Januar 1719 zu Peakirk bei Peterborough, gestorben am 15. Januar 1790 zu Milton. In seiner Residual analysis[1]) nennt er Spezialwert des Quotienten $\frac{y - y_1}{x - x_1}$, wobei y, y_1 ähnliche Funktionen von x, x_1 darstellen, den Wert dieses Quotienten für $x_1 = x$; er bezeichnet den Spezialwert von $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ mit $[x \mathbin{\acute{-}} y]$. Die Berechnung solcher Ausdrücke, oder die residual division, geschieht aber selbstverständlich durch Grenzübergang, so daß die Landensche Methode nichts wesentlich Neues darbietet.

Ein hierher gehöriger, nicht sehr bekannter italienischer Schriftsteller ist Niccola Fiorentino. Geboren in Unteritalien, war er Oberaufseher der königlichen Schulen zu Bari, dann Advokat und Professor der Mathematik zu Neapel, und starb an dem Galgen am 12. Dezember 1799, ein Opfer der damals in dem neapolitanischen Königreich wütenden Reaktion.[2]) Im Jahre 1782, bei Gelegenheit einer in Neapel stattgefundenen öffentlichen Diskussion über eine mechanische Frage, gab er ein kleines Buch heraus mit dem Titel: Saggio sulle quantità infinitesime e sulle forze vive e

[1]) Der ausführliche Titel ist: The residual analysis, a new branch of the algebraic art, of very extensive use, both in pure mathematics, and natural philosophy, Book I (vereinzelt), London 1764.

[2]) Es möge uns erlaubt sein, sein Todesurteil (5. Dezember 1799) hier wiederzugeben: „Niccola Fiorentino, ch'era stato da Sua Maestà degnato per molti anni dei governi regi; per aver spiegato nell' entrata dei Francesi il suo carattere diametralmente opposto al suo benefattore, per aver dato alla luce due proclami in istampa, uno diretto ai giovani cittadini studiosi, relativo al vantaggio del governo repubblicano e l'imposture contro le sacre persone, e l'altro contenente un ragionamento sulla tranquillità della repubblica, per esser stato autore di un Inno a S. Gennaro per la conservazione della libertà, pieno di scostumatezze; per esser stato autore delle note in stampa alla costituzione della repubblica; e finalmente per esser stato ascritto nell' elenco della Società popolare, con aver aggiunto al suo nome e cognome di essere vero democratico; è stato condannato a morir sulle forche colla confisca dei beni, con essersi disposta l'esecuzione della sentenza" (A. Sansone, Gli avvenimenti del 1799 nelle Due Sicilie, Palermo 1901, p. 274). — Siehe auch: P. Colletta, Storia del reame di Napoli, Capolago 1834, Bd. II, p. 166 bis 168.

morte[1]), wobei der eigentlichen Behandlung des Hauptgegenstandes ein langer Abschnitt über unendlichkleine Größen vorangeht, welcher allein uns interessiert. In bezug auf die in der höheren Analysis anzuwendenden Methoden ist Fiorentino Eklektiker. Die beste Methode, sagt er, ist die Cavalierische; sie ist lichtvoll, gedrängt, elegant, und gibt zu keinem Bedenken Veranlassung. Da aber nicht alle mit dem, was aus der Indivisibilienmethode abgeleitet wurde, zufrieden sein werden, und da andererseits auch die Fluxionsmethode sicher und elegant ist, so hält es Fiorentino für gut, die Infinitesimalmethode vermittels der Fluxionsmethode zu prüfen. Vergleicht man die nach den beiden Methoden gegebenen Beweise der Formel für die Ableitung eines Produktes xy, so bemerkt man, daß der als eine unendlichkleine Größe zweiter Ordnung zu vernachlässigende Bestandteil $dxdy$ eigentlich aus dem Grunde vernachlässigbar ist, daß er der Fluxion von xy nicht angehört. Von der Infinitesimalrechnung darf man nur das behalten, was sich durch die Fluxionsmethode nachweisen läßt; das übrige ist unsicher. Daß dennoch die Infinitesimalrechnung zu richtigen Resultaten führt, rührt davon her, daß die Fehler sich gegenseitig aufheben.

Auch Jakob II. Bernoulli erklärt sich für die Fluxionsmethode[2]); er äußert aber den Wunsch, daß die langen und peinlichen Maclaurinschen Beweise ohne Beeinträchtigung der Strenge vereinfacht werden mögen. J. Bernoulli gehört einer Familie an, die in der Geschichte der Infinitesimalrechnung eine Hauptrolle gespielt hat. Sein Vater war Johann II. (diese Vorl., III², S. 325). Er wurde am 17. Oktober 1759 in Basel geboren, war Substitut seines Onkels Daniel von 1780 bis zu dessen Tode (1782) am Lehrstuhl der Physik, konnte aber seine Nachfolge nicht erhalten. Er war in Italien als Sekretär des österreichischen Gesandten in Venedig, und machte Bekanntschaft mit manchen italienischen Geometern. Nach Lexells Tode (1786) wurde er zum Adjunkten an der Petersburger

[1]) Das Buch trägt weder Datum, noch Druckort. Der Verfasser sagt aber, er habe zu Neapel „im vergangenen November" von einer dort geschehenen Diskussion gehört, über welche d'Alembert und Lagrange um ihre Meinung gefragt worden wären, und man findet in Lagranges Briefwechsel (Oeuvres T. XIV, Paris 1892, p. 279—282) ein Schreiben vom 13. Oktober 1781, welches sich unzweifelhaft auf denselben Gegenstand bezieht, so daß man mit Sicherheit schließen kann, das Buch sei zu Neapel im Jahre 1782 gedruckt worden.

[2]) Essai d'une nouvelle manière d'envisager les différences ou les fluxions des quantités variables, par M. Bernoulli, Mém. Acad. Turin 1784—85 (publ. 1786), Mém. des corresp., p. 141—153; es folgt eine Addition von Caluso (p. 153—159). Daß der Verfasser Jak. II. Bernoulli ist, erhellt aus einer Note zu einer alsbald zu besprechenden Abhandlung von Caluso.

Akademie ernannt; später wurde er ordentlicher Akademiker und Professor der Kadetten (1788). Im Jahre 1789 heiratete er eine Tochter von Johann Albrecht Euler, Sohn Leonhard Eulers; zwei Monate später, am 3. Juli 1789, während er sich in der Newa badete, wurde er vom Schlag gerührt, und starb bald darauf. Seine Schriften, welche in den Nova Acta Acad. Petrop. erschienen sind, betreffen sämtlich die Mechanik, mit alleiniger Ausnahme der soeben angeführten.[1])

Wie J. Bernoulli uns erzählt, lehrte ihn sein Vater die Größen nicht als zu- oder abnehmend, sondern als mit der „Anlage" („disposition") zu- oder abzunehmen behaftet zu betrachten; so sind dx, dy die Anlagen von x, y. Die Anlagen sind, wie Bernoulli erkennt, von den in der Fluxionsrechnung vorkommenden Geschwindigkeiten nicht wesentlich verschieden; andererseits wird die durch den neuen Begriff zu erzielende Vereinfachung ganz auf Kosten der Strenge erhalten. Sehen wir zu, wie Bernoulli die Anlage eines Produktes xy berechnet. Wäre nur x veränderlich, so wäre ydx die Anlage von xy; wäre nur y veränderlich, so wäre sie xdy; sind also x und y zugleich veränderlich, so finden beide Anlagen zugleich statt, und die Gesamtanlage ist $ydx + xdy$. Aber auch die vermeinte Einfachheit verschwindet, sobald schwierigere Aufgaben vorliegen, und Bernoulli selbst bekennt andererseits, daß sich die von ihm bei der Auflösung dieser Aufgaben befolgte Methode mit der Grenzmethode deckt.

Auch der schon genannte Caluso ist unter die Anhänger der Fluxionsmethode zu rechnen. Tomaso Valperga di Caluso, geboren 1737 in Turin, gehörte einer angesehenen Familie an. Nachdem er seinem König als Marineoffizier gedient hatte, zog er sich als Geistlicher nach Neapel zurück, von wo er später (1769) nach seinem Vaterlande zurückkehrte. Dort war er Sekretär der Akademie der Wissenschaften, Direktor der Sternwarte und Professor der orientalischen Sprachen an der Universität. Er starb am 1. April 1815. Seine zahlreichen Schriften beziehen sich auf Philosophie, Sprachwissenschaft und Literaturgeschichte; auch ist er Verfasser von italienischen, lateinischen und griechischen Dichtungen. Seine Freundschaft mit Vittorio Alfieri ist allbekannt; der berühmte Tragödienschreiber sagte, er verdankte es Caluso, wenn er sich der Unwissenheit entzogen habe, in welche er bis zu seinem 27. Jahre getaucht gelegen war.

[1]) Précis de la vie de M. Jacques Bernoulli, Nov. Acta Acad. Petrop. VII, 1789 (publ. 1793), Hist., p. 23—32.

Caluso widmet eine lange Abhandlung[1]) der Verteidigung der Fluxionsmethode; er bekämpft besonders die Meinung, der Geschwindigkeitsbegriff sei ein der reinen Analysis fremdartiges Element. Er versucht aber auch, den Grund der Richtigkeit der durch die Infinitesimalmethode erhaltenen Resultate aufzudecken. Dazu bedient er sich der Rechnung mit unmöglichen Größen — so nennt er die unendlichen und die unendlichkleinen Größen. Ist:

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + Ax,$$

und dividiert man mit x^n, so ist für $x = \infty$:

$$\frac{y}{x^n} = a + \frac{b}{\infty} + \cdots + \frac{A}{\infty^{n-1}};$$

es ist aber:

$$\frac{b}{\infty} = 0, \cdots, \frac{A}{\infty^{n-1}} = 0,$$

folglich:

$$\frac{y}{x^n} = a.$$

Dividiert man dagegen mit x, so ist für $x = 0$:

$$\frac{y}{x} = a \cdot 0^{n-1} + b \cdot 0^{n-2} + \cdots + A = A.$$

Hieraus folgt die Regel, daß man für $x = \infty$ nur das Glied mit dem größten, für $x = 0$ nur dasjenige mit dem kleinsten Exponent beibehalten muß.

Es ist schon oben erwähnt worden, daß Lagrange den Versuch machte, die Infinitesimalmethode durch eine neue Methode zu ersetzen. Es ist jetzt Zeit, seine Ideen auseinanderzusetzen.

Lagrange befolgt einen Weg, der dem gewöhnlichen umgekehrt ist. In der Infinitesimalrechnung geht man nämlich von der auf Grenzbetrachtungen sich gründenden Definition der Ableitungen der ersten und der höheren Ordnungen aus, um zum Beweis der Taylorschen Reihenentwicklung zu kommen, deren Koeffizienten die mit Zahlenfaktoren behafteten Ableitungen aller Ordnungen der zu entwickelnden Funktion sind. Ließe sich daher, so denkt Lagrange, die Taylorsche Entwicklung einer Funktion direkt auffinden, so könnte man aus derselben sämtliche Ableitungen der Funktion ohne weiteres ablesen.

Nun gibt aber die Reihentheorie eine Entwicklung von der Form:

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + \cdots.$$

[1]) Des différentes manières de traiter cette partie des mathématiques que les uns appellent calcul différentiel et les autres méthode des fluxions, Mem. Acad. Turin, 1786—87 (publ. 1788), p. 489 bis 590.

Um indessen nichts unbewiesen zu lassen („mais pour ne rien avancer gratuitement"), will Lagrange vor allem zeigen — was niemand vorher getan habe —, daß die Reihe, ausgenommen für besondere Werte von x, keine gebrochenen Exponenten enthalten darf. Käme nämlich eine gebrochene Potenz $i^{\frac{m}{n}}$ von i vor, so müßte sie von in $f(x)$ existierenden Wurzelgrößen herrühren; $f(x)$ wäre also eine mehrwertige Funktion, und die Ersetzung von x durch $x+i$ würde weder die Anzahl, noch die Beschaffenheit dieser Größen umändern, so daß $f(x)$ und $f(x+i)$ für jedes Wertepaar x, i eine gleiche Anzahl von verschiedenen Werten erhalten würden. Andererseits ließe sich jeder Wert von $f(x)$ mit jedem Werte von $i^{\frac{m}{n}}$ kombinieren, so daß sich eine weit größere Anzahl von Werten für $f(x+i)$ ergeben müßte, woraus der Widerspruch.

Dieses vorausgeschickt, muß man beachten, daß, da sich $f(x+i)$ für $i = 0$ auf $f(x)$ reduziert, die Differenz $f(x+i) - f(x)$ für $i = 0$ verschwindet, also eine positive Potenz von i als Faktor enthalten muß („... sera ou pourra être censée multipliée par une puissance positive de i"), deren Exponent nach dem Gesagten notwendig ganzzahlig ist. Man kann also schreiben:

$$f(x+i) = f(x) + iP.$$

Eine analoge Schlußweise ergibt:

$$P = p + iQ, \quad Q = q + iR, \quad R = r + iS, \ldots,$$

also:

$$(3) \qquad f(x+i) = f(x) + ip + i^2q + i^3r + \cdots.$$

Die Bestimmung von $p, q, r, \ldots$ läßt sich entweder durch direkte Berechnung, oder durch Fortschaffung der etwa vorkommenden Wurzelgrößen, oder endlich durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten bewerkstelligen. Ein Beispiel mag die Anwendung der drei Methoden erleuchten, wobei wir uns freilich, der Kürze wegen, auf die Berechnung von p beschränken.

Es sei $f(x) = \sqrt{x}$. Man hat:

$$\text{a)} \quad iP = \sqrt{x+i} - \sqrt{x} = \frac{i}{\sqrt{x+i} + \sqrt{x}},$$

also:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x+i} + \sqrt{x}},$$

und für $i = 0$:

$$p = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{b)} \quad \sqrt{x+i} = \sqrt{x} + iP,$$

also:

$$x + i = x + 2iP\sqrt{x} + i^2P^2,$$

oder:

$$1 = 2P\sqrt{x} + iP^2,$$

woraus für $i = 0$ abermals folgt:

$$p = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{c)}\quad \sqrt{x+i} = \sqrt{x} + ip + i^2q + \cdots,$$

also:

$$x + i = (\sqrt{x} + ip + i^2q + \cdots)^2 = x + 2ip\sqrt{x} + i^2(2q\sqrt{x} + p^2) + \cdots,$$

und hieraus durch Vergleichung der beiderseitigen Koeffizienten der ersten Potenz von i:

$$p = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ist so die Reihe (3) ermittelt worden, so muß man sehen, ob sie konvergent ist. Betrachtet man i als die Abszisse, iP als die Ordinate einer Linie, so geht diese durch den Koordinatenursprung, und so lange dieser kein singulärer Punkt ist, nähert sich die Linie beständig der Abszissenachse; es läßt sich folglich i so klein annehmen, daß iP kleiner sei als eine beliebig vorgegebene Größe. Es ist also z. B. für hinreichend kleine Werte von i:

$$iP < f(x),$$

und man kann analog erhalten:

$$iQ < p, \quad iR < q, \ldots,$$

oder:

$$i^2Q < ip, \quad i^3R < i^2q, \ldots.$$

Es ist aber:

$$iP = ip + i^2q + i^3r + \cdots,$$
$$i^2Q = i^2q + i^3r + \cdots,$$
$$i^3R = i^3r + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

man kann also i so klein annehmen, daß für diesen Wert und um so mehr für alle kleineren Werte von i jedes Glied der betrachteten Reihe größer ausfällt als die Summe aller darauffolgenden Glieder, womit die Konvergenz nachgewiesen ist.

Die Lagrangesche Methode erlaubt uns also, sämtliche Ableitungen einer Funktion durch rein algebraische Operationen zu erhalten. Leider gibt sie zu manchen Bedenken Anlaß, auf deren Erörterung wir hier verzichten müssen.[1]) Merkwürdig ist es, daß Lagrange selbst an der Allgemeinheit seiner Methode zweifelt, welche, nach seiner Aussage, auf eine Funktion „insofern als sie in eine Reihe entwickelbar ist" („autant que cette fonction est susceptible d'être réduite en une série") angewandt werden kann.

Analoge, aber bei weitem nicht so bekannte neue Methoden sind der antecedental calculus von James Glenie (Glenie oder Glennie, geboren zu Fyfe 1750, gestorben zu Chelsea am 23. November 1817, Artillerieoffizier im amerikanischen Kriege, dann Professor der Mathematik an der Militärschule der East India Company), die Exponentialrechnung von Johann Pasquich (Geistlicher, Professor und Astronom zu Ofen, geboren zu Wien 1753, gestorben daselbst am 15. November 1829), und der calcul d'exposition von dem schon oben erwähnten J. Ph. Grüson.[2])

Der antecedental calculus stimmt, wie der Erfinder selbst sagt, mit der Fluxionsrechnung überein; der antecedental einer Funktion ist ihre Ableitung, der antecedent ist ihr Integral.

Pasquich hält jede Rechnung, welche die Differentialrechnung zu ersetzen zum Zwecke hat, für ganz entbehrlich; andererseits aber denkt er, seine Methode verdiene wegen ihrer „Einfachheit, Gründlichkeit und Allgemeinheit" eine größere Beachtung als jede andere ana-

---

[1]) Siehe S. Dickstein, Zur Geschichte der Principien der Infinitesimalrechnung. Die Kritiker der „Théorie des fonctions analytiques" von Lagrange in der Cantor-Festschrift (Leipzig 1899), S. 65—79. [2]) Glenie, A short paper on the principles of the antecedental calculus, Trans. R. Soc. Edinburgh, IV (1798), p. 65—82. Von zwei früheren, in dieser Schrift zitierten Arbeiten von Glenie, Universal comparison und Antecedental calculus, konnte ich keine Kenntnis haben. — Pasquich, Anfangsgründe einer neuen Exponentialrechnung, Archiv der reinen und angew. Math. II (1798), S. 385—424. Siehe auch eine Anmerkung des Herausgebers des Archives (Hindenburg), wo eine im Intelligenzblatt der Allg. litt. Zeit. 1798, Nr. 99 erschienene Nachricht von Pasquich über seine neue Rechnung und desselben Unterricht in der mathematischen Analysis und Maschinenlehre angeführt wird. — Grüson, Le calcul d'exposition inventé par J. Ph. G., Mém. Acad. Berlin 1798 (publ. 1801), p. 151—216, 1799 und 1800 (publ. 1803), p. 157—188. — Ein anderer Versuch, die Leibnizsche Methode zu verdrängen, rührt von L. F. A. Arbogast (1759—1803) her, der im Jahre 1789 der Pariser Akademie eine Schrift vorlegte mit dem Titel: Essai sur des nouveaux principes de calcul différentiel et intégral, indépendants de la théorie des infiniment petits, et de celle des limites. Da aber die Abhandlung nicht veröffentlicht wurde, und die Arbogastsche Methode erst 1800 im Druck erschien (Arbogast, Calcul des dérivations, Strasbourg 1800), so möge die Besprechung dieser Methode dem Verfasser des V. Bandes überlassen werden.

loge. Er geht von diesem Postulat aus: Jede Funktion y von x läßt sich unter der Form:

$$y = Ax^a + Bx^b + \cdots$$

annehmen, sei es, daß sie wirklich diese Form besitzt, oder daß sie auf dieselbe durch Reihenentwicklung gebracht werden kann. Setzt man nach der heutigen Schreibweise:

$$y = \Sigma A x^a,$$

so heißt die Funktion:

$$\varepsilon y = \Sigma a A x^a$$

das Exponential von y, y die exponentiierte Funktion von εy. Aus dieser Definition ergeben sich von selbst die Regeln für die Bestimmung des Exponentiales einer Summe, eines Produktes, einer Potenz und eines Quotienten; es folgt dann die Binomialreihe und die Taylorsche Entwicklung. Dieser letzteren bedient sich Pasquich zur Auffindung des Exponentiales einer beliebigen Funktion. Aus der Entwicklung:

$$\Delta y = \frac{\varepsilon y}{1!x}\Delta x + \frac{\varepsilon^2 y}{2!x}\Delta x^2 + \cdots,$$

wo allgemein:

$$\varepsilon^{n+1} y = \varepsilon \frac{\varepsilon^n y}{x}$$

ist, folgt nämlich:

$$\frac{x\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varepsilon y}{1!} + \frac{\varepsilon^2 y}{2!}\Delta x + \cdots;$$

dieses Verhältnis nähert sich bei unbeschränkt abnehmendem Δx dem Werte $\frac{\varepsilon y}{1!}$, so daß εy die Grenze von $\frac{x\Delta y}{\Delta x}$ ist. Findet man allgemein für ein beliebig kleines Δx sowohl:

$$\frac{x\Delta y}{\Delta x} > Z + p\Delta x + \cdots,$$

als

$$\frac{x\Delta y}{\Delta x} < Z + P\Delta x + \cdots,$$

so ist notwendig $\varepsilon y = Z$. Das mag wohl genügen, um den Leser zu überzeugen, daß Pasquich nur neue Namen für altbekannte Sachen eingeführt hat.

Eine auffallende Ähnlichkeit, selbst in der Nomenklatur, mit der Pasquichschen Methode zeigt die Grüsonsche[1]).

[1]) In der oben erwähnten Nachricht bemerkt Pasquich, daß Grüson in der Vorrede zur Übersetzung der Lagrangeschen Funktionentheorie seinen neuen Exponierungscalcul voranmeldet; er versichert aber, er sei seit neun Jahren im Besitz seiner Exponentialrechnung, und habe dieselbe vor fünf Jahren dem Prof. Kraft in St. Petersburg und dann einigen deutschen Gelehrten mitgeteilt.

Nach Grüson ist seine Methode, die er noch vor der Herausgabe des Lagrangeschen Werkes erfunden habe, einfacher und lichtvoller als die der Infinitesimalrechnung, da sie sich nur wohlbekannter algebraischer Prinzipien bedient. Man kann aber voraussehen, daß die Einfachheit auf Kosten der Strenge erhalten wird. Wie es scheint, nimmt Grüson als selbstverständlich an, daß jede Funktion sich in eine Reihe von ganzen oder gebrochenen Potenzen der Veränderlichen entwickeln läßt. Sein Verfahren ist folgendes. Ist F eine Potenzreihe von x mit ganzen positiven Exponenten, so findet offenbar dasselbe für F^m für jedes ganze und positive m statt; es läßt sich ferner nachweisen, daß auch $\frac{1}{F}$, und folglich $\frac{1}{F^m}$, in eine solche Reihe entwickelbar ist. Grüson will zeigen, daß $F^{\frac{m}{n}}$ dieselbe Form hat wie F. Da F^m und F^n gleiche Form haben, so muß dasselbe, sagt er, von $F^{\frac{m}{n}}$ und F folgen. Da aber, fügt er am Ende seiner zweiten Abhandlung hinzu, mein Beweis einige Zweifel im Geiste der Geometer nachgelassen hat, so gebe ich einen zweiten an, der nichts zu wünschen übrig läßt. Enthielte die Entwicklung einer Funktion f eine gebrochene Potenz von x, so würde diese Potenz ebenfalls in f^r vorkommen, welche auch die ganze Zahl r sei. Nimmt man nun:

$$f = F^{\frac{n}{m}}, \quad r = m$$

an, so folgt $f^r = F^n$; es würde sich dann ergeben, daß F^n eine gebrochene Potenz von x enthalten sollte, was unmöglich ist. Das Resultat kann auch auf irrationale Potenzen einer Funktion F erstreckt werden, freilich aber auf Grund der folgenden Hilfssätze, die, wie leicht zu sehen, wesentlich der Grenztheorie angehören: Können x, y kleiner gemacht werden als jede angebbare gleichartige Größe, und ist:

$$A < B + x, \quad A > B - y,$$

so ist $A = B$. Ist:

$$U = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$
$$V = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots,$$
$$W = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

ferner:

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = c_1, \; \ldots, \; a_n = c_n,$$

wo n eine bestimmte Zahl bezeichnet, und ist V für alle Werte von x zwischen U und W enthalten, so folgt:

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \; \ldots, \; b_n = a_n.$$

Aus dem Gesagten läßt sich schließen, daß jede algebraische oder transzendente Funktion von x nach ganzen positiven Potenzen von x entwickelbar ist.

Ist dieses festgestellt, und bezeichnet $F + \Delta F$ den Wert der Funktion:

$$F = Ax^\alpha + Bx^\beta + \cdots$$

für den Wert $x + \Delta x$ von x, so ergibt sich sogleich:

$$F + \Delta F = F + (A\alpha x^\alpha + B\beta x^\beta + \cdots)\frac{\Delta x}{x} + Q\Delta x^2.$$

Grüson schreibt:

$$\exists F = A\alpha x^\alpha + B\beta x^\beta + \cdots,$$

und nennt diese Größe das Exponential (l'exponentielle) von F. Die Methode, welche lehrt, das Exponential einer Funktion zu finden, oder umgekehrt von dem Exponential einer Funktion zur Funktion selbst wieder emporzusteigen, heißt Expositionsrechnung (calcul d'exposition).

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß nicht alle, die sich mit Infinitesimalrechnung beschäftigten, es für nötig hielten, sich über die logischen Grundlagen derselben aufzuhalten; wir führen unter anderen in dieser Hinsicht die Lehrbücher von Saladini[1]), Marie und Bezout usf. an.

Lehrbücher der Infinitesimalrechnung.

Als wir versuchten, den allgemeinen Charakter unseres Zeitabschnittes in bezug auf den von uns zu behandelnden Zweig der Mathematik zu schildern, sagten wir, es sei diese eine der Anordnung und Vervollständigung der früher ermittelten Resultate besonders gewidmete Periode gewesen. Ein Zeugnis dafür ist die ungemeine Fülle von Lehrbüchern der höheren Analysis oder der gesamten Mathematik, die unserer Periode ihre Entstehung verdanken. Wir wollen eine rasche Übersicht dieser Werke übernehmen, die wir, bei der Unmöglichkeit jeder systematischen Anordnung, chronologisch durchmustern werden. Unsere Aufmerksamkeit werden wir vorläufig nur auf den Allgemeinplan jedes Buches und auf die darin befolgte Methode lenken, während wir uns vorbehalten, das etwa vorkommende wissenschaftlich Neue an den gebührenden Orten zu besprechen. Wir schmeicheln uns keineswegs, ein vollständiges Verzeichnis der in unserer Periode erschienenen Lehrbücher unseren Lesern vorzustellen; das aber dürfen wir mit Sicherheit behaupten, daß das Unterlassene nicht imstande

[1]) Elementa geometriae infinitesimorum, Bononiae 1760.

sein kann, die Umrisse unseres wissenschaftlichen Bildes auch im mindesten zu verändern.[1])

Heinrich Wilhelm Clemm, Professor und Prediger zu Bebenhausen bei Tübingen, dann Professor zu Stuttgart und Tübingen, geboren zu Hohen-Asperg am 13. Dezember 1725, gestorben zu Tübingen am 27. Juli 1775, gab zu Stuttgart im Jahre 1759 ein Lehrbuch der Mathematik mit dem Titel: Erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften heraus, von welchem wir nur eines zu bemerken haben, daß nämlich der Verfasser die Infinitesimalrechnung nach der Fluxionsmethode, aber mit der Ausdrucksweise der Leibnizschen Methode behandelt.

Ebenfalls im Jahre 1759 erschien die Geometria algebrica von Giambattista Caraccioli, geboren zu Rom am 29. Dezember 1695, gestorben daselbst 1765.[2]) Der zweite Band dieses Werkes behandelt die Elemente der Infinitesimalrechnung und deren Anwendung auf Kurvenlehre auf Grund der beiden L'Hospitalschen Postulate.

Aus dem Jahre 1760 haben wir ein ausführliches Handbuch von Karsten[3]), welches aber nichts Merkwürdiges darbietet.

[1]) Trotz der außerordentlichen Güte und Bereitwilligkeit der italienischen und ausländischen Bibliotheksdirektoren, welchen wir hier unseren wärmsten Dank aussprechen, waren uns die folgenden Werke unzugänglich: Martin, Institutiones mathematicae, London 1759; Müller, Traité analytique des sections coniques, fluxions et fluentes, Paris 1760; Mormoraj, Elementa analyseos, Pisa 1761; Berthelot, Cours de mathématiques, Paris 1762; Bergmann, Lectiones mathematicae, Prag 1765; Condorcet, Traité du calcul intégral, Paris 1765; Kies, Analyseos infinitorum quaedam specimina, Tübingen 1765; Beck, Praelectiones mathematicae, Salzburg 1768—1780; Mako von Kerek, Calculi differentialis et integralis institutio, Wien 1768; Sauri, Cours complet de mathématiques, Paris 1774; Wydra, Primae calculi differentialis rationes, Prag 1774; Schmiedel, Institutiones calculi differentialis et integralis, Breslau 1775; Fontaine, Nouveau plan des mathématiques, Annecy 1777; Girault de Keroudou, Leçons analytiques du calcul des fluxions et des fluentes, Paris 1777; Antoni, Principii di matematica sublime, Torino 1779; Beck, Institutiones mathematicae, Salzburg 1781; Langsdorf, Ausführung der Erläuterungen über die Kästnersche Analysis des Unendlichen, Gießen 1781; Rauch, Elementa sectionum conicarum et calculi infinitesimalis, München 1790; Minzele, La grandezza discreta analizzata nelle sue finite ed infinitesime funzioni, Napoli 1798; Rohde, Anfangsgründe der Differentialrechnung, Potsdam 1799. [2]) Der ausführliche Titel ist: Geometria algebrica universa quantitatum finitarum, et infinite minimarum. Adjectus in fine est commentarius de curva cochlea, Romae 1759. Eine biographische Skizze über Caraccioli von G. Loria liest man in Boll. bibl. st. sc. mat. VI, 1903, p. 33—38. [3]) Mathesis

Im Jahre 1761 erschien der erste Teil der schon erwähnten Elementa analyseos finitorum von Segner. Als „Differentialgleichung" einer gegebenen Gleichung zwischen X und Y bezeichnet Segner diejenige Beziehung, die sich dadurch ergibt, daß man X, Y durch $X \pm x$ bzw. $Y \pm y$ ersetzt; in einer solchen Gleichung bedeutet = nicht die Gleichheit, sondern das Streben nach Gleichheit. Die Elementa behandeln, wie fast alle gleichartigen Werke dieser Zeit, nicht nur die Infinitesimalrechnung, sondern auch die Anwendung derselben auf ebene Kurven und auf algebraische Gleichungen.

Ebenfalls im Jahre 1761 erschienen die schon erwähnten Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen von Kästner. Bei diesem Buche haben wir uns im vorigen Kapitel ziemlich lange aufgehalten. Nur eins wollen wir hier anführen: ein Verfahren zur Ableitung des Differentiales eines Logarithmus, welches, von seinem geometrischen Gewande entblößt, folgendermaßen lauten mag. Es sei $y = c^x$, und bezeichnen wir mit m, n die gleichzeitigen Zuwächse von x und y, so hat man:

$$n = c^x(c^m - 1).$$

Setzen wir $m = \frac{1}{r}$, wo r eine ganze positive Zahl bezeichnet, ferner:

$$q = c^{\frac{1}{r}} - 1,$$

so ist:

$$n = c^x q = yq,$$

folglich:

$$\frac{ym}{n} = \frac{m}{q}.$$

Es ist aber $\frac{m}{q}$ von y unabhängig und von Null verschieden; bezeichnen wir diese konstante Größe mit a, so ist:

$$y\frac{m}{n} = a,$$

oder:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{y}.$$

Aus demselben Jahre stammen die Analyseos infinite parvorum sive calculi differentialis elementa (Pisa 1761) von Ranieri Bonaventura Martini (1723—1774), Arzt und Professor

theoretica elementaris atque sublimior in usum academicarum praelectionum, Rostock und Greifswald 1760. — Ein anderes didaktisches Werk von Karsten ist: Mathematische Analysis und höhere Geometrie, Greifswald 1786. Siehe auch: K. Rohde, preußischer Lieutenant, Erläuterungen über Herrn Karstens mathematische Analysis und höhere Geometrie, Berlin 1789.

der Philosophie aus Pisa. Einer kurzen Entwicklung der Grundsätze der Differentialrechnung folgt in diesem Buche eine ausführliche Auseinandersetzung der Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven. Der Verfasser geht von der Definition des Unendlichkleinen als einer Größe aus, die als über jede Grenze abnehmend gedacht werden kann. Er handelt mit unendlichkleinen und unendlichgroßen Größen mit einer Freiheit, die freilich im 18. Jahrhundert üblich war. So zum Beispiel bemerkt er, daß die Subtangente in einem vielfachen Punkte die Form $\frac{0}{0}$ annimmt und folglich unendlich ist; selbstverständlich ist er genötigt, hinzuzufügen, daß man nicht hieraus schließen darf, daß die Subtangente wirklich unendlich ist, sondern daß es mehrere Subtangenten gibt. Daß $\frac{0}{0} = \infty$ (Martini schreibt dafür 00), wird wie folgt nachgewiesen. Es sei (Fig. 75) ACB ein Kreisquadrant, AD

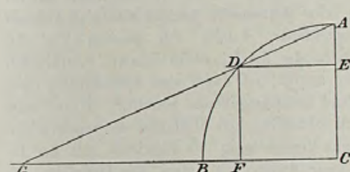

Fig. 75.

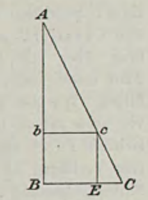

Fig. 76.

eine Sehne desselben, G der Schnittpunkt von AD mit BC, E die Projektion von D auf AC, F die auf BC, und setzen wir $AC = a$, $DE = y$; dann ist:

$$FG = \frac{DE \cdot DF}{AE} = \frac{y\sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}};$$

ist nun $y = 0$, so wird AG parallel zu BC, und es ist:

$$FG = \frac{0}{0} = \infty.$$

Es ist merkwürdig, daß Martini dieses Ergebnis als ganz allgemein betrachtet, während der Begriff von den verschiedenen Ordnungen des Unendlichkleinen ihm offenbar nicht fremd war, da er an einem anderen Orte bemerkt, daß, wenn in einem Dreieck ABC (Fig. 76) die Basis BC unendlich klein von der ersten Ordnung ist, AB und AC als parallel betrachtet werden dürfen, und $EC = dy$ unendlich klein von der zweiten Ordnung ist; daß ferner, wenn A unendlich weit ist, die Seiten „fient inter se magis parallela“, und $dy = \frac{1}{\infty^3}$; daß, wenn daneben $BC = \frac{1}{\infty^3}$, dann $dy = \frac{1}{\infty^4}$ ist.

Noch im Jahre 1761 begegnen wir einem bekannteren italienischen Gelehrten, Paolo Frisi (siehe oben S. 19), Barnabiten, geboren zu Mailand am 13. April 1728, gestorben daselbst am 22. November 1784. Seit seiner ersten Jugend widmete sich Frisi der Mathematik gegen den Willen seiner Vorgesetzten, die beabsichtigten, aus ihm einen Theologen zu machen, und die erst dann davon abstanden, seine Neigung zu bekämpfen, als sein Wert von der gelehrten Welt öffentlich anerkannt wurde. Er lehrte Mathematik zu Pisa, dann zu Mailand; die ersten Akademien und Gesellschaften von ganz Europa zählten ihn unter ihre Mitglieder, Fürsten und Könige erteilten ihm die höchsten Ehren. Den großen Ruhm, dessen er sich erfreute, verdankt Frisi besonders seinen astronomischen und hydraulischen Schriften; wohlbekannt sind auch seine Lobreden auf Galilei und Cavalieri. Auf die reine Mathematik bezieht sich eine Abhandlung über die Fluxionsmethode, welche den zweiten Teil des 1761 erschienenen zweiten Bandes der Dissertationum variarum[1]) bildet. Wie der Verfasser angibt, ist diese eine Erweiterung einer vor neun Jahren in Mailand herausgegebenen Schrift.[2]) Frisi setzt sich als Zweck vor, die Maclaurinschen Methoden zu vereinfachen; sein Verfahren ist aber eine Vermischung der Fluxions- mit der Infinitesimalmethode, und zwar finden wir neben der Definition der Fluxion die des Differentials, welches der Unterschied zweier Ordinaten oder Bögen usw. ist, wenn diese einander unendlich nahe sind, so daß man den Unterschied als unendlich klein und die Ordinaten oder Bögen als einander gleich ansehen darf. Die Abhandlung besteht aus zwei Abteilungen, deren erste die Theorie behandelt, während die zweite den geometrischen Anwendungen gewidmet ist. Die Entwicklung der Theorie beschränkt sich auf die Bestimmung der Fluxion eines Produktes, einer Potenz mit rationalem Exponenten und eines Polynoms. Um die in der zweiten Abteilung befolgte Methode zu charakterisieren, mag es hinreichen, darauf hinzuweisen, daß der

[1]) Der erste Band (Lucca 1759) enthält eine Dissertation über die Präzession der Nachtgleichen, eine über die Atmosphäre der Himmelskörper und eine über die Natur des Äthers, von denen die erste von der Berliner, die zweite von der Pariser Akademie gekrönt wurde. Der zweite Band (Lucca 1761) enthält eine Dissertation über die Unregelmäßigkeiten der Bewegungen der Planeten, eine über die Fluxionsmethode und eine dritte mit dem Titel: Meditationes quaedam metaphysicae. [2]) De methodo fluxionum geometricarum et ejus usu in investigandis praecipuis curvarum affectionibus dissertatio, Mailand 1753.

Ausdruck der Subtangente aus der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke erhalten wird, deren Katheten einerseits die Subtangente und die Ordinate, andererseits dx und dy sind. Gegenstand dieser Abteilung ist die Bestimmung der größten und kleinsten Ordinaten, der singulären Punkte und des Krümmungsradius einer ebenen Linie und der Fläche des durch die Schraubenbewegung einer ebenen Figur erzeugten Körpers.

Im Jahre 1762 erschien in London ein Büchelchen mit dem Titel: Mathematics, dessen Verfasser, Rev. William West, am 1. Oktober 1760, 53 Jahre alt, gestorben war. Herausgeber war John Rowe, der, wie sich aus dem Vorwort ergibt, selbst ein Werk mit dem Titel: An introduction to the doctrine of fluxions verfaßt haben soll, dessen zweite Auflage damals soeben erschienen war. Das Büchelchen zerfällt in zwei Kapitel, deren zweites (Miscellaneous questions) der Infinitesimalrechnung fremd ist, während das erste (Fluxions) der Theorie der Maxima und Minima gewidmet ist (was an seinem Orte besprochen werden soll), mit Ausschluß der ersten fünf Seiten, die einen ganz kurzen Abriß der Fluxionsrechnung darbieten. Während aber der Verfasser von der üblichen Definition der Fluxionen ausgeht, bemerkt er zu unserer Überraschung bei der Aufsuchung der Fluxion von xy, daß man in dem Zuwachse $x'y + xy' + x'y'$ den Term $x'y'$ vernachlässigen darf („may be rejected“), weil x' und y' unendlich klein („infinitely little“) sind.

Im Jahre 1763 gab Emerson zu London sein Werk: The method of increments heraus. William Emerson (s. o. S. 30), Sohn eines Schulmeisters, geboren zu Hurworth am 14. Mai 1701, gestorben daselbst am 20. Mai 1782, war ein sehr sonderbarer Mann; er machte sich einen Ruhm daraus, sich roh und schmutzig zu zeigen, und man erzählt, er habe dieselben Kleider 20 Jahre hindurch gebraucht; er war in der theoretischen Musik sehr gewandt, aber so unglücklich in der Praxis, daß es ihm nicht einmal gelang, die Violine zu stimmen. Emerson ist Verfasser von zahlreichen mathematischen Werken, deren eins soeben erwähnt wurde, während andere an den passenden Orten besprochen werden sollen.

Im folgenden Jahre erschien die schon oben besprochene Residual analysis von Landen, welche als ein Lehrbuch der Differentialrechnung und ihrer geometrischen Anwendungen angesehen werden darf.

Noch in demselben Jahre begegnen wir einem Namen, der in der Mathematik eine dauernde Stelle eingenommen hat. Étienne Bezout (s. o. S. 74)[1]) geboren zu Nemours am 31. März 1730 aus einer armen Familie,

[1]) Éloge de M. Bézout, Hist. Acad. Paris 1783 (publ. 1786), p. 69—75.

widmete sich gegen den Willen seines Vaters der Mathematik. Er wurde Mitglied der Akademie 1758, Examinator der Marinegarden 1763, und als solcher war er mit der Abfassung eines Lehrbuches der Mathematik beauftragt, welches im folgenden Jahre erschien.[1]) Im Jahre 1768 wurde er Examinator der Artillerie, und einige Jahre später (1770) gab er eine neue Auflage seines Cours heraus, wobei er die alten Anwendungen seinem neuen Berufe gemäß durch andere ersetzte. Zugleich beschäftigte er sich mit denjenigen Untersuchungen über algebraische Gleichungen, welchen sein Name anhaftet. Als Beispiel seines Mutes und seiner Gewissenhaftigkeit erzählt man, daß er einige Kandidaten, die zu Toulon an den Blattern krank waren, an ihrem Bette examinierte, um ihnen den Schaden zu ersparen, den der Aufschub des Examens verursachen würde. Er beschloß sein ruhiges und glückliches Leben am 27. September 1783.

Der Cours de mathématiques[2]) besteht aus fünf Teilen: Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, Algebra und analytische Geometrie, Mechanik und Infinitesimalrechnung, Schiffahrt. Daß wir „Mechanik und Infinitesimalrechnung" und nicht umgekehrt gesagt haben, ist nicht ein Versehen von unserer Seite, sondern entspricht der im vierten Bande des Cours befolgten Anordnung; es ist aber zu beachten, daß die Mechanik mit lauter elementaren Mitteln entwickelt wird. Die Behandlung der Infinitesimalrechnung bietet nichts Besonderes, als daß Bezout durchgängig mit Differentialen arbeitet, so daß man die Definition der Ableitung in seinem Lehrbuche umsonst suchen würde.

Es ist bekannt, welchen Beifall die 1748 erschienenen Instituzioni analitiche von Maria Gaetana Agnesi (diese Vorl., III[2], S. 822) in und außer Italien fanden. Es war aber nunmehr nötig, dieses Lehrbuch durch ein anderes zu ersetzen, welches die inzwischen erreichten Resultate umfassen sollte. Diesen Zweck setzten sich Riccati und Saladini mit ihren mehr als 1100 Quartseiten starken Institutiones analyticae (vgl. S. 457 ff.) vor. Welche Fortschritte dieses Lehrbuch gegenüber dem Agnesischen darbietet, ergibt sich aus den Vorworten zu den zwei Bänden, von denen der erste der endlichen, der zweite der unendlichen Analysis gewidmet ist. Als uns interessierende Zusätze sind folgende zu bezeichnen: Begriff des Unendlichkleinen, Gebrauch der Reihen in der Infinitesimalrechnung, Beweis der Prinzipien der Integralrechnung auf Grund der Reihen, Integration

[1]) Cours de mathématiques à l'usage de la marine. [2]) Die uns vorliegende Auflage (von den Jahren IX und X des republikanischen Kalenders) ist eine Verschmelzung der beiden Cours und enthält sowohl die Anwendungen auf Schiffahrt als die auf Artillerie.

von Kreis- und Hyperbelfunktionen, Rektifikation der Kegelschnitte. Der erste dieser Punkte ist schon oben berührt worden; auf andere werden wir weiter unten wieder kommen. Aus dem Vorwort entnehmen wir auch, welchen Anteil jeder der beiden Verfasser an dem Werke hatte, und welche ihre Arbeitsweise war.[1]) Vom methodologischen Standpunkte aus bieten die Institutiones eine wichtige Neuigkeit dar, die Verschmelzung der Differential- mit der Integralrechnung; das erste Buch (des II. Bandes) enthält die elementaren Differentialformeln, denen die bezüglichen Integralformeln gegenüberstehen, und die Integrationsmethoden mit Anwendung auf Quadraturen und Rektifikationen; das zweite behandelt die direkte und inverse Tangentenmethode; das dritte betrifft die Differentiale höherer Ordnung nebst den bezüglichen geometrischen Anwendungen, und die Variationsrechnung.

Es möge auch bemerkt werden, daß unsere Autoren den ursprünglichen Integralbegriff wieder aufgenommen haben (was sie dadurch ausdrückten, daß sie die Prinzipien der Integralrechnung auf die Reihentheorie begründeten). In der Vorgeschichte der Infinitesimalrechnung war, was wir jetzt als Integral bezeichnen, eine Fläche, also eine Summe unendlich vieler Elemente. Nachdem man aber die folgenreiche Entdeckung machte, daß Differentiation und Integration umgekehrte Operationen sind (diese Vorl., III[2], S. 156, 165), bezeichnete man als Integral einer Funktion $f(x)$ diejenige Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist. Was die Wissenschaft dieser Entdeckung verdankt, ist niemandem unbekannt; es ist aber noch immer interessant, zu zeigen, daß gewisse Integrationen sich auch auf Grund der ursprünglichen Definition des Integrals als einer Summe ausführen lassen. Dazu geben Riccati und Saladini drei Methoden, welche auf die durch die Gleichungen:

$$a^{m-1}y = x^m, \quad a^{m-1}x = y^m$$

definierten Funktionen y von x angewandt werden.[2])

[1]) „Totius operis methodum Riccatus diposuit; conscribenda vero capita amice divisa sunt. Quae magis subobscura, magisque erant difficilia, Riccatus magno studio clara, perceptuque reddidit facilia; quin etiam antequam in lucem proferret, ea adolescentibus quibusdam suis auditoribus addiscenda tradidit, atque experientia comperit, ea perquam facillime percipi, ac penetrari. Caetera vero Saladinus collegit, explicavit, ac multum de suo addidit. Is scripta deferebat amico socio, quibus perpensis, atque approbatis, illud tantum addebat quod necessaria operis connexio postulabat. Stilum vero, si lector identidem mutatum cernat, plurimos hunc librum latine reddidisse sciat." [2]) Vgl.: V. Riccati, De quadratura curvarum tradita per summas generales serierum, Comm. Acad. Bon. V 2, 1767, p. 432—445.

Die Institutiones analyticae, von welchen Saladini zehn Jahre später einen Auszug in italienischer Sprache herausgab[1]), boten zu lebhaften Diskussionen Gelegenheit. Im Jahre 1773 erschien im Giornale de' letterati ein ausführlicher Bericht von dem Abt Gioacchino Pessuti[2]), wo das Werk als eines der besten und vollständigsten Lehrbücher der Analysis bezeichnet wird, aber einige „kleine Flecken" hervorgehoben werden, deren einer die Verschmelzung der Differential- und Integralrechnung ist. Ein Schreiben von V. Riccati an Pessuti vom 29. August 1773, welches eine heftige Verteidigung seiner Reform enthält, wurde erst nach V. Riccatis Tode von dessen Brüdern veröffentlicht.[3]) Pessuti erwiderte darauf mit seinen Riflessioni analitiche (Livorno 1777), welche wiederum eine lange Antwort von seiten eines ungenannten Verfassers hervorriefen.[4])

Im Jahre 1767 kommt ein schon bekannter Name wieder vor, der von Emerson, als Verfasser eines kleinen Buches: The arithmetic of infinites, and the differential method; illustrated by examples (London 1767). Die „arithmetic of infinites", oder die Indivisibilienmethode, ist die Kunst, die Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe von unendlichkleiner Differenz zu summieren. Sie wird besonders auf die Berechnung von geometrischen Größen angewandt, welche als aus unteilbaren Elementen zusammengesetzt betrachtet werden; es ist aber zu beachten, daß diese Elemente nicht wirklich unteilbar sind, und nur „by reason of similitude" unteilbar genannt werden. Die „differential method" ist die Differenzen- und Interpolationslehre.

Im Jahre 1768 erschienen die Élémens du calcul intégral von Leseur und Jacquier, den beiden Minoriten, welchen man einen

[1]) Instituzioni analitiche del conte V. Riccati compendiate da G. Saladini, Bologna, I. Bd. 1776, II. Bd. 1775. [2]) Institutiones analyticae di V. Riccati e J. Saladini (Rezension ohne Namen des Verfassers), Nuovo Giornale de' letterati d'Italia (Modena) 1773, I, p. 30—73, II, p. 219 bis 287, III, p. 78—123. Daß Pessuti der Verfasser ist, ergibt sich aus p. 144 des XV. Bandes des Giornale. [3]) Lettera all' autore della relazione delle Istituzioni analitiche dell' Ab. Co. Vincenzo Riccati, inserita nel Nuovo Giornale de' letterati d'Italia, Tomo I, II e III, Nuova Raccolta d'Opuscoli scientifici e filologici XXX, 1776, Op. III, p. 8—25. — Den auf die im Texte berührte Frage sich beziehenden Teil dieses Schreibens kann man lesen in Loria, Il Giorn. de' Lett. d'Italia etc., Cantor-Festschrift, Leipzig 1897, S. 241—274.
[4]) Risposta alle Riflessioni analitiche del Sig. Ab G. Pessuti sopra una lettera scrittagli dal Sig. Ab. Co. V. Riccati, N. Giorn.lett. XV, 1778, p. 144—204. Nach Riccardi ist Verfasser derselben Giordano Riccati, Bruder von Vincenzo (aus Treviso, 1709—1790, siehe diese Vorl. III², S. 474).

bekannten Kommentar zu den Principia von Newton verdankt. Thomas Leseur, geboren zu Réthel 1703, gestorben zu Rom am 22. September 1770, war zusammen mit François Jacquier (1711 bis 1788; diese Vorl., III², S. 841) Professor der Mathematik und der Theologie zu Rom; beide wurden im Jahre 1763 nach Parma berufen als Lehrer des Infanten, welchem sie ihr Lehrbuch der Integralrechnung widmeten. Von diesem aus mehr als 1100 Seiten bestehenden Werke wollen wir nur sagen, daß es für eins der besten Lehrbücher seiner Zeit gehalten wurde, und daß dieses Urteil nach unserem Ermessen ganz richtig ist.

Das Jahr 1768 zeichnet sich aber besonders durch die Erscheinung eines der wichtigsten Werke unserer Periode, der Institutiones calculi integralis (Petersburg 1768, 1769, 1770) von L. Euler (1707—1783; diese Vorl., III², S. 549) aus. Dieses großartige Werk besteht aus drei starken Quartbänden, denen ein vierter nach des Verfassers Tode von der Petersburger Akademie 1794 hinzugefügt wurde. Bei der außerordentlichen Wichtigkeit desselben halten wir es für nötig, den allgemeinen Plan in seinen Hauptlinien wiederzugeben:

Erstes Buch (Liber). Integration der Funktionen einer Variabeln.

I. Abteilung (Pars). Untersuchung der Beziehungen, in welchen nur Differentiale erster Ordnung vorkommen.

1. Abschnitt (Sectio). Integration der Differentialformeln.

2. Abschnitt. Integration der Differentialgleichungen.

3. Abschnitt. Auflösung der Differentialgleichungen, in welchen die Differentialgrößen nicht linear auftreten.

II. Abteilung. Untersuchung der Beziehungen, in welchen Differentiale höherer Ordnung vorkommen.

1. Abschnitt. Differentialgleichungen zweiter Ordnung (mit zwei Variabeln).

2. Abschnitt. Differentialgleichungen von höherer Ordnung.

Zweites Buch. Integration der Funktionen mehrerer Variabeln.

I. Abteilung. Funktionen von zwei Variabeln.

1. Abschnitt. Untersuchung der durch eine Relation zwischen ihren ersten Differentialen definierten Funktionen von zwei Variabeln.

2. Abschnitt. Dasselbe für die zweiten Differentiale.

3. Abschnitt. Dasselbe für die höheren Differentiale.

II. Abteilung. Funktionen von mehr als zwei Variabeln.

Anhang (Appendix). Variationsrechnung.

Zusatz (Supplementum). Entwicklung einiger besonderer Fälle der Integration von Differentialgleichungen.

Wir wollen ferner die Verteilung der Kapitel des 1. Abschnittes der I. Abteilung des 1. Buches anführen, welcher allein unseren Abschnitt betrifft:

1. Kap. Rationale Funktionen.
2. „ Irrationale Funktionen.
3. „ Reihenintegration.
4. „ Logarithmische und exponentiale Funktionen.
5. „ Aus Winkeln oder Sinussen gebildete Funktionen.
6. „ Entwicklung der Integrale nach Sinussen und Kosinussen von vielfachen Bögen.
7. „ Angenäherte Integration.
8. „ Bestimmte Integrale.
9. „ Entwicklung der Integrale in unendliche Produkte.

Der vierte Band enthält 29 teils schon erschienene, teils der Petersburger Akademie vorgelegte, aber noch nicht herausgegebene Abhandlungen, welche elf Supplemente zu den einzelnen Kapiteln der ersten drei Bände bilden.

Was den Stoff des Werkes betrifft, so werden wir öfters Gelegenheit haben auf denselben zurückzukommen. Hier begnügen wir uns damit, die Eulersche Definition des Integrals anzuführen: $\int X dx$ ist diejenige veränderliche Größe, deren Differential $X dx$ ist. Selbstverständlich behält Euler auch hier seinen Begriff von dem strengen Nullsein der in bestimmten gegenseitigen Verhältnissen stehenden Differentiale bei (diese Vorl., III², S. 749); er bemerkt, daß der Gebrauch des Zeichens $\int$, welches summa bedeutet, von einem unangemessenen („parum idoneo“) Begriffe herrührt, nach welchem ein Integral als die Summe sämtlicher Differentiale zu betrachten wäre; was mit nicht besserem Rechte zugegeben werden darf, als daß die Linie aus Punkten bestehen möge.

Dem Jahre 1769 gehören die Anfangsgründe der Analysis der unendlichen Größen (Berlin) an von Georg Friedrich Tempelhoff, einem preußischen Artillerieoffizier, geboren zu Tramp am 17. März 1737, gestorben zu Berlin am 13. Juli 1807, der die große Ehre hatte, im Jahre 1778 den von der Berliner Akademie für eine Arbeit über die Kometen bestimmten Preis mit Condorcet zu teilen.

In den Jahren 1769—1771 gab der schon oben erwähnte Caraccioli seine Introduzione alla matematica per mezzo del calcolo universale[1]) heraus, deren vierter und letzter Teil der Infinitesimal-

[1]) Zwei Bände, Velletri 1769 und 1771. Eine lateinische Ausgabe war früher unter dem Titel: Isagoge in universam mathesin zu Neapel erschienen.

rechnung gewidmet ist. Den Ausgangspunkt bildet das Newtonsche Lemma, nach welchem zwei veränderliche Größen, deren Differenz kleiner als jede angebbare Größe ist, endlich einander gleich werden.

Das Datum 1770 trägt der erste Band eines schon oben besprochenen Werkes, welches gewissermaßen als eine Enzyklopädie der Mathematik bezeichnet werden darf: Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure (Modena 1770—1777) von O. Gherli. Die Elementi zerfallen in sieben Quartbände, von welchen der erste die Arithmetik, der zweite die Algebra, der dritte die Geometrie, der vierte die analytische Geometrie, der fünfte die Differentialrechnung, die zwei letzten die Integralrechnung behandeln. Sie geben alles damals Bekannte in ausführlicher Entwicklung wieder; wesentlich neues tragen sie nicht hinzu.

Ein ganz kleines und unerhebliches Büchlein ist die Pertractatio elementorum calculi integralis discentium bono typis commissa (Prag 1771) von Johann Tessanek (s. o. S. 30), Jesuit und Professor der höheren Mathematik, geboren in Böhmen 1728, gestorben zu Prag 1788.

Einem anderen italienischen Gelehrten, Francesco Maria Gaudio, geboren zu S. Remo bei Genua 1726, gestorben 1793, gehört ein dem von Gherli verfaßten analoges Werk, die Institutiones mathematicae, deren vier Oktavbände in Rom in den Jahren 1772—1779 gedruckt wurden.

Wieder in Italien erschien eine Dissertation[1]) von Carlo Francesco Gianella, Jesuit, geboren zu Mailand am 13. Juni 1740, gestorben am 15. Juli 1810, Mitglied der Turiner Akademie seit ihrer Stiftung und Professor zu Mailand und zu Pavia. Gianella geht vom Begriff der Fluxion aus, bedient sich aber der Leibnizschen Bezeichnung, und lehrt zuletzt, wie die Infinitesimalmethode als ein „compendium“ der Fluxionsmethode angesehen werden darf.

Der schon erwähnte Paolo Frisi gab in den Jahren 1782—1785 seine Werke[2]) in drei Bänden heraus, von denen der erste, der Algebra und analytischen Geometrie gewidmet, uns allein interessiert, während die zwei übrigen Mechanik und Kosmographie betreffen. Die Kapitel 11—15 des ersten Bandes behandeln die Infinitesimalrechnung und ihre Anwendung auf Kurvenlehre; Frisi erwähnt seine nunmehr 30 Jahre alte Schrift über Fluxionen, und fügt hinzu, er habe seit-

[1]) De fluxionibus earumque usu Dissertatio a Carolo Francisco Gianella S. J. Phys. Prof. proposita a D. Rocco Marliani propugnata, Mailand 1777. [2]) Pauli Frisii Opera, Mailand 1782, 1783, 1785.

dem gefunden, daß alles auf ein einziges Axiom ankommt: Zwei veränderliche Größen, welche von einander um weniger als jede vorgegebene Größe verschieden sind, werden schließlich einander gleich; was mit einer Bekehrung von der Fluxions- zur eigentlichen Grenzmethode gleichbedeutend ist.

Ebenfalls in Italien erschien das Werk (s. o. S. 450): Magnitudinum exponentialium logarithmorum et trigonometriae sublimis theoria nova methodo pertractata (Florenz 1782) von Ferroni. Pietro Ferroni, geboren zu Florenz am 22. Februar 1744, gestorben daselbst im November 1825, war kaum 20 Jahre alt Professor der Mathematik an der Universität zu Pisa; später lehrte er in Florenz und wurde Mathematiker, d. h. Bau- und Flußoberaufseher des Großherzogs von Toskana. Er beschäftigte sich vorzüglich mit angewandter Mathematik, und gab wertvolle Studien über die Theorie der Gewölbe heraus. Von dem oben erwähnten Werk betrifft nur ein kleiner Teil die Infinitesimalrechnung, nämlich das 10. Kapitel, welches sich auf das Integral $\int \frac{dx}{x}$ bezieht, und das 8. Kapitel, wo Ferroni lehrt, wie man die Differentialquotienten der logarithmischen und exponentialen Größen ohne Gebrauch der Geometrie berechnen kann. Es ist zu beachten, daß die Formel:

$$\frac{d \lg x}{dx} = \frac{1}{x}$$

damals häufig aus der Betrachtung der logarithmischen Kurve abgeleitet wurde. Dagegen bedient sich Ferroni der Reihenentwicklung:

$$\lg x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots,$$

woraus folgt:

$$d \lg x = dx\,[1 - (x-1) + (x-1)^2 - \cdots] = \frac{dx}{x}.$$

Er verfährt auch so: aus:

$$\lg x = \infty \left(x^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)$$

ergibt sich:

$$d \lg x = \infty \cdot \frac{1}{\infty}\, x^{\frac{1}{\infty}-1}\, dx = \frac{dx}{x}.$$

Was die Exponentialfunktion betrifft, hat man:

$$a^x = 1 + \frac{x \lg a}{1!} + \frac{x^2 \lg a^2}{2!} + \cdots,$$

also:

$$d \cdot a^x = \lg a \cdot dx \left(1 + \frac{x \lg a}{1!} + \frac{x^2 \lg a^2}{2!} + \cdots\right) = a^x \lg a \cdot dx;$$

oder auch:

$$a^x = \left(1 + \frac{x \lg a}{\infty}\right)^{\infty},$$

woraus folgt:

$$d \cdot a^x = \infty \left(1 + \frac{x \lg a}{\infty}\right)^{\infty - 1} \frac{\lg a \cdot dx}{\infty} = \left(1 + \frac{x \lg a}{\infty}\right)^{\infty} \lg a\, dx = a^x \lg a\, dx.^{1)}$$

Nach diesen aus Italien herrührenden Werken müssen wir zwei in Österreich erschienene Schriften erwähnen, die Vorlesungen über

---

[1]) Um besser zu zeigen, mit welcher Unbefangenheit Ferroni mit unendlichen und verschwindenden Größen handelt, wollen wir noch einige Formeln aus Kap. 10 entnehmen. Aus:

$$\frac{x^m}{m} = \frac{1}{m} + \log x + \frac{m \log x^2}{2} + \frac{m^2 \log x^3}{6} + \cdots$$

folgt für $m = 0$:

$$\frac{x^0}{0} = \int_0^x \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + \log x.$$

Es ist auch:

$$\log 0 = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right),$$

also:

$$\int_0^x \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \log x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots.$$

Aus:

$$\begin{aligned}\int x^m dx &= \int dx \left(1 + \frac{m \log x}{1!} + \frac{m^2 \log x^2}{2!} + \cdots\right)\\ &= x + \frac{m}{1} x \log x + \frac{m^2}{2!} x \log x^2 + \cdots\\ &\quad - mx \qquad - \frac{m^2}{1} x \log x - \cdots\\ &\qquad\quad + m^2 x \qquad + \cdots\\ &= x(1 - m + m^2 - \cdots) + x \log x \left(\frac{m}{1} - \frac{m^2}{1} + \cdots\right)\\ &\qquad + x \log x^2 \left(\frac{m^2}{2!} - \cdots\right) + \cdots\end{aligned}$$

folgt für $m = -1$:

$$\begin{aligned}\int x^{-1} dx &= \infty x - \frac{\infty x \log x}{1} + \frac{\infty x \log x^2}{2!} - \cdots + B = \infty x e^{-\log x} + B\\ &= \infty x^{\frac{1}{\infty}} + B = B + (1 + (x-1))^{\frac{1}{\infty}},\end{aligned}$$

usw.

Mathematik[1]) von Vega, und die Elementa calculi differentialis et integralis (Prag und Wien 1783) von Stanislaus Wydra (1741—1804, s. o. S. 20), Professor der Mathematik an der Universität zu Prag.

Georg Freiherr von Vega (s. o. S. 437) ist weitbekannt als Verfasser eines noch heute in Gebrauch bleibenden logarithmisch-trigonometrischen Handbuches. Seine Vorlesungen zerfallen in zwei Bände, von welchen der erste die Rechenkunst und Algebra, der zweite die theoretische und praktische Geometrie, die geradlinige und sphärische Trigonometrie, die höhere Geometrie und die Infinitesimalrechnung enthält. Wie der Verfasser selbst in seiner Vorrede erkennt, enthält sein Werk nichts wesentlich Neues; es möge nur bemerkt werden, daß die Integration von:

$$x^m dx(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{p}{2}}$$

für ganzzahlige m und p, und von:

$$x^m dx(\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n})^{\frac{p}{2}}$$

für ganzzahlige $\frac{m+1}{n}$ und p dadurch erzielt wird, daß man die Trinome in Binome durch die Beziehung:

$$x = z - \frac{\beta}{2\gamma} \quad \text{oder} \quad x^n = z^n - \frac{\beta}{2\gamma}$$

umformt.

Die Elementa von Wydra sind, ihrem Titel gemäß, ein elementares Lehrbuch der Infinitesimalrechnung und ihrer Anwendungen, wobei die Infinitesimalmethode durchgängig gebraucht wird.

Zwei andere ganz elementare Schriften sind die Brevi elementi di calcolo differenziale (Milano 1784) von Gaetano Allodi, Adjunkt am Observatorium zu Mailand, und das Lehrbuch der Infinitesimalrechnung von Vito Caravelli (aus Montepeloso in Basilicata, 1724—1800, s. o. S. 34) und Vincenzo Porto.[2])

Ein Werk, von welchem in Italien weit mehr gesprochen wurde, als es dies verdiente, ist das zweibändige, mehr als 1200 Quartseiten starke Lehrbuch von Nicolai: Nova analyseos elementa.[3]) Giovanni

[1]) Der ausführliche Titel ist: Vorlesungen über Mathematik sowohl überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den K.-K. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des K.-K. Artillerie-Corps. Das Werk, dessen erste Auflage das Datum 1782 trägt, ist dem Artillerie-Corps gewidmet. Uns liegt eine spätere Ausgabe (Wien 1821) vor, die aus der vierten Auflage des ersten Bandes und aus der sechsten des zweiten gebildet ist. [2]) Trattato del calcolo differenziale di Vito Caravelli, e del calcolo integrale di Vincenzo Porto, per uso del regale Collegio Militare, Napoli 1786. [3]) T. I, Pars prima, Patavii 1786;

Battista Nicolai, geboren zu Venedig am 30. März 1726, gestorben zu Schio bei Vicenza am 15. Juli 1793, war Schüler von Jacopo Riccati, lehrte zu Treviso und dann an der Universität zu Padua. Nicolai denkt, die gemeine Analysis sei ganz wertlos, was davon herrühre, daß man nicht genau wisse, was „Einheit" bedeutet. Die Einheit ist, wie er uns lehrt, dem Werte, der Natur, der Dimension, dem Systeme, der Lage nach unbestimmt; jede Zahl kann als Einheit angenommen werden. Von dieser trivialen Wahrheit ausgehend, verwickelt er sich in ein solches Netz von Unsinn, daß wir zu viel Raum verschwenden müßten, wollten wir unseren Lesern eine genaue Idee davon geben. Aus den ungemein weitschweifigen Entwicklungen von Nicolai die Quintessenz entnehmend, können wir folgendes sagen: Da die Einheit willkürlich ist, so kann man das Negative auf eine negative Einheit beziehen, wodurch dasselbe als positiv erscheint; es ist also $-1 = 1$.[1]) Ja noch mehr, jede Zahl ist jeder anderen Zahl gleich.[2]) Dadurch wird das Imaginäre aus der Analysis verdrängt, da sowohl $\sqrt{AB}$ als $\sqrt{BA}$ (wo AB eine Strecke bezeichnet) einen reellen Wert hat.

Derartige Ideen konnten nicht umhin, die höchste Verwunderung überall zu erregen, um so mehr, als sich Nicolai, wie es scheint, der allgemeinen Achtung erfreute. Die Elementa und die früheren Riflessioni sulla possibilità della reale soluzione analitica del caso irreducibile (Padua 1783) wurden von allen Seiten heftig bekämpft[3]), und Silio, der freilich die tiefste Verehrung gegen

T. I, Pars altera (nach des Verfassers Tode vom Abt Vincenzo Chiminello, Adjunkt am Observatorium zu Padua, herausgegeben), Patavii 1793. Lag es etwa im Sinne des Verfassers, noch einen zweiten Band hinzuzufügen?

[1]) Wir wollen hier wenigstens ein Beispiel von dem Übergange vom Positiven zum Negativen anführen:

$$a = a^1 = a^{0+1} = \frac{a}{a} a^1 = \frac{1}{1} a^1 = \frac{0}{0} a^1 = \frac{1-1}{1-1} a^1 = \frac{-1+1}{1-1} (-a)^1$$

$$= \frac{0}{0} (-a)^1 = (-a)^1 = \left(\frac{-1+1}{1-1}\right) (-1)(a)^1 = 0^0 (-a^1) = -a^1 = -a$$

(Bd. I 1, p. 29). Die Gleichheit der positiven und der negativen Größen wurde von Chiminello in seinen Riflessioni su la verità di alcuni paradossi analitici verteidigt. [2]) „$1^0(1^0)^0 = g^0(g^0)^0$ ut quisque facile videt. Sed $1^0(1^0)^0 = 1(1^0)^0$; ergo erit etiam $1 \cdot (1)^0 = 1^{0+1} = 1(g^0) = g\left(\frac{1}{1}\right)^0 = g(g^0) = g^{0+1}$, sive $1 \cdot 1 = 1 \frac{g}{g} = g \frac{1}{1} = g \frac{g}{g}$" (Bd. I 2, p. 57). [3]) Lettera del Sig. Petronio Maria Caldani (s. o. S. 152) al Rev. Padre Jacquier, Antol. Romana X, 1784, p. 33—37. — Lettera del Sig. P. M. Caldani al

Nicolai zeigt, sagt, seine Elemente sollten besser analytische Rätsel oder analytisches Labyrinth betitelt werden.

Von der 1786 erschienenen Exposition von Lhuilier haben wir schon oben gesprochen[1]); es möge hier nur weniges hinzukommen. Lhuilier bezeichnet als das Differentialverhältnis $\frac{dP}{dx}$ von zwei veränderlichen Größen P, x die Grenze des Verhältnisses ihrer gleichzeitigen Zuwächse, wobei $\frac{dP}{dx}$ nicht als ein wirkliches Verhältnis, sondern als ein unzerlegbarer Ausdruck gelten muß. Er beweist dann, auf Grund der Binomialformel, daß das Differentialverhältnis von x^n und x durch nx^{n-1} gegeben ist, und bemerkt, daß dieses Ergebnis ganz allgemein ist, da die Binomialformel sich für jeden beliebigen Exponent algebraisch nachweisen läßt. Demnach kann man das Differentialverhältnis einer jeden algebraischen Funktion von x (in bezug auf x) bestimmen, da jede solche Funktion in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Was die transzendenten Funktionen betrifft, benutzt Lhuilier die Taylorsche Entwicklung.

Wir begegnen nunmehr wieder einem italienischen Schriftsteller, dem Pater Angelo Luigi Lotteri, Mönch aus dem Orden der

Sig. N. N., ebenda, p. 61—62. — Lettera d'un dilettante d'analisi ad un suo amico sulla risposta inserita nel giornale no. 37 da' confini d'Italia alla lettera del Sig. P. M. Caldani al P. Jacquier intorno ai calcoli del Sig. Ab. Nicolai, ebenda, p. 249—254. — Risposta al Sig. prof. di Camerino autore delle riflessioni (stampate nel giornale letterario dai confini d'Italia no. 43) sulla lettera del Sig. P. M. Caldani diretta al P. Jacquier, ebenda, p. 313—318. — Riflessioni del prof. di matematica nell' università di Camerino alla risposta data al suo articolo inserito nel num. 13, 1784 del giornale letterario da' confini d'Italia, ebenda, p. 401—405, 409—414. — Postille alle Riflessioni del prof. di matematica etc., Antol. Romana XI, 1784, p. 33—40, 41—46, 49 bis 54, 57—62. — Lettera del Sig. Co. Giordano Riccati al Sig. Ab. Contarelli intorno alle Riflessioni su la verità di alcuni paradossi analitici, creduti comunemente paralogismi, contenute nel n. 1 e 2 del Giornale letterario dai confini dell' Italia 1784, Nuovo Giorn. Lett. (Modena) XXVIII, 1784, p. 256—266. — Antonio Eximeno Valentini (Jesuit, 1732—1798), De studiis philosophicis et mathematicis instituendis (angeführt in einem Flugblatt von 12 Seiten s. l. et a. mit dem Titel: Lettera ad un amico del Sig. Arciprete Nicolai professore di analisi nella Università di Padova). — Guglielmo Silio Borremans (aus Sizilien), professore di analisi nella R. Accademia Militare, Osservazioni critiche su i nuovi elementi di analisi dell' abate Nicolai, Napoli 1787. — Was das Giornale letterario dai confini d'Italia ist, habe ich nicht ermitteln können.

[1]) Einen ausführlichen Bericht über dieses Werk findet man in: Vivanti, Il concetto d'infinitesimo etc.

Hierosolymiten. Geboren zu Bollate bei Mailand am 24. November 1760, war er 1787 Repetitor, 1798 Professor an der Universität zu Pavia. Als im Jahre 1799 die Studien an dieser Universität unterbrochen wurden, ging er nach Como als Professor am dortigen Lyceum, kam aber im nachfolgenden Jahre, bei der Wiedereröffnung der Universität, nach Pavia zurück als Substitut von Gregorio Fontana, welcher als Mitglied des Corps législatif der zisalpinen Republik von Pavia ferngehalten wurde, bis er später zum Professor der Einleitung in die Infinitesimalrechnung ernannt wurde. Er starb zu Mailand am 23. Januar 1839. Die Geschichte seines Lehrbuches der Infinitesimalrechnung[1]) erzählt er wie folgt. Nachdem d'Alembert, sagt Lotteri, den Spuren Newtons folgend, die Infinitesimalmethode durch die Grenzmethode ersetzte, wodurch die Analysis viel lichtvoller geworden ist, sind zahlreiche Lehrbücher der Infinitesimalrechnung in allen Ländern erschienen. Unter diesen zeichnet sich ein von einem ungenannten preußischen Offizier[2]) zum Gebrauche der Ingenieure und der Artillerie verfaßtes kleines Buch aus. Lotteri fing an, dasselbe zu übersetzen, sah aber bald ein, daß manche Berichtigungen und Zusätze nötig waren, und daher zog er es vor, das Werk in eine etwas verschiedene Form zu bringen; dazu bediente er sich zum Teil selbständiger Forschungen, entnahm aber die Theorie der Krümmung und der singulären Punkte dem Lehrbuche von Cousin (s. u.), die Integralrechnung dem von Bezout. Vier Zusätze von Fontana betreffen den Integrallogarithmus, eine Differentialgleichung zweiter und eine dritter Ordnung, und die Ausdehnung der Taylorschen Formel auf Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Von zwei Lehrbüchern von Schultz haben wir schon früher gesprochen; wenn auch in ihnen der Begriff vom Unendlichen vorkommt, so beschäftigt sich doch keins von beiden mit der Infinitesimalrechnung.

Ein Werk von nicht ganz entschiedenem Charakter ist die Teoria dell' analisi[3]) von Pietro Franchini (s. o. S. 313), geboren zu Partigliano bei Lucca am 24. April 1768, gestorben zu Lucca am 26. Januar 1837, Professor der Philosophie am bischöflichen Seminar zu Veroli bei Rom. Es besteht aus vier Abschnitten: I. Theorie der Rechnungen,

[1]) Principj fondamentali del calcolo differenziale e integrale appoggiati alla dottrina de' limiti, Pavia 1788. [2]) War er etwa der schon oben erwähnte Tempelhoff? oder von Massenbach, Verfasser der: Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung zum Gebrauch der Ingenieurs und Artilleristen, von einem K. Pr. Offizier, Halle 1784?
[3]) Teoria dell' analisi da servire d'introduzione al metodo diretto, ed inverso de' limiti, 3 Bde., Roma 1792—93.

oder der vier arithmetischen Operationen; II. Von den Quellen der Analysis; es sind 15 Theorien, nämlich: 1. Faktoren eines Monoms. 2. Kombinationen. 3. Potenzen. 4. Wurzeln. 5. Proportionen, Progressionen, Reihen. 6. Kettenbrüche. 7. Teilbrüche. 8. Logarithmen. 9. Kreisfunktionen. 10. Polygonometrie. 11. Endliche Differenzen. 12. Grenzwerte. 13. Maxima und Minima. 14. Endliche und unendlichkleine Größen. 15. Stetige Funktionen; III. Theorie der Gleichungen; IV. Von der Analysis im allgemeinen (endliche bestimmte und unbestimmte Analysis).

Der oben genannte Cousin hatte zu Paris im Jahre 1777 ein Werk mit dem Titel: Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral herausgegeben, welches neu bearbeitet im Jahre 1796 unter dem veränderten Titel: Traité du calcul différentiel et du calcul intégral erschien. Jacques Antoine Joseph Cousin, geboren zu Paris am 29. Januar 1739, gestorben daselbst am 28. Dezember 1800, führte bis zu seinem 50. Jahre ein ruhiges Leben als Professor der Mathematik und Physik; in den trüben Zeiten der Republik nahm er an den Staatssachen auf die ehrenhafteste Weise teil und starb als Mitglied des Senates und des Institut national. Es ist kaum nötig zu sagen, daß er ein Anhänger von d'Alembert ist; als Grundlagen zu seiner Entwicklung der Infinitesimalrechnung dienen die wohlbekannten Prinzipien der Grenztheorie.

Das Jahr 1797 ist für uns besonders wichtig, da in diesem Jahre die Théorie des fonctions analytiques von Lagrange herausgegeben wurde. Wir haben schon oben versucht, den Standpunkt von Lagrange zu schildern; wir wollen nunmehr sehen, wie er von diesem aus zu Werke geht. Seine Methode zur Auffindung der Ableitungen ist, wenn man die Exponentialreihe als bekannt voraussetzt, auf die Funktionen x^m, a^x, $\lg x$ sehr leicht anwendbar; für die trigonometrischen Funktionen bedient er sich der Eulerschen Formeln (diese Vorl., III², S. 708), welche diese Funktionen mit der Exponentialfunktion in Verbindung setzen.

Mit gleicher Leichtigkeit ergibt sich die Ableitung einer Summe, eines Produktes, eines Quotienten von Funktionen; ist z. B.:

$$y = pq,$$

so erhält man:

$$y + iy' + \cdots = (p + ip' + \cdots)(q + iq' + \cdots) = pq + i(pq' + p'q) + \cdots,$$

also:

$$y' = pq' + p'q.$$

Die Ableitung einer Funktionsfunktion $y = fp(x)$ erhält man folgendermaßen. Es ist:

$$p + o = p(x + i) = p + ip' + \cdots,$$

$$y + iy' + \cdots = f(p + o) = f(p) + of'(p) + \cdots$$

$$= f(p) + (ip' + \cdots)f'(p) + \cdots = f(p) + ip'f'(p) + \cdots,$$

also:

$$y' = p'f'(p).$$

Ist nunmehr $y = f(p, q)$, und setzt man $x + i$ statt x in p, so wird die Funktion:

$$f + ip'f_p' + \cdots\text{[1]},$$

setzt man dagegen $x + i$ statt x in q, so erhält man:

$$f + iq'f_q' + \cdots;$$

es ergibt sich folglich durch die gleichzeitige Einsetzung von $x + i$ in p und in q:

$$f + iq'(f_q' + + \cdots) + ip'(f_p' + \cdots),$$

also:

$$y' = p'f_p' + q'f_q'.$$

Ist $y = f(x)$ eine implizite, durch die Gleichung:

$$F(x, y) = 0$$

definierte Funktion von x, und setzt man:

$$F(x, f(x)) = \varphi(x),$$

so erhält man aus $\varphi(x)$ nach Ersetzung von x durch $x + i$:

$$\varphi(x) + i\varphi'(x) + \cdots;$$

es ist aber $\varphi(x) = 0$ für jeden Wert von x, folglich ist $\varphi'(x) = 0$ oder:

$$F_x' + y'F_y' = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$y' = -\frac{F_x'}{F_y'}.$$

Die Regel von L'Hospital wird folgendermaßen bewiesen. Es sei:

$$y = \frac{f(x)}{F(x)}, \quad f(a) = F(a) = 0;$$

aus:

$$yF(x) = f(x)$$

ergibt sich:

$$y'F(x) + yF'(x) = f'(x),$$

und hieraus für $x = a$:

[1]) Lagrange bezeichnet die partiellen Ableitungen von $f(p, q)$ nach p, q, wo p, q Funktionen von x sind, mit $f'(p)$, $f'(q)$, dagegen die Ableitungen von $f(x, y)$ nach x, y mit $f'(x, y)$, $f_1(x, y)$.

$$y = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Wäre auch:

$$f'(a) = F'(a) = 0,$$

so würde man erhalten:

$$y = \frac{f''(a)}{F''(a)},$$

usw.; und es ist nicht zu befürchten, daß sämtliche Ableitungen verschwinden mögen, denn es wäre dann:

$$f(a+i) = 0, \quad F(a+i) = 0$$

für jeden Wert von i.

Darauf kommt Lagrange auf die Aufstellung der nach ihm benannten Restformel und auf die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Was die Funktionen von zwei Variablen betrifft, so nimmt Lagrange als selbstverständlich an, daß $f(x+i,\ y+o)$ sich überhaupt in eine nach steigenden Potenzen von i, o fortschreitende Reihe entwickeln läßt, deren erstes Glied $f(x, y)$ ist. Um das Gesetz dieser Reihe zu finden, setze man zuerst $x+i$ statt x; dann ist:

$$f(x+i, y) = f(x, y) + i f_x'(x, y) + \frac{i^2}{2} f_{xx}''(x, y) + \cdots.$$

Setzt man jetzt $y+o$ statt y, so folgt:

$$f(x+i, y+o) = f(x, y+o) + i f_x'(x, y+o) + \frac{i^2}{2} f_{xx}''(x, y+o) \cdots$$

Es ist aber:

$$f(x, y+o) = f(x, y) + o f_y'(x, y) + \frac{o^2}{2} f_{yy}''(x, y) + \cdots,$$

$$f_x'(x, y+o) = f_x'(x, y) + o f_{xy}''(x, y) + \cdots,$$

$$f_{xx}''(x, y+o) = f_{xx}''(x, y) + \cdots,$$

also:

$$f(x+i, y+o) = f(x, y) + i f_x'(x, y) + o f_y'(x, y) + \frac{i^2}{2} f_{xx}''(x, y) + i o f_{xy}''(x, y) + \frac{o^2}{2} f_{yy}''(x, y) + \cdots.$$

Läßt man dagegen zuerst y um o, dann x um i zunehmen, so wird man analog erhalten:

$$f(x+i, y+o) = f(x, y) + i f_x'(x, y) + o f_y'(x, y) + \frac{i^2}{2} f_{xx}''(x, y) + i o f_{yx}''(x, y) + \frac{o^2}{2} f_{yy}''(x, y) + \cdots.$$

Aus dem Vergleich der beiden Entwicklungen folgt der bekannte Satz (diese Vorl., III², S. 759, 881):

$$f_{xy}''(x, y) = f_{yx}''(x, y).$$

Die Funktionen von mehr als zwei Variablen werden analog behandelt. Die erste Abteilung des Werkes schließt mit der Untersuchung der partiellen Differentialgleichungen.

Die zweite Abteilung ist den geometrischen Anwendungen gewidmet. Lagrange bemerkt, daß die Alten die Tangente als eine solche Gerade definierten, daß zwischen derselben und der Kurve keine andere Gerade liegen könne; später betrachtete man die Tangente entweder als eine Sekante mit zusammenfallenden Schnittpunkten, oder als die Verlängerung einer Seite eines Unendlichvieleckes, oder als die Richtung der Bewegung, durch welche die Kurve beschrieben werden könne. Hieraus entstanden einerseits die algebraischen, auf die Gleichheit der Wurzeln der Gleichungen gegründeten, andererseits die differentiellen, die Verhältnisse von unendlichkleinen Differenzen oder von Fluxionen benutzenden Methoden. Unser Verfahren, fährt Lagrange fort, gestattet uns, die Begriffe und die Methoden der Alten wieder aufzunehmen.

Es mögen:

$$y = f(x), \quad y = F(x)$$

zwei Kurven darstellen. Damit sie einen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, muß sein (für einen gewissen Wert von x):

$$f(x) = F(x).$$

Um die beiden Linien in der Nähe dieses Punktes untereinander zu vergleichen, setzen wir $x+i$ statt x; der Unterschied der beiden Ordinaten ist dann:

$$f(x+i) - F(x+i) = i(f'(x) - F'(x)) + \frac{i^2}{2}(f''(x) - F''(x)) + \cdots;$$

er ist um so kleiner, je mehr Glieder rechts verschwinden. Es sei nunmehr:

$$y = \varphi(x)$$

eine dritte, durch denselben Punkt gehende Linie, so daß:

$$f(x) = F(x) = \varphi(x)$$

ist, und setzen wir:

$$D = f(x+i) - F(x+i) = i(f'(x)) - F'(x)) + \frac{i^2}{2}(f''(x+j) - F''(x+j)),$$

$$\varDelta = f(x+i) - \varphi(x+i) = i(f'(x)) - \varphi'(x)) + \frac{i^2}{2}(f''(x+j) - \varphi''(x+j)),$$

wo j in den beiden Formeln verschieden sein kann. Damit die dritte Linie zwischen den beiden anderen liege, muß D für ein beliebig kleines i absolut größer sein als Δ. Ist nun:

$$f'(x) = F'(x), \quad f'(x) = \varphi'(x),$$

so ist:

$$D = \frac{i^2}{2}(f''(x+j) - F''(x+j)),$$

und man kann i so klein annehmen, daß Δ absolut größer als D wird. Die dritte Linie kann also nur dann zwischen den beiden anderen liegen, wenn $f'(x) = \varphi'(x)$. Ist insbesondere:

$$F(x) = a + bx,$$

so daß $y = F(x)$ eine Gerade darstellt, so nehmen die Beziehungen:

$$f(x) = F(x), \quad f'(x) = F'(x)$$

die Form:

$$f(x) = a + bx, \quad f'(x) = b$$

an, und die Gleichung der Geraden wird:

(1) $$q = f(x) - xf'(x) + pf'(x),$$

wo p, q die laufenden Koordinaten bezeichnen. Ist die dritte Linie ebenfalls eine Gerade, so daß:

$$\varphi(x) = g + hx,$$

und soll diese durch den betrachteten Punkt gehen, so muß sein in diesem Punkte:

$$f(x) = g + hx;$$

soll sie ferner zwischen den beiden ersten Linien liegen, so muß sein:

$$f'(x) = h.$$

Hieraus ergibt sich aber:

$$g = a, \quad h = b.$$

Es kann also keine Gerade zwischen der Linie $q = f(p)$ und der Geraden (1) liegen; und diese letztere ist die Tangente.

Ein analoges Verfahren kann auf die Untersuchung des Schmiegungskreises und überhaupt der Berührungen irgendwelcher Ordnungen angewandt werden.

Setzt man ferner $\frac{1}{i}$ statt x, und stimmen die Reihenentwicklungen von $f\left(\frac{1}{i}\right)$, $F\left(\frac{1}{i}\right)$ nach steigenden Potenzen von i in den ersten, zweiten, . . . Gliedern überein, so läßt sich beweisen, daß die

Linie $y = \varphi(x)$ in den Punkten, deren Abszissen $x \geq \frac{1}{i}$ sind, zwischen den beiden Linien $y = f(x)$, $y = F(x)$ nicht liegen kann, wenn die Reihenentwicklung von $\varphi\left(\frac{1}{i}\right)$ nicht wenigstens in ebensovielen Gliedern mit den übrigen übereinstimmt, woraus sich der Begriff von den Asymptoten ganz leicht ergibt.

Was wir bisher gesagt haben, ist wohl hinreichend, um dem Leser einen klaren Begriff von dem Lagrangeschen Verfahren zu geben, und wir dürfen daher über das übrige ziemlich rasch hinweggehen. Die Bedingung dafür, daß der Abszisse x die größte oder kleinste Ordinate zukommt, ergibt sich aus der Betrachtung, daß:

$$f(x+i) - f(x)$$

ein von dem Vorzeichen von i unabhängiges Vorzeichen besitzen muß. Zum Zwecke der Berechnung der Fläche $F(x)$ einer ebenen Linie $y = f(x)$, wo $f(x)$ eine monotone Funktion bezeichnet, bemerkt Lagrange, daß $F(x+i) - F(x)$ zwischen $if(x)$ und $if(x+i)$ liegen muß; es ist aber:

$$f(x+i) = f(x) + if'(x+j),$$
$$F(x+i) = F(x) + iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+j),$$

folglich liegt:

$$iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+j)$$

zwischen den Größen:

$$if(x), \quad if(x) + i^2 f'(x+j);$$

hieraus ergibt sich leicht:

$$F'(x) = f(x).$$

Bezeichnet $f(x)$ die Fläche des ebenen Schnittes eines Körpers, so ergibt $F(x)$ dessen Inhalt.

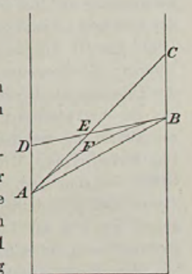

Fig. 77.

Die Rektifikationsformel wird folgendermaßen erhalten. Nach Archimed ist der Bogen AFB (Fig. 77) länger als die Sehne AB und kürzer als $AE + EB$, wobei E den Schnittpunkt der Tangenten AC, BD in A und B bezeichnet; nun ist aber die Neigung von AC gegen die Ordinatenachse kleiner, die von BD größer als die von AB, folglich:

$$AB > BD, \quad AC > AE + EB,$$

und endlich:

$$AC > AFB > BD,$$

oder:

$$i\sqrt{1+f'^2(x)} > AFD > i\sqrt{1+f'^2(x+i)}$$

Hieraus ergibt sich, wenn $\Phi(x)$ die Bogenlänge bezeichnet:

$$\Phi'(x) = \sqrt{1+f'^2(x)}.$$

Es folgt dann die Theorie der Raumkurven und Oberflächen und der Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen, die Variationsrechnung und die Theorie der Quadraturen und Kubaturen.

Die dritte Abteilung enthält die mechanischen Anwendungen, auf welche wir nicht einzugehen brauchen.

Noch im Jahre 1797 erschien der erste Band des umfangreichen und trefflichen Traité du calcul différentiel et du calcul intégral (Paris, an V, VI [1797—98], 2 Bde.) von Sylvestre François Lacroix, geboren zu Paris 1765, gestorben am 26. Mai 1843. Sohn einer armen Familie, wollte sich Lacroix der Schiffahrt widmen; bald aber erkannte er, daß sich diese Wissenschaft auf Mathematik gründet, und gab sich daher mathematischen Studien eifrig hin. Seine Mühe war von dem besten Erfolg gekrönt (s. o. S. 344). Als Zeugen seiner schriftstellerischen Tätigkeit liegen uns manche Lehrbücher von hohem didaktischem Werte vor. Der Gedanke, ein Lehrbuch der Infinitesimalrechnung abzufassen, wurde ihm durch die Lagrangesche Abhandlung von 1772 (s. o. S. 644) eingeflößt. Im Jahre 1787 fing er an, den Stoff zu seinem Werke zu sammeln und einige Fachmänner um Rat zu fragen. Man kann aber Lacroix nicht unter die Anhänger Lagranges zählen. Freilich gibt er die Lagrangesche Definition der Ableitung an und bestimmt dementsprechend die Ableitungen der elementaren Funktionen; aber er zeigt bald nachher, daß die Ableitung die Grenze der entsprechenden Zuwächse der Funktion und der Veränderlichen ist, und bezeichnet als Gegenstand der Differentialrechnung die Bestimmung der Grenzen der Zuwachsverhältnisse von veränderlichen Größen, wenn die Beziehungen zwischen diesen Größen bekannt sind. An einem anderen Orte bemüht er sich zu beweisen, daß die Infinitesimalmethode nicht angenähert, sondern streng genau ist, und daß Leibniz mit der Metaphysik der Infinitesimalrechnung ganz im reinen war.

Viel Neues bietet das Buch nicht dar; es mag daher genügen, auf die Einteilung des Stoffes kurz hinzuweisen.

Der erste Band, der Differentialrechnung gewidmet, zerfällt in eine Einleitung und fünf Kapitel. In der Einleitung werden die

Definitionen von Funktion und Grenze gegeben, und die Grundsätze der Grenztheorie aufgestellt. Das 1. Kapitel beginnt mit der Lagrangeschen Definition der Ableitung; es werden dann, wie schon gesagt, die Ableitungen der elementaren Funktionen bestimmt und die Hauptsätze der Differentialrechnung nachgewiesen, und es wird zum Schlusse gezeigt, daß die Ableitung die Grenze des Zuwachsverhältnisses ist, was zur oben angeführten Definition der Differentialrechnung führt. Das 2. Kapitel behandelt die analytischen Anwendungen der Differentialrechnung: Reihenentwicklungen, unbestimmte Ausdrücke, Maxima und Minima. Bemerkenswert ist hier die Untersuchung einiger Fälle, in welchen die Taylorsche Reihenentwicklung nicht zulässig ist. Hat man:

$$f(x) = (x-a)^n,$$

wo n positiv und kleiner als 1 ist, so enthält das erste Glied der Entwicklung eine positive Potenz, die übrigen aber sämtlich negative Potenzen von $(x-a)$, und man kann also nicht $a = 0$ setzen. Das rührt davon her, daß $(x-a+k)^n$ sich für $x = a$ auf k^n, d. h. auf eine nicht ganze Potenz von k reduziert, was mit der allgemeinen Form der Entwicklung nicht verträglich ist. Ist $f(x)$ allgemein irrational, hört aber für $x = a$ auf, es zu sein, so muß k in $f(a+k)$ irrational auftreten, und daher kann $f(a+k)$ durch keine Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von k dargestellt werden. Das 3. Kapitel enthält eine Abschweifung über algebraische Kurven, das 4. und 5. die Theorie der ebenen Kurven und diejenige der Raumkurven und Oberflächen.

Der zweite Band enthält die Integralrechnung und zerfällt ebenfalls in fünf Kapitel, nämlich: 1. Integration der Funktionen einer Veränderlichen; 2. Geometrische Anwendungen der Integralrechnung; 3. Gewöhnliche Differentialgleichungen; 4. Funktionen von mehreren Veränderlichen; 5. Variationsrechnung.

Differentiation und Integration.

1. Differentiation.

Die Differentialrechnung war in allen ihren wesentlichen Teilen von Leibniz geschaffen worden und hatte noch am Schlusse der vorigen Periode in Eulers Lehrbuche eine erschöpfende Behandlung erhalten. Es war also von unserer Periode kein beträchtlicher Beitrag zu erwarten. Und so ist es wirklich. Nur eines verdient als ganz neu angezeigt zu werden, die Einführung der symbolischen Bezeichnung in die Infinitesimalrechnung durch Lagrange.

Lagrange[1]) schreibt die Taylorsche Entwicklung folgendermaßen:

$$\Delta u = e^{\frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\psi + \cdots} - 1,$$

und geht dann zur allgemeinen Formel über:

$$\Delta^{\lambda} u = \left(e^{\frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\psi + \cdots} - 1\right)^{\lambda};$$

diese Formel läßt sich auch auf den Fall eines negativen λ erstrecken, so daß:

$$\Sigma^{\lambda} u = \frac{1}{\left(e^{\frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\psi + \cdots} - 1\right)^{\lambda}},$$

wo $\Sigma^{\lambda} u$ durch die Beziehungen:

$$\Delta \Sigma^{\lambda} u = \Sigma^{\lambda-1} u, \ \ldots, \ \Delta \Sigma u = u$$

definiert ist. Der Übergang von $\Delta^{\lambda} u$ zu $\Sigma^{\lambda} u$, bemerkt Lagrange, ist nicht auf ersichtliche und strenge Prinzipien gegründet, er ist aber nichtsdestoweniger richtig, wovon man sich a posteriori zu überzeugen imstande ist, und hängt mit der zwischen den positiven Potenzen und der Differentiation einerseits, zwischen den negativen Potenzen und der Integration andererseits obwaltenden Analogie zusammen. Es wäre jedoch wohl schwierig, einen direkten analytischen Beweis davon zu geben.

Betrachten wir, der Einfachheit wegen, den Fall einer einzigen Veränderlichen. Da:

$$e^{\omega} - 1 = \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \cdots$$

ist, so folgt:

$$(e^{\omega} - 1)^{\lambda} = \omega^{\lambda}(1 + A\omega + B\omega^2 + \cdots),$$

und hieraus durch logarithmische Differentiation:

$$\lambda\left(\frac{e^{\omega}}{e^{\omega} - 1} - \frac{1}{\omega}\right) = \frac{A + 2B\omega + \cdots}{1 + A\omega + B\omega^2 + \cdots}$$

oder:

$$\frac{A + 2B\omega + \cdots}{1 + A\omega + B\omega^2 + \cdots} = \lambda\left(\frac{1}{\omega - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} - \cdots} - \frac{1}{\omega}\right) = \lambda\,\frac{\frac{1}{2!} - \frac{\omega}{3!} + \cdots}{1 - \frac{\omega}{2!} + \frac{\omega^2}{3!} - \cdots},$$

woraus folgt:

[1]) In der schon oben (S. 644) angeführten Abhandlung: Sur une nouvelle espèce de calcul etc.

$$A = \frac{\lambda}{2}, \quad B = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda+1}{2}A - \frac{\lambda}{6}\right] = \frac{\lambda}{24} + \frac{\lambda^2}{8}, \ \cdots,$$

und:

$$\Delta^{\lambda} u = \frac{d^{\lambda} u}{dx^{\lambda}}\xi^{\lambda} + \frac{\lambda}{2}\frac{d^{\lambda+1} u}{dx^{\lambda+1}}\xi^{\lambda+1} + \left[\frac{\lambda}{24} + \frac{\lambda^2}{8}\right]\frac{d^{\lambda+2} u}{dx^{\lambda+2}}\xi^{\lambda+2} + \cdots.$$

Für negative Indices hat man dann:

$$\Sigma^{\lambda} u = \frac{1}{\xi^{\lambda}}\int^{\lambda} u\,dx^{\lambda} - \frac{\lambda}{2}\frac{1}{\xi^{\lambda-1}}\int^{\lambda-1} u\,dx^{\lambda-1} + \cdots;$$

es ist insbesondere für den Index -1:

$$\Sigma u = \frac{1}{\xi}\int u\,dx + \alpha u + \beta\xi\frac{du}{dx} + \cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \ldots$ die Werte von $A, B, \ldots$ für $\lambda = -1$ bezeichnen. Durch diese Formel kann man die Summe einer Reihe angeben, deren allgemeines Glied bekannt ist.

Die Formeln von Lagrange sind von P. S. Laplace[1]) auf eine andere Weise bewiesen worden.

Einiger kleineren Beiträge müssen wir hier Erwähnung tun.

Johann Friedrich Pfaff (s. o. S. 216) gibt in seinem Inauguralprogramm von 1788[2]) eine neue Methode zur Aufstellung der Grundformeln der Differentialrechnung. Seinen Ausführungen liegen die beiden folgenden Hilfssätze zugrunde: a) Sind x, y unabhängige Veränderliche, P, Q, P_1, Q_1 Funktionen von x, y, so folgt aus:

$$P\,dx + Q\,dy = P_1\,dx + Q_1\,dy$$

notwendig $P = P_1$, $Q = Q_1$; b) Sind X, Y ähnliche Funktionen von x bzw. y, und ist $X = Y$, so folgt $X = Y = \text{const.}$ — Will man nun die Ableitung von $\log x$ ermitteln, so setze man $\frac{d\log x}{dx} = \varphi(x)$; es folgt dann aus:

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

durch Differentiation:

$$\varphi(xy)(x\,dy + y\,dx) = \varphi(x)\,dx + \varphi(y)\,dy,$$

also:

$$y\varphi(xy) = \varphi(x), \quad x\varphi(xy) = \varphi(y),$$

und hieraus:

[1]) Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, sur la figure de la terre et sur les fonctions, Mém. Sav. Étr. VII, 1773 (publ. 1776); Oeuvres VIII, Paris 1891, p. 279—321. [2]) Programma inaugurale in quo peculiarem differentialia investigandi rationem ex theoria functionum deducit; simulque praelectiones proximo semestre hiberno habendas indicit J. F. Pfaff, Helmstädt 1788.

$$x\varphi(x) = y\varphi(y) = \text{const.},$$

oder $\varphi(x) = \frac{C}{x}$. Die Potenz x^m und die Kreisfunktionen lassen sich analog behandeln. Aber auch die soeben benutzte Formel:

$$d(xy) = x dy + y dx$$

kann durch diese Methode nachgewiesen werden. Es sei:

$$d(xy) = P dx + Q dy,$$

wo:

$$P = \varphi(x, y), \quad Q = \varphi(y, x);$$

setzt man $y + z = v$, so ist:

$$xv = xy + xz,$$

also:

$$dx\varphi(x, v) + (dy + dz)\varphi(v, x)$$
$$= dx\varphi(x, y) + dy\varphi(y, x) + dx\varphi(x, z) + dz\varphi(z, x).$$

Es folgt hieraus:

$$\varphi(x, v) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z), \quad \varphi(v, x) = \varphi(y, x) = \varphi(z, x),$$

also:

$$\varphi(y, x) = \psi(x), \quad \psi(y + z) = \psi(y) + \psi(z);$$

aus dieser letzten Funktionalgleichung ergibt sich aber:

$$\psi'(y + z) = \psi'(y) = \psi'(z) = C,$$

oder

$$\psi(x) = Cx,$$

daher ist:

$$d(xy) = C(y dx + x dy).$$

Setzt man schließlich $y = 1$, so ergibt sich $C = 1$, womit die vorgelegte Formel bewiesen ist.

Man kann durch analoge Betrachtungen zur Taylorschen Reihenentwicklung gelangen. Setzt man $d\varphi(z) = \psi(z) dz$, so ist:

$$d\varphi(x + y) = \psi(x + y)(dx + dy),$$

also:

$$\psi(x + y) = \frac{\partial\varphi(x + y)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(x + y)}{\partial y};$$ [1])

ist umgekehrt $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, so folgt $P = \varphi(x + y)$. Schreibt man demnach:

[1]) Pfaff schreibt $\frac{d^x\varphi(x + y)}{dx}$, $\frac{d^y\varphi(x + y)}{dy}$.

$$\varphi(x + y) = p + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3 + \cdots,$$

so hat man für $y = 0$:

$$p = \varphi(x),$$

ferner:

$$\frac{\partial\varphi(x + y)}{\partial x} = p' + p_1' y + p_2' y^2 + \cdots,$$
$$\frac{\partial\varphi(x + y)}{\partial y} = p_1 + 2 p_2 y + 3 p_3 y^2 + \cdots,$$

woraus folgt:

$$p_1 = p' = \varphi'(x), \quad p_2 = \frac{1}{2} p_1' = \frac{1}{2}\varphi''(x), \quad p_3 = \frac{1}{3} p_2' = \frac{1}{2 \cdot 3}\varphi'''(x), \cdots,$$

und schließlich:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + y\varphi'(x) + \frac{y^2}{2}\varphi''(x) + \frac{y^3}{2 \cdot 3}\varphi'''(x) + \cdots.$$

Andere, aber nichts wesentlich Neues enthaltende Beweise des Taylorschen Lehrsatzes gaben Lhuilier[1]), Christoph Friedrich von Pfleiderer (1736–1821; s. o. S. 28, 29, 35)[2]), Professor der Physik und Mathematik an der Universität zu Tübingen, und Simon Gurieff (1766—1813)[3]), Professor der Mathematik zu Petersburg. Lagrange[4]) brachte den Rest auf die nach ihm benannte Form; G. Fontana[5]) dehnte die Taylorsche Formel auf Funktionen von mehreren Veränderlichen aus.

Als eine Vervollständigung seines Lehrbuches der Integralrechnung kann man eine Schrift von Euler[6]) ansehen, in welcher er eine ein-

[1]) A. a. O. [2]) Theorematis Tayloriani demonstratio, Tübingen 1789. Es ist diese eigentlich eine Dissertation, welche unter von Pfleiderers Vorsitze von J. C. Harprecht und G. F. Seiz verteidigt wurde (s. o. S. 131). [3]) Observations sur le théorème de Taylor, avec sa démonstration par la méthode des limites; application de ce théorème, ainsi démontré, à la démonstration du binome de Newton, dans le cas où l'exposant est une quantité fractionnaire, négative et incommensurable avec l'unité; suivie de la résolution d'un problème qui concerne la méthode inverse des tangentes, par le moyen de ce théorème (1799), Nova Acta Acad. Petrop. XIV, 1797—98 (publ. 1805), p. 306—335. [4]) Th. des fonctions analytiques. [5]) In Lotteri, a. a. O. [6]) De transformatione functionum, duas variabiles involventium, dum earum loco aliae binae variabiles introducuntur (1779), Mém. Acad. St. Pétersb. III, 1809 bis 1810 (publ. 1811), p. 43—56. Euler hatte in seinen letzten Lebensjahren der Petersburger Akademie eine große Fülle von Abhandlungen vorgelegt; er hatte auch den Wunsch geäußert, daß die Denkschriften der Akademie vierzig Jahre hindurch nach seinem Tode Schriften aus seiner Hand enthalten möchten (s. o. S. 470). Dieser Wunsch wurde pünktlich erfüllt. Euler starb 1783; und im Jahre 1830, nachdem in allen von der Akademie herausgegebenen Bänden mehrere Abhandlungen von Euler aufgenommen worden waren, während andere ein besonderes zweibändiges Werk ausgemacht hatten (Opuscula analytica, Petersburg 1783,

fachere Auflösung des folgenden Problemes entwickelt: Ist die Funktion $f(x, y)$ gegeben, und sind x, y bekannte Funktionen von t, u, so sollen die Ableitungen jeder Ordnung von $f(x, y)$ nach x, y durch t, u ausgedrückt werden.

Nicolao Colletti[1]), Geistlicher und Professor der Philosophie, bemerkte die folgenden Analogien, die sich freilich aus der Definition des Differentiales von selbst ergeben: Die m^{te} Differenz von:

$$d(d+1)\cdots(d+m-1)$$

ist konstant; dasselbe findet für das m^{te} Differential von:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

statt. Die m^{te} Differenz der m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen ist konstant; dasselbe geschieht vom m^{ten} Differentiale von x^m. Die m^{te} Differenz von:

$$d(d+n)\cdots(d+(m-1)n)$$

ist $m!n^m$; das m^{te} Differential von x^m ist $m!dx^m$.

Zum Schlusse müssen wir einige Betrachtungen Eulers über die unendlichkleinen und die unendlichgroßen Größen erwähnen[2]). Euler bemerkt, daß es neben den unendlichgroßen Größen, welche durch ganze und gebrochene Potenzen von x dargestellt werden, noch andere gibt, deren Ordnung unendlich kleiner ist als die von $x^{\frac{1}{n}}$ für jedes noch so große n. Eine solche ist $\log x$, wie sich durch L'Hospitals Regel nachweisen läßt; andere derartige Größen sind $\log\log x$, $\log\log\log x$ usw. Dagegen ist die Ordnung von a^x größer als die von x^n für jedes noch so große n.

Das logarithmisch Unendliche nennt Fontana[3]) infinitum ordinis semper infinitesimi oder infinitum paradoxum. Gregorio Fontana, geboren zu Nogarolo bei Rovereto in Tirol am 19. Oktober 1735, ein Mönch aus dem Orden der Scolopii, lehrte in Sinigallia, wo die Freundschaft mit Giulio Fagnano (diese Vorl., III², S. 485) die Neigung zur Mathematik in ihm erweckte. Im Jahre 1764 wurde er Professor der Philosophie an der Universität zu Pavia und Direktor der dortigen Bibliothek; vier Jahre später wechselte er seinen Lehrstuhl mit dem von Boscovich (s. o. S. 656) freigelassenen der Mathematik und Physik. Im Jahre 1800 verließ er die Universität als emeritierter Professor und zog nach Mailand als Mitglied der legislativen Versammlung; früher war er von Napoleon zu einem Dezemvir der zisalpinen Republik ernannt worden. Er starb zu Mailand am 26. August 1803[1]).

1785), enthielten die Archive der Akademie noch 14 ungedruckte Schriften, die in einem Supplementband (Mémoires XI) zusammen mit 4 Schriften von Schubert und 13 von Fuß publiziert wurden. Selbstverständlich müssen wir alle von Euler hinterlassenen Schriften als unserer Periode angehörig betrachten, wenn sie auch viel später zum Druck gelangt sind.

[1]) Colletti, Dissertazioni d'algebra, Torino 1787 (1. Dell' uso dei segni +, e — nel calcolo delle quantità. 2. Consenso del calcolo differenziale col calcolo delle quantità finite. 3. Metodo per determinare nelle curve la ragione delle coordinate, dalla ragione della differenza delle coordinate fra di loro, ovvero dell' una, o l'altra, o di amendue insieme coll' arco corrispondente. Saggio nelle sezioni coniche). [2]) Euler, De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum, Nova Acta Acad. Petrop. 1778, P. I (publ. 1780), p. 102—118. [3]) Disquisitiones physico-mathematicae, nunc primum editae, Pavia 1780. Disq. 13. De infinito logarithmico.

Genauer gesagt, nennt Fontana infinitum paradoxum dasjenige, welches von einer unendlichkleineren Ordnung ist als das „Unendliche erster Ordnung“ $\left(1+1+\cdots \text{ oder } a+a+\cdots \text{ oder } \frac{1}{1-1} \text{ oder } \frac{a}{1-1}\right)$; er begründet die Existenz und bestimmt die Form eines solchen Unendlichen auf folgende Weise. Setzt man:

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + \gamma,$$

so kann γ weder Null noch endlich sein, noch die Form $\frac{p}{n}$ haben, wo p endlich ist; es muß also notwendig sein:

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{p}{n},$$

wo p das infinitum paradoxum ist. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{n}\log n = \frac{p}{n} - \frac{p^2}{2n^2} + \cdots = \frac{p}{n},$$

also $p = \log n$.

[1]) In einem Dokumente der K. Polizeikommission zu Pavia liest man die folgende Notiz über Fontana (Mem. e doc. per la storia dell' Univ. di Pavia e degli uomini illustri che v'insegnarono, Pavia 1877—78): „Fontana Gregorio di Rovereto, delle Scuole pie, professore nella R. Università di Pavia, occulto giacobino ed ateo anche prima dell' ingresso dei Francesi in Lombardia, e scellerato di professione, fu chiamato a Milano da Bonaparte appena giuntovi, ove condusse seco certo Massa (rivoluzionario fuggito da Napoli), per la formazione della costituzione cisalpina; avanti la resa di Mantova, e mentre si batteva il Castello di Milano, intervenne ad un pranzo di molti Giacobini fattosi nella sala di questo teatro, ove recitò alcuni suoi sonetti contro il pontefice da esso chiamato Barionna, poscia si portarono tutti al Gravellona cantando canzoni scellerate contro li Sovrani con gran scandalo del popolo; per di lui opera furono impiegati l'Alpruni ed il detenuto Borletti di lui confidente, ed è noto il pravo di lui genio dimostrato anche nel Corpo legislativo, di cui è sempre stato individuo. Egli è a Milano.“

2. Integration.

Bei weitem länger werden wir uns bei der Integralrechnung aufhalten.

Um systematisch zu verfahren, wollen wir den zu behandelnden Stoff folgendermaßen einteilen:

A. Prinzipien der Integralrechnung und verschiedenartige Fragen.
B. Integration von rationalen Funktionen.
C. Integration von irrationalen Funktionen.
D. Integration von transzendenten Funktionen.
E. Reihenintegration, angenäherte Integration.
F. Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen.
G. Vielfache Integrale.

A. Prinzipien der Integralrechnung und verschiedenartige Fragen.

Vor allem müssen wir eine Schrift erwähnen, die alles in der Integralrechnung früher Gemachte bekämpft, und eine Revolution in diesen Wissenszweig bringen will. Daß aber das Interesse der Abhandlung nur im Namen des Verfassers liegt, einem Namen, der in diesem Bande häufig vorkommen soll, wird der Leser bald von selbst einsehen. Sie trägt den Titel: Sur la méthode du calcul intégral[1]) und rührt von der Feder Lamberts her. Nach Lambert sind die Analysten, aus Ungeduld, neue Integrale zu berechnen, voreilig, unsystematisch und sozusagen tappend fortgeschritten; man sollte von vornherein nicht die Differentiale, sondern die Integrale klassifizieren, und dann Symptome ableiten, nach welchen die Differentiale klassifizierbar sein würden. Eine erste Klassifikation der Integrale ist die in algebraische und transzendente. Eine algebraische Funktion kann verschiedenen Typen angehören, von welchen Lambert die folgenden aufzählt: 1. Einfache rationale Funktionen, oder Polynome; 2. Rationale Brüche; das Differential ist ebenfalls rational, und sein Nenner ist, von eventuellen Reduktionen abgesehen, das Quadrat des Nenners des Integrals; 3. Wurzelgrößen; das Differential enthält dieselbe Wurzelgröße, mit einem rationalen Faktor multipliziert; 4. Algebraische Summen von Wurzelgrößen; das Differential zerfällt in mehrere Summanden; 5. Produkte und Quotienten von Wurzelgrößen; 6. Summen von solchen Größen; 7. Produkte von Wurzelgrößen und rationalen Größen; 8. Summen von solchen Produkten; 9. Quotienten von solchen Summen, usw.

[1]) Hist. Acad. Berlin 1762 (publ. 1769), p. 441—484.

Ein Beispiel mag die Anwendung dieser Klassifikation beleuchten. Es liege ein rationales Differential vor, welches stets auf die Form:

$$dy = \frac{P}{Q^2}\,dx$$

gebracht werden kann, wo P, Q Polynome bezeichnen. Ist das Integral rational, so muß es die Form:

$$y = \frac{z}{Q}$$

haben, wo z ganz und rational ist, so daß es der zweiten Klasse angehört. Setzt man dann:

$$z = A + Bx + Cx^2 + \cdots,$$

so wird man versuchen, die Größen $A, B, C \ldots$ durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten zu erhalten; erweist sich das als möglich, und ist nur eine endliche Anzahl von diesen Größen von Null verschieden, so ist das Integral rational.

Was die nicht algebraischen Integrale betrifft, erkennt Lambert, daß man den richtigen Weg eingeschlagen hat, da man mit den einfachsten, durch Tabellen angebbaren Fällen angefangen und dann versucht hat, die übrigen auf diese zurückzuführen. Es wäre aber nötig, Reduzierbarkeitssymptome zu haben, aus welchen sich auch die Reduktionsmethode ergeben möchte; und in dieser Hinsicht schlägt Lambert eine Klassifikation der transzendenten Integrale vor, auf welche wir unterlassen, näher einzugehen.

Aus dem schon oben angeführten Briefwechsel zwischen Lambert und von Holland ergibt sich, daß sich auch der letztere um eine Reform der Integralrechnung bemühte; so versuchte er (18. Juli 1765) aus dem Verhältnis zweier Differentiale das Verhältnis der bezüglichen Integrale herzuleiten, was ihm selbstverständlich nicht gelang; später (6. Dezember 1767) zeigte er, wie sich alle Integrale der Differentiale $\frac{dx}{y}, \frac{x\,dx}{y}, \frac{x^2 dx}{y}, \ldots$, wo $y = \sqrt{bx - x^2}$, durch eins derselben ausdrücken lassen, und sagte, daß die Integralrechnung viel vollständiger würde, wenn dies im allgemeinen möglich wäre.

Eine gründliche Erneuerung der Integralrechnung wurde auch von Johann von Pakussi[1]) (oder Pacussi oder Pacassi, geboren zu Görz im Dezember 1758, gestorben zu Wien am 8. Juni 1818, Hofbaurat und Wasserbauinspektor) ersonnen. Er gibt diese Regel

[1]) Pakussi, Abhandlung über eine neue Methode zu integrieren, Wien 1785. — Versuch einer neuen Methode zu integrieren, Phys. Arbeiten der einträchtigen Freunde (Wien) II, 1786. — Joh. Bernoulli in Lamberts Briefwechsel III, p. 368—372. — Siehe die Einwürfe von L. Oberreit in Lamberts Briefwechsel V, p. 344 ff.

an: Liegt ein Integral $\int P dx$ vor, so quadriere man Pdx und teile mit $d(Pdx)$; dann setze man (man weiß nicht warum) $dx^2 = x d^2 x$; das Resulttat ist der Wert des Integrales. In Formeln:

$$\int P dx = \frac{P^2 dx^2}{P d^2 x + P' dx^2} = \frac{P^2 x}{P + P' x}.$$

Für die Integrale:

$$\int (y dx + x dy), \quad \int \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

muß man auch die Relation $dy^2 = y d^2 y$ berücksichtigen. Selbstverständlich führt diese vermeintliche Integrationsmethode nur in ganz besonderen Fällen zu richtigen Resultaten, und es ist sehr leicht, Beispiele anzugeben, für welche sie nicht gelingt.

Samuel Vince (gest. 1821)[1]) gibt eine neue Methode, die er continuation nennt, zur Herleitung von neuen aus bekannten Integralformeln; so z. B. drückt er:

$$\int \frac{x^m dx}{(a^n + x^n)^r}, \quad \int \frac{x^n dx}{(a + bx^m + cx^{2m})^r}, \quad \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int x^n dx \sqrt{\frac{x^m - a}{x^m - b}}$$

durch:

$$\int \frac{x^m dx}{a^n + x^n}, \quad \int \frac{x^n dx}{a + bx^m + cx^{2m}}, \quad \int \frac{x^n dx}{1 - x}, \quad \int \frac{x^n dx}{x^m - b}$$

aus.

Es gehören hierher vier Abhandlungen von Euler, welche einige unbestimmte Fragen der Integralrechnung betreffen.[2])

Es seien[3]) einige, z. B. drei Funktionen p, q, r von v gegeben; man soll eine derartige Funktion x von v auffinden, daß pdx, qdx, rdx integrierbar sind. Setzen wir:

$$\frac{dq}{dp} = q', \quad \frac{dr}{dp} = r', \quad \frac{dr'}{dq'} = r'',$$

nehmen wir ferner eine Funktion x''' von v willkürlich an und setzen:

$$x'' = \frac{dx'''}{dr''}, \quad x' = \frac{dx''}{dq'}, \quad x = \frac{dx'}{dp};$$

---

[1]) A new method of finding fluents by continuation, Philos. Trans. LXXVI, 1786, p. 432—442. [2]) Euler hat sich auch mit vielen anderen analogen Fragen vom Standpunkte der Differentialgeometrie aus beschäftigt; siehe Abschn. XXIV. [3]) Specimen singulare analyseos infinitorum indeterminatae (1776), Nova Acta Acad. Petrop. III, 1785 (publ. 1788), p. 47 bis 56. — Solutio problematis ad analysin infinitorum indeterminatam referendi (1781), Mém. Acad. St.-Pét. XI, 1830, p. 92—94.

dann ist x die gesuchte Funktion. Es ergibt sich nämlich:

$$\begin{aligned}
\int p dx &= px - \int x dp = px - \int dx' = px - x', \\
\int q dx &= qx - \int x dq = qx - \int q' dx' = qx - q'x' + \int x' dq' \\
&= qx - q'x' + \int dx'' = qx - q'x' + x'', \\
\int r dx &= rx - \int x dr = rx - \int r' dx' = rx - r'x' + \int x' dr' \\
&= rx - r'x' + \int r'' dx'' = rx - r'x' + r''x'' - \int x'' dr'' \\
&= rx - r'x' + r''x'' - \int dx''' = rx - r'x' + r''x'' - x'''.
\end{aligned}$$

Euler berücksichtigt auch den Fall, in welchem verlangt wird, daß einige der Quadraturen $\int p dx$, $\int q dx$, ... bestimmten Typen angehören mögen. Ein verwandtes Problem ist folgendes: Zwei solche Funktionen q, z einer Veränderlichen t zu finden, daß $\int q dz$ algebraisch ist und $\int \frac{dz}{z} \sqrt{q^2 - 1}$ sich durch einen Kreisbogen ausdrücken läßt. Man nehme dazu eine willkürliche Funktion u von t, und setze:

$$v = \frac{du}{dt}, \quad p = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x = \frac{1}{\frac{dp}{dt}}, \quad y = \int p dx = px - \int x dp = px - t,$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad q = \frac{z\sqrt{1 + p^2}}{x + py};$$

dann findet man:

$$\int q dz = \frac{x}{\sqrt{1 - v^2}} - u, \quad \int \sqrt{q^2 - 1}\, \frac{dz}{z} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}.$$

Man kann sich vornehmen[1]), alle Differentiale dW zu bestimmen, die mit zwei oder mehreren vorgegebenen Funktionen $p, q, \ldots$ multipliziert algebraisch integrierbar werden. Für zwei Funktionen p, q wird die Lösung des Problems durch:

$$dW = \frac{p(dq d^2 v - dv d^2 q) + q(dv d^2 p - dp d^2 v) + v(dp d^2 q - dq d^2 p)}{(p dq - q dp)^2},$$

oder, nach der heutigen Schreibweise, durch:

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} p & q & v \\ p' & q' & v' \\ p'' & q'' & v'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}^2,$$

---

[1]) Euler, De formulis differentialibus, quae per duas pluresve quantitates datas multiplicatae fiant integrabiles (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VII, 1789 (publ. 1793), p. 3—21.

gegeben, wo v eine willkürliche Funktion ist; man findet:

$$\int p\,dW = \frac{p\,dv - v\,dp}{p\,dq - q\,dp}, \quad \int q\,dW = \frac{q\,dv - v\,dq}{p\,dq - q\,dp}.$$

Ein anderes Problem, dessen Lösung man Euler verdankt, ist folgendes, welches in der Theorie der rechtwinkligen Trajektorien einer Oberfläche vorkommt[1]): Sind p, q, P, Q Funktionen von $\frac{y}{x}$, so soll man eine solche Funktion Π von x, y bestimmen, daß:

$$dv = \frac{p\,dx + \Pi q\,dy}{\Pi P + Q}\,x^{n-1}$$

integrierbar ist.

Auch mit der Integration von Differentialen zweiter Ordnung beschäftigte sich der unermüdliche Euler.[2]) Er fand als die Integrierbarkeitsbedingung für $\int V\,dp$:

$$2\,N\,dp + dM + p\,dN = 0,$$

wo $p = \frac{dy}{dx}$, V eine Funktion von x, y, p ist, und:

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp,$$

und wandte das erhaltene Resultat auf die folgenden besonderen Fälle an:

a) $V = Px + Qy$, wo P, Q Funktionen von p sind; es muß zwischen P und Q die Beziehung:

$$P' + pQ' + 2Q = 0$$

bestehen, worauf sich P durch Q oder Q durch P ausdrücken läßt.

b) $V = (Mx + Ny)\Pi$, wo von den Funktionen M, N, Π von p die zwei ersten vorgegeben sind; man erhält:

$$\Pi = \frac{C}{K(M + Np)},$$

wo C eine Konstante bezeichnet und:

$$\log K = \int \frac{N\,dp}{M + Np}.$$

[1]) Euler, Solutio problematis analytici difficillimi (1782), Mém. Acad. St.-Pét. XI, 1830, p. 125—130. [2]) Euler, De formulis differentialibus secundi gradus, quae integrationem admittunt (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793 (publ. 1798), p. 3—26.

c) $V = (px - y)^{n-1}(Px + Qy)$, wo P, Q zu bestimmende Funktionen von p sind; es ergibt sich:

$$P' + pQ' + (n+1)Q = 0.$$

d) $V = (px - y)^{n-1}(Mx + Ny)\Pi$, wo M, N, Π dieselbe Bedeutung haben als unter b); es muß sein:

$$\Pi = \frac{C}{K^n(M + Np)}.$$

Die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Bestimmung der Fläche eines sphärischen Dreiecks möge hier Platz finden. Der Gedanke, die höhere Analysis auf die sphärische Trigonometrie anzuwenden, war nicht neu; Euler hatte sogar nachgewiesen, wie sich diese ganz elementare Lehre aus den Prinzipien der Variationsrechnung herleiten lasse (diese Vorl., III², S. 560, 867).

Kästner[1]) beschränkt sich darauf, die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen, da jedes Dreieck als die Summe oder die Differenz zweier rechtwinkligen Dreiecke angesehen werden darf.

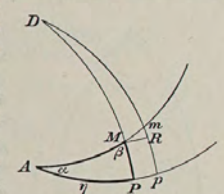

Fig. 78.

Es sei (Fig. 78) AMP ein sphärisches Dreieck mit einem rechten Winkel P; der Pol von AP, D, muß auf der Verlängerung von MP liegen. Wir führen durch D einen anderen, von DMP unendlich wenig abweichenden größten Kreis Dmp, und durch M einen zu AP parallelen kleineren Kreis MR. Dann ist $MRpP$ das Element einer Zone, und die Fläche von $MRpP$ ist bekanntlich $Pp \cdot \sin PM$. Setzen wir:

$$MAP = \alpha, \quad AMP = \beta, \quad AP = \eta, \quad \cos AP = z;$$

dann ist:

$$Pp = -\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad \operatorname{tang} PM = \sin\eta \operatorname{tang}\alpha, \quad \cos\beta = \cos\eta \sin\alpha,$$

also:

$$\sin PM = \frac{\sqrt{1 - z^2}\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1 + (1 - z^2)\operatorname{tang}\alpha^2}} = \frac{\sqrt{1 - z^2}\sin\alpha}{\sqrt{1 - z^2\sin\alpha^2}},$$

und:

[1]) Dissertationes mathematicae et physicae. Diss. IX. De quaestione, quot sphaerae aequales inter datam mediam poni possint, ut omnes illam, et circumpositarum sibi vicinae, se mutuo tangant (p. 62—75).

$$MRpP = -\frac{dz \sin\alpha}{\sqrt{1 - z^2 \sin\alpha^2}}.$$

Es ist aber:

$$MRpP = MmpP = d \cdot AMP,$$

folglich:

$$AMP = \text{const.} - \arcsin(\cos\eta \sin\alpha),$$

und nach Bestimmung der willkürlichen Konstante:

$$AMP = \alpha - \arcsin(\cos\eta \sin\alpha) = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}.$$

An einer anderen Stelle[1]) beschreibt Kästner Girards Verfahren zur Bestimmung des Inhalts eines sphärischen Dreiecks mit dem Zusatze, es sei sonderbar, daß hier Girards „Scharfsinnigkeit" die Rechnung des Unendlichen übertreffe.

Dagegen behandelt Jean Paul de Gua de Malves (diese Vorl., III², S. 576)[2]) direkt das allgemeine Dreieck. De Guas Verfahren kann in der heutigen Bezeichnungsweise wie folgt geschildert werden.

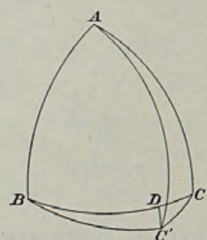

Fig. 79.

Es sei (Fig. 79) ABC ein sphärisches Dreieck, AC' ein zu AC unendlich nahe liegender, gleichlanger Bogen; man nehme auf BC den Bogen $BD = BC'$, und ziehe die zu AC bzw. BC senkrechten Bögen von kleineren Kugelkreisen CC', $C'D$. Bezeichnet man durch $\mathfrak{S}$ die Fläche, durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Kosinusse der Seiten und der Winkel des vorgegebenen Dreiecks, so ist:

$$-d\mathfrak{S} = \text{Fläche } BCC' - \text{Fläche } ACC',$$

oder auch, durch Vernachlässigung einer unendlichkleinen Größe zweiter Ordnung:

$$-d\mathfrak{S} = \text{Fläche } BC'D - \text{Fläche } AC'C.$$

Es ist auch:

$$CD = d \cdot \arccos \mathfrak{a} = -\frac{d\mathfrak{a}}{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}},$$

---

[1]) Kästner, Geometrische Abhandlungen II, Göttingen 1790, S. 424.
[2]) Diverses mesures, en partie neùves, des aires sphériques et des angles solides, triangulaires et polygones, dont on est supposé connaître des élémens en nombre suffisant, avec des remarques qu'on croit pouvoir contribuer à simplifier les intégrations de plusieurs équations différentielles à inconnues actuellement séparées, Hist. Acad. Paris 1783 (publ. 1786), p. 344—362.

$$C'D = CD \cdot \operatorname{tang} C'CD = CD \operatorname{cotg} ACD = -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{1 - \mathfrak{C}^2}} \frac{d\mathfrak{a}}{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}},$$

$$C'C = \frac{CD}{\cos C'CD} = \frac{CD}{\sin ACD} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{C}^2}} \frac{d\mathfrak{a}}{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}}.$$

Ferner ist $\sin AC = \sqrt{1 - \mathfrak{b}^2}$ der Radius des Bogens CC', also:

$$C'AC = \frac{CC'}{\sqrt{1 - \mathfrak{b}^2}} = -\frac{d\mathfrak{a}}{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{b}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{C}^2}};$$

andererseits ist bekanntlich $2\pi \operatorname{sinvers} AC$ oder $2\pi(1 - \mathfrak{b})$ die Fläche der Kugelkalotte, deren Differential das Dreieck $AC'C$ ist, also:

$$\text{Fläche } ACC' = (1 - \mathfrak{b})\, C'AC = -\frac{(1 - \mathfrak{b})\, d\mathfrak{a}}{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{b}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{C}^2}}.$$

Man findet analog:

$$\text{Fläche } BC'D = -\frac{(1 - \mathfrak{a})\,\mathfrak{C}\, d\mathfrak{a}}{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{C}^2}} = -\frac{\mathfrak{C}\, d\mathfrak{a}}{(1 + \mathfrak{a})\sqrt{1 - \mathfrak{C}^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$-d\mathfrak{S} = -\frac{\mathfrak{C}\, d\mathfrak{a}}{(1 + \mathfrak{a})\sqrt{1 - \mathfrak{C}^2}} + \frac{(1 - \mathfrak{b})\, d\mathfrak{a}}{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{b}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{C}^2}}.$$

Es ist aber wegen bekannter trigonometrischer Sätze:

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{b}^2}},$$

$$\sqrt{1 - \mathfrak{C}^2} = \frac{\sqrt{(1 - \mathfrak{a}^2)(1 - \mathfrak{b}^2) - (\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\mathfrak{b})^2}}{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{b}^2}} = \frac{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{c}^2 + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}}{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{b}^2}},$$

also:

$$-d\mathfrak{S} = -\frac{(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\mathfrak{b})\, d\mathfrak{a}}{(1 + \mathfrak{a})\,\mathfrak{d}} + \frac{(1 - \mathfrak{b})\, d\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}} = \frac{d\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}} - \frac{(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\, d\mathfrak{a}}{(1 + \mathfrak{a})\,\mathfrak{d}},$$

wo:

$$\mathfrak{d} = \sqrt{1 - \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{c}^2 + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \sqrt{(1 - \mathfrak{a}^2)(1 - \mathfrak{b}^2) - (\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\mathfrak{b})^2}.$$

Nun ist, da nur $\mathfrak{a}$ verändert worden ist, während $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ konstant bleiben:

$$-\frac{d\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}} = \frac{-\dfrac{d\mathfrak{a}}{\sqrt{1 - \mathfrak{b}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{c}^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\mathfrak{c})^2}{(1 - \mathfrak{b}^2)(1 - \mathfrak{c}^2)}}} = d \arccos \frac{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\sqrt{1 - \mathfrak{b}^2}\sqrt{1 - \mathfrak{c}^2}} = d \arccos \mathfrak{A},$$

$$d\mathfrak{S} = d \arccos \mathfrak{A} + \frac{(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\, d\mathfrak{a}}{(1 + \mathfrak{a})\,\mathfrak{d}}.$$

Um das zweite Differential zu integrieren, erwägen wir folgendes. Enthält $d\mathfrak{S}$ den Summand $d \arccos \mathfrak{A}$, so muß es der Symmetrie wegen auch $d \arccos \mathfrak{B}$ und $d \arccos \mathfrak{C}$ enthalten; es ist aber:

$$-d\mathfrak{B} = -d\,\frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\sqrt{(1-\mathfrak{c}^2)(1-\mathfrak{a}^2)}} = \frac{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\mathfrak{b})d\mathfrak{a}}{\sqrt{(1-\mathfrak{c}^2)(1-\mathfrak{a}^2)}\,(1-\mathfrak{a}^2)},$$

und analog:

$$-d\mathfrak{C} = \frac{(\mathfrak{b}-\mathfrak{a}\mathfrak{c})d\mathfrak{a}}{\sqrt{(1-\mathfrak{b}^2)(1-\mathfrak{a}^2)}\,(1-\mathfrak{a}^2)},$$

also:

$$d \arccos \mathfrak{B} = \frac{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\mathfrak{b})d\mathfrak{a}}{(1-\mathfrak{a}^2)\mathfrak{b}}, \quad d \arccos \mathfrak{C} = \frac{(\mathfrak{b}-\mathfrak{a}\mathfrak{c})d\mathfrak{a}}{(1-\mathfrak{a}^2)\mathfrak{b}},$$

$$d \arccos \mathfrak{B} + d \arccos \mathfrak{C} = \frac{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\,d\mathfrak{a}}{(1+\mathfrak{a})\mathfrak{b}},$$

und endlich:

$$d\mathfrak{S} = d \arccos \mathfrak{A} + d \arccos \mathfrak{B} + d \arccos \mathfrak{C} = d(A+B+C),$$

oder:

$$\mathfrak{S} = A + B + C + \text{const.}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante muß man bemerken, daß für $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ die Fläche des Dreiecks $\frac{\pi}{2}$ ist. Es ergibt sich hieraus:

$$\text{const.} = -\pi,$$

und schließlich:

$$\mathfrak{S} = A + B + C - \pi.$$

B. Integration von rationalen Funktionen.

Diese Aufgabe war schon früher von Leibniz und Johann Bernoulli (diese Vorl., III², S. 272 ff.) vollständig aufgelöst worden.[1]) Es blieb also nur noch übrig, neue und elegantere Integrationsmethoden aufzustellen, und besonders interessante Spezialfälle zu behandeln. Es möge uns daher erlaubt werden, auf die bezüglichen Schriften nur ganz kurz hinzuweisen.

Von Fontana[2]) haben wir einen neuen Beweis des Cotesschen Satzes und die Anwendung dieses Satzes auf die Berechnung des Integrals $\int \frac{z^n dz}{(z^m \pm a^m)^r}$.

[1]) Freilich mußte dazu die Auflösbarkeit jeder algebraischen Gleichung postuliert werden, während die bezügliche Frage damals noch nicht gelöst worden war, was Euler in seiner Integralrechnung (I, p. 34) ausdrücklich betont. Er fügt aber hinzu: „Hoc autem in Analysi ubique postulari solet, ut quo longius progrediamur, ea quae retro sunt relicta, etiamsi non satis fuerint explorata, tanquam cognita assumamus". [2]) Analyseos sublimioris opuscula, Venedig 1763 (Op. 1. De formularum quarumdam trigonometricarum integratione. Op. 2. De theoremate Rogerii Cotes, ejus usu, utilitate, praestantia. Op. 3. De invenienda formula radii osculatoris in curvis ad umbilicum relatis ex data formula ejusdem in curvis relatis ad axem, eruendisque inde curvarum evolutis).

Am Ende des ersten Bandes seiner noch oft zu erwähnenden Mathematical memoirs (zwei Bände, London 1780 und 1789) veröffentlichte Landen (selbstverständlich mit den Bezeichnungen der Fluxionsrechnung) ein sehr ausführliches Verzeichnis von Integralen, welche, nach seiner Angabe, größtenteils neu sind; es kommen hier aber auch die ganz bekannten rationalen Integrale:

$$\int x^m dx, \quad \int (a + bx^n)^p x^{n-1} dx$$

usw. vor.

Francesco Pezzi (s. o. S. 448), Genieoffizier und Professor der Mathematik an der Universität zu Genua, gab in den Memorie di matematica e fisica della Società italiana delle scienze zwei Abhandlungen[1]) heraus, in welchen er sich vorsetzte, die Integrale:

$$\int \frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2 - 2abz\cos\varphi + b^2z^2)^p}, \quad \int \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2)^p},$$

$$\int \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3)^p}, \quad \int \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3+hx^4)^p}$$

ohne Hilfe von Rekursionsformeln zu berechnen.

Euler[2]) zeigte, wie man eine rationale Funktion ohne den Gebrauch von imaginären Größen integrieren kann, und wandte seine Theorie auf das Integral $\int \frac{P\,dx}{Q}$ an, wo P ein Polynom bedeutet, und:

$$Q = 1 \pm x^{2k}$$

oder:

$$Q = 1 + 2x^k \cos\eta + x^{2k}$$

ist.

Andererseits lehrte Euler[3]), wie nützlich die Einführung der

[1]) Ricerca sopra l'integrazione sviluppata in una serie finita della formola $\frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2 - 2abz\cos\varphi + b^2z^2)^p}$, essendo p un numero qualunque intero, Mem. Soc. It. IV, 1788, p. 577—588. — Integrazione in serie finite delle formole

$$\frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2)^p}, \quad \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3)^p}, \quad \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3+hx^4)^p};$$

essendo p e q de' numeri qualunque interi, Mem. Soc. It. VI, 1792, p. 256 bis 308. [2]) Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidio quantitatum imaginariarum, Acta Acad. Petrop. 1781, P. I (publ. 1784), p. 3—47. — Siehe auch: De resolutione fractionum compositarum in simpliciores (1779), Mém. Acad. St.-Pét. I, 1803—1806 (publ. 1809), p. 3—25. [3]) De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis (1777), Nova Acta Acad. Petrop. VII, imaginären Größen bei algebraischen Integrationen ist. Es sei:

$$V = \int Z\,dz,$$

wo Z eine Funktion von z ist; setzt man:

$$z = x + iy, \quad Z = M + iN, \quad V = P + iQ,$$

so ist:

$$P + iQ = \int (M + iN)(dx + i\,dy),$$

also:

$$P = \int (M\,dx - N\,dy), \quad Q = \int (N\,dx + M\,dy).$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen für diese Ausdrücke sind:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x},$$

und man hat:

$$M = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad N = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}\text{[1]}.$$

Euler verifiziert diese Beziehungen an einigen einfachen Integralen von rationalen Funktionen, und macht davon eine Anwendung auf die Berechnung von $\int \frac{z^{m-1}dz}{1 \pm z^n}$ für $z = v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Wird ferner zwischen x und y eine Beziehung vorausgesetzt, so verwandeln sich P und Q in Integrale einer einzigen Veränderlichen; läßt sich dann V leichter als P und Q auswerten, so hat man in der Zerlegung von V in seinen reellen und imaginären Bestandteil ein Mittel, den Wert von P und Q zu erhalten. Es sei z. B.:

1789 (publ. 1793), p. 99—133. — Supplementum ad dissertationem praecedentem, circa integrationem formulae $\int \frac{z^{m-1}dz}{1 - z^n}$, casu quo ponitur $z = v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ebenda, p. 134—148. — Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis (1777), Nova Acta Acad. Petrop. X, 1792 (publ. 1797), p. 3—19. — De insigni usu calculi imaginariorum in calculo integrali (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XII, 1794 (publ. 1801), p. 3—21. — De integrationibus difficillimis, quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XIV, 1797—1798 (publ 1805), p. 62—74. — Auf die beiden ersten Abhandlungen bezieht sich die Schrift von Fuß: Enodatio difficultatis ab Ill. Eulero in dissertatione de integrationibus memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis geometris propositae (1790), Nova Acta Acad. Petrop. VII, 1789 (publ. 1793), p. 175—188.

[1]) Es ist fast überflüssig, daran zu erinnern, daß diese Gleichungen viel später die Grundlage der Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie geworden sind.

$$V = \int \frac{z^{m-1}dz}{(a + bz^n)^\lambda};$$

setzen wir $z = v(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, und betrachten ϑ als konstant (was mit der Voraussetzung $\frac{y}{x} = \text{const.}$ gleichbedeutend ist); es ist dann:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v},$$

$$a + bz^n = a + bv^n\cos n\vartheta + ibv^n\sin n\vartheta = s(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

wo:

$$s^2 = a^2 + 2abv^n\cos n\vartheta + b^2v^{2n}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{bv^n\sin n\vartheta}{a + bv^n\cos n\vartheta},$$

folglich:

$$V = \int \frac{v^{m-1}dv}{s^\lambda}\left[\cos(m\vartheta - \lambda\varphi) + i\sin(m\vartheta - \lambda\varphi)\right].$$

Es ergibt sich aber aus den obigen Beziehungen:

$$v^n = \frac{a\sin\varphi}{b\sin(n\vartheta - \varphi)}, \quad s = \frac{a\sin n\vartheta}{\sin(n\vartheta - \varphi)},$$

also:

$$P = \frac{a^{\frac{m}{n} - \lambda}}{nb^{\frac{m}{n}}\sin n\vartheta^{\lambda - 1}}\int \sin\varphi^{\frac{m}{n} - 1}\sin(n\vartheta - \varphi)^{\lambda - \frac{m}{n} - 1}\cos(m\vartheta - \lambda\varphi)\,d\varphi,$$

$$Q = \frac{a^{\frac{m}{n} - \lambda}}{nb^{\frac{m}{n}}\sin n\vartheta^{\lambda - 1}}\int \sin\varphi^{\frac{m}{n} - 1}\sin(n\vartheta - \varphi)^{\lambda - \frac{m}{n} - 1}\sin(m\vartheta - \lambda\varphi)\,d\varphi.$$

Ist insbesondere $\lambda = \frac{m}{n}$[1]), so verwandelt die Substitution:

$$t = \frac{z}{(a + bz^n)^{\frac{1}{n}}}$$

das Differential dV in ein rationales Differential; es ergibt sich nämlich:

$$V = -\int \frac{t^{m-1}dt}{bt^n - 1}.$$

Man hat andererseits in diesem Falle:

$$P = \frac{1}{nb^{\frac{m}{n}}\sin n\vartheta^{\frac{m}{n} - 1}}\int \frac{\sin\varphi^{\frac{m}{n} - 1}\cos\left(m\vartheta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\sin(n\vartheta - \varphi)}\,d\varphi,$$

---

[1]) Für ein gebrochenes λ gehört das Integral V eigentlich nicht hierher; wir behandeln es aber des Zusammenhanges wegen an diesem Orte.

$$Q = \frac{1}{n b^{\frac{m}{n}} \sin n\vartheta^{\frac{m}{n}-1}} \int \frac{\sin \varphi^{\frac{m}{n}-1} \sin\left(m\vartheta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\sin(n\vartheta - \varphi)} d\varphi;$$

setzt man $\varphi = n\omega$ und bezeichnet mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ konstante Größen, so nehmen diese Integrale die folgende Form an:

$$(1) \qquad \int \frac{d\omega}{\sin n\omega^{\frac{n-m}{n}}} \frac{\alpha \sin m\omega + \beta \cos m\omega}{\gamma \sin n\omega + \delta \cos n\omega}.$$

Es ergibt sich also der Satz, von welchem Euler auch einen direkten Beweis liefert: Jedes Integral vom Typus (1) ist durch elementare Funktionen ausdrückbar. Der Satz läßt sich wie folgt verallgemeinern: Sind P, Q rationale Funktionen von x^n, so ist:

$$\frac{P x^{m-1} + Q x^{n-1}}{(a + b x^n)^{\frac{m}{n}}} dx$$

integrierbar; sind P, Q rationale Funktionen von $\sin 2n\omega$, $\cos 2n\omega$, so ist:

$$\int (P \sin m\omega + Q \cos m\omega)\, d \cdot \sin n\omega^{\frac{m}{n}}$$

integrierbar.

So nützlich aber die Theorie der imaginären Größen sein möchte, so konnte sie nicht umhin, bei der bisher erreichten unvollständigen Entwicklung, zu Paradoxen zu führen. So warnt d'Alembert[1]), daß man vorsichtig verfahren muß, so oft man mit imaginären Größen zu tun hat. Es ist z. B.:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{du}{(1+iu)(1-iu)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{du}{1+iu} + \frac{du}{1-iu}\right) = \frac{1}{2i}\log\frac{1+ui}{1-ui}.$$

Setzt man $u = iv$, so folgt übereinstimmend:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = i\int \frac{dv}{1-v^2} = \frac{i}{2}\log\frac{1+v}{1-v} = \frac{i}{2}\log\frac{1-ui}{1+ui} = \frac{1}{2i}\log\frac{1+ui}{1-ui};$$

setzt man dagegen $u = -iv$, so hat man:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = -i\int \frac{dv}{1-v^2} = -\frac{i}{2}\log\frac{1+v}{1-v},$$

woraus sich nur dann das frühere Resultat wiederum ergibt, wenn statt v nicht $-iu$, sondern iu gesetzt wird.

[1]) Opuscules mathématiques, T. VI, Paris 1773 (Remarques sur le mémoire: Suite des recherches sur la figure de la terre).

Zu analogen Betrachtungen gibt das von d'Alembert schon früher (Suite des recherches sur la figure de la terre) berücksichtigte Integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x > 1)$$

Veranlassung. Nach d'Alembert ist $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ nicht $= \frac{dx}{i\sqrt{x^2-1}}$, sondern $= \frac{i\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$, denn $\sqrt{x^2-1}$ positiv genommen ist gleich $i\sqrt{1-x^2}$ positiv genommen. Man könnte auch setzen:

$$\sqrt{x^2-1} = -i\sqrt{1-x^2};$$

dann wäre:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{i} = \log\frac{x+\frac{\sqrt{1-x^2}}{i}}{i},$$

also:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -i\log\frac{x+\frac{\sqrt{1-x^2}}{i}}{i} = i\log\frac{-1}{ix+\sqrt{1-x^2}}$$

$$= i\log\frac{x+i\sqrt{1-x^2}}{i},$$

ein Resultat, welches mit dem unter der Voraussetzung:

$$\sqrt{x^2-1} = i\sqrt{1-x^2}$$

erhaltenen übereinstimmt. Dazu bemerkt Giuseppe Contarelli in einem viel längeren Brief, als es der Gegenstand verdiente[1]), daß die letzte Gleichheit unrichtig ist, und daß $\frac{-1}{ix+\sqrt{1-x^2}}$ nicht gleich $\frac{x+i\sqrt{1-x^2}}{i}$, sondern gleich $i(x+i\sqrt{1-x^2})$ ist.[2])

C. Integration von irrationalen Funktionen.

Die Integration der einfachsten irrationalen Funktionen war seit der früheren Periode her schon bekannt. Euler und seine Schüler

[1]) Lettera del sig. Abate Giuseppe Contarelli al Sig. Avv. Paolo Cassiani pubblico professore di filosofia e matematica nell' Università di Modena, Nuovo Giorn. lett. It. (Modena) XIV, 1778, p. 237—262.
[2]) Über die Integration rationaler Funktionen siehe auch den Aufsatz von Jacopo Riccati: Dei polinomi (Opere del conte Jacopo Riccati, 4 Bde., Lucca 1761—1765, Bd. III, p. 67—78), der aber schon früher in den Instituzioni analitiche von Maria Gaetana Agnesi (1748) gedruckt worden war.

beschäftigten sich damit, neue Differentialausdrücke direkt zu integrieren oder auf schon behandelte Typen zurückzuführen. Aus dem IV. Bande von **Eulers** Integralrechnung und aus dessen weiteren Schriften entnehmen wir die folgenden:

$$\text{a)}^{1)}\quad \int f(x, s)dx,$$

wo f eine rationale Funktion bezeichnet und:

$$s = \sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}} \quad \text{oder} \quad s = \sqrt[n]{a + b\sqrt[m]{f+gx}}.$$

$$\text{b)}^{2)}\quad \int f(x^n, s)\frac{dx}{x},$$

wo:

$$s = \sqrt[m]{\frac{a+bx^n}{f+gx^n}} \quad \text{oder} \quad s = \sqrt{a + bx^n + cx^{2n}}.$$

$$\text{c)}^{3)}\quad \int \frac{x^{(2i+1)n-\lambda-2}(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{\lambda+1}{n}}dx}{(a-cx^{2n})^{2i+1}},$$

wo i ganz, λ ganz oder gebrochen ist.

$$\text{d)}^{4)}\quad \int \frac{x^{m-1}dx}{(fx^n-g)[f^\lambda x^{\lambda n}-(fx^n-g)^\lambda]^{\frac{m}{\lambda n}}},$$

wo m, λ, n ganze Zahlen bezeichnen, durch die Substitution:

$$\frac{x}{[f^\lambda x^{\lambda n}-(fx^n-g)^\lambda]^{\frac{1}{\lambda n}}} = y.$$

---

[1]) Supplementum calculi integralis pro integratione formularum irrationalium, Acta Acad. Petrop. IV, P. I, 1780, p. 3—31; Inst. calc. int. IV, p. 3—31 (unter dem Titel: De integratione formularum differentialium irrationalium). [2]) A. a. O. [3]) De integratione formulae

$$\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4},$$

aliarumque ejusdem generis, per logarithmos et arcus circulares, M. S. Acad. exhib. 1776; Inst. calc. int. IV, p. 36—48. [4]) Memorabile genus formularum differentialium maxime irrationalium, quas tamen ad rationalitatem perducere licet, M. S. Acad. exhib. 1777; Inst. calc. int. IV, p. 48—59. — Specimen integrationis abstrusissimae hac formula $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{2x^2-1}}$ contentae (1777), Nova Acta Acad. Petrop. IX, 1791 (publ. 1795), p. 98—117.

$$\text{e)}^{1)}\quad V = \int \frac{(1 \mp x^2)^2 dx}{(1 \pm x^2)(1 \pm 6x^2 + x^4)^{\frac{3}{4}}}.$$

Setzt man für das obere Vorzeichen:

$$1 + 6x^2 + x^4 = v^4, \quad p = \frac{1+x}{v}, \quad q = \frac{1-x}{v},$$

so folgt:

$$p^4 + q^4 = 2, \quad dx = -\frac{v^2 dq}{p^3} = \frac{v^2 dp}{q^3},$$

also:

$$dV = \frac{4p^2q^2\frac{dx}{v^2}}{(p+q)(p^2+q^2)} = \frac{4(p-q)p^2q^2dx}{v^2(p^4-q^4)} = \frac{4p^3q^2dx}{v^2(p^4-q^4)} - \frac{4p^2q^3dx}{v^2(p^4-q^4)}$$
$$= \frac{2p^2dp}{1-p^4} - \frac{2q^2dq}{1-q^4},$$

wonach sich die Integration unmittelbar ausführen läßt. Für das untere Vorzeichen kommt man zum ersteren Falle durch die Substitution $x = iy$ wieder.

$$\text{f)}^{2)}\quad V = \int \frac{(3+x^2)dx}{(1+x^2)(1+6x^2+x^4)^{\frac{1}{4}}}.$$

Setzt man:

$$\frac{1+y}{1-y} = x,$$

so folgt:

$$V = 2^{\frac{5}{4}}\left[\int \frac{dy}{(1-y^4)\sqrt[4]{1+y^4}} + \int \frac{y^2dy}{(1-y^4)\sqrt[4]{1+y^4}}\right] = 2^{\frac{5}{4}}[P+Q].$$

Durch die Substitutionen:

$$\frac{y}{\sqrt[4]{1+y^4}} = t, \quad \sqrt[4]{1+y^4} = u$$

erhält man:

$$P = \int \frac{dt}{1-2t^4}, \quad Q = \int \frac{u^2du}{2-u^4}.$$

g)[3]) Eine Verallgemeinerung von f) bilden die zwei folgenden Integrale:

---

[1]) Integratio formulae differentialis maxime irrationalis, quam tamen per logarithmos et arcus circulares expedire liceat (1777), Nova Acta Acad. Petrop. IX, 1791 (publ. 1795), p. 118—126.

[2]) Evolutio formulae integralis $\int \frac{dz(3+z^2)}{(1+z^2)\sqrt[4]{1+6z^2+z^4}}$ per logarithmos et arcus circulares, Nova Acta Acad. Petrop. IX, 1791 (publ. 1795), p. 127—131. [3]) Formae generales differentialium, quae etsi nulla substitutione rationales reddi possunt, tamen integrationem per logarithmos et arcus circulares admittunt (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793 (publ. 1798), p. 27—77.

$$M = \int \frac{\xi^{m-1}\eta^{m-1}(A\xi^{n-m} + B\eta^{n-m})\,dx}{v^m(C\xi^n + D\eta^n)},$$

$$N = \int \frac{v^m(A\xi^{n-m} + B\eta^{n-m})\,dx}{\xi\eta\,(C\xi^n + D\eta^n)},$$

wo:

$$\xi = \alpha + \gamma x, \quad \eta = \beta + \delta x, \quad v = \sqrt[n]{a(\alpha + \gamma x)^n + b(\beta + \delta x)^n},$$

und A, B, C, D rationale Funktionen von $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^n$ sind. Setzt man:

$$\frac{\xi}{\eta} = u, \quad \beta\gamma - \alpha\delta = \varepsilon,$$

so folgt:

$$M = \frac{1}{\varepsilon}\left[\int \frac{Au^{n-1}\,du}{(Cu^n + D)(au^n + b)^{\frac{m}{n}}} + \int \frac{Bu^{m-1}\,du}{(Cu^n + D)(au^n + b)^{\frac{m}{n}}}\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(M_1 + M_2),$$

$$N = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{A(au^n + b)^{\frac{m}{n}}\,du}{u(Cu^n + D)} + \int \frac{Bu^{n-m-1}(au^n + b)^{\frac{m}{n}}\,du}{Cu^n + D}\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(N_1 + N_2),$$

wo A, B, C, D rationale Funktionen von u^n sind. Wendet man dann auf M_1, N_1 die Substitution:

$$(au^n + b)^{\frac{1}{n}} = t,$$

auf M_2, N_2 die Substitution:

$$\frac{u}{(au^n + b)^{\frac{1}{n}}} = t$$

an, so ergibt sich:

$$M_1 = \int \frac{At^{n-m-1}\,dt}{aD - bC + Ct^n}, \quad N_1 = a\int \frac{At^{m+n-1}\,dt}{(t^n - b)(aD - bC + Ct^n)},$$

$$M_2 = \int \frac{Bt^{m-1}\,dt}{D + (bC - aD)t^n}, \quad N_2 = b\int \frac{Bt^{n-m-1}\,dt}{(1 - bt^n)(D + (bC - aD)t^n)},$$

wo A, B, C, D rationale Funktionen von t^n sind.

$$\text{h)[1])} \quad V = \int \frac{dx}{(3 \pm x^2)\sqrt[3]{1 \pm 3x^2}}.$$

---

[1]) Integratio succincta formulae integralis maxime memorabilis $\int \frac{dz}{(3 \pm z^2)\sqrt[3]{1 \pm 3z^2}}$ (1777), Nova Acta Acad. Petrop. X, 1792 (publ. 1797), p. 20—26. — Siehe auch: Rumowski, Integratio formulae $\int \frac{dz}{(3 - z^2)\sqrt[3]{1 + z^2}}$ aliarumque nonnullarum (1795), ebenda, p. 126—136.

Setzt man für das obere Vorzeichen:

$$v^3 = 1 + 3x^2, \quad p = \frac{1 + x}{v}, \quad q = \frac{1 - x}{v},$$

so folgt:

$$p^3 + q^3 = 2, \quad p^3 - q^3 = \frac{2x(3 + x^2)}{v^3}, \quad p^2 - q^2 = \frac{4x}{v^2},$$

$$dx = -\frac{v^2\,dq}{p^2} = \frac{v^2\,dp}{q^2},$$

also:

$$3 + x^2 = \frac{2(p^3 - q^3)v}{p^2 - q^2},$$

und:

$$dV = \frac{(p^2 - q^2)\,dx}{2(p^3 - q^3)v^2} = -\frac{dp + dq}{2(p^3 - q^3)} = -\frac{dp}{4(p^3 - 1)} + \frac{dq}{4(q^3 - 1)}.$$

Für das untere Vorzeichen setzt man $x = iy$.

Andere spezielle Integrale wurden von Andreas Johann Lexell (s. o. S. 383) und von Étienne Rumowski (1732—1812, Schüler von Euler, Professor der Astronomie zu Petersburg und Verfasser eines in russischer Sprache erschienenen Lehrbuches der Elementargeometrie) berechnet:

$$\text{i)[1])} \quad V = \int \frac{1 - x^{m-1}}{(1 - x^m)\sqrt[2m]{2x^m - 1}}\,dx.$$

Schreiben wir:

$$dV = \frac{dx}{(1 - x^m)\sqrt[2m]{2x^m - 1}} - \frac{x^{m-1}\,dx}{(1 - x^m)\sqrt[2m]{2x^m - 1}},$$

und setzen wir im ersten Integral:

$$\frac{\sqrt[2m]{2x^m - 1}}{x} = y,$$

im zweiten:

$$\sqrt[2m]{2x^m - 1} = z,$$

so erhalten wir:

$$dV = \frac{y^{2m-2}\,dy}{1 - y^{2m}} - 2\,\frac{z^{2m-2}\,dz}{1 - z^{2m}}.$$

$$\text{j)[2])} \quad P = \int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt[3]{1 - x^3}}, \quad Q = \frac{\sqrt[3]{1 - x^3}\,dx}{1 + x}.$$

---

[1]) Lexell, Integratio formulae cujusdam differentialis per logarithmos et arcus circulares, Acta Acad. Petrop. 1781, P. II (publ. 1785), p. 104—117. [2]) Rumowski, Integratio formularum

Durch die Substitutionen:

$$x = \frac{\sqrt{z^3-1}-\sqrt{3}}{\sqrt{z^3-1}+\sqrt{3}}, \quad x = \frac{\sqrt{4z^3-1}-\sqrt{3}}{\sqrt{4z^3-1}+\sqrt{3}}$$

erhält man:

$$dP = \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}\frac{z\,dz}{z^3-1},$$

$$dQ = \frac{36z^3dz}{(4z^3-1)(\sqrt{3}+\sqrt{4z^3-1})^2} = \frac{9z^3dz(\sqrt{3}-\sqrt{4z^3-1})^2}{4(1-z^3)^2(4z^3-1)}$$

$$= \frac{9}{2}\frac{z^3(1+2z^3)dz}{(1-z^3)^2(4z^3-1)} - \frac{9\sqrt{3}}{2}\frac{z^3dz}{(1-z^3)^2\sqrt{4z^3-1}}.$$

Um dieses letzte Integral zu berechnen, setze man:

$$z = \frac{\sqrt[3]{1+u^3}}{1+u};$$

man hat:

$$-\frac{9\sqrt{3}}{2}\frac{z^3dz}{(1-z^3)^2\sqrt{4z^3-1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt[3]{1+u^3}\,du}{u} + \frac{\sqrt[3]{1+u^3}\,du}{u^2}\right].$$

Das erste Integral wird durch die Substitution $v = \sqrt[3]{1+u^3}$ rationalisiert $\left(\text{man erhält} \int\frac{v^3dv}{v^3-1}\right)$; das zweite geht durch die Substitution $t = \frac{1}{u}$ in das erste über.

$$\text{k)}^{1)} \quad V = \int\frac{dx}{(3-x^2)\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

Durch die Substitution:

$$x = \sqrt{3}\,\frac{1-u}{1+u}{}^{2)}$$

ergibt sich:

$$dV = -3^{-\frac{1}{2}}2^{-\frac{5}{3}}\left[\frac{du}{u\sqrt[3]{1+u^3}} + \frac{du}{\sqrt[3]{1+u^3}}\right];$$

$$\frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{1-x^3}} \quad \text{et} \quad \frac{dx\sqrt[3]{1-x^3}}{1+x}$$

(1795), Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793 (publ. 1798), p. 213—219.

[1]) Rumowski, Integratio formulae $\frac{dz}{(3-z^2)\sqrt[3]{1+z^2}}$ aliarumque nonnullarum, Nova Acta Acad. Petrop. X, 1792 (publ. 1797), p. 126—136.
[2]) Rumowski bewerkstelligt diese Substitution in drei Schritten, nämlich:

$$\sqrt[3]{1+x^2} = t\sqrt[3]{4}, \quad t = \sqrt[3]{1-3y+3y^2}, \quad y = \frac{1}{1+u}.$$

von diesen Integralen läßt sich das erste durch die Substitution:

$$v = \sqrt[3]{1+u^3}$$

berechnen, während das zweite in das erste durch die Substitution $t = \frac{1}{u}$ übergeführt wird.

Noch andere, aber nichts wesentlich Neues darbietende Integrale finden sich in dem oben angeführten Anhange zum ersten Bande der Mathematical Memoirs von Landen.

Der unten noch öfters zu erwähnende G. F. Fagnano gab[1]) einen neuen Beweis des Satzes, nach welchem sich die Integration von $\frac{x^m dx}{(c+ex^n)^p}$, wo m und n beliebig sind, p aber ganz und positiv ist, auf diejenige von $\frac{x^m dx}{c+ex^n}$ zurückführen läßt.

Eine Bemerkung Eulers[2]) verdient, trotz ihrer Einfachheit, hervorgehoben zu werden. Nicht alle Integrale, die durch elementare Funktionen ausdrückbar sind, lassen sich durch eine Substitution rationalisieren; es kommt zuweilen vor, daß ein Integral sich in eine Summe von Integralen zerlegen läßt, deren jedes einer besonderen Substitution bedarf, um rationalisiert zu werden. Dieser Umstand ist in den oben behandelten Integralen wiederholt vorgekommen; ein weiteres Beispiel ist:

$$\int\left[\frac{a}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{b}{\sqrt[3]{1+x^3}} + \frac{c}{\sqrt[4]{1+x^4}}\right]dx.$$

Auch die binomischen Integrale:

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}dx$$

waren schon von Newton (diese Vorl., III², S. 185—186) behandelt worden; er hatte die beiden Fälle erledigt, wo $\frac{m}{n}$ oder $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ ganzzahlig ist. Euler[3]) setzte sich vor, die Integrierbarkeitsfälle direkt aufzufinden; er kam selbstverständlich auf die zwei Newtonschen Fälle, und fügte hinzu: „Facile autem intelligitur alias substitutiones huic scopo idoneas excogitari non posse". Es sollte aber noch ein Jahrhundert dauern, bevor diese Behauptung bewiesen werden konnte.[4])

Auf die binomischen Integrale bezieht sich das Schriftchen:

---

[1]) Theorema calculi integralis, N. Racc. d'opuscoli scientifici e filologici XXII, 1772, op. III. [2]) Supplementum calculi integralis etc. (s. o. S. 716). — Specimen integrationis etc. (ebenda). [3]) Inst. calc. int. I, p. 67.
[4]) Bekanntlich wurde der Beweis zuerst von Tchebycheff erbracht (J. de Liouville XVIII).

Dissertatio de comparatione fluxionum binomialium quam praeside F. Mallet... pro laurea publice examinandam sistit Andreas Hultén (Upsala 1785).

Karsten[1]) versuchte, die Integrationsmethode der binomischen Differentiale auf polynomische zu erstrecken. Ist:

$$dy = x^m dx(a + bx^n + cx^{2n})^p,$$

so kann man schreiben:

$$dy = x^{\frac{m-p}{p+1}} dx \left(ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}}\right)^p.$$

Setzt man:

$$ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}} = z,$$

so folgt:

$$a\frac{m+1}{p+1} x^{\frac{m-p}{p+1}} dx + b\frac{m+np+n+1}{p+1} x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx$$
$$+ c\frac{m+2np+2n+1}{p+1} x^{\frac{m+2np+2n-p}{p+1}} dx = dz,$$

und hieraus:

$$x^{\frac{m-p}{p+1}} dx = \frac{p+1}{a(m+1)} dz - \frac{b}{a}\frac{m+np+n+1}{m+1} x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx$$
$$- \frac{c}{a}\frac{m+2np+2n+1}{m+1} x^{\frac{m+2np+2n-p}{p+1}} dx,$$

folglich:

$$y = \int x^{\frac{m-p}{p+1}} z^p dx = \frac{1}{a(m+1)} z^{p+1} - \frac{b}{a}\frac{m+np+n+1}{m+1} \int x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} z^p dx$$
$$- \frac{c}{a}\frac{m+2np+2n+1}{m+1} \int x^{\frac{m+2np+2n-p}{p+1}} z^p dx = \frac{1}{a(m+1)} z^{p+1}$$
$$- \frac{b}{a}\frac{m+np+n+1}{m+1} \int x^{m+n}(a + bx^n + cx^{2n})^p dx$$
$$- \frac{c}{a}\frac{m+2np+2n+1}{m+1} \int x^{m+2n}(a + bx^n + cx^{2n})^p dx.$$

Auf gleiche Weise fährt man fort; bricht die Reihe nicht ab, so erhält man dadurch einen angenäherten Ausdruck für das Integral.

Die polynomischen Differentiale lassen sich analog behandeln.

Mit der Integration der polynomischen Differentiale beschäftigte

[1]) Mathesis theoretica elementaris etc., § 380.

sich auch Carlo Francesco Gianella[1]) (s. o. S. 681). Er behandelte das Integral $\int x^r X^n dx$, wo:

$$X = fx^m + gx^{m'} + hx^{m''} + \cdots, \quad m > m' > m'' > \cdots \quad \text{für} \quad r > 0;$$
$$X = f + gx^m + hx^{m'} + \cdots, \quad m < m' < \cdots \quad \text{für} \quad r < 0,$$

und suchte erstens hinreichende Bedingungen dafür aufzustellen, daß die Integration in geschlossener Form ausführbar sei, zweitens die Gesetze zu bestimmen, denen die Koeffizienten der Reihe gehorchen, durch welche das Integral im allgemeinen ausdrückbar ist. Daß aber die von ihm angegebenen Bedingungen nicht hinreichend sind, läßt sich leicht ersehen.

Lacroix[2]) bemerkte, daß einige Integrale, wie z. B.:

$$\int x^{m-1} dx (a + bx^n + cx^{2n} + \cdots)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

Rekursionsformeln zulassen, welche den für die binomischen Integrale geltenden analog sind, und daß sich andere auf mehrere aufeinanderfolgende binomische Integrale zurückführen lassen. Es finden sich auch Rekursionsformeln bei Fontana[3]) (s. u. S. 725), Lorgna[4]) und Frisi[5]).

Es mögen schließlich einige Untersuchungen von Condorcet[6]) kurz erwähnt werden, welche eine größere Tragweite haben. Unter den von Condorcet aufgestellten Sätzen heben wir den folgenden als Beispiel hervor:

Ist:

$$A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \cdots = 0,$$

wo A_i eine ganze rationale Funktion von x vom i^{ten} Grade bezeichnet, so läßt sich das Differential $y dx$ auf die Form $Pdx + Qdy$ bringen, wo P, Q rationale Funktionen von x, y sind, und $Pdx + Qdy$ ein exaktes Differential ist; unter denselben Voraussetzungen läßt sich $e^x y dx$ auf die Form eines exakten Differentials $e^x(Pdx + Qdy)$ bringen.

Es ist aber zu beachten, daß Condorcets Beweise sich einzig und allein auf die Abzählung der Konstanten stützen, eine Beweis-

[1]) De integratione indefinitinomii, Misc. Taur. IV, 1766—1769, P. II, p. 253—271. — De fluxionibus earumque usu, Mailand 1777, § 68 ff.
[2]) Traité de calcul différentiel, Art. 395 ff. [3]) Analyseos sublimioris opuscula, Venedig 1763, Op. I. [4]) Opuscula mathematica et physica, Verona 1770, Op. V. [5]) Pauli Frisii Opera, Bd. I, Mailand 1782.
[6]) Théorèmes sur les quadratures, Mém. Acad. Paris 1771 (publ. 1774), p. 693—704.

methode, die bekanntlich nichts weniger als sicher ist. Das ist freilich dem Verfasser selbst nicht entgangen. Er bemerkt nämlich, daß die Unmöglichkeit, die Anzahl der Koeffizienten größer zu machen als die der Gleichungen, die Unlösbarkeit der Aufgabe nicht notwendig nach sich zieht, und verspricht, in einer späteren Arbeit eine Methode anzugeben, welche in denjenigen Fällen, in welchen die frühere versagt, zu genauen Ergebnissen führt. Auch Lagrange, in einem an Condorcet gerichteten Schreiben vom 1. Oktober 1774[1]), erhob einige Bedenken gegen die Methode von der Konstantenabzählung, deren Unsicherheit er durch ein Beispiel nachwies.

D. Integration von transzendenten Funktionen.

Die Integration der transzendenten Funktionen war in unserer Periode Gegenstand zahlreicher Untersuchungen.

Gleich am Anfang finden wir bei Karsten[2]) neben den Integralen:

$$\int x^m \log x^n dx,\quad \int x e^{\beta x} dx,\quad \int \cos\alpha x \sin\beta x dx$$

noch einige andere, wie:

$$\int \sin\log\frac{1}{x}\frac{dx}{x},\quad \int e^{\sin x}\cos x dx,\quad \int\frac{e^{-\frac{n}{\cos x}}\sin x dx}{\cos^2 x}\quad \text{usw.}$$

In drei Briefen aus den Jahren 1760—1764 stellt V. Riccati die folgenden Formeln auf[3]):

$$(2)\quad \begin{cases} m\int\cos\varphi^m d\varphi = (m-1)\int\cos\varphi^{m-2}d\varphi + \cos\varphi^{m-1}\sin\varphi, \\ m\int\sin\varphi^m d\varphi = (m-1)\int\sin\varphi^{m-2}d\varphi - \sin\varphi^{m-1}\cos\varphi, \\ (m+n)\int\sin\varphi^{n-1}\cos\varphi^{m+1}d\varphi \\ \qquad = m\int\sin\varphi^{n-1}\cos\varphi^{m-1}d\varphi + \sin\varphi^n\cos\varphi^m, \\ (m+n)\int\cos\varphi^{m-1}\sin\varphi^{n+1}d\varphi \\ \qquad = n\int\cos\varphi^{m-1}\sin\varphi^{n-1}d\varphi - \cos\varphi^m\sin\varphi^n. \end{cases}$$

Riccati bemerkt, daß die ersten zwei Formeln den Wert von

[1]) Oeuvres XIV, Paris 1892, p. 29—30. [2]) Mathesis theoretica elementaris etc., § 400 ff. [3]) Epistolae tres, quibus utilitas calculi sinuum, et cosinuum in infinitesimorum analysi demonstratur, Comm. Bon. V, P. II, 1767, p. 198—215.

$\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$, $\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$ nicht liefern können; er berechnet diese Integrale auf anderem Wege, und beweist, daß seine Formeln mit den Eulerschen[1]):

$$\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right),\quad \int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$$

übereinstimmen.

Die zu (2) analogen, für die Hyperbelfunktionen geltenden Formeln finden sich in den Institutiones analyticae von Riccati und Saladini[2]).

Noch bevor die Riccatischen Briefe an die Öffentlichkeit traten, widmete Fontana das erste seiner oben angeführten Opuscula der Untersuchung der vier folgenden Integrale, die, sagt er, soviel ich weiß, niemand bisher betrachtet hat:

$$\int\frac{\sin\varphi^n}{\cos\varphi^m}d\varphi,\quad \int\frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi^m}d\varphi,\quad \int\sin\varphi^n\cos\varphi^m d\varphi,\quad \int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^n\cos\varphi^m};$$

hier bezeichnen m und n positive, ganze oder gebrochene Zahlen.

Fontana schickt vier Rekursionsformeln voraus, welche:

$$\int\frac{z^n dz}{(1+bz^m)^p}$$

beziehentlich mit:

$$\int\frac{z^n dz}{(1+bz^m)^{p-1}},\quad \int\frac{z^{n-m}dz}{(1+bz^m)^{p-1}},\quad \int\frac{z^{n+m}dz}{(1+bz^m)^{p+1}},\quad \int\frac{z^n dz}{(1+bz^m)^{p+1}}$$

verbinden. Wendet man auf die vorgegebenen Integrale die Substitution $x = \cos\varphi$ an, so lassen sich die dadurch erhaltenen Integrale für ganzzahlige m, n vermittels der erwähnten Rekursionsformeln in allen Fällen berechnen. Sind m, n nicht zugleich ganzzahlig, so ist die Integration nicht immer ausführbar; Fontana erörtert aber einige Fälle, in welchen die Berechnung der Integrale möglich ist.

Carlo Maj[3]) berechnet durch partielle Integration (ein Verfahren, das er, mit Beschränkung auf die von ihm betrachteten Integrale, ausführlich beschreibt) die Integrale:

$$\int\log x^n dx \quad \text{und} \quad \int x^{\pm m}\log x^n dx,$$

und leitet hieraus die Integration von $\int x^x dx$ ab; es ist nämlich:

[1]) Euler, Recherches sur l'effet des moulins à vent, Hist. Acad. Berlin XII, 1856. [2]) T. II, p. 151. [3]) Diversi metodi per l'integrazione di alcune formole logaritmiche, Atti dell' Accad. delle Scienze di Siena detta dei Fisiocritici III, 1767, p. 278—300.

$$\int x^x dx = \int dx + \frac{1}{1!}\int x \log x\, dx + \frac{1}{2!}\int x^2 \log x^2 dx + \cdots.$$

Eine kurze, aber inhaltsreiche Arbeit widmet Giovanni Francesco Fagnano (1715—1797, Archidiakon von Senigallia, Sohn des berühmten Giulio Fagnano, s. o. S. 34) der Berechnung einiger transzendenten Integrale.[1]) Sein Hauptzweck ist, nachzuweisen, daß die Integrale $\int\frac{d\varphi}{\operatorname{tang}\varphi}$, $\int\frac{d\varphi}{\operatorname{tang}2\varphi}$, $\int\frac{d\varphi}{\operatorname{tang}3\varphi}$, ... durch bloße Logarithmen ausdrückbar sind, wie Johann Bernoulli in seiner Arbeit Continuatio materiae de trajectoriis reciprocis von gewissen rationalen, in diese unmittelbar transformierbaren Integralen behauptet hatte. Ist:

$$\operatorname{tang}\varphi = t,\quad \operatorname{cotg}\varphi = u,\quad \sec\varphi = s,\quad \operatorname{cosec}\varphi = r,$$
$$\cos\varphi = x,\quad \sin\varphi = y,\quad \operatorname{sinvers}\varphi = q = 1 - x,$$

Absz. Kompl. φ (d. i. die Projektion des Bogens $\pi - \varphi$ auf den Durchmesser) $= l = 2 - q$, Sehne $\varphi = m = \sqrt{2q}$,

$$\text{Sehne } (2\pi - \varphi) = p = \sqrt{2l},$$

und werden durch die gleichen größeren Buchstaben die entsprechenden Funktionen von $n\varphi$ bezeichnet, so erhält Fagnano, von der Differentialgleichung:

$$d\varphi = \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{n}\frac{dT}{1+T^2} \tag{3}$$

ausgehend, die folgenden Relationen:

$$T = \frac{1}{i}\frac{(1+it)^n - (1-it)^n}{(1+it)^n + (1-it)^n},$$

$$U = i\,\frac{(u+i)^n + (u-i)^n}{(u+i)^n - (u-i)^n},$$

$$S = \frac{2s^n}{(1+i\sqrt{s^2-1})^n + (1-i\sqrt{s^2-1})^n},$$

$$R = \frac{2ir^n}{(\sqrt{r^2-1}+i)^n - (\sqrt{r^2-1}-i)^n},$$

$$X = \frac{1}{2}\left((x+i\sqrt{1-x^2})^n + (x-i\sqrt{1-x^2})^n\right),$$

[1]) Integratio quarundam quantitatum differentialium, quae originem habent a lineis, quae ad circulum referuntur, Nova Acta eruditorum 1764—1765 (publ. 1767), p. 361—371, abgedruckt in Nuova Raccolta d'opuscoli scientifici e filologici XXII, 1772, op. I, 16 S.

$$Y = \frac{1}{2i}\left((\sqrt{1-y^2}+iy)^n - (\sqrt{1-y^2}-iy)^n\right),$$

$$Q = \frac{2-(1-q+i\sqrt{2q-q^2})^n - (1-q-i\sqrt{2q-q^2})^n}{2},$$

$$L = \frac{2+(l-1+i\sqrt{2l-l^2})^n + (l-1-i\sqrt{2l-l^2})^n}{2},$$

$$M = \sqrt{2-\left(\frac{2-m^2+im\sqrt{4-m^2}}{2}\right)^n - \left(\frac{2-m^2-im\sqrt{4-m^2}}{2}\right)^n},$$

$$P = \sqrt{2+\left(\frac{p^2-2+ip\sqrt{4-p^2}}{2}\right)^n + \left(\frac{p^2-2-ip\sqrt{4-p^2}}{2}\right)^n}.$$

Aus (3) folgt auch:

$$\frac{d\varphi}{\operatorname{tang}n\varphi} = \frac{1}{n}\frac{dT}{T(1+T^2)} = \frac{1}{n}\left(\frac{dT}{T} - \frac{T\,dT}{1+T^2}\right),$$

und hieraus durch Integration:

$$\int\frac{d\varphi}{T} = \log\frac{T^{\frac{1}{n}}}{(1+T^2)^{\frac{1}{2n}}}.$$

Ferner ergeben sich die folgenden Integralrelationen:

$$\int T\,d\varphi = \log(1+T^2)^{\frac{1}{2n}},$$

$$\int\frac{d\varphi}{U} = \log\frac{(1+U^2)^{\frac{1}{2n}}}{U^{\frac{1}{n}}},$$

$$\int U\,d\varphi = \log\frac{1}{(1+U^2)^{\frac{1}{2n}}},$$

$$\int\frac{d\varphi}{S} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt{S^2-1}}{S},$$

$$\int S\,d\varphi = \frac{1}{n}\log(S+\sqrt{S^2-1}),$$

$$\int\frac{d\varphi}{R} = -\frac{1}{n}\frac{\sqrt{R^2-1}}{R},$$

$$\int R\,d\varphi = \frac{1}{n}\log(R-\sqrt{R^2-1}),$$

$$\int\frac{d\varphi}{X} = \frac{1}{n}\log\frac{1+\sqrt{1-X^2}}{X},$$

$$\int X\,d\varphi = \frac{1}{n}\sqrt{1-X^2}.$$

$$\int \frac{d\varphi}{Y} = \frac{1}{n} \log \frac{1 - \sqrt{1 - Y^2}}{Y},$$

$$\int Y d\varphi = -\frac{1}{n} \sqrt{1 - Y^2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{Q} = -\frac{1}{n} \sqrt{\frac{2 - Q}{Q}},$$

$$\int Q d\varphi = -\frac{1}{n} \sqrt{2Q - Q^2} + \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{L} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2 - L}{L}},$$

$$\int L d\varphi = \frac{1}{n} \sqrt{2L - L^2} + \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{M} = \frac{1}{n} \log \frac{2 - \sqrt{4 - M^2}}{M},$$

$$\int M d\varphi = -\frac{2}{n} \sqrt{4 - M^2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{P} = \frac{1}{n} \log \frac{2 + \sqrt{4 - P^2}}{P},$$

$$\int P d\varphi = \frac{2}{n} \sqrt{4 - P^2}.$$

Noch allgemeinere Integralformeln wurden von Euler in seiner Integralrechnung[1]) betrachtet, nämlich:

$$\int X \log x^n dx, \quad \int X a^x dx, \quad \int X \arcsin x^n dx,$$

wo X eine algebraische Funktion von x bezeichnet. Ferner integrierte er, wohl unabhängig von seinen Vorgängern, $\sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$, und gab Rekursionsformeln für:

$$\int \frac{d\varphi}{(a + b\cos\varphi)^n}, \quad \int e^{\alpha\varphi} \sin n\varphi\, d\varphi, \quad \int e^{\alpha\varphi} \cos n\varphi\, d\varphi.$$

Fast gleichzeitig mit der Integralrechnung von Euler erschien eine Arbeit von d'Alembert[2]), worin er einige ziemlich allgemeine, für die Bildung rationalisierbarer Integrale nutzbare Prinzipien aufstellte. — Ist V eine rationale Funktion von Sinussen und Kosinussen von $p\varphi + \alpha$, $q\varphi + \beta, \ldots$, oder von $a^{p\varphi+\alpha}$, $a^{q\varphi+\beta}$, wo die Verhältnisse von $p, q, \ldots$ rational sind, so ist $V d\varphi$ integrierbar. Man

---

[1]) Art. 189 ff. [2]) Recherches sur le calcul intégral, Hist. Acad. Paris 1767 (publ. 1770), p. 573—587; 1769 (publ. 1772), p. 73—146.

kann aber allgemeinere Integraltypen erhalten, wenn man folgendes beachtet. Setzt man $x = \sin\varphi$, so folgt:

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \cos\varphi - \sqrt{1 - x^2}, \quad \sin 2p\varphi = x\sqrt{1 - x^2} \cdot X,$$

$$\cos 2p\varphi = X_1, \quad \sin(2p + 1)\varphi = xX_2, \quad \cos(2p + 1)\varphi = \sqrt{1 - x^2}\, X_3,$$

wo X, X_1, X_2, X_3 ganze rationale Funktionen von x^2 sind, so daß:

$$\sin(2p + 1)\varphi, \quad \cos 2p\varphi, \quad \sin 2p\varphi d\varphi, \quad \cos(2p + 1)\varphi d\varphi$$

keine Wurzelgrößen enthalten.

Mit der Integration von transzendenten Funktionen beschäftigte sich wiederum Fagnano in einer zweiten Arbeit[1]), wo er, neben den schon bekannten Integralen:

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int x^m dx \sin x, \quad \int x^m dx \cos x, \quad \int \frac{dx}{\sin x^m}, \quad \int \frac{dx}{\cos x^m},$$

noch einige neue berechnete, nämlich:

$$\int x^m \sin\log x\, dx, \quad \int x^m \cos\log x\, dx,$$

und zeigte, wie sich $\frac{\sin x dx}{x}$ und $\frac{\cos x dx}{x}$ durch Reihen integrieren lassen.

Daß auch hier wie sonst überall der Name Eulers wiederholt vorkommt, mag nicht befremden. Von ihm haben wir, was transzendente Integrale betrifft, vier Abhandlungen aus den Jahren 1776—1777.

Euler benutzt für die Integration von:

$$dS = \frac{\sin m\varphi d\varphi}{\sin n\varphi}$$

die Theorie der imaginären Größen.[2]) Setzt man:

$$t = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

so ist:

---

[1]) Reductio functionum transcendentalium simplicium, quae a circulo petuntur, et quarum universalior est usus, Nova Acta erud. 1774 (publ. 1777), p. 385—420. Die erste Abteilung dieser Schrift wurde in Nuova Raccolta d'opuscoli scientifici e filologici XXII, 1772, op. II, 19 S., abgedruckt. [2]) De summo usu calculi imaginariorum in analysi (1776), Nova Acta Acad. Petrop. III, 1785 (publ. 1788), p. 25—46. — Vgl. oben S. 711.

$$idS = \frac{dt}{t}\frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}};$$

sind m und n ganze Zahlen, so hat man nunmehr mit einer rationalen Funktion zu tun.

Auch die weit komplizierteren Integrale:

$$P = \int \frac{\cos(\vartheta + \omega)\,dv}{\sqrt{s}}, \quad Q = \int \frac{\sin(\vartheta + \omega)\,dv}{\sqrt{s}},$$

wo:

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{v^2 \sin 2\vartheta}{1 - v^2 \cos 2\vartheta}, \quad s = \sqrt{1 - 2v^2 \cos 2\vartheta + v^4},$$

werden mit Hilfe imaginärer Größen berechnet.[1]) Setzt man nämlich:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \arcsin z = x + iy, \quad z = v(\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

so folgt:

$$v \cos\vartheta = \tfrac{1}{2} \sin x (e^y + e^{-y}), \quad v \sin\vartheta = \tfrac{1}{2} \cos x (e^y - e^{-y}),$$

woraus sich x und y leicht bestimmen lassen; ferner, unter der Voraussetzung, daß ϑ konstant sei:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = P + iQ,$$

also:

$$P = x, \quad Q = y.$$

Für das Integral[2]):

$$V = \int \frac{\Phi\,d\varphi\,(F \sin\lambda\varphi + G \cos\lambda\varphi)}{\sqrt[n]{(a \cos n\varphi + b \sin n\varphi)^\lambda}},$$

wo Φ eine rationale Funktion von $\operatorname{tang} n\varphi$ bezeichnet, setzt Euler:

$$\frac{\cos\varphi + i \sin\varphi}{\sqrt[n]{a \cos n\varphi + b \sin n\varphi}} = x,$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tang} n\varphi = \frac{1 - ax^n}{bx^n - i}, \quad d\varphi = \frac{dx}{2ix\left(1 - \frac{a - ib}{2} x^n\right)}$$

und:

$$p = \int \frac{\Phi\,d\varphi\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)^\lambda}{\sqrt[n]{(a \cos n\varphi + b \sin n\varphi)^\lambda}} = \frac{1}{2i} \int \Phi\left(\frac{1 - ax^n}{bx^n - i}\right) \frac{x^{\lambda - 1}\,dx}{1 - \frac{a - ib}{2} x^n};$$

[1]) De integrationibus difficillimis quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XIV, 1797 und 1798 (publ. 1805), p. 62—74. [2]) De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet, M. S. Acad. exhib. 1777; Inst. calc. int. IV, p. 183—194.

auf analoge Weise wird:

$$q = \int \frac{\Phi\,d\varphi\,(\cos\varphi - i \sin\varphi)^\lambda}{\sqrt[n]{(a \cos n\varphi + b \sin n\varphi)^\lambda}}$$

berechnet, und aus p, q erhält man unmittelbar V.

Euler gibt auch den Ausdruck der Integrale[1]):

$$\int \sin(n + 2h + 1)\varphi \sin\varphi^{n-1}\,d\varphi,$$
$$\int \cos(n + 2h + 1)\varphi \sin\varphi^{n-1}\,d\varphi,$$
$$\int \sin(n + 2h + 1)\varphi \cos\varphi^{n-1}\,d\varphi,$$
$$\int \cos(n + 2h + 1)\varphi \cos\varphi^{n-1}\,d\varphi.$$

Im Jahre 1790 gab Mascheroni den ersten Teil seiner Noten zu Eulers Integralrechnung[2]) heraus. Abt Lorenzo Mascheroni, geboren zu Castagneta bei Bergamo am 14. Mai 1750, gestorben zu Paris am 30. Juli 1800, war Dichter und Mathematiker (s. o. S. 380). Außer den in den vorhergehenden Abschnitten erwähnten Schriften verdankt man ihm noch einige Werke über Astronomie und angewandte Mathematik. Unter seinen Gedichten ist eins allbekannt, Invito a Lesbia, worin er in erhabener, dichterischer Form das physikalische und naturgeschichtliche Museum der Universität von Pavia beschreibt. Bei seinem Tode schrieb der berühmte Dichter Vincenzo Monti als Nachruf ein kleines Poem, die Mascheroniana.

Aus den Adnotationes entnehmen wir an diesem Orte nur folgendes. In der Adn. II behandelt Mascheroni die Integrale:

$$\int x^m \sin x\,dx, \quad \int x^m \cos x\,dx,$$

ohne, wie es scheint, zu wissen, daß sie schon Gegenstand früherer Untersuchungen gewesen waren; ferner berechnet er:

$$\int \frac{dx}{(a + b \operatorname{tg} x)^n}, \quad \int e^{ax} \sin bx \cdot x^n\,dx, \quad \int e^{ax} \cos bx \cdot x^n\,dx.$$

Es werden dort auch vier Sätze von Gregorio Fontana mitgeteilt, welche den Wert der Integrale:

[1]) Quatuor theoremata maxime notatu digna in calculo integrali (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VII, 1789 (publ. 1793), p. 22—41.

[2]) Adnotationes ad Calculum integralem Euleri in quibus nonnulla problemata ab Eulero proposita resolvuntur, Pavia, P. I 1790, P. II 1792.

$$\int \frac{dx}{\sin x \pm \sin a}, \quad \int \frac{dx}{\cos x \pm \cos a}$$

ergeben.

Hierher gehört eine Abhandlung von V. Riccati[1]), wo er neben schon bekannten Integralen auch die folgenden berechnet:

$$\int e^{g\varphi} \sin q\varphi^2 d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \sin q\varphi \cos q\varphi \, d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \cos q\varphi^2 d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi} \varphi^p \sin q\varphi^2 d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \varphi^p \sin q\varphi \cos q\varphi \, d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \varphi^p \cos q\varphi^2 d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi \, d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \operatorname{ch} q\varphi \, d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi^2 d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi \operatorname{ch} q\varphi \, d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \operatorname{ch} q\varphi^2 d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi} \varphi^p \operatorname{sh} q\varphi \, d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \varphi^p \operatorname{ch} q\varphi \, d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi} \varphi^p \operatorname{sh} q\varphi^2 d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \varphi^p \operatorname{sh} q\varphi \operatorname{ch} q\varphi \, d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \varphi^p \operatorname{ch} q\varphi^2 d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi^{m-n} \operatorname{ch} q\varphi^n d\varphi.$$

Merkwürdig sind die Ausnahmefälle, die bei den Hyperbelfunktionen enthaltenden Integralen auftreten. Es ist z. B.:

$$\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi \, d\varphi = \frac{e^{g\varphi}}{g^2 - q^2}(g \operatorname{sh} q\varphi - q \operatorname{ch} q\varphi),$$

$$\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi^2 \, d\varphi$$
$$= \frac{e^{g\varphi}}{g^3 - 4gq^2}[(g^2 - 2q^2) \operatorname{sh} q\varphi^2 - 2gq \operatorname{sh} q\varphi \operatorname{ch} q\varphi + 2q^2 \operatorname{ch} q\varphi^2];$$

diese Formeln versagen aber für $g = \pm q$ bzw. $g = \pm 2q$, in welchen Fällen man die Integrale auf anderem Wege berechnen muß. Ein analoges Vorkommnis findet für $\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi^{m-n} \operatorname{ch} q\varphi^n d\varphi$ statt; die Ausnahmefälle sind:

$$g = \pm mq, \quad g = \pm (m-2)q, \ldots.$$

Murhard[2]) (siehe oben S. 13) integrierte ein transzendentes Differential, das sich in $\frac{x^{\frac{n}{m}} dx}{1 \pm x}$ überführen läßt.

---

[1]) De quarundam formularum exponentialium integratione, Comm. Bonon. VII, 1791, p. 241—288. [2]) Exhibetur integratio formulae valde complicatae, Göttingen 1796 (Festschrift zum Akademischen Jubiläum von Kästner).

Daniel Melanderhjelm[1]) (1726—1810; siehe oben S. 28) versuchte den Ausdruck:

$$dV = e^{nx} x^m (a + bx + \cdots) R^p S^q dx,$$

wo:

$$R = c + fx + gx^2 + \cdots, \quad S = h + kx + lx^2 + \cdots$$

ist, dadurch zu integrieren, daß er:

$$V = e^{nx} x^{m+1} (A + Bx + \cdots) R^{p+1} S^{q+1}$$

und insbesondere:

$$a \int e^{nx} x^m R^p S^q dx = A e^{nx} x^{m+1} R^{p+1} S^{q+1},$$

$$b \int e^{nx} x^{m+1} R^p S^q dx = B e^{nx} x^{m+2} R^{p+1} S^{q+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

setzte, was aber, wie er anscheinend nicht bemerkte, im allgemeinen nicht möglich ist.[2])

E. Reihenintegration, angenäherte Integration.

Die Reihenintegration wurde in unserer Periode um so häufiger gebraucht, als man sie, ohne auf deren Zulässigkeit zu achten, als ein ganz allgemeines Integrationsmittel betrachtete. Aber eben darum, daß sie ohne jedes Bedenken angewandt wurde, gab sie zu keiner theoretischen Erörterung Anlaß; man beschränkte sich darauf, das allgemeine Glied der Entwicklung in jedem besonderen Falle zu ermitteln. Wir können uns also über diesen Gegenstand ganz kurz fassen.

Euler widmet der Reihenintegration ein besonderes Kapitel seiner Integralrechnung, wo er rationale und irrationale Integrale durch diese Methode berechnet; weitere Integrale werden auf gleiche

---

[1]) Integratio formulae differentialis

$$N^{nx} x^m dx (a + bx + cx^2 + kx^3 + lx^4 + \text{etc.})(e + fx + gx^2 + \text{etc.})^p$$
$$(h + rx + tx^2 + \text{etc.})^q,$$

in qua N est numerus cuius logarithmus hyperbolicus est unitas, quantitates vero $n, m, a, b, c, k, l, e, f, g, h, r, t, p, q$ quaelibet datae (1798), Nova Acta Acad. Petrop. XII, 1794 (publ. 1801), p. 114—124.

[2]) Sind nämlich R, S Polynome von den Ordnungen r, s, so ist $x^m R^p S^q$ von der Ordnung $m + rp + sq$, und folglich $\frac{1}{e^{nx}} \int e^{nx} x^m R^p S^q dx$ von derselben Ordnung, während $x^{m+1} R^{p+1} S^{q+1}$ von der Ordnung:

$$m + 1 + r(p+1) + s(q+1)$$

ist.

Weise an anderen Stellen ausgewertet. Ein anderes Kapitel beschäftigt sich mit der Entwicklung der Integrale nach Sinussen und Kosinussen von Vielfachen der Veränderlichen. Eine im IV. Band der Integralrechnung erschienene Abhandlung[1]) betrifft die Reihenentwicklung des Integrals $\int x^{m-1}dx(\Delta + x^n)^\lambda$, wo Δ eine Konstante bezeichnet.

Mascheroni beschäftigt sich in dem oben angeführten Werke mit der Bestimmung der Konstante in der Gleichung:

$$\int_0^z \frac{dz}{\log z} = \text{const.} + \log\log z + \frac{1}{1}\frac{\log z}{1!} + \frac{1}{2}\frac{\log z^2}{2!} + \cdots;$$

dazu bedient er sich aber ohne jedes Bedenken divergenter Reihen, was übrigens zu jener Zeit geläufig war. Ferner berechnet er durch Reihenentwicklung die Integrale:

$$\int \frac{dx \sin x}{x^n}, \quad \int \frac{dx \cos x}{x^n}, \quad \int \frac{x^\alpha \pm x^\beta}{\log x}\, dx, \quad \int x^{f-1} dx \log x^{\frac{m}{n}},$$
$$\int \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx \log x}{1+x^2}, \quad \int \frac{dx}{\log \operatorname{tang} x}.$$

Auch mit angenäherter Integration beschäftigt sich Eulers Integralrechnung. Ist:

$$y = \int X dx,$$

wo X eine Funktion von x bezeichnet, und ist:

$$y = b, b', b'', \ldots; \quad X = A, A', A'', \ldots$$

für:

$$x = a, a', a'', \ldots,$$

so kann man X als konstant und gleich $A, A', A'', \ldots$ in den Intervallen $aa', a'a'', a''a''', \ldots$ ansehen; man hat dann annäherungsweise:

$$b' = b + A(a' - a),$$
$$b'' = b + A(a' - a) + A'(a'' - a'),$$
$$b''' = b + A(a' - a) + A'(a'' - a') + A''(a''' - a''),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Will man eine größere Annäherung erreichen, so kann man $X = \int P dx$ setzen, wo P als konstant in jedem Teilintervall angesehen wird; es ergibt sich so:

$$y = b + X_a(x-a) + \tfrac{1}{2} P_a(x-a)^2,$$

wo X_a, P_a die Werte von X, P für $x = a$ bezeichnen.

Alexis Fontaine (diese Vorl., III², S. 587)[1]) gibt ohne Beweis die folgende Annäherungsformel:

$$\int f(x)\, dx = \frac{x}{2^{n-1}}\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right) + f\left(\frac{3x}{2^n}\right) + \cdots + f\left(\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right)\right].$$

Laplace wurde von seinen tiefgehenden Untersuchungen über Wahrscheinlichkeitslehre zum Probleme geführt, das Integral:

$$\int_\vartheta^{\vartheta'} u^s u'^{s'} \ldots \varphi\, dx,$$

wo $u, u', \ldots, \varphi$ Funktionen von x bezeichnen und $s, s', \ldots$ sehr große Zahlen sind, in eine konvergente Reihe zu entwickeln. Die Erörterung dieses Problems und die verwandten Untersuchungen füllen eine Abhandlung von mehr als 130 Seiten aus[2]); wir müssen uns damit begnügen, die Grundlage der Laplaceschen Behandlung wiederzugeben.

Setzen wir:

$$y = y(x) = u^s u'^{s'} \ldots \varphi, \quad y(\vartheta) = Y,$$
$$-\frac{y\,dx}{dy} = v(x), \quad v(\vartheta) = U, \quad y = Ye^{-t};$$

dann ist:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v\,dv}{dx}, \ldots, \quad \frac{d^n x}{dt^n} = \frac{v\,d(v\,d(v \ldots dv))}{dx^n}, \ldots,$$

---

[1]) De resolutione formulae integralis $\int x^{m-1}dx(\Delta + x^n)^\lambda$ in seriem semper convergentem. Ubi simul plura insignia artificia circa serierum summationem explicantur, M. S. Acad. exhib. 1779; Inst. calc. int. IV, p. 60—77. — Auf diese Arbeit bezieht sich die Schrift von Fuß: De resolutione formulae integralis $\int x^{m-1}dx(\Delta + x^n)^\lambda$ in seriem semper convergentem; ubi simul serierum quarundam summatio directa traditur (1797), Nova Acta Acad. Petrop. XV, 1799—1802 (publ. 1806), p. 55—70, sowie die Schrift von Pfaff: Observationes analyticae ad L. Euleri Institutiones calculi integralis, Vol. IV, Suppl. II et IV (1797), Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793 (publ. 1798), Hist., p. 37—57, wo auch die folgende allgemeine Entwicklung aufgestellt wird:

$$\int y x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} y - \frac{1}{(m+1)(m+2)} x^{m+2} y' - \cdots.$$

[1]) Mémoires donnés à l'Académie royale des sciences, non imprimés dans leur temps, Paris 1764. [2]) Mémoire sur les approximations des formules, qui sont fonctions de très grands nombres, Mém. Acad. Paris 1782 (publ. 1785), p. 1—88, 1783 (publ. 1786), p. 423—467; Oeuvres X, Paris 1894, p. 207—291, 293—338.

wobei dx rechts als konstant angesehen wird, ferner:

$$x = \vartheta + \frac{t}{1!}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} + \frac{t^3}{3!}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{t=0} + \cdots$$

$$= \vartheta + \frac{t}{1!}U + \frac{t^2}{2!}\frac{UdU}{d\vartheta} + \frac{t^3}{3!}\frac{Ud(UdU)}{d\vartheta^2} + \cdots,$$

woraus folgt:

$$dx = Udt\left[1 + \frac{t}{1!}\frac{dU}{d\vartheta} + \frac{t^2}{2!}\frac{d(UdU)}{d\vartheta^2} + \cdots\right],$$

und:

$$\int_\vartheta^\xi y dx = UY\left[\int_0^\infty e^{-t}dt + \frac{1}{1!}\frac{dU}{d\vartheta}\int_0^\infty te^{-t}dt + \frac{1}{2!}\frac{d(UdU)}{d\vartheta^2}\int_0^\infty t^2e^{-t}dt + \cdots\right],$$

wo ξ den Nullwert von y bedeutet. Es ist aber:

$$\int_0^\infty e^{-t}dt = 1, \quad \int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!,$$

folglich:

$$\int_\vartheta^\xi y dx = UY\left[1 + \frac{dU}{d\vartheta} + \frac{d(UdU)}{d\vartheta^2} + \cdots\right].$$

Setzt man analog:

$$y(\vartheta') = Y', \quad v(\vartheta') = U',$$

so hat man:

$$\int_{\vartheta'}^\xi y dx = U'Y'\left[1 + \frac{dU'}{d\vartheta'} + \frac{d(U'dU')}{d\vartheta'^2} + \cdots\right],$$

folglich:

$$\int_\vartheta^{\vartheta'} y dx$$

$$= UY\left[1 + \frac{dU}{d\vartheta} + \frac{d(UdU)}{d\vartheta^2} + \cdots\right] - U'Y'\left[1 + \frac{dU'}{d\vartheta'} + \frac{d(U'dU')}{d\vartheta'^2} + \cdots\right].$$

Da:

$$v = \frac{1}{\frac{s}{u}\frac{du}{dx} + \frac{s'}{u'}\frac{du'}{dx} + \cdots + \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx}},$$

so ist, wenn $s, s', \ldots$ sehr groß sind, v sehr klein; sind $s, s', \ldots$ von gleicher Ordnung wie $\frac{1}{\alpha}$, wo α sehr klein ist, so ist v von der Ordnung von α, und $\frac{dv}{dx}, \frac{d^2v}{dx^2}, \ldots$ sind von den Ordnungen von $\alpha^2, \alpha^3, \ldots$, was nach Laplace die Konvergenz der gefundenen Reihen sicherstellt.

F. Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen.

Diese schwierigen Fragen, welche den Scharfsinn der gegenwärtigen Mathematiker geprüft haben, wurden von Euler ganz einfach behandelt.[1]) Ist P, sagt er[2]), eine Funktion von z, u, und setzt man:

$$\int P dz = S,$$

so ist:

(4) $$\int \frac{\partial P}{\partial u} dz = \frac{\partial S}{\partial u};$$

man hat nämlich:

$$P = \frac{\partial S}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial z},$$

woraus (4) folgt. Es ist ferner:

(5) $$\int S du = \int dz \int P du;$$

setzt man nämlich:

$$\int S du = V,$$

so folgt:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = S = \int P dz, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial u} = \frac{\partial S}{\partial z} = P,$$

also:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \int P du,$$

woraus sich (5) ergibt.[3])

Später stellte Euler die folgenden Sätze auf[4]):

---

[1]) Die Differentiation unter dem Integralzeichen wurde schon von Leibniz gebraucht (diese Vorl., III², S. 231). [2]) Nova methodus quantitates integrales determinandi, Novi Comm. Acad. Petrop. XIX, 1774 (publ. 1775), p. 66—102; Inst. calc. int. IV, p. 260—294. [3]) Fontaine (a. a. O.) beweist diesen Satz wie folgt. Es ist:

$$\int \mu' dx' - \int \mu dx = d\int \mu dx,$$

andererseits hat man:

$$\int \mu' dx' - \int \mu dx = \int (\mu' dx' - \mu dx) = \int d(\mu dx),$$

also:

$$d\int \mu dx = \int d(\mu dx).$$

[4]) Uberior explicatio methodi singularis nuper expositae, integralia alias maxime abscondita investigandi (1776), Nova Acta Acad. Petrop. IV, 1786 (publ. 1789), p. 17—54. — De insignibus proprietatibus formularum integralium praeter binas variables etiam earum differentialia cujuscunque ordinis involventium (1777), Nova Acta Acad. Petrop. IX, 1791 (publ. 1795), p. 81—97.

1. Es ist für jede Funktion V:

$$\int^{(\mu)} \frac{\partial^\nu V}{\partial p^\nu} dx^\mu = \frac{\partial^\nu}{\partial p^\nu} \int^{(\mu)} V dx^\mu, \quad \int^{(\mu)} dx^\mu \int^{(\nu)} V dp^\nu = \int^{(\nu)} dp^\nu \int^{(\mu)} V dx^\mu.$$

2. Setzt man $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, ..., ist ferner Z eine Funktion von $x, y, p, q, \ldots$, und:

$$V dx - dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy + \frac{\partial Z}{dp} dp + \frac{\partial Z}{\partial q} dq + \cdots$$
$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + p \frac{\partial Z}{\partial y} + q \frac{\partial Z}{\partial p} + r \frac{\partial Z}{\partial q} + \cdots\right) dx,$$

so folgt:

$$\int \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} V}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial p^\gamma \partial q^\delta \partial r^\varepsilon \partial s^\zeta} dx = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial p^\gamma \partial q^\delta \partial r^\varepsilon \partial s^\zeta}$$
$$+ \gamma \int \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta+1} \partial p^{\gamma-1} \partial q^\delta \partial r^\varepsilon \partial s^\zeta} dx + \delta \int \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial p^{\gamma+1} \partial q^{\delta-1} \partial r^\varepsilon \partial s^\zeta} dx$$
$$+ \varepsilon \int \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial p^\gamma \partial q^{\delta+1} \partial r^{\varepsilon-1} \partial s^\zeta} dx + \zeta \int \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial p^\gamma \partial q^\delta \partial r^{\varepsilon+1} \partial s^{\zeta-1}} dx.$$

G. Vielfache Integrale.

Euler ist wohl der erste, der sich mit vielfachen Integralen beschäftigte. In einer im Jahre 1770 erschienenen Abhandlung[1]) stellt er vor allem die Bedeutung der Bezeichnung $\int\int Z dx dy$ fest, wo Z eine Funktion von x, y ist, und bemerkt, daß:

$$\int\int Z dx dy = V + X + Y$$

ist, wo V eine bestimmte Funktion von x, y bezeichnet, während X, Y willkürliche Funktionen von x bzw. y darstellen. Die Berechnung von V kann auf zweifache Weise geschehen; es ist nämlich:

$$\int\int Z dx dy = \int dx \int Z dy = \int dy \int Z dx.$$

Handelt es sich aber um die Berechnung einer krummen Fläche oder eines Volumens (oder, wie man heute sagen würde, um die Integration über einen bestimmten Bereich), so muß bei der Auswertung des Integrales unter der Form:

[1]) De formulis integralibus duplicatis, Novi Comm. Acad. Petrop. XIV, 1769 (publ. 1770), p. 72—103; Inst. calc. int. IV, p. 416—445. Freilich hatte Euler auch früher Doppelintegrale betrachtet (diese Vorl., III², S. 657, 855).

$$\int dx \int Z dy$$

die Integration nach y zwischen solchen Grenzen erstreckt werden, die, den Fall eines rechtwinkligen Integrationsbereiches ausgenommen, von x abhängig sind, und sich durch Auflösung der Gleichung der Begrenzung nach y ergeben. Dagegen sind die Grenzen der zweiten Integration konstant; sie sind die äußersten Werte von x, und ergeben sich aus der soeben erwähnten Gleichung, wenn man $dx = 0$ setzt; mit anderen Worten, man muß, wenn $f(x, y) = 0$ die Gleichung der Begrenzung ist, y zwischen $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ eliminieren und dann nach x auflösen.

Nachdem Euler auf diese Weise die Grundlage der Theorie der vielfachen Integrale gewonnen hat, kommt er auf das Problem von der Transformation. Dazu bedient er sich, dem Wesen nach, derselben Methode, die in den heutigen Lehrbüchern üblich ist. Er bemerkt, daß, wenn man:

$$x = f + tm + u\sqrt{1 - m^2}, \quad y = g + t\sqrt{1 - m^2} - um$$

setzt, das Element der Basis (so nennt Euler den Integrationsbereich), das früher $dxdy$ war, jetzt durch $dtdu$ dargestellt wird. Es ist andererseits nicht $dxdy = dtdu$; aber es gibt keinen Grund dafür, daß die statt $dxdy$ einzusetzende Größe den gleichen Wert haben müsse. Um nun die Transformation auszuführen, setze man zuerst u anstatt y ein, so daß y als eine Funktion von x, u betrachtet werden darf; es folgt hieraus:

(6) $$dy = P dx + Q du.$$

Da aber x während der Integration nach u als konstant anzusehen ist, so reduziert sich dy auf $Q du$, und es ist:

$$\int\int Z dx dy = \int dx \int QZ du = \int du \int QZ dx.$$

Ersetzt man nun x durch seinen Ausdruck in t, u, und ist:

(7) $$dx = R dt + S du,$$

so ergibt sich, da u bei der Integration nach x konstant bleibt:

$$\int\int Z dx dy = \int du \int QZR dt = \int\int QZR dt du.$$

Ist aber:

(8) $$dy = T dt + U du,$$

so folgt wegen (7) aus dem Vergleich von (6) und (8):

$$PR = T, \quad PS + Q = U,$$

und hieraus:

$$QR = RU - ST,$$

also:

$$\iint Z dx dy = \iint Z(RU - ST) dt du.$$

Hätte man die Operationen in umgekehrter Ordnung ausgeführt, so würde sich dasselbe Resultat, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen ergeben; das ist aber nebensächlich, da es sich hier nur um die Bestimmung von absoluten Größen handelt.

Das Problem von der Transformation der vielfachen Integrale bot sich nicht viel später Lagrange[1]) dar; seine Erörterungen sind den Eulerschen sehr ähnlich, man kann aber nicht entscheiden, ob er die Arbeit von Euler kannte oder nicht. Ist:

$$dx = A dp + B dq + C dr,$$
$$dy = D dp + E dq + F dr,$$
$$dz = G dp + H dq + I dr,$$

so muß man beachten, daß man bei der Berechnung der im Produkte $dx dy dz$ vorkommenden Größe dz die Größen x, y als konstant ansehen muß. Aus:

$$A dp + B dq + C dr = 0,$$
$$D dp + E dq + F dr = 0$$

folgt aber:

$$dp = \frac{BF - CE}{AE - BD} dr, \quad dq = \frac{CD - AF}{AE - BD} dr,$$

also:

$$dz = \frac{G(BF - CE) + H(CD - AF) + I(AE - BD)}{AE - BD} dr.$$

Um dann dy zu berechnen, muß man $dx = dz = 0$ setzen; es folgt:

$$dr = 0, \quad A dp + B dq = 0,$$

also:

$$dp = -\frac{B dq}{A}, \quad dy = \frac{AE - BD}{A} dq.$$

Um endlich dx zu berechnen, muß man $dy = dz = 0$ setzen; es folgt:

$$dq = dr = 0, \quad dx = A dp.$$

Aus den erhaltenen Ausdrücken ergibt sich:

$$dx dy dz = [G(BF - CE) + H(CD - AF) + I(AE - BD)] dp dq dr.$$

[1]) Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques, Nouv. Mém. Berlin 1773; Oeuvres III, Paris 1869, p. 619—649.

Der absolute Wert der eingeklammerten Größe ändert sich nicht, wenn man dx, dy, dz beliebig umsetzt; es ist also gleichgültig, in welcher Folge man sich die Integrationen ausgeführt denkt.

Legendre[1]) nahm das Problem wieder auf; er erkannte aber selbst, daß sein Transformationsprinzip mit dem Lagrangeschen übereinstimmt.

Kleinere Beiträge zur Theorie der vielfachen Integrale sind:

a) Die Eulersche Formel[2]):

$$\left[\int^{(\mu)} X dx^\mu\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(\mu - 1)!} \int_0^1 (1 - x)^{\mu - 1} X dx,$$

welche ohne Zweifel aus der (von Euler freilich nicht angegebenen) Rekursionsformel:

$$\int (1 - x)^\nu X dx = (1 - x)^\nu \int X dx + \nu \int (1 - x)^{\nu - 1} dx \int X dx$$

abgeleitet ist;

b) die Frisischen Formeln[3]):

$$\int dx \int y dx = x \int y dx - \int xy dx,$$
$$\int dx \int dx \int y dx = \frac{x^2}{2} \int y dx - x \int xy dx + \frac{1}{2} \int x^2 y dx,$$

usw.

Wollen wir die Ergebnisse des vorliegenden Kapitels in wenige Worte zusammenfassen, so können wir sagen, daß unsere Periode einen nicht unbedeutenden Beitrag zur Integrationstheorie geliefert hat, da wir ihr eine große Entwicklung der Integration der irrationalen und transzendenten Größen und die Klarlegung des Begriffes vom vielfachen Integrale verdanken. Ein weit wichtigerer Zweig der Integralrechnung wurde in dieser Periode geboren, aber diesem soll ein besonderes Kapitel gewidmet werden.

Bestimmte Integrale.

Die bestimmten Integrale bilden nur einen speziellen Fall der unbestimmten. Daß sie nichtsdestoweniger eine besondere Behandlung verdienen, hängt davon ab, daß manche Integrale, die nicht

[1]) Mémoire sur les intégrales doubles, Hist. Acad. Paris 1788 (publ. 1791), p. 454—486. [2]) Uberior explicatio etc. (s. o. S. 737).
[3]) Opera, I. Bd.

durch elementare Funktionen ausdrückbar sind, sich dennoch, zwischen gewissen Grenzen genommen, durch zweckmäßige Kunstgriffe berechnen lassen. Euler hat sich mit der bestimmten Integration mit Vorliebe beschäftigt, und sein Name wird so gut als vollständig das gegenwärtige Kapitel ausfüllen.

Zunächst eine kleine Bemerkung. Die heutige Bezeichnung:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

wird in unserer Periode noch nicht gebraucht (s. o. S. 232); man sagt: „$\int f(x)\,dx$ von a bis b erstreckt", oder: „$\int f(x)\,dx$, wo das Integral für $x = a$ Null ist, und nach der Integration $x = b$ gesetzt werden muß".

Eine andere Bemerkung, die allerdings fast überflüssig erscheint, ist diese: Euler behandelt ohne jedes Bedenken als gewöhnliche Integrale diejenigen, die wir heutzutage als uneigentliche Integrale bezeichnen.

Bei der Unmöglichkeit, alle von Euler berechneten Typen von bestimmten Integralen anzuführen, werden wir die interessantesten unter ihnen erwähnen.

1.[1]) Das Integral:

$$H_n = \int x^{f-1}\,dx\,(1 - x^g)^n$$

läßt, wie man leicht beweist, die folgende Rekursionsformel zu:

$$H_n = \frac{1}{f + ng}\left[ng H_{n-1} + x^f(1 - x^g)^n\right].$$

Setzt man dann:

$$I_n = \int_0^1 x^{f-1}\,dx\,(1 - x^g)^n,$$

so folgt hieraus:

$$I_n = \frac{ng}{f + ng} I_{n-1};$$

es ist aber $I_0 = \frac{1}{f}$, folglich:

$$I_n = \frac{g^n}{f}\,\frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}.$$

Ist g unendlichklein, so kann man setzen:

[1]) Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1}\,dx\,(\log x)^{\frac{m}{n}}$, integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa, Novi Comm. Acad. Petrop. XVI, 1771 (publ. 1772), p. 91—139; Inst. calc. int. IV, p. 78—121.

$$x^g = 1 + g \log x,$$

also:

$$I_n = (-1)^n g^n \int_0^1 x^{f-1} \log x^n\,dx;$$

es ergibt sich daher:

$$\int_0^1 x^{f-1} \log x^n\,dx = (-1)^n \frac{n!}{f^{n+1}}.$$

2.[1]) Man erhält durch Reihenintegration:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} \pm x^{n-m-1}}{1 \pm x^n}\,dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{4n+m} - \frac{1}{4n-m} + \cdots$$

$$\mp \left[\frac{1}{n+m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{3n+m} - \frac{1}{3n-m} + \cdots\right],$$

oder, wegen bekannter Formeln aus der Reihentheorie:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} \pm x^{n-m-1}}{1 \pm x^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} \\ \dfrac{\pi}{n \operatorname{tang} \frac{m\pi}{n}} \end{cases}.$$

Setzt man:

$$m = \lambda - \omega, \quad n = 2\lambda, \quad S = \frac{\pi}{2\lambda \cos \frac{\pi\omega}{2\lambda}}, \quad T = \frac{\pi}{2\lambda} \operatorname{tang} \frac{\pi\omega}{2\lambda},$$

so ergibt sich[2]):

[1]) De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur, Miscell. Berol. VII, 1743, p. 129. — De valore formulae integralis

$$\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n}\,dz,$$

casu quo post integrationem ponitur $z = 1$, Novi Comm. Acad. Petrop. XIX, 1774 (publ. 1775), p. 3—29. — De valore formulae integralis

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (\log z)^{\mu},$$

casu quo post integrationem ponitur $z = 1$, ebenda, p. 30—65; Inst. calc. int. IV, p. 122—154. — Siehe auch Lorgna, Mem. Soc. It. I. [2]) Eine direkte Ableitung dieser Formel findet sich in: Euler, Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidio quantitatum imaginariarum, Acta Acad. Petrop. 1781, P. I (publ. 1784), p. 3—47.

$$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-\omega-1} \pm x^{\lambda+\omega-1}}{1 \pm x^{2\lambda}}\, dx = \begin{cases} S \\ T \end{cases}.$$

Schreiben wir:

$$P(x) = \int_0^x \frac{x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1 + x^{2\lambda}}\, dx,$$

so daß $P(1) = S$, so folgt:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1 + x^{2\lambda}},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \omega} = \frac{-x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1 + x^{2\lambda}} \log x,$$

also:

$$\int \frac{-x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1 + x^{2\lambda}} \log x\, dx = \int \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \omega}\, dx = \frac{\partial P}{\partial \omega},$$

und insbesondere:

$$(1) \qquad \int_0^1 \frac{-x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1 + x^{2\lambda}} \log x\, dx = \frac{\partial S}{\partial \omega} = \left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^2 \frac{\sin \frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\cos^2 \frac{\pi\omega}{2\lambda}}.$$

Man erhält analog:

$$(2) \qquad \int_0^1 \frac{x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1 - x^{2\lambda}} \log x\, dx = -\frac{\partial T}{\partial \omega} = -\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi\omega}{2\lambda}}.$$

Für $\omega = 0$ hat man aus (2):

$$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1 - x^{2\lambda}} \log x\, dx = -\frac{\pi^2}{8\lambda^2},$$

und insbesondere:

$$\int_0^1 \frac{\log x\, dx}{1 - x^2} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Wendet man auf (1), (2) dieselbe Methode an, und so weiter, so kann man das Integral:

$$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-\omega-1} \pm x^{\lambda+\omega-1}}{1 \pm x^{2\lambda}} \log x^\mu\, dx$$

für jeden ganzen positiven Wert von μ berechnen.

Eine Verallgemeinerung eines soeben berechneten Integrales bildet das folgende:

$$S = -\int_0^1 \frac{x^{m-1} \log x\, dx}{(1 - x^n)^{\frac{m}{n}}}.\text{[1]}$$

Es ist:

$$S = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{x^{m-1}\, dx}{(1 - x^n)^{\frac{m}{n}}} \left[(1 - x^n) + \frac{1}{2}(1 - x^n)^2 + \frac{1}{3}(1 - x^n)^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^1 x^{m-1}\, dx \left[(1 - x^n)^{1-\frac{m}{n}} + \frac{1}{2}(1 - x^n)^{2-\frac{m}{n}} + \frac{1}{3}(1 - x^n)^{3-\frac{m}{n}} + \cdots\right].$$

Setzt man aber:

$$\int x^{m-1}\, dx\, (1 - x^n)^\lambda = A \int x^{m-1}\, dx\, (1 - x^n)^{\lambda-1} + B x^m (1 - x^n)^\lambda,$$

so ergibt sich durch Differentiation:

$$A = \frac{\lambda n}{m + \lambda n}, \quad B = \frac{1}{m + \lambda n},$$

also:

$$\int_0^1 x^{m-1}\, dx\, (1 - x^n)^\lambda = \frac{\lambda n}{m + \lambda n} \int_0^1 x^{m-1}\, dx\, (1 - x^n)^{\lambda-1}.$$

Da nun:

$$\int_0^1 x^{m-1}\, dx\, (1 - x^n)^{-\frac{m}{n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

ist, so folgt, wenn man diesen letzten Wert der Kürze wegen mit Δ bezeichnet:

$$\int_0^1 x^{m-1}\, dx\, (1 - x^n)^{k-\frac{m}{n}} = \frac{kn - m}{kn} \int_0^1 x^{m-1}\, dx\, (1 - x^n)^{k-1-\frac{m}{n}}$$

$$= \frac{n - m}{n} \frac{2n - m}{2n} \cdots \frac{kn - m}{kn} \Delta,$$

also:

$$S = \Delta \left[\frac{n - m}{n \cdot n} + \frac{(n - m)(2n - m)}{n \cdot 2n \cdot 2n} + \frac{(n - m)(2n - m)(3n - m)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 3n} + \cdots\right].$$

[1] De integralibus quibusdam inventu difficillimis (1780), Mém. Acad. St.-Pét. VI, 1813—1814 (publ. 1818), p. 30—53.

Setzt man:

$$T(t)=\frac{n-m}{n\cdot n}t^n+\frac{(n-m)(2n-m)}{n\cdot 2n\cdot 2n}t^{2n}+\cdots,\quad T(1)=T,$$

so folgt:

$$S=\Delta T,$$

ferner:

$$t\frac{dT(t)}{dt}=\frac{n-m}{n}t^n+\frac{(n-m)(2n-m)}{n\cdot 2n}t^{2n}+\frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n}t^{3n}+\cdots$$

$$=(1-t^n)^{-\frac{n-m}{n}}-1,$$

also:

$$T=\int_0^1\frac{dt}{t}\left[(1-t^n)^{-\frac{n-m}{n}}-1\right].$$

Für $1-t^n=u^n$ ist:

$$T=\int_0^1\frac{u^{n-1}-u^{m-1}}{1-u^n}\,du.$$

3.[1]) Es ist:

$$\int x^u\,du=\frac{x^u}{\log x},$$

$$\int_0^1 dx\int x^u\,du=\int_0^1\frac{x^u\,dx}{\log x},$$

$$\int x^u\,dx=\frac{x^{u+1}}{u+1},$$

$$\int_0^1 x^u\,dx=\frac{1}{u+1},$$

$$\int du\int_0^1 x^u\,dx=\log(u+1)+C,$$

folglich:

$$\int_0^1\frac{x^u\,dx}{\log x}=\log(u+1)+C. \tag{3}$$

Die willkürliche Konstante ist unendlich; setzt man aber nacheinander $u=m$, $u=n$, so erhält man:

[1]) Nova methodus quantitates integrales determinandi, Novi Comm. Acad. Petrop. XIX, 1774 (publ. 1775), p. 66—102; Inst. calc. int. IV, p. 260—294. — Speculationes analyticae, Novi Comm. Acad. Petrop. XX, 1775 (publ. 1776), p. 59—79.

$$\int_0^1\frac{x^m-x^n}{\log x}\,dx=\log\frac{m+1}{n+1}. \tag{4}$$

Ist allgemeiner:

$$P(x)=Ax^\alpha+Bx^\beta+\cdots,$$

wo:

$$A+B+\cdots=0,$$

oder:

$$P(1)=0,$$

so folgt:

$$\int_0^1\frac{P(x)\,dx}{\log x}=A\log(\alpha+1)+B\log(\beta+1)+\cdots.$$

Ein besonderer Fall dieser letzten Formel ist:

$$\int_0^1\frac{(x-1)^n\,dx}{\log x}=\log(n+1)-\binom{n}{1}\log n+\binom{n}{2}\log(n-1)-\cdots.$$

Aus (4) folgt für $m=ir$, $n=-ir$:

$$\int_0^1\frac{\sin(r\log x)}{\log x}\,dx=\frac{1}{2i}\log\frac{1+ir}{1-ir}=\operatorname{arctg} r.$$

Will man analog $\int_0^1\frac{\cos(r\log x)}{\log x}\,dx$ erhalten, so kann man die Reihenintegration anwenden; man erhält so[1]):

$$\int_0^1\frac{\cos(r\log x)}{\log x}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{\log x}+\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}+\cdots=\int_0^1\frac{dx}{\log x}+\log\sqrt{1+r^2},$$

wobei man beachten muß, daß das rechts vorkommende Integral unendlich ist. Es ergibt sich aber hieraus:

$$\int_0^1\frac{\cos(n\log x)-\cos(m\log x)}{\log x}\,dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+n^2}{1+m^2},$$

[1]) Es ergibt sich:

$$\int\frac{\cos(r\log x)}{\log x}\,dx=\int\left[\frac{1}{\log x}-\frac{r^2}{2!}\log x+\frac{r^4}{4!}\log x^3-\cdots\right]dx;$$

es ist aber:

$$\int_0^1\log x^n\,dx=(-1)^n n!,$$

woraus die im Texte angegebene Formel unmittelbar folgt.

oder auch:

$$\int_0^1 \frac{\sin(p \log x) \cdot \sin(q \log x)}{\log x} dx = \frac{1}{4} \log \frac{1 + (p-q)^2}{1 + (p+q)^2}.$$

Setzt man in (4) $m = s + ir$, $n = s - ir$, so folgt:

$$\int_0^1 \frac{x^s \sin(r \log x)}{\log x} dx = \operatorname{arctg} \frac{r}{s+1}.$$

Die Gleichung (3) läßt sich auch so schreiben:

$$\int_0^1 \frac{x^u dx}{x \log x} = \log u + C.$$

Hieraus folgt durch abermalige Integration nach u:

$$\int_0^1 \frac{x^u dx}{x \log x^2} = \int \log u \, du + Cu + C_1 = u \log u + (C-1) u + C_1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^u dx}{x \log x^3} = \frac{1}{2} u^2 \log u + \frac{2C-3}{4} u^2 + C_1 u + C_2,$$

und allgemein:

$$\int_0^1 \frac{x^u dx}{x \log x^{n+1}} = \frac{1}{n!} u^n \log u + A_0 u^n + A_1 u^{n-1} + \cdots A_{n-1} u + A_n. \tag{5}$$

Da aber die willkürlichen Konstanten unendlichgroß sind, so muß man dieselben fortschaffen; das geschieht durch zweckmäßige Kombination der für n verschiedene Werte $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von u geschriebenen Formel (5). Ist nämlich:

$$\begin{aligned} U_1 &= (u_1 - u_2)(u_1 - u_3) \cdots (u_1 - u_n), \\ U_2 &= (u_2 - u_1)(u_2 - u_3) \cdots (u_2 - u_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_n &= (u_n - u_1)(u_n - u_2) \cdots (u_n - u_{n-1}), \end{aligned}$$

so ergibt sich:

$$\int_0 \frac{dx}{x \log x^{n-1}} \left[\frac{x^{u_1}}{U_1} + \frac{x^{u_2}}{U_2} + \cdots + \frac{x^{u_n}}{U_n}\right]$$
$$= \frac{1}{n-2!} \left[\frac{u_1{}^{n-2} \log u_1}{U_1} + \frac{u_2{}^{n-2} \log u_2}{U_2} + \cdots + \frac{u_n{}^{n-2} \log u_n}{U_n}\right].$$

4.[1]) Von der Formel:

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} \log 2,$$

die einen besonderen Fall einer schon besprochenen Formel bildet (siehe oben 2.), gibt Euler drei Beweise, von denen nur einer hier angeführt werden möge.

Setzt man:

$$\sqrt{1-x^2} = y,$$

so ist:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\log x = \log \sqrt{1-y^2} = -\left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \cdots\right],$$

folglich:

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \cdots\right];$$

es ist aber:

$$\int_0^1 \frac{y^{2h} dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2h-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2h} \frac{\pi}{2},$$

also:

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} + \cdots\right].$$

Andererseits hat man:

$$-\log(1 + \sqrt{1-z^2}) = \int \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}} - \int \frac{dz}{z},$$

und:

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{dz}{z} \left[1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^4 + \cdots\right],$$

oder:

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}} - \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2^2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} z^4 + \cdots + C,$$

folglich:

$$-\log(1 + \sqrt{1-z^2}) = \frac{1}{2^2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} z^4 + \cdots + C,$$

und, wenn man $z = 0$ setzt:

[1]) De integratione formulae $\int \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}}$ ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensa, Acta Acad. Petrop. I, P. II, 1777, p. 3—28; Inst. calc. int. IV, p. 154—182. Ein anderer Beweis findet sich in der oben (S. 745) angeführten Schrift: De integralibus quibusdam etc.

$$C = -\log 2,$$

also:

$$\log \frac{2}{1+\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2^2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} z^4 + \cdots.$$

Setzt man $z = 1$, so ergibt sich:

$$\log 2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} + \cdots,$$

und folglich:

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

5. Eine Anwendung früherer Formeln ist die Berechnung des Integrals[1]):

$$I = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x^b)(1-x^c)}{\log x\,(1-x^n)}\,dx.$$

Euler bemerkt, daß die zu integrierende Funktion für $n = 1$ verschwindet, da der Zähler durch $(1-x)^2$, der Nenner aber durch $(1-x)$ teilbar ist; es folgt hieraus (vgl. oben unter 3.), daß bei der Berechnung von:

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{\log x} [(1 + x^n + x^{2n} + \cdots) \\ - (x^b + x^{b+n} + x^{b+2n} + \cdots) - (x^c + x^{c+n} + x^{c+2n} + \cdots) \\ + (x^{b+c} + x^{b+c+n} + x^{b+c+2n} + \cdots)] \end{aligned}$$

die Integrationskonstante fortfällt. Benutzt man dann die unten (S. 760) anzuführende Formel:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}}{\int_0^1 x^{q-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}} = \frac{(m+p)\,q}{p\,(m+q)} \, \frac{(m+p+n)(q+n)}{(p+n)(m+q+n)} \cdots,$$

so kann man schreiben, wegen (3):

$$I = \log \frac{P}{Q},$$

wo entweder:

---

[1]) De valore formulae integralis $\int \frac{x^{a-1}dx(1-x^b)(1-x^c)}{\log x\,(1-x^n)}$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae, Acta Acad. Petrop. 1777, P. II (publ. 1780), p. 29—47.

$$m = b, \quad p = a + c, \quad q = a,$$

oder:

$$m = c, \quad p = a + b, \quad q = a$$

ist.

6.[1]) Man soll eine Rekursionsformel für das Integral:

$$\Phi_n = \int_0^\xi \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - 2bx + cx^2}} = \int_0^\xi \frac{x^n dx}{R}$$

aufstellen, wobei ξ eine Wurzel der Gleichung $R = 0$ bezeichnet.

Setzen wir allgemein:

$$F_n = \int_0^x \frac{x^n dx}{R},$$

so ist vor allem zu bemerken, daß F_0 sich direkt berechnen läßt; man findet nämlich:

für $c > 0$,

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{c}} \log \frac{b + a\sqrt{c}}{b - cx + \sqrt{c\,(a^2 - 2bx + cx^2)}};$$

für $c < 0$,

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{-c}} \left[\arcsin \frac{b - cx}{\sqrt{b^2 - a^2 c}} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2 c}} \right].$$

Führt man die neue Veränderliche:

$$t_0 = R - a$$

ein, so ist:

$$dt_0 = \frac{(-b + cx)\,dx}{R},$$

also[2]):

(6) $$t_0 = -bF_0 + cF_1,$$

oder:

$$F_1 = \frac{b}{c} F_0 + \frac{t_0}{c},$$

und folglich:

$$\Phi_1 = \frac{b}{c} \Phi_0 - \frac{a}{c}.$$

---

[1]) Speculationes super formula integrali $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - 2bx + cx^2}}$ ubi simul egregiae observationes circa fractiones continuas occurrunt, Acta Acad. Petrop. 1782, P. II (publ. 1786), p. 62—84. Ein Teil dieser Schrift wurde in Inst. calc. int. IV, p. 31—36 abgedruckt unter dem Titel: De integratione formulae irrationalis $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - 2bx + cx^2}}$. [2]) Die Integrationskonstante in den Gleichungen (6), (7), (8) ist gleich Null, weil beide Seiten für $x = 0$ verschwinden.

Führt man dagegen die Veränderliche:

$$t_1 = xR$$

ein, so ergibt sich:

$$dt_1 = \left(R + \frac{x(-b+cx)}{R}\right)dx = \frac{a^2 - 3bx + 2cx^2}{R}\,dx,$$

folglich:

$$t_1 = a^2 F_0 - 3bF_1 + 2cF_2, \tag{7}$$

und insbesondere:

$$0 = a^2\Phi_0 - 3b\Phi_1 + 2c\Phi_2,$$

woraus folgt:

$$\Phi_2 = \frac{3b}{2c}\Phi_1 - \frac{a^2}{2c}\Phi_0 = \frac{3b^2 - a^2c}{2c^2}\Phi_0 - \frac{3ab}{2c^2}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so findet man für jeden Wert von n:

$$\Phi_n = p_n\Phi_0 + q_n.$$

Das Gesetz der Koeffizienten p_n, q_n läßt sich folgendermaßen ermitteln. Setzt man:

$$t_n = x^n R,$$

so ergibt sich:

$$dt_n = \left[nx^{n-1}R + x^n\frac{-b+cx}{R}\right]dx$$

$$= \frac{1}{R}\left[na^2x^{n-1} - (2n+1)bx^n + (n+1)cx^{n+1}\right]dx,$$

also:

$$x^nR = t_n = na^2F_{n-1} - (2n+1)bF_n + (n+1)cF_{n+1}, \tag{8}$$

und für $x = \xi$:

$$0 = na^2\Phi_{n-1} - (2n+1)b\Phi_n + (n+1)c\Phi_{n+1},$$

oder:

$$\Phi_{n+1} = \frac{1}{(n+1)c}\left[(2n+1)b\Phi_n - na^2\Phi_{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)c}\left[\{(2n+1)bp_n - na^2p_{n-1}\}\Phi_0 + \{(2n+1)bq_n - na^2q_{n-1}\}\right],$$

woraus folgt:

$$p_{n+1} = (2n+1)bp_n - na^2p_{n-1}, \quad q_{n+1} = (2n+1)bq_n - na^2q_{n-1}.$$

7. Das Integral[1]):

[1]) Methodus facilis inveniendi integrale hujus formulae

$$\int\frac{dx}{x}\,\frac{x^{n+p} - 2x^n\cos\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n\cos\vartheta + 1},$$

casu quo post integrationem ponitur vel $x = 1$ vel $x = \infty$ (1776), Nova Acta Acad. Petrop. III, 1785 (publ. 1788), p. 3—24.

$$\int_0^1\frac{dx}{x}\,\frac{x^{n+p} - 2x^n\cos\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n\cos\vartheta + 1},$$

wo $p < n$, wird durch Zerlegung der zu integrierenden Funktion in einfache Brüche berechnet, nachdem man bemerkt hat, daß die Nullwerte des Nenners durch:

$$\omega = \frac{\vartheta}{n},\ \frac{\vartheta + 2\pi}{n},\ \frac{\vartheta + 4\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\vartheta + 2(n-1)\pi}{n}$$

gegeben sind, wenn:

$$x = \cos\omega + i\sin\omega$$

ist. Man findet ferner:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x}\,\frac{x^{n+p} - 2x^n\cos\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n\cos\vartheta + 1} = 2\int_0^1\frac{dx}{x}\,\frac{x^{n+p} - 2x^n\cos\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n\cos\vartheta + 1}.$$

Unter den interessanten Bemerkungen, zu denen dieses Integral Anlaß bietet, möge eine hervorgehoben werden. Die zu integrierende Funktion verändert sich nicht, wenn man ϑ durch $\vartheta + 2k\pi$ ersetzt, während der Wert des Integrales ein anderer wird. Welcher ist, fragt sich Euler, der wahre Wert des Integrales? Alle sind es, antwortet er, denn solche Integrale sind unendlichvieldeutige Funktionen, wie sich aus dem Beispiel von $\int\frac{dx}{1+x^2}$ ersehen läßt.

8.[1]) In einem Schreiben an Lagrange vom 26. Januar 1775 teilte ihm Euler die Formel:

$$\int_0^1\frac{(x-1)\,dx}{\log x} = \log 2$$

mit. Lagrange bewies diese Formel und legte Euler die weiteren vor:

$$\int_a^b\frac{x^n - x^m}{\log x}\,\frac{dx}{x} = \int_m^n(b^y - a^y)\,\frac{dy}{y},$$

$$\int_0^\infty\frac{(x^n - x^m)\,dx}{(1+x^r)\log x} = \log\frac{\operatorname{tang}\frac{(n+1)\pi}{2r}}{\operatorname{tang}\frac{(m+1)\pi}{2r}}.[2])$$

[1]) Lagrange, Oeuvres XIV, Paris 1892, p. 241, 242. — Euler, Observationes in aliquot theoremata illustris de la Grange, Opuscula anal. II, Petersburg 1785, p. 16—41. — Siehe auch: Euler, De iterata integratione formularum integralium dum aliquis exponens pro variabili assumitur (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VII, 1789 (publ. 1793), p. 64—82.

[2]) Über dieses und einige damit verwandte Integrale siehe auch: Euler, Uberior

Die erste Gleichung bewies Euler zunächst durch Reihenentwicklung, dann auf folgende Weise. Aus:

$$\int_a^b x^{y-1}dx = \frac{b^y - a^y}{y}, \quad \int_0^n x^y dy = \frac{x^n - 1}{\log x},$$

$$\int_0^n dy \int_a^b x^{y-1}dx = \int_a^b \frac{dx}{x} \int_0^n x^y dy$$

folgt:

$$\int_0^n (b^y - a^y)\frac{dy}{y} = \int_a^b \frac{x^n - 1}{x \log x}.$$

Es ist analog:

$$\int_0^m (b^y - a^y)\frac{dy}{y} = \int_a^b \frac{x^m - 1}{x \log x},$$

woraus die verlangte Formel unmittelbar folgt.

Was die zweite Lagrangesche Gleichung betrifft, geht Euler von der Relation:

$$\int_0^\infty \frac{x^{k+n}}{1+x^{2k}}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2k\cos\frac{n\pi}{2k}}$$

aus. Integriert man nach n, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{k+n} - x^k}{1+x^{2k}}\frac{dx}{x\log x} = \frac{\pi}{2k}\int_0^n \frac{dn}{\cos\frac{n\pi}{2k}} = \log\operatorname{tang}\frac{\pi(k+n)}{4k};$$

setzt man hier statt $k+n$ zuerst $n+1$, dann $m+1$, statt $2k$ beidemal r, und subtrahiert, so ergibt sich die gesuchte Formel.

9.[1]) Wir begnügen uns damit, die Untersuchungen Eulers über die Integrale:

---

explicatio methodi singularis nuper expositae, integralia alias maxime abscondita investigandi (1776), Nova Acta Acad. Petrop. IV, 1786 (publ. 1789), p. 17—54.

[1]) Investigatio formulae integralis $\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n}$, casu quo post integrationem statuitur $x = \infty$, Opusc. an. II, p. 42—54; Inst. calc. int. IV, p. 346—357. — Investigatio valoris integralis $\int \frac{x^{m-1}dx}{1-2x^k\cos\vartheta + x^{2k}}$ a termino $x=0$ usque ad $x=\infty$ extensi, Opusc. an. II, p. 55—75; Inst. calc. int. IV, p. 358—378.

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n}, \quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-2x^k\cos\vartheta + x^{2k}} \;{}^{1})$$

nur kurz zu erwähnen. Mit seiner gewöhnlichen Gewandtheit faßt Euler einerseits alle logarithmischen, andererseits alle zyklometrischen Bestandteile jedes Integrals zusammen, zeigt, daß die ersteren eine verschwindende Summe liefern, und berechnet die Summe der letzteren; dadurch findet er für $m < k$ und für $m < 2k$ beziehungsweise:

$$(9)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^k} = \frac{\pi}{k\sin\frac{m\pi}{k}} \quad \text{(s. o. unter 8)}, \\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-2x^k\cos\vartheta + x^{2k}} = \frac{\pi\sin\frac{m(\pi-\vartheta)+\vartheta k}{k}}{k\sin\vartheta\sin\frac{m\pi}{k}}. \end{cases}$$

Setzt man ferner:

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n} = \frac{Ax^m}{(1+x^k)^{n-1}} + B\int\frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^{n-1}},$$

so ergibt sich durch Differentiation:

$$A = \frac{1}{(n-1)k}, \quad B = 1 - \frac{m}{(n-1)k},$$

folglich für $m < k$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n} = \left(1 - \frac{m}{(n-1)k}\right)\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^{n-1}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man wegen der ersten Formel (9):

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n} = \left(1-\frac{m}{k}\right)\left(1-\frac{m}{2k}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{(n-1)k}\right)\frac{\pi}{k\sin\frac{m\pi}{k}}.$$

10.[2]) In einer Arbeit mit dem Titel: Methodus inveniendi etc. behandelt Euler gewisse Probleme, von denen wir eins als Beispiel wiedergeben.

---

[1]) Über das erstere Integral siehe auch: Mascheroni, Adnotationes etc.
[2]) Methodus inveniendi formulas integrales quae certis casibus datam inter se teneant rationem, Opusc. an. II, p. 178—216; Inst. calc. int. IV, p. 378—415.

Man verlangt, eine solche Funktion v von x zu finden, daß für jeden Wert von n die folgende Relation besteht:

$$\int_0^1 x^n\,dv = \frac{\alpha n + a}{\beta n + b}\int_0^1 x^{n-1}\,dv.$$

Wir setzen, der Einfachheit wegen, $\alpha = \beta = 1$ voraus. Wenn die geschriebene Relation gelten soll, so muß sein:

$$\int x^n\,dv = \frac{n+a}{n+b}\int x^{n-1}\,dv + V, \tag{10}$$

wo V eine Funktion von x bezeichnet, die für $x = 0$ und für $x = 1$ verschwindet. Es ergibt sich hieraus durch Differentiation:

$$(n+b)x^n\,dv = (n+a)x^{n-1}\,dv + (n+b)\,dV,$$

woraus erhellt, daß dV den Faktor x^{n-1} und folglich V den Faktor x^n enthalten muß. Setzt man daher:

$$(n+b)\,V = x^n Q,$$

so ist:

$$(n+b)x\,dv = (n+a)\,dv + n\,Q\,dx + x\,dQ,$$

eine Relation, die erfüllt wird, wenn man setzt:

$$(x-1)\,dv = Q\,dx, \quad (bx-a)\,dv = x\,dQ.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{(bx-a)\,dx}{x(x-1)} = \left(\frac{a}{x} + \frac{b-a}{x-1}\right)dx,$$

also:

$$Q = Cx^a(x-1)^{b-a},$$

und:

$$V = Cx^{n+a}(x-1)^{b-a},$$

eine Funktion, die, wenn $b > a$, für $x = 0$ und für $x = 1$ wirklich verschwindet; ferner:

$$dv = \frac{Q\,dx}{x-1} = Cx^a(x-1)^{b-a-1}\,dx.$$

Die Rekursionsformel (10) wird also:

$$\int x^{n+a}(x-1)^{b-a-1}\,dx$$

$$= \frac{n+a}{n+b}\int x^{n+a-1}(x-1)^{b-a-1}\,dx + \frac{1}{n+b}\,x^{n+a}(x-1)^{b-a},$$

woraus folgt:

$$\int_0^1 x^{n+a}(x-1)^{b-a-1}\,dx = \frac{n+a}{n+b}\int_0^1 x^{n+a-1}(x-1)^{b-a-1}\,dx.$$

Das Problem läßt sich in zweifacher Richtung verallgemeinern, indem man sich entweder die Relation:

$$\int_0^1 x^n\,dv = \frac{(\alpha n + a)(\alpha' n + a')}{(\beta n + b)(\beta' n + b')}\int_0^1 x^{n-1}\,dv$$

oder die Relation:

$$(\alpha n + a)\int_0^1 x^n\,dv = (\beta n + b)\int_0^1 x^{n+1}\,dv + (\gamma n + c)\int_0^1 x^{n+2}\,dv \tag{11}$$

vorlegt. Beide Fragen werden von Euler in der angeführten Arbeit berücksichtigt; die zweite läßt eine Anwendung auf die Theorie der Kettenbrüche zu. Ist nämlich der Kettenbruch:

$$\varphi = \beta + b + \cfrac{(\gamma + c)(2\alpha + a)}{2\beta + b + \cfrac{(2\gamma + c)(3\alpha + a)}{3\beta + b + \cdots}}$$

gegeben, und läßt sich ein Integral:

$$I_n = \int_0^1 x^n\,dv$$

ermitteln, welches die Gleichung (11) erfüllt, so ist:

$$\varphi = \frac{(\alpha + a)I_1}{I_2}.$$

11.[1]) Zur Berechnung von:

$$\int_0^1 dx\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x}\right)$$

gibt Euler fünf Methoden, auf welche wir einzugehen nicht für nötig halten.

---

[1]) Evolutio formulae integralis $\int dx\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x}\right)$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae (1776), Nova Acta Acad. Petrop. IV, 1786 (publ. 1789), p. 3—16.

12.[1]) Durch Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen berechnet Euler die Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{\Delta} \frac{\log x\,dx}{x}, \quad \int_0^\infty \frac{x^p}{\Delta} \frac{dx}{x \log x},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \frac{\log x\,dx}{x}, \quad \int_0^1 \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \frac{dx}{x \log x},$$

wo:

$$\Delta = \begin{cases} x^n + 2\cos\vartheta + x^{-n}, \\ x^{-n}(1 + x^n), \\ x^n + \left(f + \frac{1}{f}\right) + x^{-n}, \end{cases}$$

ferner:

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{x^n + x^{-n}} \frac{dx}{x}, \quad \int_0^1 \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + x^{-n}} \frac{dx}{x}, \qquad \text{usw.}$$

13. Eine Verallgemeinerung der sogenannten Betafunktion (diese Vorl., III[2], S. 653) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ bildet das Integral:

$$(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-q}{n}}},$$

welches sich auf das frühere für $n = 1$ reduziert. Diesem Integrale widmet Euler drei Abhandlungen.[2])

---

[1]) Innumera theoremata circa formulas integrales quarum demonstratio vires analyseos superare videtur (1776), Nova Acta Acad. Petrop. V, 1787 (publ. 1789), p. 3—26. [2]) Observationes circa integralia formularum $\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ posito post integrationem $x = 1$, Misc. Taur. III, 1762—1765 (publ 1766), P. II, p. 156—177. — Comparatio valorum formulae integralis $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae, Nova Acta Acad. Petrop. V, 1787 (publ. 1789), p. 86—117; Inst. calc. int. IV, p. 295—326. — Additamentum ad dissertationem praecedentem, de valoribus formulae integralis $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensae, Nova Acta Acad. Petrop. V, 1787 (publ. 1789), p. 118 bis 129; Inst. calc. int. IV, p. 326—337.

Es ist vor allem zu bemerken, daß man p und q kleiner als n machen kann vermittels der Formeln[1]):

$$(12) \qquad (p + n, q) = \frac{p}{p+q}(p, q), \quad (p, q + n) = \frac{q}{p+q}(p, q);$$

ferner ist:

$$(13) \qquad (p, q) = (q, p), \quad (p, n) = \frac{1}{p}, \quad (n, q) = \frac{1}{q}.$$

Durch wiederholte Anwendung der ersten Formel (12) ergibt sich:

$$(p, q) = \frac{p+q}{p}(n + p, q) = \frac{p+q}{p}\frac{n+p+q}{n+p}(2n + p, q) = \cdots$$
$$= \frac{p+q}{p}\frac{n+p+q}{n+p}\cdots\frac{jn+p+q}{jn+p}((j+1)n + p, q),$$

wo $j = \infty$. Desgleichen ist:

$$(r, q) = \frac{r+q}{r}\frac{n+r+q}{n+r}\cdots\frac{jn+r+q}{jn+r}((j+1)n + r, q),$$

---

[1]) Die Formeln (12), (13) lassen sich folgendermaßen ableiten. Es ist:

$$(p+n, q) + (p, q+n) = \int_0^1 \left[x^{p+n-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}} + x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}}\right]dx$$

$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}[x^n + (1-x^n)]\,dx = (p, q),$$

$$-q(p+n, q) + p(p, q+n)$$

$$= \int_0^1 \left[-qx^{p+n-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}} + px^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}}\right]dx = \left[x^p(1-x^n)^{\frac{q}{n}}\right]_0^1 = 0,$$

woraus sich die Formeln (12) unmittelbar ergeben.

Setzt man ferner in (p, q):

$$x = (1-y^n)^{\frac{1}{n}},$$

so folgt nach einfachen Umformungen:

$$(p, q) = -\int_1^0 y^{q-1}(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}}dy = \int_0^1 y^{q-1}(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}}dy = (q, p).$$

Endlich ist:

$$(p, n) = \int_0^1 x^{p-1}dx = \left[\frac{x^p}{p}\right]_0^1 = \frac{1}{p},$$

$$(n, q) = (q, n) = \frac{1}{q}.$$

also:

$$\frac{(p, q)}{(r, q)} = \frac{r(p+q)}{p(r+q)} \frac{(n+r)}{(n+p)} \frac{(n+p+q)}{(n+r+q)} \cdots \text{[1]},$$

woraus die Relation:

$$\frac{(a, b)}{(a+c, b)} = \frac{(a, c)}{(a+b, c)},$$

unmittelbar folgt, die zu einer Fülle von weiteren, hier nicht anzuführenden Beziehungen Anlaß gibt.

Das Integral (p, q) läßt sich durch eine konvergente Reihe ausdrücken; es ist nämlich:

$$\begin{aligned}(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1}\left(1 + \frac{n-q}{n} x^n + \frac{n-q}{n} \frac{2n-q}{2n} x^{2n} + \cdots\right) dx \\ &= \left[\frac{x^p}{p} + \frac{n-q}{n} \frac{x^{n+p}}{n+p} + \frac{n-q}{n} \frac{2n-q}{2n} \frac{x^{2n+p}}{2n+p} + \cdots\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{p} + \frac{n-q}{n} \frac{1}{n+p} + \frac{n-q}{n} \frac{2n-q}{2n} \frac{1}{2n+p} + \cdots.\end{aligned}$$

Es ist aber von Interesse, eine rascher konvergierende Reihe zu erhalten. Dazu muß man beachten, daß:

$$\begin{aligned}(p, q) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}}^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}} dx - \int_{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}}^0 y^{q-1}(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}} dy \text{[2]} \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}} dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} y^{q-1}(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{2^p}}\left[\frac{1}{p} + \frac{n-q}{2n} \frac{1}{n+p} + \frac{n-q}{2n} \frac{2n-q}{4n} \frac{1}{2n+p} + \cdots\right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt[n]{2^q}}\left[\frac{1}{q} + \frac{n-p}{2n} \frac{1}{n+q} + \frac{n-p}{2n} \frac{2n-p}{4n} \frac{1}{2n+q} + \cdots\right],\end{aligned}$$

[1] Der Wert von $\frac{(p, q)}{(r, q)}$ war von Euler schon im 1. Bande seiner Integralrechnung angegeben worden. [2] Siehe die vorletzte Anmerkung.

worin die Glieder der beiden Reihen rascher abnehmen als diejenigen der Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots.$$

14.[1] Man erhält durch partielle Integration:

$$\int \left(\log \frac{1}{x}\right)^n dx = x\left(\log \frac{1}{x}\right)^n + n \int \left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx;$$

es ergibt sich aber durch wiederholte Anwendung der l'Hospitalschen Regel:

$$\left[x\left(\log \frac{1}{x}\right)^n\right]_{x=0} = 0,$$

also:

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^n dx = n \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx,$$

woraus folgt:

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^n dx = n!$$

15.[2] Ist:

$$\Phi = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots = b_0 + b_1 \cos\varphi + b_2 \cos\varphi^2 + \cdots,$$

so findet Euler durch Berechnung des Integrales:

$$\int_0^1 \cos p\varphi \cos\varphi^q d\varphi$$

die Beziehung:

$$2^k a_h = b_h + \frac{h+2}{4} b_{h+2} + \frac{(h+4)(h+3)}{4 \cdot 8} b_{h+4} + \cdots,$$

wo $k = h$ oder $k = h - 1$, je nachdem $h = 0$ oder $h > 0$ ist.

16.[3] Man findet leicht:

[1] De vero valore formulae integralis $\int dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^n$ a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = 1$ extensae (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VIII, 1790 (publ. 1794), p. 15—31. [2] Disquisitio ulterior de seriebus secundum multipla cujusdam anguli progredientibus (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793 (publ. 1798), p. 114—132. [3] Theorema maxime memorabile circa formulam integralem $\int \frac{d\varphi \cos\lambda\varphi}{(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{n+1}}$, M. S. Acad. exhib. 1778; Inst. calc. int. IV, p. 194—217. — Disquisitio conjecturalis super formula integrali $\int \frac{d\varphi \cos i\varphi}{(\alpha + \beta\cos\varphi)^n}$, M. S. Acad.

$$\int \frac{d\varphi}{\alpha + \beta \cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \arccos \frac{\alpha \cos\varphi + \beta}{\alpha + \beta \cos\varphi},$$

also:

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\alpha + \beta\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}},$$

und hieraus:

$$I_0 = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1 - a^2},$$

wo:

$$\Delta = 1 + a^2 - 2a\cos\varphi.$$

Es ist ferner identisch:

$$d\varphi = (1 + a^2)\frac{d\varphi}{\Delta} - 2a\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta},$$

woraus durch Integration folgt:

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \frac{1 + a^2}{2a} I_0 - \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi a}{1 - a^2}.$$

Man kann demnach vermuten, es sei allgemein:

$$I_\lambda = \int_0^\pi \frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^\lambda}{1 - a^2}.$$

Diese Formel läßt sich auf folgende Weise bestätigen. Nehmen wir an, es sei:

$$I_{\lambda-1} = \frac{\pi a^{\lambda-1}}{1 - a^2}, \quad I_\lambda = \frac{\pi a^\lambda}{1 - a^2}.$$

Man hat identisch:

$$\cos\lambda\varphi\, d\varphi = (1 + a^2)\frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi}{\Delta} - 2a\frac{\cos\lambda\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta}$$

$$= (1 + a^2)\frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi}{\Delta} - a\frac{\cos(\lambda+1)\varphi\, d\varphi}{\Delta} - a\frac{\cos(\lambda-1)\varphi\, d\varphi}{\Delta},$$

und hieraus durch bestimmte Integration von 0 bis π:

$$0 = (1 + a^2) I_\lambda - a I_{\lambda+1} - a I_{\lambda-1},$$

oder:

---

exhib. 1778; Inst. calc. int. IV, p. 217—242. — Demonstratio theorematis insignis per conjecturam eruti, circa integrationem formulae

$$\int \frac{d\varphi \cos i\varphi}{(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{n+1}},$$

M. S. Acad. exhib. 1778; Inst. calc. int. IV, p. 242—259.

$$I_{\lambda+1} = \frac{1 + a^2}{a} I_\lambda - I_{\lambda-1} = \frac{\pi a^{\lambda+1}}{1 - a^2}.$$

Diese Formel ist aber nur ein besonderer Fall einer anderen, die Euler durch Induktion beweist:

$$\int_0^\pi \frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi}{\Delta^{n+1}} = \frac{\pi a^\lambda}{(1 - a^2)^{2n+1}}\left[\binom{n-\lambda}{0}\binom{n+\lambda}{\lambda} + \binom{n-\lambda}{1}\binom{n+\lambda}{\lambda+1}a^2 + \cdots\right].$$

17.[1]) Ein geometrisches Problem führte Euler zu den Integralen:

(14) $$\int_0^\infty \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\varphi}}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\varphi}}.$$

Die Berechnung derselben gründet er auf die später als Eulersches Integral zweiter Gattung bezeichnete Funktion:

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \Gamma(n).$$

Man findet leicht die Rekursionsformel:

(15) $$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n);$$

es ergibt sich ferner durch die Substitution $x = ky$:

$$\int_0^\infty y^{n-1} e^{-ky} dy = \frac{\Gamma(n)}{k^n}.$$

Die Größe k darf nicht negativ, wohl aber imaginär sein. Ist dann $k = p \pm iq$, und setzt man:

$$p = r\cos\alpha, \quad q = r\sin\alpha,$$

oder:

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{q}{p},$$

so folgt:

$$\int_0^\infty y^{n-1} e^{-py}(\cos qy \mp i\sin qy)\, dy = \frac{\Gamma(n)}{(p \pm iq)^n} = \frac{\Gamma(n)}{r^n}(\cos n\alpha \mp i\sin n\alpha),$$

also:

---

[1]) De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum, M. S. Acad. exhib. 1781; Inst. calc. int. IV, p. 337 bis 345.

$$(16)\quad \begin{cases} \int\limits_0^\infty y^{n-1} e^{-py} \cos qy\, dy = \frac{\Gamma(n)}{r^n} \cos n\alpha, \\ \int\limits_0^\infty y^{n-1} e^{-py} \sin qy\, dy = \frac{\Gamma(n)}{r^n} \sin n\alpha. \end{cases}$$

Um die Integrale (14) zu erhalten, muß man hier setzen:

$$n = \frac{1}{2}, \quad p = 0, \quad q = 1,$$

also:

$$r = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{2};$$

beachtet man, daß:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

ist¹), so folgt:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\pi} \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int\limits_0^\infty \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\pi} \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Man hat allgemeiner:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-px} \cos qx\, dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{r} \sqrt{\frac{r+p}{2}},$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-px} \sin qx\, dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{r} \sqrt{\frac{r-p}{2}}.$$

Nimmt man in (16) $n = \omega$ an, wo ω eine unendlichkleine Größe bezeichnet, und bemerkt man, daß:

¹) Euler hat die Formel:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{-\log x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

angegeben (diese Vorl., III², S. 656). Setzt man $x = e^{-t}$, so folgt hieraus

$$\int\limits_0^\infty e^{-t} \sqrt{t}\, dt = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

und daher, wegen Formel (15) im Texte:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{\omega} \Gamma(1+\omega) = \frac{1}{\omega} \Gamma(1) = \frac{1}{\omega},$$

$$\cos\omega\alpha = 1, \quad \sin\omega\alpha = \omega\alpha = \omega \operatorname{arctg}\frac{q}{p},$$

so erhält man:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-px} \cos qx\, dx}{x} = \infty, \quad \int\limits_0^\infty \frac{e^{-px} \sin qx\, dx}{x} = \operatorname{arctg}\frac{q}{p};$$

für $p = 0$, $q = 1$ ergibt sich aus der letzten Formel:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

18.¹) Ist:

$$(1 + x + x^2)^n = \sum_{h=0}^{2n} a_{nh} x^h,$$

so sucht **Euler** die Koeffizienten a_{nh} durch bestimmte Integrale auszudrücken. Er findet:

$$a_{nn} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (1 + 2\cos\varphi)^n d\varphi,$$

$$a_{n,\, n\pm 1} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (1 + 2\cos\varphi)^n \cos\varphi\, d\varphi,$$

$$a_{n,\, n\pm 2} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (1 + 2\cos\varphi)^n \cos 2\varphi\, d\varphi,$$

. . . .

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{x^r \cos r\varphi\, d\varphi}{1 - x - 2x\cos\varphi} = \sum_n a_{n,\, n+r} x^{n+r} = \frac{v^r}{\sqrt{1 - 2x - 3x^2}},$$

wo:

$$v = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2}.$$

Setzt man:

$$\frac{v}{x} = b, \quad x = \frac{b}{b^2 + b + 1},$$

so läßt sich die erhaltene Formel folgendermaßen schreiben:

¹) Disquisitiones analyticae super evolutione potestatis trinomialis $(1 + x + x^2)^n$ (1778), Nova Acta Acad. Petrop. XIV, 1797—1798 (publ. 1805), p. 75—110.

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos r\varphi\, d\varphi}{1 - 2b\cos\varphi + b^2} = \frac{\pi b^r}{1 - b^2}.$$

Einen, wenn auch unvergleichlich kleineren, doch nicht unbedeutenden Beitrag zur Theorie der bestimmten Integrale lieferten auch andere Schriftsteller.

Landen[1]) stellte einige bekannte Integrale durch unendliche Produkte dar, und gab neue Methoden zur Berechnung von zwischen bestimmten Grenzen genommenen Integralen vom Typus:

$$\int \frac{x^t dx}{p + qx^n + rx^{2n} + \cdots}.$$

Laplace[2]) begegnete im Laufe seiner Untersuchungen über Wahrscheinlichkeitslehre dem Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m e^{-t^{2r}} dt.$$

Dieses Integral verschwindet für ein ungerades m; man kann daher $m = 2n$ setzen, in welchem Falle man hat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-t^{2r}} dt = 2\int_0^{\infty} t^{2n} e^{-t^{2r}} dt.$$

Es ergibt sich ferner ohne Schwierigkeit für $r = 1$:

$$\int_0^{\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Um dieses letzte Integral zu berechnen, geht Laplace von dem Doppelintegrale:

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(1+u^2)} ds\, du$$

aus. Integriert man zuerst nach s, so ergibt sich:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{2};$$

[1]) Specimen of a new method of comparing curvilineal areas; by which many such areas may be compared as have not yet appeared to be comparable by any other method, Phil. Trans. LVIII, 1768, p. 174—180. — Some new theorems for computing the areas of certain curve lines, ebenda LX, 1770, p. 441—443. [2]) Mémoire sur les probabilités, Mém. Acad. Paris 1778 (publ. 1781); Oeuvres IX, Paris 1893, p. 381—485.

setzt man dagegen $u\sqrt{s} = t$ und dann $s = s'^2$, so folgt:

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s-t^2} \frac{ds\,dt}{\sqrt{s}} = \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_0^{\infty} e^{-s'^2} ds' \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= 2\left[\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt\right]^2,$$

also:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Für $r = 2$ hat man:

$$\int_0^{\infty} t^{4n} e^{-t^4} dt = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{4^n} \int_0^{\infty} e^{-t^4} dt,$$

$$\int_0^{\infty} t^{4n+2} e^{-t^4} dt = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}{4^n} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^4} dt,$$

so daß alles auf die Bestimmung von:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^4} dt = C, \quad \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^4} dt = C'$$

ankommt. Es ist:

$$J = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(1+u^4)} ds\, du = \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

man erhält andererseits durch die Substitutionen $u\sqrt[4]{s} = t$, $s = s'^4$:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{e^{-s} ds}{\sqrt[4]{s}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^4} dt = 4\int_0^{\infty} s'^2 e^{-s'^4} ds' \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^4} dt = 4CC',$$

so daß:

$$CC' = \frac{\pi}{8\sqrt{2}},$$

und die Berechnung des einen dieser Integrale auf die des anderen zurückgeführt wird. Es ist aber unmöglich, jedes der beiden Integrale durch elementare Transzendenten auszudrücken.

Nicolaus Fuß (geboren zu Berlin 1755, seit 1773 Hilfsarbeiter des damals schon erblindeten Euler zu Petersburg, später Mitglied und Sekretär der dortigen Akademie und Generalschuldirektor, gestorben daselbst 1826) gab zwei Methoden[1]) zur Berechnung des Produktes:

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{b}{n}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{\beta}{n}}}.$$

Friedrich Mallet (s. o. S. 129)[2]) berechnete auf einem neuen Wege das schon von d'Alembert[3]) betrachtete Integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \frac{(1-t^2)^n}{(k^2+t^2-k^2t^2)^{n+1}}.$$

Giovanni Francesco Giuseppe Malfatti, geboren 1731 zu Ala in Tirol, gestorben 1807 als Professor an der Universität zu Ferrara, widmete eine lange Abhandlung[4]) dem Integral:

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}dx}{1 \pm x},$$

welches er in das rationale Integral:

$$m\int_0^1 \frac{y^{m+n-1}dy}{1 \pm y^m} = m\left[\int_0^1 y^{n-1}dy - \int_0^1 \frac{y^{n-1}dy}{1 \pm y^m}\right]$$

durch die Substitution $x = y^m$ überführte. Die Integration geschieht dann durch Zerlegung in einfache Brüche.

Mascheroni[5]) gab einen neuen Beweis von der Formel:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m+1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

---

[1]) Gemina methodus investigandi valorem producti

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \cdot \int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}$$

dum ambo integralia a termino $x=0$ usque ad terminum $x=1$ extenduntur, Acta Acad. Petrop. 1778, P. II (publ. 1781), p. 111—134.
[2]) Dissertatio integrationem formulae a D'Alembertio propositae sistens, quam praeside F. Mallet ... publico examini subjicit Carolus Diethericus Hierta, Upsala 1781. [3]) Rech. sur le syst. du monde III, p. 166.
[4]) Essai analytique sur l'intégration de deux formules différentielles, et sur la somme générale des séries harmoniques à termes rationnels, Mém. Acad. Turin 1788—1789 (publ. 1790), p. 53—112.
[5]) Adnotationes etc.

Fontana[1]) berechnete einige von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ erstreckte Integrale. Nachdem er gezeigt hat, daß:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx,$$

geht er von der bekannten Relation:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$$

aus, die gliedweise integriert wird; dadurch ergibt sich:

$$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \cdots = -\log \sin \frac{x}{2} - C,$$

und die Konstante C wird durch Einsetzung von $x = \pi$ bestimmt, was ergibt:

$$C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \log 2.$$

Es ist also, wenn man $2x$ statt x setzt:

$$\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{3}\cos 6x + \cdots = -\log \sin x - \log 2.$$

Integriert man nochmals, so erhält man:

$$\frac{1}{2 \cdot 1^2}\sin 2x + \frac{1}{2 \cdot 2^2}\sin 4x + \frac{1}{2 \cdot 3^2}\sin 6x + \cdots$$
$$= -\int \log \sin x\, dx - x \log 2 + C;$$

erstreckt man von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$, so folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2,$$

also auch:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

Hieraus ergibt sich:

---

[1]) Ricerche sopra diversi punti concernenti l'analisi infinitesimale e la sua applicazione alla fisica, Pavia 1793.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sec x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{cosec} x\,dx = \frac{\pi}{2} \log 2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tang} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{cotg} x\,dx = 0.$$

Es wäre wohl angemessen, dieser kurzen Zusammenstellung der in unsere Periode fallenden Untersuchungen über bestimmte Integrale eine Kritik derselben folgen zu lassen; wir verzichten aber darauf, da die Bedenken, zu denen diese Untersuchungen Anlaß geben, meistens von so elementarer Natur sind, daß sie für einen sachkundigen Leser keiner besonderen Erörterungen bedürfen.

Analytische Anwendungen der Infinitesimalrechnung.

1. Maxima und Minima.

Die Aufsuchung der größten und kleinsten Werte der Funktionen bildet eins der Hauptprobleme, denen die Infinitesimalrechnung ihre Entstehung verdankt. Für uns bietet diese Frage ein besonderes Interesse darum dar, weil sie den Gegenstand der ersten Schrift Lagranges bildet, derjenigen nämlich, welche den Beginn unserer Periode bezeichnet. Bevor wir aber diese Arbeit, die sich auf Extremwerte der Funktionen mehrerer Veränderlichen bezieht, besprechen, wollen wir die wenigen erwähnen, die sich mit Extremwerten der Funktionen einer einzigen Variabeln beschäftigen.

Diesem Gegenstand ist fast ausschließlich die erste Hälfte eines schon oben (S. 675) besprochenen Büchelchens von West[1]) gewidmet. Der Verfasser bemerkt, daß man die Extremwerte gewöhnlich durch Nullsetzung der ersten Fluxion erhält; da aber, fährt er fort, der Grund dieses Verfahrens nicht so leicht zu verstehen ist, so mag wohl die hier vorgeschlagene Methode eine günstige Beurteilung finden. Darauf läßt er eine Reihe von 20 Problemen folgen, deren 14 erste nach dem common way und nach dem new way gelöst werden, während auf die sechs letzten nur die neue Methode angewandt wird. Wir führen als Beispiel das zweite Problem an. Eine Strecke AB soll

[1]) West, Mathematics.

in C derart geteilt werden, daß $AC \cdot \overline{CB}^2$ größtmöglich sei. Setzt man:

$$AB = a, \quad AC = x, \quad CB = y = a - x,$$

so hat man nach der gewöhnlichen Methode die Fluxion von $x(a-x)^2$ gleich Null zu setzen, woraus sich ergibt:

$$0 = (a-x)^2\dot{x} - 2(a-x)x\dot{x} = (a-x)(a-3x)\dot{x},$$

oder $x = \frac{a}{3}\cdot$ Dasselbe Resultat erhält man durch folgende Schlußweise. Lassen wir den beweglichen Punkt C von A nach B gehen. Das Produkt xy^2 nimmt zu, solange das Verhältnis des Zuwachses von x zu x das Verhältnis der Verminderung von y^2 zu y^2 übertrifft; das Maximum kommt also dann vor, wenn diese beiden Verhältnisse einander gleich sind, wenn nämlich:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{2y\dot{y}}{y^2}$$

ist. Es ist aber $\dot{x} = \dot{y}$, da der Zuwachs von x der Verminderung von y gleich ist, folglich $y = 2x$, und hieraus wie oben $x = \frac{a}{3}\cdot$

Daß diese Methode im Grunde keine Neuheit darbietet, erkennt West selbst in einem Scholium zum 14ten Problem, wo er sagt, die von ihm als neu gegebene Methode sei freilich schon früher von anderen angewandt worden, niemand aber habe den Grund derselben so klar auseinandergesetzt als er selbst. Daß aber die neue Methode einen Rückschritt bildet, ist kaum nötig zu erwähnen; während nämlich die Infinitesimalrechnung darauf gerichtet ist, mechanische, allgemein gültige Regeln für die Auflösung der verschiedenen Probleme zu liefern, nötigt uns West, eine besondere Gedankenfolge für jeden besonderen Fall zu erfinden. Einen ähnlichen Irrtum würde derjenige begehen, der sich bei geometrischen Problemen des Gebrauches der analytischen Geometrie enthalten und die Geometrie der Alten beständig anwenden wollte.

In seiner Dissertation: De minimo in reflexione a curvis[1]) bestätigt Kästner die Behauptung von Robert Smith (diese Vorl., III², S. 377), daß die Reflexion auf einem Kreise auf vier Wegen geschehen kann. Es seien nämlich G, H (Fig. 80) zwei gegen einen Durchmesser AB des Kreises symmetrisch liegende innere Punkte, und man ziehe durch die Punkte G, H und den Mittelpunkt C einen zweiten Kreis, welcher den ersten Kreis in E, F schneiden möge;

[1]) Dissertationes mathematicae et physicae, Altenburg 1771, Diss. III, p. 22—27.

dann werden die Strahlen GA, GB, GE, GF, wie sich leicht nachweisen läßt, beziehungsweise in AH, BH, EH, FH reflektiert. Für die Punkte A, B ist der Weg ein Maximum, für die Punkte E, F ein Minimum.

Fontana widmet die elfte seiner Disquisitiones[1]) der Theorie der Maxima und Minima, fügt aber dem schon bekannten nichts Neues hinzu.

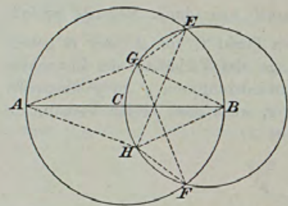

Fig. 80.

Dasselbe läßt sich von einer Abhandlung von Frisi[2]) aussagen.

Es ist wohl hier der Ort, zwei kleine Schriften von Andreas Hultén[3]) (geboren zu Suaflund in Schweden 1767, Professor der Mathematik und Astronomie und dann der Theologie an der Universität zu Upsala, gestorben daselbst 1831) zu erwähnen, deren Inhalt aus dem Titel selbst erhellt.

Die Theorie der Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen war zuerst von Euler, aber nur unvollständig behandelt worden (diese Vorl., III², S. 769—770). Es war Lagrange vorbehalten, die Auflösung des wichtigen Problems wesentlich zu fördern.[4])

Es sei Z eine algebraische Funktion von $t, u, \ldots$, und:

$$dZ = p\,dt + q\,du + \cdots.$$

Unerläßlich für jeden Extremwert ist bekanntlich:

$$dZ = 0,$$

[1]) Disquisitiones physico-mathematicae, nunc primum editae, Pavia 1780. [2]) De quantitatibus maximis, minimis, isoperimetricis, Atti Accad. Siena VI, 1781, p. 121—159. Die frühere Arbeit von Frisi: De problematis quibusdam maximorum et minimorum exercitatio geometrica, Atti Accad. Siena IV, 1771, p. 15—20, ist rein geometrischen Inhalts; auf diese bezieht sich ein Brief von V. Riccati in N. Racc. d'opuscoli scient. e filol. XXX, 1776, op. III, p. 1—7. [3]) Dissertatio de aequationibus radices aliquot aequales habentibus, Greifswald, P. I 1793, P. II 1796, P. III 1797. — Methodus Huddenii de maximis et minimis cum calculo fluxionum comparata, Greifswald 1797. [4]) Recherches sur la méthode de maximis et minimis, Misc. Taur. I, 1759; Oeuvres I, Paris 1867, p. 3—20.

oder:

$$p\,dt + q\,du + \cdots = 0.$$

Da aber diese Beziehung, wegen der Unabhängigkeit der Veränderlichen $t, u, \ldots$, für jedes Wertsystem von $dt, du, \ldots$ bestehen muß, so folgt:

$$p = q = \cdots = 0,$$

ein Gleichungssystem, das die gesuchten Wertsysteme $t, u, \ldots$ liefern wird.

Man muß aber auf das zweite Differential d^2Z acht geben. Ist:

$$dp = A\,dt + B\,du + \cdots, \quad dq = B\,dt + C\,du + \cdots, \cdots,$$

so folgt:

$$d^2Z = A\,dt^2 + 2B\,dt\,du + C\,du^2 + \cdots.$$

Hat man mit einer einzigen Veränderlichen zu tun, so hat d^2Z das gleiche Vorzeichen wie A, und man hat ein Minimum oder ein Maximum, je nachdem $A \gtrless 0$ ist.

Bei zwei Veränderlichen kann man schreiben:

$$d^2Z = A\,dt^2 + 2B\,dt\,du + C\,du^2 = A\left(dt + \frac{B}{A}du\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2.$$

Hier muß, wegen der Unabhängigkeit von dt und du, jedes Glied rechts für ein Minimum oder für ein Maximum positiv bzw. negativ sein; es folgt dann für ein Minimum:

$$A > 0, \quad C - \frac{B^2}{A} > 0,$$

oder:

(1) $$A > 0, \quad C > 0, \quad AC > B^2;$$

für ein Maximum:

$$A < 0, \quad C - \frac{B^2}{A} < 0,$$

oder:

(2) $$A < 0, \quad C < 0, \quad AC > B^2.$$

Hat man drei Veränderlichen t, u, v, und ist:

$$\begin{aligned} dp &= A\,dt + B\,du + D\,dv, \\ dq &= B\,dt + C\,du + E\,dv, \\ dr &= D\,dt + E\,du + F\,dv, \end{aligned}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} d^2Z &= A\,dt^2 + 2B\,dt\,du + C\,du^2 + 2D\,dt\,dv + 2E\,du\,dv + F\,dv^2 \\ &= A\left(dt + \frac{B}{A}du + \frac{D}{A}dv\right)^2 + a\left(du + \frac{b}{a}dv\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)dv^2, \end{aligned}$$

wo:

$$a = C - \frac{B^2}{A}, \quad b = E - \frac{BD}{A}, \quad c = F - \frac{D^2}{A}.$$

Es ist also für ein Minimum:

$$A > 0, \quad a > 0, \quad ac - b^2 > 0,$$

oder:

(3) $A > 0, \quad CA > B^2, \quad (CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2,$

woraus folgt:

(4) $A > 0, \quad C > 0, \quad F > 0, \quad CA > B^2, \quad FA > D^2.$

Diese letzten Bedingungen sind aber mit den (3) nicht gleichbedeutend, wie es gleich daraus erhellt, daß E in (3), nicht aber in (4) vorkommt; Lagrange unterläßt nämlich, die weitere Bedingung:

$$FC > E^2$$

hinzuzufügen, welche der Symmetrie wegen ersichtlich hinzutreten muß und sich auch wirklich aus (3) ableiten läßt.[1])

Nachdem Lagrange einige Worte der Ausdehnung seiner Untersuchungen auf Funktionen einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen gewidmet hat, fügt er einige Bemerkungen hinzu, die insofern zweckmäßig sind, als seine Theorie, wie er denkt, ganz neu ist („comme je crois cette théorie entièrement nouvelle . . .“).

Ist Z eine Funktion der zwei Veränderlichen t, u, so kann man Z als die Ordinate einer Fläche ansehen. Die der Annahme $u = \text{const.}$ entsprechende Gleichung $dZ = p\,dt$ stellt alle Schnitte der Fläche dar, die in den der tZ-Ebene parallelen Ebenen liegen; für $p = 0$ erhält

[1]) Setzen wir:

$$CA - B^2 = \alpha^2, \quad FA - D^2 = \beta^2, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

so wird die letzte Ungleichung (3):

$$\alpha^2\beta^2 > (EA - BD)^2,$$

woraus folgt, wenn $|p|$ den absoluten Betrag von p bezeichnet:

$$|EA| < \alpha\beta + |BD|,$$

$$E^2A^2 < \alpha^2\beta^2 + B^2D^2 + 2\alpha\beta\,|BD|$$
$$= A^2CF - ACD^2 - AFB^2 + 2B^2D^2 + 2\alpha\beta\,|BD|,$$

oder:

$$A^2(CF - E^2) > D^2(AC - B^2) + B^2(AF - D^2) - 2\alpha\beta\,|BD|$$
$$= (\alpha\,|D| - \beta\,|B|)^2,$$

woraus sich ergibt:

$$CF - E^2 > 0.$$

man die größte oder die kleinste Ordinate eines dieser Schnitte, je nachdem $A \lessgtr 0$. Die Gleichung $p = 0$ stellt also den Ort der Maximal- und Minimalordinaten dar; diese bilden einen ebenen oder nicht ebenen Schnitt der Fläche, der von den Gleichungen $dZ = q\,du$, $p = 0$ bestimmt wird. Die Maximal- und Minimalordinaten der Fläche stimmen mit denjenigen dieses Schnittes überein; diese aber werden durch die Gleichung $q = 0$ gegeben. Aus $p = 0$ folgt:

$$dp = A\,dt + B\,du = 0,$$

und daher:

$$dq = \frac{AC - B^2}{A}\,du,$$

so daß man ein Maximum oder ein Minimum hat, je nachdem:

$$C \lessgtr \frac{B^2}{A}$$

ist. Die Bedingungen für ein Maximum oder Minimum sind also:

$$A \lessgtr 0, \quad C \lessgtr \frac{B^2}{A}$$

oder:

(5) $A \lessgtr 0, \quad AC > B^2.$

Wollte man mit u anstatt mit t anfangen, so würde man erhalten:

$$C \lessgtr 0, \quad AC > B^2,$$

welche, zusammen mit (5), die Bedingungen (1), (2) wiedergeben.

Der Fall von mehr als zwei Veränderlichen ließe sich analog behandeln.[1])

Die Arbeit Lagranges hatte, wie es scheint, keinen großen Anklang; wenigstens finden wir, in den 20 darauffolgenden Jahren, keine auf denselben Gegenstand bezügliche Schrift. Erst 1779 veröffentlichte G. F. Fagnano eine Abhandlung[2]), in welcher er einige Maximal- und Minimalaufgaben sowohl durch die Differentialrechnung als durch die reine Geometrie behandelte. Es sind folgende:

a) Einen Punkt D innerhalb eines Dreiecks ABC derart zu bestimmen, daß $DA + DB + DC$ ein Minimum wird.

[1]) Einige Anwendungen der Theorie der Extremwerte finden sich in der Abhandlung von Lagrange: Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires, Nouv. Mém. Berlin 1773; Oeuvres III, 1869, p. 661—692. [2]) Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum spectantia, Nova Acta Erudit. 1775 (publ. 1779), p. 281—303.

b) Einen Punkt D innerhalb eines Dreiecks ABC derart zu bestimmen, daß $\overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2$ ein Minimum wird.

c) Einen Punkt E innerhalb eines Vierecks $ABCD$ derart zu bestimmen, daß $EA + EB + EC + ED$ ein Minimum wird.

d) In ein spitzwinkliges Dreieck das Dreieck von kleinstem Umfang einzuschreiben.

e) Bezeichnen C, F, f den Mittelpunkt und die Brennpunkte einer Ellipse, so soll ein Punkt X des Umfanges derselben derart bestimmt werden, daß die Differenz der Winkel CXF, CXf ein Maximum wird.

Diese Probleme gehören sämtlich, mit Ausschluß des letzten, der Theorie der Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen an. Daß Fagnano die darauf bezüglichen Untersuchungen von Euler und Lagrange kannte, ist sehr wahrscheinlich; jedoch folgt er bei der Auflösung seiner Probleme nicht dem von der Differentialrechnung vorgezeichneten methodischen Weg, sondern er bedient sich in jedem Falle besonderer Kunstgriffe. Aus der Differentialrechnung entnimmt er nur den Grundbegriff der Theorie der Maxima und Minima, in derselben Form, in welcher er schon bei Kepler vorkommt (diese Vorl., II², S. 828), daß nämlich in der Nähe eines Extremwertes die Veränderung der Funktion als gleich Null, die Funktion selbst also als konstant anzusehen ist. Hat er dann mit einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen zu tun, so nimmt er zuerst die eine von diesen als konstant an, und sucht denjenigen Wert der anderen zu bestimmen, für welchen die Variation der Funktion verschwindet, was ihm eine Maximums- oder Minimumsbedingung gibt; er setzt dann die zweite Veränderliche als konstant voraus, und verfährt auf ebendieselbe Weise, wodurch er die zweite Bedingung erhält.

Um dem Leser einen genaueren Begriff von Fagnanos Verfahren zu geben, wollen wir die Auflösung des ersten seiner Probleme anführen.

Man beschreibe um C mit dem Radius CD einen Kreisbogen VDF (Fig. 81), und E sei ein unendlich nahe an D liegender Punkt dieses Bogens; es muß sein, wegen des Minimumscharakters des Punktes D („per minimi naturam"):

$$DA + DB + DC = EA + EB + EC,$$

oder, da $DC = EC$:

$$DA + DB = EA + EB,$$

oder auch, wenn man um A, B die Kreisbögen Ed, De zieht:

$$Dd = Ee.$$

Es folgt hieraus, daß die beiden unendlichkleinen rechtwinkligen Dreiecke DdE, EeD einander gleich sind, so daß $e\widehat{ED} = d\widehat{DE}$. Ist DO die Tangente zum Bogen VF im Punkte D, so ist, da $B\widehat{D}e = B\widehat{e}D = \frac{\pi}{2}$:

$$B\widehat{D}O = \frac{\pi}{2} - e\widehat{D}E,\quad e\widehat{E}D = \frac{\pi}{2} - e\widehat{D}E,$$

folglich:

$$B\widehat{D}O = e\widehat{E}D = d\widehat{D}E;$$

addiert man die rechten Winkel $O\widehat{D}C$ bzw. $E\widehat{D}C$ hinzu, so folgt:

$$B\widehat{D}C = A\widehat{D}C.$$

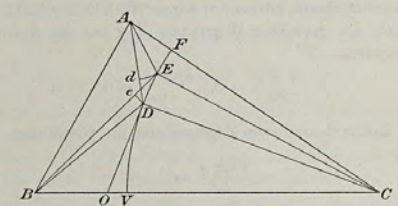

Fig. 81.

Auf gleiche Weise erhält man:

$$B\widehat{D}C = A\widehat{D}B.$$

Die Minimumsbedingung ist also:

$$A\widehat{D}B = B\widehat{D}C = C\widehat{D}A = \frac{2\pi}{3}.$$

Derselbe Gedankengang, den wir soeben zu schildern versuchten, erscheint wieder, wenn auch unter etwas veränderter Form, in einem schon oben (S. 687) erwähnten italienischen Lehrbuche, in den Principii fondamentali del calcolo differenziale e integrale von Lotteri. Es wird in diesem Werke vorgeschrieben, daß man im Falle von mehreren Veränderlichen einige derselben als konstant ansehen möge. Soll z. B. eine Zahl a in drei Teile von größtem Produkte zerlegt werden, und sind zwei derselben x, y, so daß das zu untersuchende Produkt durch:

$$f(x, y) = axy - x^2y - xy^2$$

ausgedrückt wird, so betrachtet man zunächst x als einzig veränderlich; das gibt durch Differentiation:

$$ay - 2xy - y^2 = 0,$$

also:

$$x = \frac{a-y}{2}, \quad f(x, y) = \frac{y}{4}(a-y)^2.$$

Differentiiert man jetzt nach y, so erhält man:

$$\frac{1}{4}(a-y)(a-3y) = 0,$$

woraus sich $y = \frac{a}{3}$, und folglich $x = \frac{a}{3}$ ergibt.

Um den Unterschied zwischen diesem und dem Euler-Lagrangeschen Verfahren in wenigen Worten nach der heutigen Ausdrucksweise zusammenzufassen, können wir sagen: Nach Euler und Lagrange ergeben sich die gesuchten Wertepaare x, y aus der Auflösung des Gleichungssystems:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Nach Lotteri muß man dagegen erst die Gleichung:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

nach x auflösen; ergibt sich hieraus:

$$x = \vartheta(y),$$

und setzt man:

$$f(\vartheta(y), y) = g(y),$$

so gibt die Auflösung der Gleichung:

$$\frac{dg(y)}{dy} = 0 \tag{8}$$

die gesuchten Werte von y, die dann, in $x = \vartheta(y)$ eingesetzt, die entsprechenden Werte von x liefern.

Es ist leicht zu sehen, daß beide Wege zu demselben Resultate führen. Man hat nämlich nach der Definition von $\vartheta(y)$:

$$\frac{\partial f(\vartheta(y), y)}{\partial \vartheta(y)} = 0, \tag{9}$$

ferner:

$$\frac{dg(y)}{dy} = \frac{\partial f(\vartheta(y), y)}{\partial \vartheta(y)} \vartheta'(y) + \frac{\partial f(\vartheta(y), y)}{\partial y},$$

so daß sich (8), wegen (9), auf:

$$\frac{\partial f(\vartheta(y), y)}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

reduziert, und das Gleichungssystem (7), (8) durch das System (9), (10) ersetzbar ist, welches mit (6) übereinstimmt.

Es ist merkwürdig, daß Lagrange selbst in seiner Théorie des fonctions analytiques ganz ähnlich wie Lotteri verfährt; nur ist seine Behandlung insofern vollständiger, als er auch die zweiten Ableitungen berücksichtigt.

2. Unbestimmte Formen.

Zur Bestimmung des wahren Wertes des Verhältnisses $\frac{0}{0}$ geben Riccati und Saladini in ihren Institutiones analyticae eine von Riccati[1]) ersonnene Methode, die aber von der gewöhnlichen nicht wesentlich abweicht. Liegt das Verhältnis $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ vor, und ist:

$$f(a) = \varphi(a) = 0,$$

so muß man $f(x)$ und $\varphi(x)$ durch $x - a$ so oft teilen, als wenigstens einer der beiden Quotienten einen bestimmten Wert erhält. Kommen in $f(x)$ oder in $\varphi(x)$ Wurzelgrößen vor, so muß man x durch $a + dx$ ersetzen und dann die Wurzeln „more neutoniano" ausziehen (man macht z. B. $\sqrt[n]{1 + \lambda dx + \cdots} = 1 + \frac{\lambda}{n} dx + \cdots$); der Quotient der Koeffizienten der ersten Potenz von dx liefert den wahren Wert des Verhältnisses.

Es gehört wohl hierher eine Bemerkung von Kästner.[2]) Es ist:

$$\sec\varphi \pm \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\left(45^0 \pm \frac{\varphi}{2}\right),$$

also:

$$2 \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Hieraus folgt für $\varphi = 90^0$:

$$\sec 90^0 + \operatorname{tang} 90^0 = \operatorname{tang} 90^0, \tag{11}$$

und:

---

[1]) Animadversiones in fractionem, cuius numerator et denominator per certam determinationem nihilo aequales fiunt, Comm. Bon. II, P. III, 1747, p. 173—193. [2]) Summe und Unterschied von Tangente und Secante, Arch. d. r. und angew. Math. II, 1797—1798, S. 174—180.