Allgemeines. Kegelschnitte.

Nach dem glänzenden Aufschwung, den die analytische Geometrie der Ebene durch die Erfindung des mächtigen Hilfsmittels der Infinitesimalrechnung, durch die Arbeiten eines Newton, Maclaurin, de Gua, Clairaut, Euler u. a. genommen hatte, kann man unseren Zeitraum, die letzten 40 Jahre des 18. Jahrhunderts, als eine Periode verhältnismäßigen Stillstands bezeichnen; neue Gedanken und Methoden von großer Tragweite, die auf das ganze Gebiet befruchtend einwirken, treten kaum auf[1]); die Tätigkeit der Mathematiker erstreckt sich mehr auf Spezialuntersuchungen. Dagegen wuchs die analytische Geometrie des Raumes, die bis dahin nur schwache Ansätze gezeigt hatte, zu einem stattlichen Baum empor, als dessen Krone Monges geniales Werk: „Feuilles d'analyse appliquée à la geométrie“ gelten kann.

Was die Behandlungsweise der Probleme in unserem Zeitraum betrifft, so ist besonders bemerkenswert das Hervortreten des Gegensatzes zwischen analytischer und synthetischer Methode, von denen die letztere im allgemeinen mehr in England und Italien, die erstere in Deutschland und Frankreich gepflegt wurde. Es handelt sich dabei nicht bloß um den Unterschied zwischen rechnerischem und konstruktivem Verfahren, sondern unter analytischer Methode wird vielfach eine Behandlungsweise verstanden, die man heute vielleicht eher als „heuristisch“ oder „genetisch“ bezeichnen würde, eine solche nämlich, die den Gedankengang des Verfassers, die Überlegungen, durch welche er seine Resultate gefunden hat, klar erkennen läßt[2]), während der Synthetiker seine Sätze fertig mitteilt, und im Beweis seinen eigenen Weg eher zu verdecken, als darzulegen sucht. Verschiedene namhafte Mathematiker haben sich über diesen Gegenstand ausgesprochen. Der Zeit nach steht voran eine aus dem Jahre 1759 stammende Vorrede Kästners zu dem kleinen Buch von Hube:

---

[1]) Es wäre denn, daß man die Anfänge der Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen hierher rechnen wollte, die allerdings von analytisch-geometrischen Untersuchungen über die Rektifikation der Kegelschnitte ausgegangen sind, aber doch eigentlich in Abschnitt XXVI gehören. [2]) Als geradezu klassische Beispiele hierfür sind die Arbeiten Eulers anzuführen.

„Versuch einer analytischen Abhandlung von den Kegelschnitten" (Göttingen 1759), das auf Kästners Veranlassung verfaßt wurde. Dieser führt hier über die Vorzüge der analytischen Behandlung etwa folgendes aus: Sie ermöglicht dem „Lehrling" eine selbständige Lösung von Aufgaben, während er bei der synthetischen Methode, die ihm nur die Sätze und Beweise fertig mitteilt, stets auf die Lippen des Lehrers sehen muß. „Das größte Vergnügen aber, das wir kennen, ist die Wahrheit durch uns selbst zu finden." Ein weiterer Vorteil ist die größere Allgemeinheit und Sicherheit der Ergebnisse, wogegen sie allerdings etwas an „Schönheit" (wir würden heute vielleicht sagen: an Eleganz) verliert. Kästner macht hierzu die originelle, man möchte fast sagen, etwas philisterhafte Bemerkung: „Würde es wohl ein Fehler sein, wenn der Mathematikverständige, wie Männer, die ökonomisch denken, bei gleicher Jugend weniger Schönheit mit mehr Reichtum wählet". Als Vorzug des synthetischen Verfahrens wird anerkannt, daß es eine vorzügliche Denkübung ist, weil hier stets mit den Begriffen selbst operiert wird; dementsprechend wird vor einer rein mechanischen, gedankenlosen Anwendung der Buchstabenrechnung gewarnt, im übrigen aber der Vorwurf zurückgewiesen, daß das analytische Verfahren rein mechanisch sei. Vielmehr, sagt Kästner, überhebt es uns bloß einer beträchtlichen Denkarbeit; denn nachdem einmal die Aufgabe in die Sprache der Analysis übersetzt ist, läßt sich das Resultat mit einfachen, und zwar immer mit denselben Hilfsmitteln finden. Wer also diese besitzt, ist befähigt, eine Menge von Kenntnissen zu erlangen. „Der Analyst", schließt er, „gleicht einem Manne, der viel Geld hat, und dafür allemal die Güter haben kann, die er verlangt, und insofern sie für Geld feil sind." — Den entgegengesetzten Standpunkt vertritt Malfatti in der Einleitung zu seiner Schrift: „Della curva Cassiniana" (Pavia 1781); er verkennt zwar die Vorzüge der Analysis durchaus nicht, gibt aber doch der Synthese den Vorzug wegen ihrer größeren Eleganz, und weil sie den Geist zwingt, mit steter Aufmerksamkeit bei der Aufgabe zu bleiben, Hilfssätze zu suchen, die zum Hauptsatz in Beziehung stehen, und so allmählich das Ziel zu erreichen. Auch Malfatti sucht die Sache durch ein hübsches Bild zu veranschaulichen. Er vergleicht den Synthetiker mit einem Reisenden, der nur überhaupt ans Ziel kommen will, dabei aber oft an Ruhepunkten Halt macht, um alles Schöne zu genießen, das sich ihm bietet; diese Ruhepunkte würden den Neben- und Zwischenresultaten im Beweis entsprechen, von denen aus sich ein Ausblick auf weitere Beziehungen eröffnet. Der Analytiker dagegen, sagt er, gleicht einem Reisenden, der sich in einen Wagen einschließt, und sich durch dessen Mechanismus (der also dem

Mechanismus der Rechnungen verglichen wird) ans Ziel führen läßt. „Er kommt vielleicht früher ans Ziel, aber er hat weniger gesehen." — Eine besondere, eingehende und geistvolle Untersuchung hat Klügel dieser Frage gewidmet mit einer kleinen Schrift: „De ratione quam inter se habent in demonstrationibus mathematicis methodus synthetica et analytica". Helmstädt 1767. Es wird darin zunächst der Unterschied zwischen synthetischer und analytischer Methode klar und scharf angegeben, der nicht sowohl darin besteht, ob Konstruktion oder Rechnung benutzt wird, sondern „ex interiore veritatum natura, et ratione quam in eruendis illis et deducendis sequuntur, petendum est". Als charakteristisch für die synthetische wird angegeben, daß sie „die Quelle der Erfindung verdecke" und die etwas malitiöse Bemerkung beigefügt, die Synthetiker (die Engländer, unter anderen Newton und Maclaurin werden genannt) tun dies, „um aus der Schwierigkeit der Beweise eine größere Berühmtheit ihres Geistes zu erlangen"; als weiterer Grund wird indes noch angegeben, daß sie „diese Methode allein als der Geometrie und der Mathematik überhaupt würdig, und der größten Strenge fähig ansehen". Es wird dann weiter ausgeführt, daß bei der synthetischen Methode jeder Satz für sich aufgestellt und bewiesen werde; daher komme es, daß die Geometrie manchem „horrida et sterilis" erscheine, daran schließt sich die ganz richtige Bemerkung, daß die Evidenz der geometrischen Beweise dazu verleite, diese Methode auf andere Wissensgebiete zu übertragen, für die sie nicht passe. Die synthetische Methode sei auch zur Entdeckung neuer Wahrheiten weniger geeignet, außer in den Händen des Genies, was auch Kästner in der erwähnten Vorrede einmal sagt. Ferner wird hervorgehoben, daß die synthetische Methode immer nur Einzelfälle ins Auge fassen und jeden für sich beweisen müsse, während die analytische Formel einer vollständigen Allgemeinheit sich erfreue. Ein Beispiel für die Richtigkeit dieses letzteren Satzes bietet die synthetische Untersuchung der Kegelschnitte, wo jede der drei Kurven für sich betrachtet wird, während bei der analytischen Behandlung in der Regel ein Zeichenwechsel genügt, um einen für die Ellipse gefundenen Satz auf die Hyperbel zu übertragen Demgegenüber werden die Vorzüge der Analysis entwickelt, wobei noch ein Gedanke ausgesprochen wird, den wir nicht unerwähnt lassen wollen, nämlich: „Wenn uns jemals die Fähigkeit gegeben werden könnte, die Wirkung jeder Ursache mit ihren Folgen für alle übrigen für sich zu betrachten und mathematisch zu formulieren, so würde die ganze Natur, soweit sie meßbar ist („quanta quanta est"), in einem einzigen, aber gewaltigen analytischen Problem bestehen". Es ist hier offenbar die Idee, die der sogenannten Laplaceschen

„Weltformel“[1]) zugrunde liegt, vollständig klar ausgesprochen. — Der synthetischen Methode wird eingeräumt, daß sie bei Lagebeziehungen den Vorzug verdiene, ferner zugegeben, daß eine einseitige Benutzung der Analysis ein Nachlassen der Schärfe des geometrischen Geistes bewirke, was sich bei den Franzosen bemerkbar mache. Den Schluß bildet der gewiß richtige Satz: „Es scheint, als ob ohne Schaden öfter, als es geschieht, wenn die Arbeit des Rechnens und Beweisens getan ist, einige kurze, philosophische Bemerkungen über den Ursprung und Zusammenhang der Wahrheiten, und den Weg, auf welchem man zu ihnen gelangt ist, beigefügt werden könnten“.

Die Opposition gegen die einseitige Anwendung der synthetischen Methode wird begreiflich, wenn man bedenkt, welche Schwierigkeiten ein derart geschriebenes Werk dem Verständnis bereitet. Speziell in England scheint sich diese Vorliebe für eine schwer verständliche Ausdrucksweise in einzelnen Fällen beinahe zum Spleen gesteigert zu haben, wenigstens kommt man auf diesen Gedanken, wenn man Sätze, wie den folgenden liest[2]): „A conic hyperbola being given, a point may be found, such that if from it there be drawn straight lines to all intersections of the given curve, with an infinite number of parabolas, or hyperbolas, of any given order whatever, lying between straight lines, of which one passes through a given point, and the other may be found, the straight lines so drawn, from the point found, shall be tangents to the parabolas or hyperbolas“. — Man wird darin nicht so leicht den einfachen Satz wiedererkennen: Zieht man von einem gegebenen Punkt an alle Kurven der Schar $y = px^n$ (wo p ein variabler Parameter, n eine Konstante ist) die Tangenten, so liegen die Berührpunkte auf einer Hyperbel.

Der zu Anfang erwähnte Charakter unserer Epoche als eines gewissen Ruhestadiums in der Entwicklung zeigt sich auch darin, daß in größerer Anzahl Werke veröffentlicht werden, die nicht sowohl der Bekanntmachung neuer Ergebnisse dienen, sondern sich die Aufgabe stellen, systematisch zusammenzufassen und zu ordnen, was die Forschung im Laufe der Zeit ergeben hatte, also Lehrbücher über größere Gebiete der Mathematik. Dahin gehört Kästners ausführliches Werk: „Anfangsgründe der Mathematik“, von dem die 1. Auflage 1758, die 2. 1770 erschien, und das in etwas breiter

[1]) Essai philosophique sur les Probabilités. Seconde édition (1814), p. 2ff. Vgl. Dubois-Reymond, Über die Grenzen des Naturerkennens, 1872, wo auch in Anm. 5 auf eine Stelle ähnlichen Inhalts bei Leibniz aufmerksam gemacht ist.

[2]) Brougham, General Theorems, chiefly Porisms, in the higher Geometry. Phil. Trans. Vol. 88 (1798), p. 378—396.

Darstellung auch das Wichtigste aus unserem Gebiet bringt. Es kommen in Betracht aus der ersten Hälfte des 3. Teiles die §§ 322 bis 623, in denen zunächst die Gerade (§§ 340—348), die Kegelschnitte (§§ 349—466) und einige höheren Kurven (Cissoide, Konchoide, §§ 467—496) behandelt werden, wie auch Fragen allgemeinerer Natur: Anzahl der Schnittpunkte einer Kurve mit einer Geraden, Anzahl der zur Bestimmung einer Kurve notwendigen Punkte, Zeichnung von Kurven, die durch ihre Gleichung gegeben sind. Daran schließen sich (§§ 514—611) die Grundzüge der analytischen Geometrie des Raumes, beginnend mit der Frage: „Wie die Natur der Flächen, welche Körper begrenzen, durch Gleichungen ausgedrückt werde“ (§§ 514—519). Der Ausdruck ist bezeichnend für die Betrachtungsweise der Flächen in dieser Zeit, insofern diese fast immer als Begrenzung von Körpern erscheinen, nicht von diesen losgelöst als gewissermaßen selbständige Gebilde, eine Anschauung, die erst seit Gauß allgemein geworden zu sein scheint. Betrachtet werden namentlich Kegelflächen („deren Gleichungen gleichartige sind“, §§ 529—544), sodann „runde Körper“ (d. h. Rotationsflächen im heutigen Sprachgebrauch, §§ 545—548), deren allgemeine Gleichung aufgestellt wird ($z^2 = x^2 + y^2$; $Z = f(z)$), mit der Bemerkung, sie stelle einen „Körper“ dar; ferner Schnitt einer Fläche mit einer beliebigen Ebene (§§ 549 bis 570), die stets durch ihre Spur in der xy-Ebene und ihre Neigung gegen diese gegeben gedacht wird. Das Verfahren wird dann auf den Rotationskegel angewendet und die hier auftretenden Möglichkeiten diskutiert. Den Schluß dieses Abschnitts bildet die Betrachtung einiger „transzendentischen, krummen Linien“ (Spiralen, Zykloiden, §§ 571—623), von denen gesagt wird, daß ihre Ordnung „unendlich“ sei.

Die zweite Hälfte des dritten Teiles ist der Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie gewidmet, sowohl in rechtwinkligen, als in Polarkoordinaten; bei den letzteren wird an Stelle des Winkels der Bogen eines Kreises von gegebenem Radius benutzt. Dieser Teil enthält: Tangente und Normale (§§ 63—107), Asymptote (§§ 108—119), Wendepunkte (§§ 112, 532—537), Quadratur (§§ 205 bis 212), Rektifikation (§§ 266—272), Krümmungskreis (§§ 538—556), Evolute und Evolvente (§§ 563—577), alles für ebene Kurven. Den Schluß bilden Betrachtungen über Kurven, die ihren Evoluten ähnlich sind (§§ 578—592), Kubaturen und Komplanationen usw. (§ 609 bis Schluß).

Vollständig, klar und eingehend findet sich die Anwendung der Analysis auf die Geometrie dargestellt in dem zweibändigen Werk: „Institutiones analyticae a Vincentio Riccato et Hieronymo Saladino“

(Bologna 1765), (Girolamo Saladini, 1731—1813, Professor der Mathematik in Bologna) für das namentlich die glückliche Verbindung von analytischer und geometrischer Betrachtungsweise charakteristisch ist. Der erste Band bringt zunächst eine historische Einleitung, sodann im ersten Buch („De algorithmo et de aequationibus primi et secundi gradus") die Definition der Koordinaten und das Wichtigste über die Gerade; im zweiten Buch („De lineis seu locis secundi gradus et de aequationibus tertii gradus, et quarti") werden die drei Kegelschnitte nacheinander behandelt und ihre Haupteigenschaften zusammengestellt; besonders wird auf die Verwendung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zur graphischen Darstellung der Wurzeln von Gleichungen 3. und 4. Grades eingegangen. — Das dritte Buch („De locis tertii et superiorum graduum et de aequationibus excedentibus gradum quartum") beschäftigt sich mit Kurven höherer Ordnung, ihren Berührungen (zwei- und mehrpunktig), Asymptoten, singulären Punkten, oskulierenden Parabeln und dergl.; auch der Verzeichnung einer Kurve auf Grund ihrer Gleichung ist ein Kapitel gewidmet (Kap. 10), das allerdings nur die Fälle behandelt, wo die Gleichung nach einer der Variablen auflösbar ist, und für alle anderen Fälle bemerkt: „nulla suppetit methodus cognoscendi, qua figura praedita sit curva in finito spatio". Auch hier ist (Kap. 11) von der Verwendung von Kurven zur Darstellung von Gleichungswurzeln die Rede, wobei die richtige Bemerkung fällt, daß es sich nicht darum handle, Kurven von möglichst einfacher Gleichung zu finden, sondern solche, die möglichst genau, am besten mechanisch, gezeichnet werden können. Das 13. Kapitel beschäftigt sich mit Kurven von der Eigenschaft, daß zwischen den verschiedenen Ordinaten, welche zur gleichen Abszisse gehören, Beziehungen bestehen; ist z. B. deren Summe konstant, so muß der Koeffizient des zweithöchsten Gliedes in y konstant sein, u. ä.

Der zweite Band, dem ebenfalls eine historische Einleitung vorangeht, bringt eine erschöpfende Darstellung der Infinitesimalrechnung und ihrer Anwendung auf die Geometrie. Aus dem 1. Buch, betitelt: „De quantitatibus infinitesimis et de integratione formularum, quae unam tantum variabilem continent", kommen für unser Gebiet hauptsächlich in Betracht: die Quadratur (Kap. 5) und Rektifikation (Kap. 11) der Kurven; die Komplanation der Rotationsflächen, und Kubatur der Rotationskörper.

Das 2. Buch: „De methodo tangentium directa et inversa, de separatione indeterminatarum et de constructione earum aequationum, in quibus indeterminatae separari non possunt", beginnt mit der Bestimmung der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale ebener

Kurven, und bringt im Anschluß daran die Theorie der Maxima und Minima mit Anwendungen, des weiteren die Lehre von der Integration der Differentialgleichungen nach dem damaligen Stand der Wissenschaft („Methodus tangentium inversa" im Sprachgebrauch jener Zeit). Hier ist auch die im Bd. III², S. 786 erwähnte Abhandlung V. Riccatis: „De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium commentarius" (1752) in ihrem wesentlichen Inhalte angegeben (Kap. 14 und 15).

Das 3. Buch handelt De calculo et usu quantitatum differentialium altiorum graduum, also von Differentialen höherer Ordnung, und verbreitet sich zunächst über Integrationsmethoden für Differentialgleichungen höherer Ordnungen. Kap. 11 bringt eine nicht uninteressante Herleitung des Ausdrucks für den Krümmungsradius ϱ durch folgende einfache differential-geometrische Betrachtungen: Ist MN ein Kurvenbogen, der unendlich klein von der ersten Ordnung ist, und errichtet man in M und N die Normalen, die sich in C schneiden, so ist die Differenz $CM - CN$ unendlich klein von der dritten Ordnung. Daraus wird geschlossen, daß die Krümmung der Kurve mit der des Kreises übereinstimmt, der um C mit Radius CM beschrieben wird; für CM wird dann, ebenfalls geometrisch, die Formel hergeleitet:

$$\frac{ds^3}{dy\,d^2x - dx\,d^2y} = \varrho.$$

Auf die Besprechung der Evoluten folgt die Ableitung des Ausdrucks für den Krümmungsradius in Polarkoordinaten, dann verschiedene Beispiele. Das 12. Kapitel ist den von Joh. Bernoulli untersuchten kaustischen Linien gewidmet. Kap. 13 und 14 enthalten Anwendungen und einige Problemata inversa, das 15. handelt von singulären Punkten, unter welchen jedoch nur Wende- und Rückkehrpunkte verstanden sind (also nicht Doppelpunkte). Außerdem werden hier einige Bemerkungen darüber gemacht, inwieweit eine Kurve durch geradlinige Elemente ersetzt gedacht werden darf. Das 16. Kapitel ist überschrieben: De trajectoriis. Hierbei werden unter „Trajektorien" einer Kurvenschar ganz allgemein Kurven verstanden, quarum constructio peragitur per quantitatem quam sectio curvarum determinat; d. h. also Kurven, die nach irgend einem Gesetz von Schnitten der gegebenen Kurvenschar abhängen, ein Begriff, der sonst nicht üblich zu sein scheint[1]). Ein Beispiel (das 4. des Kapitels) mag erläutern, um was es sich handelt. Die gegebene Kurvenschar werde gebildet

[1]) Vgl. Klügel, Mathematisches Wörterbuch, V, S. 92.

von konzentrischen Kreisen, die von einer Sekante und einem zu ihr parallelen Durchmesser geschnitten werden. Ein zweiter Durchmesser stehe auf dem ersten senkrecht und schneide (Fig. 27) einen Kreis der Schar in A. Trägt man dann auf der Tangente des Punktes A ein Stück AC gleich dem Bogen BD des Kreises zwischen der Sekante und dem ihr parallelen Durchmesser ab, und wiederholt diese Konstruktion für jeden Kreis der Schar, so bildet der geometrische Ort der Punkte C eine „Trajektorie" der Kreisschar in diesem Sinn. In der zweiten Hälfte des Kapitels werden Trajektorien im üblichen Sinn (rechtwinklige und schiefwinklige) behandelt, sowie die sogenannten „reziproken" Trajektorien, von welch letzteren

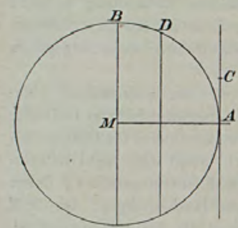

Fig. 27.

Klügel[1]) mit Recht sagt, daß in den Lehrbüchern sehr wenig darüber zu finden sei. Da auch Euler[2]) sich mit diesen Kurven beschäftigt hat, so sei ihre Definition hier kurz angegeben. Eine reziproke Trajektorie hat folgende Eigenschaft: wird sie um eine in ihrer Ebene liegende Achse umgeklappt, und dann längs dieser Achse parallel verschoben, so schneidet die umgeklappte Kurve die ursprüngliche überall unter demselben Winkel. Ist dies nicht bloß für eine bestimmte Achse, sondern auch für jede Parallele dazu der Fall, so heißt die Kurve nach Joh. Bernoulli[3]) „Pantagonia"; auch diese wird besprochen. Den Schluß (Kap. 17 und 18) bildet ein Auszug aus Eulers „Methodus inveniendi".

In Karstens großem Werk: „Lehrbegriff der gesammten Mathematik" kommt für unser Gebiet nur der VII. Teil, „Perspektive" (1775) in Betracht, der in systematischer und eingehender Weise die Kegelschnitte als Zentralprojektionen des Kreises behandelt, und daher bei der projektiven Geometrie in Abschnitt XXV näher besprochen werden wird.

Auch bei Bossut, „Traités de calcul différentiel et de calcul intégral" (Paris 1798) sind verschiedene Kapitel des I. Bandes der Anwendung der Analysis auf die Geometrie gewidmet, Kap. 2 gibt eine kurze Übersicht über die analytische Geometrie: ebene Kurven (bei denen die „courbes géométriques ou algébriques" von den „courbes mécaniques" unterschieden werden), krumme Flächen, Raumkurven. Kap. 3 enthält die Tangente und Normale ebener Kurven in rechtwinkligen

[1]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch, V, S. 136. [3]) s. u. S. 509.
[2]) Opera, T. II, p. 600 (nach Klügel).

und Polarkoordinaten, Kap. 5 und 6 die Bestimmung der Maxima und Minima, Kap. 7 Wende- und Rückkehrpunkte, Kap. 8 Krümmungsradius, Kap. 9 Krümmung der Flächen mit Hinweis auf Eulers „Mémoire sur la courbure des surfaces" (s. p. 545 ff.). Aus der Integralrechnung ist hauptsächlich der Bericht über die Arbeiten von Fagnano, Euler u. a. über die Rektifikation der Kegelschnitte zu erwähnen.

Endlich gibt Vega in seinen für das K. K. Artilleriekorps bestimmten „Vorlesungen über Mathematik" (1786—1802) im II. Band, 6. Hauptstück, 1. Abschnitt, §§ 620—625 das Wichtigste aus der Kurvenlehre und Anwendung der Infinitesimalrechnung auf ebene Kurven, und im 2. Abschnitt, §§ 630—674 eine Darstellung der Kegelschnitte. Bemerkenswert ist, daß diese hier durch ihre Fokaleigenschaften definiert werden, die sonst in den einschlägigen Werken dieser Zeit nicht besonders hervortreten. Im ganzen Werke steht, seinem Zweck entsprechend, die praktische Anwendung im Vordergrund.

Gehen wir nun zur Darstellung der Fortschritte über, die auf den verschiedenen Gebieten der analytischen Geometrie in den Jahren 1759—1799 gemacht worden sind, so hat die wissenschaftliche Forschung in bezug auf die Kegelschnitte nicht gerade viel Neues von Bedeutung produziert. Auch die Behandlungsweise schließt sich meist an die von Euler (Introductio II, Kap. 5) gegebene an; als Fundamentalsätze erscheinen gewöhnlich die auch von Euler als solche bezeichneten (vgl. III[2], S. 779/780), nämlich: 1) daß der Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen eine Gerade ist, und 2) der Satz von den Abschnitten paralleler Sehnenpaare: Wird ein Kegelschnitt von zwei Paaren paralleler Sehnen geschnitten, so ist (s. Fig. 28):

$$\frac{A_1O_1 \cdot B_1O_1}{C_1O_1 \cdot D_1O_1} = \frac{A_2O_2 \cdot B_2O_2}{C_2O_2 \cdot D_2O_2},$$

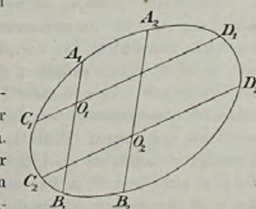

Fig. 28.

gleichgültig, ob die Durchschnittspunkte O_1 und O_2 innerhalb oder außerhalb des Kegelschnitts liegen. Diese beiden Sätze bilden in der Regel den Ausgangspunkt, von dem aus die weiteren bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte abgeleitet werden. Gleich am Anfang unserer Periode stehen zwei Werke, die für den oben erwähnten Gegensatz zwischen synthetischer und analytischer Behandlungsweise charakteristisch sind. Das eine ist: Hamilton: „Treatise of conic sections"

(1758) (Hugh Hamilton, 1729—1805, war eigentlich Theologe, starb als Bischof von Ossory), das andere das S. 454 genannte kleine Buch von Hube. Hamiltons Werk ist ganz in streng euklidischer Form abgefaßt, und vermeidet auch in Äußerlichkeiten peinlich alles, was nur von ferne an algebraische Behandlung erinnern könnte, sogar das Gleichheitszeichen, das durch die Wendung „is equal to“ ersetzt wird; das Produkt zweier in einem Endpunkt A zusammenstoßenden Strecken AB und AC heißt „the rectangle under BAC“ usw. Angenehm für die historische Betrachtungsweise ist, daß der Autor die von ihm neugefundenen Sätze als solche bezeichnet. — Der Grundgedanke des ganzen Werkes ist, die Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kegels abzuleiten, der hier, wie überhaupt meist in der damaligen Zeit, als schiefer Kreiskegel definiert ist[1]). Die streng synthetische Darstellung nötigt den Verfasser, seine Sätze meist für jeden der drei Kegelschnitte besonders zu formulieren und zu beweisen, wodurch die Schreibweise etwas ins Breite geht, und worunter namentlich die Kürze und Klarheit der Formulierung leidet. So erscheint z. B. der zweite der oben (S. 461) erwähnten Fundamentalsätze (I. Buch, Satz 18) in folgender Form:

„If two right lines meeting each other be always parallel to two right lines given in position; according as they both touch or cut, or one of them touches and the other cuts a conic section or opposite sections (d. h. die beiden Äste einer Hyperbel); the squares of the segments of the tangents, or the rectangels under the segments of the secants between the point of concours of the two lines, and the section, or sections, will be in a constant ratio to each other, wheresoever the point of concours of the right lines be taken.“

Das Buch erschöpft seinen Stoff vollständig und ist klar geschrieben, nur die harmonischen Eigenschaften kommen kurz weg; der Autor bemerkt in der Vorrede über De la Hires Methoden (vgl. III², S. 120ff.): „this expedient has rather embarrassed the doctrine of conic sections“. Verschiedene Eigenschaften hat der Verfasser neu entdeckt; bemerkenswert ist, daß der sogenannte Dandelinsche Satz[2]) schon bei ihm auftritt (II. Buch, Satz 37), allerdings in etwas anderer Fassung; er lautet so: „Let GVH (s. Fig. 29) be a right cone, and PAR a conic section in its surface, and LNO a circle which does not meet the section: let its distance AL from the vertex (Scheitel) of the section be equal to AF, the distance of the same vertex from the focus F nearer to this circle; I say, that the intersection of the plane of this circle with the plane of the section will be its

[1]) Vgl. S. 465. [2]) Nouv. Mém. de l'Acad. de Bruxelles 1822, T. II, p. 172.

directrix, and that PN a side (Mantellinie) of the cone intercepted between this circle and any point P in the section will be equal to a right line drawn from the same point to the focus F nearer to this circle“.

Der Verfasser sagt, er habe diesen Satz gefunden bei dem Versuch, den Ursprung der Leitlinie, dem Grundgedanken gemäß, aus der Natur des Kegels herzuleiten. Der Beweis ist charakteristisch für die ganze Darstellungsweise, und sei daher hier kurz wiedergegeben.

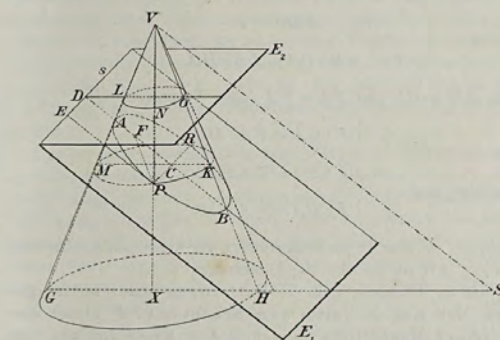

Fig. 29.

E_1 sei die Ebene des Kegelschnitts, E_2 die des Kreises, s ihre Schnittgerade; Ebene GVH sei senkrecht s und schneide s in D, E_1 nach AB, E_2 nach LO, so daß AB die große Achse des Kegelschnitts ist; C sei sein Zentrum, durch C sei eine Ebene senkrecht zur Kegelachse gelegt, die aus dem Kegel den Kreis MK ausschneidet; dieser treffe den Kegelschnitt in P und R. Durch die Spitze V des Kegels sei eine Parallele zu AB gezogen, die die Ebene des Grundkreises in S trifft. Dann ist

1) zu beweisen, daß s die Direktrix des Kegelschnitts ist. Nun ist nach einem vorher bewiesenen Satz vom Kegel:

$$AC \cdot BC : MC \cdot CK = VS^2 : HS \cdot GS,$$

aber:

$$AC \cdot BC = AC^2; \; MC \cdot CK = CP^2.$$

Durch Einsetzen dieser Werte folgt:

$$CA^2 : CP^2 = VS^2 : HS \cdot GS$$

und daraus:

$$CA^2 : (CA^2 - CP^2) = VS^2 : (VS^2 - HS \cdot GS)$$

oder:

$$CA^2 : CF^2 = VS^2 : VG^2.$$

Nun ergibt sich aber durch ähnliche Dreiecke:

$$VS : VG = CA : CM;$$

also nach der letzten Gleichung:

$$AM = CF.$$

Ferner ist:

$$AM : CA = LA : DA,$$

also, da $AM = CF$ und $LA = FA$ (nach Voraussetzung):

$$CF : CA = FA : DA,$$

oder auch:

$$CF : FA = CA : DA.$$

Daraus folgt aber:

$$CF : CA = CA : CD.$$

Darnach ist aber D der Schnittpunkt der Achse mit der Direktrix und da $s \perp AD$ ist, so ist s die Direktrix, q. e. d.

2) ist zu beweisen, daß die Entfernung eines beliebigen Punktes des Kegelschnitts vom Brennpunkt F gleich dem Stück seiner Mantellinie zwischen dem Kreis LO und dem Punkt ist. Als dieser beliebige Punkt wird der schon vorher definierte Punkt P benutzt, so daß auch C nicht mehr der Mittelpunkt, sondern einfach der Fußpunkt des Lotes von P auf AB ist, was aber nicht bemerkt wird; es ist also zu beweisen, daß $PF = NP$. Zu diesem Zweck wird durch P eine Parallele zu AB gezogen, die s in E trifft, dann ist $PE = CD$. Ferner, da DE Direktrix ist:

$$PF : PE = AF : AD.$$

Aus dem Proportionallehrsatz folgt:

$$ML : CD = LA : DA.$$

Da $PE = CD$ und $LA = AF$ ist, ergibt sich aus den beiden letzten Proportionen:

$$ML = PF,$$

und da $ML = PN$, so ist:

$$PF = NP,$$

q. e. d.

Die übrigen vom Verfasser neu gefundenen Sätze sind von geringerer Bedeutung.

Von Hubes Buch (Joh. Michael Hube, 1737—1807; Professor am Kadettenkorps in Warschau) war oben schon die Rede. Der Verfasser will, von Kästner veranlaßt, die Eigenschaften der Kegelschnitte auf analytischem Weg herleiten und geht demgemäß aus von der allgemeinen Gleichung 2. Grades, indem er daraus ähnlich wie Euler (vgl. III², a. a. O.) die erwähnten beiden Haupteigenschaften herleitet. Ebenso werden die übrigen, bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte durch Rechnung entwickelt; man kann indes nicht sagen, daß Hubes Schrift der analytischen Methode zu einer besonderen Empfehlung gereichen würde; der Gang der Rechnung ist recht unübersichtlich; man sieht nicht ein, wie der Verfasser zu seinen Herleitungen kommt; dazu erschweren viele Druckfehler das Verständnis.

Von weiteren zusammenfassenden Werken ist Karstens „Lehrbegriff der gesammten Mathematik" schon genannt. Hier sei nur im Zusammenhang mit den Kegelschnitten eine Bemerkung über den Kegel erwähnt, aus der hervorgeht, daß die Identität des schiefen Kreiskegels und des geraden elliptischen Kegels damals noch nicht bekannt war. Am Schlusse des XV. Abschnittes (Bd. VII, § 269) führt Karsten an, daß Euler Schnitte eines senkrechten Kegels mit elliptischer Grundfläche betrachte, und knüpft daran die Bemerkung: „Unter diesem Begriff sind nicht alle Apollonischen schiefen Kegel enthalten, weil es schiefe Kegel gibt, wovon die senkrechten Schnitte Kreise sind.... Ob und inwieweit dieser elliptische Kegel mit dem Apollonischen einerlei sei, würde eine besondere Untersuchung erfordern."

Von Charles Hutton (1737—1823, Professor der Mathematik an der Militärakademie zu Woolwich, später Examinator am Kollegium der englisch-ostindischen Kompagnie zu Addiscombre, vgl. S. 16) stammt ein Werk: „Elements of conic sections" (1789), das nach der Vorrede für die Royal Military Academy bestimmt ist. Montucla nennt es in seiner Geschichte der Mathematik[1]): „un modèle de précision et de clarté", ein Urteil, das namentlich in bezug auf die Form der Darstellung sehr berechtigt ist. Hutton hat nämlich hier, zum erstenmal, wie er angibt, jede Gleichung auf eine besondere Zeile drucken lassen, was natürlich sehr zur Übersichtlichkeit beiträgt. Das Buch enthält übrigens nicht bloß Kegelschnitte, sondern am Schluß noch eine Reihe praktischer Aufgaben über Körper- und Flächenberechnung, Geodäsie, Mechanik, Ballistik u. a.

[1]) 2. Aufl., III. Bd., S. 13.

Auch Fergolas Buch: „Le sezioni coniche" (1791), über das ich nur nach Loria[1]) berichten kann, bringt nichts wesentlich Neues, hebt aber die Analogie zwischen den drei Kurven in der Art hervor, daß die entsprechenden Sätze einander gegenübergestellt werden. Das Gleiche ist über die Schrift von Riche de Prony, die rein analytisch verfährt, zu sagen: „Exposition d'une nouvelle méthode pour construire les équations indéterminées, qui se rapportent aux sections coniques" (1790).

Die Abhandlungen über Einzelheiten aus der Lehre von den Kegelschnitten sind natürlich ziemlich zahlreich, aber viel Neues, Bemerkenswertes ist nicht zutage gefördert worden. Freilich ist ein Gebiet der Mathematik, das späterhin eine damals noch ungeahnte Ausdehnung gewann, die Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen, von Untersuchungen über die Rektifikation der Kegelschnitte ausgegangen, speziell von Sätzen über Ellipsenbögen, deren Summe oder Differenz sich algebraisch ausdrücken und daher geometrisch konstruieren läßt.

Euler hat, wie es scheint, die Wichtigkeit und Tragweite derartiger Sätze erkannt; er suchte die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf dieses Gebiet zu lenken, indem er 1754 in den Leipziger Annalen anonym den Satz zum Beweis vorlegte, daß die Differenz gewisser Ellipsenbögen rektifizierbar sei, und gab dadurch den ersten Anstoß zu weiteren Untersuchungen. Da jedoch diese ganze Frage in den XXVI. Abschnitt gehört, werden die einschlägigen Arbeiten dort besprochen werden. Hier sei in diesem Zusammenhang nur noch eine Note von Euler aus dem Jahre 1773 erwähnt: „Nova series infinita maxime convergens perimetrum ellipsis exprimens"[2]), worin er für den Ellipsenquadranten die gut konvergierende Reihe herleitet:

$$\frac{c\pi}{\sqrt{2}}\left\{1-\frac{1\cdot1\cdot n^2}{2\cdot4\cdot2}-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\cdot n^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot n^6}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot6}-\cdots\right\}$$

$$\left(c^2=a^2+b^2;\ \ n=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right).$$

Eine Anzahl von Untersuchungen befassen sich mit Maximal- oder Minimalaufgaben, die zu den Kegelschnitten in Beziehung stehen.

[1]) Nicola Fergola e la scuola di matematica che lo ebbe a duce (Genua 1892).
[2]) N. C. P. XVIII, p. 71—84. Da wir die Veröffentlichungen der St. Petersburger Akademie in diesem Abschnitt oft zu zitieren haben, mögen sie mit folgenden Abkürzungen bezeichnet werden:
N. C. P. = Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,
A. P. = Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,
N. A. P. = Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,
M. P. = Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

Hierher gehört eine Reihe von Sätzen, die Edward Waring[1]) in seinem eigenartigen Buch: „Proprietates algebraicarum curvarum" (Cambridge 1762), meist ohne Beweis, angibt. Es ist ein geistreiches, vielseitiges Werk, durchaus original gedacht, und jedenfalls eine der bedeutendsten Erscheinungen der ganzen Epoche auf diesem Gebiet, leider aber durch die knappe Ausdrucksweise und überhaupt durch die ganze Darstellung nicht leicht verständlich. Das Buch scheint wohl aus diesem Grunde den Zeitgenossen, wenigstens auf dem Kontinent, ziemlich unbekannt geblieben zu sein; in den zahlreichen Abhandlungen unseres Zeitraumes, ebenso bei Klügel (Mathematisches Wörterbuch) konnte ich es nicht erwähnt finden[2]); auch sind die von Waring angegebenen neuen Gedanken und Gesichtspunkte, soviel ich sehe, nicht weiter verfolgt worden. — Das Werk ist in 4 Bücher eingeteilt, von denen hier hauptsächlich das vierte Buch in Betracht kommt. Das von Waring ausgedachte Prinzip, aus dem er seine Sätze herleitet, wird folgendermaßen formuliert: „quantitates, quae ad singulum curvae punctum recipiant maximum vel minimum, perpetuo evadunt inter se aequales". Der Sinn dieses in seiner Kürze nicht recht klaren Satzes ist etwa folgender: Man kann die Bedingungen aufstellen, unter welchen irgend eine Größe für einen Kurvenpunkt einen extremen Wert annimmt (so ist z. B. für einen Punkt P einer beliebigen Kurve die Summe seiner Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 dann ein Minimum, wenn PF_1 und PF_2 mit der Kurventangente gleiche Winkel bilden). Wenn es nun eine Kurve gibt, wo diese Bedingung für jeden Kurvenpunkt erfüllt ist (also in dem angeführten Beispiel die Ellipse), so ist für diese Kurve die betreffende Größe konstant. Dieses Prinzip wird nun z. B. in folgender Weise benutzt: Es wird bewiesen, daß ein Vieleck, das einem geschlossenen Oval so umbeschrieben ist, daß seine Seiten von den Berührpunkten halbiert werden, unter allen dem Oval umbeschriebenen Vielecken von gleicher Seitenzahl den kleinsten Inhalt hat. Daraus wird nun geschlossen, daß alle solche Vielecke, die demselben Oval umbeschrieben sind, gleichen Inhalt haben. Ob es aber überhaupt mehrere solche gibt, und wie man sie findet, diese Frage wird gar nicht berührt. Solche und ähnliche, für beliebige Ovale geführte Beweise werden dann auf Kegelschnitte angewendet und liefern Sätze wie die folgenden:

Sind einer Ellipse zwei Polygone von gleicher Seitenzahl so umbeschrieben, daß jede Seite von ihrem Berührpunkt halbiert wird, so haben sie gleichen Flächeninhalt (Theorem 19).

Verbindet man die Ecken (oder Berührpunkte) beider Polygone

[1]) S. 92 ff. [2]) Dagegen ist bei Chasles, Aperçu historique, p. 153, das Buch erwähnt.

mit dem Mittelpunkt, so ist die Summe der Quadrate dieser Verbindungslinien für beide Polygone dieselbe.

Werden einer Ellipse zwei Polygone von gleicher Seitenzahl so einbeschrieben, daß je zwei anstoßende Seiten mit der Tangente im Eckpunkt gleiche Winkel machen, so haben sie gleichen Umfang (Theorem 20).

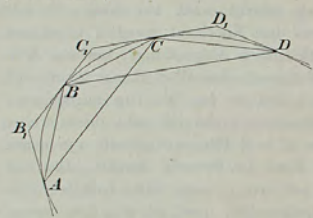

Fig. 30.

Sind einem Kegelschnitt (Fig. 30) zwei Polygone von gleicher Seitenzahl so einbeschrieben, daß je eine zwei Seiten spannende Diagonale der Tangente des gegenüberliegenden Eckpunkts parallel ist (also z. B. $AC \parallel B_1C_1$; $BD \parallel C_1D_1$ usw.), so haben die Polygone gleichen Inhalt (Probl. 24, Exempl. 2) u. ä.

Was die Darstellungsweise betrifft, so werden zunächst die Sätze, meist ohne Beweis, angeführt; erst am Schlusse wird das Prinzip genannt, aus dem sie fließen und das hier zum besseren Verständnis vorangestellt wurde. Mit diesem Prinzip verbindet Waring ein zweites, dessen Inhalt folgender ist: Eliminiert man aus zwei Gleichungen in x und y vom Grade m und n eine Unbekannte, etwa x, so ist für die resultierende Gleichung in y die Summe der „Wurzeln" (d. h. der Ordinaten der Schnittpunkte der beiden durch die Gleichungen dargestellten Kurven) gleich dem negativen Koeffizienten des zweithöchsten Gliedes in y, also des Gliedes von der Ordnung $mn - 1$. Dieser hängt aber nur von Koeffizienten der Glieder höchster und zweithöchster Ordnung in den beiden ursprünglichen Gleichungen ab. Das Gleiche gilt natürlich bei der Elimination von y. Stimmen also zwei Paare von Gleichungen in diesen Gliedern überein, so ist die Summe der Schnittpunktskoordinaten der ihnen entsprechenden Kurvenpaare beidemal dieselbe. Da Waring jedoch seinen Sätzen meist keine Beweise beifügt, so ist nicht recht ersichtlich, wo und in welcher Weise dieses Prinzip Anwendung findet[1]). — Wir werden von Warings Buch noch öfter zu sprechen haben.

[1]) Auch hier ist es vielleicht von Interesse, die Formulierung bei Waring kennen zu lernen: „Sint duae aequationes (m et n dimensionum) duas incognitas quantitates x et y habentes; reducantur hae duae aequationes in unam, ita ut exterminetur altera incognita quantitas x: si aequatio resultans ad nm dimensiones ascendat, summa eius radicum pendet e terminis, in quibus inveniuntur

Es sind in diesem Zusammenhang (Maxima und Minima) noch einige Abhandlungen von Euler und Fuß zu nennen. Die erste von Euler: „De ellipsi minima dato parallelogrammo rectangulo circumscribenda"[1]) ergibt das Resultat, daß die Halbachsen der gesuchten Ellipse $a = f\sqrt{2}$; $b = g\sqrt{2}$ sind, wenn f und g die beiden Rechtecksseiten bezeichnen. Auch für die Ellipse von kleinstem Umfang wird die entsprechende Aufgabe in Angriff genommen, die natürlich hier nur durch ein Annäherungsverfahren lösbar ist. Das hier für ein Rechteck gelöste Problem hat Euler später auf ein beliebiges Viereck verallgemeinert in einer Arbeit vom 4. September 1777[2]): „Problema geometricum, quo inter omnes ellipses, quae per data quatuor puncta traduci possunt, ea quaeritur, quae habet aream minimam"[3]). Die hier gestellte Aufgabe wird in der Weise gelöst, daß zwei Gegenseiten des Vierecks $ABCD$, AB und CD als Koordinatenachsen dienen, und ihr Schnittpunkt O als Anfangspunkt. Zur Abkürzung wird nun gesetzt: $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ und $OD = d$, und gezeigt, daß ein Kegelschnitt:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

durch die vier Ecken des Vierecks geht, wenn

$$A = cd,\; C = ab,\; 2D = -cd(a+b);\; 2E = -ab(c+d);\; F = abcd$$

ist; hierbei ist also B noch willkürlich und wird als variabler Parameter eingeführt, so daß die Fläche des Kegelschnitts als eine Funktion von B erscheint. Es mag bemerkt werden, daß die etwas umständliche Integration, die zur Berechnung dieser Fläche führt, in eleganter Weise durch Benutzung der affinen Verwandtschaft von Kreis und Ellipse bewerkstelligt wird. Der so gewonnene Ausdruck wird nach B differenziert und liefert als Bedingung für den kleinsten Inhalt folgende Gleichung 3. Grades für B:

$$F \cdot B^3 - 4DE \cdot B^2 + B(3CD^2 + 3AE^2 - ACF) - 2ACDE = 0,$$

wo natürlich für die Koeffizienten $A, C, D, E, F \ldots$ ihre oben be-

n et $n-1$ dimensiones in una, m et $m-1$ dimensiones in altera, et sic deinceps; et exinde: si modo sint duae aliae aequationes n et m dimensionum, quae involvant quantitates z et v, et sint termini in his respectivis aequationibus, in quibus inveniuntur dimensiones n et $n-1$, m et $m-1$ respective, iidem ac in duabus praedictis aequationibus, tum summa omnium valorum quantitatum x et y eadem erit ac summa omnium valorum quantitatum z et v".

[1]) A. P. 1780, Tl. II, p. 3—17. [2]) In den N. A. P. und M. P. ist das Datum angegeben, an dem die betreffende Arbeit vorgelegt wurde; hierauf beziehen sich die Angaben im folgenden. [3]) N. A. P. IX, p. 132—145.

stimmten Werte in $a, b, c, d \ldots$ einzusetzen sind. Euler zeigt noch, daß diese Gleichung mindestens eine reelle Wurzel hat und macht eine Anwendung auf den Spezialfall des Parallelogramms.

In einer zweiten Abhandlung, die am gleichen Tage vorgelegt wurde, löst Euler dieselbe Aufgabe für das Dreieck. Sie ist betitelt: „Solutio problematis maxime curiosi, quo inter omnes ellipses, quae circa datum triangulum circumscribi possunt, ea quaeritur cuius area sit omnium minima“[1]). Da sich hier von den fünf unabhängigen Konstanten der allgemeinen Ellipsengleichung nur drei bestimmen lassen, so hängt der Flächeninhalt noch von zwei unabhängigen Variabeln ab. Nimmt man zwei Seiten des gegebenen Dreiecks, etwa a und c, als Koordinatenachsen, so lautet die Gleichung der gesuchten Ellipse:

$$cx^2 + acxy + ay^2 - ac^2x - a^2cy = 0.$$

Aus dieser Gleichung leitet Euler her, daß der Mittelpunkt der Ellipse in den Schwerpunkt des Dreiecks fällt, und daß die Tangente in jeder Ecke des Dreiecks der Gegenseite parallel ist. An die erste dieser beiden Arbeiten knüpft Fuß in einer Note vom 31. August 1795: „Dilucidationes super problemate geometrico de ellipsi minima per data quatuor puncta ducenda“[2]) an und diskutiert die dort gefundene Gleichung 3. Grades eingehender mit dem Resultat, daß von den drei Wurzeln derselben eine eine Ellipse, die beiden andern Hyperbeln bestimmen, die natürlich dem Problem in der Eulerschen Fassung nicht genügen, wohl aber, wie Fuß bemerkt, dem allgemeineren: „Inter omnes lineas curvas secundi ordinis per data quatuor puncta transeuntes eas invenire, in quibus rectangulum ex semiaxibus factum sit omnium minimum“. Fuß berechnet ein Zahlenbeispiel und wendet seine Resultate auch auf den Fall an, daß statt zwei Punkten einer mit seiner Tangente gegeben ist.

Um Eulers Arbeiten über Kegelschnitte hier vollends zu besprechen, sei noch eine Untersuchung von ihm erwähnt: „Solutio trium problematum difficillimorum ad methodum tangentium inversam pertinentium“. Die Arbeit wurde am 12. November 1781 eingereicht, aber erst 1826 veröffentlicht[3]). Die späte Veröffentlichung erklärt sich damit, daß Euler vor seinem Tode den Wunsch geäußert hat, die Veröffentlichungen der Petersburger Akademie möchten noch 20 Jahre nach seinem Tode Arbeiten von ihm enthalten[4]), ein Wunsch, den die Akademie in Ehren gehalten hat (s. die Vorrede zu M. P. XI). Die drei Aufgaben, die Euler hier behandelt, sind:

[1]) N. A. P. IX, p. 146—153. [2]) Ebenda, XI, p. 187—212. [3]) M. P. X. p. 16—26. [4]) In den M. P. ist sogar von 40 Jahren die Rede.

1) Alle Kurven zu finden von der Eigenschaft, daß die von zwei festen Punkten nach einem beliebigen Kurvenpunkt gezogenen Strahlen mit der Tangente gleiche Winkel machen.

2) Gegeben eine Gerade und auf ihr ein Punkt A. Von A ist nach einem beliebigen Kurvenpunkt ein Strahl AP gezogen, der nach seiner Reflexion an der Kurve die Gerade in O schneidet. Alle Kurven von der Eigenschaft zu finden, daß $AP + PO$ konstant sei.

3) Alle Kurven von der Eigenschaft zu finden, daß die von zwei festen Punkten auf eine beliebige Tangente gefällten Lote ein konstantes Produkt haben.

Die Untersuchung liefert das bemerkenswerte Resultat, daß sich in allen drei Fällen nur Kegelschnitte ergeben, daß es also außer diesen keine Kurven gibt, die eine der genannten drei Eigenschaften besitzen.

In den A. E. (1771), p. 131 ff., leitet ein Anonymus einen nicht uninteressanten Satz her, den er selbst als „Theorema elegantissimum“ bezeichnet, nämlich: Zieht man in einem Kegelschnitt von einem Brennpunkt O aus drei Radienvektoren OF, OG, OH und beschreibt um O einen Kreis mit dem Radius $r = \sqrt[3]{OF \cdot OG \cdot OH}$, der den Kegelschnitt in F', G', H' schneidet, so ist:

$$\frac{p}{r} = \frac{\Delta F'G'H'}{\Delta FGH},$$

wo p der Parameter des Kegelschnittes ist $\left(p = \frac{b^2}{a}\right)$.

Endlich untersucht Fuß in einer Arbeit vom 19. April 1798, betitelt: „Observationes circa ellipsin quandam prorsus singularem“[1]), die Kurve, die entsteht, wenn man in einem Kreis um den Koordinatenursprung jede Ordinate um ihre Abszisse verlängert. Die Kurve ist eine Ellipse, von der eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften nachgewiesen werden, z. B. gilt für ihre Halbachsen a und b: $ab = r^2$; $a - b = r$ (r = Radius des Kreises); die vier lunulae, die von dem Kreis und der Ellipse gebildet werden, haben gleichen Inhalt; die Differenz zwischen dem Umfang der Ellipse und dem des Kreises ist nahezu gleich den von der Ellipse eingeschlossenen Kreisbögen, u. a.

Höhere ebene Kurven.

Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, sind in der Theorie der höheren ebenen Kurven keine wesentlich neuen Ideen von allgemeinerer Bedeutung zu verzeichnen; die meisten einschlägigen Arbeiten

[1]) N. A. P. XV, p. 71—87.

sind Spezialuntersuchungen über einzelne Kurven und Kurvengattungen, die freilich manches Interessante zutage gebracht haben, aber meist isoliert stehen und wenig Zusammenhang miteinander zeigen. Dadurch ist natürlich die Übersicht über diesen Zweig der Mathematik und seine Entwicklung erschwert; immerhin lassen sich wenigstens einige Gruppen verwandter Untersuchungen zusammenfassen. — Die Literatur ist meist in Akademieschriften zerstreut; größere Werke, die sich speziell mit den ebenen Kurven befassen, sind wenig erschienen. Zu nennen ist hier hauptsächlich das schon S. 467 angeführte und charakterisierte Buch von Waring: „Proprietates algebraicarum curvarum". Über das auf die Kegelschnitte bezügliche vierte Buch ist oben schon berichtet worden. Hier ist nun der Inhalt der beiden ersten Bücher in der Kürze anzugeben.

Das 1. Buch enthält allgemeine Sätze über algebraische Kurven beliebiger Ordnung und beginnt mit einer Definition der Durchmesser, von denen Waring verschiedene Ordnungen unterscheidet. Deren Definition läßt sich am einfachsten folgendermaßen angeben: Wenn in einem schiefwinkligen Koordinatensystem zu jeder Abszisse $n+1-i$ Ordinaten einer Kurve n^{ter} Ordnung gehören, deren algebraische Summe verschwindet, so heißt die Abszissenachse ein Durchmesser i^{ter} Ordnung der Kurve. Es werden die analytischen Bedingungen hierfür angegeben; für einen Durchmesser 1. Ordnung muß z. B. in der Kurvengleichung:

$$Ay^n + (a + bx)y^{n-1} + (c + dx + ex^2)y^{n-2} + \cdots = 0$$

das 2. Glied mit y^{n-1} verschwinden. Daran schließen sich Formeln für Koordinatentransformation; mit Hilfe derselben wird z. B. untersucht. ob eine Gerade ein Durchmesser ist, indem sie einfach als Abszissenachse eingeführt wird. Ferner wird die Anzahl der Durchmesser 1. Ordnung bestimmt, die ihre Ordinaten unter einem gegebenen Winkel α schneiden, und gezeigt, daß diese Zahl höchstens $= 2n$ sein, für $\alpha = 90^0$ aber höchstens $= n$ sein kann. Weitere Sätze, die sich hier anschließen und die der Verfasser als neu bezeichnet, sind:

Eine Kurve, deren Durchmesser alle parallel sind, hat keine hyperbolischen Äste, außer wenn die Asymptoten auch alle parallel sind, und keine parabolischen, wenn nicht alle nach derselben Richtung konkav oder konvex sind (Theorem 2).

Es gibt nicht mehr als $\frac{n}{m}$ Richtungen paralleler Ordinaten, welche die Kurven in $(n-m)$ Punkten schneiden (Theorem 5).

Es wird aus der Kurvengleichung eine Beziehung für die Abstände eines Kurvenpunktes von 2, 3, 4 usw. festen Punkten hergeleitet (Problem 7).

Schneidet eine um einen festen Punkt rotierende Gerade die Kurve, so gibt es für jede Lage einen Punkt so, daß die algebraische Summe der Abstände aller Schnittpunkte von diesem verschwindet. Der Ort dieser Schnittpunkte ist eine Kurve von höchstens n^{tem} Grad.

Eigenschaften, die nur von den Gliedern n^{ter} und $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung abhängen, sind für zwei Kurven, die in diesen Gliedern übereinstimmen, dieselben; also hat z. B. eine Kurve mit ihren Asymptoten (diese als zerfallende Kurve n^{ter} Ordnung betrachtet) alle Durchmesser gemein, ebenso alles, was von den Durchmessern abhängt, z. B. die Mittelpunkte (Mittelpunkt heißt bei Waring ein Punkt eines Durchmessers von der Art, daß die algebraische Summe der Abstände aller Schnittpunkte dieses Durchmessers von dem Punkt verschwindet), ferner die „curva diametralis", die Waring definiert als: „locus ultimarum diametrorum intersectionum". Was damit gemeint ist, ist nicht recht klar; vielleicht die Enveloppe der Durchmesser?

Von besonderem Interesse ist das 10. Theorem, welches behauptet, daß keine algebraische Kurve, die ein Oval ohne Doppelpunkt hat, allgemein quadriert werden könne, oder, wie Waring sagt: „Nulla datur algebraica curva, quae habet ovalem sese in dato puncto haud intersecantem, quae generaliter quadrari potest". Es ist dies offenbar derselbe Satz, der bei Newton, Principia I, Lemma 28, so lautet: „Nulla extat figura ovalis, cuius area, rectis pro lubitu abscissa, possit per aequationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri", und an den sich eine Kontroverse geknüpft hat[1]). Der Beweis bei Waring ist so charakteristisch für dessen prägnante Ausdrucksweise, daß wir ihn hier im Wortlaut anführen wollen: „Inveniatur enim generalis expressio ad aream, e. g. terminis abscissae x, fiat haec expressio vel area impossibilis, cum x fiat α vel π, et ovalis continetur intra valores abscissae α et π; inveniatur fluxio datae expressionis, sed methodus fluxiones inveniendi eadem est ac methodus inveniendi aequationes, quarum radices sint limites inter radices α et π datarum aequationum; et si radices α et π datarum aequationum sint possibiles, possibilis etiam erit radix inter eas posita; ergo necessario ovalis se intersecabit".

[1]) Vgl. Brougham (ist der schon S. 456, Fußnote, genannte Mathematiker) and Routh, Analytical View of Sir Isaac Newtons Principia (1855), p. 73. Dort wird behauptet, der Satz sei falsch, da jede Kurve von der Form:

$$y^m = n^m x^{(n-1)m}(a^n - x^n)$$

quadrierbar sei. Zeuthen hat darauf hingewiesen, daß diese Kurve gar kein eigentliches Oval darstellt, sondern im Koordinatenursprung einen Selbstberührungspunkt hat. (Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton; Bulletin de l'Académie de Copenhague, 1895.)

Der Gedankengang scheint mir etwa folgender zu sein. Ist $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve, die das Oval bildet, und ist dasselbe zwischen den Ordinaten eingeschlossen, deren Abszissen α und π sind; ist ferner $F(x) = \int f(x)\,dx$, so wird sowohl $f(x)$ als $F(x)$ außerhalb der Grenze α und π imaginär. Dann muß aber $F(x)$, wenn es eine algebraische Funktion sein soll, zwischen α und π ein Maximum oder Minimum haben, und es wird dann $F'(x) = f(x) = 0$, d. h. das Oval schneidet die Abszissenachse. Daraus schließt nun Waring, wenn ich den Schluß des obigen Beweises recht verstehe, ohne weiteres, daß das Oval sich selbst schneide. Dabei müßte aber doch angenommen sein, daß die Abszissenachse ein Durchmesser des Ovals ist; das wird aber nirgends gesagt, ebensowenig wird eine scharfe Definition des „Ovals" gegeben; auch was die „radices datarum aequationum" sind, ist nicht recht klar; namentlich aber scheint mir nicht genügend berücksichtigt, daß wegen des Ovals $f(x)$, und damit auch $F(x)$, eine doppeldeutige Funktion sein muß, also noch mit einer Irrationalität behaftet ist.

Als eine „proprietas maxime elegans" aller Archimedischen Parabeln (d. h. Kurven mit lauter parallelen Durchmessern) wird folgender Satz angeführt: Ist

$$y^n + ay^{n-1} + (b + cx)\,y^{n-2} + \cdots = 0$$

die Gleichung einer solchen Kurve, so ist deren Subtangente:

$$T = \frac{n y^n + (n-1)\,a y^{n-1} + (n-2)(b + cx)\,y^{n-2} + \cdots}{c \cdot y^{n-2} + \cdots}.$$

Gibt man T einen konstanten Wert, so gibt es n^2 Kurvenpunkte, zu denen dieselbe Subtangente gehört, und für alle diese ist die Summe der Ordinaten konstant.

Ferner:

Ist die Gleichung einer Parabel:

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$$

und sind $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ die Ordinaten der Maximal- und Minimalpunkte, $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Abszissen der Schnittpunkte mit der x-Achse, so ist:

$$\frac{y_1 y_2 y_3 \cdots y_{n-1}}{(x_1 - x_2)^2 \cdots (x_1 - x_n)^2 (x_2 - x_3)^2 \cdots (x_2 - x_n)^2 \cdots (x_{n-1} - x_n)^2} = \frac{a^n}{n^n}.$$

Zu diesen und ähnlichen Untersuchungen bemerkt Waring mit berechtigtem Stolz, daß auch die algebraischen Sätze, die ihnen zugrunde liegen, von ihm selbst gefunden seien. Der letzte Satz zeugt z. B. von der Kenntnis einer wesentlichen Eigenschaft der Diskriminante.

Das 2. Buch handelt von „Kurvoiden". Die Bezeichnung ist nach Analogie von „Cykloide" gebildet, und bedeutet eine Verallgemeinerung dieser Kurve, d. h. eine „Kurvoide" wird von einem festen Punkt einer Kurve beschrieben, wenn diese auf einer Geraden abrollt. Rollt sie, statt auf einer Geraden, auf einer anderen Kurve ab, so entsteht eine „Epikurvoide". Behandelt werden insbesondere Aufgaben über Rektifizierbarkeit und Quadratur der Kurvoiden, deren Lösung von der Rektifizierbarkeit der rollenden Kurve abhängt. Auch wird der Satz aufgestellt, daß alle Kurven, die durch eine aequatio fluxionalis bestimmt sind, durch Kurvoiden und Epikurvoiden konstruiert werden können.

Das 3. Buch beschäftigt sich mit Raumgeometrie und wird im nächsten Kapitel besprochen.

Unter den kürzeren Abhandlungen allgemeineren Charakters seien zunächst einige aufgeführt, die sich mit den Formeln für den Krümmungsradius, für Wende- und Rückkehrpunkte beschäftigen. Die erste ist eine nicht ganz einwandfreie Schrift von Johann Jakob Hentsch (1723 bis 1764, Professor der Mathematik in Helmstädt): „De curvis punctum inflexionis vel regressus habentibus"[1]. Schon die Definitionen, bzw. die Begründungen seiner Bezeichnungen, die Hentsch gibt, passen nicht für alle Fälle, wie man leicht sieht; sie lauten:

für den Wendepunkt: „punctum inflexionis ob mutatam curvae faciem, rectae assumtae vel puncto fixo obversam";

für den Rückkehrpunkt: „punctum regressus ob mutationem motus, qui ordine fit retrogrado et versus principium, a quo curva moveri coeperat, respicit".

Abgesehen von der mangelnden Klarheit gilt z. B. die erste nicht, wenn die recta assumta die Wendetangente ist. — Hentsch folgert nun daraus weiter:

1) Für einen Wendepunkt ist der Abschnitt der Abszissenachse zwischen dem Ursprung und der Kurventangente ein Minimum oder Maximum.

2) Für einen Rückkehrpunkt ist die Abszisse ein Maximum oder Minimum. (Dies ist aber offenbar auch der Fall, wenn die Kurventangente parallel der Ordinatenachse ist.)

Die analytischen Bedingungen, die Hentsch für Wende- und Rückkehrpunkte herleitet, sind zum Teil sonderbar ausgedrückt, und lassen eine Verwechslung von Differential und Differentialquotient erkennen. Er sagt z. B., in einem Punkt mit vertikaler Tangente sei $dy = \infty$ (!), die Bedingung für einen Wendepunkt sei entweder $d^2y = 0$, oder, bei vertikaler Wendetangente, $d^2y = \infty$ (!). — Die

[1]) Nov. Act. Erud., 1762, p. 256.

Betrachtungen werden dann auch auf den Fall ausgedehnt, „si in Curva Semiordinatae a puncto fixo ducantur“, d. h. auf Polarkoordinaten.

Aus dem gleichen Jahre stammt eine Arbeit von Fontana[1]) über Kurven in Polarkoordinaten, nämlich: „De invenienda formula radii osculatoris in curvis ad umbilicum relatis ex data formula eiusdem in curvis relatis ad axem, eruendisque inde curvarum evolutis“[2]). Es handelt sich also um Übertragung der Formeln für Krümmungsradius und Evolute von rechtwinkligen (x, y) auf Polarkoordinaten (z, φ).

Ist $du = z d\varphi$, so bestehen die Beziehungen:

$$x^2 + y^2 = z^2;\quad dx^2 + dy^2 = du^2 + dz^2.$$

Führt man mit Hilfe dieser Gleichungen z und u an Stelle von x und y in den bekannten Ausdruck für den Krümmungsradius ϱ ein, so ergibt sich:

$$\varrho = \frac{(dz^2 + du^2)^{3/2}}{z(dz\,d^2u - du\,d^2z) + du(dz^2 + du^2)}.$$

Ist nun (s. Fig. 31) O der Koordinatenursprung, sind P und p zwei konsekutive Kurvenpunkte, C und c die ihnen entsprechenden Punkte der Evolute, ist ferner auf Op eine Strecke $OR = OP$ und auf Oc ebenso $OD = OC$ abgetragen, endlich von O auf PC das Lot OF gefällt, so ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke PRp, PFO und OFC, CDc:

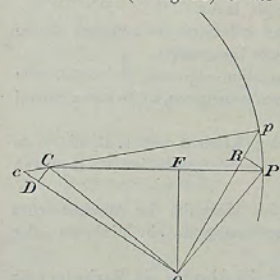

Fig. 31.

$$\frac{Pp}{PO} = \frac{PR}{PF} = \frac{Rp}{FO}$$

und

$$\frac{OF}{CD} = \frac{OC}{Cc},$$

[1]) Den Bericht hierüber verdanke ich einer gütigen Mitteilung des Herrn Vivanti, der ursprünglich der Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie ein besonderes Kapitel im XXVI. Abschnitt zu widmen gedachte. Da jedoch die meisten hierher gehörigen Arbeiten schon im XXIV. Abschnitt besprochen werden, hat Herr Vivanti nach einem Vorschlage des Herrn Herausgebers mir sein Manuskript in überaus dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt, damit nicht derselbe Stoff in zwei verschiedenen Abschnitten behandelt würde. Die Stellen, die von Herrn Vivanti herrühren, werden überall durch Verweisung auf diese Fußnote als solche bezeichnet werden.

[2]) Analyseos sublimioris opuscula (Venedig 1763), Op. III, p. 120—136.

woraus sich ergibt:

$$PF = \frac{PO \cdot PR}{Pp} = \frac{z\,du}{\sqrt{dz^2 + du^2}}$$

und:

$$OF = \frac{PF \cdot Rp}{PR} = \frac{z\,dz}{\sqrt{dz^2 + du^2}},$$

$$CD = \frac{OF \cdot Cc}{CO} = \frac{z\,dz}{\sqrt{dz^2 + du^2}} \cdot \frac{Cc}{OC},$$

also ist:

$$FC = PC - PF = \varrho - \frac{z\,du}{\sqrt{dz^2 + du^2}}.$$

Setzt man nun $OC = Z$; $CD = dU$, so ist nach dem Obigen:

$$Z = OC = \sqrt{OF^2 + FC^2} = \sqrt{\frac{z^2dz^2}{dz^2 + du^2} + \left(\varrho - \frac{z\,du}{\sqrt{dz^2 + du^2}}\right)^2}$$

und, da $Cc = d\varrho$ ist:

$$dU = CD = \frac{z\,dz\,d\varrho}{\sqrt{z^2dz^2 + \left(\varrho\sqrt{dz^2 + du^2} - z\,du\right)^2}}.$$

Aus diesen Gleichungen in Verbindung mit der Kurvengleichung $f(z, u) = 0$ ergibt sich durch Elimination von z und u die Differentialgleichung der Evolute.

Euler entwickelt die Formel für den Krümmungsradius auf elegante Weise in seiner Arbeit: „Methodus facilis investigandi radium osculi ex principio maximorum et minimorum petita“[1]) (11. September 1776). Der Inhalt ist kurz folgender: Ist O ein Punkt auf der Normalen eines Kurvenpunktes Y, und ändert sich OY nicht, wenn man zum zweiten konsekutiven Kurvenpunkt weitergeht, d. h. OY zweimal differenziert, so ist O der Krümmungsmittelpunkt. Daraus ergeben sich die bekannten Formeln für den Krümmungsradius.

Eine übersichtliche Zusammenstellung der Formeln für Polarkoordinaten findet sich bei Gurief[2]): „Mémoire sur la résolution des principaux problèmes, qu'on peut proposer dans les courbes, dont les coordonnées partent d'un point fixe“[3]) (22. Mai 1797). Gurief führt für die Koordinaten folgende Bezeichnungen ein (vgl. Fig. 32):

$$\text{Radiusvektor } FM = z;\quad \triangle BFM = \omega,$$

ferner werden benutzt der Winkel der Tangente gegen die Achse $\angle MTF = \varphi$; das in F auf FM errichtete Lot bis zur Tangente FR, das als Subtangente bezeichnet wird; die rechtwinkligen Koordinaten

[1]) N. A. P. VII, p. 83—86. [2]) S. 351 ff. [3]) N. A. P. XII, p. 176—191.

des Punktes M sind $BP = x$; $MP = y$; ferner ist $PF = v$, endlich das Bogenelement ds. Damit wird nun abgeleitet:

$$\operatorname{tg} TMF = \frac{z\,d\omega}{dz}; \quad RF = \frac{z^2\,d\omega}{dz};$$

$$dy = dz \cdot \sin\omega + z\cos\omega\,d\omega; \quad dx = -\,dz\cos\omega + z\sin\omega\,d\omega.$$

Krümmungsradius: $$R = \frac{\left[z^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2\right]^{3/2}}{z^2 + 2\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2 - z^2\frac{d^2z}{d\omega^2}};$$

daraus die Bedingung für Wendepunkte:

$$z^2\frac{d^2z}{d\omega^2} - 2\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2 - z^2 = 0.$$

Ferner ergibt sich:

Flächenelement: $\frac{z^2\,d\omega}{2}$,

Volumelement des Rotationskörpers: $\frac{2\pi}{3} z^3 \sin\omega\,d\omega$,

Oberflächenelement des Rotationskörpers: $2\pi z \sin\omega \sqrt{z^2\,d\omega^2 + dz^2}$.

Diese Formeln werden auf einige Beispiele angewendet. — Die Arbeit ist hauptsächlich darum bemerkenswert, weil hier klar und konsequent überall Winkel und Radiusvektor verwendet werden, während sonst vielfach statt des ersteren Kreisbögen von irgend einem Radius auftreten.

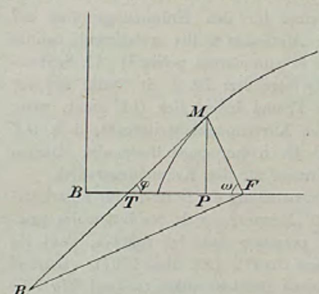

Fig. 32.

Einige andere Arbeiten beschäftigten sich mit sonstigen Fragen aus der Kurvenlehre. Die erste stammt von Kästner, nämlich: „De minimo in reflexione a curvis"[1]). Dort wird, wohl zum erstenmal, ein rein geometrischer Beweis des Satzes geführt: Wenn ein von einem Punkt O ausgehender Lichtstrahl an einem Kurvenpunkt M so reflektiert wird, daß er durch einen anderen Punkt P geht, so ist $OM + MP$ ein Minimum. Die ins Unendliche verlaufenden Äste einer Kurve behandelt eine kleine Schrift eines württembergischen

[1]) Dissert. math. et phys. Altenburgenses 1758.

Theologen, J. G. Pfeiffer (geb. 1766, gest. als Pfarrer in Steinheim a. d. Murr): „De curvarum algebraicarum asymptotis tam rectilineis quam curvilineis earumque investigatione" (Tübingen 1764). Sie bietet inhaltlich gerade nichts Neues, gibt aber einen klaren Überblick über die verschiedenen Methoden zur Aufstellung der geradlinigen Asymptoten und asymptotischen Kurven einer gegebenen algebraischen Kurve.

Endlich ist eine Arbeit von Busse (Friedrich Gottlieb von Busse, 1756—1835, Professor der Mathematik und Physik in Freiberg) zu nennen: „Formulae linearum subtangentium et subnormalium, tangentium et normalium castigatae et diligentius, quam fieri solent, explicatae" (Leipzig 1798). Das Wesentliche daran ist, daß bei den genannten Strecken nicht bloß, wie dies sonst üblich war, der absolute Wert, sondern auch das Vorzeichen berücksichtigt wird. Insbesondere wird die damals gebräuchliche Formel für die Subnormale $S = \frac{y\,dx}{dy}$ als falsch bezeichnet, und durch die richtigere $S = -\frac{y\,dx}{dy}$ ersetzt. Als Kuriosum sei noch eine Bemerkung des Verfassers angeführt, welche zeigt, daß mathematische Schriften schon damals sich keines allzugroßen Absatzes zu erfreuen hatten. Er sagt nämlich, er hätte diese Sachen schon längst veröffentlicht, „nisi bibliopolae eiusmodi scripta a me redimere et typis vulgare mirifice dubitassent, scilicet emtorum qui talia sibi comparare soleant, non tam paucitatem, quam tarditatem in hac temporum inconstantia constanter timentes".

Gehen wir nun zu den Einzeluntersuchungen über, so ist zu bemerken, daß weitaus die meisten Arbeiten sich mit Aufgaben befassen, bei denen es sich darum handelt, die Gleichungen von Kurven mit bestimmten Eigenschaften aufzustellen, und zwar sind sie meist derart, daß sie auf Differentialgleichungen führen; im Sprachgebrauch der damaligen Zeit sind dies „Problemata ex methodo tangentium inversa". So heißen ganz allgemein Aufgaben, die auf Integration von Differentialgleichungen führen, auch wenn es sich gar nicht um Eigenschaften der Tangente, sondern z. B. des Krümmungsradius handelt. Hierbei macht sich eine gewisse Unklarheit über die Bedeutung der Integrationskonstanten bemerkbar; es fehlt meist das volle Verständnis der Tatsache, daß eine Differentialgleichung nicht bloß eine Kurve, sondern eine ganze Schar definiert. Selbst Euler läßt in die Differentialgleichung einer Kurvenschar fast immer noch den variablen Parameter eingehen. Wie schon bemerkt, ist es schwierig, die große Menge von Abhandlungen, die in den verschiedensten Zeitschriften zerstreut sind, nach einheitlichen Gesichtspunkten zu ordnen; doch lassen sich wenigstens einige solche herausfinden. Die Arbeiten, die ganz isoliert stehen, werden dann eben in chronologischer Reihenfolge aufgeführt werden.

Eine erste Gruppe von Abhandlungen beschäftigt sich mit der Bestimmung von Kurven, deren Bogenlängen irgend einer Bedingung genügen sollen. Wir führen zunächst zwei Arbeiten von Euler an, in denen ein heute wenig mehr gebrauchter Begriff eine Rolle spielt, nämlich die Amplitude eines Kurvenbogens, eine von Joh. Bernoulli eingeführte Bezeichnung. Man versteht darunter den Winkel der beiden Normalen (oder Tangenten) in den Endpunkten des Bogens. Dieser Winkel ist in den meisten der folgenden Untersuchungen als Parameter eingeführt. Nimmt man die eine der beiden Normalen als x-Achse, so ist, wie man leicht sieht:

$$dx = ds \cdot \sin\varphi; \quad dy = ds \cos\varphi.$$

Diese Darstellung ermöglicht es nun, eine große Klasse von rektifizierbaren Kurven zu finden. Ist nämlich v eine beliebige Funktion von φ, und setzt man $\frac{ds}{d\varphi} = v + \frac{d^2v}{d\varphi^2}$, so ist damit eine Kurve bestimmt, für welche sich sowohl die Koordinaten als die Bogenlänge einfach in v und φ ausdrücken lassen. Es ergibt sich nämlich durch Integration der obigen Gleichungen:

$$x = \frac{dv}{d\varphi} \cdot \sin\varphi - v\cos\varphi; \quad y = \frac{dv}{d\varphi}\cos\varphi + v \cdot \sin\varphi;$$

$$s = \int v\,d\varphi + \frac{dv}{d\varphi}.$$

Ist also das Integral $\int v\,d\varphi$ ausführbar, so läßt sich die Kurve rektifizieren, und soll sie sonst noch einer Bedingung unterworfen sein, so handelt es sich nur um eine geeignete Bestimmung der Funktion v. Diese oder ähnliche Überlegungen liegen den meisten Arbeiten Eulers über die Bogenlängen von Kurven zugrunde. Die erste der beiden Eulerschen Abhandlungen heißt: „De arcubus curvarum aeque amplis earumque comparatione"[1]). Es handelt sich hier um die Aufgabe, Kurven so zu finden, daß die Bogenlängen ihren Amplituden proportional sind, daß also:

$$\frac{s}{a} = \frac{\varphi}{\alpha},$$

oder

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{a}{\alpha}$$

ist. Es ist klar, daß der Kreis jedenfalls zu den gesuchten Kurven

[1]) N. C. P. XII (1766/67), p. 17—41.

gehört; es fragt sich aber, ob nicht noch andere Kurven diese dem Kreis zukommende Eigenschaften haben. Fragen dieser Art sind in jener Zeit öfters behandelt worden; wir werden später noch einige hierher gehörigen Untersuchungen anzuführen haben; Hier findet Euler außer dem Kreis noch weitere Kurven durch einen Kunstgriff: er fügt nämlich zu φ eine Funktion V hinzu, die sich nicht ändert, wenn φ um α wächst; V muß dabei einfach eine Funktion von $\sin\frac{2\pi\varphi}{\alpha}$ und $\cos\frac{2\pi\varphi}{\alpha}$ sein. Nimmt man nun den einen Endpunkt des Kurvenbogens als Koordinatenanfangspunkt, seine Normale als x-Achse, so findet man die Gleichung der gesuchten Kurve in der Form:

$$x = \frac{a}{\alpha}(1 - \cos\varphi) + \int \sin\varphi\,dV; \quad y = \frac{a}{\alpha}\sin\varphi + \int \cos\varphi\,dV.$$

Hieraus folgt für den Krümmungsradius der Ausdruck:

$$r = \frac{a}{\alpha} + \frac{dV}{d\varphi}.$$

Die nähere Untersuchung zeigt, daß die Kurve aus lauter kongruenten Stücken von der Länge a besteht.

Die zweite Arbeit (vom 19. August 1776) ist betitelt: „De duabus pluribusve curvis algebraicis, in quibus, si a terminis fixis aequales arcus abscindantur, earum amplitudines datam inter se teneant rationem"[1]).

Hier handelt es sich also um zwei verschiedene Kurven und die Amplituden gleicher Bögen sollen nicht mehr gleich sein, sondern in einem gegebenen Verhältnis stehen. Euler findet für die eine Kurve die folgenden Gleichungen, in welchen α und β Konstanten sind, derart, daß das Verhältnis der Amplituden $= \alpha : \beta$ ist, und in welchen v eine Funktion von φ bedeutet:

$$x = \frac{1}{\alpha}\frac{dv}{d\varphi}\sin\alpha\varphi - \frac{v}{\alpha}\cos\alpha\varphi + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^3v}{d\varphi^3}\sin\alpha\varphi - \frac{1}{\alpha}\frac{d^2v}{d\varphi^2}\cos\alpha\varphi\right),$$

$$y = \frac{1}{\alpha^2}\frac{dv}{d\varphi} \cdot \cos\alpha\varphi + \frac{v}{d} \cdot \sin\alpha\varphi + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^3v}{d\varphi^3}\cos\alpha\varphi + \frac{1}{\alpha}\frac{d^2v}{d\varphi^3}\sin\alpha\varphi\right).$$

Die Gleichungen der zweiten Kurve ergeben sich hieraus durch Vertauschung von α und β. Sollen die beiden Kurven algebraisch sein, so müssen α und β rationale Zahlen und muß v eine algebraische Funktion von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sein. Das Beispiel $v = \cos\varphi$ wird durchgeführt und ergibt Epizykloiden; außerdem wird die Aufgabe

[1]) N. A. P. VI, p. 63—76.

auf 3, 4 usw. Kurven verallgemeinert, deren Amplituden bei gleichen Bögen ein vorgeschriebenes Verhältnis haben sollen.

Mit der Rektifikation von Kurven haben sich die Mathematiker in unserem Zeitraum mehrfach beschäftigt[1]). Schon früher hatte Hermann[2]) die Aufgabe vorgelegt, die Quadratur einer Kurve auf eine Rektifikation zurückzuführen, die dann von N. Bernoulli[3]) und Euler[4]) behandelt wurde. Saladini nahm die Frage wieder auf in seiner Abhandlung: „Methodus Bernoulliana de reducendis quadraturis transcendentibus ad longitudinem curvarum algebraicarum, a quibus inutilis saepe redditur, imaginariis quantitatibus liberatur atque eiusdem reductionis innumerae aliae viae indigitantur"[5]). Er gab einen Beweis des Bernoullischen Satzes, nach welchem die Fläche einer Kurve $y = f(x)$ durch

$$\int y\,dx = \frac{1-y^2}{y'} - S$$

ausgedrückt wird, wo S den Bogen der Kurve:

$$X = \frac{(1-y^2)^{3/2}}{y'}; \quad Y = \frac{y(1-y^2)}{y'} - x \tag{1}$$

bezeichnet. Um aber die Einführung der für $y^2 > 1$ vorkommenden imaginären Größen zu vermeiden, stellt er folgenden Satz auf: Man hat:

$$\int y\,dx = -\frac{y^2-1}{y'} + \int \sqrt{dY_1^2 dX_1^2},$$

wenn

$$X_1 = \frac{(y^2-1)^{3/2}}{y'}; \quad Y_1 = \frac{y(y^2-1)}{y'} + x.$$

Ist die vorgegebene Kurve algebraisch, so ist es auch die Kurve (1); es läßt sich also die Quadratur jeder algebraischen Kurve auf die Rektifikation einer algebraischen Kurve zurückführen. Da aber die Linie (1) öfters kompliziert ausfällt, so schlägt Saladini eine andere Methode zur Auflösung des Problems vor. Setzt man z. B.

$$X = \frac{P}{y'}, \quad Y = \frac{Q}{y^2} + mx, \tag{2}$$

wo m konstant ist, während P, Q Funktionen von y bezeichnen, so lautet die Bedingung dafür, daß $dS^2 = dX^2 + dY^2$ ein vollständiges Quadrat sei:

$$\frac{dQ + m\,dy}{Q} = \frac{dP}{P}.$$

[1]) Für den Bericht über die im folgenden erwähnten Arbeiten von Saladini, d'Alembert, Mascheroni, Gratognini, Contarelli vgl. Fußnote S. 476. [2]) Acta Erud. 1719. [3]) Ebenda, 1720. [4]) Comment. Acad. Petrop. T. V. [5]) Comment. Bonon. T. V, P. II, p. 120—138 (1767).

Nimmt man dann für Q eine solche algebraische Funktion von y, daß $\frac{m\,dy}{Q}$ ein logarithmisches Differential ist, so ist P eine algebraische Funktion von y, und man hat:

$$\int \left[\frac{d\sqrt{P^2+Q^2}}{dy} - \sqrt{\left(\frac{dP}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy} + m\right)^2}\right] dx = \frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{y'} - S,$$

wo S den Bogen der Kurve (2) bezeichnet.

Schon im III. Bande der Denkschriften der Berliner Akademie (1747) hatte d'Alembert auf ein Paradoxon hingewiesen, das aus der Betrachtung der Kurven entsteht, die durch die Differentialgleichung:

$$dy = dx\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}} - 1} \tag{3}$$

definiert ist. Zwanzig Jahre später nahm er den Gegenstand wieder auf in einer Schrift: „Extrait de plusieurs lettres de l'auteur sur différens sujets écrites dans le courant de l'année 1767"[1]). Integriert man (3) mit der Bedingung, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll, so erhält man:

$$y = \left[1 - (1-x)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}; \tag{4}$$

ferner ist:

$$ds = dx\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}}} = (1-x)^{-\frac{1}{3}}dx, \tag{5}$$

also unter der Bedingung $s = 0$ für $x = 0$:

$$s = \frac{3}{2}\left[1 - (1-x)^{\frac{2}{3}}\right]. \tag{6}$$

Aus (4) ergibt sich die Gestalt der Kurve; es ist $y = 1$ für $x = 1$, dann nimmt y ab für wachsendes und abnehmendes x, und es wird $y = 0$ für $x = 0$ und $x = 2$. Für $x < 0$ und für $x > 2$ ist y imaginär. Ferner hat y für jeden Wert von x zwei gleiche und entgegengesetzte Werte, so daß die Kurve die aus Fig. 32 ersichtliche Gestalt $ABCD$ hat; es ist die seit Leibniz bekannte reguläre Astroïde[2]), deren Gleichung durch die Transformation $x = 1 + x'$; $y = y'$ sich auf die Form:

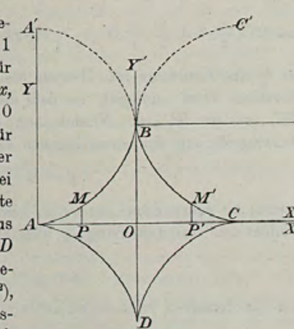

Fig. 33.

[1]) Opuscules mathématiques T. IV, p. 65—68 (Paris 1768). [2]) Vgl. Loria, Spez. Kurven, S. 227.

$$x'^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \text{oder} \quad (x'^2 + y'^2 - 1)^3 + 27\, x'^2 y'^2 = 0$$

bringen läßt.

Sind nun M und M' zwei den Zweigen AB, bzw. BC angehörige, in bezug auf die y'-Achse symmetrische Kurvenpunkte, P und P' ihre Projektionen auf die x-Achse und setzt man

$$OP = OP' = z,$$

so folgt aus (6)

$$\operatorname{arc} AM = \operatorname{arc} ABM' = \frac{3}{2}\left(1 - z^{\frac{2}{3}}\right) < \frac{3}{2},$$

während $\operatorname{arc} AB = \frac{3}{2}$ ist, ferner $\operatorname{arc} ABC = 0$. Es nimmt also die Bogenlänge vom Punkte B an fortwährend ab, was absurd ist. Und d'Alembert schließt: „Voilà donc encore ici le calcul en défaut".

Eine weitere Bemerkung ist folgende: Nimmt man, wie es stillschweigend vorausgesetzt worden ist, dy in (3) positiv an, so muß y immer zunehmen; also ist die Fortsetzung der Linie über B hinaus nicht BC, sondern der zu BC in bezug auf die durch B parallel zu AC gezogene Gerade symmetrische Zweig BC'.

Diese Schwierigkeiten, auf welche d'Alembert keine Antwort gab, reizten den Scharfsinn Mascheronis[1]), welcher sich die Aufgabe stellte, die Angriffe von d'Alembert gegen die Analysis zu widerlegen („Injuria tamen accusatur calculus"). Durch Reihenintegration findet er

$$y = B - \frac{3}{2} z^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} z^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{3}{6} z^{\frac{6}{3}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{3}{8} z^{\frac{8}{3}} + \cdots = B - \mu,$$

wo B eine Konstante ist. Hieraus ersieht man, daß y für z und $-z$ denselben Wert annimmt, so daß die Fortsetzung von AB nicht BC', sondern BC ist. Nimmt man aber die in (3) vorkommende Wurzelgröße mit doppeltem Zeichen an, so erhält man

$$y = B \pm \mu,$$

so daß die ganze Kurve aus den vier Zweigen AB, BC, $A'B$, BC' gebildet ist. Die Gleichung (5) läßt sich schreiben:

$$ds = \pm\, z^{-\frac{1}{3}} dz$$

und aus derselben folgt durch Integration:

$$s = \pm \frac{3}{2} z^{\frac{2}{3}},$$

[1]) Adnotationes ad calculum integralem Euleri P. I, 1790.

vorausgesetzt, daß $s = 0$ für $z = 0$ ist. Betrachtet man also den Bogen BA als positiv, so muß man den Bogen BC als negativ ansehen.

Hierdurch wird jedoch d'Alemberts Bedenken keineswegs erledigt; aber noch mehr: Mascheroni entdeckt ein neues Paradoxon. Für $x > 2$ ist die Kurve imaginär; aber die Bogenlänge ist auch für diese Werte von x reell. Die Erscheinung ist nicht vereinzelt: jedesmal wenn $\frac{ds}{dx}$ reell und < 1 ist, hat man eine reelle Bogenlänge bei imaginärer Kurve; denn es ist dann $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1 < 0$, also $\frac{dy}{dx}$ imaginär. Diese Bemerkungen von Mascheroni, welche im Jahre 1790 veröffentlicht wurden, gaben noch in demselben Jahre Veranlassung zu einer Antwort von seiten eines gewissen Giovanni Gratognini (1757—1836), Professor an der Universität in Pavia. Seine Schrift führt den Titel: „Esame analitico d'un paradosso proposto ai geometri dal sign. D'Alembert e della soluzione datane dal Ch. sign. Don Lorenzo Mascheroni" (Pavia 1790); sie gibt eine eigentümliche Lösung des Rätsels. Gratognini sagt nämlich: „die Formel für die Bogenlänge kann längs des Zweiges BC nicht gelten; sie würde nämlich den Bogen BC, gegen seine Natur, durch eine negative Größe ausdrücken. Man muß vielmehr den Ausdruck für ds in (5) für AB mit positivem, für BC mit negativem Vorzeichen versehen. Desgleichen kann für $x > 2$ der in (5) angegebene Wert dem Bogen nicht angehören, weil sie von der Gleichung $ds^2 = dx^2 + dy^2$ abgeleitet wurde, welche, da im betrachteten Falle dy fehlt, etwas Chimärisches und Bedeutungsloses darstellt."

Einen ähnlichen Gedanken hat Contarelli in einem Brief[1]) an Paolo Cassiani, Professor in Modena, ausgesprochen. Er sagt nämlich, daß bei der Berechnung der Bogenlänge der Bogen CD notwendig als negativ angesehen werden müsse, da ja C ein Rückkehrpunkt sei, und fügt bei, daß Giordano Riccati dieser Anschauung zugestimmt habe.

Daß alle diese Deutungen ganz ungenügend sind, ist klar. Die hervorgehobenen Schwierigkeiten konnten nicht überwunden werden, solange man den Begriff des Veränderlichkeitsbereichs einer algebraischen Funktion nicht vollständig beherrschte. Heutzutage haben die d'Alembertschen Paradoxa für uns nichts Verwunderliches mehr. Da die Funktion y von x durch eine Differentialgleichung von der Form $dy = Pdx$ definiert wird, so ist sie, von einer bloß additiven

[1]) Continuazione del nuovo giornale dei letterati, T. 21.

Konstanten abgesehen, bestimmt, und daher sind sowohl $A'BC$ als ADC Zweige der Integralkurve. Ferner ist die Ordinate y, nachdem sie durch Angabe ihres Wertes für $x = 1$ bestimmt worden ist, eine sechswertige Funktion von x; dasselbe kann man von s sagen, da die rechte Seite von (6) mit doppeltem Vorzeichen behaftet werden muß. Die Bogenlänge s bildet eine auf der die Funktion y von x darstellenden Riemannschen Fläche reguläre Funktion; $x = 1$ ist ein Verzweigungspunkt dieser Fläche, und an diesem Punkte kann der Übergang von einem zu einem anderen Funktionszweige sowohl von y als von s stattfinden. Dadurch kann man sich von allen scheinbaren Unregelmäßigkeiten Rechenschaft geben.

Die Schwierigkeiten, welche die Rektifikation der meisten Kurven bietet, scheinen Euler dazu veranlaßt zu haben, Kurven zu suchen, deren Bogenlänge sich angeben, oder wenigstens durch diejenige bekannter Kurven ausdrücken läßt, oder, wie Euler sagt, die durch die Bogenlängen bekannter Kurven „meßbar" sind. Dieses Problem kann[1]) als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Rektifikation angesehen werden, bei der es sich ja einfach um eine „Meßbarkeit" durch geradlinige Strecken handelt. Euler hat solchen Fragen verschiedene Abhandlungen gewidmet; die erste heißt: „De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet"[2]). Die analytische Formulierung dieser Aufgabe ist: x und y als Funktionen eines Parameters v so darzustellen, daß:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dv\sqrt{1 + v^2}$$

wird. Euler nimmt zunächst die allgemeine Aufgabe in Angriff, daß das Bogenelement ds dem Differential einer beliebigen Funktion von v gleich werden soll, also $ds = V dv$, und versucht, ob folgende Gleichungen das Problem zu lösen vermögen:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{P\sqrt{A+U} - Q\sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}}; \quad \frac{dy}{dv} = \frac{P\sqrt{B-U} + Q\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}} \tag{1}$$

wo P, Q, U Funktionen von v, A und B Konstanten sind. Dies ist der Fall, wenn

$$P^2 + Q^2 = V^2 \tag{2}$$

ist. Dieser Gleichung müssen also P und Q genügen, und dann ist U so zu bestimmen, daß die Gleichungen (1) integrabel werden. Zu diesem Zweck führt man statt U einen Winkel φ, der also gleichfalls eine Funktion von v ist, ein, und setzt:

[1]) Nach einer Bemerkung von Herrn Vivanti, vgl. Fußnote S. 476.
[2]) N. A. P. V, p. 59—70.

$$\frac{dx}{dv} = P\sin\varphi + Q\cos\varphi; \quad \frac{dy}{dv} = P\cos\varphi - Q\sin\varphi. \tag{3}$$

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wird wieder auf die spezielle Aufgabe, wo also $V = \sqrt{1 + v^2}$ sein soll, zurückgegriffen, und gezeigt, daß diese Forderung erfüllt ist, wenn in (1) U eine beliebige ganzzahlige Wurzel von v ist; die Beispiele $U = v$, $U = \sqrt{v}$ werden durchgeführt. Ebenso läßt sich aus (3) eine spezielle Lösung herleiten, wenn $P = 1$, $Q = v$ gesetzt wird; es ergibt sich so:

$$dx = dv\sin\varphi + v\,dv\cos\varphi; \quad dy = dv\cos\varphi - v\,dv\sin\varphi.$$

Setzt man hier noch $v = \sin\vartheta$, so macht die Beziehung $\varphi = \lambda\vartheta$ die Gleichungen integrabel und liefert algebraische Kurven, wenn λ eine rationale Zahl ist: Schließlich wird noch eine dritte, allgemeinere Lösung hergeleitet, nämlich

$$4x = -\frac{2}{\lambda}\cos(\alpha + \lambda\vartheta) + \frac{\sqrt{2}+1}{\lambda+2}\cos[\alpha + (\lambda+2)\vartheta] + \frac{\sqrt{2}-1}{\lambda-2}\cos[\alpha + (\lambda-2)\vartheta];$$

$$4y = -\frac{2}{\lambda}\sin(\alpha + \lambda\vartheta) + \frac{\sqrt{2}+1}{\lambda+2}\sin[\alpha + (\lambda+2)\vartheta] + \frac{\sqrt{2}-1}{\lambda-2}\sin[\alpha + (\lambda-2)\vartheta],$$

wo α ein beliebiger Winkel, λ eine rationale Zahl exkl. ± 2 ist.

Die gleiche Aufgabe hat Euler in einer späteren Arbeit vom 20. August 1781 wieder aufgenommen, über die deshalb auch gleich hier berichtet werden möge. Sie heißt: De innumeris curvis algebraicis quarum longitudo arcui parabolico aequatur[1]). Er gibt dort folgende elegante Konstruktion einer solchen Kurve: Es sei $AB = BC = 2a$ der doppelte Parameter der Parabel AC, AD eine zu ihr symmetrische, die mit ihr Achse und Scheitel gemein hat; n sei eine beliebige Zahl. Mache nun $FG = \frac{2a}{n}$; GV parallel der Achse und gleich einer beliebigen Ordinate XY; $\triangle VFG$ sei $= \vartheta$. Lege in F an AF einen Winkel $= n\vartheta$ an, und trage auf dem Schenkel desselben

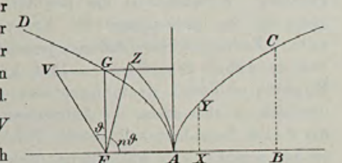

Fig. 34.

[1]) M. P. XI (1830), p. 100—101.

$FZ = FX$ ab, dann ist der geometrische Ort von Z eine Kurve der gesuchten Art, deren es also unendlich viele gibt, da n beliebig angenommen werden kann. Der Beweis ergibt sich leicht aus der angegebenen Konstruktion.

Eine weitere Abhandlung vom 10. Juni 1776 behandelt dieselbe Aufgabe für Ellipsenbögen; sie heißt: „De innumeris curvis algebraicis quarum longitudines per arcus ellipticos metiri licet"[1]). Hier soll also das Linienelement von der Form sein

$$ds = dv \sqrt{\frac{1 + (n^2 - 1)\, v^2}{1 - v^2}}. \tag{4}$$

Dieser Forderung wird genügt, wenn:

$$dx = \frac{(p + q)\, dv}{\sqrt{2\,(1 + v)}}; \quad dy = \frac{(p - q)\, dv}{\sqrt{2\,(1 - v)}} \tag{5}$$

ist, wobei p und q Funktionen von v sind, derart, daß

$$p^2 + q^2 - 2\,pqv = 1 + (n^2 - 1)\, v^2.$$

Dadurch werden die Gleichungen (4) integrabel und liefern algebraische Gleichungen. Z. B. ergeben die Werte $p = 1$; $q = v\,(n + 1)$ eine Kurve 6. Ordnung. Auch hier lassen sich durch Einführung von Winkeln die Gleichungen umformen, und Euler ermittelt folgende Lösung der Aufgabe:

$$\begin{aligned} 2\,x &= \frac{n+1}{\lambda+1} \sin\left[(\lambda + 1)\,\varphi\right] - \frac{n-1}{\lambda-1} \cdot \sin\left[(\lambda - 1)\,\varphi\right],\\ 2\,y &= \frac{n+1}{\lambda+1} \cos\left[(\lambda + 1)\,\varphi\right] - \frac{n-1}{\lambda-1} \cdot \sin\left[(\lambda - 1)\,\varphi\right], \end{aligned} \tag{6}$$

wo λ eine rationale Zahl sein muß, wenn die Kurven algebraisch sein sollen. Die durch (6) dargestellten Kurven sind Epi- und Hypozykloiden. Auffallend ist das Resultat für $n = 1$; in diesem Fall stellt (4) das Linienelement des Kreises dar, (6) aber den Kreis selbst. Euler sah sich dadurch veranlaßt, den Satz auszusprechen, daß es außer dem Kreis selbst keine Kurve gebe, deren Bogen sich durch Kreisbögen messen lasse (vgl. unten S. 491), unterließ es aber nicht, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf das S. 486 formulierte allgemeine Problem zu lenken. Auch führt er am Schluß dieser Abhandlung noch an, daß es ihm nicht gelungen sei, diese Aufgabe wie für Ellipsenbögen, so auch für Hyperbelbögen zu lösen. Dies leistete später Fuß in einer Abhandlung vom 28. Juni 1788: „De innumeris curvis algebraicis quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet"[1]) durch Einführung hyperbolischer Funktionen. — Auch diesmal hat Euler der Aufgabe später (20. August 1781) eine zweite Arbeit gewidmet: „De curvis algebraicis, quarum longitudo indefinita arcui elliptico aequatur"[2]). Er knüpft hier an die Formeln (6) an, und bemerkt mit der liebenswürdigen Offenheit, mit der er stets seinen Gedankengang klarlegt, daß er zufällig (casu) darauf gekommen sei. Die Arbeit besteht im wesentlichen in einer Verallgemeinerung der vorher gefundenen Resultate. Auch einen schwierigeren Fall des allgemeinen Problems $ds = V dv$ hat Euler behandelt (17. Juni 1776): „De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudo exprimitur hac formula integrali $\int \frac{v^{m-1}}{\sqrt{1 - v^{2n}}}\, dv$"[3]) Das Problem wird gelöst und ausgedehnt auf den allgemeineren Fall

[1]) N. A. P. V, p. 71—85.

$$s = \int \frac{v^{m-1}}{\sqrt{1 - v^{2n}}} \left(a + bv^{2n} + cv^{4n} + dv^{6n} + \cdots\right) dv.$$

Wieder einer Aufgabe allgemeinerer Natur, die in diese Gruppe gehört, sind zwei Arbeiten von Euler gewidmet, nämlich: „De binis curvis algebraicis inveniendis, quarum arcus indefinite inter se sint aequales"[4]) (20. Juni 1776) und: „De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus"[5]) (20. August 1781). Jede der beiden löst die Aufgabe auf zwei verschiedene Arten. In der ersten nimmt Euler die beiden Kurven in Parameterform gegeben an:

$$\begin{aligned} X &= p(z) + q(z); & x &= p(z) - q(z);\\ Y &= r(z) - s(z); & y &= r(z) - s(z). \end{aligned}$$

Die Forderung, daß die Linienelemente beider Kurven gleich seien, ergibt für die vier Funktionen p, q, r, s die Bedingungsgleichung:

$$p'q' = r's'.$$

Um dieser Gleichung zu genügen, führt Euler zwei neue Funktionen u und v von z ein, die mit den ersten durch die Gleichungen verbunden sind:

$$u = \frac{q'}{r'}; \quad p = \frac{v'}{u'}; \quad s = \frac{uv'}{u'} - v.$$

Damit ist die Bedingungsgleichung erfüllt, und Koordinaten der beiden Kurven sind dargestellt durch:

[1]) N. A. P. XIV (1805), p. 111—138. [2]) M. P. XI (1830), p. 95—99. [3]) N. A. P. VI, p. 36—62. [4]) Ebenda, IV, p. 96—103. [5]) M. P. XI (1830), p. 102—113.

$$X = \frac{v'}{u'} + q; \qquad x = \frac{v'}{u'} - q;$$

$$Y = r - \frac{uv'}{u'} + v; \qquad y = r + \frac{uv'}{u'} - v.$$

Sind q, r, v algebraische Funktionen, so sind beide Kurven algebraisch.

Die zweite Lösung legt die Bedingungsgleichung in der Form $\frac{s'}{p'} = \frac{q'}{r'}$ zugrunde, und führt zu einer einfachen geometrischen Konstruktion, nämlich (vgl. Fig. 35): Es seien zwei beliebige Kurven mit derselben Abszissenachse und den Koordinaten p, s und q, r gegeben. Man ziehe parallele Tangenten an die beiden Kurven, die sie in S und Q berühren, so ergeben sich die Koordinaten X, Y und x, y der beiden gesuchten Kurven aus den Gleichungen (vgl. Fig. 35)

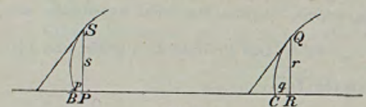

Fig. 35.

$$X = BP + RQ; \qquad x = BP - RQ;$$

$$Y = CR - PS; \qquad y = CR + PS.$$

In der zweiten Abhandlung ist zunächst eine Lösung mit Benutzung von Winkelgrößen gegeben. Der Forderung der Aufgabe wird genügt durch die beiden Gleichungen:

$$dX = dx \cos\varphi + dy \sin\varphi,$$

$$dY = dx \sin\varphi - dy \cos\varphi,$$

wo x und y noch als Funktionen von φ so zu bestimmen sind, daß diese Gleichungen integrabel werden und algebraische Funktionen ergeben. Euler führt zu diesem Zweck zwei Funktionen P und Q von φ ein, derart, daß

$$x = \frac{dP}{d\varphi} \cdot \sin\varphi + \frac{dQ}{d\varphi} \cdot \cos\varphi,$$

$$y = -\frac{dP}{d\varphi} \cdot \cos\varphi + \frac{dQ}{d\varphi} \cdot \sin\varphi,$$

dann wird

$$X = P + \frac{dQ}{d\varphi}; \quad Y = \frac{dP}{d\varphi} - Q.$$

Sind hierbei P und Q algebraische Funktionen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$, so werden die Gleichungen integrabel, und ergeben algebraische

Kurven. Die zweite Lösung, die gegeben wird, benutzt keine Winkelgrößen, ist aber in ihrem Resultat nicht wesentlich von der ersten verschieden, die auch für die Anwendung bequemer ist. Setzt man z. B. $Q = 0$, so ergeben sich Kurvenpaare von der Eigenschaft, daß der Radiusvektor der einen Kurve gleich der Ordinate der anderen ist. Dies wird angewendet auf Parabel und Ellipse. Aber auch hier ergibt sich durch Spezialisierung für den Kreis als zweite Kurve eben wieder der Kreis. Trotzdem gelangte Euler später im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen zu einer Lösung der früher (s. S. 488) von ihm für unmöglich gehaltenen Aufgabe, Kurven zu finden, deren Bögen sich durch Kreisbögen ausdrücken lassen, abgesehen vom Kreise selbst. Seine Arbeit hierüber ist am gleichen Tag wie die letztere der beiden vorigen der Akademie vorgelegt worden. Sie führt den Titel: „De curvis algebraicis quarum omnes arcus per arcus circulares metiri licet"[1]). In der Einleitung kommt Euler auf seine früher (s. S. 489) aufgestellte Behauptung zurück, daß es keine solchen Kurven gebe, und gesteht mit der für ihn charakteristischen Offenheit ein, der Hauptgrund für jene Behauptung sei gewesen, daß es ihm trotz aller Anstrengungen nicht gelungen sei, solche zu finden; er nimmt sie hiermit feierlich zurück („solemniter retractans"). Sein Verfahren, um Kurven der genannten Art zu finden, ist nun folgendes: Es sei w ein Bogen eines Kreises vom Radius $= 1$; die Gleichung der Kurve soll in Polarkoordinaten (z, φ) aufgestellt werden; dann muß sein

$$dz^2 + z^2 d\varphi^2 = dw^2$$

oder

$$d\varphi = \sqrt{\frac{dw^2 - dz^2}{z^2}}.$$

Die Aufgabe ist also einfach, z in Funktion von φ so zu bestimmen, daß das Integral der rechten Seite einen Kreisbogen ergibt, d. h. sich durch zyklometrische Funktionen ausdrücken läßt. Dies ist nun sehr einfach möglich, wenn $z = b + \cos w$ gesetzt wird, wo b eine beliebige Konstante ist. Hierdurch erhält man:

$$d\varphi = \frac{dw \cos w}{b + \cos w}.$$

Um dies Integral auszuführen, setzt man $t = \operatorname{tg}\frac{w}{2}$ und erhält:

$$\varphi = w - \frac{2b}{\sqrt{b^2 - 1}} \operatorname{arctg} t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit $t = \operatorname{tg}\frac{w}{2}$ und $z = b + \cos w$ stellt

[1]) M. P. XI (1830), p. 114—124.

nun die gesuchte Kurve dar; sie ist algebraisch, wenn $\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}$ eine rationale Zahl ist. An diese Formeln schließt sich eine Diskussion der Kurve, die als wichtigste Resultate folgende ergibt: der Krümmungsradius ist $r = \frac{b+\cos w}{b+2\cos w}$; daraus folgt, daß ein Wendepunkt auftritt für $\cos w = -\frac{b}{2}$, also $z = \frac{b}{2}$. (Daraus folgt, daß ein solcher nur auftreten kann, wenn $b < 2$ ist, weil sonst $z < b-1$ würde, was nicht möglich ist.) Die Amplitude[1]) ist $\alpha = w + \varphi$. Auf Grund der entwickelten Formeln wird noch ein Zahlenbeispiel $\left(b = \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ berechnet, und der Verlauf der Kurve gezeichnet; sie hat etwa die Gestalt einer Lemniskate mit ungleichen Schleifen. Schließlich wird noch bemerkt, daß der von einem bestimmten Punkt ab gemessene Bogen gleich dem Arkus des Winkels zwischen dem Radiusvektor und der Tangente im Endpunkt des Bogens ist.

Während es sich in den Arbeiten, über die vorstehend berichtet wurde, um Vergleichung von Bogenlängen verschiedener Kurven handelt, sind nun einige Abhandlungen zu nennen, in denen Beziehungen zwischen Bogenlängen und Tangenten, Normalen usw. einer und derselben Kurve untersucht werden. Unter diesen ist der Zeit nach die erste eine Veröffentlichung von Pio Fantoni (1721—1804, Wasserbaumeister in toskanischen Diensten, Mitglied des Instituts von Bologna): „De problemate quodam algebraico, deque evolutione mechanicae cuiusdam curvae inter infinitas hypermechanicas, quae determinatae aequationi satisfaciunt"[2]). Die Aufgabe, die Fantoni als „Problema algebraicum" bezeichnet, ist folgende: Eine Kurve so zu finden, daß das Stück der Tangente zwischen dem Berührpunkt und dem vom Koordinatenanfangspunkt auf sie gefällten Lot konstant sei. Als Differentialgleichung der gesuchten Kurve ergibt sich:

$$x = -\frac{y\,dy}{dx} + \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}.$$

Die Integration wird zunächst in rechtwinkligen Koordinaten ausgeführt, wobei der Differentialquotient als Parameter auftritt; es ergibt sich eine ziemlich komplizierte Formel, die sich aber wesentlich vereinfacht dadurch, daß als Koordinaten der Radiusvektor z, und der von ihm und der x-Achse begrenzte Bogen u eines Kreises von gegebenem Radius $= a$ eingeführt werden, also Polarkoordinaten

[1]) Vgl. S. 480. [2]) Phil. Trans. Vol. 57 (1767), p. 338—371.

besonderer Art. Setzt man nämlich noch $\sqrt{z^2 - a^2} = t$, so ergibt sich

$$u = t - a \operatorname{arctg} \frac{t}{a}.$$

Es wird dann noch gezeigt, daß diese Kurven Traktorien der Archimedischen Spirale sind.

Auch Euler hat sich mit derartigen Fragen beschäftigt und folgendes „Problema geometricum ob singularia symptomata imprimis memorabile"[1]) gelöst (10. Februar 1777): Eine Kurve so zu bestimmen, daß der Sektor $ACZ = \Sigma$ dem Quadrat des Bogens $AZ = s$ proportional sei. Dabei ist angenommen, daß AC zugleich Tangente an die Kurve in A sei, und daß die Achse CB auf AC senkrecht stehe. Es soll also sein:

$$s^2 = 4n\Sigma. \qquad (1)$$

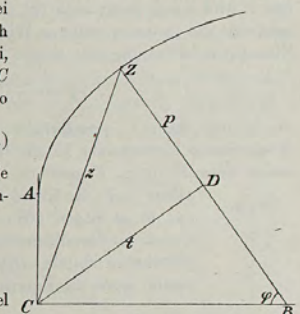

Fig. 36.

Dieser Gleichung genügt, wie man leicht sieht, die logarithmische Spirale um C, wenn

$$n = \frac{2}{\sin 2\zeta}$$

ist, wo ζ den konstanten Winkel des Radiusvektor gegen die Tangente bedeutet. Dies ist aber schon deshalb nicht die allgemeinste Lösung, weil hier $n > 2$ sein muß. Für die allgemein gefaßte Aufgabe gibt Euler drei Lösungen; die erste benutzt den Winkel φ der Normalen gegen die Achse und drückt das vom Ursprung auf die Normale gefällte Lot $CD = t$, und das Stück ZD der Normalen $= p$ in Funktion dieses Winkels aus. Hierbei zeigt sich zunächst, daß p dem Bogen s, t dem Krümmungsradius r proportional ist, nämlich

$$s = np; \qquad r = nt, \qquad (2)$$

was Euler als „proprietates insignes" dieser Kurven bezeichnet. Weiter ergeben sich die Differentialgleichungen:

$$t - n\frac{dt}{d\varphi} + \frac{d^2t}{d\varphi^2} = 0; \qquad t = \frac{dp}{d\varphi}. \qquad (3)$$

[1]) N. A. P. VIII, p. 87—115.

Die Integration liefert unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$t = \frac{a}{\alpha - \beta}(\alpha e^{\alpha\varphi} - \beta e^{\beta\varphi}); \quad p = \int t\,d\varphi = \frac{a}{\alpha - \beta}(e^{\alpha\varphi} - e^{\beta\varphi}), \tag{4}$$

wo die vom Ursprung an die Kurve gezogene Tangente $CA = a$ ist, und α und β den Gleichungen genügen:

$$\alpha + \beta = n; \qquad \alpha\beta = 1.$$

Die Reellität von α und β hängt also davon ab, ob $n \gtreqless 2$ ist. Es sind also bei der Diskussion der Kurve drei Fälle zu unterscheiden:

1) $n > 2$, α und β sind reell (Fig. 37). Für wachsende Werte von φ wird t und damit nach (2) auch r immer größer; die Kurve zieht sich also in immer weiteren Windungen um den Punkt C herum. Nimmt φ ab und wird negativ, so gibt es schließlich einen Wert, nämlich

$$\varphi = \frac{-2\log\alpha}{\alpha - \beta},$$

wo t, und damit r, verschwindet. Daraus ergibt sich, daß der entsprechende Kurvenpunkt E ein **Rückkehrpunkt** ist (da $r = 0$), dessen Normale durch C geht (da $t = 0$). Von diesem Punkte ab nähert sich die Kurve asymptotisch dem Ursprung C, und es ist Bogen CE = Bogen AE. In der Nähe von C und im Unendlichen nähert sich die Kurve der logarithmischen Spirale. Denn ist ϑ der Winkel des Radiusvektor gegen die Kurventangente, so ist

Fig. 37.

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{p}{t} = \frac{e^{\alpha\varphi} - e^{\beta\varphi}}{\alpha e^{\alpha\varphi} - \beta e^{\beta\varphi}},$$

also $\lim\limits_{\varphi=\infty} \operatorname{tg}\vartheta = \beta$, und $\lim\limits_{\varphi=-\infty} \operatorname{tg}\vartheta = \alpha$.

2) Fall $n = 2$. In diesem Fall ist $\alpha = \beta$; aus (3) folgt $t = a(1+\varphi)e^{\varphi}$; $p = a\varphi \cdot e^{\varphi}$; $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\varphi}{1+\varphi}$. Im Rückkehrpunkt ist $\varphi = -1$. Die logarithmische Spirale, der sich die Kurve asymptotisch nähert, hat den Winkel 45^0.

3) Fall $n < 2$. Hier werden α und β konjugiert imaginär und an Stelle der Exponentialfunktion treten goniometrische Funktionen. Setzt man $\alpha = \mu + i\nu$; $\beta = \mu - i\nu$, so wird:

$$t = \frac{a}{\nu} e^{\mu\varphi}(\mu \sin\nu\varphi + \nu\cos\nu\varphi); \quad p = \frac{a \cdot e^{\mu\varphi}\sin\nu\varphi}{\nu}.$$

Die Bedingung für den Rückkehrpunkt ($t = 0$) ist hier $\operatorname{tg}\nu\varphi = -\frac{\nu}{\mu}$; diese ist aber für unendlich viele Werte von φ erfüllt, also hat die Kurve unendlich viele Spitzen.

Die beiden anderen Lösungen geben die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten (z, w) und in rechtwinkligen Koordinaten (x, y), nämlich:

$$z = \frac{a\sqrt{1+q^2}\,(q-\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}}{(q-\beta)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}}; \quad w = \int \frac{n\,q\,dq}{(1+q^2)(1-nq+q^2)},$$

wo der Parameter $q = \frac{z\,dw}{dz}$ ist; und

$$x = ae^{\alpha\varphi}(\alpha\sin\varphi - \cos\varphi) - ae^{\beta\varphi}(\beta\sin\varphi - \cos\varphi),$$
$$y = ae^{\alpha\varphi}(\sin\varphi + \alpha\cos\varphi) - ae^{\beta\varphi}(\sin\varphi + \beta\cos\varphi).$$

Endlich gehören hierher noch zwei Abhandlungen von Fuß, nämlich: „Exercitatio analytico-geometrica circa lineam curvam singulari proprietate praeditam“[1]) und: „Disquisitio analytico-geometrica de variis speciebus linearum curvarum singulari proprietate praeditarum“[2]). In der ersten werden Kurven folgender Eigenschaft gesucht: Ist C ein Punkt der Normalen, T ein Punkt der Tangente eines Kurvenpunktes A und Y der Schnittpunkt von CT mit der Kurve, so soll $AT = \operatorname{arc} AY$ sein. Setzt man $AC = 1$, und nimmt AC als Abszissenachse, C als Ursprung (also $CX' = x$, $X'Y = y$), so wird $AT = \frac{y}{x}$, die Differentialgleichung der Kurve lautet:

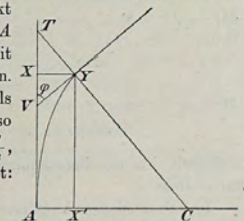

Fig. 38.

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = ds$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \pm x\sqrt{x^2 + y^2 - x^4}}{x(1-x^2)},$$

die sich jedoch nicht integrieren läßt, auch nicht durch Einführung von Polarkoordinaten. Fuß nimmt nun AT als x-Achse, also $AX = x$, $XY = y$, zieht ferner in Y die Tangente YV, und führt den $\angle TVY = \varphi$ und den Bogen $\widehat{AY} = s$ ein. Dann ist:

$$dx = ds\cos\varphi;$$
$$dy = -ds\sin\varphi;$$
$$AT = s = \frac{x}{1-y}.$$

Hieraus ergibt sich

$$x = s^2\sin\varphi + s\cos\varphi; \quad y = 1 - s\sin\varphi - \cos\varphi;$$

$$s = \frac{1}{2\sqrt{\sin\varphi}}\int d\varphi\sqrt{\sin\varphi}.$$

[1]) A. P. 1780, II, p. 49—69. [2]) Ebenda, 1781, I, p. 127—146

Hieraus folgt für den Krümmungsradius:

$$r = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{2}(1 - s\,\mathrm{ctg}\,\varphi).$$

Für s wird noch folgende Reihenentwicklung angegeben:

$$s = \sin\varphi \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 7}\sin\varphi^2 + \frac{1\cdot 3}{24}\frac{\sin\varphi^4}{11} + \cdots \frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n}\cdot\frac{\sin\varphi^{2n}}{4n+3} + \cdots \right\}.$$

Die zweite Abhandlung bringt eine Verallgemeinerung der vorigen Aufgabe, insofern jetzt an Stelle der Tangente eine beliebige Gerade tritt. Es soll also (s. Fig. 39) arc $mn = MN$ sein. Hierbei wird der spezielle Fall behandelt, daß die Kurve durch C gehen und in C eine gegebene Neigung α gegen die x-Achse (das Lot von C auf MN) haben soll. Auch hier führt die Aufgabe auf ein Integral von ähnlicher Form, wie vorher, nämlich:

$$\int d\varphi\sqrt{\cos\varphi};$$

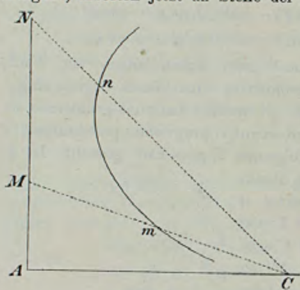

Fig. 39.

es wird auch hierfür eine Reihe entwickelt, die zur Berechnung von Kurvenpunkten für Spezialwerte von α dient.

In verschiedenen Aufgaben der hiermit erledigten Gruppe handelte es sich um Kurven, die gewisse Eigenschaften mit dem Kreis gemein haben. Es lag nahe, eine derartige Fragestellung noch weiter zu versuchen. Euler selbst hat dies ja für die charakteristischen Eigenschaften der Kegelschnitte getan (s. S. 471), und sich auch weiterhin mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt. Schubert und namentlich Fuß sind speziell vom Kreis ausgegangen. An derartige Fragen schlossen sich naturgemäß sonstige Aufgaben über Krümmungsradien, und deren Beziehungen zu den Koordinaten, zu Tangente, Bogenlänge usw. Die erste Abhandlung auf diesem Gebiet wurde von Euler der Petersburger Akademie vorgelegt am 16. Januar 1777: „Evolutio problematis, cuius solutio analytica est difficillima, dum synthetica per se est obvia“[1]. Es handelt sich darum, eine Kurve zu finden, deren Krümmungszentra alle auf einem gegebenen Kreis vom Radius $= a$ liegen. Es ist ohne weiteres klar, daß dieser Bedingung genügen:

[1]) N. A. P. VIII, p. 73—86.

1) alle Kreise, deren Mittelpunkte auf dem gegebenen Kreis liegen, also auch die Punkte dieses Kreises selbst.

2) alle Evolventen des gegebenen Kreises.

Die Abhandlung ist mehr wegen der darin angewandten Integrationsmethoden bemerkenswert, als wegen der gefundenen Kurven, die ja nichts Neues bieten. In ersterer Beziehung handelt es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei Integrale verschiedener Art auftreten, darunter auch der Kreis selbst als singuläres Integral. Von Interesse ist hier eine Bemerkung Eulers über die Untersuchungen von Lagrange (Nouveaux mémoires der Berliner Akademie 1774) über diesen Gegenstand, an denen Euler die nötige Klarheit vermißt: „Nullum autem est dubium, quin vir Illustrissimus (d. h. Lagrange) mentem suam non satis exposuerit aut quasdam rationes ad intelligendum necessarias reticuerit, quas equidem supplere non valeo, unde uberior explicatio super hoc principio, in quo Ill. Auctor adeo insigne supplementum Calculi integralis constituit, maxime foret optanda“. Es handelt sich hier wieder hauptsächlich um die Bedeutung der Integrationskonstante (s. S. 479). Das jedem Band dieser Serie von Publikationen vorausgeschickte „Extrait historique“ bemerkt dazu: „Il y a lieu de croire que M. Euler n'a pas bien saisi l'idée de M. de la Grange, aussi paraît-il disposé lui même à mettre ses doutes sur le compte de quelque malentendu“.

Auf höchst merkwürdige Kurven wurde Euler geführt durch seine Untersuchungen: „De curvis, quarum radii osculi tenent rationem duplicatam distantiae a puncto fixo, earumque mirabilibus proprietatibus“[1]) (20. August 1781). Die Aufgabe ist also, eine Kurve so zu bestimmen, daß der Krümmungsradius r dem Quadrat des Radiusvektor z proportional ist, also $r = \frac{z^2}{a}$. Daß der Kreis vom Radius a dieser Gleichung genügt, ist ohne weiteres klar; es gibt aber auch noch andere Kurven. Um diese zu finden, werden Polarkoordi-

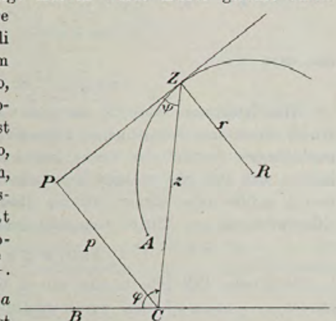

Fig. 40.

[1]) M. P. IX (1824), p. 47—56.

naten (z, φ) eingeführt, ferner das Lot P vom Pol C auf die Tangente $= p$, und der Winkel CZP des Radiusvektor gegen die Tangente $= \psi$ (vgl. Fig. 40). Es ist dann:

$$r = \frac{z \cdot dz}{dp}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{z\, d\varphi}{dz}, \tag{2}$$

also:

$$d\varphi = \frac{p\, dz}{z\sqrt{z^2 - p^2}}. \tag{3}$$

Da $r = \frac{z^2}{a}$, folgt aus (1) durch Integration, wobei die Konstante $= 1$ gesetzt wird:

$$p = a \log z, \tag{4}$$

und somit ist nach (3):

$$d\varphi = \frac{a \log z\, dz}{z\sqrt{z^2 - (a^2 \log z)^2}}. \tag{5}$$

Hieraus läßt sich ds bestimmen und integrieren; es ergibt sich

$$s - a\varphi = \sqrt{z^2 - (a \log z)^2} + c,$$

also, wenn $c = 0$ gesetzt wird (vgl. Fig. 40):

$$a\varphi = AZ - PZ.$$

Aus der Figur folgt noch:

$$\sin \psi = \frac{p}{z},$$

also nach (4):

$$\sin \psi = \frac{a \log z}{z}. \tag{6}$$

Die Integration von (5) ist nicht ausführbar, daher versucht Euler durch eine scharfsinnige Diskussion dieser Gleichungen den angenäherten Verlauf der Kurve herzuleiten. Zunächst ist zu bemerken, daß sich zwei wesentlich verschiedene Fälle ergeben, je nachdem a größer oder kleiner als die Basis e des natürlichen Logarithmensystems ist. Euler behandelt zunächst den

1) Fall: $a < e$.

In diesem Fall gibt es nur einen Wert von z, der den Radikanden $z^2 - (a \log z)^2$ zum Verschwinden bringt; denn der Faktor $z - a \log z$ kann in diesem Fall überhaupt nicht verschwinden. Bezeichnet man jenen Wert von z mit f, so ist also $f + a \log f = 0$. Beispielsweise ist für $a = 1$ angenähert $f = \frac{48}{85}$. Dieser Wert ist, wie Euler bemerkt, nahezu $= \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, woraus er vermutet, daß

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ der genaue Wert sei. Trägt man nun (vgl. Fig. 41) auf der Achse ein Stück $CF = f$ ab, so wird für diesen Wert von z nach (6) $\sin \psi = -1$; die Kurve steht also auf der Achse senkrecht. Nun schließt Euler aus (5), daß $d\varphi$ zunächst negativ sei, solange $z < e$, da ja dann $\log z$ negativ ist. Hier liegt nun offenbar ein Versehen vor; denn die Wurzel im Nenner hat ja ein Doppelzeichen, also muß die Kurve zur Achse symmetrisch sein. — Euler zeigt nun, daß die Kurve von F ab mit wachsendem z unter die Achse herunter geht, bis für $z = 1$ $d\varphi = 0$, und $\psi = 0$ wird; d. h. die Kurve berührt hier den Radiusvektor. Für weiter wachsende z nimmt $\sin \psi$ zu, erreicht sein Maximum für $z = e$, und nimmt von da an immer ab. Der Krümmungsradius nimmt gemäß der Gleichung $r = \frac{z^2}{a}$ mit wachsendem z sehr rasch zu. Den Verlauf der Kurve für sehr große Werte von z bestimmt Euler durch etwas gewagte Schlüsse dahin, daß sie zu einer Geraden, die mit der Achse einen Winkel $= \frac{a(1 + \log k)}{k}$ bildet (wo k eine sehr große Zahl ist), ähnlich verläuft, wie die Parabel zu ihrer Achse. Vielleicht ist es richtiger, daß die Kurve

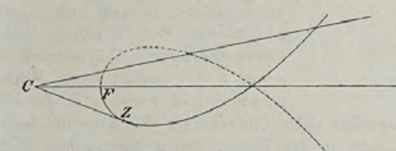

Fig. 41.

für sehr große Werte von z in rasch größer werdenden Spiralen um den Pol läuft. Auf Grund dieser Überlegungen bestimmt Euler für $a = 1$ die Gestalt der Kurve in der durch Fig. 41 angedeuteten Weise, wobei der von ihm nicht gezeichnete symmetrische zweite Zweig der Kurve gestrichelt beigefügt ist.

2. Fall: $a > e$. Hier erhalten die Kurven eine wesentlich andere Gestalt. Es gibt nämlich jetzt drei Werte von z, die den Ausdruck $z^2 - (a \log z)^2$ zum Verschwinden bringen: einmal den schon im 1. Fall genannten, für den $z + a \log z = 0$ ist, und der wieder mit f bezeichnet wird, und dann noch zwei weitere, g und h, für welche $z - a \log z = 0$ ist, und von denen der eine zwischen 1 und e, der andere zwischen e und ∞ liegt. Die Werte g und h genügen dabei noch der Gleichung:

$$\frac{g}{\log g} = \frac{h}{\log h} = a.$$

Für Werte von z zwischen g und h wird die Kurve imaginär, ebenso für $z < f$. Die Kurve zerfällt also in zwei getrennte Zweige, von denen der eine außerhalb des Kreises mit Radius h, der andere zwischen den Kreisen mit den Raden f und g liegt. In den Punkten, wo $z = f$, $z = g$, $z = h$ ist, steht der Radiusvektor auf der Tangente senkrecht; für $z = 1$ berührt er die Kurve.

Auf Grund ähnlicher Überlegungen wie im ersten Fall findet Euler die in Fig. 42 angedeutete Gestalt der Kurve, wobei $g = \sqrt{3}$ $h = 3\sqrt{3}$; $a = \frac{2\sqrt{3}}{\log 3}$ und f angenähert $= \frac{2a+1}{3a+3}$ ist. Hierbei ist also $CF = f$; $Cg = CG = g$; $CH = h$; $CE = e$; $CA = 1$. Die Symmetrie zur Achse wird diesmal berücksichtigt. Der äußere Zweig verläuft ähnlich, wie die Kurve im 1. Fall für große Werte von z. Die Anzahl der Windungen des inneren Kurvenzweiges hängt vom Verhältnis der $\sphericalangle ECg$ zu 360^0 ab. Euler bemerkt noch, daß dieser Winkel um so kleiner sei, je mehr f und g sich dem gemeinsamen Wert 1 nähern, und um so größer, je mehr sich g und h dem gemeinsamen Wert e nähern, und folgert daraus, daß für $a = e$, in welchem Fall auch g und $h = e$ werden, dieser Winkel ECg unendlich groß werde, d. h. daß die Kurve erst nach unendlich vielen Umdrehungen den Kreis mit Radius e erreiche, um dann in den äußeren Zweig überzugehen. Schließlich macht Euler darauf aufmerksam, daß der Kreis mit Radius a, der ja offensichtlich der Gleichung $z = \frac{r^2}{a}$ genügt, gar nicht auftritt, und bemerkt: „istum casum quasi per divisionem e calculo expulsum fore“.

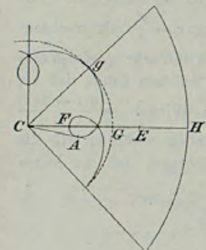

Fig. 42.

Die hier behandelte Frage ist ein spezieller Fall eines allgemeineren, die Fuß untersucht in einer Arbeit vom 24. April 1788: „Solutio problematis ex methodo tangentium inversa“[1]). Fuß knüpft hier an ein Paradoxon an, nämlich daß alle Kurven, deren Krümmungsradius gleich dem Radiusvektor ist, sich rektifizieren lassen, und daß dies für den Kreis (der doch sicher auch zu diesen Kurven gehört), bekanntlich nicht zutrifft. Er sucht nun zu einer Lösung dieses Paradoxons zu gelangen, indem er sich die Aufgabe stellt, alle Kurven zu finden, deren Krümmungsradius eine gegebene Funktion des Radiusvektor ist[2]).

[1]) N. A. P. IV, p. 104—128. [2]) Mit dieser Aufgabe hat sich auch schon Jacopo Riccati beschäftigt. S. Loria, Spez. alg. u. transcend. Kurven, S. 530.

Der Gang der Untersuchung ist im ganzen ähnlich wie in der Arbeit von Euler, die Bezeichnungen sind indes etwas anders gewählt. Fuß führt außer Polarkoordinaten (z, φ) ebenfalls das vom Pol auf die Tangente gefällte Lot t und $\frac{dy}{dx} = p$ ein. Die Funktion von z, die dem Krümmungsradius gleich sein soll, heißt Z. Es werden dann, meist auf differentialgeometrischem Wege, folgende Relationen hergeleitet:

$$t = \int \frac{z\,dz}{Z} = \frac{y - px}{\sqrt{1+p^2}}, \tag{1}$$

$$d\varphi = \frac{t\,dz}{z\sqrt{z^2 - t^2}}. \tag{2}$$

Setzt man in (2) für t seinen Wert aus (1) ein, so ist die Aufgabe auf die Ausführung von zwei Quadraturen zurückgeführt. Nun werden Spezialfälle behandelt, und zwar

1) $Z = nz$. Die Integration wird bewerkstelligt durch Einführung des Winkels, den die Tangente eines Kurvenpunktes mit dem in diesem Punkt auf dem Radiusvektor errichteten Lot bildet, und der mit 2ψ bezeichnet wird. Es ergibt sich dann (mit a und C als Integrationskonstanten):

$$z = \frac{a}{1 + n\cos 2\psi}; \qquad \varphi = C - 2\psi + \int \frac{2\,d\psi}{1 + n\cos 2\psi}, \tag{3}$$

und für den Bogen s

$$s = \frac{n^2 a \cdot \sin 2\psi}{(1-n^2)(1+n\cos 2\psi)} + \frac{na}{1-n^2}(\varphi + 2\psi - C). \tag{4}$$

Aus (4) folgt, daß diese Kurven rektifizierbar sind. Das Integral in (3) nimmt verschiedene Formen an, je nachdem $n = 1$, $n < 1$, $n > 1$ ist, nämlich:

für $n = 1$

$$\varphi = C - 2\psi + \operatorname{tg}\psi,$$

für $n < 1$

$$\varphi = C - 2\psi + \frac{2}{\sqrt{1-n^2}} \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1-n}{1+n}} \operatorname{tg}\psi\right],$$

für $n > 1$

$$\varphi = C - 2\psi + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \log \frac{1 + \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \operatorname{tg}\psi}{1 - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \operatorname{tg}\psi}.$$

Diese Fälle werden der Reihe nach entwickelt; am interessantesten ist eigentlich der erste, weil hierunter auch der Kreis fällt. Es ergibt sich eine Kurve, welche die zweite Evolvente eines Kreises vom Radius a ist. Beschreibt man nämlich (Fig. 43) einen Kreis mit Radius a (Mittelpunkt A), konstruiert dessen Evolvente ER von E aus, trägt auf der Tangente des Anfangspunktes ein Stück $EC = \frac{a}{2}$ ab, und wickelt nun einen über die Evolvente gespannten Faden, von C beginnend, ab, so beschreibt das freie Ende die gesuchte Kurve. Es ist jedoch auch hier, wie bei Euler, nicht berücksichtigt, daß die Kurve zur Achse symmetrisch sein muß, und daher nur der in der Fig. 43 ganz ausgezogene Teil der Kurve angegeben. Für die Bogenlänge s ergibt sich in diesem Fall

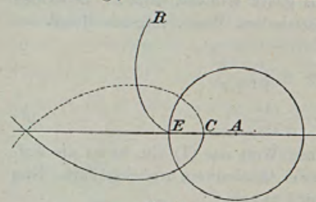

Fig. 43.

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{2az - a^2} + \frac{(2az - a^2)^{3/2}}{6a^2},$$

also ist die Kurve rektifizierbar. Damit kommt Fuß auf das zu Anfang erwähnte Paradoxon zurück, daß der Kreis mit Radius $= a$, der doch auch zu diesen Kurven gehört, nicht rektifizierbar ist. Die Lösung findet Fuß darin, daß für $z = a$ der Ausdruck für das Linienelement die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Nachdem auch noch die beiden anderen Fälle ($n < 1$, $n > 1$) entwickelt sind, werden die Kurven betrachtet, für welche

2) $r = Z = nz^m$ ist. Hier ergibt sich aus (1) mit Vernachlässigung der Integrationskonstante:

$$t = \frac{z^{2-m}}{n(2-m)}$$

und daraus

$$z = \frac{a}{\sqrt[n-1]{\cos(m-1)\varphi}}.$$

Es zeigt sich nun, daß diese Formeln für $m = 1$ und $m = 2$ versagen; für $m = 2$ findet Fuß den Ausdruck für die Bogenlänge, der auch bei Euler vorkommt, und bekennt: „hic subsistere sumus coacti". $m = 3$ ergibt eine gleichseitige Hyperbel. Von Interesse ist noch die Schlußbemerkung, daß Fuß erst nachdem er seine Untersuchung „iam ad umbilicum paene" durchgeführt hatte, die vorher (S. 497 ff.) besprochene Arbeit des schon verstorbenen Euler entdeckte (die damals noch nicht gedruckt war), wo die Diskussion des schwierigsten Falles $m = 2$ „per mera ratiocinia" durchgeführt sei.

Dem in den beiden letzten Arbeiten erwähnten Paradoxon be-

züglich des Kreises hat Schubert eine eigene Untersuchung gewidmet: „Solutio dubii circa rectificationem curvarum"[1]) (30. Juni 1791). Er bemerkt einleitend, daß solche Paradoxa meist daher kommen, „quod Analysta ad calculum nimis attentus, minus inquisiverit, an, quae calculo supponit, cum rei natura consentiant", und knüpft dann an die eben besprochene Arbeit von Fuß an. Die Untersuchung trifft aber den eigentlichen Kern der Sache auch nicht, nämlich, daß $r =$ const. ein singuläres Integral der Differentialgleichung ist. Schubert bemerkt nur, daß sich für den Kreis durch Anwendung des allgemeinen Verfahrens eine identische Gleichung ergebe. Interessant ist an der Arbeit auch eine Zwischenbemerkung; Schubert glaubt nämlich in der Tatsache, daß sich der Bogen des Kreises durch das allgemeine Verfahren nicht berechnen läßt, einen Beweis dafür zu finden, daß er **überhaupt nicht rektifizierbar** sei, während bisher die „irrectificabilitas" des Kreises schwerlich je streng bewiesen worden sei.

Kurz vorher (18. Oktober 1790) hatte Schubert in einer Note („Problemata e methodo tangentium inversa"[2]) sich, ausgehend von der Eigenschaft des Kreises, daß der Krümmungsradius gleich der Normalen ist, die Aufgabe gestellt, eine Kurve zu finden, für welche der Krümmungsradius gleich der negativen Normalen ist; daß die von ihm ermittelte Kurve die längst bekannte Kettenlinie ist, scheint ihm dabei entgangen zu sein.

Auch Fuß hat sich später noch einmal mit derartigen Fragen beschäftigt, und zehn Aufgaben über den Krümmungsradius, wo Be-

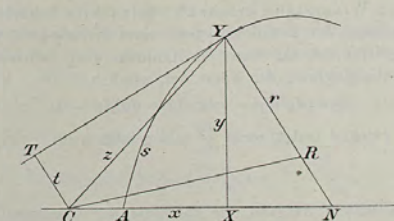

Fig. 44.

ziehungen zwischen diesem, dem Radiusvektor, der Bogenlänge usw. gegeben sind, gelöst („Decas problematum geometricorum ex methodo tangentium inversa, radium osculi spectantium"[3]) (13. Juni 1799).

[1]) N. A. P. IX, p. 190—204. [2]) Ebenda p. 166—189. [3]) M. P. I (1809), p. 88—118.

Dieselben lauten in den durch Fig. 44 angedeuteten Bezeichnungen (m, n bedeuten gegebene Zahlen, a, c gegebene Strecken, R das Krümmungszentrum):

1) $z = r$. 2) $\frac{r}{CN} = \frac{1}{n}$.

3) $r - z = a$. 4) $\frac{r}{CR} = \frac{1}{n}$.

5) $\frac{r}{YT} = \frac{1}{n}$. 6) $\frac{r}{s} = \frac{yT}{t}$.

7) $r^2 + s^2 = \frac{z^2}{n^2}$. 8) $m^2r^2 + n^2s^2 = z^2$.

9) $m^2r^2 + n^2s^2 = a^2$. 10) $m^2s^2 - n^2r^2 = c^2$.

Endlich gehört noch hierher eine Arbeit von Platzmann (1760 bis 1786), einem Schüler von Lexell und Adjunkt der Petersburger Akademie[1]): „Solutio problematis ex methodo tangentium inversa“[2]). Hier soll der Krümmungsradius in einem konstanten Verhältnis zur Summe der Abszisse und Subnormale stehen, es ist also dieselbe Aufgabe, die Fuß später in seiner Decas als Nr. 2 behandelt hat.

Eine dritte, kleinere Gruppe von Abhandlungen befaßt sich mit Kurven, die durch irgendwelche mechanische Eigenschaften definiert sind. Die erste dieser Arbeiten ist von Saint Jacques de Guillaume de Silvabella (1722—1801, Direktor der Sternwarte zu Marseille); sie handelt: „Du solide de la moindre résistance“[3]) und sucht die Kurve, deren Rotationskörper bei einer Bewegung in der Richtung der Achse im widerstehenden Mittel den geringsten Widerstand erfährt.[4]) Silvabella betrachtet zuerst den Widerstand des Rotationskörpers eines Kreisbogens, stellt die Bedingung dafür auf, daß dieser ein Minimum wird, und leitet daraus die Differentialgleichung der Kurve her, nämlich:

$$3y\,dx\,dy^2 d^2y - y\,dy^3 d^2x - dy^4 dx = 0.$$

Ein erstes Integral lautet, wenn $\frac{dy}{dx} = u$ gesetzt wird:

$$y = \frac{c}{u^3}(1 + u^2).$$

Die ballistische Aufgabe, die Bahnlinie der Geschosse mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes zu finden, behandelt Jean Charles Borda[5]) (1733—1799, Ingenieur der französischen Flotte,

[1]) Vesselofski, Einige Materialien zur Geschichte der Akademie der Wissenschaften M. P. LXXIII, Anhang Nr. 2 (in russischer Sprache). [2]) A. P. 1781, II, p. 90—103. [3]) Mém. div. Sav. III (1760), p. 638—649. [4]) Loria, Spezielle Kurven, S. 585 f. [5]) Hist. de l'Acad. Avec les mémoires math. et phys. 1769, p. 247—271

später Divisionschef im Marineministerium) unter der Voraussetzung, daß der Luftwiderstand R dem Quadrat der Geschwindigkeit u proportional ist, also $R = \frac{u^2}{a}$. Die entstehende Differentialgleichung lautet, wenn $z = \frac{dy}{dx}$ ist:

$$x = \int \frac{a\,dz}{\int dz\sqrt{1+z^2}}; \quad y = \int \frac{az\,dz}{\int dz\sqrt{1+z^2}}.$$

Um die Integration dieser Gleichungen bewerkstelligen zu können, nimmt Borda an, daß die Dichtigkeit der Luft nicht konstant sei, sondern eine Funktion von x sei. Durch passende Wahl derselben werden die Gleichungen integrabel. Durchgerechnete Zahlenbeispiele ergeben, daß die Bahn erheblich von der parabolischen abweicht ferner, daß die wirkliche Schußweite hinter der theoretischen zurückbleibt, und daß sie ihr Maximum nicht bei 45°, sondern etwa bei 30° erreicht.

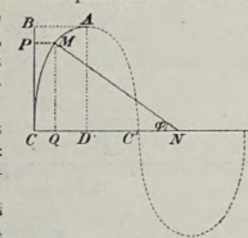

Fig. 45.

Mit einer elastischen Kurve hat sich Euler in einer Abhandlung: „De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione $y = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$ contentae“[1]) beschäftigt. Er bemerkt einleitend, daß die Kurve periodisch verlaufe, und beweist nun folgende merkwürdige Eigenschaften von ihr, wobei (vgl. Fig. 45) AD (Abstand eines Maximalpunktes von der y-Achse) $= 1$; ferner

$$CD = a; \quad \text{arc}\,CA = c; \quad CP = x; \quad PM = y; \quad \text{arc}\,CM = s$$

ist; nämlich:

$$\text{die Normale } MN = \frac{1}{x}; \quad ds = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$\text{Krümmungsradius} = \frac{1}{2x} = \frac{MN}{2}; \quad AB \cdot \text{arc}\,AC = AD^2 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Bedeutet ferner $\Pi(z)$ die Funktion $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^4}}$, so zeigt sich, daß $y = \Pi(x)$ unsere Kurve darstellt, ist ferner $\Theta(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$, so daß

[1]) A. P. 1782, II, p. 34—61.

$\Theta(x)$ die Bogenlänge bedeutet, sind endlich x, y, z drei Abszissen derart, daß

$$\Theta(z) = \Theta(x) + \Theta(y)$$

ist, so ist:

$$\Pi(z) = \Pi(x) + \Pi(y) + xyz.$$

Die A. E. 1769 enthalten eine Arbeit von Lambert: „Solutio problematis ad methodum tangentium inversam pertinentis", über die Verfolgungskurve, mit der Angabe, daß die Aufgabe von Vincenzo Riccati stamme[1]); nach dessen Aussage sei sie ihm (Riccati) gesprächsweise von einem „viro in rebus analyticis satis versato" vorgelegt worden, der aber offen zugab („ingenue aiebat") keine Lösung zu wissen. Lambert bemerkt dazu, daß ihm dieselbe Aufgabe schon lange wie ein „lusus ingenii" in den Sinn gekommen sei. Die Kurve muß nun die Eigenschaft haben, daß ein Kurvenbogen MD in einem konstanten Verhältnis steht zu dem Stück TG, das die in seinen Endpunkten gezogenen Tangenten auf einer gegebenen Geraden abschneiden, also

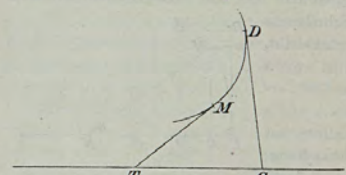

Fig. 46.

$$\text{arc}\, MD : TG = n : 1.$$

Nimmt man die gegebene Gerade als x-Achse und GT als positive Richtung derselben, und bezeichnet den $\angle MTG$ mit w, so ist

$$\operatorname{tg} w = -\frac{dy}{dx},$$

und die Differentialgleichung der Kurve heißt:

$$\frac{n\,dy}{\sin w} = y\,d(\operatorname{ctg} w).$$

Nimmt man als Anfangspunkt den Punkt, wo die Kurventangente auf der x-Achse senkrecht steht, und den Abschnitt dieser Tangente als Einheit, so ergibt die Integration:

$$2x = \frac{1}{(n-1)\,y^{n-1}} + \frac{1}{(n+1)\,y^{n+1}} - \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Ist $n = 1$, d. h. die Geschwindigkeit des Verfolgers gleich der des Verfolgten, so versagt diese Gleichung. Ein Zurückgehen auf die ursprüngliche Differentialgleichung ergibt in diesem Fall:

[1]) Loria, Spezielle Kurven, S. 608, zeigt, daß die Aufgabe älter ist.

$$2x = -\log y + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Eine Aufgabe verwandter Art behandelt Nieuport (Charles François le Prudhomme d'Hailly, Vicomte de Nieuport, 1746 bis 1827, Malteser Ritter, von 1815 an Mitglied der 2. Kammer und der Akademie in Brüssel) in einer vom 16. September 1777 datierten Arbeit: „Mémoire sur les courbes que décrit un corps qui s'approche ou s'éloigne en raison donnée d'un point qui parcourt une ligne droite"[1]). Es handelt sich dabei um folgendes: Ein Punkt bewegt sich mit gegebener Geschwindigkeit v von einem festen Punkt A aus, ein zweiter ebenso mit der Geschwindigkeit w von B aus, der letztere auf einer Geraden. Bezeichnen C und D eine beliebige Lage der beiden Punkte, so kann man die Aufgabe stellen, die Bahnkurve des Punktes C so zu bestimmen, daß die Entfernung CD der beiden Punkte eine gegebene Funktion der Koordinaten des Punktes C sei. Die Lösung ist folgende: Es sei (Fig. 47) $BK = x$; $CK = y$; $BD = z$; arc $AC = s$, so ist

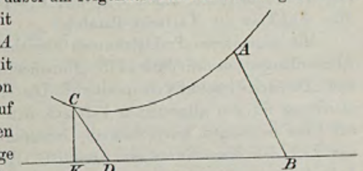

Fig. 47.

$$z = x - \sqrt{CD^2 - y^2}; \quad \frac{z}{s} = \frac{w}{v}.$$

Daraus folgt als Differentialgleichung der Kurve

$$\frac{ds \cdot w}{v} = d\left(x - \sqrt{CD^2 - y^2}\right),$$

wo also CD eine gegebene Funktion von x und y ist. Dies wird an dem einfachsten Fall $CD = a$ durchgeführt, wobei also die Entfernung der beiden Punkte und das Verhältnis ihrer Geschwindigkeiten konstant ist. Ist letzteres $= h$, so ergibt sich:

$$x = c + \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{g} + \frac{h}{g^2}\int\sqrt{\frac{h^2y^2 - g^2}{a^2 - y^2}}\,dy,$$

wo $h^2 - 1 = g^2$ ist.

Für $h = 1$ erhält man mit Weglassung der Integrationskonstanten:

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{4}\log\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 - y^2}}.$$

[1]) Mémoires de l'Acad. Imp. de Bruxelles, T. II (1780), p. 139—151.

Es wird dann noch der schwierigere Fall untersucht, daß die Geschwindigkeiten veränderlich sind. Bezeichnet man diese mit P und Q, so ist $z = \int \frac{P\,ds}{Q}$, also wird die Differentialgleichung:

$$\frac{P\,ds}{Q} = dx - d\sqrt{CD^2 - y^2}.$$

Als Beispiel dient $\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{x-q}}{\sqrt{x}}$; $CD = y$, wobei sich die Wurfparabel ergibt. Auf diesem Weg läßt sich auch leicht die Leibnizsche Isochrone herleiten, indem $CD = y$; $P = \sqrt{q}$; $Q = \sqrt{x}$ gesetzt wird. Man erhält so die Neilsche Parabel.

Mit allgemeinen Traktrixkurven[1]) beschäftigt sich Euler in zwei Abhandlungen aus dem Jahr 1775, „Commentatio de curvis tractoriis", und „De curvis tractoriis compositis".[2]) Die erste stellt die Differentialgleichung für den allgemeinen Fall auf, daß der ziehende Punkt sich auf einer beliebigen Kurve bewegt, integriert und rektifiziert sie für den Fall, daß diese Kurve ein Kreis ist. Euler versucht auch, die Aufgabe unter Berücksichtigung der Reibung zu lösen, mit dem Resultat, daß diese Aufgabe die Kräfte der Analysis übersteige. In der zweiten Abhandlung wird der Fall untersucht, daß mehrere Punkte hintereinander an demselben Faden befestigt gedacht sind; doch gelingt auch hier die Lösung nicht.

Endlich ist noch zu bemerken, daß Malfatti in der schon erwähnten Schrift: „Della curva Cassiniana", wo alle Eigenschaften durch synthetische Überlegungen hergeleitet werden, von der Lemniskate die folgende nachweist: Steht eine Doppelpunktstangente vertikal, so durchfällt ein schwerer Punkt, der im Doppelpunkt seine Bewegung beginnt, einen Kurvenbogen und seine Sehne in der gleichen Zeit.

Als vierte Gruppe lassen sich einige Arbeiten über Trajektorien und Parallelkurven zusammenstellen; den ersteren sind verschiedene Abhandlungen von Euler gewidmet, nämlich: „Considerationes de traiectoriis orthogonalibus"[3]), „Digressio de traiectoriis tam orthogonalibus quam obliquangulis"[4]) und „Considerationes super traiectoriis tam rectangulis quam obliquangulis"[5]) (3. Juni 1775). Gerade bei diesen Arbeiten ist wieder auf die S. 479 gemachte Bemerkung über eine gewisse Unklarheit in betreff der Integrationskonstanten hinzuweisen. Zunächst ist stets nur von einer Trajektorie die Rede[6]). Es ist nämlich fast immer angenommen, daß die Differentialgleichung der

[1]) Vgl. Kästner, Gesch. d. Math. IV, S. 2f. [2]) N. A. P. II, p. 3—27, p. 28—35. [3]) N. C. P. XIV (1769), p. 46—71. [4]) Ebenda, XVII (1772), p. 205—248. [5]) N. A. P. I, p. 3—46. [6]) So übrigens auch bei Klügel in dem betr. Artikel, V, p. 92ff.

Kurvenschar, deren Trajektorie gesucht wird, den Parameter noch enthält; in der zweiten der oben genannten Abhandlungen sagt Euler sogar geradezu, eine Kurvenschar könne definiert sein durch eine Differentialgleichung mit einem Parameter. — Unter dieser Annahme untersucht Euler die verschiedenen Fälle, die sich ergeben, je nachdem die Gleichung der Kurvenschar nach einer der Variabeln oder nach dem Parameter auflösbar ist. Die Theorie selbst wird jedoch in keinem wesentlichen Punkte weiter gefördert, nur der Satz tritt wohl hier zum erstenmal auf, daß die Bedingung für die Orthogonalität zweier Kurvenscharen $F(x, y, p) = 0$ und $\Phi(x, y, q) = 0$ gegeben ist durch die Gleichung $\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} = 0$; um die hier auftretenden Differentialquotienten bilden zu können, sind aus den Gleichungen der Kurvenscharen x und y als Funktionen der Parameter p und q auszudrücken.

Einen entschiedenen Fortschritt gegenüber diesem Standpunkt bedeutet die Arbeit von Trembley (1749—1811, erst Jurist, dann Mathematiker, von 1794 an in Berlin, Mitglied der Akademie): „Observations sur le problème des Trajectoires".[1]) Hier wird die Aufgabe mit voller Klarheit angefaßt und durchgeführt, unter Bezugnahme auf Eulers Veröffentlichungen, die Trembley als einen „calcul assez prolixe" bezeichnet. Er macht auch auf den Hauptfehler aufmerksam, nämlich auf die falsche Auffassung des Parameters, bzw. der Integrationskonstanten, und zeigt, wie man aus der Gleichung einer Kurvenschar $F(x, y, \alpha) = 0$ mit dem Parameter α ihre Differentialgleichung findet, indem man sie differenziert und den Parameter eliminiert, was freilich bei der praktischen Ausführung manche Schwierigkeiten bietet. Aus der Differentialgleichung ergibt sich dann die der Orthogonaltrajektorien, indem man $\frac{dy}{dx}$ mit $-\frac{dx}{dy}$ vertauscht. Die Methode wird an einigen Beispielen durchgeführt und auf schiefwinklige Trajektorien ausgedehnt.

„De traiectoriis reciprocis tam rectangulis quam obliquangulis" ist der Titel einer Abhandlung von Euler in den A. P. 1782, II, p. 3—33. Die hier betrachteten Kurven sind von etwas anderer Art, als die Isogonaltrajektorien. Es handelt sich nämlich darum, eine Kurve zu finden, die, um eine Gerade umgeklappt und parallel mit dieser verschoben, ihre ursprüngliche Lage immer unter demselben Winkel schneidet. Euler behandelt hier die schon von Joh. Bernoulli und von ihm selbst gelöste Aufgabe[2]) in allgemeiner Weise, und leitet algebraische Kurven dieser Art her.

[1]) Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin (1797), p. 36—83. [2]) Siehe Klügel, V, p. 113ff.

Zu den Trajektorien kann man in gewissem Sinn auch die Parallelkurven rechnen, sofern sie die Orthogonaltrajektorien einer Schar von Geraden sind. Sie entstehen bekanntlich dadurch, daß man auf allen Normalen einer Kurve in derselben Richtung gleiche Stücke abträgt und die Endpunkte verbindet; sie heißen auch äquidistante Kurven. Leibniz[1]) hat zuerst auf sie aufmerksam gemacht; in unserem Zeitraum hat sich zuerst Nieuport damit beschäftigt in einem „Mémoire sur les codeveloppées des courbes“[2]). Er nennt sie hier „codeveloppées“ und stellt ihre allgemeine Gleichung auf, die er dann speziell auf die Parallelkurven der Parabel anwendet. Bemerkenswert ist, wie er sie zu veranschaulichen sucht, nämlich durch eine Fläche, die entsteht, wenn man jede Parallelkurve im Abstand c um die Strecke c über die Koordinatenebene hebt. Es entsteht so ein „solide fort compliqué“, nämlich, um die Sache im heutigen Sprachgebrauch auszudrücken, eine Regelfläche, deren Mantellinien alle die gegebene Kurve schneiden, mit deren Ebene einen $\sphericalangle\, 45^0$ bilden und sich auf diese Ebene als die Normalen der Kurve projizieren. — Fast gleichzeitig und, wie es scheint, unabhängig voneinander, haben Kästner und Angelo Luigi Lotteri (1760—1840, Professor der Mathematik zu Pavia) die Parallelkurven untersucht. Merkwürdig ist auch, daß beide durch eine Aufgabe aus der Praxis darauf geführt worden sind, nämlich eine elliptische Mauer von überall gleicher Dicke zu konstruieren. Kästners Arbeit „De curvis aequidistantibus“ steht in den Commentationes Goettingenses 1793, Lotteris (Memorie sulle curve parallele) im Giornale fisico-medico de Pavia (1792). In dieser Zeitschrift findet sich im Jahrgang 1795 ein Bericht über Kästners Arbeit, sowie über eine frühere von Cagnazzi über denselben Gegenstand, die schon 1789 der R. Soc. delle Scienze di Napoli übergeben wurde. Die wichtigste, von Kästner und Lotteri unabhängig gefundene Eigenschaft bezieht sich auf die von zwei Kurvennormalen und den zwischen ihnen liegenden Bögen der Parallelkurven eingeschlossene Fläche. Sie ist nämlich gleich dem Inhalt eines Trapezes, dessen parallele Seiten gleich den beiden Parallelkurven sind, und dessen Höhe gleich dem Abstand derselben ist; dieser Satz tritt bei Kästner allerdings in etwas anderer Form auf. Es ist nämlich angenommen, daß die eine der begrenzenden Normalen die x-Achse ist; ist nun arc $AM = s$ der Bogen einer Kurve, arc FH der einer Parallelen im Abstand h, und ξ der Winkel der Tangente im Punkt M gegen die x-Achse, so ist zunächst

$$FH = s - h(90^0 - \xi)^{3)},$$

[1]) Bd. III[2], S. 212. [2]) Mém. de l'Acad. de Bruxelles, T. 4, p. 1—16.
[3]) Wird Joh. Bernoulli zugeschrieben.

und daraus

$$AFMH = hs - \tfrac{1}{2}h^2(90^0 - \xi).$$

Es folgt dann eine ausführliche Diskussion der verschiedenen Fälle, die auftreten, namentlich dann, wenn der Abstand der auf der konkaven Seite liegenden Parallelkurve größer oder gleich dem Krümmungsradius ist; im letzteren Fall hat die Parallelkurve einen Rückkehrpunkt. Auch daß die Parallelkurven alle dieselbe Evolute haben, wird bemerkt, und den Schluß bilden einige Anwendungen. Die Parallelkurven der Ellipse speziell hat Prasse in einer Schrift: „De ellipseos evoluta et aequidistantibus“ (Leipzig 1798) behandelt.

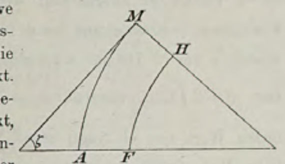

Fig. 48.

Zum Schluß dieses Kapitels sind nun noch eine Anzahl von Arbeiten aufzuführen, die untereinander in keinem engeren Zusammenhang stehen. Wir beginnen mit einer Untersuchung von Casali (1721—1802; Professor in Bologna) über den Ort der Brennpunkte einer Schar von Kegelschnitten, deren Ebenen alle durch eine gegebene zur Grundkreisebene parallele Tangente gehen. Sie ist betitelt: „De conicarum sectionum focis“ und steht in den Comment. Bonon. T. IV (1757). Casali findet als den gesuchten Ort eine Kurve dritter Ordnung, die sogenannte Pteroides Torricellanea[1]); sie liegt in der zur gegebenen Tangente senkrechten Meridianebene, hat die eine der in dieser liegenden Mantellinien zur Asymptote, berührt die andere im Berührpunkt der gegebenen Tangente, und hat einen Doppelpunkt in dem Fußpunkt des Lotes, das von diesem Punkt auf die Achse gefällt wird.

Aus dem Jahr 1764 ist eine Arbeit von Euler zu nennen: „De insigni promotione methodi tangentium inversae“[2]). Es handelt sich hier um eine Kurve, die zunächst durch eine diskontinuierliche Reihe von Punkten bestimmt ist. Die Aufgabe ist nämlich, eine Kurve so zu finden, daß die Normale eines Punktes der Ordinate des Endpunktes dieser Normalen gleich werde. Die Herstellung einer Differentialgleichung ist nicht ohne weiteres möglich. Zunächst wird gezeigt, daß die Subnormalen der verschiedenen auf diese Weise ge-

[1]) Nach Loria (Spez. Kurven, S. 60) stammt diese Kurve jedoch nicht von Torricelli, sondern von einem französischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts, vielleicht Roberval. [2]) N. C. P. X, p. 135—153.

wonnenen Kurvenpunkte gleich sind, daß aber das Umgekehrte nicht gilt, d. h. daß die Kurven mit konstanter Subnormale der gestellten Bedingung nicht entsprechen. Bezeichnet man nun diesen konstanten Wert der Subnormalen mit t, so können die Abszissen der einzelnen Punkte so ausgedrückt werden: $x = \frac{t \cdot \varphi}{2\pi} + T$, wo t und T Funktionen von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ bedeuten; wächst also φ um 2π, so wächst x um t. Da nun t die Subnormale bedeutet, so ist $\frac{y\,dy}{dx} = t$; also $y^2 = 2\int t\,dx$, während $dx = \frac{t\,d\varphi + \varphi\,dt}{2\pi} + dT$ ist. Setzt man diesen Wert ein, so folgt: $y^2 = \frac{t^2\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int t^2\,d\varphi + 2\int t\,dT$. In ähnlicher Weise werden dann noch andere Aufgaben dieser Art behandelt, z. B. daß $QR^2 - JQ^2$ konstant sein soll; daß die Subnormalen eine arithmetische oder geometrische Progression bilden sollen.

Eine Kurve, von der sich ebenfalls zunächst bloß diskrete Punkte bestimmen lassen, ist $y = x!$ Dieser hat Euler eine Abhandlung gewidmet: „De curva hypergeometrica hac aequatione expressa: $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots x$".[1]) Die Gleichung ergibt zunächst nur Ordinatenwerte für ganzzahlige Abszissen; für gebrochene ist sie so umzuformen, daß sie für beliebige Abszissen brauchbar ist, und natürlich für ganzzahlige mit der ursprünglichen Gleichung übereinstimmt. Hierbei ist die Bemerkung von Wert, daß mit einer beliebigen Ordinate auch diejenige bekannt ist, die zu einer um 1 größeren oder kleineren Abszisse gehört, wie ja leicht zu sehen ist. Es genügt also, den Verlauf der Kurve im Abszissenintervall 0 bis 1 festzustellen. Euler gibt hierfür verschiedene Entwicklungen, die zur Bestimmung von Tangente, Normale, Krümmungsradius usw. benutzt werden. Als Koordinaten eines Minimalpunktes ergeben sich durch ein Annäherungsverfahren: $x = 0{,}46163214471$; $y = 0{,}8856031945$, wozu Euler bemerkt, es sei nicht gelungen, irgendwelche Beziehungen dieser Werte zu bekannten irrationalen oder transzendenten Zahlen aufzufinden.

Eine dritte Abhandlung über derartige Kurven, von denen zunächst nur diskrete Punkte gegeben sind, rührt von Fontana her: „Sopra l'equazione d'una curva. Sopra la falsita di due famosi Teoremi, e sopra la serie armoniche a termini infinitamente piccioli".[2]) Hier interessiert uns nur der erste Teil der Abhandlung, der folgender Aufgabe gewidmet ist: Auf dem einen Schenkel eines Winkels QAB ist in B ein Lot errichtet, das die Halbierungslinie des Winkels

[1]) N. C. P. XIII (1768), p. 3—66. [2]) Mem. mat. fis. Soc. Ital. (1784), T. II, p. 1 3—141.

in C schneidet; auf AC ist in C wieder ein Lot errichtet, das die Halbierungslinie des Winkels QAC in D schneidet usf. Führt man diese Konstruktion unendlich oft aus, so erreicht man schließlich die Gerade AQ in einem Punkte H. Gesucht ist nun 1. die Strecke AH, 2. die Gleichung der Kurve $B, C, D \ldots H$. — Ist $AD = z$ der Ra-

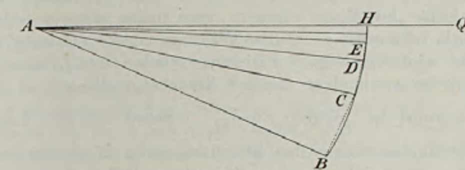

Fig. 49.

diusvektor eines beliebigen Kurvenpunktes D, und $\sphericalangle QAD = u$, so ist für den nächsten Punkt E der Radiusvektor $AE = \frac{z}{\cos\frac{u}{2}}$ usw., so daß schließlich:

$$AH = \lim_{n=\infty} \frac{z}{\cos\frac{u}{2}\cos\frac{u}{4}\cos\frac{u}{8}\cdots\cos\frac{u}{2n}},$$

oder nach einem trigonometrischen Satze:

$$AH = \frac{u \cdot z}{\sin u}.$$

Bezeichnet man diesen Wert mit a, so ist umgekehrt die Gleichung der Kurve:

$$z = \frac{a \cdot \sin u}{u}.$$

Zu bemerken ist noch, daß für diese Gleichung, wohl zum erstenmal, der Ausdruck equazione polare gebraucht wird. Sonach scheint das Wort „Polargleichung" und damit zusammenhängend: „Polarkoordinaten" aus Italien zu stammen. — Die Kurve selbst liegt symmetrisch zur Achse AQ und besteht aus einem herzförmigen Zweig mit der Spitze in A und unendlich vielen immer kleiner werdenden Ovalen, die AQ in A beiderseits berühren.

Zwei weitere Arbeiten Eulers beschäftigen sich mit der Beziehung einer Kurve zu ihren Evoluten. In der ersten: „Demonstratio theorematis Bernoulliani quod ex evolutione curvae cuiuscunque rectangulae in infinitum tandem cycloides nascantur"[1]) wird ein Satz von

[1]) N. C. P. X (1764), p. 179—198.

Bernoulli bewiesen, wonach ein Kurvenstück von der Amplitude $= 90^\circ$ durch fortgesetzte Evolutenbildung schließlich in eine Zykloide übergeht, und zwar zunächst durch eine Art Anschaulichkeitsbeweis, dann in streng analytischer Form, wobei gezeigt wird, daß für die letzte Kurve zwischen dem Bogen s und seiner Amplitude v die Beziehung besteht: $z = A \cdot \sin v$, welche die Zykloide definiert. Die zweite heißt: „Investigatio curvarum, quae similes sunt suis evolutis vel primis vel secundis vel adeo ordinis cuiuscunque"[1]) (11. Dez. 1775). Zunächst wird eine elegante Beziehung zwischen dem Krümmungsradius r, der Amplitude φ und dem Krümmungsradius $r^{(n)}$ der $n$ten Evolute hergeleitet, nämlich: $r^{(n)} = \frac{d^n r}{d\varphi^n}$. Sollen nun zwei Kurven ähnlich sein, so müssen ihre Krümmungsradien in entsprechenden Punkten proportional sein, d. h. für unseren Fall muß $r^{(n)} = C \cdot r$, oder

$$\frac{d^n r}{d\varphi^n} = Cr$$

sein. Die Gleichung ist leicht zu integrieren; sie liefert

$$r = A \cdot e^{\lambda\varphi},$$

wo

$$\lambda = \sqrt[n]{C}$$

ist. Dieses Resultat wird auf Spezialfälle angewendet.

In den Phil. Trans. 57 (1767), p. 28—43 untersucht George Witchell (1728—1785, Privatlehrer der Mathematik in London, von 1767 an Headmaster of the Royal Naval Academy Portsmouth) die Frage nach dem Schatten eines Rotationsellipsoids (A general investigation of the nature of a Curve formed by the shadow of a prolate spheroid upon a plane standing at right angles to the axis of the shadow). Der Verfasser glaubt, gewisse Unregelmäßigkeiten in der Verfinsterung der Jupiterstrabanten damit erklären zu können, daß der Jupiter keine Kugel, sondern stark abgeplattet ist. Er sucht nun den Kernschatten dieses Planeten auf einer Ebene, die auf der Achse dieses Schattens senkrecht steht, wobei die Aufgabe sich wesentlich dadurch vereinfacht, daß die Achse des Jupiter nahezu auf seiner Bahnebene senkrecht steht, so daß die Aufgabe auf die einfachere zurückgeführt werden kann: Gegeben eine leuchtende runde Scheibe, und eine elliptische, die beide auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrecht stehen; gesucht der Kernschatten der letzteren auf einer dritten Parallelebene. Es ergibt sich eine Art Lemniskate, die

[1]) N. A. P. I, p. 75—116.

entsteht, wenn man auf allen Halbmessern einer Ellipse von der Peripherie aus gleiche Stücke abträgt.

Es folgen nun in chronologischer Ordnung wieder einige kleinere Arbeiten von Euler. Die erste: „Problematis cuiusdam geometrici prorsus singularis evolutio"[1]) sucht eine Kurve so zu bestimmen, daß die Normale den Winkel zwischen der Tangente und einer festen Geraden halbiert.

Die zweite heißt: „De curvis hyperbolicis quae intra suas asymtotas spatium finitum includunt"[2]) (13. Februar 1777). Sie geht aus von der Bemerkung, daß keine Hyperbel von der Form $x^m y^n = c$ die im Titel genannte Eigenschaft besitzt, und untersucht nun, ob dies vielleicht für Kurven von der Form $ax^\alpha y^\beta + bx^\gamma y^\delta = c$ der Fall sei. Vorausgeschickt wird ein Hilfssatz aus der Theorie der bestimmten Integrale, nämlich daß das Integral $\int_0^\infty \frac{u^m du}{(1+u^n)^k}$ endlich ist, wenn $nk > (m+1) > 0$ ist. Dieser wird auf zwei Arten bewiesen und bildet die Grundlage für die Herleitung folgender Resultate:

Alle hyperbolischen Kurven von der spezielleren Form:

$$ax^\alpha y^\beta + bx^\beta y^\alpha = c$$

schließen zwischen ihren Asymptoten einen endlichen Raum ein, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind: 1. a, b, c müssen alle drei positiv sein, 2. α und β müssen beide positiv sein, 3. α darf nicht $= \beta$ sein.

Für Kurven von der allgemeineren Form

$$ax^\alpha y^\beta + bx^\gamma y^\delta = c$$

gilt dasselbe, wenn 1. a, b, c alle positiv sind, 2. wenn α, β, γ, δ alle positiv sind, 3. wenn von den Brüchen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ der eine > 1, der andere < 1 ist.

Für Kurven der ersten, spezielleren Form gelingt unter den angegebenen Bedingungen die Bestimmung des in Rede stehenden Flächeninhalts, wenn $\alpha + \beta = 1$; er beträgt nämlich: $\frac{c^2}{2ab(\alpha - \beta)}$.

Die dritte heißt: „De insigni paradoxo, quod in analysi maximorum et minimorum occurrit"[3]) (31. Mai 1779). Es handelt sich darum, eine Kurve zu finden, für welche $\int ds \sqrt{x}$ ein Minimum wird. Dieselbe wird nach den Methoden der Variationsrechnung bestimmt, wo-

[1]) N. C. P. XVI (1771), p. 140—159. [2]) N. A. P. VIII, p. 116—139.
[3]) M. P. III (1811), p. 16—25.

bei sich das scheinbare Paradoxon herausstellt, daß es eine Kurve gibt, für welche dieses Integral einen noch kleineren Wert annimmt. Euler findet die Lösung darin, daß jenes Minimum nur ein relatives sei, ebenso wie etwa ein Minimalpunkt einer Kurve nur den kleinsten Wert gegenüber den benachbarten Ordinaten, nicht den kleinsten Wert überhaupt bestimmt.

Die vierte ist betitelt: „Solutio problematis ob singularia calculi artificia memorabilis“[1]) (22. März 1779). Hier ist die Aufgabe, eine Kurve so zu bestimmen, daß das Integral über dem Produkt aus dem Linienelement und einer beliebigen Funktion des Radiusvektor z, also $\int ds \cdot f(z)$ ein Minimum oder Maximum wird. Setzt man

$$f(z) = v; \quad \frac{dv}{dz} = q; \quad \frac{dy}{dx} = p,$$

so ergibt sich als Differentialgleichung:

$$y\,dx - x\,dy = \frac{vz\,dp}{q(1+p^2)}.$$

Die „singularia artificia“ bestehen nun darin, daß die Größen

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg}\varphi; \quad p = \operatorname{tg} w; \quad t = \frac{dz}{z\,d\varphi}$$

eingeführt werden, wodurch sich ergibt:

$$d\varphi = \frac{dz}{z\sqrt{n^2v^2z^2 - 1}}$$

(n ist Integrationskonstante). Charakteristisch für Euler ist die Schlußbemerkung, daß er nie auf diese artificia gekommen wäre, wenn er nicht die Lösung schon auf anderem Weg gehabt hätte, nämlich durch Einführung von Polarkoordinaten.

In einer fünften Abhandlung: „De duplici genesi tam epicycloidum quam hypocycloidum“[2]) beweist Euler einen von Dan. Bernoulli[3]) herrührenden Satz, daß jede solche Kurve auf doppelte Art erzeugt werden kann. Ist nämlich a der Radius des festen, b der des rollenden Kreises, so kommt, für $b < a$, dieselbe Kurve heraus, wenn $b = \frac{a+c}{2}$ und $b = \frac{a-c}{2}$ ist, wo c eine beliebige Strecke $< a$ ist. Ist $b > a$, so wird bei innerer Berührung für $b = a + c$ dieselbe Kurve beschrieben, wie bei äußerer für $b = c$.

Über eine 1779 erschienene Schrift von Nicola Fergola

[1]) M. P. II (1810), p. 3—9. [2]) A. P. 1781, I, p. 48—59. [3]) Nach Loria (Spez. Kurven, S. 483). S. dort auch näheres hierüber.

(1752—1824, Professor der Mathematik an der Universität Neapel und Gründer einer Schule von italienischen Mathematikern) kann ich nur nach Loria[1]) berichten. Es findet sich dort die Notiz, daß Fergola die schwierige Aufgabe gelöst habe, eine Kurve von der Eigenschaft zu finden, daß das Stück ihrer Tangente zwischen zwei festen Geraden gleich dem Krümmungsradius des Berührpunktes sei.

Eine interessante Klasse von Kurven hat Euler in einer Arbeit: „De curvis triangularibus“[2]) untersucht. Er versteht darunter Kurven mit drei Rückkehrpunkten (vgl. Fig. 49). Sie sind sowohl in der Optik, wo sie als Brennlinien auftreten, wie wegen ihrer Evolventen von Interesse. A, B, C seien die drei Spitzen; a, b, c die gegenüberliegenden Kurvenbögen. Trägt man nun z. B. auf der Tangente von A ein Stück

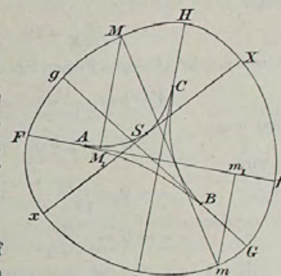

Fig. 50.

$$AF = f$$

ab und läßt die Tangente auf der Kurve abrollen, bis sie in B berührt, so ist der die Evolvente beschreibende Punkt in g angekommen und es ist $Bg = c + f$. Kommt dieser Punkt der Reihe nach in die Lagen H, f, G, h, so ist leicht zu sehen, daß

$$CH = Bg - a = c + f - a; \quad Af = b + CH = b + c + f - a;$$

$$BG = Af - c = b + f - a; \quad Ch = BG + a = b + f \text{ usw.}$$

Daraus folgt:

$$Ff = Gg = Hh = 2f + b + c - a.$$

Dies gilt aber für das Stück Xx jeder beliebigen Tangente, das innerhalb der Evolvente fällt; ist nämlich S der Berührpunkt, so ist

$$SX = SC + CH; \quad Sx = AS + AF;$$

also

$$Xx = SX + Sx = b + c + f - a + f = 2f + b + c - a.$$

Die Evolvente hat also die merkwürdige Eigenschaft (die sonst nur dem Kreis zukommt), daß jede Normale eines beliebigen Kurvenpunktes X in ihrem zweiten Schnittpunkt x

[1]) Niccolo Fergola è la scuola di Matematici che lo ebbe à duce, 1904, p. 73/74. [2]) A. P. 1778, II, p. 3—30.

mit der Kurve wieder auf dieser senkrecht steht, und daß Xx konstant ist. Euler nennt deshalb diese Kurven „orbiformes".

Um nun die Gleichung einer dreispitzigen Kurve aufzustellen, geht Euler aus von der Gleichung einer orbiformis und nimmt eine beliebige Normale Ff zur x-Achse; die konstante Länge Ff wird mit $2f$[1]) bezeichnet. Ist nun Mm eine beliebige zweite Normale, und sind von M und m die Lote MM_1 und mm_1 auf Ff gefällt, ist ferner:

$$FM_1 = X;\quad MM_1 = Y;\quad Fm_1 = x;\quad mm_1 = y;$$

endlich

$$\frac{dY}{dX} = P;\quad \frac{dy}{dx} = p,$$

so ist zunächst $P = p$. Ferner läßt sich leicht zeigen, daß:

$$Y - y = \frac{2f}{\sqrt{1+p^2}};\quad x - X = \frac{2fp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Setzt man:

$$X + x = 2Q;\quad Y + y = 2R,$$

so wird

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}};\quad Y = R + \frac{f}{\sqrt{1+p^2}} \tag{1}$$

$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}};\quad y = R - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{2}$$

Da (1) und (2) sich nur durch das Vorzeichen der Wurzel unterscheiden, und dieser Unterschied verschwindet, sobald rational gemacht wird, so können (1) und (2) als gleichwertig angesehen werden. Differenziert man (1) oder (2), und setzt man $dY = pdX$ und $dy = pdx$ ein, so ergibt sich $dR = pdQ$, also

$$R = \int pdQ. \tag{3}$$

Ist also Q eine beliebige Funktion von p, für welche die Integration in (3) ausführbar wird, so stellt (1) oder (2) in Verbindung mit (3) die Koordinaten einer orbiformis als Funktionen des Parameters p dar. — Um nun die Gleichung der dreispitzigen Kurve, d. h. der Evoluten zu finden, werden die Gleichungen durch eine Hilfsfunktion $S = \int Qdp$ etwas vereinfacht. Man erhält nämlich aus (2):

$$x = \frac{dS}{dp} + \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}};\quad y = \frac{pdS}{dp} - S - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Da die Kurve geschlossen sein soll, x und y also keinen unendlichen Wert annehmen können, so darf auch S nicht unendlich werden. Ist also z. B. S von der Form:

$$S = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_n p^n},$$

[1]) f hat also hier eine andere Bedeutung als vorher.

so darf der Nenner keine reellen Linearfaktoren haben, und es muß $m \leq n$ sein. Die Aufstellung der Evolute wird nun vereinfacht durch die Bemerkung, daß diese für alle Werte von f immer die gleiche bleibt; man kann also $f = 0$ setzen und erhält für die Koordinaten (t, u) des Krümmungsmittelpunkts:

$$t = \frac{dS}{dp} - p\frac{d^2S}{dp^2}(1+p^2);\quad u = S - p\frac{dS}{dp} - \frac{d^2S}{dp^2}(1+p^2).$$

Hieraus ergibt sich für den Krümmungsradius $\frac{d^2S}{dp^2}(1+p^2)^{3/2}$. Schließlich wird das Beispiel $S = \frac{ap}{1+p^2}$ durchgeführt, und die Aufgabe gelöst, eine dreispitzige Kurve so zu bestimmen, daß die Spitzen in drei gegebene Punkte fallen.

Zu einigen bemerkenswerten Resultaten über die Brennlinie der Parabel gelangt Fuß in einer Publikation vom 26. Januar 1791: „De novis quibusdam causticae parabolae proprietatibus".[1]) Er löst zunächst die (schon von Joh. Bernoulli und de l'Hôpital behandelte) Aufgabe, die Brennlinien zu finden, die durch Reflexion paralleler Strahlen an einer beliebigen Kurve entstehen. Fuß nimmt die Abszissenachse senkrecht zu der gegebenen Strahlenrichtung an, führt den Winkel φ der Kurventangente gegen die Ordinate ein und findet als Koordinaten X, Y eines Punktes der Brennlinie:

$$X = x + \frac{ds \sin\varphi \cdot \sin 2\varphi}{2d\varphi};\quad Y = y + \frac{ds \sin\varphi \cos 2\varphi}{2d\varphi}.$$

Dies wird angewendet auf die Parabel $y^2 = 2px$. Als Brennlinie ergibt sich:

$$Y = \pm\left(\frac{3}{2} - \frac{X}{3p}\right)\sqrt{\frac{2pX}{3}}.$$

Von dieser Kurve werden nun folgende Eigenschaften hergeleitet

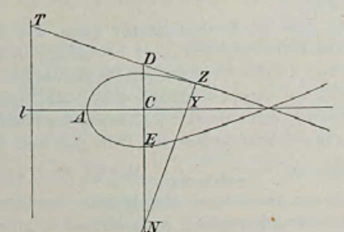

Fig. 51.

[1]) N. A. P. VIII, p. 182—200.

die sich am kürzesten an Fig. 51 ablesen lassen (AC ist die Abszisse der Punkte mit horizontaler Tangente, $Al = AC = \frac{3p}{2}$)

1) $\text{arc}\, AZ + ZY = s + y = 3\sqrt{\frac{2px}{3}}$

2) $DN - DZ = 3p$

3) $lT + TZ = 2\, \text{arc}\, AZ = 2s.$

Fuß untersucht nun, ob es noch andere Kurven gibt, denen eine dieser drei Eigenschaften zukommt, und findet, daß dies nicht der Fall ist, daß also nur die Brennlinie der Parabel diese Eigenschaften besitzt. Dagegen gelingt es ihm, Kurven zu finden, die durch eine Verallgemeinerung definiert sind, nämlich so, daß $lT + TZ$ in einem gegebenen Verhältnis zur Bogenlänge stehen, daß also, wenn DY eine solche Kurve ist (Fig. 52),

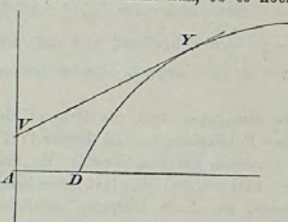

Fig. 52.

$$AV + VY = n \cdot \text{arc}\, DY.$$

Er findet als Bogenlänge

$$s = \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{2Ax^{n-1} - A^2}}$$

und für den Krümmungsradius

$$R = \frac{x^n}{A(n-1)},$$

wo A eine Integrationskonstante ist. Die Kurven sind algebraisch und rektifizierbar.

Mit Kurven, die bei Abwicklung von Kegel und Zylinder auftreten, haben sich Euler und Schubert beschäftigt. Ersterer kommt in einer Note über die Oberfläche des schiefen Kreiskegels: „De superficie coni scaleni, ubi imprimis ingentes difficultates, quae in hac investigatione occurrunt, perpenduntur“[1] (12. September 1786) auch auf die Abwicklungsfigur des Grundkreises und stellt für deren Krümmungsradius die Formel auf $r = \frac{cp}{c + b\cos\varphi}$. Hierbei ist c der Radius des Grundkreises, b der Abstand des Mittelpunktes von der Projektion der Spitze auf die Grundkreisebene, p die Mantellinie eines beliebigen

[1]) N. A. P. III, p. 69—89.

Punktes, φ ihr Winkel (in der Abwicklungsfigur) mit der größten Mantellinie. — Schubert (De evolutione sectionum cylindri[1]), 25. Oktober 1798) untersucht die Abwicklungsfigur eines ebenen Zylinderschnittes durch Rechnung und Konstruktion. Die Gleichung der Kurve ist:

$$y = a \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \cos\frac{x}{a}\right),$$

wo a der Radius des Zylinders, α die Neigung der Schnittebene gegen die Grundkreisebene ist.

Raumkurven und Flächen.

Wie wir gesehen haben, ist für die analytische Geometrie der Ebene in unserem Zeitraum über das Entstehen und Wachsen neuer, fruchtbarer Gedanken und Methoden von allgemeiner Bedeutung nicht viel zu berichten; die Mathematiker zeigen sich auf diesem Gebiet mehr mit Einzeluntersuchungen von Kurven beschäftigt, und es tritt namentlich die Neigung hervor, neue Kurven und Kurvengattungen von gegebenen Eigenschaften aufzusuchen. Gerade umgekehrt ist das Verhältnis in der analytischen Geometrie des Raumes: Hier liegen wenig Untersuchungen über spezielle Kurven und Flächen vor, dagegen sind eine ganze Reihe bahnbrechender Arbeiten zu nennen, die teils ganz allgemeine, wichtige Eigenschaften von Kurven und Flächen behandeln, teils die Methoden und Theorien in einer Weise fördern, daß die analytische Geometrie des Raumes sich von bescheidenen Anfängen zu der Höhe erhob, die durch Monges Werk: „Feuilles d'Analyse appliquée à la Géometrie“ bezeichnet wird. — Wir werden zunächst einige Arbeiten über Raumgeometrie überhaupt, Koordinaten usw. besprechen, hierauf die Raumkurven und abwickelbaren Flächen, dann die krummen Flächen behandeln und schließlich über die Feuilles d'Analyse berichten. Als eine Art Anhang werden dann noch einige Bemerkungen über die Fortschritte der Kartographie folgen, soweit die mathematische Seite daran in Betracht kommt.

Als einen Beweis dafür, wie ungelenk selbst bedeutende Mathematiker am Anfang unseres Zeitraumes noch die räumlichen Probleme anfaßten, führen wir einiges aus dem III. Kapitel des mehrfach erwähnten Werkes von Waring, „Proprietates algebraicarum curvarum“ an. Hier werden die „proprietates algebraicorum solidorum“ betrachtet. Zunächst sei an die schon früher (S. 457) gemachte Bemerkung erinnert, daß fast immer nur von Körpern die Rede ist, und daß die Flächen

[1]) N. A. P. XIII, p. 190—204.

nur als Begrenzung von Körpern, nicht als selbständige Gebilde auftreten. Waring stellt nun die Gleichung einer Rotationsfläche auf, indem er die Schnittkurve einer beliebigen Ebene ermittelt. Er benutzt dazu (s. Fig. 53) die zur Schnittebene senkrechte Meridianebene, in der die Gleichung der Meridiankurve in rechtwinkligen Koordinaten ($AP = x$, $PM = y$) gegeben ist. Die Schnittebene trifft die Achse (Abszisse) in L, die Ordinate MP in p; in der Schnittebene wird wieder ein rechtwinkliges Koordinatensystem angenommen, mit dem Ursprung L, der Abszisse $Lp = z$, der Ordinate $pm = v$. Die Lage der Schnittebene zur Achse ist bestimmt durch $AL = a$, und das Verhältnis $\frac{Lp}{LP}$, das $= \frac{r}{s}$ gesetzt wird.

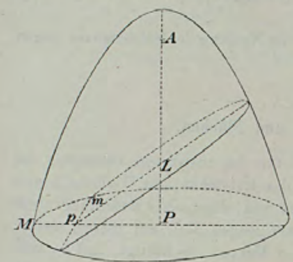

Fig. 53.

Waring bezeichnet AL als prima abscissa, Lp als secunda abscissa, mp als ordinata secundae abscissae. Es ergeben sich nun leicht die Beziehungen:

$$x = a + \frac{sz}{r}; \quad y^2 = v^2 + \frac{(r^2 - s^2)z^2}{r^2}.$$

In Verbindung mit der Gleichung der Meridiankurve stellen diese Gleichungen bei Waring den Rotationskörper dar. Er folgert daraus einige Bemerkungen über die Rotationsflächen 2. Ordnung, über den Ort der Zentra und der Brennpunkte einer Schar von Parallelschnitten. Die Zahl der unabhängigen Konstanten einer Fläche n^{ter} Ordnung wird zu $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1$ bestimmt. Weiter folgen Sätze über Durchmesserebenen, die denen über die Durchmesser ebener Kurven analog sind, und es scheint, daß Waring im Besitze einer Reihe von Sätzen über algebraische Raumkurven und Flächen war, ähnlicher Art wie die von ihm über ebene Kurven gefundenen; er bemerkt hierüber: „Hic adjici possunt propositiones ad algebraica solida et curvas duplicis curvaturae, quae consimiles sunt fere omnibus propositionibus capite primo traditis de curvis simplicis curvaturae; sed taedet has disquisitiones ulterius promovere". Auch mit Zentralprojektion von Kurven und Körpern beschäftigt er sich, und stellt hierbei den Satz auf: „Nulla curva projiciet curvas superiorum sibi ipsi ordinum".

Einen wesentlich anderen Charakter zeigt die Abhandlung von

Lagrange: „Solution analytique de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires".[1] Der eigentliche Zweck ist, Oberfläche, Inhalt, einbeschriebene und umbeschriebene Kugel, Schwerpunkt usw. für ein Tetraeder durch seine sechs Kanten auszudrücken. Hierzu wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem so angenommen, daß eine Ecke (S) in den Ursprung fällt, die drei anderen (M_1, M_2, M_3) durch ihre Koordinaten gegeben sind. Infolge dieser Behandlungsweise, die ganz symmetrisch und mit bewundernswerter Eleganz durchgeführt wird, ergeben sich eine Reihe fundamentaler Sätze über Punkte und Geraden im Raum. Um sie kurz anführen zu können, benutzen wir die Bezeichnungen Lagranges, wobei jedoch die Striche durch Indices ersetzt sind, und von drei durch zyklische Vertauschung sich ergebenden Formeln immer nur eine angeschrieben wird. Es sei also (Fig. 54)

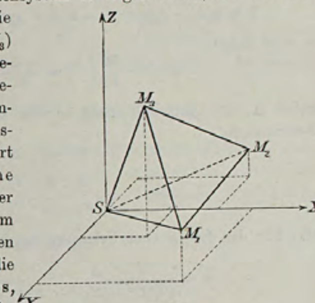

Fig. 54.

$$SM_1^2 = a_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$
$$b_1 = x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3$$
$$M_2 M_3^2 = c_1 = a_1 + a_2 - 2b_3.$$

Ferner:

$$\alpha_1 = a_2 a_3 - b_1^2; \quad \beta_1 = b_2 b_3 - a_1 b_1 \measuredangle M_2 S M_3 = \gamma_1.$$

Dann ist:

$$SM_1 = \sqrt{a_1}; \quad M_2 M_3 = \sqrt{c_1}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{b_1}{\sqrt{a_2 a_3}}$$
$$\triangle M_2 S M_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_2 a_3 - b_1^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha_1};$$
$$\triangle M_1 M_2 M_3 = E = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Sigma\alpha + 2\,\Sigma\beta}.^{2)}$$

Es wird nun die Gleichung der durch M_1, M_2, M_3 gelegten Ebene hergeleitet, allerdings nicht ganz symmetrisch. Lagrange

[1]) Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres à Berlin 1773, p. 149—177. Vgl. Loria in den Verhandlungen des III. Mathematikerkongresses (zu Heidelberg 1904), S. 571. [2]) Das Zeichen Σ bedeutet im folgenden die Summe der drei Glieder, die durch zyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 entstehen.

nimmt nämlich ihre Gleichung in s, t, u als laufenden Koordinaten in der Form an:

$$u = l + ms + nt,$$

und bestimmt die Koeffizienten l, m, n, wobei zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\xi_1 = y_2 z_3 - z_2 y_3; \quad \eta_1 = z_2 x_3 - x_2 z_3; \quad \zeta_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3;$$

es wird dann:

$$m = -\frac{\Sigma\xi}{\Sigma\zeta}; \quad n = \frac{-\Sigma\eta}{\Sigma\zeta}; \quad l = \frac{\Delta}{\Sigma\zeta},$$

wobei Δ die (natürlich nicht in der heutigen Form geschriebene) Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ist. Für das Lot h vom Ursprung ergibt sich:

$$h = \frac{\Delta}{\sqrt{(\Sigma\xi)^2 + (\Sigma\eta)^2 + (\Sigma\zeta)^2}} = \frac{\Delta}{\sqrt{\Sigma\alpha + 2\Sigma\beta}},$$

daraus der Inhalt des Tetraeders:

$$\frac{Eh}{3} = \frac{\Delta}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{a_1 a_2 a_3 + 2 b_1 b_2 b_3 - \Sigma a_1 b_1^2}$$
$$= \frac{1}{6}\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 2\beta_1 \beta_2 \beta_3 - \Sigma\alpha_1 \beta_1^2}.$$

Es wird sodann die Aufgabe gelöst, das Tetraeder von größtem Inhalt zu finden, wenn die vier Seitenflächen dem Inhalt nach gegeben sind. Für die folgenden Überlegungen von großer Wichtigkeit ist die Aufgabe, die Diagonale einer dreiseitigen Doppelpyramide durch ihre neun Kanten auszudrücken. Eine solche erhält man, wenn ein beliebiger Punkt P (p, q, r) des Raumes mit M_1, M_2, M_3 verbunden wird. Ist $PS^2 = f$, $PM_1^2 = g_1$ usw., und zur Abkürzung gesetzt:

$$k_1 = p x_1 + q y_1 + r z_1,$$

so ist:

$$g_1 = a_1 + f - 2k_1$$

oder:

$$k_1 = \frac{a_1 + f - g_1}{2},$$

und:

$$p = \frac{\Sigma k_1 \xi_1}{\Delta}; \quad q = \frac{\Sigma k_1 \eta_1}{\Delta}; \quad r = \frac{\Sigma k_1 \zeta_1}{\Delta},$$

und daraus:

$$\Delta^2 f = \Sigma\alpha_1 k_1^2 + 2\Sigma\beta_1 k_2 k_3.$$

Dies ist eine Gleichung 2. Grades für f, wie es ja auch sein muß, da

die beiden Pyramiden auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der gemeinsamen Grundfläche liegen können. Aus den zuletzt aufgestellten Gleichungen erhält man Radius und Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel, indem man $f = g_1 = g_2 = g_3$ setzt, und die zugehörigen Werte von p, q, r berechnet. Es ist in diesem Fall

$$k_1 = \frac{a_1}{2},$$

also ergibt sich für den Radius $(\sqrt{f})$ und die Mittelpunktskoordinaten (p, q, r)

$$f = \frac{\Sigma\alpha_1 a_1^2 + 2\Sigma\beta_1 a_2 a_3}{4\Delta^2}; \quad p = \frac{\Sigma a_1 \xi_1}{2\Delta} \text{ usw.}$$

In ähnlicher Weise werden Radius und Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel ermittelt, indem man zunächst die von P auf die vier Seiten des Tetraeders gefällten Lote berechnet. Das Lot ϱ_1 auf $M_2 S M_3$ wird

$$\varrho_1 = \frac{\alpha_1 k_1 + \beta_3 k_2 + \beta_2 k_3}{\Delta\sqrt{\alpha_1}} = \frac{\xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r}{\sqrt{\alpha_1}}$$

und das Lot π auf $M_1 M_2 M_3$

$$\pi = \frac{\Delta - (p\Sigma\xi + q\Sigma\eta + r\Sigma\zeta)}{\sqrt{\Sigma\alpha + 2\Sigma\beta}}.$$

Damit wird zunächst die Aufgabe gelöst, den Punkt P so zu bestimmen, daß die vier Pyramiden, welche die Spitzen in P und die Tetraederflächen als Grundflächen haben, in einem vorgeschriebenen Verhältnis hinsichtlich des Inhalts stehen. Dann wird

$$\pi = \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$$

gesetzt, wodurch sich für den Radius $(\sqrt{f})$ und die Mittelpunktskoordinaten der einbeschriebenen Kugel die Werte ergeben:

$$f = \frac{\Sigma a_1 \alpha_1 + \Sigma 2 b_3 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{(\sqrt{\omega} + \Sigma\sqrt{\alpha_1})^2}; \quad p = \frac{\Sigma x_1 \sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\omega} + \Sigma\sqrt{\alpha_1}},$$

wo

$$\omega = \Sigma\alpha_1 + 2\Sigma\beta.$$

Schließlich wird noch in ähnlicher Weise der Schwerpunkt bestimmt.

Den Übergang zu den Raumkurven mag eine hervorragende Abhandlung von Euler bilden, die ebenfalls noch allgemeinerer Natur und insofern von großer Bedeutung ist, als darin die Grundzüge der allgemeinen Theorie der Raumkurven in ihrer heutigen Gestalt entwickelt sind. Sie heißt: „Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi".[1])

[1]) A. P. 1782, I, p. 19—57.

Euler geht hier darauf aus, die durch „figurae tantopere complicatae et propemodum inextricabiles" hergeleiteten Formeln auf einfacherem Wege zu gewinnen, wobei die Hilfsmittel der sphärischen Trigonometrie benutzt werden. Um keine der drei Achsen zu bevorzugen, wird die Bogenlänge s der Kurve als Parameter eingeführt und mit p, q, r die Ableitungen der Koordinaten nach diesem Parameter bezeichnet, so daß:

$$dx = p\,ds; \quad dy = q\,ds; \quad dz = r\,ds$$

ist. Es muß dann sein:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1; \quad p\,dp + q\,dq + r\,dr = 0. \tag{1}$$

Ferner, wenn ds als konstant angesehen wird:

$$d^2x = dp\,ds; \quad d^2y = dq\,ds; \quad d^2z = dr\,ds.$$

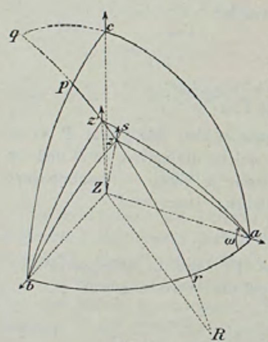

Fig. 55.

Euler denkt sich nun (Fig. 55) um einen Kurvenpunkt $Z(x, y, z)$ eine Kugel vom Radius $= 1$ beschrieben, die von der Tangente in z geschnitten wird, während die durch Z gehenden Parallelen zu den Achsen einen Oktanten a, b, c bestimmen. Es ist dann

$$\cos az = p;$$
$$\sin az = \sqrt{1 - p^2} = \sqrt{q^2 + r^2}. \tag{2}$$

Das sphärische Lot von z auf bc ist das Komplement von az, und zugleich der Neigungswinkel der Tangente gegen die yz-Ebene. Ferner ist nach bekannten Sätzen der Trigonometrie:

$$\sin baz = \frac{r}{\sqrt{r^2 + q^2}},$$

also:

$$\cos baz = \frac{q}{\sqrt{r^2 + q^2}}. \tag{3}$$

Es sei nun durch Z auch noch eine Parallele zur Tangente des Nachbarpunktes gezogen, welche die Kugel in z' schneidet, dann ist $\sphericalangle zZz'$ der Kontingenzwinkel (im heutigen Sprachgebrauch), der Krümmungsradius $R = \frac{ds}{zz'}$, und die durch den Bogen zz' gelegte

Ebene die Schmiegungsebene der Kurve. Diese Betrachtungsweise zeigt, daß Euler das Verdienst gebührt, die sogenannte sphärische Abbildung in die Mathematik eingeführt zu haben, was gewöhnlich Gauß zugeschrieben wird. — Um nun die Neigungswinkel der Schmiegungsebene gegen die Koordinatenebenen zu bestimmen, setzt Euler $az = \alpha$, so daß also $az' = \alpha + d\alpha$ wird. Es ist also nach (2):

$$d\alpha = \frac{dp}{\sqrt{q^2 + r^2}}. \tag{4}$$

Bezeichnet man $\sphericalangle baz$ mit ω, so wird:

$$\sphericalangle baz' = \omega + d\omega,$$

also:

$$\sphericalangle zaz' = d\omega.$$

Nun ist:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{q}{r},$$

also:

$$d\omega = \frac{q\,dr - r\,dq}{q^2 + r^2}.$$

Ist ferner $zs \perp az'$, so ist:

$$zs = d\omega \cdot \sin az; \quad sz' = d\alpha; \tag{5}$$

also:

$$zs = \frac{q\,dr - r\,dq}{\sqrt{q^2 + r^2}}; \tag{6}$$

ferner:

$$zz'^2 = zs^2 + z's^2,$$

also nach (1), (5) und (6):

$$zz'^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2 \tag{7}$$

und:

$$R = \frac{ds}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}} = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}. \tag{8}$$

Ist ds nicht konstant, so ist:

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Euler bemerkt hierzu: „quae formula per analysin communem demum post calculos maxime perplexos est eruta".

Ferner folgt aus (5) und (6)

$$\operatorname{tg} zz's = \frac{r\,dq - q\,dr}{dp}.$$

Verlängert man zz' bis zum Schnitt mit den Oktantenseiten in

p, q, r (natürlich nicht zu verwechseln mit den Differentialquotienten p, q, r), so ergibt eine einfache Rechnung:

$$\cos zpb = \frac{q\,dr - r\,dq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}},$$

womit der Winkel der Schmiegungsebene gegen die yz-Ebene bestimmt ist; die beiden anderen werden hieraus durch zyklische Vertauschung abgeleitet, obgleich natürlich diese Bezeichnung nicht auftritt. Danach wäre auch die erste klar bewußte Anwendung dieses Verfahrens Euler zuzuschreiben. Ist ferner R der Schnittpunkt des Krümmungsradius mit der Einheitskugel, so ist:

$$\cos aZR = \frac{dp}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}.$$

Die aus dem Bisherigen sich ergebenden bemerkenswerten Sätze der sphärischen Trigonometrie werden formuliert, und dann auf eine zweite Art die Gleichung der Schmiegungsebene hergeleitet. Sind nämlich u, v, w ihre Achsenabschnitte, so ist ihre Gleichung

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1.$$

Auch diese Form der Ebenengleichung dürfte hier zum erstenmal auftreten. Da in der Schmiegungsebene drei konsekutive Punkte liegen, so ist auch:

$$\frac{x + dx}{u} + \frac{y + dy}{v} + \frac{z + dz}{w} = 0$$

oder:

$$\frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0,$$

und ebenso:

$$\frac{dp}{u} + \frac{dq}{v} + \frac{dr}{w} = 0.$$

Hieraus folgt mit Einführung eines Proportionalitätsfaktors t:

$$\frac{1}{u} = \frac{r\,dq - q\,dr}{t} \text{ usw.},$$

und hieraus als Gleichung der Schmiegungsebene:

$$x(r\,dq - q\,dr) + y(p\,dr - r\,dp) + z(q\,dp + p\,dq) = t,$$

wo t noch durch die Bedingung bestimmt wird, daß die Schmiegungsebene durch einen gegebenen Kurvenpunkt geht. Daraus werden nun wieder die schon oben gefundenen Formeln entwickelt und schließlich die Resultate in die elegante Form gebracht:

Hat man ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten den Achsen parallel sind, und sind die Kantenlängen

1. x, y, z, so gibt die Diagonale die Richtung und Größe des Radiusvektors an;
2. sind sie p, q, r, — die Richtung der Tangente;
3. sind sie $\frac{dp}{ds}, \frac{dq}{ds}, \frac{dr}{ds}$, — Richtung und Größe des Krümmungsradius;
4. sind sie $\frac{r\,dq - q\,dr}{ds}, \frac{p\,dr - r\,dp}{ds}, \frac{q\,dp - p\,dq}{ds}$, so steht die Diagonale auf der Schmiegungsebene senkrecht.

Damit sind wir nun schon auf dem Gebiet der Raumkurven und der damit eng zusammenhängenden abwickelbaren Flächen angelangt, ein Zusammenhang, der auch erst in unserem Zeitraum genauer studiert und klar erkannt worden ist. Auch hier war Euler der erste, der sich mit diesen Beziehungen beschäftigt und dabei sogleich wichtige Resultate gefunden hat. Seine Arbeit, die sehr beachtenswert ist, ist betitelt: „De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet“.[1]) Zu bemerken ist hier, daß Euler zwar noch in den Anschauungen seiner Zeit befangen erscheint, insofern er von „solidis“ spricht[2]), daß er aber doch den ersten Schritt zur heutigen Betrachtungsweise der Flächen als selbständiger Gebilde tut, indem er die Koordinaten der Flächenpunkte als Funktionen zweier Parameter t, u darstellt, und untersucht, welchen Bedingungen diese genügen müssen, wenn die Fläche in eine Ebene abwickelbar sein soll. Euler geht aus von der abgewickelten Fläche, nimmt t und u als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes der Ebene, und betrachtet in dieser Ebene ein unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck, dessen Ecken die Koordinaten (t, u); $(t + dt, u)$; $(t, u + du)$ haben, und das wegen der Abwickelbarkeit dem entsprechenden Dreieck auf der Fläche selbst kongruent sein muß. Er bezeichnet nun die partiellen Ableitungen von x, y, z nach t und u mit l, λ; m, μ; n, ν $\left(\text{also } \frac{\partial x}{\partial t} = m;\ \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda \text{ usw.}\right)$. Dann sind die Koordinaten der Ecken des entsprechenden Dreiecks auf der Fläche x, y, z; $x + l\,dt$, $y + m\,dt$, $z + n\,dt$; $x + \lambda\,du$, $y + \mu\,du$, $z + \nu\,du$, und aus der Kongruenz der Dreiecke ergeben sich für l, m, n; λ, μ, ν die drei Bedingungsgleichungen:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1; \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1; \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Dies sind also die analytischen, notwendigen und hinreichen-

[1]) N. C. P. XVI. 1771, p. 3—34. [2]) Vgl. S. 457.

den **Bedingungen der Abwickelbarkeit.** Man sieht leicht, daß **Euler** damit nichts anderes gezeigt hat, als daß, modern ausgedrückt, das **Linienelement der Fläche mit dem der Ebene übereinstimmen muß.** Analytisch betrachtet, handelt es sich also um die Aufgabe, drei Funktionen von t und u so zu bestimmen, daß ihre partiellen Ableitungen den aufgestellten Bedingungen genügen. Diese werden gefunden durch eine **geometrische** Behandlung des Problems. **Euler** entwickelt nämlich die Beziehungen der abwickelbaren Flächen zu den Raumkurven, und zeigt, daß **die Tangenten einer beliebigen Raumkurve stets eine abwickelbare Fläche bestimmen;** die Koordinaten eines beliebigen Punktes einer solchen werden nun folgendermaßen dargestellt (vgl. Fig. 56). AT, TU, UV seien die Koordinaten t, u, v eines Punktes V der Raumkurve, S der Schnittpunkt seiner Tangente mit der xy-Ebene, M der Schnittpunkt von SU mit der x-Achse. Die entsprechenden Größen für einen Nachbarpunkt v sind mit kleinen Buchstaben bezeichnet, so daß z. B. $At = t + dt$ ist, usw. Ist ferner $\angle MUT = \zeta$, $\angle UVS = \vartheta$, und sind $u = f(t)$ und $v = \varphi(t)$ die Gleichungen der Raumkurve, so ist:

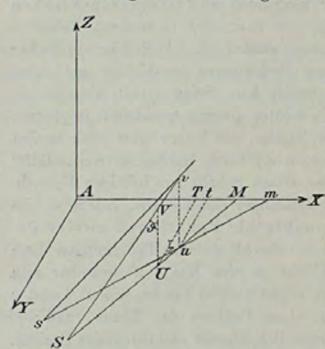

Fig. 56.

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{dt}{du}; \quad Uu = \frac{dt}{\sin\zeta};$$

$$dv = Uu \operatorname{ctg}\vartheta = \frac{dt}{\sin\zeta \operatorname{tg}\vartheta}.$$

Daraus folgt für das Kurvenelement: $Vv = \frac{dt}{\sin\zeta\sin\vartheta}$. Sind nun x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes Z auf der Tangente VS, und $ZV = s$, so hat man:

$$x = t - s\sin\vartheta\cdot\sin\zeta; \quad y = u - s\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\zeta; \quad z = v - s\cos\vartheta,$$

wobei durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{dt}{du}; \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{dt}{dv\cdot\sin\zeta}; \quad du = f'(t)\,dt; \quad dv = \varphi'(t)\,dt$$

die Winkel ζ und ϑ in Funktion von t bestimmt, also die Koordinaten x, y, z eines Punktes einer beliebigen abwickelbaren Fläche als

Funktionen der beiden Parameter s **und** t dargestellt sind. Die Beziehungen zwischen den Winkeln ζ und ϑ und den früher benutzten Größen l, m, n, λ, μ, ν ergeben sich durch Einführung des Kontingenzwinkels $Svs = d\omega$, für welche **Euler** zunächst die Gleichung herleitet: $d\omega^2 = d\vartheta^2 + d\zeta^2\sin^2\vartheta$. Es ist dann:

$$l\cdot\sin\omega + \lambda\cos\omega = \sin\zeta\sin\vartheta; \quad m\sin\omega + \mu\cos\omega = \cos\zeta\sin\vartheta;$$

$$n\cdot\sin\omega + \nu\cos\omega = \cos\vartheta$$

und:

$$l\cdot\cos\omega - \lambda\cdot\sin\omega = \frac{(d\sin\zeta\sin\vartheta)}{d\omega}; \quad m\cos\omega - \mu\sin\omega = \frac{d(\cos\vartheta\sin\zeta)}{d\omega};$$

$$n\cos\omega - \nu\sin\omega = \frac{d\cos\vartheta}{d\omega}.$$

Damit sind l, m, n, λ, μ, ν durch ζ und ϑ ausgedrückt; es läßt sich noch die bemerkenswerte Beziehung nachweisen:

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{dm}{d\mu} = \frac{dn}{d\nu} = -\operatorname{ctg}\omega.$$

Schließlich wird gezeigt, daß der Schatten, den ein leuchtender Körper von einem dunkeln erzeugt, ein solches „solidum" darstellt, und daraus ebenfalls die Gleichung der abwickelbaren Fläche hergeleitet.

Ungefähr in dieselbe Zeit fällt die erste Untersuchung von **Monge** über diesen Gegenstand, die sich in etwas anderer Richtung bewegt, nämlich ein „Mémoire sur les Développées, les Rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure", das schon im Jahre 1771 der Akademie eingereicht, aber erst im 10. Band der Mém. div. Sav. (1785), p. 511—550, veröffentlicht und später von **Monge** seinen „Feuilles d'Analyse" als Schlußkapitel einverleibt wurde. Schon dieses erste Werk zeigt alle Vorzüge von **Monges** Darstellungsweise, vor allem eine eminente Sicherheit des räumlichen Anschauungsvermögens; man muß geradezu sagen, daß **Monge** mit bloß vorgestellten räumlichen Gebilden ebenso leicht operiert, wie ein anderer mit gezeichneten Figuren in der Ebene. Dazu kommt eine ungemeine Eleganz in der Beweisführung und eine staunenswerte Gewandtheit in der analytischen Formulierung differential-geometrischer Beziehungen. — **Monge** schickt zunächst einige Hilfsaufgaben über Punkte, Geraden und Ebenen voraus, die er in den F. d'A. in der Einleitung behandelt, und erläutert dann einen für das Folgende wichtigen Begriff, nämlich den der **Polachse** (axe des pôles) eines Kreisbogens; er versteht darunter den geometrischen Ort der **Pole**, d. h. der Punkte, die von allen

Punkten des Kreisbogens gleichweit entfernt sind; d. h. die Polachse ist das im Mittelpunkt eines Kreisbogens auf seiner Ebene errichtete Lot. Unter Benutzung dieser Bezeichnung ist also die Polachse für ein durch drei konsekutive Punkte bestimmtes Bogenelement einer Kurve die Schnittgerade zweier konsekutiver Normalebenen. Die Gesamtheit aller dieser Geraden ergibt den Ort der Pole (surface des pôles)[1]) für alle Bogenelemente der ganzen Kurve. Es ist eine abwickelbare Fläche und auf ihr liegen auch die sämtlichen Evoluten der Kurve; eine solche wird von Monge in anschaulicher Weise definiert als der Ort der Schnittpunkte konsekutiver Normalen; er zeigt, wie man zu einer beliebigen Normale geometrisch die Nachbarnormale findet, die sie schneidet, zu dieser ebenso eine dritte usf. Er hat also damit nicht bloß den Begriff der Evolute einer Raumkurve neu eingeführt, sondern auch gezeigt, daß jede Raumkurve unendlich viele Evoluten hat, daß alle auf der surface des pôles liegen und wie sie konstruiert werden. — Monge zeigt dann sofort, daß der Ort der Krümmungscentra auch auf der Polarfläche liegt, aber, im Gegensatze zu den ebenen Kurven, keine Evolute darstellt, außer eben bei einer solchen Kurve. Ferner beweist er, ebenfalls rein geometrisch, den interessanten Satz, daß die Evoluten geodätische Linien (in moderner Ausdrucksweise) der Polarfläche sind. Monge drückt sich folgendermaßen aus: „on aura une développée, si, par un de ses points, on mène une tangente à la surface développable qui est le lieu de ses pôles, et si l'on plie librement sur cette surface le prolongement de cette tangente". Die Beweisführung, die auf dem hier von Monge benutzten Verfahren des „plier librement" beruht, ist so charakteristisch für die Gewandtheit und Eleganz, mit der Monge im Raum operiert, daß wir wenigstens die Grundgedanken kurz andeuten wollen: er vergleicht die oben erwähnte Tangente mit einem unendlich dünnen Band, das über eine Keilkante gelegt wird, hier also über eine der Mantellinien, längs der zwei konsekutive Elemente der abwickelbaren Fläche zusammenstoßen, und zeigt, daß die beiden Teile derselben AB und BC (s. Fig. 57) mit der Keilkante gleiche Winkel

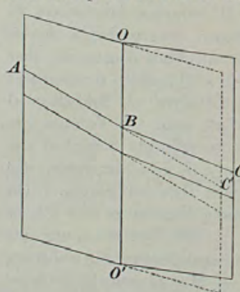

Fig. 57.

[1]) Daher die heutige Bezeichnung: „abwickelbare Polarfläche".

machen, daß also $\angle ABO = \angle O'BC$ ist. Dies trifft aber auch für jede Evolute auf Grund der von Monge gegebenen Definition zu. Daraus folgt dann sofort, daß ABC in eine Gerade ABC' übergeht, wenn die zweite Ebene um OO' gedreht wird, bis sie mit der ersten zusammenfällt, d. h. daß bei Abwicklung der Polarfläche in eine Ebene die Evoluten in Gerade übergehen, daß sie also kürzeste Linien der Polarfläche sind. Dieser geometrischen Herleitung folgt dann der analytische Beweis, sowie eine differentialgeometrische Herleitung der geodätischen Linien für beliebige (also nicht abwickelbare Flächen), die in den Feuilles d'Analyse fehlt und die auf der für abwickelbare Flächen gegebenen fußt. Monge betrachtet nämlich ein Element Mm einer geodätischen Linie ML und legt durch M und m Ebenen parallel der yz-Ebene, welche die Tangentialebenen in M und m nach GT und gt schneiden. Q und q sind die Projektionen von M und m auf die xy-Ebene, ferner ist

$$Mn \parallel Qq;\ Q'M' \parallel QM,\quad MN \parallel QQ';$$

der Winkel $M'Mm$ ist mit ν bezeichnet, und es ist dann nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie

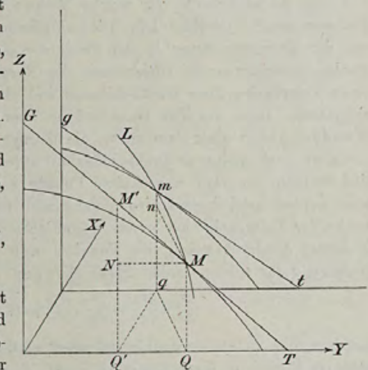

Fig. 58.

$$\cos\nu = \cos Q'Qq \cdot \cos M'MN \cdot \cos mMn + \sin M'MN \sin mMn.$$

Nun ist oben gezeigt worden, daß für geodätische Linien

$$\angle Mmt = gmL = \nu + d\nu$$

ist; die beiden Winkel ν und $\nu + d\nu$ sind also nur verschieden durch die Änderung des Winkels $M'MN$; das Differential von $\cos\nu$ ist also $= 0$, wenn man bei der Differentiation den $\angle M'MN$ als konstant ansieht. Bildet man also das Differential unter dieser Voraussetzung und drückt dabei die Winkelfunktionen durch die Differentiale von x, y, z aus, so erhält man die Differentialgleichung der geodätischen Linien, nämlich:

$$(ds^2 + dz^2)\, d^2y = \left[dy\, dz - \frac{ds^2}{q}\right] d^2z,$$

wo $ds^2 = dx^2 + dy^2$, und wo die Differentiale von z vermöge der Flächengleichung durch x, y und ihre Differentiale auszudrücken sind.

Daran schließt sich eine Anwendung auf ebene und sphärische Kurven: für erstere ist die Polarfläche ein Zylinder, der auf der Kurvenebene senkrecht steht, und dessen Basis die gewöhnliche Evolute der Kurve ist; für letztere ist es ein Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt. Es folgen einige allgemeine Bemerkungen geometrischer Natur über abwickelbare Flächen überhaupt und ihre Rückkehrkante, für welche Monge den Namen „arête de rebroussement" eingeführt hat. Die analytische Behandlung geht aus von der Kurvengleichung in der Form $y = \varphi(x)$; $z = \psi(x)$, und es werden nacheinander die Gleichungen der Normalebene, der abwickelbaren Polarfläche, ihrer Rückkehrkante und einer beliebigen Evolute aufgestellt. Dann kommen Bemerkungen über die zwei Arten von Wendepunkten einer Raumkurve, die Monge als „points de simple inflexion" und „points de double inflexion" unterscheidet. Die ersteren sind Stellen, wo vier konsekutive Punkte in einer Ebene liegen; hier werden zwei konsekutive Polarachsen parallel, die Rückkehrkante der Polarfläche hat einen unendlichen fernen Punkt, oder, in moderner Ausdrucksweise: die Torsion der Kurve ist $= 0$. Als Bedingung für solche Punkte findet Monge:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^3z}{dx^3} - \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

Letztere, die „points de double inflexion" sind Stellen, wo drei konsekutive Punkte in einer Geraden liegen, d. h. wo die Krümmung der Kurve $= 0$, und der Krümmungsradius unendlich wird. Um solche Punkte zu bestimmen, wird zunächst für den Krümmungsradius die Formel entwickelt

$$\frac{[1 + \varphi'^2 + \psi'^2]^{3/2}}{\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2 + (\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')^2}}.$$

Daraus ergibt sich als Bedingung für einen solchen Punkt: $\varphi'' = 0$; $\psi'' = 0$. Den Schluß bilden Betrachtungen über die Développée einer abwickelbaren Fläche; es ist dies die abwickelbare Fläche, die heute die rektifizierende heißt. Von dieser weist Monge folgende Eigenschaften nach:

1. Wird die Développée in einer Ebene abgewickelt, so geht die Raumkurve in eine Gerade über. Monge drückt allerdings diesen

Satz etwas anders aus, er sagt nämlich: wenn eine der rektifizierenden Ebenen mit der in ihr liegenden Kurventangente auf der Développée rollt, so beschreibt diese Tangente die abwickelbare Fläche, die von den Tangenten der Raumkurve gebildet wird.

2. Jedes Element einer abwickelbaren Fläche (d. h. der Streifen zwischen zwei konsekutiven Mantellinien) kann angesehen werden als Flächenelement eines Kegels, dessen Spitze der Schnittpunkt der beiden Mantellinien, und dessen Achse die zugehörige Erzeugende der Développée ist.

3. Ist die Développée ein Zylinder, so haben alle Mantellinien der abwickelbaren Fläche gleiche Neigung gegen dessen Mantellinien.

Der Zeit nach folgt nun Tinseau (Offizier im Geniekorps) mit einer Arbeit: „Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure"[1]) (1774). Hier kommt nur der zweite Teil in Betracht, wo er von Raumkurven spricht, die Gleichung der von den Tangenten gebildeten abwickelbaren Fläche aufstellt, und die zwei Arten von Wendepunkten, ganz wie Monge, unterscheidet, und zwar als „points d'inflexion linéaire" (Krümmung $= 0$) und „points d'inflexion plane" (Torsion $= 0$) unterscheidet. Er stellt weiter die Gleichung der Schmiegungsebene auf, wobei sich, wohl zum erstenmal, der Satz findet, daß die Orthogonalprojektion einer Raumkurve auf eine Ebene dann einen Wendepunkt hat, wenn die Schmiegungsebene auf der Projektionsebene senkrecht steht. Endlich werden noch Formeln entwickelt für die Komplanation einer abwickelbaren Fläche und für die Kubatur des Raums, der von ihr, der xy-Ebene und den beiden Ebenen begrenzt wird, welche zwei beliebige Mantellinien auf die xy-Ebene projizieren.

Eine zweite, größere Abhandlung von Monge, die nach der ersten, vorhin erwähnten, eingereicht (1775), aber vor ihr veröffentlicht[2]) wurde, heißt: „Sur les Propriétés de plusieurs genres de Surfaces courbes, particulièrement sur celles des Surfaces développables, avec une Application à la Théorie des Ombres et des Pénombres". Monge erwähnt darin seine eigene frühere Arbeit[3]), sowie diejenige Eulers[4]) mit der Bemerkung: „je suis parvenu à des résultats, qui me semblent beaucoup plus simples". Die Arbeit bringt also keine wesentlich neuen Ergebnisse, aber eine einfachere und elegantere Herleitung. Zunächst wird scharf unterschieden zwischen abwickelbaren Flächen und allgemeinen Regelflächen mit der Bemerkung, daß der

[1]) Mém. div. Sav. IX, 1780, p. 593—624. [2]) Ebenda, p. 382—440.
[3]) Siehe S. 531 ff. [4]) Siehe S. 529 ff.

„auteur de la coupe de pierres" (also wohl **Frézier**) sich hierüber nicht ganz klar sei; die abwickelbare Fläche wird definiert durch die Eigenschaft, daß sie sich ohne **Faltung** und **Zerreißung** in eine **Ebene ausbreiten lasse**, und ihre Gleichung auf drei verschiedene Arten und in drei verschiedenen Formen hergeleitet, nämlich:

1. in endlicher Form, indem die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Tangente der Raumkurve aufgestellt werden. Hierbei treten zwei, die Raumkurve bestimmende, willkürliche Funktionen auf; diese werden durch zweimaliges Differenzieren eliminiert, was die Differentialgleichung $rt - s^2 = 0$ liefert.

2. Diese wird direkt gewonnen durch Aufstellung der Schnittgeraden zweier konsekutiven Tangentialebenen und Berücksichtigung der Tatsache, daß für eine abwickelbare Fläche, und nur für eine solche, diese Schnittgerade dieselbe bleibt, gleichviel ob bloß x oder bloß y sich ändert.

3. Längs eines Flächenelements (= Streifen zwischen zwei konsekutiven Mantellinien) sind p und q **beide konstant**; wenn man zum nächstfolgenden übergeht, so **ändern sich beide gleichzeitig**. Nun kommt der in seiner Neuheit überraschende Schluß: p und q sind also „constants ensemble et variables ensemble, donc on doit avoir $p = \varphi(q)$", d. h. p muß Funktion von q sein (oder umgekehrt). Damit ist zugleich ein erstes Integral der Differentialgleichung

$$rt - s^2 = 0$$

gefunden.

Ähnlich wie bei **Euler** (s. S. 531), aber weiter ausgeführt, folgt nun eine Anwendung der Theorie der abwickelbaren Flächen auf die „ombres et pénombres". Sind zwei Körper, ein leuchtender und ein dunkler, gegeben, so zeigt **Monge**, daß die Grenze zwischen Kern- und Halbschatten gebildet wird von einer abwickelbaren Fläche, welche die beiden Körper berührt; das Gleiche gilt für die Grenze von Halbschatten und Licht; die Rückkehrkante liegt im letzteren Fall zwischen, im ersteren außerhalb der beiden Körper. Es wird dann zunächst der einfachste Fall erledigt, daß der leuchtende Körper ein Punkt ist. Sind a, b, c die Koordinaten des Punktes, ist $z = K(x, y)$ die Gleichung der Fläche und hieraus $\frac{\partial z}{\partial x} = P$, $\frac{\partial z}{\partial y} = Q$, so ergibt die Gleichung: $z - c = (x-a)P + (y-b)Q$ in Verbindung mit $z = K(x, y)$ durch Elimination von z die Horizontalprojektion der Licht- und Schattengrenze oder der Berührkurve des von dem Punkt an die Fläche gelegten Tangentialkegels. Damit ist zugleich die **erste Polarfläche** des Punktes in bezug auf die Fläche aufgestellt, wenngleich diese Bezeichnung natürlich nicht auftritt. Es wird dann noch

die Gleichung des Tangentialkegels angegeben und bemerkt, daß damit zugleich die Aufgabe gelöst ist, den scheinbaren Umriß der Fläche in Zentralperspektive zu bestimmen.

Daran schließt sich die Lösung der allgemeineren Aufgaben, die gemeinsame Developpable zweier Flächen zu finden, und durch zwei gegebene Kurven eine abwickelbare Fläche zu legen. **Monge** stellt die Tangentialebene für beide Flächen

$$z_1 = K_1(x_1, y_1) \quad \text{und} \quad z_2 = K_2(x_2, y_2)$$

auf, nämlich:

$$z - K_1 = p_1(x - x_1) + q_1(y - y_1)$$

und

$$z - K_2 = p_2(x - x_2) + q_2(y - y_2). \tag{1}$$

Soll nun eine Ebene beide Flächen berühren, so müssen diese beiden Gleichungen identisch sein, d. h. es muß sein:

$$p_1 = p_2; \quad q_1 = q_2; \quad K_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1 = K_2 - p_2 x_2 - q_2 y_2. \tag{2}$$

Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen und einer der Gleichungen (1) drei der Größen x_1, y_1, x_2, y_2, so erhält man die Gleichung einer Ebene,

$$z = Ax + By + C, \tag{3}$$

wo die Koeffizienten A, B, C Funktionen der vierten, nicht eliminierten Variabeln, z. B. x_1, sind, die also hier als Parameter auftritt. Differenziert man (3) nach diesem Parameter, und eliminiert ihn, so ergibt sich die Gleichung der gemeinsamen Developpabeln; sie stellt insbesondere einen **Kegel** dar, wenn

$$d\,\frac{d\left(\frac{dC}{dB}\right)}{d\left(\frac{dA}{dB}\right)} = 0$$

ist. — Im Anschluß daran werden verschiedene analytische Probleme erledigt, deren Lösungen im vorstehenden enthalten sind, um zu zeigen, „que l'Analyse peut tirer de très-grand secours de la connaissance des propriétés de l'étendue". Endlich folgt die **Aufstellung der Differentialgleichungen der surfaces gauches**, d. h. der **allgemeinen Regelflächen**, und die Lösung der Aufgabe, durch drei gegebene Kurven eine Regelfläche zu legen.

Nur kurz erwähnen wir eine Arbeit von **Euler** vom 8. März 1779: „De lineis curvis non in eodem plano sitis quae maximi vel minimi proprietate sunt praeditae"[1]). Sie enthält eine Anwendung des Methodus inveniendi, d. h. der Variationsrechnung auf Raumkurven, und sucht die Gleichungen $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ einer solchen so zu bestimmen,

[1]) M. P. IV, p. 18—42.

daß $\int V dx$ ein Maximum oder Minimum wird, wo V eine Funktion von x, y, z und den Differentialquotienten von y und z nach x ist. Die Auflösung ist folgende: Euler setzt zunächst

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dp}{dx} = q; \quad \frac{dq}{dx} = r \ldots,$$

$$\frac{dz}{dx} = p'; \quad \frac{dp'}{dx} = q'; \quad \frac{dq'}{dx} = r' \quad \text{usw.}$$

Ferner

$$\frac{\partial V}{\partial x} = M; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = N; \quad \frac{\partial V}{\partial p} = P; \quad \frac{\partial V}{\partial q} = Q \ldots,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = N'; \quad \frac{\partial V}{\partial p'} = P'; \quad \frac{\partial V}{\partial q'} = Q' \ldots$$

und findet als Bedingungen:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + - \cdots = 0,$$

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2 Q'}{dx^2} - \frac{d^3 R'}{dx^3} + - \cdots = 0.$$

Treten nur die Differentialquotienten erster Ordnung p und p' in V auf, so reduzieren sich diese Gleichungen auf:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0; \quad N' - \frac{dP'}{dx'} = 0.$$

Diese Methoden werden auf einige Beispiele angewendet.

Unter den Arbeiten, die sich auf Flächenkurven (d. h. Raumkurven, die auf einer gegebenen Fläche liegen) beziehen, ist die bedeutendste die von Euler über geodätische Linien: „Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacumque ducenda"[1] (25. Januar 1779). Es werden keine wesentlich neuen Resultate gefunden, da ja Euler die Aufgabe selbst schon früher gelöst hat (III², S. 817 ff.), bemerkenswert ist aber die Herleitung der Differentialgleichung und namentlich ihre Integration. Zunächst werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$dz = f dx + g dy; \quad df = \alpha dx + \beta dy; \quad dg = \beta dx + \gamma dy,$$

so daß das Linienelement ds einer beliebigen auf der Fläche gezogenen Kurve die Form erhält:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + (f dx + g dy)^2},$$

oder, wenn $dy = p dx$ gesetzt wird:

[1]) N. A. P. XV, p. 44—54.

$$ds = dx \sqrt{1 + p^2 + (f + gp)^2}.$$

Es soll nun das Integral

$$s = \int dx \sqrt{1 + p^2 + (f + gp)^2}$$

zu einem Minimum gemacht werden. Die Anwendung der von Euler in der Methodus inveniendi aufgestellten Regeln führt auf die Differentialgleichung $dp(1 + f^2 + g^2) + (g - fp)(df + p dg) = 0$. Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Eine erste Integration leistet Euler durch einige Substitutionen; er setzt nämlich

$$v = \frac{g - fp}{f + gp}; \quad f^2 + g^2 = h^2; \quad \frac{g}{f} = k; \quad s = \frac{v}{1 + h^2}.$$

Es ergibt sich so

$$\frac{ds}{1 + s^2} = \frac{dk}{(1 + k^2)\sqrt{1 + h^2}},$$

so daß wenigstens die Variable s isoliert ist.

Es ist von Interesse, daß die hier eingeführte Größe s eine einfache geometrische Bedeutung hat; ist nämlich w der Winkel, den eine geodätische Linie mit den Kurven $z =$ const. bildet, so ist $s = \operatorname{tg} w$; dieser Hinweis fehlt allerdings bei Euler, aber immerhin ist es bemerkenswert, daß Gauß die Integration der geodätischen Linie auf ähnliche Weise angegriffen hat[1]), nämlich durch Einführung des Winkels, den sie mit den Parameterkurven bilden. — Des weiteren ist bemerkenswert, daß Euler hier, wohl zum erstenmal, eine symmetrische Behandlung der drei Koordinaten eines Flächenpunktes und einer für sie abgeleiteten Differentialgleichung unternimmt, die er mit den Worten einleitet: „Universam hanc quaestionem ita tractare mihi est visum, ut omnes formulae pari ratione tres coordinatas x, y, z involvant, quo pacto speculationi potius consulatur quam usui; hancque ob rem investigationes sequentes subjungam". Er nimmt nun die Differentialgleichung der Fläche in der Form an:

$$p dx + q dy + r dz = 0,$$

und erhält als Differentialgleichung der geodätischen Linien:

$$d^2 x (q dz - r dy) + d^2 y (r dx - p dz) + d^2 z (p dy - q dx) = 0,$$

die er noch in die Form setzt:

$$\frac{d^2 s}{ds} = \frac{q d^2 z - r d^2 y}{q dz - r dy} = \frac{r d^2 x - p d^2 z}{r dx - p dz} = \frac{p d^2 y - q d^2 x}{p dy - q dx}.$$

[1]) Disquisitiones generales circa superficies curvas, Art. 18.

Schließlich wird die Integration für Rotationsflächen durchgeführt, deren Gleichung in der Form $\frac{x^2+y^2}{2}+f(z)=0$ angenommen wird, so daß $p=x$, $q=y$ wird, woraus durch eine erste Integration mit der Konstanten A folgt:

$$Ads = xdy - ydx.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten in der xy-Ebene

$$(x = v \cdot \cos\varphi; \quad y = v \sin\varphi)$$

folgt:

$$d\varphi = \frac{dv}{rv}\sqrt{\frac{r^2+v^2}{A^2+v^2}},$$

wo r eine Funktion von v ist, die den Meridian der Rotationsfläche bestimmt.

Es wird dem Ruhm und den Verdiensten von Gauß keinen Eintrag tun, wenn wir hier darauf hinweisen, daß verschiedene der Gedanken und Methoden, von denen er in den „Disquisitiones generales" mit so glänzendem Erfolg Gebrauch macht, sich (allerdings zum Teil in spezieller Form, oder nicht ausdrücklich formuliert) schon bei Euler finden, z. B. die sphärische Abbildung (S. 527), die Darstellung der Flächen in Parameterform (S. 529), die Übereinstimmung des Linienelements als Bedingung für die Abwickelbarkeit (S. 530) und endlich die Behandlung der Differentialgleichung der geodätischen Linien mit Hilfe des Winkels, den sie mit einer auf der Fläche befindlichen Kurvenschar bilden (S. 539).[1]

Die im vorigen Kapitel besprochenen Arbeiten Eulers über die Rektifikation von Kurven stehen in gewissem Zusammenhang mit Untersuchungen über rektifizierbare Kurven auf Flächen, sofern er auch hier die S. 480 angegebene Methode anwendet.[2] Für die erste der hierher gehörigen Abhandlungen trifft dies allerdings nicht zu, wohl aber für die übrigen. Jene handelt: „De curva rectificabili in superficie sphaerica"[3], bringt aber keine vollständige Lösung der Aufgabe, sondern leitet nur für das Bogenelement den Ausdruck her: $\frac{ds \cdot \sin s}{\operatorname{tg} r}$, wo r der sphärische Krümmungsradius, s der Bogen der Evolute ist. Die zweite Abhandlung heißt: „De lineis rectificabilibus in superficie sphaeroïdica quacunque geometrice ducendis"[4] (4. Juli 1776). Es sollen also hier auf einem Rotationsellipsoid rektifizierbare Kurven gefunden werden. Der Weg zur Lösung ist der, daß in der xy-Ebene

[1] Vgl. auch Euler, Opera posthuma I, p. 491—496, und Lagrange, Oeuvres XIV, p. 217, 221. S. Stäckel in Biblioth. Mathem. (3) II (1901), p. 123.
[2] Stäckel, Leipziger Berichte 1902, p. 102.
[3] N. C. P. XV (1770), p. 195 bis 216.
[4] N. A. P. III, p. 57—68.

nach dem angegebenen Verfahren eine rektifizierbare Kurve bestimmt, und der Bogen der gesuchten Flächenkurve der z-Koordinate proportional gesetzt wird, also:

$$s = nz; \quad ds = n \cdot dz.$$

Bezeichnet man das Bogenelement der Kurve in der xy-Ebene mit $d\sigma$, so daß:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$$

ist, so ist:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2 + \frac{ds^2}{n^2},$$

oder:

$$d\sigma = \frac{ds\sqrt{n^2-1}}{n} = dz\sqrt{n^2-1},$$

$$\sigma = s\,\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = z\sqrt{n^2-1}.$$

Die Gleichungen der Kurve in der xy-Ebene sind nun nach S. 480:

$$x = \frac{dv}{d\varphi}\cdot\sin\varphi - v\cos\varphi; \quad y = \frac{dv}{d\varphi}\cos\varphi + v\cdot\sin\varphi$$

und der Bogen σ ist dann:

$$\sigma = \frac{dv}{d\varphi} + \int v\,d\varphi.$$

Ist nun die Gleichung des Ellipsoids:

$$z^2 = c^2(1 - x^2 - y^2) = c^2\left[1 - v^2 - \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2\right],$$

so hat man nach den vorangehenden Gleichungen:

$$\frac{dv}{d\varphi} + \int v\,d\varphi = c\sqrt{1 - v^2 - \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2}\sqrt{n^2-1}.$$

Um diese Gleichung integrabel zu machen, setzt Euler:

$$v = \cos(\lambda\varphi + \alpha),$$

wobei sich für λ die Bedingung ergibt:

$$\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} = c^2(n^2-1)$$

und die Horizontalprojektion der gesuchten Kurve die Form erhält:

$$x = -\cos\varphi\cdot\cos(\lambda\varphi+\alpha) - \lambda\sin\varphi\sin(\lambda\varphi+\alpha),$$
$$y = \sin\varphi\cdot\cos(\lambda\varphi+\alpha) - \lambda\cos\varphi\sin(\lambda\varphi+\alpha);$$

für λ ist hierbei noch der aus der vorangehenden Gleichung sich ergebende Wert einzusetzen. Da über c keinerlei Voraussetzung gemacht ist, so gelten die Resultate für jedes Rotationsellipsoid, also auch für die Kugel, sowie für das Rotationshyperboloid.

In einer dritten Arbeit: „De curvis rectificabilibus in superficie coni recti ducendis“[1]) leitet Euler rektifizierbare Kurven auf dem Rotationskegel her; die Höhe ist $= a$, der Grundkreisradius $= b$, die Mantellinie $= c$, und rektifizierbare Kurven lassen sich nur finden, wenn $c:b$ ein rationales Verhältnis ist. Der Gang der Lösung ist ganz analog wie im vorigen Fall, nur ist der dort mit φ bezeichnete Hilfswinkel hier $= \vartheta$ gesetzt. θ bedeutet eine beliebige Funktion von ϑ; $\frac{d\theta}{d\vartheta}$ ist mit η bezeichnet; dann sind die Gleichungen der gesuchten Kurve:

$$x = \frac{a}{b}\frac{\theta}{\sin\eta}; \quad y = \frac{\theta\cos\frac{c}{b}(\vartheta-\eta)}{\sin\eta}; \quad z = \frac{\theta\sin\frac{c}{b}(\vartheta-\eta)}{\sin\eta};$$

für die Bogenlänge s ergibt sich

$$s = \frac{c}{b}\left(\int\theta\,d\vartheta + \frac{\theta}{\operatorname{tg}\eta}\right).$$

Mit verschiedenen sphärischen Kurven haben sich Lexell, Schubert und Fuß beschäftigt. Ersterer behandelt sphärische Epizykloiden in einer Abhandlung: „De epicycloïdibus in superficie sphaerica descriptis“[2]), ermittelt ihre Gleichung, die sphärische Tangente, das Bogenelement und den sphärischen Krümmungsradius. Schuberts Note: „De curva loxodromica“[3]) (14. August 1786) löst die Aufgabe, den loxodromischen Winkel für die Loxodrome zu finden, die zwei durch ihre sphärischen Koordinaten gegebene Punkte verbindet; sie hat mehr vom Standpunkt der Nautik Interesse. Fuß endlich untersucht, wohl zum erstenmal, die sphärischen Kegelschnitte in einer vom 25. Oktober 1787 datierten Abhandlung: „De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae“.[4]) Es wird der Ort der Punkte Y gesucht, für welche die Summe der sphärischen Entfernungen von zwei festen Punkten A und B konstant ist. Zu diesem Zweck wird von Y das sphärische Lot YX auf AB gefällt, und mit y bezeichnet, AX ist $= x$, $AB = 2a$, $AY + BY = 2c$ gesetzt. Hierauf werden mit Hilfe sphärischer Dreiecke die Beziehungen hergeleitet:

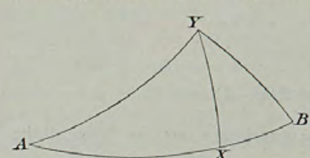

Fig. 59.

[1]) A. P. 1781, I, p. 60—73. [2]) Ebenda, 1779, I. p. 49—71. [3]) N. A. P. IV, p. 95—101. [4]) Ebenda, III, p. 90—99, vgl. auch S. 387.

$$\cos y = \frac{\sin c\cos c}{\sqrt{\cos c^2\sin a^2 + \cos x^2(\cos a^2 - \cos c^2)}}$$

$$\sin y = \frac{\sqrt{(\cos a^2 - \cos c^2)(\cos x^2 - \cos c^2)}}{\sqrt{\cos c^2\sin a^2 + \cos x^2(\cos a^2 - \cos c^2)}}.$$

Als „proprietas maxime memorabilis“ hebt Fuß hervor, daß für $c = 90^0$ die sphärische Ellipse ein Großkreis wird, gleichviel, wie die Brennpunkte A und B liegen. Er berechnet sodann die beiden Halbachsen; die eine ist natürlich $= c$, für die andere, die mit g bezeichnet ist, ergibt sich:

$$\operatorname{tg} g = \frac{\sqrt{\sin c^2 - \sin a^2}}{\cos c}.$$

(Daß diese Gleichung sich auf die einfache Form bringen läßt:

$$\cos g = \frac{\cos c}{\cos a},$$

und daß hiernach c die Hypotenuse eines sphärischen rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b ist, wird nicht bemerkt.) Durch Einführung von g nimmt die Kurvengleichung die Form an:

$$\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} g}{\sin c}\sqrt{\sin c^2 - \sin x^2}.$$

Ferner wird von der sphärischen Ellipse bewiesen, daß die Brennstrahlen AY und BY mit der Kurventangente in Y gleiche Winkel machen, und schließlich gezeigt, daß die Projektion der sphärischen Ellipse auf die zu ihrem Mittelpunkt als Pol gehörige Äquatorebene eine Ellipse ist, daß aber die Brennpunkte derselben nicht die Projektionen der Brennpunkte der sphärischen Ellipse sind.

Als letzte Abhandlung über Raumkurven ist endlich zu nennen: „Kästner, Cylindrorum rectorum se decussantium sectiones ad geometriam fornicum relatae“.[1]) Es handelt sich also um die Durchdringung zweier Kreiszylinder, wie sie in der Architektur bei der Durchkreuzung zweier zylindrischen Gewölbe auftritt. Hier wird nur der Fall erörtert, daß die Achsen der beiden Zylinder sich schneiden. Ist ihr Winkel $= 2\alpha$, sind die Radien der Zylinder a und b, und nimmt man die Halbierungslinien des Winkels 2α und seines Nebenwinkels als Koordinatenachsen, so ist die Gleichung der Projektion der Schnittkurve auf die Ebene der Achsen: $xy = \frac{a^2 - b^2}{2}$, also eine

[1]) Comment. Goetting. X (1791), p. 30—54.

gleichseitige Hyperbel, woraus sich leicht die Gleichungen der Schnittkurve selbst herleiten lassen.

Wir verlassen nun die Raumkurven und wenden uns zu den krummen Flächen, dem Gebiet, in welches die hervorragendsten Leistungen unserer Periode fallen. Gleich bei den Arbeiten allgemeinerer Natur haben wir von zwei der schönsten Entdeckungen zu berichten; wir meinen die bekannten Sätze von Euler und Meusnier über die Krümmung der Oberflächen, und diesen werden sich nachher bei der Besprechung der Feuilles d'Analyse noch weitere anreihen. Vorher müssen wir jedoch noch einmal auf die schon früher (S. 535) erwähnte Arbeit von Tinseau: „Solution de quelques problèmes etc." zurückkommen, da sie einige interessante Bemerkungen auch über Flächen enthält. Tinseau stellt zunächst die Gleichung der Tangentialebene in einem Flächenpunkt x, y, z auf mit π, φ, ω als laufenden Koordinaten, und zwar in der eigentümlichen Form:

$$(x-\pi)dy\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+(y-\varphi)dx\left(\frac{dz}{dy}\right)dy-(z-\omega)\,dx\,dy=0,$$

wobei die Klammern nach der damals üblichen Schreibweise eine partielle Differentiation andeuten. Diese Gleichung wird nun sofort umgedeutet, indem den Koordinaten π, φ, ω feste Werte a, b, c erteilt werden. Sie stellt dann zusammen mit der Flächengleichung die Berührungskurve des vom Punkt a, b, c an die Fläche gelegten Tangentialkegels dar. Es liegt also ein ganz ähnlicher Gedankengang vor, wie bei Monge (s. S. 537), für den aber Tinseau die Priorität gebührt, da seine Arbeit zeitlich vorangeht. — Die Gleichung des Berührungskegels selbst wird gewonnen, indem man x, y, z aus den Gleichungen der Berührkurve und den beiden Gleichungen einer durch den Punkt (a, b, c) gehenden Geraden eliminiert. Tinseau macht auf die Bedeutung dieser Überlegungen für die Perspektive aufmerksam, gibt auch einen einfachen Beweis für den Satz vom Fluchtpunkt, daß die Horizontalprojektionen einer Schar von parallelen Geraden sich in einem Punkte schneiden, und bemerkt dazu: „Voici une démonstration bien simple de ce principe, dont les auteurs de perspective ont jusqu'ici cherché la preuve, les uns dans la métaphysique, les autres dans des considérations sur l'infini". — Diese Betrachtungen werden ebenso wie für den Kegel, auch für den Zylinder angestellt. Außerdem hat Tinseau in dieser Arbeit bewiesen, daß zwischen den Neigungswinkeln α, β, γ einer Ebene gegen die Koordinatenebenen die Beziehung besteht:

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$

[1] Die letzte Bemerkung Tinseaus ist übrigens unrichtig. Vgl. S. 585, Fußnote.

und daraus den bemerkenswerten Satz hergeleitet, daß das Quadrat eines ebenen Flächenstücks gleich der Summe der Quadrate seiner Projektionen auf drei zueinander senkrechte Ebenen ist; auf die Analogie dieses Satzes mit dem pythagoreischen Lehrsatz wird ausdrücklich hingewiesen. Der Rest handelt von einigen speziellen Regelflächen, und wird weiter unten, wo wir über die Einzeluntersuchungen berichten, nochmals zu erwähnen sein.

Eulers berühmter Satz über die Krümmungsradien der Normalschnitte einer Fläche steht in seinen „Recherches sur la courbure des surfaces".[1] Die Untersuchung ist durch ziemlich umständliche Rechnungen geführt, von denen wir nur die Hauptresultate angeben. Euler betrachtet die Schnittkurve der Fläche mit einer beliebigen Ebene $z=\alpha y-\beta x+\gamma$, und findet für den Krümmungsradius ϱ dieser Kurve den Ausdruck:

$$\varrho=-\frac{[\alpha^2+\beta^2-2\alpha q+2\beta p+(\alpha p+\beta q)^2+p^2+q^2]^{3/2}}{[(\alpha-q)^2r+(\beta+p)^2t+2(\alpha-q)(\beta+p)s]u},$$

wo p, q, r, s, t die bekannten Differentialquotienten sind, und zur Abkürzung $\sqrt{1+p^2+q^2}=u$ gesetzt ist. Hieraus wird nun der Krümmungsradius r (natürlich nicht zu verwechseln mit dem Differentialquotienten r) eines beliebigen Normalschnitts hergeleitet, und zu diesem Zweck der Neigungswinkel ϑ der Schnittebene gegen die xy-Ebene, und der Winkel ζ, den ihre Spur in dieser Ebene mit der x-Achse macht, eingeführt. Es ergibt sich dann ein ziemlich komplizierter Ausdruck; mit Hilfe desselben werden zunächst die Krümmungsradien der Schnittebene, welche durch die z-Koordinate geht, und der zu ihr senkrechten Ebene berechnet, die Euler als „sections principales" bezeichnet. Nun wird der Winkel φ eingeführt, den die Ebene des beliebigen Normalschnitts mit der eines der Hauptschnitte bildet. Hierdurch ergibt sich:

$$r=-\frac{\frac{1}{\cos^2\varphi}(p^2+q^2)u^3}{r(p-q\operatorname{tg}\varphi\cdot u)^2+t(q+p\operatorname{tg}\varphi\cdot u)^2+2s(p-q\operatorname{tg}\varphi\cdot u)(q+p\operatorname{tg}\varphi\cdot u)},$$

also ein Ausdruck von der Form:

$$r=\frac{1}{L+M\cos2\varphi+N\sin2\varphi},$$

wo L, M, N Funktionen der Differentialquotienten p, q, r, s, t sind, die sich leicht angeben lassen. Aus dem letzten Ausdruck folgert nun Euler die wichtigen Sätze:

1. Die Krümmung zweier Flächenelemente stimmt überein, wenn

[1] Hist. de l'Acad. Royale d. Sciences et Belles-Lettres à Berlin 1760, p. 119—143.

L, M, N für beide denselben Wert haben, oder durch Veränderung des Winkels φ (d. h. durch Drehung des Elements um seine Normale) ineinander übergeführt werden können.

2. Kennt man drei Werte von r, so kann man L, M, N, und damit alle übrigen bestimmen.

3. r nimmt einen größten oder kleinsten Wert an, wenn

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{N}{M}$$

ist. Diese extremen Werte (d. h. die Hauptkrümmungsradien im heutigen Sprachgebrauch) werden mit f und g bezeichnet.

4. Die Richtungen, in welche diese beiden extremen Werte fallen, stehen aufeinander senkrecht.

5. Für den Fall, daß einer von den extremen Werten von r in die durch $\varphi = 0$ bestimmte Ebene fällt, ist $r = \frac{1}{L + M \cos 2\varphi}$.

6. Kennt man f und g, so kennt man alle Werte von r; stimmen also die Hauptkrümmungsradien für zwei Flächenelemente überein, so haben diese dieselbe Krümmung („on peut prononcer hardiment, que ces deux éléments sont doués de la même courbure").

7. Die Eulersche Formel: Führt man in $r = \frac{1}{L + M \cos 2\varphi}$ die Werte f und g ein, so ergibt sich:

$$r = \frac{2fg}{f + g + (f - g) \cos 2\varphi}.$$

Nur in dieser Form, nicht in der jetzt gebräuchlichen:

$$\left(\frac{1}{r} = \frac{\cos \varphi^2}{f} + \frac{\sin \varphi^2}{g}\right)$$

tritt die Gleichung bei Euler auf. Den Schluß bildet eine auf obiger Formel beruhende geometrische Konstruktion des Flächenelements, wobei noch bemerkt wird, daß $r = 0$ und $r = \infty$ nicht als extreme Werte gelten können.

Neben dieser Arbeit steht ebenbürtig die von Meusnier über die Krümmungsradien schiefer Schnitte, die merkwürdigerweise die einzige mathematische Publikation dieses Mannes geblieben ist.

Jean Baptiste Marie Charles Meusnier, geb. 1754, war Oberstleutnant im Geniekorps der französischen Armee, bald darauf Divisionskommandeur und Mitglied der Pariser Akademie. Er fand den Heldentod bei der Verteidigung von Mainz gegen die belagernden Preußen, wo er schwer verwundet wurde und bald darauf starb (1793). Den schönen Satz, der heute noch seinen Namen trägt, hat er schon mit 22 Jahren entdeckt, und in einem „Mémoire sur la courbure des

surfaces"[1]) im Jahr 1776 der Akademie vorgelegt. Es enthält neben dem sogenannten Meusnierschen Theorem noch die Entdeckung einer fundamentalen Eigenschaft der Minimalflächen, nämlich, daß ihre Hauptkrümmungsradien überall gleich und entgegengesetzt sind, sowie die ersten speziellen Minimalflächen. Auch der glückliche Gedanke, eine Fläche in der Umgebung eines ihrer Punkte zu ersetzen durch eine Annäherungsfläche 2. Grades (jetzt Schmiegungsparaboloid genannt), taucht in dieser Arbeit zum erstenmal auf. Meusnier beginnt nämlich seine Untersuchung eines Flächenelementes damit, daß er die Flächengleichung auf ein Koordinatensystem (u, v, t) bezieht, dessen uv-Ebene die Tangentialebene und dessen t-Achse die Normale des betr. Punktes ist. Dann gibt es eine Fläche von der Form: $t = \frac{cu^2 + 2euv + fv^2}{2}$, welche dieselbe Krümmung hat, wie das Flächenelement. Wird nun das Koordinatensystem um einen Winkel φ, der durch $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2e}{c - f}$ bestimmt ist, um die Normale gedreht, so nimmt die Gleichung der Annäherungsfläche die Form an: $2t = Au'^2 + Bv'^2$, wo u' und v' die neuen Koordinaten sind und A und B von c, e, f und dem Winkel φ abhängen. Damit beweist nun Meusnier folgenden Satz:

Jedes Flächenelement kann angesehen werden als erzeugt durch Rotation eines Kreises um eine zur Tangentialebene des Elementes parallele Achse. Ist r der Radius des Kreises, ϱ der Abstand der Rotationsachse von der Tangentialebene, so sind r und ϱ durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{1}{r} = \frac{c + f \pm \sqrt{(c-f)^2 + 4e^2}}{2} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{c + f \mp \sqrt{(c-f)^2 + 4e^2}}{2}.$$

Meusnier wählt das obere Vorzeichen, und er nennt r und ϱ die „rayons de courbure" des Flächenelementes. Es ist dies wohl das erste Vorkommen dieses Ausdrucks in der Flächentheorie; in Eulers Abhandlung[2]) findet er sich noch nicht. Daran schließt Meusnier zwei wichtige Folgerungen, die sich durch Berechnung des Krümmungsradius eines schiefen Schnittes ergeben. Als Achsen des Koordinatensystems (Fig. 60) nimmt er die Flächennormale AD, und die Richtungen AG und AL, in welche die „rayons de

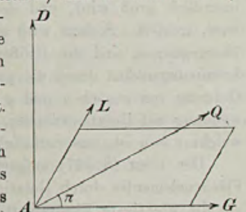

Fig. 60.

[1]) Mém. div. Sav. 1785, p. 477—510. [2]) Siehe S. 545.

courbure“ r und ϱ fallen. Ist nun AQ die Schnittgerade einer beliebigen, durch A gehenden Schnittebene mit der xy-Ebene, ω ihr Neigungswinkel gegen dieselbe, $\sphericalangle\, GAQ = \pi$, so erhält man für den Krümmungsradius R dieses Schnittes:

$$R = \frac{r\varrho\sin\omega}{r\sin\pi^2 + \varrho\cos\pi^2} = \frac{2r\varrho\sin\omega}{(r+\varrho)+(r-\varrho)\sin 2\pi}. \tag{1}$$

Setzt man $\omega = 90^0$, so ergibt sich der Krümmungsradius R' eines Normalschnittes, nämlich:

$$R' = \frac{2r\varrho}{r+\varrho+(r-\varrho)\sin 2\pi}. \tag{2}$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Eulerschen Formel (S. 546) zeigt, daß r und ϱ nichts anderes sind, als die von Euler berechneten extremen Werte der Krümmungsradien der Normalschnitte. Das ist die erste der beiden Folgerungen. Die zweite ist das aus (1) und (2) sich sofort ergebende Meusniersche Theorem:

$$R = R'\sin\omega, \tag{3}$$

das Meusnier in folgende geometrische Form kleidet:

„Si l'on coupe un élément de surface par un plan qui lui soit perpendiculaire, qu'on imagine une sphère qui lui soit tangente, et dont le rayon soit égal au rayon de courbure de la section, dont nous venons de parler, qu'on fasse par l'intersection du plan coupant avec le plan tangent un autre plan quelconque, il fera, dans la sphère, et dans l'élément de surface des sections d'égale courbure.“

Mit Zugrundelegung der Formel (2) wird nun die Art der Wölbung des Flächenelementes, und ihre Abhängigkeit vom Vorzeichen der Radien r und ϱ diskutiert, die Richtung bestimmt, für welche R unendlich groß wird, und der Spezialfall, daß r oder ϱ unendlich wird, erörtert. Sodann wird auf ein beliebiges Koordinatensystem übergegangen, und die Größen c, e, f, und damit auch die Hauptkrümmungsradien durch die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von z nach x und y ausgedrückt. Es folgt noch eine Anwendung auf Rotationsflächen, und die Bestimmung der Flächen, für welche $r = \varrho$ ist, was natürlich auf die Kugel führt.

Der oben (S. 547) aufgestellte Satz über die Erzeugung eines Flächenelementes durch Rotation eines Kreises wird nun angewendet, um die wichtigste Eigenschaft der Minimalflächen herzuleiten, nämlich, daß $r + \varrho = 0$ ist. Meusnier berechnet unter Zugrundelegung dieser Erzeugungsweise den Inhalt eines Flächenstückchens von gegebener Begrenzung, und stellt die Bedingung dafür auf, daß dieser ein Minimum wird.

Er verfährt dabei folgendermaßen: Das Flächenelement entstehe durch Rotation eines unendlich kleinen Kreisbogens AmB, dessen Halbierungspunkt m und dessen Sehne $AB = 2\omega$ ist, um eine Achse HK, die der Sehne AB parallel ist, und von ihr den Abstand $AH = a$ hat. Der Radius r des Kreisbogens ist dann der eine, der Abstand mg des Mittelpunktes m von HK der andere Hauptkrümmungsradius ϱ des Elementes. Ist nun g der Schwerpunkt des Bogens AmB, so muß wegen der Guldinschen Regel das Produkt

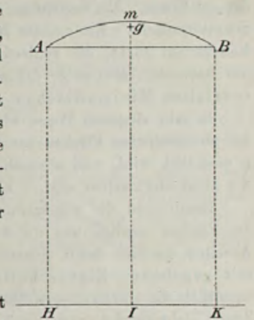

Fig. 61.

$$gI \cdot AmB$$

ein Minimum werden. Hierfür ergibt sich unter der Voraussetzung, daß ω sehr klein ist, daß also:

$$AmB = 2\omega + \frac{\omega^3}{2r}$$

gesetzt werden kann:

$$\omega\left[2\varrho + \frac{(\varrho - r)\,\omega^2}{3r^2}\right].$$

Zwischen den beiden Variabeln r und ϱ besteht aber die leicht herzuleitende Beziehung:

$$\varrho = a + \frac{\omega^2}{2r}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung ergibt sich durch Differentiation als Bedingung dafür, daß das Flächenelement ein Minimum werden soll, $r + \varrho = 0$.

Man verdankt also Meusnier den Satz, daß in jedem Punkt einer Minimalfläche die Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Auf Grund hiervon kann die Differentialgleichung der Minimalflächen leicht aufgestellt werden, da ja r und ϱ in Funktion der Differentialquotienten p, q, r, s, t (für die drei letzteren schreibt Meusnier: m, n, s) bekannt sind. Hierbei ergibt sich die bekannte Gleichung:

$$r(1+q^2) + t(1+p^2) - 2pqs = 0.$$

Meusnier bemerkt, daß man außer der Ebene noch keine Fläche kenne, welche dieser Gleichung genüge. Er findet nun zwei partikuläre Integrale, das eine dadurch, daß er die Gleichung zerlegt in $r + t = 0$

und $rq^2 + tp^2 - 2pqs = 0$. Die zweite lehrt, wie **Monge** gezeigt hat[1], daß die Fläche erzeugt wird durch Bewegung einer Geraden parallel der xy-Ebene. Mit Zuziehung der ersten ergibt sich die windschiefe Schraubenfläche. Ein zweites Integral findet er, indem er die Rotationsflächen sucht, die zugleich Minimalflächen sind; dies führt auf das Katenoid. **Meusnier** ist also auch der Entdecker der **ersten speziellen Minimalflächen.**

In sehr eleganter Weise wird dann noch die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen aus der Bedingung abgeleitet, daß r oder ϱ unendlich wird, und schließlich gezeigt, daß für alle Regelflächen, die nicht abwickelbar sind, r und ϱ verschiedenes Vorzeichen haben.

Damit sind die allgemeinen Untersuchungen über die Theorie der Flächen erledigt, und wir wenden uns nun zu einer Gruppe von Arbeiten, die sich damit befassen, die **Gleichungen von Flächen mit gegebenen Eigenschaften** aufzustellen. Hierher gehören ja eigentlich die abwickelbaren Flächen auch schon als besonderer Fall. Zuerst steht hier **Lagrange** mit seinem berühmten „Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les Maxima et les Minima des Formules intégrales indéfinies“[2], wo nach den Methoden der Variationsrechnung die Differentialgleichung der **Minimalflächen** in der bekannten Form aufgestellt wird: $r(1+q^2) + t(1+p^2) - 2pqs = 0$. Dann folgt **Euler** mit einer interessanten Abhandlung: „Evolutio insignis paradoxi circa aequalitatem superficierum“.[3]) Es handelt sich hier um die Aufgabe, zwei Flächen zu finden, so daß **die über demselben Stück der xy-Ebene stehenden Flächenteile** gleich sind. **Euler** kommt zunächst darauf zu sprechen, daß hier ein wesentlicher Unterschied zwischen ebenen Kurven und Flächen besteht, insofern zwei Kurven, bei denen zu gleichen Abszissen gleiche Bögen gehören, stets kongruent sind, während dies bei zwei Flächen der oben genannten Art nicht zuzutreffen braucht. Dies ist das Paradoxon, von dem der Titel spricht. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß der obigen Forderung genügt wird, wenn $p^2 + q^2$ für beide Flächen denselben Wert haben. Daß dies für zwei verschiedene Flächen überhaupt möglich ist, zeigt **Euler** an dem Beispiel der beiden Paraboloide

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2a} \quad \text{und} \quad z = \frac{xy}{a}.$$

Zwei Flächen dieser Art nennt er **kongruent**, und die Aufgabe, alle Flächen zu finden, die einer gegebenen „kongruent“ sind, kommt darauf hinaus, die Gleichung $p^2 + q^2 = f(x, y)$ zu integrieren, was **Euler**

[1]) Siehe S. 365. [2]) Miscell. Taurin. 1760. [3]) N. C. P. XIV, Pars I, 769, p. 104—128.

als ein „problema difficillimum“ bezeichnet. Doch gelingt ihm die Lösung wenigstens für die Ebene $z = a + mx + ny$. Hier ist also $p^2 + q^2 = m^2 + n^2$. Diese Gleichung integriert **Euler** auf folgendem Wege: er setzt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\omega\sqrt{m^2+n^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\omega\sqrt{m^2+n^2}$$

und findet nun durch partielle Integration:

$$z = \sqrt{m^2+n^2}\left[(x\cos\omega + y\sin\omega) + \int(x\sin\omega - y\cos\omega)\,d\omega\right].$$

Er macht nun folgenden Schluß, der in derselben oder in ähnlicher Weise öfters bei ihm wiederkehrt: Soll das Integral ausführbar sein, so muß $x\sin\omega - y\cos\omega$ eine Funktion von ω sein, die er mit Ω bezeichnet; so ergibt sich also die Flächengleichung durch Elimination von ω aus den beiden Gleichungen:

$$z = \sqrt{m^2+n^2}\left[(x\cdot\cos\omega + y\sin\omega) + \int\Omega\,d\omega\right]; \quad \Omega = x\sin\omega - y\cos\omega.$$

Es sind dies abwickelbare Flächen, die sich als Enveloppen einer Schar von Ebenen mit gleicher Neigung gegen die xy-Ebene ergeben. Denselben Satz samt Umkehrung hat **Monge** später in der oben (s. S. 535 ff.) besprochenen Arbeit bewiesen und in die Feuilles d'Analyse aufgenommen (s. S. 563).

Mit derartigen Aufgaben hatte **Euler** ein bis dahin noch wenig bearbeitetes Gebiet der Analysis, nämlich die Integration partieller Differentialgleichungen, betreten, und es war natürlich, daß er sich mit ähnlichen Untersuchungen, deren große Wichtigkeit er wohl erkannte, noch weiter beschäftigte. Er formulierte das Problem allgemeiner mit dem Titel seiner nächsten Arbeit hierüber: „De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata“[1]) (2. Sept. 1776). In der Einleitung hebt er die Bedeutung derartiger Forschungen hervor, und bemerkt, daß sie himmelweit („toto coelo“) von der Behandlung der Funktionen **einer** Variabeln verschieden seien. Er nimmt dann gleich eine spezielle Aufgabe vor, nämlich die Flächen zu bestimmen, für welche das Stück ZN der Normalen zwischen Fläche und xy-Ebene einen konstanten Wert a habe; diese Aufgabe erscheint ihm deshalb besonders geeignet, weil hier die Resultate der analytischen Lösung, die „ob novitatem“ manchem nicht ganz einwandfrei (suspecta) erscheinen könnten, geometrisch ohne weiteres einleuchten. Evident ist, daß die zwei Parallelebenen zur xy-Ebene im Abstand a, sowie die Kugeln und Rotationszylinder, die beide berühren, der Forderung genügen. Deren analytischer Ausdruck ist:

[1]) N. A. P. VI, p. 77—94.

$$z\sqrt{1+p^2+q^2}=a.$$

Sie wird auf zwei Arten hergeleitet, zuerst geometrisch, dann analytisch auf Grund der Überlegung, daß ZN konstant bleibt, sowohl wenn x als wenn y allein variiert. Die Integration dieser Gleichung beruht auf einem ganz ähnlichen Gedanken wie in der vorigen Arbeit. Da nämlich:

$$p^2+q^2=\frac{a^2-z^2}{z^2},$$

so kann man setzen:

$$p=\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}\cos\varphi;\quad q=\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}\cdot\sin\varphi;$$

setzt man diese Werte in $dz=pdx+qdy$ ein, so folgt durch teilweise Integration mit C als Integrationskonstante:

$$C-\sqrt{a^2-z^2}=x\cdot\cos\varphi+y\sin\varphi+\int(x\sin\varphi-y\cos\varphi)d\varphi.$$

Soll die rechte Seite auch integrabel sein, so muß $x\sin\varphi-y\cos\varphi$ eine Funktion von Φ sein, also

$$x\sin\varphi-y\cos\varphi=\Phi.$$

Damit ist die Aufgabe eigentlich gelöst; denn man braucht bloß für Φ irgend eine Funktion von φ einzusetzen, so ergibt die Elimination von φ aus den beiden letzten Gleichungen eine Fläche der verlangten Art. Der geometrische Charakter derselben wird jedoch deutlicher durch eine Umformung der Gleichungen. Euler setzt nämlich:

$$\sqrt{a^2-z^2}=v;\quad \cos\varphi\int\Phi d\varphi-\Phi\sin\varphi=t;$$

$$\sin\Phi\int\Phi d\varphi+\Phi\cos\varphi=u,$$

so daß also t als eine willkürliche Funktion von u angesehen werden kann. Dadurch ergeben sich die Gleichungen:

$$x=t-v\cos\varphi;\quad y=u+v\sin\varphi;\quad z=\sqrt{a^2-v^2}.$$

Diese lassen eine einfache geometrische Deutung zu: sind nämlich t und u rechtwinklige Koordinaten einer in der xy-Ebene willkürlich gezogenen Kurve, so entsteht die Fläche durch Bewegung eines Kreises vom Radius a, dessen Mittelpunkt auf der Kurve fortrückt, während seine Ebene stets normal zu der Kurve bleibt. Die Flächen sind also die später so genannten Kanal- oder Röhrenflächen. Euler hebt besonders hervor, daß bei derartigen Aufgaben nicht bloß willkürliche Konstanten, sondern willkürliche Funktionen auftreten, und daß

diese auch wirklich ganz beliebig, sogar diskontinuierlich[1]) angenommen werden können. — Auf die analytische folgt eine geometrische Lösung, als einfachstes Beispiel von Flächen dieser Art nennt Euler die Ringfläche, von der er sagt, daß sie wie eine Wurst aussehe („farciminis figuram mentiens"), und schlägt schließlich vor, die hier gefundenen Flächen als „gekrümmte Zylinder" (cylindri incurvati) zu bezeichnen. In derselben Abhandlung wird noch eine allgemeinere Aufgabe gelöst, nämlich daß das Stück ZN der Normalen nicht konstant, sondern eine Funktion Z von z sein soll, so daß also die Differentialgleichung der Fläche in diesem Fall ist:

$$z\sqrt{1+p^2+q^2}=Z.$$

Die Integration wird auf ganz analogem Wege bewerkstelligt und führt auf die Gleichungen:

$$x=t+v\cos\varphi;\quad y=u+v\cdot\sin\varphi;\quad v=\int\frac{z\,dz}{\sqrt{Z^2-z^2}},$$

wo wieder t eine willkürliche Funktion von u ist.

Auch die geometrische Deutung ist eine ähnliche: es ist einfach an Stelle des Kreises eine beliebige, durch Z definierte Kurve getreten, d. h. eine Ebene, in der diese Kurve liegt, bewegt sich senkrecht zur xy-Ebene so, daß ein in ihr fest angenommener Punkt eine willkürliche Kurve beschreibt, und eine feste, durch diesen Punkt gehende Gerade stets in die Normale der Kurve fällt; dann beschreibt die in der beweglichen Ebene liegende Kurve eine Fläche der gesuchten Art, die man wohl als „Gesimsflächen" bezeichnet hat. Beide Flächenfamilien, die Kanal- und die Gesimsflächen hat Monge unter anderen Gesichtspunkten später auch untersucht, wie wir weiter unten sehen werden. Auch Euler hat sich noch einmal mit beiden Arten von Flächen beschäftigt in den beiden Abhandlungen: „Investigatio superficierum, quarum normales ad datum planum productae sint omnes inter se aequales"[2]) (28. Dezember 1777) und „De corporibus cylindricis incurvatis"[3]) (21. September 1778). Was diese Neues bieten, ist im wesentlichen der Satz, daß für beide Arten von Flächen Inhalt und Oberfläche nach der Guldinschen Regel berechnet werden kann, und daß dies auch dann noch gilt, wenn die Leitkurve nicht eine ebene, sondern eine Raumkurve ist.

Ebenfalls auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung führt eine Aufgabe, die auch durch Übertragung eines Problems von

[1]) Ob solche zulässig seien, war eine in jener Zeit mehrfach diskutierte Streitfrage. S. Abschn. XXVII. [2]) N. A. P. X, p. 41—46. [3]) Ebenda, XII, p. 91—100.

der Ebene auf den Raum entsteht, nämlich Flächen zu finden, die eine gegebene Schar überall rechtwinklig schneiden. Sie bildet den Gegenstand einer Abhandlung von **Euler** aus seinen letzten Lebensjahren: „De problemate Trajectoriarum ad superficies translato“[1]) (12. August 1782). **Euler** verfährt auch hier symmetrisch: für die gegebene Flächenschar (secandae) sei:

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0$$

die differenzierte Flächengleichung, für die gesuchte:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Dann ist die Bedingung der Orthogonalität:

$$pP + qQ + rR = 0.$$

Daneben besteht die allgemeine Integrabilitätsbedingung:

$$\left(P\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \left(Q\frac{\partial R}{\partial x} - R\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \left(R\frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial R}{\partial y}\right) = 0.$$

Nimmt man die Flächengleichungen nach z aufgelöst an, so ist die Bedingung der Orthogonalität:

$$pP + qQ + 1 = 0.$$

Euler behandelt nun den allgemeinen Fall derart, daß er zwei Integrale, u und v, sucht, die je eine Variable nicht enthalten, so daß also z. B. u nur x und y, v nur y und z enthält. Dann heißt z. B. für u die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x}p + \frac{\partial u}{\partial y}q = 0,$$

die nach der gewöhnlichen Methode behandelt werden kann, sofern auch p und q von z frei sind. Ist so u, und auf dieselbe Weise v bestimmt, so genügt auch jede Gleichung von der Form

$$v = \Phi(u)$$

der Differentialgleichung. **Euler** nennt sie das „integrale completum“; ihre Herleitung geschieht jedoch in den meisten Beispielen, die er gibt, mit Hilfe des S. 551 erwähnten Schlusses. So ist für die Kugeln:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 = 0; \quad p = \frac{-x}{z}; \quad q = \frac{-y}{z},$$

also die Differentialgleichung der gesuchten Flächen:

[1]) M. P. VII, p. 33—60.

$$1 - P\frac{x}{z} - Q\frac{y}{z} = 0.$$

Daneben ist:

$$dz = P\,dx + Q\,dy.$$

Die Elimination von Q ergibt:

$$y\,dz - z\,dy = P(y\,dx - x\,dy),$$

oder

$$d\left(\frac{z}{y}\right) = P\,d\left(\frac{x}{y}\right),$$

also

$$\frac{z}{y} = \int P\,d\left(\frac{x}{y}\right).$$

Nun muß wieder, wenn die Integration ausführbar sein soll, P Funktion von $\frac{x}{y}$ sein. Dann ist aber auch $\int P\,d\left(\frac{x}{y}\right)$ eine solche, also ist

$$\frac{z}{y} = F\left(\frac{x}{y}\right),$$

wo F noch eine willkürliche Funktion ist. Damit ist das „integrale completum“ gefunden. Diese Methoden werden noch auf verschiedene Beispiele angewendet.

Nur kurz erwähnen wir hier eine Arbeit von **Monge**: „Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes“[1]), da ihre wesentlichen Resultate den Feuilles d'Analyse an verschiedenen Orten einverleibt sind, und daher dort darüber berichtet werden wird. **Monge** zeigt an einer Reihe von Beispielen, daß eine Flächengattung, deren endliche Gleichung n willkürliche Funktionen enthält, durch eine partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung definiert wird, die sich durch sukzessive Differentiation und schließliche Elimination herleiten läßt.

Die **Einzeluntersuchungen** über Flächen bieten, wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel hervorgehoben wurde, nicht gerade viel Bemerkenswertes. Verschiedene befassen sich mit der Komplanation und Kubatur bestimmter Zylinder- und Regelflächen, andere mit speziellen Regelflächen, wobei die Terminologie von der heute üblichen wesentlich verschieden ist.[2]) Die erste Untersuchung hierüber stammt von **Braikenridge** (vgl. III², S. 761): „Letter to Earl

[1]) Mém. de l'Acad. Roy. de Turin, 2. série, 1. partie, 1784/85, p. 19—30.

[2]) Nach **Klügel** (III², S. 98 ff.) entsteht ein **Konoid** dadurch, daß eine Kurve, deren Ordinaten beständig zunehmen, und die die Abszissenachse **nicht** schneidet, um diese Achse rotiert. Das Konoid im heutigen Sinne dagegen bezeichnet er als Conocuneus (ib. S. 302), das hyperbolische Paraboloid als kegelförmige Keilfläche. S. dagegen **Tinseau**, S. 556.

of Marchmont concerning the section of a solid, hitherto not considered by Geometers"[1]) (1759). Es handelt sich um Flächen, die man heute als Konoidflächen bezeichnet, und die Braikenridge folgendermaßen entstehen läßt: Gegeben eine Gerade und eine Kurve (directrix). Eine Ebene, die beide schneidet, bewegt sich parallel mit sich selbst; die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte mit der Geraden und der Kurve beschreibt dann die Fläche. Wird diese von einer beliebigen Ebene geschnitten, so ist die Schnittkurve im allgemeinen von einer doppelt so hohen Ordnung, als die Direktrix. Am ausführlichsten wird der Fall behandelt, daß auch die Direktrix eine Gerade ist, d. h. das hyperbolische Paraboloid. Dieselbe Fläche tritt auf bei Mauduit (Antoine René Mauduit, 1731—1815, Professor der Geometrie am Collège de France); seine Arbeit führt den langen Titel: „Mémoire sur la cubature des corps gauches, où l'on explique leur formation, la manière de les toiser sans être obligé de les décomposer; et les différents propriétés de ces corps par rapport aux courbes que l'on peut y trouver par l'intersection d'un plan"[2]) (1763). Ein solches „corps gauche" ist begrenzt von den Ebenen, die die vier Seiten eines windschiefen Vierecks $ABCD$ auf eine durch eine Ecke A gehende Ebene projizieren, ferner von dieser Ebene und endlich von einer Fläche, die von einer Geraden beschrieben wird, welche an zwei Gegenseiten, z. B. AB und CD so hingleitet, daß sie beide in derselben Zeit durchläuft. Der Inhalt des so definierten Körpers wird durch eine Integration ermittelt, ferner die Gleichung seiner Oberfläche für den Fall hergeleitet, daß die Projektionen von BC und AD (und damit auch die Projektion sämtlicher Lagen der erzeugenden Geraden parallel sind. Für diesen Fall (hyperb. Paraboloid) wird nachgewiesen — und das ist wohl das Bemerkenswerteste an der ganzen Arbeit —, daß auf der Fläche noch eine zweite Schar von Geraden sich befindet. Diese Entdeckung wird also Mauduit zuzuschreiben sein. Aus der Existenz dieser beiden Scharen von Geraden auf der Fläche zieht er dann den merkwürdigen Schluß, daß sie „le moins courbe possible" sei, d. h. daß sie sich am meisten der Ebene nähern. Auch Tinseau untersucht in seiner mehrfach erwähnten Arbeit im 2. Teil solche Flächen, die durch Bewegung einer Geraden entstehen, welche, stets einer Ebene parallel bleibend, an zwei gegebenen Kurven hingleitet. Er nennt diese Gattung von Flächen Paralleloide. Zuerst wird der Fall untersucht, daß die eine der Leitkurven eine auf der Richtebene senkrechte Gerade („Achse") ist, d. h. das gerade Konoid, das von Tin-

[1]) Phil. Trans., Vol. 51, P. I, p. 446—457. [2]) Mem. div. Sav. IV, p. 623 bis 634.

seau auch so bezeichnet wird. Von dieser Fläche weist er folgende Eigenschaften nach:

1) Die ebenen Schnitte parallel der Achse sind bezüglich des Inhalts proportional ihrer Entfernung von der Achse.

2) Das Volumen des von einem solchen Schnitt abgeschnittenen Stücks des Konoids ist gleich dem halben Produkt aus der Schnittfläche und ihrem Abstand von der Achse.

3) Zieht man durch den Schwerpunkt des in 2) beschriebenen Körpers eine die Achse schneidende Gerade parallel zur Richtebene, so wird diese vom Schwerpunkt im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Weiter ist die Rede von quadrilatères gauches, worunter wieder das hyperbolische Paraboloid verstanden ist, dessen Gleichung hier in der Form auftritt $Ky = xz$. Von den allgemeinen „Paralleloiden" werden dann noch ähnliche Sätze nachgewiesen, wie vom Konoid.

Mit Schraubenflächen haben sich u. a. Fergola und Kästner beschäftigt. Ersterer (La vera misura della volte a spira[1]), 1785) hat den, übrigens schon von Euler (s. S. 553) gefundenen Satz bewiesen, daß die Guldinsche Regel sich auch auf Schraubenflächen ausdehnen läßt, und in folgende Form gekleidet: Es ist Inhalt und Oberfläche eines durch Schraubenbewegung eines beliebigen Meridians um eine gegebene Achse erzeugten Körpers = Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers, der durch Umdrehung desselben Meridians um dieselbe Achse erzeugt wird. Kästner (Ad theoriam cochleae pertinens observatio geometrica)[2]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß die übliche Ausdrucksweise, eine Schraubenfläche entstehe durch Aufwicklung einer schiefen Ebene auf einen Zylinder, falsch ist. Dies ist ohne Zerreißung („elementa hiatu dirimuntur", sagt Kästner) nicht möglich, da ja die windschiefe Schraubenfläche nicht zu den abwickelbaren Flächen gehört. Kästner stellt in dieser Arbeit auch die Gleichung der Schraubenlinie auf und zeigt, daß die Schmiegungsebene eines Punktes (der Ausdruck selbst kommt natürlich noch nicht vor) stets das Lot von dem Punkt auf die Achse enthält, und daß die Schnittgerade konsekutiver Schmiegungsebenen die Tangente der Kurve ist.

Zu erwähnen sind noch vier kleinere Arbeiten von Fontana[3]). In der ersten: „Sopra un errore che si commette da molti nell' assegnare la misura delli iperboloidi"[4]) berichtigt er einen von früheren Autoren begangenen Fehler, indem er bemerkt, daß der Inhalt des durch

[1]) Atti Acad. Napoli 1787. [2]) Dissert. math. et phys. Altenburg. 1771, p. 38 ff. [3]) Für den Bericht hierüber s. Fußnote S. 476. [4]) Mem. Soc. It., T. III, p. 507—509 (1786): Ricerche analitiche sopra diversi soggetti, Art. III.

Umdrehung der Linie $x^m y^n = a^{m+n}$ um die x-Achse erzeugten Hyperboloids, von $x = a$ bis $x = \infty$ nicht nur für $n = 2m$, sondern auch für $n > 2m$ unendlich ist; auf denselben Gegenstand bezieht sich die vierte (der Zeit nach) Schrift: „Sopra i conoïdi asimtotico-iperbolici“[1]). In der zweiten: „Sopra la misura d'alcuni solidi e superficie rotonde“[2]) wird der folgende, von Parent[3]) ohne Beweis ausgesprochene Satz nachgewiesen: Rotiert ein Kreissegment vom Zentriwinkel 90^0 um den zu seiner Sehne parallelen Durchmesser, so hat der dadurch erzeugte ringförmige Körper gleichen Inhalt und gleiche Fläche mit der denselben von innen berührenden Kugel. — In der dritten: „Sopra la massa di una sfera composta di materia eterogenea, la cui densità varie da uno strato sferico all' altre in ragione d'una qualunque potenza della distanza dal centro; e sopra qualche paradosso, che quindi deriva“[4]) berechnet Fontana die Masse M einer Kugel vom Radius r, unter der Voraussetzung, daß die Dichtigkeit einer Kugelschicht einer beliebigen Potenz n ihres Radius proportional sei. Er findet $M = \frac{4\pi\Delta}{(n+3)\,r^{n+3}}(r^{n+3} - o^{n+3})$, wo Δ die Dichtigkeit an der Oberfläche ist. Die Masse m ist endlich, logarithmisch unendlich oder algebraisch unendlich, je nachdem $n \gtreqless -3$ ist. Das darf uns nicht befremden, da für ein negatives n die Dichtigkeit in unendlicher Nähe des Mittelpunktes unendlich groß ist. Daß nichtsdestoweniger M für $-3 < n < o$ endlich ist, hängt damit zusammen, daß der Inhalt einer Kugel von unendlich kleinem Radius unendlich klein von der dritten Ordnung ist, während die Dichtigkeit unendlich groß ist von der Ordnung $-n < 3$. Für $n = -3$ hat diese unendlich kleine Kugel endliche Masse, und es ist daher keineswegs unverständlich, daß die ganze Masse unendlich groß ausfallen kann.

Verschiedene Arbeiten befassen sich, von praktischen Gesichtspunkten ausgehend, mit der Ausmessung der Oberfläche und des Inhalts von Gewölben, Fässern usw., meist auf elementarem Wege. Wir gehen hierauf nicht weiter ein, wollen jedoch als curiosa zwei Stellen aus Kästner, „Über die Ausmessung bauchichter Körper, nebst Anwendung auf die Visierkunst“[5]) (1787) anführen. Er bespricht darin ihre Entstehung durch Rotation der Kurve um eine Achse, der sie die konkave Seite zuwendet; ist sie konvex gegen die Achse, so entsteht ein „negativer Bauch“; als Beispiel für ein derartiges Gebilde

[1]) Memorie matematiche, Pavia 1796, Mem. III. [2]) Ricerche sopra diversi punti concernente l'analisi infinitesimale et la sua applicazione alla fisica, Pavia 1793, Art. IV. [3]) Bd. III², S. 399. [4]) Memorie matematiche, Pavia 1796, Mem. II. [5]) Leipziger Archiv für reine und angewandte Mathematik 1787, S. 1–24.

führt er — die Schnürbrust an. Er polemisiert dann gegen Lambert, der für die Inhaltsberechnung der Fässer eine bloß angenähert richtige Formel angebe[1]), und bemerkt, daß bei „unrichtiger Verwaltung dieses Verfahrens (d. h. der Berechnung des Faßinhalts) jeder leidet, der nicht bloß Wassertrinker ist“.

Und nun kommen wir zu dem Werk, das unstreitig unter allen bisher besprochenen den ersten Rang einnimmt, nämlich Monges „Feuilles d'Analyse“. Der volle Titel lautet: Feuilles d'Analyse appliquée à la Géometrie à l'usage de l'École Polytechnique, publiées la première année de cette école (an 3 de la République), Paris. Das Exemplar, nach dem ich berichte[2]), trägt die Zeitangabe: Thermidor, an 9, ist also sechs Jahre später gedruckt. Wie der Titel besagt, ist das Werk kein systematisches Lehrbuch, sondern besteht aus losen Blättern (das mir zu Gebote stehende Exemplar ist nicht einmal paginiert), hervorgegangen teils aus Monges Vorlesungen an der polytechnischen Schule, teils aus früher erschienenen Abhandlungen, die nun hier gesammelt der Öffentlichkeit übergeben werden. Aber diese Blätter enthalten eine Fülle hochbedeutsamer Gedanken und Entdeckungen in einer geistvollen, durchweg originalen Darstellungsweise, bewundernswert in erster Linie durch das phänomenale räumliche Anschauungsvermögen, das dem „Vater der darstellenden Geometrie“ zu Gebote stand; man hat den Eindruck, daß die Geraden und Ebenen, die Kurven und Flächen, um die es sich handelt, mit geradezu greifbarer Deutlichkeit vor Monges geistigem Auge standen; dazu kommt die fast verblüffende Sicherheit, mit der die analytischen Hilfsmittel aus einem vorher noch wenig bearbeiteten Gebiet, der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, auf die Raumgebilde und deren Elemente angewendet werden, wobei umgekehrt jene Theorien durch diese räumliche Interpretation eine wesentliche Förderung und Veranschaulichung erfahren. Fügen wir noch hinzu die Eleganz der Entwicklungen, die sich von umständlichen Rechnungen fast ganz fernhalten, so haben wir wenigstens die Hauptvorzüge des hervorragenden Werkes genannt. Freilich macht die oft überraschende Originalität von Monges Gedankengang das Studium des Werks nicht gerade leicht, aber der Leser wird durch die Früchte dieses Studiums für die gehabte Mühe reichlich entschädigt. — Versuchen wir in möglichster Kürze eine Vorstellung von dem reichen Inhalt zu geben.

Die drei ersten Nummern enthalten so ziemlich die ganze ana-

[1]) Leipziger Archiv für reine und angewandte Mathematik, 1786, S. 425 bis 446. [2]) Aus der Bibliothek des Herrn Prof. Dr. v. Brill in Tübingen.

lytische Geometrie der Ebene und der Geraden im Raum und die Lösungen aller vorkommenden Fundamentalaufgaben, also: Ziehen von Parallelen, Fällen von Loten, Bedingungen des Senkrechtstehens von Geraden und Ebenen, kürzeste Entfernung zweier windschiefen Geraden, Neigungswinkel gegen die Koordinatenebenen, alles in einer, man möchte sagen, klassischen Form dargestellt, über die man eigentlich bis heute nicht wesentlich hinausgekommen ist. Namentlich ist hervorzuheben die Verwendung der Elimination zur Herleitung von Schnittpunkten und Schnittpunktsbedingungen, an mehreren Stellen scheint es auch, als ob die Aufgaben und Methoden der deskriptiven Geometrie von Einfluß auf die Behandlungsweise gewesen wären, so namentlich bei den Aufgaben über das Fällen von Loten auf gegebene Ebenen.

Mit Nr. 4 beginnt die Behandlung der Flächenfamilien, die durch eine gemeinsame Eigenschaft definiert sind. Dieser Begriff ist eigentlich erst durch Monge in die Wissenschaft eingeführt und zur vollen Klarheit durchgearbeitet worden. Die Untersuchungen über diese Dinge nehmen auch den größten Raum in dem ganzen Werk ein, und bilden sozusagen dessen Grundidee, wenn man bei einem so überreichen Inhalt überhaupt von einer solchen sprechen kann. — Zunächst werden Tangentialebene und Normale aufgestellt, erstere in der Weise, daß einer beliebigen durch den betreffenden Flächenpunkt gehenden Ebene die Bedingung auferlegt wird, noch durch jeden beliebigen Nachbarpunkt zu gehen. Nachdem so die Tangentialebene bestimmt ist, wird nach den in Nr. 1—3 entwickelten Methoden leicht die Normale hergeleitet, die Monge außerdem noch durch den Schnitt zweier Normalebenen bekommt; letztere gewinnt er durch zwei Kugeln mit gleichem Radius, von denen die eine ihren Mittelpunkt in dem betreffenden Punkt, die andere in einem Nachbarpunkt hat. Die Ebene des Schnittkreises ist dann eine Normalebene der Fläche. Dabei wird der Übergang zum Nachbarpunkt einfach durch Differenzieren ausgeführt, ein Verfahren, das Monge im ganzen Werke vielfach anwendet.

Daran schließt sich die Aufstellung der Gleichung der Zylinderflächen, und zwar wird zunächst ihre partielle Differentialgleichung sehr einfach dadurch hergeleitet, daß man der vorher aufgestellten Tangentialebene einer allgemeinen Fläche die Bedingung auferlegt, einer gegebenen Geraden parallel zu sein. Hieraus ergibt sich sofort die gesuchte partielle Differentialgleichung: $ap + bq = 1$. Dann wird die allgemeine Gleichung in endlicher Form aufgestellt, und auch hier ist die Schlußweise überraschend einfach: Monge geht aus von den allgemeinen Gleichungen einer Geraden:

$$x = az + \alpha; \quad y = bz + \beta.$$

Soll diese Gerade einer gegebenen Richtung parallel sein, so müssen a und b konstant sein, dagegen sind α und β beliebig. Sie haben aber beide für alle Punkte einer bestimmten Geraden konstante Werte, und ändern beide zugleich ihre Werte, wenn man zu einer anderen Geraden übergeht. Und nun kommt wieder der einfache Schluß[1]): Ces deux quantités sont donc constantes ensemble et variables ensemble, donc elles sont fonctions l'une de l'autre. Man hat also $\beta = \varphi(\alpha)$, und damit $(y - bz) = \varphi(x - az)$ als allgemeine Gleichung der Zylinderflächen. Monge bemerkt hier ausdrücklich, daß φ nicht notwendig eine analytisch ausdrückbare Funktion zu sein brauche, da sie ja von der ganz willkürlichen Leitlinie abhängt, die auch unstetig (non soumis à la loi de continuité) sein könne[2]). Es folgt die Lösung der beiden Aufgaben, eine Zylinderfläche zu finden, 1) die durch eine gegebene Raumkurve geht, und 2) die eine gegebene Fläche berührt. In ganz analoger Weise werden in Nr. 5 die Kegelflächen und die Rotationsflächen untersucht. Bei ersteren wird auch die Aufgabe gelöst, die Fläche zu finden, die den geometrischen Ort der Berührkurven aller Tangentialkegel bildet, die man von einem festen Punkt als Spitze an alle Flächen einer einfach unendlichen Schar legen kann. Bei letzteren wird die Rotationsfläche bestimmt, die bei Umdrehung einer gegebenen Fläche um eine mit ihr fest verbundene Achse als Enveloppe sämtlicher Lagen der gedachten Fläche entsteht. Ebenso werden (Nr. 6) die Flächen behandelt, die durch Bewegung einer Geraden entstehen, welche stets parallel einer gegebenen Ebene bleibt, und dabei eine feste, auf dieser Ebene senkrechte Gerade schneidet, also die senkrechten Konoidflächen im heutigen Sprachgebrauch. Monge macht hier auch auf das Vorkommen solcher Flächen in der Technik (z. B. windschiefe Schraubenfläche) aufmerksam. Von besonderem Interesse ist Nr. 7 und 8, wo von der Enveloppe einer Flächenschar die Rede ist. Monge führt hier den in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen so wichtig gewordenen Begriff der Charakteristik ein. Die wesentlichen Punkte seiner Überlegungen sind folgende: Enthält die Gleichung einer Fläche $F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ zwei variable Parameter, α und β, die durch eine Gleichung $\beta = \varphi(\alpha)$ verbunden sind, so erhält man durch Variation von α eine einfach unendliche Flächenschar. Diese besitzt eine Enveloppe, deren Gestalt natürlich von der Funktion φ abhängt. Alle diese Enveloppen nun, die durch Abänderung der

[1]) Vgl. S. 536. [2]) Vgl. Fußnote [1]) S. 553.

Funktion φ entstehen, haben, wie Monge sich ausdrückt, un caractère général, une propriété commune, une même génération, unabhängig von der Natur der Funktion φ; dieser gemeinsame Charakter kann durch eine partielle Differentialgleichung ausgedrückt werden, der sämtliche Flächen dieser Art genügen, und die von φ ganz frei ist, während die endliche Gleichung natürlich eine willkürliche Funktion enthält. Hier spielt nun eine wichtige Rolle die Charakteristik; Monge versteht darunter die Schnittkurve zweier Flächen, deren Parameter nur um eine unendlich kleine Größe sich unterscheiden, d. h. die Schnittkurve der Flächen $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$. Die Enveloppe ist der geometrische Ort der Charakteristiken und ergibt sich durch Elimination von α aus diesen beiden Gleichungen. Ebenfalls wichtig ist der Ort der Schnittpunkte dreier konsekutiven Flächen einer Schar; d. h. die Kurve, die definiert ist durch die drei Gleichungen

$$F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Diese Kurve wird von sämtlichen Charakteristiken berührt, ist also die Enveloppe derselben; Monge nennt sie arête de rebroussement. Diese Überlegungen werden durch ein geeignetes Beispiel illustriert, nämlich durch die Kanalflächen mit ebener (in der xy-Ebene liegender) Leitkurve. Als Differentialgleichung derselben[1]) ergibt sich

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = a^2.$$

Die Charakteristiken sind Kreise, deren Mittelpunkte auf der Leitkurve liegen und deren Ebenen normal zu derselben sind. Als Differentialgleichung der Charakteristiken ergibt sich:

$$p\,dy - q\,dx = 0,$$

und als Differentialgleichung der Rückkehrkanten (arêtes de rebroussement):

$$z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Daran schließt sich die Lösung einiger Aufgaben über Kanalflächen, z. B. eine solche Fläche derart zu bestimmen, daß sie durch eine gegebene Raumkurve geht, oder eine gegebene Fläche längs einer Kurve berührt. Im folgenden Blatt (Nr. 9) behandelt Monge in derselben Art die Flächen, für welche die Linien größten Gefälls Geraden mit konstanter Horizontalneigung sind. Er zeigt, daß sie als Enveloppen einer Schar von Kreiskegeln angesehen werden können, deren Achsen

[1]) Sie ist schon von Euler (s. S. 552f.) angegeben worden.

auf der (als Horizontalebene angenommenen) xy-Ebene senkrecht stehen, und deren Mantellinien stets dieselbe Horizontalneigung haben. Es sind dieselben Flächen, die Euler als „kongruent" mit einer Ebene von derselben Horizontalneigung bestimmt hat[1]). Ihre Charakteristiken sind eben die Geraden, welche die Linien größten Gefälls darstellen, die Rückkehrkanten demnach Raumkurven, deren Tangenten stets dieselbe Horizontalneigung haben (Schraubenlinien eines beliebigen, auf der xy-Ebene senkrechten Zylinders). An dieses Beispiel knüpft Monge noch eine wichtige Bemerkung, nämlich daß die Differentialgleichung der Charakteristiken direkt aus der partiellen Differentialgleichung der betreffenden Flächenfamilie hergeleitet werden kann. Ist diese nämlich

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

und ist

$$\frac{\partial F}{\partial p} = P; \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q,$$

so ist die Differentialgleichung der Charakteristiken:

$$P\,dy - Q\,dx = 0.$$

Als letztes Beispiel für Flächenfamilien, die durch eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung definiert sind, folgen in Nr. 10 die Flächen, welche durch Translation einer gegebenen Fläche längs einer Raumkurve, die auf einer gegebenen Fläche liegt, also noch durch eine willkürliche Funktion bestimmt wird, als Enveloppen entstehen.

Von Nr. 11 ab werden Flächenfamilien behandelt, die durch eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung definiert sind, und zwar zuerst die Regelflächen, deren Mantellinien alle einer gegebenen Ebene $Ax + By + Cz = 0$ parallel sind. Zur Definition der Fläche sind zwei Raumkurven (Leitkurven) nötig, die von jeder Mantellinie geschnitten werden. Monge stellt nun die Gleichung der Fläche in drei verschiedenen Formen auf:

1. Unabhängig von den Leitkurven; hierbei ergibt sich eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die er sehr elegant folgendermaßen herleitet: die Mantellinie eines Punktes $P(x, y, z)$ liegt erstens in der Tangentialebene der Fläche, also besteht für die Koordinaten x', y', z' eines ihrer Punkte die Gleichung:

$$p(x - x') + q(y - y') - (z - z') = 0. \tag{1}$$

Sie ist aber auch zweitens parallel der Richtebene, also hat man:

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0. \tag{2}$$

[1]) Siehe S. 550.

Dieselben Gleichungen gelten aber auch für einen auf derselben Mantellinie liegenden Punkt $P'(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$; unter Berücksichtigung von (1) und (2) ergibt sich:

$$(r\,dx + s\,dy)(x - x') + (s\,dx + t\,dy)(y - y') = 0 \tag{3}$$

und:

$$A\,dx + B\,dy + C(p\,dx + q\,dy) = 0. \tag{4}$$

Die Elimination von $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ aus (1) — (4) ergibt dann sofort die gesuchte partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, nämlich:

$$(Cq + B)^2 r - 2(Cq + B)(Cp + A)s + (Cp + A)^2 t = 0.$$

Ehe die beiden anderen Gleichungsformen hergeleitet werden, zeigt Monge (Nr. 11), wie man in diesem Fall aus der Differentialgleichung der Flächen die der Charakteristiken finden kann. Ist nämlich die erstere:

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

und ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = R; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = S; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = T,$$

so heißt die Differentialgleichung der Charakteristiken:

$$R\,dx^2 - S\,dx\,dy + T\,dy^2 = 0.$$

Sie zeigt, daß in jedem Flächenpunkt die Charakteristik einen Doppelpunkt hat, außer in dem Fall, wo die Differentialgleichung in zwei rationale Linearfaktoren zerfällt, wo also zwei Scharen von Charakteristiken auf der Fläche vorhanden sind. In dem vorliegenden Beispiel ergibt sich als Differentialgleichung der Charakteristiken:

$$(A\,dx + B\,dy + C\,dz)^2 = 0,$$

d. h. ein vollständiges Quadrat, so daß man nur eine Schar von Charakteristiken erhält, nämlich eben die Mantellinien der Fläche.

2. Um die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung zu finden, welche diesen Flächen zukommt, geht Monge wieder aus von den Gleichungen (1) und (2), die eine Mantellinie der Fläche darstellen. Deren Projektion auf eine der Koordinatenebenen, z. B. die xz-Ebene, sei $x' = \beta z' + \gamma$. Dann ist, wenn zur Abkürzung

$$Ax + By + Cz = \alpha$$

gesetzt wird,

$$\beta = \frac{Cq + B}{Bp - Aq}; \quad \gamma = -\frac{B(z - px - qy) + \alpha q}{Bp - Aq}.$$

Nun haben für eine bestimmte Mantellinie die drei Größen α, β, γ einen bestimmten Wert, oder, wenn eine dieser drei Größen konstant ist, so sind es auch die beiden anderen; geht man aber zu einer anderen über, so ändern alle drei ihren Wert, sie sind also zugleich

konstant und zugleich veränderlich, folglich müssen je zwei durch eine Gleichung verbunden sein, z. B. $\beta = \varphi(\alpha)$. Man hat also als partielle Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\frac{Cq + B}{Bp - Aq} = \varphi(Ax + By + Cz).$$

Stellt man dieselbe Überlegung für die beiden anderen Projektionen an, so findet man noch zwei weitere Gleichungen, also im ganzen drei, von denen jede eine Folge der beiden anderen ist. Wendet man auf irgend eine derselben das oben zur Herleitung der Charakteristiken aus einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung angegebene Verfahren an, so findet man wieder:

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0.$$

3. Endlich läßt sich leicht die endliche Gleichung aufstellen, nämlich:

$$z = x \cdot \varphi(Ax + By + Cz) + y \cdot \psi(Ax + By + Cz).$$

Sie enthält zwei willkürliche Funktionen und ist von derselben Allgemeinheit, wie jede der beiden ersten Formen, deren gemeinsames Integral sie darstellt.

Auch hier schließt Monge einige Aufgaben über solche Flächen an, nämlich eine zu bestimmen, die durch zwei gegebene Kurven geht, oder eine, deren Mantellinien sämtlich zwei gegebene Flächen berühren; ferner eine Spezialisierung (Nr. 13) für den Fall, daß die Mantellinien alle der xy-Ebene parallel sind und die z-Achse treffen. Hier ergibt sich die Differentialgleichung, von der Meusnier Gebrauch gemacht hat[1]), nämlich:

$$rq^2 - 2pqs + tp^2 = 0.$$

Den Schluß bildet eine Bemerkung über das Vorkommen solcher Flächen in der Technik.

In Nr. 14 kommt sodann eine ausführliche Darlegung der Eigenschaften der abwickelbaren Flächen. Durch analoge Überlegungen wie vorher wird die sie definierende Gleichung in drei verschiedenen Formen aufgestellt: 1. Als partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, 2. als eine ebensolche 1. Ordnung mit einer willkürlichen Funktion, 3. als endliche Gleichung mit zwei willkürlichen Funktionen; und es werden wieder die zwei gleichen Aufgaben wie oben für abwickelbare Flächen gelöst. Übrigens deckt sich der Inhalt dieses Blattes im wesentlichen mit der schon besprochenen Abhandlung von Monge über diesen Gegenstand[2]).

---

[1]) Siehe S. 550. [2]) Siehe S. 535ff.

Nr. 15 behandelt nach denselben Methoden die Flächen, welche durch Translation einer gegebenen Fläche längs einer ganz beliebigen Raumkurve (die also nicht mehr, wie in Nr. 10, auf einer gegebenen Fläche angenommen wird) als Enveloppen entstehen. Die partielle Differentialgleichung derselben ist von der Form:

$$(rt - s^2)(RT - S^2) - rR - 2sS - tT + 1 = 0.$$

R, S, T sind dabei gegebene Funktionen, die folgendermaßen mit der transferierten Fläche zusammenhängen: ist diese bestimmt durch

$$z = F(x, y),$$

so kann man die beiden Gleichungen $p = \frac{\partial F}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial F}{\partial y}$ nach x und y aufgelöst denken, so daß also $x = f_1(p, q) : y = f_2(p, q)$ ist. Monge zeigt nun zunächst, daß $\frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{\partial f_2}{\partial p}$ ist, daß also f_1 und f_2 als partielle Ableitungen einer Funktion von p und q, die er mit Γ bezeichnet, angesehen werden können. R, S, T sind dann die partiellen Ableitungen 2. Ordnung von Γ nach p und q. — Ähnlich erledigt sich die Aufgabe, die Flächen zu bestimmen, die durch Translation einer Raumkurve längs einer anderen Raumkurve erzeugt werden; am Schluß wird noch darauf hingewiesen, wie die entwickelten Methoden umgekehrt zur Integration einer partiellen Differentialgleichung dienen können, welche die obige Form hat.

Nr. 17 und 18 bringen eine der schönsten Entdeckungen von Monge, nämlich die Krümmungslinien einer Fläche. Dieser Teil kann unbedenklich als der Glanzpunkt des ganzen Werks bezeichnet werden, sowohl in bezug auf die hohe Bedeutung der Resultate, wie in bezug auf die Eleganz, Präzision und Klarheit der Entwicklung. Wir versuchen Monges Gedankengang in Kürze anzugeben. Er geht aus von den schon früher aufgestellten Normalengleichungen:

$$(x - x') + (z - z')p = 0; \quad (y - y') + (z - z')q = 0,$$

und sucht die Bedingung dafür, daß diese von der Normalen eines Nachbarpunktes $(x + dx,\ y + dy,\ z + pdx + qdy)$ geschnitten wird. Unter Berücksichtigung der obigen Gleichungen sind die Gleichungen dieser Nachbarnormalen:

$$dx + p^2dx + pqdy + (z - z')(rdx + sdy) = 0,$$
$$dy + pqdx + q^2dy + (z - z')(sdx + tdy) = 0.$$

Die Bedingung, daß diese Normale die erste schneidet, findet man durch Elimination von $(x - x')$, $(y - y')$, $(z - z')$ aus den vier Gleichungen der beiden Normalen. Da indes die letzten beiden nur noch

$z - z'$ enthalten, genügt es, $z - z'$ zu eliminieren, wodurch man erhält:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2[(1+q^2)s - pqt] + \frac{dy}{dx}[(1+q^2)r - (1+p^2)t] - (1+p^2)s + pqr = 0. \quad (1)$$

Eliminiert man umgekehrt $\frac{dy}{dx}$, so ergibt sich:

$$(z-z')(rt-s^2) + (z-z')[(1+q^2) - 2pqs + (1+p^2)t] + 1 + p^2 + q^2 = 0. \quad (2)$$

Die beiden letzten Gleichungen werden nun geometrisch gedeutet. Die erste, die quadratisch in $\frac{dy}{dx}$ ist, sagt, daß es zu jedem Flächenpunkt P zwei Nachbarpunkte P_1 und P_2 auf der Fläche gibt, deren Normalen die des Punktes P schneiden. Die Projektionen der Richtungen PP_1 und PP_2 auf die xy-Ebene sind durch die Gleichung (1) bestimmt, aus der auch die bemerkenswerte Eigenschaft folgt, daß $PP_1 \perp PP_2$ ist. Die zweite liefert zwei Werte von $z - z'$, also in Verbindung mit den Gleichungen der Normalen zwei Punkte auf dieser, wo sie von den Normalen der Punkte P_1 und P_2 geschnitten wird und die als „centres de courbure" bezeichnet werden. Die Abstände dieser beiden Schnittpunkte ergeben sich als die Wurzeln der quadratischen Gleichung in R:

$$gR^2 + hkR + k^4 = 0,$$

wo:

$$g = rt - s^2; \quad k^2 = 1 + p^2 + q^2; \quad h = (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t.$$

Die beiden sich ergebenden Werte nennt Monge „rayons de courbure"; daß es die von Euler[1]) gefundenen extremen Werte der Krümmungsradien der Normalschnitte sind, wird nicht bemerkt. Nun folgt die geometrische Konstruktion der beiden orthogonalen Scharen von Krümmungslinien, die man erhält, indem man von jedem Flächenpunkt zu den beiden Nachbarpunkten weitergeht, deren Normalen die seinige schneiden, von diesen ebenso zu dritten Punkten usf. Man erhält so zwei Scharen von Kurven, deren Projektionen auf die xy-Ebene der Gleichung (1) genügen. Diese ist also die Differentialgleichung der Krümmungslinien. Sie läßt sich auch in die Form setzen:

$$dp(dy + qdz) = dq(dx + pdz).$$

Es wird dann durch geometrische Überlegungen gezeigt, daß die Flächennormalen längs jeder Krümmungslinie eine abwickelbare Fläche bilden; daß also für jede Fläche zwei Scharen von solchen Flächen

[1]) Vgl. S. 546.

existieren, und daß diese sich ebenfalls überall rechtwinklig schneiden. Davon wird nun sofort eine praktische Anwendung auf den Gewölbebau gemacht: nämlich man solle die hierzu erforderlichen Steine derart wählen, daß ihre Fugen die Krümmungslinien der Gewölbefläche bilden. Des weiteren wird dann entwickelt, daß jede dieser Flächen eine Rückkehrkante hat, die den Ort aller Krümmungszentra der Fläche längs der betr. Krümmungslinie darstellt. Die Gesamtheit aller dieser Rückkehrkanten bildet also eine aus zwei Mänteln bestehende Fläche, die der Ort aller Krümmungszentra der gegebenen ist, und von der zunächst die merkwürdige Eigenschaft nachgewiesen wird, daß die scheinbaren Umrisse der beiden Mäntel, von wo aus man sie auch betrachtet, sich rechtwinklig schneiden. Diese, rein geometrisch abgeleitete Bemerkung zeigt schon für sich allein, welche Sicherheit der räumlichen Anschauung Monge zu Gebote stand. Auch daß die Rückkehrkanten geodätische Linien dieser Zentrafläche sind, ergibt sich rein geometrisch.

Nun ist aber ein kleines Versehen zu erwähnen, das Monge passiert ist. Er stellt nämlich die Bedingung auf, daß die beiden Krümmungsradien gleich sein sollen, und findet (vgl. S. 567)

$$h^2 - 4k^2g = 0.$$

Diese Gleichung, sagt er, definiere eine Kurve (courbe sphérique) auf der Fläche, für deren sämtliche Punkte die beiden Hauptkrümmungsradien denselben Wert haben; der Ort der zugehörigen Krümmungszentra wäre dann die Schnittkurve der beiden Mäntel der Zentrafläche. Dabei hat er jedoch nicht bemerkt, daß $h^2 - 4k^2g$ sich als die Summe zweier Quadrate darstellen läßt, daß daher $h^2 - 4k^2g = 0$ eine imaginäre Fläche mit reeller Doppelkurve darstellt, woraus folgt, daß es nur einzelne reelle Punkte auf einer Fläche, nicht eine ganze Kurve gibt, für welche die beiden Krümmungsradien gleich sind. Dies stellt sich auch nachher an dem Beispiel heraus, das Monge betrachtet, nämlich am dreiachsigen Ellipsoid (Nr. 19 u. 20). Er stellt für diese Fläche die Differentialgleichung der Krümmungslinien auf, integriert sie und findet die bekannten Resultate; hier zeigt sich nun, daß es keine Kurve, sondern bloß vier Punkte gibt, für welche die beiden Krümmungsradien gleich sind. Auch hier weiß Monge sofort seinen theoretischen Entwicklungen eine praktische Gestalt zu geben. Er schlägt nämlich vor, dem zu erbauenden Saal für die gesetzgebenden Versammlungen eine elliptische Gestalt und der Decke die Form eines Ellipsoids zu geben. Die Kreispunkte wären durch helle Lampen zu markieren, die Krümmungslinien sollten an der Decke als „nervures de la voûte“ eine geschmackvolle Dekoration geben; die Zwischenräume würden Licht- und Luftöffnungen darstellen. Ob dieser Vorschlag jemals praktisch ausgeführt worden ist, ist mir nicht bekannt. — Als Anwendung der hier entwickelten Theorie der Krümmungslinien betrachtet Monge folgende Beispiele: 1. Die Flächen, für welche die eine Schar von Krümmungslinien von ebenen Kurven gebildet wird, deren Ebenen alle parallel sind (Nr. 21—23). Es sind die schon von Euler in anderem Zusammenhang[1]) gefundenen Gesimsflächen; Monge gibt noch verschiedene Erzeugungsweisen dieser Flächen an; 2. die Flächen, für welche der eine Krümmungsradius konstant ist (Nr. 24 und 25). Hier ergeben sich die Röhrenflächen mit einer beliebigen Raumkurve als Leitkurve; der spezielle Fall, daß diese eine ebene Kurve ist, ist ja schon in Nr. 8 erledigt worden. 3. Die Flächen, für welche die Krümmungsradien gleich und gleichgerichtet sind (Nr. 26). Als einzige Fläche ergibt sich die Kugel, scheinbar allerdings noch eine Fläche, die folgendermaßen entsteht: Es sei eine Raumkurve und eine ihrer Evolventen gegeben; beschreibt man dann um jeden Punkt der Kurve eine Kugel, deren Radius gleich dem Stück der Tangente zwischen Kurve und Evolvente ist, so hat die Enveloppe aller dieser Kugeln die verlangte Eigenschaft. Diese Enveloppe reduziert sich aber bei genauerem Zusehen auf die Evolvente selbst, indem jede Kugel von der nachfolgenden nicht geschnitten, sondern einschließend berührt wird. Die Enveloppe ist dann der Ort dieser Berührpunkte, d. h. eben die Evolvente. 4. Das Beispiel, das die wichtigsten Ergebnisse liefert, nämlich die Flächen, für welche die Krümmungsradien gleich und entgegengesetzt gerichtet sind (Nr. 27 und 28). Die Bedingung hierfür ist nach den früheren Untersuchungen[2]) $h = 0$, d. h.

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0, \tag{1}$$

d. h. dieselbe Gleichung, die der „citoyen Lagrange“ für die Minimalflächen gefunden hat.[3]) Meusnier wird nicht erwähnt; da seine Arbeit erst 1785 gedruckt wurde, hat Monge sie vermutlich noch nicht gekannt.

Er stellt nun zunächst nach der früher (S. 564) angegebenen Methode die Differentialgleichung der Charakteristiken auf und findet:

$$(1 + q^2)dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + p^2)dx^2 = 0. \tag{2}$$

Nimmt man dazu die beiden Gleichungen:

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

und die Differentialgleichung der Fläche, so können r, t und $\frac{dy}{dx}$ eli-

[1]) Siehe S. 553. [2]) Siehe S. 567. [3]) Siehe S. 550.

miniert werden, wobei s von selbst mit herausfällt. Es bleibt dann eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung in p und q, nämlich:

$$(1+q^2)dp - 2pq\,dp\,dq + (1+p^2)dq = 0.$$

Diese ist leicht zu integrieren und ergibt, wenn α die Integrationskonstante ist:

$$(1+\alpha^2) + (p - \alpha q)^2 = 0, \tag{3}$$

d. h. eine Gleichung 2. Grades; die Fläche hat also zwei Scharen von Charakteristiken, die durch die beiden Linearfaktoren von (3) definiert sind. Bezeichnet man die Konstante für die eine Schar mit α, für die andere mit β, so lauten die Gleichungen:

$$p - \alpha q = i\sqrt{1+\alpha^2}; \quad p - \beta q = -i\sqrt{1+\beta^2}. \tag{4}$$

Setzt man die aus (4) sich ergebenden Werte von p und q in (2) ein, so ergibt sich die Differentialgleichung der Charakteristiken mit den Konstanten α und β an Stelle von p und q. Vorher macht Monge noch darauf aufmerksam, daß (2), da:

$$p\,dx + q\,dy = dz$$

ist, sich auch in die Form setzen läßt:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

d. h. er hat gefunden, daß die Linien von der Länge Null (in heutiger Bezeichnung) die Charakteristiken der Minimalflächen sind. — Stellt man nun nach (4) die Differentialgleichung der Charakteristiken auf, so zeigt sich, daß sie in die beiden linearen Gleichungen:

$$dy + \alpha\,dx = 0 \quad \text{und} \quad dy + \beta\,dx = 0$$

zerfällt, von denen jedoch die erste mit der zweiten Gleichung (4), die zweite mit der ersten zusammengehört, so daß die Differentialgleichungen der beiden Scharen von Charakteristiken schließlich sind:

$$\left.\begin{aligned} p - \alpha q &= i\sqrt{1+\alpha^2}; & dy + \beta\,dx &= 0; \\ p - \beta q &= -i\sqrt{1+\beta^2}; & dy + \alpha\,dx &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Die Integration dieser Gleichungen ist schwierig, da im ersten Paar β, im zweiten α nicht als konstant betrachtet werden kann; durch ein scharfsinniges Verfahren wird sie aber doch ausgeführt, und so ergibt sich schließlich die allgemeine Gleichung der Minimalflächen mit zwei willkürlichen Funktionen Φ und Ψ, allerdings in imaginärer Form, indem die Koordinaten eines Punktes sich folgendermaßen durch die beiden Parameter α und β ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\Phi'(\alpha) + \Psi'(\beta); \\ y &= -\Phi(\alpha) + \alpha\Phi'(\alpha) + \Psi(\beta) - \beta\Psi'(\beta); \\ z &= i\int \Phi''(\alpha)\sqrt{1+\alpha^2}\,d\alpha + i\int \Psi''(\beta)\sqrt{1+\beta^2}\,d\beta \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Eine geometrische Darstellung dieser Flächen vermag Monge jedoch nur in der Weise zu geben, daß er sie Element für Element zusammensetzt.

Damit werden die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung verlassen und Beispiele für solche der dritten Ordnung in Angriff genommen. Monge beginnt mit den allgemeinen Regelflächen (Nr. 29 und 30), und stellt, durch ganz analoge Betrachtungen wie früher, die sie definierende Gleichung in vier verschiedenen Formen auf, nämlich:

1. als partielle Differentialgleichung dritter Ordnung, wobei zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{s + \sqrt{s^2 - rt}}{t}$$

gesetzt wird. Die Gleichung heißt dann:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\alpha\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3\alpha^2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \alpha^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0;$$

2. als partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer willkürlichen Funktion, und zwar auf drei verschiedene Arten:

$$p + \alpha q = \varphi(\alpha); \quad y - \alpha x = \psi(\alpha); \quad z - (p + \alpha q) = \pi(\alpha),$$

wo α dieselbe Bedeutung hat wie vorher, und φ, ψ, π willkürliche Funktionen sind;

3. als partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei willkürlichen Funktionen. Man erhält die Gleichung durch Elimination von α aus irgend zwei der in 2. aufgestellten drei Gleichungen, so daß also noch zwei von den drei Funktionen φ, ψ, π in die Gleichung eingehen;

4. in endlicher Form mit drei willkürlichen Funktionen, nämlich:

$$y - \alpha x = \psi(\alpha); \quad z - x\cdot\varphi(\alpha) = \pi(\alpha),$$

wo α ein variabler Parameter ist, durch dessen Elimination aus den beiden Gleichungen die Fläche in die Form $F(x, y, z) = 0$ gebracht werden kann.

Zunächst wird dann gezeigt, wie man aus der partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung ganz ebenso wie bei denen erster und zweiter Ordnung die Differentialgleichung der Charakteristiken finden kann, und daß diese Methode auf Gleichungen beliebig hoher Ordnung anwendbar ist, die linear in den Differentialquotienten höchster Ordnung sind. Als zweites Beispiel werden noch die Flächen behandelt, die als Enveloppen einer Kugel von veränderlichem Radius entstehen, deren Mittelpunkt sich auf einer gegebenen Raumkurve bewegt (Nr. 31). Den Schluß des Ganzen bildet die schon früher (S. 531 ff.) besprochene Untersuchung der Evoluten und Krümmungsverhältnisse einer Raumkurve (Nr. 32—34).

Zum Schluß berichten wir noch kurz über die Fortschritte der Kartographie in unserem Zeitraum, soweit die mathematische Seite daran in Betracht kommt. Auch hier hat Euler die erste allgemeine Stellung und Lösung des Problems gegeben. Voran gehen einige Arbeiten von Kästner[1]), die sich jedoch nur mit der stereographischen und gnomonischen Projektion befassen, sowie ein Abschnitt aus dem III. Band von Lambert, Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung (Berlin 1772), S. 105—192. In der Einleitung wird ein klarer Überblick über die verschiedenen Forderungen gegeben, die an eine Karte zu stellen sind (Winkeltreue, Flächentreue usw.) und gezeigt, inwieweit die verschiedenen Projektionsarten denselben genügen, und wie die Erfüllung einer Forderung die Vernachlässigung einer anderen nach sich zieht. Eine allgemeine Lösung der Aufgabe, die Kugel konform auf die Ebene abzubilden, gibt jedoch Lambert nicht, dagegen folgende Formeln für die stereographische Projektion:

$$dy = \frac{n\,dp}{\cos p} + m\,d\lambda; \quad dx = -\frac{m\,dp}{\cos p} + n\,d\lambda.$$

Hierbei bedeutet p die geographische Breite, λ die geographische Länge, m und n die partiellen Ableitungen von x und y nach λ. Die Arbeit verfolgt im weiteren Verlauf mehr praktische Zwecke; von Interesse ist jedoch noch die Bemerkung, daß die Mitteilung der obigen Formeln an Lagrange diesen zu seinen Untersuchungen über diese Fragen (s. S. 575 ff.) veranlaßt habe.

Euler entwickelt seine Methoden in einer Abhandlung: „De repraesentatione superficiei sphaericae super plano"[2]), und bemerkt einleitend, daß es sich um die Aufgabe handle, die Koordinaten eines Punktes x, y der Ebene als Funktionen der sphärischen Koordinaten (t = geogr. Länge, u = geogr. Breite) so darzustellen, daß die hierdurch bestimmte Abbildung gewissen Forderungen genüge.

[1]) Theoria projectionis stereographicae horizontalis. Diss. math. phys. Altenburg. 1771, p. 88 ff. (1766). Additio ad theoriam proj. ster. hor. Novi Goetting. Commentarii, T. 1, p. 138—193 (1770). Theoria projectionis superficiei sphaericae in planum tangens, oculo in centro posito. [2]) A. P. 1777, I, p. 107—132.

Zunächst werden nun die Bedingungen der Kongruenz durch analytisch-geometrische Betrachtungen entwickelt und gezeigt, daß es nicht möglich ist, diese zu erfüllen. Da also hiernach auf die Kongruenz verzichtet werden muß, kann man andere Bedingungen stellen, und deren analytischen Ausdruck entwickeln. Sollen z. B. Meridiane und Parallelkreise sich als zwei orthogonale Kurvensysteme abbilden, so muß:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

sein; sollen sie insbesondere in die Parallelen zu den Koordinatenachsen übergehen, so muß:

$$x = f(t); \quad y = \varphi(u)$$

sein. Dies wird auf die Merkatorkarte angewendet. Weiter wird eine Abbildung gesucht, bei der jedes Stück der Kugel sich als ein Stück der Ebene von gleichem Flächeninhalt abbildet, also die flächentreue Abbildung. Da das Flächenelement der Kugel $= du\,dt \cos u$, das der Ebene $= dx\,dy$ ist, so ist diese Forderung jedenfalls erfüllt, wenn:

$$x = t, \ y = \sin u$$

ist. Hierbei ist das Bild der Erdoberfläche ein Rechteck, und natürlich in den Polargegenden sehr stark verzerrt.

Nach diesen Einzelbeispielen wird nun die „Hypothesis, qua regiones terrae per similes figuras exhibentur", d. h. die winkeltreue oder konforme Abbildung im heutigen Sinne eingehend behandelt. Da hierbei das Gradnetz der Erde sicher in zwei orthogonale Kurvensysteme übergeht, so ist jedenfalls notwendig, daß, wie oben,

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

ist. Euler setzt nun zur Abkürzung:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = p; \quad \frac{\partial x}{\partial t} = q; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = r; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = s.$$

Dann ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung der Winkeltreue:

$$dx = p\,du + r\,dt \cos u; \quad dy = r\,du - p\,dt \cos u.$$

Die Integration dieser Gleichungen wird auf doppelte Art — Methodus particularis und Methodus generalis — geleistet. Die erstere ist etwas umständlich, die zweite dagegen sehr bemerkenswert, weil hier zum erstenmal komplexe Größen zur konformen Abbildung benutzt werden. Euler sucht nämlich eine lineare Kombination dieser Gleichungen so zu finden, daß die rechte Seite in ein Produkt übergeht, um dann die von ihm so oft mit Erfolg[1]) benutzte Schlußweise anwenden zu können. Eine solche ist, wie d'Alembert gezeigt hat, $dx + idy$.

Hierdurch ergibt sich:

$$dx + idy = (p + ir)(du - idt \cos u).$$

Euler setzt nun:

$$s = \lg\left(45^0 + \frac{u}{2}\right); \quad z = \lg s - it,$$

so daß:

$$dz = \frac{ds}{s} + idt = \frac{du}{\cos u} - idt.$$

Es ist dann also:

$$dx + idy = (p + ir) \cos u \, dz,$$

und wenn die Integration ausführbar sein soll, muß $(p + ir) \cdot \cos u$ Funktion von z, nach ausgeführter Integration also auch $x + iy$ eine Funktion von z sein, die mit $2\Gamma(z)$ bezeichnet wird, so daß:

$$\Gamma'(z) = (p + ir) \cdot \cos u$$

ist. Dann ist also:

$$x + iy = 2\Gamma(z) = 2\Gamma(\lg s - it),$$

woraus sofort folgt:

$$x - iy = 2\Gamma(\lg s + it).$$

Hiernach sind also:

$$x = \Gamma(\lg s - it) + \Gamma(\lg s + it),$$
$$iy = \Gamma(\lg s - it) - \Gamma(\lg s + it)$$

die Gleichungen, welche die allgemeinste winkeltreue Abbildung definieren. x und y sind dabei stets reell. Die Gleichungen lassen sich noch etwas umformen, indem s an Stelle von z eingeführt wird vermöge der Gleichung

$$e^{\alpha z} = s^\alpha (\cos \alpha t - i \sin \alpha t),$$

wo α eine beliebige Konstante bedeutet. Die Funktion Γ von z geht natürlich hierbei auch in andere Funktion von s über, die mit Δ bezeichnet wird. Man erhält so:

$$x = \Delta[s^\alpha(\cos \alpha t - i \sin \alpha t)] + \Delta[s^\alpha(\cos \alpha t + i \sin \alpha t)],$$
$$iy = \Delta[s^\alpha(\cos \alpha t - i \sin \alpha t)] - \Delta[s^\alpha(\cos \alpha t + i \sin \alpha t)].$$

Das ist, wie Euler bemerkt, die allgemeinste Lösung der Aufgabe, eine Kugel so auf die Ebene abzubilden, daß die kleinsten Teile (figurae valde exiguae) ihren Bildern ähnlich werden. Wir möchten

---

[1]) Vgl. S. 551, 552, 555.

nicht unterlassen, noch einmal hervorzuheben, daß die ungemein fruchtbare Idee, zur Lösung dieser Aufgabe komplexe Größen zu verwenden, Eulers Eigentum ist.

Auch die Aufgabe, eine flächentreue Abbildung der Kugel auf die Ebene herzustellen, ist von Euler gelöst worden, und zwar für den Fall, daß das Gradnetz in zwei orthogonale Kurvensysteme übergeht; hier gibt allerdings Euler nur spezielle Lösungen. In einer unmittelbar folgenden Note („De projectione Geographica superficiei sphaericae"[1]) zeigt er noch, wie die stereographische Projektion einen Spezialfall der von ihm aufgestellten allgemeinen Formeln für die konforme Abbildung darstellt.

Sehr eingehend hat sich Lagrange in einer längeren Abhandlung: „Sur la construction des Cartes géographiques"[2]) mit der winkeltreuen Abbildung beschäftigt. Zwar geht die Aufstellung der Abbildungsformeln nicht wesentlich über das von Euler Geleistete hinaus; sie lauten nämlich bei Lagrange:

$$x + iy = f(u + it); \quad x - iy = \varphi(u - it),$$

wo f und φ noch willkürlich sind, aber natürlich eine reelle Abbildung nur dann ergeben, wenn sie konjugierte Funktionen sind. Dagegen tritt hier eine ganz neue Fragestellung auf, nämlich wie f und φ gewählt werden müssen, damit Meridiane und Parallelkreise in bestimmte, vorgegebene orthogonale Kurvensysteme der Ebene übergehen. Diese Frage wird für verschiedene besondere Fälle gelöst. Neu ist ferner, daß Lagrange das Vergrößerungsverhältnis in Betracht zieht; wird dies mit m bezeichnet und ist das Linienelement der Kugel:

$$ds^2 = du^2 + q^2 dt^2,$$

so ist:

$$m^2 = \frac{1}{q^2 f'(u + it) \varphi'(u - it)}.$$

Er erörtert hierbei auch die Frage, wie der Meridian der Erde beschaffen sein müßte, wenn m konstant sein sollte, und findet natürlich, daß in diesem Fall die Meridiane gerade Linien sein müßten.

Die weiteren kartographischen Arbeiten von Schubert, Lorgna, Kästner u. a. haben mehr geographisches oder nautisches, als speziell mathematisches Interesse. Nur aus einer Abhandlung von Schubert: „De projectione sphaeroidis ellipticae geographica"[3]) ist einiges bemerkenswert; zunächst, daß dort von einer projectio figurae ellipticae conformis die Rede ist, was wohl das erste Vorkommen des Wortes

---

[1]) A. P. 1777, I, p. 133—142. [2]) Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres à Berlin 1779, p. 161—210. [3]) N. A. P. p. 130—146.

„konforme Abbildung" sein dürfte. Die Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, welchen Fehler man begeht, wenn bei der Kartenprojektion die Erde als Kugel angenommen wird. Hierbei wird ein nicht uninteressanter Satz bewiesen: wird ein Rotationsellipsoid von einem Punkt des Äquators aus auf eine zum Radius dieses Punktes senkrechte Ebene projiziert, so gehen sowohl die Meridiane, als die Parallelkreise in Ellipsen über, die dem Meridian des Ellipsoids ähnlich sind. Der Satz ist bemerkenswert durch seine Analogie mit dem bekannten Satz über die stereographische Projektion, daß jeder Kugelkreis wieder in einen Kreis übergeht.

Verbesserungen zu Abschnitt XXIV.

S. 461 letzte Zeile statt: of lies: on.
S. 494 Z. 14 statt: und damit r lies: und damit nach 2) r.
S. 508 Z. 2 v. u. ist der Satz „Zunächst ist ... Rede" zu streichen. Das Zitat [6]) gehört zu dem Worte „angenommen" auf Z. 1 v. u.
S. 537 Z. 6 v. u. beizufügen: Auch diese Abhandlung wurde in ihren wesentlichen Bestandteilen später in die F. d'A. aufgenommen.
S. 544 Z. 6 v. u. an „l'infini" das Zitat [1]) beizufügen.
S. 549 Z. 8 statt: mg lies: mJ.
S. 550 Fußnote [1]) statt: S. 365 lies: S. 565.
S. 552 Z. 14 statt: eine Funktion von Φ lies: eine Funktion Φ von φ.
S. 556 Z. 12 v. u. hinter Fläche beizufügen: (die in diesem Fall ein hyperbolisches Paraboloid ist).
S. 559 Z. 7 statt: bisher besprochenen lies: bisher in diesem Abschnitte besprochenen.

ABSCHNITT XXV

PERSPEKTIVE UND DARSTELLENDE GEOMETRIE

VON

GINO LORIA

Die Perspektive vom Mittelalter bis zu Ende des 17. Jahrhunderts.

Unter dem Namen „Perspektive" (von perspicere = klar sehen) haben die Alten die Grundbegriffe und Grundlehren der geometrischen Optik zusammengestellt; dies ergibt sich hauptsächlich aus einem Werke des Euklid, das wir noch besitzen[1]). Diese Lehre wurde in Europa von Ibn Alhaitam gelehrt und verbreitet (I^2, S. 744). Sehr bald wurde sie ein Unterrichtsfach in den mittelalterlichen Universitäten; infolgedessen fand Johann Peckham, Bischof von Canterbury, es für notwendig, eine für die Schulen bestimmte Behandlung derselben zu schreiben (II^2, S. 98); Bradwardin hat dann dieselbe verschlimmert (S. 111); auf ähnlichen Grundlagen ist eine Perspektive des berühmten Witelo aufgebaut (S. 98).

Aber mit der Zeit und mit der Entwicklung der Kultur hat sich die Bedeutung jenes Wortes gänzlich verändert. Da der Sehprozeß sich durch geradlinige Lichtstrahlen vollzieht, welche von den verschiedenen Punkten des Objektes bis zu den Augen des Beobachters gehen, so ist jeder Augapfel der Mittelpunkt eines „Seh- oder perspektivischen Kegels". Man stelle sich nun vor, daß zwischen die Augen und das Objekt eine durchsichtige Fläche („Tafel") gesetzt werde, daß man den Punkt bestimme, wo dieselbe von jedem Sehstrahl geschnitten wird, und daß endlich dieser Schnittpunkt mit der-

---

Anmerkung zu Abschnitt XXV. Über die Geschichte der Perspektive ist die beste Quelle die „Histoire de la perspective ancienne et moderne" (Paris 1864), von M. Poudra, mit den Zusätzen, welche L. Cremona („Sulla storia della prospettiva antica e moderna" in der Rivista italiana di scienze, lettere ed arti, t. V, 1865, p. 226—231, 241—245) dazu gemacht hat, und P. Riccardi („Di alcune opere di autori italiani ommesse nella Histoire de la perspective di M. Poudra"; Bibl. math. 1889, p. 39—42). Über dasselbe Thema und die Geschichte der darstellenden Geometrie sehe man auch den I. Bd. von Chr. Wiener, „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" (Leipzig 1884).

[1]) „Euclidis Opera omnia", vol. VII, Lipsiae 1895; vgl. das IV. Kap. des III. Buches des Werkes von G. Loria, „Le scienze esatte nell' antica Grecia" (Mem. della R. Acc. die Modena, II. Reihe, XII. Bd., 1900).

selben Farbe versehen werde, welche der entsprechende Objektspunkt hat, so wird man eine Punktgruppe bekommen, welche im Auge dieselbe Empfindung hervorruft wie das gegebene Objekt. Nun bildet eben gerade die Bestimmung dieser Punktgruppe auf der Tafel den Zweck der modernen Perspektive. Diese besteht aus zwei Teilen: der „Linearperspektive", welche die Schnittpunkte der Lichtstrahlen auf der Tafel geometrisch zu konstruieren lehrt, und der „Luftperspektive", welche den Zweck hat, die Farben der verschiedenen Punkte des Bildes zu bestimmen. Nur die erstere kann als ein Teil der Mathematik betrachtet werden; daher werden wir hier nur auf die Werke, welche sie betreffen, eingehen. Ferner werden wir auch von unserer Analyse alle für Künstler oder von Künstlern bearbeiteten Werke ausschließen, welche nur empirische Zeichnungsvorschriften enthalten; sie werden von einigen als zur „praktischen Perspektive" gehörig betrachtet.

Es erhellt aus dem eben Gesagten, daß die Perspektive die wissenschaftliche Grundlage der Malerei bildet; daher ist es wohl natürlich, daß die Maler die ersten waren, welche sich damit beschäftigt haben. Unter ihnen sind diejenigen, welche mit Euklid vertraut waren, zu endgültigen Schlüssen und rationellen Methoden gelangt. Um das zu beweisen, genügt es, daran zu erinnern, daß Johann van Eyck (1395—1440), welcher in Deutschland als Lehrer der Lehrer der Malerei betrachtet wird, den Ruf eines vortrefflichen Geometers genießt[1]). Andere Beweise derselben Behauptung liefert die ganze Geschichte des ersten Entwicklungsstadiums der in Rede stehenden Lehre. So verdanken wir dem vielseitigen Genius des Leon Battista Alberti (II^2, S. 292)[2]) den Grundbegriff von der „Perspektive eines Objektes" als dem Durchschnitt der Tafel mit dem entsprechenden Sehkegel oder -Pyramide. Nach ihm begegnen wir Pier dei Franceschi, gewöhnlich della Francesca genannt (1406 oder 1416 geboren, 1492 gestorben), welcher, wahrscheinlich im Jahrzehnt 1470—1480, ein vollständiges Handbuch der Perspektive schrieb, das erste, welches in Italien, vielmehr in der Welt, das Licht erblickte; ein Handbuch, welches handschriftlich von vielen ausgenutzt oder besser geplündert wurde, und das erst vor sieben Jahren ge-

[1]) S. Günther, „Geschichte des math. Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525" (Berlin 1887), S. 331. Nach G. J. Kern („Die Grundzüge der linear-perspektivischen Darstellung in der Kunst der Gebrüder van Eyck und ihrer Schule", I. Bd., Leipzig 1904) hat Johann van Eyck die Existenz des Fluchtpunktes gekannt und denselben verwertet; aber diese Behauptung wurde von K. Döhlemann im Aufsatze Die Perspektive der Brüder van Eyck (Zeitschrift f. Math. und Phys., III. Bd., 1905, S. 419—425) als unbegründet bewiesen. [2]) Vgl. G. Loria, „Per L. B. Alberti" (Bibl. math. 1895, p. 9—12).

druckt wurde[1]). Um über ein solches Thema zu schreiben, war der berühmte Maler vortrefflich vorbereitet, da er als Jüngling die Geometrie gründlich studiert hatte; in der Tat sagt Vasari von ihm, daß er „raro nelle difficoltà dei corpi regolari e nell' aritmetica e nella geometria" war, und daß „i libri meritamente gli hanno acquistato nome del miglior geometra che fusse nei tempi suoi". In seinem Lehrbuche über die „Perspective" hat Piero den Albertischen Begriff von der „Perspektive eines Körpers" benutzt und weiterentwickelt; ferner hat er zuerst Verfahren angewandt, welche ihre volle Entwicklung viel später in der darstellenden Geometrie fanden (z. B. die Anwendung der Drehung der objektiven Figuren, um die Perspektive leichter zeichnen zu können) oder welche gewöhnlich unter dem Namen anderer gehen; endlich war er der erste, welcher, um die Perspektive eines Körpers zu erhalten, die entsprechenden Projektionen einer Reihe ebener Schnitte derselben betrachtete, und, bevor Leibniz den Begriff der Einhüllenden einer Kurvenschar noch im allgemeinen festgestellt hatte, sehr klar sah, daß alle die Kurven jener Reihe den Umriß des Körpers berühren.[2])

Als dritten in dieser Gruppe von Italienern, welche zugleich Maler und Geometer waren, finden wir Lionardo da Vinci, den Verfasser eines hinterlassenen „Trattato della pittura" (Rom 1651), welches trotz des Titels kein organisches Werk, sondern nur eine Sammlung vereinzelter Bemerkungen ist, wo mehrmals ein „Trattato di prospettiva" zitiert wird, welcher aber verloren gegangen zu sein scheint. Unter diesen Bemerkungen werden wir nur die folgende anführen: „Die Linearperspektive bezieht sich auf die Linien, um das Maß zu untersuchen, wie viel die zweite Sache kleiner sei als die erste, und die dritte als die andere, und also von Grad zu Grad bis zu der letzten Weite der sichtbaren Objekte. Ich habe durch die Erfahrung gefunden, daß wenn das andere Objekt ebensoweit von dem ersten entfernt ist, als das erste vom Auge absteht, gleichwohl das andere um die Hälfte kleiner als das erste sein wird, ob sie schon einerlei Größe unter sich haben. Und wenn das dritte

[1]) „Petrus Pictor Burgensis, De prospectiva pingendi, herausg. von Dr. Winterberg" (Straßburg 1899); vgl. eine Mitteilung von G. Pittarelli in „Atti del congresso internazionale di scienze storiche, vol. XII, Rom 1904, p. 251 bis 266; Libri hat in der Note III des IV. Bd. seiner „Histoire" eine klare Übersicht über die in Rede stehende Arbeit gegeben. [2]) Nach Ignazio Danti (vgl. das Vorwort seiner Auflage von Barozzi, von der wir später sprechen werden) und G. Pittarelli ist Piero auch der Verfasser des Buches „Über die regelmäßigen Polyeder", welches Luca Paciuolo als sein Eigentum in seine „Divina proportione" eingeschoben hat (vgl. II^2, S. 341).

Objekt in gleicher Weise von dem anderen entfernt ist, wird es um $\frac{2}{3}$ kleiner sein, und also von Grad zu Grad durch gleichen Abstand allezeit eine proportionale Verminderung statthaben." Ist es nun nicht überraschend, daß man diese empirische Bemerkung durch einfache geometrische Überlegungen als vollkommen richtig beweisen kann?[1])

Von einem letzten berühmten Maler müssen wir noch sprechen: von Albrecht Dürer, dessen geometrische Werke schon gründlich studiert wurden (II², S. 459—468)[2]). Darin findet man viele die Perspektive betreffende Stellen (sie wurden wahrscheinlich von Pietro dei Franceschi inspiriert) und die Beschreibung eines neuen und zwar des ältesten Apparates, um eine Perspektive mechanisch zu zeichnen. Ist das etwa hinreichend, um schließen zu können, daß Dürer „die erste darstellende Geometrie in deutscher Sprache geschrieben hat"?[3]). Oder ist es nötig und genügt es, um zu dieser Folgerung zu kommen, die zahlreichen deutschen Werke anzuführen[4]), welche von Dürers Werk inspiriert wurden und es zum Modell nahmen?

Aus den Händen der Künstler ist die Perspektive in die der Mathematiker übergegangen infolge einer der vornehmsten Arbeiten des Federico Commandino (II², S. 553)[5]). Es ist der Band des berühmten Kommentators, welcher die Überschrift trägt: „Ptolemaei Planisphaerium, Jordani Planisphaerium, Federici Commandini Urbinatis in Planisphaerium commentarius, in quo universa scenographices ratio quam brevissima traditur ac demonstrationibus confirmatur" (Venetiis 1558). Das Werk von Ptolemäus, um welches es sich hier handelt, enthält bekanntlich die Grundzüge der sogenannten „stereographischen Projektion"; das Buch von Jordanus Nemorarius behandelt dasselbe Thema ausführlicher. Der Kommentar Commandinos ist ein kurzer Traktat über die Linearperspektive, welcher zu dem Zweck geschrieben wurde, die Prinzipien festzustellen, welche der große griechische Astronom als Grundlagen seiner Projektionsmethode gewählt hat. Um diesen Zweck zu erreichen, setzt Commandino voraus, daß die betrachteten Figuren auf zwei zueinander orthogonale Ebenen bezogen werden (eine horizontale und eine verti-

[1]) Lambert, „Die freye Perspective", II. Aufl., II. Bd., S. 17. [2]) Vgl. auch Günther, a. a. O., S. 354—370. [3]) Gerhardt, „Geschichte der Mathematik in Deutschland" (München 1877), S. 25. [4]) Kästner, „Geschichte der Mathematik", II. Bd., Göttingen 1797, S. 9 ff. [5]) Man sehe auch: Tiraboschi, „Storia della letteratura italiana", Vol. VII, Venezia 1796, p. 479—481; Libri, „Histoire des sc. math. en Italie", t. III, p. 118.

kale), daß die Tafel zu beiden rechtwinklig sei und daß das Auge sich auf der Vertikalebene befinde; die Tafel wird auf die Vertikalebene umgelegt vermittels Drehung um ihre Vertikalachse. Unter Annahme solcher Voraussetzungen gelangte Commandino zu zwei sehr bemerkenswerten Konstruktionen der Perspektive eines beliebigen Punktes der Horizontalebene, welche er sodann anwendet, um die Perspektive der Kreise einer Kugel zu finden. Eine der erwähnten Konstruktionen war schon bei den Praktikern im Gebrauch; aber Commandino kannte sie sicher nicht, denn er scheint die früheren Werke über die Perspektive nicht studiert zu haben, weil er ihre innige Verbindung mit den ptolemäischen Untersuchungen nicht bemerkt hatte. Diese Arbeit des großen Kommentators schien und war in der Tat auch zu einseitig und wissenschaftlich; die Maler und die Architekten, welche dieselbe benutzen wollten, fanden sie unvollständig und zu schwer; daher hielt es ein gelehrter Prälat, Daniele Barbaro (1513—1570)[1]), für der Mühe wert, ein neues Lehrbuch über die Perspektive zu schreiben, welches zugleich dem Bedürfnisse der Praktiker und den Forderungen der Theoretiker genügte. Nachdem er sich daher mit Unterstützung eines gewissen Johann Zamberti mit jener Lehre genügend vertraut gemacht hatte, schrieb er ein Buch über: „La pratica della prospettiva; opera molto profittevole a pittori, scultori et architetti" (Venezia 1559). Es ist ein Werk, welches hält, was es in seinem Titel verspricht; daher verdiente es die freundliche Aufnahme, welche es wegen seines reichen Inhalts allgemein fand. Der Geschichtschreiber darf aber nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß Barbaro[2]), nicht nur vieles von Piero della Francesca sich aneignete, sondern auch versuchte, das ganze Werk desselben in Mißkredit zu bringen, um von dem Leser den Verdacht eines Plagiats möglichst fern zu halten.

Auf Daniele Barbaro folgt der Zeit nach ein berühmter Künstler: Jacopo Barozzi aus Vignola, als Gesetzgeber in der Architektur unter dem Namen „Vignola" allgemein bekannt (1507 bis 1573), welcher das Glück hatte, in einem sehr bedeutenden Mathematiker, Egnatio Danti[3]) (1537—1586), einen gewissenhaften Verleger und geistreichen Kommentator zu finden. Das in Rede stehende

[1]) Biographische Nachrichten über diesen Gelehrten findet man bei: Mazzucchelli, „Gli scrittori d'Italia", T. II, P. I, p. 247; Tiraboschi, a. a. O., p. 474. [2]) Vgl. das Vorwort zu dem Werke von Vignola-Danti, von dem wir sogleich sprechen werden, und Pittarelli in der o. a. Mitteilung, S. 262. [3]) Vgl. Libri, t. IV, p. 37; Tiraboschi, a. a. O., p. 456—459, wo auch über andere Mitglieder der Familie Danti, die sich mit den Wissenschaften beschäftigten, berichtet wird.

Werk[1]) wurde 1530 verfaßt, ging handschriftlich durch viele Hände und wurde vom Verfasser mehrmals durchgesehen und umgearbeitet; der Sohn Vignolas übergab nach dessen Tode die letzte Bearbeitung Danti zur Veröffentlichung. — Vignola setzt, den Gewohnheiten seiner Zeit folgend, immer voraus, daß die Tafel vertikal sei, und daß man eine Horizontalebene als Träger aller betrachteten Figuren habe; von jedem Punkt des Körpers nimmt er die Orthogonalprojektion auf dieser Ebene und die entsprechende Höhe als gegeben an; und um die Perspektive dieses Punktes zu finden, beginnt er mit der Bestimmung der Perspektive seiner Orthogonalprojektion. Die so entstehende Beziehung zwischen der Horizontalebene und der Tafel ist[2]) eine Homologie, die vom Verfasser auf zweierlei Weise konstruiert wird. Mindestens eine von diesen Konstruktionen ist neu. Die Erläuterungen Dantis sind sehr bemerkenswert, nicht nur wegen ihres streng euklidischen Stils und wegen der wertvollen geschichtlichen Nachrichten, welche sie über die Untersuchungen der älteren Perspektiveforscher enthalten, sondern auch weil sie den Beweis von der in einigen besonderen Fällen vorhandenen Existenz der sogenannten „punti di concorso“ enthalten, die ein wenig später ihren siegreichen Einzug in unsere Wissenschaft halten sollten. Diese vortrefflichen Kommentare und der große Wert des Originals selbst verschafften der Arbeit einen ungeheuren Erfolg; sie wurde mehrmals neu aufgelegt, ferner ins Lateinische, Französische, Englische, Deutsche und Russische übersetzt; man sagt sogar, daß Peter der Große es nicht verschmäht habe, dieselbe zu kommentieren![3])

Auch Giambattista Benedetti (II^2, S. 565)[4]) muß unter den Mathematikern aufgeführt werden, welche sich mit der Perspektive beschäftigten; denn der II. Teil seines Werkes „Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber“ (Taurini 1585) ist betitelt „De rationibus operationum perspectivae“ und scheint den Zweck zu haben, einige bei den Malern übliche Verfahren zu berichtigen. Schon vor Benedetti hatte zwar Danti bereits die Notwendigkeit erkannt, derartige Berichtigungen zu geben; aber der Weg, welchen Benedetti einschlägt, um zum Ziele zu gelangen, ist zum Teil neu. Es möge noch bemerkt werden, daß der Verfasser für jedes Problem eine „figura corporea“ und eine „figura superficialis“

[1]) „Le due regole della prospettiva pratica di M. Jacopo Barozzi da Vignola, con i commentari di Egnatio Danti“, Roma, I. ed. 1583; II. ed. 1644. [2]) Eine Bemerkung von Chasles („Aperçu historique“, II. Aufl., 1875, p. 348). [3]) Tiraboschi, „Biblioteca modenese“, T. I (Modena 1781), p. 1761. Tramontini, „Elogio di G. Barozzi“ (Modena 1825). [4]) Man sehe auch Libri, T. III, p. 121 und Note XXV.

(d. h. eine schematische und eine wirkliche Figur) gibt, ein System, welches von dem hochbedeutenden Gelehrten Guido Ubaldo del Monte (1545—1607) (vgl. II^2, S. 568)[1]), zu dem wir uns jetzt wenden, beständig verfolgt und ausgeführt wird.

Die hohe Bedeutung der Arbeiten del Montes über die Mechanik wurde von Lagrange und den nachfolgenden Historikern vollkommen erkannt (II^2, S. 568 ff.). Einen nicht minder hervorragenden Platz verdient er in der Geschichte der Geometrie als Verfasser der „Perspectivae libri sex“ (Pisauri 1600), eines Werkes, das nicht nur als einer der glänzendsten Edelsteine der italienischen Literatur, sondern auch als eines der höchsten Produkte des menschlichen Geistes überhaupt betrachtet werden muß. Alle diejenigen, welche es genauer kennen lernten, haben es sehr bewundert. Und wenn die Verehrerzahl nicht sehr groß ist, so beruht das darauf, daß viele Mathematiker es mit Unrecht für ein Werk hielten, das nur den Künstlern gewidmet sei, und diese hingegen zum größten Teil ein im reinsten euklidischen Stil geschriebenes Werk schwierig fanden. Um die außerordentliche Wichtigkeit der „Perspective“ del Montes zu beweisen, genüge es, darauf hinzuweisen, daß im I. Buch der Satz in seiner Allgemeinheit bewiesen ist, daß die Zentralprojektion eines Systems paralleler Geraden im allgemeinen ein Büschel ist, eine Tatsache, welche man zwar schon vorher empirisch festgestellt hatte, dessen rationelle Erklärung aber nicht einmal versucht worden war[2]). Daß der Verfasser sich der Bedeutung dieser Entdeckung wohl bewußt war, erhellt aus dem Titelblatt seines Bandes, wo man die nebenstehende Fig. 62 sieht mit dem Motto: „citra dolum fallimur“. Del Monte verdanken wir auch die Benennung „punctum concursus“ für den Mittelpunkt des Büschels, welches die Projektion eines Systems paralleler Geraden ist, eine Bezeichnung, welche die nachfolgenden Schriftsteller einstimmig annahmen. — Im II. Buch wird die Theorie

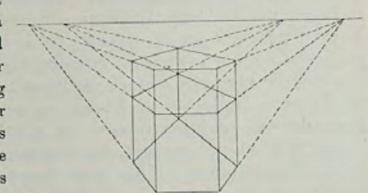

Fig. 62.

[1]) Vgl. Tiraboschi, a. a. O., p. 475—478. [2]) Als eine nicht uninteressante Kuriosität möge das Folgende erwähnt werden (vgl. S. 544): In Tinseaus Abhandlung „Solutions de quelques problèmes rélatifs à la théorie des surfaces courbes

von den Konkurspunkten auf die Konstruktion der Perspektive von Punkten der Horizontalebene angewandt (die Tafel immer vertikal vorausgesetzt); der Verfasser setzt zuerst die Konstruktion mittels einer Raumfigur auseinander, stürzt dann die Tafel auf die Horizontalebene um und gelangt so zu einer vollständig ausführbaren Konstruktion. Diese wird dann in nicht weniger als 23 verschiedenen Formen dargestellt, und der Verfasser fügt noch hinzu, daß andere nur der Kürze wegen nicht mitgeteilt wurden. Alle sind bemerkenswert, schon allein deswegen, weil der moderne Leser darin viele Begriffe, welche der Lehre der Homologie angehören, unbewußt angewandt finden wird. Ohne uns bei allen Anwendungen aufhalten zu wollen, welche der Verfasser von diesen Konstruktionen macht, bemerken wir nur, daß del Monte auch einige besondere Fälle der umgekehrten Aufgabe der Perspektive betrachtet hat, wie z. B. die folgenden: „einen Punkt zu bestimmen, dessen Perspektive man kennt“; „die Lage der Augen zu finden, wenn die Perspektive einer gegebenen Geraden bekannt ist“. — Der Zweck des III. Buches ist die Konstruktion der Perspektive der Höhen (über der Horizontalebene) der Raumfiguren zu zeichnen; der Verfasser betrachtet zuerst die Projektionen von Figuren, die in Ebenen liegen, welche zur Horizontalebene parallel sind, dann diejenigen, welche beliebigen Ebenen angehören, macht sodann viele Anwendungen davon und betrachtet schließlich die Perspektive auf nicht ebene Bildtafeln. Aus dem Inhalt des III. Buches ersieht man, daß es, um die Perspektive einer beliebigen Figur zu finden, notwendig ist, ihre Orthogonalprojektion auf die Horizontalebene („ac trito vocabulo plantam nos Itali appellamus“) zu kennen und von jedem Punkt die entsprechende Höhe. Und nun ist der Hauptzweck des IV. Buches des in Rede stehenden Werkes der, beides für eine geometrisch definierte Figur zu bestimmen. Was der Verfasser lehrt, gibt sogleich die Darstellung jener Figuren durch die Methode der kotierten Ebene (wir gebrauchen diese moderne Ausdrucksweise, um klarer zu sein) und mit wenigen anderen Bemerkungen befähigt er uns auch, die Vertikalprojektion derselben zu finden. Bemerkenswert sind die Anwendungen auf die regelmäßigen Polyeder und den Kreis. — Im V. Buch wird ausführlich bewiesen,

---

et des courbes à double courbure“ (Mém. prés. par divers savants, T. IX, 1780, p. 593—642) findet man einen sehr einfachen Beweis des Satzes: „die Projektionen mehrerer paralleler Geraden gehen alle durch den Schnittpunkt der Tafel mit dem Strahle, welchen man vom Auge parallel zu jenen Geraden ziehen kann“, ein Prinzip, sagt Tinseau, „dont les auteurs de perspective ont jusqu'ici cherché la preuve, les uns dans la métaphysique, les autres dans les considérations sur l'infini“. Tinseau kannte gewiß nicht das Werk del Montes!

wie man das Gesagte auf die Zeichnung der Schatten anwenden kann (die Lichtquelle im Endlichen vorausgesetzt). — Das letzte Buch behandelt ein Gebiet, welches ein großes praktisches Interesse besitzt und daher die Aufmerksamkeit der Gelehrten von den Griechen bis Daniele Barbaro auf sich gezogen hatte: wir meinen die Zeichnung der Theaterbühnen. Auch für die zu diesem Zweck geeigneten Verfahren gelingt es del Monte, eine wissenschaftliche Grundlage zu geben. Daher behält seine „Perspective“ bis zum Ende den Wert, welchen sie bereits auf den ersten Seiten hatte, und welcher ihn würdig machen würde, unter den Klassikern der exakten Wissenschaften zu erscheinen.

Wir müßten jetzt über das Werk „Opticorum Libri VI“ berichten, das von Fr. d'Aiguillon in Antwerpen im Jahre 1613 veröffentlicht wurde; aber was über dieses vorzügliche Werk bereits gesagt wurde (II^2, S. 695), ist wohl hinreichend, um sich eine klare Vorstellung von seinem Inhalt und Zweck bilden zu können.

Ungefähr um dieselbe Zeit beschäftigte sich mit der Perspektive ein anderer und zwar sehr berühmter belgischer Geometer, Simon Stevin (II^2, S. 572). Sein „Traité d'optique“ enthält seine diesbezüglichen Entdeckungen, über welche Chasles urteilt[1]): „... mais nous nous étonnons que l'on passe sous silence Stevin qui ... avait aussi innové dans cette matière, qu'il avait traité en géomètre profond, et peut-être plus complètement qu'aucun autre, sous le rapport théorique. Ainsi nous ne trouvons que dans cet auteur la solution géométrique de cette question, qui est l'inverse de la perspective: étant données, dans un plan et dans une position quelconque l'une par rapport à l'autre, deux figures qui sont la perspective l'une de l'autre, on demande de les placer dans l'espace de manière que la perspective ait lieu, et déterminer la position de l'œuil. Stevin, il est vrai, ne résout que quelques cas particuliers de cette question, dont le plus difficile est celui où l'une des figures est un quadrilatère et la seconde un parallélogramme ...“ Chasles hätte auch hinzufügen können, daß Stevin den folgenden Fundamentalsatz der Methode der Zentralprojektion entdeckt und bewiesen hat: „Wenn sich die Bildtafel um ihre Schnittlinie mit der Horizontallinie dreht, und wenn sich zugleich der Beobachter um seine Füße dreht, und zwar so, daß er beständig parallel zur Tafel bleibt, so wird die Perspektive zwischen Horizontal- und Bildebene nicht gestört; sie bleibt auch dieselbe, wenn die genannten Ebenen zusammenfallen“[2]). Durch einige ge-

---

[1]) „Aperçu historique“, p. 347. [2]) „Oeuvres de Stévin“; éd. Girard, p. 533. Vgl. G. Loria, „Vorlesungen über darstellende Geometrie“, I. Bd., Leipzig 1907, S. 131.

schickt gewählte Anwendungen beweist Stevin die Nützlichkeit dieses schönen Satzes.

Girard Desargues, welcher eine so hervorragende Stellung in der Geschichte der theoretischen Geometrie einnimmt (II², S. 674—678), behauptet diese Stellung nicht minder in derjenigen der verschiedenen Zweige der Ingenieurwissenschaft. Ja vielmehr könnte man behaupten, daß die theoretischen Arbeiten Desargues' nichts anderes als Nebenprodukte seiner Bemühungen seien, um einigen praktischen bei Architekten und Malern üblichen Verfahren eine wissenschaftliche Grundlage zu geben. Eine solche Hypothese erscheint wohl gerechtfertigt, wenn man bedenkt, daß er im reifen Alter (Oktober 1647) erklärt hat: „je n'eus jamais de goust à l'estude ou recherche, n'y de la physique, n'y de la géometrie, sinon en tant qu'elles peuvent servir à l'esprit, d'un moyen d'arriver à quelques sorte de connaissance des causes prochaines des effets de choses qui se puissent reduire en acte effectif, au bien et commodité de la vie qui soit en usage pour l'entretien et conservation de la santé"[1]). Die älteste gedruckte Arbeit von Desargues ist eine „Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement ou en dévis, avec leurs proportions, mésures, éloignements sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage" (Lyon 1636; Oeuvres, I, p. 53—84). Sie fängt mit einem Verzeichnis neuer Namen an, um die Grundelemente der Lehre der Perspektive zu bezeichnen, Namen, welche von den Zeitgenossen des Desargues als überflüssig, schlecht gewählt und daher tadelnswert angesehen wurden[2]). Wenn diese in dieser Beziehung vielleicht nicht ganz unrecht haben, so haben sie es dagegen gewiß, als ihre Pfeile sich gegen die von ihm ersonnenen Methoden richteten, Methoden, deren Quintessenz die folgende ist: Eine beliebige Figur ist vollkommen bestimmt in bezug auf ein rechtwinkliges Trieder, dessen Kanten OX, OY, OZ seien, falls von jedem ihrer Punkte die Entfernungen von den Ebenen YOZ, ZOX, XOY gegeben sind. Ein Ähnliches gilt für eine ebene Figur. In beiden Fällen kennt man von den betrachteten Punkten die Cartesischen Koordinaten; umgekehrt kann man, wenn man von einem Raumpunkte P die Cartesischen Koordinaten x, y, z kennt, die Lage des Punktes wie folgt finden: Man trage auf OX die Strecke $OM = x$ ab, man ziehe von M die Strecke $MN = y$ parallel zu OY, endlich die Strecke $NP = z$ parallel zu OZ. Um nun die Perspektive von P zu finden, schlägt

[1]) „Oeuvres de Desargues"; éd. Poudra, Paris 1864, I. Bd., p. 487.

[2]) Vgl. die Urteile von Beaugrand und Curabelle in den „Oeuvres de Desargues". II Bd., p. 355 und 388.

Desargues vor, diese Konstruktion vom Raume auf die Bildtafel zu übertragen (d. h. „de pratiquer la perspective conformement au géométral"). Der Leser wird hier gewiß den Grundgedanken der neueren Axonometrie klar ausgedrückt finden. In der Entwicklung desselben setzt Desargues voraus, daß die gegebene Horizontalebene als xy-Ebene angenommen werde, und deren Schnittlinie mit der Tafel als x-Achse sowohl auf der Tafel, als auch im Raume. Die zu OX parallelen Geraden haben als Projektionen eben andere zu OX parallele Geraden, während die zu OY oder OZ parallelen zwei Büschel nicht paralleler Geraden geben. Zwei Skalen äquidistanter Punkte auf OY und OZ („échelles de petits pieds") geben auf der Tafel zwei nicht-reguläre, aber konstruierbare Punktreihen. Mittels dieser und der obigen Büschel kann man, wie leicht ersichtlich ist, die Perspektive einer beliebigen Figur zeichnen.

Nicht nur ihre Neuheit ließ die Methode des Desargues den Zeitgenossen so schwierig erscheinen, sondern auch der Umstand, daß er sich damit begnügt hatte, seine Idee nur anzudeuten und auf ein besonderes Beispiel allein angewandt auseinanderzusetzen. Man muß noch hinzufügen, daß er keinen Gebrauch von den Konkurspunkten gemacht hat, deren Theorie del Monte schon festgestellt hatte; aber in einem den „contemplatifs" gewidmeten Anhang lehrte er die Transformation durch Projektion eines Systems paralleler Geraden in ein eigentliches Büschel, wie auch die (übrigens von Stevin schon beobachtete) umgekehrte Transformation, die stattfindet aus einem Büschel, dessen Mittelpunkt auf einer Parallelen liegt, die vom Auge auf die Tafel gezogen wird. In dieser Gruppe von Theoremen hat Desargues „une fourmilière de grandes propositions" erkannt. Zum Schlusse hat er versichert, in der Lage zu sein, das folgende wichtige Problem aufzulösen: „In der Ebene eines Kegelschnitts, dessen Perspektive man sucht, die Geraden zu bestimmen, welche in die Achsen dieser letzteren sich projizieren".

Im Jahre 1640 veröffentlichte Desargues ein anderes Werkchen mit dem Titel: „Brouillon-projet d'exemple d'une manière universelle touchant la practique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'architecture; et de l'eclaircissement d'une manière de reduire au petit pied en perspective comme en géometral et de tracer tous quadrans plats d'heures égales au soleil" (Oeuvres I, p. 303 ff.). In dem Teil, welcher in diesem Augenblick allein uns interessiert, hat sich Desargues die Aufgabe gestellt, die Augen sowohl denjenigen zu öffnen, welche seinen Methoden jeden Wert ableugneten, da sie dieselben nicht verstanden hatten, als auch denjenigen, welche ihnen jede Originalität absprachen. Wenn man auch zugeben muß, daß die zweite Veröffentlichung Desargues' weniger bündig geschrieben ist, als seine erste, so zeichnet sie sich doch nicht durch allzu große Klarheit aus, so daß man bezweifeln kann, ob er den ersten Zweck erreicht hat; es muß indessen bemerkt werden, daß er mehrere Personen nennt, welche imstande waren, seine Methoden anzuwenden. Unter diesen finden wir den „graveur" Abraham Bosse (1611—1678), welcher im Jahre 1648 ein Lehrbuch der Perspektive herausgab[1]), in dem man eine wertvolle Note findet (vgl. Oeuvres de Desargues I, p. 303—358). Sie bildet eine wichtige Ergänzung zur ersten Broschüre Desargues', da man in derselben einige wichtige Hilfssätze zur Perspektive und Vorschriften für den Gebrauch des „optischen oder Proportionszirkels" beim perspektivischen Zeichnen findet. Wir haben die Pflicht, zu bemerken, daß die Priorität der Anwendung desselben Desargues in einem „Abrégé ou Racourci de la perspective par l'imitation" (Paris 1643) von Vaulezard abgestritten wurde, ein Werk, das in seiner sehr langen Überschrift unsern Geometer als „celui qui se vante d'avoir l'unique secret et les manières de la perspective"[2]) bezeichnet.

A. Bosse, von dem wir soeben gesprochen haben, ist derjenige, welcher mehr als alle anderen sich bemüht hat, den Ideen des Desargues zum Siege zu verhelfen. Unter seinen zu diesem Zweck geschriebenen Werken führen wir noch zwei andere an: das Buch „Moyen universel de pratiquer la perspective sur les tableaux ou surfaces irrégulières" (Paris 1653; vgl. Oeuvres de Desargues, II, p. 16—33), auch eine Frucht des Desarguesschen Unterrichts, dessen Thema schon von del Monte gestreift worden war[3]), und den „Traité des pratiques géométrale et perspective enseignés dans l'Académie royale de peinture et sculpture" (Paris 1656; Oeuvres de Desargues, II, p. 35—47), welcher zwar nach Desargues' Tod erschienen ist, aber dessen Methoden zur Konstruktion von Basreliefs auseinandersetzt, Methoden, welche Desargues die Würde des Begründers der Relief-Perspektive sichern. Es mag zuletzt noch bemerkt werden, daß mit den Untersuchungen des

[1]) „Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective par petits pieds comme le geometral, ensemble les places et les proportions, touches, teintes et couleurs", Paris 1648.

[2]) Poudra, „Histoire de la perspective", p. 310. Aus dem hier gegebenen Bericht erhellt, daß das „Abrégé" eine wissenschaftlich geschriebene Arbeit ist, welche die erste Andeutung des Problems gibt, eine Figur zu bestimmen, von der mehrere Perspektiven gegeben sind (Hauptaufgabe der neueren theoretischen Photogrammetrie).

[3]) Darin befindet sich der Umriß einer Ringfläche als die Einhüllende der Projektionen der Kreise der Fläche („Oeuvres de Desargues", II. Bd., p. 22).

Desargues über die Perspektive im allgemeinen wahrscheinlich die geheimnisvollen und jetzt verlorenen „Leçons de ténèbres" in engem Zusammenhang stehen, wo die Kegelschnitte als von einem erleuchteten Kreise geworfene Schatten betrachtet waren, das Licht im Endlichen vorausgesetzt, um keine Kurve auszuschließen.

Eine andere Schrift, in welcher die Methoden des Desargues erklärt und entwickelt sind, ist die „Perspective adressée aux théoriciens", die Poudra am Ende der Bosseschen „Perspective" eingeschaltet fand (Oeuvres de Desargues, I, p. 439—462); sie hat den Zweck, die Angriffe zurückzuweisen, welche gegen Desargues in dem Werke „La perspective spéculative et théorique. De l'invention du feu Sieur Alleaume" (Paris 1634) gerichtet worden waren.[1])

Einen ganz anderen Standpunkt Desargues gegenüber, dem von Bosse ganz entgegengesetzt, nahm Curabelle ein, dessen heftige und unbegründete Kritiken wahrscheinlich einer verdienten Vergessenheit anheimgefallen wären, wenn Poudra nicht in seiner Ausgabe der Werke des Desargues die Erinnerung an dieselben wieder aufgefrischt hätte. An diese gewissenhafte Publikation verweisen wir diejenigen unserer Leser, welche die Einzelheiten dieser sonderbaren Streitigkeiten kennen zu lernen wünschen, in deren Verlauf unter anderem auch eine Herausforderung erfolgte, nach der jeder der Widersacher dem anderen 100 Pistolen versprach für den Fall, daß es ihm gelänge, ihn von seinem Unrecht zu überzeugen. Um Curabelle jedoch teilweise zu entschuldigen, wollen wir auch bemerken, daß im Jahre 1642 ein Buch von Pater du Breuil ans Licht kam[2]), in dem die Ideen Desargues' in vollkommener Entstellung dargestellt sind von einem, der sie nicht verstanden hatte. Die von du Breuil begangenen Irrtümer wurden von Desargues selbst vor der Öffentlichkeit mit großer Heftigkeit zurückgewiesen; so entstand ein hartnäckiger Streit, welcher ungefähr 40 Jahre dauerte, und infolgedessen Bosse, der treue Beschützer des Desargues, seinen Lehrstuhl an der Akademie der schönen Künste verlassen mußte.

Als der Kampf immer heftiger wurde, setzte Desargues, um ihm ein Ende zu machen, einen Preis von 1000 Franken für denjenigen aus, welcher neue Verfahren zur Ausführung von Perspek-

[1]) Aus dem Berichte, welchen Poudra („Histoire", p. 288—309) über dieses Werk gegeben hat, erhellt, daß darin eine Auflösung des Problems enthalten ist, die Perspektive einer Figur zu finden, deren Seiten und Ecken gegeben sind.

[2]) „La perspective pratique nécessaire à tous ... par un Parisien, religieux de la Compagnie de Jésus"; vgl. Poudra, a. a. O., p. 271—287, wo auch über die folgenden verbesserten Auflagen berichtet wird und darin enthaltene Andeutungen über die Militär- oder Kavalierperspektive angegeben sind (s. S. 283).

tiven erfinden würde, die denjenigen des Desargues vorzuziehen wären; diese Zusage ist in einem an Bosse gerichteten Briefe enthalten, welcher das Datum des 25. Juli 1657 trägt und der Pariser Akademie vier Tage später mitgeteilt wurde und so weite Verbreitung in der Öffentlichkeit fand. Und nun schrieb „pour prétendre au prix que M. Desargues, homme savant et généreux, a proposé", Pater Charles Bourgoing die „Perspective affranchie" (Paris 1661), in welcher viele bemerkenswerte, auf die Anwendung der Konkurspunkte gegründete Konstruktionen ausgeführt werden. Wenn man bedenkt, daß Desargues die Hilfe der Konkurspunkte abgelehnt hatte, so muß man zugeben, daß der Verfasser in der Wahl seines Arbeitsgebietes äußerst geschickt war. Er versucht die Überlegenheit seiner eigenen Methoden über diejenigen von Desargues in sechs Punkten zu beweisen und nimmt zufrieden mit seiner Ausführung von seinem Buche mit den folgenden Versen Abschied:

„Parcourez l'univers banissant toute crainte,
Le monde ni l'enfer n'auront sur vous atteinte,
Car les plus grands efforts de la témérité
Mettent bas les armes devant la verité."

Das 17. Jahrhundert, welchem die Wissenschaft von der Perspektive Forscher ersten Ranges, wie del Monte, Stevin und Desargues, verdankt, hat auch noch eine große Anzahl von sonstigen Bearbeitungen und Einzelbeiträgen hervorgebracht. Alle zu nennen ist unmöglich und wäre auch zwecklos; die wichtigsten aber verdienen wenigstens erwähnt zu werden.

So enthält der V. Band des „Cours mathématique" von Peter Hérigone eine kurze Auseinandersetzung der uns beschäftigenden Lehre (Paris 1654, p. 190—217), wo auch die originelle Symbolik angewandt wird, deren Schöpfer er ist (vgl. Bd. II², S. 656).

Vor Hérigone (1633 oder etwa 1614) veröffentlichte zu Amsterdam Samuel Marolais die lateinisch geschriebenen „Prinzipien der Optik und der Perspektive", welche bemerkenswert sind, weil sie den ersten Versuch darstellen, die Aufgaben der Perspektive arithmetisch zu lösen. Gerade unter diesem Gesichtspunkt erinnert diese Arbeit an eine spätere mit der Überschrift „Andreae Alberti duo libri, prior de perspectiva cum et praeter arithmeticam inventa, posterior de umbra ad eam pertinente" (Norimbergae 1671), in welcher ausgeführt wird, wie man die Koordinaten des Bildes eines Punktes, dessen Koordinaten bekannt sind, bestimmen kann.

Mit Rücksicht auf den großen Ruhm, den ihr Verfasser genießt, wollen wir weiter die Arbeit des Pater Nicéron (1613—1646) „La perspective curieuse" (Paris 1671) anführen, eine hinterlassene und

von unbekannter Hand stammende Bearbeitung des „Thaumaturgus opticus seu admiranda", ein Werk, dessen Druck am 2. August 1646 vollendet wurde; sie ist denjenigen zu empfehlen, die sich für die von der Zentralprojektion verursachten Verzerrungen interessieren. Die verzerrende Gewalt jener Operation scheint von Andreas Tacquet (1612—1660) wahrgenommen und überschätzt worden zu sein, da man auf dem Titelblatt der 2. Auflage (1707) des prächtigen Bandes seiner „Opera mathematica" einen durch die Sonne erleuchteten rechtwinkligen Rahmen sieht, welcher als Schatten einen Kreis wirft, und diese sonderbare Figur „mutat quadrata rotundi" als Motto trägt. Die Figur selbst dient als symbolischer Hinweis auf das II. Buch („Syllabus propositionum opticae") der „Opera", wo die Grundbegriffe der Perspektive bewiesen werden, um sie dann auf die Astronomie anzuwenden.

Zum Schluß dieser flüchtigen Musterung der Beiträge, welche das 17. Jahrhundert zur Perspektive gegeben hat, mag zweierlei bemerkt werden:

Erstens daß das großartige Werk von Guarini (vgl. Vorl., III², S. 14)[1]) nicht nur in seinem XXXII. Abschnitt ein Kapitel unserer heutigen darstellenden Geometrie enthält, welches, wie Chasles[2]) hervorhob, „traité de la projection sur des plans des lignes qui proviennent de l'intersection de la sphère, du cône et du cylindre entre eux et du développement, sur un plan, de ces courbes à double courbure", sondern daß auch sein XVI. Abschnitt zu derselben Lehre gehört. Dieser Abschnitt behandelt nämlich unter dem Titel De projecturis die früheren Arbeiten von Vitruv und Aiguillon, die Orthogonalprojektion auf eine Ebene und die stereographische Projektion einer beliebigen Figur. Der Vollständigkeit wegen soll auch gesagt werden, daß das in Rede stehende Werk kein Kommentar zu den Elementen Euklids ist, da es nicht nur von den klassischen Theorien der Geometrie, welche man bei Euklid, Archimed und Pappus findet, handelt, sondern auch die modernen, auf den Gebrauch der Trigonometrie und der Logarithmen gegründeten arithmetischen Methoden, um die geometrischen Probleme aufzulösen, um-

[1]) Sein vollständiger Titel ist der folgende: „Euclides adauctus et methodicus mathematicaque universalis Car. Em. II dicata, quae ne dum propositionum dependentiam, sed et rerum ordinem observat. Et complectitur ea omnia, quae de quantitatae tum discreta, tum continua abstracta speculari queunt. Resectis superfluis demonstrationibus, et requisitis omnibus profuse coadunatis. Singulis quoque Tractatus novis propositionibus adaucti sunt, et aliqui etiam ex integro adornati. Omnesque tum figuris, tum verbis clare, dilucideque propositi." Augustae Taurinorum, MDCLXXI. [2]) „Aperçu hist.", Note XVII.

faßt; daher findet man am Schluß desselben eine Tafel von den Sinussen und Tangenten.

Unsere zweite Schlußbemerkung betrifft das Werk von Milliet-Dechales, von dem schon zweimal gesprochen wurde (III², S. 4—6 und S. 15—18), welches sechs Bücher über die Perspektive enthält. Unter den dort bewiesenen Sätzen findet man auch den folgenden bemerkenswerten, oft zu Unrecht dem Lambert zugeschriebenen Lehrsatz: „Zwei parallele Geraden AC, BD werden von einer Transversale AB geschnitten. Durch einen Punkt C einer dieser Geraden zieht man die Geraden CD, CI, ... bis sie die andere Gerade schneiden. Man bestimmt dann ihre Schnittpunkte F, E, ... mit der Transversalen AB. Wenn man nun die beiden gegebenen Parallelen um die Punkte A, B rotieren läßt, so daß sie beständig parallel bleiben und den Punkt K, der dem Punkt C entspricht, mit den Punkten D, I, ..., welche den Punkten G, H, ... entsprechen, durch Gerade verbindet, so werden die Geraden KG, KH, ... noch durch die Punkte F, E, ... gehen.“ Es ist unmöglich, alle Anwendungen aufzuzählen, welche der Verfasser von diesem Satz macht; aber wir können nicht umhin, einige der wichtigen Probleme, welche er löst, wenigstens zu erwähnen; z. B. die Bestimmung des Fluchtpunktes aller Geraden auf der Tafel, welche rechtwinklig auf einer anderen Geraden dieser Tafel stehen, die Aufsuchung der Geraden, welche zwei untereinander rechtwinklige Gerade rechtwinklig schneidet, usw.

Die goldene Periode der theoretischen Perspektive.

So mannigfaltig und wichtig die Beiträge sind, welche das 17. Jahrhundert zur Perspektive geliefert hat, so sind nicht weniger bedeutend diejenigen, welche wir dem nächsten verdanken, in dessen Verlaufe diese Wissenschaft eine Höhe erreichte, über die wir heute noch nicht hinausgekommen sind. Der erste bedeutende Gelehrte, dem wir begegnen[1]), ist Wilhelm Jacob s'Gravesande, geboren am 27. September 1688 und als Leydener Universitätsprofessor am 28. Februar 1742 gestorben, der als Herausgeber der Werke von Huygens und Newton unseren Lesern schon bekannt ist (III²,

[1]) Wir haben im Text Ozanams (vgl. III², S. 102 und 270) keine Erwähnung getan, weil seine „Perspective théorique et pratique“ (Paris 1711) nichts Neues, aber viel Falsches enthält. Zu bemerken ist ferner, daß in seinen wohlbekannten „Récréations mathématiques et physiques“ (III. éd., Paris 1700) einige „Problèmes d'optique“ enthalten sind, welche unsere Wissenschaft betreffen.

S. 278 und 394). Die Arbeit, mit der er seine Laufbahn als Schriftsteller begann, ist eben diejenige, welche ihm einen Ehrenplatz in der Geschichte der Perspektive sichert; es ist der „Essai de perspective“ (La Haye 1711), in welchem Johann Bernoulli sofort „plusieurs règles fort ingénieuses et très-commodes pour la pratique, qu'on ne trouve pas ailleurs“[1]) entdeckte. Das I. Kapitel dieses Werkes enthält zuerst eine Abhandlung, in der er die Nützlichkeit der Perspektive zu beweisen sucht und dann die Erklärungen der Grundbegriffe derselben gibt. Das II. Kapitel lehrt ihre wissenschaftlichen Grundlagen. Zuerst beweist der Verfasser, daß „eine zur Tafel parallele Gerade auch zu ihrer Projektion parallel ist“, und daß „eine Figur, deren Ebene parallel zur Tafel ist, ihrer Perspektive ähnlich ist“. Dann folgt die wichtige Bemerkung, daß, „wenn eine Gerade die Tafel in einem eigentlichen Punkte schneidet, ihre Perspektive die Verbindungslinie dieses Punktes mit demjenigen ist, in welchem die Tafel von der Parallele geschnitten wird, welche man vom Projektionszentrum jener Geraden ziehen kann“. So gelangt er zur Bestimmbarkeit einer beliebigen Geraden durch ihre Spur- und Fluchtpunkte (vgl. auch Kapitel III, 3. Probl.); daraus folgt ferner, daß die Lage der Perspektive einer Geraden keine Veränderung erleidet, wenn das Projektionszentrum auf einer zu jener parallelen Geraden sich bewegen läßt. Im III. Kapitel werden die so gefundenen Prinzipien auf die Konstruktion der Perspektive von Figuren angewandt, welche in einer Horizontalebene liegen, die Tafel ursprünglich vertikal vorausgesetzt, und dann durch Drehung auf die Horizontalebene umgelegt. Unter den sieben Verfahren, welche der Verfasser auseinandersetzt, wählen wir die folgenden als Beispiele. In Figur 63 ist V der Projektionsmittelpunkt und O der Fußpunkt der Senkrechten, welche von ihm auf die Tafel gefällt wird; P ist ein beliebiger Punkt der Horizontalebene und H ihre Orthogonalprojektion auf die Tafel. Dann ist augenscheinlich die Perspektive von P der Schnittpunkt P' der Geraden VP und OH; daher teilt er die Strecke OH in dem Verhältnis $VO : PH$. Aus dieser Beobachtung leitet s'Gravesande die erste seiner Methoden ab. Es sei (Fig. 64) t die „ligne de terre“ (Schnittlinie der Horizontal- und Bildebenen) und o die Parallele, welche zu ihr durch O gezogen ist; die Strecke OV sei zu o senkrecht und an Länge der

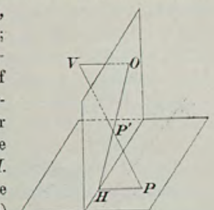

Fig. 63.

[1]) Poudra, „Histoire“, p. 484.

Strecke VO in Fig. 63 gleich; die Geraden OH und VP schneiden sich dann augenscheinlich im gesuchten Punkte P'. Beschreibt man nun die Kreise, welche P resp. V als Mittelpunkte und die Strecken PH und UO als Halbmesser haben, so wird P' gewiß einer ihrer Ähnlichkeitspunkte sein; daher (IV. Methode) kann man P' auch finden als Schnittpunkt zweier den beiden Kreisen gemeinschaftlichen Tangenten. Betrachtet man nun (VI. Methode) einen zweiten Punkt Q der Horizontalebene, um Q' zu finden, so kann man sich die Tatsache zunutze machen, daß die Geraden PQ und $P'Q'$ auf der Geraden t sich schneiden; man bestimme nämlich den Punkt $PQ.t$ und verbinde ihn mit P'; die so entstehende Verbindungslinie wird VQ in Q' schneiden. Betrachtet man nun, nachdem man P' und Q' bestimmt hat, einen dritten Punkt R der Horizontalebene, um R' zu finden, so kann man den Umstand benutzen, daß PQR und $P'Q'R'$ perspektivische Dreiecke sind, mit V als Zentrum und t als Perspektivachse. Um auch noch über die letzte der Methoden s'Gravesandes zu berichten, erwähnen wir, daß die von ihm angenommene Bildtafel rechtwinklig zur Horizontalebene steht und auf diese umgelegt wird; daher ist das, was s'Gravesande die Projektion einer Figur F nennt, eher das, was wir als Umlegung (F) derselben zu bezeichnen pflegen, während seine (der Horizontalebene angehörige) objektive Figur unseren Augen als eine Horizontalprojektion F' von F erscheint; und die von ihm gelöste Aufgabe kommt der Ableitung von F' aus (F) gleich: nun ist die von ihm vorgeschlagene Konstruktion von der-

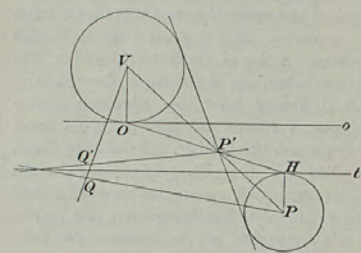

Fig. 64.

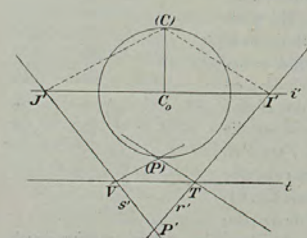

Fig. 65.

jenigen nicht verschieden, welche heutzutage in der Methode der Zentralprojektion angewandt wird, und an die wir durch die Fig. 65 unsere Leser erinnern wollen. Der Verfasser wendet seine Methoden auf die Bestimmung der Perspektive von Polygonen an und lehrt dann vier weitere Methoden zur Auffindung der Perspektive eines beliebigen Raumpunktes; unter diesen Methoden ist die erste besonders bemerkenswert, da sie von der Betrachtung der Orthogonalprojektion des Punktes unabhängig ist. Das IV. Kapitel beginnt mit der Voraussetzung, daß das Projektionszentrum von der Tafel sehr weit entfernt sei, so daß die Projektionsstrahlen als parallel angesehen werden können. Das V. Kapitel handelt von der Perspektive auf schiefe Ebenen, das folgende von derjenigen auf Ebenen, welche dem Horizont parallel sind, und das VII. von den Schatten. In dem folgenden kehrt der Verfasser zu den Problemen zurück, welche er im Anfange betrachtet hat, um zu zeigen, wie die dort angegebenen Auflösungen zu vereinfachen sind, und im letzten wendet er die erhaltenen Resultate auf die Gnomonik an, wobei er zu neuen und einfachen Konstruktionen gelangt. Nun, das Wenige, das wir hier über diese Jünglingsarbeit des hervorragenden niederländischen Gelehrten gesagt haben, scheint uns zu genügen, um zu beweisen, daß er dem Zweige der Mathematik, dessen Entwicklungsstadien wir hier verfolgen, eine außerordentliche Förderung gebracht hat.

Nicht minder wichtig und ersprießlich wurde die Wirkung, welche auf die Entwicklung der Perspektive ein großer Analyst ausübte, welcher auch eine große Rolle zur Zeit der Geburt der Infinitesimalrechnung spielte; wir meinen Brook Taylor (1685—1731; vgl. III^2, S. 378). — Im Jahre 1715 veröffentlichte er eine kurze Arbeit über die „Linear-Perspektive", welche vier Jahre später in verbesserter Auflage unter dem Titel „New principles of linear Perspective" erschien; aber der zu gedrängte Stil des Verfassers verhinderte, daß die Künstler, an die das Werk in erster Linie gerichtet war, es verstanden; daher veröffentlichte nach Taylors Tod John Colson (1680—1760) — eine andere der Personen in dem Drama, in dem Leibniz und Newton die Protagonisten waren! — eine neue mit Berichtigungen und Zusätzen versehene Auflage, deren vollständiger Titel lautet: „New principles of linear perspective: or the Art of Designing in a Plane, the representation of all sort of Objects, in a more and general simple Method, than has been hitherto done" (London 1749). Die Lektüre dieses kurzen, aber vortrefflichen Werkes bereitet dem modernen Leser eine der angenehmsten Überraschungen, da man, um es ganz kurz zu sagen, darin alle Grundbegriffe (nur etwa den „Distanzkreis" ausgenommen) und alle Methoden der Zentralprojektion vorfindet, wie man sie z. B. in dem klassischen Lehrbuch von W. Fiedler angeführt findet.[1]) Zwar finden sich einige von diesen bereits in älteren Arbeiten über die Perspektive; es scheint aber, daß diese Arbeiten Taylor ganz unbekannt waren, und daß er nur die empirischen von den Malern befolgten Regeln kannte.

Um seine Ideen klar auseinanderzusetzen, sah sich unser Verfasser gezwungen, ein ganz neues System von Fachausdrücken zu schaffen, von dem wir glauben, hier eine kleine Probe geben zu müssen, um sie mit der modernen Nomenklatur zu vergleichen. Nach ihm ist die Linearperspektive die Kunst, eine beliebige Figur auf einer beliebigen Ebene genau zu zeichnen. Was er „point of sight" nennt, ist das „Projektionszentrum", während unser „Hauptpunkt" von ihm „centre of the picture" genannt wird; die durch diese Punkte begrenzte Strecke wird von ihm, wie auch heute noch, „Distanz" genannt. Zieht man durch das Projektionszentrum die zur Tafel parallele Ebene („directing plane" = „Verschwindungsebene"), so heißen ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden oder Ebene „directing point" (oder kürzer „director") resp. „directing line". Die „intersection" einer Geraden oder einer Ebene ist die entsprechende Spur, während das Beiwort „vanishing" unseren Fluchtelementen entspricht. Schon Taylor machte darauf aufmerksam, daß die „directing" und „vanishing" Geraden einer Ebene untereinander parallel sind. Endlich versteht er unter dem „seat" eines Punktes oder einer Geraden die entsprechende Orthogonalprojektion auf die Bildebene. Nachdem der Verfasser diese Definitionen vorausgeschickt hat, stellt er vier Lehrsätze ohne Beweis auf, die zwar nicht ohne weiteres evident sind, aber nicht zu seinem Thema gehören.[2]) Sie werden sogleich auf die Grundsätze der Perspektive angewandt; unter diesen erwähnen wir den Lehrsatz, nach welchem die Geraden, welche unter sich, aber nicht zur Tafel parallel sind, denselben Fluchtpunkt haben[3]), und daß dieser Punkt mit dem Hauptpunkt zusammenfällt, wenn jene Geraden die Tafel rechtwinklig schneiden; wenn aber mehrere Geraden unter sich und zur Tafel parallel sind, so sind auch ihre Projektionen untereinander parallel. Diese Sätze und die obigen Begriffe bilden die

[1]) Daß dieses Zusammentreffen „une rencontre qui n'est pas un rendez-vous" ist, erhellt daraus, daß das Taylorsche Werk bis nach dem Jahre 1858 Fiedler ganz unbekannt blieb. Man sehe den Aufsatz desselben „Meine Mitarbeit an der Reform der darstellenden Geometrie in neuerer Zeit" im Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver., 1905, S. 493. [2]) Der dritte dieser Sätze ist nicht ganz richtig, da drei Geraden, wenn sie sich je paarweise schneiden, entweder in einer Ebene liegen, oder durch denselben Punkt gehen. [3]) Es ist im Grunde genommen der Satz del Montes über den Konkurspunkt.

gesamten Werkzeuge, deren Taylor sich bedient, um alle beliebigen Perspektive-Aufgaben zu lösen, d. h. nicht nur die rein deskriptiver Natur, sondern auch diejenigen, in welchen man Orthogonalitätsbedingungen begegnet[1]), wie auch diejenigen, bei denen sich unter dem Gegebenen oder Gesuchten auch die Größen von Strecken oder Winkeln befinden.[2]) Daß man auf diese Weise im Besitz der nötigen Mittel sei, um die Perspektive jeder Figur zu zeichnen, wird von Taylor an mehreren ziemlich verwickelten Beispielen gezeigt. In einem Anhang wird dann noch bewiesen, daß vieles von dem, was er auseinandergesetzt hat, auch seine Gültigkeit behält, falls die Tafel nicht eben ist.[3])

Der zweite Teil des besprochenen Werkes ist sehr kurz, aber sehr bemerkenswert, insofern er in einigen Fällen die umgekehrte Aufgabe der Perspektive mit Erfolg angreift. Um unseren Lesern eine Idee der Grenzen und der Ordnung des behandelten Stoffes zu geben, möge es genügen, die von ihm betrachteten Probleme anzuführen: I. Es sind die Projektionen A, B, C dreier Punkte einer Geraden gegeben, wie auch der Fluchtpunkt der Geraden; es soll das Verhältnis $AC:BC$ bestimmt werden. II. Es sind die Projektionen dreier Punkte A, B, C einer Geraden und das Verhältnis $AC:BC$ gegeben; der Fluchtpunkt der Geraden ist zu bestimmen. III. Man kennt die Projektion eines Dreiecks, die Fluchtgerade seiner Ebene, den Hauptpunkt und die Distanz; gesucht ist die Art des Dreiecks. IV. Gegeben ist die Projektion und die Art eines Dreiecks, ferner die Fluchtgerade seiner Ebene; der Hauptpunkt und die Distanz sollen bestimmt werden. V. Die Projektion eines Trapezes gegebener Art ist bekannt; man soll die Fluchtgerade seiner Ebene, den Hauptpunkt und die Distanz finden. VI. Man kennt die Projektion eines rechtwinkligen Parallelepipedons; der Hauptpunkt, die Distanz und die Art der Raumfigur sind zu bestimmen.

Wir halten es für überflüssig, die Auflösungen dieser Aufgaben nach Taylor zu geben, da sie von den heute üblichen nicht verschieden sind. Lieber wollen wir bemerken, daß, während die Mathematiker Taylor in den Himmel hoben, weil er es verstanden habe, so viel Gutes und Neues auf nur 80 kleine Seiten zusammengedrängt zu haben, die Künstler nicht mit ihm zufrieden waren, weil sie sein

[1]) Hier eine stillschweigende Anwendung der Antipolarität in bezug auf den Distanzkreis. [2]) Der von Taylor angewandte Kunstgriff besteht in der Umlegung der betrachteten Ebene auf die Bildtafel, d. h. es ist der auch von uns angewandte. [3]) Ein anderer von Newton inspirierter Anhang gehört zur Physik.

Werk zu schwierig und zu wenig praktisch fanden.[1]) Um nun aber seinen Fachgenossen die Anwendung der Taylorschen Methoden leichter zu ermöglichen, schrieb der Maler Josuah Kirby (1716—1774) ein zweibändiges Werk mit dem langen Titel: „Dr. Brook Taylors Method of Perspective made easy both in theory and practice. In two books. Being an Attempt to make the Art of perspective easy and familiar to adapt it entirely to the art of design; and to make it an entertaining study to any gentleman who shall chose so polite an amusement" (Ipswich 1754). Wir wissen nicht, welche Aufnahme diese Arbeit gefunden hat, und ob der Verfasser seinen Zweck erreicht hat. Dagegen ist es aber zweifellos, daß jeder Mathematiker, der das Werk mit demjenigen Taylors vergleicht, finden wird, daß es einen entschiedenen Rückschritt gegen jenes bedeutet, da man die sehr schätzenswerten Eigenschaften von Allgemeinheit und Bündigkeit, denen wir beim Autor begegnet sind, beim Kommentator vergebens suchen wird. Allerdings hat Kirby das Verdienst, die älteren Perspektivmethoden im Zusammenhang dargestellt und die Anwendung derjenigen Taylors zur Bestimmung der Schatten auseinandergesetzt zu haben.[2])

Einen ähnlichen Zweck hat der „Traité de perspective linéaire" (Paris 1771) von S. N. Michel; er ist aber praktischer und elementarer als das Werk von Kirby, da er nur Definitionen und Beispiele enthält.

Der Beifall, mit welchem das Werk Taylors in der mathematischen Welt begrüßt wurde, findet seine Bestätigung in einigen Erscheinungen, welche der Geschichtsschreiber nicht unerwähnt lassen darf. Zuerst das monumentale Werk „Stereography or a general Treatise of Perspective in all its Branches" (London 1748) von H. Hamilton, welches viele Erörterungen über die Taylorschen Methoden enthält. Dann kann die italienische und französische Übersetzung des Taylorschen Werkes erwähnt werden. Der Verfasser der letzteren Arbeit[3]) ist uns unbekannt; der der ersteren aber

[1]) Vgl. Poudra, „Histoire", p. 529. [2]) Wollte man sich von der Pflicht befreien, der chronologischen Ordnung getreu zu folgen, so konnte man außer den im Texte angeführten Ereignissen noch ein anderes erwähnen, daß nämlich ein großer Geometer wie L. Cremona es nicht unter seiner Würde hielt, die Taylorschen Methoden in die moderne Sprache der Wissenschaft zu übersetzen; man sehe den Aufsatz „I principi della prospettiva lineare secondo Taylor", welcher mit dem Anagramm Marco Uglieni im III. Bd. (1865) des „Giornale di matematiche" veröffentlicht wurde. [3]) „Nouveaux principes de la perspective linéaire; traduction de deux ouvrages: l'un en anglais du docteur Brook Taylor, l'autre en latin de M. Patrice Murdoch", Amsterdam 1759.

ist ein Franzose, der Pater Jacquier (1711—1788; vgl. III², S. 841), wegen eines vortrefflichen Kommentars zu den Newtonschen „Principia" wohlbekannt, welchen er in Gemeinschaft mit Pater Lesueur (1703 bis 1770) geschrieben hat. Auch seine Bearbeitung des Taylorschen Werkes[1]) ist mit schätzbaren Anhängen versehen, von denen einige auch für uns in Betracht kommen, da sie mathematischer Natur sind. Der, welcher die Nr. 3 trägt (die Numerierung folgt der des Originals), bezieht sich auf die Erniedrigungserscheinung, welche die Höhe eines Gegenstandes darbietet, falls er sich von dem Auge des Beschauers entfernt, und die Bestimmung der Kurve (Hyperbel), auf welche man die gleich hohen Gegenstände einer Reihe verteilen muß, damit sie einem Beschauer als von gleicher Höhe erscheinen. Die folgende Anmerkung handelt von den verzerrenden Projektionen (Anamorfosi), welche entstehen, wenn der Gegenstand sich zwischen den Augen und der Tafel befindet; Jacquier zeigt den Zusammenhang dieser Lehre mit derjenigen von den Brennlinien. Der Sinn des Wortes „Schatten", welchem man in der Überschrift und im Text der V. Note begegnet, ist derselbe, wie der von Newton (vgl. III², S. 423) angenommene, da es sich bei Jacquier um Projektionen von Figuren handelt; mit jenem großen Mathematiker schließt er folgendermaßen: „Si in planum infinitum a puncto lucidum illuminatum umbrae figurarum projiciuntur, umbrae sectionum conicarum semper erunt sectiones conicae. Quaemadmodum circulus umbra projiciendo generat omnes sectiones conicas, sic parabolae quinque divergentes umbris suis generant et exhibent alias omnes secundi generis curvas." Um zu diesem wichtigen Resultate zu gelangen, bestimmt unser Verfasser die Cartesische Gleichung der Kurve, die man erhält, wenn man einen Kegel durch eine Ebene schneidet. Dasselbe Thema wird in der folgenden Note behandelt, welche die Überschrift „Von der Projektion der Kurven" trägt; in der letzten endlich werden die Eigenschaften der in der Astronomie angewandten Projektionen vorgetragen, d. h. die Projektionen einer Kugelfläche auf eine Ebene von einem Punkte der Oberfläche („stereographische" Projektion) oder von ihrem Mittelpunkt („gnomonische" Projektion) aus; beiläufig gibt der Verfasser eine neue Auflösung der folgenden schon von Descartes und de l'Hôpital behandelten Aufgabe: „die Kreisschnitte eines Kegels zu bestimmen, dessen Mittelpunkt und kegelschnittförmige Basis gegeben sind". Aus alledem geht klar hervor, daß Pater Jacquier den Einfluß, welchen die Zentralprojektion auf die Geometrie auszuüben bestimmt war, in

[1]) „Elementi di prospettiva secondo li principi di Brook Taylor con varie aggiunte spettanti all' ottica e alla geometria", Roma 1755.

seiner vollen Bedeutung erkannt hat. Ja, er hat sogar zu sehen geglaubt, daß ihr Bereich sich bis auf die Analysis erstrecken könnte, wie aus den folgenden Sätzen, mit denen er seinen Band schließt, ersichtlich ist: „Ich möchte dieses Buch mit der Bemerkung schließen, daß die Projektionsmethode auch bei den höchsten Rechnungen sehr nützlich sein kann. Die Projektion von Kurven und krummen Flächen bringt oft überraschende Vereinfachungen in ihrer Quadratur hervor. Aber dieser Gegenstand erfordert eine besondere Abhandlung, welche ich ans Licht zu bringen hoffe." Leider wurde dieses Versprechen nie gehalten!

Dem 18. Jahrhunderte verdanken wir ein anderes Werk über die Perspektive, das sich an Bedeutung mit der Taylorschen Perspektive messen kann, Lamberts „Freye Perspective". Seinem Erscheinen aber gingen einige andere Arbeiten voraus, die unerwähnt zu lassen, unrecht wäre.

Edmond Sebastian Jeaurat (1724—1803), zuerst „Ingénieur-géograph", dann Professor an der Pariser Kriegsschule, ist der Verfasser eines „Traité de perspective" (Paris 1750), aus dem ein kompetenter Fachmann[1]) wertvolle neue Konstruktionen mitteilt. Später richtete er seine Gedanken auf die Astronomie und gedachte auf dieselbe die Methoden der Wissenschaft anzuwenden, mit der wir uns jetzt beschäftigen; so entstand die Abhandlung „Projection des éclipses de soleil, assujétie aux règles de la perspective ordinaire" (Mém. de math. et phys. prés. par divers sav., T. IV, Paris 1763, S. 318—335); aber in dieser Abhandlung findet der Geometer nichts, was ihn interessieren könnte, und auch die Astronomen lernten darin kein neues Verfahren von praktischem Wert kennen[2]).

Einem anderen Astronomen, Nicolas Ludwig la Caille (1713—1762), verdanken wir die „Leçons élémentaires d'optique", von denen wir nicht weniger als fünf Auflagen (Paris 1750, 1756, 1764, 1808, 1810) und eine lateinische Übersetzung kennen (Venedig 1774). Für uns hat gegenwärtig nur der III. Teil dieses Werkes Interesse, weil darin die Elemente der Perspektive mit Hilfe der Rechnung auseinandergesetzt sind. Der Verfasser nimmt drei orthogonale Koordinatenebenen, von denen die xz-Ebene mit der vertikal vorausgesetzten Tafel zusammenfällt; die xy-Ebene ist die durch das Auge geführte Horizontalebene; die yz-Ebene endlich geht auch durch das Auge, steht aber zu den zwei

[1]) Poudra, „Histoire", p. 501. [2]) R. Wolf erwähnt wohl Jeaurat in seiner „Geschichte der Astronomie" (München 1877), sagt aber von jener Abhandlung kein Wort.

anderen rechtwinklig. Auf der Tafel wird ebenso ein rechtwinkliges Koordinatensystem festgestellt, dessen x-Achse mit derjenigen des Raumsystems zusammenfällt. Dann sind die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Raumpunktes mit denjenigen x', y' seiner Projektion durch Gleichungen folgender Art gebunden:

$$x' = xd : (d + y); \quad y' = zd : (d + y);$$

wo d die Entfernung des Projektionszentrums von der Tafel bedeutet. Marolais (s. oben) hatte diese schon gefunden; la Caille drückte sie in Worten als Proportionen aus.

Einen ähnlichen Zweck verfolgt die Programmabhandlung „Perspectivae et projectionum theoria generalis analytica" (Leipzig 1752) des berühmten Professors A. G. Kästner (1719—1800). Dasselbe gilt von dem „Essai sur la perspective pratique par le moyen du calcul" (Paris 1756) von C. Roy, „graveur en taille douce". Roy weiß sehr wohl, daß schon vor ihm die Perspektive analytisch behandelt worden ist, bemerkt aber, daß „il est étonnant qu'il ne se trouve nulle application du calcul dans les traités de perspective donnés au public depuis quelques années, et qu'il faille recourir à celui de P. Tacquet, 1618, ou du P. Lamy". Wir müssen nun aber bemerken, daß man wohl mit Recht daran zweifeln darf, daß der Verfasser die von ihm angeführten Werke gekannt habe; denn Tacquet war im Jahre 1618 erst sechs Jahre alt, konnte daher weder Pater noch Autor sein; und außerdem ist in seinem uns bereits bekannten Buch über die Perspektive von Rechnungsanwendung überhaupt keine Rede; weiterhin bemerkt Montucla[1]) von dem „Traité de perspective" Lamys (1640—1715), daß er „est plus fait pour les peintres, et plus rélatif au coloris, que propre aux géomètres". Alles das glaubten wir nicht unbemerkt lassen zu dürfen, um die Verbreitung irrtümlicher Ansichten über die Geschichte der Anwendung der Rechnung auf die Perspektive zu verhindern.

Eine bedeutendere Originalität besitzt die Abhandlung „De perspectiva in theorema unum redacta" (Bonon. Comment. III. Bd. 1755, p. 169 bis 177). Man verdankt dieselbe Eustachius Zanotti (1709—1782), einem Schüler des Eustachius Manfredi (1674—1739) und zugleich Nachfolger desselben auf dem Lehrstuhle der Astronomie an der Universität zu Bologna. Indem Zanotti sich den Gebräuchen seiner Zeit anschließt, betrachtet er zwei Grundebenen MS und LF (Fig. 66), die erste horizontal, die zweite (die Tafel) vertikal; er setzt ferner voraus, daß die Tafel zwischen dem Beschauerauge O und dem zu betrachtenden Punkte N liege. Die Gerade NO schneidet die Tafel in dem

[1]) „Histoire des mathématiques", T. I, 2. Aufl., p. 711.

Punkte X der Projektion von N; wenn nun weiter OF und NI zur Tafel rechtwinklig sind, so wird X auf der Strecke IF liegen und dieselbe im Verhältnis $OF : NI$ teilen. Diese Bemerkung, eine Verallgemeinerung derjenigen, die wir schon bei s'Gravesande fanden, führt zu einer ebenen Konstruktion des gesuchten Punktes X. Um zu derselben zu gelangen, ziehen wir durch N die zur Horizontalebene rechtwinklige Gerade NM und eine beliebige Hilfsgerade, die die Ebene MS in H schneiden möge; so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck MHN, dessen spitzer Winkel MHN die Neigung α jener Hilfsgeraden zu der Horizontalebene darstellt. Ist ferner ML zur Tafel rechtwinklig, so ist $ILMN$ ein rechtwinkliges Parallelogramm und daher $MN = IL$. Nehmen wir nun zuletzt noch an, daß die

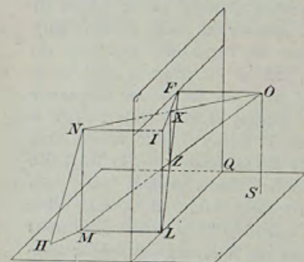

Fig. 66.

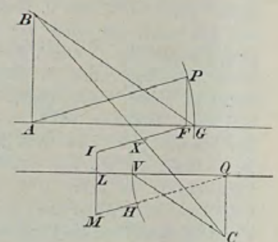

Fig. 67.

Tafel auf die Horizontalebene umgelegt werde, so wird die Fig. 67 entstehen. In dieser ziehen wir nun die zu LQ parallele Gerade FA und durch M die zu LQ rechtwinklige Gerade ML; ferner verlängern wir die Gerade ML so weit, bis die Verlängerung LI gleich der gegebenen Höhe des Punktes ist; der gesuchte Punkt X wird dann augenscheinlich auf die Gerade FI fallen. Es sei nun ferner Q der Schnittpunkt von MH mit der Grundlinie LQ und ferner die Strecke $QU = QH$. Durch U ziehen wir weiter die Gerade UC, so daß der Winkel $UCQ = \alpha$ wird, und durch F rechtwinklig zu FA die Strecke FP, die gleich der gegebenen Entfernung zwischen dem Auge und der Tafel sein soll. Die Gerade PA sei zu MQ parallel und die Strecke $AG = AP$. Zuletzt sei die Gerade AB zu PF parallel und die Gerade GB zu CU. Die Geraden FI und BC schneiden sich dann in dem gesuchten Punkte X. Um sich dessen zu vergewissern genügt es, festzustellen, daß X die Strecke FI in dem bereits angegebenen Verhältnis teilt. Zanotti beweist

dies in einer langen Erörterung euklidischen Stils, die hier wiederzugeben wir für überflüssig halten. Nur sei bemerkt, daß die obige Konstruktion eine beträchtliche Vereinfachung erfährt, falls der gegebene Punkt auf der Horizontalebene liegt; in diesem Falle wird sie mit einer schon von s'Gravesande vorgeschlagenen identisch.

Gerade von diesem besonderen Falle geht nun Zanotti in seinem „Trattato teorico-pratico di prospettiva“ (Bologna 1766) aus, welcher, nach einem Biograph Zanottis[1]) eine siegreiche Konkurrenz mit demjenigen von Taylor-Jacquier bestand. In diesem findet sich nach einem Abschnitte, „welcher die Erklärungen enthält“, ein zweiter mit der Überschrift „von der Ikonographie“, und wo die oben angeführte Konstruktion s'Gravesandes durch die folgende ersetzt wird: Auf der Geraden, welche durch F (Fig. 68) zur Grundlinie („linea della terra“) gezogen ist, trage man FD = der Entfernung der Augen von der Tafel ab und auf der Grundlinie selbst $LQ = LM$; die Geraden LF und DQ schneiden sich dann in dem gesuchten Punkte Z, da er die Strecke LF in dem oben angegebenen Verhältnisse teilt. Von dieser Konstruktion leitet Zanotti in seinem III. Abschnitte („Von der Orthographie“) eine andere ab,

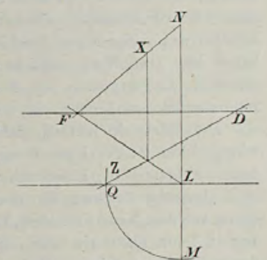

Fig. 68.

um die Perspektive eines beliebigen Raumpunktes N zu finden, die einfacher ist als die in seiner vorigen Abhandlung von 1755 auseinandergesetzte, und die daher eine Erwähnung verdient. Wir bemerken nämlich, daß aus der Fig. 66 die Proportion folgt

$$NM : XZ = FL : FZ,$$

und daß die Projektionen der Punkte M, N auf eine zur Grundlinie rechtwinklige Gerade fallen werden. Kehren wir nun zur Fig. 68 zurück und tragen wir auf der Verlängerung von ML die Strecke LN = der Höhe des objektiven Punktes ab und verbinden F mit N, dann wird die Gerade FN die Gerade, welche durch Z parallel zu MLN gezogen wird, in der gesuchten Perspektive X von N schneiden. Der Kürze wegen wollen wir den Beweis für die Richtigkeit dieses

[1]) Man sehe den ursprünglich lateinisch geschriebenen „Elogio“ von L. Palcani, welcher, ins Italienische übersetzt, als Einleitung zu der 2. Aufl. (Milano 1825) des in Rede stehenden „Trattato“ dient.

Verfahrens hier nicht angeben und nur bemerken, daß Zanotti auch die Modifikationen zeigt, welche jene Konstruktion erfordert, wenn das Objekt zwischen das Auge und die Tafel fällt. — Der IV. Abschnitt des betreffenden „Trattato" enthält die bekannten, schon von del Monte und Stevin angeführten Sätze über die Transformation eines Systems paralleler Geraden durch Projektion in ein eigentliches Büschel oder umgekehrt. Der V. Abschnitt betrifft die Schatten, der VI. Abschnitt die Perspektive von Kurven mit besonderer Berücksichtigung des Kreises, der VII. Abschnitt die Perspektive der regelmäßigen Polyeder und der VIII. Abschnitt, welcher rein praktischer Natur ist, die Perspektive der Zimmerdecken und der Bühnen. Die zwei letzten Abschnitte sind dagegen wieder theoretisch; der eine enthält eine Methode zur Zeichnung der Perspektive ohne Zuhilfenahme des Grundrisses[1]), während der andere sich mit der Wiederherstellung einer Figur beschäftigt, von der eine Perspektive bekannt ist. Das Werk schließt mit einem Nachworte „über verschiedene, die Perspektive betreffende Fragen", welche nur für Künstler Interesse hat.

Mit Rücksicht darauf, daß es zweckmäßiger war, alle Beiträge, welche Zanotti zur Perspektive geliefert hat, im Zusammenhang zu betrachten, haben wir uns leider gezwungen gesehen, die chronologische Ordnung für einen Augenblick zu verlassen. Denn schon vor dem Erscheinen des „Trattato teorico-pratico di prospettiva" war in Deutschland ein sehr originelles Werk veröffentlicht worden, dessen Verfasser Johann Heinrich Lambert (1728—1777[2]) war. Während seines fast ein halbes Jahrhundert dauernden Lebens hat Lambert viele wertvolle mathematische und philosophische Arbeiten geschrieben, wobei er sich beständig bemüht, die Anwendungen der exakten Wissenschaften in das gehörige Licht zu setzen. Eine große und wohlverdiente Berühmtheit erlangte die Abhandlung „Insigniores orbitae cometarum proprietates" (Wien 1761; Augsburg 1771), welche mindestens eine Erwähnung in jeder Geschichte der Geometrie verdiente, weil darin der schöne Satz (heute „Lambertscher Lehrsatz" genannt) dargelegt wird: „In jeder parabolischen Bahnkurve eines Punktes hängt die Zeit, in welcher ein beliebiger Bogen beschrieben wird, nur von der entsprechenden Sehne und der Summe der Radiusvektoren der Bogenextreme ab". Dieser Satz hat ein Analogon in dem folgenden, welchen man ebenfalls Lambert ver-

[1]) Wurde beim Schreiben dieses Abschnittes Zanotti etwa von Lambert beeinflußt, von dem wir gleich sprechen werden? [2]) Seine Biographie befindet sich im XXIII. Abschnitt, S. 408.

dankt: „Betrachtet man in zwei Ellipsen, welche einen gemeinsamen Brennpunkt haben, zwei Bogen, in welchen die Sehnen und die Radiusvektoren gleich sind, so ist das Verhältnis der entsprechenden Ellipsensektoren gleich der Quadratwurzel des Verhältnisses der entsprechenden Parameter". Lagrange und Laplace, auf die die Schönheit dieser Resultate großen Eindruck machte, haben versucht, dieselben analytisch zu begründen. Es gelang ihnen. Lagrange aber hat dabei gewissenhaft anerkannt, daß in diesem Falle die Geometrie Siegerin über die Analysis geblieben war.

„Die freye Perspective, oder Anweisung jeden perspectivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen"[1]), das Werk, welches Lambert einen Ehrenplatz in der Geschichte der Perspektive und der modernen Geometrie sichert, zeigt auch denjenigen, welche die wissenschaftliche Physiognomie des Verfassers nicht kennen, deutlich, daß dieser zugleich Mathematiker und Physiker war, und daß er in seinen wissenschaftlichen Studien stets seinen Blick auf die praktischen Anwendungen richtete. Sein Hauptziel war, das Zeichnen von Perspektiven unabhängig von einer vorhergehenden Zeichnung einer Orthogonalprojektion zu machen; es war ein natürlicher und wohlberechtigter Wunsch, den wir schon bei anderen angedeutet fanden, und den auch schon Taylor in seinem Werk erfüllt hatte. Lambert kannte wahrscheinlich dieses Werk nicht, jedenfalls gab er einen neuen Weg an, um jenes Ziel zu erreichen.

Diese allgemeine Bemerkung vorausgeschickt, wollen wir nun die acht Abschnitte des Lambertschen Werkes durchgehen, um ihren Inhalt kennen zu lernen:

I. Abschnitt. „Von den Gründen der Perspektive, und den Gesetzen, nach denen ebene Flächen und darauf stehende Körper entworfen werden." Als Erfahrungstatsachen nimmt Lambert die folgenden an: a) das Licht verbreitet sich geradlinig, b) die Tafel vertikal vorausgesetzt, haben die Vertikallinien eben solche Geraden als Projektionen. Er setzt ferner ein Beziehungssystem als gegeben voraus, dessen Ebenen die Tafel, die gegebene Horizontalebene und eine durch den Gesichtspunkt (oder das „Auge") gehende und zu den zwei anderen rechtwinklig stehende Ebene seien. Die Schnittlinie der Tafel mit der Horizontalebene nennt er Fundamental- oder Grundlinie („ligne de terre" in der französischen Übersetzung). Die Entfernung (Fig. 69) des Auges O von

[1]) I. Aufl., Zürich 1759; II. Aufl., ib. 1774. Man sehe auch „La perspective affranchie de l'embarras du plan géometral", Zurich 1759.

der Horizontalebene OS, heißt die „Höhe des Auges“, der Fußpunkt P des von O auf die Tafel gefällten Lotes ist der „Augenpunkt“ und die Länge der Strecke OP die „Entfernung“; endlich nennt er die durch den Augenpunkt gehende horizontale Gerade die „Horizontallinie“. Q sei der vierte Eckpunkt des rechtwinkligen Parallelogramms $POSQ$, C ein beliebiger Punkt der Horizontalebene und c die Projektion desselben. Ist q der Schnittpunkt der Geraden CS mit der Grundlinie, so wird q offenbar die Horizontalprojektion von c sein. Wir ziehen nun durch C in der Horizontalebene eine beliebige Hilfsgerade, welche die Grundlinie in M schneiden möge, und durch O die zu CM parallele Gerade, welche die Tafel in dem auf der Horizontallinie gelegenen Punkte p schneidet; pM wird die Projektion von lM sein. Alle zu CM parallelen Geraden haben als

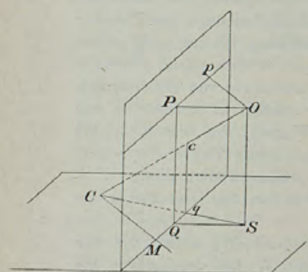

Fig. 69.

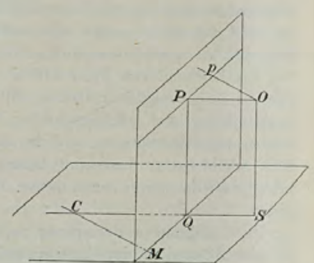

Fig. 70.

Projektionen Geraden, welche durch p gehen, einen Punkt, welcher nur von dem Winkel α abhängt, welchen sie mit der Grundlinie, oder von demjenigen $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ („Deklination“ genannt), welchen sie mit einer zur Grundlinie rechtwinkligen Geraden bilden. Um eine dieser Geraden festzustellen empfiehlt es sich (Fig. 70) den Punkt zu geben, in dem sie die Gerade SQ schneidet. Dann bemerken wir als Folge der dargelegten Konstruktion, daß Winkel $POp = QCM = \beta$ und deshalb auch $Pp = OP \operatorname{tang} \beta$ ist. Wenn nun β bekannt ist, so können wir von P aus auf der Horizontallinie die Strecke OP tang β abtragen. Wir erhalten so zwei Punkte, durch deren einen a die Projektionen aller Geraden der Horizontalebene, welche mit der Grundlinie den Winkel β bilden, gehen. Setzt man ferner voraus, daß $OP = PQ$ sei, so werden die Dreiecke PQp, POp kongruent

sein und infolge dessen auch die Winkel PQp, POp und β. Beschreibt man dann auf der Tafel einen Kreis mit Q als Mittelpunkt und QP als Halbmesser und zieht durch q die auf der Tafel liegenden Geraden, welche mit QP die Winkel von $1^0, 2^0, \ldots$ bilden, so wird auf der Horizontallinie eine Reihe („Skala“) von Punkten entstehen, welche wir entsprechend mit $1^0, 2^0, \ldots$ bezeichnen wollen. Mit Hilfe dieser Skala (welche sich schon bei la Caille vorfindet) kann man viele Konstruktionen auf der Tafel ausführen, sobald man bemerkt hat, daß zwei Gerade, deren Deklinationen β und β' sind, untereinander den Winkel $\beta' - \beta$ bilden. Aus dieser Beobachtung ergibt sich, daß, wenn zwei Geraden der Horizontalebene untereinander den Winkel γ bilden, ihre Projektionen durch zwei Punkte obiger Skala gehen, deren Zahlen den Unterschied γ haben. An dieser Stelle führt Lambert eine nur ihm eigentümliche Nomenklatur ein, die aus den folgenden Sätzen erhellt: I. Zwei Gerade der Tafel, welche durch denselben Punkt der Horizontallinie gehen, werden „parallele“ genannt (weil sie die Projektionen paralleler Geraden sind). II. Eine auf der Horizontallinie rechtwinklig stehende Gerade heißt perpendikular (weil sie die Projektion einer Vertikallinie ist). III. Jedem Winkel auf der Tafel wird die Geradenanzahl zugeschrieben, welche der entsprechende Winkel der Tafel enthält. IV. Endlich behält auch das Bild jeder Strecke das Maß ihrer Länge auf der Horizontalebene bei. Mit Hilfe dieser Nomenklatur (welche die Grundlage einer „perspektivischen Geometrie“ bildet) wird die Bedeutung folgender von Lambert aufgelösten Aufgaben klar werden: I. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel ist. II. Durch einen auf einer Geraden gegebenen Punkt eine andere Gerade zu ziehen, welche mit der ersteren einen gegebenen Winkel bildet. III. Wenn die Seiten einer Figur und ihre Lage nebst den Winkeln gegeben sind, die Figur zu entwerfen. IV. Die Perspektive eines Kreises zu konstruieren, von dem man eine Sehne kennt, die einem Bogen von gegebener Größe entspricht. Betreffs der Lösung der metrischen Fragen bemerkt Lambert, daß, wenn $A'B'C'D'$ ein Viereck auf der Tafel ist, und wenn $A'B'$ und $C'D'$ in der Horizontallinie sich schneiden, während $A'C'$ und $B'D'$ untereinander parallel sind, $ABCD$ ein Parallelogramm sein wird und daher $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$ sind. Kennt man daher eine Skala, deren Träger eine zur Grundlinie parallele Gerade ist, so ist es leicht, jede zu derselben parallele Strecke zu messen. Die analoge Frage in bezug auf eine beliebige Strecke ist schwieriger; ihre Lösung gibt Lambert mit Hilfe des folgenden Problems: „Gegeben auf der Tafel ein Winkel, dessen Seite

$S'Q'$ horizontal ist. Der Punkt S' ist derart zu bestimmen, daß $RS = RQ$ sei".

II. Abschnitt. „Von der geschickten Lage des Auges und der Entfernung der Tafel von demselbigen." Bemerkungen und Ratschläge für die Künstler bestimmt.

III. Abschnitt. „Von verschiedenen Instrumenten, dadurch die Ausübung der Perspektive verkürzt wird." Das hauptsächlichste Instrument, dessen Gebrauch von Lambert angeraten wird, ist der „optische" oder „Proportionszirkel", dessen Anwendung, wie wir gesehen haben (S. 590), die Veranlassung zu einem Streit zwischen Desargues und Vaulezard um die Priorität der Erfindung gab. Lambert scheint diese Vorgänger nicht gekannt zu haben. Aber er war so überzeugt von dem Nutzen des Proportionszirkels, daß er ihn zum Gegenstand einer besonderen Publikation machte.[1])

IV. Abschnitt. „Die Ausübung obiger Regeln in ausführlichen Exempeln." Hier werden die im I. Abschnitt gegebenen Vorschriften auf die Zeichnung der Schatten angewandt.

V. Abschnitt. „Von der Entwerfung schiefliegender Linien und Flächen, und dessen, was darauf vorkommt." In diesem wichtigen Teil seines Werkes hat sich Lambert die Aufgabe gestellt, die Ergebnisse des I. Abschnitts in der Weise zu modifizieren, daß sie auch für den Fall anwendbar sind, daß die Tafel nicht vertikal ist. Unter den von ihm eingeführten Begriffen mögen diejenigen von der Spur- („Knotenlinie" nach Lambert) und der Fluchtlinie („Grenzlinie" nach Lambert) einer Ebene (§§ 165—167), und der Begriff der entsprechenden Punkte einer Geraden angeführt werden. Für den Fall, daß die Orthogonalprojektion des Gesichtspunktes auf der Horizontalebene auf die Grundlinie fällt, gibt Lambert die Anweisung, auf der Horizontallinie der Tafel eine Skala zu entwerfen, analog derjenigen, welche im I. Abschnitt konstruiert und benutzt wurde. Unter den zahlreichen von ihm aufgelösten Aufgaben wollen wir diejenige erwähnen, welche die Gerade zu zeichnen versucht, die eine Ebene rechtwinklig schneidet, um den Leser darauf aufmerksam zu machen, daß das Lambertsche Verfahren sich vom unsrigen weiter entfernt, als das von Taylor angewandte.

VI. Abschnitt. „Verschiedene Anmerkungen und Beispiele, so zu Erläuterung dessen dienen, was erst von der Zeichnung schiefliegender Flächen gelehrt worden." Den Praktikern gewidmet!

[1]) „Kurzgefaßte Regeln zu perspektivischen Zeichnungen vermittelst eines zu deren Ausübung so wie auch zu geometrischen Zeichnungen eingerichteten Proportionalzirkels", Augsburg; I. Aufl. 1768; II. Aufl. 1770.

VII. Abschnitt. „Von der perspektivischen Entwerfung aus einem unendlich entfernten Gesichtspunkt." Die so entstehende Projektion wird von Lambert (nur in der 1. Auflage) „orthographisch", „militär" oder „kavalier" genannt. Er bemerkt, daß es dasselbe sei, eine endliche Figur von einem unendlich entfernten Mittelpunkt aus oder eine unendlich kleine Figur von einem endlich entfernten Zentrum aus zu projizieren. Die Wichtigkeit dieser Beobachtung für die Lehre von den Schatten wird ausführlich dargelegt, für den Fall, daß die Lichtquelle im Unendlichen liegt.

Der VIII. (letzte) Abschnitt behandelt die „Umgekehrten Aufgaben der Perspektive", ein Thema, welches, wie wir sahen, schon von del Monte und Vaulezard gestreift wurde, und dessen theoretische wie praktische Wichtigkeit außer Zweifel steht. Es handelt sich hier darum, die Bedingungen zu bestimmen, unter welchen eine gegebene Perspektive entworfen wurde, d. h. die Lage des Gesichtspunktes und der Tafel zu finden. Im gewöhnlichen Leben pflegt man diese Untersuchung durch praktische Versuche anzustellen, wenn man ein Gemälde betrachtet. Die Tatsache, daß Lambert jene Frage rationell lösen und ferner zwei orthogonale Projektionen eines Körpers aus einer Projektion ableiten wollte, hat dazu geführt, daß man ihn zu den Begründern der heutigen Photogrammetrie rechnet.[1]) Ausdrücklich sagt er zwar nicht, daß jene Aufgabe unbestimmt ist; stillschweigend aber wird diese Unbestimmtheit zugestanden und durch Hinzufügung neuer Angaben vermindert.[2]) In zahlreichen und interessanten Beispielen wird von Lambert die Auffindung der Lage des Gesichtspunktes in bezug auf die vertikal vorausgesetzte Tafel ausgeführt. Die Lösung des obigen Problems ist keine erschöpfende und konnte es auch nicht sein, da die Erscheinungsformen, unter denen es einem begegnen kann, unendlich sind; die Fälle aber, welche Lambert betrachtet und behandelt, sind sehr geschickt gewählt und behandelt.

Eine Fortsetzung, gewissermaßen einen Anhang zu diesen Abschnitten der „Freyen Perspective" bildet eine von Lambert hinterlassene Abhandlung mit dem Titel: „Die vornehmsten und brauchbarsten Grundsätze der Perspective, aus Betrachtung einer geometrisch gezeichneten Landschaft abgeleitet" (Hindenburgs Archiv 1799). Dieser Titel könnte den Glauben erwecken, daß diese Arbeit rein

[1]) Vgl. die schöne Rede von J. Schur, „J. H. Lambert als Geometer"; Jahresber. der Deutschen Mathem.-Ver., Bd. XIV, 1905, S. 196. [2]) Z. B. setzt er an einer Stelle voraus, daß ein auf der Tafel gezeichnetes Viereck die Perspektive eines Quadrates oder eines Rechtecks gegebener Art sei.

didaktischer Natur wäre; aber der folgende Auszug wird zeigen, daß ihr Zweck ein ganz anderer war, denn, um der Schlußkette Lamberts folgen zu können, ist es unbedingt notwendig, schon die Prinzipien der Perspektive zu kennen. Er bemerkt zunächst, daß die Maler die Regeln der Perspektive nicht befolgen; daher schlägt er eine Unterscheidung zwischen „Landschaft" und „Prospekt" vor, indem er den letzteren Namen den Landschaften vorbehält, bei denen jene Prinzipien streng befolgt werden. Indem er sodann einen (aus einem Turm und einem Haus bestehenden) Prospekt als gegeben voraussetzt, bestimmt er mit Hilfe desselben und durch ein sehr geistreiches Verfahren den „Horizont" und den „Augenpunkt"; dieses Verfahren hängt seiner Natur und seinem Zweck nach mit dem letzten Abschnitt der „Freyen Perspective" eng zusammen. Lambert schließt die Darlegung derselben durch die folgende Bemerkung: „Das bloße Augenmaß ist bei Zeichnungen von Aussichten etwas sehr Mißliches, und so sehr man auch den Malern die Übung desselben einschärft und den Gebrauch des Zirkels untersagt, so sehr könnten die Käufer und Liebhaber sich ausbitten, daß wenigstens bei Zeichnungen von Landschaften und Aussichten der Gebrauch des Lineals und Zirkels nicht nur gestattet, sondern als etwas schlechthin Unentbehrliches gefordert werde." Wurden diese vernünftigen Ratschläge von den Künstlern und ihren Mäcenaten befolgt? Wir haben Gründe genug, um daran zu zweifeln!

Fünfzehn Jahre nach der Veröffentlichung der „Freyen Perspective" machte sich das Bedürfnis nach einer Neuauflage fühlbar. Lambert beschränkte sich dabei auf einige kleinere Verbesserungen des Textes.[1]) Jedoch fügte er zu dem alten Bande einen neuen hinzu, welcher wichtige „Anmerkungen und Zusätze" enthält. In dem ersten dieser Zusätze gibt Lambert, mit freier Benutzung der Geschichtswerke des Montucla und Saverien, eine flüchtige Übersicht über die wichtigsten Arbeiten über Perspektive. In einem anderen gibt er kleine Zusätze zu der behandelten Lehre, welche sehr wohl auch im Text selbst hätten Platz finden können. Bei zwei längeren Zusätzen müssen wir einen Augenblick verweilen. In dem einen Zusatz (zu § 12) setzt Lambert die zahlreichen Verfahren zum Entwerfen von Perspektiven auseinander, welche vor ihm bereits durch Dürer, Danti usw. empfohlen worden waren; andere werden von ihm selbst hinzugefügt. Der zweite wichtige Zusatz reiht Lambert zu den Begründern der „Geometrie des Lineals".[2]) Da wir keinen Raum

[1]) Die Vermehrung der Paragraphen von 310 auf 315 ist nur scheinbar und die Folge eines Versehens, da dem § 310 der § 315 folgt. [2]) Chasles, „Aperçu historique", p. 186; Cremona, „Geometria projettiva", Torino 1873, p. 123.

haben, um den Inhalt desselben hier ausführlich wiederzugeben, wollen wir uns damit begnügen, die behandelten Aufgaben wiederzugeben und zu bemerken, daß ihre Auflösungen auf denselben Prinzipien beruhen, welche Lambert zur „perspektivischen Geometrie" (m. s. S. 609) geführt haben:

I. Durch vier gegebene Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, sondern von denen jeder außerhalb des von den drei übrigen gebildeten Dreiecks liegt, vermittels des bloßen Lineals mehrere Punkte zu bestimmen, die mit den vier gegebenen in dem Umkreis einer Ellipse liegen. (Lambert bemerkt ausdrücklich, daß die Aufgabe unbestimmt ist, daß sie aber durch Hinzufügung eines fünften Punktes aufhört, unbestimmt zu sein, und so gelangt man zu einer sehr leichten Konstruktion des durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnittes.) II. Wenn ein Parallelogramm gegeben ist, bloß mit einem Lineal durch einen gegebenen Punkt eine Linie zu ziehen, die mit einer gegebenen Geraden parallel ist.[1]) III. Ein Kreis nebst seinem Mittelpunkt ist gegeben; auf eine gegebene Gerade von einem Punkt die Senkrechte mit bloßem Lineal zu ziehen. IV. Eine Linie sei in zwei gleiche Teile geteilt; dieselbe mit bloßem Lineal in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen.[2]) V. Es sind zwei Linien gegeben, welche sich in einem Punkte außerhalb der Tafel schneiden; mit bloßem Lineal und ohne Verlängerung dieser Linien durch einen gegebenen Punkt eine Linie zu ziehen, welche durch den Schnittpunkt der gegebenen Linien hindurchgeht. (Die von Lambert empfohlene Konstruktion ist noch heute in Gebrauch; sie stützt sich auf die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks.) VI. Zwei Linien sind beide in zwei gleiche Teile geteilt; zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen. VII. Den Pythagoraeischen Lehrsatz mit bloßem Lineal perspektivisch zu zeichnen. VIII. Ein Kreis und dessen Mittelpunkt ist gegeben; einen beliebigen Bogen desselben in zwei gleiche Teile zu teilen. IX. Zwei Strecken AC und BD mögen sich im Punkte E derart schneiden, daß $AE = EC$, $ED = 2BE$ ist. Es soll mit bloßem Lineal ein Parallelogramm gezeichnet werden. X—XII. Zeichnung von Parallelen mit anderen Systemen von Daten. XIII. Wenn der Winkel ABE gleich dem Winkel EBF ist, mit bloßem Lineal auf EB durch B die Senkrechte zu ziehen.[3])

[1]) Cremona, a. a. O., p. 57. [2]) Ebenda, p. 58. [3]) Wollte man alle Beiträge aufzählen, welche Lambert zur Perspektive gegeben hat, so müßte man auch die kurze Arbeit „Sur la perspective aërienne" (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, année 1774, p. 74—80) erwähnen, wo die Anwendung der Mathematik auf die „dégradation de la couleur des objets par rapport à leur éloignement et à la constitution de l'atmosphère" versucht wird; im Text haben

Um unseren Lesern eine Idee der von Lambert angewandten Verfahren zu geben, möge die Auflösung der V. Aufgabe dienen: „Sind AC und BD die Geraden, die in einem Punkte außerhalb der Tafel zusammenlaufen, und E der gegebene Punkt; durch E ziehe man zwei Geraden AH, GB und dann AB, GH, bis zu ihrem Durchschnitt K; aus K ziehe man die Gerade KCD und dann CH und GD; ist F der Durchschnittspunkt der letzteren, so ist EF die gesuchte Gerade."

Die Ideen und Methoden Lamberts, welche, wie wir sahen (S. 606), wahrscheinlich schon auf E. Zanotti einen Einfluß ausübten, blieben ohne jegliche Wirkung auf einen italienischen Architekten, Maler und Professor Baldassare Orsini (1732—1810), welcher hier eine beiläufige Erwähnung verdient als Verfasser eines dreibändigen Werkes „Della geometria e prospettiva pratica" (Rom 1773), in dem wir nichts Neues gefunden haben. Dagegen haben jene Ideen und Methoden einen warmen Bewunderer an einem deutschen Universitätsprofessor Johann Gustav Karsten (1752—1787) (vgl. S. 357) gefunden, der aus ihnen die Anregung zur Abfassung eines Teils seines kolossalen (achtbändigen) Werkes „Lehrbegriff der gesamten Mathematik" (Greifswald 1767—1777) schöpfte, das er während seines Professorats in Halle a. S. herausgab.[1]) Es ist der vorletzte Band (1775) dieses Handbuchs („Die Optik und die Perspektive"), noch genauer sein II. Teil (S. 110 bis 928), wo der auch vom Verfasser zugestandene Einfluß von Lambert unverkennbar ist.[2]) Aber Karsten hat, wenn er auch Begriffe und Verfahren auseinandersetzt, die nicht sein Eigentum waren, in dieselben ein Element eingeführt, dessen Hilfe Lambert abgelehnt hatte, nämlich die Rechnung; auf diese Weise gelang es ihm, zu den Resultaten seines Vorgängers manches hinzuzufügen.

Nicht alle Kapitel der genannten Karstenschen Arbeit verdienen eine besondere Erwähnung in einer Geschichte der Linearperspektive; keines aber darf von dem außer Betracht gelassen werden, der eine

wir derselben keine Erwähnung getan, da sie eher zur Physik als zur Geometrie gehört (vgl. S. 580).

[1]) Mit Recht bemerkt Karsten, daß die von Lambert vorgeschlagenen Konstruktionen so einfach sind, daß sie nicht von der Kritik betroffen werden, die die Inauguraldissertation A. L. F. Meisters (1724—1788) „Instrumentum scenographicum, cujus ope ichonographia et orthographia invenire scenographiam exponit" (Göttingen 1753) enthält. [2]) Die Perspektive in das System der gesamten Mathematik einzufügen, entspricht einer Gewohnheit, die man bis auf das Mittelalter zurückführen kann, und welcher sich, schon vor Karsten, A. G. Kästner (1719—1780) in seinem Unterricht getreulich anschloß; man sehe (vgl. S. 355) seine „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie und Perspektive" (I. Aufl., Göttingen 1758).

klare Idee von der Arbeit sich oder anderen verschaffen will. Indem Karsten der Gewohnheit seiner Zeit folgt, geht er zunächst von der Voraussetzung aus (I. Abschnitt), daß die Tafel vertikal, und daß ferner eine horizontale Ebene gegeben sei, auf welche alle betrachteten Figuren orthogonal projiziert werden; er weist sofort darauf hin, daß, wenn man die Perspektive der Punkte jener Horizontalebene zu finden weiß (Problem der „perspektivischen Ichonographie"), es dann auch leicht ist, diejenige eines beliebigen Punktes zu zeichnen (Problem der „Scenographie"). Nachdem er so die Wichtigkeit der perspektivischen Ikonographie außer Zweifel gesetzt hat, wendet sich der Verfasser zu ihrer Entwicklung und Anwendung (Abschnitt II bis IV) — wobei er interessante historische Nachrichten gibt — und den Gebrauch des Proportionszirkels erklärt, dessen Anwendung auf die Perspektive er auf Desargues zurückführt. Im V. Abschnitt werden in einfacher Weise die Formeln gefunden, welche die Cartesischen orthogonalen Koordinaten x, y der Horizontalebene mit den Koordinaten t, u ihrer Perspektive verbinden; in ihrer einfachsten Form lauten diese Formeln folgendermaßen:

$$t = Dx : L - x, \quad u = Dy : L - x,$$

deren Ähnlichkeit mit den bereits von Marolais und la Caille (s. S. 603) gefundenen augenscheinlich ist; D und L sind gewisse Konstanten der Aufgabe. Im VI. Abschnitt werden die Prinzipien der Szenographie gelehrt und in dem folgenden die Vorschriften zur Ausführung der Perspektive auf eine nicht vertikale Tafel. Hier verallgemeinert der Verfasser unter anderem auch die obigen Formeln und erweitert so bedeutend ihr Anwendbarkeitsgebiet; z. B. lernt man so alle Prinzipien zur Zeichnung der Schatten, Prinzipien, welche im XI. Abschnitt, unter der Überschrift „Allgemeine Theorie der Sciagraphie"[1]), entwickelt sind. Nicht der Wissenschaft, sondern der Kunst sind die Abschnitte IX und X gewidmet. Hier werden die Vorschriften gegeben, nach welchen die Lage des Augenpunktes gewählt werden muß. Weiter wird auf die Übelstände hingewiesen, die entstehen, wenn man eine Perspektive von einem Punkte aus betrachtet, der mit dem vom Zeichner der Perspektive gewählten Augenpunkte nicht zusammenfällt. Um nun aber solche Übelstände vermeiden zu können, sind Normen nötig, die dazu befähigen, die Lage des Augenpunktes für eine gegebene Perspektive zu finden; sie werden im

[1]) Nach Karsten wurde dieser Name zum ersten Male in der Abhandlung von J. M. Hase (1684—1742), „Sciagraphiae integri tractatus de constructionis mapparum omnis generis" (Lipsiae 1717) gebraucht.

XII. Abschnitt gelehrt, welchen man, wie den VII. Abschnitt der „Freyen Perspective", als einen Teil der heutigen Photogrammetrie ansehen kann. In der weiteren Erörterung geht Karsten von der Voraussetzung aus, daß das Projektionszentrum in das Unendliche rücke, und bestimmt die Modifikationen (Abschnitt XIII und XIV), welche die vorigen Konstruktionen, Formeln und Sätze erleiden; wir müssen dazu bemerken, daß unser Geometer, dem Beispiel Lamberts (I. Auflage) folgend, den Namen „orthographisch" auf alle Parallelprojektionen anwendet. Die Abschnitte XV—XVII enthalten eine interessante Theorie von den Kegelschnitten als Perspektiven des Kreises betrachtet. Als eine Fortsetzung derselben können die Abschnitte XXVIII bis XXX angesehen werden, wo die Projektionen der Kegelschnitte untersucht werden und insbesondere die Frage behandelt wird, welche Lage man dem Augenpunkt geben muß, um von einem gegebenen Kegelschnitt eine Projektion gegebener Art zu erhalten. Die übrigen Abschnitte XIX—XXVIII behandeln einen Gegenstand, welchen man heute lieber der mathematischen Geographie oder der Geodäsie zurechnet, nämlich die verschiedenen Arten der Projektion einer Kugel auf eine Ebene: stereographische, orthographische und Zentralprojektion. Es hat keinen Zweck, hier dabei zu verweilen.

Der Erfolg des Karstenschen Werkes erhellt daraus, daß sehr bald der Wunsch nach einer zweiten Auflage laut wurde. Diese Neuauflage wurde nach einem etwas anderen Plan hergestellt und trägt auch den Titel „Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften" (1778—1786). Hier wird im IV. Band, betitelt „Die optischen Wissenschaften" (1780), die Perspektive behandelt; aber während ihr in der 1. Auflage 818 Seiten gewidmet waren, muß sie sich in der zweiten mit ungefähr 100 Seiten begnügen. Die Abschnitte über die Kegelschnitte und die Kugelprojektionen fehlen hier nämlich; indem so die Behandlung von diesen ihr fremden und hinderlichen Bestandteilen befreit wird, wird sie zugleich einfacher und nähert sich den modernen Behandlungen dieser Disziplin.

Das wichtigste der elementaren Verfahren zur eindeutigen Darstellung einer Kugelfläche auf der Ebene wurde kurz darauf von einem berühmten Lehrer behandelt in seiner Antrittsvorlesung an der Universität Halle. Wir meinen die Abhandlung „Eine geometrische Entwicklung der Eigenschaften der stereographischen Projektion" (Halle 1788), in der Georg Simon Klügel die Überlegenheit der Geometrie über die Analysis beweisen wollte in Fragen, welche kurz vorher Karsten mit Hilfe der analytischen Trigonometrie behandelt hatte. Um seinen Zweck zu erreichen, hat der Verfasser nicht nur die charakteristischen Eigenschaften der stereographischen Projektion geometrisch abgeleitet, sondern auch, durch Anwendung dieses Verfahrens, die Hauptfragen der sphärischen Trigonometrie und der Gnomonik ohne Zuhilfenahme der Rechnung gelöst.

Im Monat März desselben Jahres (1788) erschien in Verona das Büchlein „I. Torelli Veronensis, Elementa perspectivae libri II. Opus postumum recensuit et edidit J. B. Bertolini". Sein Verfasser ist Joseph Torelli[1]), welcher in Verona am 3. November 1721 geboren wurde, die juristische Doktorwürde in Padua erhielt und sich dann vollständig der Literatur und den Wissenschaften widmete. Außer einem an Poleni gerichteten Briefe, welcher „De rota sub aquis circumacta" (Verona 1747) handelt, hat er eine Arbeit philosophischer Natur „De nihilo geometrico" (Verona 1758; vgl. Absch. XXVI) und eine andere in euklidischem Stil „Geometrica" (Verona 1769) geschrieben, in welcher die folgenden drei Probleme aufgelöst sind: I. Durch zwei in der Ebene eines Kreises gelegenen Punkte einen anderen Kreis durchgehen zu lassen, welcher den ersten berührt. II. Gegeben zwei geradlinige Strecken; über denselben zwei ähnliche Kreissegmente zu beschreiben, deren Bogen sich berühren. III. In einem Punkte der Quadratrix des Dinostratus[2]) die Tangente zu ziehen[3]). Torelli starb in seinem Vaterlande am 18. August 1781. Die Früchte seiner langjährigen Forschungen über die archimedischen Handschriften wurden von der Universität Oxford angekauft und durch A. Robertson veröffentlicht; so entstand ein prächtiger Folioband, welcher Torelli die Unsterblichkeit sichert. Handschriftlich hinterließ Torelli auch einige Kapitel über die Perspektive, wozu er als Einleitung eine Abhandlung schreiben wollte, um zu beweisen, daß diese Lehre bereits den Alten wohl bekannt war. Sie bilden kein eigentliches Lehrbuch, da sie Erklärungen, aber nicht Methoden enthalten; man darf auch nicht verschweigen, daß die häßlichen Figuren den Text eher verdunkeln, als ihn erläutern und dazu beigetragen haben werden, das Buch bei den Künstlern in Mißkredit zu bringen.

[1]) Vgl. die Lobrede, welche der berühmte Dichter Pindemonte auf Torelli schrieb, und die im III. Bd. der „Mem. della Soc. It. delle Scienze" (1784) veröffentlicht wurde. [2]) Die als „quadratrice scalena" bezeichnete Kurve ist von der gewöhnlichen Quadratrix nicht verschieden. [3]) Torelli gibt den griechischen Text (und die lateinische Übersetzung) des Passus der „Collectiones mathematicae" von Pappus, welcher jene Kurve betrifft, nach einer Vatikan-Handschrift, welche wahrscheinlich dieselbe ist, welche Hultsch benutzte; er schlug einige Varianten vor, welche dieser Gelehrte nicht gekannt zu haben scheint.