## Lehrbücher der Elementargeometrie.

Ihre schon längst begonnene sowohl quantitative als auch qualitative Entwicklung fortsetzend, bereicherte sich im Laufe der zu betrachtenden 40 Jahre die lehrende elementargeometrische Literatur mit einer sehr ansehnlichen Anzahl neuer Errungenschaften. Infolge des unvollständigen bibliographischen Materials, das uns zu Gebote stand, sind die deshalb zum Teil verminderten und nur annähernd richtigen Ziffern, die die oben erwähnte Anzahl ausdrücken, folgende: 55 Gesamtlehrbücher, welche neben den Teilen, welche allen oder auch einigen Abteilungen der elementaren Mathematik gewidmet sind, auch Teile, die ausschließlich die elementare Geometrie betrachten, enthalten, 35 spezielle elementargeometrische Lehrbücher, 35 Übersetzungen der Elemente des Euklid und 10 Übersetzungen der Werke, die im Laufe der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts erschienen sind. Folgende Tabelle stellt die Verteilung dieser Ziffern in den Hauptländern Europas dar:

| Länder | Sammlungen von Lehrbüchern | Lehrbücher der Elementargeometrie | Euklids Elemente | Übersetzungen der Schriften der 1. Hälfte d. 18. Jahrh. | Übersetzungen der Schriften der 2. Hälfte d. 18. Jahrh. |
|---|---|---|---|---|---|
| Deutschland | 24 | 10 | 13 | — | 1 |
| England | 1 | 3 | 8 | — | — |
| Frankreich | 13 | 4 | 3 | — | — |
| Italien | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| Niederlande | 2 | 9 | 3 | 2 | — |
| Polen | 8 | — | 1 | 2 | 3 |
| Rußland | 2 | 6 | 2 | 3 | 6 |
| Schweden | — | — | 3 | 2 | — |

Einige der hier angegebenen Bücher sind mehrmals verlegt worden. Zur Ergänzung und Erklärung dieser Tabelle ist folgendes zu bemerken. Werke der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, deren Übersetzungen in der Tabelle angegeben sind, waren folgende: Christian Wolffs Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften (Halle 1710) waren ins Holländische, Polnische, Russische und Schwedische übersetzt. Clairaut, Éléments de géometrie (Paris 1741) waren ins Schwedische, Holländische und Polnische übersetzt. Georg Wolf-gang Krafft, Kurtze Einleitung zur theoretischen Geometrie, zum Gebrauche der studirenden Jugend in dem Gymnasio bey der Academie der Wissenschaften in St. Petersburg (1740). Weidlers Institutiones mathematicae (Wittenberg 1718). Diese beiden Werke waren nur ins Russische übersetzt. Das letzte Werk, ebenso auch das obengenannte Buch Wolffs sind mehrmals auch bei sich in Deutschland verlegt worden. Zu den Übersetzungen des Werkes Wolffs in der Tabelle ist auch die 2. italienische Auflage des Buches Christiani Wolfii[1]) Elementa Matheseos universae[2]) mit eingerechnet. Als Werke, die in einiger Beziehung zu den Elementen des Euklid stehen, obwohl sie in die Tabelle nicht eingeführt sind, sind folgende anzugeben: in England R. Simson, The Elements of Euclid. Notes critical and geometrical (Glasgow 1762 und 1781) und The philosophical and mathematical Commentaries of Proclus, surnamed Plato's Successor, on the I Book of Euclids Elements and his life by Marinus etc. (London 1788); in Deutschland Euclid's Data verbessert und vermehrt von R. Simson, übersetzt von Ch. Schwab (Stuttgart 1780, 8°). In England, Deutschland und Frankreich beansprucht die vollständige Abwesenheit der übersetzten Werke aus anderen Sprachen besondere Beachtung. In Frankreich und England war nicht eine einzige Übersetzung vorhanden. In Deutschland nur eine, nämlich die Übersetzung aus dem Holländischen des Werkes von Swinden, Anfangsgründe der Meßkunde. Die größte Zahl der Übersetzungen erschien in den am wenigsten zivilisierten Ländern, nämlich in Rußland, und schon in geringerem Maße in Polen. In diesen beiden Ländern trifft der Forscher wohl fast zum erstenmal Übersetzungen an, die nicht nach gedruckten Ausgaben, sondern nach Handschriften angefertigt sind. Als derartige Übersetzungen sind anzugeben: in Rußland Eulers Geometrie[3]) und das bereits oben angeführte Werk Kraffts und in Polen „Geometrie“ von Lhuilier[4]).

Die wichtigste der Angaben, die die angeführte Tabelle dem Forscher liefern, ist diejenige, welche die Beziehung der „Elemente“ des Euklid zu dem Fache des Unterrichts der Geometrie in den verschiedenen Ländern Europas bezeichnet. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, daß die „Elemente“ des Euklid ihre uralte Stellung, als der einzigen Lehrbücher der Elementargeometrie, nur in England in der

[1]) Diese Vorlesungen III², S. 529—531. [2]) Editio secunda veronensis. Veronae 1788—98, vol. 5; 4°. [3]) Leonh. Eulers Geometrie, zum Gebrauche in dem Gymnasio bei der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Aus dem Lateinischen. 1765. [4]) Geometrie für die Volksschulen. 1. Teil. Warschau 1780. 2. Teil. Krakau 1781.



zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts behalten haben. Ungeachtet dessen, daß Deutschland nach der Anzahl der Ausgaben der Werke des Euklid alle anderen Länder übertrifft, kann dennoch von dem vorherrschenden, geschweige dem ausschließlichen Gebrauch beim Unterricht der Elementargeometrie keine Rede sein. Das bezeugen uns mit voller Deutlichkeit die noch viel bedeutenderen Zahlen der Lehrbücher, die von einheimischen Autoren verfaßt und verlegt worden sind. Was Frankreich anbetrifft, kann der direkte Gebrauch der „Elemente“ des Euklid beim Unterricht der Elementargeometrie jetzt als vollständig aufgehoben betrachtet werden. Die übrigen Hauptländer Europas endlich nehmen Mittelstellungen zwischen Deutschland und Frankreich ein, dennoch näher an Frankreich stehend. Auf diese Weise erreichte das Bestreben, die „Elemente“ des Euklid beim Unterricht der Elementargeometrie durch zweckentsprechendere Lehrbücher zu ersetzen, was der Philosoph Ramus als erster ausgesprochen und im Laufe der Zeit sich immer verstärkt hatte, in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts bedeutende Resultate. Zur selben Zeit macht auch das Verständnis der Ursachen des obengenannten Bestrebens Fortschritte, obgleich in geringerem Maße. Da die hauptsächlichsten dieser Gründe sehr tief im Wesen der Sache selbst liegen, war das Verständnis derselben in der zu betrachtenden Zeit noch nicht erreicht. Man hatte bloß Zeit, diejenigen ihrer Folgen kennen zu lernen, die ohne tiefe und umfassende historische Kenntnisse dem unmittelbaren Beobachter zugänglich waren.

In demjenigen Lande, wo die zu betrachtende Strömung sich am meisten kundgegeben hat, und deshalb beinahe ihr Ziel voll erreicht ist, nämlich in Frankreich begegnet der Forscher der Angabe dieser oder jener Ursache bei vielen Schriftstellern. Nach den Worten d'Alemberts[1]) sind die Beweise des Euklid, ungeachtet ihrer Genauigkeit, dem Verständnis so schwer zugänglich, daß es vielen berühmten Mathematikern nicht gelungen ist, ihrer vollständig Herr zu werden. Bouillau z. B. gestand offen, daß er sie niemals gut verstand, und der noch berühmtere Vieta verdächtigte ihn des Paralogismus, was nur aus mangelhaftem Verständnis zu erklären ist. Im Discours préliminaire zu derselben Ausgabe[2]) sagt Bossut, daß viele, vollkommen die Vorzüge des prachtvollen Werkes des Euklid anerkennend, ihm doch Vorwürfe machen wegen zu großer Anzahl von Bestimmungen und scholastischen Einteilungen, wegen zu strenger und verfeinerter Beweisführung von Wahrheiten, die schon an und

[1]) Encyclopédie méthodique. Mathématiques, Tome II, p. 129. [2]) Ebenda, Tome I, p. IX.

für sich vollkommen klar sind. Man ist geneigt, anzunehmen, bemerkt er weiterhin, daß es den spitzfindigen und kleinlichen Methoden griechischer Sophisten gelungen ist, auch in die exakten Wissenschaften einzudringen. Später, in seiner Histoire générale des mathématiques[1]), die den erweiterten und ergänzten Discours darstellt, spricht derselbe Autor vom Charakter und den Eigenschaften der Beweise des Euklid. Letztere verursachen nach seinen Worten Anfängern große Schwierigkeiten, weil sie indirekt, nicht selten lang und verwickelt sind. Gerade diese Eigenschaften zwangen viele der neuesten Gelehrten bei der Herausgabe der „Elemente" des Euklid leichtere und einfachere Beweise anzuführen. Andere jedoch fanden es am nützlichsten, in ihren eigenen Aufsätzen sich ganz und gar von der Methode des Euklid zu entfernen. Die bedeutendsten aus der Zahl der ersten, die Bossut beim Namen nicht anführt, waren selbstverständlich in England: Robert Simson mit seinem Werk The Elements of Euclid. Notes critical and geometrical[2]) und James Williamson mit seiner Ausgabe The Elements of Euclid, with dissertations[3]) und in Deutschland Lorenz mit seiner vollen Ausgabe der „Elemente" des Euklid[4]) und der teilweisen: der sechs ersten Bücher[5]), des elften und zwölften[6]), und der ersten acht Bücher mit dem elften und zwölften[7]). Montucla, dieser überzeugte Anhänger der „Elemente" des Euklid, verweilt besonders in der ihnen geweihten Apologie bei der Unzufriedenheit vieler Geometer über die Verteilung des Gegenstandes[8]). Die Verteidigerrolle, die Montucla in bezug auf die „Elemente" des Euklid auf sich genommen hatte, verhinderte ihn jedoch nicht, am Ende seiner Apologie den Nutzen der Werke, die von den neuesten Autoren als Ersatz derselben verfaßt worden sind, anzuerkennen. Sich der Meinung der Gelehrten, daß die Erlernung der Geometrie nach den „Elementen" des Euklid für Anfänger sehr schwierig sei, anschließend, findet er es für nötig, die Geometrie für Anfänger zugänglicher zu machen, hauptsächlich denjenigen, die nicht beabsichtigen, Geometer von Fach zu werden.

Von den Geometern der 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts, die besonders scharf ihre Unzufriedenheit über die Verteilung des Materials in den Elementen aussprachen, genügt es auf Lacroix hinzuweisen, welcher in seinem Werk „Essais sur l'enseignement" diese Verteilung als unordentlich kennzeichnet. Als Beispiel nimmt er übrigens nur

---

[1]) Hist. gén. d. math., Tome I, p. 29. [2]) Glasgow 1762, 1781 usw., 8 Auflagen, 8°. [3]) Oxford 1781—90; 2. vol. 4°. [4]) In 15 Büchern, Halle 1781; 2. Aufl. 1798, 8°. [5]) Halle 1773. [6]) Halle 1781, 8°. [7]) Halle 1798, 8°. [8]) Histoire des mathématiques I, p. 218—222.



eines, dafür jedoch besonders wichtiges, nämlich Euklids Folgerung des Grundsatzes der Theorie der proportionalen Linien aus der Vergleichung der Flächen der Dreiecke.

Womit Lacroix in unmittelbare Berührung kam, und was ihn dabei besonders unangenehm berührte, waren die durch die „Elemente" des Euklid und durch ihre seit Jahrhunderten erworbene Autorität in der Wissenschaft und im Unterricht hervorgerufenen Schwierigkeiten für die neueren Autoren der Elemente der Geometrie. Diese Schwierigkeiten sieht er erstens in der Konkurrenz mit den Werken des Euklid, welche immer sehr gefährlich für die neuesten Autoren ist, ungeachtet jeden Beweises ihrerseits zugunsten des gewählten Planes; zweitens in der Notwendigkeit, nach dem Beispiel des Euklid und überhaupt der griechischen Geometer sich der synthetischen Methode zu bedienen auf einem Gebiete, wo alle anderen Teile sich der analytischen bedienen, wodurch sie dem Lernenden zugänglicher und geläufiger werden; und drittens in der drohenden Möglichkeit, zu jeder Zeit Vorwürfe sowohl von den Anhängern als auch den Gegnern des Euklid zu erhalten. Von ersteren für die Unzulänglichkeit in der Strenge der Beweise, die von den Alten festgesetzt sind, und von letzteren für die Unterwerfung dieser Forderung, welche kleinliche, nur den Verstand verwirrende Formen verursachen, als auch für die Beseitigung der analytischen Prozesse, welche die Methode der Erfindung darstellen.

Das kritische Verhalten zu den „Elementen" des Euklid, welches sich in den Kreisen der Mathematiker festgestellt hatte, und welches eine große Anzahl Arbeiten, die der Erörterung der Elemente der Geometrie gewidmet sind, hervorgerufen hatte, mußte vor jeden philosophischen Denker die Frage stellen, was eigentlich die Elemente der Geometrie seien. Woraus soll sich ihr Inhalt bilden? Die Aufsätze d'Alemberts in der Encyclopédie méthodique[1]) waren in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wohl nahezu die bedeutendsten Versuche, diese Frage zu lösen.

D'Alembert unterscheidet in jeder Wissenschaft, darunter auch in der Geometrie, zwei Arten von Elementen. Wenn man in einer Wissenschaft alle Sätze oder Wahrheiten, welche die Grundlage zu allen anderen bilden, absondert, und sie in ein Ganzes vereinigt, erhält man die Elemente der ersten Art. Sie bilden sozusagen den Keim, aus welchem alle Teile samt ihren Details entwickelt werden können, was daraus folgt, daß sie alle allgemeinen Wahrheiten und

---

[1]) Élémens des sciences. Mathématiques, Tome I, p. 617—625. Des élémens de Géometrie. Ebenda, Tome II, p. 133—136.

Sätze, welche die Elemente bilden, wenn auch nicht augenscheinlich, alle anderen Wahrheiten enthalten. Daraus folgt also, daß in ihren Elementen erster Art jede Wissenschaft in ihrem vollen Umfang enthalten ist. In der Geometrie würden nicht nur diejenigen Sätze solche Elemente sein, die die Prinzipien der Ausmessung und der Eigenschaften der ebenen Figuren enthalten, sondern auch diejenigen, die die Prinzipien der Anwendung der Algebra auf Geometrie und der Differential- und Integralrechnung bei krummen Linien enthalten.

Wahrheiten oder Sätze, die die Wissenschaft bilden, können auch von einem anderen Standpunkt aus betrachtet werden. Einige von ihnen können in sich selbst oder auch in ihren Folgerungen den Gegenstand auf die einfachste Art betrachten. Die Gesamtheit solcher Wahrheiten oder Sätze samt ihren genau angeführten Folgerungen stellen die Elemente der zweiten Art dar, zwar allgemein gebräuchlicher, jedoch vom Standpunkt der Philosophie aus den Elementen der ersten Art viel nachstehend. Dieselben stellen folglich die detailliertere Betrachtung der einfachsten Teile des Gegenstandes dar. In der Literatur der Geometrie bilden sie die Elemente der gewöhnlichen Geometrie, welche nichts weiter betrachtet, als die Eigenschaften der ebenen Figuren und des Kreises, und deshalb, wenn auch mit allen Einzelheiten, dennoch den einfachsten Teil des Gegenstandes enthalten.

Weiterhin die einzelnen Stadien der Entwicklung jeder Wissenschaft betrachtend, dargestellt erstens durch die Anhäufung neuer Kenntnisse, und zweitens der sie ablösenden Systematisierung dieser Kenntnisse, erklärt d'Alembert das Unzureichende der Traktate, die die ersten Versuche genannter Systematisierung darstellen, damit, daß die Autoren gewöhnlich nicht zu den Erfindern und Erschaffern der Wissenschaften gehören. Jeder Traktat einer Wissenschaft, ob voll oder bloß ihre Elemente darstellend, muß nach seiner Meinung derjenigen Richtung folgen, nach der der Erfinder ging, da einzig nur diese Richtung als fähig erklärt werden kann, den Zusammenhang der Wahrheiten oder Sätze der Wissenschaft in ihrem natürlichen Zustand darzustellen. D'Alembert vergißt dabei nicht, auch auf diejenigen Fälle hinzuweisen, in denen der Erfinder selbst nicht imstande erscheint, den schon durchgegangenen Weg wieder einzuschlagen, was jedesmal geschieht, wenn er während seiner Forschungen sich einer gewissen Art Instinkt überläßt, anstatt der Spekulation[1]). Nach weiteren vier Seiten[2]) kehrt d'Alembert zu dem gleichen

[1]) Élémens des sciences, p. 618—619. [2]) Ebenda, p. 622—623.



Gegenstand zurück. Nachdem er die Frage stellt, ob es ratsam ist, sich beim Auslegen der Elemente der Reihenfolge, an welche sich die Erfinder hielten, anzuschließen, spricht er folgende Gedanken aus: Zweifellos ist diese Reihenfolge überhaupt die vorteilhafteste, als die am meisten dem Gedankengang entsprechende. Die Vernunft lehrend, klärt sie auf, weist den Weg, welcher weiter zu verfolgen ist, und gibt die Möglichkeit, auf diesem Wege jeden folgenden Schritt vorauszusehen. Diese Reihenfolge ist es nämlich, die als analytische Methode bezeichnet wird, die von zusammengesetzten zu abstrakten Ideen führt, aufsteigend von bewußten Schlußfolgerungen zu unbewußten Prinzipien, und die Entwicklung der letzten durch die Verallgemeinerungen der ersten erreicht.

Für die Elemente der Geometrie schlägt d'Alembert folgenden Plan vor. Indem er ihre gewöhnliche Teilung in Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie als nicht zutreffend erklärt, weil sie neben der Betrachtung der geraden Linien und der Ebene die Betrachtung der Kreislinie und der sphärischen Figuren vergißt, teilt er sie in die Geometrie der geraden Linien und der Kreislinie, Geometrie der Flächen und Geometrie der Körper. Der erste dieser drei Teile zerfällt in zwei Abteilungen. In deren erster werden die Linien ihrer Lage nach betrachtet, und in der zweiten ihre Beziehungen zueinander. Ungeachtet dessen, daß die gerade Linie unvergleichlich einfacher ist, als die Kreislinie, müssen beide in den Elementen dennoch zusammen betrachtet werden, und nicht jede besonders, da die Eigenschaften der Kreislinie ungemein nützlich sind beim Beweise dessen, was zur Vergleichung der geraden Linien ihrer Lage nach dient. Der Satz von der Ausmessung des Winkels mittels des Kreisbogens, beschrieben aus seinem Scheitel als Zentrum, und das Prinzip der Kongruenz bilden zusammengenommen die Basis des ganzen ersten Teils der Geometrie der Linien in den Elementen, da mit ihrer Hilfe alle ihre Sätze bewiesen werden können. Die Erörterung dieses ersten Teiles abschließend, muß der Verfasser zur Auslegung des zweiten Teiles übergehen, als dessen Grundsatz, nach d'Alemberts Meinung, das Theorem von der Teilung der Seiten des Dreiecks in proportionale Teile durch eine seiner Basis parallele Linie dient. Um dieses Theorem zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß wenn die erwähnte Parallele durch die Mitte einer der beiden Seiten des Dreiecks geht, sie auch durch die Mitte der anderen geht, weil danach leicht zu beweisen sein wird, daß im Falle der Kommensurabilität des Abschnittes mit der ganzen Seite die erhaltenen Abschnitte proportional sind. Was den entgegengesetzten Fall anbetrifft, bleibt nur übrig, mittels der apagogischen

Methode zu beweisen, daß das eine von den betrachteten Verhältnissen weder kleiner noch größer sein kann als das andere, es ihm folglich gleich sein muß. Die apagogische Methode sowohl in diesem als auch in den meisten anderen Fällen, wo es sich um inkommensurabele Größen handelt, wird an Stelle der direkten Beweise, welche hier nicht anwendbar sind, aus folgenden Gründen gebraucht. In den Begriff der inkommensurabelen Größen gehört, wenn auch nicht augenscheinlich, auch die Idee der Unendlichkeit, welche sich uns immer als negativer Begriff der Endlichkeit darstellt, was auch als natürliche Folge hat, daß alles, was die mathematische Unendlichkeit anbetrifft, unmöglich direkt und a priori zu beweisen ist. In vollkommener Anerkennung der Schwierigkeiten, welche die inkommensurabelen Größen Anfängern verursachen, gibt d'Alembert den Rat, sie wegen ihrer Wichtigkeit in der Geometrie und besonders in der Theorie der Proportionen der Linien lieber früher als später in die Elemente einzuführen. Dabei ist es unmöglich, ohne den einzigen Satz auszukommen, den die Theorie der inkommensurabelen Größen verlangt und der die Grenzen der Größen behandelt. Dieser Satz lautet folgendermaßen: Größen, welche die Grenzen einer und derselben Größe bilden, oder Größen, welche eine und dieselbe Grenze haben, sind einander gleich.

Die Geometrie der Flächen behandelt, nach d'Alemberts Ansicht, ihre Ausmessung, ebenso wie die Geometrie der Körper die Ausmessung des Rauminhalts behandelt. Als Grundprinzip beim Ausmessen der ersten dient das Prinzip der Ausmessung des Rechtecks, und in der zweiten das Prinzip der Ausmessung des rechtwinkligen Parallelepipedons. Die Schwierigkeit, die wir in der Geometrie der Körper antreffen und der keine in der Geometrie der Flächen entspricht, liegt in dem Satze von dem Inhalte der Pyramide, der den dritten Teil des Inhalts eines Parallelepipedons darstellt, welches mit der Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe hat. Um diesen Satz zu beweisen, ist es notwendig, zuerst den Satz von der Volumengleichheit der Pyramiden, die gleiche Grundfläche und Höhe haben, zu beweisen, was leicht zu bewerkstelligen ist mittels der Exhaustionsmethode. Der gleichen Methode oder der Methode der Grenzen muß man sich in der Geometrie der Flächen bedienen, beim Messen des Flächeninhalts des Kreises und in der Geometrie der Körper beim Berechnen der Oberfläche und des Inhalts der Kugel. Zu diesem Zweck muß man z. B. im ersten Fall zeigen, daß die Grenze des Flächeninhalts beim eingeschriebenen oder umgeschriebenen Vieleck das Produkt des Umfanges in die Hälfte des Radius ist, und danach, weil augenscheinlich die Fläche des Kreises als dieselbe



Grenze erscheint, endgültig daraus schließen, daß die Fläche des Kreises das Produkt des Umfanges mit dem halben Radius ist, oder des Radius mit dem halben Umfang.

Von der Methode der Grenzen spricht d'Alembert auch in den Abhandlungen Différentiel[1]) und Limite[2]). In der zweiten Abhandlung, deren Hauptteil dem Abbé de la Chapelle[3]) gehört, bemüht sich d'Alembert, dessen Definition der Grenzen klarer und strenger zu machen. De la Chapelle gab folgende Definition: Eine Größe ist dann die Grenze einer anderen Größe, wenn die zweite der ersten näher als jede gegebene Größe kommen kann, wie klein der Abstand auch vorausgesetzt würde, dabei aber auf solche Weise, daß die sich annähernde Größe niemals diejenige übertreffe, der sie sich nähert; die Differenz zwischen einer solchen Größe und der Grenze erscheint auf diese Weise absolut undefinierbar. D'Alembert ergänzt diese Definition dahin, daß die Grenze niemals zusammenfällt, oder niemals gleich wird mit derjenigen Größe, als deren Grenze sie erscheint; daß sie jedoch, sich ihr immer mehr nähernd, sich von ihr so wenig als nur möglich unterscheiden kann. Der Kreis z. B. ist die Grenze der eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke, weil er niemals mit ihnen zusammenfällt, obgleich dieselben sich ihm bis zur Unendlichkeit nähern können. Danach, um an einem Beispiel die Bedeutung dieser Bemerkung zur Beleuchtung einiger mathematischen Sätze zu zeigen, verweilt er bei der Untersuchung des Ausdruckes der Summe der unendlich abnehmenden geometrischen Progression. Überhaupt räumt d'Alembert der Theorie der Grenzen wichtige Bedeutung ein, weil er in ihr die Grundlage der wahren Metaphysik der Differentialrechnung sieht. In der Abhandlung Différentiel führt d'Alembert, sich des ersten der beiden von de la Chapelle angeführten Grundsätze der Methode der Grenzen bedienend, zugleich auch seinen Beweis an, in welchem er sich der apagogischen Methode bedient. Dieser Satz und der ihm beigefügte Satz von de la Chapelle sind in seiner Schrift folgendermaßen dargestellt: 1. Wenn jede von zwei Größen die Grenze ein und derselben Größen darstellt, so sind diese Größen einander gleich. 2. Wir nehmen an, daß $A \times B$ das Produkt zweier Größen $A$, $B$ ist. Nehmen wir ferner an, daß $C$ die Grenze der Größe $A$, und $D$ die Grenze der Größe $B$ ist, so folgt weiter, daß das Produkt $C \times D$ unbedingt die Grenze von $A \times B$, dem Produkt zweier Größen $A$, $B$, sein wird. Den Beweis dieser Sätze führt der Verfasser nicht an, den Leser an

[1]) Encyclopédie méthodique. Mathématiques I, p. 520—526. [2]) Ebenda II, p. 309—310. [3]) Ebenda I, p. 521.

sein Werk „Institutions de Géométrie“ verweisend, um sich mit ihm vertraut zu machen. Was jedoch den erwähnten Beweis d'Alemberts des ersten Satzes anbetrifft, so besteht er aus folgendem: Wir nehmen an, daß $Z$ und $X$ die Grenzen ein und derselben Größe $Y$ sind, ich sage $X = Z$, denn wenn zwischen ihnen irgend eine Differenz $V$ wäre, so wäre $X = Z \pm V$. Aber nach Voraussetzung kann die Größe $Y$ sich beliebig an $X$ nähern, d. h. die Differenz zwischen $X$ und $Y$ kann beliebig klein sein. Da jedoch $Z$ sich von $X$ um die Größe $V$ unterscheidet, so folgt daraus, daß $Y$ sich nicht mehr als bis zur Größe $V$ dem $Z$ nähern kann, und folglich ist $Z$ nicht die Grenze von $Y$, was der Voraussetzung widerspricht[1]).

Dem Abbé de la Chapelle gehört auch in der Encyclopédie der Artikel über die Exhaustionsmethode an[2]). Er definiert sie als Mittel zum Beweise der Gleichheit zweier Größen, indem man aufdeckt, daß ihre Differenz kleiner als jede darstellbare Größe ist, und ebenso beim Gebrauch der apagogischen Methode. Aus dem Grunde, daß ungeachtet der Einfachheit des Prinzips der Exhaustionsmethode deren Anwendung nicht selten die Beweise sehr lang und kompliziert macht, schlägt d'Alembert vor, sie durch das Prinzip des unendlich Kleinen zu ersetzen, indem er die völlige Identität der beiden Prinzipien zeigt, von denen das zweite bloß der verkürzte Ausdruck des ersten ist.

Um beim Verteilen des Materials strenger in der Reihenfolge und dem System zu sein, sollte die Behandlung der Kugelfläche zur Geometrie der Flächen gerechnet werden. Gleichzeitig gibt d'Alembert den Rat, die Theorie der Proportionen der Linien mittels des geometrisch bewiesenen Satzes, daß bei vier proportionalen Linien das Produkt der beiden äußeren dem Produkt der beiden inneren gleich ist, ebenfalls der Geometrie der Flächen näher zu bringen. Den Gebrauch der algebraischen Rechnung beim Beweis dieses Satzes, ebenso wie auch in allen anderen Fällen findet d'Alembert für die Elemente der Geometrie vollständig überflüssig, wegen der völligen Unfähigkeit dieser Rechnung, in irgend einem Maße bei deren Darstellung zur Erleichterung beizutragen. Als ein sehr nützliches, zur Entwicklung und Stärkung des Verstandes des Lernenden dienendes Resultat der zu betrachtenden Annäherung erscheint die Beobachtung, wie zwei einzeln betrachtete Theorien im Beweise verschiedener Sätze zusammentreffen, wie z. B. der Satz von dem Quadrate der Hypotenuse.

Nachdem d'Alembert seinen Plan für die Elemente der Geometrie dargelegt hat, bemerkt er, daß sowohl diese Darlegung als auch die allgemeinen Erwägungen, die im Artikel Éléments des Sciences ausgesprochen sind, alle beweisen, daß es nicht einen Geometer gibt, von dem gesagt werden könne, daß er erhaben über die Aufgabe sei, die Elemente der Geometrie zu verfassen; daß diese Zusammenstellung nur von einem Mathematiker ersten Ranges gut verfaßt werden kann, und daß endlich diese Aufgabe der Verfassung der bestmöglichen Elemente der Geometrie als würdig solcher Kräfte erscheine wie Descartes, Newton, Leibniz, Bernoulli und anderer. Als Gegensatz zu diesen idealen Forderungen spricht d'Alembert folgende unerbittliche Kritik der traurigen Gegenwart aus: Es gibt womöglich keine einzige Wissenschaft in der Gegenwart, von der Zukunft schon nicht zu reden, in der so viele den Elementen gewidmete Arbeiten erschienen sind als in der Geometrie. Und diese Werke sind größtenteils von mittelmäßigen Mathematikern verfaßt, deren geometrische Kenntnisse nicht über die Grenzen des Inhalts ihrer Schriften gehen, und die deshalb absolut nicht imstande sind, ihrem Gegenstande gerecht zu werden. Zu alledem ist es notwendig, noch hinzuzufügen, daß es beinahe keinen einzigen Autor der Elemente der Geometrie gibt, der in seinem Vorwort nicht mehr oder weniger schlecht spreche über seine Vorgänger in diesem Fache.

Die Bemerkungen, die dazu dienen, die Elemente der Geometrie nach Möglichkeit zu vervollkommnen, treffen sich nicht nur in der Darlegung des Planes derselben an, sondern auch im Schlußteil des ihnen gewidmeten Aufsatzes, ebenso auch in einigen anderen Aufsätzen von d'Alembert, die sich in der Encyclopédie méthodique befinden (z. B. „Axiome“, „Courbe“). Axiome sind vollständig nutzlos, sowohl für alle Wissenschaften im allgemeinen, als auch im einzelnen für die Geometrie. Was für eine Notwendigkeit z. B. kann in dem Axiom vom Ganzen und seinen Teilen sein, um zu sehen, daß die Hälfte einer Linie kleiner als die ganze Linie ist? Das Festlegen von Axiomen soll überhaupt nicht in den Elementen der Geometrie stattfinden. Völlig verboten soll auch die Auslegung von Definitionen werden, dieses besonders notwendigen Teiles. Definitionen sofort im Anfang anzuführen ohne besondere Art der Analyse bedeutet nicht nur gegen die gesunde Philosophie handeln, sondern auch vollständig entgegen dem natürlichen Gang der Gedanken. Ist es z. B. am Platze, direkt zu sagen: Die Fläche ist die Grenze eines Körpers, der keine Dicke hat? Ist es nicht besser, anfangs den Körper zu betrachten so wie er wirklich ist, und erst darnach zu zeigen, wie man mit Hilfe einer Reihenfolge von Abstraktionen zur

[1]) Encycl. méth. I, p. 521. [2]) Ebenda I, p. 703—704.

Vorstellung von einem Körper, als von einem räumlichen Gebilde, und danach erst durch eine neue Reihe von Abstraktionen zur aufeinander folgenden Betrachtung von Oberfläche, Linie und Punkt kommen kann? Endlich sind auch solche Fälle anzutreffen, besonders in vollen Kursen der Geometrie, bei welchen die Definition eines Gegenstandes erst nach seiner Analyse gegeben werden kann, d. h. wenn sie als Resultat derselben erscheint. Die gerade und die krumme Linie dürfen überhaupt nicht in den Elementen definiert werden, hauptsächlich aus dem Grunde, weil ihre Begriffe gar nicht auf noch einfachere Ideen zurückgeführt werden können. Das Streben zur Genauigkeit darf niemals zu einem Hasten nach pseudoidealer Genauigkeit werden. Den Raum z. B. soll man als solchen darstellen, wie ihn alle Menschen verstehen. Sich seinethalben nach Beispiel der Sophisten Schwierigkeit erschaffen, ist vollständig unnütz. Auch um nur gewöhnlich scheinende Genauigkeit zu erlangen, soll man sich nicht grober unvollkommener physischer Formen bedienen, zum Ersatz abstrakter mathematischer Hypothesen, wie z. B. ein Zeitgenosse d'Alemberts zum Ersatze des Begriffes einer geraden Linie sich der Vorstellung eines straff gespannten Fadens bediente.

Außer d'Alembert beschäftigten sich mit der Vervollkommnung der Elemente der Geometrie auch viele andere Gelehrte, sowohl in separaten Werken, als auch in Aufsätzen in Zeitschriften. Louis Bertrand[1]) (1731—1812), in Genf geboren, war bis zur Revolution Professor der Mathematik an der Akademie zu Genf, und vor diesem Amte lebte er längere Zeit in Berlin, wo er Mitglied der dortigen Akademie der Wissenschaften geworden war. In den Sitzungen derselben verlas er einige von seinen mathematischen Arbeiten und von den Mitgliedern stand er Euler am nächsten. In seinem für Anfänger bestimmten Kursus der elementaren Mathematik, Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, prise dans toute son étendue[2]), macht er sie zum Hilfsgegenstand für die Theorie des Kreises und der geraden Linie, als dem Hauptgebiet der Elemente der Mathematik. Den ganzen ersten Band[3]) der Arithmetik und der Algebra bestimmend, widmet er den größten Teil[4]) des zweiten Bandes[5]) den Elementen der Geometrie, die er ebenso wie d'Alembert in drei Teile teilt: der erste „Von der geraden Linie und Kreislinien“[6]), der zweite „Vom Ausmessen der Stücke der Ebene, die von geraden Linien und Kreisen begrenzt sind“[7])

[1]) Poggendorff, I, S. 171. [2]) 2 vol. Genève 1778. 4°. [3]) 1 + XXXII + 676 S. [4]) 388 S. [5]) 1 + 646 S. und XIX Tafeln. [6]) 160 S. [7]) 161—194 S.



und der dritte Teil, der sich mit dem Ausmessen krummer Flächen und Körper beschäftigt, die vom Kreise und von der geraden Linie abhängen[1]). Sieben Kapitel bilden den ersten Teil. Das erste handelt von der Ebene, von geraden Linien und von Winkeln; das zweite von den Bedingungen, die die Dreiecke bestimmen; das dritte von der Ähnlichkeit der Dreiecke und einiger ebener Figuren; das vierte von der relativen Lage der Geraden und der Kreislinie, ebenso auch von zwei Kreislinien; das fünfte von der Lösung von 19 Aufgaben auf Grund der Prinzipien, die in den vorhergehenden Kapiteln dargelegt sind; das sechste von den eingeschriebenen und umschriebenen Vielecken und von der Rektifikation der Kreislinie und das siebente von der Krümmung der Kurven und Kreislinien. Zwei Kapitel, die den zweiten Teil bilden, enthalten folgendes: das erste die ebenen geradlinigen Flächen, und das zweite den Flächeninhalt des Kreises und seiner Teile. Endlich von den sechs Kapiteln, die den dritten Teil bilden, handelt das erste von der Begegnung der geraden Linien und Ebenen; das zweite von den Körpern, regulären Körpern und von der Kugel; das dritte von den Prismen, Pyramiden, Kegeln und Zylindern, ebenso auch von einigen Definitionen, die die Kugel betreffen; das vierte vom Ausmessen der Oberflächen der Zylinder, geraden Kegel, der Kugel und ihrer Teile; das fünfte von den Volumen der Prismen, Pyramiden, Kegel, der Kugel und ihrer Teile und das sechste von der Ähnlichkeit der Körper. Bezüglich des zweiten Teiles bemerkt Bertrand, daß man das Kapitel aus dem dritten Teil von den krummen Oberflächen, zu deren Ausmessung die Kenntnisse von den Eigenschaften des Kreises und der geraden Linie genügen, übertragen könne. Mit demselben Rechte müßte man es aus dem dritten Teil in den ersten übertragen, der da handelt von der Begegnung gerader Linien und Ebenen mit alle dem, was sich zur Konstruktion regelmäßiger Körper und den Abständen ihrer Mittelpunkte von den Seiten und Scheiteln der Ecken, ebenso auch den Querschnitten der Prismen, Zylinder, Pyramiden usw. von Ebenen, welche zu ihren Grundflächen parallel sind, bezieht. Er unternimmt aber weder das eine, noch das andere, weil er dadurch mit der anerkannten Sitte in Widerspruch geraten würde, und welches vollständig dadurch gerechtfertigt ist, daß beide erste Teile nichts weiter enthalten, als die Ebene.

Die Idee d'Alemberts von der gleichzeitigen Behandlung der geraden Linie und der Kreislinie in dem ersten Teil der Elemente der Geometrie finden wir im Buch von Bertrand vollkommen verwirk-

[1]) 195—388 S.

licht, besonders im ersten Kapitel. Was jedoch seine andere Idee anbetrifft, nämlich die der Einteilung desselben ersten Teiles in zwei Abteilungen, so ist sie vollkommen bloß in den ersten drei Kapiteln anzutreffen, von denen die beiden ersten vollkommen der ersten Abteilung angehören, und das dritte der zweiten. In den nächsten drei Kapiteln sind die beiden Abteilungen schon in gemischtem Zustand vorhanden. So enthalten von den drei Teilen, die das vierte Kapitel bilden, der erste Teil die Sätze von der relativen Lage der Geraden und der Kreislinie und zweier Kreislinien, der zweite das Vermessen der Winkel im Kreise, und der dritte die sich mit dem Kreise in Beziehung befindenden proportionalen Linien. Ebenso auch in der Sammlung der Aufgaben, welche das fünfte Kapitel bilden, gehören die einen zur einen Abteilung, die anderen zur anderen.

Das Bestreben, die Elemente der Geometrie zu vervollkommnen, welches das Werk Bertrands durchdringt, äußert sich vor allem in den von ihm gegebenen Definitionen der Ebene und der geraden Linie. Der Raum ist unendlich und homogen oder mit anderen Worten, ist sich selbst gleich zu jeder Zeit und an jedem Ort. Und wirklich, wenn wir seiner Ausdehnung Grenzen angeben wollten, so müßten wir es auf seiner ganzen Ausdehnung tun, das würde aber bedeuten, daß die angegebenen Grenzen ihn nicht begrenzen. Was seine Homogenität anbetrifft, so äußert sie sich darin, daß der Teil des Raumes, der von einem Körper an irgend einer Stelle eingenommen wird, sich in nichts unterscheidet von einem anderen Teil, welcher von demselben Körper an einer beliebigen anderen Stelle eingenommen wird; dazu ist hinzuzufügen, daß der Raum, welcher den Körper an einer Stelle umgibt, derselbe ist wie der Raum, der denselben Körper an einer anderen Stelle umgibt. Aus diesem Begriff vom Raum folgt, daß man sich den Raum in zwei solche Teile geteilt vorstellen kann, von denen man nichts von dem einen sagen kann, was nicht auch von dem anderen gesagt werden könnte, und daß ihre allgemeine Grenze zu einem jeden von ihnen ein und dasselbe Verhältnis hat, mag man sie im ganzen oder in ihren Teilen betrachten. Diese Grenze, die den Raum in zwei Teile teilt, ist dasjenige, was man die Ebene nennt. Die Ebene wie auch den Raum kann man sich in zwei solche Teile geteilt vorstellen, von denen man nichts von einem sagen kann, was nicht auch vom anderen gesagt werden könnte, und daß ihre allgemeine Grenze außerdem zu einem jeden von ihnen ein und dieselben Verhältnisse hat, beliebig betrachtet im ganzen oder in seinen Teilen. Diese Grenze, die die Ebene in zwei Teile teilt, ist das, was man die gerade Linie nennt. Mit Hilfe dieser Definitionen beweist Bertrand folgende Sätze von geraden Linien, die ohne sie nicht



bewiesen werden können und deshalb gewöhnlich als Axiome angenommen werden: „Aus einem Punkt der Ebene zum anderen kann man nur eine gerade Linie führen.“ „Zwei Punkte der Ebene bestimmen die gerade Linie.“ „Zwei sich auf einer Ebene schneidende Linien schneiden sich nur in einem Punkte.“ Späterhin werden dieselben Sätze auch auf eine andere Weise bewiesen mit Hilfe der von Laplace im Journal des séances de l'École Normale gegebenen Definition der geraden Linie.

Indem Bertrand im allgemeinen mit d'Alembert ziemlich übereinstimmt in der Beweisführung von Sätzen, welche von Übergängen von den kommensurabelen Größen zu den inkommensurabelen und von den geraden Linien zu den krummen handeln, gibt er bloß einer größeren Verbreitung der apagogischen Methode Platz. Er bedient sich dieser Methode in allen Sätzen nicht nur in der ersten von den angegebenen zwei Gruppen, sondern auch in den beiden der zweiten Gruppe, welche sich mit der Bestimmung des Flächeninhalts des Kreises und der Oberflächen des Zylinders und des Kegels beschäftigen, obwohl dank ihrer Eigenschaften er auch dabei nicht ohne die Exhaustionsmethode auskommen kann. Der Exhaustionsmethode bedienen sich alle anderen Beweise der Sätze in der zweiten Gruppe und ebenso auch der Satz von der Gleichheit der dreiseitigen Pyramiden mit gleichen Grundflächen und Höhen.

Das Bestreben Bertrands zur größtmöglichen Verkürzung der Anzahl einzelner Sätze tritt besonders stark in dem 5. Kapitel des 3. Teiles hervor, wo eine ganze Reihe von Sätzen durch eine Reihe entsprechender Aufgaben ersetzt erscheint, die in folgendem einen Satze vereinigt sind: Es sollen ausgemessen werden das Prisma, die Pyramide, die abgestumpfte Pyramide, der Zylinder, der Kegel, der abgestumpfte Kegel, die Kugel, der Kugelsektor, das Kugelsegment, das abgekürzte Kugelsegment. Der Rauminhalt der abgestumpften Pyramide (bez. des abgestumpften Kegels) wird hier als Differenz zwischen den Rauminhalten der vollen Pyramide (bez. des Kegels) und der Ergänzungspyramide (bez. des Ergänzungskegels) gekennzeichnet. Der Rauminhalt des Zylinders wird ausgemessen mit Hilfe des Theorems: Das Verhältnis der Zylinder zu den Prismen ist gleich dem zusammengesetzten Verhältnis ihrer Höhen und Grundflächen, und das Ausmessen des Inhalts des Kegels und der Kugel wird auf das Ausmessen des Inhalts des Zylinders zurückgeführt.

Indem das Buch Bertrands in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts als eines der inhaltsreichsten und tiefsinnigsten Werke in der elementaren Mathematik im allgemeinen und der Geometrie im besonderen erscheint, ist es trotz seiner geringen Verbreitung nicht ohne wesentliche Wirkung auf die nachfolgende Literatur in diesem Fache geblieben, was aus der von Lacroix gerichteten Einladung an diejenigen seiner Leser, welche sich in die Prinzipien der Analysis und der Elementargeometrie zu vertiefen wünschen, zu ersehen ist, sich an das Werk Bertrands zu wenden, welchem Lacroix selbst viele wichtige Ideen verdankt.

Außer den betrachteten sind noch zwei Werke Bertrands im Druck erschienen: Rénouvellements périodiques des continents terrestres[1]) und Sur une question du calcul des probabilités.[2]) Aus den Memoiren, die er in der Berliner Akademie der Wissenschaften verlesen hatte und die nicht im Druck erschienen sind, ist bekannt Sur le développement des puissances d'un binome, dont les exposans sont des fractions ou des nombres négatifs.

Aus den Schriften der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts, die den Elementen der Geometrie gewidmet sind, waren am allerverbreitetsten, besonders während des ganzen nachfolgenden 19. Jahrhunderts, die Eléments de géométrie; par A. M. Legendre, die in Paris im Jahre 1794 erschienen waren. Im 19. Jahrhundert hatten sie viele Ausgaben, in Frankreich und Belgien, und außerdem waren sie fast in alle europäische Sprachen übersetzt worden. Die Einkünfte aus denselben waren so bedeutend, daß sie vollständig ihrem Autor die Existenz sicherten. Sie würden noch in einer größeren Anzahl von Exemplaren erschienen sein, wenn sie daran nicht gehindert worden wären durch die in großer Anzahl erschienenen Lehrbücher, die nach ihnen in allen Sprachen zusammengestellt waren und oft nur ihre Wiederholung darstellten. Ihr Verfasser, Adrien Marie Legendre (1752—1833), von Geburt ein Pariser, lernte in dem Collège Mazarin, wo er nach Beendigung der Humanitätsstudien die Vorlesungen über Mathematik des zu seiner Zeit sehr bekannten Lehrers, des Abbé Marie, besuchte. Die Fähigkeiten Legendres lenkten auf ihn die Aufmerksamkeit des Lehrers, der zu seiner wissenschaftlichen Entwicklung viel beigetragen hat. Die Resultate im Studium der Mathematik, die Legendre zu jener Zeit erreicht hatte, äußerten sich in einzelnen Kapiteln, die er im Auftrage seines Lehrers für dessen Werk Traité de mécanique aus dem Jahre 1774 geschrieben hat. Indem sie zu den bemerkenswertesten des Buches gehörten, traten sie besonders im Kapitel von den beschleunigenden Kräften in der Klarheit und Strenge der Darstellung hervor, so daß sie den Beifall von Lagrange ernteten. Sowohl in praktischer, als auch in wissenschaftlicher Beziehung war

[1]) Hamburg 1799. [2]) Mémoires présentés par divers Savans étrangers.



wichtig seine Bekanntschaft mit d'Alembert, die er zu dieser Zeit geschlossen hatte, und der ihn als Gelehrten richtig zu schätzen wußte. Mit dem Beistand d'Alemberts gelang es ihm im Jahre 1775 eine Lehrstelle der Mathematik an der Pariser Kriegsschule zu erhalten, welche er alsdann bis 1780 inne hatte. Durch diese Stellung in materieller Hinsicht gesichert, begann Legendre mit großem Fleiße die Werke berühmter Geometer zu studieren, hauptsächlich Eulers, der ihm seitdem als Muster in allen Arbeiten und Forschungen diente. Als erstes wissenschaftliches Werk Legendres erschien im Druck im Jahre 1782 und erhielt die volle Prämie der Berliner Akademie der Wissenschaften sein Memoire: Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants.[1]) Nach diesem Aufsatze folgte bald ein anderer mit dem Titel Sur l'attraction des sphéroïdes homogènes[2]), der der Pariser Akademie der Wissenschaften im Jahre 1783 vorgelegt wurde. Die günstige Meinung, die Laplace von diesem Werke, welches ihm und d'Alembert zur Beurteilung übergeben wurde, aussprach, veranlaßte die Pariser Akademie der Wissenschaften den Verfasser in demselben Jahre 1783 zum Adjunkten der Akademie zu ernennen an Stelle von Laplace, der den nächsten höheren akademischen Grad erhielt. Im Jahre 1787 wurde Legendre zum Mitglied der Kommission ernannt, deren Aufgabe es war, die geodätischen Arbeiten zu verrichten, um das Pariser Observatorium und das Observatorium zu Greenwich in Zusammenhang zu bringen. Sich mit der tätigen Beteiligung an der praktischen Seite dieser Operationen, welche aus täglichen Beobachtungen und logarithmischen Berechnungen bestanden, nicht begnügend, trug Legendre auch zu deren Theorie viel bei. Als er bemerkte, daß die Dreiecke auf der Erdoberfläche, die zum Bau des geodätischen Netzes gehörten, nicht als eben angesehen werden konnten, wie es früher geschah, entdeckte er den wichtigen Satz, der unter dem Namen des Legendreschen Theorems bekannt ist. In diesen seinen Arbeiten führte er zum erstenmal in die Wissenschaft ein die Definition der geodätischen Linien, als den kürzesten von allen, die auf einer Oberfläche gezogen werden können. Zum Studium dieses Gegenstandes und im einzelnen zur Theorie der geodätischen Linien auf den Flächen zweiter Ordnung kehrte er öfters zurück nach mehr oder weniger bedeutenden Zeitabschnitten. Sowohl diese als auch andere weniger bedeutende Entdeckungen und Neuerungen waren im berühmten Werke

[1]) Berlin. [2]) Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans, et lûs dans ses Assemblées, T. X, 1785.

des Autors Sur les opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la terre[1]) dargestellt, zu der auch seine Suite du calcul des triangles qui servent à déterminer la différence de longitude entre l'Observatoire de Paris et celui de Greenwich[2]) in unmittelbarer Beziehung stand. In seiner Teilnahme an den Arbeiten der Kommission ging Legendre viel weiter als es verlangt wurde. Er berechnete nicht nur alle Dreiecke, die sich in Frankreich befanden, sondern auch die, welche das Ufer Englands mit Greenwich verbanden. Um diesen letzten Teil seiner Arbeit auszuführen, mußte er sich nach London begeben, wo er mit großen Ehren empfangen und sofort zum Mitglied der Royal Society ernannt wurde. Dem Bericht über die praktischen Arbeiten Legendres und der anderen Mitglieder der Kommission ist das Buch Exposé des opérations faites en France en 1787 pour la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich par Cassini, Méchain et Legendre[3]) gewidmet.

Im Jahre 1791 wurde Legendre zum Mitglied der Kommission ernannt, welche zur Bestimmung der Grundlagen des neuen Systems der Maße und Gewichte gebildet wurde, und zur Berichtigung der Ausmessung des Bogens des Meridians zwischen Dünkirchen und Barcelona, was mit ersterem in Zusammenhang stand. Nach Beendigung der Arbeiten dieser Kommission hörte die unmittelbare Teilnahme Legendres beim Erschaffen des neuen Systems der Maße und Gewichte auf, bis zu seinem Eintritt in die internationale Kommission, welche zur Berichtigung der Arbeiten auf diesem Gebiete bestimmt war. Er unterschrieb im Jahre 1799 den Bericht, welcher von der Kommission der Akademie erstattet wurde, worauf diese endgültig beschloß, das metrische Maßsystem anzunehmen.

Auch nach Beendigung der praktischen geodätischen Arbeiten setzte Legendre die Bearbeitung des theoretischen Teils der Geodäsie fort. So druckte er im Jahre 1798 sein Mémoire analytique pour la détermination d'un arc du méridien bei der Herausgabe des gleichnamigen Werkes Delambres. In dem Memoire Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde[4]) verallgemeinerte er die von ihm früher angegebenen Methoden und besprach im allgemeinen Überblick alle hauptsächlichsten geodätischen Operationen.

Die Beschäftigung mit der Theorie der Anziehung führte Legendre zur Himmelsmechanik und die geodätischen Arbeiten zur Astronomie. Der ersten widmete er zwei Memoiren mit dem gemeinsamen Titel Sur la figure des planètes[5]), in welchen er das Theorem

[1]) Histoire de l'Académie Royale des Sciences 1787, p. 352 et suiv.
[2]) Ebenda 1788. [3]) Paris 1791, 4°. [4]) Mémoires de l'Institut 1806.
[5]) Histoire de l'Académie des Sciences, 1784 et 1789.



bewies, daß, wenn die Figur einer flüssigen Masse sich wenig von einer sphärischen unterscheidet, sie bloß ein Umdrehungsellipsoid sein kann. Von den homogenen Sphäroiden, für die der Satz im Jahre 1784 bewiesen wurde, erweiterte er ihn im Memoire des Jahres 1789 auf die ungleichartigen Sphäroïde. Am Schluß dieses zweiten Memoires bestimmte er die Dichtigkeit der Erde, die er als fünfmal die Dichtigkeit des Meerwassers übertreffend bezeichnete.

Mit dem Verlassen der Pariser Kriegsschule hörte die direkte und indirekte Beteiligung Legendres am Unterricht der mathematischen Wissenschaften nicht auf. Nach dem Eröffnen der Pariser Normalschule im Jahre 1795 wurde er, wenn auch nicht sofort, dort zum Professor ernannt. Noch später wurde er dem Lehrpersonal der polytechnischen Schule als Examinator einverleibt. Bei Eröffnung der Universität im Jahre 1809 wurde Legendre zum Ehrenrat ernannt und noch später zum Mitglied der Kommission des öffentlichen Unterrichts. Im Jahre 1812 trat Legendre an Stelle von Lagrange ins Bureau des Longitudes ein.

Die Abfassung der Éléments de géométrie von Legendre wurde durch das Bestreben, das Fach dieses Werkes zu vervollkommnen, hervorgerufen. Wie das lange Vorwort zeigt, welches seiner ersten Auflage vorausgeschickt ist, erkennt Legendre nur einen von den zahlreichen und verschiedenen Vorwürfen an, welche den existierenden Lehrbüchern der Elementargeometrie gemacht werden, nämlich den Mangel an Genauigkeit. Auf die Beseitigung dieses Mangels konzentrierte er sein ganzes Bestreben, alles andere übersehend. Dieses Verhalten zu seiner Aufgabe blieb vor allem nicht ohne Wirkung auf die Anordnung des Gegenstandes, welche in ihrer Unordnung den zum Muster genommenen Elementen des Euklid nicht nachsteht. Im Buche von Legendre ist auch nicht die Spur von der Sorge um die Harmonie und das System des Planes der Elemente der Geometrie, die die soeben betrachteten Werke d'Alemberts und Bertrands kennzeichnen, anzutreffen. Nicht nur, daß er den ganzen Gegenstand in Teile nicht teilt, er erwähnt auch darüber nichts. Dieser Gegenstand zerfällt bei ihm von selbst, seiner Natur gemäß, in zwei Teile: die Geometrie der Ebene und die Geometrie des Raumes. Ganz äußerlich ist sein Werk in acht Bücher geteilt. Das erste, „Die Prinzipien" betitelt, beginnt nach Beispiel der Elemente des Euklid mit einer Sammlung von Definitionen und Axiomen, zu denen der Verfasser noch die Erklärung der Ausdrücke und Zeichen beifügt. Weiter folgen die Betrachtungen der Eigenschaften der sich schneidenden geraden Linien, der Gleichheit und der anderen Eigenschaften der Dreiecke, der Eigenschaften der senkrechten, schiefen und parallelen Linien, und am Schlusse der Parallelogramme. Den Inhalt des zweiten Buches bilden der Kreis und die Ausmessung der Winkel; des dritten die Proportionalität von Figuren; des vierten die regelmäßigen Vielecke und das Ausmessen des Kreises; des fünften die Ebenen und die körperlichen Winkel; des sechsten die Polyeder; des siebenten die Kugel und die sphärischen Dreiecke und des achten die drei runden Körper: der Zylinder, die Kugel und der Kegel. Den Schlußteil des Buches unter dem Titel „Notes sur les éléments de géométrie“ bilden eine Menge von Ergänzungsartikeln. Die Unordnung und besonders, nach seinem eigenen Ausdruck, das „Verwechseln der Eigenschaften der Linien mit den Eigenschaften der Flächen“ gesteht er selbst ein, sich mit dem Beispiel des Euklid entschuldigend, sowie mit der Behauptung, daß eine Anordnung nicht als schlecht angesehen werden kann, wenn die einzelnen Sätze darin gut miteinander verbunden sind.

Der von Euklid eingeführte Gebrauch, jedem Buch der Elemente eine Sammlung der darin enthaltenen Definitionen vorauszuschicken, wurde von Legendre nicht nur in seinem ersten Buche der Elemente, wie oben angeführt, sondern auch in allen anderen beibehalten, ungeachtet der strengen Verurteilung seitens der philosophischen Kritik. Die Definitionen der Linie und der Fläche sind bei ihm dieselben, wie bei Euklid. „Die Linie ist eine Länge ohne Breite.“ „Die Fläche ist das, was Länge und Breite hat, jedoch ohne Höhe oder Dicke.“ Die gerade Linie, die Ebene und der Winkel werden von ihm schon anders definiert. „Die gerade Linie ist die kürzeste Entfernung von einem Punkte zu einem anderen.“ „Die Ebene ist eine solche Fläche, auf der jede gerade Linie vollkommen aufliegt, welche zwei beliebig auf dieser Fläche genommene Punkte verbindet.“ „Wenn zwei gerade Linien $AB$ und $AC$ sich begegnen, so wird jede mehr oder weniger bedeutende Größe, um die sie gegenseitig voneinander entfernt sind, der Winkel genannt.“

Beim Beweise der Theoreme, die von dem Übergang von den kommensurabelen Größen zu den inkommensurabelen handeln, bedient sich Legendre der apagogischen Methode, zeigend, daß das eine der beiden Verhältnisse, deren Gleichheit zu beweisen ist, weder größer noch kleiner sein kann, als das andere.

Beim Beweise der Sätze, die vom Übergang von den geraden Linien zu den krummen handeln, gebraucht Legendre die von Archimedes angegebene Form der Exhaustionsmethode in etwas verändertem Zustande. Die wenig bedeutende Änderung dieser Form, die er sich erlaubt, bestand im Gebrauch der zwei folgenden Hilfssätze: Wenn die Fläche eines Kreises größer ist, als irgend eine andere Fläche, so kann in diesen Kreis immer ein regelmäßiges Vieleck eingeschrieben werden, dessen Fläche ebenfalls größer sein wird als die gegebene Fläche. Wenn die Fläche eines Kreises kleiner ist, als irgend eine andere Fläche, so kann man diesem Kreis immer ein regelmäßiges Vieleck umschreiben, dessen Fläche ebenfalls kleiner sein wird als die genannte Fläche. Anstatt diese beiden Hilfssätze einzeln zu entwickeln, führt Legendre in seinem Buche folgenden sie zusammenfassenden Hilfssatz an: Wenn zwei konzentrische Kreise gegeben sind, kann man immer in den größeren von ihnen ein regelmäßiges Vieleck einschreiben, ohne daß seine Seiten den kleineren schneiden, ebenso kann man auch um den kleineren Kreis ein regelmäßiges Vieleck umschreiben, dessen Seiten den größeren Kreis nicht schneiden; auf diese Weise werden im einen sowohl wie im anderen Falle die Seiten des konstruierten Vielecks zwischen den beiden Kreisen eingeschlossen sein. Dieser Hilfssatz sowohl als dessen scharfsinnige Benutzung in der Exhaustionsmethode stellen nicht die Erfindung von Legendre dar. Er befindet sich im 16. Satze des 12. Buches der Elemente des Euklid, und dessen erste Benutzung in der Exhaustionsmethode gehört Maurolycus an, wie aus der Ausgabe seiner Übersetzung der Werke des Archimedes zu ersehen ist.[1])

In seinem Vorwort sagt Legendre, daß er im Anfang, an Stelle der Exhaustionsmethode, oder, nach seinen Worten, der Methode des Archimedes, die Methode der Grenzen anwenden wollte, weil sie als vorzügliche Vorbereitung zur Erlernung der Differentialrechnung erscheine. Später aber ließ er dies Vorhaben fallen, weil in die Theorie der Grenzen einige allgemeine Anfangsgründe, die eher den Gegenstand der Algebra, als der Geometrie bilden, hineingehören, und weil zweitens die Anwendung dieser Theorie zum Besprechen einer unendlichen Reihe von eingeschriebenen und umschriebenen Figuren führt, was Länge der Auseinandersetzung und verschiedene Schwierigkeiten nach sich zieht. Es ist übrigens zu bemerken, daß der erste dieser Gründe mit der Aussage des Verfassers in demselben Vorwort, daß er beim Leser seines Buches Kenntnisse der Arithmetik, und wenigstens des anfänglichen Teils der Algebra, voraussetzt, im Widerspruch steht.

Aus den Neuerungen, die Legendre in den Elementen der Geometrie gemacht hat, ist das Heranziehen des Prinzips der Symmetrie in die Zahl der Prinzipien der Elementargeometrie hervorzuheben. Die direkte Anwendung dieses Prinzips finden wir bei ihm

[1]) Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica quae extant, ex traditione D. Franc. Maurolici, etc. Panormi 1685, in-fol., p. 5 et suiv.

dort, wo zum Beweise der Gleichheit das Prinzip der Kongruenz sich als unzulänglich erweist, nämlich beim Betrachten der Körper. Er nennt zwei solche Polyeder symmetrisch,[1]) von denen bei gemeinschaftlicher Basis der eine unter und der andere über dieser Basis konstruiert sind, bei der Bedingung, daß die Scheitel der homologen körperlichen Winkel auf gleicher Entfernung von der Grundfläche und auf dem Perpendikel zur selben Grundfläche gelegen sind. Diese Definition erklärt er am Beispiel zweier Pyramiden $SABC$ und $TABC$, die eine gemeinschaftliche Basis $ABC$ haben und deren Spitzen $S$ und $T$ auf dem Perpendikel $ST$ zur selben Basis gelegen sind, wobei der Perpendikel sich im Schnittpunkt $O$ mit der Basis in zwei gleiche Teile teilt. Nachdem er alsdann im II. Satz des sechsten Buches bewiesen hat, daß jedes Polyeder nur ein symmetrisches Polyeder haben kann, führt er in die Elemente der Geometrie eine neue Art von Gleichheit ein, die manches Mal die Gleichheit von Körpern durch Symmetrie genannt wird. Sie ist im folgenden Satz erhalten: Wenn zwei Körper $a$ und $b$ symmetrisch dem dritten $c$ sind, so sind sie kongruent.

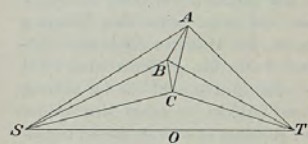


Fig. 6.

Das Einschlagen des Weges, der ihn zu dieser Neuerung führte, verdankt er Robert Simson, welcher in seinen „Kritischen und geometrischen Bemerkungen" zu seiner Ausgabe der Elemente des Euklid[2]), als erster auf die 9. und 10. Definitionen im XI. Buche der Elemente des Euklid hinwies (die Definition ähnlicher Körper; die Definition gleicher und ähnlicher Körper), als auf solche, die nicht als Definitionen angesehen werden können und deshalb als Theoreme bewiesen werden müssen. Die Richtigkeit dieser Bemerkung anerkennend, und zu gleicher Zeit diese Definitionen in die Zahl der Theoreme nicht einführend, mußte Legendre, ebenso wie Robert Simson, zum Auffinden neuer Beweise zu solchen Theoremen sich anschicken, die Euklid auf die oben erwähnten Definitionen gründete. Dabei mußte auf den 28. Satz des XI. Buches der Elemente des Euklid acht gegeben werden, der aus dem Theorem über die Teilung eines Parallelepipedons in zwei gleiche Teile bestand. Robert Simson betrachtete diesen Satz als Folge des von ihm vorher be-

[1]) S. livre VI, XVI. définition. [2]) The Elements of Euclid by Robert Simson, p. 388 sqq.



wiesenen Theorems: die $n$-seitigen Prismen, welche von gleichen, ähnlichen und entsprechend gelegenen Seiten begrenzt sind, sind einander gleich. Was jedoch Legendre anbetrifft, so beweist er in seinen Elementen vor diesem Satz folgendes Theorem[1]): eine Ebene, welche durch zwei entgegengesetzte und parallele Kanten geht, teilt das Parallelepipedon in zwei dreiseitige, einander symmetrische Prismen. Diesen Satz selbst jedoch faßt er in Form eines Theorems zusammen[2]): zwei symmetrische dreiseitige Prismen, in die ein Parallelepipedon sich teilen läßt, sind volumengleich.

Aus allem Gesagten über die Elemente von Legendre folgt, daß sie durchaus den Forderungen der Zeit, die die philosophische Kritik stellte, nicht entsprachen. Indem sie sich als Vorbild Euklid und Archimedes nahmen, hauptsächlich den ersteren, teilten sie mit ihm auch alle seine Mängel. Wie soll man aber in diesem Fall ihren kolossalen Erfolg erklären? Die Erklärung dazu finden wir teils in einigen Bedingungen jener Epoche, hauptsächlich aber im Vorhandensein wirklicher wichtiger Verdienste neben den Mängeln. Aus den Bedingungen der Epoche, die zum Erfolg des Buches von Legendre beitrugen und hauptsächlich im Anfang, sind folgende aufzuweisen: Die Anforderungen seitens der philosophischen Kritik in bezug auf Elemente der Geometrie wurden lange nicht von allen Zeitgenossen gestellt. Viele von ihnen, wie wir es schon früher gesehen, hielten es als unbedingte Pflicht der Autoren solcher Werke, die den Elementen der Geometrie gewidmet waren, den Werken der alten Griechen als Vorbildern zu folgen. Was die erwähnten Verdienste des Buches von Legendre anbetrifft, äußerten sie sich in der bemerkenswerten Klarheit der Darstellung und der vom Autor erreichten außerordentlichen Genauigkeit. Zum Erfolg des Buches von Legendre trugen auch viel die beigefügten Noten bei, von denen viele sogar in Beziehung zur Wissenschaft sich als wertvoll erwiesen. Mit einigen von ihnen werden wir noch späterhin zu tun haben.

Obwohl Legendre im Zusammenstellen der Elemente der Geometrie nicht auf der Höhe derjenigen Forderungen der zeitgemäßen Wissenschaft stand, die die voranschreitenden Kräfte der Wissenschaft ihnen stellten, mußte er dennoch Kind seiner Zeit bleiben. Und wirklich war er nicht imstande, die Methode der alten Griechen in der Elementargeometrie in ihrem reinen Zustand vollständig frei von dem Einfluß der arithmetisch-algebraischen Richtung wiederherzustellen. Schon die Forderung der arithmetischen und algebraischen Kenntnisse, die er den Lesern seines Buches stellt, beweist seine

[1]) Der 6. Satz des VI. Buches. [2]) Der 8. Satz desselben Buches.

Absicht, die Darstellung der Elemente der Geometrie von den arithmetischen Prozessen der neuesten Analysis abhängig zu machen. Diese Absicht wurde auch von ihm in vollem Maße ausgeführt. Überall in seinem Buche setzte er die geometrische Größe, als durch eine Zahl ersetzt, voraus. In seiner Darstellung spricht er z. B. vom Produkt der Linien oder vom Produkt der Linien und Flächen. In den Beweisen, welche die Anwendung der Proportionen fordern, wendet er zur Proportion der Linien direkt arithmetische Theoreme an, die nur für die Proportion der rationalen Zahlen bewiesen sind. Auf diese Weise erscheint d'Alembert, dieser beste Darsteller der den Elementen der Geometrie gestellten zeitgemäßen Forderungen in der von ihm ausgesprochenen Ansicht über die Unnützlichkeit der Algebra für die Beweise in dem Gebiet der Elementargeometrie, als dem wahren Verständnis des Geistes der altgriechischen Methoden der Geometrie viel näher stehend, als Legendre, der sich die genaue Befolgung dieser Methoden als Ziel setzte.

Von den Lehrbüchern der Elementargeometrie in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts stand seiner Verbreitung nach neben den „Éléments de géométrie“ von Legendre ein gleichnamiges Lehrbuch, dessen Autor Sylvestre François Lacroix[1]) (1765—1843) war, ein Pariser von Geburt. Sein ganzes Leben war dem Unterricht der Mathematik gewidmet, was er als Professor an der Marineschule zu Rochefort seit 1782, an der Kriegsschule in Paris seit 1787 und an der Artillerieschule zu Besançon seit 1788, als Examinator der Aspiranten und Zöglinge des Artilleriekorps vom Jahre 1793, als Adjunktprofessor der beschreibenden Geometrie an der Normalschule, als Professor der Mathematik an der Zentralschule der vier Nationen, als Professor der Analysis an der Polytechnischen Schule vom Jahre 1799, als Professor der transzendenten Mathematik bei der Fakultät der Wissenschaften und seit 1815 auch am Collège de France durchführte. Außerdem war er vom Jahre 1794 an Vorsitzender des Bureaus der Kommission zur Reorganisation des öffentlichen Unterrichts. Seine literarische Tätigkeit war ebenfalls beinahe ausschließlich dem Unterricht der Mathematik gewidmet. Diese Richtung zu verändern zugunsten der Ausarbeitung speziell wissenschaftlicher Fragen erwies sich selbst Lacroix, dessen Ernennung zum Mitglied der Akademie im Jahre 1799 erfolgte, nicht imstande. Seine wissenschaftliche Tätigkeit als Mitglied dieser Anstalt kennzeichnete sich beinahe ausschließlich durch Berichte über Werke, die ihm zum Durchsehen von der

[1]) Poggendorff, I, S. 1340. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, III², S. 506.



Klasse der Wissenschaften vorgelegt wurden, später genannt „Die Akademie der Wissenschaften“.

Die Bestimmung als Elementarlehrbücher hatten folgende Werke von Lacroix: „Essais sur les plans et les surfaces“[1]); „Introduction à la géographie mathématique et critique et à la géographie physique“[2]); „Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes“[3]); „Traité élémentaire du calcul des probabilités“[4]); „Manuel d'arpentage“[5]); „Introduction à la connaissance de la sphère“.[6]) Die erste und dritte dieser Schriften und ebenso auch das „Complément des Élémens de Géométrie ou Élémens de Géométrie descriptive“[7]) haben als erste ihren Gegenstand, die darstellende Geometrie, allgemein zugänglich gemacht und zu diesem Zweck ihre Prinzipien entwickelt. Der Popularisierung seines Gegenstandes waren auch das vierte Werk und die Artikel im „Dictionnaire des sciences naturelles“ und „Biographie universelle“ gewidmet. In der letzteren ist besonders bemerkenswert der Artikel über Euklid, welcher eine wertvolle Analyse seiner Elemente enthält.

Das umfangreiche Werk Lacroix' in der lehrenden Literatur war der am Anfang in sieben Bänden erschienene „Cours de Mathématiques à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations“ in den Jahren 1796—1799. Die einzelnen Überschriften jedes Bandes dieses Werkes waren: „Traité élémentaire d'Arithmétique“; „Élémens d'Algèbre“; „Élémens de Géométrie“; „Traité élémentaire de Trigonométrie recti-ligne et sphérique, et d'application de l'Algèbre à la Géométrie“; „Complément des Élémens d'Algèbre“; „Complément des Élémens de Géométrie, ou Élémens de Géométrie descriptive“; „Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral“. Von der französischen Regierung als Leitfaden in den Lyzeen und mittleren Lehranstalten angenommen, bekam es sofort nach seinem Erscheinen eine sehr große Verbreitung, die sogar in der neuesten Zeit nicht eingebüßt ist, was aus seiner fünfundzwanzigsten Ausgabe im Jahre 1897 zu ersehen ist. Es erschienen im Druck auch dessen Übersetzungen in andere Sprachen, wie zum Beispiel in die deutsche, russische und polnische. Die ausführliche Kritik seines Werkes und den Bericht über die gemachten Vervollkommnungen in den Elementen der Mathematik gab Lacroix sechs Jahre nach dem Erscheinen des letzten Bandes in der Schrift „Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des mathématiques en particulier“[8]), wo ihnen der § III

[1]) 1 vol. 8°, Paris 1795. [2]) 8°, Paris 1811. [3]) Paris 1812. [4]) 8°, Paris 1816. [5]) 12°, Paris 1825. [6]) 18°, Paris 1832. [7]) 8°, Paris 1796. [8]) Paris 1805, 8°, 398 S.

in der zweiten Abteilung, „Analyse du Cours élémentaire de Mathématiques pures à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations"[1]) betitelt, gewidmet ist. Zur großen Verbreitung der Lehrbücher Lacroix' trug die Art der Darstellung bei, welche sich durch Klarheit, Genauigkeit und Einfachheit auszeichnete.

In dem elementargeometrischen Teile des Kursus von Lacroix, welcher dem angenommenen Plan des Autors gemäß verfaßt ist, worüber er sich übrigens in seinem Bericht wenig aufhält, wird die Elementargeometrie in zwei Teile geteilt, welche nicht mit besonderen Überschriften versehen sind. Die Übersicht ihres Inhalts jedoch zeigt klar, daß der erste Teil die Elementargeometrie der Ebene genannt werden soll, und der zweite die Elementargeometrie des Raumes. Mit der Einführung dieser Einteilung der Elemente der Geometrie wich Lacroix der Unfolgerichtigkeit aus, in die Bertrand verfiel, indem er die Einteilung d'Alemberts annahm und zu gleicher Zeit es nicht wagte, aus dem zweiten Teil eine richtige Geometrie der Flächen zu machen. Seinen ersten Teil verteilt er folgendermaßen: die erste Abteilung „Von den Eigenschaften der geraden Linien und der Kreislinien" und die zweite „Von dem Flächeninhalt des Vielecks und des Kreises". Die zweite Abteilung hat keine Unterabteilungen. In der ersten befinden sich folgende Artikel: „Definitionen und vorläufige Begriffe"; „Von senkrechten und schiefen Linien"; „Theorie der parallelen Linien"; „Von den Vielecken"; „Von der Geraden und der Kreislinie"; „Von den eingeschriebenen und umschriebenen Vielecken". Die Ansichten d'Alemberts über die gleichzeitige Betrachtung der geraden Linie und der Kreislinie und über die Unterabteilung der ersten Abteilung des ersten Teiles in zwei Hälften werden bei Lacroix überhaupt nicht verwirklicht. Über den zweiten Teil endlich genügt es zu bemerken, daß er ebenfalls in zwei Hälften geteilt ist, von denen die erste betitelt ist „Über Ebenen und Körper, die von Ebenen begrenzt sind" und aus den Artikeln besteht: „Über Ebenen und Gerade"; „Über durch Ebenen begrenzte Körper"; „Über das Ausmessen des Rauminhalts" und die zweite Hälfte unter dem Titel „Von den runden Körpern" außer dem Artikel gleichen Namens noch den Artikel „Über die Vergleichung runder Körper" enthält.

Der Bericht von Lacroix über den angenommenen Plan der Elemente der Geometrie ist sehr kurz und bezieht sich hauptsächlich auf die Geometrie der Linien. An den Anfang der letzten setzt er die Betrachtung der geraden Linien bezüglich der Vergleichung ihrer Längen und erst danach schreitet er zur Betrachtung ihrer relativen

[1]) p. 254—390.



Lage. In diesem zweiten Teil seiner Darstellung der Geometrie der Linien vereinigt er vor allem alle Sätze, die über die Ähnlichkeit und Gleichheit der Dreiecke handeln, aus dem Grunde, daß die Dreiecke als Elemente aller andern Figuren erscheinen und außerdem am einfachsten die Lage der Punkte und Linien auf den Ebenen bestimmen. Danach geht er zur Ähnlichkeit und Gleichheit der Polygone über, und zum Schluß der Abteilung setzt er die Artikel über den Kreis und die in Verbindung mit ihm stehenden geraden Linien. Aus der Verteilung der Sätze in der ersten Abteilung der Elementargeometrie kann man leicht den Schluß ziehen über ihre Verteilung in den andern Abteilungen, die dem Ausmessen der Flächeninhalte, den Ebenen und den Eigenschaften der Körper gewidmet sind, mit Hilfe der zwischen allen diesen Teilen existierenden Analogie, deren Anwendung im Unterricht Lacroix großes Gewicht beilegt, als Mittel das Gedächtnis und die Gewohnheit zur Verallgemeinerung der Ideen des Lernenden zu stärken. Wenn die Analogie beim Beweise einiger Sätze nicht durchgeführt werden kann, wie es manchmal vorkommt, so muß sie dennoch, wenn auch nur im Verteilen der Sätze und in der Art der Darstellung aufrechterhalten werden. Aus den Sätzen der Elementargeometrie gehören, nach der Meinung von Lacroix, bloß zwei Arten von Sätzen in die Elemente der Geometrie, erstens die zum Verständnis des Ganges des Denkens erforderlichen Sätze, beim Betrachten der Figuren mit Hilfe der synthetischen Methode, und zweitens solche, die aus praktischen Operationen der Geometrie folgen, wie zum Beispiel das Reißen, Vermessen usw. Was übrigens die Sätze der zweiten Art anbetrifft, findet es Lacroix für notwendig zu bemerken, daß aus ihnen nur solche gewählt werden sollen, die als wirklich bequem und anwendbar anerkannt werden können. Seinen Plan der Elemente der Geometrie hält Lacroix auf Grund seiner langjährigen pädagogischen Erfahrung für natürlich und streng.

Da er im Worte „die gerade Linie" den direkten Ausdruck der unmittelbaren Resultate der Tätigkeit der Gefühle sieht, nämlich der Vorstellung des kürzesten Weges, der zu verfolgen ist, um von einem Punkt zum andern zu gelangen, führt Lacroix die Definition der geraden Linie auf den Ausdruck dieser einzigen Eigenschaft zurück. Die Definition des Begriffs in diesem Falle erhält er auf diese Weise mit der Definition der Bedeutung des Wortes, welche in folgendem Satze enthalten ist: der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten wird die gerade Linie genannt. Indem er die Ansicht über die Punkte, Linien und Flächen, als abstrakte Begriffe, die außerhalb uns selbst keine Objekte haben, verneint, findet er, daß sie wirklich existieren, wenn sie auch, getrennt vom Körper, dem sie angehören, nicht gedacht werden können. Jeder Körper muß in Wirklichkeit abgegrenzt sein, sonst wird er sich vom unendlichen Raume nicht unterscheiden. Solche Grenzen sind eben die Flächen, die ihrerseits wieder als Grenzen die Linien haben, und diese letzten — die Punkte. Alle diese Grenzen existieren nicht nur in Wirklichkeit, sondern stehen auch gerade unseren Sinnen vor, weil diese ohne ihre Hilfe keine Figuren der Körper kennen würden. Von der Darlegung dieser Ansichten muß auch die Darlegung der Elemente der Geometrie anfangen. Lacroix führt es auch wirklich in seinem Lehrbuche durch, indem er seinem ersten Teil die der oben genannten Auslegung gewidmete Stelle voranschickt, nämlich den „Hauptbegriff der Ausdehnung“.

Alle Axiome in Form einer Sammlung an den Anfang der Elemente zu setzen, findet Lacroix nutzlos, sogar lächerlich, weil ihrer Natur nach sich keine Hindernisse in den Weg stellen können, sich ihrer bei Beweisen dort zu bedienen, wo es als notwendig erscheint. Als Definition, die besonderer Aufmerksamkeit wert ist infolge ihrer völligen Unzulänglichkeit bei Euklid und die überhaupt ernste Schwierigkeiten bietet, findet Lacroix die Definition des Winkels. Um diese zu umgehen, schlägt er sogar vor, überhaupt keine Definition zu geben, sondern sich mit der Bekanntmachung mit dem Winkel oder direkt durch den Gegenstand selbst zu begnügen. In seinem Lehrbuche führt er dieses jedoch nicht durch und begnügt sich, nach seinen eigenen Worten, mit der ungenügenden Definition des Winkels, als eines unbestimmten Raumes, eingeschlossen von zwei geraden Linien, die sich in irgend einem Punkte treffen, und die man sich als beliebig verlängert vorstellen kann. Derselben Definition bedient sich auch Bertrand, jedoch in folgendem viel genauerem Satze: Ein Winkel ist der Teil einer ebenen Fläche, eingeschlossen von zwei geraden sich schneidenden Linien, die im Punkte ihrer Begegnung endigen.

Verhältnismäßig viel Platz, wie es eigentlich auch sein soll, widmet Lacroix in seinem Berichte dem in verschiedenen Teilen der Elemente der Geometrie sich antreffenden Übergang vom Endlichen zum Unendlichen. Solcher Fälle, die denselben augenscheinlich oder nichtaugenscheinlich darstellen, existieren drei: 1. der Übergang vom Kommensurabelen zum Inkommensurabelen, der in der Theorie der proportionalen Linien gemacht wird; 2. der Übergang von geraden Linien zu krummen, der beim Ausmessen des Kreises und der runden Körper vorkommt; 3. das Auftreten der Gleichheit des Rauminhaltes von Körpern in Fällen, wo das Prinzip der Kongruenz unanwendbar ist, was als Folge davon erscheint, daß der Körper eine Größe von drei Dimensionen ist. Als einfachstes Mittel in solchen Fällen, dieser



Betrachtung vom Unendlichen auszuweichen, bezeichnet Lacroix die Grenzen. Die beim Gebrauch dieses Mittels angewandten Prinzipien, als gemeingültig für Sätze dieser Art, müssen getrennt von ihnen und unabhängig von den Linien dargestellt werden, als Prinzipien, die nicht nur auf Größen, die in den Elementen der Geometrie betrachtet werden, anwendbar sind, sondern auch auf andere Größen. Dank diesen Folgerungen stellt Lacroix die erwähnten Prinzipien in folgenden Formen dar: 1. Wenn bewiesen werden kann, daß die Differenz zweier unveränderlicher Größen kleiner ist, als jede gegebene Größe, wie klein sie auch wäre, so folgt daraus, daß die beiden ersten Größen einander gleich sind. 2. Wenn von drei Größen eine sich verändernde und dabei immer größere, als die beiden anderen, die unveränderlich bleiben, sich gleichzeitig einer jeden von ihnen nähern kann, so nahe wie nur wünschenswert, so sind die beiden unveränderlichen Größen einander gleich. Indem er diese beiden Theoreme als Ausdruck, wenn auch nicht als offenbaren, der ersten Gründe der Grenzmethode ansieht und die angenommene Form des zweiten sich zuschreibt, spricht er die Überzeugung aus, daß diese letzte besonders die Eigenschaft besitzt, alle ihrer bedürftige Beweise zu vereinfachen, bedeutend zu verkürzen und sie symmetrischer zu machen. In seinen Elementen der Geometrie setzt er das erste Theorem an den Anfang des Artikels über die Rektifikation des Kreises und das zweite an den Anfang des Artikels vom Ausmessen des Flächeninhaltes des Kreises. Zu zeigen, daß je mehr sich die geradlinigen Figuren den krummlinigen nähern, sich auch das Maß der ersten dem Maße der zweiten nähert — das sei die Hauptsache, auf die nach Lacroix' Meinung die Aufmerksamkeit gerichtet werden muß, bei Anwendung dieser beiden Theoreme zum Übergang von geraden Linien zu krummen. Als Erfindung kann hier bloß die Methode der Annäherung angesehen werden, die am Ende mit Hilfe der Induktion die gesuchte strenge Bedeutung der betrachteten Größe offenbart.

Lacroix gibt den Rat, die apagogische Methode nur zum Beweis der einfachsten Sätze anzuwenden. In allen komplizierten Fällen jedoch muß man seiner Meinung nach dieser Methode ausweichen, weil sie den Verstand überzeugt, ihn jedoch nicht erleuchtet. Zu diesen Ansichten und ebenso auch zur oben angeführten Überzeugung von der Möglichkeit, die Methode der Grenzen in allen Fällen des Übergangs vom Endlichen zum Unendlichen anzuwenden, gelangte Lacroix augenscheinlich nach dem Erscheinen der ersten Ausgaben seiner Elemente der Geometrie. In ihnen benutzte er wirklich beim Beweise der Sätze, die vom Übergang von den kommensurabelen zu inkommensurabelen Größen handeln, in Übereinstimmung mit d'Alembert und Bertrand die apagogische Methode. Von diesem anfänglichen, von ihm gewählten Wege zugunsten seiner erwähnten Überzeugung abzugehen, findet er übrigens auch in allen folgenden Ausgaben seiner Elemente der Geometrie nicht für nötig.

Dem Bestreben zur Verminderung der Anzahl der einzelnen Sätze, das so klar bei Bertrand ausgedrückt ist, bleibt auch Lacroix nicht fremd. Als Anlaß dazu dient ihm die Erwägung, daß es nötig sei, die Ausführlichkeit zugunsten der Forderungen der Wissenschaft an den Unterricht, die sich infolge des Fortschritts immer vergrößern, zu opfern und zugleich das existierende Verhältnis zwischen dem Umfang und der gegebenen Zeit des Unterrichts aufrecht zu erhalten. Als die bemerkbarste Folge des betrachteten Bestrebens in den Elementen der Geometrie von Lacroix erscheint das Auslassen des Satzes über das Zerlegen des Rauminhaltes der abgestumpften Pyramide und ebenso auch des abgestumpften Kegels. Indem er vorschlägt, in Beziehung auf diese Sätze dem von Bertrand eingeschlagenen Weg zu folgen, bemerkt Lacroix in seinem Bericht, daß aus der Auslassung der eigenartigen Art des Beweises dieser Sätze keine Unbequemlichkeit entstehen kann, weil dieselbe Art der Beweisführung auch beim Beweise des Theorems über das Zerlegen des abgestumpften dreiseitigen Prismas angewandt wird, welches niemals ausgelassen werden darf.

Zum Schluß seiner Bemerkungen vom Übergang vom Endlichen zum Unendlichen in den Elementen der Geometrie bleibt Lacroix bei der Darstellung der Bedeutung der Arbeiten von Robert Simson stehen, die sie nach seiner Meinung in der Literatur der Elementargeometrie hatten, welche mit seiner Ausgabe der Elemente des Euklid in Verbindung standen, und bei dem oben erwähnten Werk von Bertrand. Indem er auf diese Ausgabe Simsons, als auf eine wichtige Erscheinung in der Geschichte der Geometrie hinweist, ebenso auch auf das Werk Bertrands, sagt er, daß sie die geringe Anzahl von Sätzen enthalten, die nötig sind, um die richtigen Ansichten in allen schwierigen Stellen der Elementargeometrie mit Hilfe der Mittel allein, die uns die Werke der Alten liefern, festzustellen. Nach Erscheinung dieser beiden Bücher kann seiner Meinung nach in den Elementen der Geometrie keine Veränderung mehr, außer der Anordnung des Inhaltes, vor sich gehen.

Die in den eben erwähnten Meinungen von Lacroix geäußerte Ansicht über die Grundbedeutung der Vervollkommnung der Bearbeitung der Sätze, die vom Übergang vom Endlichen zum Unendlichen handeln, teilt auch vollkommen der russische Gelehrte Simeon Gurief[1]) (1766—1813). Er war in den Jahren 1778—1784 in Petersburg Schüler im Artillerie- und Ingenieurkadettenkorps. Infolge der schon hier sich kundgebenden Neigung zur Beschäftigung mit der Mathematik mußte er die Grenzen des elementaren Kursus dieser Wissenschaft überschreiten. Nachdem er das Korps im Range eines Offiziers verlassen hatte, widmete er seine Tätigkeit nicht dem Militärdienst, sondern dem Unterricht der Mathematik und gelehrten Arbeiten in dieser Sphäre. Anfangs war er Lehrer der Navigation und Artillerie in dem griechischen Kadettenkorps in Petersburg. Der Mangel an Werken über Navigation, die der zeitgemäßen Lage der Wissenschaft entsprachen, in der russischen Literatur bewog Gurief, den sechsten Teil des „Cours de mathématiques“ von Bezout, der diesem Gegenstand gewidmet war, ins Russische zu übersetzen und ihn unter dem Titel „Nautische Untersuchungen“[2]) herauszugeben. In dieser Ausgabe fügte er viele eigene Ergänzungen bei, von ihnen als wichtigste die in russischer Sprache zum ersten Male gelehrte Differential- und Integralrechnung.[3]) Im Jahre 1792 machte Gurief eine Reise nach England, um dort die hydraulischen Arbeiten zu studieren. Nach der Rückkehr im Jahre 1793 wurde ihm die Vorlesung der physico-mathematischen Wissenschaften und der Artillerie für die Offiziere der Ruderflotte anvertraut, und seine umfangreichen Kenntnisse in der reinen und angewandten Mathematik, die er durch das Studium der besten Autoren erworben hatte, lenkten auf ihn die Aufmerksamkeit der Akademie der Wissenschaften in Petersburg, die ihn am 26. Mai 1796 zum Adjunkten der physico-mathematischen Wissenschaften ernannte. Sehr bald nach dieser Ernennung, nämlich im Jahre 1798 am 31. Januar, wurde er zum ordentlichen Akademiker befördert. Die ersten wissenschaftlichen Arbeiten von Gurief, die er der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften bis zum Jahre 1800 vorlegte, waren folgende: „Mémoire sur la résolution des principaux problèmes qu'on peut proposer dans les courbes dont les ordonnées partent d'un point fixe.“[4]) „Essai de démontrer rigoureusement un théorème fondamental des équations de condition de la différentielle des fonctions à plusieurs variables, et du calcul des variations“.[5]) „Observations sur le théorème de Taylor, avec sa démonstration par la méthode des limites; application de ce théorème, ainsi démontré, à la démonstration du binome de Newton, dans le cas où l'exposant est une quantité fractionnaire, négative et incommensurable avec l'unité;



[1]) Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg, VI (1818). Histoire, p. 4—6. — Poggendorff, I, S. 380. [2]) 2 Bände, St. Petersburg 1790—91, 4°. [3]) 59 S. [4]) Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, T. XII, p. 176—191. [5]) Ebenda, T. XIII, p. 154—165.

suivie de la résolution d'un problème qui concerne la méthode inverse des tangentes, par le moyen de ce théorème".[1]) Eins der Resultate der literarischen Berühmtheit, die Gurief dank seiner wissenschaftlichen und lehrenden Tätigkeit erlangte, war seine Ernennung am 1. September 1800 zum Mitglied der Russischen Akademie zu St. Petersburg.

Die Reform des Lehrfaches und das Eröffnen einiger neuen höheren Lehranstalten im Anfange des 19. Jahrhunderts in Rußland eröffneten Guriefs Begabung als Lehrer neue Gebiete zur Tätigkeit. Im Jahre 1800 wurde er zum Professor der Mathematik an der Schule der Schiffsarchitektur ernannt, im Jahre 1809 in der geistlichen Akademie zu St. Petersburg und im Jahre 1810 im Institut des Korps der Ingenieure der Kommunikationswege. Bei Eröffnung der zweiten dieser Lehranstalten verlas er die später gedruckte „Abhandlung über Mathematik und ihre Zweige".[2]) In den Ausgaben der Akademie der Wissenschaften waren 23 Schriften und Abhandlungen gedruckt, die er in ihren Sitzungen vom Jahre 1800 an verlas. Als Mitglied einiger Kommissionen, die von der Akademie der Wissenschaften zum Durchsehen der ihr vorgelegten Arbeiten und Erfindungen gebildet wurden, beteiligte sich Gurief an der Zusammenstellung zweier Berichte. Die Hauptgegenstände der wissenschaftlichen Arbeiten von Gurief, welche in den Ausgaben der Akademie der Wissenschaften gedruckt wurden, waren Mechanik, Geometrie und Differentialrechnung.

Die Zwischenstellung in den wissenschaftlichen und lehrenden Arbeiten von Gurief nahmen ein: „Die Grundlagen der Differentialrechnung mit deren Anwendung auf Analytik".[3]) „Grundlagen der transzendenten Geometrie der krummen Flächen".[4]) „Grundlagen der Mechanik".[5]) Rein lehrende Arbeiten von Gurief, die im 19. Jahrhundert erschienen, und die ausschließlich der Elementarmathematik gewidmet waren, waren folgende: „Der erste Teil des nautischen Lehrkursus, die Grundlagen der Geometrie enthaltend"[6]); „Das erste Buch der Zahlenlehre, die Grundlagen der Arithmetik enthaltend"[7]); „Grundlagen der Geometrie".[8])

Aus der gelehrten Tätigkeit von Gurief ist als charakteristisch zu bezeichnen sein besonderes Interesse für festere Begründung der schon bekannten Wahrheiten und der schon festgestellten Prinzipien. Seinem methodischen Verstande, welcher von der Verehrung der strengen Methoden der altgriechischen Geometrie durchdrungen war, waren die Arbeiten in dieser Richtung kostbarer, als die Aufdeckung

[1]) Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, T. XIV, p. 306—335. [2]) 4°, St. Petersburg 1809. [3]) 4°, St. Petersburg 1811. [4]) 4°, ib. 1806. [5]) 8°, ib. 1815. [6]) 4°, ib. 1804—1807, 2 Bände. [7]) 4°, ib. 1805. [8]) 8°, ib. 1811.



neuer Wahrheiten. Außer den Arbeiten über die Differentialrechnung, die dieser Richtung angehörten, und einigen anderen gehören dazu noch einige Arbeiten, die, obgleich nicht gedruckt, so doch der Akademie der Wissenschaften vorgelegt waren, wie zum Beispiel das von ihr am 26. Mai 1796 handschriftlich erhaltene Werk „Anfangsgründe der transzendenten Geometrie und der Differentialrechnung, abgeleitet aus der wahren Natur ihres Gegenstandes", oder des von ihm im Jahre 1797 verlesenen Manuskripts „Versuch der Begründung der Mathematik auf festen Gründen".

Die erste seiner Arbeiten dieser Art, die im Druck erschien, war „Versuch einer Vervollkommnung der Elemente der Geometrie"[1]). Direkte Ursache zum Verfassen dieses Werkes war der Versuch, die Beweise der Theoreme, die über den Übergang vom Endlichen zum Unendlichen handelten, von dem verbreiteten Gebrauch der Unteilbaren von Cavalieri und der Unendlichkleinen von Guldin zu befreien. Um der Geometrie ihre Genauigkeit und Klarheit wiederzugeben, die sie nach der Meinung des Autors, infolge des Gebrauches dieser Größen, oder, was dasselbe ist, infolge der Einführung der von ihnen dargestellten Methode der Unteilbaren eingebüßt hat, stellt er an Stelle der letzteren die Methode der Grenzen, die er aus den obengenannten Werken d'Alemberts und des Abbé de la Chapelle entnimmt. Indem er jedoch die darin gegebene Definition der Grenze als ungenügend und unbestimmt findet, stellt er sie, um die darin befindlichen Mängel zu beseitigen, in folgender Form dar: „Wenn irgend eine Größe durch irgend eine bestimmte bis in die Unendlichkeit dauernde Operation sich vergrößert oder vermindert, und dadurch sich einer anderen unveränderlichen Größe so nähert, daß sie sich von ihr weniger unterscheidet als um irgend eine willkürlich genommene Größe derselben Art und mit alledem sie doch niemals erreicht, so ist diese andere unveränderliche Größe dasjenige, was man die Grenze der ersten sich vergrößernden oder vermindernden Größe nennt."[2]) Indem er als Grundsatz der Methode der Grenzen den ersten der beiden von de la Chapelle anerkannten Sätze annimmt, stellt Gurief den Beweis, den d'Alembert diesem Satz gab, in folgender veränderter Form dar: „Nehmen wir an, daß $X$ die sich vermehrende Größe ist und $A$, $B$ ihre beiden Grenzen sind, so sind sie, wenn nicht einander gleich, die eine größer als die andere. Nehmen wir an, daß $A$ größer ist als $B$ um eine unveränderliche Größe $D$, so wird infolgedessen, daß $A$ und $B$ zwei unveränderliche Größen sind, $A = B + D$ sein. Da aber $X$ immer kleiner ist als $B$,

[1]) St. Petersburg 1798, 4°, 264 S. mit 5 Tafeln. [2]) Gurief, Versuch, S. 34.

so kann der Unterschied zwischen $X$ und $B+D$ niemals kleiner werden als $D$, kann auch folglich nicht kleiner werden als jede willkürlich gegebene Größe, und da $B+D=A$ ist, so kann auch die Differenz zwischen $X$ und $A$ nicht kleiner werden als jede willkürlich gegebene Größe und $A$ ist folglich nicht die Grenze von $X$, was der Voraussetzung widerspricht, folglich usw."[1]) Dieses Satzes bedient sich Gurief in allen Fällen im ersten Kapitel seines Werkes, welches dem Übergang vom Endlichen zum Unendlichen gewidmet ist, außer dem Fall des Übergangs vom Kommensurabelen zum Inkommensurabelen, welchem das zweite Kapitel bestimmt ist. Der Inhalt des ersten Kapitels wird vom Verfasser als „Sätze, in denen die Gleichheit zweier Größen aus drei Arten von Dimensionen begründet werden", bezeichnet. Als zweiten Grundsatz der Methode der Grenzen, deren er sich ausschließlich im zweiten Kapitel bedient, wo er auch angeführt wird, nimmt Gurief folgendes an: „Wenn zwei sich vergrößernde oder vermindernde Größen $X$ und $Y$, die als Grenzen $A$ und $B$ haben, sich so verhalten, wie zwei unveränderliche Größen $C$ und $D$, so werden sich auch ihre Grenzen $A$ und $B$ so verhalten, wie diese unveränderlichen Größen $C$ und $D$"[2]). Die Sätze, „deren genauer und klarer Beweis" den Gegenstand des zweiten Kapitels bilden, werden in dessen Überschrift als solche charakterisiert, „in denen die Proportionalität zweier Größen aus drei Arten von Dimensionen zu zwei anderen Größen derselben oder einer anderen einfachen Dimension gesucht wird"[3]). Diese beiden Kapitel in Verbindung mit den Elementen des Euklid bilden, nach der hochmütigen Meinung ihres Autors, das vollständig genügende Material für die Elemente der Geometrie, so wie sie sich d'Alembert wünscht, und zu deren Zusammenstellung nach der Meinung des letzteren die Kräfte der größten Geometer, wie Descartes, Newtons, Leibniz' und Bernoullis erforderlich sind. Den Plan solcher Elemente, den d'Alembert zusammengestellt hatte, sah Gurief nicht als den auserwähltesten an, und zog ihm den von Euklid angenommenen vor. Über Gurief kann man sagen, daß er zu dem in Rußland sehr verbreiteten Typus gebildeter Leute gehörte, die große Ehrfurcht für die alten Autoren fühlen, und gleichzeitig sehr ungenügende Kenntnisse von ihnen besitzen. Die authentischen Werke der alten Geometer und besonders die des Euklid und Archimedes kannte er so oberflächlich, daß er mit Gewißheit zu behaupten wagte, daß die Exhaustionsmethode von der Methode Newtons der ersten und letzten Verhältnisse herstamme, und daß sie bei den alten Geometern gar nicht gebraucht worden sei[4]). Diese

[1]) Gurief, Versuch, S. 35. [2]) Ebenda, S. 152. [3]) Ebenda, S. 105. [4]) Ebenda, S. 26—27.



Behauptung sprach er zum Zwecke der Widerlegung der entgegengesetzten Meinung des Abbé de la Chapelle aus. In demselben Werk gibt Gurief, wenn auch einen sehr umfangreichen, jedoch lange nicht den ganzen Gegenstand erschöpfenden kritischen Überblick der Elemente der Geometrie von Legendre.

Unter den Lehrbüchern der Elementargeometrie, die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts erschienen, nennen wir auch das Lehrbuch, welches eingeschlossen war in dem umfangreichen Werk des Mitgliedes der Pariser Akademie der Wissenschaften Bezout, „Cours de mathématiques"[1]), das alle Abteilungen der Elementarmathematik, Mechanik und Navigation umfaßte. Außer den Übersetzungen in viele europäische Sprachen erschienen die Ausgaben der einzelnen Teile dieses Kursus während der ganzen ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts[2]). Beim Zusammenstellen der in diesem Kursus befindlichen Elemente der Geometrie bemüht sich der Verfasser, soweit es in seinen Kräften stand, den obengenannten Anweisungen und dem Plan d'Alemberts zu folgen. Dieses gut durchzuführen, gelang ihm jedoch nicht. Sein Werk, wie es schon von der zeitgemäßen Kritik bemerkt wurde, zeichnete sich durch Mangel an Strenge aus. Vieles, was er voraussetzte und als augenscheinliche Folge benannte, bedürfte des Beweises. Einer der Hauptgründe des Mißlingens, das Bezout traf, war sein Verfolgen einiger Nebenzwecke, wie z. B. das Bestreben, das Examen sowohl dem Examinator, als auch dem Examinanden zu erleichtern.

Wenn die bis jetzt betrachteten Schriften über die Elementargeometrie im vollen Sinne des Ausdrucks als Elemente der Geometrie sich erwiesen, die von d'Alembert genau festgestellt waren, so ist der der Geometrie gewidmete zweite Teil der „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebener und sphärischer Trigonometrie und Perspektive"[3]) von Kästner[4]) Muster eines anderen Typus der Elemente der Geometrie, der außer den allgemeinen auch spezielle Ziele verfolgt. Dieser Typus hat dank der ihn reichlich vertretenden Werke schon lange sein Bürgerrecht bekommen. Aus den angewiesenen verschiedenen Formen in dem Aufsatz „Des élémens de Géométrie"[5])

[1]) 8°, 6 Bände, Paris 1764—69. [2]) Es wurde bis zum Jahre 1852 in vielen neuen Ausgaben verlegt, und in Übersetzungen in der deutschen, russischen und polnischen Sprache. Mit der Umarbeitung einiger seiner Teile, die zum Zweck hatte, einige darin enthaltene Unvollkommenheiten zu beseitigen, beschäftigten sich Baron Reynaud, Garnier, Reboul und Peyrard. [3]) 8°, Göttingen 1758, 6. Aufl., ib. 1800. [4]) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III[2], S. 576. [5]) Encyclopédie méthodique. Mathématiques II, p. 136.

von d'Alembert, in denen die Elemente der Geometrie dargestellt werden können, je nach den Forderungen, die von verschiedenen Gruppen von Lesern an sie gestellt werden, nähert sich das Werk von Kästner am nächsten der Form eines Traktates über die praktische Geometrie, das von Spekulationen begleitet wird, welche bis zu einem gewissen Grade die praktischen Operationen zu erleuchten imstande sind, und verhindern, daß man sich mit der blinden Routine allein begnüge. Der erste Teil der Geometrie von Kästner besteht aus der Geometrie der Ebene und der Anwendung der in ihr vorgelegten Regeln zur praktischen Geometrie. Unmittelbar nach dem ersten Teile folgt die Darstellung der ebenen Trigonometrie, welche auf diese Weise den Charakter eines Anhangs oder sogar eines Schlußteils des Traktats über die praktische Geometrie der Ebene bekommt. Den zweiten Teil der Geometrie von Kästner stellt die Geometrie des Raumes dar, wonach unmittelbar als Ergänzung oder ihr Schlußteil die sphärische Trigonometrie folgt. Die theoretische Abteilung des ersten Teiles enthält die Geometrie der geraden Linie und der Kreislinie. Die Reinheit seiner Darstellung wird durch die Einführung zweier Theoreme aus der Geometrie der Flächen gestört: des Theorems des Pythagoras und des Theorems über das Verhältnis der Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Höhe. Die Abteilung beginnt mit der Erklärung von Definitionen, Postulaten und Axiomen. Von den Definitionen, die Kästner gibt, genügt es, folgende anzuführen: „Die gerade Linie ist eine solche, deren Punkte gerade nach einer Seite hin liegen.“ „Die Kurve jedoch ist eine Linie, in welcher zwischen zwei möglichst nahe aneinander gelegenen Punkten sich immer einige Punkte befinden, die nicht mit ihnen zusammen auf einer geraden Linie liegen.“ „Die Ebene ist eine Fläche, von deren jedem Punkt zu ihren anderen Punkten man gerade Linien führen kann, so daß alle ihre Punkte sich auf derselben Fläche befinden werden.“ „Ebener Winkel ist die gegenseitige Neigung zweier Linien, die auf einer Ebene liegen, und welche nicht eine gerade Linie bilden.“ Folgende Sätze sieht Kästner als Axiome an: 1) Durch jede zwei Punkte geht nur eine gerade Linie. 2) Wenn zwei gerade Linien zusammentreffen, ohne eine Gerade zu bilden, so werden sie außer einem Punkt nichts gemeinschaftlich haben. 3) Größen, die so aufeinander gelegt werden können, daß die Grenzen der einen und was zwischen ihnen enthalten ist, zusammenfallen mit den Grenzen und allem was zwischen ihnen sich befindet, der anderen sind einander gleich und ähnlich. 4) Gleiche gerade Linien und gleiche Winkel decken einander. 5) Alle rechten Winkel sind einander gleich, weil sie sich gegenseitig decken. 6) Der Durchmesser teilt den Kreis in zwei ähnliche und gleiche Teile. 7) Die Peripherie



des Kreises um das Zentrum ist eine ununterbrochene Kurve. 8) Eine unbestimmte gerade Linie teilt eine unbestimmte Ebene, auf der sie gelegen ist, in zwei Teile, die auf den ihnen entgegengesetzten Seiten gelegen sind. Mit Ausnahme der zwei angeführten Theoreme ist die ganze Geometrie der Flächen und mit ihr das Ausmessen des Kreisumfanges von Kästner in die Abteilung der praktischen Geometrie zugerechnet. Als auf eine bemerkenswerte Eigenartigkeit der Geometrie von Kästner ist auf die Einheit der Mittel der Beweisführung von Sätzen, die vom Übergang vom Endlichen zum Unendlichen handeln, hinzuweisen. In beiden Fällen dieses Überganges, d. h. ebenso wie beim Übergang von den kommensurabelen zu inkommensurabelen Größen, ebenso auch beim Übergang von geraden Linien zu krummen wird in ihr gleichförmig dieselbe Methode gebraucht, nämlich die Exhaustionsmethode.

Von den anderen Lehrbüchern der Elementarmathematik, die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts verlegt worden sind, waren in der Heimat ziemlich verbreitet, und sogar außerhalb derselben einigermaßen bekannt, die Werke des Professors der Mathematik und Physik an der Universität zu Rostock, zu Bützow und zu Halle Wenceslaus Johann Gustav Karsten (1732—1787)[1] „Lehrbegriff der gesammten Mathematik“[2]; „Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften“[3] und „Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriff der mathematischen Wissenschaften“[4]. Als bemerkenswerte Eigenschaft des den Elementen der Geometrie gewidmeten Teiles dieses Werkes erschien die vollkommene Beseitigung der Anforderung an den Leser, anfängliche Kenntnisse der Arithmetik und Algebra zu besitzen. Um diesen Umstand vielleicht stärker zu betonen, fängt die Darstellung der Teile der Elementarmathematik mit der Geometrie an.

Der Wunsch d'Alemberts, als Autoren der Elemente der Geometrie Geometer vom ersten Range zu sehen[5], wurde in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts von Euler und Legendre erfüllt. Jedoch bekam das obenerwähnte Werk Eulers gar keine Bekanntheit und außerhalb Rußlands gar keine Verbreitung. Was das Werk von Legendre anbetrifft, so entsprach es überhaupt den Forderuugen d'Alemberts nicht, bei Darlegung der Elemente der Geometrie dem Weg zu folgen, dem die sie erschaffenden Forscher in ihren Entdeckungen folgten, d. h. eben derjenigen Forderung, welche d'Alem-

[1]) Poggendorff, I, S. 1224—1225. [2]) 8 Bücher, 8°, Greifswald 1767—77, 2. Aufl. 1782—91. [3]) 3 Bücher, 8°, Rostock 1780. [4]) 2 Bücher, 8°, Greifswald 1781, 2. Aufl. ib. 1785. [5]) Encyclopédie méthodique. Mathématiques II, p. 135—136.

bert zwang, Mathematiker vom ersten Range zum Zusammenstellen der Elemente der Geometrie zu bewegen. Sogar Euklid, wenn nicht in der Beweisführung, so im Verteilen des Inhalts einiger Teile seines Buches, stand den Anforderungen d'Alemberts näher als Legendre. Und überhaupt kann man an der Fähigkeit und der Möglichkeit für Mathematiker vom ersten Range den Anforderungen d'Alemberts zu genügen, stark zweifeln, sie sogar absprechen. Auf einen der Gründe dieser Zweifel, nämlich auf das Vorhandensein unbewußter schöpferischer Prozesse oder, nach dem Ausdruck d'Alemberts, auf den Fall, wenn der Forscher sich mehr von einer Art des Instinktes als von Vernunftschlüssen leiten läßt, weist d'Alembert schon selbst hin. Aber außer diesem Grunde, und schon nicht allein zum Zweifel, sondern zum Verneinen, können auch andere angeführt werden. Gegen die Möglichkeit, für Mathematiker vom ersten Range der neuen und neuesten Zeiten auf die Wege zurückzukehren, auf denen die Schöpfer der Elementargeometrie bei ihrem Erschaffen gingen, sprechen noch folgende Vernunftschlüsse. Das Erschaffen der griechischen Geometrie, durch die Elemente von Euklid dargestellt, als Resultat der im Laufe großer Zeiträume sich entwickelnden Kollektivarbeit solcher Schöpfer, welche einer langen Reihe von aufeinander folgenden Generationen und dabei so verschiedenen Nationen, wie der ägyptischen, griechischen und den mehr oder weniger bekannten anderen angehörten, ging bei vollständig anderen Umständen und Bedingungen vor sich, als die Arbeiten der Forscher der neuen Wissenschaft. Um sich von der Gerechtigkeit der eben ausgesprochenen Behauptung zu überzeugen, genügt es der Erinnerung, daß Euler, Legendre und andere europäische Mathematiker des 18. Jahrhunderts und überhaupt der neuen Zeit, infolge ihres Standpunktes auf der arithmetisch-algebraischen Richtung der Inder, Analytiker waren, abgesehen von dem Unterschiede, der unumgänglich hervorgerufen wird durch den Fortschritt der weit vorgerückten Wissenschaft im Vergleich zum grauen Altertum, während solche hervorragende Kräfte in der Elementargeometrie, wie die griechischen Mathematiker des fünften und der folgenden Jahrhunderte vor Christi Geburt, als reine Geometer angesehen werden müssen, weil sie immer auf dem Grunde rein geometrischer Richtung standen, welcher so schroff die indische Mathematik von der altgriechischen unterscheidet.

Was jedoch die Fähigkeit der Mathematiker vom ersten Range der neuen Zeit anbetrifft, die Wege wiederherzustellen, auf denen beim Erschaffen der Elementargeometrie ihre Schöpfer gingen, so genügt es in dieser Beziehung, um den Einzelheiten beim Betrachten dieses Gegenstandes auszuweichen, die Aufmerksamkeit auf folgenden Umstand zu lenken. Als d'Alembert die Mathematiker vom ersten Range zum Zusammenstellen der Elemente der Geometrie aufforderte, dachte er, daß es für sie genügend sein würde, beim Wiederherstellen der Wege der anfänglichen Schöpfung dieser Elemente, ihren eigenen Wegen, die sie während ihrer eigenen Entdeckungen gingen, zu folgen, d. h. mit anderen Worten, mit der Wiederherstellung dieser eigenen Wege wieder anfänglich zu beginnen. Können sie das aber bei den herrschenden Bedingungen und Arten der schaffenden wissenschaftlichen Arbeiten in der neuen und neuesten Zeit in den mathematischen Wissenschaften? Um eine neue Entdeckung zu machen, hält sich der Gelehrte bei den Wegen, die seine Idee wandelt, und bei den einzelnen Stadien ihrer Entwicklung in seinen Gedanken nicht auf, sondern bemüht sich, so schnell wie möglich zu seinem Ziel zu gelangen. Gewöhnlich gibt er sich über dieselben nicht nur keine klare, sondern überhaupt gar keine Rechenschaft. Nachdem er sein Ziel erreicht und eine neue Entdeckung gemacht, gibt sich der Gelehrte Mühe, oft mit großer Anstrengung, dieselbe in den ihm selbst gewohnten Formen darzustellen, in denen gewöhnlich in der gelehrten Literatur und im Unterricht die Wahrheiten und ihre Beweise dargestellt werden. Dasjenige, mit dessen Hilfe er seine Entdeckung erreichte, erscheint ihm in dieser seiner neuen Arbeit nicht als Beistand, sondern direkt als Störung und Hemmung. Er ist bemüht, sich davon zu befreien, es zu vergessen. Dieses Bestreben gelangt zu seiner höchsten Entwicklung, die sich bis zur absichtlichen Vernichtung aller Spuren der anfänglichen schaffenden Arbeit steigert, bei solchen Gelehrten, die ihre unmittelbaren Resultate, als unelegant und manchesmal als Fehler enthaltend, finden. Als Resultat aller eben angeführten Umstände und Bedingungen, bei denen die schöpferische Arbeit der Gelehrten in der neuen und neuesten Zeit vor sich geht, erscheint seine Lage augenscheinlich als sehr nahe angrenzend an diejenige, in der der Gelehrte sich bei der unbewußten schöpferischen Arbeit befindet, oder nach dem Ausdruck d'Alemberts im Falle, daß er dem Instinkt mehr folgt als dem Vernunftschluß.

Wer kann eigentlich die Anforderungen von d'Alembert befriedigen, wenn sogar die Mathematiker vom ersten Range der neuen und neuesten Zeit es zu tun nicht imstande und sogar dazu unfähig sind? Das kann nur die Geschichte der Mathematik erfüllen, oder in engerem Sinn, die in dieser Richtung von ihr gemachten Forschungen. Leider entbehrt sie solcher Forschungen nicht nur in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts, sondern auch in der Gegenwart. Folglich konnten und können nicht, nicht in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts, sogar jetzt nicht diejenigen wahren Elemente der Geometrie zusammengestellt werden, welche d'Alembert vorschwebten, und die seinem Gedanken nach eine Verbindung der Wahrheiten in ihrem natürlichen Schein darstellen sollten, indem sie zwischen ihnen eine in Wirklichkeit existierende und keine künstliche Kette bilden sollte, und die außerdem von derjenigen Ausdrucksform befreit sein sollte, welche sich im Laufe der Jahrhunderte in der Wissenschaft ausgearbeitet hatte, teils dazu, um ihr etwas Geheimnisvolles zu verleihen, teils um ihren Gebrauch in der Praktik zu vereinfachen.

Eine besonders wichtige Bedeutung muß das Zusammenstellen solcher wahren Elemente der Geometrie zum Erlernen der letzteren haben, wenn man diese Elemente als Leitfaden oder sogar direkt als Lehrbuch ansieht. Und wirklich, nur nach der Reinigung der Elemente der Geometrie von allem Künstlichen und allem, was der Natur der menschlichen Vernunft und den Gesetzen der Entwicklung der menschlichen Kenntnisse widerspricht, werden sie für Menschen, die über mittleren Verstand verfügen, zugänglich werden, das heißt für die Mehrzahl der Menschheit, und ihr Erlernen von dieser Mehrzahl wird ein wirkliches und kein scheinbares werden, wie jetzt und auch früher. Nur bei einer solchen Befreiung der Elemente der Geometrie von allem Fremden und von außen Eingeführten kann der königliche Weg der Erlernung der Geometrie geschaffen werden, über dessen Abwesenheit in den Elementen des Euklid einstmals der weise König Ptolemäus dem Autor bitter klagte.

## Praktische Geometrie (Feldmeßkunst).

Außer den Lehrbüchern der Elementargeometrie, welche, gleich dem oben besprochenen Lehrbuch von Kästner, die, in der Überschrift nicht bezeichnete, Verbindung der theoretischen Geometrie mit der praktischen darstellten, erschienen in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts nicht wenige solcher Lehrbücher, deren Benennungen auf diese Vereinigung als auf den Gegenstand des Werkes hinwiesen. „Geometria theoretica-practica"[1]) oder „Traité de géométrie théorique et pratique"[2]), das waren ungefähr die allgemeinen Überschriften der Werke dieses Typus, in einzelnen Fällen mehr oder weniger variierend. Das Erscheinen einer bedeutenden Anzahl solcher Werke in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wies klar auf die Verbreitung in dieser Epoche des von d'Alembert bezeichneten Typus von Lesern der elementargeometrischen Werke, die bei deren Erlernung nur praktische Ziele verfolgten. In der größten Anzahl erschienen Werke des betrachteten Typus entweder in den am wenigsten kultivierten Ländern, wie Rußland und Polen, die dementsprechend über fünf und neun solcher Werke verfügten, oder in Ländern, die sich in der vorherrschend praktischen Richtung auszeichneten, wie Holland, wo es deren fünf gab. In den anderen Hauptländern Europas gab es ungefähr in England und Italien je eins, in Frankreich zwei, und in Deutschland vier solche Werke.

[1]) Florian Dabuz, Mogunt. (Mainz) 1767. [2]) Seb. Le Clerc, Paris 1764.



In den Inhalt dieser Werke wurden verschiedene Artikel aus verschiedenen Teilen der praktischen Geometrie eingeführt, wie die Artikel über die Maße, von den Mitteln der Messung und von den dabei gebräuchlichsten Vorrichtungen (Astrolabium und Mensula), von der Absteckung und Messung der Strecken und Winkel auf dem Felde und auch der Entfernungen und Höhen, vom Ausmessen der Felder, von der Grundrißaufnahme, von verschiedenen in der Praktik vorkommenden Fällen des Ausmessens der Rauminhalte (unregelmäßige Körper, Kornhaufen, Holzstapel, Fässer, Krüge, Kanonenkugeln). In einigen von solchen Werken wurden ebenfalls Artikel über Nivellierungen und sogar über Refraktion eingeschoben.

Außer den Werken des betrachteten Typus wurden im Laufe der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts noch Werke herausgegeben, die der Darstellung der praktischen Geometrie allein gewidmet waren. Nach den zurzeit sehr unvollkommenen bibliographischen Berichten erschien in dem angegebenen Zeitraum je ein solches Werk in England und Rußland, vier in Deutschland und zwei in Polen. Das hervorragendste von ihnen war das Werk Mayers des Sohnes „Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie"[1]). In großem Gebrauch in der betrachteten Epoche waren einige Werke über die praktische Geometrie, die im Laufe der ersten Hälfte des 18. und sogar im 17. Jahrhundert erschienen waren. Von ihnen hatten eine sehr große Verbreitung folgende Werke: Chr. Clavius[2]), Geometria practica[3]); Daniel Schwenter, Geometria practica nova[4]); Nicolas Bion, Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques[5]); J. F. Penther, Praxis geo-

[1]) 3 Teile, 8°, Göttingen 1778—83, 4. Aufl. 1814—18. [2]) Cantor, Vorlesungen II$^2$, S. 555—557. [3]) Opera mathematica, II, fol. Mogunt. 1612. Cantor Vorlesungen II$^2$, S. 579—581. [4]) 2 tom., 4°, Nürnberg, 1618. Cantor, Vorlesungen II$^2$, S. 666—670. [5]) 8°, Paris 1709. Poggendorff, I, S. 194—195. Erschien in mehreren Ausgaben in Frankreich und war außerdem in einige andere Sprachen übersetzt worden. Besonders bemerkenswert war die deutsche Übersetzung von Doppelmayr, weil sie viele Ergänzungen enthielt. Sie erschien im Jahre 1713 in Nürnberg unter dem Titel „Mathematische Werkschule", und danach von neuem herausgegeben 1717 und 1723; in-4°.

metriae[1]); Johann Bayer, Vollkommene Visier-Kunst[2]); Pézenas, Traité du Jaugeage[3]).

Für die praktische Geometrie, ebenso wie für alle Wissenschaften, die über Maße handeln, stellt die große Anzahl der letzteren im Leben große Hindernisse und Unbequemlichkeiten in den Weg. Besonders bemerkbar war es in Frankreich, wo nicht nur verschiedene Provinzen verschiedene Maße hatten, sondern einzelne Städte in ein und derselben Provinz. Das Feststellen der Einheit der Maße oder die Gebrauchseinführung eines allgemeinen Maßes für die ganze Menschheit wurde hier früher, und vielleicht mit einer größeren Klarheit eingesehen, als in den anderen Ländern Europas. Als erster trat mit einem bestimmten Vorschlag in der Wissenschaft über diesen wichtigen Gegenstand Gabriel Mouton[4]) hervor. In seinem Werk „Observationes diametrorum solis et lunae apparentium etc.“[5]) schlug er vor als allgemeines Maß den geometrischen Fuß, „virgula geometrica“, der im Erdgrad 600000 mal enthalten war, anzunehmen. Um die Möglichkeit zu haben, die wirkliche Länge dieses Fußes zu jeder Zeit zu finden, bestimmte er die Zahl der Schwingungen des einfachen Pendels derselben Länge während einer halben Stunde, die sich als die Zahl 3959,2 erwies. Dieselben Gedanken wurden im nächsten Jahre (1671) von Picard ausgesprochen und 1673 von Huygens; sie fanden sogar in der Royal Society solchen Anklang, daß diese sich ihnen öffentlich anschloß. Am Anfang des 18. Jahrhunderts fing man an direkt die schnelle Durchführung in der Wirklichkeit zu fordern, was in ihren Werken als erste Amontons[6]) und Bouguer[7]) taten. Danach stellte der Akademiker du Fay dem Minister das Projekt des Reglements vor, welches die Einführung eines allgemeinen Maßes durch ein Gesetz feststellte. Die Annahme dieses Projekts verhinderte der Tod des ihm sympathisierenden Ministers, und ebenfalls des Autors selbst. Auf derselben Neuerung bestand auch de la Condamine in seinem Memoire[8]), in dem er zu zeigen sich bemühte, daß das natürlichste und am wenigsten die Eifersucht verschiedener Länder hervorrufende Maß, dem deshalb auch der Vorzug gegeben werden müßte, das Äquatorialpendel erschien, welches die Länge von 36 pariser Zollen und 7,21 Linien besitze, wenn man sich der Toise, die für Ausmessungen in Peru angefertigt worden war, bediente. Bei Einführung

[1]) 1732, neue Auflage, 2 Teile, fol. Augsburg 1755. Cantor, Vorlesungen $III^2$, S. 528—529. [2]) 4°, Frankfurt a. M. 1603. [3]) 4°, Marseille 1742. Seconde édition, donnée en 1778 par les soins de M. de la Lande. Poggendorff, II, S. 422—423. [4]) Cantor, Vorlesungen $III^2$, S. 76. [5]) 4°, Lugd. 1670, p. 433. [6]) Histoire de l'Académie des sciences de Paris, année 1703, p. 51. [7]) Ebenda, p. 300. [8]) Ebenda, année 1747, p. 189.



dieses Maßes würde die pariser Toise um 14,42 Linien länger werden, und der pariser Breitengrad würde 56132 astronomische Toisen enthalten anstatt 57069 solcher pariser Toisen, die im Grad des Meridians zwischen Paris und Amiens enthalten waren.

Am Ende des 18. Jahrhunderts, am Anfang der französischen Revolution, wurde die Forderung der Einführung eines allgemeinen Maßes nicht nur von wissenschaftlichen Anstalten und einzelnen Gelehrten ausgesprochen, sondern auch von weiten Kreisen der Gesellschaft. So legte am Anfang des Jahres 1790, dem allgemeinen Wunsch entsprechend, der Bürger vieler Städte, Talleyrand-Périgord, welcher damals Bischof von Autun war, der Nationalversammlung den Bericht von der Notwendigkeit, ein allgemeines Maß durch das Gesetz festzustellen, vor, wozu man sich eines von den vorgeschlagenen natürlichen Maßen bedienen konnte, und am besten der Länge des Sekundenpendels auf der geographischen Breite von 45°. Da sich die Nationalversammlung nicht als kompetent genug fühlte, um eine so wichtige Frage endgültig zu bestimmen, wandte sie sich mit einer entsprechenden Anfrage an die Pariser Akademie der Wissenschaften. Die Ausarbeitung der Antwort auf diese Anfrage vertraute die letztere einer zu diesem Zweck besonders erwählten Kommission an, welche aus den Akademikern Borda, Lagrange, Laplace, Monge und Condorcet bestand. Die Ergebnisse der Arbeiten dieser Kommission waren in dem in ihrem Namen gemachten vom 19. März 1791 datierten Berichte „Sur le choix d'une unité des Mesures“[1]) enthalten.

Die Länge des Sekundenpendels auf dem 45. Breitengrade als allgemeines Maß anzunehmen, fand die Kommission als unbequem, weil es in das System der Maße eine Ungleichartigkeit einführt, indem es die Bestimmung der Länge dem Vermessen der mit ihm so ungleichartigen Größe, wie die Zeit, unterwirft, oder, was gleichbedeutend ist, der Größe der Schwere, und außerdem, was noch wichtiger ist, ein Element der Willkür hineinbringt, weil es sich eines so willkürlich gewählten Zeitteiles bedient, wie die Sekunde. Die Längeneinheit im allgemeinen Maßsystem muß nach der Meinung der Kommission auf der Erde selbst gefunden werden, weil nur eine solche Einheit von keiner andern Größe abhängig sein wird, und außerdem, ihrem Ursprung nach, die Analogie mit allen anderen, von der Menschheit gebrauchten Längeneinheiten bewahren wird. Von diesem Standpunkt aus würde es natürlicher sein, die Abstände der Orte auf der Erde auf das Viertel eines der Erdkreise zurückzuführen,

[1]) Histoire de l'Académie royale des sciences, année 1788 (Paris 1791), p. 7—16.

als auf die Länge des Pendels. Als solcher Kreis muß der Äquator oder Meridian angenommen werden, und nur der Meridian, weil er aus vollkommen begreiflicher praktischer Erwägung dem von den Völkern Europas dargestellten zivilisierten Teil der Menschheit die größten Bequemlichkeiten darbietet. Als wirkliche Maßeinheit muß der vierte Teil des Erdmeridians gewählt werden, und die im praktischen Leben gebrauchte Einheit ihr 10000000. Teil sein. Im Einklang mit dem eingeführten Dezimalsystem in der Arithmetik muß das System der Einteilung dieser Einheiten nicht ein sexagesimales, wie früher, sondern ein dezimales werden. Der Bericht hält sich nicht bei den Erwägungen auf, welche die Kommission zwangen, das Dezimalsystem vorzuziehen, aus dem Grunde vielleicht, daß dieser Gegenstand schon früher einer genauen Betrachtung im „Rapport fait à l'Académie des Sciences par MM. Borda, Lagrange, Lavoisier, Tillet et Condorcet, le 27 Octobre 1790"[1]) unterzogen war. Dieser „Rapport" war entstanden infolge des Wunsches der Nationalversammlung, die Meinung der Akademie über die Frage zu wissen: „s'il convient de fixer invariablement le titre des métaux monnoyés, de manière que les espèces ne puissent jamais éprouver d'altération que dans le poids, et s'il n'est pas utile que la différence tolérée sous le nom de remède, soit toujours en dehors. Elle a chargé en même temps l'Académie d'indiquer aussi l'échelle de division qu'elle croira la plus convenable, tant pour les poids que pour les autres mesures, et pour les monnoies? Die Messungen des Meridians, die zur Bestimmung dieser Einheiten notwendig sind, müssen als Ziel die Bestimmung der Länge des Bogens des Erdmeridians haben, welche dem 10000000. Teil des Bogens des Himmelsmeridians $= 90^0$ entsprechen würde, und so gelegen wäre, daß seine eine Hälfte nach Norden und die andere nach Süden von der Parallele $45^0$ sich befinde. Um dieses Ziel in Wirklichkeit zu erreichen, schlug die Kommission vor, den Bogen des Meridians von Dünkirchen bis Barcelona unmittelbar auszumessen, welcher etwas mehr als $9^1/_2{}^0$ einschloß. Als die Hauptvorteile, welche dieser Bogen darstellte, wies die Kommission auf die hinlängliche Größe seiner Ausdehnung und auf seine Teilung durch die Parallele $45^0$ in folgende Teile: den nördlichen Teil $= 6^0$ und den südlichen $= 3^1/_2{}^0$, und auf das Befinden seiner Endpunkte auf der Höhe der Meeresfläche hin. Außer diesem Bogen konnte ebenso vorteilhaft sein der Bogen, der noch westlicher lag und vom Ufer Frankreichs bis zum Ufer Spaniens ging. Jedoch der Vorzug mußte dem ersten gegeben

[1]) Histoire de l'Académie royale des sciences, année 1788 (Paris 1791), p. 1—6.



werden, weil er schon zum Teil nämlich zwischen Dünkirchen und Perpignan ausgemessen war und deshalb ein kostbares Mittel der Prüfung der sich ihm anschließenden neuen Vermessungen und Beobachtungen besaß. Als Operationen, die zur Ausführung der ganzen Arbeit über das von der Kommission vorgeschlagene allgemeine Maß notwendig waren, erkannte sie folgende an: 1. Die Bestimmung der Längendifferenz zwischen Dünkirchen und Barcelona, und überhaupt das Ausführen auf dieser Linie aller astronomischer Beobachtungen, welche als nützlich anerkannt werden könnten. 2. Die Vermessung der früheren Basen, deren man sich bei der Messung des Grades, in Paris ausgeführt, bediente, und bei den Arbeiten der Zusammenstellung der Karte von Frankreich. 3. Die Prüfung, durch eine neue Reihe von Beobachtungen der Dreiecke, die früher zur Messung des Meridians gebraucht wurden, und ihre Verlängerung bis Barcelona. 4. Die Ausführung von Beobachtungen unter $45^0$ geographischer Breite zum Feststellen der Zahl der Schwingungen im luftleeren Raume, am Meeresstrande, im Laufe eines Tages, bei der Gefriertemperatur, eines einfachen Pendels, dessen Länge dem 10000000. Teile des Bogens des Meridians gleich sein würde. 5. Die Prüfung durch neue, sorgfältig ausgeführte Experimente des Gewichts eines gegebenen Volums destillierten Wassers, welches sich im luftleeren Raum bei der Gefriertemperatur befindet. 6. Die Zurückführung auf irgend welche neueste Maße, zum Beispiel auf die pariser Toise oder das Pfund oder alle andern im Handel gebräuchlichen Längen-, Flächen-, Kubik- und Gewichtsmaße mit der Bedingung, daß nach der Bestimmung der Einheiten des neuen allgemeinen Maßsystems alle ihre Ausdrücke auf die früheren Maße durch einfache Regeldetri zurückzuführen sind. In Beziehung auf die vierte von den aufgezählten Operationen wurde im Bericht bemerkt, daß die aufgefundene Zahl der Schwingungen, einmal bekannt geworden, die Möglichkeit geben wird, die Einheit der Länge selbst von neuem zu finden mit Hilfe der Beobachtungen über das Pendel. Damit wird die Vereinigung der Vorteile des Systems der Maße, welche von der Kommission vorgeschlagen, mit den Vorteilen des Systems, welche als Einheit die Länge des Pendels annimmt, erreicht. Nach der Erstattung dieses Berichts in der Nationalversammlung wurde er von ihr am 26. März 1791 angenommen und bekam danach die Kraft des Gesetzes. Die Pariser Akademie der Wissenschaften, der die Leitung aller obengenannten Operationen anvertraut war, mußte, dem Vorschlag des Berichts entsprechend, für dieselben einzelne Kommissionen bilden, deren erste Arbeit das Vorlegen des allgemeinen Planes der bevorstehenden Arbeiten sein mußte. Als Mitglieder dieser Kommissionen für die erste und dritte Operationen erwählte die Akademie Cassini, Mechain und Legendre, für die zweite Monge und Meusnier, für die vierte Borda und Coulomb, für die fünfte Lavoisier und Haüy und für die sechste Tillet, Brisson und Vandermonde.[1])

Die Benennung „Metrisches System“ bekam das neue System der Maße und Gewichte zum erstenmal im „Rapport fait à l'Académie des Sciences, sur le système général des Poids et Mesures, par les Citoyens Borda, Lagrange et Monge“[2]). Dieser von der Akademie angenommene Bericht wurde in ihrem Namen der gesetzgebenden Versammlung vorgelegt als derjenige zweite Bericht, welcher nach dem im ersten Bericht gegebenen Versprechen den vollen Plan des neuen Systems darstellen mußte. Als Darstellung dieses Planes in Beziehung auf die Längen- und Kubikmaße dienen folgende im Bericht angeführte Tabellen:

| | Seconde nomenclature. | Première nomenclature. | toises | pieds | pouces | lignes |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Quart du méridien | Quart du méridien | 5132430 | | | |
| Mesures géogr. et nautiques | Décade | | 513243 | | | |
| | Degré | | 51324 | | | |
| Mesures itinéraires | Poste | | 5132 | | | |
| | Mille | Millaire | 513 | | | |
| Mesures agraires | Stade | | | 307 | 11 | 4 |
| | Perche | | | 30 | 9 | 6,4 |
| Mesures usuelles | Mètre | Mètre | | 3 | 0 | 11,44 |
| | Palme | Deci-mètre | | | 3 | 8,34 |
| | Doigt | Centi-mètre | | | | 4,43 |
| | Trait | Milli-mètre | | | | 0,44 |

| | Seconde nomenclature | Première nomenclature | Valeurs en pintes de Paris | Valeurs en boisseaux |
|---|---|---|---|---|
| | | | pintes | boisseaux |
| Mètre cubique | Tonneau | Muid | $1051\frac{1}{3}$ | 78,90 |
| | Sétier | Deci-muid | $105\frac{1}{7}$ | 7,89 |
| | Boisseau | Centi-muid | $10\frac{1}{2}$ | 0,789 |
| Palme cubique | Pinte | Pinte | $1\frac{1}{20}$ | 0,0789 |

Zum Ausdruck der neuen Maße in den alten wurde in der ersten dieser Tabellen das Viertel des Meridians als gleich der 90 mal ge-

[1]) Exposé des travaux de l'Académie, sur le projet de l'uniformité des mesures et des poids. Histoire de l'Académie royale des sciences, année 1788 (Paris 1791), p. 17—20. [2]) Ebenda, année 1789 (Paris, l'an II de la République), p. 1—18.



nommenen 57027. Toise angesehen, die der Länge des 45. Breitengrades auf dem Meridian, welcher über Frankreich geht, nach den Angaben des Abbé de la Caille[1]) auf Grund der Vermessungen, welche von früheren Astronomen der Akademie ausgeführt waren, entsprachen. Das zweite der geographischen und nautischen Maße bekam seine Benennung als Grad aus dem Grunde, weil nach der Bestimmung der Akademie in dem neuen Maßsystem der 100. Teil des Viertels des Kreisumfanges als Grad angenommen wurde. Er stellte folglich die Länge des Erdgrades dar, „mille“, oder sein 100. Teil die Länge der dezimalen Erdminute („minute décimale terrestre“) und „perche“, als 100. Teil dieser letzten, die Länge der dezimalen Erdsekunde (seconde décimale terrestre). „Stade“ stellte die Seite eines Quadrats dar, welches im neuen Maßsystem als neuer Morgen Landes angenommen wurde, welcher beinahe um das Doppelte den früheren französischen Morgen übertraf. Die zweite Nomenklatur parallel der ersten anzunehmen, hielt sich die Akademie für gezwungen infolge der Unvollkommenheiten, die der letzteren eigen waren: die Länge der Benennungen, die Kompliziertheit der von ihnen ausgedrückten Begriffe und der Möglichkeit, die eine Benennung mit der andern zu verwechseln, wegen ihrer gleichen Endungen. Zur Erläuterung der angezeigten Kompliziertheit der Begriffe durch ein Beispiel bleibt der Bericht auf der Benennung „Deci-mètre“ stehen, in welchem er die Vereinigung dreier Begriffe sieht: der metaphysischen Idee des Zehntels, der metaphysischen Idee eines bestimmten Maßes und endlich die Anwendung der ersten Idee auf die zweite. Um auf diese Weise zum ausgedrückten physischen Maß zu gelangen, muß der Verstand drei Operationen verrichten. Als Benennungen in der zweiten Nomenklatur bemühte sich die Akademie, solche zu wählen, die sich durch Eigenschaften auszeichneten, die den Mängeln der ersten Nomenklatur entgegengesetzt waren und aus der existierenden Metrologie entnommen waren: der französischen, wie décade, degré, poste, perche, und der alten, wie stade, palme, oder aus den Benennungen von Gegenständen, die an eine entsprechende Länge erinnern, wie doigt, trait. Dieselben Überlegungen gaben die Anleitung beim Ausarbeiten der zweiten Nomenklatur der Kubikmaße, die in dem neuen Maßsystem dieselben wie für Flüssigkeiten ebenso auch für Körner sein sollten. Für die Zurückführung der neuen Maße in frühere bei Zusammenstellung der zweiten Tabelle benutzte die Akademie „pinte de Paris“ als das zu jener Zeit gebräuchliche Flüssigkeitsmaß und „boisseau“ als das ebenso gebräuchliche Kornmaß.

Die begonnenen Arbeiten zur Einführung des metrischen Systems

[1]) Histoire de l'Académie des sciences, année 1758.

wurden von den Umständen der Revolutionszeit sehr aufgehalten. Die nach Beendigung dieser Arbeiten erfolgte offizielle Einführung des metrischen Systems in Frankreich konnte erst im Jahre 1795, am 22. Dezember zustande kommen (1 nivôse de l'an IV de la République). Etwas früher, nämlich den 31. Juli 1793 (13 thermidor de l'an I de la République), wurde das Dekret von der Annahme des Meters als Grundmaß erlassen. Um das metrische System vollkommener zu machen und ebenso auch, um ihm die Möglichkeit zu geben, sich möglichst weit über andere Nationen zu verbreiten, wurde im Jahre 1797 in Paris die internationale Kommission zusammengerufen, welcher Lorenzo Mascheroni angehörte, der dem Gegenstand ihrer Beschäftigung sein Werk „Notizie generali del nuovo sistema dei pesi e misure de dotte dalla grandeza della terra"[1]) widmete.

Derjenige Teil der praktischen Geometrie, welcher als Gegenstand die Kunst des Messens der Felder hatte, wurde von der Feldmeßkunst dargestellt. Sie wurde in drei Teile geteilt. Der erste Teil, oder die Feldmeßkunst im eigentlichen Sinne des Worts, beschäftigte sich mit der Messung der Dimensionen des Feldes, ebenso wie mit der Verrichtung der dabei erforderlichen Beobachtungen in diesem Felde selbst. Der zweite Teil, oder die Grundrißaufnahme genannt, hatte als Ziel die gefundenen Größen und die Ergebnisse der gemachten Beobachtungen auf das Papier zu bringen. Gegenstand des dritten Teils endlich war die Bestimmung des Flächeninhalts des Feldes. Der erste Teil wurde den eben gegebenen Definition seines Gegenstands gemäß seinerseits wieder in folgende zwei Unterabteilungen geteilt: das Messen der Entfernungen und die Beobachtungen der Winkel. Als gebräuchliche Vorrichtungen im ersten Teil dienten entweder die Meßkette oder der Wegemesser, im zweiten das Graphometer, Meßtisch, Boussole, Meßscheibe usw. Die Bestimmung des Flächeninhalts des Feldes im dritten Teil der Feldmeßkunst wurde durch das vorhergehende Teilen derselben in Dreiecke, Quadrate, Parallelogramme, Trapeze und hauptsächlich Dreiecke erzielt, wonach die Bestimmung ihres Flächeninhalts und deren Summierung folgte.

An den dritten Teil der Feldmeßkunst schloß sich unmittelbar der besondere Teil der praktischen Geometrie an, der sich mit der Teilung der Länder und der Felder und mit deren Verteilung zwischen ihren Besitzern beschäftigte. Indem man sie als selbständigen Teil der praktischen Geometrie betrachtete, nannte man sie, sich an die Etymologie des Wortes haltend, die Geodäsie im engen Sinne dieses Wortes. Der im weiteren Umfang verstandene Sinn der Benennung

[1]) Milano, anno VI (1798).



„Geodäsie" umfaßte dagegen nicht nur die Feldmeßkunst, sondern auch solche, höherstehende geometrische und trigonometrische Operationen, wie das Zusammenstellen von Karten und das Messen der Grade des Meridians, oder überhaupt irgend welcher seiner Teile.

Die Grundfrage der Geodäsie, im obengenannten engen Sinne des Wortes verstanden, war die Frage, irgend eine Figur in eine bestimmte Anzahl von Teilen zu teilen, was in den meisten Fällen auf Teilung des Dreiecks in gegebenem Verhältnis zurückgeführt wurde, welches darum auch mit allen Details betrachtet wurde, in vielen, diesem Gegenstand gewidmeten Werken, aus denen angeführt zu werden verdienen: „Application de l'algèbre à la géométrie" par Guisnée[1]) und „Pratique de la géométrie sur le papier et sur le terrain"[2]) par Le Clerc. In ihnen wurde diese Frage in den Fällen betrachtet, wenn die Gerade, die das Dreieck in gegebenem Verhältnis teilte, durch den Punkt ging, 1) der mit der einen seiner Spitzen zusammenfiel, 2) der auf einer seiner Seiten lag, 3) der inwendig im Dreieck lag, 4) welcher sich außerhalb befand. In denselben vier Fällen wurde auch die allgemeine Frage von der Teilung einer Figur in gegebenem Verhältnis betrachtet. Im Falle, daß verlangt wurde, irgend eine Figur in einem gegebenen Verhältnis durch eine Gerade zu teilen, welche durch einen gegebenen Punkt gehe und der gegebenen Geraden parallel sei, wurde die Figur zuerst durch Gerade geteilt, die aus den Spitzen ihrer Winkel parallel der gegebenen Geraden geführt, sie in Trapezoide teilte. Im Falle einer krummlinigen Figur wurde die sie begrenzende Linie in Teile geteilt, die ohne fühlbaren Fehler als geradlinig angesehen werden konnten, was die Möglichkeit gab, die ganze Figur als geradlinig anzusehen, und folglich solche Methoden anzuwenden, die für Figuren solcher Art ausgearbeitet waren.

Unter den Fragen der Feldmeßkunst, die hauptsächlich durch ihre Ausführung Wichtigkeit gewannen, lenkte die besondere Aufmerksamkeit im Anfang der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts die Frage auf sich, ob beim Messen eines geneigten Feldes dessen wirklicher Flächeninhalt, oder der Inhalt seiner horizontalen Grundfläche zu nehmen sei? Wie wichtig diese Frage auch vom ökonomischen und praktischen Standpunkt aus betrachtet wäre, kann sie jedoch nicht als direkt zur Geometrie gehörend betrachtet werden. Und wirklich, wie man sich auch entscheiden würde, in der Praktik müßte man immer nur eine und dieselbe Größe ausmessen, die Grenzen des Feldes nämlich und ihre Neigung zum Horizont,

[1]) Paris 1705; 2e édition, ib. 1753, 4°. [2]) Amsterdam 1691, 12°.

und welchen Flächeninhalt man dann bestimmen würde, den wirklichen oder den der horizontalen Grundfläche, das Endresultat würde immer eine und dieselbe Größe darstellen, nämlich die Ausdehnung des Feldes. Bei den französischen Feldmessern wurde die Methode, welche bei der Messung des Feldes sich ihrer horizontalen Grundfläche bediente, „méthode de cultellation", und die andere, die sich ihrer wirklichen Fläche bediente, „méthode de développement" genannt.

In Deutschland lenkte die im Jahre 1766 in der Danziger Physischen Gesellschaft für Bewerbung um die Prämie des Fürsten Jablonowsky vorgelegte Frage: „einen unzugänglichen und undurchsichtigen Wald oder Morast auf die beste Weise auszumessen, aufzunehmen und zu vertheilen" einige Aufmerksamkeit auf sich. Außer den beiden Autoren Auer und Wilke[1]), deren Werke mit der Prämie gekrönt wurden, beschäftigten sich mit der Lösung derselben Frage auch einige andere deutsche Gelehrte.

Als bemerkenswerteste Arbeit in wissenschaftlicher Hinsicht, die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts den Fragen der Feldmeßkunst gewidmet war, ist das Werk von Lorenzo Mascheroni, Problemi per gli agrimensori con varie soluzioni[2]) zu nennen, welches 1803 in die französische Sprache übersetzt wurde. Besondere Beachtung verdienen darin die Aufgaben, die mit Hilfe bloß eines Lineals gelöst werden oder, nach der später angenommenen Terminologie, mit Hilfe der Geometrie des Lineals.

Von den Teilen der praktischen Geometrie stand ihrer Entwicklung nach in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts am niedrigsten die Kunst der direkten Ausmessung des Inhalts der Gefäße, welche in Frankreich Jaugeage und in Deutschland Visierkunst genannt wurde. Ungeachtet der großen praktischen Wichtigkeit dieser Kunst besonders in den Ländern, in denen die Steuern und Zölle auf Getränke und andere Flüssigkeiten den Hauptteil der staatlichen und öffentlichen Einkünfte bildeten, erreichte die Willkür in der Wahl der theoretischen Grundlagen der Ausmessung und die damit bedingte Fehlerhaftigkeit der Resultate in keinem anderen Fach als in diesem einen so hohen Stand der Entwicklung. Das Faß wurde z. B. bald

[1]) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III², S. 556. Das mit der Prämie gekrönte Werk Wilkes, „Abhandlung über die Fürstl. Jablonowskische Preisaufgabe aus der Erdmeßkunst etc." (32 S. mit 1 Tafel), war in der Sammlung „Solutiones problematum a celsissimo principe Jablonovio ex historia polona, Geometria et oeconomia propositorum quas societas Physica Gedanensis 1766 praemiis Jablonovianis coronavit" (Danzig 1767), herausgegeben von der Danziger Physischen Gesellschaft, gedruckt. In derselben Sammlung war auch das Werk Auers abgedruckt worden (32 S. mit 1 Tafel).

[2]) 8°, Pavia 1793.



als abgekürztes Ellipsoid betrachtet, bald als Zylinder, dessen Diameter gleich ist der halben Summe der Diameter der Grundflächen des abgestumpften Kegels, der dieselbe Höhe hat, bald als zwei abgestumpfte Kegel, die an beiden Seiten der gemeinschaftlichen großen Grundflächen gelegen sind. Die Resultate der Ausmessung in der ersten Voraussetzung erschienen im Vergleich zur Wirklichkeit stark vergrößert, bei den beiden anderen jedoch im Gegenteil stark verkleinert. In vollem Einklang mit der Ungenauigkeit und Fehlerhaftigkeit der theoretischen Gründe der Ausmessung des Inhalts von Gefäßen standen die dazu in der Praktik gebrauchten Instrumente; als solche dienten die Stäbe, Velten, pytometrische Lineale, Ruten, Rohre, Gerten, Bänder und eine Menge verschiedener Visiere mit 4, 6 und 8 Seiten, die eine bedeutende Anzahl von Skalen enthielten, die nach verschiedenen und dabei gewöhnlich fehlerhaften Methoden konstruiert waren. Die Folgen eines so traurigen Zustandes der für das praktische Leben so wichtigen Kunst sind nicht schwer vorauszusehen. Der reiche Kaufmann Bruni aus Marseille erlitt einen Schaden von 40000 Franken wegen der fehlerhaften Ausmessung des Inhalts der Fässer mit dem zugestellten Öl aus dem Osten. Bei der Ausmessung eines Fäßchens mit Branntwein, das aus Orleans gesandt war und in Wirklichkeit 58 Pinten enthielt, mußte in Paris im Jahre 1783 für 76 Pinten Einfuhrzoll bezahlt werden.

Aus den Versuchen, die Visierkunst auf eine möglich höchste Stufe zu bringen, die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gemacht wurden, erregte wenigstens in Frankreich die größte Aufmerksamkeit das Werk, welches dem königlichen Professor der Mathematik an der königlichen Kriegsschule, Dez, gehörte. Seinen Erfindungen und Forschungen auf diesem Gebiete weihte er sein, von der Pariser Akademie der Wissenschaften gedrucktes „Mémoire sur la théorie du jaugeage"[1]) und den umfangreichen Artikel „Jauger" in der Encyclopédie méthodique[2]). Der Vorzug des von ihm erfundenen Apparates zum Ausmessen des Inhaltes der Fässer vor anderen solchen Apparaten wurde durch zahlreiche Versuche, die am 22. Februar 1776 in der Steuerverwaltung in Gegenwart von Mitgliedern der Kommission, die zu diesem Zweck von der Pariser Akademie der Wissenschaften ernannt war, festgestellt. Auf Grund des Berichtes, den diese Kommission vorlegte, nahm die Regierung in Person des Ministers Turgot diese Erfindung von Dez an und beschloß sie zum Gebrauche seiner Beamten einzuführen. Die Anerkennung der Erfindung von

[1]) Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie Royale des sciences par divers Savans et lûs dans ses Assemblées, année 1773, p. 383—389.

[2]) Mathématiques II, p. 245—257.

Dez wurde von der Regierung auch schon früher durch die ihm am 22. Dezember 1775 bewilligten Patente über diese Erfindung ausgesprochen.

Zu seiner Erfindung wurde Dez durch die von ihm angenommene Methode zur Ausmessung der Fässer von Camus gebracht, welche erklärt und gedruckt war im Jahre 1744 im Memoire des Autors „Sur un instrument propre à jauger les tonneaux et les autres vaisseaux qui servent à contenir des liqueurs"[1]). Camus betrachtete das Faß als einen Körper, der gebildet wird durch Umdrehung um die Achse $hH$ einer gemischten Linie, die aus dem Bogen einer Parabel $mBM$ in ihrem Scheitel $B$ und zweier Tangenten $mK$ und $MF$ in den Endpunkten dieses Bogens $m$ und $M$ besteht. Die aus diesen beiden Punkten auf die Achse gefällten Perpendikel $MQ$ und $mq$ teilen ihre beiden Hälften $HC$ und $hC$ in gleiche Teile. Wenn man danach den Diameter des Fasses $BD$ bei ihrer Biegung oder, was dasselbe ist, bei ihrer Mitte durch $b$ bezeichnet, mit $f$ den Diameter $FN$ des Bodens des Fasses und mit $l$ die innere Länge $Hh$, so bekommt man für den Inhalt des Fasses oder, was dasselbe ist, für das darin enthaltene Volum der Flüssigkeit den Ausdruck

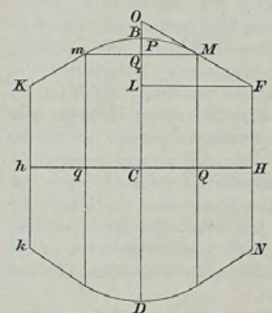


Fig. 7.

$$(1) \qquad \pi l \cdot \left(\frac{64b^2 + 37bf + 34f^2}{540}\right),$$

dessen sich Dez auch bediente.

Camus erhielt diese Formel folgendermaßen. Sind $HC = l$, $BC = a$, $FH = b$, so ist $BL = a - b$ und nach der Voraussetzung $MQ_1 = \frac{1}{2} l$. Man verlängere danach $MF$ bis zum Schnitt $O$ mit der Achse der Parabel. Dann sind

$$Q_1 L = Q_1 O \quad \text{und} \quad Q_1 B = \frac{1}{2} Q_1 O = \frac{1}{2} Q_1 L,$$

und folglich

$$Q_1 B = \frac{1}{3} BL = \frac{a-b}{3}.$$

[1]) Histoire de l'Académie Royale des sciences, année 1741, p. 385—402.



Das parabolische Segment $MQ_1B$ wird auf diese Weise

$$\frac{2}{3} MQ_1 \cdot Q_1 B = \frac{1}{3} l \cdot \frac{a-b}{3}.$$

Der Punkt $P$ der Achse, der dem Schwerpunkt $P$ des Segments entspricht, gibt

$$BP = \frac{3}{5} BQ_1 = \frac{a-b}{5},$$

und folglich

$$CP = \frac{4a+b}{5},$$

und der Umkreis, der vom Punkte $P$ um den Punkt $C$, als Zentrum, umschrieben wird, wird gleich $2\pi \cdot \frac{4a+b}{5}$. Der Inhalt des Körpers welcher durch die Rotation des Segments $MQ_1B$ gebildet wird, wird auf diese Weise durch die Formel ausgedrückt

$$\frac{\pi l}{45}(8a^2 - 6ab - 2b^2).$$

Der Inhalt des Zylinders, welcher durch die Rotation des Rechtecks $MC$ um die Achse $Hh$ gebildet wird, ist $\pi \cdot MQ_1 \cdot (MQ)^2$. Weil jedoch $MQ_1 = \frac{1}{2} l$ und $MQ = \frac{2a+b}{3}$, so wird damit dieser Inhalt durch die Formel bezeichnet

$$\frac{\pi l}{2}\left(\frac{4a^2 + 4ab + b^2}{3}\right).$$

Endlich ist der Inhalt des abgestumpften Kegels, gebildet durch die Rotation des Trapezes $FHQM$ um die Achse $Hh$,

$$\pi \cdot \frac{HQ}{3} \cdot (MQ^2 + MQ \cdot FH + FH^2)$$

oder

$$\frac{\pi l}{6} \cdot \frac{4a^2 + 10ab + 13b^2}{9}.$$

Das Addieren der Inhalte dieser drei Körper gibt folglich den Inhalt des ganzen Fasses, welcher durch die Formel ausgedrückt wird

$$(2) \qquad \pi l \cdot \frac{64a^2 + 37ab + 34b^2}{135},$$

aus der durch Einführung an Stelle von $BC$ des ganzen Diameters $BD$, an Stelle von $FH$ des ganzen Diameters des Bodens des Fasses $FN$ und an Stelle von $HC$ der ganzen Länge des Fasses $Hh$, die Formel (1) erhalten wird, welche Dez gebraucht.

Vollkommen bestätigt durch eine Menge von Versuchen und Vergleichen der Resultate der nach der Formel berechneten mit den wirklich in den verschiedensten Gefäßen vorhandenen Flüssigkeiten erwies sich jedoch die Formel des Camus, ihrer Kompliziertheit wegen, als unbequem für den Gebrauch in der Praxis, besonders wenn man den geringen Stand der Kenntnisse und der Entwicklung des Verstandes der Leute in Betracht zieht, denen gewöhnlich das Ausmessen der Fässer und anderer Gefäße anvertraut wurde. Diese Formel in einfacherer Art darzustellen und sie dadurch bequemer zur Anwendung zu machen, half Dez die Beobachtung, daß in Wirklichkeit die Differenz zwischen dem Durchmesser des Fasses an der Stelle seiner Biegung und dem Durchmesser seines Bodens sehr unbedeutend ist. Diese Differenz mit $\alpha$ bezeichnend und in der Formel (1) auf Grund des Ausdrucks

$$\alpha = b - f$$

die entsprechenden Substitutionen ausübend und in den erhaltenen Zahlen unbedeutende Veränderungen zulassend, die nicht zu irgend fühlbaren Fehlern führen, brachte Dez die Formel (1) in folgender einfachen Form

$$\frac{1}{4}\pi l \cdot \left(b - \frac{3}{8}\alpha\right)^2,$$

oder nach der Transformation der letzten zur Formel

$$\frac{1}{4}\pi l \cdot \left(\frac{b+f}{2} + \frac{1}{8}[b-f]\right)^2. \tag{3}$$

Der Fehler, der durch diese Vereinfachung der anfänglichen Formel entsteht, ist sehr unbedeutend. Und wirklich beträgt die Differenz zwischen den Formeln (1) und (3), was nicht schwer zu ersehen ist,

$$\frac{1}{4}\pi l (0{,}11122 \cdot \alpha - 0{,}02777 \cdot b) \cdot \alpha,$$

was kaum den $\frac{1}{500}$ Teil des Inhalts des Fasses ergibt, sogar wenn man $\alpha = \frac{3}{10} b$ annimmt, nämlich nach der Versicherung des Autors beim ungünstigsten der Fälle, vor dessen Begegnung man sich in der Praxis hüten muß.

Es würde zu weit führen, die Beschreibung des Visiers, das von Dez nach der Formel (3) konstruiert wurde, zu schildern. Wir finden es für genügend, uns mit der Bemerkung zu begnügen, daß die Hauptbedeutung in diesem Apparat zwei Skalen haben, von denen die eine, nach der Benennung des Autors, die Skala der Längen (échelle des longueurs), zum Ausmessen der Länge $l$ des Fasses dient, und die andere, oder die Skala der Durchmesser (échelle des diamètres) zur Ausmessung des Multiplikators



$$\frac{1}{4}\pi \cdot \left(\frac{b+f}{2} + \frac{1}{8}[b-f]\right)^2.$$

Demjenigen, der sich dieses Visiers bediente, blieb nur übrig, um das Endresultat der vollzogenen Ausmessung zu erhalten, die Anzeigen der beiden Skalen zu multiplizieren.

## Elementargeometrische Einzeluntersuchungen.

Ebenso wie früher, vielleicht auch noch in größerem Maße, war die Aufmerksamkeit einiger Spezialisten und überhaupt vieler Leute, die dem aufgeklärteren Teile der Gesellschaft angehören, im Laufe der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts auf das Vermächtnis des Altertums, die berühmten Aufgaben der Dreiteilung eines Winkels, Quadratur des Kreises und der Verdoppelung des Würfels, gerichtet. Als auf sehr bedeutende Zeichen der Aufmerksamkeit auf diese Aufgaben seitens der Spezialisten ist auch auf das Erscheinen in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts von Werken, die der Geschichte dieses Gegenstandes gewidmet waren, hinzuweisen. Es gab drei solche Werke. Als erstes erschien das schon früher erwähnte[1]) Werk Montuclas „Histoire des recherches sur la quadrature du cercle“[2]), das im letzten 6. Kapitel einen kurzen historischen Überblick der Aufgaben über die Verdoppelung des Würfels und die Dreiteilung eines Winkels enthielt. Die beiden anderen Werke, die ausschließlich der Aufgabe der Verdoppelung des Würfels gewidmet waren, gehörten Nikolaus Theodor Reimer[3]) (1772—1832), der im Jahre 1796 Privatdozent an der Universität in Göttingen war, und später, vom Jahre 1801, Professor der Mathematik an der Universität zu Kiel. S. oben S. 28 im XIX. Abschnitte.

Die Aufmerksamkeit auf diese berühmten Aufgaben seitens der Mitglieder der gebildeten Gesellschaft kennzeichnete sich durch das Erscheinen einer bedeutenden Anzahl von Versuchen dieselben zu lösen. Die Aufgabe der Quadratur des Kreises beschäftigte übrigens die gebildete Gesellschaft mehr als die beiden anderen. Besonders viel beschäftigte man sich mit ihr, nach der gedruckten Literatur zu urteilen, in Polen, wo ihr 15 Werke gewidmet waren, und in Frankreich, wo es 7 solcher Werke gab. Elf der Werke über die Quadratur des Kreises, die in Polen erschienen, gehörten einem Autor, dem

[1]) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, III², S. 506.
[2]) Paris 1754. [3]) Poggendorff, II, S. 596.

Vizeoberst Eugenius Innocentius Corsonich, der darin bewies, daß $\pi = 3\frac{1}{8}$ sei.[1]) Sowohl dieses Resultat, als auch dessen in denselben Werken versuchter Beweis waren, seinen Worten nach, von vielen Mathematikern und von sieben Akademien gutgeheißen. Und wirklich wurde der von ihm zusammengestellte genaue Bericht über seine sechsjährige Beschäftigung mit den entsprechenden Gegenständen außer in Warschau, wo er im Jahre 1779 erschien, noch in den „Nova Acta eruditorum"[2]) gedruckt unter dem Titel „Quadratura lunulae, circuli et segmenti, nec non curvatura sphaerae a V.-Col. E. Corsonich, ope 4 propositionum fundamentalium invicte demonstrata, et judicio Academiarum celeberrimarum subjecta"[3]). Jedoch nicht alle, die mit den Arbeiten von Corsonich bekannt waren, befriedigten sich mit seinen Beweisen. Als Opponent in der Heimat des Autors trat in der Literatur der Warschauer Professor Johann Koc vor. Die Polemik über einige im Druck erschienene Versuche der Lösung dieser berühmten Aufgaben entstand auch in anderen Ländern. So herrschte in Italien, wo man sich mehr mit der Dreiteilung eines Winkels und der Verdoppelung des Würfels beschäftigte, als mit der Quadratur des Kreises, nach der Literatur zu urteilen, eine heiße Polemik zwischen Francesco Boaretti einerseits und Vincenzo Dandolo und Antonio Romano andererseits, in den Jahren 1792—93 über den vom ersteren gegebenen Versuch, diese beiden Aufgaben mit Hilfe des Zirkels und Lineals zu lösen.[4])

Die Literatur über die Lösung dieser drei berühmten Aufgaben erschöpfte sich jedoch nicht mit den Werken, die im Druck erschienen. Der bedeutend größere Teil der Versuche, diese Aufgaben zu lösen, blieb in Manuskripten und in diesem Zustande den Akademien und gelehrten Gesellschaften vorgelegt, belästigte er sie äußerst, da er zu seiner Durchsicht eine vollständig nutzlose Anwendung von Mühe und Zeit beanspruchte. Aus den zahlreichen Durchsichten in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts war nur ein einziger Fall, der der Wissenschaft einen neuen interessanten Satz gab. Er beschäftigte die Pariser Akademie der Wissenschaften, und wurde im Artikel „Mémoire sur la Quadrature de la partie *bfd* du cercle *ahrbda*" (par M. Bourrand[5])) des von ihr im Jahre 1774 gedruckten 6. Bandes der „Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans"

[1]) Dra Teofila Żebrawskiego Bibliografija pismiennictwa polskiego z działu Matematyki i fizyki oraz ich zastósowan. W Krakowie 1873. [2]) Anno 1776. [3]) p. 108—124. [4]) G. Valentin, Eine seltene Schrift über Winkeldreitheilung. Bibliotheca mathematica, VII (1893), S. 113—114. [5]) p. 400.



dargestellt. Der Gegenstand dieses Artikels war folgender neue Satz: Wenn wir im Kreise *rba* eine Sehne *ba* ziehen, die die Endpunkte des Bogens von 120⁰ verbindet, und den Durchmesser *hd*, der den Teil *bd* von 30⁰ von diesem Bogen abteilt, so stellt der Sektor *cbd* den $\frac{1}{12}$ Teil des Kreises *rba* dar. Wenn danach mit der Sehne *ad*, die die Endpunkte des Bogens von 90⁰ verbindet, um den Punkt *a*, als um das Zentrum, der Bogen *fd* beschrieben wird, so wird der Sektor *fsad*, der zum Zentriwinkel *a* von 15⁰ gehört, den $\frac{1}{24}$ Teil des Kreisss bilden, dem er angehört, und welcher doppelt so groß ist, als der gegebene Kreis *rba*. Dieser Sektor wird folglich den $\frac{1}{12}$ Teil des Kreises *rba* darstellen, und deshalb dem Sektor *cbd* gleich sein. Diese beiden Sektoren aber haben den gemeinschaftlichen Teil *fsd* und deshalb

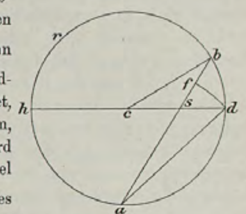


Fig. 8.

$$\Delta sda = \Delta csb + bfd.$$

Es stellt sich auf diese Weise heraus, daß die Differenz zwischen den Flächen der Dreiecke *sda* und *csb* durch die Fläche des Teiles *bfd* des gegebenen Kreises ausgedrückt wird, worin eben der Beweis dieses Satzes besteht.

Die sich immer vergrößernde Anzahl der der Pariser Akademie der Wissenschaften vorgelegten Erzeugnisse der Kreisquadrierer und anderer Personen, die sich mit anderen berühmten Aufgaben, wenn auch in geringerem Maße, beschäftigten, erreichte endlich einen solchen Umfang, daß die Akademie anfing ernstlich darüber nachzudenken, ihre Mitglieder von der nutzlosen Anwendung der Zeit und der Mühe bei dem Durchsehen dieser Erzeugnisse zu befreien. Zum Erreichen dieses Zieles wurde das entschiedenste Mittel gewählt. Im Jahre 1775 veröffentlichte die Akademie folgende Erklärung: „L'Académie a pris, cette année, la résolution de ne plus examiner aucune solution des Problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpétuel".[1]) Der beständige Sekretär der Akademie, Condorcet, motivierte diese Erklärung durch folgende Betrachtungen: Von der Aufgabe der Verdoppelung des Würfels ist

[1]) Histoire de l'Académie Royale des sciences, année 1775, p. 61.

alles, was nur möglich ist von ihr zu wissen, bekannt. Bekannt sind die einfachsten Methoden der Lösung; bewiesen ist, daß es nutzlos sein würde, deren Lösung mit Hilfe nur eines Kreises und einer geraden Linie zu machen. Die Analyse des Problems der Dreiteilung eines Winkels ist so vollständig, daß sie schon seit langer Zeit nichts mehr zu wünschen übrig läßt. Auf diese Weise kann es keinem Zweifel unterliegen, daß diejenigen, die zur Lösung dieser Aufgabe nur den Zirkel und das Lineal gebrauchen, ein fehlerhaftes Resultat erhalten müssen. Diejenigen von ihnen, die zu richtigen Resultaten gelangen, erreichen sie durch den unbemerkten Gebrauch auch anderer Kurven zusammen mit dem Kreise und der geraden Linie, wodurch ihre Lösungen sich von den schon bekannten nicht unterscheiden können, und aus diesem Grunde wird deren Betrachtung vollständig nutzlos. In einer ganz anderen Lage befindet sich die Aufgabe der Quadratur des Kreises. Angenäherte Lösungen sind schon in großer Anzahl gefunden, und die Akademie erkennt in vollem Maße den Wert der Arbeiten in der Richtung der Vervollkommnung der Methoden solcher Lösungen an. Die Kreisquadrierer jedoch suchen nicht die angenäherten Lösungen, sondern die genauen. In Beziehung auf diese letzten zerfällt die Aufgabe der Quadratur des Kreises in zwei selbständige Aufgaben: in der ersten wird die Quadratur des ganzen Kreises gesucht, in der anderen die Quadratur irgend eines Teiles, dessen Sehne als bekannt angesehen wird. Die Unmöglichkeit der ersten Aufgabe wurde von solchen Autoritäten anerkannt, wie Gregory und Newton, ist von vielen Geometern bewiesen, und am besten von Johann Bernoulli. In betreff der zweiten Aufgabe herrscht zwischen den Geometern keine solche Einstimmigkeit über die Unmöglichkeit ihrer Lösung, infolge der häufig vorkommenden Möglichkeit in besonderen Fällen die Größen zu bestimmen, was im allgemeinen Fall unmöglich ist. Infolge dieser Lage der Sache fand Condorcet zur Rechtfertigung der Erklärung der Akademie im betrachteten schwierigen Falle nichts besseres, als an ihre 70jährige Erfahrung zu appellieren, welche klar die vollkommene Nutzlosigkeit für die Wissenschaft der Prüfung der ihr zugestellten eingebildeten Lösungen dieser Frage gezeigt hat, als Erzeugungen von Autoren, die mit der Natur und den Schwierigkeiten dieser Frage nicht bekannt seien, und deshalb solche Methoden anwenden, die zur Lösung dieser Frage nicht führen können, sogar in dem Falle, wenn sie möglich wäre.

Es gab auch noch andere Aufgaben aus der Zahl der von der alten griechischen Geometrie gestellten, für welche sich die Geometer in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts interessierten. So gaben



Lambert, Euler[1]) und Fuß[2]) neue Lösungen der Aufgabe über die Konstruktion eines drei gegebene Kreise berührenden Kreises. Besonderer Beachtung unter solchen Aufgaben erfreute sich die Aufgabe des Pappus von Alexandria von der Einbeschreibung in den Kreis eines Dreiecks, dessen Seiten durch drei auf einer geraden Linie gegebene Punkte gehen, welche von Cramer im Jahre 1742 in folgender allgemeineren Formulierung dargestellt wurde: In einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen müssen. Diese, in der anfänglichen besonderen Form sehr einfache Aufgabe stellte in der verallgemeinerten Form einige Schwierigkeiten dar, die auch die Aufmerksamkeit der Geometer auf sie lenkten. Als erster löste sie in dieser Form Castillon[3]), dem sie von Cramer vorgelegt wurde. In demselben Bande der Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften gab auch Lagrange seine Lösung dieser Aufgabe. Im Jahre 1780 erschienen drei neue Lösungen von Euler[4]), Fuß[5]) und Lexell[6]). In noch allgemeinerer Form und dabei endgültig wurde die Aufgabe des Pappus von Alexandria dargestellt und gelöst von den italienischen Geometern: A. Giordano[7]) aus Ottaiano, der diese Arbeit mit bemerkenswerter Einfachheit im Alter von 16 Jahren verrichtete, und Malfatti.[8]) Die Aufgabe des Pappus von Alexandria hatte in ihrer endgültigen allgemeinen Form folgende Darstellung: In einen Kreis ein Vieleck einzuschreiben, dessen Seiten in einer beliebigen Anzahl genommen durch eine gleiche Anzahl von Punkten gehen müssen, welche in der Ebene des Kreises willkürlich gelegen sind. Die letzte dieser Aufgabe gewidmete Arbeit am Ende des 18. Jahrhunderts war das Werk von Lhuilier[9]), welches

[1]) Solutio facilis problematis, quo quaeritur circulus, qui datos tres circulos tangat. Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, VI, p. 95—101.

[2]) Solution du problème de trouver un cercle, qui touche trois cercles donnés de grandeur et de position. Ebenda, p. 102—113.

[3]) Sur un problème de géométrie plane, qu'on regarde comme fort difficile. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres, à Berlin, année 1776, p. 265 bis 283.

[4]) Problematis cujusdam Pappi Alexandrini constructio. Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 1780, I, p. 91—96.

[5]) Solutio problematis geometrici Pappi Alexandrini, ebenda, p. 97—104.

[6]) Solutio problematis geometrici in Actis Academiae Scientiarum Berolinensis, pro Anno 1776, a celeb. Castillon propositi, ebenda, 1780, II, p. 70—90.

[7]) Considerazioni sintetiche sopra di un celebre problema piano, e risoluzione di alquanti problemi affini. Memorie mat.-fis. della Società Italiana delle scienze, IV, 1788.

[8]) Soluzione generale di un problema geometrico di Pappo Alessandrino, ebenda, IV, 1788.

[9]) Solution algébrique du problème suivant: A un cercle donné, inscrire un polygone dont les côtés passent, par des points donnés. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres, à Berlin, année 1796 (publié 1799), p. 94—116.

einige Änderungen in die Lösungen der italienischen Geometer hineinbrachte.

Ebenso als Beendigung der Arbeiten, die schon früher angefangen waren, nämlich in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts[1], erschien das Werk von Mascheroni La Geometria del compasso[2], das im Jahre 1797 erschien. Sein Gegenstand, wie schon aus dem Titel ersichtlich, besteht aus der Lösung ausschließlich nur mit Hilfe des Zirkels aller Aufgaben, die gewöhnlich mit dem Zirkel und Lineal gelöst werden. Sich mit den Aufgaben der Elementargeometrie nicht begnügend, zeigt Mascheroni in seinem Werke, daß die Geometrie des Zirkels leicht zur angenäherten Lösung der Aufgaben von den Kegelschnitten und sogar von noch höheren Teilen der Geometrie angewandt werden kann. Lorenzo Mascheroni[3] (1750–1800), ein Abbé, beschäftigte sich am Anfang seiner wissenschaftlich-lehrenden Tätigkeit mit Poesie und Belletristik. Aber nach einigen Jahren des Vortrages der humanistischen Wissenschaften und der griechischen Sprache in Bergamo und Pavia fühlte er sich zur Mathematik hingezogen. Nachdem er sich ihrem Studium vollständig gewidmet hatte, wurde er so bald ihrer Herr, daß er schon nach einem kurzen Zeitraum imstande war den Vortrag der Geometrie auf sich zu nehmen, anfangs im Marienkollegium in Bergamo und danach im Archigymnasium in Ticino. Späterhin wurde er Professor der Elementarmathematik an der Universität in Pavia, Korrespondent der Akademie von Padua und Mitglied der italienischen Gesellschaft der Wissenschaften. Als überzeugter und heißer Anhänger der Revolution kam er mit Enthusiasmus den Veränderungen in Italien entgegen, die die Armeen der ersten französischen Republik in ihr politisches Leben hineinbrachten. Nach Gründung der zisalpinischen Republik wurde er zum Mitglied des gesetzgebenden Körpers erwählt und begab sich bald darauf nach Paris, um an der internationalen Kommission teilzunehmen, die zur Ordnung des metrischen Systems der Maße und Gewichte zusammengerufen war. Während seines Aufenthaltes in Paris und kurz vor seinem Tode wurde er zum Mitglied des Stadtrats in Mailand ernannt.

[1] Die ersten Arbeiten dieser Art waren Cardanos und Tartaglias Lösungen einiger Aufgaben der Geometrie von Euklid mit Hilfe eines Lineals allein oder eines Lineals und Zirkels, der jedoch immer unveränderte Öffnung hat. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II², S. 526–529 und häufiger. [2] Pavia, 8°, VIII + 264 pp., 14 tavole. In das Französische von Carette (Paris 1798) übersetzt und später von Gruson (Berlin 1825) ins Deutsche. [3] Poggendorff, II, S. 71—72. Biografia di Lorenzo Mascheroni di Camillo Ugoni, Bergamo 1873. Bibliografia mascheroniana per Giuseppe Ravelli, Bergamo 1881.



Durch das Einführen der Algebra in die Elemente der Geometrie in Widerspruch mit den altgriechischen Geometern geraten, setzte Legendre denselben Weg fort. In seinen Arbeiten gab er den analytischen Methoden einen weiten Zugang in der Lösung der Fragen der Elementargeometrie. So gibt er im V. Anhang zu seinen „Elementen" analytische Lösungen der Aufgaben, die da handeln von Dreiecken, in einen Kreis eingeschriebenen Vierecken, Parallelepipeden und der dreiseitigen Pyramide. Bei der Wahl eines Beispiels aus ihnen für unsere Darstellung genügt es an der Bestimmung des Radius des Kreises, der um ein Viereck umschrieben ist, und an dessen Fläche, als Beispiele, in denen der Autor die Theorie des eingeschriebenen Vierecks ergänzt hat und welche deshalb eine selbständige Bedeutung haben.

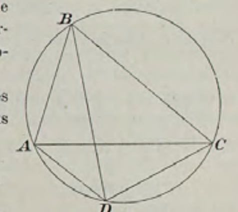


Fig. 9.

Es seien die gegebenen Seiten des dem Kreise eingeschriebenen Vierecks $ABCD$

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\quad DA = d,$$

und seine unbekannten Diagonalen $AC = x$, $BD = y$. Dann werden auf Grundlage der Theoreme über das Produkt der Diagonalen eines eingeschriebenen Vierecks und über ihr Verhältnis

$$xy = ac + bd \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd},$$

daraus folgt, daß

$$x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}, \quad y = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Wenn man sich danach der bekannten Darstellung des Radius eines umschriebenen Kreises des Dreiecks durch die drei Seiten und die Fläche des letzteren bedient, so erhält man für den gesuchten Radius, als den Radius eines umschriebenen Kreises des Dreiecks $ABC$, den Ausdruck

$$z = \frac{abx}{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2+b^2-x^2)^2}},$$

welcher sich nach Ersetzen des $x$ durch seinen eben gefundenen Wert und ferner nach Zerlegung der erhaltenen Resultate in Faktoren in den endgültigen Ausdruck verwandelt

$$z = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}}.$$

Auf Grundlage derselben Darstellung des Radius eines einem Dreieck umschriebenen Kreises durch dessen drei Seiten und seine Fläche werden die Flächen der Dreiecke $ABC$ und $ADC$ sich in folgenden Ausdrücken darstellen

$$\triangle ABC = \frac{\frac{1}{4}abx}{z} \quad \text{und} \quad \triangle ADC = \frac{\frac{1}{4}cdx}{z}$$

und folglich wird die ganze Fläche des dem Kreise eingeschriebenen Vierecks sein

$$ABCD = \frac{1}{4}\cdot\frac{(ab+cd)x}{z}$$

oder nach Ersetzen des $x$ und des $z$ durch ihre Werte

$$ABCD = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)},$$

und bei $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$

$$ABCD = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Wenn eine so weite Anwendung der analytischen Methoden in den elementar-geometrischen Untersuchungen von Gelehrten zugelassen wurde, welche überzeugte Anhänger der altgriechischen Geometer waren, so ist es nicht schwer sich vorzustellen, wie in solchen Fällen Gelehrte, die sich anders zu den Alten verhielten, handelten. In ihren Schriften haben die synthetischen Methoden vollständig den analytischen den Platz geräumt. Diese Erscheinung ist unmöglich außer acht zu lassen, als sehr charakteristische für die elementargeometrischen Untersuchungen in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts.

Die sphärische Geometrie bis in die zweite Hälfte des 18. Jahrhunderts überschritt fast gar nicht die engen Grenzen ihres kleinen Teils, den sie mit der sphärischen Trigonometrie teilte und die sich mit den sphärischen Dreiecken beschäftigte. Dieser Teil, durch die Bedürfnisse der Astronomie und nachher als notwendig für die Navigation und Geodäsie ins Leben hervorgerufen, entsprach ungeachtet der erreichten hohen Entwicklungsstufe nur demjenigen kleinen Teil der Geometrie der Ebene, der zum Gegenstand die gerade Linie und das Dreieck hat. Alle anderen Teile der sphärischen Geometrie jedoch, die den viel größeren Teilen der Geometrie der Ebene entsprachen, harrten noch ihrer Forscher. Als erster erschien in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts der schon oben erwähnte Anders



Johann Lexell (1740—1784)[1]). Er wurde in der Stadt Åbo geboren und fing seine wissenschaftlich-lehrende Tätigkeit an der Universität als Dozent der Mathematik in derselben Stadt an. Im Jahre 1769 wurde er Mitglied der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften, und im Jahre 1771 war er daselbst schon Professor der Astronomie und ordentlicher Akademiker. Er wurde ebenfalls zum Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Stockholm ernannt. Da in Petersburg die Astronomie das Hauptfach Lexells wurde, so gehörten ihr alle seine Schriften, die in einzelnen Ausgaben erschienen und der größte Teil derer, die in den Veröffentlichungen der Akademien in Petersburg und Stockholm und in den „Philosophical Transactions" enthalten waren. Von den Abhandlungen Lexells in der Mathematik gehörten sechs der Geometrie an, acht der Integralrechnung, je zwei der Differentialrechnung, der Trigonometrie und der Geodäsie, vier der theoretischen Mechanik und je eine der Algebra und den Reihen. Von den astronomischen Arbeiten Lexells waren am bekanntesten seine Schriften über die Sonnenparallaxe und ihrer Bestimmung, die sich in den Veröffentlichungen der Petersburger und Stockholmer Akademien befanden. Als auf die wichtigste von ihnen ist auf die im Jahre 1772 in Petersburg als Sonderausgabe erschienene „Disquisitio de investiganda vera quantitate parallaxeos solis, et transitu Veneris ante discum solis anno 1769"[2]) hinzuweisen, in welcher der Autor, die Berechnungen nach den Methoden Eulers führend, die Sonnenparallaxe gleich 8",68 fand.

Die erste Arbeit Lexells, die der sphärischen Geometrie gewidmet war, war der Artikel „De epicycloidibus in superficie sphaerica descriptis"[3]), der, wie aus dem Titel zu ersehen, sich mit Gegenständen beschäftigte, die schon früher von den Geometern berührt worden waren. Als vollständige Neuheit, dem Gegenstand der Erforschung nach, traten folgende drei Arbeiten Lexells hervor, welche in den Jahren 1781 und 1782 erschienen „Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum"[4]), „De proprietatibus circulorum in superficie sphaerica descriptorum"[5]) und „Demonstratio nonnullorum theorematum ex doctrina sphaerica".[6]) Als Hauptgegenstand ihrer Betrachtung erscheinen die Eigenschaften von Kreisen, die auf der

---

[1]) Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch, I, S. 1444 bis 1446. Précis de la vie de M. Lexell. Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, II. Historia Academiae ad annum 1784, p. 16—19.
[2]) 4°, 131 S., mit 1 Tafel. [3]) Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae pro Anno 1779, pars I, p. 49—71. [4]) Ebenda, pro Anno 1781, pars I, p. 112—126. [5]) Ebenda, 1782, pars I, p. 58—103. [6]) Ebenda 1782, pars II, p. 85—95.

Kugel konstruiert sind. In der Geometrie der Ebene werden folglich analog zu diesem Gegenstande Eigenschaften von Kreisen, welche in der Ebene konstruiert sind, vorhanden sein.

Als der am meisten bemerkenswerte Satz aus diesem von Lexell gewählten Gebiet der sphärischen Geometrie erkennt man gewöhnlich das schöne Theorem über die Linie, die den geometrischen Ort der Spitzen der sphärischen Dreiecke darstellt, welche eine gemeinschaftliche Basis und gleiche Oberfläche haben. Angenommen, $ABC$ sei eines der sphärischen Dreiecke, deren gemeinsame Basis $AB = c$ ist und die gegebene Oberfläche $A + B + C - \pi = S$. Es sei ferner $JPK$ der unbestimmt verlängerte Perpendikel, der auf $AB$ in der Mitte errichtet ist. Dann wird, wenn $JP$ ein Quadrant ist, der Punkt $P$ der Pol des Bogens $AB$ sein und der Bogen $PCD$, der durch die Punkte $P$ und $C$ gezogen ist, perpendikular zu $AB$ sein. Es sei weiter $JD = p$, $CD = q$, dann werden die rechtwinkligen Dreiecke $ACD$ und $BCD$, in welchen $AC = b$, $BC = a$, $AD = p + \frac{1}{2}c$, $BD = p - \frac{1}{2}c$ ist, geben

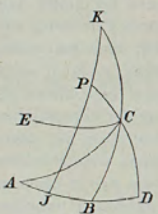


Fig. 10.

$$\cos a = \cos q \cos\left(p - \frac{1}{2}c\right)$$

$$\cos b = \cos q \cos\left(p + \frac{1}{2}c\right).$$

Setzt man jetzt in die schon früher gefundene Formel

$$\cot\frac{1}{2}S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c}$$

die Werte

$$\cos a + \cos b = 2\cos q \cdot \cos p \cdot \cos\frac{1}{2}c$$

$$1 + \cos c = 2\cos^2\frac{1}{2}c$$

$$\sin b \sin C = \sin c \cdot \sin B = 2\sin\frac{1}{2}c \cdot \cos\frac{1}{2}c \cdot \sin B,$$

so bekommt man:

$$\cot\frac{1}{2}S = \frac{\cos\frac{1}{2}c + \cos p \cdot \cos q}{\sin a \cdot \sin\frac{1}{2}c \cdot \sin B}.$$

Außerdem ist noch in dem rechtwinkligen Dreieck $BCD$

$$\sin a \cdot \sin B = \sin q$$



und folglich

$$\cot\frac{1}{2}S = \frac{\cos\frac{1}{2}c + \cos p \cdot \cos q}{\sin\frac{1}{2}c \cdot \sin q}$$

oder

$$(1) \qquad \cos p \cdot \cos q = \cot\frac{1}{2}S \cdot \sin\frac{1}{2}c \cdot \sin q - \cos\frac{1}{2}c,$$

was endlich auch jene Beziehung zwischen $p$ und $q$ vorstellt, die die Linie bestimmen muß, auf der alle Punkte $C$ gelegen sind.

Wenn man jetzt $JP$ um die Größe $PK = x$ verlängert und $KC = y$ zieht, so läßt sich die Seite $KC$ des Dreiecks $PKC$, in welchem $PC = \frac{1}{2}\pi - q$ und der Winkel $KPC = \pi - p$ aus der Formel

$$\cos KC = \cos KPC \cdot \sin PK \cdot \sin PC + \cos PK \cos PC$$

oder

$$\cos y = \sin q \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos q \cdot \cos p$$

bestimmen. Man erhält nach Substitution des nach der Formel (1) gefundenen Wertes von $\cos q \cdot \cos p$

$$\cos y = \sin x \cdot \cos\frac{1}{2}c + \sin q\left(\cos x - \sin x \cot\frac{1}{2}S \cdot \sin\frac{1}{2}c\right).$$

Man sieht daraus, daß wenn man annimmt

$$\cos x - \sin x \cdot \cot\frac{1}{2}S \cdot \sin\frac{1}{2}c = 0$$

oder

$$\cot x = \cot\frac{1}{2}S \cdot \sin\frac{1}{2}c,$$

alsdann gefunden wird

$$(2) \qquad \cos y = \sin x \cdot \cos\frac{1}{2}c$$

und folglich wird der Wert $y$ eine Konstante werden.

Errichtet man also auf der Basis $AB$ in der Mitte den Perpendikel $JP$ und nimmt auf der andern Seite des Pols den Bogen $PK$ so, daß

$$\cot PK = \cot\frac{1}{2}S \cdot \sin\frac{1}{2}c,$$

so werden alle Spitzen der Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Basis $C$ und gleiche Oberfläche $S$ haben, auf dem kleinen Kugelkreise $EC$ gelegen sein und alle Punkte dieses Kreises $EC$ denselben nach der Formel

$$\cos KC = \sin PK \cdot \cos\frac{1}{2}c$$

gefundenen Abstand $KC$ von dem Pol $K$ haben.

Die Bedeutung, die Lexell selbst diesem Theorem gab, oder, wie er es nannte, diesem Problem, ist daraus ersichtlich, daß er ihm einen besonderen Artikel widmete, nämlich die schon oben erwähnte „Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum“. Legendre stellte am Ende seiner Bemerkung X[1]) zu seinen „Éléments de géométrie“ die Lösung dieses Theorems in einer gedrängteren Weise dar, als der Autor. In dieser Form ist sie auch von uns dargestellt.

Nach dem Tode von Lexell übernahmen die Fortsetzung der von ihm unternommenen Ausarbeitung der sphärischen Geometrie zwei andere Mitglieder der Petersburger Akademie der Wissenschaften Nikolaus Fuß und Friedrich Theodor Schubert. Der erste von ihnen legte die Resultate seiner Untersuchungen in diesem Gebiet in den im Jahre 1788 erschienenen zwei Memoiren: „Problematum quorundam sphaericorum solutio“[2]) und „De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae“.[3]) In dem ersten von ihnen löste Fuß folgende drei Aufgaben: Auf gegebener Basis zwischen zwei gegebenen größten Kugelkreisen ein Dreieck zu konstruieren, an dessen Spitze der Winkel ein Maximum sei; ein Dreieck zu konstruieren, an dessen Spitze die Summe zweier Seiten ein Minimum sei; ein Dreieck zu konstruieren, dessen Fläche ein Maximum sei. Da die Lösung der ersten Aufgabe zu einer kubischen Gleichung führt, so untersucht der Autor zuerst die Bedingungen, bei denen die Aufgabe drei Wurzeln zuläßt. Diese Untersuchung findet mit Hilfe der Dreiteilung des Winkels statt und wird von Berechnungen begleitet, die einem bestimmten Fall angehören. Danach folgt die Betrachtung des Falles, bei dem die beiden größten Kugelkreise aufeinander senkrecht stehen und welcher die kubische Gleichung zur Gleichung vom zweiten Grade bringt. Obwohl die zweite Aufgabe nicht schwer erscheint, führt dennoch der Gebrauch gewöhnlicher Mittel zu ihrer Lösung zu solchen Gleichungen, deren Lösung große Schwierigkeiten in den Weg setzen. Der Autor umgeht sie, indem er die Spitze des Dreiecks um einen unendlich kleinen Bogen ändert, als Resultat erscheint eine äußerst einfache Lösung. Außer dem Memoire von Fuß, und sogar früher als dessen Erscheinung, erschien die dritte Aufgabe im zweiten Heft des „Leipziger Magazins für reine und angewandte Mathematik“ von J. Bernoulli und Hindenburg, was darauf hinweist, daß die deutschen Gelehrten an den Untersuchungen über die sphärische Geometrie, die von den Petersburger Akademikern ausgeführt wurden,

[1]) Note X. Sur l'aire du triangle sphérique. [2]) Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, II, p. 70—83. [3]) Ebenda, III, p. 90 bis 99.



ebenfalls teilzunehmen anfingen. Ungeachtet, daß die Lösung dieser Aufgabe schwieriger erscheint, als die der zweiten, gelang es Fuß mit Hilfe der Methode, die der Methode der zweiten Aufgabe ähnlich ist, einen viel schöneren Ausdruck der Lösung der dritten Aufgabe zu finden, welcher dabei geometrisch auf der Kugel konstruiert werden kann. Sein zweites Memoire widmete Fuß den Eigenschaften der bekannten sphärischen Ellipse, d. h. der Kurve, die den geometrischen Ort der Spitzen der Dreiecke darstellt, in denen bei ein und derselben Basis die Summe der zwei andern Seiten konstant ist. Zu der Untersuchung dieser Eigenschaften, die den Eigenschaften der ebenen Ellipse analog sind, wurde Fuß durch die zweite Aufgabe des ersten Memoires veranlaßt. Als Resultat dieser Untersuchung erschien die Schlußfolge, daß die zu betrachtende Kurve eine Durchschnittslinie der Kugel mit dem Kegel zweiten Grades sei, dessen Spitze in dem Mittelpunkt der Kugel liegt. Anders ausgedrückt: die sphärische Ellipse ist die Krümmungslinie der Kegel zweiten Grades. Sie kann auf der Kugel konstruiert werden, ebenso wie die Ellipse in der Ebene, d. h. mit Hilfe eines Fadens, welcher von einem sich bewegenden Stifte stets straff gespannt wird und dessen Enden in zwei Brennpunkten befestigt sind. Wenn man die Abszisse dieser Kurve auf dem größten Kugelkreise nimmt, der durch die Punkte $A$ und $B$ geht, in denen die Enden des Fadens befestigt sind, indem man aus der Mitte $C$ zwischen ihnen ausgeht, und diese Abszisse mit $x$ bezeichnet, die Ordinate auf dem größten Kugelkreise (z. B. $YX$), der senkrecht zum größten Kugelkreise $ACB$ steht, mit $y$ bezeichnet, die Länge des Fadens $AYB$ mit $2c$ und den Bogen des größten Kugelkreises $AB$ mit $2a$, so kann man mit Hilfe der sehr bekannten Transformationen und Reduktionen bei dem Kalkül der Sinusse eine Gleichung erhalten

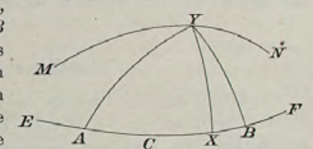


Fig. 11.

$$\operatorname{tang} y = \frac{\sqrt{(\sin^2 c - \sin^2 a)(\sin^2 c - \sin^2 x)}}{\sin c \cdot \cos c},$$

welche die Natur der sphärischen Ellipse ausdrücken wird. Die Anwendung dieser Gleichung auf den speziellen Fall, in welchem die Länge des Fadens $2c$ gleich der halben Peripherie des größten Kugelkreises ist, führte den Autor zu folgendem bemerkenswerten Resultat. Wenn die Länge des Fadens der halben Peripherie des größten Kugelkreises gleich ist, so ist die mit ihrer Hilfe konstruierte Kurve immer ein größter Kugelkreis, wie groß auch die Entfernung zwischen den beiden Punkten, in denen der Faden befestigt ist, sein mag.

Schubert beschäftigte sich in seinem der Petersburger Akademie der Wissenschaften im Jahre 1798 mitgeteilten Memoire „Problemata ex doctrina sphaerica"[1]), welches der Ausarbeitung der sphärischen Geometrie gewidmet war, mit der Lösung der vier Fragen über die geometrischen Orte der Spitzen der Dreiecke, in denen bei der gegebenen Basis folgendes in den einzelnen Fällen gegeben wird: im ersten das Verhältnis der Sinusse der beiden andern Seiten, im zweiten das Verhältnis ihrer Kosinusse, im dritten das Verhältnis der Sinusse der Hälften derselben Seiten und im vierten das Verhältnis der Kosinusse derselben Hälften. Der Autor zeigt, daß der gesuchte geometrische Ort in der ersten Frage dargestellt wird durch den Durchschnitt der Kugel mit dem Kegel, dessen Grundfläche eine Ellipse ist, welche sich auf die Ebene der gegebenen Basis projiziert und als Projektion die Hyperbel hat. Der erwähnte Durchschnitt stellt eine Kurve doppelter Krümmung dar. Der geometrische Ort in der zweiten Frage ist der zur Basis senkrechte größte Kugelkreis. Endlich sind die gesuchten geometrischen Orte in der dritten und vierten Frage durch zwei kleine Kugelkreise dargestellt, die untereinander gleich und parallel sind und senkrecht zur gegebenen Basis stehen.

## Parallelenlehre.

Beständig wachsend erreichte das Interesse an der Parallelenlehre bei den Gelehrten im betrachteten Zeitraum von 1759—1800 ein solches Maß, das bedeutend dasjenige übertraf, welches in gleichen Zeitabschnitten der vorhergehenden Periode erreicht wurde. In diesem Zeitraum erschienen 67 Werke, die in ihrem ganzen Umfang, oder einigen ihrer Teile, der Parallelenlehre gewidmet waren, während in der ganzen vorhergehenden Periode, von Euklid angefangen, nur 55[2]) solcher Werke existierten. Der größte Teil der erwähnten

[1]) Nova Acta Academiae Petropolitanae, XII, p. 196—216. [2]) Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, Leipzig 1895, S. 287—316. Stäckel, Zur Bibliographie der Parallelentheorie. Bibliotheca Mathematica. Neue Folge, XIII, S. 47—48. Zur Angabe der in diesen beiden Werken bezeichneten Schriften sind noch zwei in Rußland erschienene Arbeiten hinzuzufügen: das aus dem Vorhergehenden bekannte Werk von Gurief, „Versuch einer Vervollkommnung der Elemente der Geometrie" und der Artikel „Théorie des lignes parallèles", mitgeteilt in der Sitzung der Petersburger Akademie der Wissenschaften im Jahre 1799 (24. Oktober). Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, XV, p. 77—78.



Schriften, nämlich 44, gehörten Deutschland an. Was die andern anbetrifft, so gehörten 7 Frankreich, ebenfalls 7 Italien, 4 England, 2 Rußland und je 1 der Schweiz, Schweden und Holland an.

Einer und vielleicht der wichtigste von den Gründen, welche die soeben in Zahlen angegebene hohe Entwicklung des Interesses an der Parallelenlehre in Deutschland hervorriefen, war das Erscheinen der Dissertation „Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent Abrah. Gotthelf Kaestner et auctor respondens Georgius Simon Klügel"[1]) im Jahre 1763. Der Gegenstand dieser Dissertation bestand aus der Geschichte der Parallelenlehre und der Kritik der ihr gewidmeten 30 Arbeiten. Die Idee zu diesem Werk, ebenso auch das dazu erforderliche Material, wurde dem Autor wahrscheinlich von Kästner gegeben, der sich für die Parallelenlehre während seiner ganzen gelehrten Tätigkeit interessierte. Indem er in seinen eigenen Untersuchungen auf diesem Gebiet nicht zu genügenden Resultaten gelangte, suchte sie Kästner bei den anderen Autoren und stellte deshalb mit Sorgfalt eine Sammlung derselben zusammen, welche am Ende seines Lebens ziemlich bedeutenden Umfang erreichte. Diese Sammlung benutzte natürlich Klügel bei seinen Arbeiten. Einige Angaben aus der Geschichte der Parallelenlehre waren ebenfalls in dem Artikel von Castillon „Sur les parallèles d'Euclide"[2]) enthalten.

Dank seiner Autorität und Popularität trug d'Alembert viel dazu bei, das Interesse an der Parallelenlehre in Frankreich und anderen Staaten Europas hervorzurufen und zu unterhalten. „Die Erklärung und die Eigenschaften der geraden Linie sowie der parallelen Geraden sind die Klippe und sozusagen das Ärgernis der Elementargeometrie", hatte er in einem bemerkenswerten Aufsatze über die Elemente der Geometrie 1759[3]) ausgerufen und hatte hinzugefügt, man könne allerdings parallele Gerade als solche erklären, die auf einer dritten Geraden senkrecht stehen, dann aber sei unbedingt erforderlich, zu beweisen, daß der Abstand der beiden Geraden immer gleich dem gemeinsamen Lote sei. Später in dem im Jahre 1785 gedruckten Artikel „Parallèle"[4]) in der Encyclopédie méthodique sagte er: „Der strenge Beweis der Theorie der Parallellinien ist vielleicht in der Elementargeometrie die schwerste Aufgabe. Wie es mir scheint, ist die wahre und dabei die reinste Definition der parallelen

[1]) Göttingen, 4°, 30 S., mit 1 Tafel. [2]) Nouveaux mémoires de l'Académie royale de Berlin, année 1786—1787, Berlin 1792, p. 233—254, années 1788—1789, ib. 1793, p. 171—202, 4°. [3]) D'Alembert, Mélange de Littérature, d'Histoire et de Philosophie. Nouvelle édition. T. V. Amsterdam, 8°. [4]) T. II, 3e partie, p. 520. Mathématiques.

Linie, welche überhaupt gegeben werden kann, diejenige, welche sagt, parallel seien Gerade, wenn zwei Punkte der einen gleichweit von zwei Punkten einer anderen Geraden entfernt sind. Zwei Punkte anzuführen ist vollkommen genügend, weil zwei Punkte die gerade Linie bestimmen. Danach muß bewiesen werden (und das ist das Schwerste), daß alle anderen Punkte der zweiten Geraden gleichweit entfernt sind von der gegebenen Geraden und daß folglich sich diese Linien niemals schneiden werden. Zu sagen, daß die parallele Linie eine solche ist, deren Punkte alle gleichweit von einer anderen Linie entfernt sind oder eine solche, welche bei der Verlängerung sich niemals mit ihr schneidet, heißt das, wonach gefragt wird, voraussetzen. Den großen Geometern gleich zu sagen, daß zwei parallele Linien zwei gerade Linien sind, die in einer unendlichen Entfernung oder in einem unendlich entfernten Punkte sich schneiden, das heißt einem vollkommen einfachen Gegenstande eine äußerst metaphysische und abstrakte Definition geben."

Wie auch früher, waren die Anstrengungen der Geometer der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts, die sich mit der Theorie der Parallellinien beschäftigten, auf die Entdeckung eines strengen Beweises der fünften Forderung des Euklid, oder, was dasselbe ist, seines elften Axioms gerichtet, welches, wie bekannt, folgenden Satz darstellt: Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so müssen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte. In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts waren zwischen den, wie die oben angeführten Zahlen zeigen, zahlreichen Versuchen, den Beweis dieses Satzes zu liefern, sehr wenig solche, die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich lenkten und die als vollkommen genügend angesehen in Lehrbücher übergingen. In der chronologischen Reihenfolge ihrer Erscheinung muß man vor allem bei dem Beweise von Bertrand stehen bleiben, welchen er in seinem aus der früheren Darstellung bekannten Werke „Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques"[1]) gab.

Seinem Beweise der fünften Forderung schickte Bertrand folgenden Satz voraus: Zwei Gerade, welche von einer dritten Geraden derart geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, zwei Rechte beträgt, schließen einen solchen Teil der Ebene ein, der in der ganzen

[1]) Tome II, p. 19—20.



Ebene unendlich vielmal enthalten ist. Und wirklich, wenn man auf der Geraden $GH$, die den angegebenen Bedingungen genügende zwei gerade Linien $AB$ und $CD$ schneidet, die Strecke $LM$ gleich der Strecke $KL$ macht und danach durch den Punkt $M$ die Linie $EF$ zieht, die mit $GH$ den Winkel $FML$, gleich dem Winkel $DLK$, bildet, so wird bei der Verschiebung des Streifens $ACDB$, die den Punkt $K$ zur Übereinstimmung mit dem Punkt $L$ und die Strecke $KL$ mit der Strecke $LM$ bringt, dieser Streifen mit dem Streifen $CEFD$ übereinstimmen, was daraus folgt, daß die Winkel $DLM$ und $BKL$, als den Winkel $DLK$ bis zu zweien Rechten ergänzend, einander gleich sein müssen. Da aber die Anzahl solcher Streifen, wie $CEFD$, gleich der Anzahl der nacheinander in der Linie $GH$ eingetragenen Strecken $LM$ ist, so wird bei der augenscheinlich unendlichen Zahl dieser Strecken auch die Anzahl dieser Streifen unendlich sein. Nachdem Bertrand auf diese Weise seinen vorläufigen Satz bewiesen hat, geht er zur fünften Forderung über. Angenommen,

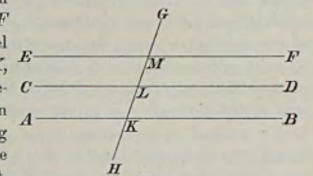


Fig. 12.

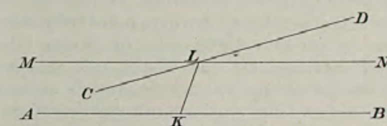


Fig. 13.

daß die Geraden $AB$ und $CD$, welche von einer dritten Geraden $KL$ derart geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden $KL$ liegen, zwei Rechte nicht beträgt. Es sei ebenso

$$\angle BKL + \angle DLK > 2R,$$

dann

$$\angle AKL + \angle CLK < 2R.$$

Wenn man nun die Gerade $LM$ zieht, die den Winkel $CLM$ bildet, welcher so viel Grade, Minuten und Sekunden enthält, als der Summe $\angle AKL + \angle CLK$ fehlen, daß sie $2R$ gleich werde, so kann man auf Grund des vorhergehenden vorläufigen Satzes sagen, daß die ganze Ebene eine unendliche Anzahl solcher Streifen enthält, wie der Streifen

$MLKA$. Dasselbe kann man jedoch vom Winkel $MLC$ nicht sagen, da er im Gegensatz zum Streifen $MLKA$ in der ganzen Ebene eine endliche Zahl mal enthalten sein wird, nämlich 360 mal bei der Größe von 1 Grad, 21600 mal bei der Größe von einer Minute, 1296000 mal bei Größe von einer Sekunde usw. Aus diesem Grunde wird die Voraussetzung, daß die Gerade $LC$ sich auf der Seite von $A$ nicht mit der Geraden $KA$ begegnet, zu einer Absurdität, da sie zu dem Schlusse führt, der Winkel $MLC$, der in der ganzen Ebene eine endliche Anzahl mal enthalten ist, sei im Streifen $MLKA$ enthalten, welcher in der ganzen Ebene eine unendliche Anzahl mal enthalten ist oder, was dasselbe ist, bilde einen Teil von ihm. Also ist es unmöglich, daß die Gerade $LC$ sich mit der Geraden $AK$ in der Seite von $A$ nicht trifft, oder, überhaupt gesagt, ist es unmöglich, daß sich zwei Gerade nicht treffen, die von einer dritten Geraden derart geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, zwei Rechte nicht beträgt.

Um dem Leser die Kraft dieses Beweises verständlicher zu machen, führt Bertrand zum Schluß folgende strengere Darstellung seiner Gründe an. Wie klein oder wie groß ein Winkel auch sein würde, dessen Scheitel im Zentrum des Kreises liegt, welcher mit irgend einem endlichen Radius beschrieben ist, wird er immer entweder zu einem Bogen gehören, der irgend eine Größe hat, oder zu einem Bogen, der gar keine Größe hat. Im zweiten Falle werden seine Schenkel zusammenfallen und folglich wird er kein Winkel mehr sein. Was jedoch den ersten Fall anbetrifft, so wird, da die Peripherie des Kreises selbst eine endliche Größe besitzt, das Verhältnis des Bogens, der dem Winkel gehört, zur ganzen Peripherie des Kreises notwendig das Verhältnis einer endlichen Größe zu einer endlichen Größe sein, und folglich wird sich auch der Winkel selbst zur ganzen Winkelgröße am Zentrum, wie eine endliche Größe zu einer anderen endlichen Größe verhalten, was daraus folgt, daß die Zentriwinkel sich zur ganzen Winkelgröße am Zentrum verhalten wie die Bogen, die zu ihnen gehören, zur ganzen Peripherie des Kreises. Aber zur gleichen Zeit wird derjenige Teil der Ebene, welcher von zwei Geraden eingeschlossen ist, die von einer dritten Geraden derart geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, zwei Rechte beträgt, sich zur ganzen Ebene nicht wie eine endliche Größe zu einer anderen endlichen Größe verhalten, sondern wie eine endliche Größe zu einer unendlichen. Der Streifen $ACDB$ z. B. verhält sich zur ganzen Ebene, dessen Teil er bildet, wie eine endliche Gerade $KL$



zu einer unendlichen Geraden $KG$. Also wie klein ein Winkel auch sein wird, er wird immer den Teil einer Ebene übertreffen, welcher eben mit dem Ausdruck „Streifen" bezeichnet worden ist. Die Behauptung, daß ein Streifen einen Winkel enthält, schließt folglich einen Widerspruch ein. Ebenso schließt auch die Behauptung einen Widerspruch ein, daß zwei Gerade, welche von einer dritten Geraden derart geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, zwei Rechte nicht beträgt, sich bei der Verlängerung auf der Seite, wo diese Summe kleiner als zwei Rechte ist, nicht treffen werden.

Einer großen Bekanntheit, die die Bekanntheit der angeführten Beweisführung Bertrands bedeutend übertraf, erfreuten sich die demselben Gegenstand gewidmeten Arbeiten Legendres hauptsächlich dank der Verbreitung seiner Éléments de géométrie, in denen er sie anbrachte. An Stelle der fünften Forderung selbst bewies er in diesen seinen Arbeiten einige andere Sätze, auf denen die ganze Theorie der Parallellinien ebenso streng begründet werden konnte, wie auf diese Forderung. Ein solcher Satz war in der ersten Ausgabe der „Éléments" im Jahre 1794 der folgende: Wenn die gerade Linie $BD$ das Perpendikel zu $AB$ ist und eine andere Gerade $AC$ mit derselben Linie $AB$ einen spitzen Winkel $BAC$ bildet, so begegnen sich die Linien $AC$ und $BD$ bei genügender Verlängerung. Legendre beweist diesen Satz auf folgende Weise: Der Punkt $G$, der Fußpunkt des Perpendikels, der auf die Gerade $AB$ von irgend einem Punkte

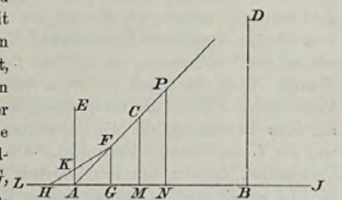


Fig. 14.

$F$ auf der Linie $AC$ gefällt ist, kann nicht auf den Punkt $A$ fallen, noch auf irgend einen anderen Punkt auf der Linie $AL$. Die erste Voraussetzung ist unmöglich, weil der Winkel $BAF$ kein rechter ist. Was jedoch die zweite Voraussetzung anbetrifft, so erweist sich seine Unmöglichkeit aus folgenden Erwägungen. Wenn der Fußpunkt $G$ des Perpendikels zum Beispiel auf den Punkt $H$ fallen würde, so würde sich das angenommene Perpendikel $FH$ im Punkte $K$ mit dem anderen Perpendikel $AE$, das auf der Geraden $AB$ in dem Punkte $A$ errichtet ist, schneiden, dann würden von dem Punkte $K$ aus auf die Gerade $AB$ zwei Perpendikel gefällt worden sein, was unmöglich ist. Also kann der Punkt $G$, der Fußpunkt des Perpendikels $FG$, nur auf irgend einen Punkt der Linie $AJ$ fallen. Auf Grund derselben Erwägungen kann man weiterhin behaupten, daß der Fußpunkt $M$ des Perpendikels, der auf die Gerade $AB$ von dem Punkte $C$ aus gefällt ist, nicht in den Punkt $G$ fallen kann und nicht in irgend einen anderen Punkt der Linie $GL$, da der Punkt $C$ auf der Geraden $AC$ in der Entfernung $AC$, die $AF$ übertrifft, genommen ist. Ebenso kann auch der Fußpunkt $N$ des Perpendikels, der auf die Gerade $AB$ von dem Punkte $T$ aus auf der Geraden $AC$ in der Entfernung von $AP$ genommen, die $AC$ übertrifft, gefällt ist, nicht auf den Punkt $M$, nicht auf irgend einen anderen Punkt der Linie $ML$ fallen usw. Also können die Fußpunkte $M$, $N$ usw. der Perpendikel sich nur bez. auf den Linien $GJ$, $MJ$ usw. befinden auf Entfernungen vom Punkte $A$, die bez. die Entfernungen $AG$, $AM$ usw. übertreffen. Auf diese Weise werden nach der allmählichen Entfernung der Punkte der Linie $AC$ vom Punkte $A$, von denen Perpendikel auf die Linie $AB$ gefällt werden, auch diese Perpendikel sich vom Punkte $A$ entfernen. Dabei eine Grenze der Vergrößerung des Abstandes (z. B. $AN$) des Fußpunktes des Perpendikels vom Punkte $A$ bei der gleichzeitigen Vergrößerung des Abstandes vom Punkte $A$ desjenigen Punktes (z. B. $P$), von dem das Perpendikel gefällt ist, vorauszusetzen, wäre absurd. Und wirklich, nehmen wir an, daß das letzte oder das am meisten vom Punkte $A$ entfernte Perpendikel $CM$ sei, so könnten wir, indem wir auf der Verlängerung von $AC$ den Punkt $P$ nehmen würden, auf dieselbe Weise, wie auch früher, beweisen, daß der Fußpunkt des Perpendikels $PN$ auf die Linie $MJ$ fallen muß und folglich von $A$ auf einer Entfernung, die die Entfernung $AM$ übertrifft, sein muß, was der Voraussetzung widerspricht. Also können die Fußpunkte der Perpendikel, die von den verschiedenen Punkten der Linie $AC$ aus auf $AJ$ gefällt sind, in beliebig großen Entfernungen vom Punkte $A$ liegen, folglich wird auch unter ihnen ein solcher Fußpunkt sein, der mit $B$ zusammenfallen wird, oder, was dasselbe ist, das ihm entsprechende Perpendikel wird mit $BD$ zusammenfallen, woraus direkt folgt, daß die Linien $AC$ und $BD$ bei genügender Verlängerung einander treffen werden.

Dieser Beweis ist nicht genau, da die Behauptung von der Absurdität der Voraussetzung, daß es eine Grenze der Entfernung gäbe zwischen dem Fußpunkt des Perpendikels und dem Punkte $A$, nicht richtig ist. Und diese Ungenauigkeit ist der Aufmerksamkeit der Zeitgenossen nicht entschlüpft. Gurief hat schon in seiner oben erwähnten kritischen Analyse der „Éléments" von Legendre folgende Einwände diesbezüglich gemacht.[1]) Wenn auch zusammen mit der

[1]) Versuch einer Vervollkommnung der Elemente der Geometrie, S. 189—190.



Entfernung des Punktes $C$ von $A$ der Abstand $AM$ des Perpendikels $CM$ von demselben Punkte $A$ wirklich eine unendliche Anzahl Zuwächse bekommen kann, so folgt noch lange nicht daraus, daß die Voraussetzung von der Möglichkeit der Existenz einer Grenze für die Entfernung $AM$ absurd ist. Der Beweis Legendres setzt dabei nur die Unmöglichkeit der Existenz des letzten der Perpendikel fest, die von dem auf $AC$ genommenen Punkte aus auf $AB$ gefällt werden, beweist jedoch in keinem Falle die Unmöglichkeit der Existenz einer Grenze für den Abstand $AM$. Es kann jedoch kein Zweifel bezüglich des ersteren herrschen, deshalb ist auch sein Feststellen nicht als Beweis des betrachteten Satzes anzusehen. Was jedoch die Unrichtigkeit der Ansicht, daß die Voraussetzung der Existenz einer Grenze des Abstandes $AM$ absurd sei, anbetrifft, so deckt sie Gurief mit Hilfe folgender Betrachtungen auf. Da uns beim Beweise des Grundsatzes der Theorie der Parallellinien noch nicht bewußt ist, ob den gleichen Längen $AF$, $FC$, $CP$ usw., die auf $AP$ genommen, ebenso untereinander gleiche Größen entsprechen, nämlich $AG$, $GM$, $MN$ usw., die auf der Linie $AJ$ durch die gefällten Perpendikel von den Punkten $F$, $C$, $P$ usw. abgetrennt sind, so entsteht die Möglichkeit zu sagen, daß die Zuwächse des Abstandes $AM$ z. B. der Reihe folgen

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$$

Da aber die Summe der Glieder dieser Reihe immer kleiner als 2 ist, wie weit man sie auch fortsetzt, so folgt daraus direkt, daß, wie weit der Punkt $C$ sich vom Punkte $A$ auch entfernen mag, das von ihm aus gefällte Perpendikel $CM$ auf der Linie $AJ$ immer eine um zweimal kleinere als die genommene Größe $AG$ von ihr abschneiden wird. Die verdoppelte Größe $AG$ wird auf diese Weise zur Grenze der Entfernung $AM$.

Den Beweis Legendres auf diese Weise widerlegend, gab Gurief in demselben Werke[1]) seinen eigenen Beweis der fünften Forderung, der mit dessen Teilung in drei Fälle anfing. Als ersten Fall beweist er den, in welchem von den beiden inneren Winkeln, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, der eine ein spitzer, der andere ein rechter ist. Beim Beweise des zweiten, in welchem beide innere Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, spitze Winkel sind, benutzt er den ersten Fall. Was jedoch den dritten Fall anbetrifft, in dem der eine der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen,

[1]) Versuch einer Vervollkommnung der Elemente der Geometrie, S. 236—239.

ein spitzer und der andere ein stumpfer ist, so führt er dessen Beweis direkt auf den ersten Fall zurück. Der Beweis, den Gurief dem ersten Fall gab, welcher den Fall darstellt, den Legendre zu beweisen versucht, wurde Gurief durch das Durchsehen der Arbeit des letzteren eingeflößt, wie er es selbst eingesteht, indem er mit dem ihm eigenen Eigendünkel sagt: „Wie schwach und unbegründet dieser Beweis des Herrn Legendre auch sei, er gab mir die Gelegenheit diese Sache zu beendigen, auf die so viel Mühe verwandt worden ist, wie im Altertum, so auch in der neuen Zeit, von den berühmtesten Männern."[1]) Dieser Beweis ist ebenso ungenau, wie der Beweis Legendres, weil Gurief unbemerkbar für sich selbst denselben Fehltritt getan hat wie Legendre.

Indem Legendre von der Kritik Guriefs keine Vorstellung hatte, da dieselbe in russischer Sprache erschien, war er selbst von seinem Beweise nicht befriedigt. In der dritten Ausgabe seiner „Éléments", die im Jahre 1800 erschien, ebenso auch in allen folgenden bis zur achten einschließlich, bewies er an Stelle des Satzes, den er als Grundsatz der Theorie der Parallellinien in der ersten Ausgabe annahm, schon einen anderen, nämlich den Satz von der Gleichheit der Winkelsumme eines Dreiecks mit zwei Rechten, welcher infolge seines engen Zusammenhanges mit der Theorie der Parallellinien als Grundsatz dieser Theorie ebenso streng angenommen werden kann, wie der erstere Satz und wie die fünfte Forderung selbst.

Nach einer Reihe mißlungener Versuche, den direkten Beweis dieses Satzes zu finden, war Legendre gezwungen bei dem indirekten Beweise stehen zu bleiben, nämlich bei den Sätzen, daß die Winkelsumme eines Dreiecks nicht größer sein kann als zwei Rechte, und daß dieselbe Summe nicht kleiner sein kann als zwei Rechte. Für den ersten dieser Sätze gab er folgenden vollkommen strengen Beweis. Wenn es möglich ist, so sei das Dreieck $ABC$ ein solches, bei dem

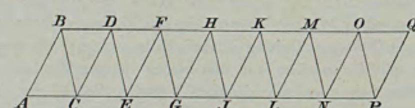



Fig. 15.

die Winkelsumme größer als zwei Rechte ist. Indem man dann auf der Verlängerung von $AC$ die Strecke $CE = AC$ nimmt, den Winkel $ECD = CAB$ konstruiert, auf seiner Seite die Strecke $CD = AB$

[1]) Versuch einer Vervollkommnung der Elemente der Geometrie, S. 190.



macht und sodann die entsprechenden Punkte durch die Linien $DE$ und $BD$ verbindet, so bekommt man ein Dreieck $CDE$, das gleich dem Dreieck $ABC$ ist, da sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Aus der Gleichheit dieser Dreiecke folgt, daß der Winkel $CED = ACB$ ist, der Winkel $CDE = ABC$ und die dritten Seiten $ED$ und $BC$ gleich sind. Da die Linie $ACE$ eine Gerade ist, so ist die Summe der Winkel $ACB$, $BCD$ und $DCE$ zwei Rechten gleich, und folglich laut der Voraussetzung, daß die Winkelsumme des Dreiecks $ABC$ größer als zwei Rechte ist,

$$CAB + ABC + BCA > ACB + BCD + DCE.$$

Indem man von beiden Seiten dieser Ungleichheit den gemeinsamen Winkel $ACB$ subtrahiert und ebenso die gleichen Winkel $CAB$ und $ECD$, bekommt man

$$ABC > BCD;$$

und da die Seiten $AB$ und $BC$ des Dreiecks $ABC$ gleich den entsprechenden Seiten $CD$ und $CB$ des Dreiecks $BCD$ sind, so wird die dritte Seite $AC$ größer als die dritte Seite $BD$ sein. Wenn man sich danach die Linie $AE$ als unbegrenzt verlängert denkt, ebenso die auf ihr konstruierte Reihe von gleichen und ähnlich liegenden Dreiecken $ABC$, $CDE$, $EFG$, $GHJ$ usw., so wird zu gleicher Zeit durch die Verbindung der anliegenden Spitzen durch die Geraden $BD$, $DF$, $FH$, $HK$ usw. eine Reihe dazwischen liegender Dreiecke $BCD$, $DEF$, $FGH$ usw. erhalten, die alle untereinander gleich sein werden, als solche, die übereinstimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Aus der Gleichheit dieser Zwischendreiecke folgt, daß $BD = DF = FH = HK$ usw.

Weil $AC > BD$ ist, sei die Differenz zwischen ihnen $AC - BD = D$. Dann wird $2D$ die Differenz zwischen der Geraden $ACE$, die gleich $2AC$ ist, und der geraden oder der gebrochenen Linie $BDF$ sein, die gleich $2BD$ ist und ebenso $AG - BH = 3D$, $AJ - BK = 4D$ usw. Aber wie klein auch die Differenz $D$ wäre, ist es augenscheinlich, daß sie, genügend wiederholt, größer werden kann, als irgend eine mögliche gegebene Größe, infolgedessen kann man immer voraussetzen, daß die Reihe der Dreiecke so weit fortgesetzt ist, daß

$$AP - BQ > 2AB \quad \text{oder} \quad AP > BQ + 2AB.$$

Andererseits jedoch dieser Folgerung widersprechend, muß die Gerade $AP$ kürzer sein als die gebrochene Linie $ABQP$, weil sie mit ihr die gemeinsamen Endpunkte $A$ und $P$ hat, d. h. es muß immer sein

$$AP < AB + BQ + QP \quad \text{oder} \quad AP < BQ + 2AB.$$

Die Voraussetzung, von der man ausging, erweist sich auf diese Weise als absurd, folglich kann die Winkelsumme des Dreiecks $ABC$ nicht größer als zwei Rechte sein.

Dem zweiten Satze gab Legendre den Beweis, dessen Mangelhaftigkeit er später selbst anerkannte[1]), indem er sagte, daß „dieser zweite Satz, obwohl das Prinzip seines Beweises gut bekannt ist, uns Schwierigkeiten stellte, die wir nicht vollends beseitigen konnten“.

Zu Legendres Versuchen des direkten Beweises des Satzes über die Gleichheit der Summe der Winkel eines Dreiecks mit zwei Rechten ist auch der Beweis dieses Satzes zu rechnen, welcher in der ersten Ausgabe der „Éléments de géométrie“ angeführt wird, obwohl er auch nicht mit der Absicht gegeben war, diesen Satz als Grundsatz der Theorie der Parallellinien anzugeben. Ungeachtet dessen, daß dieser Beweis in dem eben angeführten Memoire von Legendre[2]) wiederholt war, befriedigte er den Autor nicht, weil er sich nicht mit dem Gebrauche der Mittel begnügte, die vom ersten Buche der Elemente des Euklid geboten wurden, und teils synthetisch, teils analytisch war. Hier ist dieser Beweis.

Indem wir unmittelbar durch Auflegung ohne Anwendung irgend eines vorläufigen Satzes beweisen, daß zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, bezeichnen wir die erwähnte Seite mit dem Buchstaben $p$, die ihr anliegenden Winkel mit $A$ und $B$ und den dritten Winkel mit $C$. Es ist nötig, daß der Winkel $C$ vollkommen bestimmt ist im Falle, wenn die Winkel $A$ und $B$ und die Seite $p$ bekannt sind, weil im andern Fall den drei gegebenen Größen $A$, $B$, $p$ einige Winkel $C$ entsprechen könnten und es ebenso viel verschiedene Dreiecke geben würde, die übereinstimmen in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, was unmöglich ist. Also muß der Winkel $C$ eine bestimmte Funktion der drei Größen $A$, $B$, $p$ sein, was auf folgende Weise dargestellt werden kann $C = \varphi\,(A, B, p)$.

Wenn als Einheit der rechte Winkel genommen wird, so werden die Winkel $A$, $B$, $C$ durch Zahlen ausgedrückt werden können, die zwischen 0 und 2 liegen; da aber $C = \varphi\,(A, B, p)$, so erhalten wir die Möglichkeit zu behaupten, daß die Funktion $\varphi$ die Linie $p$ nicht enthalten kann. Und wirklich, wenn dank der Eigenschaft des $C$ durch die gegebenen Größen $A$, $B$, $p$ allein vollkommen bestimmt zu werden, irgend eine Gleichung zwischen $A$, $B$, $C$, $p$ existieren

[1]) Legendre, Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle. Mémoires de l'Académie Royale des sciences de l'Institut de France XII (1833), p. 371. [2]) Ebenda, p. 372—374.



könnte, so könnte man aus ihr den Ausdruck der Größe $p$ ableiten in der Abhängigkeit von den $A$, $B$, $C$, woraus folgen würde, daß die Seite $p$ einer Zahl gleich sein würde, was absurd ist. Also kann die Funktion $\varphi$ die Seite $p$ nicht enthalten, und folglich ist $C = \varphi\,(A, B)$.

Diese Formel weist gerade darauf hin, daß wenn zwei Winkel eines Dreiecks zwei Winkeln eines andern Dreiecks gleich sind, so auch die dritten Winkel gleich sind. Wenn aber das bewiesen ist, so ist es nicht schwer, auch das Theorem selbst über die Gleichheit der Summe der Winkel eines Dreiecks mit zwei Rechten zu beweisen.

Zuerst nehmen wir ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit dem rechten Winkel bei $A$ und fällen ein Perpendikel $AD$ von diesem Punkt $A$ auf die Hypotenuse. Dann werden die Winkel $B$ und $D$ des Dreiecks $ABD$ den Winkeln $B$ und $A$ des Dreiecks $BAC$ gleich sein, und folglich wird, nach dem eben Bewiesenen, der dritte Winkel $BAD$ dem dritten Winkel $C$ gleich sein. Auf Grund derselben Erwägungen wird der Winkel $DAC = B$ sein, und folglich $BAD + DAC$ oder $BAC = B + C$. Aber der Winkel $BAC$ ist ein rechter, folglich werden die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks zusammen einen rechten Winkel bilden.

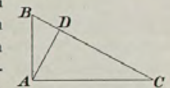


Fig. 16.

Nehmen wir jetzt irgend ein Dreieck $BAC$, in dem die Seite $BC$ nicht kleiner ist, als jede der beiden andern Seiten. Wenn wir von dem Scheitel des Winkels $A$, der der Seite $BC$ gegenüberliegt, auf diese Seite der Perpendikel $AD$ fällen, so wird dieses Perpendikel im Innern des Dreiecks $BAC$ verlaufen und dasselbe in zwei rechtwinklige Dreiecke $BAD$, $DAC$ teilen. Im ersten werden die beiden Winkel $BAD$ und $ABD$ einen rechten Winkel bilden, ebenso auch im zweiten die beiden Winkel $DAC$, $ACD$. Bei der Vereinigung jedoch aller dieser vier Winkel werden sie die drei Winkel bilden $BAC$, $ABC$, $ACB$, oder ebenfalls zwei Rechte. Also ist die Summe der Winkel in jedem Dreieck zwei Rechten gleich.

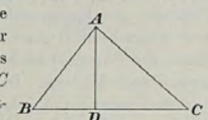


Fig. 17.

Die Hauptarbeit in der Theorie der Parallellinien in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts und, wenn man die Arbeit von Saccheri ausschließt, auch in der ganzen vorhergehenden Zeit, war das Werk Lamberts „Theorie der Parallellinien“[1]). Es war schon

[1]) Magazin für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von

im September 1766 verfaßt, jedoch befriedigte es den Autor nicht und wurde auch deshalb während seiner Lebzeiten nicht verlegt. Diese Pflicht bezüglich der wichtigen Arbeit fiel dem Direktor der Königlichen Sternwarte zu Berlin, Johann Bernoulli (1744—1807), zu, dem die Berliner Akademie der Wissenschaften den Nachlaß Lamberts „unter annehmlichen Bedingungen" überließ, „damit er einen für das gelehrte Publikum nützlichen Gebrauch davon machen sollte".

In seinem Werk ging Lambert, Saccheri gleich, vom Viereck $ABDC$, in welchem die Winkel $A$ und $B$ Rechte sind, aus. Wenn in ihm ebenso auch der Winkel $C$ ein Rechter sein wird, so werden $AB$ und $CD$ einander nicht begegnen und die Frage wird auf den Winkel $BDC$ zurückgeführt, in Beziehung zu welchem man drei Voraussetzungen

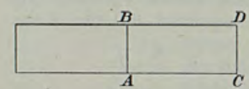


Fig. 18.

zulassen kann: $\angle BDC = 90^0$, $\angle BDC > 90^0$, $\angle BDC < 90^0$. Nach der Durchsicht einer jeden dieser Voraussetzungen im einzelnen unter den entsprechenden Titeln: „Erste Hypothese"[1]), „Zweite Hypothese"[2]) und „Dritte Hypothese"[3]) kommt Lambert hinsichtlich der ersten zum Schluß, daß sie mit der Annahme des fünften Euklidischen Postulats gleichbedeutend ist, und die zweite Hypothese auf einen Widerspruch führt. Endlich macht er bei der dritten Hypothese stillschweigend eine mit dem zu beweisenden Postulate gleichbedeutende Annahme. Dieser letzte Umstand war auch wahrscheinlich einer der Gründe, und vielleicht auch der Hauptgrund der Unzufriedenheit des Autors mit seiner Arbeit, die ihn an deren Druck hinderte. Die schwachen Seiten des Werks von Lambert verhinderten ihn jedoch nicht bei seiner weiteren, viel weiter als bei Saccheri gehenden Betrachtung von der zweiten und dritten Hypothese zu einigen bemerkenswerten Resultaten zu gelangen. So findet er, daß wenn eine von jenen beiden Hypothesen stattfände ein absolutes Maß der Länge vorhanden wäre. Als letztes und vielleicht als wichtigstes Resultat erscheinen die Betrachtungen über den Flächeninhalt des Dreiecks, die Lambert zeigten, daß dieser Flächeninhalt bei der zweiten und dritten Hypothese der Abweichung der Summe der Winkel des Dreiecks von zwei Rechten proportional ist. Dieser Schluß bringt ihn zur folgenden wichtigen Bemerkung: „Hierbey

Bernoulli und Hindenburg, Leipzig 8°, Jahrgang 1786, 2. Stück, S. 137 bis 164; 3. Stück, S. 325—358. Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, Leipzig 1895, S. 152—207.

[1]) S. 180—185. [2]) S. 186—192. [3]) S. 192—207.



scheint mir merkwürdig zu seyn, daß die zwote Hypothese statt hat, wenn man statt ebener Triangel sphärische nimmt, weil bei diesen sowohl die Summe der Winkel größer als 180 Gr. als auch der Überschuß dem Flächenraume des Triangels proportional ist. Noch merkwürdiger scheint es, daß, was ich hier von den sphärischen Triangeln sage, sich ohne Rücksicht auf die Schwierigkeit der Parallellinien erweisen lasse, und keinen andern Grundsatz voraussetzt, als daß jede durch den Mittelpunkt der Kugel gehende ebene Fläche die Kugel in zween gleiche Theile theile. Ich sollte daraus fast den Schluß machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor. Wenigstens muß immer etwas seyn, warum sie sich bey ebenen Flächen lange nicht so leicht umstoßen läßt, als es sich bei der zwoten thun ließ."[1])

Als er, wie die Bemerkung zeigt, erfuhr, daß die zweite Hypothese sich auf der Kugel verwirklicht, ging Lambert weiter und sprach die für seine Zeit außerordentlich kühne Vermutung aus, daß zu demselben für die dritte Hypothese die imaginäre Kugelfläche führe. Damit schaute er weit in die Zukunft, weil die Richtigkeit seiner Vermutung erst ein ganzes Jahrhundert nachher bewiesen werden konnte. Vollkommen möglich ist es, daß er zu seiner Vermutung gelangte, indem er den Radius der Kugel $r$ durch den Wert $\sqrt{-1} \cdot r$ in der Formel

$$r^2(A + B + C - \pi)$$

ersetzt, die zum Ausdruck des Flächeninhaltes des sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $A$, $B$, $C$ dient. Als Resultat dieser Vertauschung mußte er den Ausdruck

$$r^2(\pi - A - B - C)$$

bekommen, was dem Forscher zeigte, daß auf der imaginären Kugel, ebenso wie auf der wirklichen, der Flächeninhalt des Dreiecks der Abweichung der Winkelsumme des Dreiecks von zwei Rechten proportional ist und daß dieselbe Summe nicht größer sein kann als zwei Rechte, d. h. alles das, was den Inhalt der dritten Hypothese bildet.

Mit der Theorie der Parallellinien beschäftigte sich ebenfalls Lagrange. Er war, ebenso wie Lambert und Legendre, von den erhaltenen Resultaten nicht befriedigt, was aus folgenden übrigens sehr ungenügenden Auskünften zu ersehen ist. Nach der Mitteilung Leforts, von Hoüel[2]) dargestellt: „Lagrange hatte erkannt, daß

[1]) Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, Leipzig 1895, S. 202—203. [2]) Hoüel, Essai critique sur les prin-

die Formeln der sphärischen Trigonometrie von dem elften Axiome unabhängig sind, und hoffte hieraus einen Beweis dieses Axioms zu gewinnen. Alle anderen Beweisversuche betrachtete er als ungenügend. So hat er sich in seinen Unterhaltungen mit Biot ausgedrückt." Und nach der Erzählung von de Morgan[1]): „Lagrange verfaßte am Ende seines Lebens eine Abhandlung über die Parallellinien. Er begann sie in der Akademie zu lesen, aber plötzlich hielt er inne und sagte: ‚Il faut que j'y songe encore'; damit steckte er seine Papiere wieder ein."

cipes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII premières propositions des Éléments d'Euclide p. 76.

[1]) Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien usw., S. 212.

## Verbesserungen.

S. 58 Z. 2 v. u. statt [2]) Ebenda, S. 79, 80 lies [2]) A. De Morgan, op. cit. S. 79, 80.
S. 59 Z. 4 v. u. statt S. E. Morgan lies S. E. De Morgan.

ABSCHNITT XXIII

# TRIGONOMETRIE · POLYGONOMETRIE UND TAFELN

VON

A. v. BRAUNMÜHL

## Die Ausbildung der Trigonometrie durch Euler und dessen Zeitgenossen und Nachfolger.

Die definitive Umgestaltung der Trigonometrie war 1753 durch den ersten grundlegenden Aufsatz Eulers angebahnt worden (vgl. III², S. 560—561 und 867—869), obwohl derselbe seine praktische Bezeichnungsweise der trigonometrischen Funktionen schon viel früher in seinen zahlreichen Abhandlungen sowie in der „Introductio" angewendet hatte. Diese Bezeichnungsweise, die in der Hauptsache der noch jetzt gebräuchlichen entspricht, war auch von einigen der hervorragendsten Mathematiker, wie von den Franzosen Clairaut und d'Alembert, alsbald mit Glück gebraucht worden, während andere und darunter namentlich die Engländer sich noch ziemlich lange teils der älteren Abkürzungen[1]) bedienten, teils überhaupt keine Formeln schrieben. Die Wichtigkeit seiner Schreibweise für die ganze Mathematik hat Euler selbst mit folgenden Worten hervorgehoben[2]): „Wenn dies (nämlich die Einführung der trigonometrischen Funktionen in den Kalkül) auch nicht von großer Wichtigkeit scheinen möchte, da es hauptsächlich auf der von mir in die Rechnung eingeführten Bezeichnungsweise dieser Größen beruht ..., so hat doch eben diese Art der Bezeichnung nachmals der ganzen Analysis so große Hilfsmittel verschafft, daß dadurch ein fast neues Feld erschlossen wurde ..."

Ferner hat Euler[3]), wenn er dies auch nirgends ausdrücklich hervorhob, die trigonometrischen Funktionen nicht mehr allein als Linien, wie es bisher stets geschehen war, sondern fast durchweg als Verhältnisse aufgefaßt. Dies geht aus verschiedenen Stellen seiner Schriften auf das deutlichste hervor und war schon durch den Um-

---

[1]) Vgl. z. B. die Bezeichnung bei F. C. Maier, III², S. 559. Ausführlicheres hierüber in: A. v. Braunmühl, Die Entwicklung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie. Bibl. math. (3) III, 1902, p. 64—74. [2]) Subsidium calculi sinuum. Novi Comment. Acad. sc. Petrop. ad annos 1754/55, erschienen 1760, V, p. 164—165. [3]) So z. B. in „Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem". Novi Comment. Acad. Petrop. 1760/61 (erschienen 1763), VIII, p. 159 ff.; ferner in „Trigonometria sphaerica universa". Acta Acad. Petrop. 1779, I, p. 73. Vgl. auch die Übersetzung von E. Hammer, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 73, p. 41.

stand gefordert, daß er sie als Winkelfunktionen in die Analysis einführte[1]). Simon Klügel, auf den wir weiter unten noch ausführlich zu sprechen kommen werden, hat diese Neuerung mit folgenden Worten gekennzeichnet[2]): „Nach der alten Ansicht der goniometrischen Funktionen waren es bloße Linien, die man unter sich und mit dem Halbmesser zu Gleichungen verknüpfte . . ., und hier den Halbmesser zur Einheit nehmen, war nur Ersparung im Schreiben, welche die Gleichartigkeit (Homogeneität) der Glieder zerstörte. Nach der neuen, durch Euler eingeführten, sind sie Zahlgrößen, welche die Gleichartigkeit der Glieder nicht aufheben, . . .“ Aber obwohl schon Eulers Arbeiten den Vorteil dieser Auffassung ins Licht setzten, und später Klügel und andere für sie eintraten, dauerte es noch bis tief in das 19. Jahrhundert hinein, bis dieselbe auch in der elementaren Trigonometrie durchgriff und überall festen Fuß faßte.

Ähnlich ging es auch mit jenem so einfachen und in seiner Tragweite doch so wichtigen Gedanken Eulers, die Seiten der ebenen und sphärischen Dreiecke mit $a$, $b$, $c$ und die gegenüberliegenden Winkel mit den an den Ecken stehenden Buchstaben $A$, $B$, $C$ zu bezeichnen, ein Gedanke, den er schon in jener Abhandlung von 1753 über die kürzeste Linie zur vollkommen symmetrischen Gestaltung der sphärischen Formelsysteme ausgenützt hatte. Obwohl das Vorteilhafte dieser Bezeichnung auf der Hand lag, fand auch sie nur ziemlich langsam allgemeine Verwendung.

Sehen wir uns um, was von Eulers Zeitgenossen und Nachfolgern sowie von ihm selbst von 1759 ab neues in der Trigonometrie geleistet wurde, so müssen wir um einige Jahre zurückgreifend einen Aufsatz des Engländers Francis Blake (1718—1780) mit dem Titel „Spherical Trigonometrie reduced to Plane“[3]) besprechen, der deshalb nicht übergangen werden kann, weil die darin angewandte Methode nachmals wiederholte Verwendung fand. Den Schlüssel zur Behandlung der sphärischen Dreiecke bot ihm der Fall, einen Winkel aus den drei Seiten zu bestimmen, den er folgendermaßen löste. Um $\sphericalangle a$ in $\Delta abd$ (Fig. 19) zu bestimmen, seien $af$ und $ae$ die Tangenten

Fig. 19.

[1]) Er sagt im Subsidium calculi sinuum a. o. a. O.: „Ebenso (wie Johann Bernoulli die Logarithmen zu analytischen Größen machte) glaube ich die Sinus und Tangenten der Winkel zuerst in den Kalkül eingeführt zu haben, so daß man sie wie andere Größen behandeln und mit ihnen alle Operationen ohne jedes Hindernis ausführen kann“. [2]) Mathem. Wörterbuch, II, 1805, p. 618. [3]) P. T. XLVII, 1752, p. 441 ff.



der Bögen $ad$ und $ab$ und $c$ sei das Zentrum der Kugel, dann ist $ce = \sec ab$, $cf = \sec ad$ und $\sphericalangle c = \operatorname{arc} bd$ bekannt. Somit ergibt sich aus $\Delta cef$ die Seite $ef$, und da $af = \operatorname{tg} ad$, $ae = \operatorname{tg} ab$ ebenfalls bekannt sind, so findet man aus dem ebenen $\Delta aef$ den $\sphericalangle eaf = a$. Im Grunde genommen ist Blakes Verfahren nur eine Vereinfachung der schon von den Arabern und Regiomontan ausgebildeten Methode.[1])

Im Jahre 1756[2]) versuchte ferner der Franzose Alexander-Gui Pingré (siehe XIX. Abschnitt, S. 14), der sich durchweg der Formelschreibweise Eulers bediente, die Nepersche Regel für rechtwinklige sphärische Dreiecke auf schiefwinklige auszudehnen, indem er die längst bekannten Sätze, welche sich durch Fällen eines senkrechten Bogens von einer Ecke eines Dreiecks auf die Gegenseite ergeben, in zwei Regeln zusammenfaßte, die nur auf jene beiden Aufgaben, in welchen drei Seiten oder drei Winkel gegeben sind, keine Anwendung fanden. Dieser Umstand veranlaßte später (1798) den Schotten Walter Fisher, Pingrés Regeln zu verbessern[3]), indem er sie durch vier in allen Fällen anwendbare Theoreme ersetzte, die jedoch wenig Verwendung fanden.

Jean François de Castillon kennen wir bereits als Herausgeber von Newtons kleineren Schriften (III[2], S. 508). Durch das Studium der Werke des letzteren wurde er offenbar zur Abfassung zweier Abhandlungen veranlaßt, die er 1764 und 1765 der Berliner Akademie vorlegte[4]) und in denen er eine neue Begründung einiger Sätze der ebenen Trigonometrie versuchte. So gab er eine geometrische Ableitung des Halbwinkelsatzes und zeigte, wie aus diesem sieben Theoreme fließen, die schon Newton in seiner Arithmetica universalis aufgestellt hatte.[5])

Eulers analytische Formeln wurden mit Glück verwendet in einer Dissertation aus dem Jahre 1760, die unter dem Präsidium von Johann Kies (1713—1781), Professor in Tübingen, von den Kandidaten des Magisteriums Hoffmann und Jäger verteidigt wurde. Sie führt den Titel „Trigonometria methodo plana et facili exposita“ und gibt die goniometrischen Formeln sehr vollständig, ohne jedoch die trigonometrischen Funktionen als Verhältnisse zu definieren. Dann werden die zehn Hauptgleichungen zwischen drei Stücken eines recht-

[1]) Vgl. A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 1900, p. 68 und 129. [2]) Mém. de l'Acad. de Paris 1756 (erschienen 1762), p. 301. [3]) P. T. I, 2, 1758, p. 538—543. [4]) Propositions de Géométrie et de Trigonométrie élémentaire, démontrées d'une manière nouvelle. Mém. de l'Acad. de Berlin 1766 (publiziert 1768), p. 354—364. [5]) Arithmetica univ., Cap. XIII, Problemata geometrica.

winkligen sphärischen Dreiecks abgeleitet und auch die weniger bekannten Relationen zwischen vier Stücken aufgestellt, woran sich die Ableitung der Sätze für das schiefwinklige Dreieck mit Einschluß der Neperschen Analogien anreiht. Bemerkenswert ist die polare Gruppierung der sechs Dreiecksfälle zu zweien, die trotz Vietas Vorgang[1]) selten genug zu finden war. Die Formeln für das ebene Dreieck gewinnt Kies, wie das später noch oft geschah, durch Grenzübergang aus jenen für die Kugel, indem er $\sin A = A$, $\operatorname{tg} A = A$, $\cos A = 1$ setzt.

Um die Mitte des 18. Jahrhunderts wurde auch zum ersten Male die Notwendigkeit einer Kleinkreistrigonometrie auf der Kugel von d'Alembert betont. Nachdem derselbe bereits in seinen Réflexions sur la cause des vents, Paris 1757, durch eine ziemlich umständliche Rechnung gezeigt hatte, wie man eine Relation zwischen den Seiten eines Dreiecks herstellen kann, dessen Basis aus einem Kleinkreisbogen und dessen Schenkel aus Großkreisbögen bestehen, löste er einige Jahre später[2]) die Hauptaufgaben, den Neigungswinkel eines Klein- und eines Großkreises, welche dieselbe Sehne haben, zu bestimmen, die zwischen zwei solchen Kreisen liegende Fläche auszudrücken und endlich den Winkel der Ebenen zweier Kleinkreise anzugeben. Seinem Wunsche, andere möchten diese seine Ideen weiter ausführen, kam 1798 Charles Bossut nach, indem er sowohl mit Integralrechnung den Inhalt eines von drei Kleinkreisen gebildeten Dreiecks bestimmte, als auch einen elementaren Weg hierzu angab.[3])

Bedeutende Förderung fand die Trigonometrie durch verschiedene Arbeiten Johann Heinrich Lamberts. Lambert[4]) ist am 26. August 1728 in der damals schweizerischen Stadt Mülhausen im Oberelsaß geboren und als Mitglied der Berliner Akademie und Oberbaurat am 25. September 1777 gestorben. Aus einer unbemittelten Schneidersfamilie hervorgegangen, mußte er sich frühzeitig sein Brot als Schreiber verdienen, brachte es jedoch als Autodidakt sich fortbildend bald zum Hauslehrer bei dem Reichsgrafen Peter von Salis, wo er seinen Studien weiter obliegen konnte. Da aber Studieren und Produzieren bei ihm Hand in Hand ging, so bereitete er schon damals die wichtigsten seiner Werke vor. Nachdem er diese, nämlich die Photometrie, eine Schrift über die Kometenbahnen und die Kosmologischen Briefe zu Augsburg hatte erscheinen lassen, wurde er Mitglied der bayerischen Akademie der Wissenschaften mit 800 Gulden Gehalt, löste jedoch dieses Verhältnis bald wieder und kam nach verschiedenen Versuchen eine dauernde Lebensstellung zu finden, die ihm Muße zu seinen wissenschaftlichen Arbeiten böte, endlich 1764 nach Berlin, wo er auf Veranlassung der dort herrschenden Schweizer Schule mit einem Gehalt von 500 Talern, der sich später auf 1100 Taler erhöhte, in die Akademie aufgenommen wurde. Seine wissenschaftliche Tätigkeit war eine äußerst fruchtbare und erstreckte sich sowohl auf die reine Mathematik, als auch auf alle mit der Praxis in Beziehung stehenden Anwendungen derselben. Alle seine Arbeiten sind, wenn auch nicht immer so bedeutend wie die Eulers und Laganges, reich an originellen und fruchtbaren Gedanken und zeichnen sich durch eine in jener Zeit seltene Strenge der Beweisführung aus. Die gleiche Originalität zeigt sein Stil, der derb und oft schrullenhaft wie seine Persönlichkeit, doch nie die nötige Klarheit und Prägnanz vermissen läßt.

[1]) Vgl. A. v. Braunmühl, Gesch. der Trig. I, p. 180—181. [2]) Recherches mathém. sur différents sujets. Miscellanea Taurin. IV, 1766—69, § 1, p. 127, 2. Zählung. [3]) Traités de calcul différentiel et intégral, an VI, 1797/98, II, p. 522—531. [4]) Allgem. deutsche Biographie XVII, p. 552—556.



Für unser engeres Wissensgebiet kommen von seinen Publikationen zunächst die „Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung“[1]) in Betracht. Im ersten Bande derselben spricht er sich (S. 369 ff.) über die Art und Weise, wie die Trigonometrie zu fördern sei, eingehend aus, indem er hauptsächlich drei Gesichtspunkte im Auge hat: einmal, sagt er, könne man die Auflösung der einzelnen Dreiecksfälle durch Berechnung passender Tafeln vereinfachen, dann könne durch Benutzung der Algebra viel erspart werden und endlich könne man in der Verwendung der Trigonometrie zur Integralrechnung noch bedeutend weiter gehen.

Vorerst wandte sich nun Lambert der Neperschen Regel zu, indem er an Stelle des bisher durch einen Induktionsschluß bewerkstelligten Beweises derselben einen anderen setzte, der mehr das Wesen dieser merkwürdigen Regel aufdeckte und auf dem gleichen Gedanken beruhte, den schon Neper angewendet, aber nur angedeutet hatte. Christian von Wolf hatte in seinen Anfangsgründen der Mathematik[2]) den Wortlaut der Regel zum ersten Male in der Weise ausgesprochen, wie er heute noch allgemein angegeben wird. An ihn schloß sich Lambert an, indem er die Katheten des rechtwinklig sphärischen Dreiecks durch ihre Komplemente ersetzte und zeigte, daß die fünf zirkulären Stücke in fünf Dreiecken liegen, die sich in einem Zyklus um die Kugel aneinanderschließen, wie dies Fig. 20 veranschaulichen möge. Daselbst stellen $AadF$ und $ADcG$ zwei Großkreise dar, deren Pole $P$ und $Q$ sind, durch die der Kreis $cQPa$ geht. Ferner ist $dPC$ irgend ein anderer Kreis durch $P$, welcher

[1]) 4 Bände, 8°, Berlin 1765—1772. [2]) Im 3. Teile, zweite Ausgabe von 1717, p. 144 und 152; die erste Ausgabe von 1710 enthält dieselbe noch nicht.

den ersten in $C$ rechtwinklig schneidend das $\triangle ABC$ vollendet. Zieht man endlich noch Kreis $GHQb$ durch $Q$, so daß seine Ebene auf $Dc$ senkrecht steht, so entstehen die fünf schraffierten Dreiecke, von denen **Lambert** aus ihrer Entstehung nachweist, daß sie die verlangte Eigenschaft haben, dieselben fünf zirkulären Stücke zu besitzen. So ist z. B. $\sphericalangle A$ in I gleich $90^0 - PD$ in II, gleich $PQ$ in III, gleich $90^0 - FQ$ in IV und endlich wieder gleich $A$ in V, und allgemein behalten ein Mittelstück und zwei anliegende Stücke sowie ein Mittelstück und zwei gegenüberliegende diesen Charakter in allen fünf Dreiecken bei.

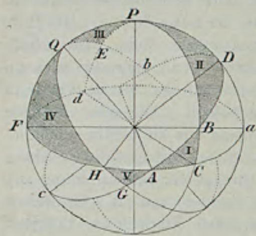
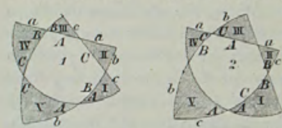



Fig. 20.

Zeichnet man daher mit **Lambert** die beiden stereographischen Figuren (Fig. 21), in denen die kleinen Buchstaben die Komplemente der Katheten bedeuten, so liefern die beiden darunter stehenden Gleichungen, für **ein** Dreieck bewiesen, die sämtlichen zehn Fälle der **Neperschen** Regel.



$\cos C = \sin A \sin B \qquad \cos C = \cot A \cot B$

Fig. 21.

Man wird aus dem Vorstehenden erkannt haben, daß **Lambert** wirklich den wahren Grund der **Neperschen** Regel aufdeckte, indem er bei Aufstellung seines Beweises unbewußt mit dem Begriff der Gruppe operierte.[1]

An die Behandlung der **Neperschen** Regel schließt **Lambert** eine Zusammenstellung der wichtigsten goniometrischen Formeln an und gibt dann die Vorschriften zur Berechnung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke, die er mittels einer Höhe in zwei rechtwinklige zerspaltet. Die Anwendung jener Regel auf die beiden Teildreiecke und die Verbindung der Formeln zu einer einzigen Schlußformel führt ihn dann selbstverständlich wieder zu den schon längst bekannten Hauptgleichungen für das schiefwinklige Dreieck.

Da **Lambert** stets die praktische Verwendbarkeit der Formeln im Auge hatte, so stellte er auch eine Umformung des sphärischen

[1]) Vgl. O. **Pund**, Über Substitutionsgruppen in der sphärischen Trigonometrie usw. Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg III, 1897, p. 7, und C. O. **Lovett** in Bulletin of the American Math. Society, 2. Series, IV, 1898, p. 252.



Kosinussatzes, wie der Kotangentenformel für logarithmische Rechnung her, indem er z. B. im ersteren Falle in

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \qquad \cos a = 1 - 2 \sin \frac{a}{2}^2$$

und

$$\frac{\cos(B - C)}{2 \sin B \sin C} = \sin \frac{\varphi}{2}^2$$

setzte, wodurch er die elegante Formel

$$\cos A = 2 \sin B \sin C \sin \frac{\varphi + a}{2} \sin \frac{\varphi - a}{2}$$

erhielt.[1])

Ferner muß noch erwähnt werden, daß **Lambert** ebenso wie **Euler** die **trigonometrischen Funktionen als Verhältnisse auffaßte**, wenn er dies auch ebensowenig wie jener ausdrücklich hervorhob; dies beweist die Schreibweise seiner Formeln für die rechtwinkligen ebenen Dreiecke, wie

$$k = h \sin a = h \cos b, \quad c = h \cos a = h \sin b \text{ usw.},$$

wo $h$ die Hypotenuse, $k$ und $c$ die beiden Katheten bezeichnen.

Noch von einer anderen Seite her suchte **Lambert** die Trigonometrie zu bereichern, indem er nämlich die **Hyperbelfunktionen** für sie verwertete. Schon **Gregor von St. Vincentio**, **David Gregory** und **John Craig** hatten durch die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel, wenn auch unbewußt, die Grundlagen für diese Funktionen geschaffen, bei **Newton** traten dann bereits Vergleiche zwischen Kreis und gleichseitiger Hyperbel auf, und **De Moivre** hatte schon ziemlich deutlich erkannt, daß durch Vertauschung des Reellen mit dem Imaginären Kreisaufgaben in solche für die gleichseitige Hyperbel übergehen. Der erste aber, welcher eine Theorie der Hyperbelfunktionen begründete, war der von **Lambert** selbst genannte Graf **Vincenzo Riccati** (vgl. B III[2], S. 474), der sie mit Hilfe geometrischer Betrachtungen entwickelte[2]), während **Lambert** 1768 zuerst auf den Gedanken kam, sie zur Behandlung trigonometrischer Probleme zu verwerten.[3])

Ist (Fig. 22) $CDQ$ ein Kreisquadrant, der den Ast $Qq$ einer gleichseitigen Hyperbel in $Q$ berührt, $q$ ein beliebiger Punkt der Hyperbel, $qP \parallel QC$, $PQ$ und $qp \perp QC$, $\sphericalangle PCQ = \omega$ der sogenannte

[1]) a. a. O., p. 415ff. — Eine etwas andere Umgestaltung hat W. **Croswell**, Lehrer der Schiffahrtskunde, durch eine Regel ausgedrückt, gegeben: Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences II, part I, 1780 (veröffentlicht 1793), p. 18—20. [2]) Vgl. S. **Günther**, Lehre von den Hyperbelfunktionen, Halle 1880, Kap. I. [3]) Observations trigonométriques. Histoire de l'Académie de Berlin 1768, 24, p. 327.

„transzendente“ und $\sphericalangle qCQ = \varphi$ der „gewöhnliche“ Winkel, dann folgt aus der Figur: 1. $\operatorname{tg}\varphi = \sin\omega$, $CP = \sec\omega = Cp = \cosh u$ und $PQ = \operatorname{tg}\omega = pq = \sinh u$, wenn der zu Winkel $\varphi$ gehörige Hyperbelsektor $QCq$ mit $u$ bezeichnet wird. Hieraus folgt dann leicht $du = \frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{1-\operatorname{tg}\varphi^2}$ und daraus hinwieder 2. $u = \log\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\omega}{2}\right)$. Somit kann man zu jedem Winkel $\varphi$ den entsprechenden Hyperbelsektor berechnen, indem man sich der beiden Gleichungen 1. und 2. bedient. Damit konstruierte nun Lambert eine kleine Tabelle, welche in der ersten Spalte links die Werte des Winkels $\omega$ von $0^0$ bis $90^0$ enthält und zu ihnen die entsprechenden Hyperbelsektoren, den sinhyp., den coshyp., die Logarithmen derselben, die tg. und log tg. des gewöhnlichen Winkels und endlich in der letzten Spalte diesen selbst gibt. Wie er dieselbe zur Vereinfachung trigonometrischer Rechnungen anwandte, erkennt man am besten aus einem Beispiel. Es soll für ein sphärisches Dreieck $abc$ aus dem Winkel $c$ und der Seite $B$[1]) eine Tabelle berechnet werden, die zu jedem Winkel c den zugehörigen Winkel $a$ gibt. Dazu hat man

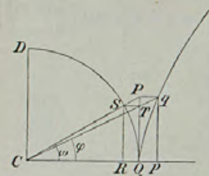


Fig. 22.

$$\sin B \operatorname{ctg} A = \cos c \cos B + \sin c \operatorname{ctg} a$$

und hieraus $\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos B} = \operatorname{tg} k \sec c' - \operatorname{tg} c'$, wenn $\operatorname{tg} k = \operatorname{tg} B \operatorname{ctg} A$ und $c' = 90^0 - c$ ist. Sind nun die den Winkeln $k$ und $c'$ entsprechenden Hyperbelsektoren $\varkappa$ und $\gamma$, so hat man $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos B}{\cos h\varkappa} \sin h(\varkappa - \gamma)$, wodurch die Rechnung auf eine einzige Analogie gebracht ist und zwar auf die einfache Addition des konstanten Logarithmus von $\cos B : \cos h\varkappa$ zu dem Logarithmus von $\sin h(\varkappa - \gamma)$.

Dadurch, daß Euler die trigonometrischen Linien als „Rechnungsgrößen“, wie er sagte, in die Analysis eingeführt hatte, hatte sich zunächst vielfach eine Trennung der elementaren Trigonometrie, die nur zur Berechnung der Figuren in der Ebene und auf der Kugel dient, von der heute nach Klügels Vorgang[2]) als Goniometrie bezeichneten Lehre von den Winkelfunktionen vollzogen. Dies läßt sich am deutlichsten aus zwei Schriften erkennen, die der preußische Offizier Georg Friedrich von Tempelhof (1737—1807)

[1]) Lambert bezeichnet durchweg die Seiten mit den großen, die gegenüberliegenden Winkel mit den kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabetes.
[2]) Mathematisches Wörterbuch II, p. 504.



unter dem Titel „Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen“ (Berlin 1769) und „Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen“ (Berlin und Stralsund 1770) veröffentlichte. Während nämlich in dem ersten Werke nur die wichtigsten goniometrischen Formeln sowie die Periodizität der trigonometrischen Funktionen geometrisch abgeleitet werden, und bei sämtlichen geometrischen Anwendungen sogar wieder der Radius $r$ mitgeschleppt wird, indem die Funktionen durch Linien ersetzt werden, sind in das zweite Werk ganz verschieden hiervon die analytischen Formeln Eulers zur Dreiecksberechnung in ihrem vollen Umfange aufgenommen. Eine Vereinigung der beiden getrennten Gebiete wurde erst dadurch ermöglicht, daß Simon Klügel in seiner „Analytischen Trigonometrie“ (Braunschweig 1770) das Wesentliche in Eulers Auffassung erkannte, indem er die trigonometrischen Größen ausdrücklich als Verhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks definierte und sie zum ersten Male als trigonometrische Funktionen bezeichnete.[1]) Das Buch Klügels weist aber außerdem noch andere bemerkenswerte Verdienste auf. Das wichtigste ist wohl die Erkenntnis, daß die Additionstheoreme für die Sinus- und Kosinusfunktion allein „alle Lehrsätze über die Zusammensetzung der Winkel“ enthalten[2]), was durch direkte Entwicklung aller einschlägigen Formeln aus diesen Theoremen gezeigt wird. Weitere Verdienste Klügels sind, daß er in diesem Buche die Ableitung der sechs Grundformeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks auf Dreiecke mit Seiten, die einen Quadranten überschreiten, ausdehnte, die hervorragende Verwendbarkeit der Neperschen Analogien für praktische Rechnungen hervorhob und nachwies, wie man mit Hilfe des Supplementardreiecks zu jeder Formel eine Polarformel angeben kann. Klügels Buch hat jedenfalls viel dazu beigetragen, Eulers analytische Behandlungsweise der Trigonometrie in weiteren Kreisen bekannt zu machen.

Aber auch Kästner (vgl. III[2], S. 576), der immer bestrebt war die neuesten Erscheinungen der mathematischen Literatur den Lesern seiner zahlreichen Schriften auf seine etwas breite und umständliche Weise zugänglich zu machen, bediente sich frühzeitig der Eulerschen Formelrechnung und veröffentlichte in seinen Astronomischen Abhandlungen (I. Sammlung Göttingen 1772), ähnlich wie Kies und Klügel, eine elementare Ableitung der hauptsächlichsten Formeln der sphärischen Trigonometrie. Auch gab er hier, wie in den Göttinger

[1]) a. a. O., p. 4 heißt es: „Ich will diese Verhältnisse mit einem allgemeinen Namen: trigonometrische Funktionen der Winkel nennen, als deren Stelle sie in der Rechnung vertreten“. [2]) Ebenda, p. 35.

Dissertationen[1]) und in seinen geometrischen Abhandlungen (2 Sammlungen, Göttingen 1790—91) und noch anderwärts[2]) vielfache Anwendungen auf astronomische, physikalische und geometrische Fragen, wobei er die trigonometrischen Formeln mit Gewandtheit handhabte, wenn auch die Eleganz seiner Lösungen durch das fast beständige Mitschleppen des Sinus totus beeinträchtigt wird.

Neun Jahre nach dem Erscheinen von Klügels Buch kam auch Euler noch einmal auf die sphärische Trigonometrie zurück[3]), deren Formelsystem er bereits vor 26 Jahren mit Hilfe höherer Rechnung abgeleitet hatte. Offenbar befriedigten ihn die inzwischen über diesen Gegenstand erschienenen Abhandlungen und Bücher nicht, und er wollte daher zeigen, wie man das ganze Formelsystem, das auch noch einiger Ergänzungen bedurfte, auf elementare Weise aus einer einzigen Figur ableiten könne. Als solcher bediente er sich des zum schiefwinkligen sphärischen Dreieck $ABC$ gehörigen Dreikants, dessen Spitze im Mittelpunkt $O$ der Kugel mit dem Halbmesser 1 liegt (Fig. 23). In den Ebenen $COa$ und $COb$ ($a$ liegt auf $OA$ und $b$ auf $OB$) seien $Ca$ und $Cb$ senkrecht zu $OC$ errichtet, ferner sei $bp \perp Ca$, $bq \perp Oa$, dann ist $\sphericalangle bqp$ der Neigungswinkel von $\sphericalangle \widehat{Oa}$, ferner ist $\sphericalangle COa$ = Seite $b$, $\sphericalangle COb$ = Seite $a$ und $\sphericalangle aOb$ = Seite $c$ des sphärischen Dreiecks. Aus der Figur folgt dann unmittelbar:

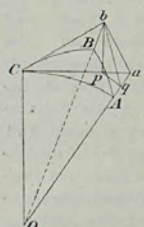


Fig. 23.

$$Ca = \operatorname{tg} b, \quad Oa = \sec b, \quad Cb = \operatorname{tg} a, \quad Ob = \sec a.$$

Hieraus folgt $bq = Ob \sin c = \frac{\sin c}{\cos a}$ und $Oq = Ob \cos c = \frac{\cos c}{\cos a}$. Da ferner $\sphericalangle aCb = \sphericalangle C$ des Dreiecks $ABC$ ist, so hat man

[1]) Dissertationes mathematicae et physicae, quas Societati reg. sci. Gottingensi annis 1756—1766 exhibuit etc. Altenburgi 1771. Besonders zu bemerken sind darunter Nr. 7: Gnomonica universalis analytica 1762, eine Umarbeitung der Gnomonica analytica von 1754, hervorgerufen durch seine erweiterten Kenntnisse trigonometrischer Formeln; dann Nr. 9: „Quot sphaerae aequales mediam et se mutuo tangere possint", woselbst sich eine elegante Ableitung der Fläche eines sphärischen Dreiecks mit höherer Rechnung findet. [2]) So findet sich in Novi Comm. Soc. Gotting. VII ad annum 1776 (publiziert 1777), p. 92—141 bei Behandlung des optischen Problems von Alhazen (vgl. I[2], S. 744) eine näherungsweise Auflösung einer trigonometrischen Gleichung von der Form $\sin\varphi - B \operatorname{tg}\varphi = A$ und in Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik II, 1798, p. 174 wird die Wertänderung der beiden Seiten des Ausdruckes $\sec\varphi \pm \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(45^\circ \pm \frac{\varphi}{2}\right)$ diskutiert und in Einklang gebracht, wenn $\varphi$ von $0^\circ$ bis $90^\circ$ wächst. [3]) Trigonometria sphaerica universa ex primis principiis



$$bp = Cb \sin C = \operatorname{tg} a \sin C \quad \text{und} \quad Cp = Cb \cdot \cos C = \operatorname{tg} a \cos C;$$

und da $\sphericalangle CaO = 90^0 - b$ ist, so folgt noch:

$$ap = Ca - Cp = \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \cos C, \quad pq = ap \cos b = \sin b - \operatorname{tg} a \cos b \cos C$$

und

$$aq = ap \sin b = \frac{\sin b^2}{\cos b} - \operatorname{tg} a \sin b \cos C \text{ oder } \frac{\cos c}{\cos a} = \cos b + \operatorname{tg} a \sin b \cos C$$

und hieraus endlich

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Ähnlich liest man aus der Figur unmittelbar die Gleichung des Sinussatzes $\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin a}$ und die in dieser Form neue Gleichung

$$\frac{pq}{bq} = \cos A = \frac{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}{\sin c}$$

ab. Diese drei Gleichungen umfassen, wie Euler sagt, die ganze sphärische Trigonometrie, und in der Tat gelang es ihm durch einfache Rechnung aus ihnen alle jene Formeln abzuleiten, die heute den eisernen Bestand der sphärischen Trigonometrie bilden.

Auch die Existenz und die Eigenschaften des Supplementardreiecks, für das Euler jedoch keinen eigenen Namen hat, wurden in einem „Theorema" hervorgehoben, während eine Nebeneinanderstellung der Polarformeln nur für die Kosinus- und Kotangentensätze durchgeführt wurde — in diesem Punkte war Klügel bereits weiter gegangen. Dagegen erkannte Euler hier zuerst die sechs möglichen Formen der dritten Hauptgleichung, das Prinzip der zyklischen Vertauschung aber war ihm, wie seine Formelschreibung zeigt, entgangen.

Euler hat von seinen trigonometrischen Formeln den vielseitigsten Gebrauch gemacht in rein mathematischen und mechanischen, wie in astronomischen und physikalischen Untersuchungen. Wir wollen hier auf die wichtigsten hinweisen, die zur ersten Gruppe gehören. In den Petersburger Akten für das Jahr 1778[1]) hatte er bereits gezeigt, wie man die trigonometrischen Funktionen zur Lösung einiger schwieriger diophantischer Gleichungen benutzen könne und ebenda[2]) eine Abhandlung über die Messung der Körperwinkel durch die Inhaltsbestimmung sphärischer Figuren gegeben, bei welcher Ge-

breviter et dilucide derivata. Acta Acad. Petrop. 1779 (erschienen 1782), I, p. 72—86.

[1]) De casibus quibusdam maxime memorabilibus in Analysi indeterminata etc. Acta Acad. Petrop. ad annum 1778, pars II (erschienen 1781), p. 85—110. [2]) De mensura angulorum solidorum. Ebenda, p. 31—54.

legenheit er die trigonometrischen Funktionen des sphärischen Exzesses $S$ eines Dreiecks in den Seiten desselben durch elegante Formeln ausdrückte. Diese wurden noch in einer erst nach seinem Tode 1792 erschienenen Abhandlung weiter ergänzt, die ebenfalls aus dem Jahre 1778 stammte.[1]) Die in der ersteren Abhandlung mitgeteilte Formel $\operatorname{tg}\frac{S}{2} = \frac{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$, wo $a, b, c$ die Seiten des Dreiecks sind, hat De Gua 1783[2]) wieder entwickelt, ohne jedoch Euler zu erwähnen. Endlich erschien 1786 ebenfalls posthum ein älterer Aufsatz von ihm[3]), in welchem er mit alleiniger Benutzung des Kosinussatzes die Relationen zwischen den sechs Linien, die vier Punkte in der Ebene verbinden, aufsuchte. Dabei wurde auch die Frage behandelt, wie man ein Kreisviereck bestimmt, dessen Seiten und Diagonalen durch rationale Zahlen ausgedrückt werden.

Mit besonderer Eleganz handhabten die Eulerschen Formeln bald sein Schüler Andreas Johann Lexell, sein Gehilfe Nikolaus Fuß und der Petersburger Astronom Friedrich Theodor Schubert. Der erste, auf den wir noch weiter unten eingehend zu sprechen kommen werden, hat in mehreren Abhandlungen[4]) eine ganze Reihe von wichtigen Theoremen über die Geometrie der Kugelkreise entwickelt, die geradezu die Grundlagen für alle späteren auf dieses Gebiet bezüglichen Arbeiten wurden. So wies er nach, daß die Spitzen aller sphärischen Dreiecke von gleicher Fläche, die über derselben Grundlinie stehen, auf einem Kleinkreise liegen[5]), berechnete in eleganten Formeln die sphärischen Radien des einem Dreieck umgeschriebenen und des ihm eingeschriebenen Kreises aus den Seiten, bzw. Winkeln desselben, gab ein Analogon zum Ptolemäischen Satze vom ebenen Sehnenviereck für das einem Kleinkreis eingeschriebene Viereck, berechnete den Radius von jenem aus den Seiten von diesem und löste die entsprechenden polaren Aufgaben. Auch übertrug er den Satz vom harmonischen Kreis auf die Kugel (Lexellscher Kreis).

Auch Nikolaus Fuß (vgl. III², S. 551) hat interessante Aufgaben der Kugelgeometrie behandelt[6]), die wir in folgender Form kurz zu-

[1]) Variae speculationes super area triangulorum sphaericorum. Nova Acta Acad. Petrop. X, ad annum 1792 (erschienen 1797), p. 47—62. [2]) Mémoires de l'Académie de Paris 1783, p. 358. [3]) De symptomatibus quatuor punctorum in eodem plano sitorum. Acta Acad. Petrop. ad annum 1782 (erschienen 1786), pars I, p. 3 ff. [4]) Acta Acad. Petrop. ad annum 1781, pars I (erschienen 1784), p. 112—126, und ebenda, 1782, pars I (erschienen 1786), p. 58—106 und pars II., p. 85—95. [5]) Einen Beweis dieses Satzes hatte Euler schon 1778 gegeben; posthum erschienen 1797 in Nova Acta Acad. Petrop. X, ad annum 1792.
[6]) Nova Acta Acad. Petrop. II, ad annum 1784 (erschienen 1788), vorgelegt 1786,



sammenfassen können: Ein sphärisches Dreieck mit gegebener Basis so zu bestimmen, daß seine Spitze auf einem gegebenen größten Kreise liegt und der Dreieckswinkel an derselben oder die Fläche des Dreiecks ein Maximum oder die Summe der Schenkel ein Minimum wird. Auch fand er[1]) als Ort der Spitze eines sphärischen Dreiecks über gegebener Basis, für das die Summe der Schenkel konstant ist, eine „sphärische Ellipse", welche mit der ebenen Figur gleichen Namens viele Eigenschaften gemein hat.

Endlich hat Schubert, durch diese Arbeiten angeregt, 1786 und 1798 ähnliche Fragen untersucht, indem er[2]) z. B. das größte und kleinste sphärische Dreieck mit gegebener Basis und Höhe bestimmte und die geometrischen Örter eines Punktes auf der Kugelfläche behandelte[3]), für welchen das Verhältnis der Sinus oder der Kosinus der ganzen oder halben kürzesten Entfernungen von zwei festen Kugelpunkten konstant ist.

Auch der große Lagrange beschäftigte sich vorübergehend mit trigonometrischen Fragen. Außer einer Abhandlung über eine neue Begründung der sphärischen Trigonometrie, auf die wir weiter unten noch zu sprechen kommen, veröffentlichte er 1774 „Solutions de quelques problèmes d'Astronomie sphérique par le moyen des séries"[4]), worin er die Auflösung der transzendenten Gleichung $\operatorname{tg} x = m \operatorname{tg} y$ nach $x$ durch die Reihe $x = y - \theta \sin 2y + \frac{1}{2}\theta^2 \sin 4y - \frac{1}{3}\theta^3 \sin 6y + \cdots$ darstellte, in welcher $\theta = \frac{1-m}{1+m}$ bedeutet. Indem er diese Gleichung sowohl mit jenen drei Fundamentalgleichungen des sphärischen Dreiecks, in denen Tangenten vorkommen, als auch mit den Neperschen Analogien verband, gelangte er zu mehreren, namentlich in der Astronomie und Geodäsie sehr brauchbaren Lösungen trigonometrischer Aufgaben. So erhielt er z. B. zur Bestimmung der Winkel $\beta$ und $\gamma$ eines sphärischen Dreiecks, von dem die Seiten $b, c$ und der Winkel $\alpha$ gegeben sind mit Benutzung der erwähnten Analogien, die Reihenentwicklungen:

$$\gamma = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2}\right)\sin\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}^2\left(\operatorname{ctg}\frac{b}{2}^2 - \operatorname{tg}\frac{b}{2}^2\right)\sin 2\alpha + \cdots,$$

p. 70; auch Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, 1786, p. 241—245.

[1]) Nova Acta Acad. Petrop. III, ad annum 1785 (erschienen 1788), vorgelegt 1787, p. 90—99. [2]) Ebenda, IV, ad annum 1786 (erschienen 1789), vorgelegt 1786, p. 89—94. [3]) Ebenda, XII, ad annum 1794 (erschienen 1801), vorgelegt 1798, p. 196—216. [4]) Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin, année 1776 (erschienen 1779), gelesen 1774, p. 214 ff. Oeuvres, Ed. Serret, IV, p. 275—298.

$$\beta = 180^0 - \alpha + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{b}{2} - \operatorname{ctg}\frac{b}{2}\right)\sin\alpha$$
$$- \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}^2\left(\operatorname{tg}\frac{b}{2}^2 + \operatorname{ctg}\frac{b}{2}^2\right)\sin 2\alpha + \cdots,$$

welche nach Lagranges Bemerkung um so konvergenter sind, je kleiner $c$ ist und je näher $b$ an $90^0$ liegt. Auch zeigte er, daß die Verwendung des Imaginären, durch welche er diese Formeln gefunden hatte, noch ähnliche Gleichungen komplizierterer Form zu lösen gestattet. Lambert hat 1777 ebenfalls ähnliche Gleichungen durch Reihen gelöst[1]), und desgleichen finden sich in Delambres großer Arbeit über die Bestimmung des Meridianbogens zwischen Dünkirchen und Barcelona[2]) trigonometrische Gleichungen mit Reihen behandelt, die mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten erhalten werden.

Bedeutende Verdienste um die Ausbildung der elementaren Trigonometrie in Eulerschem Sinne, sowie um die systematische Ausgestaltung derselben erwarb sich der Italiener Antonio Cagnoli (1743—1816). Cagnoli[3]), zu Zante geboren, zog sich bald von der zuerst gewählten diplomatischen Laufbahn zurück, lebte dann in Verona als Privatmann, wo er sich eine Sternwarte erbaute und wurde nach Gründung der cisalpinischen Republik von Napoleon an das Observatorium in Mailand berufen. Später wurde er Professor der Astronomie an der Kriegsschule in Modena. Er gehörte der von Lorgna gegründeten Società Italiana delle scienze an, welche Mathematiker, wie Malfatti, V. Riccati, Ruffini und Ferroni zu den ihrigen zählte, und wurde nach Lorgnas Tode Präsident dieser gelehrten Gesellschaft. Seine Trigonometria piana e sferica, welche 1786 italienisch und in französischer Übersetzung von N. M. Chompré in Paris in erster Ausgabe erschien, wurde 1804 in 2. Auflage italienisch zu Bologna und 1808 abermals französisch zu Paris publiziert und ist das vollständigste und umfassendste Handbuch jener Zeit, in dem man manches auch heute noch Interessante und Lesenswerte findet. Wenn auch Cagnoli noch immer ausschließlich mit trigonometrischen Linien rechnete, so nahm er doch die Einheit als Radius an und bediente sich der Eulerschen Funktionszeichen, denen er nur merkwürdigerweise die abkürzende Bezeichnung der Dreiecksseiten durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets nicht zugesellte. Cagnolis Hauptverdienst liegt darin, daß er wie Klügel die analytische Formel-

[1]) Bode, Astronomisches Jahrbuch für 1780, p. 67. [2]) Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, an VII (1798/99), Paris, 4°, p. 64 und 111. [3]) Poggendorff, Literarisch-biographisches Handwörterbuch, I, p. 359/60.



rechnung in den Vordergrund stellte und nur die notwendigsten Sätze aus Figuren ableitete. Auch bei Behandlung von komplizierten Dreiecksaufgaben, die er in eleganter Weise zu lösen verstand, setzte er sich stets die Herstellung einer allgemeinen Endformel zum Ziele.

Wesentlich Neues in bezug auf die ebene Trigonometrie war damals nicht mehr zu bringen; so ergibt denn die Durchsicht von Cagnolis Werk sowie einer ergänzenden Abhandlung[1]) vom Jahre 1794 als erwähnenswert nur eine Umgestaltung der Formel des ebenen Kosinussatzes für logarithmische Rechnung, aber auch hierin war ihm schon 1777 Johann Tobias Mayer[2]), der jüngere, zuvorgekommen. Zudem sei noch erwähnt, daß er auch die sogenannten Mollweideschen Gleichungen entwickelte und verwenden lehrte.[3])

Aus seinen Ergänzungen zur sphärischen Trigonometrie entnehmen wir die fundamentale Formel

$$\sin c \sin a + \cos c \cos a \cos B = \sin A \sin C - \cos A \cos C \cos b$$

als die erste Relation, welche zwischen den sechs Stücken eines sphärischen Dreiecks gegeben wurde.[4]) Ferner teilte er eine praktische Umgestaltung des sphärischen Kosinussatzes für logarithmische Rechnung mit[5]), abweichend von jener, die Lambert gegeben hatte (S. 411) und entwickelte Formeln, um die Stücke rechtwinklig sphärischer Dreiecke eventuell bis auf Zehntel-Sekunden genau erhalten zu können. Auch die Proportionen, zu welchen die Betrachtung zweier Dreiecke dieser Gattung führt, wenn sie einen Winkel oder die Hypotenuse gemeinsam haben, wurden von Cagnoli aufgestellt und außerdem wurden die Formeln abgeleitet, welche den Zusammenhang der Elemente eines sphärischen Dreiecks mit denen des zugehörigen Sehnendreiecks geben.[6]) In der eleganten Behandlung der trigonometrischen Gleichung $a \cos A + b \sin A = n$ aber war ihm schon Kästner 1772 zuvorgekommen.[7])

Wichtige Fortschritte machte in dem von uns betrachteten Zeitabschnitte auch die für die Astronomie und Geodäsie so notwendige

[1]) Cose trigonometriche. Memorie della Società Italiana, VII, 1794, p. 35 ff. [2]) Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, Göttingen 1777, 4 Bände, 8°, I, p. 12—13. [3]) Trigonometria, 1. Aufl. p. 122. [4]) Diese Formel findet sich allerdings erst in der Ausgabe von 1808, Nr. 1139, p. 326. [5]) Diese Umformung steht schon in Cose trigonometriche, Nr. VI der sphärischen Probleme. [6]) Kap. VIII der ersten, Kap. XX der Auflage von 1808. Die elegante Formel $\cos A' = \cos A \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$ gibt z. B. den Winkel $A'$ des Sehnendreiecks, der dem Winkel $A$ im sphärischen entspricht. [7]) Astronomische Abhandlungen 1774, p. 13—15.

Fehlerrechnung, bei welcher es sich um die Bestimmung der Veränderungen handelt, welche die Stücke eines Dreiecks erleiden, wenn gewisse derselben um sehr kleine Größen zu- oder abnehmen. Nachdem Cotes in seiner Aestimatio errorum 1722 dieselbe eingeführt (III², S. 360 und 412—414) und die wichtigsten Sätze geometrisch entwickelt hatte, publizierte De la Caille 1741 einen „Calcul des différences dans la trigonométrie sphérique“[1]), in welchem er Cotes' 18 Theoreme in 24 Formeln vereinigte, die er auf astronomische Aufgaben anwandte. Später haben sich namentlich Klügel, Kästner, Boscovich und Cagnoli mit Ausbildung dieses Wissenszweiges beschäftigt. Ersterer widmete ihm das 8. Kapitel seiner analytischen Trigonometrie und einen Aufsatz mit dem Titel „Trigonometrische Variationsrechnung zum Gebrauche bei Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse“[2]) und behandelte die vier wichtigsten Fälle, indem er ein Dreiecksstück konstant ließ und die endlichen Variationen der anderen untersuchte. Die beiden Hauptformeln, welche er erhielt, sind: $\Delta a = \cos C\Delta b + \cos B\Delta c$ und

$$\Delta B : \Delta C = (\sin c\Delta b - \cos a \sin b\Delta c) : (\sin b\,\Delta c - \cos a \sin c\Delta b),$$

die sich aus dem Kosinussatze und aus der Kotangentenformel ergeben. Kästner gab im ersten Bande seiner „Astronomischen Abhandlungen“[3]) ebenfalls eine analytische Ableitung der Cotesschen Theoreme und teilte auch Differentialformeln für ebene Dreiecke mit, aber das Verdienst, aus den vielen in der sphärischen Trigonometrie möglichen Relationen die vier Hauptgleichungen

$$\begin{gathered} da = \cos C db + \cos B dc + \sin B \sin c dA, \\ \sin B da - \cos c \sin A db = \sin c dA + \sin a \cos B dC, \\ \operatorname{ctg} a da - \operatorname{ctg} b db = \operatorname{ctg} A dA - \operatorname{ctg} B dB, \\ dA = \sin b \sin C da - \cos c dB - \cos b dC, \end{gathered}$$

die man heute als Fehlergleichungen bezeichnet, ausgewählt und in dieser Form geschrieben zu haben[4]), gebührt dem auch sonst verdienten Jesuiten Roger Boscovich (1711—1787). Dieser war in Ragusa geboren, wurde 1740 Professor der Mathematik und Philosophie am Collegium Romanum, dann Professor in Pavia, dann Directeur de l'optique de la marine in Paris, kehrte aber 1783 nach Italien zurück, wo er in Mailand starb. Aus Boscovichs Formeln folgen

[1]) Mémoires de l'Académie de Paris 1741, p. 238 ff. [2]) Bode, Astronomisches Jahrbuch für 1793, Berlin 1790, p. 178—182. [3]) A. a. O., p. 95 bis 107. [4]) Opera IV, 1785, 4°, p. 316—394, wo er auch die entsprechenden Formeln für ebene Dreiecke angibt (p. 322).



alle anderen, weshalb es ziemlich überflüssig war, daß Cagnoli noch 1798 eine Zusammenstellung von 139 Proportionen angab[1]); allerdings sind unter diesen auch die Formeln für endliche Variationen enthalten.

In Beziehung zu diesen Betrachtungen stehen auch die Methoden, welche anzuwenden sind, wenn in trigonometrischen Rechnungen die Logarithmen der Sinus von Winkeln, die nahe an 90° liegen, oder die der Kosinus sehr kleiner Winkel vorkommen, oder wenn direkt Funktionen kleiner Winkel zu bestimmen sind. Israel Lyons (1739 bis 1775), Rechner beim Board of Longitude in London, schlug hierzu ein Verfahren ein[2]), das wir an einem von ihm gegebenen Beispiel erläutern wollen. Ist in dem bei $B$ rechtwinkligen sphärischen Dreieck $ABC$ $AB = c$ und $BC = a$ (klein gegen $c$) gegeben, und soll die Hypotenuse $b$ berechnet werden, so setzt er $b = c + \xi$, nimmt

$$\cos b = \cos a \cos c = \cos (c + \xi) = \cos c - \sin c \sin \xi - \cos c \operatorname{sinvers} \xi$$

und erhält hieraus

$$\sin \xi = \operatorname{ctg} c \operatorname{sinvers} a - \operatorname{ctg} c \operatorname{sinvers} \xi.$$

Nun berechnet er mit alleiniger Benutzung des ersten Gliedes auf der rechten Seite einen Näherungswert für $\xi$ und mit diesem dann als Korrektur das zweite Glied.

Anders verfuhren Lambert und Cagnoli, die für solche Fälle die Ersetzung der zu berechnenden Formeln durch andere gleichwertige, aber brauchbarere vorschlugen. Ist z. B. die Entfernung $x$ zweier sehr nahe beieinander gelegener Örter auf der Erde oder zweier Sterne aus ihren Entfernungen vom Pol $c$ und $\varkappa$ und dem Unterschied $\lambda$ der Längen oder Rektaszensionen zu bestimmen, so ersetzt Lambert[3]) die Formel $\cos x = \cos c \cos \varkappa + \sin c \sin \varkappa \cos \lambda$ durch die gleichwertige $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\sin \frac{c - \varkappa}{2}^2 + \sin c \sin \varkappa \sin \frac{\lambda}{2}^2}$, für die man, falls $c - \varkappa$ und $\lambda$ wenig von 1 oder 2 Graden verschieden sind, die Näherungsformel $\varkappa = \sqrt{\lambda^2 \sin c \sin \varkappa + (c - \varkappa)^2}$ nehmen kann. Ähnlich verfuhr Cagnoli[4]), sprach aber das allgemein richtige Prinzip aus, daß man am sichersten rechnet, wenn man den gesuchten Winkel durch eine Tangente oder Kotangente bestimmt. So gebrauchte er z. B. für die Gleichung $\cos a = \frac{\cos b}{\cos c}$, im Falle $b$ und $c$

[1]) Memorie della Società Italiana VIII, 1, p. 214—218, vorgelegt 1798, und Trigonometria, 2. Aufl., p. 360—378. [2]) P. T. LXV, 2, 1775, p. 470—484.
[3]) Bodes Astronomisches Jahrbuch für 1778 (erschienen 1776), p. 205—210.
[4]) Trigonometria, 1. Aufl. p. 250, 2. Aufl. p. 296.

nahezu gleich sind, die aus den Neperschen Analogien entstehende Formel $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+c}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{a-c}{2}}$.

Übrigens bemerkte Lambert auch, daß man sich zur Bestimmung der Sinus, Kosinus, Tangenten und Sekanten sehr kleiner Winkel der gewöhnlichen Tafeln der natürlichen goniometrischen Funktionen bedienen könne[1]), wenn man die Kotangenten und Kosekanten zu Hilfe nimmt. Will man z. B. sin 1′ und cos 1′ berechnen, so setzt man $\sin 1' = \frac{1}{\operatorname{cosec} 1'}$ und

$$\cos 1' = \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec} 1'^2}} = 1 - \frac{1}{2 \operatorname{cosec} 1'^2} - \frac{1}{8 \operatorname{cosec} 1'^4} - \cdots.$$

Hat man dann cosec 1′ auf 5 Dezimalen, so bekommt man hieraus sin 1′ und mit Hilfe der Reihe auch cos 1′ bis auf 12 Dezimalen genau.

Auch Kästner hat Formeln mitgeteilt, welche zur Berechnung sphärischer Dreiecke mit kleinen oder nahezu gleichen Stücken dienen[2]), und in dem Tafelwerk von Gardiner[3]), auf das wir unten noch zu sprechen kommen, finden sich bereits solche Formeln zusammengestellt.

Dem Gedanken, zur Berechnung der Funktionen eines sehr kleinen Winkels zu Reihenentwicklungen zu greifen, entsprang auch eine noch heute viel verwendete Regel zur Bestimmung von $\log\sin x$ und $\log\operatorname{tg} x$, die der Greenwicher Astronom Nevil Maskelyne (1732—1811) herleitete und die seinen Namen erhalten hat.[4]) Vernachlässigt man in den Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ die Glieder vom 4. Grade an, so erhält man $\sin x \sim x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$, $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$, oder da $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ innerhalb derselben Genauigkeitsgrenze $\sim 1 - \frac{x^2}{6}$ ist,

$$\sin x \sim x(\cos x)^{\frac{1}{3}}$$

und hieraus $\log\sin x \sim \log x + \frac{1}{3}\log\cos x$; genau ebenso folgt für

$$\log\operatorname{tg} x \sim \log x - \frac{2}{3}\log\cos x.$$

Die Regel ist, wie man leicht sieht, bequem zur Berechnung der

[1]) Bodes Astronomisches Jahrbuch für 1778 (publiziert 1776), p. 209.
[2]) Acta Acad. Elect. Moguntinae 1778—79 (erschienen 1780), p. 181—190.
[3]) W. Gardiner, Tables de Logarithmes; Ausgabe von Pezenas, Dumas und Blanchard, 1770, 4°.
[4]) Maskelyne hat dieselbe mitgeteilt in der Einleitung zu seiner Ausgabe der Tables of Logarithms von Michael Taylor, London 1792, 2°, Problem II, p. 21—22, ohne eine Begründung zu geben. Diese gab erst 1804 Tralles, Abhandl. der Berliner Akademie, 1804—1811, p. 17.



Logarithmen von $\sin x$ und $\operatorname{tg} x$ für Winkel bis zu 5° 33′, wenn in einer Logarithmentafel die Werte von

$$\frac{1}{3}\log\cos x = S \quad \text{und} \quad -\frac{2}{3}\log\cos x = T$$

notiert sind, was zum erstenmal in der 7stelligen Tafel von Callet 1795 der Fall war. Von ihr aus gingen die Zahlen $S$ und $T$ in die neuen vollständigen Logarithmentafeln über.

Mit einigen Worten sei auch noch auf die Näherungsformeln hingewiesen, welche infolge der Verfeinerung der astronomischen Beobachtungen und der geodätischen Messungen notwendig wurden. Man hatte sphärische Dreiecke mit sehr kleinen Winkeln lange Zeit wie ebene Dreiecke behandelt, bis J. L. Lalande (III², S. 500) zuerst 1763 darauf aufmerksam machte, daß dies nicht immer statthaft sei, ohne sich erheblichen Fehlern auszusetzen[1]), und durch eine allerdings nicht einwandfreie Rechnung fand, daß man dem ebenen Winkel $B$ des bei $A$ rechtwinkligen $\Delta ABC$ die in Sekunden ausgedrückte Größe $\frac{1}{24} BC^2 \sin 2B(3 - \cos 2B)$ hinzufügen muß, um den entsprechenden sphärischen Winkel zu erhalten. Auch ergab sich ihm der Unterschied zwischen der geradlinigen und der sphärischen Hypotenuse zu $\frac{1}{8}\frac{AB^2\cdot AC^2}{BC}$.

Weit praktischer aber griff Adrien Marie Legendre die Sache an, als an ihn bei Gelegenheit der Feststellung der gegenseitigen Lage der Greenwicher und Pariser Sternwarten[2]) die Notwendigkeit herantrat, verhältnismäßig kleine Dreiecke auf der Erdkugel zu behandeln. In seiner berühmten Abhandlung „Sur les opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la terre“ 1787[3]) sprach er den nach ihm benannten Satz aus[4]), daß ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten gegen den Kugelradius klein sind, wie ein ebenes mit denselben Seiten berechnet werden kann, wenn man von seinen Winkeln je den dritten Teil des sphärischen Exzesses in Abrechnung bringt. Lagrange erkannte den Vorteil und die Notwendigkeit einer solchen Berechnung darin, daß die vollen trigonometrischen Formeln für Dreiecke mit so kleinen Seiten, wie sie

[1]) Mémoires de l'Acad. de Paris 1763, p. 347—353. [2]) 1787 wurde auf Betreiben Cassinis de Thury eine Kommission von französischen und englischen Gelehrten zur Ausführung dieser Arbeit gewählt, welcher auch Legendre angehörte. [3]) Mémoires de l'Acad. de Paris 1787, p. 352 ff.
[4]) A. a. O., p. 358.

hier in Betracht kommen, gar keine exakte Rechnung gestatten, und gab[1]) einen kurzen und sehr übersichtlichen Beweis des schönen Theorems.

## Das Lehrgebäude der Trigonometrie. Versuche einer möglichst einfachen Begründung desselben.

Obwohl uns das Vorhergehende ein Bild von der theoretischen Entwicklung der Trigonometrie in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gab, dürfte es doch nicht überflüssig erscheinen, sich die Frage vorzulegen, wie rasch und in welchem Umfang die allmählich angewachsene Summe von neuen Kenntnissen in der Lehrbücherliteratur Verwertung fand, da gerade sie zur Ausbreitung der Wissenschaft in weiteren Kreisen dient und dadurch ihrerseits wieder auf das Wachstum jener befruchtend einwirkt. Wir wollen daher diese Frage durch den folgenden kurzen Überblick zu beantworten suchen.

In allen, auch den gelehrtesten Kompendien jener Zeit, mit einziger Ausnahme von Klügels Analytischer Trigonometrie, wurden die trigonometrischen Funktionen noch als Linien definiert, und dementsprechend wurde auch der Sinus totus oder Radius $r$ mitgeführt. Nur zur Vereinfachung der Formeln setzten ihn manche Schriftsteller, wie Karsten[2]), Kästner und Cagnoli gleich 1. Eulers Bezeichnungsweise der Funktionen dagegen fand ziemlich rasche und umfassende Verbreitung, während der alte Gebrauch, die Lehrsätze in Proportionen zu schreiben, mit großer Zähigkeit festgehalten wurde.[3])

Die Aufstellung der Funktionen für alle 4 Quadranten wurde seit der Veröffentlichung von Eulers „Introductio" allgemein als notwendig erkannt, geschah aber immer noch, selbst für die Tangenten und Kotangenten, an der Figur, wodurch Irrtümer in den Zeichen nicht immer vermieden wurden. Durch die Beachtung der längst bekannten Gleichung $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, oder wie sie damals stets geschrieben wurde: $\operatorname{tg}\alpha : r = \sin\alpha : \cos\alpha$, brach sich jedoch die Erkenntnis des Richtigen allmählich Bahn, so daß man a posteriori eine Übereinstimmung mit der geometrischen Interpretation suchen konnte[4]).

[1]) De quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques avec une analyse complète de ces triangles. Journal de l'École Polyt., 6. cah., 1798/99, p. 293 bis 296. [2]) Wenzeslaus Johann Gustav Karsten hat zwei hier einschlägige Werke geschrieben: Mathesis theoretica elementaris atque sublimior, Rostock 1760, 8°, und Lehrbegriff der gesammten Mathematik, 2. Teil, 2. Aufl., Greifswald 1786, 8°. [3]) Vgl. z. B. Legendres Éléments de Géométrie noch in der 14. Aufl. von 1832. [4]) Segner, Elementa Arithmeticae Geometriae et Calculi



Auch die Funktionen negativer Argumente wurden wenigstens in den umfassenderen Werken, wie bei Karsten und Legendre, in den Kreis der Betrachtung gezogen und richtig bestimmt. Die Ableitung der goniometrischen Formeln wurde trotz Euler und Klügel (vgl. S. 413) immer noch einzeln geometrisch vollzogen, das vollständigste Formelsystem hat wohl Cagnoli aufgestellt. Dagegen beschränkte man sich in den größeren Kompendien[1]) nicht mehr nur auf die Ableitung der elementaren Formeln, sondern man nahm auch aus der „Introductio" die trigonometrischen und zyklometrischen Reihen und den Satz von Moivre in sie auf, ja selbst die Teilungsgleichungen wurden zuweilen mit in den Kreis der Betrachtung gezogen.

Die Berechnung der ebenen Dreiecke hatte durch den Gebrauch der Formeln wohl etwas an Leichtigkeit gewonnen, aber infolge der beständigen Beibehaltung des Sinus totus ihre Vollendung noch nicht erreicht[2]), wozu noch der Umstand beitrug, daß Eulers praktische Bezeichnungsweise der Seiten und Winkel des Dreiecks von den meisten seiner Zeitgenossen, ja selbst von Cagnoli und Louis Bertrand in der ebenen Trigonometrie so wenig wie in der sphärischen angewendet wurde; eine rühmliche Ausnahme hiervon machten Kästner[3]) und Klügel. Daß die sämtlichen Sätze zur Berechnung der ebenen Dreiecke, wie wir sie jetzt benützen, damals bereits in Gebrauch waren, braucht kaum bemerkt zu werden; in ihrer Gesamtheit, selbst mit Einschluß der sogenannten Mollweideschen Gleichungen[4]) zusammengestellt und in unserer Art abgeleitet finden wir sie jedoch nur in Cagnolis Trigonometrie.

Geometrici in neuer Auflage Halae Magdeb. 1756; Abbé Sauri, Cours complet de mathématiques, t. I, Paris 1774, 8°, und Institutions mathématiques, Paris 1786, 4. Aufl., p. 206, wo ein kurzer Auszug der Trigonometrie aus dem Cours steht; P. C. Scherffer (S. J.), Institutionum geometricarum pars sec. sive Trigonometria plana. Vindob. 1770, 4°. Deutsche Übersetzung von einem Ungenannten, Halle 1782. Scherffer bemerkt, wie später auch Cagnoli, daß beim Durchgang durch Null und durch Unendlich ein Zeichenwechsel eintreten muß.

[1]) So nahm z. B. Louis Bertrand, ein Schüler Eulers, in sein zweibändiges Werk „Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, Genève, II, 1778, 4°, alle Entdeckungen Eulers, die sich auf die Trigonometrie beziehen, auf. Ähnlich verfuhren Mauduit in seinen Principes de l'Astronomie sphérique ou traité complet de trigonométrie sphérique", Paris 1765, 8°, und Karsten in den o. a. Werken. [2]) Vgl. La Caille, Leçons élémentaires de mathématiques, Paris 1764, und Sauri in der schon angeführten Schrift, Étienne Bézout in seinem Cours de mathématiques, Paris, pars II, 1772, usw. [3]) In den späteren Auflagen seiner „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie" sowie in seinen „Geometrischen Abhandlungen", 1790—1791. [4]) Schon in der 1. Aufl. von 1786 stehen diese Gleichungen aus dem Sinussatze abgeleitet p. 122, übrigens finden

Bezüglich der Behandlung der sphärischen Trigonometrie muß man die graphischen und rechnerischen Methoden auseinanderhalten. Die ersteren, die sich in der alten Astronomie schon einer großen Beliebtheit erfreut hatten[1]), waren durch die Trigonometriae sphaericae constructio, Romae 1737, 4°, des uns schon bekannten Boscovich wieder neuerdings in Gebrauch gekommen. Sie beruhten in der Hauptsache auf der Orthogonalprojektion und wurden zur näherungsweisen Auflösung der sphärischen Aufgaben, vereinzelt, wie bei Mauduit, auch zur Ableitung der trigonometrischen Hauptsätze verwendet[2]). Antoine Remi Mauduit (1731—1815) war zuerst Professor der Mathematik an der École des ponts et chaussées, dann Professor der Geometrie am Collège de France in Paris und hat in seinen Principes d'astronomie sphérique ein reichhaltiges Werk geschaffen. Die ausführlichste Schrift aber, welche ohne Kenntnis der geschichtlichen Entwicklung der Jahrhunderte alten Methode alles längst Bekannte wieder neu fand und in organischen Zusammenhang brachte, war eine Schrift[3]) des Mathematiklehrers zu Montauban Siméon Fagon Valette (1719—1801) aus dem Jahre 1757, sie baut unmittelbar auf Boscovich auf, der jedoch nirgends genannt wird. Auch der Abbé Tommaso Valperga di Caluso (1737—1815), der erst Offizier auf der Flotte des Malteser-Ordens, dann Priester in Neapel und Turin war, woselbst er Professor der griechischen und orientalischen Sprachen und Direktor der Sternwarte wurde, hat noch 1786 eine ähnliche Arbeit, allerdings nicht in Form eines Lehrbuches veröffentlicht[4]).

Die weit wichtigere rechnerische Behandlung der sphärischen Trigonometrie, welche die Lehrbücher fast ausschließlich brachten, wurde damals im Gegensatze zu Eulers Methode, die er in seiner Abhandlung von 1779 befolgte, in der Weise vorgenommen, daß zuerst die Sätze für das rechtwinklige und dann jene für das schiefwinklige Dreieck als Folgerungen aus ersteren gebracht wurden. So leiten z. B. Segner, dessen vielbefolgte Bezeichnungsweise aus der nachfolgenden Figur 24 erhellt, und ebenso Sauri und Boscovich sowie viele andere auf diese Weise die folgenden fünf Gleichungen ab:

sie sich auch in Mauduits o. a. Werke p. 83 und 84 ohne Beweis aus den Neperschen Analogien der sphärischen Trigonometrie geschlossen.

[1]) A. v. Braunmühl, Gesch. d. Trig. I, Kap. 2, § 1, Kap. 3, § 2, Kap. 4, § 2, Kap. 7, § 1, Kap. 8, § 6. Ferner Zeuthen, Bibl. mathem. 1900, p. 20—27. [2]) A. a. O., p. 65 ff. [3]) Trigonométrie sphérique résolue par le moyen de la Règle et du Compas, Bourges 1757, 8°. [4]) De l'utilité des projections orthographiques. Mémoires de l'Acad. de Turin II, 1786, p. 291—327.



1) $\sin H : \sin h = \sin m : \sin M$; 2) $\sin B : \sin b = \operatorname{ctg} M : \operatorname{ctg} m$;

3) $\sin N : \sin n = \cos M : \cos m$; 4) $\cos N : \cos n = \operatorname{ctg} H : \operatorname{ctg} h$;

5) $\cos B : \cos b = \cos H : \cos h$

und fügen ihnen noch die beiden durch korrespondierende Addition und Subtraktion aus 3) und 5) hervorgehenden Formeln:

$$\operatorname{ctg}\frac{N+n}{2} : \operatorname{tg}\frac{M+m}{2} = \operatorname{tg}\frac{m-M}{2} : \operatorname{tg}\frac{N-n}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B+b}{2} : \operatorname{tg}\frac{H+h}{2} = \operatorname{tg}\frac{H-h}{2} : \operatorname{tg}\frac{B-b}{2}$$

hinzu[1]). Die Methode, mit diesen 7 Formeln alle Dreiecksaufgaben zu behandeln, war damals sehr verbreitet, wenn auch manche Autoren noch nebenbei die allgemeinen Formeln für das schiefwinklige Dreieck entwickelten, indem sie die Hauptsätze aus dem Dreikant ableiteten und aus diesen dann die übrigen durch Rechnung gewannen. Andere wieder, wie Cagnoli, Scherffer, Karsten und Mauduit stellten sich als Grundlage ihrer Formeln den Kosinus-, den Sinussatz und die Kotangentenformel mit Hilfe der Sätze des rechtwinkligen Dreiecks her. Auch die Neperschen Analogien kommen bei den genannten Autoren vor, die auch ihre praktische Verwendung auseinandersetzten. Dagegen wird die Methode, das ganze Formelsystem durch Anwendung des Supplementardreiecks zu verdoppeln, merkwürdigerweise nirgends ausschließlich angewendet.

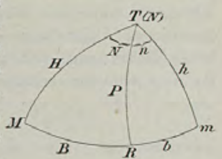


Fig. 24.

Wenn wir im vorhergehenden die hauptsächlichsten Methoden kennen gelernt haben, nach denen die Trigonometrie für den Unterricht entwickelt wurde, so müssen wir noch der am Ende des Jahrhunderts auftretenden Versuche gedenken, welche dahin zielten, das ganze trigonometrische Lehrgebäude auf die einfachstmögliche Grundlage zu stützen. Ohne diese bestimmte Absicht auszusprechen, leitete Kästner[2]) die Hauptformeln der ebenen Trigonometrie rechnerisch aus dem Sinussatze und der Winkelbeziehung $A + B + C = 180^0$ ab, und noch viel früher[3]) hatte der Oberberg-

[1]) Diese waren schon im 17. Jahrhundert von Thomas Baker (1625 bis 1690), Pfarrer in Bishop-Nymmet in Devonshire, mitgeteilt worden. Siehe A. v. Braunmühl, Gesch. d. Trig. II, p. 48. [2]) Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, z. B. 3. Aufl. 1774, p. 418; 4. Aufl. 1786, p. 505. Kästner wollte eigentlich nur eine „Vergleichung der Seiten des Dreiecks und eines seiner Winkel" finden. [3]) A. v. Braunmühl, Gesch. der Trig. II, p. 97—100. Oppels Schrift heißt: Analysis triangulorum 1746, 2°.

hauptmann Friedrich Wilhelm Oppel in Freiberg (1720—1769) gezeigt, daß sich aus der Kenntnis des Sinus- und Kosinussatzes die sämtlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie gewinnen lassen. Damit nicht zufrieden suchte De Gua de Malves (III², S. 576—577) zu zeigen[1]), daß die Kosinusformel allein zu diesem Aufbau genüge. Diesen Gedanken, den übrigens, wie De Gua selbst bemerkt, schon der Petersburger Akademiker F. C. Maier (III², S. 558—559) ausgesprochen hatte, führte er in der Abhandlung „Trigonométrie sphérique déduite très brièvement et complètement de la seule solution algébrique du plus simple des ses problèmes généraux etc." 1783 aus. Dabei hatte er die unglückliche Idee für seine neu aufgebaute Trigonometrie auch eine neue Funktionsbezeichnung einzuführen, die durch ihre Schwerfälligkeit die Lektüre seiner sonst verdienstlichen Abhandlung sehr unangenehm macht. Da sie jedoch keine Nachahmung fand, gehen wir auf dieselbe nicht weiter ein. De Gua leitet nun zunächst den Kosinussatz

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

geometrisch ab, indem er sich derselben Figur bedient, die wir bei F. Blake (S. 406) antrafen, und berechnet aus dieser Formel

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c} : (\sin b \sin c).$$

Da man aus der Symmetrie dieser Form erkennt, daß $\sin B$ und $\sin C$ denselben Zähler erhalten müssen, so folgt unmittelbar

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{1}{\sin b \sin c} : \frac{1}{\sin c \sin a} : \frac{1}{\sin a \sin b} = \sin a : \sin b : \sin c,$$

also der Sinussatz. Durch sehr umfangreiche Rechnungen ergeben sich dann der Kosinussatz für die Winkel, die Kotangentenformel und noch 10 andere recht komplizierte Gleichungen, welche zu praktischer Verwendung zum Teil sehr wenig brauchbar sind.

Die abschreckenden Rechnungen De Guas veranlaßten Lagrange in der schon erwähnten Abhandlung „De quelques Problèmes relatifs aux triangles sphériques avec une Analyse complète de ces triangles"[2]) eine einfachere Ableitung zu geben. Kosinus- und Sinussatz erhält er wie De Gua, indem er aber dann den ersteren für die Seiten $a$ und $c$ ansetzt, mit Hilfe der zweiten dieser Formeln $\cos c$ aus der ersten eliminiert und $\sin c = \sin a \sin C : \sin A$ einführt, ergibt sich ihm als dritte Gleichung $\operatorname{ctg} a \sin b = \operatorname{ctg} A \sin C + \cos b \cos C$. Vor der

[1]) Mémoires de l'Acad. de Paris 1786, p. 291—343, vorgelegt 1783.
[2]) Journal de l'École Polytechnique, cahier 6, 1798/99.



eben erwähnten Einführung von $\sin c$ hatte sich Eulers Formel $\cos a \sin b = \cos b \sin a \cos C + \sin c \cos A$ ergeben; indem er nun in dieser $a$ mit $b$ und folglich auch $A$ mit $B$ vertauschte und den hierdurch erhaltenen Ausdruck für $\cos b \sin a$ in sie einführte, ergab sich mit Hilfe der Beziehung $\sin c = \sin b \sin C : \sin B$ leicht der Kosinussatz für die Winkel als vierte Hauptgleichung. Obwohl diese Formeln genügen, wie Lagrange sagt, um alle auf sphärische Dreiecke bezüglichen Aufgaben zu lösen, so leitet er dennoch aus ihnen die bekannten 6 Gleichungen für das rechtwinklige Dreieck sowie die Sätze zur Bestimmung der Seiten aus den Winkeln und der Winkel aus den Seiten ab und verschafft sich die Neperschen Analogien, indem er in beiden Fällen auch das Supplementardreieck verwendet.

Da Lagranges Arbeit unmittelbar an De Guas Gedanken anknüpfte, mußten wir ihre Besprechung gleich hier anfügen und können erst nachträglich noch auf eine Abhandlung des uns schon bekannten Schubert hinweisen, die schon 1796 erschienen war[1]) und denselben Gegenstand behandelte, ohne jedoch jener Lagranges an Übersichtlichkeit, Einfachheit und Eleganz gleichzukommen. Friedrich Theodor Schubert (1758—1825), geboren zu Helmstädt, begann seine Tätigkeit als Hauslehrer, wurde dann Revisor des hapsalschen Kreises in Esthland, beschäftigte sich aber hauptsächlich mit geographischen und astronomischen Studien, die ihm die Pforten der Akademie in Petersburg eröffneten, woselbst er Aufseher der Bibliothek und des Münzkabinetts dieser Anstalt wurde, Stellungen, die er bis zu seinem Tode inne hatte. Mit den Schriften der Alten wohlvertraut kam er auf den Gedanken, aus dem Satze des Menelaus[2]), mit dem schon Ptolemäus die sphärische Trigonometrie behandelt hatte, das ganze bekannte Formelsystem der Trigonometrie abzuleiten. Zunächst gewann er aus diesem Theorem die 6 Formeln für die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke[3]), dann den Sinussatz und durch beständige Anwendung der gefundenen Formeln auf die Figur jenes Transversalensatzes von Menelaus die beiden Kosinusregeln, aus denen sich dann als einzige noch notwendige Regeln die Formel

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin A \sin c}{\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A}$$

und ihre polare ergaben. Auch dieses schöne System gründet die ganze sphärische Trigonometrie auf einen einzigen Satz, die hierzu notwendigen Rechnungen stehen aber jenen Lagranges an Einfachheit bedeutend nach. Beachtung hat dasselbe wenig gefunden.

[1]) Trigonometria sphaerica e Ptolemaeo. Vorgelegt am 22. Dezember 1796, publiziert 1801 in Nova Acta Acad. Petrop. XII, p. 165—175. [2]) Vgl. dieses Werk I², p. 386. [3]) Vgl. I², p. 392—393.

## Tetragonometrie, Polygonometrie und Polyedrometrie.

Nachdem infolge der Ausbildung der Formelsprache und der dadurch gewonnenen Geschmeidigkeit der analytischen Rechnung die Behandlung aller auf ebene Dreiecke bezüglichen Fragen eine Leichtigkeit geworden war, regte sich der Wunsch, auch für unregelmäßige Vierecke und allgemeine Polygone, deren typische Formen schon Stevin und Girard unterschieden hatten[1]), Formeln zu besitzen, welche eine Berechnung derselben direkt, d. h. ohne vorherige Zerschneidung in Dreiecke gestatten würden. Lambert war der erste, der in seiner „Anlage zur Tetragonometrie"[2]) diesen Gedanken verfolgte, um überflüssigen Rechnungen zu begegnen. Er gab ohne Beweis die vier Beziehungen an, welche zwischen je 6 Stücken eines ebenen Vierecks bestehen müssen. Da man jede von diesen nach einem der sechs Stücke auflösen kann, so ergeben sich 24 Fälle, von denen jedoch nur 14 verschieden sind, da mehrere Auflösungen dasselbe sagen, und drei Winkel bereits den vierten bestimmen, Umstände, die Lambert nicht berücksichtigt hat. Nimmt man noch eine Diagonale hinzu, so vermehren sich die möglichen Fälle, deren unvollständige Abzählung durch Lambert später Björnsen und Lexell ergänzten, während Johann Tobias Mayer in seine Inauguraldissertation von 1773[3]) Lamberts Irrtümer herübernahm. Der schon früher genannte J. T. Mayer war als Sohn des berühmten Astronomen gleichen Namens 1752 in Göttingen geboren, studierte und habilitierte sich daselbst, wurde dann Professor der Mathematik und Physik in Altdorf und Erlangen und starb als Professor der Physik in Göttingen 1830. In der genannten Schrift bemühte er sich hauptsächlich, logarithmisch brauchbare Gleichungen in der Tetragonometrie zu erhalten, was seine, wenn auch mangelhafte Abhandlung immer noch vorteilhaft von dem Buche unterscheidet, das der Däne Stephan Björnsen (1730—1798), Kalkulator der dänischen Landesvermessung, 1780 herausgab[4]). Dasselbe ebenfalls an Lambert anschließend bietet wenig elegante Formeln, wenn es auch Mayers Schrift an Vollständigkeit übertrifft, indem es noch die Fälle, welche mit Hinzunahme einer Diagonale entstehen, analytisch behandelt, geometrische Konstruktionen ableitet und die auftretenden Doppelwerte erklärt.

Der erste, welcher den geringen Wert solcher Detailuntersuchungen

[1]) Vgl. dieses Werk II², p. 665—666 und Bibliotheca math. 1900, I, p. 271. [2]) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik II, 1770, p. 175—184. [3]) Tetragonometriae specimen I, Göttingen 1773. [4]) Introductio in Tetragonometriam ad mentem Lambert. Hauniae 1780, 8°.



erkennend eine allgemeine Methode zur Berechnung beliebiger Polygone entwickelte, war der schon genannte Petersburger Mathematiker Lexell. Andreas Johann Lexell, 1740 zu Åbo in Finland als Sohn des dortigen Bürgermeisters geboren, kam 1766 auf Grund einer Abhandlung über die Auffindung von Kurven aus den Eigenschaften ihrer Krümmung als Lektor an die Universität und als Professor an die Marineschule in Upsala. Als er 1768 an die Petersburger Akademie eine Abhandlung einsandte, in welcher er eine neue Methode zur Integration gewisser Differentialgleichungen auseinandersetzte, wurde Euler auf ihn aufmerksam und veranlaßte sofort seine Berufung nach Petersburg, der er auch Folge leistete und sich als Eulers treuer Mitarbeiter namentlich an dessen neuer Mondtheorie auszeichnete. Als der letztere 1783 starb, erhielt Lexell seine Stelle in der Akademie, in die er schon früher aufgenommen worden war, hatte sie jedoch nur mehr ein Jahr inne, indem er schon 1784 seinem Meister im Tode nachfolgte.

Lexell hat der Polygonometrie zwei Abhandlungen gewidmet, in denen er diesen Zweig der Trigonometrie eigentlich erst schuf[1]). Er löste darin die Aufgabe aus $2n-3$ Stücken eines $n$-Ecks, die dasselbe bestimmen, die übrigen zu berechnen, indem er das Polygon auf zwei zueinander senkrechte Linien, wovon er die eine mit einer Seite zusammenfallen ließ, orthogonal projizierte. Die beiden hierdurch sich ergebenden Gleichungen sind in seiner Schreibweise:

$$a \sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots$$
$$+ l\sin(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda) = 0,$$
$$a\cos\alpha + b\cos(\alpha+\beta) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots$$
$$+ l\cos(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda) = 0,$$

wobei $a, b, c, \ldots l$ die Seitenlängen und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ die Außenwinkel des Polygons bedeuten, und die Beziehung besteht:

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda = 360^0.$$

Die beiden Gleichungen werden auch noch dadurch verallgemeinert, daß die Projektion des Polygons auf zwei beliebige sich in einer Ecke schneidende rechtwinklige Achsen vorgenommen wird; auch wird ihre allgemeine Gültigkeit für überschlagene Polygone und solche mit einspringenden Ecken an Beispielen dargetan, wobei nur zu beachten ist, daß die Summe der Außenwinkel in solchen Fällen ein Vielfaches von $2\pi$ beträgt.

Als spezielle Anwendungen zeigt Lexell, wie sich aus seinen

[1]) De resolutione polygonorum rectilineorum. Novi Comm. Acad. Petrop. XIX, 1774, p. 184—236 und XX, 1775, p. 80—122, publiziert 1775, resp. 1776.

Gleichungen die Grundformeln der Trigonometrie und der Tetragonometrie ergeben und fügt noch die entsprechenden für die Fünf- und Sechsecke hinzu. Diese Detailuntersuchungen, namentlich insoweit sie sich auf das Viereck beziehen, werden dann in der zweiten Abhandlung noch weiter ausgearbeitet, wobei eine vollständige Klassifizierung aller möglichen Fälle, auch jener, die mit Hereinziehung einer und zweier Diagonalen entstehen, vorgenommen wird.

Auf einer anderen Grundlage hat Simon L'Huilier eine Polygonometrie aufgebaut[1]). An ihre Spitze stellte er folgenden Satz: „Läßt man eine Seite des Polygons weg, bildet aus allen anderen die Produkte aus je zweien und multipliziert jedes Produkt mit dem Sinus des von den betreffenden Seiten gebildeten Winkels, so ist die Summe dieser $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Produkte gleich dem doppelten Inhalt des Polygons". Da man nun immer andere Seiten des Polygons weglassen kann, so erhält man $n$ Ausdrücke für den Polygonsinhalt, die einander gleichgesetzt die fundamentalen Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des Polygons liefern. Außer dieser Formelgruppe verschafft sich L'Huilier aber noch zwei Fundamentalformeln, die identisch sind mit Lexells Projektionsformeln[2]), indem er den Polygonsinhalt einmal in der obigen Weise und dann als Summe eines durch eine Diagonale abgeschnittenen Eckdreiecks und des übrigbleibenden Polygons von $n-1$ Seiten bildet. Den übrigen Inhalt des Buches machen allgemeine und spezielle Anwendungen dieser Sätze aus.

Außerdem hat L'Huilier über seine Vorgänger hinausgehend noch in einer dem Institut national 1799 eingereichten Abhandlung „Théorèmes de Polyedrométrie", Paris 1805, seine Sätze auf Raumpolygone ausgedehnt und den Hauptsatz der Polyedrometrie aufgestellt, daß jede Seitenfläche eines Polyeders gleich der Summe der übrigen ist, wenn man jede mit dem Kosinus des Winkels multipliziert, den sie mit der ersten bildet. Doch wurden die notwendigen Bedingungen, unter denen allein dieser Satz gültig ist, weder von L'Huilier noch von Carnot[3]), der sich bald nach ihm mit Sätzen der Polyedrometrie und der Raumpolygone beschäftigte, angegeben.

Die Hauptsätze der Polygonometrie fanden in den Lehrbüchern merkwürdig schnell Eingang, so in Prändels vielbenutzter „Geometrie und ebene Trigonometrie", München 1793, die einen eigenen Abschnitt darüber enthält.

---

[1]) Polygonométrie ou de la mésure des figures rectilignes etc., Genève 1789, 4°. Es scheint dies das erste Lehrbuch der Polygonometrie zu sein. Mascheronis „Metodo di misurare i poligoni", Pavia 1787, konnten wir nicht einsehen. [2]) Dieselben stehen a. a. O. p. 18 und 20. [3]) Géométrie de position, 1803, p. 306.



Zum Schlusse dieses Kapitels möge noch auf spezielle Untersuchungen über Vierecke und Polygone hingewiesen werden, mit denen sich Nik. Fuß am Ende des Jahrhunderts beschäftigte. In einer ersten Abhandlung von 1794[1]) löste er auf trigonometrischem Wege Aufgaben, welche sich darauf bezogen, aus gewissen gegebenen Stücken ein Viereck zu konstruieren, dem man einen Kreis umschreiben und einen anderen einschreiben kann und berechnete die Radien dieser Kreise, den Abstand ihrer Mittelpunkte und die noch fehlenden Stücke solcher Vierecke. In der zweiten Abhandlung von 1798[2]) dehnte er diese Untersuchungen auf symmetrisch irreguläre Polygone aus, womit er solche Polygone bezeichnete, denen man einen Kreis um- und einen anderen einschreiben kann und die so beschaffen sind, daß sie durch den gemeinsamen Durchmesser dieser beiden Kreise in zwei kongruente Hälften geteilt werden[3]). Auch hier werden alle Einzelaufgaben trigonometrisch behandelt und die Konstruktionen aus den Formeln abgeleitet. Der Zielpunkt der Arbeit ist die Lösung des allgemeinen Problems: einem gegebenen Kreis ein $n$-Eck einzuschreiben, dem selbst wieder ein Kreis eingeschrieben werden kann. Direkt gelöst wurde jedoch diese Aufgabe nur bis zum 8-Eck einschließlich, indem man, wie er sagte, hieraus bereits ersehen könne, wie man bei höherer Eckenzahl verfahren müsse.

## Trigonometrische und andere Tafeln. Zyklometrie. Trigonometrische Reihen.

Nachdem bereits Isaak Newton auf die Benutzung der unendlichen Reihen zur Berechnung logarithmisch-trigonometrischer Tabellen hingewiesen, und der unermüdliche Abraham Sharp[4]) zu Beginn des 18. Jahrhunderts mit ihrer Hilfe darauf bezügliche Rechnungen in großer Zahl ausgeführt hatte, wurden die letzteren von Gardiner in einer Neuauflage von Sherwins Logarithmentafel 1741 publiziert. Die zahlreichen Auflagen dieser zuerst 1705 erschienenen Mathematical tables von Sherwin, von denen Gardiners weitere Ausgabe von 1742 die korrekteste sein soll[5]), laufen bis 1771 fort, wo die fünfte

---

[1]) Nova Acta Acad. Petrop. 1792, X (erschienen 1797), p. 103—125.
[2]) Ebenda, 1795/96, XIII (erschienen 1802), p. 166—189. [3]) J. Steiner stellte (Journal für Math. und Phys. II, 1827, p. 96 und 289) die Relation zwischen den Radien der erwähnten Kreise und der Distanz ihrer Mittelpunkte für das Fünf-, Sechs- und Achteck auf, C. G. Jacobi aber wies (ebenda, III, p. 376) nach, daß diese Formeln mit den von Fuß gegebenen zusammenstimmen müssen, da dieser ohne es zu bemerken, den allgemeinsten Fall bereits behandelt hatte. [4]) Über ihn vgl. dieses Werk, III², S. 86. [5]) Tables of Logarithms for all numbers from 1 to 102100, and for the Sines and Tangents etc., London 1742.

Auflage derselben erschien, und enthalten die Briggschen Logarithmen aller Zahlen bis 99 und die Logarithmen der Primzahlen von 100 bis 1097 auf 61 Stellen nach Sharps Rechnungen[1]) sowie siebenstellige Logarithmen aller Zahlen bis 1000 und von 10000 bis 101000. Außerdem finden sich darin Tafeln für die Sinus, Tangenten, Sekanten und Sinus versus und ihrer Logarithmen für alle Bogenminuten ebenfalls auf 7 Stellen. Eine Neuauflage von Gardiners Tafelwerk in französischer Sprache wurde 1770 von dem Jesuiten Esprit Pezenas (1692—1776), Direktor der Sternwarte in Avignon, besorgt, der hierzu die von Gabriel Mouton (vgl. III$^2$, S. 77) mit dessen Differenzenmethode[2]) berechneten Zahlen benutzte, ohne jedoch seine Tafeln aller Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für die Sekunden der ersten und letzten 4 Grade zu veröffentlichen. Lalande, der dies lebhaft bedauerte, setzte in einer Abhandlung von 1761[3]) ein Interpolationsverfahren zur Berechnung solcher Tafeln auseinander und veranstaltete 1781 und noch später Neuausgaben der 1760 zum erstenmal erschienenen Tables des Logarithmes pour les Sinus, Tangentes etc. von Lacaille. Diese Tafeln waren wegen ihrer Handlichkeit (Duodezformat) und Exaktheit sehr beliebt und blieben langezeit im Gebrauch; 1832 wurden sie noch einmal von Köhler herausgegeben[4]).

Eine der wichtigsten Tafelsammlungen, die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts erschienen, enthielten Lamberts „Zusätze zu den logarithmisch trigonometrischen Tabellen zur Erleichterung und Abkürzung der bei Anwendung der Mathematik vorfallenden Berechnungen", Berlin 1770, 8°. Diese auf eine Anregung Lagranges entstandene Tafelsammlung[5]) wurde 1788 von dem mit Lambert im Briefwechsel stehenden und von ihm vielfach unterstützten Anton Felkel (geb. 1740) in Lissabon in lateinischer Sprache neu aufgelegt. Wir wollen auf die wichtigsten Tafeln dieser Sammlung hinweisen. Lambert hatte schon im II. Bande seiner Beiträge zur Mathematik die Teiler aller Zahlen von 1 bis 10200 gegeben, ferner hatte Heinrich Ajema 1767 eine Tafel der Teiler aller Zahlen von 1 bis 10000

[1]) Zuerst veröffentlicht in seiner Geometry improved, London 1717.

[2]) Mouton hat sein Verfahren zuerst angewendet in „Observationes diametrorum solis et lunae", Lugd. 1670, 4°, und damit die Logarithmen der Sinus und Tangenten auf 10 Dezimalen berechnet. Das diese Tafeln enthaltende Manuskript reichte er der Pariser Akademie ein, und Pezenas konnte es benutzen.

[3]) Sur les interpolations ou sur l'usage des différences secondes, troisièmes etc. Mémoires de l'Acad. de Paris 1761, p. 125—139.

[4]) Glaisher, Report of Mathematical Tables in Report of the British Association, London 1874, p. 1—175 [künftig nur als „Glaisher" zitiert], p. 153.

[5]) Brief an d'Alembert vom 4. April 1771. Lagrange, Oeuvres, éd. Serret, XIII, p. 195.



zu Löwen veröffentlicht und sowohl im Dictionnaire encyclopédique wie auch in Harris Lexikon der Künste und Wissenschaft war je eine solche Tafel für alle nicht durch 2, 3, 5 teilbaren Zahlen von 1 bis 100000 nach John Pell (vgl. II$^2$, S. 713) mitgeteilt worden; diese dehnte Lambert unter Vornahme der nötigen Korrekturen auf alle Zahlen bis 102000 aus (Tab. I) und fügte noch Tafeln für die Primzahlen bis 101977[1]) bei (Tab. II und VI), zu deren Bildung er in der Einleitung eine Reihe von Sätzen mitteilt. Felkel hat die Teilertafel fortgesetzt, indem er 1776 in Wien eine sehr praktisch eingerichtete Tabelle erscheinen ließ, die die Divisoren bis 336000 enthielt (vgl. S. 202). Nach Angabe von Gauß hatte er seine Rechnung sogar bis 2000000 getrieben, jedoch ist der Rest nicht mehr im Druck erschienen. Auch die Tafel der Primzahlen wurde 1772 von Marci bis 400000 fortgesetzt, während Johann Neumann zu Dessau 1785 Tabellen der Primzahlen und der zusammengesetzten Teiler aller Zahlen bis 100100 mitteilte und Vega eine Faktorentafel bis 400000 in seinen Vorlesungen (1793) drucken ließ.

Außer den Primzahltafeln enthält Lamberts Sammlung noch kleinere Tabellen der Quadrat- und Kubikzahlen, der Potenzen von 2 bis $2^{70}$, von 3 und 5 bis zur 50$^{\text{sten}}$ Potenz, eine Tafel für die Werte der Exponentialfunktion $e^{-x}$, von $x=0{,}1$ bis $x=10$, nebst den Entwicklungen von $e^x$, $\frac{1}{2}(e^x+1)$, $\log(a+x)$ usw. in Reihen und Kettenbrüche, dann eine Tafel der siebenstelligen hyperbolischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100 (Tab. XIII) und eine ebensolche der Zahlen von 1,01 bis 10 in Intervallen von 0,01. Bemerkenswert ist die XIX. Tafel, welche die Werte der Sinus von 3° zu 3° in algebraischen Ausdrücken zusammenstellt, um gegebenenfalls verschiedene Rechnungen mit aller Schärfe vornehmen zu können. Über die Aufstellung dieser Tabelle verbreitete er sich in seinen Beiträgen zur Mathematik II (S. 133—139) und zeigte, daß die einzelnen Funktionswerte aus 15 verschiedenen Wurzeln durch Addition und Subtraktion allein zusammengesetzt sind[2]). Außerdem enthält Lamberts Samm-

[1]) J. G. Krüger hatte schon 1746 zu Halle im Magdeburgischen eine Primzahltafel bis 100999 gegeben, die er nach Aussage Lamberts von Peter Jäger erhalten hatte, und von Giuseppe Pigri (1728 etwa —1804) waren 1758 Nuove tavole degli elementi dei numeri dall' 1 al 10000 in Pisa veröffentlicht worden. Diese Tafeln enthalten alle Zahlen innerhalb der gegebenen Grenzen durch Primzahlprodukte dargestellt und sollten nach des Autors sanguinischer Hoffnung die Benutzung der Logarithmen überflüssig machen. Eine Methode zur Aufsuchung der Primzahlteiler hat auch Johann Tessanek in Abhandlungen einer Privatgesellschaft in Böhmen, I, Prag 1775, p. 1—64 angegeben und mit derselben eine Tafel von 1 bis 1000 berechnet (p. 53—60).

[2]) Eine Ableitung derselben

lung noch eine Tafel (XXI), in welcher die hauptsächlichsten trigonometrischen Formeln zusammengestellt sind, die zur Berechnung der ebenen und sphärischen Dreiecke dienen, Tafeln für die Längen der Kreisbögen auf 27 Dezimalen von $1^0$ bis $100^0$, von da ab in Intervallen von $30^0$ und endlich für Minuten und Sekunden; ferner Tabellen zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen kleiner Winkel, zur Bestimmung der Sinus aller Grade mit ihren ersten 9 Vielfachen auf 5 Dezimalen usw. Zum Schlusse mag noch auf die Tafeln zur Erleichterung der Auflösung höherer Gleichungen, wie der Gleichungen 3. und 4. Grades, und endlich auf die Tafel der hyperbolischen Logarithmen (Tab. XXXII) aller ganzen Winkelgrade des 1. Quadranten hingewiesen werden. Im ganzen umfaßte die mit großer Sachkenntnis zusammengestellte Sammlung Lamberts 45 Tafeln in einem sehr handlichen Oktavbändchen.

Ein wichtiges Tabellenwerk war damals auch die „Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer Tafeln“ von Johann Karl Schulze (1749—1790), einem Schüler Lamberts, welche 1778 in Berlin in zwei Oktavbänden erschien. Außer den siebenstelligen Briggsschen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 101000 finden sich daselbst die hyperbolischen Logarithmen der Primzahlen von 1 bis 10000, die der holländische Artillerieoffizier Wolfram auf 48 Dezimalen berechnet hatte, ferner eine Tafel für die Logarithmen der Sinus und Tangenten kleiner Bögen von $0^0$ bis $2^0$ von Sekunde zu Sekunde berechnet, dann im II. Bande Tafeln der Sinus, Tangenten und Sekanten mit den zugehörigen Briggsschen und hyperbolischen Logarithmen für die 4 ersten und 4 letzten Grade in Intervallen von $10''$, für den übrigen Teil des Quadranten aber von Minute zu Minute berechnet. Auch die Längen der „Zirkulbögen“ für alle Grade auf 27 Dezimalen, ferner für alle Minuten und Sekunden sind für den Radius 1 angegeben, und außerdem ist noch eine Interpolationstafel aufgenommen. Auch findet sich darin eine Tafel für rationale Trigonometrie, die nach Lamberts Angaben berechnet wurde. Sie gibt für 100 rechtwinklige Dreiecke die Seiten, für welche die Tangente des halben spitzen Winkels $> \frac{1}{25}$ ist. Hier mag erwähnt werden, daß Lambert auf die sogenannte rationale Trigonometrie, mit welcher sich schon Vieta[1]) und De Lagny[2]) beschäftigt

hat Cagnoli 1794 in „Cose trigonometriche“, Mem. della Soc. Italiana VII, p. 2 bis 3 gegeben.

[1]) Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus, Lutetiae 1579 in fol. Darin: Canonion triangulorum Laterum rationalium. Vgl. die Beschreibung desselben bei Hunrath in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 9, p. 221—225. [2]) Sur le calcul analytique et indéfini des Angles



hatten, durch einen Brief aufmerksam geworden zu sein scheint, den ihm ein gewisser Pater Simon Baum vom St. Salvatororden am 15. Oktober 1773 schrieb; darin teilte er ihm mit, daß er 223 Sinuswerte in rationalen Zahlen bestimmt habe und noch 20000 zu berechnen gedenke, welche zur Behandlung von Dreiecken dienen, deren Seiten und Inhalt rational sind. In seiner Antwort auf diesen Brief am 14. Dezember des gleichen Jahres teilte ihm Lambert mit, er habe eine Tafel für alle Brüche, deren Nenner 100 ist, berechnet, und aus dieser Tafel könne man schon 200 rationale Sinus finden, was völlig genüge. Ferner sei allgemein $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ gesetzt, so folgt

$$\sin 2\alpha = \frac{2ab}{b^2 + a^2}, \quad \cos 2\alpha = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

und hieraus z. B. für $\frac{a}{b} = \frac{3}{11}$

$$\sin 2\alpha = \frac{33}{65}, \quad \cos 2\alpha = \frac{56}{65}, \quad \alpha = 30^0\,30'\,27''.$$

Diese Überlegungen waren es jedenfalls, die die Entstehung der Schulzeschen Tafel verursachten, nur war dieselbe leider mit so vielen Fehlern behaftet, daß sie Bretschneider 1841[1]) noch einmal berechnen mußte.

Schulzes Werk scheint jedoch das Bedürfnis nach Logarithmentafeln nicht befriedigt zu haben, weshalb Georg Freiherr von Vega (1756—1802) sich mit der Herausgabe ähnlicher Werke befaßte, die bald sehr populär wurden. Vega, in Zagarika in Krain geboren, trat früh in die österreichische Armee, war als Hauptmann zugleich Professor der Mathematik beim Bombardierkorps in Wien, machte die Feldzüge gegen die Türken 1788 und gegen Frankreich 1793 bis 1797 mit, in denen er sich sehr auszeichnete, und stieg bis zum Oberstleutnant. 1802 wurde er entseelt in der Donau gefunden; später ergab sich, daß er von einem Müller ermordet worden war[2]). Während er seine Professur inne hatte, veröffentlichte er zunächst „Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln“, Wien 1783, $8^0$, die in zahllosen Neuauflagen und Bearbeitungen bis heute im Gebrauche blieben. Das Werk umfaßte die siebenstelligen Logarithmen der

des triangles etc. Mémoires de l'Académie de Paris 1729, insbesondere p. 318.

[1]) Archiv für Mathematik und Physik I, p. 96—101. [2]) K. Döhlemann, Georg von Vega. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1894, XXXIX, p. 204 bis 211.

Zahlen und der trigonometrischen Funktionen sowie die goniometrischen Funktionen selbst, die Längen der Kreisbögen und verschiedene den Kreis und die Berechnung der ebenen und sphärischen Dreiecke betreffende Formeln. 1794 erschien dann in Leipzig „Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch“ und im gleichen Jahre Vegas vollständigstes und bedeutendstes Werk in dieser Richtung, der „Thesaurus logarithmorum completus ex Arithmetica logarithmica, et ex Trigonometria arteficiali“, Lipsiae 1794, 2°. Die erste Tafel desselben, der „Magnus Canon logarithmorum vulgarium“ enthält die 10stelligen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000 ohne Differenzen und von 1000 bis 100999 mit Differenzen, die 2. Tafel, der Magnus Canon logarithmorum vulgarium trigonometricus gibt die 10stelligen Logarithmen der Sinus, Kosinus, Tangenten und Kotangenten und zwar zwischen 0° und 2° in Intervallen von 1″ und für die übrigen Winkel von 10″ zu 10″ mit Angabe der Differenzen. Außerdem findet man noch darin Tafeln für Kreisbogenlängen, eine umfassende Sammlung trigonometrischer Formeln und Wolframs hyperbolische Logarithmen der Primzahlen. Vegas Thesaurus war, wie er selbst sagt, eine Neuberechnung von Vlacks Tafeln (II², S. 443 ff.), und er glaubte die Fehler jener Tabellen so verbessert zu haben, daß er für jeden ihm angezeigten Fehler einen Dukaten zu zahlen versprach. Doch genügte, wie nachmals Gauß in einer Besprechung des Werkes nachwies[1]), die Tafel II der Anforderung, die Tabulargröße dürfe niemals um mehr als eine halbe Einheit der letzten Dezimalstelle von dem wahren Werte abweichen, keineswegs.

Ein Jahr nach dem Erscheinen des Thesaurus kam in Paris die Tafelsammlung von François Callet (1744—1798) heraus, die wir schon S. 423 anführten[2]). Sie umfaßte im ganzen 11 wichtige Tafeln in einem nicht übermäßig dicken Oktavband und berücksichtigte neben der alten Teilung des Quadranten auch die Hundertteilung desselben. Die Haupttafeln enthalten 7stellige Logarithmen der Zahlen wie der trigonometrischen Funktionen, doch sind auch die gewöhnlichen und hyperbolischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1200 und von 101000 bis 101179 sowie die gewöhnlichen und hyperbolischen Antilogarithmen von 0,00001 bis 0,00179 in Intervallen von 0,00001 und von 0,000001 bis 0,000179 in Intervallen

[1]) Astronomische Nachrichten 1851, Nr. 756, Werke III, p. 257—264. Vgl. dagegen die Ansicht von Leber „Tabularum ad faciliorem interpolationis computationem utilium Trias“, Vindob. 1897. [2]) Tables portatives de logarithmes 1795, 8°. Die umfangreiche Einleitung (118 Seiten) enthält eine genaue Angabe der Berechnung der Tafeln. Neudrucke erschienen 1827, 1829, 1853, 1890.



von 0,000001 sämtlich auf 20 Dezimalen mitgeteilt und die ersten, zweiten und dritten Differenzen angegeben. Außerdem ist noch eine Tafel bemerkenswert, die die Sinus und Logarithmen derselben auf 15 Dezimalen für je 10′ des hundertteiligen Quadranten gibt. Was die Berechnung der natürlichen Sinus in diesem Werke betrifft, so hat sie Callet wahrscheinlich durch Interpolation aus der „Trigonometria arteficialis“ von Vlack vollzogen[1]).

Von den um jene Zeit in England erschienenen Tafelsammlungen haben wir die trefflichen Mathematical Tables, London 1785, 8°, zu nennen, die Charles Hutton (siehe Abschnitt XIX, S. 16), seit 1773 Professor an der Militärakademie zu Woolwich, herausgab. Sie erlebten bis 1858 Neuauflagen unter beständiger Verbesserung. Die ersten sechs derselben enthalten eine äußerst wertvolle Einleitung über die Geschichte der Logarithmen. Außerdem finden sich in dieser Sammlung Antilogarithmen, d. h. die Zahlen zu den Logarithmen von 0 bis 0,00149 in Intervallen von 1 Hunderttausendstel auf 20 Dezimalstellen berechnet, und logistische Logarithmen, d. h. die Werte von $\log 3600'' - \log x$, von $x = 1''$ bis $x = 5280''$ in Sekundenintervallen auf 4 Dezimalen.

Ein bedeutendes Werk ist auch die dreibändige von Michael Taylor (1756—1789), einem Rechner für den Nautical Almanac, in London 1792 in-4° herausgegebene Tafelsammlung mit einer Vorrede von Nevil Maskelyne, dem wir schon begegneten. Unter den durchweg 7stelligen Tafeln befindet sich eine (die III.) von 450 Seiten mit nahe $3\frac{1}{2}$ Millionen Ziffern; sie enthält die Sinus, Kosinus, Tangenten und Kotangenten und wurde durch Interpolation aus Vlacks 10stelliger Tafel mit Kürzung auf 7 Stellen berechnet. Außerdem hat Taylor noch 1780 eine Sexagesimaltafel publiziert.

Als man in Frankreich in den ersten Jahren der großen Umwälzung, welche die Revolution auf allen Gebieten hervorgerufen hatte, auch die Maße und Gewichte reformierte, indem man überall das Dezimalsystem einführte, lag es nahe, den schon früher vereinzelt aufgetauchten Gedanken der Dezimalteilung des Winkels wieder aufzunehmen und dafür neue logarithmisch-trigonometrische Tafeln zu schaffen, ähnlich wie sie einst Briggs berechnet hatte (vgl. II², S. 743). Die Anregung hierzu ging von Carnot, Prieur und Brunet aus, und mit der Leitung des Unternehmens, welches in großem Maßstabe angelegt wurde, ward 1794 der zum Vorstande des Katasterbureaus (1791) ernannte Ingenieur Gaspard de Prony (1755—1839) betraut.

[1]) Glaisher, a. a. O., S. 93 nach Hoberts und Idelers Angabe (1799).

Dieser teilte seine Hilfsarbeiter in drei Gruppen. Die Herstellung der für die Rechnung notwendigen Formeln lag in den Händen berühmter Mathematiker, wie Delambre und Legendre, die zweite Gruppe bestand aus Rechnern, die mit der Analysis vertraut waren, während die Mitglieder der dritten Sektion, zu denen man hauptsächlich die durch das neue Regime brotlos gewordenen Perückenmacher heranzog, nur die Additionen und Differenzenrechnungen auszuführen hatten. Dabei vollzog man[1]) die Berechnung der Sinus von $10^0$ zu $10^0$ mittelst der Reihe, die Sinus der zwischenliegenden Bögen wurden von Grad zu Grad mit der Formel

$$\sin(a+b) = 2\cos a \sin b + \sin(a-b)$$

bestimmt, und alles übrige wurde durch eine geschickt angelegte Differenzenrechnung ausgefüllt, deren auf Moutons Methode beruhende Einrichtung man hauptsächlich Legendre verdankte[2]). Das Werk umfaßt handschriftlich 17 Bände in Folio und enthält neben einer ausführlichen Einleitung über die Herstellung usw. der Tafeln die natürlichen Sinus für jeden 10000sten Teil des Quadranten auf 25 Dezimalen, um sie sicher auf 22 zu haben, mit Angabe von 7 oder 8 Kolonnen Differenzen, ferner die Logarithmen der Sinus und der Tangenten für jedes Hunderttausendstel des Quadranten auf 14 Dezimalen mit 5 Differenzen, dann die Logarithmen der Verhältnisse der Sinus und der Tangenten zu ihren Bögen für die 5000 ersten Hunderttausendstel des Quadranten in 14 Dezimalen, weiter die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 auf 19 Dezimalen und die der Zahlen von 10000 bis 200000 mit 14 Dezimalstellen und 5 Differenzen. Das begonnene Riesenwerk war also wirklich dem Plane gemäß zu Ende geführt worden, blieb aber leider unveröffentlicht, da der bereits angefangene Druck wegen der Zerrüttung der Finanzen eingestellt werden mußte. Übrigens hat dasselbe an Wert bedeutend verloren, da die Hundertteilung des Quadranten in der Folge keinen Eingang fand, obwohl sie Legendre in seiner vielbenutzten Trigonometrie den Rechnungen zugrunde legte, und auch bald kleinere Tafeln, wie die „Tables trigonométriques décimales“ von Borda[3]) in Frankreich und die „Nouvelles tables trigonométriques“ von Hobert und Ideler[1]) in Deutschland erschienen, die sich dieser Teilung bedienten. In der Vorrede zu letzterem Werk, welches das erste war, das in Deutschland die zentesimale Teilung des Quadranten einzuführen suchte, wird der Differenzenmethode zur Berechnung der Tafeln das Wort geredet und in der Tat hatte die Herstellung der „Tables du Cadastre“ das Übergewicht dieser Methode über die direkte Berechnung auf das schlagendste dargetan.

[1]) Mémoires de l'Institut V, an XII, p. 56—66: Rapport sur les grandes tables trigonométriques décimales du cadastre par Lagrange, Laplace et Delambre und Bulletin de la Société Philomathique de Paris III, 1811, Bericht von denselben. Vgl. auch Comptes rendus de l'Acad. de Paris 1858, XLVI, p. 911 bis 912; ferner Annales de l'Observatoire impérial de Paris IV, 1858, p. 123 bis 150, endlich Nouvelles Annales XIV, 1855, p. 14—17 des historischen Teils.
[2]) Connaissance de temps 1817, p. 219—233. [3]) „Tables trigonométriques décimales ou Tables des logarithmes ... revues, augmentées et publiées, par J. B. J. Delambre, Paris, an IX (1800/1), klein-8°.



Obwohl man sich, wie schon am Anfang dieses Abschnittes erwähnt, zur Berechnung der Logarithmen stets der unendlichen Reihen bediente, machte sich doch am Ende des Jahrhunderts das Bestreben geltend, elementare Methoden herzustellen, mit denen eine solche Berechnung wenigstens für die Zahlenlogarithmen möglich wäre. Der Prediger der französischen Gemeinde und nachmalige Professor der Mathematik an der Académie militaire in Berlin, Abel Bürja (siehe S. 29) veröffentlichte 1786[2]) zwei solche Methoden zur direkten Berechnung der Logarithmen. Die erste beruhte darauf, daß er durch abwechselndes Ziehen der zweiten und der fünften Wurzel aus 10 und den hierdurch entstehenden Zahlen die zu den Logarithmen

$$0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots\ 0{,}9;\quad 0{,}01,\ 0{,}02,\ \ldots\ 0{,}09;\quad 0{,}001,\ 0{,}002,\ \ldots\ 0{,}009 \text{ usw.}$$

gehörigen Numeri bildete, dann die ersten 9 Vielfachen dieser Zahlen berechnete und alles in einer Tafel vereinigte, in welcher die Logarithmen vom größten zum kleinsten abnehmen. Diese „Hilfstafel“[3]) hat er bis zu $\frac{1}{10^{19}}$ fortgeführt. Den zu einem gegebenen Logarithmus, z. B. zu $0{,}463\ldots$ gehörigen Numerus findet man dann, indem man die Faktoren von $10^{0,4} \cdot 10^{0,06} \cdot 10^{0,003}\ldots$ in jener Tafel aufschlägt und miteinander multipliziert, was durch die Vielfachen in der Tafel erleichtert wird. Auch die umgekehrte Aufgabe läßt sich, wie Bürja zeigt, mit der Hilfstafel leicht lösen[4]).

Die zweite Methode, die er mitteilte, diente dazu, jeden Loga-

[1]) Nouvelles tables trigonométriques calculées pour la division décimale du quart de cercle, Berlin 1799, 8°. [2]) Der selbstredende Algebraiste 1786 und Mémoires de l'Acad. de Berlin 1786/87 (publiziert 1792), p. 433—478, und kürzer im Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik von J. Bernoulli und Hindenburg 1786, p. 90—105. [3]) A. a. O., p. 456—478. Das Verfahren ist wahrscheinlich Long nachgebildet, der es in P. T. 1714, XXIX, Nr. 339, p. 52—54 gab. [4]) Dem Gedanken, wenn auch nicht der Form nach dieselbe Methode hatte schon Brook Taylor 1717 in den P. T. Vol. XXX, Nr. 352, p. 618—622, entwickelt.

rithmus einer Zahl ohne Tafel zu finden und beruhte auf der Darstellung desselben durch einen Kettenbruch. War z. B. der Logarithmus von 262144 zur Basis 128 zu bestimmen, so setzte man $128^{p+\frac{1}{q}} = 262144$, daraus folgt sofort $p = 2$, und hiermit leicht $16^q = 128$; ist jetzt $q = r + \frac{1}{s}$, so folgt wieder $r = 1$ und hiermit $8^s = 16$ usw., so daß sich schließlich der gesuchte Exponent in der Form $2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = 2\frac{4}{7}$ darstellt. Fast genau die gleiche Methode hat 1795 der Amerikaner David Rittenhouse (1732—1796) gegeben[1]), ob mit oder ohne Kenntnis von Bürjas Abhandlung, läßt sich wohl nicht mehr feststellen.

In allen Tafelwerken jener Zeit wurde natürlich, wie auch heute noch, der Zahl $\pi$ gedacht; so finden sich z. B. in Lamberts Sammlung (Tafel XXIV) $\pi$, $\log \pi$, $\frac{1}{\pi}$, $\sqrt{\pi}$ auf 18 Dezimalen angeführt, und Vega gab in seinem Thesaurus (p. 633) $\pi$ auf 140 Stellen an, von denen 136 richtig sind. Die Methoden, mit denen man $\pi$ berechnete, beruhten hauptsächlich auf dem Kunstgriff, den zuerst Machin angewendet hatte (vgl. III², S. 364—365), nämlich $\frac{\pi}{4}$ in die Summe zweier oder mehrerer Bögen mit rationalen Tangenten zu zerlegen, die dann einzeln mit der Arkustangensreihe berechnet wurden. Euler war es, der zuerst diesen Gedanken wieder aufgriff und auf das vollkommenste ausbeutete, indem er schon 1737[2]) durch Einführung spezieller Zahlenwerte in die allgemeine Formel

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{p} = \operatorname{arctg}\frac{1}{p+q} + \operatorname{arctg}\frac{q}{p^2+pq+1}$$

solche Zerlegungen vornahm und außerdem die Reihe

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \operatorname{arctg}\frac{ax-y}{ay+x} + \operatorname{arctg}\frac{b-a}{ab+1} + \operatorname{arctg}\frac{c-b}{cb+1} + \cdots$$

herstellte, die z. B. für $\frac{x}{y} = 1$, $a, b, c, \ldots$ gleich den ungeraden Zahlen der Zahlenreihe die Reihe

[1]) Method of raising the common Logarithm of any Number immediately (gelesen am 12. August 1795). Transactions of the American philosophical Society, IV, Philadelphia 1799, p. 69—71, Nr. IX. [2]) De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi. Comment. Acad. Petrop. IX, 1737 (erschienen 1744), p. 100.



$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 9} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 16} + \cdots$$

lieferte. Auf solche auch vom analytischen Standpunkt interessante Reihen kam er später (1762/63) noch einmal zurück[1]), indem er sich mit ihrer Summation beschäftigte. Daran anschließend hat dann Johann Friedrich Pfaff (1765—1825), Universitätsprofessor zu Helmstädt und dann zu Halle, diese Reihenkategorie von allgemeinerem Standpunkt systematisch untersucht[2]) und zu den schon von Euler summierten Reihen auch noch solche hinzugefügt, deren Summe durch einen Bogen ausgedrückt wird, dessen Tangente transzendente Größen einschließt.

Eulers Formeln wurden vielfach zur Berechnung von $\pi$ benutzt (vgl. S. 299, 300). So hat z. B. Vega das oben angeführte Resultat aus der Eulerschen Formel $\frac{\pi}{4} = 5\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg}\frac{3}{79}$ gewonnen, wozu er noch zur Kontrolle $\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ nahm, und Karl Buzengeiger (1771—1835), zuerst Magister in Ansbach, dann Professor der Mathematik in Freiburg im Breisgau, gab die auf ähnliche Weise gebildete neue Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 8\operatorname{arctg}\frac{1}{10} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{515} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239},^{3})$$

an, die auf sehr rasch konvergente Reihen führt. Ebenso teilte Ch. Hutton, dem wir schon wiederholt begegneten, drei ähnliche Zerlegungen von $\frac{\pi}{4}$ mit[4]), berechnete aber die Teilbögen nicht mit der gewöhnlichen Arkustangensreihe, sondern mit der viel rascher konvergenten Reihe:

$$\operatorname{arctg} t = \frac{t}{1+t^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3 + \cdots\right\},$$

die er durch Transformation aus ersterer erhielt. Euler hatte übrigens diese Reihe schon 1755 in seiner Differentialrechnung aufgestellt[5]) und teilte sie 1779 der Petersburger Akademie mit, indem er durch Einführung derselben in die Formel

[1]) De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt. Novi Comment. Acad. Petrop. IX, 1762/63 (erschienen 1764), p. 40—52. [2]) De progressionibus arcuum circularium etc., wie bei Euler, Nova Acta Acad. Petrop. X, 1792 (vorgelegt 1795, erschienen 1797), p. 123—184. [3]) Klügel, Wörterbuch I, p. 666. [4]) P. T. 1776, p. 476. Vgl. über die weitere Geschichte dieser Reihe, die wiederholt neu gefunden wurde, Glaisher in Messenger of Mathematics II, 1873, p. 119 ff. [5]) Pars II, Kap. 2, p. 318.

$$\pi = 20 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{79}$$

die äußerst bequeme Formel:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{28}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \cdots\right\}$$
$$+ \frac{30366}{100000}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \cdots\right\}$$

erhielt. Mit ihr berechnete er, nach seiner Angabe, $\pi$ in einer Stunde auf 20 Dezimalen[1]).

In einer anderen Abhandlung vom 17. Juni desselben Jahres[2]) bildete Euler die leicht zu beweisende Gleichung:

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{2-x} = 2\int_0^x \frac{dx}{4+x^4} + 2\int_0^x \frac{x\,dx}{4+x^4} + \int_0^x \frac{x^2 dx}{4+x^4},$$

entwickelte diese Integrale in Reihen, setzte $x = \frac{1}{2}$ und dann $-\frac{1}{4}$ und erhielt dadurch Reihen für $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ und $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, welche in die Gleichung $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ eingesetzt ebenfalls einen zur Berechnung von $\pi$ brauchbaren Ausdruck lieferten.

Zu einer anderen interessanten Abhandlung über das hier einschlägige Gebiet wurde Euler durch einen von Descartes gemachten Versuch der Kreisrektifikation veranlaßt[3]) (vgl. S. 259, 260). Zu diesem Zweck hatte Descartes an das Quadrat $\widehat{bf}$ (Fig. 25) das Rechteck $\widehat{cg}$, dessen vierte Ecke auf der Diagonale liegt und dessen Fläche gleich $\frac{1}{4}$ des Quadrates ist, angelegt, an dieses wieder ein Rechteck $\widehat{dh} = \frac{1}{4}$ des vorhergehenden usw. Dadurch war er schließlich zu einem Grenzpunkt $x$ gelangt, der so liegt, daß $ax$ dem Durchmesser des gesuchten Kreises gleich wird. Dabei hatte er angegeben, daß $ab$ der Durchmesser des dem Quadrate eingeschriebenen Kreises, $ac$ der Durchmesser des dem Achteck eingeschriebenen, $ad$ jener des dem Sechzehneck eingeschriebenen Kreises usw. ist, so

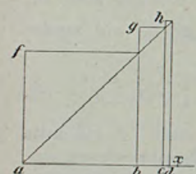


Fig. 25.

[1]) Investigatio quarundam serierum, Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793, p. 133ff., gelesen am 7. Juni 1779 (erschienen 1798), p. 133. In einem anderen Aufsatze, der erst 1862 in den Opera posthuma L. Euleri von P. H. Fuß et Nic. Fuß I, p. 288 veröffentlicht wurde, wird diese Reihe noch auf einem etwas anderen Wege abgeleitet. Dort findet sich obige Angabe für die Zeit der Berechnung. [2]) Nova Acta Acad. Petrop. XI, p. 150. [3]) Oeuvres de Descartes



daß endlich $ax$ der Durchmesser des dem Polygon mit unendlich vielen Seiten eingeschriebenen Kreises, d. h. der gesuchte Kreisdurchmesser selbst wird. Euler beweist nun zunächst die Richtigkeit dieser Konstruktion und leitet dann aus ihr die Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{32} + \cdots = \frac{4}{\pi}$$

ab. Diese Reihe gibt ihm aber sofort Veranlassung, die Summe der allgemeineren Reihe $\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} + \cdots$ zu suchen, die er auch leicht in der Form $\frac{1}{\varphi} - 2\operatorname{ctg} 2\varphi$ findet. Aus dieser Gleichung wird dann unter anderem auch die Faktorenfolge gewonnen:

$$\frac{2\varphi}{\sin 2\varphi} = 1 : \left(\cos\varphi \cos\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{4} \cos\frac{\varphi}{8} \cdots\right),$$

die im speziellen für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ jene schon Vieta bekannte Beziehung liefert (vgl. II², S. 595), welche als das erste unendliche Produkt gilt[1]).

Auch Eulers jüngerer Zeitgenosse Lambert hatte schon 1758 an die Quadraturversuche des Gregorius a St. Vincentio (II², Kap. 81) anknüpfend eine Ableitung dieser Faktorenfolge in einer Abhandlung[2]) gegeben, auf deren Inhalt wir, soweit er unser Gebiet betrifft, noch kurz eingehen wollen. Er sagt daselbst, da die Länge eines Kreisbogenstückes $AM = v$ (Fig. 26) zwischen dem Sinus $AS = y$ und der Tangente $AF$ liegt, so wird es auf der Verlängerung des Durchmessers $AB = 2$ einen Punkt $P$ in der Entfernung $AP = z$ geben, der mit $M$ verbunden, einen Punkt $Q$ auf $AF$ liefert, der zwischen $S$ und $F$ liegt. Bezeichnet man $MS$ mit $x = \operatorname{sinvers} v$, so ergibt sich leicht die Beziehung $z = \frac{vx}{v-y}$. Wenn man in dieser $x$ und $y$ durch die bekannten Reihen ersetzt, so findet man zunächst für $z$ die Reihe

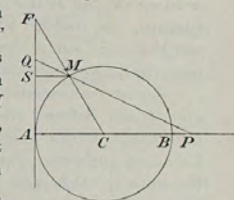


Fig. 26.

Ed. Cousin, XI, p. 442—443. Eulers Abhandlung führt den Titel: Annotationes in locum quondam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem. Nov. Comment. Acad. Petrop. VIII, 1760/61, p. 157ff. (erschienen 1763). Später gab auch J. Fr. de Tuschio a Fagnano in Acta Eruditorum 1771, p. 406—418 einen Beweis der Konstruktion.

[1]) Übrigens hat Euler diese Formel von anderen Betrachtungen ausgehend schon früher gefunden: Comment. Acad. Petrop. IX, 1737 (erschienen 1744), p. 234—235. Sie tritt auch wieder auf in Opuscula analytica L. Euleri, Petropoli 1783, 4°, p. 345. [2]) Observationes variae in mathesin puram. Acta Helvetica III, Basileae 1758, § 10, p. 132.

$$z = 3 - \frac{1}{10}v^2 - \frac{1}{4200}v^4 + \frac{1}{126000}v^6 + \cdots,$$

durch welche $P$ so bestimmt wird, daß $AQ = v$ ist. Nimmt man ferner $z = 3$ an, so ergibt der hierdurch bestimmte Punkt $P$ eine sehr einfache und genaue Methode zur Rektifikation des Bogens $v = AM = AQ$. Lambert weist die Richtigkeit seiner Behauptung dadurch nach, daß er mit seiner Formel eine kleine Tabelle berechnet und die Unterschiede der gefundenen und der wahren Werte bestimmt. Weiter ergibt sich aus der Figur die Proportion

$$QS : SF = (1 - x) : (3 - x),$$

aus welcher für sehr kleine $x$ ($x = 0$) folgt, daß $FQ = 2SQ$ oder $\operatorname{tg} v - v = 2(v - \sin v)$ ist, woraus

$$\operatorname{arc} v = \frac{\operatorname{tg} v + 2 \sin v}{3} \quad \text{und} \quad \pi = \frac{180^0}{v^0} \frac{\operatorname{tg} v^0 + 2 \sin v^0}{3}$$

sich viel genauer ergibt, als wenn man, wie gewöhnlich, das arithmetische Mittel zwischen $\operatorname{tg} v$ und $\sin v$, oder den Seiten der um- und eingeschriebenen Polygone bildet.

Nicht unerwähnt wollen wir auch die Versuche lassen, welche im fernen Japan in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gemacht wurden, um die Zahl $\pi$ auf eine größere Anzahl Dezimalen zu bestimmen, und welche beweisen, daß die Japaner damals im Besitze von Methoden waren, die im Abendlande der Erfindung des Infinitesimalkalküls unmittelbar vorhergingen.

Japans berühmtester Mathematiker Kōwa Seki (vgl. III², S. 669) gilt als der Erfinder einer solchen Methode, und aus der von ihm gegründeten Schule gingen mehrere Mathematiker hervor, die seine Erfindung ausbauten. Bemerkenswert sind einige unendliche Reihen für $\arcsin x$, welche sich bei verschiedenen japanischen Mathematikern finden. So wurde in dem Werke Ho en san Kyo von Yoshihide Matsunaga von 1739 der Wert von $\pi$ auf 50 Stellen für $x = \frac{1}{2}$ aus der gewöhnlichen Arkussinusreihe berechnet, die Newton (III² S. 74) in seiner Analysis per aequationes abgeleitet hatte[1]). Ajima (oder Yasujima?)[2]) aber (etwa 1737—1797) gab außer jener Reihe auch noch die zwei folgenden:

$$\frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}\right) = x - \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} \frac{1}{2\beta+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\beta - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2\beta} x^{2\beta+1}$$

[1]) Sie steht übrigens auch bei Wallis „De Algebra Tractatus", Opera II, Oxoniae 1693, p. 383. [2]) Vgl. über diese Lesart den Aufsatz von Y. Mikami im Jahresbericht der Mathematikervereinigung, 1906, p. 254.



und

$$\arcsin x = \sqrt{1 - x^2} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2\beta}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\beta + 1)} x^{2\beta+1}.\,^{1)}$$

Außerdem finden sich in japanischen Schriften aus jener Zeit auch Darstellungen der Zahl $\pi$ durch Näherungswerte von Kettenbrüchen[2]). So stammt von Y. Arima aus dem Jahre 1766 der auf 12 Stellen richtige Näherungsbruch $\frac{5419351}{1725033}$ und der auf 30 Stellen zutreffende Bruch $\pi = \frac{428224593349304}{136308121570117}$, während G. Kurushima († 1760) $\pi^2 = \frac{98548}{9985}$ angab.

Versuche, den Charakter der Zahl $\pi$ zu ergründen, waren schon von De Lagny (III², S. 120) gemacht worden. Derselbe war bereits 1719 zu dem wichtigen Satze gelangt[3]), den er allerdings nicht beweisen konnte, daß, wenn die Tangente eines Bogens eine rationale Zahl ist, der Bogen selbst irrational sein muß, und hatte daraus die Folgerung gezogen, daß die Kreisrektifikation durch Radius und Tangente geometrisch unmöglich sei[4]). Dieser Satz war es, der Lambert zum Ausgang seines Beweises für die Irrationalität von $\pi$ im Jahre 1767 diente[5]), und den er „außerordentlich scharfsinnig und im wesentlichen einwandfrei" gestaltete[6]).

Lamberts Zeitgenossen scheinen allerdings entweder seine Arbeit nicht beachtet oder die Bedeutung des Schrittes, den er in der Erkenntnis des Charakters der Zahl $\pi$ durch diesen exakten Beweis ge-

[1]) Auf die hier mitgeteilten Reihen ist von P. Harzer: „Die exakten Wissenschaften im alten Japan", Rede gehalten zu Kiel am 27. Januar 1905, hingewiesen worden (p. 33—34). Daselbst werden auch die Quellen, aus denen Harzer geschöpft hat, genau angegeben. [2]) Harzer, a. a. O., p. 29, Anmerk. 5. Vgl. auch T. Hayashi, The values of $\pi$ by the japanese mathematicians of the 17th and 18th centuries. Bibliotheca math. 1902, p. 273—275. [3]) Mémoires de l'Acad. de Paris, 1719, p. 141. [4]) Ebenda, 1727, p. 124—125. [5]) Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. Lu en 1767. Histoire de l'Acad. de Berlin 1761 (sic!), p. 265—322, und in populärer Darstellung in den Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik II, p. 140—169. [6]) Man sehe über den Wert von Lamberts Beweis: A. Pringsheim, „Über die ersten Beweise der Irrationalität von $e$ und $\pi$"; Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. bayr. Akad. der Wissensch. 1898, XXVIII, Heft 2, p. 325—337. Hierzu sei noch bemerkt, daß Lambert in seiner Erkenntnis noch weiter ging, indem er in einem Briefe an Holland (Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel, herausgegeben von J. Bernoulli, I, p. 254) sagt: „Die Art, wie ich dies bewiesen habe, läßt sich so weit ausdehnen, daß zirkuläre und logarithmische Größen nicht Wurzeln von rationalen Gleichungen sein können".

tan hatte, nicht erkannt zu haben, sonst hätte nicht selbst Euler noch 1771 seine ziemlich unfruchtbaren Spekulationen über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises, die er bereits in der Introductio[1]) an die Lösung transzendenter Gleichungen, wie $s = \cos s$, $s = \sin 2s$ usw. angeknüpft hatte, wiederholen können[2]). Der ganze Charakter von Lamberts auf absolute Exaktheit zielender Beweisführung steht eben so ganz außerhalb der fast nur auf formale Erweiterung der Mathematik hinzielenden Tätigkeit seiner Zeitgenossen, daß eine Nichtbeachtung derselben wohl verstanden werden kann.

Haben wir uns mit der Besprechung der Methoden zur Berechnung der Zahl $\pi$ bereits einen Übergriff in das Gebiet der Analysis erlaubt, so müssen wir auch noch in kurzem der übrigen Errungenschaften auf diesem Gebiete gedenken, die mit den trigonometrischen Funktionen in Zusammenhang stehen. Wir erinnern uns (III², S. 716 bis 717), daß Euler schon in der Introductio 1748 und noch früher (1743)[3]) die Summe einer endlichen Zahl von Sinus oder Kosinus, deren Argumente in arithmetischer Progression fortschreiten, auf nicht einwandsfreie Weise gewann, indem er sich divergenter unendlicher Reihen bediente. Die einfachen und stichhaltigen Ableitungen, deren wir uns heute noch bedienen, haben erst Klügel[4]), Cagnoli[5]) und später wieder Francesco Pezzi[6]) († 1813), Ingenieur und Professor der Mathematik an der Universität Genua, gegeben, und Cagnoli hat auch noch die Summen der $n^{\text{ten}}$ Potenzen der Sinus und Kosinus solcher Winkel berechnet, nachdem schon 1748 Gregorio Fontana (1735—1803), der Nachfolger Boscovichs an der Universität Pavia war, eine Ableitung dieser Summen mit Hilfe des Imaginären mitgeteilt hatte[7]). Aber auch diese Gelehrten glaubten noch alle die Reihen ohne Rücksicht auf Konvergenz oder Divergenz ins Unendliche fortsetzen zu dürfen.

Auch für die längst bekannten Formeln, welche den Sinus und den Kosinus ganzzahliger Vielfachen eines Winkels durch die Potenzen der Sinus und Kosinus oder einer dieser Funktionen allein ausdrücken, haben Klügel[8]), Cagnoli[9]) und andere neue Ableitungen gegeben,

[1]) B, II, Kap. 22. [2]) Considerationes cyclometricae. Novi Commentarii Acad. Petrop. XVI, p. 160 ff. [3]) Miscellanea Berolinensia VII, p. 129. [4]) Analytische Trigonometrie 1770, p. 39—43. [5]) Trigonometria, 2. Aufl., p. 117—118. [6]) Memorie della Società Italiana XI, 1803, p. 21 ff. [7]) Ebenda, II, 1784, p. 424 ff. [8]) Analytische Trigonometrie 1770, p. 46—65. [9]) Cose trigonometriche, Memorie della Società Italiana VII, 1794 und Trigonometria, p. 104—108, woselbst übrigens wieder kritiklos unendliche Reihen benutzt werden. In demselben Kapitel IX werden auch die umgekehrten Formeln für $\sin x^n$ und $\cos x^n$ mittels des Imaginären abgeleitet.



von denen die des Irländers John Brinkley (1797)[1]) die vollständigste ist, da derselbe das Koeffizientengesetz mittels des Schlusses von $n$ auf $n + 1$ bewies.

Für ein ganzzahliges gerades oder ungerades $n$ liefern diese Entwicklungen bekanntlich direkt die Teilungsgleichungen der trigonometrischen Funktionen. Nun wußte man schon seit Wallis, daß im ersteren Falle $2n$, im letzteren $n$ Wurzeln vorhanden sind, auch hatten bereits Euler 1748 (vgl. III², S. 716) und noch viel eingehender Kästner 1756[2]) Untersuchungen über Zeichen und Gruppierung dieser Wurzeln angestellt, dennoch glaubte D'Alembert 1768 noch einmal auf diese Fragen zurückkommen zu müssen[3]) und Klügel, Karsten und andere folgten ihm nach. Der erstere der beiden zuletztgenannten Männer schloß an seine Überlegungen auch die Produktdarstellung von $\sin nz$ und $\cos nz$ für ein ganzzahliges $n$ an und fügte[4]) noch eine stichhaltige Ableitung des Satzes von Cotes bei, die als eine Erweiterung und Vereinfachung des schon von Johann Bernoulli mitgeteilten Beweises[5]) angesehen werden muß.

Was die Ableitung der Potenzreihen für $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ anlangt, so wurde gewöhnlich die uns schon aus III², S. 708 bekannte Methode Eulers angewendet, oder man bestimmte in der mit unbestimmten Koeffizienten angenommenen Reihenform die Koeffizienten mit Differentialrechnung; L'Huilier[6]), der so elementar als möglich verfahren wollte, verwendet hierzu die Differenzenrechnung. Eine elementare Ableitung gab auch 1798[7]) Jakob de Gelder (1765—1848), Professor in Leyden. In umfassendster Weise aber hat den analytischen Teil der Trigonometrie Pietro Ferroni mit Hilfe des Infinitesimal-

[1]) Transactions of the R. Irish Academy VII, 1800, p. 27 ff. Brinkley erwähnt hier, daß Waring in seinen Curvarum algebraicarum proprietates, 1772, Theor. 26 für ein ungerades $n$ mit seinem Satze über die Potenzsummen zuerst einen exakten Beweis gegeben habe, daß diese Methode aber für ein gerades $n$ versage. [2]) Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulares definientibus, Dissertatio 1756, Altdorfii 1771. Über die algebraische Auflösbarkeit der einen speziellen Fall bildenden Kreisteilungsgleichungen sah man damals noch sehr unklar; so sagt Mosdorff, Acta Erud. 1751, man werde wohl kaum jemals dazu kommen, zu untersuchen, wann sich diese Gleichungen algebraisch lösen lassen, und Klügel betont ebenfalls a. a. O., p. 66, daß die trigonometrischen Tafeln die Auflösung der Teilungsgleichungen geben, welche die Algebra bis jetzt nicht allgemein geben kann. [3]) Opuscules V, p. 222—227. [4]) Analytische Trigonometrie, Kap. 4, Nr. XXXI. [5]) Opera IV, p. 67. [6]) P. T. 1796, p. 142 und Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingae 1795, 4°, Kap. 3. [7]) Over de reeksen, dienende om de rapporten van de cirkelbogen tot derzelver sinussen etc. zoonder behulp der differentiaal- och integraal-rekening afteleiden. Verhandelingen van het Genotschap te Rotterdam XII, 1798.

kalküls in seinem großen Werke „Magnitudinum exponentialium logarithmorum et trigonometriae sublimis theoria nova methodo pertracta". Florenz 1782, 4°,[1]) behandelt. Der Autor hat gehalten, was er im Titel seines Werkes versprochen, indem er eine vollständige Theorie der Exponential- und trigonometrischen Größen entwickelte, wobei er die entsprechenden Formeln für Kreis- und Hyperbelfunktionen stets nebeneinander stellte.

Die Reihendarstellungen der ersteren erhielt er von der Reihe für $z^{iv}$ ausgehend, wo er zunächst dem $z$ einen ganz beliebigen Wert erteilte und dann $z = e$ oder $= C$ setzte, wie er die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnete. Dadurch erhielt er die seit Euler bekannten Darstellungen des Sinus und Kosinus durch die Exponentialfunktion und die Fundamentalformel $e^{xi} = \cos x + i \sin x$, die ihn für $\sin x = v$, $\cos x = \sqrt{1 - v^2}$ zur Gleichung

$$xi = \log(iv + \sqrt{1 - v^2})$$

führte. Indem er dann für die Wurzel die binomische Reihe einführte und den Logarithmus durch die bekannte Reihenentwicklung ersetzte, gewann er auch die Reihe für $\arcsin v$. Bei Ableitung dieser Reihe, deren Koeffizientengesetz übrigens nicht bewiesen wird, findet sich auch der Versuch, die Konvergenz mittels des Quotienten zweier aufeinander folgender allgemeiner Glieder zu bestimmen, ein Beweis dafür, daß am Ende des 18. Jahrhunderts die Erkenntnis der Notwendigkeit, die Bahn rein formaler Entwicklungen zu verlassen, sich allmählich einstellte.

[1]) Kap. 5—8.

ABSCHNITT XXIV

# ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENE UND DES RAUMES

VON

V. KOMMERELL