Kombinatorik.

In den früheren Bänden dieser Vorlesungen wurde gezeigt, daß die Begründung der wissenschaftlichen Kombinatorik sowie die der kombinatorischen Analysis für Leibniz in Anspruch genommen werden muß, der seiner philosophischen Anlage gemäß die hohe Bedeutung und die vielversprechende Zukunft dieser im Werden begriffenen mathematischen Disziplinen, wenn auch nicht scharf erkannte, so doch mit dem sicheren Takte des Genies ahnte. Es wurden dann die Fortschritte dargelegt, die dieser neue Zweig der Wissenschaft den Arbeiten der Bernoullis, eines Moivre, eines Euler verdankt. Nach diesen Ergebnissen kommen wir zu einer merkwürdigen Epoche, zu der der sogenannten kombinatorischen Schule. Die ausgesprochene Absicht der sie begründenden und fördernden Männer war, neben die gewöhnlichen Operationen der Arithmetik, Algebra und Analysis die kombinatorischen Operationen als gleichberechtigt und gleichwertig zu stellen und für sie das Bürgerrecht zu erwerben. Durch diese Erweiterung der Hilfsmittel sollte sich, wie sie meinten, die Darstellung vereinfachen und das Forschungsgebiet vergrößern. Diese Schule faßte trotz ihrer großen Ziele und Absichten nur in Deutschland Boden und trug auch hier nur bescheidene Früchte; von großen Forschern im mathematischen Bereiche gehörte ihr keiner an. Das erklärt sich wohl daraus, daß sie ganz in Formeln und in Formalismus aufging. Zwar beherrschte sie eine Zeitlang den deutschen Markt; aber das meiste von dem, was sie brachte, sank bald in eine, nicht immer ganz gerechte Vergessenheit[1]).

Der Begründer der kombinatorischen Schule war Karl Fried-

---

[1]) In seinem, von Napoléon I. veranlaßten „Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789“ (Paris 1810) sagt J. B. Joseph Delambre: Die kombinatorische Analysis beschäftigt noch immer die deutschen Mathematiker; aber in Frankreich hat sie keine Gunst erringen können, weil ihr Gebrauch zu beschränkt ist, und besonders weil sie auf die Zweige der Wissenschaft nicht anwendbar erscheint, deren Förderung uns vorzüglich am Herzen liegt.

rich Hindenburg, Sohn eines Kaufmanns in Dresden, am 13. Juli 1739 daselbst geboren. Nachdem er das Gymnasium zu Freiberg in Sachsen absolviert hatte, studierte er in Leipzig Medizin, Physik und Mathematik und kam dann durch Gellerts Vermittlung als Erzieher in das Haus eines Herrn von Schönberg, in dessen Sohne sich schon früh ausgesprochene mathematische Talente zeigten. Ihn begleitete Hindenburg auf die Universität Leipzig, wo er sich von da ab, ebenso wie später in Göttingen, mehr und mehr mit mathematischen Studien beschäftigte. Dort, in Göttingen schloß sich Hindenburg hauptsächlich an Abraham Gotthelf Kästner an. Im Jahre 1771 habilitierte er sich in Leipzig, ward dort 1781 außerordentlicher Professor der Philosophie, 1786 ordentlicher Professor der Physik und starb am Orte seiner Wirksamkeit am 17. März 1808. In der ersten Zeit nach seiner Ernennung zum Professor der Physik widmete er sich eingehend dieser Wissenschaft. Eine Arbeit über Wasserpumpen stammt aus dieser Periode. Seinen ersten mathematischen Untersuchungen entstammt ein im Jahre 1776 verfaßtes Büchlein: „Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden". Sie kommt im wesentlichen auf die Darlegung der Idee hinaus, durch mechanische Mittel (Abzählen oder Anlegen eines Winkelmaßes) das bekannte Schema des „Siebes des Eratosthenes", mittels dessen die Folge der Primzahlen hergestellt wird, zur Ablesung der Glieder arithmetischer Reihen zu benutzen. Hindenburgs Vorliebe für Superlative in der Abschätzung der eigenen Verdienste kommt schon hier unverhüllt zum Ausdruck. Von diesen „Hindenburgschen Zahlenbogen" ist mehrfach in Lamberts deutschem gelehrten Briefwechsel (herausgeg. von Joh. Bernoulli, Berlin 1785) die Rede, da ein österreichischer Mathematiker, Anton Felkel, der eine ähnliche Erfindung gemacht und bei der Berechnung von Faktorentafeln benutzt hatte, sie Lambert vorlegte. Zu seinen ersten kombinatorischen Arbeiten kam Hindenburg 1778; sie beziehen sich auf den polynomischen Satz, oder wie die damalige Ausdrucksweise lautete, auf die Potenzierung des Infinitinoms.

Wir müssen hier eine kleine Einschiebung machen.

Die Potenzierung des Binoms und die Beweise der binomischen Formel wurden früher bereits eingehend besprochen. Aber für unsere Zeitperiode kommen auch noch Beweise in Betracht; von ihnen seien diejenigen kombinatorischer Natur hier erwähnt.

Fr. Ulr. Theod. Aepinus, 1724 zu Rostock geboren, zuerst Privatdozent zu Rostock, dann 1755—1757 Professor der Astronomie in Berlin und später in Petersburg, zuletzt in Dorpat privatisierend,

wo er 1802 starb, beweist den binomischen Satz auf Grund folgender Beziehungen[1]): Ist

$$(1+x)^n = a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n x^3 + e_n x^4 + \cdots,$$

so hat man, wie gezeigt wird, für die Koeffizienten die Relationen

$$c_n = \frac{b_n \cdot b_{n-1}}{1 \cdot 2}, \quad d_n = \frac{b_n \cdot b_{n-1} \cdot b_{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad e_n = \frac{b_n \cdot b_{n-1} \cdot b_{n-2} \cdot b_{n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \ \cdots;$$

und daraus folgen die Werte der Binomialkoeffizienten nach Bestimmung von b_n, wo für $b_{r+s} = b_r + b_s = (r+s) b_1 = (r+s)$ gilt.

Jan Hendrik van Swinden, 1746 im Haag geboren, zuerst Professor der Physik, dann zu Amsterdam auch Professor der Mathematik, nahm 1798 an der Beratung über die Einführung des metrischen Maß- und Gewichtssystems teil; starb 1823 zu Amsterdam. Er benutzt zum Beweise der binomischen Formel die Relationen[2])

$$a_{n-1} = a_n, \quad b_{n-1} = b_n - a_n, \quad c_{n-1} = c_n - b_n + a_n,$$
$$d_{n-1} = d_n - c_n + b_n - a_n, \ldots$$

Auch Euler beschäftigte sich mehrfach mit der Frage nach dem Gültigkeitsbereiche der Newtonschen Binomialformel. Zunächst im Jahre 1774[3]).

Hier geht er von der interessanten Bemerkung aus, daß eine Gleichung, in der ein Parameter n vorkommt, wohl für alle positiven Werte von n richtig, für die übrigen aber falsch sein könne, so daß also die Richtigkeit der binomischen Formel für ganzzahlige positive Exponenten noch keine weiteren Schlüsse auf ausgedehntere Gültigkeit erlaubt. Als Beispiel gibt er die Gleichung

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \cdots,$$

die er für ganzzahlige positive n beweist, aber für andere Werte von n als unrichtig erkennt[4]). Aus diesem Beispiele erhellt, daß die für

[1]) Nov. Comment. Petrop. 1760, 1761, VIII, p. 169—180. [2]) Verhandl. Maatsch. Haarlem 1770, XII, p. 334—358. [3]) Nov. Comment. Petrop. 1774, XIX, p. 103—111. [4]) Hiermit im Zusammenhange steht folgende Stelle eines Briefes von Euler an Daniel Bernoulli vom 16. Februar 1734 aus Petersburg datiert (Bibliotheca mathematica, dritte Folge, VII, p. 136; 1906): „Ich vermeinte neulich, daß nachfolgende Series

$$\frac{m-1}{9} - \frac{(m-1)(m-10)}{990} + \frac{(m-1)(m-10)(m-100)}{999000}$$
$$- \frac{(m-1)(m-10)(m-100)(m-1000)}{9999000000} + \text{etc.}$$

(alwo (!) die Anzahl der Nullen im Numeratore und Denominatore einander ganze positive Exponenten n kombinatorisch sofort beweisbare Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} + x\,\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + \cdots$$

noch nicht die Gültigkeit für beliebige Exponenten n verbürgt. Nun setzt Euler

$$1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots = [n];$$

dann gilt also für positive ganze n die Gleichung $[n] = (1+x)^n$. Kombinatorisch wird nun gezeigt, daß $[n]\cdot[m] = [n+m]$ sei, und daraus ergibt sich $[an] = [n]^a$ für alle beliebigen Werte von n und alle ganzen positiven Werte a. Ist nun $\left[\frac{p}{q}\right]$ vorgelegt, wo p und q ganz und positiv sind, so findet man $\left[q\cdot\frac{p}{q}\right] = \left[\frac{p}{q}\right]^q = [p] = (1+x)^p$ und also $\left[\frac{p}{q}\right] = (1+x)^{\frac{p}{q}}$. Ähnlich wird der Beweis für negative Exponenten geliefert.

In der zweiten, auf den binomischen Satz bezüglichen Arbeit, die dreizehn Jahre später erschienen ist[1]), setzt Euler voraus, daß bei beliebigem Exponenten n Entwicklungen der Form

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots,$$
$$(1+x)^{n+1} = 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 + \cdots$$

möglich seien, und daß für $n = 0$ alle Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ verschwinden. Dann leitet er die Rekursionsformeln

$$A' - A = 1,\quad B' - B = A,\quad C' - C = B, \ldots,\quad N' - N = M, \ldots$$

ab. Setzt man $N = \alpha n$, also $N' = \alpha(n+1)$, so wird $M = \alpha$. Umgekehrt folgt aus $M = \alpha$ durch Integration der Funktionalgleichung $N = \alpha n + c$, wo c eine Konstante ist; da für $n = 0$, $N = 0$ sein muß, so ist $N = \alpha n$ die für diesen Fall allgemeine Lösung. Ebenso: ist $N = \alpha n(n-1)$, also $N' = \alpha n(n+1)n$, so ist $M = 2\alpha n$, und umgekehrt folgt aus $M = \alpha n$ allgemein $N = \frac{1}{2}\alpha n(n-1)$ usf. Auf diese Weise wird das Gesetz der Koeffizienten festgelegt; da der Anfangskoeffizient $= 1$ ist, so folgt die Newtonsche Form.

Auch einer hierher gehörigen Arbeit von Joh. Andr. v. Segner

gleich sind, im Übrigen ist die Lex klar) den Logarithmum communem ipsius m exprimere, dann ist $m = 1$, so ist die gantze Series $= 0$, ist $m = 10$, so kommt 1, ist $m = 100$, kommt 2, und so fortan. Als ich nun daraus den Log. 9 finden wollte, bekam ich eine Zahl, welche weit zu klein war, ohngeacht diese Series sehr stark convergirte."

[1]) Nov. Act. Petrop. V, 1887, p. 52.

sei gedacht[1]), in der die Binomialform ohne Berücksichtigung der Konvergenzfrage allgemein bewiesen werden soll. Segner setzt

$$1 + \binom{n}{1}e + \binom{n}{2}e^2 + \binom{n}{3}e^3 + \cdots = S_n,$$

wo n eine ganz beliebige Größe bedeutet, beweist kombinatorisch die Gleichung $S_r \cdot S_m = S_{m+r}$, darauf direkt $S_1 = 1 + e$ und dann der Reihe nach $S_n = (1+e)^n$ für ganze positive, für gebrochene positive, für negative und endlich als Grenzfall für irrationale Zahlen. Von e sagt Segner, er werde „im allgemeinen" kleiner als 1 angenommen. Man erkennt leicht die Ähnlichkeit seiner Schlüsse mit denen des ersten Eulerschen Beweises.

Wir kehren von dieser Einschaltung zu unserem eigentlichen Thema zurück.

Die Aufgabe der Potenzierung des Infinitinoms[2]) fordert die Bestimmung des allgemeinen Gliedes in der Entwicklung einer der Formen

$$(a + b + c + d + \cdots)^m \quad \text{und} \quad (1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots)^m,$$

deren zweite nach Potenzen von z geordnet zu denken ist. Über die Behandlung dieser Probleme durch A. de Moivre, Leibniz, Jak. Bernoulli wurde früher bereits berichtet. Die erste darauf bezügliche Untersuchung Hindenburgs bezieht sich auf die erste dieser Formen, die zweite Untersuchung auf die letzte, und die dritte Veröffentlichung ist im wesentlichen nur ein Abdruck der beiden ersten nebst einigen Erweiterungen und einer voraufgeschickten, sehr ausführlichen Geschichte des Problems[3]). Wir gehen etwas näher auf die Besprechung dieser drei Arbeiten ein.

Durch die Benutzung der Permutationen oder der Kombinationen hatte man den Ausdruck für die Polynomialkoeffizienten in

$$(a + b + c + \cdots)^m$$

für jedes Aggregat $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ ohne weiteres aufschreiben können. Aber diese Methode hatte den nicht zu unterschätzenden Nachteil im Gefolge, daß die Gültigkeit der Formel sich auf ganze positive Exponenten beschränkte. Um diesem Mangel abzuhelfen, hatte eben

[1]) Nouv. Mém. de Berlin 1777, p. 37. [2]) Dieser Ausdruck stammt nach Pfaff, „Bemerkungen über eine besondere Art von Gleichungen" (Der polynomische Lehrsatz, p. 150 Anm.) von Ernst Gottfried Fischer. [3]) I. Infinitinomii dignitatum indeterminarum leges ac formulae. Gotting. 1778. II. Methodus nova et facilis serierum infinitarum exhibendi dignitates exponentis indeterminati. Gotting. 1778. III. Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati historia, leges ac formulae, editio pluribus locis aucta et passim emendata. Gotting. 1779.

jener junge Mann, dessen wissenschaftliche Ausbildung Hindenburg leitete, Karl Friedrich von Schönberg, den Versuch gemacht, das Polynomialtheorem aus dem Binomialtheorem herzuleiten, um jenem den gleichen Gültigkeitsbereich zu geben, wie diesem, nämlich den für gebrochene und für negative Exponenten; weiter gingen kaum weder für das eine noch für das andere Problem die Bestrebungen jener Zeit. Hindenburg folgte seinem Schüler in seiner ersten Arbeit auf diesem Wege, aber ohne Neues oder Besseres zu bieten.

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich mit der Form

$$(1 + \alpha z + \beta z^2 + \cdots)^m.$$

In ihr bringt Hindenburg die Anfänge seiner komplizierten Bezeichnungsweise, die er von nun an weiter entwickelt und im Jahre 1796 abschließend einheitlich vorträgt[1]). Wir wollen zunächst auf diese Bezeichnungsart näher eingehen.

Bei Hindenburg bedeuten die Symbole

$$^m\mathfrak{A},\ ^m\mathfrak{B},\ ^m\mathfrak{C},\ ^m\mathfrak{D},\ \ldots$$

oder in der ersten Zeit auch nur

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \ldots$$

die einzelnen Binomialkoeffizienten erster, zweiter, dritter, vierter, ... Ordnung von m Elementen, nämlich

$$^m\mathfrak{A} = \frac{m}{1},\quad ^m\mathfrak{B} = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\quad ^m\mathfrak{C} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \ldots$$

Hindenburg behält also, wie auch noch viel später L. Euler[2]), die von Leibniz aus guten Gründen wenigstens zum Teil verlassene Methode, die alphabetische Reihenfolge der Buchstaben als Anordnungs- und

[1]) „Höchst wichtiger Einfluß der Combinationslehre auf die Analysis." VI. Abhandlung mit dem vollständigen 12 Zeilen langen Titel in dem Sammelwerke: „Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis". Herausgegeben von C. F. Hindenburg, Leipzig 1796.

[2]) Euler benutzt zur Bezeichnung der Binomialkoeffizienten $\left(\frac{m}{\varrho}\right)$ und $\left[\frac{m}{\varrho}\right]$. Das erste im Jahre 1778; die Abhandlung erschien erst 1806 in den Nov. Act. Acad. Petrop. XV, 1806, p. 33; das zweite im Jahre 1781, Act. Acad. Petrop. V (1784), pars prior, p. 84. Die jetzt gebräuchliche Bezeichnung $\binom{m}{\varrho}$ stammt von Andreas von Ettingshausen (1796—1878), Vorlesungen über höhere Mathematik, Bd. I, S. 38 (Wien 1827).

Abzählungsprinzip zu verwenden, hier und später, trotz ihrer Unübersichtlichkeit und Unbequemlichkeit noch bei. Ähnlich bezeichnet er generell die Polynomialkoeffizienten durch

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e},\ \ldots;$$

die Buchstaben haben hier, je nach den Potenzprodukten, mit denen sie verbunden sind, verschiedene zahlenmäßige bei gleicher begrifflicher Bedeutung. So ist z. B.

$$\mathfrak{d}(x^4 + x^3y + xy^2z + xyzu + \cdots) = \frac{4!}{4!}x^4 + \frac{4!}{3!\,1!}x^3y + \frac{4!}{1!\,2!\,1!}xy^2z + \frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!}xyzu + \cdots,$$

$$\mathfrak{e}(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^3yz + x^2y^2z + \cdots) = \frac{5!}{5!}x^5 + \frac{5!}{4!\,1!}x^4y + \frac{5!}{3!\,2!}x^3y^2 + \frac{5!}{3!\,1!\,1!}x^3yz + \frac{5!}{2!\,2!\,1!}x^2y^2z + \cdots$$

Man sieht, daß ein Symbol wie $\mathfrak{h}$ allerlei bedeuten kann, indem z. B.

$$\mathfrak{h}x^2y^6 = {}^8\mathfrak{B}x^2y^6,\quad \mathfrak{h}x^3y^5 = {}^8\mathfrak{C}x^3y^5,\quad \mathfrak{h}x^4y^4 = {}^8\mathfrak{D}x^4y^4,\ \ldots$$

wird, so daß also eine deutliche Inkongruenz zwischen der Bezeichnung bei den Binomial- und der bei den Polynomialkoeffizienten zutage tritt.

Die Bezeichnung der verschiedenen Klassen bei Kombinationen und Variationen geschieht in ähnlicher Weise. Dabei unterscheidet Hindenburg die Kombinationen und Variationen „an sich", d. h. ihre Gesamtheit, und die „zu bestimmter Summe" der als Zahlen genommenen Elemente. Zugleich ist zu bemerken, daß es sich dabei nicht um bloße Anzahlbestimmungen handelt, sondern daß die bezeichnenden Symbole die Aufstellung aller geforderten Komplexionen selbst andeuten sollen. Darin beruht eine Ergänzung früherer Untersuchungen der Bernoullis und Eulers, die den Kombinatorikern besonders wichtig erschien.

Bei Hindenburg bedeuten

'A, 'B, 'C, 'D, ... Kombinationen erster, zweiter, dritter, ... Klasse ohne Wiederholungen,

A', B', C', D', ... Kombinationen erster, zweiter, dritter, ... Klasse mit Wiederholungen,

$'A,\ 'B,\ 'C,\ 'D$, ... Variationen erster, zweiter, dritter, ... Klasse ohne Wiederholungen,

$A',\ B',\ C',\ D'$, ... Variationen erster, zweiter, dritter, ... Klasse mit Wiederholungen.

Es ist also zu setzen

$$
\begin{aligned}
{}'\mathrm{B} &= ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,\ \ldots,\\
\mathrm{B}' &= aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ bb,\ bc,\ \ldots,\\
{}'B &= ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ ad,\ da,\ \ldots,\\
B' &= aa,\ ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ bb,\ \ldots.
\end{aligned}
$$

Die zugehörigen Anzahlen der Komplexionen werden durch ein vorgesetztes $n\int$ = numerus specierum = Anzahl der Komplexionen bezeichnet; das k^{te} Glied der gut geordneten Komplexionen durch nachgesetztes k. So ist bei vier Elementen a, b, c, d

$$
{}'\mathrm{B}4 = bc,\quad \mathrm{B}'4 = ad,\quad {}'B5 = ad,\quad {}'B1 = aa.
$$

Handelt es sich um Kombinationen oder Variationen zu bestimmter Summe m, so wird ${}^{m}\mathrm{A}, {}^{m}\mathrm{B}, \ldots, {}^{m}A, {}^{m}B, \ldots$ geschrieben. Die Elemente sind dabei als Zahlen gedacht, etwa als die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$ Dabei wird z. B.

$$
\begin{aligned}
{}^{7}\mathrm{C} &= 115,\ 124,\ 133,\ 223;\\
{}^{7}C &= 115,\ 124,\ 133,\ 142,\ 151,\ 214,\ 223,\ 232,\\
&\quad 241,\ 313,\ 322,\ 331,\ 412,\ 421,\ 511.
\end{aligned}
$$

Wenn es notwendig wird, die Zahlen durch Buchstaben zu ersetzen, dann wird diese Art der Substitution durch einen Zeiger oder einen Index angegeben. Also bedeutet ${}^{7}\mathrm{C}$ unter Verwendung des Index

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}
$$

die Kombinationen

$$
aae,\ abd,\ acc,\ bbc;
$$

und $\overset{pqr}{{}^{7}C}$ bedeutet bei den drei Indizes

$$
p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix},\quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{pmatrix},\quad r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} & \mathfrak{e} \end{pmatrix}
$$

den Komplex der Kombinationen

$$
a\alpha\mathfrak{e},\ a\beta\mathfrak{d},\ a\gamma\mathfrak{c},\ b\beta\mathfrak{c}.
$$

Hindenburg bezeichnet ferner gegebene Glieder und Koeffizienten (dati) durch gewöhnliche Buchstaben,

$$
\begin{gathered}
A + B + C + \cdots = p,\quad a + b + c + \cdots = q,\\
\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots = r,
\end{gathered}
$$

und angenommene, als unbekannt angesehene (ficti) durch Buchstaben mit darüber gesetzten Punkten[1]). Endlich werden noch

[1]) Nach Leibniz: „coefficientes ficti, qui assumuntur tamquam dati". Gegen diese Bezeichnung wendet sich Klügel (Der polynomische Lehrsatz usw. herausg. von Hindenburg; Leipzig 1796, p. 61): „nicht coefficientes ficti,

Lokalausdrücke oder Lokalzeichen eingeführt; sie werden als Abkürzung des Anfangsbuchstabens von „terminus" mit t oder $\daleth$ bezeichnet, in der Weise, daß

$$
p\daleth n = ptn,\ pq\daleth n,\ q^3\daleth n
$$

bzw. den n^{ten} Term der Reihe p, des Produktes pq, der dritten Potenz von q bedeutet. — Ferner bedeutet $\varkappa$ den Koeffizienten, also $p\varkappa n$ den n^{ten} Koeffizienten der Reihe p; so für $p = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \cdots$

$$
p\varkappa 2 = \beta,\quad p\varkappa 3 = \gamma,\quad p^3\varkappa 1 = \alpha^3,\ \ldots
$$

Hindenburgs wissenschaftliche Bestrebungen gingen vor allem auf die Benutzung der kombinatorischen Komplexe aus, und deshalb stellte er auch, als Erster, einfache Regeln für die Bildung von Permutationen, von Kombinations-[1]) und von Variationsklassen auf, um bei der Herstellung von Tafeln die Möglichkeit von Auslassungen oder von Wiederholungen auszuschließen. Weitere Beschäftigung mit diesem für ihn grundlegenden Problem führte ihn 1794 zu seinen kombinatorischen Involutionen und Evolutionen[2]), d. h. zu demjenigen Verfahren bei der Herstellung von Tabellen, nach dem aus den niedergeschriebenen kombinatorischen Komplexionen für n Elemente durch Hinzufügung nach einfachen Regeln die Komplexionen

	c	b	a	
4	3	2	1	a
4	3	1	2	b
4	2	3	1	
4	2	1	3	
4	1	3	2	
4	1	2	3	c
3	4	2	1	
3	4	1	2	
3	2	4	1	
3	2	1	4	
3	1	4	2	
3	1	2	4	
.	.	.	.	.

für $(n + 1)$ Elemente gefunden werden können, und umgekehrt durch einfaches Abstreichen jene aus diesen.

sondern incogniti oder assunti. Die unbekannte Größe in einer Gleichung ist keine erdichtete Größe".

[1]) Während man früher Kombinationen, Konternationen, ... (Con 2 ationen, Con 3 nationen, ...) unterschied, nimmt durch Hindenburg der Ausdruck „Kombination" die umfassende, jetzt übliche Bedeutung an und verdrängt das bis dahin gebräuchliche „Complexion". [2]) „Über combinatorische Involutionen und Evolutionen", Archiv f. reine u. angew. Math., herausgeg. von Hindenburg (1794), Bd. I, p. 13—46.

Bei den Permutationen stellt sich der involutorische Aufbau so dar, wie die vorstehende Probe zeigt. Im kleinsten Winkelhaken, rechts oben, steht 1. Davor wird dann 2 geschrieben und darunter die Vertauschung 2, 1. Die erlangten beiden Permutationen der Elemente 1, 2 werden in den Winkelhaken *bb* eingeschlossen. Vor jede Permutation innerhalb *bb* wird das neue Element 3 geschrieben, darunter ein zweiter Komplex von ebensovielen Zeilen, die aus dem ersten Komplexe durch Vertauschung von 2 und 3 entstehen; darunter ein dritter Komplex, der aus dem zweiten durch Vertauschung von 1 und 2 entsteht. So hat man alle Permutationen von 1, 2, 3 erlangt; sie werden in den Winkelhaken *cc* eingeschlossen. Weiter wird allen Permutationen aus *cc* das neue Element 4 vorgesetzt. Darunter schreibt man einen zweiten Komplex, der aus dem ersten durch Vertauschung von 3, 4 entsteht; darunter einen dritten, der aus dem zweiten durch Vertauschung von 2, 3 entsteht, und darunter endlich einen letzten vierten, der aus dem dritten durch Vertauschung von 1, 2 entsteht. So hat man die Gesamtheit der Permutationen aus den vier Elementen 1, 2, 3, 4 usf.

Als zweites Beispiel geben wir die Herstellung der Tabelle der Kombinationen (nicht „an sich", sondern) mit den „Lokalsummen" 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, gebildet aus den natürlichen Zahlen. In dem innersten Winkelhaken, oben rechts, steht die 1, als einzig mögliche Zerlegung der Summe 1. In die Spalte vorher, links, wird 1, 2 untereinander gesetzt; diese beiden Zerleguugen der 2 werden in den Winkelhaken *bb* eingeschlossen. Um das allgemeine Fortschrittsgesetz der involutorischen Bildung zu zeigen, denken wir uns den Winkel-

g	*f*	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*	
1	1	1	1	1	1	1	*a*
1	1	1	1	1	2		*b*
1	1	1	1	3			*c*
1	1	1	2	2			
1	1	1	4				*d*
1	1	2	3				
1	1	5					*e*
1	2	2	2				
1	2	4					
1	3	3					
1	6						*f*
2	2						
2	5						
3	4						
7							*g*

haken *ee* bereits ausgefüllt und zeigen nun die Herstellung von *ff*. Dabei enthält *ee* alle Zerlegungen von 5. Vor jede dieser Zerlegungen

in *ee* schreiben wir 1; darunter sovielmal 2, als Zerlegungen in *d* (von 4) mit 2 oder einem höheren Elemente beginnen und hinter die Zweien die erwähnten Zerlegungen der 4 selbst. In die neue Spalte schreiben wir unter die Zweien die 3 so oft, als Zerlegungen in *c* (von 3) mit 3 oder einer höheren Zahl vorkommen und hinter die Dreien diese Zerlegungen selbst usf. Das Gesetz ist leicht kenntlich.

In ähnlicher Weise werden die Variationen behandelt.

Die Auffindung solcher involutorischen Anordnungen schien Hindenburg ein ganz besonderer Ruhmestitel zu sein. Das klingt recht naiv aus seinem Aufsatze heraus: „Mehrere große Mathematiker sind der Erfindung der combinatorischen Involutionen ganz nahe gewesen"; Archiv f. reine u. angew. Mathematik I (1795), p. 319—331. Euler, Lambert, Daniel Bernoulli werden dabei mit einer gewissen herablassenden Anerkennung erwähnt, sie seien der Lösung schon hübsch nahe gekommen.

In dem Aufsatze „Die Kombinationslehre ist eine selbständige Wissenschaft usw." (12 Zeilen)[1]) führt Hindenburg besondere Bezeichnungen für involutorisch geordnete Kombinationen und Variationen durch seltsam geschlungene Buchstabenformen ein; das übergehen wir berechtigterweise, da es keinerlei Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik gehabt hat. Dagegen weisen wir gleich hier auf eine ähnliche involutorisch angelegte Darstellung der Zähler und der Nenner von Kettenbrüchen hin, die Hindenburg gleichfalls gegeben hat[2]). Nach dem bisher Besprochenen sieht man sofort, wie man die Nenner von $1/a_1$, $1/a_1 + 1/a_2$, $1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3, \cdots$, d. h. die Ausdrücke a_1, $a_1 a_2 + 1$, $a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_1, \cdots$ aus der Buchstaben- und Zahlenanordnung in den einzelnen Winkelhaken entnimmt, und wie diese Anordnungen hergestellt werden können. Hindenburg bespricht a. a. O.

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
a_5	a_4	a_3	1	
a_5	a_4	a_1		
a_5	a_2			
a_5	1			
a_3	a_2	a_1		
a_3	a_1			
a_1				

die zugehörigen Regeln in der allerbreitesten und ausführlichsten Form. Seine Resultate preist der Erfinder mit überschwenglichen Worten.

[1]) In dem Sammelwerke: „Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis", Leipzig 1796, p. 303. [2]) Archiv f. reine u. angew. Math. Hindenburg (1794), p. 47—69; p. 154—194.

Er ist ein Mann der Superlative; er läßt keine Gelegenheit vorübergehen, ohne sich selbst und seine Involutionen in das strahlendste Licht zu setzen; er hat die unbedingteste Hochachtung vor den Ergebnissen und den Fortschritten, die ihm die Wissenschaft verdankt.

Bei der Potenzerhebung von Reihen setzt **Hindenburg**

$$q^m = (1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots)^m = (1 + y)^m$$
$$= 1 + {}^m\mathfrak{A} y + {}^m\mathfrak{B} y^2 + {}^m\mathfrak{C} y^3 + \cdots$$

und führt dadurch die Frage auf die Herstellung der Potenzen

$$y^n = (\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots)^n$$

zurück; denn q^m besitzt als Faktor der Potenz z^k das Aggregat

$${}^m\mathfrak{A} y^1 \mathsf{1} k + {}^m\mathfrak{B} y^2 \mathsf{1}(k-1) + {}^m\mathfrak{C} y^3 \mathsf{1}(k-2) + \cdots = (1+y)^m \varkappa (k+1).$$

Das ist eine sogenannte **Lokalformel**, die die Lösung vermittelt. Von ihr aus muß man zu den rein kombinatorischen Formeln übergehen; denn[1]) „das Direktorium führt die Analysis. Diese läßt ihre Verordnungen durch Lokalformeln ergehen und überläßt die Vollziehung derselben den combinatorischen. Die Analysis kann nicht deutlicher und vernehmlicher sprechen als in Lokalformeln; ihre Befehle können nicht pünktlicher und prompter vollstreckt werden, als durch combinatorische". — „Die Analysis zeigt, was zu tun sei; die Kombinatorik, wie es zu tun sei."[2])

Um von der Lokalformel zur kombinatorischen Formel zu gelangen muß

$$y^n \mathsf{1} \lambda \parallel (y = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots)$$

hergestellt werden. Bei unserer (von der **Hindenburg**schen schwerfälligen etwas abweichenden) Bezeichnung wären alle Produkte

$$\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \alpha_{i_3} \ldots \alpha_{i_n},$$

bei denen

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n = \lambda$$

ist, herzustellen. Bei **Hindenburg** tritt wegen der Schreibweise

$$y = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \cdots$$

der Zeiger oder Index

$$\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \ldots \\ 1\,2\,3\,4 \ldots \end{pmatrix}$$

in Kraft, um die Frage auf die Kombinationen n^{ter} Klasse mit der

[1]) „Höchst wichtiger Einfluß" usw. siehe oben, p. 303. [2]) „Novi systematis permutationum, combinationum et variationum . . . primae lineae", Lips. 1781, p. IV: „Analysis ostendit, quae sunt agenda; ars combinatoria, quomodo sint agenda".

Lokalsumme λ zu übersetzen. So beantwortet er denn die Frage durch das auszuführende Symbol für Kombinationen, in dem N die n^{te} Klasse generell repräsentiert,

$${}^\lambda\mathrm{N}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \ldots \\ \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \ldots \end{pmatrix}.$$

Von diesen Kombinationen kommt er durch Hinzufügung des Zeichens für Polynomialkoeffizienten zu den Variationen, und die Lösung der Aufgabe wird durch $y^n \mathsf{1} \lambda = u^\lambda \mathrm{N} z^\lambda$ vermittelt. Für die Koeffizienten von q^m gilt die Gleichung

$$q^m \varkappa (k+1) = {}^m\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}^k \mathrm{A} + {}^m\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}^k \mathrm{B} + {}^m\mathfrak{C}\,\mathfrak{c}^k \mathrm{C} + \cdots;$$

in ihr ist das Hauptresultat der **Hindenburg**schen Untersuchungen enthalten. Sie gibt also ein mechanisches Verfahren, um den Koeffizienten von z^λ in $(1 + \alpha z + \beta z^2 + \cdots)^m$ zu bestimmen.

Ist eine Summe $a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$ vorgelegt, in die für x zu substituieren ist $1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots$, so ist nach der Bestimmung von $x^2, x^3, \ldots$ die Substitution in den einzelnen Summanden vorzunehmen. Das nennt **Hindenburg** „die Methode der Potenzen". Auf sie ist er besonders stolz.

Die besprochene Verwendung der Kombinatorik bei Potenzerhebung zeigt uns, wie **Hindenburg** zu seinen Untersuchungen geführt wurde[1]). „Bisher hatte man sich in der Kombinationslehre fast nur allein um die Menge und Anzahl der Verbindungen und Versetzungen gegebener Dinge gekümmert[2]), ihre wirkliche Darstellung aber, die für die Analysis so wichtig ist, fast ganz übergangen oder nur jener Zahlen wegen in Betrachtung gezogen. Hier war also noch viel zu tun übrig; und es ist in der Tat unbegreiflich, wie ein so großes, fruchtbares Land so lange hat unbebaut liegen bleiben können."

Zur Untersuchung der Variationen führte ihn das Problem der Multiplikation von verschiedenen Reihen, wie ihn die von gleichen Reihen auf das Studium der Kombinationen geleitet hatte. Ist etwa bei

$$p = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots, \quad q = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots,$$
$$r = \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x^2 + \mathfrak{c}x^3 + \cdots$$

das Produkt pqr zu bilden und nach Potenzen von x zu entwickeln, so gilt für den Koeffizienten von x^λ der kombinatorische Ausdruck

[1]) Leipz. Magazin f. reine u. angew. Math. (1786), Heft 3, p. 323. [2]) Vgl. jedoch diese Vorlesungen, Bd. III[2], S. 342 angeführte Tabelle des Franciscus van Schooten.

$$\overset{pqr}{{}_{\lambda}C}$$

mit den Zeigern

$$p = \binom{1\,2\,3\ldots}{a\,b\,c\ldots}, \quad q = \binom{1\,2\,3\ldots}{\alpha\,\beta\,\gamma\ldots}, \quad r = \binom{1\,2\,3\ldots}{\mathrm{a\,b\,c}\ldots},$$

deren erster, zweiter, dritter die Übersetzung der ersten, zweiten, dritten Elementenzahl der Variationen dritter Klasse zur Summe λ in die entsprechenden Lettern vermittelt.

Befremdlich mag es bei den obigen Darlegungen erscheinen, daß die kombinatorische Schule den Schritt von der Verwendung von Buchstaben zu Zahlen nur so langsam und gewissermaßen widerstrebend hat tun können; daß sie die Einführung von „Zeigern" nicht durch die Benutzung von Zahlindizes überflüssig gemacht hat. Und dabei war Hindenburg bereits 1783 zu der Erkenntnis gekommen und hatte sie im § III der oben angeführten „lineae" zum Ausdruck gebracht, daß die Verwendung von Zahlen als Elemente der von Buchstaben weit überlegen sei. Allein zu der nötigen Folgerung drang er nicht vor.

In der gleichen Abhandlung „novi systematis primae lineae" wird die Reihe der Anwendungen der Kombinatorik auf die Analysis ausführlich angegeben (§ IV). Es wird angeführt: 1) Multiplikation von Reihen; 2) Division von Reihen; 3) Potenzieren und Radizieren von Reihen; 4) Substitution von Reihen in Reihen; 5) Elimination; 6) Rationalisierung irrationaler Ausdrücke; 7) Interpolation; 8) Transformation; 9) Umkehrung von Reihen; 10) Darstellung von trigonometrischen und anderen transzendenten Funktionen durch Reihen. — Alle diese Probleme, oder genauer nur ihre formale Seite, bespricht Hindenburg l. c. ausführlich und gibt am Schlusse der Abhandlung zu jedem Problem zugehörige Tabellen mit den fertigen Resultaten der einfachsten Fälle.

Als Beispiel geben wir eine Formel von J. K. Burckhardt (1773 bis 1825), einem unter v. Zach zum Astronomen ausgebildeten Gelehrten. Sie gehört zur Anwendung 10) und lautet[1])

$$\operatorname{tang} n\alpha = \frac{{}^n\mathfrak{A} \operatorname{tang}\alpha - {}^n\mathfrak{C} \operatorname{tang}^3\alpha + {}^n\mathfrak{E} \operatorname{tang}^5\alpha - \cdots}{1 - {}^n\mathfrak{B} \operatorname{tang}^2\alpha + {}^n\mathfrak{D} \operatorname{tang}^4\alpha - \cdots}.$$

Das am meisten, am eingehendsten und mit dem größten Erfolge behandelte Problem war das der (formalen) Umkehrung unendlicher Reihen „reversio serierum". Ist die Reihe

$$y^\beta = a_0 x^\alpha + a_1 x^{\alpha+\delta} + a_2 x^{\alpha+2\delta} + \cdots \equiv p$$

[1]) „Nova acta Academ. electoralis Moguntiae scientiarum utilium, quae Erfurti est". I, Erf. 1799, p. 295—316.

gegeben und wird daraus die Entwicklung

$$x^\gamma = A_0 y^{\frac{\beta\gamma}{\alpha}} + A_1 y^{\frac{\beta(\gamma+\delta)}{\alpha}} + A_2 y^{\frac{\beta(\gamma+2\delta)}{\alpha}} + \cdots$$

gesucht (wobei die oben angegebene Schreibweise über den $A_0, A_1, \ldots$ als „angenommenen" Koeffizienten eigentlich noch Punkte gefordert hätte), so erhält man rekurrierende Formeln für die $A_0, A_1, A_2, \ldots$ durch die Lokalformeln

$$A_0 p\varkappa 1 = 1, \quad A_0 p\varkappa 2 + A_1 p^2\varkappa 1 = 0,$$
$$A_0 p\varkappa 3 + A_1 p^2\varkappa 2 + A_2 p^3\varkappa 1 = 0, \ldots$$

Eine independente Formel für die Lösung des Umkehrproblems fand zuerst Eschenbach. — Hieron. Christoph Eschenbach war 1764 zu Leipzig geboren; er hatte dort unter dem Einflusse der Hindenburgschen Schule gestanden; seit 1790 als Ingenieur-Kapitän im Dienste der holländisch-ostindischen Kompagnie, wurde er weit in der Welt umhergeworfen; er starb 1797 zu Madras in Vorderindien als englischer Kriegsgefangener. In seiner 1789 zu Leipzig erschienenen „Dissertatio de serierum reversione, formulis analytico-combinatoribus exhibita" stellt er das allgemeine Glied der Entwicklung von x^γ nach Potenzen von y mit Hilfe kombinatorischer Operationen her. Seine Ergebnisse waren aber insofern unbefriedigend, als diese Formel nur durch unstrenge Induktion erlangt war und eines Beweises ermangelte; dann aber auch dadurch, „daß die Harmonie in den einzelnen Gliedern der Formel vermißt wurde, wo ungleichnamige Buchstaben mit einander verbunden sind, $\mathfrak{A}$ mit bB, und $\mathfrak{B}$ mit C, u. s. w."[1]). Dem letzten Mangel half Hindenburg ab[2]), der vollkommen symmetrisch und in der geforderten harmonischen Darstellung die allgemeinere Aufgabe löst, aus der Relation

$$ax^\lambda + bx^{\lambda+d} + cx^{\lambda+2d} + \cdots = \alpha y^\lambda + \beta y^{\lambda+\delta} + \gamma y^{\lambda+2\delta} + \cdots$$

die Darstellung einer beliebigen Potenz x^σ von x als Potenzreihe von y herzuleiten. Den ersten Mangel jedoch beseitigte erst 1793 ein Schüler Hindenburgs, Heinr. August Rothe, der, 1773 zu Dresden geboren, dort die Kreuzschule besuchte, in Leipzig Dozent und a. o. Professor war, darauf von 1800—1804 als Privatmann in Freiberg lebte, dann als o. Professor der Mathematik an der Universität zu Erlangen wirkte, 1823 in den Ruhestand trat und 1842 starb. Er führt den Beweis der Formel auf doppelte Art; einmal auf rein

[1]) H. A. Töpfer, „Combinatorische Analysis und Theorie der Dimensionszeichen in Parallele gestellt". Leipzig 1793, S. 170. [2]) Problema solutum maxima universale ad serierum recursionem formulis localibus et combinatorio-analyticis absolvendum paralipomenon. Lips. 1793.

kombinatorischem Wege durch den Schluß von n auf $(n+1)$ und einmal mit Hilfe der Differentialrechnung[1]). Rothe gibt der Eschenbachschen Formel den Ausdruck in Lokalzeichen

$$q\urcorner(n+1) = \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \varkappa(n+1) y^{\frac{\beta(\gamma+n\delta)}{\alpha}},$$

wobei

$$p \equiv y^\beta = ax^\alpha + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \cdots,$$

$$q \equiv x^\gamma = Ay^{\frac{\beta\gamma}{\alpha}} + By^{\frac{\beta(\gamma+\delta)}{\alpha}} + Cy^{\frac{\beta(\gamma+2\delta)}{\alpha}} + \cdots$$

zu setzen ist[2]). In Worten heißt dies: „das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der Reihe für x^γ ist gleich dem Produkte des $(n+1)^{\text{ten}}$ Koeffizienten der Potenz $p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}$ der Reihe für y^β in die Größe $\frac{\gamma}{\gamma+n\delta} y^{\frac{\beta(\gamma+n\delta)}{\alpha}}$."

Dieses elegante Resultat verknüpft die Umkehrung der Reihen mit dem Polynomialtheorem. Das mag wohl den mit keinem allzu weiten Blick begabten Hindenburg zu der Meinung geführt haben, es sei „der polynomische Lehrsatz das wichtigste Theorem der ganzen Analysis".

Durch die Eschenbach-Rothesche Formel wurde für die Kombinatoriker die Untersuchung und die Benutzung der Lokalzeichen in den Mittelpunkt des Interesses gerückt. Ihnen wurde nun eine ganze Reihe von Arbeiten gewidmet. Rothe selbst versucht durch Aufstellung von Lokalformeln für Produkte aus Potenzen von Reihen diese Lokalzeichen von den kombinatorischen Zeichen unabhängig zu machen[3]). Es gelang ihm, aus seiner Formel die bekannte, von Lagrange 1768 ohne Beweis gegebene für die Umkehrung von Funktionen herzuleiten, d. h. die, durch die eine willkürliche Funktion $\varphi(x)$ der durch $x = y + zf(y)$ bestimmten Variablen x in eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickelt wird[4]). Hier setzt eine Arbeit Pfaffs ein. Johann Friedrich Pfaff wurde 1765 zu Stuttgart geboren; er zeigte schon als Zögling der Karlsschule seine hervorragende Begabung für Mathematik; auf Veranlassung des Herzogs Karl studierte er in Göttingen, ging 1787 als Astronom zu Bode nach Berlin, von da bald darauf nach Wien und ward 1788 als Professor der Mathematik nach Helmstädt berufen. Von der westfälischen Regierung wurde er 1800 als Professor nach Halle a. S.

[1]) Formulae de serierum reversione, demonstratio etc., Lips. 1793.
[2]) Oder (nach Rothescher Bezeichnung), wobei die beiden Skalen gelten

$$p(a, b, c, \ldots) \quad \text{und} \quad q(A, B, C, \ldots).$$

[3]) Archiv f. reine u. angew. Mathem. I (1794), p. 220—223, 228—232. [4]) Ibid. I (1794), p. 442.

versetzt, wo er 1825 starb. Pfaff schlägt in der oben erwähnten Arbeit den umgekehrten Weg ein wie Rothe: er gibt zunächst einen Beweis für den Lagrangeschen Satz und folgert aus ihm die Lokalformel für die Umkehrung der Reihen[1]). Von Pfaff erwähnen wir hier gleich noch das Werk: „Disquisitiones analyticae maxime ad calculum integralem et doctrinam serierum pertinentes", Helmstädt 1797, I (einziger Teil). In dem hierin befindlichen „Tractatus de reversione serierum sive de resolutione aequationum" werden die Untersuchungen über die Lagrangesche Reihe und die Rothesche Formel zusammengestellt; weiter findet sich in ihm ein Überblick über die Kombinationslehre und eine Ableitung des polynomischen Satzes.

Große Aufregung wurde in den Reihen der Kombinatoriker durch das Erscheinen eines Buches hervorgerufen: „Theorie der Dimensionszeichen nebst ihrer Anwendung auf verschiedene Materien aus der Analysis endlicher Größen, Teil 1 und 2, Halle 1792". Diese Schrift stammte von Ernst Gottfried Fischer, der 1754 in Hoheneiche bei Saalfeld geboren war, zunächst in Halle a. S. Lehrer am Pädagogium der Franckeschen Stiftungen wurde, dann seit 1787 Professor der Physik und Mathematik am grauen Kloster zu Berlin und der gleichzeitig der Akademie der Wissenschaften angehörte. Er starb 1831 zu Berlin. Die durch seine Veröffentlichung hervorgerufene Aufregung grenzte an Empörung. Und das ist erklärlich; denn die Schrift enthielt, als eine Erfindung Fischers, die Theorie der kombinatorischen Analysis, wie sie von Hindenburg ausgearbeitet worden war, in, so schien es, nur oberflächlich, und nicht einmal zu ihrem Vorteile verändertem Gewande! Es kommt in ihr in der Tat wenig Neues vor, abgesehen von einer eigentümlichen Bezeichnungsweise, aus der, wie zu glauben nahe lag, die Absichtlichkeit in der Verschiedenheit allerorten herausblickte. Hindenburg selbst hielt sich dieser Veröffentlichung gegenüber mit seiner Meinung vornehm zurück und erwähnt nur ganz gelegentlich die „Dimensionszeichen"; seine Schüler, zumal Rothe und Heinrich August Töpfer traten um so entschiedener und lauter für ihren Lehrer gegen den „Plagiator" auf. Töpfer war 1758 zu Leisnig in Sachsen geboren; er wuchs in ärmlichen Verhältnissen auf und wurde Schreiber beim Appellationsrat v. Schlieben. Dieser ward auf seine hervorragende Begabung aufmerksam und setzte ihn in den Stand, an der Universität Leipzig Mathematik und Physik zu studieren. 1798—1828 lebte er als Lehrer an der Fürstenschule zu Grimma und starb im Ruhestand 1833 zu

[1]) Archiv f. reine u. angew. Math. I (1794), p. 81—84, 85—88.

Dresden. Er veröffentlichte 1793 zu Leipzig als Sachwalter Hindenburgs eine geharnischte Schrift: „Combinatorische Analytik und Theorie der Dimensionszeichen in Parallele gestellt", in der er das Fischersche Buch als ein „Beispiel von Dreistigkeit hinstellt, wie es in den Geschichtsbüchern der Wissenschaften vielleicht ohne seines Gleichen ist". H. A. Töpfer versucht es, Belege dafür beizubringen, daß Fischer die Hindenburgschen Untersuchungen gekannt habe.

Zu seiner Verteidigung veröffentlichte G. Fischer 1794 die Schrift: „Über den Ursprung der Theorie der Dimensionszeichen und ihr Verhältnis gegen die combinatorische Analytik des Herrn Professor Hindenburg", in der er den Nachweis zu liefern unternimmt, daß die Übereinstimmung eine naturgemäße Folge der Behandlung von gleichen Problemen (der Umkehrung der Reihen, sowie der Potenzierung von Polynomen) sei. Über seine Kenntnis der Hindenburgschen Arbeiten äußert sich Fischer: „Ich versuchte mehr als einmal, diese Schrift" (das Nov. Syst.) „durchzulesen, aber ich gestehe aufrichtig, daß mir immer die Geduld ausging, ehe ich noch mit den Definitionen, welche zwölf Quartseiten füllen, fertig war"[1]). In dem Sammelbande der Königlichen Bibliothek zu Berlin, der die Fischersche Antwort-Schrift enthält, sind ihr zwei Manuskripte vorgeheftet; das erste ist eine kurze Verteidigung von Fischer selbst; das zweite rührt her von Abel Bürja, Professor der Mathematik an der Académie militaire zu Berlin und Mitglied der Akademie der Wissenschaften. Er, „ayant soigneusement examiné" Fischers Verteidigungsschrift, tritt unbedingt für ihn ein. Mancher andere tat das gleichfalls; allein die Männer der kombinatorischen Schule konnten sich weder zufrieden geben, noch mochten sie ihre Angriffe einstellen. So blieb die Angelegenheit bis zum September 1802 in der Schwebe. Da erschien in Nr. 169 des „Intelligenzblattes der allgemeinen Litteraturzeitung" eine, durch ein anonymes Schreiben an die Redaktion vom Jahre 1800 veranlaßte Erklärung von W. Pfaff, der damit „eine erwünschte Gelegenheit ergriff, etwas zur Ehrenrettung Fischers beizutragen". Es stellte sich heraus, daß Pfaff im Besitze mehrerer Briefe Fischers sich befand, die sich auf den Gegenstand des Streites bezogen; die Existenz dieser Briefe hatte Pfaff vergessen; durch die anonyme Anfrage wurden sie in sein Gedächtnis zurückgerufen. Und diese Briefe zeigten durch Inhalt und Datierung unwiderleglich, daß von einem Plagiat keine Rede sein konnte! Hindenburg erklärte denn auch in Nr. 193 des Intelligenzblattes: „So nehme ich nun weiter keinen Anstand, unaufgefordert, aus freier Bewegung Fischer von jenem

[1]) S. XIII der Einleitung.

Verdachte frei zu sprechen". Damit war die unerquickliche Angelegenheit beendet.

Unter den Vertretern der um Hindenburg gescharten kombinatorischen Schule haben wir bereits Eschenbach, Rothe, Töpfer und Pfaff angeführt. Neben ihnen sind noch Kramp und Klügel zu nennen. Christian Kramp wurde 1760 zu Straßburg i. E. geboren und starb daselbst 1826; er führte ein unstetes Leben, durchzog Deutschland und die Nachbarländer, war Mediziner, Hebammenmeister, Physikus, Professor der Chemie und Physik zu Köln und endlich, nachdem er sich als Liebhaber mit der Mathematik beschäftigt hatte, Professor der Mathematik zu Straßburg. Er schrieb eine Fieberlehre nach mechanischen Grundsätzen, eine Kristallographie des Mineralreiches, eine Geschichte der Aerostatik, über eine geometrische Analyse der Kristalle u. a.; seine Untersuchungen über Infinitinome lassen ihn als zu den Kombinatorikern gehörig erscheinen. — Georg Simon Klügel, 1739 zu Hamburg geboren, 1812 zu Halle gestorben, Professor zu Helmstädt und dann zu Halle, mehr vielseitig als tief, hat in seinem mathematischen Wörterbuche die Artikel, die der Kombinatorik gewidmet waren, besonders eingehend behandelt.

In seinen Schriften beruft sich Hindenburg oft darauf, daß Leibniz an die Entwicklung der Kombinatorik die größten Erwartungen geknüpft und von ihr weittragende Resultate erwartet und vorausgeahnt habe. In der Tat spricht sich Leibniz häufiger in diesem Sinne aus; das eine Mal (vgl. diese Vorlesungen III², S. 112) an einer Stelle, an der er sich über die Einführung eines Algorithmus äußert, den wir jetzt als Determinantenbildung bezeichnen. Er sagt dort: „Man sieht hieraus, daß die Vervollkommnung der Algebra von der Kombinatorik abhängt". Um so auffälliger ist die geringe Beteiligung der kombinatorischen Schule am Ausbau der Determinanten, des mächtigsten und wichtigsten kombinatorischen Hilfsmittels. Hindenburg ist der Einzige, der sich gelegentlich einmal mit diesem Zweige der Wissenschaft befaßt; aber freilich ohne neues zu geben. Er referiert[1]) über Cramers und Bézouts Resultate. Das einzig Selbständige dieser Arbeit war die Übertragung der Determinantenentwicklung in kombinatorische Zeichen. —

Über die weitere Entwicklung der Determinanten in unserem Zeitraum wird bei der Behandlung der linearen Gleichungen die Rede sein. —

Von Euler, dessen weit fassender Geist keinem Zweige der

[1]) Praefatio zum „Specimen analyticum de lineis curvis secundi ordinis", Lipsiae 1784.

Mathematik fern blieb, ist auch bei der Behandlung der Kombinatorik Erwähnung zu tun. Es gehören zwei Arbeiten hierher, die er beide im Titel als „merkwürdige Fragen“ bezeichnet; die erste: „Solution d'une question curieuse qui ne parait soumise à aucune analyse“ erschien 1766 in der Histoire de l'Acad. à Berlin für 1759; p. 310—337. Sie behandelt die zufällig an Euler herangetretene Aufgabe des Rösselsprunges, d. h. die, einen Springer in seiner eigentümlichen Fortbewegungsart so über das ganze Schachbrett von 64 Feldern zu führen, daß jedes der Felder einmal und nur einmal besetzt wird. Zu dieser einfachsten Aufgabe können noch komplizierende Forderungen treten; so etwa, daß vom letzten besetzten Felde ein einziger Springerzug wieder auf das Ausgangsfeld zurückführt; oder daß, wenn die der Reihe nach besetzten Felder mit fortlaufenden Nummern 1, 2, 3, ... 63, 64 bezeichnet werden, die Differenz der Nummern je zweier zur Mitte symmetrischer Felder stets 32 betrage. Auch an die Zahl der Felder des Schachbrettes ist das Wesentliche des Problems nicht geknüpft; die entsprechende Forderung kann für ein Rechteck von $a \cdot b$ Feldern aufgestellt werden, die sich in a Zeilen und b Spalten verteilen. Euler behandelt die Frage derart, daß er einen Rösselsprungweg aufs Geratewohl vornimmt und ihn so weit als möglich fortführt; ist eine Fortsetzung nicht mehr möglich, sind dabei aber noch freie Felder des Schachbrettes vorhanden, dann wird der Rösselsprungweg in zwei Teile zerlegt, die, anders miteinander verknüpft, einen neuen Rösselweg geben, der alle früheren Felder umfaßt und einen neuen Endpunkt hat; von ihm aus ist möglicherweise ein noch freies Feld zu erreichen. Daß durch solche Methode bei geschickter Zerlegung die Aufgabe gelöst werden kann, scheint durch die gegebenen Beispiele gewährleistet; bewiesen wird es nicht.

Die zweite „merkwürdige Frage“ wurde am 18. Oktober 1779 von Euler vor der Petersburger Akademie behandelt, aber erst 28 Jahre nach dem Tode des Verfassers veröffentlicht: „Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum“, Mém. de St. Petersburg III (1811), p. 37—64. Es ist die, bereits von P. R. de Montmort und Nicolas I. Bernoulli als „Jeu de treize“ oder „Jeu de rencontre“ untersuchte (vgl. auch diese Vorlesungen III², S. 357), die bei Euler in der Fragestellung auftritt: bei wievielen der $n!$ Permutationen unter n verschiedenen Dingen steht mindestens eins der Elemente an seiner ursprünglichen Stelle?[1]) Auf die gleiche Frage war Johann Heinrich Lambert gestoßen[2]); sie steht bei ihm im Zu-

[1]) Vgl. auch Euler, Mém. de Berlin 1751 (1753), p. 255—270. [2]) Ibid. 1771 (1773), p. 411—420.

sammenhang mit den Wetterprophezeiungen und ihrer Richtigkeit, wobei es sich darum handelt, zu untersuchen, wie oft das willkürlich prophezeite Wetter mit dem wirklich eintreffenden übereinstimmt, Waring behandelte, wie Lambert, die gleiche Aufgabe als Wahrscheinlichkeitsproblem[1]).

Endlich gehört hierher noch die Besprechung einer Arbeit von Gaspard Monge, die der Besprechung eines „Kartenkunststückes“[2]), genauer der einer Mischungsmethode für Karten gewidmet ist. Sind m Karten gegeben, so findet eine erste Mischung so statt, daß Karte 2 auf Karte 1, Karte 3 unter 1 gelegt wird; dann 4 auf die obere 5 unter die untere; 6 auf die obere, 7 unter die untere usf. Bei 10 Karten entsteht z. B.

aus der ersten Lage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
als zweite Lage	10	8	6	4	2	1	3	5	7	9.

Von dieser neuen Anordnung kommt man auf die gleiche Weise zu einer weiteren; hier

9 5 1 4 8 10 6 2 3 7

usf. zu den aufeinander folgenden Lagen

7	2	10	4	5	9	1	8	6	3
3	8	9	4	2	7	10	5	1	6
6	5	7	4	8	3	9	2	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

Wie in diesem Beispiele, so kommt man stets zu der ursprünglichen Anordnung zurück. Monge untersucht die hierbei eintretenden Umstände und Gesetzmäßigkeiten. Er zeigt, daß wenn zwei Spalten in einem Elemente übereinstimmen, sie dann in allen übereinstimmen, und daß die Folgen in vertikaler Richtung zyklisch die gleichen sind. Dabei können kleinere Perioden eintreten, wie hier bei 2, 8, 5 und auch bei 4. Er berechnet die Anzahl der Mischungen, die notwendig sind, um die anfängliche Lage herbeizuführen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Der bisherigen, wohlbegründeten Gepflogenheit dieses Werkes gemäß wenden wir uns nach der Besprechung der Kombinatorik zur Wahrschein-

[1]) „An essay on the principles of human knowledge“, Cambridge 1794 (Addenda). [2]) Mém. Acad. prés. p. div. Savans, Paris 1773 (1776), VII, p. 390—412.

lichkeitsrechnung, als dem hauptsächlichsten Anwendungsfelde kombinatorischer Methoden und Resultate. Der Zeitraum, auf den wir einzugehen haben, ist gerade in diesem Gebiete reich an bemerkenswerten Fortschritten; neue Methoden der Untersuchung werden aufgefunden, neue Forschungsgebiete erschlossen; die Wissenschaft tritt in engste Beziehung zur Praxis, zur Völkerwohlfahrt.

Gleich zu Anfang dieser Periode entbrennt ein Kampf um oder, vielleicht genauer, ein Angriff gegen die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in dem sich d'Alembert als leidenschaftlicher Rufer im Streite zeigt. Auf seine Plänkeleien in den Artikeln „croix ou pile" und „gageure" der Enzyklopädie wurde, der Zeit ihrer Entstehung gemäß, bereits eingegangen (III², S. 639). Auch in seinen späteren Schriften kommt er ausführlich auf die Frage zurück, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, mit einer Münze in zwei Würfen mindestens einmal „Kopf" zu werfen. D'Alembert hatte als Möglichkeiten angenommen: entweder es fällt auf den ersten Wurf Kopf, und dann ist das Spiel bereits entschieden; oder es fällt Schrift und dann Kopf; oder endlich zweimal Schrift. Von diesen drei Fällen sind zwei günstig, also ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal Kopf zu werfen $w = \frac{2}{3}$. Auf den Widerspruch hin, den diese Anschauung von hervorragenden Seiten erfuhr, schwankt d'Alembert zwischen der Meinung, daß diese drei Möglichkeiten gleich berechtigt seien, und der, sie seien es nicht. Im zweiten Bande seiner „Opuscules Mathématiques" heißt es auf S. 21: „Gleichwohl möchte ich die drei Fälle, um die es sich handelt, nicht in aller Strenge als gleich möglich ansehen"; dann wieder im vierten Bande, S. 289: „Je mehr ich darüber nachdenke, desto mehr scheint es mir, daß diese drei Fälle, mathematisch gesprochen, gleich möglich sind." Ebenda bestreitet er mit ganz nichtigen Behauptungen den schlagenden Einwurf, man könne statt zweimal hintereinander mit nur einem, auch gleichzeitig mit zwei Geldstücken werfen; dabei ergibt sich nämlich zweifellos $w = \frac{3}{4}$. An der ersterwähnten Stelle finden sich seine Angriffe gegen die geltende Lehre in dem Aufsatze „Réflexions sur le calcul des Probabilités", p. 7—26, Paris 1761 im Zusammenhange dargelegt. Er behandelt zuerst den Begriff der mathematischen Erwartung (diese Vorlesungen III², S. 631), demzufolge, wenn $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens verschiedener, mit den bezw. Gewinnen $g_1, g_2, g_3, \ldots$ verknüpften Ereignisse sind, die mathematische Erwartung den Wert $g_1p_1 + g_2p_2 + g_3p_3 + \cdots$ habe. Das Petersburger Problem (ibid. S. 633) muß als Sturmbock gegen die Regel dienen, den Einsatz dieser Größe gleich anzunehmen: Paul solle

dem Peter 1 geben, wenn dieser bei seinem ersten Wurfe mit einer Münze Kopf werfe, dagegen 2, 4, 8, 16, . . ., wenn Kopf erst beim 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten}, 5^{ten}, . . . Wurfe erscheine. Peters Einsatz müßte

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots$$

und so ohne Ende weiter, müßte also ∞ sein. Das widerspricht dem gesunden Verstande; wer würde selbst nur eine mäßige Summe als Einsatz bei diesem Spiele wagen? Zur Erklärung dieses Dilemmas wurden am angegebenen Orte zwei Versuche angeführt, der von Cramer und der von Daniel Bernoulli; hier stoßen wir auf einen dritten. D'Alembert schließt, daß wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sehr klein ist, sie gleich Null gesetzt werden muß; man dürfe diese Wahrscheinlichkeit also nicht, wie die Theorie es vorschrieb, mit dem erhofften Gewinne multiplizieren, um die mathematische Erwartung, d. h. die Höhe des Einsatzes zu finden. Übrigens war d'Alembert nicht der Erste, der auf diese Idee kam; Nicolas I. Bernoulli hatte 1709 ähnliches, aber vorsichtiger ausgesprochen (Vorlesungen III², S. 336, Anm. 3); und Buffon schließt in seinem „Essai d'Arithmétique morale" (Nr. VIII) aus der Betrachtung der menschlichen Handlungen im gewöhnlichen Leben, daß man jede Wahrscheinlichkeit, die nicht größer als $\frac{1}{10000}$ ist, gleich Null setzen kann und muß; für einen gesunden Mann von 56 Jahren sei die Wahrscheinlichkeit, binnen 24 Stunden zu sterben, gleich $\frac{1}{10000}$; kein Mensch aber rechne mit dieser Wahrscheinlichkeit; jeder setze sie einfach $= 0$. Diese Anschauung wird von Condorcet (Essai sur l'application etc.; Préliminaire p. CVIII) einer kritischen Prüfung unterzogen und widerlegt. Buffon teilte seine Auffassung von kleinen Wahrscheinlichkeiten 1762 Daniel Bernoulli mit, der sie unter vorsichtiger Einschränkung als „moralische Wahrscheinlichkeit" guthieß. D'Alembert ist sich selbst über die Grenze, unterhalb deren die Wahrscheinlichkeit gleich Null gesetzt werden soll, nicht im klaren.

Es mag hier gleich erwähnt werden, daß Condorcet, über dessen tragische Lebensschicksale wir später berichten werden, in der „Histoire de l'Acad. de Paris" 1781, p. 707 auf eine Analyse der mathematischen Erwartung $g_1p_1 + g_2p_2 + g_3p_3 + \cdots$ genau eingeht. Zuerst macht er darauf aufmerksam, daß dieser Wert nur als Mittelwert Geltung hat. Ist $p_1 = \frac{1}{2}$, $g_1 = 1$, so ist die mathematische Erwartung $\frac{1}{2}$, trotzdem nur Gewinne 0 oder 1, aber nie $\frac{1}{2}$ vorkommen können. Die

Regelung der Einsätze muß billigerweise so geschehen, daß 1. der Fall, in dem weder Gewinn noch Verlust für einen Spieler eintrifft, der wahrscheinlichste ist; daß 2. die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen oder zu verlieren, für beide Spieler $= \frac{1}{2}$ wird. Man könnte noch fordern, daß 3. mit der Anzahl der Spiele die Wahrscheinlichkeit wächst, daß der Gewinn- oder Verlustbetrag eine gegebene Größe nicht überschreitet, oder daß 4. das Verhältnis dieses Betrages zum höchsten Gewinn oder Verlust ein beliebig kleines werde. Es zeigt sich, daß durch die Gleichsetzung der mathematischen Erwartungen beider Spieler die ersten beiden Bedingungen nebst der vierten erfüllt werden, und nur dadurch; daß dagegen 3. überhaupt durch keine Annahme erfüllbar ist. — Die Wirkung dieser Gleichsetzung tritt aber erst in der Folge vieler Spiele hervor. Ist die Wahrscheinlichkeit klein, so muß die Anzahl stark vergrößert werden. Besteht für A bei kleinerem Gewinn größere Gewinnaussicht, für B bei größerem Gewinn kleinere Aussicht, so wird bei Wiederholung des Spieles für B mit wachsender Gewinnaussicht der Gewinnbetrag sich vermindern und für A das Umgekehrte eintreten. Aus seinen Untersuchungen schließt Condorcet, daß beim Petersburger Problem die Gleichsetzung der mathematischen Erwartungen beider Spieler unstatthaft sei, weil ihre Anwendbarkeit erst bei ∞^2-maliger Wiederholung des Spieles eintrete. — Um den Unterschied eines einzelnen Falles vom Durchschnitte einer Reihe von Fällen zu illustrieren, macht Condorcet darauf aufmerksam, daß ein verständiger Mann es sehr wohl ablehnen kann, eine Summe b_1 für die Wahrscheinlichkeit p_1 eines Gewinnes von g_1 zu geben, ablehnen kann, wenngleich $b_1 < p_1 g_1$ ist; während er andererseits für eine Summe b_2 die Wahrscheinlichkeit p_2 eines Gewinnes g_2 erkauft, trotzdem $b_2 > p_2 g_2$ ist; dazu würde ausreichen, daß p_1 sehr klein und p_2 sehr groß ist. Eine kleine Wahrscheinlichkeit gleich Null zu setzen, geht nach Condorcet nicht an; es würde der gleiche Fehler sein, als wolle man eine entfernt berührende Tangente mit einer Asymptote verwechseln. — Ähnliche Darlegungen gibt Condorcet in dem Werke, auf dessen Besprechung wir bald eingehen werden, dem „Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix", Paris 1785; Discours préliminaires p. LXXII ff. und im Werke selbst p. 138 ff. In diesen kritischen Beleuchtungen beschäftigt er sich besonders mit den oben erwähnten Anschauungen Buffons, die er zurückweist. Was für die wirklichen Werte der Wahrscheinlichkeiten falsch ist, das könne nicht dadurch richtig werden, daß man den wirklichen Werten falsche substituiere.

Mit dem Petersburger Problem beschäftigt sich auch Georg Christoph Lichtenberg, jüngstes unter 18 Kindern eines Predigers bei Darmstadt, 1742 geboren. Er studierte in Göttingen unter Kästner Mathematik und wurde daselbst 1770 außerordentlicher Professor. Er betätigte sich vielfach schriftstellerisch, hauptsächlich als Satiriker. Körperliche Leiden verdüsterten seine letzten Lebensjahre; er starb am 24. Februar 1799. Im Jahre 1770 veröffentlichte er einen kleinen, populär geschriebenen Aufsatz: „Betrachtungen über einige Methoden, eine gewisse Schwierigkeit in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beim Spiele zu heben"[1]). In ihm legt er die Bedeutung und die Erklärungsversuche des Petersburger Problems dar. Er tritt ganz auf Bernoullis Seite und nimmt gegen d'Alembert Partei, über dessen Ansichten er sagt: „Herrn d'Alembert entgegensetzen, daß nach den Regeln der Combinationen kein Fall wahrscheinlicher sei als der andere, kommt mir nicht viel besser vor, als einem gelehrten Verteidiger der Dreieinigkeit die Beweise der Multiplikation entgegensetzen wollen". Neues enthält der Aufsatz nicht.

Wir kehren zu dem Berichte über d'Alemberts Anschauungen zurück: Spielt Peter mit Paul unter der Bedingung, daß Peter 2^{100} Mark gewinne, wenn beim Werfen einer Münze die Kopfseite erst auf den 100sten Wurf fällt, so müßte der Einsatz gemäß der mathematischen Erwartung gleich 1 Mark bemessen werden; trotz dieser geringen Summe wird Peter ihn nicht wagen, weil die Kopfseite nicht notwendig, aber doch sicher bereits vorher fallen wird. Deshalb muß man nach d'Alemberts Meinung zwischen dem unterscheiden, was metaphysisch möglich ist, und dem, was physisch möglich ist. Zum ersten Begriffe gehört alles, was nicht widersinnig genannt werden kann, zum zweiten alles, was nicht allzu weit aus dem gewöhnlichen Laufe der Dinge heraustritt. So gehört es zu den metaphysischen Möglichkeiten, mit zwei Würfeln hundertmal hintereinander „Sechs—sechs" zu werfen; physisch dagegen ist es unmöglich, weil es noch niemals geschehen ist und niemals geschehen wird.

Mit dieser Unterscheidung hängt folgendes zusammen. Die Theorie nimmt bei der Wiederholung von Ereignissen jede Kombination als gleich möglich und als gleich wahrscheinlich an, z. B. beim 10maligen Werfen einer Münze das 10malige Auffallen von Kopf als so wahrscheinlich wie einen beliebigen Wechsel von Kopf und Schrift. Ist das berechtigt? D'Alembert glaubt es nicht: ist schon 9mal Kopf gefallen, so ist es wahrscheinlicher, daß das nächste Mal

[1]) Auch abgedruckt in Lichtenbergs physikalischen und mathematischen Schriften, Göttingen 1806, Bd. IV, S. 3—46.

Schrift fällt als wieder Kopf. Man sieht, daß dabei ein Einfluß angenommen würde, den das voraufgehende Ereignis auf das folgende ausübt. Dieser Ansicht, die d'Alembert durch Scheingründe stützt, war schon von de Montmort widersprochen worden; „die Vergangenheit entscheidet nichts für die Zukunft" (diese Vorlesungen III², S. 335). Euler drückt sich (Opuscula analytica II, 1785, p. 331 bis 346) noch drastischer aus: dann müßte auf jeden folgenden Wurf jeder vorhergehende, wenn er auch vor hundert Jahren und an irgend welchem Orte geschehen wäre, von Einfluß sein, „ungefähr das Absurdeste, was man überhaupt ausdenken kann".

Den angenommenen Einfluß früherer Würfe auf folgende kann d'Alembert natürlich nur hypothetisch angeben. Das tut er (Opuscules IV, p. 73) bei erneuter Behandlung des Petersburger Problems, indem er die Wahrscheinlichkeit dafür, erst beim n^{ten} Wurfe Kopf fallen zu sehen, nicht $=\frac{1}{2^n}$, sondern ganz willkürlich $=\frac{1}{2^n(1+\beta n^2)}$ oder auch $=\frac{1}{2^n+2^{\alpha n}}$ setzt; noch wunderlicher ist die Annahme $1:2^n\left(1+\frac{B}{(K-n)^{\frac{q}{2}}}\right)$, wo B und K Konstanten und q eine ungerade ganze Zahl bedeuten. Ein andermal (Opuscules VII, p. 39) nimmt er für das Auffallen von Kopf beim 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten}, ... Wurfe die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{1}{2},\ \frac{1+a}{2},\ \frac{1+a+b}{2},\ \frac{1+a+b+c}{2},\ \ldots$$

an, wo $a, b, c, \ldots$ kleine positive Größen sein sollen, deren Summe die Einheit nicht erreicht. Diese Hypothesen sind nur darauf berechnet, den Einsatz beim Petersburger Problem zu einem endlichen zu machen. Wissenschaftlichen Wert haben sie nicht.

Noch einen anderen Punkt hebt d'Alembert kritisierend hervor. Sieht man auf einem Tische Buchstaben nebeneinander liegend, die das Wort „Constantinopolitanensibus" bilden, oder die alphabetisch aufeinander folgen, so wird kein Mensch annehmen, daß sie durch Zufall so angeordnet seien, trotzdem die Wahrscheinlichkeit der beiden Anordnungen aus den auftretenden Buchstaben nach den Schulanschauungen nicht geringer sein soll, als die einer willkürlichen, regellosen Aufeinanderfolge. In den ersten Fällen erkenne man eine Absicht, und eine solche müsse auch bei regelmäßigem Fallen der Münze angenommen werden. Mehrfaches Aufwerfen von Kopf hintereinander sei unwahrscheinlicher als Wechsel in den Flächen der Münze.

Solchen ketzerischen Ideen gegenüber verhielt sich die Mehrzahl der Mathematiker jener Zeit kühl ablehnend; sie erachtete es wohl der

Mühe nicht für wert, darauf einzugehen. D'Alembert beruft sich häufig auf die Zustimmung „bedeutender Männer", „berühmter Gelehrten", „hervorragender Mathematiker", in deren Gesellschaft ihm aber selber mitunter nicht recht behaglich ist, wenn sie z. B. durch seine Einwürfe die ganze Lehre der Wahrscheinlichkeitsrechnung als „zugrunde gerichtet" ansehen; aber Namen verschweigt er dabei. Dagegen verschweigt er nicht, daß seine revolutionären Meinungen auch vielen Widerspruch gefunden haben, daß sie „absurd" und von Daniel Bernoulli „lächerlich" genannt worden sind. Wuchtig absprechend drückt sich L. Euler aus in den Opuscula analytica II, 1785, p. 331: „Mich schrecken" (bei solchen Untersuchungen) „die Einwürfe d'Alemberts nicht zurück, der diesen Kalkül zu verdächtigen versucht hat. Zuerst nämlich hat dieser bedeutende Geometer die mathematischen Studien beiseite gelegt; jetzt scheint er sie sogar zu bekämpfen, indem er unternommen hat, eine Reihe von Grundsätzen umzustürzen, die auf das sicherste begründet sind. Den Laien mögen seine Einwürfe gewichtig erscheinen, doch die Furcht liegt fern, daß die Wissenschaft selbst Schaden durch sie erleide."

Daher ist es denn nicht verwunderlich, daß d'Alemberts Ruf so ziemlich ohne Nachklang verhallte. Von den wenigen, die seinen Bedenken geneigtes Ohr liehen, sei der Direktor der physikalischen Klasse der Berliner Akademie Nic. de Beguelin erwähnt. Er war 1714 im Kanton Basel geboren, wurde Hofmeister des nachmaligen Königs Friedrich Wilhelm II. und starb 1789 zu Berlin. Er hat sich mit den metaphysischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in zwei Aufsätzen der Mémoires de l'Acad. à Berlin 1765 (1767), p. 231, und 1767 (1769), p. 381 beschäftigt. In dem ersten spricht er seine Ansicht aus: „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört eben so sehr, ja vielleicht in höherem Maße zur Metaphysik als zur Mathematik; diese liefert die Behandlung durch Rechnung, jene die Grundlagen, auf welche die Rechnungen sich gründen". Im zweiten Aufsatze behandelt er eingehend, aber ohne begründete Resultate das Petersburger Problem; er gibt eine ganze Reihe von Lösungen, die das Gemeinsame haben, völlig willkürlich zu sein. Daß Kopf erst beim k^{ten} Wurfe auffalle, soll beispielsweise die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{(k-1)!+1}$ haben.

Auch der Marquis de Condorcet ging, wie wir bereits erwähnt haben, auf eine Prüfung der d'Alembertschen Bedenken ein. Im zweiten Abschnitte der oben angeführten Abhandlung[1]) geht Condorcet

---

[1]) Hist. Acad. de Paris, 1781, p. 707.

auch auf die Frage nach den regulären Anordnungen gegebener Elemente ein. Er betrachtet die beiden Reihen

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 10;$$
$$1, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 7, \quad 13, \quad 23, \quad 44, \quad 87, \quad 167;$$

beide sind regulär; jedes Glied a_{n+2} der ersten ist nach dem Gesetze $a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} - a_n$ gebildet, jedes Glied b_{n+2} der zweiten nach dem Gesetze $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n + b_{n-1} + b_{n-2}$. Gesucht wird der Quotient der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß bei einer Fortsetzung der Reihen um q Glieder dieselben Gesetze sich zeigen werden. Wie man sieht, ist die Frage merkwürdig unbestimmt gehalten; die Behandlung des Problems durch Condorcet ist nicht minder unbestimmt. Wenn in einer Reihe je e aufeinanderfolgende Glieder einem Gesetze unterworfen sind, in einer zweiten je e_1, dann soll $\frac{(e_1+1)(e+q+1)}{(e+1)(e_1+q+1)}$ den gesuchten Quotienten geben. Fragt man nach diesem Quotienten bei $q = \infty$, d. h. bei den ins Unendliche fortgesetzten Reihen, dann soll $\frac{e_1+1}{e+1}$ herauskommen, in unserem obigen Beispiele also wegen $e = 2$, $e_1 = 4$ der Wert $\frac{5}{3}$.

Wie er, so trat Laplace, dem die Wahrscheinlichkeitsrechnung viel zu danken hat, kritisch an d'Alemberts Bedenken. Pierre Simon Marquis de Laplace, 1749 zu Beaumont-en-Auge geboren, entstammte einer einfachen Familie. Er hatte die Schwäche, sich seiner Herkunft zu schämen; nur ungern sprach er von seiner Jugend. In der École militaire zeigten sich schon früh seine mathematischen Anlagen. Er wurde zuerst Lehrer zu Beaumont, dann Professor an der École militaire und 1794 an der École normale. 1795 gehörte er dem Bureau des longitudes an. „Er bot das traurige Schauspiel politischer Schmiegsamkeit und Mantelträgerei, die an Kriecherei streifte, und deren Anzeichen bis in die Vorreden seiner Werke drangen, die bei jedem Regierungswechsel geändert wurden“ (La grande Encyclopédie). Bonaparte übertrug ihm das Portefeuille des Innern, entzog es ihm wegen mangelnden Verwaltungssinnes nach sechs Monaten: „er trug in die Geschäfte den Geist des Unendlich-Kleinen“ — und machte ihn zum Mitgliede des Senats. Unter Louis XVIII. wurde er Pair de France und Marquis. Er starb im März 1827 zu Paris.

In einer Abhandlung der Mémoires de math. Acad. R. Paris (année 1773), p. 37—232, deren zweiter Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewidmet ist (p. 113—163) geht Laplace auf die d'Alembertschen Bedenken ein. Daß beim Würfeln frühere Ergebnisse auf fol-

gende beeinflussend wirken sollen, weist er von der Hand. Auf eine spätere, scheinbare Einschränkung kommen wir bald zurück. — Über das „Constantinopolitanensibus“, das sich bei ihm in das Wort „Infinitésimal“ umgewandelt hat, äußert er sich folgendermaßen: Wo wir Symmetrie bemerken, glauben wir an die Wirkung einer Absicht, da sie für die Hervorbringung der Symmetrie wahrscheinlicher ist als der Zufall. Ist $\frac{1}{m}$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, falls es ein Zufall, $\frac{1}{n}$ seine Wahrscheinlichkeit, falls es eine Absicht hervorgerufen hat, so ist die Wahrscheinlichkeit des Bestehens und Wirkens einer Absicht[1])

$$\frac{1:n}{1:n+1:m} = \frac{1}{1+n:m};$$

sie wächst also mit m. Nicht weil die Symmetrie geringere Wahrscheinlichkeit hat als ein unsymmetrisches Ergebnis, suchen wir eine Absicht bei Eintreffen der Symmetrie, sondern weil der Zufall unwahrscheinlicher ist, als die Absicht. Hätte das Wort „Infinitésimal“ in keiner Sprache eine Bedeutung, so würde das dazu nötige Arrangement der Buchstaben weder wahrscheinlicher, noch unwahrscheinlicher sein, als es jetzt ist; und gleichwohl würden wir bei der Zusammenstellung keine besondere Ursache vermuten. Da das Wort aber in Gebrauch bei uns ist, so ist es unvergleichlich mehr wahrscheinlich, daß eine Person die Lettern zusammengelegt hat, als daß ein Zufall sie so zusammenfügte, wie wir sie sehen.

Ein weiteres Eingehen auf die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung müssen wir uns versagen. —

Nach diesem Berichte über den Sturm gegen die Prinzipien gehen wir zu der Besprechung einer Bereicherung der Untersuchungsmethoden über, zumal da diese zeitlich mit der Periode beginnt, die wir behandeln. Daniel Bernoulli gehört das Verdienst, die Infinitesimalrechnung den Zwecken der Wahrscheinlichkeitsrechnung dienstbar gemacht zu haben. Bis zu ihm hatte ausschließlich das Fermatsche Vorgehen Geltung gehabt, als Wahrscheinlichkeit den Quotienten aus der Zahl der günstigen durch die Zahl der möglichen Fälle zu nehmen, wobei man bei verwickelteren Aufgaben auf bedeutende kombinatorische Schwierigkeiten stieß. Für diesen Quotienten substituiert Daniel Bernoulli den Quotienten aus den unendlich kleinen In-

[1]) Diese Rechnung benutzt die später zu behandelnde Bayessche Regel über die, aus ihren Wirkungen zu erschließenden Ursachen, die Laplace in Bd. VI der Mémoires de l'Acad. de Paris dargestellt hatte.

krementen oder Dekrementen jener beiden Größen, und ihn behandelt er dann nach den gewöhnlichen Regeln und Vorschriften der Analysis. Natürlich ist dieses Verfahren nicht allgemein bei jeder Aufgabe anwendbar. Bernoulli sagt darüber[1]): „Man kann mit Nutzen die Infinitesimalrechnung verwenden, wenn nur die Aenderung, die eintreten kann, als unendlich klein angesehen werden darf". Das tritt z. B. ein, wenn aus einer Urne, die eine große Anzahl von Kugeln enthält, einzelne gezogen werden; „denn dann kann die Einheit als unendlich kleines Element betrachtet werden; und man stützt sich auf die gleiche Hypothese, deren sich die Mathematiker vor der Entdeckung der Differential- und Integral-Rechnung bedienten". In der angeführten Abhandlung bespricht Bernoulli als Beispiel ein Problem, das er für andere Zwecke braucht. Er behandelt es zuerst nach der alten und dann nach der bequemeren neuen Methode. Es scheint uns geraten, erst später dieses etwas komplizierte Problem mitzuteilen, und die Methode lieber an einem anderen, einfacheren darzulegen[2]).

In einer Urne sind n weiße, in einer anderen n schwarze Kugeln. Aus jeder wird eine Kugel gezogen und in die andere Urne gelegt; die Ziehungen erfolgen gleichzeitig. Dieselbe Operation wird von neuem und im ganzen r mal gemacht. Wie groß ist hinterdrein die wahrscheinliche Anzahl x der weißen Kugeln in der ersten Urne? Die Verwendung der gewöhnlichen Methode gibt $x = \frac{1}{2} n \left[1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^r\right]$. Für ein großes n kann man dies Resultat durch das bequemere

$$x = \frac{1}{2} n \left[1 + e^{-\frac{2r}{n}}\right]$$

ersetzen. Hierauf führt die neue Methode direkt. Es werden x und r als stetig veränderliche Größen betrachtet; dr, d. h. die Einheit, sei das Inkrement von r; es fragt sich, wie groß $dx : dr$ ist. Die, mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{x}{n}$ erfolgende Entnahme einer weißen Kugel aus der ersten Urne liefert das Dekrement (-1) für dx; das mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{n-x}{n}$ erfolgende Hineinlegen einer weißen Kugel in die erste Urne liefert das Inkrement $(+1)$ für dx; folglich wird

$$\frac{dx}{dr} = -1 \cdot \frac{x}{n} + 1 \cdot \frac{n-x}{n}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{dx}{2x-n} = -\frac{dr}{n}.$$

Diese Differentialgleichung liefert dann bei richtiger Bestimmung der Integrationskonstante wieder den Wert

[1]) Novi Comment. Acad. Petrop. XII, 1766, 1767 (1768), p. 87—98. [2]) Ibid. XIV, 1769 (1770), p. 2—25.

$$x = \frac{1}{2} n \left[1 + e^{-\frac{2r}{n}}\right].$$

Die Aufgabe wird nach der Richtung hin erweitert, daß n Urnen mit je n Kugeln vorhanden sind, und daß jede gezogene Kugel in die folgende der zyklisch angeordneten Urnen gelegt wird. Durch ein Mißverständnis wurde Malfatti[1]) zu einer unberechtigten Kritik dieser Arbeit verleitet; nur in einem Punkte müssen wir ihm beipflichten, daß nämlich das angeführte Bernoullische Problem nicht mit einem anderen identisch ist, von dem Bernoulli es behauptet. Malfatti selbst behandelt 20, aus der Bernoullischen Annahme folgende Probleme auf elementarem Wege.

Es sei noch erwähnt, daß D. Bernoulli sich der gleichen Methode bedient, um näherungsweise gewisse numerische Rechnungen, die infolge der Höhe der eintretenden Zahlen unbequem und langwierig sind, durch bequemere und kürzere zu ersetzen. So verfährt er in der „Mensura sortis" usw. (Novi Comment. Acad. Petrop. XIV, für 1769, p. 26) mit dem Ausdrucke $q = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^n}$ und findet, je nachdem er n durch $n+1$ oder durch $n-1$ ersetzt,

$$dq = -\frac{q\,dn}{2n+2} \quad \text{und} \quad dq = -\frac{q\,dn}{2n-1};$$

er nimmt die arithmetische Mitte der rechten Seiten, erhält

$$dq = -\frac{q\,dn}{2n+\frac{1}{2}}$$

und kommt durch Integration auf

$$q = \text{cst.}\ \frac{1}{\sqrt{4n+1}}.$$

Das eben erwähnte allgemeine Approximationsproblem war bei der Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie sie in unserem Zeitraum geübt wurde, ein sehr naheliegendes und notwendig zu behandelndes. Dies erkannte auch Laplace nach Bernoulli, wie es Stirling vor diesem erkannt hatte. Mit ihm beschäftigt sich Laplace eingehend in dem „Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres" (Histoire de l'Académ. à Paris 1782). Wir kommen später auf diese Arbeiten zurück.

Wenden wir uns wieder zu Daniel Bernoulli, so ist noch zu erwähnen, daß er die erste Anwendung der Infinitesimalrechnung in der Wahrscheinlichkeitslehre bereits vor der prinzipiellen, 1766 erfolgten Ankündigung und Darlegung schon 1760 in dem Aufsatze „Essai

[1]) Memorie mat. e fis. Soc. Ital. I (1782), p. 768.

d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole etc." (Histoire de l'Acad. ... à Paris 1760 [1766], p. 1—45) gegeben hat; und als Kritiker dieser Arbeit wendet auch d'Alembert (Opuscules II, p. 26—95) dieselbe Methode an.

Wir wenden unsere Aufmerksamkeit nunmehr den Arbeiten zu, die, sozusagen, noch im Pascalschen Boden wurzeln und nach elementarer kombinatorischer Methode eine Reihe von Problemen behandeln, die den Mathematikern in den Glücksspielen entgegen traten. Es ist natürlich nicht unsere Aufgabe, jede kleinste derartige Arbeit zu besprechen; es reicht aus, die bedeutenderen unter ihnen hervorzuheben.

Hinsichtlich der Spiele, die nicht allein vom Zufall, sondern auch von der Geschicklichkeit der Spieler abhängig sind, macht Laplace (Histoire de l'Academ. Paris [1778], p. 230) folgende Bemerkungen: Es sei überaus unwahrscheinlich, daß beide Spieler die gleiche Geschicklichkeit besitzen; die des einen sei $1 + \alpha$, die des anderen $1 - \alpha$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß der stärkere Spieler die beiden ersten Partien gewinnen wird, $= \frac{1}{4}(1+\alpha)^2$, die, daß der schwächere sie gewinne, $= \frac{1}{4}(1-\alpha)^2$. Nun weiß man von vornherein nicht, wer von den beiden Spielern der stärkere ist; danach wird die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmter unter ihnen beide ersten Partien gewinnt, gleich dem mittleren Werte, d. h.

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}(1+\alpha^2).$$

Ohne Berücksichtigung der Geschicklichkeiten würde sich $\frac{1}{4}$ ergeben. Es ist also nach diesen Überlegungen wahrscheinlicher, daß einer der beiden Spieler beide ersten Partien gewinnt, als daß der eine die erste, der andere die zweite gewinnt.

Über den Wert von α weiß man zu Beginn der Spiele nichts. Das gibt nach mehreren Richtungen hin zu Untersuchungen Anlaß (l. c. S. 238 ff.). Kennt man für α die Grenzwerte $(0, \ldots, q)$ und zugleich die Wahrscheinlichkeit $\psi(\alpha)$ dafür, daß ein bestimmtes α auftrete, dann ist der obige Ausdruck durch das Integral

$$\int_0^q \frac{1}{4}\psi(\alpha)(1+\alpha^2)\,d\alpha$$

zu ersetzen, wobei $\psi(\alpha)$ so beschaffen sein muß, daß $\int_0 \psi(\alpha)\,d\alpha = 1$ ist. Es möge ein für allemal hier daran erinnert werden, daß diese Schreibweise der Integralgrenzen in unserem Zeitraume noch nicht

eingeführt ist. — Somit weist dieses Resultat darauf hin, das „Gesetz der Fehler", d. h. die Funktion $\psi(\alpha)$ zu bestimmen. Das unternimmt Laplace im weiteren Fortgange seiner Untersuchungen. Wir werden davon bald ausführlich zu sprechen haben.

Die zweite Untersuchungsrichtung, auf die wir auch erst später eingehen können, ist die folgende: Die anfängliche Unkenntnis der Geschicklichkeiten der Spieler wird im Verlaufe der Spiele einer größeren und größeren Kenntnis dieser Geschicklichkeiten durch den Ausfall der Spiele selbst Platz machen. Hierzu gehört die Möglichkeit, aus einem Ereignis auf seine Ursachen zu schließen. Das ist ein Problem, das in unserer Epoche zum ersten Male aufgestellt und behandelt worden ist.

Es möge noch bemerkt werden, daß Laplace in diesem „Mémoire" nicht bei zwei Spielern und zwei von ihnen zu spielenden Partien stehen bleibt, sondern die Anzahl sowohl der Spieler wie der Partien beliebig groß annimmt. Wir verlassen diese Fragen und gehen auf andere hierher gehörige Probleme ein.

Schon früher wurde (Bd. III², S. 338) erwähnt, daß Moivre 1708 die Aufgabe erledigte, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß mit einem gewöhnlichen Würfel in 8 Würfen mindestens 2 mal die 1 geworfen werde. Das Problem wird in unserer Epoche wieder aufgenommen, in erweiterter Form behandelt und gelöst. Lagrange, der sich im zweiten Abschnitte seines Aufsatzes: „Recherches sur les suites recurrentes ... ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles; et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards" (Nouv. Mém. de l'Acad. ... à Berlin 1775 [1777], p. 183—272) mit verschiedenen Aufgaben der Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt, stellt die Fragen allgemein so: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereignis, dessen Eintreffen bei einem Versuche die Wahrscheinlichkeit p hat, in k Einzelversuchen genau a mal eintritt? — oder mindestens a mal? Ferner: es kann bei einem Versuche dreierlei eintreffen: entweder, mit der Wahrscheinlichkeit p, das Ereignis A; oder, mit der Wahrscheinlichkeit q, das Ereignis B; oder, mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p - q$, keins von beiden; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in k Versuchen A mindestens a mal und B mindestens b mal auftritt? oder, daß A eher a mal eintritt als B seinerseits b mal? — Der Titel der Lagrangeschen Abhandlung zeigt deutlich die Hilfsmittel an, auf die sich die Lösungen der Aufgaben stützen, nämlich die rekurrierenden Reihen und die Differenzengleichungen. Hier knüpfen die Arbeiten Trembleys an. Einer angesehenen Schweizer Familie entsprossen, war er, Jean, geboren 1749 in Genf, nicht der erste unter ihren Mitgliedern, der sich wissenschaftlich einen Namen errang. Jean sollte Jurist werden; allein, durch Mallet beeinflußt, wendete er sich dem Studium der Astronomie und der Mathematik zu, ging 1794 nach Berlin, wo er Mitglied der Akademie der Wissenschaften wurde, und starb 1811 bei Verwandten in Südfrankreich. Er empfand es als unnötige Erschwerung, daß Lagrange und Laplace bei der Behandlung relativ einfacher Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung Hilfsmittel verwendeten, die — wie er sich ausdrückt — „aus den tiefsten Eingeweiden der Integral-Rechnung" entnommen sind, und er stellt sich die Aufgabe, dieselben Fragen allgemein und elementar „methodo elementari" zu behandeln. Das tut er in der „disquisitio elementaris circa calculum probabilium", Comm. Soc. Gotting. XII, 1793—1794 (1796), p. 99—136. Wir gehen nicht näher darauf ein, da kaum etwas Neues geboten wird, und da die Nachteile elementarer Behandlung meistens ihre Vorteile überwiegen, indem sie ermüdend lang und unübersichtlich ist.

Auch das Teilungsproblem findet sich unter den Problemen wieder, an die man in unserer Epoche herantritt. Die Frage kommt schon in der Ars conjectandi vor; sie lautet allgemein: ein Spiel wird vor seiner Beendigung abgebrochen; wie sind gerechtermaßen die Einsätze zu verteilen? Bei der Untersuchung eines solchen Problems[1]) kommt Nic. Fuß zu einem Resultate, das von dem durch Jak. Bernoulli erhaltenen wesentlich abweicht. Es zeigt sich aber[2]), daß dieser Unterschied von einer nicht scharfen Fassung der Aufgabe herrührt, so daß in Wirklichkeit beide Forscher durchaus verschiedene Aufgaben behandelt hatten. Fuß selbst klärt dies auf. —

Eine andere häufig behandelte Aufgabe ist die nach der Dauer von Spielen. De Montmort gab die Anregung dazu; und auch hier ist de Moivre als erster zu nennen, der sich mit entschiedenem Erfolge des Problems annahm. Wir geben ihm folgenden Ausdruck: A besitzt a Marken, B deren b, und es besteht für A die Wahrscheinlichkeit p, im Einzelspiele zu gewinnen, für B die Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Der im Einzelspiele Verlierende zahlt dem Gewinnenden eine Marke. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in k Spielen einem der Spieler durch den Verlust aller seiner Marken die Fortsetzung des Spiels unmöglich gemacht wird? In wieviel Spielen ist es gleich wahrscheinlich, daß diese Beendigung eingetreten, oder daß sie nicht eingetreten ist? Auch hier haben Lagrange und Laplace allgemeine Lösungen geliefert. Die Lagrangesche Arbeit, in der das geschehen ist, haben wir bereits erwähnt.

[1]) Act. Petrop. 1779, II, p. 81—92. [2]) Ibid. 1780, II, p. 91—96.

Die Entstehung des Genueser Zahlen-Lotto ist bereits oben (Bd. III², S. 336) besprochen und seine Einrichtung mitgeteilt; wir erwähnen dabei, daß Laplace (Mém. de Paris VI, 1774, p. 365) dieses Spiel als „Lotterie der Militär-Schule" bezeichnet, ohne einen Grund für diese Benennung anzugeben: Aus 90 mit den fortlaufenden Zahlen 1 bis 90 bezifferten Marken werden 5 Gewinnmarken herausgegriffen. An diese Einrichtung der Genueser Zahlen-Lotterie knüpfen sich mehrere interessante Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das Erscheinen von 2 aufeinander folgenden Zahlen unter den Gewinnmarken heißt eine Sequenz oder eine Folge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Ziehung eine Sequenz auftritt? Euler hat dieses Problem in dem Aufsatze: „Sur la probabilité des séquences dans la loterie génoise", Histoire de l'Acad. ... à Berlin 1765 (1767), p. 191—230 aufgeworfen und erledigt. An gleichem Orte p. 271—280 und im Anschlusse an diesen Aufsatz behandelt Beguelin die gleiche Frage in der Arbeit: „Sur les suites et les séquences dans la loterie de Gênes". Der Unterschied zwischen beiden ist nur der, daß Beguelin auch die Nummern 90, 1 als Sequenz auffaßt, also eine kreisartig geschlossene Folge der Nummern annimmt. Johann III. Bernoulli nimmt in einer schon früher verfaßten, aber erst später veröffentlichten Arbeit: „Sur les suites ou séquences dans la loterie de Gênes" (ibid. 1769 [1771], p. 234—253) den gleichen Standpunkt ein wie Beguelin. Werden allgemein n Nummern angenommen, von denen r gezogen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit bei der Eulerschen Annahme $\binom{n-r+1}{r} : \binom{n}{r}$ für das Nichtauftreten einer Sequenz und $\frac{n}{r}\binom{n-r-1}{r-1} : \binom{n}{r}$ bei der Bernoulli-Beguelinschen. Beguelin gibt eine mechanische Aufstellung der möglichen Ziehungen ohne Sequenz, die an die Hindenburgschen kombinatorischen Regeln erinnert und „involutorisch" genannt werden kann. Wir wollen an einem Beispiele zeigen, in welcher Weise Beguelin vorgeht. Für $n = 6$ und $r = 2$ seien die sequenzlosen Ziehungen gegeben. Es sind

13, 14, 15, 16, 24, 25, 26, 35, 36, 46.

Um die für $n = 7$ und $r = 3$ zu erhalten, behalten wir aus den soeben aufgestellten alle bei, die nicht mit 1 beginnen, also die sechs letzten, erhöhen jede eingehende Nummer um 1, so daß 35, 36, 37, 46, 47, 57 entsteht, und schreiben eine 1 vor jeden dieser Komplexe. Das gibt alle die sequenzlosen Kombinationen für $n = 7$, $r = 3$, die mit einer 1 beginnen:

135, 136, 137, 146, 147, 157.

Unter jede dieser, allgemein mit a, b, c bezeichneten Kombinationen wird nun $a+1$, $b+1$, $c+1$ geschrieben; unter die so entstehenden in eine dritte Zeile $a+2$, $b+2$, $c+2$, usf. bis in der letzten, dritten Nummer des Tripels die höchste Zahl 7 erreicht wird. Die vollständige Tabelle lautet dann

135, 136, 137, 146, 147, 157,
246, 247, 257,
357.

Das sind unter der Eulerschen Annahme die 10 sequenzlosen Kombinationen; die 7 Bernoullischen erhält man durch Tilgung der dritten, fünften und sechsten dieser 6 Spalten. Wie es sein muß, ist den obigen Formeln entsprechend

$$10 = \binom{7-3+1}{3} \quad \text{und} \quad 7 = \frac{7}{3}\binom{7-3-1}{2}.$$

Laplace hat im „Mémoire sur les suites récurrentes et leurs usages dans la théorie des hasards"[1]) Probleme behandelt, die Euler in Zusammenhang mit der Genueser Zahlenlotterie bringt und in folgender Fassung vorträgt (Opusc. analyt. II, 1785, p. 331—346): Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach Beendigung einer gegebenen Anzahl von Ziehungen alle 90 Nummern als Gewinnummern zum Vorschein gekommen sind, oder gerade 89 von ihnen, oder 88, oder weniger? Wie groß ist die Anzahl der Ziehungen, nach denen die Wahrscheinlichkeit, daß alle 90 erschienen sind, ebenso groß ist wie die, daß sie nicht erschienen sind? Bei der ersten angegebenen Problemreihe fügt Euler noch als erschwerenden Zusatz das Wörtchen „wenigstens" ein: wenigstens 89, wenigstens 88. Ist n die Anzahl der Nummern, r die Anzahl der jedesmal gezogenen, k die Anzahl der Ziehungen, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in k Ziehungen jede der n Nummern erscheint

$$\left\{\binom{n}{r}^k - n\binom{n-1}{r}^k + \binom{n}{2}\binom{n-2}{r}^k - \cdots\right\} : \binom{n}{r}^k.$$

Aus der Bedeutung dieses Ausdruckes schließt man den arithmetischen Satz, daß der Dividend den Wert Null besitzt, sobald $n > r \cdot k$ ist.

Hierher gehört auch die folgende Aufgabe: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, mit einem Würfel von n Flächen in q Würfen einmal der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ zu werfen? J. Trembley behandelt diese Frage[2]) und gibt die Lösung induktiv ohne Beweis: Ist w die gesuchte Wahrscheinlichkeit, so findet er

[1]) Mém. prés. p. div. Savans à l'Acad. de Paris VI, 1775, p. 353. [2]) Arch. f. reine u. angew. Math. herausgeg. v. Hindenburg, 1799, Heft 10, S. 123 bis 137.

$1 - w = \frac{(q)}{n^q}$, wo (q) der Koeffizient von x^q in der, nach steigenden Potenzen von x fortschreitenden Entwicklung des Bruches $\frac{1}{1 - nx + x^n}$ ist. Auch Laplace hat das gleiche Problem behandelt[1]) und die Differenzengleichung hergeleitet, von der seine Lösung abhängig ist. Für $n = 2$ gibt er $w = 1 - \frac{q+1}{2^q}$ als Lösung, was mit dem Trembleyschen Resultate übereinstimmt. Der Laplacesche Aufsatz behandelt in seinem zweiten Teile noch mehrere andere auf Spiele, ihre Dauer und ihr Abbrechen bezügliche Probleme.

Von der Behandlung der Lotterien führt ein kleiner Schritt zu den sozialwissenschaftlichen Zweigen, die sich auf die Statistik stützen und der Mathematik als Hilfswissenschaft bedürfen. Wir können nur in größter Kürze auf diesen Gegenstand eingehen; behufs weiteren und tieferen Eindringens verweisen wir auf die Schrift „Histoire du calcul des probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours" par Charles Gouraud, Paris 1848, die gerade auf diese, der reinen Mathematik ferner liegenden Partien liebevoll eingeht.

Eine Anzahl von Abhandlungen befaßt sich mit den verderblichen Wirkungen der Pocken und mit der Schutzimpfung gegen sie. Daniel Bernoulli kommt in der Abhandlung: „Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et les avantages de l'inoculation pour la prévenir" Hist. de l'Acad. à Paris 1760 (1766), p. 1—45 auf diese, für die damalige Zeit eminent wichtigen Fragen, und der Hauptzweck seiner Arbeit ist der, die durch die Pocken hervorgerufene erhöhte Sterblichkeit in den verschiedenen Lebensaltern zahlenmäßig festzulegen. Das hätte durch eine sorgfältige Statistik ohne besondere Schwierigkeiten geschehen können; aber es mangelte gerade an den notwendigen statistischen Daten, und diese Lücke sucht D. Bernoulli durch Formeln auszufüllen, die auf Grund theoretischer Betrachtungen über Wahrscheinlichkeit aufgestellt werden. Bernoulli nimmt an, daß von je n Personen 1 von den Pocken befallen werde, und daß von je m Befallenen 1 daran sterbe. Die Zahlen m und n betrachtet er als konstant, d. h. als vom Alter der in Frage stehenden Personen unabhängig, und zwar setzt er $n = 8$ und $m = 8$. Diese Annahmen schienen besonders für das frühe Alter bis zu 25 Jahren durch die Erfahrung so ziemlich gesichert zu sein, boten aber der Kritik d'Alemberts willkommene Angriffspunkte.

Nun mögen von einer Generation ξ Personen das Alter x er-

[1]) Mémoires . . . Paris VII, 1773, p. 37—232.

reichen, und unter ihnen s, die nicht von den Pocken befallen waren; dann stellt Bernoulli nach der oben dargelegten Infinitesimalmethode eine Differentialgleichung zwischen ξ, x und s her, die durch Integration auf das Resultat

$$s = \frac{m\xi}{(m-1)e^{x:n}+1}$$

führt. Bedeutet z die Zahl der unter den ξ Personen im Alter x noch Lebenden unter der Annahme, daß die Pocken nicht vorhanden wären, dann folgt die Bestimmung

$$z = \frac{m\xi}{(m-1)e^{x:n}+1} \cdot e^{x:n},$$

so daß also $z = s \cdot e^{x:n}$ wird. Diese Formeln für s und z ermöglichen die Herstellung der gewünschten Tabellen, sowie den Schluß auf die Nützlichkeit der Pockenimpfung, durch die das durchschnittliche Leben der Bevölkerung verlängert werde. Auch hier setzt die Kritik d'Alemberts wieder ein und stellt, ohne den Nutzen der Impfung zu leugnen, dem Interesse der Gesamtheit das des Einzelnen entgegen, der leicht durch die Impfung geschädigt werden könne[1]).

Seinem Programm gemäß geht J. Trembley unter Aufrechterhaltung der Hypothesen Daniel Bernoullis mit elementaren Mitteln an dieselben Untersuchungen in der Arbeit „Recherches sur la mortalité de la petite vérole" (Mém. de l'Acad. ... à Berlin 1796 [1799], p. 17—38).

Für die Frage nach der mittleren Dauer der Ehen lag ebensowenig ausreichendes statistisches Material vor. Auch hier mußte die Theorie aushelfen. Daniel Bernoulli führt das Problem in seiner einfachsten Gestalt — gleiches Alter der Gatten und gleiche Sterblichkeit für beide Geschlechter — auf folgende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurück („De usu algorithmi infinitesimalis in arte conjectandi specimen"; Nov. comment. . . . Petrop. XII, 1766, 1767 [1768], p. 87—98): In einer Urne befinden sich $2n$ Karten; zwei von ihnen sind mit 1 bezeichnet, zwei mit 2, ... zwei mit n. Es werden m Karten gezogen. Welches ist die wahrscheinlichste Zahl von Paaren, die vollständig in der Urne zurückbleiben? Er findet $\frac{(2n-m)(2n-m-1)}{2(2n-1)}$. Die Übertragung auf das Problem der Ehedauer ist naheliegend; Bernoulli führt es in der Arbeit: „De duratione media matrimoniorum ..." Nov. comment. ... Petrop. XII, p. 99—126 in jener einfachsten, sowie in allgemeinerer Form durch. Mit

[1]) Opuscules II, p. 26—95: Sur l'application du calcul des probabilités de l'inoculation de la petite vérole. — Ibid. IV, p. 283—341: Sur les calculs relatifs à l'inoculation.

ähnlichen Gegenständen beschäftigt sich Johann III. Bernoulli in der Histoire de l'Acad. ... à Berlin 1768 (1770), p. 384—403.

In ähnlicher Weise behandelt D. Bernoulli die Frage nach dem Verhältnis der Geburten von Knaben und Mädchen, der schon de Moivre in seiner „doctrine of chances", p. 243—254 näher getreten war. Bernoulli macht zuerst die Hypothese, daß das Überwiegen der Knabengeburten lediglich Wirkung des Zufalls sei; dann die, daß in ihr ein Naturgesetz in Erscheinung trete: „Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata" Nov. comment. ... Petrop. XIV, 1, 1769 (1770), p. 1—25 und „Continuatio argumenti ..." ibid. XV, 1770 (1771), p. 3—28; seine Untersuchungen zeigen, daß die größere Wahrscheinlichkeit auf seiten der zweiten Annahme steht, d. h. daß eine natürliche Ursache für die größere Anzahl der Knabengeburten vorhanden sei.

Euler fragt nach der Sterblichkeit und nach der Bevölkerungszunahme (Hist. de l'Acad. ... à Berlin 1760 [1767], p. 144—164); hierauf gründet er Formeln zur Berechnung von Leibrenten, ein Thema, das ihn ibid. p. 165—175 beschäftigt. Es ist nicht möglich, noch angängig, in einer Geschichte der Mathematik alle, auf diese statistischen Fragen bezüglichen Arbeiten zu besprechen, bei denen es sich hauptsächlich um die Herstellung von Tabellen handelt, die praktischen Zwecken dienen sollen. Nur ihrer Verfasser wegen erwähnen wir noch zwei Arbeiten; die eine von Lagrange: „Mémoire sur une question concernante les annuités"; Mém. de l'Acad. ... à Berlin 1792, 1793 (1798), p. 225—246; sie behandelt folgende Frage: Wieviel muß ein Vater jährlich, so lange er lebt und mindestens eins seiner Kinder noch minorenn ist, als Prämie einzahlen, damit nach seinem Tode, aber nur so lange bis alle seine Kinder majorenn sind, eine bestimmte Summe jährlich den Kindern ausgezahlt werde? Die andere Arbeit, auf die wir hinweisen wollen, stammt von de Condorcet: „Suite du mémoire sur le calcul des probabilités", Histoire de l'Acad. ... à Paris 1782 (1785), p. 674. Sie behandelt die folgende Frage: Auf einem Grundstück lasten Pflichten in Gestalt von Abgaben, die nicht zu bestimmten Zeiten fällig sind, sondern beim Eintritte von Ereignissen fällig werden, die in gewisser Weise vom Zufalle abhängig sind; dazu gehört z. B. der Übergang des Besitzes in andere Hände, sei es durch Verkauf, sei es durch Erbschaft. Diese Ereignisse können demnach entweder nur möglicherweise eintreten oder auch notwendigerweise. Es soll der Ablösungswert einer solchen Last bestimmt werden.

Wir kommen nun zu der Darstellung eines weiteren, wichtigen Prinzips, das der Wahrscheinlichkeitsrechnung neue Bahnen eröffnete.

Jakob Bernoulli hatte gezeigt, daß, wenn bei einem Versuche eins der beiden sich ausschließenden Ereignisse A, B eintreffen muß; wenn ferner die Wahrscheinlichkeit des ersten dabei gleich p und die des zweiten gleich $q = 1 - p$ ist; wenn endlich bei $(m + n)$ Versuchen A gerade m mal und B gerade n mal eingetroffen ist: daß dann der Quotient $\frac{m}{n}$ sich bei wachsendem $(m + n)$ dem Quotienten $\frac{p}{q}$ ohne Aufhören nähert. De Moivre hatte noch einen Schritt weiter getan, indem er die Differenz der beiden Quotienten zwischen bestimmte Grenzen einschloß, die einander um so näher rücken, je größer die Anzahl der Beobachtungen ist. Bisher war also die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses das Gegebene gewesen, aus dem Schlüsse über das Eintreffen des Ereignisses sich ziehen ließen. Jetzt wird die umgekehrte Frage aufgeworfen: kann man aus dem Eintreffen eines Ereignisses seine Wahrscheinlichkeit bestimmen? Implizite ist diese Frage bereits bei der Aufstellung von Geburtstabellen von Daniel Bernoulli (siehe oben) gestreift worden; mit vollster Klarheit wurde sie von dem Engländer Bayes aufgeworfen und behandelt. Laplace schreibt darüber[1]): „Bayes' hat direkt die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, daß die durch bereits vollzogene Versuche gegebenen Möglichkeiten zwischen gegebenen Grenzen liegen. Er gelangt dazu auf elegante und sehr geistreiche Art, die freilich ein wenig verwickelt ist.“ Über Thomas Bayes' Lebensumstände haben wir nichts in Erfahrung bringen können, außer daß er Mitglied der Royal Society zu London war und vor Ende November 1763 starb. Seine Abhandlung: „An essay towards solving a problem in the doctrine of chances“ wurde nach seinem Tode unter hinterlassenen Papieren gefunden und durch Vermittlung seines Freundes Richard Price (1723—1791), der sich durch Aufstellung von Lebensversicherungsberechnungen als Fachmann bekannt gemacht hatte, in den P. T. LIII, 1763, p. 370[2]) veröffentlicht; Price selbst schrieb eine Einleitung, Erläuterungen und Beweise zu dieser Abhandlung.

Bayes beginnt mit der Fixierung des Problems: „Es ist bekannt, wie oft bei einer Anzahl von Versuchen ein Ereignis eingetroffen und wie oft es ausgeblieben ist; gesucht wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Wahrscheinlichkeit seines Eintreffens in einem einzelnen Versuche zwischen zwei gegebenen Grenzen liege“.

Die Behandlung des Problems geschieht auf geometrischem Wege. Auf eine rechtwinklige Tafel $ABCD$ von der Länge $AD = a$ wird eine Kugel geworfen, die in G zur Ruhe kommt; ihre Entfernung

[1]) Théorie analytique des probabilités, 3[me] édit. Paris 1820, p. CXXXVI.
[2]) Nebst Supplement P. T. LIV (1764), p. 296.

von AB sei $x = AF = BH$. Alle Werte von $x = 0$ bis $x = a$ seien für die Ruhelage der Kugel gleich wahrscheinlich. Nun wird eine zweite Kugel auf die Tafel geworfen; ihre Ruhelage habe von AB die Entfernung ξ. Der Wurf der zweiten Kugel finde $(m + n)$ mal statt. Es soll, bevor die erste Kugel geworfen ist, die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden, daß x zwischen zwei gegebene Grenzen $b = AK$ und $c = AN$ fällt, und daß sich dann m mal $\xi < x$ und n mal $\xi > x$ bei den Würfen mit der zweiten Kugel herausstellt. Bayes zeichnet über AD eine Kurve mit der Ordinate $y = x^p(a - x)^q$ und zeigt, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit, abgesehen von einem konstanten Faktor,

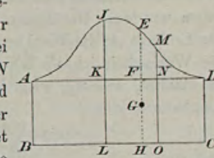

Fig. 2.

$$= KJMNK$$

wird. Nimmt man $b = 0$, $c = a$, so wird die Wahrscheinlichkeit

$$= AJEMDNKA.$$

Da diese Wahrscheinlichkeit $= 1$, d. h. Gewißheit wird, so bestimmt sich dadurch der konstante Faktor. Daraus folgert Bayes: Wissen wir, daß bei den $(m + n)$ Würfen der zweiten Kugel m mal $\xi < x$ und n mal $\xi > x$ gewesen ist, dann wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $b < x < c$ ist gleich dem Quotienten der Flächen $KJMNK$ und $AJEMDA$, oder in unserer Schreibweise

$$= \frac{\int\limits_b^c x^p (a - x)^q \, dx}{\int\limits_0^a x^p (a - x)^q \, dx}.$$

Man kann Laplace nur beistimmen, wenn er diese Schlüsse ein wenig verwickelt nennt.

Laplace stellt seinerseits das Prinzip, auf das sich die Untersuchung der Wahrscheinlichkeit von Ursachen aufbaut, an den Beginn seiner Abhandlung[1]). Er gibt ihm die Form: Ist ein Ereignis A die Folge einer der n Ursachen $B_1, B_2, \ldots, B_n$, derart daß jedes B_i dem Eintreffen von A die Wahrscheinlichkeit w_i erteilt, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B_α das Eintreffen von A hervorgerufen hat, $w_\alpha : \Sigma w_i$. Laplace erklärt dies Prinzip an einem Beispiele: Es

[1]) Mémoires . . . Acad. des sciences à Paris VI (1774), p. 621.

seien zwei Urnen B_1 und B_2 vorhanden; B_1 enthalte p weiße und q schwarze Kugeln; B_2 enthalte p' weiße und q' schwarze. Aus einer, aber unbekannt aus welcher Urne werden $(f+h)$ Kugeln gezogen; dabei sind f weiße und h schwarze herausgekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie aus B_1, wie groß die, daß sie aus B_2 gezogen wurden? Das Ziehen der f weißen und h schwarzen Kugeln ist das Ereignis A; die Wahl von B_1 oder die von B_2 die Ursache; w_1 wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, wenn es aus der Wahl von B_1 stammt, und w_2, wenn es aus der von B_2 stammt; also ist, wie Laplace angibt,

$$w_1 = \frac{(f+h)!\,(p+q-f-h)!\,p!\,q!}{(p+q)!\,(p-f)!\,(q-h)!\,f!\,h!}$$

und ebenso

$$w_2 = \frac{(f+h)!\,(p'+q'-f-h)!\,p'!\,q'!}{(p'+q')!\,p'-f)!\,(q'-h)!\,f!\,h!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B_1 die Ursache des Ereignisses war, ist dann $\frac{w_1}{w_1+w_2}$.

Laplace geht darauf zu der Aufgabe über: wenn eine Urne unendlich viele weiße und schwarze Bälle in unbekanntem Verhältnis enthält, und wenn bei der Ziehung von $(p+q)$ Kugeln p weiße und q schwarze erschienen sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine neue Ziehung eine weiße Kugel liefern wird? Hier ist die Anzahl der möglichen Ursachen, dem unbekannten Verhältnisse entsprechend, unendlich groß. Als Resultat ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{p+1}{p+q+2}$. — Unter den gleichen Verhältnissen können die Zahlen p und q so hoch genommen werden, daß mit einer an Gewißheit streifenden Wahrscheinlichkeit behauptet werden kann, das Verhältnis der weißen zu sämtlichen Kugeln der Urne liege zwischen $\frac{p}{p+q} - \omega$ und $\frac{p}{p+q} + \omega$, wo ω beliebig klein gemacht werden kann. — Auf diesen wichtigen Satz war auch Price (l. c. LIV, p. 317 Anm.) schon gekommen; da Laplace in seiner ersten Publikation 1774 weder Bayes noch Price erwähnt, läßt sich wohl annehmen, daß ihm ihre Untersuchungen damals noch unbekannt waren; zum ersten Male werden beide englische Mathematiker im Zusammenhange mit Laplace in der Inhaltsangabe erwähnt, die der Arbeit des französischen Forschers in der Histoire de l'Acad. . . . Paris 1778 (1781), p. 43 vorausgeschickt ist. Die Arbeit ist von 1780 datiert. Zu ähnlichen Resultaten gelangt auch Condorcet, auf dessen Leistungen wir bald genauer einzugehen haben werden, in einem Aufsatze der Hist. de l'Acad. . . . Paris 1783 (1786), p. 539. — J. Trembley hat sich ebenfalls mit diesen Fragen beschäftigt, wieder

in der Absicht, ohne Verwendung der höheren Mathematik die Resultate abzuleiten, wie wir das schon früher erwähnten. Seine Arbeit „De probabilitate causarum ab effectibus oriunda" findet sich in den Comm. Soc. Reg. Gotting. XIII, 1795—1798 (1799), p. 64—119; sie vermeidet tiefer liegende Hilfsmittel nur auf Kosten der Kürze und Übersichtlichkeit.

Im vierten Abschnitt seines „Mémoire sur le calcul de probabilités" Histoire de l'Acad. des sciences à Paris 1783 (1786), p. 539 stößt auch Condorcet auf diese Fragen. Er macht auf folgendes aufmerksam. Wenn bei 100000 Versuchen das Ereignis A 51000 mal und das Ereignis B 49000 mal eingetreten ist, so wird das Problem über die Wahrscheinlichkeit des Ausfalls der weiteren Ziehungen verschieden sein, je nachdem jene 51000 Ereignisse stattgefunden haben; wenn nämlich in je 100 aufeinander folgenden Versuchen durchschnittlich 51 mal A und 49 mal B erschienen ist, so wird der gesunde Verstand andere Erwartungen über die folgenden Ereignisse hegen, als wenn in den ersten Serien von je 100 Versuchen A stark überwogen hat, dann dieses Überwiegen aber abnahm, und dafür allmählich das Ereignis B häufiger und häufiger auftrat. Bei beiden Annahmen gibt die Bayessche Formel jedoch das gleiche Resultat. Sie erscheint daher nur dann anwendbar, wenn die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A wenigstens durchschnittlich den gleichen Wert beibehält. Auf die Fälle, in denen das nicht eintrifft, wendet Condorcet seine Aufmerksamkeit. Er stellt analog der Bayesschen Formel zwei andere auf; die eine bezieht sich auf den Fall, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A zwar veränderlich ist, jedoch nicht von der Folge der Versuchsausfälle abhängig erscheint; die zweite Formel läßt die Wahrscheinlichkeit auch von der Folge der Ereignisse abhängig sein. Die Wahrscheinlichkeiten stellen sich als Quotienten aus vielfachen Integralen dar. Sie liefern z. B. das Resultat: Ist A dreimal eingetreten, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines vierten Eintretens $\frac{4}{5} = 0{,}8$, wenn die Wahrscheinlichkeit konstant ist; $\frac{51}{84} = 0{,}607$, wenn sie zwar veränderlich, allein von der Folge der Ereignisse unabhängig ist; $\frac{1799}{3000} = 0{,}599$, wenn die Folge des Ereignisses als auf die Wahrscheinlichkeit wirkend angesehen wird.

In der Abhandlung „Mémoire sur les probabilités" datiert vom 19. Juli 1780 in der Hist. . . . à Paris für 1778 macht Laplace darauf aufmerksam, daß in gewisser Art, aber anders als d'Alembert es sich dachte, künftige Ereignisse von früheren abhängig erscheinen, insofern nämlich als durch den Ausfall der früheren die Anschauung und die Kenntnis der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens der späteren korrigiert und erweitert werde. Im Artikel XIV dieser Abhandlung heißt es bei der Besprechung des Ausfalles fortgesetzter Spiele zweier Personen, daß man durch die Folge der Ereignisse neue Aufschlüsse über ihre Geschicklichkeiten erhalten könne, derart daß sie bei unendlich vielen Spielen genau bekannt werden. „Unter diesem Gesichtspunkte läßt sich nicht bezweifeln, daß frühere Ereignisse auf die Wahrscheinlichkeit späterer Einfluß haben."

Das gibt Laplace Veranlassung, diesen Einfluß zu untersuchen und so zu der Bayesschen Regel zu gelangen. Die dazu nötigen Schlüsse hat Laplace wiederholt vorgetragen. Wir gehen sofort darauf ein; nur erwähnen wir erst noch, daß in Artikel XVI der besprochenen Abhandlung dieser Einfluß an dem Beispiele zweier Spieler erläutert wird: B hat die erste Partie gewonnen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß A die beiden folgenden gewinnt? Es stellt sich heraus, daß unter Berücksichtigung der Verschiedenheiten der Geschicklichkeiten diese Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{4}$ ist.

Laplace kommt in seinem „Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres", Art. IV (Hist. de l'Acad. . . . à Paris 1783 [1786], p. 423), auf die Begründung der Bayesschen Regel zurück und leitet sie mit größter Einfachheit ab. Er geht dabei folgenden Weg: Bezeichnen e und E zwei Ereignisse, p und W ihre Wahrscheinlichkeiten, und hat das gleichzeitige Eintreffen von e und von E die Wahrscheinlichkeit v, so ist $v = p \cdot V$; $p = \frac{v}{V}$. „Die gesamte Theorie der Ursachen und der zukünftigen Ereignisse, erschlossen aus den bereits eingetretenen, fließt mit großer Leichtigkeit aus dieser Formel" (p. 428). Nämlich so:

Es möge E Folge eines der Ereignisse $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ sein; e_λ gebe dem Erscheinen von E die Wahrscheinlichkeit a_λ. A priori mögen alle e_λ gleiche Wahrscheinlichkeiten, d. h. jedes die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ haben; dann hat das Zusammentreffen von e_λ und E die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n} a_\lambda$ und daraus folgt für die Wahrscheinlichkeit von E

$$V = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n).$$

Bezeichnet p_λ die Wahrscheinlichkeit, daß e_λ die Ursache von E war, und bedenkt man, daß $\frac{1}{n} a_\lambda$ die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von e_λ und E, also gleich v_λ ist, so wird nach der obigen Elementarformel

$$p_\lambda = \frac{v_\lambda}{V} = \frac{\frac{1}{n} a_\lambda}{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = \frac{a_\lambda}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Das ist die Bayessche Regel.

Auch hier gibt Laplace ein sehr treffendes Beispiel: Eine Urne enthält drei Kugeln, schwarze oder weiße. Es wird blindlings eine Kugel gezogen; diese wird wieder in die Urne getan und dann eine neue Ziehung vorgenommen. In m aufeinander folgenden Ziehungen sind nur weiße Kugeln zum Vorschein gekommen. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die Urne nur weiße, oder 2 weiße und 1 schwarze, oder 1 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält? Nimmt man für e_1, e_2, e_3 diese 3 Möglichkeiten, so wird $a_1 = 1$, $a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^m$, $a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^m$, und

$$p_1 = \frac{3^m}{1 + 2^m + 3^m}, \quad p_2 = \frac{2^m}{1 + 2^m + 3^m}, \quad p_3 = \frac{1^m}{1 + 2^m + 3^m}.$$

Laplace bemerkt weiter, daß die genaue Wahrscheinlichkeit der meisten einfachen Ereignisse uns unbekannt, also für uns jedes Wertes zwischen 0 und 1 fähig sei. Sie heiße x; die Wahrscheinlichkeit von E unter der Geltung von x sei $f(x)dx$; dann geht die obige Formel für p_λ nach Erweiterung mit dx über in

$$p_x = \frac{f(x)\,dx}{\int\limits_0^1 f(x)\,dx},$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß x zwischen den beiden Grenzen θ und θ_1 liegt, ist gleich dem Quotienten

$$\int\limits_{\theta_1}^{\theta} f(x)\,dx : \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

θ und θ_1 werden nahe dem Werte a, diesen einschließend, gewählt, wo $x = a$ die Funktion $f(x)$ zu einem Maximum macht; und dann läßt sich zeigen, wie die Wiederholung einfacher Ereignisse durch ihren Ausfall Schlüsse auf ihre Wahrscheinlichkeit ermöglicht.

Laplace wendet dann die erhaltenen Theoreme auf das Problem der Knaben- und Mädchen-Geburten an (vgl. S. 239) und benutzt für die wirkliche Berechnung der unbekannten Wahrscheinlichkeiten die in dem früheren Teile des Mémoire (Hist. . . . Paris 1782, p. 1—88) hergeleiteten Näherungsformeln für die Integrale der angegebenen Formen.

Dann geht er auf weitere theoretische Untersuchungen darüber ein, wie aus dem Vorkommen früherer Ereignisse auf das Eintreten späterer Schlüsse möglich sind. Ist $\varphi(x)$ die Wahrscheinlichkeit des zukünftigen Ereignisses, a priori betrachtet, und P die, aus den beobachteten früheren Resultaten erschlossene Wahrscheinlichkeit, so ergibt sich

$$P = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx : \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Auch diese Formel wird auf das typische Beispiel vom Ziehen einer Kugel aus einer Urne angewendet: ist einmal eine weiße Kugel gezogen, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das weitere Erscheinen von n schwarzen Kugeln

$$P = \int_0^1 x(1-x)^n dx : \int_0^1 x\,dx = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Von der Methode der Bestimmung zukünftiger Ereignisse durch den Ausfall früherer macht Laplace auch in dem Aufsatze „Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris“ (Hist. de l'Acad. 1773 [1776], p. 693—702) Gebrauch, um die Ergebnisse von Volkszählungen, die in einzelnen Distrikten Frankreichs vorgenommen wurden, verallgemeinernd zu verwerten. Aus ihnen sollte die Bevölkerung des ganzen Reiches bestimmt werden. Das konnte mit Hilfe von Geburtstabellen für das gesamte Gebiet geschehen, wenn das aus jenen Distrikten erhaltene Verhältnis zwischen Geburten und Lebenden für das ganze Reich Gültigkeit beanspruchen darf. Laplace erörtert, mit welcher Wahrscheinlichkeit man eine solche Annahme machen dürfe. Er reduziert sie auf das Urnenschema: In einer Urne befinden sich unendlich viele schwarze und weiße Kugeln in unbekanntem Verhältnisse. In einer ersten Ziehungsserie werden p weiße und q schwarze Kugeln gezogen; in einer zweiten q_1 schwarze, wieviel weiße ist unbekannt. Dabei ist es am naturgemäßesten, anzunehmen, daß die Zahl p_1 der weißen das Verhältnis befriedigt $p:q = p_1 : q_1$, also $p_1 = \frac{pq_1}{q}$ wird. Es wird nun die Wahrscheinlichkeit P dafür bestimmt, daß für den wahren Wert p_1 die Eingrenzung

$$\frac{pq_1}{q}(1-\omega) < p_1 < \frac{pq_1}{q}(1+\omega)$$

bei kleinem ω gilt. Bis auf Größen der Ordnung ω^4 wird

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \int_\alpha^\infty dt\, e^{-t^2} \quad \left(\alpha = \frac{pqq_1\omega^2}{2(p+p_1)(q+q_1)}\right).$$

Auch in dem Aufsatze der Histoire de l'Acad. ... Paris 1778, p. 227 geht Laplace auf das Problem des Geburtsverhältnisses von Knaben und Mädchen ausführlich ein.

Eine weitere Frage zieht, sowohl wegen der Untersuchungen, zu denen sie in unserem Zeitraume selbst Anlaß gab, als auch wegen ihrer praktischen Wichtigkeit unsere Aufmerksamkeit auf sich. Zudem gab sie den ersten Anstoß zur Theorie der Beobachtungsfehler. Ist eine Größe mehrfach beobachtet, dann werden die Resultate der einzelnen Beobachtungen i. a. nicht miteinander übereinstimmen, so z. B. wenn die Länge einer Strecke oder die Größe eines Winkels gemessen worden ist. Als das wahrscheinlichste Resultat hat man dann, wenn die Beobachtungen als gleichwertig eingeschätzt werden, das arithmetische Mittel der Einzelbeobachtungen angesehen. Es ist die Frage, mit welchem Rechte das geschieht. Davon war (diese Vorlesungen III², S. 640—641) im Anschluß an eine Abhandlung von Th. Simpson schon die Rede; Lagrange nimmt (Miscellanea Taurinensia V, 1770—1773, p. 167—232)[1]), wahrscheinlich ohne Kenntnis jener früheren Untersuchung zu haben, das Problem wieder auf und führt die Behandlung ähnlich wie Simpson durch. Er setzt den wahren Wert der zu beobachtenden Größe und die begangenen Beobachtungsfehler als gegeben voraus, kann daraus das Mittel der Beobachtungen berechnen und darauf hin bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Mittel den genauen Wert gibt, und mit welcher Wahrscheinlichkeit bei seiner Annahme ein Fehler von gegebener Größe begangen wird. Liegen z. B. Fehler nur von den Größen $+1, 0, -1$ vor, gilt gleiche Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von jeder der drei Sorten, und hat man n Beobachtungen gemacht, dann ist für die Annahme

$$n = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \ldots$$

$$\text{die Wahrscheinlichkeit} = \frac{243}{729}, \frac{243}{729}, \frac{139}{729}, \frac{171}{729}, \frac{153}{729}, \frac{141}{729}, \ldots$$

dafür, daß das Mittel den wahren Wert gibt. Es scheint auf Grund dieser Zahlen unvorteilhaft, die Anzahl der Beobachtungen über 2 steigen zu lassen; allein, wenn man nach der Wahrscheinlichkeit fragt, daß der bei der Annahme des Mittels gemachte Fehler den Betrag $\frac{1}{2}$ nicht übersteigt, dann findet sich für die Annahme

$$n = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \ldots$$

$$\text{die Wahrscheinlichkeit} = \frac{243}{729}, \frac{567}{729}, \frac{513}{729}, \frac{639}{729}, \frac{603}{729}, \frac{673}{729}, \ldots.$$

Es ist also in Wirklichkeit vorteilhaft, n als große und als gerade

[1]) Oeuvres publ. p. Serret, II, Paris 1868, p. 171.

Zahl anzunehmen. In den ersten acht der zehn Probleme, mit denen seine Abhandlung sich beschäftigt, behandelt Lagrange den Fall, daß eine endliche Anzahl diskreter Fehler begangen sei; von da aus macht er den Übergang zu der, in der Natur begründeten Annahme, daß unendlich viele Fehlermöglichkeiten innerhalb gewisser Grenzen vorliegen. Am Schlusse der Abhandlung geht Lagrange direkt auf diesen natürlichen Fall ein. Dabei führt er den Begriff der Fehlerwahrscheinlichkeit ein, und stützt diesen auf die gemachten Beobachtungen; ist x die Größe des Fehlers, so ist die Fehlerwahrscheinlichkeit y hierfür gleich der Anzahl der Male, in denen x aufgetreten ist, dividiert durch die Gesamtzahl der Beobachtungen. In den gegebenen Beispielen wird einmal y als Konstante, einmal als $y = \text{cst.}(p^2 - x^2)$ angenommen, so daß hier die beiden Grenzen der Fehler $-p$ und $+p$ sind. Die zweite Hypothese für y erklärt Lagrange für die einfachste und naturgemäßeste, die man erdenken könne. Ein letztes Beispiel nimmt $y = \text{cst.} \cos x$ an. Auf eine theoretische Annahme, die zu der jetzt üblichen Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion führen könnte, geht Lagrange nicht ein.

Von ganz anderen Gesichtspunkten läßt sich Daniel Bernoulli in seiner „Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda" (Act. Acad. Petrop. 1777 [1778], p. 3—23) leiten. Kommen, so überlegt er, große Abweichungen unter den Beobachtungen vor, so werden mit einem gewissen Rechte die extremen Resultate weggelassen; das arithmetische Mittel verliert in solchem Falle seine Gültigkeit als wahrscheinlichster Wert. Vor allem ist ein Gesetz für die Wahrscheinlichkeit der Fehler, als eine Funktion ihrer Größe, aufzusuchen. Falls x die Größe des Fehlers und y die Wahrscheinlichkeit seines Eintreffens ist, findet Bernoulli folgende Annahmen über y nötig: a) y muß für $+x$ und $-x$ gleichen Wert haben; b) mit wachsendem x muß y abnehmen; c) im höchsten Punkte der Fehlerkurve $y = f(x)$ muß die Tangente parallel der x-Achse laufen; d) $y = f(x)$ muß auf der x-Achse enden; e) die Tangenten in diesen Endpunkten müssen senkrecht auf der x-Achse stehen. Über d) und e) kann man geteilter Ansicht sein; jedenfalls haben diese Hypothesen sich im Verlaufe der weiteren Entwicklung nicht durchgesetzt. Als Fehlerfunktion $y = f(x)$ wählt der Verfasser einen Halbkreis $y = \text{c.} \sqrt{r^2 - x^2}$, dessen Radius bei jeder Untersuchung experimentell dadurch zu bestimmen ist, daß $-r$ und $+r$ als Grenzen für mögliche negative und positive Fehler genommen werden. Es kommt ferner noch auf die Lage des Halbkreises, d. h. auf die seines Mittelpunktes an, der so festgelegt wird: A, $A + a$, $A + b$, ..., die nach steigender Größe

geordneten Beobachtungen sind gegeben; x ist die Entfernung des Mittelpunktes von A; dann ist die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Vorkommens der Fehler x, $x - a$, $x - b$, ... proportional zu dem Produkte $\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{r^2 - (x - a)^2} \cdot \sqrt{r^2 - (x - b)^2} \ldots = \sqrt{Q}$. Nun wird folgender Schluß gewagt: Da diese Fehler ja wirklich eingetroffen sind, so ist ihre Wahrscheinlichkeit, wie Bernoulli behauptet, ein Maximum; man findet also x dadurch, daß man Q zu einem Maximum macht. Das führt bei n Beobachtungen auf eine Gleichung des Grades $(2n - 1)$. Bei $n = 1$ und 2 liefert diese das arithmetische Mittel; bei $n = 3$ schon nicht mehr.

In seinen Bemerkungen zur eben besprochenen Abhandlung greift Euler (ibid. p. 24—33) die eben hervorgehobene gewagte Behauptung D. Bernoullis an. Er selbst umgeht durch eine geistreiche Wendung die Auflösung der Gleichung des Grades $(2n - 1)$ und zeigt, wie die einer Gleichung dritten Grades in allen Fällen ausreicht.

Auch Laplace nimmt in der oben erwähnten Untersuchung (Mémoires de l'Acad. des Sciences, Paris VI [1774], p. 621) Stellung zu der Frage nach dem arithmetischen Mittel aus einer Reihe von Beobachtungen. Er erklärt (p. 639), die Annahme, die auf das arithmetische Mittel führt, sei „wenig natürlich" und hält es für notwendig, bei feineren Untersuchungen von einer anderen Methode Gebrauch zu machen. Laplace setzt die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von der Größe x gleich $f(x)$; dabei fordert er, daß $f(+x) = f(-x)$ sei; ferner daß die x-Achse eine Asymptote der Kurve $y = f(x)$ werde, und daß die von der x-Achse und der Kurve $y = f(x)$ begrenzte Fläche die Größe 1 besitze. Mit Hilfe einer ganz willkürlichen Annahme wird $f(x) = \frac{1}{2} m e^{-mx}$ gefunden. Merkwürdigerweise übersieht Laplace dabei, daß die erste seiner, für $f(x)$ aufgestellten drei Forderungen durch $y = \frac{1}{2} m e^{-mx}$ nicht befriedigt wird. Zur weiteren Behandlung der Frage verwendet er das von ihm aufgestellte Prinzip über die Wahrscheinlichkeit der Ursachen und kommt auf einem, schon für drei Beobachtungen recht komplizierten Wege zum Ziele. Die Bestimmung des Mittels ist selbst in diesem so einfachen Falle von der Lösung einer Gleichung 15ten Grades abhängig. Einer kleinen von Laplace berechneten Tafel entnehmen wir folgende Resultate: Sind die drei beobachteten Punkte A, B, C; wird stets $AB = 1$ gesetzt und dann $BC = q$; hat endlich das Laplacesche Mittel M die Entfernung $AM = x$ von A, so ergibt sich für

$q = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$x = 0{,}860$	0,894	0,916	0,932	0,944	0,955	0,965	0,975	0,984	0,992	1

Auf mehr als drei Beobachtungen geht die Abhandlung bei der Schwierigkeit der Rechnungen nicht ein.

Auch in seinem „Mémoire sur les probabilités“ vom Jahre 1785 (Histoire de l'Acad. ... Paris, 1778) behandelt Laplace diese Fragen. Er löst dabei zuerst das folgende Problem: „Es seien n positive, stetige Variable $t_1, t_2, \ldots, t_n$ mit der festen Summe s gegeben. Das Gesetz der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen jedes einzelnen t_α sei bekannt. Es soll die Summe der Produkte aller Werte einer gegebenen Funktion $\psi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des betreffenden Wertes ermittelt werden.“ Damit hängt aufs engste das, wie wir S. 248 sahen, schon von Lagrange behandelte Problem zusammen: „Die Wahrscheinlichkeit dafür zu finden, daß die Summe der Fehler bei mehreren Beobachtungen zwischen gegebenen Grenzen liegt, wenn das Fehlergesetz durch eine rationale ganze Funktion gegeben ist.“ Auf die Entdeckung dieses Fehlergesetzes geht nun Laplace (l. c. S. 254; art. XII) aus. Er nimmt an, daß keine Fehler von höherem absoluten Betrage als a vorkommen; ferner daß gleich große positive und negative Fehler mit gleich großer Wahrscheinlichkeit auftreten; endlich daß die Wahrscheinlichkeit bei stetig wachsender Fehlergröße stetig abnimmt. Hierauf teilt er die Strecke, auf der die n Fehler als Abszissen repräsentiert werden, von 0 bis a in n gleiche Teile und errichtet in der Mitte eines jeden Teils ein Lot, das die entsprechende, zur Abszisse gehörende Wahrscheinlichkeit darstellt. Da die Fehlerkurve mit der Achse eine Fläche von konstantem Inhalte 1 bildet, so muß auch die Summe der errichteten Ordinaten konstant sein: diese Summe denkt sich jetzt Laplace auf alle möglichen Weisen in n ihrer Größe nach geordnete Längenteile zerlegt; dann entspricht jeder solchen Zerlegung eine Fehlerkurve oder genauer ein Fehlerpolygon. Von allen möglichen, so konstruierbaren wird ein „mittleres“ Polygon genommen; und diese Annahme wird durch die Gleichberechtigung aller konstruierten Fehlerkurven begründet. Läßt man dann n ins Unendliche wachsen, so gelangt man zu der Kurve, die das Fehlergesetz mit der größten Wahrscheinlichkeit darstellt. Laplace findet für diese Kurve die Gleichung

$$y = \frac{1}{2a} \log \frac{a}{x}.$$

Dabei ist jedoch anzunehmen, daß für negative x in den Nenner des Logarithmus-Arguments die entgegengesetzt gleiche positive Größe eingetragen wird. Über die bei der Abszisse $x = 0$ auftauchende Schwierigkeit geht Laplace hinweg; ebensowenig stört ihn der Umstand, daß für $x > a$ reelle negative y auftreten.

Die erhaltene Lösung benutzt Laplace am Schlusse seiner umfangreichen Abhandlung bei der Bestimmung des vorteilhaftesten Mittelwertes, der aus mehreren Beobachtungen zu nehmen ist, also bei dem S. 248, 249 besprochenen, schon von Laplace selbst, dann von Lagrange, von D. Bernoulli und Euler behandelten Probleme. Hier macht Laplace die erschwerende Voraussetzung, daß die n einzelnen Beobachtungen eines Phänomens von n verschiedenen Personen herrühren, also auch verschiedenen Fehlergesetzen unterliegen. Diese Gesetze seien durch $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x), \ldots, y = \varphi_n(x)$ repräsentiert; die Beobachtungsresultate seien in steigender Größe angeordnet, und die Differenz des zweiten Resultats gegen das erste, des dritten gegen das zweite, usw. seien $p_2, p_3, \ldots, p_n$. Dann bezeichnet Laplace die Kurve

$$z = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(p_2 - x) \ldots \varphi_n(p_n - x)$$

als Kurve der Wahrscheinlichkeiten, „courbe des probabilités“, und bestimmt als vorteilhaftesten Mittelwert den Wert x, der die zwischen der x-Achse und dieser Kurve gelegene Fläche halbiert. Dabei macht Laplace ausdrücklich darauf aufmerksam, daß der Begriff „Mittelwert“ durchaus nichts fest Bestimmtes ist, indem „das mittlere Resultat“ einer Reihe von Beobachtungen auf unendlich viele Arten definiert werden kann. — Die einzelnen φ unterscheiden sich nur durch die Werte des a voneinander, so daß man hat

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2a_1} \log \frac{a_1}{x}, \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2a_2} \log \frac{a_2}{x}, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{2a_n} \log \frac{a_n}{x}.$$

Setzt man alle a gleich ∞, so gelangt man zum arithmetischen Mittel. Das Gleiche tritt auch in einem allgemeineren Falle ein, den wir aber als zu verwickelt übergehen.

Die vorgetragene Theorie wird endlich auch noch zur Ableitung einer Regel für die Korrektion von Beobachtungsinstrumenten benutzt. —

Wir gehen nunmehr zu der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf soziale Fragen über, auf Fragen über die Richtigkeit von Urteilssprüchen, über Einführung von Gesetzen, über Einrichtung von Gerichtshöfen, über Wahlen. Dieser ganze Zweig wurde hauptsächlich von dem französischen Mathematiker Condorcet geschaffen und gepflegt, dessen wir bereits mehrere Male gedenken mußten. Da seine Leistungen hauptsächlich auf diesem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegen, so haben wir den Bericht über seinen Lebenslauf bis hierher aufgeschoben. Marie-Jean-Antoine-Nicolas-Caritat marquis de Condorcet wurde am 17. September 1743 in der Picardie als Sproß einer altadligen Familie geboren. Seine Mutter erzog ihn, nach dem frühzeitigen Tode des Vaters, in frömmsten

Anschauungen; acht Jahre hindurch trug er zu Ehren der Jungfrau Maria Mädchenkleider; sein Erzieher war ein Jesuit. Im Collège von Navarra widmete er sich mathematischen Studien und erhielt, sechzehnjährig, in Paris seinen akademischen Grad. Durch seinen „Essai sur le calcul intégral" (1765) und sein „Mémoire sur le problème des trois corps" (1768) gelangte er zu hohem Ansehen. 1769 wurde er zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. Turgot und Voltaire waren ihm eng befreundet; mit dem ersten betrieb er nationalökonomische Untersuchungen; mit dem zweiten behandelte er literarische Fragen. 1782 wurde er Mitglied der Académie française. Es beseelte ihn eine durchaus liberale, für die Fortschritte der Menschheit begeisterte, für die Verbesserung ihrer Lage eintretende Gesinnung. Unter und mit Turgot hatte er für Reformideen gekämpft, hatte gegen die Sklaverei der Neger, gegen die Zurücksetzung der Calvinisten geschrieben; er hatte öffentlich gegen ungerechte Entscheidungen des Parlaments, gegen ungerechte Verurteilungen der Gerichte protestiert. 1789 schloß er sich der Revolutionspartei an. Er wurde 1791 zum Kommissar der Schatzkammer ernannt, dann in die gesetzgebende Versammlung gewählt und 1792 sogar Präsident derselben. Im Prozeß gegen den König stimmte Condorcet für die härteste Strafe nach der Todesstrafe. Er stand auf der Seite der Girondisten und flüchtete, um der Verhaftung zu entgehen, 1793 nach ihrem Sturze. Acht Monate hindurch lebte er in einem Verstecke in Paris und verfaßte dort mehrere sozial-wissenschaftliche Schriften. Durch einen anonymen Brief gewarnt, verließ er sein Asyl im April 1794, fand den Schutz, den er erhofft hatte, nicht, irrte zwei Tage lang umher und wurde als verdächtig in Clamart angehalten. Im Verhör legte er sich einen falschen Namen bei. Unerkannt wurde er nach Bourg la Reine transportiert und dort im Gefängnisse am nächsten Tage tot aufgefunden; wahrscheinlich hatte er Gift genommen. Mehrere Monate hindurch blieb infolge des falschen Namens seiner Familie sein Geschick unbekannt; nur dank einer, beim Gestorbenen aufgefundenen Uhr konnte seine Person festgestellt werden.

Charakteristisch für ihn ist das Wort d'Alemberts, das ihn als „un volcan couvert de neige" bezeichnete. Auch für seine wissenschaftlichen Bestrebungen gilt d'Alemberts Ausspruch. Condorcet war von heiligem Eifer für das Wohl der gesamten Menschheit durchglüht und von ihrer unbeschränkten Vervollkommnungsfähigkeit überzeugt, auf ethischem wie auf wissenschaftlichem Gebiete. Von diesen Gesichtspunkten aus ist sein Hauptwerk zu betrachten und zu beurteilen; ihm dient die Mathematik darin als Mittel, die Wohlfahrt und die Wahrheit zu fördern. Es trägt den Titel: „Essai sur l'appli-

cation de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix" und ist im Jahre 1785 zu Paris erschienen. Es besteht aus einem „Discours préliminaire" von 191 Seiten und dem eigentlichen Werke von 304 Seiten. Der „Discours" liefert eine, dem Werke parallel laufende, eingehende und erläuternde Inhaltsangabe unter Ausschaltung der mathematischen Ableitungen, die das Werk selbst gibt. Eine kurze Einführung in die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet den Anfang des Discours. Das eigentliche Werk zerfällt in vier Teile.

Bei der Wahrscheinlichkeit von Entscheidungen beachtet Condorcet folgende Hauptpunkte: 1) die Wahrscheinlichkeit, daß eine Versammlung keine falsche Entscheidung abgibt; 2) die, daß sie eine richtige abgibt; 3) die, daß sie überhaupt eine abgibt; 4) die, daß eine abgegebene Entscheidung richtig ist. Der Unterschied von 1) und 2) liegt darin, daß 1) auch den Fall umfaßt, in dem keine Entscheidung erfolgt.

Im ersten Teile werden diese Fragen unter verschiedenen Annahmen über den Abstimmungsmodus untersucht. Es wird der Reihe nach vorausgesetzt: 1) die Anzahl der Abstimmenden ist ungerade; man sucht die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des Urteils, wenn nach absoluter Majorität beschlossen wird; 2) wenn eine vorgeschriebene Majorität von $(2q_1 + 1)$ Stimmen zum Beschluß nötig ist; 3) wenn bei gerader Anzahl der Abstimmenden eine Majorität von $2q_1$ Stimmen gefordert wird; 4) wenn die Majorität einen vorgeschriebenen Prozentsatz der Anzahl der Abstimmenden erreichen, oder 5) wenn die Majorität die Minorität um eine vorgeschriebene Anzahl übertreffen muß; 6) wenn die Abstimmung so lange wiederholt wird, bis man eine vorgeschriebene Majorität erhalten hat; 7) wenn die Entscheidung von den aufeinander folgenden Abstimmungen einer Anzahl von Körperschaften abhängig gemacht wird, usw.

Um ein Bild dieser Untersuchungen zu geben, knüpfen wir an die erste Annahme an. Es sind $(2q + 1)$ Abstimmende vorhanden; alle haben gleiche Geistesschärfe, sind von gleichem Gerechtigkeitsgefühle beseelt und die Abstimmung jedes einzelnen geschieht unbeeinflußt von der der übrigen. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Urteil des einzelnen mit der Wahrheit übereinstimmt, sei gleich v (vérité); daß es falsch sei, gleich e (erreur); also $v + e = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei der Abstimmung mindestens $(q + 1)$ Stimme sich für die Wahrheit ausspricht, sei V_q; daß das Gegenteil eintrete, E_q. Dann wird, wie sofort ersichtlich ist, der Wert von V_q bestimmt als

$$V_q = v^{2q+1} + \binom{2q+1}{1} v^{2q} e + \binom{2q+1}{2} v^{2q-1} e^2 + \cdots + \binom{2q+1}{q} v^{q+1} e^q;$$

und daraus leitet Condorcet den Ausdruck her

$$V_q = v + (v-e)\left[ve + \binom{3}{1} v^2 e^2 + \binom{5}{2} v^3 e^3 + \cdots + \binom{2q-1}{q-1} v^q e^q\right].$$

Ist $v > e$, so wächst V_q zugleich mit q und wird gleich 1 für $q = \infty$. Ist $v < e$, so nimmt V_q bei wachsendem q ab und wird gleich 0 für $q = \infty$. Das rechtfertigt den Schluß: „eine rein demokratische Verfassung ist bei Abstimmungen über Dinge, die den Horizont gewöhnlicher Leute übersteigen, unter allen Verfassungen die schlechteste"; denn bei der Mehrzahl des Volkes ist ja $e > v$. — Für $v = e$ wird $V_q = E_q = \frac{1}{2}$.

V_q und E_q geben die Wahrscheinlichkeiten für die Richtigkeit und die Unrichtigkeit eines abzugebenden Urteils. Ist die Entscheidung aber schon gefällt und die Majorität, mit der sie eintrat $= 2q_1 + 1$ bekannt, dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des abgegebenen Urteils folgendermaßen: für die Richtigkeit sprechen

$$\binom{2q+1}{q-q_1} v^{q+q_1+1} e^{q-q_1},$$

dagegen sprechen

$$\binom{2q+1}{q-q_1} v^{q-q_1} e^{q+q_1+1}$$

Chancen, also ist die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit und die Unrichtigkeit des gefällten Urteils bezw.

$$\frac{v^{2q_1+1}}{v^{2q_1+1}+e^{2q_1+1}} \quad \text{und} \quad \frac{e^{2q_1+1}}{v^{2q_1+1}+e^{2q_1+1}}.$$

In ähnlicher Art wird das Problem unter der zweiten Annahme behandelt, daß eine Majorität von $2q_1 + 1$ Stimme zum Beschluß nötig ist. Dabei stellt sich heraus, daß bei $v > e$ die Werte von V_q zwar im allgemeinen mit wachsendem q zunehmen, daß aber bei kleinen Werten von q Abweichungen von dieser Regel vorkommen können. So liefert bei $v = \frac{2}{3}$, $e = \frac{1}{3}$ und $q_1 = 3$ der Wert $q = 19$ den kleinsten Betrag für V_q; diesen kleinsten Betrag, der eine Funktion von q ist, bezeichnet Condorcet durch M. Es ist bei diesem Abstimmungsmodus also nicht stets geraten, die Anzahl der Abstimmenden zu vermehren.

Im ersten Teile geht Condorcet auch auf Untersuchungen über die Richtigkeit von Wahlen ein und zeigt, daß eine durch Stimmzettel erfolgende Wahl eines unter drei Kandidaten sehr wohl den

Ansichten der Majorität der Abstimmenden direkt entgegengesetzt sein kann. Condorcet war nicht der erste, der auf diese Komplikationen hinwies; Jean Charles de Borda hatte seinen Ideen darüber schon 1770 vor der Akademie Ausdruck gegeben. In der Histoire de l'Acad. ... à Paris wurde 1781 eine von ihm verfaßte, darauf bezügliche Abhandlung gedruckt (S. 617: Mémoire sur les élections au scrutin). Das folgende Beispiel mag die Schwierigkeiten, die bei der Wahl auftreten können, erläutern. Von den drei Kandidaten A, B, C soll durch Abstimmung einer gewählt werden. Es sind 12 Wähler vorhanden, die einzeln die drei Kandidaten in folgende Reihenfolge der Würdigkeit bringen

Wähler	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	A	A	A	A	A	B	B	B	B	C	C	C
	B	B	C	C	C	C	C	C	C	A	B	B
	C	C	B	B	B	A	A	A	A	B	A	A

Hat jeder der Wähler nur einem der Kandidaten seine Stimme zu geben, so erhält A 5 Stimmen, B 4 und C 3; somit ist A gewählt. Legt man aber der dritten Stelle das Gewicht α bei, der zweiten das Gewicht $\alpha + \beta$ und der ersten das Gewicht $\alpha + \beta + \gamma$, so besitzt A das Gewicht $12\alpha + 6\beta + 5\gamma$; B das Gewicht $12\alpha + 8\beta + 4\gamma$ und C endlich das Gewicht $12\alpha + 10\beta + 3\gamma$. Je nach den Werten, die α, β, γ erhalten, kann man A oder C an erste Stelle bringen. So müßte für $\beta = \gamma$ der Kandidat C gewählt sein. $\beta = \gamma$ ist Bordas Annahme, die offenbar ihrer Willkür halber die Schwierigkeit nicht beseitigt. Condorcet beschäftigt sich eingehender mit der Hebung der Schwierigkeit, indem er die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeiten der Gruppierungen heranzieht. Aber auch er scheitert an der Lösung des vollkommenen Widerspruches, der bei solchen Abstimmungen auftreten kann; wenn sich z. B. bei der Abschätzung von je 2 der 4 Kandidaten unter sich eine Majorität für jede der 6 Anordnungen findet, in denen das $>$ Zeichen die Überlegenheit andeuten soll:

$$A > B;\ A > C;\ A > D;\ B > C;\ D > B;\ C > D,$$

so sind die drei letzten Beziehungen unvereinbar.

Der zweite Teil des Essay liefert eine Umkehrung der Aufgaben des ersten Teils; dort waren v, q, q_1 bekannt, und es wurden V_q und M gesucht. Hier nimmt man die letzten Größen als bekannt an und bestimmt aus ihnen die ersten. Um diesem Zwecke zu genügen, werden die Formeln des ersten Teils näherungsweise aufgelöst. Der Verfasser beschäftigt sich dann eingehend mit philosophischen Fragen über die Grundgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung und wiederholt seine Kritik S. 223, 244 der Buffonschen Annahmen.

Im dritten Teile werden zwei Probleme behandelt: durch Versuche soll die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit abgegebener Urteile bestimmt werden; und zweitens soll die Wahrscheinlichkeit festgelegt werden, die notwendig zu fordern ist, damit ein Urteil als gerecht angesehen werden könne. Für die Erledigung des ersten Punktes ist es nötig, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das eintreten soll, aus dem vorhergehenden Verlaufe des Eintretens dieses Ereignisses zu bestimmen; und dies führt direkt auf die Bayessche Theorie. Sie findet sich denn auch in dreizehn Problemen erläutert. Wir führen die ersten derselben an. Von zwei Ereignissen, die so beschaffen sind, daß bei jedem Versuche immer nur eins eintreten kann, aber auch eins eintreten muß, ist bei $(m+n)$ Versuchen das erste A $m$mal, das zweite B $n$mal eingetreten; mit welcher Wahrscheinlichkeit ist bei einem neuen Versuche A zu erwarten, wenn die unbekannten Wahrscheinlichkeiten x und $1-x$ von A und B entweder I. konstant; oder II. veränderlich sind; oder III. wenn über ihre Konstanz oder Veränderlichkeit nichts bekannt ist? — Bei der Besprechung des zweiten Punktes stellt Condorcet, ähnlich wie Buffon, ein Maß auf für die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit von Urteilen, mit der man sich begnügen müsse; er kommt durch merkwürdig verzwickte, an die Lebenshoffnung geknüpfte Betrachtungen zu dem Werte $\frac{144767}{144768} = M$. Setzt man eine Versammlung von $2q+1=61$ Abstimmenden voraus, für deren jeden $v=\frac{4}{5}$ ist, so reicht eine Mehrheit von $2q_1+1=9$ Stimmen, um die Wahrscheinlichkeit des Spruches $> M$ zu machen.

In der Einleitung zum vierten Teile des Werkes gesteht Condorcet ein, daß die für Abstimmungen gemachten allgemeinen Annahmen: unverändertes v, gleiche geistige Stellung, gleiche Wahrheitsliebe, Freiheit von Beeinflussungen der Abstimmenden untereinander — sich allzuweit von der Wirklichkeit entfernen, und er unternimmt es, die wirklichen Verhältnisse mehr, als dies bis dahin geschehen war, in die Rechnung zu bringen.

An vier ausführlich besprochenen Beispielen versucht endlich der fünfte und letzte Teil die Anwendung der aufgestellten Grundsätze zu zeigen. Die Durchführung ist so wenig mathematisch, daß eine weitere Darlegung zu sehr aus dem Rahmen dieser Vorlesungen heraustreten würde.

Es ist schwer, zu dem Werke Condorcets gerechte Stellung zu nehmen: „Bewundert viel und viel gescholten“. Rein mathematisch betrachtet bietet es schon so manchen Angriffspunkt; sein Hauptmangel aber liegt in der Grundansicht, es könne das verwickelte

Leben sich unter so einfache Annahmen einschnüren lassen, wie sie hier aufgestellt werden; einen anderen Mangel finden wir in der Dunkelheit seines Stils und in der Unklarheit seiner Ideen. Manche Beurteiler haben gemeint, Condorcet sei es gelungen, die Lücke auszufüllen, die der vierte Abschnitt der „ars conjectandi“ Jakob Bernoullis aufweist. Dieser geniale Mann wurde durch den Tod gehindert, die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechung auf bürgerliche, moralische und wirtschaftliche Verhältnisse zu liefern, was er beabsichtigte; Condorcet habe nach 72 Jahren die Gedanken Bernoullis durchgeführt. Andere Beurteiler finden Condorcet eher phantastisch als streng, eher enthusiastisch als wissenschaftlich scharf.

Wir müssen noch einen Blick auf die letzten beiden Artikel eines Condorcetschen Aufsatzes über die Wahrscheinlichkeitsrechnung werfen, deren erste Artikel bereits S. 243 besprochen sind. Diese beiden übrigen Artikel handeln über die Wahrscheinlichkeit außerordentlicher Ereignisse (Histoire de l'Acad. des sciences ... à Paris 1783, p. 553, und 1784, p. 454) und über die Glaubwürdigkeit dahin gehender Zeugenaussagen. Die Ausführungen des ersten werden im zweiten zurückgenommen, weil sie zu hypothetisch, zu schwierig, zu wenig dem gesunden Verstande entsprechend seien. Neue, ziemlich unverständliche Betrachtungen werden an ihre Stelle gesetzt und zu einer Untersuchung über die wahrscheinliche Regierungsdauer der sieben Könige von Rom benutzt! Man könnte es wirklich verstehen, wenn jemand solche Anwendungen als einen recht schlechten Scherz auffaßte, nur dazu angetan, die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu diskreditieren.

Reihen.

Wir gehen jetzt zur Theorie der Reihen über. Dabei macht sich eine, in der Natur der Sache liegende Schwierigkeit fühlbar, mehr als in den früheren Epochen. Sie betrifft die Anordnung des Stoffes. Die Verwendung der unendlichen Reihen findet jetzt nämlich nahezu in allen Gebieten der Analysis statt und nimmt an prinzipieller Wichtigkeit mehr und mehr zu; Differential- und Integralrechnung, Differenzenrechnung, Funktionentheorie, Algebra wären ohne die Theorie und die Praxis der unendlichen Reihen eines weittragenden Hilfsmittels beraubt. Eine Darstellung dieser Gebiete, die die Reihen gänzlich ausschlösse und auf eine Sonderdarstellung verwiese, wäre kaum denkbar. So muß es denn in gewissem Maße dem Belieben überlassen bleiben, ob die eine oder die andere Arbeit hier unter der Theorie der Reihen oder an einer anderen Stelle besprochen wird, wohin sie dem Stoffe nach oder aus anderen Gründen gehört.

Ein Beispiel für das soeben Gesagte möge genügen: Lagrange hat 1768[1]) eine „neue Methode" gegeben, um die literalen Gleichungen mit Hilfe von Reihen aufzulösen. Dabei gelangt er, ohne einen Beweis für sein Resultat zu geben, zu der wichtigen Formel, die als „Lagrangesche Umkehrungsformel" seinen Namen trägt. Er bringt die Gleichung mit der Unbekannten x auf die Form $a - x + \varphi(x) = 0$. Ist dann p eine Wurzel dieser Gleichung, $\psi(p)$ eine Funktion von p und $\psi'(x)$ die Ableitung von $\psi(x)$, dann wird nach seiner Formel

$$\psi(p) = \psi(x) + \psi'(x)\varphi(x) + \frac{d[\psi'(x)\varphi(x)^2]}{2!\,dx} + \frac{d^2[\psi'(x)\varphi(x)^3]}{3!\,dx^2} + \frac{d^3[\psi'(x)\varphi(x)^4]}{4!\,dx^3} + \cdots,$$

falls nach dem Differenzieren x überall durch a ersetzt wird. Diese Formel gehört ihrem Wesen nach zur Infinitesimalrechnung, ihrer Anwendung und Entstehung nach zur Algebra, ihrer Form nach zur Reihentheorie und ihrer Herleitung nach (wie wir früher S. 216 sahen) auch wohl zur Kombinatorik. — Dies mag gleichzeitig zur Erklärung dafür dienen, daß wir die, auf den binomischen Satz bezüglichen Untersuchungen vereint an den Beginn der Besprechung über die Kombinatorik gesetzt haben; daß dort auf die Potenzierung des Polynoms und auf die formelle Umkehrung der Reihen eingegangen wurde.

Was die Grundlegung der Theorie der unendlichen Reihen betrifft, so können wir uns, ebenso wie im 109. Kapitel des dritten Bandes der Überzeugung nicht verschließen, daß bei außerordentlich angewachsenem Reihenmaterial die Begründung der Reihentheorie und zwar besonders die Begriffe von Konvergenz und Divergenz in Hinsicht auf Strenge noch fast alles zu wünschen lassen. Selbst Geistern wie Euler und Daniel Bernoulli war es nicht vergönnt, sich zu korrekten Anschauungen durchzuarbeiten; sie gerieten auf die seltsamsten Abwege.

Hinsichtlich des Stoffes mag gleich hier erwähnt werden, daß in unserer Epoche die Reihen, die nach dem Sinus oder dem Kosinus der Vielfachen eines Winkels fortschreiten, besonders die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich ziehen und ein bevorzugtes Objekt der Untersuchungen werden: wir stehen eben in der vorbereitenden Epoche für die Entdeckungen Fouriers.

Es möge nun die Besprechung der einzelnen, wichtigeren Arbeiten

[1]) Histoire de l'Acad. de Berlin 1768, p. 251, insbesondere p. 274.

folgen. — Wir beginnen mit einer Arbeit von John Landen[1]), der 1760 eine Methode angibt, gewisse Reihen zu summieren. Sie beruht auf der gliedweisen Integration einer Reihe, deren Summe bekannt ist, nebst zugehöriger Bestimmung der Integrationskonstanten. Landen knüpft dabei an die bekannte Entwicklung von

$$\log(1 + x)$$

an. Er findet Beziehungen zwischen Reihen von der Form

$$x + \frac{x^2}{2^\varkappa} + \frac{x^3}{3^\varkappa} + \frac{x^4}{4^\varkappa} + \cdots$$

bei verschiedenen $\varkappa$. Bezeichnet wird

$$P^{(\varkappa)} = 1 + \frac{1}{2^\varkappa} + \frac{1}{3^\varkappa} + \frac{1}{4^\varkappa} + \cdots; \quad Q^{(\varkappa)} = 1 + \frac{1}{3^\varkappa} + \frac{1}{5^\varkappa} + \frac{1}{7^\varkappa} + \cdots;$$

$$q^{(\varkappa)} = 1 - \frac{1}{3^\varkappa} + \frac{1}{5^\varkappa} - \frac{1}{7^\varkappa} + \cdots;$$

dann beweist Landen, was Euler schon auf anderem Wege in der „Introductio in analysin" hergeleitet hatte, daß $P^{(\mathrm{II})} = \frac{\pi^2}{6}$, $Q^{(\mathrm{II})} = \frac{\pi^2}{8}$, $q^{(\mathrm{III})} = \frac{\pi^3}{32}$ ist. Weiter liefert er Formeln wie

$$-P^{(\mathrm{IV})} = \frac{2}{3} b^2 P^{(\mathrm{II})} + \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 4 \cdot 5} b^4;$$

$$-P^{(\mathrm{VI})} = \frac{2}{3} b^2 P^{(\mathrm{IV})} + \frac{8}{3 \cdot 4 \cdot 5} b^4 P^{(\mathrm{II})} + \frac{3 \cdot 32}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} b^6 + \cdots,$$

worin $b^2 = -\frac{\pi^2}{4}$ ist. Auch Reihen von der Gestalt

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2} + \cdots = \frac{3\pi^2}{256} - \frac{1}{9}$$

werden bestimmt.

Eine große Anzahl von Abhandlungen mehr oder weniger bedeutenden Inhalts über Reihen liefert Euler in seiner Unermüdlichkeit und seinem nie versiegenden Ideenreichtum.

Durch einen gewissen geometrisch-asymptotischen Prozeß hatte Descartes die Quadratur des Kreises konstruktiv geliefert. Euler überträgt ihn ins Gebiet der Analysis[2]) und gelangt dabei zur Summation der Reihe

$$\operatorname{tang}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{1}{4}\varphi + \cdots = \frac{1}{\varphi} - 2\operatorname{cotg}2\varphi,$$

[1]) Ph. Tr. (London), Vol. 51; part II; p. 553. [2]) Nov. Comment. Petrop. VIII, pro 1760, 1761, p. 157.

die er dann auch, wie ähnliche Formeln, rein rechnerisch und elementar herleitet.

In einem anderen kleineren Aufsatze entwickelt Euler[1]) Beziehungen wie

$$A \operatorname{tang} \frac{1}{2} + A \operatorname{tang} \frac{1}{8} + A \operatorname{tang} \frac{1}{18} + \cdots + A \operatorname{tang} \frac{1}{2n^2} + \cdots$$
$$= A \operatorname{tang} \frac{1}{3} + A \operatorname{tang} \frac{1}{7} + A \operatorname{tang} \frac{1}{13} + \cdots$$
$$+ A \operatorname{tang} \frac{1}{n^2+n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

In diesen Formeln bedeutet, wie auch anderswo zu dieser Zeit, $A \operatorname{tang} \varphi$ so viel wie unser $\operatorname{arctang} \varphi$.

Im Jahre 1765 beschäftigte sich Euler[2]) mit der Entwicklung der Potenz $(1+x+x^2)^n$ und insbesondere mit dem darin auftretenden Koeffizienten der Potenz x^n. Bezeichnen wir ihn durch a_n, so ist $a_n = 1 + \binom{n}{1}\binom{n-1}{1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{3} + \cdots$, wo die Klammern die Binomialkoeffizienten in moderner Schreibweise angeben. Es gilt die Rekursionsformel $(n+1)a_{n+2} = (2n+1)a_{n+1} + 3na_n$. Daraus folgt $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = (1-2x+3x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Endlich wird die allgemeinere Potenz $(a+bx+cx^2)^n$ in ähnlicher Weise behandelt und auch bei ihr der Koeffizient von x^n untersucht.

Im Jahre 1767 veröffentlichte der Italiener Francesco Luino oder Luini zwei Werke: „Delle progressioni e serie“ und „Sulla interpolazione delle serie e suo uso all' astronomia“[3]), die mehr ihrem Titel als ihrem Inhalte nach hierher gehören. Das erste beschäftigt sich eingehend mit der elementaren Arithmetik und Algebra, führt die Behandlung der positiven und negativen, der reellen und der imaginären Größen durch, löst die Gleichungen der niederen Grade, bespricht die endlichen arithmetischen und geometrischen Reihen und geht dann zu den unendlichen Reihen über. Dabei verwertet Luino eine von Vincenzo Riccati stammende Idee[4]). Die Summe der m ersten Glieder einer unendlichen Reihe sei S, die Summe ihrer $(m-1)$ ersten Glieder s, und das allgemeine m^{te} Glied heiße T. Dann ist $T = S - s$. Hat man andererseits $T = A - a$, wo A dieselbe Funktion von m, wie a von $(m-1)$ ist, so braucht A noch nicht gleich S zu sein, man kann aber leicht S finden. Bedeuten nämlich T' und A'

[1]) Nov. Comment. Petrop. IX, pro 1763, p. 40. [2]) Ibid. XI, pro 1765, p. 124; vgl. den Aufsatz in den Opuscula analytica I; Petrop. 1783, p. 48. [3]) Luino oder Luini (1740—1792). Beide Werke erschienen 1767 zu Mailand. [4]) Annali dei letterati d'Italia; vol. I. Modena 1756.

die Werte, die T und A für $m = 1$ annehmen, und setzt man $T' - A' = b$, dann ist $S = A + b$. Riccati und Luino nehmen nun S als gegebene Funktion und bilden daraus das allgemeine Glied $T = S - s$. Dies gehört dann als allgemeines Glied zu einer Reihe mit bekannter Summe. Als die praktisch wichtigsten Reihen werden die arithmetischen mit $T = a + bm + cm^2 + \cdots + dm^x$, die geometrischen mit $T = e^m$ und die gemischten mit $T = (a + bm + \cdots + dm^x)e^m$ behandelt. Die Methode trägt aber weiter, wie an dem Beispiele

$$S = \frac{Lm + Mm^2 + \cdots + Rm^p}{(A+Bm)(A+B(m-1))\ldots(A+B(m-p+1))}$$

gezeigt wird.

Nahm Luino die Riccatische frühere Arbeit als besonders wichtig in seine Darstellung auf, so veröffentlichte Riccati selber im gleichen Jahre neue Untersuchungen über rekurrente Reihen[1]). Schon 1756 hatte er das allgemeine Glied einer rekurrenten Reihe aus der zwischen ihren Gliedern geltenden Rekursionsformel bestimmt. Hier erledigt er das gleiche Problem für allgemeinere Reihen, für „rekurrente mit Appendix“. Bei solchen unterscheidet sich die Rekursionsformel dadurch von der für gewöhnliche rekurrierende Reihen, daß eine additive Konstante als Appendix hinzutritt. So gehört die Reihe 0, 1, 1, 2, 4, 9, 21, 50, 120, … zu den rekurrenten Reihen mit Appendix, da für sie $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 1$ ist; das Glied -1 ist der Appendix. Auch für solche Reihen bestimmt Riccati das allgemeine Glied. Dabei geht er schrittweise vor, indem er zuerst Reihen „erster Ordnung“ oder „ersten Grades“, d. h. solche behandelt, bei denen die Rekursionsformel $a_n = ta_{n-1} + a$ ist. Für sie findet er als allgemeines Glied $a_n = a_1t^{n-1} + a\frac{t^{n-1}-1}{t-1}$. Dann geht Riccati zu Reihen zweiter Ordnung oder zweiten Grades über, d. h. zu solchen, bei denen $a_n = ta_{n-1} + sa_{n-2} + a$ gilt, wo t, s, a konstant sind, so daß jedes Glied aus den beiden vorhergehenden berechnet werden kann. Die Bestimmung von a_n in independenter Weise wird auf die bei gewöhnlichen rekurrenten Reihen zurückgeführt, wobei dann eine quadratische Gleichung zu lösen ist. Induktiv ergeben sich weiter die Resultate für rekurrente Reihen mit Appendix beliebigen Grades.

Im ersten Teile des zweiten Bandes der „Opuscules mathématiques“ von d'Alembert[2]) findet sich als 35. Mémoire ein Aufsatz über die Reihen, deren erster Paragraph von Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen handelt, und sich insbesondere auf die Entwick-

[1]) Mém. présentés p. div. Sav. Paris 1768, V, p. 153—174 und auch Comment Bonon. V, 1767. [2]) Paris 1768, p. 171.

lung von $(1+\mu)^m$ für willkürliche m bezieht. Nach d'Alembert konvergiert (divergiert) eine Reihe an einer Stelle, wenn der Betrag jedes folgenden Gliedes kleiner (größer) ist, als der des vorhergehenden; er bemerkt dabei aber ganz zutreffend, daß die Reihe im Unendlichen konvergieren müsse, um richtige Resultate zu geben, und gibt für diese eigentliche Konvergenz als Kriterium an, daß der Betrag von μ kleiner als 1 sein müsse; „sonst liefert sie falsche Resultate, auch wenn sie bei $|\mu| > 1$ anfänglich konvergiert. Eine solche anfängliche Konvergenz kann sehr weit hinaus bestehen, z. B. bei $\left(1+\frac{200}{199}\right)^{\frac{1}{2}}$, wo die Divergenz erst mit dem 300sten Gliede beginnt". Er betrachtet eine Reihe als „vollkommen", wenn ihre Glieder gleich vom ersten an abnehmen, und wenn sie sämtlich das gleiche Vorzeichen haben. Er zeigt, wie man bei $(1+\mu)^m$ stets die erste Forderung verwirklichen kann, indem man z. B. $(1+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{1}{9}}$ setzt; oder indem man bei der Reihe $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ für große x besser $(x - 2n\pi)$ einsetzt, wo n so gewählt wird, daß der Klammerwert möglichst klein ist.

Im Jahre 1769 beschäftigte sich Euler mit der Summation von Reihen, deren Koeffizienten mit den Bernoullischen Zahlen eng zusammenhängen[1]). Statt der Bernoullischen Zahlen $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \frac{691}{2730}, \frac{7}{6}, \cdots$ betrachtet Euler ihre Produkte mit bez. den Zahlen 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, …; er benennt diese Produkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \ldots$, so daß

$$\mathfrak{A} = 1,\ \mathfrak{B} = \frac{1}{3},\ \mathfrak{C} = \frac{1}{3},\ \mathfrak{D} = \frac{3}{5},\ \mathfrak{E} = \frac{5}{3},\ \mathfrak{F} = \frac{691}{105},\ \mathfrak{G} = 35, \ldots$$

wird, und geht von ihnen zu einer neuen Reihe von Zahlen

$$A = \frac{1}{3!}\mathfrak{A},\ B = \frac{2^2}{5!}\mathfrak{B},\ C = \frac{2^4}{7!}\mathfrak{C},\ D = \frac{2^6}{9!}\mathfrak{D},\ E = \frac{2^8}{11!}\mathfrak{E}, \ldots$$

über. Für $A, B, C, \ldots$ bestehen zwei Sorten von Rekursionsformeln; einmal

$$A = \frac{1}{3!},\ B = \frac{1}{3!}A - \frac{2}{5!},\ C = \frac{1}{3!}B - \frac{1}{5!}A + \frac{3}{7!},$$
$$D = \frac{1}{3!}C - \frac{1}{5!}B + \frac{1}{7!}A - \frac{4}{9!}, \ldots$$

und andererseits auch $5B = 2A^2$, $7C = 4AB$, $9D = 4AC + 2B^2$,

[1]) Nov. Comment. Petrop. XIV, pro 1769, p. 129—167. (Auf dem Titelblatt steht irrtümlich 1759.)

$11E = 4AD + 4BC, \ldots$ Euler sucht nun die Summe Σ von Reihen zu bestimmen, die die Form haben

$$\alpha A x^2 + \beta B x^4 + \gamma C x^6 + \delta D x^8 + \cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ gegebene Größen sind. Nimmt man z. B.

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \cdots = 1,$$

so folgt

$$\Sigma = Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \cdots = \left(\frac{1}{3!}x^2 - \frac{2}{5!}x^4 + \frac{3}{7!}x^6 - \cdots\right)$$
$$:\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \operatorname{cotg} x,$$

und daraus erhält man $A - B + C - D + \cdots = \frac{1}{e^2 - 1}$.

Ferner gibt dieselbe Formel durch Differentiation das Resultat

$$\frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{4}Bx^4 + \frac{1}{6}Cx^6 + \cdots = \frac{1}{2}\log\frac{x}{\sin x}.$$

Eine andere Quelle für summierbare Reihen liefert die Formel (Bd. III, S. 678 dieser Vorlesungen)

$$2S = 2\int X dx + X + \frac{A}{1}\frac{dX}{dx} - \frac{B}{2^2}\frac{d^3X}{dx^3} + \frac{C}{2^4}\frac{d^5X}{dx^5} - \cdots;$$

hier ist „das summatorische Glied" X (ibid. S. 657) eine Funktion von x, und S ist $= \Sigma X$, wo die Summe über die Werte $x = 1, 2, 3, \ldots x$ erstreckt wird. Zunächst setzt Euler $X = \frac{1}{x^n}$ bei $n > 1$; dann wird $S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{x^n}$ und man erhält

$$S = \frac{1}{2x^n} + \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} - O = -\frac{nA}{2x^{n+1}} + \frac{n(n+1)(n+2)B}{2^3 x^{n+3}}$$
$$- \frac{n(n+1)\cdots(n+4)C}{2^5 x^{n+5}} + \frac{n(n+1)\ldots(n+6)D}{2^7 x^{n+7}} - \cdots$$

In dieser Formel ist O die Integrationskonstante, die durch besondere Annahmen bestimmt wird. Für $n = 2$ z. B. erhält man

$$\frac{2!A}{2x^1} - \frac{4!B}{2^3x^3} + \frac{6!C}{2^5x^5} - \cdots = Ox^2 - x + \frac{1}{2} - x^2 S$$
$$= \frac{\pi^2}{6}x^2 - x + \frac{1}{2} - x^2\left(\sum_1^x \frac{1}{\varkappa^2}\right).$$

Für $n = 4$ ergibt sich

$$\frac{4!A}{2x} - \frac{6!B}{2^3x^3} + \frac{8!C}{2^5x^5} - \cdots = 3!B\pi^4x^4 - 3 - 2x^2 - 6x^2\left(\sum_1^x \frac{1}{\varkappa^4}\right).$$

Setzt man den „terminus summatorius“ $X = \log x$, so ergibt sich

$$\frac{A}{2^1} - \frac{2!\,B}{2^3} + \frac{4!\,C}{2^5} - \frac{6!\,D}{2^7} + \cdots = 1 - \frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Dies dürfte zur Charakterisierung der Abhandlung ausreichen. —

Euler hatte bereits in Kap. XIV der „Introductio“ Reihen von der Form

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \cdots + \sin(a+nb)$$

oder

$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots + \cos(a+nb)$$

summiert. Der Abbé Charles Bossut[1]) löste im Jahre 1769 vierzehn derartige Aufgaben wie $\sum_{\nu=1}^{n}(\cos \nu q)^{\varkappa}$ für $\varkappa = 1, 2, 3, 4$; $\sum_{\nu=1}^{n}(\cos \nu q \sin \nu q)^{\varkappa}$ usw. Diese Arbeit würde kaum erwähnenswert sein, wenn sich nicht weitere, wichtigere Untersuchungen an sie angeschlossen hätten, auf die wir bald eingehen werden.

Condorcet veröffentlichte im gleichen Jahre und im gleichen Bande[2]) einen Artikel „sur la nature des suites infinies“. Bedürfte es noch der Bestätigung für unsere, oben (S. 257) ausgesprochene Ansicht, daß Condorcet ein zwar ideenreicher, aber unklarer Kopf gewesen sei, so würde diese Arbeit sie liefern können. Es gibt, wie der Verfasser meint, drei Arten von Reihen, solche wie

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

für $x < 1$, bei denen der Rest unendlich klein wird; die gleichen für $x > 1$, bei denen der Rest unendlich groß wird, und solche wie

$$a + b\cos x + c\cos 2x + d\cos 3x + \cdots,$$

bei denen der Rest endlich bleibt. Im ersten Falle ist die Reihe gleich der Funktion, aus deren Entwicklung sie entsteht, im zweiten Falle nicht[3]). Für diesen zweiten Fall gibt Condorcet als Beispiel, daß $(1 + x + x^2 + \cdots) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots\right)$ nicht durch

$$\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1\right) = 0$$

ersetzbar ist, sondern nur durch

$$\frac{x^{\infty+1}-1}{x-1} + \frac{\frac{1}{x^{\infty+1}}-1}{\frac{1}{x}-1} - 1 = \frac{x^{\infty+1}-x^{-\infty}}{x-1}.$$

---

[1]) Histoire de l'Acad. à Paris 1769, p. 453. [2]) Ibid. p. 83. [3]) Die erste Anschauung trifft sich mit der Eulers, der sie aber auf alle Reihen be-

Der dritte Fall ist der, daß eine gewisse endliche Anzahl von Funktionen durch ihre Entwicklung die Reihe gibt; ihre Summe dividiert durch ihre Anzahl liefert den Wert der Reihe. — Vollkommen unklar sind die Darlegungen über Transformation divergenter Reihen in konvergente. — Des weiteren integriert Condorcet Differentialgleichungen wie $dy\sqrt{1-x^2} = dx$ oder Funktionalgleichungen wie $\varphi(x+q) = \varphi(x)$ in Reihenform durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten, wobei er darauf aufmerksam macht, daß die als Lösung vorausgesetzten Reihen mit den zu bestimmenden Koeffizienten die allgemeinste Form der Lösung haben müssen, wenn man die Aufgabe umfassend behandeln will. Hat eine Differential- oder eine Funktional-Gleichung mehrere, ihrer Form nach verschiedene Lösungen, so müssen alle diese Formen berücksichtigt werden.

Wir knüpfen hieran die Erwähnung, daß Condorcet 1770 einen kurzen Beweis für die oben (S. 216, 258) besprochene Lagrangesche Umkehrungsformel gab[1]). Eine Verifikation des gleichen Satzes stammt von Andr. Joh. Lexell[2]).

Wir kommen nun zu drei Arbeiten von Daniel Bernoulli[3]), die gleichfalls die Prinzipien der Reihentheorie behandeln. Der Titel der ersten lautet: „De summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu“. Dieses „incongrue verum“ ist ein charakteristischer Verlegenheitsbegriff, der sich glücklicherweise nicht adäquat ins Deutsche übersetzen läßt. Reihensummen können „in concreto“ falsch, „in abstracto“ richtig sein, indem sie durch legitime Schlüsse hergeleitet werden. So kann die Gleichung

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

als falsch aufgefaßt werden, da bei fortlaufender Summierung immer nur 1 oder 0 herauskommt; — aber auch als richtig, da aus der richtigen Gleichung $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ für $x = 1$ jenes Resultat entspringt; genau wie bei der, ohne Determination als richtig angenommenen Gleichung $-\frac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots$ für $x = \pi$. Setzt man endlich $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = S$, so wird $1 - S = S$ also wieder $S = \frac{1}{2}$. Unterstützt wird der Glaube an die Richtigkeit dieser

---

zieht; die dritte mit der sofort zu besprechenden Daniel Bernoullis (vgl. Band III², S. 693).

[1]) Miscell. Taurin. V, 1770, p. 7—9. [2]) Nov. Comment. Petrop. XVI pro 1771, p. 220. [3]) Nov. Comment. Petrop. XVI pro 1771, p. 71; ibid. XVII pro 1772, p. 3; ibid. XVIII pro 1773, p. 3.

Überlegungen dadurch, daß man aus solchen Reihen richtige Resultate herleiten kann, wie die Reihe für $\frac{1}{1+x}$ z. B. nach Integration bei $x=1$ den richtigen Wert von $\log 2$ gibt, und da „ex falso verum numquam legitime deduci potest". Bernoulli leitet dann

$$1-1+0+1-1+0+\cdots=\frac{1}{3},$$

dagegen

$$1+0-1+1+0-1+\cdots=\frac{2}{3}$$

her; aus der Entwicklung

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots$$

bestimmt er

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4},$$

usf.

Im zweiten Aufsatze geht Bernoulli von der Reihe, wie Euler sie summiert hatte (siehe Band III², S. 717)

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots=-\frac{1}{2}$$

aus, kommt durch Integration auf

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots=C-\frac{1}{2}x$$

und bestimmt die Konstante der Leibnizschen Reihe für $x=\frac{\pi}{2}$ als $C=\frac{\pi}{2}$; ($x=0$ liefert einen unrichtigen Wert für C). In ähnlicher Art geht es weiter auf

$$\cos x+\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots=\frac{1}{6}\pi^2-\frac{1}{2}\pi x+\frac{1}{4}x^2,$$

usw. Die a. a. O. erwähnte Reihe

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots=\frac{\frac{1}{2}\sin x}{1-\cos x}$$

liefert durch Integration

$$\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\cdots=\frac{1}{2}\,l\,\frac{x}{2(1-\cos x)},$$

usw.

Erst nach der Veröffentlichung dieser Arbeit hatte Daniel Bernoulli die oben (S. 264) besprochene Arbeit Bossuts kennen gelernt, in der die Summen $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos \varkappa q$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin \varkappa q$, ... abgeleitet waren, und untersucht in der dritten Arbeit, wie man vom Resultate Bossuts

$$\sin q+\sin 2q+\cdots+\sin nq=\frac{\sin q\,[1+\cos q-\cos nq-\cos(n+1)q]}{1-\cos 2q}$$

bei der Annahme $n=\infty$ zu dem Eulerschen Resultate

$$\sin q+\sin 2q+\cdots=\frac{\frac{1}{2}\sin q}{1-\cos q}$$

kommen könne. Er fragt sich: Was ist für $\sin\infty q$, was für $\cos\infty q$, usw. zu setzen, wo doch kein bestimmter Wert mit Notwendigkeit sich darbietet? Und er antwortet: „Gemäß der Natur des Unendlichen muß ein Wert genommen werden durch die Forderung, die gesunden metaphysischen Grundsätzen entspricht, daß alle möglichen Werte in der gleichen Weise berücksichtigt werden: der wahre Wert muß daher gleich der Summe aller möglichen Werte, dividiert durch ihre Anzahl, sein, also $=0$. Das ist rein metaphysisch, nicht geometrisch." In der Tat geht durch diese Annahme der Bossutsche Wert in den Eulerschen über. Diese Theorie beruht nach Bernoulli auf zwei Voraussetzungen; zuerst, daß die Glieder der unendlichen Reihe in Perioden geteilt werden können, die sich unendlich oft in gleicher Gliederfolge wiederholen; zweitens, daß die Summe der Glieder einer, also jeder Periode gleich 0 ist. Die erste Annahme ist bei den Reihen $\sum(\sin\varkappa q)^\lambda$, $\sum(\cos\varkappa q)^\lambda$ erfüllt; denn wenn auch q kein aliquoter Teil eines Vielfachen der Peripherie ist, „so kann doch die Periode als aus unendlich vielen Gliedern bestehend angesehen werden". Die zweite Annahme ist nicht immer erfüllt, z. B. dann nicht, wenn $(\sin\infty q)^2$, $(\cos\infty q)^2$ auftritt. Bernoulli stützt sein Vorgehen auf die Analogie mit der Wahl eines Mittelwertes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In einer unmittelbar sich anschließenden Abhandlung[1]) behandelt auch Euler, aber von anderem Standpunkte aus die Summen

$$(\sin\varphi)^\lambda+(\sin 2\varphi)^\lambda+\cdots+(\sin n\varphi)^\lambda$$

und

$$(\cos\varphi)^\lambda+(\cos 2\varphi)^\lambda+\cdots+(\cos n\varphi)^\lambda,$$

die er durch Einführung von Exponentialgrößen statt der Winkelfunktionen umformt und für $\lambda=1, 2, 3, 4$ wirklich herstellt. Dann (§ 9) geht auch er zu $n=\infty$ über. Dabei wahrt er Bernoulli gegenüber seine eigenen Anschauungen über die unendlichen Reihen. „Der berühmte Verfasser der vorstehenden Abhandlung gibt in diesem Falle die Summen sehr geistvoll auf Grund metaphysischer Überlegungen an, bei denen wir uns in der Analysis durchaus beruhigen könnten. Ich habe schon früher, auf allerstärkste Gründe gestützt,

[1]) Nov. Comment. Petrop. XVIII, 1773, p. 24.

darauf hingewiesen, daß in diesen Fällen dem Ausdrucke „Summe" eine andere, der Analysis angemessenere Bedeutung beigelegt werden müsse. Diese neue Bedeutung muß meiner Ansicht nach so festgestellt werden, daß als Summe jeder unendlichen, konvergenten oder divergenten Reihe die analytische Formel angesehen wird, aus deren Entwicklung die Reihe entspringt." Auf die Fragen, ob stets eine und ob auch nur eine solche analytische Formel vorhanden ist, geht Euler nicht ein. Daß übrigens Euler doch nicht so ganz von der Richtigkeit seiner Anschauungen über die Reihen überzeugt war, läßt sich aus einer Stelle einer anderen Arbeit[1]) entnehmen, in der er $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\cdots=0{,}380317\ldots$ berechnet. Da heißt es dann, „daß diese Gleichungen absolut richtig seien, möchte ich weder hartnäckig noch mit Zuversicht behaupten".

Am Schlusse zeigt Euler, wie man aus der bekannten Summe einer Reihe $az+bz^2+cz^3+\cdots+hz^n$ durch Einführung von

$$z=x(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

die Summen

$$ax\cos\varphi+bx^2\cos 2\varphi+\cdots+hx^n\cos n\varphi$$

und

$$ax\sin\varphi+bx^2\sin 2\varphi+\cdots+hx^n\sin n\varphi$$

herleiten kann und wendet dies Verfahren auf $a=b=c=\cdots=h=1$ und auf $a=1,\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{3},\ \cdots,\ h=\frac{1}{n}$ an.

Wie Euler, so richtete sich auch Anders Johann Lexell, der gleichfalls Mitglied der Petersburger Akademie war, gegen die Ansichten D. Bernoullis[2]). Er bestreitet, daß von Perioden die Rede sein könne, wenn q zu π in irrationalem Verhältnis stehe, und meint, daß selbst wenn $\cos nq$ für $n=\infty$ gleich Null gesetzt werden dürfe, doch $\cos nq+\cos(n+1)q$ nicht auch gleich Null sei, wie Bernoulli es angenommen hatte. Im letzten Punkte übersieht er aber wohl die Begründung, die Bernoulli seiner Annahme beifügte.

Aus dem gleichen Jahre stammt noch eine Abhandlung Eulers, die erwähnt werden mag[3]). Euler setzt

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p+q\sqrt{k})^n+\frac{1}{2}\left(a-\frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p-q\sqrt{k})^n=[n]$$

und stellt dann den Ausdruck $[n+2v]$ durch $[n+v]$ und $[n]$ her; ferner den von $[2n]$ durch $[n]$ usf. Ist $[n]'$ der Wert, der aus $[n]$ entsteht, wenn a und b durch andere Werte a' und b' ersetzt werden, dann besteht eine quadratische Beziehung zwischen $[n]$ und $[n]$.

[1]) Nov. Comment. Petrop. XVII, 1772, p. 173. [2]) Ibid. XVIII, 1773, p. 37. [3]) Ibid. XIVII, 1773, p. 198.

Der italienische Mathematiker Ant. Mar. Lorgna veröffentlichte[1]) 1775 eine Arbeit, in der er eine große Anzahl von Reihen gewissen Charakters summieren lehrte. Die Reihenglieder bestehen nämlich aus Brüchen, deren Zähler und Nenner Produkte aus Faktoren von der Form $(a+bz)$ sind; dabei sind a und b für alle Glieder der Reihe konstant, während z die Ordnungsziffer des Gliedes bedeutet, so daß also $z=1,2,3,\ldots$ zu setzen ist. Die Abhandlung teilt sich in fünf Kapitel. Das erste beschäftigt sich mit Reihen von der Form

$$\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta+1}+\frac{1}{\delta+2}+\frac{1}{\delta+3}+\cdots;$$

das zweite mit Reihen

$$\sum_{z=1}^{\infty}\frac{\beta^{-z}}{(\delta_1+z)\cdots(\delta_r+z)},$$

wobei nacheinander $r=2,3,4,\ldots$ gesetzt wird. Als Beispiel diene die Reihe $\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{6\cdot 12}+\frac{1}{9\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{3z(4z+4)}+\cdots$. Im dritten Kapitel handelt es sich um $\sum\limits_{z=1}^{\infty}\frac{(a+z)\beta^{-z}}{(\delta_1+z)\cdots(\delta_r+z)}$; im vierten Kapitel tritt noch ein zweiter linearer Faktor $(b+z)$ in den letzten Zähler. Das fünfte Kapitel behandelt die Summen $1\pm\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\pm\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}\pm\cdots$. Die Berechnung seiner Summen gründet Lorgna darauf, daß er das allgemeine Glied der Reihe als Integral darstellt, die Summe der Integrale bildet und das Resultat nach Möglichkeit vereinfacht. Dieser Methode werden wir noch mehrfach begegnen.

Im gleichen Jahre 1775 gibt Euler die Summation gewisser Reihen von besonderer Gestalt[2]). Es sind dies Reihen

$$1+\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{4^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)+\cdots,$$

die er der Abkürzung wegen durch $\int\frac{1}{z^m}\left(\frac{1}{y^n}\right)$ bezeichnet. Ähnlich setzt er auch $\int\frac{1}{z^m}=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\cdots$. Es gelten für sie Relationen von der Form

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y}\right)=2\int\frac{1}{z^3};\qquad \int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2};$$

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right)-\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)=2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3}-\int\frac{1}{z^5};\cdots$$

[1]) Specimen de seriebus convergentibus. Verona 1775. — Giornale dei Letterati d'Italia XXIV, p. 79. [2]) Nov. Comment. Petrop. XX. 1775, p. 140.

Zum Teil beweist Euler diese Formeln, zum Teil stützt er sie nur auf unstrenge Induktion.

Da früher die Behandlung der Kettenbrüche mit der der Reihen zusammengenommen wurde (III², S. 693), so müssen wir uns, diesem Prinzipe treu, jetzt zu einer Abhandlung von Lagrange wenden[1]), die sich auf die Verwertung der Kettenbrüche bei der Integration von Differentialgleichungen bezieht. Die Verwertung von unendlichen Reihen zu diesem Zwecke ist näherliegend; Lagrange benutzte sie schon früher; sie hat aber den Übelstand, daß auch rationale Lösungen in die Form unendlicher Reihen treten. Das fällt bei Kettenbrüchen fort. Ist eine Differentialgleichung zwischen x und y gegeben, so bestimmt Lagrange zunächst das Anfangsglied ξ der Entwicklung von y nach Potenzen vom x bei kleinen Werten dieser Variablen; dann setzt er $y = \frac{\xi}{1+y_1}$ in die vorgelegte Gleichung ein und erhält dadurch eine Gleichung zwischen x und y_1; diese wird in gleicher Weise behandelt; sie führt auf $y_1 = \frac{\xi_1}{1+y_2}$ usf. Man kommt sonach zu $y = \xi \,/\, 1 + \xi_1 \,/\, 1 + \xi_2 \,/\, 1 + \xi_3 /\cdots$. Die ξ treten in der Form ax^α auf; der Exponent α wird durch eine Methode bestimmt, die als analytische Form des Newtonschen Parallelogramms bezeichnet werden kann; a wird durch Lösung einer i. A. linearen Gleichung gefunden. Als Beispiel behandelt Lagrange die Integration von $my + (1+x)\frac{dy}{dx} = 0$ und kommt zur Kettenbruch-Entwicklung

$$(1+x)^m = 1 + mx \Big/ 1 - \frac{(m-1)x}{1\cdot 2} \Big/ 1 + \frac{(m+1)x}{2\cdot 3} \Big/ 1 - \frac{(m-2)x}{2\cdot 3} \Big/ 1$$
$$+ \frac{(m+2)x}{2\cdot 5} \Big/ 1 - \frac{(m-3)x}{2\cdot 5} \Big/ 1 + \frac{(m+3)x}{2\cdot 7} \Big/ 1 - \cdots.$$

Daraus ergeben sich weiter Kettenbrüche für $l(1+x)$, e^x usw. Das Beispiel $1 = (1+x^2)\frac{dy}{dx}$ führt auf

$$\operatorname{arc\,tang} x = x \Big/ 1 + \frac{x^2}{3} \Big/ 1 + \frac{4\cdot x^2}{3\cdot 5} \Big/ 1 + \frac{9x^2}{5\cdot 7} \Big/ 1 + \frac{16x^2}{7\cdot 9} \Big/ 1 + \cdots.$$

Wenden wir den Blick nach England auf die Veröffentlichungen in den Philosophical Transactions der Londoner Royal Society, so stoßen wir auf drei Arbeiten über Reihen, die der Zeit nach hierher gehören. Ch. Hutton[2]) gibt bequeme, schnell konvergierende Entwicklungen zum Zwecke der Berechnung von π, die sich auf die Formel $\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ stützen und die Zerlegungen

[1]) Mém. de Berlin 1776, p. 236. [2]) Phil. Trans. London 1776, VI, part II, p. 476.

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = 2\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{7} = \cdots$$

benutzen. Diese Art von Zerlegungen wird eingehend untersucht; sie hängt von den Werten $\frac{u \pm v}{1 \mp uv}$ ab.

Fr. Maseres[1]) wandelt die Reihe $a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \cdots$ in die Form $a - \frac{bx}{1+x} - \frac{D'x^2}{(1+x)^2} - \frac{D''x^3}{(1+x^3)} - \frac{D'''x^4}{(1+x^4)} - \cdots$ mit unbekannten $D', D'', D''', \ldots$ um; er will damit, wenn $a > b > c > d > \ldots$; $a - b > b - c > c - d, \ldots$; $a - 2b + c > b - 2c + d > \ldots$ usf., und $x < 1$ ist, eine raschere Konvergenz der Reihe erzielen. Für die $D', D'', D''', \ldots$ findet er die Differenzen erster, zweiter, dritter, … Ordnung

$$b - c,\ b - 2c + d,\ b - 3c + 3d - e, \cdots.$$

Von dieser Umformung macht er eine Anwendung auf die eben besprochene arc tang-Reihe, sowie auf die Pendel-Schwingungsdauer.

Eine zweite Arbeit[2]) von Fr. Maseres läuft darauf hinaus, daß er für die harmonische Reihe $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$ als Annäherung den Wert $b[(1-x)^{\frac{-1}{b}} - 1]$ bei sehr großen b benutzt. Für b setzt der Verfasser der Abhandlung 10^{12} ein.

Bossut gibt[3]) ohne theoretische Begründung eine praktische Anweisung für die angenäherte Umkehrung von Reihen. Ein Beispiel wird am besten sein Verfahren erläutern: aus der Gleichung $t = x + n \sin x$ soll x durch eine Reihe

$$x = t + A \sin t + B \sin 2t + C \sin 3t + D \sin 4t + \cdots$$

dargestellt werden. Bossut bricht die Reihe nach den hingeschriebenen 5 Gliedern ab und bildet von der so entstehenden, als angenähert richtig angenommenen Gleichung die 1., 3., 5. und 7. Ableitung; dieselben Ableitungen erhält er aus der vorgelegten Gleichung als

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + n\cos x} = 1 - n\cos x + n^2\cos^2 x - n^3\cos^3 x + n^4\cos^4 x - \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo auch die weiteren Glieder unterdrückt werden. Dann liefert $t = x = 0$ vier lineare Gleichungen, die zur Berechnung von A, B, C, D ausreichen.

In dem gleichen Bande der Histoire de l'Acad. Paris[4]) findet sich eine Abhandlung von Laplace, die sich mit Differenzenrechnung und mit Reihen beschäftigt. Ist u eine Funktion von $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$, und

[1]) Phil. Trans. London 1777, vol. 67, part I, p. 187. [2]) Ibid. 1778, vol. 68, p. 895. [3]) Hist. de l'Acad. Paris 1777, p. 52. [4]) Ibid., p. 99.

wird $u = (u) + \alpha q_{100} + \alpha^2 q_{200} + \cdots + \alpha_1 q_{010} \cdots + \alpha_1 \alpha q_{110} + \cdots$ gesetzt, wo (u) den Wert von u für $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$ angibt, so findet man durch Differentiationen den Wert

$$q_{n n_1 n_2 \cdots} = \frac{1}{n!\, n_1!\, n_2! \ldots} \left(\frac{d^{n + n_1 + n_2 + \cdots} u}{d\alpha^n\, d\alpha_1^{n_1}\, d\alpha_2^{n_2} \ldots} \right).$$

Wenn dann etwa $u = \varphi(\alpha + t,\ \alpha_1 + t_1,\ \alpha_2 + t_2, \ldots)$ genommen wird, so ist offenbar die letzte Klammergröße gleich

$$\left(\frac{d^{n + n_1 + n_2 + \cdots} u}{dt^n\, dt_1^{n_1}\, dt_2^{n_2} \ldots} \right) = \frac{d^{n + n_1 + n_2 + \cdots} \varphi(t, t_1, \ldots)}{dt^n\, dt_1^{n_1}\, dt_2^{n_2} \ldots};$$

man kommt somit auf die Taylorsche Reihenentwicklung.

Nimmt man u als Funktion einer Größe x an, die durch die Differentialgleichung $\frac{dx}{d\alpha} = z \frac{dx}{dt}$ definiert wird, in der z eine beliebige Funktion von x bedeutet, dann kommt man auf ähnliche Art zu der Lagrangeschen Reversionsformel. Nach derselben Methode lassen sich viele andere, zur Differenzenrechnung gehörige Formeln herleiten, die bereits Lagrange aufgestellt[1]) und zum Teil bewiesen hatte.

Das Studium der Lambertschen algebraischen Arbeiten führte Euler zu der Aufgabe, die Lambertsche Reihenentwicklung der Wurzel einer trinomischen Gleichung zu verifizieren[2]).

Es mußte dabei folgendes gezeigt werden: Wenn x eine Wurzel der trinomischen Gleichung $(\alpha - \beta) v \cdot x^{\alpha + \beta} = x^\alpha - x^\beta$ bedeutet, so gilt für jedes n die Gleichung

$$x^n = 1 + nv + \frac{1}{2!} n(n + \alpha + \beta) v^2 + \frac{1}{3!} n(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta) v^3$$
$$+ \frac{1}{4!} n(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta) v^4 + \cdots.$$

Euler geht bei dem Beweise folgendermaßen vor. Er betrachtet die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung als Funktion von n, setzt sie gleich $S(n)$ und zeigt, daß $S(n - \beta) - S(n - \alpha) = (\alpha - \beta) v S(n)$ wird. Diese Funktionalgleichung läßt sich integrieren und führt zu dem Schlußergebnis, daß $S(n) = x^n$ ist.

Für $\alpha = \beta$ geht die trinomische Gleichung über in $\log x = vx$. Man erhält für $\alpha = 1$

$$\frac{x^n - 1}{n} = v + \frac{n+2}{2!} v^2 + \frac{(n+3)^2}{3!} v^3 + \frac{(n+4)^3}{4!} v^4 + \cdots \quad \text{und}$$
$$\frac{x^n}{1 - lx} = 1 + \frac{n+1}{1!} v + \frac{(n+2)^2}{2!} v^2 + \frac{(n+3)^3}{3!} v^3 + \cdots.$$

---

1) Mém. Acad. Berlin 1772. 2) Nov. Comment. Act. Petrop. XX, 1775, pars II, p. 29.

Aus dem Jahre 1779 stammt eine umfangreiche, das Gebiet der Differenzenrechnung nahe berührende Arbeit von Laplace[1]). Ist y_x eine Funktion von x, so heißt $u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \cdots + y_x t^x + \cdots$ die erzeugende Funktion von y_x. Bezeichnen wir die Differenzen $y_{x+1} - y_x = \Delta y_x$; $\Delta y_{x+1} - \Delta y_x = \Delta^2 y_x$; ... und setzen

$$\nabla y_x = a y_x + b y_{x+1} + c y_{x+2} \cdots + q y_{x+n},$$
$$s = a + b \cdot \frac{1}{t} + c \cdot \frac{1}{t^2} + \cdots + q \cdot \frac{1}{t^n};$$

dann ist $u t^r s^k \left(\frac{1}{t}\right)^i$ die erzeugende Funktion von $\Delta^i \nabla^k y_{x-r}$. Insbesondere gehört $\nabla^i y_x$ zur erzeugenden Funktion $u s^i$. Wird i negativ, so treten Summen $\sum^i$ statt der Differenzen Δ^i auf; $u\left(1 - \frac{1}{t}\right)^i$ ist die erzeugende Funktion von $\sum^i y_x$. Hieraus folgt, daß $\nabla^i y_x$ durch einfache Entwicklung algebraischer Funktionen gefunden werden kann. Bildet man z. B. $u : t^i = u\left(\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 1\right)^i$ und entwickelt die rechte Seite, so entsteht

$$y_{x+i} = y_x + i \Delta y_x + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_x + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y_x + \cdots.$$

Dadurch, daß der Wert von y_{x+i} auf diese Reihen-Form gebracht ist, hat man die Möglichkeit, für i gebrochene Werte einzuführen; das gibt also die Lösung der Interpolationsaufgabe für y_x. Laplace leitet auf diese Art sowohl bekannte, wie auch neue Formeln her. — In großer Ausführlichkeit werden in den Nummern III bis VIII besonders wichtige Fälle behandelt. In Nummer IX folgt die Transformation von Reihen; ihre Besprechung würde uns zu weit führen. — Auch auf Reihen von zwei Variablen geht Laplace ein. Er nimmt $y_{u,v}$ als Funktion von u und v an und behandelt die „rekurro-rekurrenten“ Reihen in ähnlicher Weise, wie er die von einer Variablen behandelt hatte.

Die nächste, der Zeit wie dem Stoffe nach zu erwähnende Arbeit stammt wieder von Euler[2]). Sie beschäftigt sich mit der Reihenentwicklung des Produktes

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) \cdots$$
$$= 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots.$$

Hierin haben auf der rechten Seite die Exponenten die Form

$$\frac{1}{2}(3n^2 \pm n);$$

und der zugehörige Koeffizient ist gleich $(-1)^n$. Diese merkwürdige Be-

---

1) Hist. de l'Acad. Paris 1779 (1782), p. 207. 2) Act. Petrop. IV, 1780, pars I, p. 47.

ziehung hatte Euler schon früher in den Nov. Comment. Acad. Petrop. III, 1750—1751, p. 155 induktiv hergeleitet und das Resultat in das Kap. XVI, § 323 der „Introductio in Analysin" aufgenommen. Später hat er es in den Nov. Comment. Acad. Petrop. pro 1754, 1755, p. 75 bis 83 bewiesen. Jetzt, 25 Jahre später, modifiziert er jenen Beweis. Jacobi beschäftigte sich 1840 eingehend mit derartigen Reihen, bei denen die Exponenten eine arithmetische Folge zweiter Ordnung bilden. Er stieß auf solche Entwicklungen in der Theorie der elliptischen Funktionen. Jacobi nimmt dabei[1]) ausdrücklich Bezug auf diese Eulerschen Untersuchungen, und gibt als interessante Ergänzung zu dem Eulerschen Satze noch die folgende Entwicklung der dritten Potenz der rechten Seite unserer letzten Gleichung

$$(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots)^3$$
$$= 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + \cdots;$$

hier haben die Exponenten der rechten Seite die Gestalt $\frac{1}{2}(n^2 + n)$; die zugehörigen Koeffizienten sind $(-1)^n(2n + 1)$.

In einer anderen Arbeit des gleichen Jahres[2]) dehnt Euler die Formel

$$S(n) \equiv \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

auf gebrochene Werte von n aus; es handelt sich also dabei um eine Interpolationsaufgabe. Er findet mit Hilfe der Integrale, die von Legendre als Eulersche Integrale zweiter Gattung bezeichnet worden sind,

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\pi}; \quad S\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{8}{3}; \quad S\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{8 \cdot 16}{3 \cdot 5}; \quad S\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{8 \cdot 16 \cdot 24}{3 \cdot 5 \cdot 7}; \ldots$$

Ebenso wird für gebrochene n, p, q auch

$$\binom{n}{0}\binom{p}{q} + \binom{n}{1}\binom{p}{q+1} + \cdots = \binom{p+n}{q+n}$$

behandelt. Das behandelte Problem gehört als Interpolationsproblem einer Reihe von Aufgaben an, die den meisten Forschern der damaligen Zeit sehr am Herzen lag.

Von den „Mathematical Memoirs" von J. Landen[3]) haben wir das fünfte „eine neue Methode, um die Summen gewisser Reihen zu erhalten" in unsere Besprechungen zu ziehen. Nach einigen analytischen Vorbereitungen geht Landen so vor: Aus den Entwicklungen von $l(1 + u)$ und $l\left(1 + \frac{1}{u}\right)$ folgert er ohne Konvergenz-Bedenken

$$lu = (u - u^{-1}) - \frac{1}{2}(u^2 - u^{-2}) + \frac{1}{3}(u^3 - u^{-3}) - \cdots;$$

[1]) Jacobis Werke VI, p. 281. [2]) Act. Petrop. IV, 1780, pars I, p. 74.
[3]) London 1780.

hierin trägt er $lu = z\sqrt{-1}$ ein und erhält

$$\frac{z}{2} = \frac{\sin z}{1} - \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} - \cdots.$$

In diese Formel setzt er zur Herleitung spezieller Resultate

$$z = \frac{\pi}{3}, \quad z = \frac{\pi}{4}.$$

usw. Die Integration der Formel liefert

$$-\frac{z^2}{4} = \frac{\cos z}{1^2} - \frac{\cos 2z}{2^2} + \frac{\cos 3z}{3^2} - \cdots - p'',$$

wo $p'' = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$ ist; dies wird mittels eines Kunstgriffes $= \frac{\pi^2}{12}$ bestimmt. In entsprechender Art leitet Landen die Formeln

$$\frac{\sin\frac{3}{2}z}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\sin\frac{5}{2}z}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{\sin\frac{7}{2}z}{3^2 \cdot 4^2} - \cdots = \left(\frac{\pi^2}{6} + 3 - \frac{z^2}{3}\right)\sin\frac{1}{2}z - 2z \cdot \cos\frac{1}{2}z$$

und

$$\frac{\cos\frac{3}{2}z}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{\cos\frac{5}{2}z}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{\cos\frac{7}{2}z}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots = 2(\pi - z)\sin\frac{1}{2}z + \left(\frac{\pi^2}{3} - \pi z + \frac{1}{2}z^2 - 3\right)$$

her. Aus diesem letzten Resultate folgt

$$\frac{\pi^2}{3} - 3 = \frac{1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots.$$

Im folgenden Jahre veröffentlichte Ed. Waring[1]) seine „Meditationes analyticae", deren drittes und viertes Buch uns hier interessiert. Waring zeigt zum Teil schon moderne Anschauungen über Konvergenz und Divergenz; er sagt: „streben in $a + b + c + d + e + \cdots$ die Summen $a + b$, $a + b + c$, $a + b + c + d$, … einer endlichen Größe zu, an die sie näher herankommen als eine beliebig gegebene Differenz, so konvergiert die Reihe". — „Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

konvergiert für $n > 1$, und für $n < 1$ divergiert die Reihe. Ist für beliebige endliche $\varkappa$ und $n = \infty$ das unendlich ferne Glied $a_n < \frac{1}{\varkappa n}$, dann und nur dann konvergiert die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Wenn für unendlich großes n der Quotient $a_n : a_{n+1}$ kleiner (größer) als 1 ist, so divergiert (konvergiert) die Reihe." Wir stoßen also hier auf das bekannte Konvergenz-Kriterium. In die Reihen

[1]) Cantabrigiae 1781.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \cdots$$

setzt Waring zwar $x = 1$ und erhält dabei verschiedene Werte für $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$; aber er setzt bei diesen Herleitungen ausdrücklich hinzu (S. 355): „in Wahrheit kann diesen Reihen keine Summe zugesprochen werden“.

Waring ist in erster Linie Algebraiker; das zeigt sich auch hier darin, daß die Untersuchung gern auf das Gebiet der Gleichungen übertritt. So werden die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ der „infiniten“ Gleichung für x von der Gestalt $0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \cdots$ in Zusammenhang mit den Koeffizienten gebracht:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \cdots; \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \cdots + \frac{1}{\beta\gamma} + \cdots$$

und die Reihe liefert in Faktoren aufgelöst

$$a \cdot \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) \cdots = 0,$$

wie das schon in den Eulerschen Untersuchungen benutzt ist. — Im vierten Buche geht Waring ausführlich auf Beziehungen ein, die zwischen dem n^{ten} Reihengliede, der Summe der n ersten Glieder und der Ordnungsziffer n selbst bestehen können; ebenso vergleicht er Reihen, zwischen deren Partialsummen vorgeschriebene Relationen bestehen. Ausgiebigen Gebrauch zur Herstellung summierbarer Reihen macht er von dem Kunstgriff, die Summe zu geben und die Reihen daraus herzustellen. Auf weitere Einzelheiten des umfassenden Werkes hier einzugehen, müssen wir uns versagen; über einige Nachträge zu den „Meditationes algebraicae“ werden wir an gehöriger Stelle zu berichten haben.

Aus dem Jahre 1781 sind noch zwei Eulersche Arbeiten zu besprechen. Des besseren Zusammenhanges wegen behandeln wir sie in der umgekehrten Folge ihres Erscheinens.

Die zweite, kleinere Arbeit Eulers[1]) dehnt die S. 274 behandelte Summations-Formel für

$$\binom{n}{0}\binom{p}{q} + \binom{n}{1}\binom{p}{q+1} + \binom{n}{2}\binom{p}{q+2} + \cdots = \binom{p+n}{q+n}$$

auf andere Symbole

$$\left[\frac{n}{0}\right]\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{p}{q+1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{p}{q+2}\right] + \cdots = \left[\frac{n+p}{\lambda m+p}\right]$$

[1]) Act. Petrop. IV, 1781, II, p. 76.

aus, wo $\left[\frac{a}{b}\right]$ durch die Gleichung

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^\lambda)^n = 1 + \left[\frac{n}{1}\right]x + \left[\frac{n}{2}\right]x^2 + \left[\frac{n}{3}\right]x^3 + \cdots$$

erklärt wird.

Die erste, größere Arbeit[1]) beschäftigt sich mit Umwandlungen der harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x} = C + lx + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \cdots,$$

in der, verschieden von früherer Bezeichnung (vgl. S. 262),

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6}, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{30}, \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{42}, \quad \mathfrak{D} = \frac{1}{30}, \quad \mathfrak{E} = \frac{5}{66}, \ \cdots$$

die Bernoullischen Zahlen sind, und $C = 0{,}5772\,156\,649\ldots$ die Konstante bedeutet, die später die Bezeichnung „Eulersche Konstante“ erhalten hat. Setzt man

$$\sum \frac{1}{n^2} = \alpha, \quad \sum \frac{1}{n^3} = \beta, \quad \sum \frac{1}{n^4} = \gamma, \ldots$$

wobei die Summen von $n = 1$ bis $n = \infty$ erstreckt werden, dann findet Euler

$$1 - C = \frac{1}{2}(\alpha - 1) + \frac{1}{3}(\beta - 1) + \frac{1}{4}(\gamma - 1) + \cdots;$$

ferner

$$C = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{5}\delta + \cdots;$$

ebenso

$$l2 - C = \frac{1}{3 \cdot 2^2}\beta + \frac{1}{5 \cdot 2^4}\delta + \frac{1}{7 \cdot 2^6}\zeta + \cdots$$

und andere Beziehungen mehr. Euler gewinnt dabei den Anschluß an bereits früher von ihm angestellte Untersuchungen (Band III^2, S. 657) und liefert hier den Beweis für die, dort in der Gestalt

$$S = -\int X dx + \alpha X + \beta \frac{dX}{dx} + \gamma \frac{d^2 X}{dx^2} + \cdots$$

gegebene Summenformel. Dabei ist X eine Funktion von x etwa $X(x)$ und $S(x) = X(x) + X(x+1) + X(x+2) + \cdots$ oder, wie Euler kürzer schreibt, $S = X + X' + X'' + X''' + \cdots$.

Ein ähnliches Problem beschäftigt Euler auch weiterhin.[2]) Er fragt nach der Summe $S = X - X' + X'' - X''' + \cdots$. Ist S' dieselbe Summe, in der nur x durch $(x + 1)$ ersetzt wird, so hat man $S + S' = X$ und erkennt daraus, daß in erster Näherung $S = \frac{1}{2}X$ und, bei noch unbekannten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, weiter

[1]) Act. Petrop. IV, 1781, II, p. 45.

[2]) Nov. Act. Acad. Petrop. II pro 1784, p. 46.

$$S = \frac{1}{2} X + \alpha \frac{dX}{dx} + \beta \frac{d^2 X}{dx^2} + \gamma \frac{d^3 X}{dx^3} + \cdots$$

wird. Die $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ kann man nun mit Hilfe von Reduktionsformeln bestimmen, und zwar am bequemsten durch die Einführung einer Funktion

$$s = \frac{1}{2} + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4 + \cdots.$$

Euler bezeichnet $s - \frac{1}{2} = v$ und findet als Bestimmmungs-Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = v^2 - \frac{1}{4}; \quad v = \frac{1}{1+e^t} - \frac{1}{2}.$$

Hieraus ergeben sich dann die gesuchten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, die in enger Beziehung zu den Bernoullischen Zahlen stehen. Ist

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{3}{5}, \quad e = \frac{5}{3}, \quad f = \frac{691}{105}, \cdots$$

(Introductio in analysin infin. Cap. X, § 168), dann wird

$$S = \frac{1}{2} X - \frac{2^2-1}{3!} \frac{a}{2} \frac{dX}{dx} + \frac{2^4-1}{5!} \frac{b}{2} \frac{d^3 X}{dx^3} - \frac{2^6-1}{7!} \frac{c}{2} \frac{d^5 X}{dx^5} + \frac{2^8-1}{9!} \frac{d}{2} \frac{d^7 X}{dx^7} - \cdots.$$

Für diese Entwicklung gibt Euler dann noch einen zweiten Beweis. Ferner behandelt er die Summationen der beiden Reihen

$$n^x X - n^{x+1} X' + n^{x+2} X'' - n^{x+3} X''' + \cdots$$

und

$$x! X - (x+1)! X' + (x+2)! X'' - (x+3)! X''' + \cdots.$$

Die Arbeit wurde erst nach dem am 7. September 1783 (A. St.) zu Petersburg erfolgten Tode Eulers publiziert. Bei seinen Lebzeiten waren von ihm allein 473 Abhandlungen erschienen; über 200 andere hinterließ er. Bis zum Jahre 1830, also beinahe noch 50 Jahre, nachdem Euler die Augen geschlossen hatte, dauerten die Publikationen ihres größten Mitgliedes seitens der Petersburger Akademie fort.

Wir kehren zum Jahre 1782 zurück und erwähnen einen Aufsatz von Nic. Fuß[1]), der sich auf folgendes stützt. Es seien $A, B, C, D, \ldots X, \ldots$ beliebige Größen $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \ldots$ die Reihe ihrer ersten Differenzen, $\Delta^2 A, \Delta^2 B, \Delta^2 C, \ldots$ die ihrer zweiten Differenzen usf.; dann hat man bekanntlich

$$X = A + \Delta A \cdot x + \Delta^2 A \cdot \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + \Delta^3 A \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots.$$

Daraus folgt

[1]) Act. Petrop. 1782, II, p. 96.

$$\lim_{x=0} \frac{X-A}{x} = \Delta A - \frac{1}{2} \Delta^2 A + \frac{1}{3} \Delta^3 A - \frac{1}{4} \Delta^4 A + \cdots;$$

die linke Seite tritt dabei unter der Form 0:0 auf. Gelingt es, den wahren Wert dieses Quotienten zu bestimmen, so liefert derselbe die Summe der rechtsstehenden Reihe. So findet Fuß

$$l(1+x) = l1 + l\frac{2}{1} \cdot x + l\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + l\frac{2^2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

aus der Annahme $X = l(1+x)$; und

$$2\varphi \cos\varphi = 2 \sin\varphi \cdot \cos 2\varphi + \frac{1}{2} 2^2 \sin^2\varphi \sin 3\varphi - \frac{1}{3} 2^3 \sin^3\varphi \cos 4\varphi - \frac{1}{4} 2^4 \sin^4\varphi \sin 5\varphi + \frac{1}{5} 2^5 \sin^5\varphi \cos 6\varphi + \cdots$$

aus der Annahme $X = \sin(1+2x)\varphi$.

Von dem schon erwähnten Italiener Lorgna stammt eine umfangreiche Untersuchung über Reihensummen.[1]) Wir können sie aber gleichwohl kurz behandeln, da ihr Inhalt im wesentlichen mit dem der früheren Arbeit übereinstimmt. In zehn Kapiteln werden verschiedene Arten von summierbaren Reihen besprochen. Als neu heben wir hervor aus Kap. VI die Reihe $1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + x!$, allgemeiner

$$(a+b)! + (a+2b)! + (a+3b)! + \cdots$$

und

$$(m+1)(m+2)^2 + (m+1)(m+2)(m+3)^2 + (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+4)^2 + \cdots;$$

aus Kap. VII

$$l2 + (l3 - 2l2) + (l4 - 3 \cdot l3 + 3l2) + (l5 - 4l4 + 6l3 - 4l2) + \cdots;$$

aus Kap. VIII

$$\frac{p}{a} \cdot \frac{2(ap+b)}{(a+b)(1+p)} \cdot \frac{3(ap+bp+b)}{(a+2b)(1+2p)} \cdot \frac{4(ap+2bp+b)}{(a+3b)(1+3p)} \cdots + \frac{p}{2a} \cdot \frac{2(ap+2b)}{(a+b)(2+p)} \cdot \frac{3(ap+bp+2b)}{(a+2b)(2+2p)} \cdot \frac{4(ap+2bp+2b)}{(a+3b)(2+3p)} \cdots + \cdots;$$

aus Kap. IX die Doppelreihe

$$\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1^2}{3^3} - \frac{1^3}{4^4} + \cdots\right) + \left(1 - \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} - \frac{2^3}{4^4} + \cdots\right) + \left(1 - \frac{3}{2^2} + \frac{3^2}{3^3} - \frac{3^3}{4^4} + \cdots\right) + \cdots.$$

Die benutzten Summationsmethoden sind die gleichen wie in dem

[1]) Memor. mat. fis. Soc. Ital. I, 1782, p. 268.

oben (S. 269) besprochenen Aufsatze des Verfassers. — Wir wollen gleich hier eine dritte Abhandlung Lorgnas erwähnen, trotzdem sie erst 1784, also zwei Jahre später erschienen ist.[1]) In ihr handelt es sich um die Summierung der Reihe

$$\frac{1}{aK \pm b} \mp \frac{1}{aK^2 \pm b} + \frac{1}{aK^3 \pm b} \mp \cdots,$$

wo K die Basis der hyperbolischen Logarithmen bezeichnet. Sie wird durch die Substitution

$$\sin m\pi = \frac{1}{2\omega}(K^{m\pi\omega} - K^{-m\pi\omega})/(\omega = \sqrt{-1})$$

geleistet. Dadurch wird

$$K^x + 1 = 2\omega K^x \sin\frac{x}{\omega} : (K^x - 1)$$

und

$$K^x - 1 = 2\omega K^x \sin\frac{x}{\omega} : (K^x + 1),$$

so daß in jedem Reihengliede die Summe aus dem Nenner in den Zähler geschafft werden kann. — Weiter beschäftigt sich Lorgna mit anderen Reihen und erhält z. B. die Resultate

$$\frac{11}{6\cdot 12} - \frac{1}{-5} + \frac{1}{4\cdot 4 - 9} + \frac{1}{4\cdot 9 - 9} + \frac{1}{4\cdot 16 - 9} + \cdots;$$

$$\frac{1}{6}l2 - \frac{5}{5\cdot 12} = \frac{1}{-5} - \frac{1}{4\cdot 4 - 9} + \frac{1}{4\cdot 9 - 9} - \frac{1}{4\cdot 16 - 9} + \cdots.$$

Wir gehen nunmehr zu einer, ganz anderen Anschauungskreisen angehörigen Arbeit von Laplace über.[2]) Bei seinen eingehenden Forschungen im Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihrer praktischen Verwertung bei national-ökonomische Fragen war Laplace häufig auf Formeln gestoßen, die zur Berechnung ganz ungeeignet sich zeigten, weil sehr große oder sehr viele Zahlen in sie eintraten. Handelt es sich z. B. bei hohem Werte des s um die Berechnung von

$$\frac{2s\cdot(2s-1)\cdot(2s-2)\ldots(s+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots s},$$

so wird dies selbst bei der Benutzung von Logarithmen sehr mühselig. In diesem Falle hatte Stirling eine bequeme Formel zur angenäherten Berechnung jenes Binomialkoeffizienten aufgestellt; in anderen Fällen war, wie wir oben sahen, D. Bernoulli in ähnlicher Weise vorgegangen (vgl. S. 231). Laplace greift hier die Frage fundamental an und bringt sie zur Lösung. Seine umfangreiche Abhandlung ist aber in derartigem Maße von Formeln durchsetzt, daß

[1]) Memor. mat. fis. Soc. Ital. II, 1784, p. 210. [2]) Hist. Acad. Paris, 1782, p. 1, und 1783, p. 423 (vgl. S. 231).

handlung ist aber in derartigem Maße von Formeln durchsetzt, daß eine Darlegung der Entwicklung hier nicht möglich erscheint. Wir müssen uns auf die Angabe des Zieles der Untersuchung und auf die Mitteilung einiger Resultate beschränken. Das Problem, dem Laplace seinen Scharfsinn widmet, zerfällt in zwei Teile. Zunächst wird eine Integration durch unendliche Reihen für solche Integranden hergeleitet, die in hohe Potenzen erhobene Faktoren enthalten. Die hierfür gegebenen Reihen konvergieren äußerst schnell. An zweiter Stelle werden Funktionen, von welchen man angenäherte Werte sucht, auf die angegebene Integralgestalt gebracht, deren Entwicklung soeben besprochen wurde. Diese Behandlung umfaßt alle Funktionen, die durch gewöhnliche oder partielle Differenzen- oder Differentialgleichungen definiert werden.

Bei solchen Untersuchungen treten Integrale von der Gestalt

$$\int_0^\infty t^{2\varkappa} e^{-t^{\mu+1}} dt$$

auf. Laplace bestimmt außer dem schon vor ihm bekannten Integrale

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

noch andere wie z. B.

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^4} dt = \pi^{\frac{3}{4}} : \left(4\sqrt{2\sqrt{2}\cdot\pi^1}\right),$$

wo π^1 die Stirlingsche Konstante 1,311028777 ... bedeutet, die zur Länge der elastischen Kurve in enger Beziehung steht. Der dritte Abschnitt der Laplaceschen Abhandlung liefert Anwendungen der erhaltenen Resultate auf schwierigere Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ein Aufsatz, der vielfach an die Arbeiten von Lorgna erinnert, stammt von dem Engländer Samuel Vince.[1]) Im ersten Teile geht der Verfasser von der Bemerkung aus, daß die Integration von $\frac{1}{1+x^r}$ durch Logarithmen und Kreisfunktionen ausführbar sei, und daß andererseits die Reihenentwicklung des Bruches mit nachfolgender, von 0 bis 1 erstreckter Integration die Summe

$$1 - \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} - \frac{1}{r+3} + \cdots$$

ergebe. Daher kann die Summe S dieser Reihe durch die angegebenen Transzendenten ausgedrückt werden; S wird als bekannt angesehen.

[1]) Phil. Transact. London, for 1782, p. 389.

Auf diese Reihe werden andere dadurch reduziert, daß Glieder zerlegt oder in eins zusammengezogen werden. So findet Vince

$$\frac{a}{1\cdot(r+1)}-\frac{a+b}{(r+1)(2r+1)}+\frac{a+2b}{(2r+1)(3r+1)}-\frac{a+3b}{(3r+1)(4r+1)}+\cdots$$
$$=\frac{1}{r^2}\{[2ra-(r+2)b]S-ra+(r+1)b\}.$$

Bei der Annahme $2ra=(r+2)b$ fällt S weg. So erhält man z. B.

$$\frac{5}{3\cdot 7}-\frac{9}{7\cdot 11}+\frac{13}{11\cdot 15}-\cdots=\frac{1}{6}.$$

Andere, in ähnlicher Art summierte Reihen sind

$$\frac{m}{1(r+1)(2r+1)}+\frac{m+n}{(2r+1)(3r+1)(4r+1)}+\frac{m+2n}{(4r+1)(5r+1)(6r+1)}+\cdots;$$

ferner

$$\frac{m}{(r+1)(2r+1)(3r+1)}+\frac{m+n}{(3r+1)(4r+1)(5r+1)}$$
$$+\frac{m+2n}{(5r+1)(6r+1)(7r+1)}+\cdots;$$
$$\frac{m}{(2r+1)(3r+1)(4r+1)}+\frac{m+n}{(4r+1)(5r+1)(6r+1)}$$
$$+\frac{m+2n}{(6r+1)(7r+1)(8r+1)}+\cdots.$$

Dann folgen solche, deren Nenner vier derartige Faktoren enthält usw. Durch Spezialisierung kann man auch mitunter das transzendente S aus den Formeln entfernen. Man findet u. a.

$$\frac{1}{1\cdot(2r+1)}+\frac{1}{(2r+1)(4r+1)}+\frac{1}{(4r+1)(6r+1)}+\cdots=\frac{1}{2r}.$$

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Summierung von Reihen, die die Form haben

$$\frac{p}{n(n+m)\dots(n+rm)}+\frac{q}{(n+m)(n+2m)\dots(n+[r+1]m)}$$
$$+\frac{r}{(n+2m)(n+3m)\dots(n+[r+2]m)}+\cdots;$$

in der $p, q, r, \dots$ eine arithmetische Reihe beliebiger Ordnung bilden Von den erlangten Resultaten führen wir an

$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{10}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{15}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\cdots=\frac{11}{36};$$
$$\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}+\frac{4\cdot 5}{7\cdot 9\cdot 11\cdot 13}+\cdots=\frac{1}{24};$$
$$\frac{1^2}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\frac{3^2}{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13}+\frac{5^2}{7\cdot 10\cdot 13\cdot 16}+\frac{7^2}{10\cdot 13\cdot 16\cdot 19}+\cdots=\frac{37}{2268}.$$

Im dritten Teile geht Vince von der Bemerkung aus, daß in einer unendlichen Reihe, deren Glieder nach Null konvergieren und abwechselnde Vorzeichen haben, aufeinander folgende Glieder in eins zusammengefaßt werden dürfen, wie bei

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{6\cdot 7}-\cdots;$$

daß dies aber bei Reihen, deren Glieder nach einer endlichen Größe $\neq 0$ konvergieren, nicht erlaubt sei; daß also nicht

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+\cdots=-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{6\cdot 7}-\cdots$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots.$$

Es müssen also bei solcher Zusammenfassung noch Ergänzungsglieder beigefügt werden. Das erklärt sich (an den obigen Beispielen) so: Die Reihe $-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{6\cdot 7}-\cdots$ „hört im Unendlichen auf", da ihre Glieder $0, 0, \cdots$ werden; die Reihe $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}-\cdots$ „geht im Unendlichen noch fort", da sie die Gestalt $1-1+1-1\cdots$ annimmt. Die Wahrung der Gleichheit fordert also, daß man zum Ausdrucke $-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}-\cdots$ noch $1-1+1-1+\cdots$ hinzufüge. Und das hat „bekanntlich" den Wert $\frac{1}{2}$. Genau aus den gleichen Gründen wird bei $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$ das Ergänzungsglied

$$-1+1-1+1-\cdots=-\frac{1}{2}$$

sein. Es ist interessant zu sehen, welche wilden Schößlinge die Lehre von den divergenten Reihen treibt, und wieviel Scharfsinn auf das Dogma von der Summe solcher Reihen aufgewendet wurde.

In dem Eulerschen Werke, dessen erster Teil 1783, in des Verfassers Todesjahr, dessen zweiter 1785 zu Petersburg erschien und den Titel „Opuscula analytica" trägt, finden wir Reihen-Untersuchungen. Gleich die erste Abhandlung (p. 3) des ersten Bandes gehört hierher. Das in ihr behandelte Problem ist etwas unbestimmt gedacht und ausgedrückt: Eine Reihe von Zahlen $A, B, C, D, E, F, \cdots$ ist gegeben, und eine andere $a, b, c, d, e, f, g, \cdots$ soll gefunden werden, so daß $ab=A$; $bc=B$; $cd=C$; $de=D$; $ef=E$; $fg=G$; $\cdots$ wird. Offenbar hängt alles von der Bestimmung des a ab, und dies a bleibt ganz willkürlich. Euler sucht nun, ohne es ausdrücklich anzugeben, einen solchen Wert des a, für den die Reihe $a, b, c, d, \cdots$ möglichst einfach sich gestaltet. Er findet für diese, auch so noch unbestimmte Aufgabe, da der Begriff der „Einfachheit" unbestimmt ist,

$$a^2 = A \frac{A \cdot C}{B \cdot B} \frac{C \cdot E}{D \cdot D} \frac{E \cdot G}{F \cdot F} \cdots$$

und stellt daraus bei besonderen Annahmen über $A, B, C, \cdots$ das a^2 durch Integrale dar. Andererseits entwickelt er a^2 in einen Kettenbruch und erhält durch Gleichsetzung beider Lösungen merkwürdige Beziehungen, von denen wir wenigstens eine anführen wollen, nämlich

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 2/3 + 1 \cdot 3/4 + 3 \cdot 5/4 + 5 \cdot 7/4 + 7 \cdot 9/4 + \cdots.$$

Die zweite Abhandlung dieses Bandes führt **Eulers** frühe Untersuchungen (S. 260) über die Potenzerhebung von $(1 + x + x^2)^n$, insbesondere über den Koeffizienten von x^n in diesem entwickelten Polynome weiter, in der ausgesprochenen Absicht, verschiedene analytische Kunstgriffe darzulegen, und andererseits zu zeigen, wie vorsichtig man mit Induktionsschlüssen sein müsse.

Der vierte Aufsatz (p. 85) beschäftigt sich mit Kettenbrüchen und steht in gewissem Zusammenhange mit dem zweiten Teile des ersten Aufsatzes. Mit Hilfe eigentümlicher Relationen werden Gleichungen zwischen gewissen Kettenbrüchen hergestellt, aus denen durch Spezialisierung folgendes Resultat hervorgeht. Setzt man

$$p = m + n/(m+1) + (n+1)/(m+2) + (n+2)/(m+3) + \cdots,$$

so wird

$$(n-1) : p = 1 + (n-m-2)/(m+2) + (n-m-3)/(m+3) + \cdots.$$

Daraus folgt der Wert von p für $n = m+2,\ m+3,\ m+4, \cdots$. Auch für $n = m+1$ gelingt, freilich auf andere Weise, die Bestimmung. Setzt man in diesem Falle $p = \frac{1}{\omega} - 1$, so wird

$$\omega = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} - \cdots$$
$$= \frac{1}{e} \int_0^1 e^z z^m \, dz.$$

Im sechsten Aufsatze (p. 157) wird die Aufgabe behandelt, die Koeffizienten der Reihe

$$y = Ax + Bx(x^2 - a^2) + Cx(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)$$
$$+ Dx(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) + \cdots$$

so zu bestimmen, daß y für $x = a, b, c, d, \cdots$ die Werte $p, q, r, s, \cdots$ annimmt. Für $a, b, c, d, \cdots$ werden dann irgendwelche Kreisbögen

(beim Kreis-Radius 1) und für $p, q, r, s, \cdots$ ihre Sinus eingetragen; dabei wird allgemein $y = \sin x$. Das liefert

$$1 = \frac{p}{a}\left(1 + \frac{a^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} + \cdots\right)$$
$$- \frac{a^2 q}{b(b^2 - a^2)}\left(1 + \frac{b^2}{c^2 - b^2} + \frac{b^2 c^2}{(c^2 - b^2)(d^2 - b^2)} + \cdots\right) + \cdots$$

und führt durch Spezialisierung auf interessante Formeln.

Auch der zweite Band der Opuscula liefert Bemerkenswertes. Im siebenten Aufsatze (p. 102) wird die Zerlegung transzendenter Brüche in unendliche Reihen geliefert. Ist $\frac{P}{Q}$ dieser Bruch, dessen Nenner eine transzendente Funktion von z ist; ist a eine Wurzel des gleich Null gesetzten Nenners, so wird der Zähler α des Gliedes $\frac{\alpha}{z-a}$, das in $\frac{P}{Q}$ als Partialbruch eingeht, durch

$$\alpha = \frac{P\,dz + (z-a)\,dP}{dQ}$$

gegeben. Diese Bestimmung der Zähler wird auf $\frac{1}{\sin z}$, auf

$$\frac{z}{\sin z},\ \frac{z^2}{\sin z},\ \frac{z^3}{\sin z},\ \frac{\cos z}{\sin z},\ \frac{1}{\cos \xi - \cos z},\ \cdots,\ \frac{1}{\sin z^2},\ \frac{1}{\sin z^3}\ \text{usw.}$$

angewendet.

Die nächste Abhandlung beschäftigt sich mit der Umwandlung von Reihen in Kettenbrüche (p. 138) in der Gestalt

$$\beta/b + \gamma/c + \delta/d + \cdots = \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} - \frac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}} - \frac{1}{\mathfrak{D}\mathfrak{E}} + \cdots.$$

So wird aus der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = l2$ hergeleitet

$$1 : l2 = 1 + 1^2/1 + 2^2/1 + 3^2/1 + \cdots,$$

und aus $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$ folgt die **Brounckersche** Entwicklung $4 : \pi = 1 + 1^2/2 + 3^2/2 + 5^2/2 + \cdots$. Hier mag gleich bemerkt werden, daß **Euler** auch[1]) die umgekehrte Aufgabe löste: den **Brounckerschen** Kettenbruch in die **Leibnizsche** Formel umzuwandeln. Ferner folgt für $s = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} - \cdots$ der reziproke Wert

$$\frac{1}{s} = \alpha + \alpha/(\beta - 1) + \beta/(\gamma - 1) + \gamma/(\delta - 1) + \cdots;$$

und aus $s = \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{\alpha\beta} + \frac{x^3}{\alpha\beta\gamma} - \cdots$ ergibt sich allgemeiner

---

[1]) Nov. Act. Petrop. II, 1784, p. 33.

$$\frac{x}{s} = \alpha + \alpha x/(\beta - x) + \beta x/(\gamma - x) + \gamma x/(\delta - x) + \cdots$$

und dgl. mehr.

Das gleiche Thema wird in einer späteren Abhandlung (p. 217) fortgesetzt. Euler erledigt dabei den Fall, der den früheren Methoden nicht zugänglich war, daß alle Teilzähler gleich 1 sind, während die Teilnenner eine arithmetische Reihe bilden. Die Lösung wird durch die Integration einer Differentialgleichung vermittelt.

In der zehnten dieser Arbeiten (p. 240) handelt es sich, ohne daß erwähnenswerte Resultate zutage gefördert werden, um die Summe der Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \frac{1}{29} - \frac{1}{31} + \cdots.$$

Die elfte Arbeit des zweiten Bandes (p. 257) gibt eine neue Ableitung der Summen $1 \mp \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} \mp \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} \mp \cdots$, die sich auf die Entwicklung der beiden Formeln

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} = 1 + \frac{2}{n^2 - 1} - \frac{2}{4n^2 - 1} + \frac{2}{9n^2 - 1} - \cdots$$

und

$$\frac{\pi}{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} = 1 - \frac{2}{n^2 - 1} - \frac{2}{4n^2 - 1} - \frac{2}{9n^2 - 1} - \cdots$$

stützt.

Nach der Besprechung der auf Reihen bezüglichen Arbeiten in Eulers Sammelwerke „Opuscula analytica" gehen wir zu einem Aufsatze von E. Waring über.[1] Waring betrachtet hauptsächlich Reihen, deren allgemeines Glied eine rationale Funktion des Stellenzeigers oder, wie sein Ausdruck lautet, der Entfernung vom Anfangsgliede ist. Er geht davon aus, eine gegebene Summe $A(x)$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe sich entwickelt zu denken.

Setzt man den Nenner von $A(x)$ gleich Null, so liefert die, ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel dieser Gleichung die obere Grenze für die Konvergenz der Reihe. Das ist also eine bereits vollkommen moderne Auffassung; bemerkenswert ist, daß hier bei einer komplexen Wurzel $a + b\sqrt{-1}$ statt des absoluten Betrages $\sqrt{a^2 + b^2}$ die kleinere der beiden Größen $|a - b|$, $|a + b|$ genommen wird. — Hat das allgemeine Glied die Form $\frac{a z^m + b z^{m-1} + \cdots}{(z+e)(z+e+1)\cdots(z+e+n-1)}$ mit $m \leq n - 2$, so kann es in ein Aggregat

$$\frac{\gamma}{(z+e)(z+e+1)} + \frac{\delta}{(z+e)\cdots(z+e+2)} + \frac{\varepsilon}{(z+e)\cdots(z+e+3)} + \cdots$$

[1] Phil. Transact. R. Soc. London 74 (1784), p. 385.

umgewandelt werden, und als Reihensumme ergibt sich daher

$$\frac{\gamma}{z+e} + \frac{\delta}{2(z+e)(z+e+1)} + \frac{\varepsilon}{3(z+e)\cdots(z+e+2)} + \cdots.$$

In ähnlicher Weise werden Reihen behandelt, deren Glieder mit Nennern der verwickelteren Form

$$(z+e)\cdots(z+e+n-1)\cdot(z+f)\cdots(z+f+n-1)\cdot(z+g)\cdots(z+g+n-1)\cdots$$

behaftet sind. Die Bestimmung der Reihensumme kann auch mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten geliefert werden, da durch die eben besprochene Überlegung die Form der Summe bekannt ist; zum allgemeinen Gliede $\frac{a z^m + b z^{m-1} + \cdots}{(z+e)(z+e+1)\cdots(z+e+n-1)}$ z. B. gehört nämlich eine Summe $\frac{\alpha z^\mu + \beta z^{\mu-1} + \cdots}{(z+e)(z+e+1)\cdots(z+e+n-2)}$. — Waring behandelt dann auch den Fall, daß zum angegebenen allgemeinen Gliede ein Exponentialfaktor g^z hinzutritt. — Des weiteren bespricht er das folgende Verfahren zur Herstellung summierbarer Reihen: Ist $u_0, u_1, u_2, \cdots$ eine unendliche Reihe von, nach der Null als Grenze konvergierenden Zahlen, so hat die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $(\alpha u_z + \beta u_{z+a} + \gamma u_{z+b} + \cdots)$, falls $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = 0$ ist, eine leicht angebbare Summe. — Ferner bildet Waring aus einer Reihe mit bekannter Summe $t = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ durch Multiplikation mit x^r und Differentiation

$$u = x\frac{d(tx^r)}{dx} = r a_0 x^r + (r+1) a_1 x^{r+1} + (r+2) a_1 x^{r+2} + \cdots;$$

$$v = x\frac{d(ux^{s-r})}{dx} = r s a_0 x^s + (r+1)(s+1) a_1 x^{s+1} + \cdots$$

usf. — Wie man sieht, geht Warings Absicht darauf hinaus, Regeln zu bilden, die zur Herstellung summierbarer Reihen führen. — Den Schluß des Aufsatzes bilden Prioritätsreklamationen gegenüber Euler und Lagrange hinsichtlich algebraischer Entdeckungen. So nimmt Waring die Behandlung der Wurzeln einer auflösbaren Gleichung in der Gestalt $y = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^2} + c\sqrt[n]{p^3} + \cdots$ gegen Euler für sich in Anspruch; Bestimmungen der Anzahl komplexer Wurzelpaare einer Gleichung gegen Lagrange. Für die damalige Zeit, die noch nicht im Zeichen des Verkehrs stand, sind derartige Fälle durchaus nicht überraschend; Waring behandelt sie auch demgemäß: „er habe an Euler eine Arbeit geschickt; ob der sie je empfangen habe, könne er nicht sagen".

Die zeitliche Folge leitet uns nunmehr zu einem Aufsatze von Carlo Gianella über[1]). In vier Paragraphen werden Fragen besprochen, die sich auf die Theorie der Reihen beziehen. Im ersten Paragraphen wird $Z = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots$ zur n^{ten} Potenz erhoben. Dabei findet sich die Relation, deren Richtigkeit evident ist,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n x Z}{1!} + \frac{n^2 x^2 Z^2}{2!} + \frac{n^3 x^3 Z^3}{3!} + \cdots.$$

Im zweiten Paragraphen wird die Reihe $A + B + C + \cdots = \lg \frac{e}{\sqrt{2\pi}}$ summiert, wo die einzelnen Glieder $A, B, C, \ldots$ durch die Gleichung

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2} n^m + m A n^{m-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1} B n^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} C n^{m-3} + \cdots$$

bestimmt sind. Der dritte Paragraph beschäftigt sich mit einem Symbole d, für das $da^n = na^{n-1}$ ist. Dadurch kürzen sich manche Formeln in ihrer Schreibweise wesentlich ab; man erhält z. B.

$$n = 2^{n-1} - d2^{n-2} + \frac{1}{2!} d^2 2^{n-3} - \frac{1}{3!} d^3 2^{n-4} + \cdots;$$

und im vierten Paragraphen wird das gleiche Symbol d für die Transformation und die Iteration von Reihen ausgenützt.

Ein kleiner Streit spielt sich um diese Zeit ab. Euler hatte, unbekümmert um Konvergenz-Notwendigkeiten, die Gleichung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = \lg\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

aufgestellt[2]). Greg. Fontana[3]) greift die Ableitung der Gleichung an; Nik. Fuß verteidigt sie[4]). Auch über die Eulersche Behauptung, daß $\frac{1}{\varkappa n + 1} + \frac{1}{\varkappa n + 2} + \cdots + \frac{1}{(\varkappa + 1) n} = \lg \frac{\varkappa + 1}{\varkappa}$ für $n = \infty$ werde, herrschen verschiedene Meinungen. G. Fontana erwähnt übrigens den bereits verstorbenen Euler bei seinen Angriffen nirgend. Es ist ein „Verfahren gegen Unbekannt", das er einschlägt. Fuß weist aber nach, daß nur Euler bei den Angriffen gemeint sein kann. Aus der Fußschen Abhandlung heben wir hier gleich noch eine interessante Formel heraus, die in den letzten Paragraphen der Arbeit

[1]) Mém. Acad. Turin I, 1784—1785, p. 391. [2]) Comm. Petrop. IX (1737), 1744, p. 188. [3]) Mem. mat. fis. Soc. Ital. II, 1784, p. 133. [4]) Nov. Act. Petrop. VIII, 1790, p. 201.

abgeleitet wird; es ist $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 - 1} = 1 - l2.$ Ihr Beweis ist ja sehr einfach.

Aus demselben Jahre 1784 stammt von dem eben erwähnten G. Fontana eine zweite Arbeit[1]) über unendliche Reihen, in der er wiederum gelegentlich Eulers Schlüsse angreift. Der Hauptinhalt der Abhandlung liegt in der Benutzung der Integralrechnung für die Summierung von Reihen. Als Beispiel möge folgendes dienen: um $S = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$ zu finden, leitet er $\frac{d^4 S}{dx^4} = S$ her und integriert diese Differentialgleichung. Ähnlich behandelt er

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots; \quad \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{15}}{15!} + \cdots;$$

$$\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots; \quad \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^7}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots;$$

er kommt auch auf Bossuts Theoreme (vgl. S. 264).

Aus dem im Jahre 1785 erschienenen letzten Bande des Briefwechsels Lamberts interessieren uns hier zwei Stellen[2]), in denen Ludwig Oberreit über eine Reihentransformation berichtet, die er und schon vor ihm Lambert gefunden hatte. Von Oberreit werde erwähnt, daß er 1734 zu Lindau geboren wurde und 1803 zu Dresden als Finanzbeamter starb. Die erwähnte Transformation von

$$y = ax^m - bx^{m+n} + cx^{m+2n} + \cdots$$

geht so vor sich, daß die Gleichung zunächst mit $a + bx^n$ multipliziert wird. Dadurch fällt das Glied mit x^{m+n} fort, und man hat

$$(a + bx^n) y - a^2 x^m = a' x^{m+2n} - b' x^{m+3n} + c' x^{m+4n} - \cdots;$$

durch Multiplikation mit $(a' + b'x^n)$ wird das Glied mit x^{m+3n} weggeschafft usw. Dieses Vorgehen liefert

$$y = \frac{a^2 x^m}{a + bx^n} + \frac{a'^2 x^{m+2n}}{(a + bx^n)(a' + b'x^n)} + \frac{a''^2 x^{m+4n}}{(a + bx^n)(a' + b'x^n)(a'' + b''x^n)} + \cdots.$$

Wendet man diese Transformation auf die Reihen für die Logarithmen, für die Quadrat- und die Kubikwurzeln an, so erhält man sehr schnell konvergierende Entwicklungen.

Im Jahre 1786 veröffentlicht A. M. Lorgna wieder eine Reihenuntersuchung[3]). Er summiert

[1]) Mem. mat. fis. Soc. Ital. II, 1784, p. 886. [2]) Lamberts gelehrter deutscher Briefwechsel, herausgeg. von Joh Bernoulli, Band V (1785), p. 304 und p. 354. [3]) Mém. Acad. sci. Turin III, 1786—1787.

$$\frac{1}{\sin(p+q)\varphi} \pm \frac{1}{\sin(p+2q)\varphi} + \frac{1}{\sin(p+3q)\varphi} \pm \cdots \pm \frac{1}{\sin(p+nq)\varphi}$$

(und die entsprechende Reihe für die Kosinus) durch Benutzung des Integrals $\int\limits_0^1 \frac{x^{\frac{m}{n}}\,dx}{1+x}$ für endliche und für unendlich große n. Beispielsweise wird für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ gefunden

$$\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin 2\varphi} + \frac{1}{\sin 3\varphi} + \cdots = \sqrt{3} + \frac{l2}{\pi}.$$

G. Fontana gibt ohne Beweise[1]) 37 Theoreme über Reihensummen; wir führen, um eine Anschauung zu vermitteln, einige an:

$$\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots = 1;$$

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \cdots = \frac{2}{\pi};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1^2}{2^2\cdot 4} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \cdots = \frac{2}{\pi}.$$

Das genüge!

Mit rekurrenten Reihen beschäftigt sich Gian. Franc. Malfatti[2]). Er knüpft an Lagranges grundlegende Untersuchungen an. Ist $Ay_x + By_{x+1} + \cdots + Ny_{x+n} = 0$ die Relation, die je $(n+1)$ aufeinander folgende Reihenglieder verbindet, dann ist

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + \cdots$$

das allgemeine Reihenglied, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $A + Bt + \cdots + Nt^n = 0$ sind. Dabei werden $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ voneinander verschieden angenommen. Die Behandlung gleicher Wurzeln hatte Lagrange geliefert; aber Malfatti findet sein Verfahren inkorrekt, zeigt den Fehler an einem Beispiele und ersetzt es durch ein anderes, das er im Falle zweier und dreier gleichen Wurzeln erläutert (vgl. aber auch S. 295). —

Eine eigentümliche, der Differentiation, und eine andere der Integration ähnliche Rechnungsart bespricht Euler[3]) in einem kurzen Aufsatze. Ihm ist aufgefallen, daß die Formeln für die Reihensummen $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + x^n$ bei aufeinander folgenden ganzzahligen Werten von n in engem Zusammenhange stehen. So kann man aus $1^4 + 2^4 + \cdots + x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 0\cdot x^2 - \frac{1}{30}x$ durch Integration der rechten Seite und gleichzeitige Multiplikation mit 5 herleiten $1^5 + 2^5 + \cdots + x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 + 0\cdot x^3 - \frac{1}{12}x^2 + \text{cst}.$ In ähnlicher Weise geht er von n auf $(n-1)$ zurück. Größere Wichtigkeit können wir dieser gelegentlichen Bemerkung nicht zusprechen. —

[1]) Mem. mat. fis. Soc. Ital. III, 1786—1787, p. 174. [2]) Ibid. III, 1786, p. 571. [3]) Nov. Act. Acad. Petrop. VI, 1788, p. 3.

Aus dem Jahre 1787 ist kaum etwas beizubringen. Denn die Arbeit von E. Waring[1]), deren Titel auf Reihen hinweist: „Werte algebraischer Größen ausgedrückt durch konvergente Reihen“, ist in Wahrheit algebraischer Natur; sie rechtfertigt ihren Titel nur durch eine ungerechtfertigte Benutzung des binomischen Lehrsatzes für gebrochene Exponenten. Am Schlusse gibt sie eine historische Übersicht über die bis zur damaligen Zeit unternommenen Versuche, die Anzahl der positiven und der negativen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu bestimmen.

Wir haben jetzt auf eine umfangreiche, in Buchform erschienene Schrift von Johann Friedrich Pfaff einzugehen[2]): „Versuch einer neuen Summationsmethode nebst anderen damit zusammenhängenden analytischen Bemerkungen“.

Pfaff beginnt mit einer Reihe literarischer Notizen. Im zweiten Abschnitte setzt er seine Methode auseinander, die als Hilfssätze die bedenklichen Gleichungen

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + \cdots = 0$$

benutzt. Handelt es sich nun z. B. um die Reihe

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots,$$

so setzt Pfaff für jedes Glied die Potenzentwicklung nach dem Bogen ein und faßt die Glieder von gleichen Exponenten in φ zusammen. So entsteht mit Benutzung der obigen fragwürdigen Resultate

$$\varphi\cdot(1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) - \frac{\varphi^3}{3!}(1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots)$$
$$+ \frac{\varphi^5}{5!}(1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \cdots) - \cdots = \frac{1}{2}\varphi,$$

also merkwürdigerweise etwas Richtiges. Ähnlich wird

$$\sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2^{2n-1}} + \frac{\sin 3\varphi}{3^{2n-1}} - \cdots \quad \text{und} \quad \frac{\sin\varphi^r}{1^m} - \frac{\sin 2\varphi^r}{2^m} + \frac{\sin 3\varphi^r}{3^m} + \cdots$$

behandelt. Im letzten Falle ist die Summe nur dann angebbar, wenn

[1]) Phil. Transact. Lond. 1787, p. 71. [2]) Berlin 1788.

r und m zugleich gerade oder zugleich ungerade sind. Pfaff findet für die letzte Summe 0, wenn $m < r$; dagegen $\pm \frac{1}{2}\varphi^m$, wenn $m = r$ ist. Ebenso werden Reihen

$$\sum_n \pm \frac{n^{2g-1}\sin n\varphi^r}{n^2-\lambda^2} \text{ und } \sum_n \pm \frac{n^{2g}\cos n\varphi^r}{n^2-\lambda^2}$$

untersucht und mittels der Substitution $\lambda = \mu\sqrt{-1}$ umgeformt. Auf weitere Einzelheiten gehen wir nicht ein, da die Grundlagen seiner Beweisführung zu wenig fest sind.

Aus dem Jahre 1789 haben wir eine kleinere Arbeit Eulers zu erwähnen[1]), in der er darauf aufmerksam macht, daß die Substitution $x = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ von der Summe der Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$$

auf die Summen der beiden Reihen führt

$$A + Br\cos\varphi + Cr^2\cos 2\varphi + Dr^3\cos 3\varphi + \cdots$$

und

$$Br\sin\varphi + Cr^2\sin 2\varphi + Dr\sin 3\varphi + \cdots$$

(vgl. S. 268). Diese Methode verwendet Euler auf die binomische Formel. Unter Vernachlässigung der Konvergenzfrage stößt er dabei auf Resultate wie

$$1 - 4\cos\varphi + 10\cos 2\varphi - 20\cos 3\varphi + \cdots = \cos 2\varphi : \left(16\cos\frac{\varphi^4}{2}\right)$$

und $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \cdots = 0$.

Unter den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie im Jahre 1790 befinden sich zwei Abhandlungen Eulers[2]), deren erste an eine frühere des Jahres 1781 anknüpft (vgl. S. 276). Es handelt sich um die Summen

$$\binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p+1} + \binom{m}{2}\binom{n}{p+2} + \cdots = \binom{m+n}{n-p},$$

die für ganze Werte von m, n, p bewiesen werden und die auf beliebige Werte von m, n, p ausgedehnt werden sollen; also auch hier wieder um eine Interpolationsaufgabe. Der Wert von $\binom{p}{q}$ für beliebige p, q wird mit Hilfe von $\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^p dx = p!$ definiert, und dann

[1]) Nov. Act. Petrop. VII, 1789, p. 87. [2]) Ibid. VIII, 1790, p. 32.

die vorgelegte Summe als ein bestimmtes Integral dargestellt. Setzt man $\int_0^1 x^{a-1}(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}dx = \Delta$, so wird

$$\int_0^1 x^{a+b\nu-1}(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}dx = \frac{a}{c}\,\frac{a+b}{a+b+c}\,\frac{a+2b}{a+2b+c}\cdots\frac{a+(\nu-1)b}{a+(\nu-1)b+c}\Delta;$$

und das leitet zur Lösung hin. Auch mit Aufgaben folgender Art beschäftigt sich Euler in dieser Arbeit: Er setzt

$$(1-x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + Ax^b + Bx^{2b} + Cx^{3b} + \cdots$$

und

$$(1-x^b)^{-\frac{a}{\beta}} = 1 + \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \cdots$$

und bestimmt die Summen der Koeffizienten-Aggregate

$$1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \cdots,\quad A + \mathfrak{A}B + \mathfrak{B}C + \cdots,\quad B + \mathfrak{A}C + \mathfrak{B}D + \cdots.$$

Sebastiano Canterzani untersucht[1]) die Umkehrung der Reihe $y = a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \cdots$, mag die rechte Seite dabei bis ins Unendliche gehen oder im Endlichen abbrechen. Er findet

$$x = b'y + b''y^2 + b'''y^3 + \cdots$$

mit $b' = \frac{1}{a'}$, $b'' = -\frac{b'^2a''}{a'}$, $b''' = \frac{-2b'b''a'' - b'^3a'''}{a'}, \cdots$ und gibt die Regel für die Bildung der Zähler an. Die erhaltenen Resultate verwendet der Verfasser bei der Lösung der Gleichung

$$0 = -y + a'x + a''x^2 + \cdots.$$

Konvergiert die Reihe für x, dann konvergiert sie, wie dem Verfasser „scheint", nach der, dem absoluten Werte nach, kleinsten Gleichungswurzel, falls diese reell ist; das hatte bereits E. Waring angegeben.

Von den Eulerschen Untersuchungen über Reihen gehören zwei ins Jahr 1791. Die eine[2]) liefert für das, durch Rektifikation der gleichseitigen Hyperbel geometrisch erlangte Resultat

$$\frac{1}{7} + \frac{1\cdot 5}{7\cdot 11} + \frac{1\cdot 5\cdot 9}{7\cdot 11\cdot 15} + \cdots = \frac{1}{2}$$

einen sehr einfachen direkten Beweis. Euler leitet auf dem gleichen Wege $\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta}\cdot\frac{a+2\theta}{b+2\theta}\cdots = \frac{a}{b-a-\theta}$ sowie

[1]) Mem. mat. fis. Soc. Ital. V, 1790 [2]) Nov. Act. Petrop. IX, 1791, p. 41.

$$\frac{a}{b+\theta}+\frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta}+\frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta}\cdot\frac{c}{d+\theta}+\cdots=\frac{a}{\theta}$$

her.

Die andere[1]) knüpft an folgende Tatsache an. Setzt man $2\cos\varphi=x$, so wird für positive ganze n, die >2 sind

$$2\cos n\varphi=x^n-nx^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}x^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-6}$$
$$+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-2}-\cdots,$$

falls man sich auf die nicht negativen Potenzen von x beschränkt. Für $n=0$, 1 und alle negativen und gebrochenen n ist die Formel aber falsch. Wie erklärt sich das? Euler setzt $\cos\varphi$ oder $\sin\varphi$ gleich z und $\cos n\varphi$ bezw. $\sin n\varphi=s$. Dann gilt

$$d^2s(1-z^2)-z\,dz\,ds+n^2s\,dz^2=0.$$

Die Integration liefert, wenn f, g willkürliche Konstanten bedeuten,

$$s=f\cdot(z+\sqrt{z^2-1})^n+g\cdot(z-\sqrt{z^2-1})^n.$$

Die dem Problem entsprechenden Werte von f, g werden durch Reihenentwicklungen gefunden. So erhält man

$$s=\left(z^n-\frac{n}{1}z^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}z^{n-4}-\cdots\right)$$
$$+\left(z^{-n}+\frac{n}{1}z^{-n-2}+\frac{n(n+3)}{1\cdot 2}z^{-n-4}+\cdots\right)$$

als richtige und allgemein gültige Formel; bei positivem, ganzen $n>2$ fallen die Potenzen mit negativen Exponenten von selbst fort.

An diese Arbeit knüpft Nik. Fuß einige Untersuchungen[2]), in denen er die Eulersche Formel herleitet durch Entwicklung von

$$(y+\sqrt{y^2-1})^n=Ay^n-By^{n-2}+Cy^{n-4}-Dy^{n-6}+\cdots.$$

Eine andere Arbeit Eulers aus dem Jahre 1760 (siehe S. 259) gab Pfaff, der sich mit der Herausgabe von Eulers hinterlassenen Schriften beschäftigte, Veranlassung zu weiteren Forschungen.[3]) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{x}\operatorname{arc\,tang} t^{(x)}$ oder in damaliger Schreibart $SA\operatorname{tang} t^{(x)}$ läßt sich leicht unter der Annahme $t^{(x)}=\frac{f(x)-f(x+1)}{1+f(x)\cdot f(x+1)}$ durch Zerlegung der einzelnen Summanden in $(A\operatorname{tang} f(x)-A\operatorname{tang} f(x+1))$ summieren. Man erhält dabei als Summe $A\operatorname{tang} f(1)-A\operatorname{tang} f(x+1)$. Wird $4c=b^2+4a^2-1$ und $t^{(x)}=\frac{a}{x^2+bx+c}$ gesetzt, dann ist eine solche Darstellung von $t^{(x)}$ möglich, und man erhält

[1]) Nov. Act. Petrop. IX, 1791, p. 54. [2]) Ibid. p. 205. [3]) Ibid. X, 1792, p. 123.

$$\sum_{1}^{x}A\operatorname{tang}\frac{a}{x^2+bx+c}=A\operatorname{tang}\frac{2ax}{(b+1)(x+1)+2c}.$$

Ähnlich läßt sich die Form $t^{(x)}=\frac{f(x)-f(x+r)}{1-f(x)f(x+r)}$ bei ganzzahligem r behandeln. Hierbei kann z. B. $t^{(x)}=\frac{a}{x^2+bx+c}$ genommen werden, falls $4c=b^2+\frac{4a^2}{r^2}-r^2$ gesetzt wird. Pfaff wendet diese Methode noch weiter an, um im zweiten Kapitel allgemeinere Fälle summierbarer Reihen aufzustellen. So berechnet er $\sum\frac{a}{E^x+b\cdot E^{-x}+c}$, wenn $\frac{b}{E}=\frac{c^2}{(E+1)^2}+\frac{a^2}{(E-1)^2}$ ist; die Größen $\frac{E^x+b\cdot E^{-x}+c}{a}$ bilden dabei nach Riccatischer Bezeichnung (S. 261) eine „rekurrente Reihe mit Appendix".

Wir besprachen oben (S. 290) eine Arbeit Malfattis, der einen Punkt in Lagranges Untersuchungen über rekurrente Reihen als falsch erkannt und verbessert hatte. Lagrange selber war auf diesen Fehler schon bei der Drucklegung seines Aufsatzes gestoßen; er gibt nun jetzt[1]) eine neue Bearbeitung der Frage nach gleichen Wurzeln, und gestaltet sie direkter und übersichtlicher als Malfatti. Seine Resultate für Wurzeln zweiter, dritter, vierter Multiplizität treten in verschiedener Form auf; am Schlusse der Abhandlung wird eine für alle Wurzel-Multiplizitäten gemeinsame Form den Mathematikern zum Beweise vorgelegt.

Eine wunderliche Arbeit Jean Trembleys stammt aus dem Jahre 1794.[2]) Der Verfasser knüpft an den vierten, über Kettenbrüche handelnden Aufsatz der Opuscula Eulers (vgl. S. 284) an, und bringt zunächst eine Reihe Eulerscher Resultate auf die elegante Form

$$1/-n+2/(-n+1)+3/(-n+2)+4/(-n+3)+\cdots=n+1.$$

Für den Beleg der Gültigkeit aber begnügt er sich mit einem unstrengen Induktionsbeweise; und er macht sogar eine Methode aus dieser Art von Beweisen. Er setzt z. B. als Annäherung

$$(1+x)^m=\frac{1+Ax+Bx^2+Cx^3}{1+ax+bx^2+cx^3},$$

wobei er die Konstanten in Zähler und Nenner der rechten Seite dazu benutzt, die Glieder der rechten Entwicklung so weit als möglich mit denen der linken Seite in Übereinstimmung zu bringen. Dann wandelt er den Bruch rechts durch sukzessive Divisionen in einen Kettenbruch um und kommt vermutungsweise so auf das Gesetz,

[1]) Mém. de Berlin 1792, p. 247. [2]) Ibid. 1794, p. 109.

nach dem wohl die Kettenbruch-Entwicklung der linken Seite fortschreiten kann. Auf diese Art leitet er voller Stolz, immer mit Betonung der Einfachheit seiner Methode, Lagrangesche und Lambertsche Resultate her, die natürlich auf minder einfachem Wege von ihren Entdeckern erhalten worden waren.

Pietro Paoli (Petrus Paulus) beginnt eine zur Reihentheorie gehörige Abhandlung[1]) mit folgender Angabe: „Lagrange hat bemerkt, daß das allgemeine Glied rekurrenter Reihen von der Integration einer (endlichen) Differenzen-Gleichung abhängt. Bisher hat niemand wahrgenommen, daß auch die Summation einer rekurrenten Reihe durch die Integration einer ähnlichen Differenzen-Gleichung geleistet werden kann." Kennt man das allgemeine Glied einer rekurrenten Reihe, so kann man auf verschiedene Arten ihre Summe finden; die Paolische Methode kann aber auch ohne diese Kenntnis auskommen. Die Reihe sei $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_x, \cdots$; es bestehe für jedes x die Relation $ay_x + by_{x-1} + \cdots + py_{x-n} = 0$. Dann ist

$$y_x = Am^x + A_1 m_1^x + A_2 m_2^x + \cdots,$$

wo $m, m_1, m_2, \cdots$ die Wurzeln von $at^m + bt^{m-1} + \cdots + p = 0$ sind. Setzen wir die Summe $z_x = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_x$, so folgt

$$z_x = z_{x-1} + y_x, \quad z_{x-1} = z_{x-2} + y_{x-1}, \cdots,$$

und wenn man diese letzten Gleichungen der Reihe nach mit $a, b, c, \ldots$ multipliziert und zueinander addiert, so entsteht

$$az_x + (b-a) z_{x-1} + (c-b) z_{x-2} + \cdots - pz_{x-m-1} = 0.$$

Demnach bilden auch die z_x eine rekurrente Reihe; man hat also die Gleichung $au^{m+1} + (b-a)u^m + (c-b)u^{m-1} + \cdots - p = 0$ aufzulösen; aber offenbar sind ihre Wurzeln gleich $1, m, m_1, m_2, \cdots$, und daher ist $z_x = C_0 + Cm^x + C_1 m_1^x + C_2 m_2^x + \cdots$. Die C lassen sich nun leicht aus linearen Gleichungen bestimmen, die aus den Anfangswerten $z_1, z_2, \cdots$ hervorgehen. —

Hier ist vielleicht der beste Platz für die Besprechung einer Arbeit, die sich zwar nicht auf Reihen, sondern auf fortgesetzte Produkte bezieht, aber doch wegen deren Umwandlung in unendliche Reihen nicht ganz unangemessen an dieser Stelle untergebracht werden kann. Es handelt sich um einen Aufsatz von Chr. Kramp über die Wallisschen Brüche[2]); sie ist der Ausgangspunkt der Untersuchungen über „Fakultäten". Kramp setzt

$$a(a+r)(a+2r)\cdots(a+[n-1]r) = a^{n\pi r};$$

[1]) Mem. Acad. Mantova I, 1795, p. 121. [2]) Nov. Act. Acad. Elect. Mogunt. sci. quae Erfurti est; I, 1797 (1799), p. 257.

dann gelten die Formeln

$$a^{(m+n)\pi r} = a^{m\pi r} \cdot (a + mr)^{n\pi r}$$

und

$$a^{m\pi r} : (a + nr)^{m\pi r} = a^{n\pi r} : (a + mr)^{n\pi r}.$$

Wenn man hierin $n = \frac{b-a}{r}$ setzt, so ergibt sich

$$a^{m\pi r} : b^{m\pi r} = a^{\frac{b-a}{r}\pi r} : (a+mr)^{\frac{b-a}{r}\pi r};$$

für $m = \infty$ wird jeder Faktor des letzten Divisors gleich $(\infty \cdot r)$, und bei $b - a = d$ entsteht daher die Gleichung

$$\frac{a(a+r)(a+2r)(a+3r)\cdots}{(a \pm d)(a \pm d + r)(a \pm d + 2r)(a \pm d + 3r)\cdots} = \frac{a^{\pm\frac{d}{r}\pi r}}{(\infty r)^{\pm\frac{d}{r}}}.$$

Durch diese Formel meint Kramp den Wert der linken Seite bestimmt zu haben; er übersieht dabei, daß die rechte Seite nur eine Bezeichnung ist. Er geht dann zur Umwandlung der Fakultät

$$a^{m\pi r} = a^m + Aa^{m-1}r + Ba^{m-2}r^2 + Ca^{m-3}r^3 + \cdots$$

in eine Reihe über und bestimmt die ersten Koeffizienten

$$\frac{A}{m(m+1)} = \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{1}{2}, \quad \frac{2B}{(m-1)(m+1)} = \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{1}{2} A - \frac{m}{12};$$
$$\frac{3C}{(m-2)(m+1)} = \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{1}{2} B - \frac{m-1}{12} A, \cdots.$$

Die erhaltenen Resultate werden auf die Entwicklungen

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = \frac{m(1-m)(1+m)(2-m)(2+m)\cdots}{n(1-n)(1+n)(2-n)(2+n)\cdots};$$
$$\frac{\sin n\pi}{\cos n\pi} = \frac{2n(2-2n)(2+2n)\cdots}{(1-2n)(1+2n)(3-2n)\cdots}; \cdots$$

angewendet. An und für sich bedeutet die Arbeit nicht viel; sie ist jedoch historisch interessant als Ausgangspunkt der Fakultäten-Lehre.

Im Jahre 1798 wurden die letzten Eulerschen Arbeiten über Reihen, die in unsere Epoche fallen, von der Petersburger Akademie veröffentlicht. Die beiden ersten dieser Abhandlungen[1]) beschäftigen sich mit der Entwicklung einer Funktion, die er in der damaligen Funktional-Bezeichnung $\Gamma : \varphi$ schreibt, in eine Reihe von der Form $A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \cdots$ oder, nach Euler, um

$$\Gamma : \varphi = (0) + (1)\cos\varphi + (2)\cos 2\varphi + (3)\cos 3\varphi + \cdots.$$

Die zweite Bezeichnungsweise wählt er, weil bei der ersten „bald das ganze Alphabet erschöpft sein würde". Soll die Funktion $\Gamma : \varphi$ stetig sein, so müssen, wie Euler behauptet, die Koeffizienten sehr

[1]) Nov. Act. Petrop. XI, 1793 (1798), p. 94 und p. 114.

schnell abnehmen, da sonst z. B. bei der Vermehrung des Arguments φ um die kleine Größe $\frac{\pi}{1000}$ das Glied $(1000)\cos 1000\varphi$ in

$$(1000)\cos(\pi + 1000\varphi) = -(1000)\cos(1000\varphi)$$

übergehen würde, was die Stetigkeit gefährden könnte. Die späteren Koeffizienten dürfen demnach gegen die früheren vernachlässigt werden. Nun bildet Euler, um A zu bestimmen,

$$\frac{1}{2}\Gamma:0 + \frac{1}{2}\Gamma:\pi = A + C + E + G + J + \cdots$$
$$= (0) + (2) + (4) + (6), \cdots;$$

dann

$$\frac{1}{4}\Gamma:0 + \frac{1}{2}\Gamma:\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\Gamma:\pi = A + E + J + N + \cdots$$
$$= (0) + (4) + (8) + \cdots;$$

und

$$\frac{1}{8}\Gamma:0 + \frac{1}{4}\Gamma:\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\Gamma:\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\Gamma:\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{8}\Gamma:\pi$$
$$= A + J + R + \cdots = (0) + (8) + (16) + \cdots.$$

Im letzten Resultat ist (0) schon als hinreichend genauer Wert der rechten Seite anzusehen, so daß die Summe der linken Seite $= A = (0)$ gesetzt werden kann. Die weiteren Koeffizienten in ähnlicher Art zu berechnen, würde viele Mühe machen. Euler wendet daher andere Methoden an, die sich auf die Summation von

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$$

stützen, wo $n\varphi$ ein Vielfaches von π sein soll. Dabei erlangt er das Resultat, daß, wenn

$$\sum = \frac{1}{2}\Gamma:0 + \cos\frac{\lambda\pi}{n}\Gamma:\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\lambda\pi}{n}\Gamma:\frac{2\pi}{n} + \cdots + \frac{1}{2}\cos\lambda\pi\Gamma:\pi$$

gesetzt wird, die Bestimmung

$$\frac{2}{n}\sum = (\lambda) + (2n-\lambda) + (2n+\lambda) + (4n-\lambda) + (4n+\lambda) + \cdots$$

folgt.

So interessant diese Arbeit auch ist, so können wir uns doch nicht gegen ihre Mängel verschließen, die zum Teil in unbewiesenen Annahmen über die Konvergenz sowie über die Größe der Koeffizienten, dann über die nur näherungsweise erfolgende Auflösung des Problems beruht. Für die Zwecke der Astronomie, die bei der Untersuchung an erster Stelle in Betracht kommen, bedeutet das Resultat eine beträchtliche Rechnungs-Vereinfachung.

Ein ungemeiner Fortschritt wird durch die unmittelbar folgende Abhandlung repräsentiert, die am gleichen Tage, dem 26. Mai 1777, wie die erste Arbeit der Akademie vorgelegt wurde. Hier tritt

zum ersten Male die gebräuchlich gebliebene Koeffizienten-Bestimmung durch Integrale

$$A = (0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Gamma \cdot d\varphi \quad \text{und} \quad (n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Gamma \cdot d\varphi \cdot \cos n\varphi$$

auf. Dieses Resultat benutzt Euler dann zur Transformation von

$$\Gamma:\varphi = (0) + (1)\cos\varphi + (2)\cos 2\varphi + \cdots$$

in die Reihe, die nach Potenzen von $\cos\varphi$ fortschreitet, und die wir etwas abweichend von der Bezeichnung der Original-Arbeit

$$= [0] + [1]\cos\varphi + [2](\cos\varphi)^2 + [3](\cos\varphi)^3 + \cdots$$

schreiben. Dabei kommt es natürlich auf die Berechnung von Integralen $\int_0^\pi \cos\varkappa\varphi \cdot (\cos\varphi)^\lambda d\varphi$ an. Es ergibt sich:

$$(0) = [0] + \frac{2}{4}[2] + \frac{4\cdot 3}{4\cdot 8}[4] + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}[6] + \cdots,$$

und wenn $n > 0$ ist:

$$2^{n-1}(n) = [n] + \frac{n+2}{4}[n+2] + \frac{(n+4)(n+3)}{4\cdot 8}[n+4]$$
$$+ \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{4\cdot 8\cdot 12}[n+6] + \cdots.$$

Die beiden letzten Aufsätze Eulers[1]) beschäftigen sich mit Zyklometrie, d. h. mit der Frage nach expediter Berechnung des Wertes der Zahl π. Euler gibt zunächst eine kurze historische Übersicht über die Resultate von A. Sharp, J. Machin und G. de Lagny (vgl. Band III², S. 668—669); dabei erklärt er die Arbeit des letzteren, der die Berechnung auf 100 Stellen durchführte, für eine mehr als herkulische Leistung.[2]) Danach stellt er eine neue Formel auf, die bedeutende Vorzüge gegen die Leibnizsche Formel hat. Bedeutet s den zur Tangente t gehörigen Bogen, so wird

$$s = \frac{t}{1+t^2}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \cdots\right].$$

Auf verschiedenen Wegen, einmal durch eine Reduktionsformel, einmal durch eine Integral-Transformation, wird die Richtigkeit dieser Beziehung nachgewiesen. Die einzelnen Glieder lassen sich deswegen

[1]) Nov. Act. Petrop. XI, 1793 (1798), p. 133 und p. 150. [2]) Euler übersieht hierbei eine Arbeit, auf die im Briefwechsel von Lambert IV, p. 480 (Schreiben von Wolfram an Lambert) aufmerksam gemacht wird: B. Lamy hat π bis auf 128 Ziffern geliefert.

bequemer entwickeln als bei der Leibnizschen Formel, weil jedes durch eine einfache Multiplikation aus dem vorhergehenden abgeleitet werden kann. Ein weiterer Vorzug liegt darin, daß alle Glieder von gleichem Vorzeichen sind, so daß eine Addition der Glieder genügt. Wird die neue Formel bei $\pi = 4A\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2} + 4A\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{3}$ verwendet, so entsteht

$$\pi = \frac{16}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{10}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$+ \frac{12}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \cdots\right];$$

noch bessere Formeln erhält man für $\pi = 8A\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{3} + 4A\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{7}$, da die auf den zweiten Summanden bezügliche Reihe nach Potenzen von $\frac{2}{100}$ fortschreitet, und für $\pi = 20A\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{7} + 8A\,\mathrm{tang}\,\frac{3}{79}$, wo die entsprechende Entwicklung nach Potenzen von $\frac{144}{100000}$ erfolgt.

Der Ausgangspunkt der letzten Abhandlung (ibid., p. 150) ist die Integralgleichung

$$\int\frac{2+2x+x^2}{4+x^4}\,dx = \int\frac{dx}{2-2x+x^2} = \int d\,A\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2-x}$$
$$= 2\int\frac{dx}{4+x^4} + 2\int\frac{x\,dx}{4+x^4} + \int\frac{x^2dx}{4+x^4}.$$

Nimmt man die Grenzen der Integrale gleich 0 und x, so wird ihr Wert gleich $A\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2-x}$; dies Integral bezeichnet Euler mit dem astronomischen Zeichen für die Sonne und ähnlich die drei Integrale rechts mit den Zeichen für Saturn, Jupiter und Mars:

$$\int\frac{dx}{4+x^4} = \text{♄}, \quad \int\frac{x\,dx}{4+x^4} = \text{♃}, \quad \int\frac{x^2dx}{4+x^4} = \text{♂}.$$

Er schreibt also $\odot = 2\,\text{♄} + 2\,\text{♃} + \text{♂} = A\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2-x}$. Nun ist die Entwicklung des Nenners der Integrale nach Potenzen von $\frac{x^4}{4}$ leicht. Die erlangten Reihen werden für $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{4}$ benutzt, wodurch man auf $A\,\mathrm{tang}\,1$, $A\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{3}$ und $A\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{7}$ kommt. Die beiden letzten Reihen, die nach Potenzen von $\frac{1}{64}$ bezw. $\frac{1}{1024}$ fortschreiten, konvergieren recht gut und liefern den Wert für

$$\frac{\pi}{4} = 2A\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{3} + A\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{7}$$

mit ziemlicher Leichtigkeit als Aggregat von sechs unendlichen Reihen.

Im gleichen Bande der Petersburger Veröffentlichungen kommt Nik. Fuß[1]) auf ein, früher von Euler behandeltes Thema zurück (s. S. 294). Es handelt sich um die Entwicklung von $\cos n\varphi = s$ nach Potenzen von $\cos\varphi = z$, und bei $\sin n\varphi = v\sqrt{1-z^2}$ um die von v nach Potenzen von z. Fuß stellt die schon von Euler angegebene Differentialgleichung $d^2s(z^2-1) + z\,dz\,ds - n^2s\,dz^2 = 0$ auf und integriert sie mit Hilfe unbestimmter Koeffizienten in Gestalt einer Reihe, die nach steigenden Potenzen von z fortschreitet, statt nach fallenden, wie bei Euler. Dabei wird das Eintreten von Ausnahmefällen vermieden.

Wir haben unsere Blicke jetzt wieder nach England zu richten, wo uns die Transactions von Edinburgh und die von London einiges Bemerkenswerte bieten. Da sei kurz einer Arbeit von James Ivory[2]) gedacht, der eine Formel schneller Konvergenz für den Umfang einer Ellipse aus der Entwicklung der Potenz $(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)^n$ herleitet. Auf den Kreis angewendet liefert diese Formel

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2\cdot 1^2}{2^2\cdot 4^2} + \frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} + \cdots$$

als besonderen Fall.

Vier Aufsätze von John Hellins[3]) beschäftigen sich mit konvergenten Reihen. Der erste leitet eine Hilfsformel für die Transformation gewisser Reihen her. Durch zwei verschiedene Integrations-Ausführungen von $\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$ wird die Gleichung

$$\frac{x^m}{m} + \frac{x^{m+n}}{m+n} + \frac{x^{m+2n}}{m+2n} + \cdots = \frac{x^m}{m(1-x^n)} - \frac{n\,x^{m+n}}{n(m+n)(1-x^n)^2}$$
$$+ \frac{n\cdot 2n\cdot x^{m+2n}}{m(m+n)(m+2n)(1-x^n)^3} - \frac{n\cdot 2n\cdot 3n\,x^{m+3n}}{m(m+n)\ldots(m+3n)(1-x^n)^4} + \cdots$$

gefunden; durch sie wird dann die zyklometrische Formel

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{9\cdot 81} + \frac{1}{17\cdot 81} + \cdots\right) + \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13\cdot 81} + \cdots\right)$$
$$- \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{11\cdot 81} + \cdots\right) - \frac{1}{27\cdot\sqrt{3}}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{15\cdot 81} + \cdots\right)$$

umgestaltet, indem die Hilfsgleichung sich auf jede der vier Klammer-

---

[1]) Nov. Act. Petrop. XI, 1793 (1798), p. 155. [2]) Transact. R. Soc. of Edinburgh IV (1798), p. 177. [3]) Transact. R. Soc. of London 84 (1794), p. 217; 86 (1796), p. 135; 88 (1798), p. 183 und p. 527.

reihen anwenden läßt. Die entstehenden Reihen schreiten etwa wie die Potenzen von $\frac{1}{80}$ fort.

Die gleiche Transformation wird in dem zweiten Aufsatze verwertet, der sich die Aufgabe stellt, den $\log 10$ möglichst expedit zu berechnen. Es wird $\log 10 = 3\log 2 + \log\frac{5}{4}$ durch drei Reihen hergestellt, die ungefähr nach Potenzen von $\frac{1}{80}$ fortschreiten. Noch bequemere Reihen werden durch $\log 10 = 10\log\frac{5}{4} + 3\log\frac{1024}{1000}$ erlangt.

Im dritten Aufsatze wird die Reihe

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \cdots,$$

die bei mäßig abnehmenden positiven Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ und einem x, welches nur wenig kleiner ist als 1, sehr gering konvergiert, in die Summe zweier Reihen

$$(ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \cdots) + 2(bx^2 + dx^4 + fx^6 + \cdots)$$

zerlegt. Die erste Reihe kann nach der Methode von F. Maseres (vgl. S. 271) behandelt werden; und die zweite Reihe, die offenbar schon für sich besser konvergiert, gestattet die gleiche weitere Behandlung, wie sie bei der ursprünglichen Reihe vorgenommen wurde. Die Wirksamkeit dieser Methode soll durch das Beispiel

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \text{für} \quad x = \frac{9}{10},$$

das recht ausführlich behandelt wird, klar gestellt werden.

Der letzte Aufsatz von Hellins beschäftigt sich mit einer Aufgabe der Störungstheorie: Der reziproke Wert von $(a - b\cos x)^n$ ist in die Reihe $A + B\cos x + C\cos 2x + D\cos 3x + \cdots$ zu entwickeln. Der Weg führt über Summationen mäßig konvergierender Reihen. Der Verfasser bemüht sich, sie in besser konvergierende umzuwandeln.

Im Bande 86 (1796) der Ph. Tr. Lond. befindet sich auch ein französisch geschriebener Aufsatz von Simon L'Huilier[1]), in dem die Reihen für die Exponentialfunktionen, für die Logarithmen und für die Kreisfunktionen auf elementarem Wege abgeleitet werden; vor allem wird die Verwendung des Unendlichen dabei vermieden. Bei den Herleitungen fällt dem Verf. die Analogie zwischen den Logarithmen und den trigonometrischen Funktionen in die Augen.

[1]) Transact. R. Soc. of London 86 (1796), p. 142.

Imaginäres.

Man hätte der Ansicht sein können, daß über die Meinungsverschiedenheit, die zwischen Leibniz und Johann Bernoulli in betreff der Natur der Logarithmen negativer Größen bestand, durch die geniale Arbeit Eulers, die im Band III², S. 722 ausführlich besprochen wurde, endgültig entschieden sei. Dem war nicht so! Und der Grund dafür lag nicht zum mindesten in der freien Art und Weise, mit der Euler in der Sitte seiner Zeit das unendlich Große und das unendlich Kleine verwendet hatte; freilich auch darin, daß er in seiner Arbeit nicht darauf eingegangen war, alle früheren falschen Behauptungen auf ihren wahren Wert zurückzuführen, und alle aufgestellten Paradoxa aufzuklären. Diese tauchten daher wieder und immer wieder auf. —

D'Alembert veröffentlichte 1761 in seinen „Opuscules mathématiques" I, Paris, einen schon mehrere Jahre früher geschriebenen Aufsatz „Sur les logarithmes des quantités négatives", in dem er für Bernoullis und gegen Leibniz' Anschauungen eintrat. Er führt eine Reihe von Gründen dafür an, daß $\log(-a) = \log(+a)$ oder nach der damaligen Schreibweise, daß $l\cdot -a = l\cdot +a$ sei. In erster Linie beutet d'Alembert dabei eine etwas unbestimmte, von Neper herrührende Definition des Logarithmenbegriffs aus: „Logarithmen sind eine beliebige Folge von Zahlen in arithmetischer Progression, die einer beliebigen Folge von Zahlen in geometrischer Progression entsprechend zugeordnet sind; nur mit der Einschränkung, daß der Null der arithmetischen Progression stets die Einheit der geometrischen entspricht". Man hat also nach dieser Auffassung als

$$\text{Logarithmen} \ldots, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \ldots, na, \ldots$$

$$\text{Numeri} \ldots, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b}, 1, b, b^2, b^3, \ldots, b^n, \ldots$$

bei beliebigen positiven oder negativen Zahlen a und b. Davon macht d'Alembert häufig nicht ganz einwandfreien Gebrauch: Behauptet Euler unter der stillschweigenden Voraussetzung einer positiven Basis, die Logarithmen negativer Größen seien „unmöglich", d. h. komplex, so nimmt d'Alembert b negativ an und erhält dabei für gewisse negative Zahlen auch reelle Logarithmen. Schließt Euler, aus der Bernoullischen Annahme $\log(+a) = \log(-a)$ müsse notwendig für jedes a folgen $\log(a) = 0$, so erklärt d'Alembert, das berge keinen Widerspruch, denn man brauche ja in dem oben gegebenen Systeme nur $a = 0$ zu setzen, um ein Logarithmensystem zu haben, das aus lauter Nullen bestehe. Ja! d'Alembert faßt (l. c. p. 185) das Schema

$$\begin{array}{l} \ldots,\ 3a,\ 2a,\ a,\ 0,\ -a,\ -2a,\ \ldots,\ -na,\ \ldots, \\ \ldots,\ -b^3,\ -b^2,\ -b,\ -1,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{b^2},\ \ldots,\ \frac{1}{b^n},\ \ldots, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \ldots,\ -\infty,\ \ldots,\ -na,\ \ldots,\ -2a,\ -a,\ 0,\ a,\ 2a,\ \ldots, \\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ \frac{1}{b^n},\ \ldots,\ \frac{1}{b^2},\ \frac{1}{b},\ 1,\ b,\ b^2,\ \ldots \end{array}$$

als einheitliches logarithmisches System auf, trotzdem es in der Mitte der Beziehungsreihe die Basis wechselt; und das, um $\log(+k) = \log(-k)$ zu erhalten. — Aus $(+1)^2 = (-1)^2$ wird $\log(+1) = \log(-1)$ erschlossen. — In der Eulerschen Gleichung, die zur Berechnung von $y = \log(-1)$ führt (vgl. Vorles. III², S. 725 Z. 9 v. u.),

$$1 + \frac{y}{n} = \cos\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n}$$

setzt d'Alembert $\lambda = n$ und kommt zu

$$1 + \frac{y}{n} = \cos\left(2 - \frac{1}{n}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\left(2 - \frac{1}{n}\right)\pi = 1,$$

also zu $\log(-1) = 0$, statt daß er auf beiden Seiten gleichzeitig $\frac{1}{n}$ nach Null führt und dann die richtige Gleichung $\log(-1) = \pm\sqrt{-1}\cdot\pi$ erlangt.

Muß d'Alembert zugeben, daß man im ersten, oben angeführten Schema für Logarithmen und Numeri durch keine Fortsetzung oder Interpolation auf $(-b), (-b^2), (-b^3), \ldots$ kommen könne, so schiebt er metaphysische Gründe vor, um diesen Übergang herzustellen. Er behauptet, es sei nicht zu verstehen, wie der Logarithmus einer, vom Positiven durch Null zum Negativen gehenden Veränderlichen durch negative Werte und das negative Unendliche ins imaginäre Größengebiet übertreten könne. Er seinerseits läßt deshalb die Logarithmen vom negativ Unendlichen ins positive Gebiet treten. Wir können nicht auf alle Einzelheiten eingehen, müssen aber jedenfalls zwei Punkte hervorheben, um die sich vielfach der Streit drehte. Es handelt sich dabei um die geometrische Fassung der Frage nach den Logarithmen negativer Zahlen.

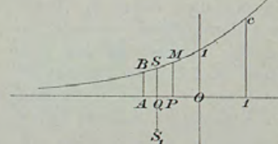

Fig. 3.

Ist $y = c^x$, also $x = \log y : \log c$, so heißt die hierdurch repräsentierte Kurve die „Logistica" oder die „logarithmische Linie". Der Bequemlichkeit wegen setzen wir $\log c = 1$. Zur Abszisse $x = 0$ gehört die Ordinate $y = 1$ und zu $x = 1$

gehört $y = c$. Die von O aus gerechnete Abszisse ist also der Logarithmus der zugehörigen Ordinate. Bernoulli behauptete nun, die Logistica habe noch einen zweiten Linienzug $y = -c^x$, eine „Gefährtin" (comes), das Spiegelbild des ersten Zuges an der x-Achse. Leibniz leugnet dies. D'Alembert tritt auf die Seite Bernoullis und gibt folgenden Beweis: Ist in der obigen Figur $AQ = QP$, so ist die zu Q gehörige Ordinate $= \sqrt{AB \cdot PM} = \pm QS$. Hier stoßen wir also auf den oben erwähnten Fehlschluß, daß aus $a^2 = b^2$ auch $a = b$ folge. Das Gleiche beweist d'Alembert analytisch auch folgendermaßen: Die Gleichung $y = c^x$ gibt für unendlich viele Werte von x einen doppelten Wert von y, sobald nämlich x ein rationaler Bruch mit geradem Nenner ist; also hat die Logarithmica auf der negativen Seite der Achse unendlich viele, vielleicht diskrete Punkte

An zweiter Stelle handelt es sich um die Bernoullische Darstellung der Logarithmen mittels einer gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$, die auf ihre Asymptoten als Achsen bezogen wird. Ist $AN = 1$, $AR = y$, dann wird die Fläche

$$NPSR = \log y.$$

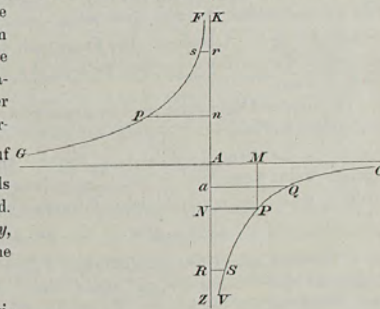

Fig. 4.

Diese Beziehung zwischen der Ordinate AR und der trapezartigen Fläche $NPSR$ wird jetzt auch für den oberen Teil der Hyperbel als gültig angesehen, so daß z. B. zu der Ordinate Ar als Fläche

$$NPQOA + AGpn + npsr$$

gehört. Dann wird behauptet, es sei $AGpn$ bei $An = AN$ gleich dem negativen Betrage von $NPQOA$ und $npsr$ gleich $NPSR$; daraus folge dann, daß zu Ar die Fläche $NPSR$ gehöre, d. h. das gleiche Flächenstück wie zu AR; somit sei

$$\log(AR) = \log(Ar) = \log(-AR).$$

Es ist auffallend, daß diese Schlüsse auf alle möglichen Weisen bekämpft worden sind, nur nicht dadurch, daß die Gleichung

$$AGpn = -NPQOA$$

der Behauptung $\infty - \infty = 0$ äquivalent wäre.

Gegen die d'Alembertschen Anschauungen und Behauptungen erhob ein italienischer Chevalier, Daviet de Foncenex seine Stimme[1]). Sein Aufsatz ist hauptsächlich durch den Versuch eines Beweises der Wurzel-Existenz algebraischer Gleichungen bekannt, den C. F. Gauß in seiner Inaugural-Dissertation eingehend kritisierte. Wir wollen einem früher (Band IV, S. 119) gegebenen Hinweise folgen, und neben dem weiteren Inhalte des Foncenexschen Aufsatzes über die imaginären Größen auch diesen besonderen Beweis in den Bereich unserer Besprechungen ziehen; dazu sind wir um so mehr berechtigt, als es sich beim Foncenexschen Beweise nicht eigentlich um die Existenz der Wurzeln, als vielmehr darum handelt, zu zeigen, daß die als existierend vorausgesetzten Wurzeln einer jeden algebraischen Gleichung die Gestalt $A + B\sqrt{-1}$ besitzen. Die Frage nach der Existenz der Wurzeln selbst war zu damaliger Zeit noch nicht mit der nötigen Schärfe gefaßt worden.

In § 5 der Abhandlung zeigt Foncenex zunächst, daß die Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit reellen oder komplexen Koeffizienten in die Form $c + d\sqrt{-1}$ bei reellen c und d gebracht werden können. Dann betrachtet er eine algebraische Gleichung in z des Grades r, wo r in seine verschiedenen Primzahl-Potenz-Faktoren zerlegt

$$= 2^m p \cdot q \cdot s \cdot t \cdots = 2^m \cdot P$$

ist; er versucht nun einen quadratischen Faktor $(z^2 - uz + M)$ des vorgelegten Gleichungspolynoms herzustellen. Dabei hängt u von einer Gleichung des Grades $2^{m-1}P \cdot (2^m P - 1)$ ab, da u die Summe je zweier Wurzeln der vorgelegten Gleichung darstellt, also $\frac{1}{2} r \cdot (r - 1)$ Werte hat. Die Gleichung in u ist daher vom Grade $2^{m-1}P_1$, wo P_1 ungerade wird. Für dieses neue Gleichungspolynom in u wird wieder ein quadratischer Faktor $(u^2 - u_1 u + M_1)$ gesucht; dabei hängt u_1 von einer Gleichung des Grades $2^{m-2}P_1 \cdot (P_1 2^{m-1} - 1)$ ab. So geht man weiter, bis man nach m Schritten auf eine Gleihung ungeraden Grades für u_{m-1} in dem Faktor

$$(u_{m-2}^2 - u_{m-1} \cdot u_{m-2} + M_{m-1})$$

des vorhergehenden Polynoms stößt. Eine solche Gleichung ungeraden Grades hat, wie Foncenex aus Stetigkeitsbetrachtungen her-

[1]) Miscellanea Philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis I, 1759, p. 113 (der zweiten Numerierung).

leitet, immer mindestens eine reelle Wurzel; u_{m-1} ist also reell. Aber auch M_{m-1}; Foncenex sagt nämlich: „M_{m-1} ist, wie man weiß, durch u_{m-1} und durch die Koeffizienten der gegebenen Gleichung in z ohne Wurzelausziehung darstellbar". Folglich hat

$$u_{m-2}^2 - u_{m-1} \cdot u_{m-2} + M_{m-1} = 0$$

eine Wurzel $m + n\sqrt{-1}$ bei reellen m und n. Setzt man sie in

$$u_{m-3}^2 - u_{m-2} \cdot u_{m-3} + M_{m-2} = 0$$

ein, so bestimmt sich M_{m-2} durch rationale Operationen[1]); also hat auch diese Gleichung Wurzeln von der Form $p + q\sqrt{-1}$ usw. bis man zu $z^2 - uz + M = 0$ kommt, deren Wurzeln dann auch die Form $A + B\sqrt{-1}$ haben. Damit wäre gezeigt, daß die vorgelegte algebraische Gleichung r^{ten} Grades in z das Trinom $(z^2 - 2Az + A^2 + B^2)$ als Faktor besitzt, also die Wurzel $A + B\sqrt{-1}$ hat.

Wir haben schon hervorgehoben, daß diese Folgerungen die Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen nicht beweisen, sondern voraussetzen; daß sie also nur den Zweck haben könnten, den Satz zu begründen, jede algebraische Größe stehe unter der Form $A + B\sqrt{-1}$. Aber selbst dieser Zweck wird nicht erreicht. Denn, wie Gauß in § 11 seiner Dissertation zeigt, ist die Behauptung, die Größe M_{m-1} sei durch u_{m-1} und die Koeffizienten rational darstellbar, nicht allgemein richtig. Gauß faßt sein Urteil dahin zusammen, es wäre ein bei weitem tieferes Eindringen in die Theorie der Elimination nötig, um den Foncenexschen Beweis zu einem strengen zu machen.

Gehen wir zur Besprechung des weiteren Inhalts der Arbeit über! Hinsichtlich der imaginären Gleichungslösungen äußert sich der Verfasser noch nicht sehr weitblickend (§ 6): „Die imaginären Wurzeln haben keine geometrische Darstellung. In welchem Sinne man sie auch nehme, man kann keinen Nutzen aus ihnen ziehen. Man muß bestrebt sein, sie soviel als möglich aus den Endgleichungen zu entfernen."

Foncenex unternimmt es, die Eulerschen Resultate auf neuem und sichererem Wege herzuleiten und zugleich die Schwierigkeiten, die Bernoulli in der Theorie der Logarithmen gefunden hatte, zu beseitigen. Sein erstes Ziel erreicht er leicht mit Hilfe der Gleichungen des Kreises und der Hyperbel; er fügt hinzu, daß der gegebene Beweis von Lagrange ihm mitgeteilt sei.

Hinsichtlich der Schlüsse, die Bernoulli an die Betrachtung der Flächen gleichseitiger Hyperbeln geknüpft hatte, wendet Foncenex

[1]) „par de pures préparations algébriques".

ein, daß zwar die beiden entgegengesetzten Zweige der Hyperbel gemäß dem Gesetze der Stetigkeit miteinander im Unendlichen zusammenhingen, daß dies jedoch für die oben konstruierten Flächen der Hyperbel nicht gelte. Denn das Differential der Fläche für eine unendlich kleine Strecke Aa sei ja $xdy = \frac{dy}{y} = \frac{dy}{dy} = 1$ für ein positives y und gleich $\frac{dy}{-dy} = -1$ für ein negatives y. Es geschehe also beim Übergange von positivem unendlich Kleinen zu negativem unendlich Kleinen ein endlicher Sprung, der sich mit stetiger Fortsetzung der Flächen nicht verträgt. Foncenex gibt den Anhängern Bernoullis die Existenz eines zweiten Zweiges der Logarithmica zwar zu, sagt aber, daß beide reell, voneinander isoliert, zwar transzendent miteinander verbunden, dagegen algebraisch voneinander unabhängig seien.

Diese Ansichten bekämpft nun wieder d'Alembert in dem „Supplément"[1]) des oben erwähnten „Mémoire". Auf den Einwurf betreffs der Unstetigkeit des Flächenübergangs erwiderte d'Alembert mit Recht, daß für negative, unendlich kleine y folge $\frac{d(-y)}{-y} = 1$. Auch seine übrigen Behauptungen verteidigte er mit Beharrlichkeit.

Die Schrift hatte den Erfolg, daß Foncenex sich in einigen Punkten für überzeugt erklärte.[2]) Er trat der Anschauung bei, daß die Logistica aus zwei, algebraisch zusammenhängenden Zweigen bestehe; andererseits versucht er die Eulersche Formel mit den d'Alembertschen Ansichten zu verknüpfen. Für die Existenz zweier Zweige der Logistica bringt Foncenex jetzt selbst einen neuen Beleg bei: bedeuten t und u Abszisse und Ordinate der Evolute der Logistica, so gilt $u = \pm\sqrt{(t-1)^{-1}}$; das doppelte Zeichen führe mit Notwendigkeit auf die beiden Zweige.

Hier möge noch folgendes im Anschluß an die besprochenen Aufsätze von Daviet de Foncenex erwähnt werden. J. B. J. Delambre teilt in seinem „Eloge de Lagrange" mit und wiederholt es in seiner, den Werken Lagranges vorgedruckten „Notice sur la vie etc." p. XI, daß Lagrange seinem Schüler und späteren Freunde Foncenex eigene Forschungen in der Form fertiger Resultate überließ, die dann dieser, weiter ausgeführt und begründet, unter eigenem Namen veröffentlichte. Ob diese Mitteilung richtig ist, mag dahingestellt bleiben; jedenfalls stand die Abhandlung „sur les logarithmes des quantités imaginaires" (Misc. Taur. I), wie Foncenex selbst angibt, unter Lagranges Einfluß. Das Verlassen des hierin eingenommenen Standpunktes in den „Éclaircissements" (Misc. Taur. III) spricht dagegen weniger für eine Mitwirkung von Lagrange.

[1]) Opuscules I, 1761, p. 210. [2]) Miscell. Taurin. III, p. 337.

Um die Arbeiten d'Alemberts auf diesem Gebiete gleich hier zu erledigen, erwähnen wir einen im fünften Bande der „Opuscules" gegebenen Aufsatz[1]) über die Mehrdeutigkeit der Ausdrücke von der Form $\sqrt[n]{a + b\sqrt{-1}}$. Seine Darstellung der Wurzeln ist völlig korrekt. — Ferner stammt aus dem Jahre 1778 ein Artikel über Logarithmen[2]) von ihm; er vertritt durchaus noch seinen früheren, von uns oben dargelegten Standpunkt. —

Im Jahre 1768 erschien unter dem Titel „Von den Logarithmen verneinter Größen" eine sehr umfangreiche Arbeit von W. J. G. Karsten.[3]) Sie liefert eine gute historische Darstellung der Frage und eine eingehende mitunter etwas breit gehaltene Kritik der Darlegungen und Beweise d'Alenberts (sic!). Karsten steht völlig auf der Seite Eulers. Den Hyperbel-Beweis, durch den Bernoulli die Existenz der beiden Zweige der Logarithmica dartun will, sucht Karsten dadurch zu entkräftigen, daß er die dabei benutzten Begriffe der positiven und der negativen Flächenstücke kritisch prüft und ihre Anwendung auf das vorliegende Problem als unstatthaft erklärt. Die Unhaltbarkeit des ersten oben gegebenen Beweises (S. 304) tut Karsten dadurch dar, daß er ihn auf eine beliebige Kurve anwendet, indem er deren Gleichung $y = f(x)$ durch $y^2 = f(x)^2$ ersetzt. — Im ersten Teile seines Aufsatzes geht Karsten auch ausführlich auf die Natur und den Begriff der negativen Zahlen ein. Er erklärt sie als Richtungs-Größen und bekämpft die Meinung, es seien negative Größen solche, die „kleiner als die Null" seien. Sonst würde ja (vgl. Bd. III², S. 367) aus der unzweifelhaft richtigen Proportion $1 : (-1) = (-1) : 1$ folgen, daß sich das Größere zum Kleineren verhalte, wie das Kleinere zum Größeren.

Die Zeitenfolge nötigt uns, auf eine andere Frage einzugehen, die auch ein wesentlicher Bestandteil der Theorie des Imaginären ist. Es ist die Frage, ob alle imaginären Größen in der Gestalt

$$A + B\sqrt{-1}$$

darstellbar sind, wo A und B reelle Größen bedeuten. Über die Unbestimmtheit, um nicht zu sagen die Unklarheit der Fragestellung setzten sich die Mathematiker der damaligen Zeit um so leichter hinweg, als die Begriffe des Imaginären und des Unmöglichen noch immer ineinander spielen. D'Alembert hatte 1747 durch die Benutzung

[1]) Opucules V, 1768, p. 183. [2]) Encyclopédie XX, Genève 1778, p. 234.
[3]) Abhandl. der churfürstl. Baierischen Akad. d. W. V, 1768, p. 3.

unendlich kleiner Größen den Beweis dafür zu liefern gesucht, daß sich die „unmöglichen“ Wurzeln algebraischer Gleichungen in der Form $A + B\sqrt{-1}$ darstellen lassen; Bougainville hatte in seinem „Traité du calcul integral“, Paris 1752, diesen Beweis recht übersichtlich reproduziert. Auch Foncenex lieferte (l. c.) einen Beweis dieses besonderen Satzes zugleich mit einer Kritik des d'Alembertschen Versuches; d'Alembert kritisiert dann seinerseits den Foncenexschen Beweis in dem „Supplément“ (siehe S. 308). Euler hatte 1749 durch eine Reihe von Beispielen den allgemeineren Satz überaus wahrscheinlich gemacht.

Nach gleicher Richtung geht eine Arbeit des italienischen Gelehrten Pietro Paoli; sie findet sich als drittes „Opusculum“ seiner Opuscula analytica[1]). Paoli legt Gewicht darauf, seine Ableitungen unter Vermeidung der Infinitesimal-Rechnung zu geben, und benutzt, um das zu ermöglichen, durchgehend das Prinzip der unbestimmten Koeffizienten als Hilfsmittel für die Herleitung der nötigen Formeln. So liefert er die Entwicklungen von a^x, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc\,tang} x$. Nach diesen Vorbereitungen geht der Verfasser zu einer Reihe von Beispielen über. Er beginnt mit dem Logarithmus von $(a+b\cdot\sqrt{-1})$; diesen stellt er mit Hilfe der zuerst vorgenommenen Entwicklung in der Form einer unendlichen Reihe dar und findet

$$\log(a + b\sqrt{-1}) = \log\sqrt{a^2+b^2} + \beta\sqrt{-1}, \quad \text{wo } \beta = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} \text{ ist.}$$

Für $a = 0$ gibt er noch als besonders erwähnenswert das J. Bernoullische Resultat

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\log(-1)}{\sqrt{-1}}$$

an. Dann folgt die Behandlung von

$$\log[\log(a + b\cdot\sqrt{-1})],\ \log\{\log[\log(a + b\cdot\sqrt{-1})]\},$$

usw. In gleicher Weise wird

$$p^{a+b\cdot\sqrt{-1}},\ p^{q^{(a+b\cdot\sqrt{-1})}}, \ldots$$

auf die Form $A + B\sqrt{-1}$ gebracht; dann

$$(a + b\cdot\sqrt{-1})^m,\ (a + b\cdot\sqrt{-1})^{m+n\cdot\sqrt{-1}},$$

usf. Hierauf kommen die goniometrischen und die zu ihnen inversen Funktionen an die Reihe. Und den Schluß bilden die Kettenbrüche mit imaginären Teilzählern und Teilnennern. Die abbrechenden lassen sich sofort durch Aufrechnung erledigen; die ins Unendliche fortlaufenden werden zunächst in unendliche Reihen verwandelt.

[1]) Liburnum (Livorno) 1780, p. 131.

Auch Nik. Fuß beschäftigt sich[1]) mit der Frage nach der Darstellung imaginärer Größen. Dabei macht er ganz wunderliche Sprünge. Wenn z eine variable imaginäre Größe, $a, b, c, \ldots$ reelle Konstanten bedeuten, dann umfassen die beiden Formen $a + z$ und $b\cdot z$ bei der willkürlichen Bedeutung von a, b, z unendlich viele imaginäre Größen. Die Größen der beiden Formen $a + z$ und bz können einander nur gleich sein, wenn $a = 0$ und $b = 1$ ist. Die allgemeinere Größenform $a \pm bz$ umfaßt unendlich vielmal mehr Größen als $a + z$, da in ihr auch b alle reellen Zahlen durchlaufen kann; deshalb umfaßt sie „wahrscheinlich“ alle imaginären Größen; somit auch jede von der Form $\frac{c}{z}$. „Demnach kann man, wie es scheint, als sicher annehmen, daß jedes $\frac{c}{z}$ gleich einem $a + bz$ sei, und zwar nur auf eine Art.“ Aus $a + bz = \frac{c}{z}$ folgt die Gleichung

$$bz^2 + az - c = 0 \quad \text{und} \quad z = \alpha \pm \beta\sqrt{-1},$$

wo α und β reell sind; dadurch wäre der Satz über die Darstellung imaginärer Größen allgemein bewiesen.

Euler wird diesen Beweis von Fuß schwerlich als vollgültig und überzeugend anerkannt haben; sonst hätte er wohl kaum 1783 im zweiten Teile der „Opuscula analytica“ p. 81 unter anderen Forderungen an die Forschung auch die eines strengen Beweises für diesen Fundamentalsatz aufgestellt.

Mehrere andere Mathematiker versuchten sich, wie d'Alembert und D. de Foncenex, um das Theorem in der Weise, daß sie es mit dem Problem der Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen verquickten, sich also die Aufgabe stellten, die Form der, noch nicht als vorhanden bewiesenen Wurzeln festzustellen. Wir können solche verfehlten Untersuchungen, wie die von Seb. Canterzani[2]) hier übergehen. —

An dem Leibniz-Bernoullischen oder, wenn man will, dem Euler-d'Alembertschen Widerstreite der Meinungen beteiligte sich auch der Italiener Greg. Fontana.[3]) Er steht auf Eulers Seite, findet aber, daß Eulers Herleitung der unendlich vielen Werte von $\log(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$ durch die Benutzung des Unendlich-Großen und des Unendlich-Kleinen an Übersichtlichkeit und an Überzeugungskraft verliert. Deswegen schlägt Fontana einen anderen Weg ein. Er beweist die entscheidenden Formeln einmal durch Integration von

[1]) Act. Petrop. 1781, pars II, p. 118. [2]) Mem. Soc. ital. II, 1784.
[3]) Ibid. I, 1782, p. 183.

Differential-Ausdrücken, dann aber auch ohne Integrierung durch Substitution von $x = \operatorname{tang} \varphi \cdot \sqrt{-1}$ in die Entwicklung

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots\right);$$

dadurch gelangt er zu der gewünschten Eulerschen Formel

$$\varphi \sqrt{-1} = \log\left(\cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{-1}\right),$$

die die unendlich vielen Werte des Logarithmus vermittelt.

In aller Kürze sei noch ein Aufsatz von Fr. Mallet erwähnt[1]), der den Zwist schlichten will, aber in seinem elenden Küchenlatein kaum über die historische Darstellung der Meinungsverschiedenheiten hinauskommt.

Einige Darlegungen von J. A. Chr. Michelsen führen uns zu der Logarithmenfrage zurück. Michelsen gab 1788 die Übersetzung der „Analysis infinitorum" Eulers heraus und versah sie mit Anmerkungen zweifelhaften Wertes. Die zum siebenten Kapitel gehörigen beschäftigen sich mit der Eulerschen Logarithmen-Theorie und bekämpfen sie. Natürlich knüpft Michelsen an die Verwendung des Unendlichen an. Er sagt S. 500—501: „Euler betrachtet die Formel

$$\log x = \lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$

als allgemein gültig. Setzt man für x irgendeine negative Zahl und für n nach und nach immer größere positive ungerade Zahlen, so findet man für $\sqrt[n]{x}$ außer den unmöglichen Werten auch allemal einen reellen negativen Wert, und es sollte folglich jede negative Zahl außer den imaginären auch einen reellen und zwar negativen Logarithmen haben, der mit dem Logarithmen der gleichgroßen positiven Zahl verglichen, größer sein würde. Ferner setze man für n nach und nach immer größere positive aber gerade Zahlen und lasse x positiv sein. Alsdann hat $\sqrt[n]{x}$ zwei einander entgegengesetzte sonst gleiche Werte, und es müßte demnach $\log x$ einen doppelten, sowohl den Zeichen als der Größe nach verschiedenen Wert haben." Zu weiteren Angriffspunkten führt die Allgemeingültigkeit der Gleichung $a^m = a^{\frac{mn}{n}}$, wie dies ja schon bei Bernoulli und d'Alembert zu verzeichnen war, die ihre darauf gegründeten Einwände geometrisch formuliert hatten.

Seine Ansicht ist (S. 503) die folgende: „Zu jeder Größe,

[1]) Nov. Act. Upsal. IV, 1784, p. 205.

sie mag nun positiv oder negativ, reell oder imaginär sein, gehört ein möglicher Logarithmus und nicht mehrere."

Ferner sei noch erwähnt, daß Pietro Franchini in seiner „Teoria dell' Analisi" Roma 1792, I fünf Beweise für die Richtigkeit der Formel $\log(-z) = \log(+z)$ publiziert, freilich ohne neue Ideen beizubringen; und daß Malfatti[1]) eingehend untersucht, ob die Logistica einen oder zwei Zweige besitze.

Auch Kästner findet, wie so mancher vor und nach ihm, daß die von Euler beliebte Benutzung der höheren Analysis das Eindringen in die Natur der Logarithmen erschwere. Kästner erkennt an[2]), daß Hilfsmittel der höheren Mathematik notwendig seien, um „die Mannigfaltigkeit der unmöglichen Logarithmen zu kennen und zu brauchen", aber er meint, daß sich schon „aus den ersten gemeinen Lehren von den Logarithmen dartun lasse, daß jede bejahte Zahl einen möglichen Logarithmen hat und nur einen möglichen, und daß verneinte Zahlen keinen möglichen Logarithmen haben". Der Standpunkt ist, wie man sieht, ein noch ziemlich beschränkter. Um den Nachweis elementar zu liefern, erklärt Kästner jede „bejahte" Zahl als abgekürzten Ausdruck ihres Verhältnisses zur Einheit und setzt, um das anzudeuten, $+a = (1:a)$. Dann wird für ganze positive m die Potenz $a^m = m\cdot(1:a)$, d. h. das Resultat des m-fachen Verhältnisses $(1:a)$, $(a:a^2)$, ... $(a^{m-1}:a^m)$; die gleiche Erklärung soll für gebrochene positive Exponenten $m = \frac{p}{q}$ gelten, „da das Verhältnis $(1:a)$ in q Teile geteilt werden könne, von denen dann p genommen werden, um $\frac{p}{q}\cdot(1:a)$ zu geben". So sei $(1:8) = 3\cdot(1:2)$, also

$$\frac{1}{3}(1:8) = (1:2) \quad \text{und} \quad \frac{2}{3}(1:8) = (1:4).$$

„Das Verhältnis $(1:-a)$ läßt sich mit keinem Verhältnis zwischen ein Paar bejahter Zahlen vergleichen." Ist bei konstantem positiven c und bei positivem y das Verhältnis $(1:y)$ das x-fache des Verhältnisses $(1:c)$, also $(1:y) = x\cdot(1:c)$ oder $c^x = y$, so liefert das ein logarithmisches System mit der Basis c. Ist x ein Bruch $\frac{2p+1}{2q}$, dann könnte y zwar einen verneinten Wert annehmen; aber diese Annahme würde besagen, das Verhältnis zwischen 1 und einer verneinten Zahl sei ein Vielfaches des Verhältnisses $(1:c)$. „Und das findet nicht statt." Den Grund bleibt Kästner uns schuldig. Denn das soeben

[1]) Mem. R. Acad. Mantova, 1795. p. 3. [2]) Leipz. Magaz. f. r. u. a. Mathem., Stück IV, 1786, p. 531.

in Anführungszeichen Gesetzte ist doch sicher kein Grund für diese Behauptung.

Paolo Frisi hatte in seiner Algebra[1]) eine Unterscheidung zwischen der reellen und der imaginären Null gemacht und die Behauptung aufgestellt, es sei nicht $0 \cdot \sqrt{-1} = 0$; denn daraus würde die unrichtige Proportion folgen

$$1 : \sqrt{-1} = 0 : 0.$$

Er meint, die imaginäre Null zeige eine reelle Größe an.

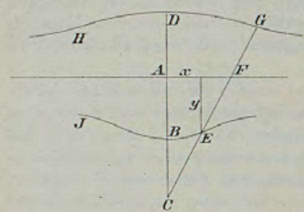

Fig. 5.

Diesen vermeinten Unterschied hatte G. Riccati[2]) durch geometrische Gründe zu stützen versucht. Es sei $HDG \ldots JBE \ldots$ eine Konchoide; $AB = FE = AD = FG = \cdots = a$; $CA = c$ und $c > a$. Dann bestehe zwischen den Koordinaten x, y jedes Kurvenpunktes $E = (x \mid y)$ die Gleichung $x = \frac{(c-y)\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$. Für $y = c$ ergebe das

$$x = 0 \cdot \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}.$$

Aber für $y = c$ existiere nach der Definition der Kurve kein Kurvenpunkt; demnach könne x nicht gleich Null sein.

F. Th. Schubert[3]) weist diesen Einwurf ganz richtig zurück: Der Punkt C besteht tatsächlich als isolierter Kurvenpunkt, als „punctum conjugatum".

Ohne Kenntnis von dem Aufsatze Schuberts zu haben, auf den er sonst hingewiesen hätte, tut Greg. Fontana das Gleiche.[4]) Dabei wendet er sich polemisierend gegen die soeben besprochenen Ausführungen Frisis: Wäre $0 \cdot \sqrt{-1}$ von 0 verschieden und etwa $= a + b\sqrt{-1}$, wo a, b reelle Größen bedeuten, so würde daraus das offenbar unrichtige Resultat $\sqrt{-1} = -\frac{a}{b}$ folgen; die von Frisi beanstandete Proportion $1 : \sqrt{-1} = 0 : 0$ weise wegen der Unbestimmtheit der rechten Seite gar nichts Widersinniges auf.

Franc. Pezzi[5]) sucht die Frage zu beantworten, warum Euler in seinen Formeln stets die Gestaltung $\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \sqrt{-1}$ statt der ebenso naheliegenden und scheinbar ebenso berechtigten

[1]) Mailand 1782. [2]) Memorie mat. fis. Soc. Ital. IV, 1788, p. 116. [3]) Nov. Act. Petrop. VIII, 1790, p. 171. [4]) Memorie mat. fis. Soc. Ital. 1799, VIII, p. 174. [5]) Ibid. 1790, V.

$$\sin\varphi + \cos\varphi \cdot \sqrt{-1}$$

genommen habe. Er kommt zu dem Schlusse, dies sei erfolgt, weil die Darstellung der Potenzen des Ausdrucks bei der ersteren Form einem einfacheren Gesetze unterworfen sei, als bei der zweiten.

B. Fr. Thibaut[1]) gibt in einer historischen Arbeit eine kurze, gedrängte Übersicht über die wichtigsten Phasen der Entwicklung der Lehre von den imaginären Größen. Er fügt einige kritische Bemerkungen an, mit denen er sich in dieser Frage ganz auf die Seite von L. Euler stellt.

Wir nahen uns dem Schlusse; haben aber zunächst eine historische Bemerkung zu machen, die sich auf die Bezeichnung der imaginären Einheit bezieht. Im vorhergehenden haben wir diese, dem Gebrauche der damaligen Zeit entsprechend, mit $\sqrt{-1}$ bezeichnet; das jetzt meist übliche „i" hatte noch kein Bürgerrecht erlangt. Von wem stammt die Einführung dieses „i"? Wohl von Euler! Im vierten Bande der zweiten Auflage der Eulerschen „Institutiones Calculi integralis"[2]) findet sich als viertes „Supplementum" erstmalig gedruckt eine Abhandlung des Verfassers „De integratione formularum angulos sinusve angulorum implicantium" und als ihre erste Nummer: „1. De formulis differentialibus ... M. S. Academiae exhibit. die 5 Maii 1777". Darin heißt es: „Problema 1: ‚Proposita formula differentiali $\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}$, ejus integrale per logarithmos et arcus circulares investigare'. Solutio: Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet istud praestandi, nisi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posteriorem designabo, ita ut sit $ii = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$." Auf einen früheren Gebrauch des Zeichens i sind wir nirgends gestoßen.

Den Schluß unserer Darlegungen liefert eine Abhandlung von großer Bedeutung, der wir das Motto geben möchten: „habent sua fata libelli". Sie eilte ihrer Zeit voraus; sie blieb unbeachtet; sie wurde nach 100 Jahren der Vergessenheit entrissen und anerkannt. Die Abhandlung trägt den Titel: „Om direktionens analytiske Betegning"; ihr Autor ist Caspar Wessel.[3]) Zunächst heben wir aus einer Besprechung seitens des Herrn Valentiner einleitend folgendes heraus.[4])

[1]) Dissertat. inaugur. Gotting. 1797. [2]) Petropol. 1792—1794, 4 vol. 4°, (während die erste Auflage nur 3 Volumina aufweist). [3]) Danske Selsk. Skr. N. Samml. V, 1799. [4]) Jahrb. Fortschr. Math. 28 (1897), p. 499.

Diese Abhandlung, welche vermutlich die älteste ist, die eine vollständige Theorie der imaginären Zahlen enthält, wurde am 10. März 1797 der Kgl. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen vorgelegt. Der Verfasser, 1745 in Norwegen geboren, kam 1763 nach Dänemark, wo er später sein ganzes Leben als Feldmesser verbrachte. Er starb 1818. In seinem Berufe war er sehr geschätzt; einen großen Teil der Triangulation und der genauen Aufnahme des Königreichs hat er besorgt. Im Jahre 1815 wurde er Ritter des Danebrog; dies wird nur deshalb angeführt, weil es sicher damals für einen Feldmesser eine außergewöhnliche Ehrenbeweisung gewesen ist. Von seinen Fähigkeiten als Mathematiker haben wir gar keine Nachrichten. Die Tradition schweigt ganz davon. Nichtsdestoweniger ist das in Rede stehende Werk eine sehr bemerkenswerte Leistung.

Mit den eigenen Worten des Verfassers werde der Zweck des Werkes angegeben. Er sagt:

Diese Abhandlung hat zum Gegenstande die Frage, wie kann die Richtung analytisch dargestellt werden, das heißt, wie kann man die Abschnitte von Geraden darstellen, wenn man mittels einer einzigen Gleichung zwischen einer unbekannten Strecke und anderen bekannten Strecken einen Ausdruck finden wollte, welcher auf einmal die Länge und die Richtung der unbekannten Strecke darstellt.

Weiter sagt er: Was mir die Veranlassung gegeben hat, diese Abhandlung zu schreiben, ist, daß ich eine Methode suchte, welche mir erlaubte, die unmöglichen Rechnungen zu vermeiden. Nachdem ich sie gefunden habe, habe ich sie dazu verwendet, mich der allgemeinen Gültigkeit einiger wohlbekannten Formeln zu versichern.

— Soweit Valentiner. —

Wessel geht von geometrischen Betrachtungen aus und definiert die Addition zweier Strecken folgendermaßen: „man läßt die eine von dem Punkte ausgehen, in dem die andere endet; dann verbindet man durch eine neue Strecke die beiden Endpunkte der so erhaltenen gebrochenen Linie; die neue Strecke heißt dann die Summe der beiden gegebenen" (§ 1). „Das Produkt zweier Strecken muß in jeder Hinsicht aus dem einen Faktor in der gleichen Weise gebildet werden, wie der andere Faktor aus der positiv oder absolut genommenen Einheitsstrecke gebildet ist" (§ 4). Dabei ist es notwendig, daß die Faktoren solche Richtungen haben, die mit der Einheitsstrecke in einer Ebene liegen, und die Worte „in jeder Hinsicht" beziehen sich auf die Länge sowie auf die Richtung des Produktes. „Durch $+1$ wird die geradlinige positive Einheitsstrecke bezeichnet, durch ε eine andere, auf der ersten senkrechte, mit gleichem Anfangspunkte" (§ 5). Aus der Definition der Multiplikation folgt so-

fort $\varepsilon = \sqrt{-1}$. Es werden dann Strecken $a + \varepsilon b$ eingeführt und mit ihnen die Operationen der Addition, der Multiplikation, der Potenzierung und der Radizierung vorgenommen. Als Anwendung wird der Beweis des Satzes von Cotes gegeben (Bd. III², S. 410—411) und die Bestimmung aller Elemente eines Polygons geliefert, von dem die nötige Anzahl von Bestimmungsstücken bekannt ist.

Um zu einer analytischen Bestimmung der Lage von Punkten im drei-dimensionalen Raume zu gelangen, nimmt Wessel zu den beiden Einheitsstrecken $+1$ und $+\varepsilon$ eine dritte mit gleichem Anfangspunkte, auf 1 und ε senkrecht stehende $+\eta$ an, für die auch $\eta^2 = -1$ ist, und gibt die Form $x + \eta y + \varepsilon z$ als allgemeinen Ausdruck einer „Geraden", d. h. eines Strahles vom Anfangspunkte bis zum Punkte mit den Koordinaten x, y, z. Das Hauptproblem besteht in der analytischen Bestimmung der Rotation. Wessel zerlegt eine beliebige Rotation in zwei, deren eine die η-Achse, die andere die ε-Achse zur festen Drehungs-Achse hat. Soll sich $(x + \eta y + \varepsilon z)$ um die η-Achse durch einen Winkel a drehen, so drückt er dies durch die Bezeichnung

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \;,,\; (\cos a + \varepsilon \sin a)$$

aus, und ähnlich die Drehung um die ε-Achse durch den Winkel b durch die Bezeichnung $(x + \eta y + \varepsilon z) \;,,\; (\cos b + \eta \sin b)$. Es ist, wie Wessel zeigt,

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \;,,\; (\cos a + \varepsilon \sin a) = (x \cos a - z \sin a) + \eta y + \varepsilon(x \sin a + z \cos a);$$

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \;,,\; (\cos b + \eta \sin b) = (x \cos b - y \sin b) + \eta(x \sin b + y \cos b) + \varepsilon z;$$

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \;,,\; (\cos a + \varepsilon \sin a) \;,,\; (\cos c + \varepsilon \sin c) = (x + \eta y + \varepsilon z) \;,,\; (\cos [a + c] + \varepsilon \sin [a + c]).$$

Auf die kurz gefaßte Theorie der Drehungen um die Achsen der η und ε folgt als Anwendung die Behandlung der sphärischen Polygone, die im wesentlichen auf eine sphärische Trigonometrie hinausläuft. T.-N. Thiele, einer der beiden Herausgeber der ins Französische übersetzten Abhandlung[1]), macht auf den merkwürdigen Umstand aufmerksam, daß Wessel bei seinen Untersuchungen nicht auf die Gleichungen von Gauß oder Delambre gestoßen sei, denen er doch so nahe war. Ebenso bedauert Thiele, daß der Verfasser die Behandlung der Drehung um die reelle Achse unterlassen hat; dieser eine Schritt hätte ihn ohne Zweifel zur Entdeckung der Quaternionen geführt. Wenngleich

[1]) Essai sur la représentation analytique de la direction par C. Wessel avec préface de H. Valentiner et T. N. Thiele. Copenhague 1897.

der Gedanke Wessels also nicht vollkommen von ihm selbst ausgeschöpft erscheint, so genügt doch der Inhalt der Arbeit, um die Priorität der Darstellung komplexer Größen Argand zu entziehen und Wessel zuzuerkennen. Argand, der 1806 seinen „Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires" veröffentlichte, hat zweifellos von der Idee des dänischen Mathematikers nichts gewußt — wie die ganze damalige wissenschaftliche Welt nichts mehr von ihr wußte; auch der „Essai" Argands wurde vergessen, hatte aber den „Direktionens analytiske Betegning" gegenüber das Glück, früher[1]) wieder entdeckt zu werden; so konnte Argand langezeit für den Entdecker gelten.

[1]) Annales de Gergonne 1813.

ABSCHNITT XXII

ELEMENTARE GEOMETRIE

VON

V. BOBYNIN