wollten, welche seit dem XIV. Jahrhunderte an Namen und Begriff des Contingenzwinkels sich knüpften. Wir meinen Untersuchungen, welche einen viel weiter rückwärts liegenden Anknüpfungspunkt besitzen. Wir meinen Körperausmessungen, welche, durch einen zeitlichen Zwischenraum von nahezu 1900 Jahren von den Entdeckungen Archimed's getrennt dennoch aus deren unmittelbaren geistigen Fortwirkung ihre Entstehung herleiten.

Wir haben (S. 662) gesehen, dass Kepler 1596 in Graz seine erste astronomische Schrift, das *Mysterium cosmographicum* verfasste, in welcher von Sternvielecken die Rede war, dass er in der *Harmonice mundi* von 1619 den Gegenstand weiter verfolgte. Wir haben (S. 708) eine Gleichung zwischen einem Bogen und dessen Sinus besprochen, welche Kepler 1609 in der *Astronomia nova* aufstellte. Dieses Werk ist in Prag verfasst und enthält auch die beiden sogenannten ersten Kepler'schen Gesetze der Ellipticität der Planetenbahnen und der Gleichheit der von den Leitstrahlen in gleichen Zeiten beschriebenen Sectoren. Es erscheint nicht unangebracht, auf die grosse mathematische Bedeutung der beiden Gesetze ein Streiflicht zu werfen. Das erste zeigte, dass eine Ellipse bestimmt sei, wenn man eine Anzahl von Punkten derselben kenne, das zweite schloss den Begriff der Flächenbestimmung elliptischer Sectoren in sich ein. Das dritte Gesetz von der Proportionalität der Quadrate der Umlaufszeiten und der Würfel der grossen Axen der Bahnen gehört der von Linz aus herausgegebenen erstgenannten *Harmonice mundi* an. Dorthin war Kepler, welchen Lebensschicksale, an denen er meistens unschuldig war, von Ort zu Ort trieben, seit 1612 übergesiedelt und hatte in der neuen Heimath sich wohnlich eingerichtet. Damals war, erzählt Kepler in der Vorrede[1]) zu dem Buche, über welches wir berichten wollen, ein reiches und vortreffliches Weinjahr in Oesterreich gewesen, und Frachtschiffe hatten gefüllte Fässer ohne Zahl die Donau hinaufgeführt, welche in Linz um ein Billiges zu erstehen waren. Kepler kaufte einige Fässer, und als nun der Verkäufer mit einer Messruthe durch den Spund die Entfernung bis zur entgegengesetzten Fasswölbung mass, um, ohne Rücksicht auf die Art der Krümmung der Fassdauben oder sonstige Abmessungen, daraus den Inhalt des Fasses zu entnehmen, war Kepler überaus erstaunt darüber, insbesondere da er wusste, dass man am Rheine viel umsichtiger zu Werke zu gehen pflegte und entweder den Inhalt des Fasses, Krug um Krug, wirklich mass, oder, falls man eines Visirstabes sich bediente, mindestens eine ganze Anzahl von Messungen

[1]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) IV, 553—554.

vornahm, statt mit der einzigen Spundtiefe sich zu begnügen. Dreitägiges Nachsinnen genügte für Kepler, die richtige Berechnung des Fassinhaltes zu ermitteln. Länger freilich dauerte die Niederschrift der Doliometrie, wie man vielfach das Werk nennt, welchem Kepler die Ueberschrift *Stereometria doliorum* gab, noch länger währte es, bis die Schrift gedruckt war. Kepler hatte beabsichtigt, sie in Augsburg zu verlegen, aber trotz der Fürsprache des gelehrten Marcus Welser weigerte sich der Drucker auf das Unternehmen einzugehen, da einem lateinischen Buche solchen Inhaltes, wenn auch von einem noch so berühmten Verfasser herrührend, die Verkäuflichkeit fehle. Kepler sah nach 16monatlichem Zuwarten sich genöthigt, das Werk auf eigene Kosten zu drucken und bediente sich dazu eines Linzer Druckers, Hans Plank, bei welchem 1615 die lateinische Schrift, 1616 auch eine deutsche volksthümlichere Bearbeitung erschien, welche aber in der Geschichte der Mathematik nicht entfernt die Rolle spielt, wie das lateinische Werk, auf dessen Entstehung wir so weitläufig eingehen zu dürfen glaubten, weil Kepler's Doliometrie die Quelle aller späteren Kubaturen geworden ist.

Man kann die Aufgabe, welche Kepler in der *Stereometria doliorum*[1]) aufzulösen beabsichtigte, kurzweg als die der Bestimmung des Rauminhaltes von Umdrehungskörpern bezeichnen, würde aber damit der Methode, welche Kepler anwandte, ebensowenig gerecht werden wie den mancherlei hochwichtigen Zwischenbemerkungen, welche er einstreute. Wir müssen desshalb auf Einzelheiten eingehen. Die Eintheilung des Werkes ist folgende. Ein I. Theil, *Stereometria Archimedea*, beschäftigt sich mit Körpern, welche bereits Archimed bekannt waren. Ihm schliesst ein *Supplementum ad Archimedem* sich an, das der Betrachtung von neuen Körpern gewidmet ist, so dass schliesslich nicht weniger als 92 Körper in Untersuchung genommen sind[2]), von denen einige mit den Namen von Früchten, denen sie gleichen, belegt wurden, so der apfelförmige, der citronenförmige, der olivenförmige Körper. Den II. Theil bildet die *Stereometria dolii Austriaci in specie*, in welchem hauptsächlich von der sachdienlichen Gestalt der in Oesterreich üblichen Fässer die Rede ist. Ein III. Theil, *Usus totius libri circa dolia*, lehrt, wie man in der Praxis zu verfahren habe, um den Inhalt von Fässern zu bestimmen.

[1]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) IV, 551—646. Ueber den Inhalt der Doliometrie und den deutschen Auszug vergl. Kästner III, 313—331. — Montucla II, 29—31. — Chasles, *Aperçu hist.* pag. 56 (deutsch 53). — Gerhardt, die Entdeckung der höheren Analysis (1855), S. 15—18. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 109—112. [2]) *Opera Kepleri* IV, 582: *Summa* 87, *quibus additae figurae* 5 *ex circulo, veluti capita familiarum, efficiunt formas nonaginta et duas.*

Den Zugang zur Körpermessung findet Kepler im I. Theile von der Flächenausmessung aus, und zwar im 2. Satze[1]) von der Quadratur des Kreises aus. Archimed habe sich indirecter Beweisführung bedient, deren Sinn aber auf Folgendes hinauslaufe. Die Kreisperipherie hat so viele Theile als Punkte, also unendlich viele, *partes habet totidem, quot puncta, puta infinitas*; jedes Theilchen ist als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks anzusehen, so dass innerhalb der Kreisfläche unendlich viele Dreiecke zu unterscheiden sind, die sämmtlich mit ihren Spitzen im Kreismittelpunkte zusammenstossen. Ein einziges Dreieck mit dem Halbmesser als Höhe, der Kreisperipherie als Basis besitzt also alle jene unendlich viele Dreiecksgrundlinien aneinandergefügt, und über jeder derselben giebt es ein Dreieck mit dem Kreismittelpunkte als Spitze, welches einem jener früheren gleichschenkligen Dreieckchen flächengleich ist. Folglich liefert das ganze Dreieck die ganze Kreisfläche, *id est triangulum ex omnibus illis constans aequabit sectores circuli omnes, id est aream circuli ex omnibus constantem.* In einem Analogieschlusse, für welchen Kepler auf Archimed verweist, der aber bei Archimed nicht vorkommt, wird im 3. Satze[2]) auf den Cylinder und das ihm umschriebene rechtwinklige Parallelopipedon das Verhältniss des Kreises zu seinem Tangentenquadrate ausgedehnt, jene Körper stellten gewissermassen zu Körpern gewordene Flächen dar, *sunt veluti quaedam plana corporata.* Auch eine Erweiterung des Zerlegungsgedankens des Kreises auf die Kugel spricht der 11. Satz[3]) deutlich aus: Der Körper der Kugel enthält nach Analogie dessen, was im 2. Satze ausgesprochen wurde, der Möglichkeit nach unendlich viele kegelartige Gebilde, *potestate in se continet infinitos veluti conos*, welche mit ihren Spitzen im Mittelpunkte der Kugel zusammentreffen und mit ihren Grundflächen, deren Stelle Punkte vertreten, *quorum vicem sustinent puncta*, auf der Oberfläche aufstehen. Der 16. Satz zerschneidet den Kegel, und hier tritt wieder eine figürliche Redensart auf, der wir im 3. Satze schon begegneten. Der Kegel wird nämlich erstlich geschnitten durch eine Ebene, welche durch seine Spitze hindurchgeht und ihn bis zum Grundkreise durchdringt, zweitens durch einen dünneren Kegel, der die Spitze mit dem geschnittenen Kegel gemein hat, und dessen Grundkreis ein Theil des Grundkreises dieses geschnittenen Kegels ist. Legt man in beiden Fällen der Grundfläche parallele Ebenen durch den Kegel, so zeigt jeder dieser Schnitte Abtheilungen, welche in gleichem Verhältnisse wie die Abtheilungen des Grundkreises des geschnittenen Kegels stehen, denn der Kegel ist hier

[1]) *Opera Kepleri* IV, 557—558. [2]) Ebenda IV, 559. [3]) Ebenda IV, 563.

gleichsam ein zum Körper gewordener Kreis, *nam conus est hic veluti circulus corporatus*[1]), und ganz ähnlich wird im 17. Satze der gerade Cylinder mit kreis- oder ellipsenförmiger Grundfläche ein zum Körper gewordener Kreis, beziehungsweise Ellipse genannt, wenn die Schnittebene der Axe parallel läuft, dagegen eine zum Körper gewordene Linie, *veluti linea corporata*, wenn die Schnittebene senkrecht zur Axe steht[2]).

Wir gelangen zu dem *Supplementum ad Archimedem.* Der erste hier in Betracht gezogene Körper ist der Ring, *annulus*, dessen Rauminhalt im 18. Satze dem Cylinder gleichgesetzt wird, welcher den kreisförmigen Durchschnitt des Ringes als Grundfläche und als Höhe die Kreisperipherie besitzt, welche der Mittelpunkt des den Ring durch Umdrehung um eine feste Axe erzeugenden Kreises beschreibt. Die Umdrehungsaxe gehe (Figur 147) durch A, so wird der Ring[3]) durch Schnitte, welche von A ausgehen, in unendlich viele kleinste Scheibchen zerschnitten, *annulo secto ex centro A in orbiculos infinitos eosque minimos.* Diese Scheibchen sind nun allerdings von ihrer eigenen Mitte aus von ungleicher Dicke, um so dünner je näher dem Punkte A, um so dicker je weiter nach aussen. Das gleicht sich gegenseitig aus, und die Dicke an der inneren Grenze E zusammen mit der an der äusseren Grenze D haben als Summe das Doppelte der Dicke bei F, *duplum ejus crassitiei, quae est in orbiculorum medio.* Allerdings, setzt Kepler hinzu, sei ein solcher Schluss nicht immer zulässig und würde irre führen, wenn nicht ein ganz symmetrisches Verhalten aller unter einander überdies congruenten Scheiben, welche zwischen F und G gebildet werden, einträte. Solches ist, ausser bei dem durch den in Umdrehung befindlichen Kreis gebildeten Ringe, beispielsweise dann der Fall, wenn ein Quadrat in drehende Bewegung gesetzt wird. Interessanter in mancherlei Beziehung ist der im 20. Satze[4]) erörterte Apfel, d. h. der Umdrehungskörper eines Kreisabschnittes, welcher grösser als der Halbkreis ist, um seine Sehne. Die gedrehte Figur wird durch zur Sehne parallele Gerade in gleichbreite kleinste linienartige Stücke zerlegt, *secetur area MDN lineis parallelis ipsi MN in aliquot segmenta aequelata minima, quasi linearia.* Bei der darauf folgenden drehenden Bewegung bildet das Theilchen nächst der Sehne so gut wie keinen Raum, weil es die geringste Bewegung hat, *cum*

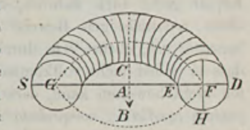

Fig. 147.

[1]) *Opera Kepleri* IV, 568. [2]) Ebenda IV, 570. [3]) Ebenda IV, 583.
[4]) Ebenda IV, 584—585.

igitur figura circa MN circumagitur, nihil fere creat areola MN, quia minimum movetur. Die Bewegungsgrösse jedes folgenden Punktes eines folgenden Theilchens ist durch eine Kreisperipherie gemessen, welche als Gerade senkrecht zur Ebene der Anfangslage der gedrehten Figur aufgetragen wird. Dadurch verwandeln die ringförmigen Elementartheile des Apfels sich in cylinderartige, und deren Summirung liefert den gesuchten Körperraum. Wird der um seine Sehne in Drehung versetzte Kreisabschnitt kleiner als ein Halbkreis angenommen, so entsteht statt des Apfels die Citrone[1]). Derselbe Abschnitt kann aber auch um seine Höhe in Drehung versetzt werden und bildet dann einen Kugelabschnitt. Der 25. Satz setzt dann diesen Kugelabschnitt zu jener Citrone in Beziehung und meint, sie schienen sich zu verhalten, *videtur eam habere proportionem*, wie die halbe Sehne zur Höhe[2]). Dieses Ergebniss ist freilich falsch, und Kepler giebt auch dadurch, dass er Anderen die Aufgabe vorlegt, einen rechtmässigen Beweis zu führen, *demonstrationem legitimam quaerant alii*, ebenso wie durch das vorsichtige *videtur* zu verstehen, dass er selbst nicht vollkommen überzeugt ist. Aber, meint er, was ich nicht beweisen kann, darauf kann ich doch hinweisen, *quod non possum apodictice, comprobato dictice*, und in diesem Sinne führt er verschiedene Gründe an, deren erster jene mittelalterliche von Nicolaus von Cusa, welchen Kepler übrigens nicht nennt, vielfach in den Vordergrund gestellte Folgerungsweise ist: was bei dem Grössten und bei dem Kleinsten einer Gattung Geltung habe, müsse auch in den dazwischen liegenden Zuständen wahr sein. Die beiden äussersten Fälle sind hier folgende. Erstlich sei der Kreisabschnitt, welcher durch Drehung die beiden Körper hervorbringt, der grösstmögliche, ein Halbkreis, dann ist die halbe Sehne gleich der Höhe gleich dem Kreishalbmesser, und Citronen- wie Kugelabschnitt gehen beide in eine und dieselbe Halbkugel über. Ist aber zweitens der Kreisabschnitt der kleinstmögliche, dann sind die beiden genannten Körper kaum von den ihnen einbeschriebenen Kegelchen zu unterscheiden, welche wie ihre Höhen, d. h. wie die vorgenannten Strecken sich verhalten, aber auch hier misstraut sich Kepler mit Recht, denn er gesteht zu, die Schlussfolgerung von dem absolut Kleinsten zu dem jenem Kleinsten Nächststehenden sei nicht immer sicher, *fateor ab eo, quod est absolute minimum, ad id, quod minimo proximum, non ubique tutam esse collectionem.*

[1]) Bei ihrer Besprechung im 21. Satze heisst es pag. 585 fast wörtlich gleichlautend mit dem bei der Entstehung des Apfels gebrauchten Ausdrucke: *segmentum areolae in ipsum JOK terminans fere nihil creat, quia pene nihil movetur.* [2]) *Opera Kepleri* IV, 594.

Als höchst merkwürdig wollen wir noch den 27. Satz des Supplementum[1]) hervorheben (Figur 148). In dem rechtwinkligen Dreiecke ABC sei der Winkel B durch die Gerade BN halbirt, so ist $AN : NC = AB : BC$, d. h. $AN < NC$, und halbirt man AC in O, so liegt O zwischen N und C. Nun lasse man BC zur Berührungslinie eines durch B hindurchgehenden Kegelschnittes werden, dessen Axe AC ist, so hängt die Art dieses Kegelschnittes nur noch von der Lage seines Scheitelpunktes auf der AC ab. Liegt derselbe zwischen O und C in V, so hat man eine Hyperbel vor sich. O selbst ist Scheitelpunkt einer Parabel, N eines Kreises. Durch die J und E zwischen N und O, beziehungsweise zwischen N und A geht eine Ellipse, deren grosse Axe in dem ersten, deren kleine Axe in dem zweiten Falle auf AC liegt. Die Art einer Curve ist also hier bestimmt, indem von einer gegebenen Berührungslinie der Ausgangspunkt der Untersuchung genommen ist, oder mit anderen Worten: Kepler hat hier die erste inverse Tangentenaufgabe gestellt.

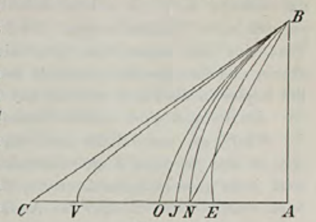

Fig. 148.

Als Inhalt des zweiten Hauptabschnittes der Doliometrie bezeichneten wir den Nachweis, dass die in Oesterreich häufigste Fassgestalt zugleich die zweckmässigste sei. Nicht als ob irgend ein Mathematiker die dortigen Böttcher jedesmal angewiesen hätte, gerade dieser Abmessungen sich zu bedienen, denn wenn eine solche wissenschaftlich begründete Vorschrift vorhanden gewesen wäre, so sei undenkbar, dass sie nicht auch zu den am Rheine wohnenden Böttchern gedrungen wäre und die dort übliche weniger sachdienliche Fassgestalt verdrängt hätte. Nein, die Natur lehrt mit Hilfe eines dunkeln Gefühls ohne Bildung von Schlüssen die Geometrie[2]), sie hat unsere Böttcher gelehrt, auf blosses Augenmaass hin und mit Rücksicht auf schönere Form, *solis oculis et speciei pulchritudine ducti*, die geräumigsten Fässer herzustellen. Wenn aber, wie die hier angeführten Worte erkennen lassen, Kepler unter zweckmässiger Fassgestalt diejenige versteht, welche bei Verbrauch der geringsten Menge von Fassholz den grössten Inhalt besitzt, so muss dieser zweite Ab-

[1]) *Opera Kepleri* IV, 598—599. [2]) Ebenda IV, 612: *Quis neget, naturam instinctu solo, sine etiam ratiocinatione docere geometriam?*

schnitt wiederholt auf Fragen zu reden kommen, welche grösste und kleinste Werthe betreffen, und welche den im V. Buche des Pappus, auf welches Kepler sich ausdrücklich beruft[1]), behandelten isoperimetrischen Untersuchungen (Bd. I, S. 418) nahe stehen. In der That sind fast sämmtliche Sätze dieses Abschnittes Maximalsätze, und ihre Beweise enthalten Bemerkungen, welche zeigen, wie tief Kepler in die Natur grösster und kleinster Werthe eingedrungen ist. Als Beispiel eines solchen Satzes führen wir den 4. Satz an[2]), der Würfel sei dem Inhalte nach das grösste Parallelopipedon, welches in eine gegebene Kugel einbeschrieben werden könne. Als Beispiel jener Bemerkungen diene der 2. Zusatz zum 5. Satze, wo gezeigt wurde, dass eine gewisse Ausdehnung sich bis zu einem gewissen Punkte G erstrecken müsse. Andere Gestaltungen, heisst es[3]), welche bis zu Punkten sehr nahe bei G diesseits oder jenseits sich erstrecken, ändern nur wenig an dem Rauminhalte, der für AGC der grösstmögliche ist. Einem grössten Werthe auf beiden Seiten Benachbartes zeigt nämlich am Anfange nur unmerkbare Abnahme, *circum maximum vero utrimque circumstantes decrementa habent initio insensibilia*. Und kaum weniger bezeichnend sind andere Stellen[4]), so dass man namentlich im Hinblicke auf die letzte derartige Stelle im 27. Satze vollberechtigt ist, für Kepler die Kenntniss in Anspruch zu nehmen, dass die Veränderungen einer Function dicht beim Maximalwerthe verschwinden, denn deutlicher kann man ohne Anwendung von Worten, welche der damaligen Zeit noch fremd waren, sich doch wohl nicht ausdrücken, als wenn man sagt: An solchen Stellen, wo der Uebergang von einem Kleineren zum Grössten und wieder zum Kleineren stattfindet, ist der Unterschied immer bis zu einem gewissen Grade unmerklich, *in iis vero articulis, in quibus a minori ad maximum iterumque ad minus fit mutatio, lege aliqua circuli, semper est aliquousque insensibilis illa differentia*. Einen Beweis freilich besass Kepler nicht für die von ihm erkannte Thatsache, darin ging er gar nicht so sehr weit über die Ahnung Oresme's (S. 131), dessen Schriften Kepler wie Descartes wie Fermat leicht gelesen haben kann, hinaus. Statt einer Begründung müssen nämlich die drei von uns unübersetzt gelassenen Worte *lege aliqua circuli* dienen, es geschehe nach einem Gesetze, welches vom Kreise sich herschreibe. Kepler meint wohl das dichte Anschmiegen der Berührungslinie des Kreises an den Kreisbogen, welches in der

[1]) *Opera Kepleri* IV, 607: *Haec omnia Pappus habet libro quinto.* [2]) Ebenda IV, 607—609. [3]) Ebenda IV, 612. [4]) Ebenda IV, 622 lin. 11—14; 628 lin. 18—19; 634 lin. 9—12.

gerade damals noch lebhaftes Interesse erregenden Frage des Contingenzwinkels seine Rolle spielte.

Wenn somit das Werk von 1615 als ein für die Entstehung der Infinitesimalrechnung grundlegendes in dem Sinne gelten muss, als die Zerlegung eines Raumes in Elementartheile und deren Vereinigung zu einer Summe der Lehre von den bestimmten Integralen vorgriff, und als das Hauptmerkmal ausgesprochen war, welches mit dem Vorhandensein eines Maximalwerthes verbunden ist, so war doch noch keineswegs jeder Irrthum ausgeschlossen, wie wir z. B. oben an der Vergleichung von Citronen- und Kugelabschnitt gesehen haben. Zur vollständigen Würdigung Kepler's reicht auch die Doliometrie nicht aus. Man wird bei einer solchen immer den Astronomen Kepler als der Beurtheilung unterworfen zu betrachten haben, dem seine Verdienste um einzelne Theile der Physik wie der reinen Mathematik zur grossen Zierde gereichen, ohne das Wesentlichste seiner Leistungen darzustellen. Und auch wenn wir, wozu wir hier genöthigt sind, aus dem angeführten Grunde auf eine zusammenfassende Würdigung Kepler's verzichtend seine einzelnen reinmathematischen Arbeiten besprechen, können wir noch nicht der Aufgabe uns zuwenden, die Wirkung zu verfolgen, welche das Erscheinen der Doliometrie übte, bevor wir noch zwei Einzelheiten aus anderen Schriften Kepler's erwähnt haben werden, welche gleichfalls bis zu einem gewissen Grade der Infinitesimalrechnung angehören.

Dahin gehört erstlich die Rectification von Curven. Kepler hat in der *Astronomia nova* von 1609 sich daran versucht. Der Umfang der Ellipse von den Axen $2a$, $2b$ sei sehr nahezu, *proxime*, gemessen durch $\pi(a+b)$[1]).

Zweitens ist eine Untersuchung zu nennen, welche zur Auswerthung des bestimmten Integrals

$$\int_0^\varphi \sin\varphi \cdot d\varphi = 1 - \cos\varphi$$

geführt hat[2]). Wir wissen, dass 1609 die Jahreszahl des Erscheinens der *Astronomia nova* war. In ihr hat Kepler eine Lehre von einem planetarischen Magnetismus aufgestellt, vermöge dessen die magnetische Sonne S (Figur 149) auf die magnetischen Pla-

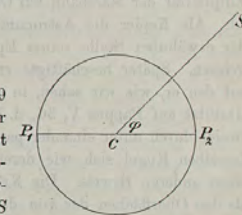

Fig. 149.

[1]) *Opera Kepleri* III, 401. [2]) Günther, Ueber eine merkwürdige Beziehung zwischen Pappus und Kepler (Eneström's *Bibliotheca mathematica* 1888, pag. 81—87).

neten in der Weise einwirke, dass dem Pole P_1 eine Anziehung, *appetentia*, a_1, dem Pole P_2 eine Abstossung, *fuga*, a_2 zukomme, welche von dem Winkel φ abhänge, den die Verbindungsgerade CS des Planetenmittelpunktes und der Sonne mit der Planetenaxe $P_1 P_2$ bildet. Es kam Kepler darauf an, den Quotienten $\frac{a_1}{a_2}$ in seiner Abhängigkeit von φ darzustellen, so dass derselbe bei $\varphi = 90^0$ den Werth 1 annehme. Ohne ausreichende Begründung wird $a_1 = k(1 - \cos\varphi)$, $a_2 = k(1 + \cos\varphi)$, mithin $\frac{a_1}{a_2} = \left(\operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}\right)^2$ gesetzt, so dass, wenn ein a gegeben ist, das andere von selbst folgt und also mit Auffindung von a_1 der ganzen Aufgabe Genüge geleistet ist; Maass der Stärke, *fortitudinis*, jenes Winkels φ sei aber dessen Sinus, und so ergebe sich das ganze a_1 als die Summe der Sinusse aller Winkel von 0 bis φ, und das ist doch $\int_0^\varphi \sin\varphi \cdot d\varphi$. Zunächst nimmt Kepler $\varphi = 90^0$ und lässt die einzelnen Winkel gradweise zunehmen. Entnimmt man $\sin 1^0, \sin 2^0, \ldots \sin 90^0$ den Sinustafeln und bildet ihre Summe, so entsteht 1, beziehungsweise $1 - \cos\varphi$, oder, wie der Gewohnheit der Zeit entsprechend gesagt wurde, der Sinusversus von φ. Das Gleiche bewahrheitet sich in einem anderen ähnlicher Rechnung unterworfenen Sonderfalle, und daraus schliesst Kepler auf die Richtigkeit der allgemeinen Formel, ein Schluss, der sich, wie es in der *Epitome* von 1618 heisst[1]), *per numeros et anatomiam circuli*, d. h. durch Zahlenrechnung bei gleichmässiger Zunahme des Bogens rechtfertigt. Ob Kepler den Satz durch Herumtasten an Zahlenbeispielen entdeckte? Wer kann das nachträglich ergründen! Unmöglich scheint bei Kepler keine derartige Vermuthung, da gerade in der *Astronomia nova* die Ellipticität der Marsbahn auf Grund zahlloser Rechnungen erschlossen ist. Als Kepler die Astronomia nova schrieb, hatte er, wie er an der erwähnten Stelle seiner Epitome hinzufügt, Pappus noch nicht gelesen. Später beschäftigte er sich eifrig mit diesem Schriftsteller, auf den er, wie wir sahen, in der Doliometrie von 1615 sich berief. Gestützt auf Pappus V, 36, d. h. auf den Satz, dass die Oberflächen zweier durch unter einander parallelen Kreise begrenzter Kugelcalotten derselben Kugel sich wie deren Höhen verhalten[2]), entwarf Kepler einen anderen Beweis. Die Kräfte a_1 und a_2 denkt er sich nämlich als den Oberflächen der von der Anziehung, beziehungsweise der Abstossung beherrschten Kugelcalotten proportional, und bei der Allgemeingiltigkeit des Satzes von Pappus macht es nichts aus, wie

[1]) *Opera Kepleri* IV, 407. [2]) Pappus (ed. Hultsch) I, 406.

gering der Unterschied von je zwei Kugelcalotten gewählt wird. Man kann die Kugeloberfläche in unendlich viele gleich breite Gürtel zerlegt denken, deren jeder gewissermassen als Kreis ohne jede Breite erscheint[1]). Die Summation solcher unendlich vieler Verhältnisse entspricht dann der von ebensovielen Sinussen von Winkeln, die nicht durch einzelne Winkelgrade, sondern in beliebig naher Aufeinanderfolge wachsen, und deren Summe liefert nicht nur beinahe, *fere*, sondern ganz genau den Sinusversus. Das ist aber genau die Verfahrungsweise der Zusammenfassung von Elementartheilchen, wie Kepler sie in der Doliometrie sich angewöhnt hatte, um sie auch nach 1615 weiter zu üben.

Wir haben den Wirkungen nachzugehen, welche das Erscheinen der Doliometrie hervorbrachte. Sie bilden, wenn auch nicht sehr zahlreich, mit voller Gewissheit nachweisbar, immerhin einen Beweis für die rasche Verbreitung der Schrift. Zuerst fand ein Gegner sich ein. Alexander Anderson, den wir früher als einen Bearbeiter Vieta'scher Manuscripte kennen gelernt haben, veröffentlichte schon 1616 seine *Vindiciae Archimedis* und verwahrte darin den genialen Griechen gegen den Vorwurf, als ob seine Exhaustionsmethode irgend etwas mit Kepler's Infinitesimalbetrachtungen gemein habe. Bewundernd und zustimmend äusserte sich dagegen Henry Briggs, der zu Anfang des Jahres 1625 seine 1624 gedruckte *Arithmetica logarithmica* Kepler zuschickte und sie mit einem Briefe begleitete[2]), welcher den in logarithmischer Rechnung erbrachten Zahlenbeweis enthielt, dass wirklich der der Kugel einbeschriebene Würfel einen grösseren Inhalt besitze, als ein nur wenig von der Würfelgestalt abweichendes einbeschriebenes Parallelopipedon, dass also Kepler's 4. Satz im II. Theile der Doliometrie richtig sei.

Ausser aller Beziehung zu Kepler's Doliometrie, ja man könnte sagen, ausser aller Beziehung zu Infinitesimalbetrachtungen steht ein Werk, welches wir im Vorübergehen hier nennen, weil bei dem nächsten Schriftsteller, von welchem ausführlich gehandelt werden wird, Erwähnung davon geschehen muss. Bartholomäus Souvey[3]) (um 1577—1629), lateinisch Soverus, war aus Crisie unweit Freiburg in der Schweiz. Er studirte in Rom, lehrte dann in Turin, später in Padua. Sein Versuch, eine Professur in Bologna zu erlangen, scheiterte daran, dass er gedruckte Belege seiner wissenschaftlichen Tüchtigkeit nicht vorlegen konnte. Erst nach seinem Tode

[1]) *Atqui si sphaerica superficies intelligatur divisa in zonas infinitas aeque latas, erit quaelibet zona ut circulus aliquis latitudine carens.* [2]) *Opera Kepleri* IV, 659—662. [3]) Kästner III, 62—66. — Favaro im *Bulletino Boncompagni* XV und XIX.

erschien 1630 sein *Tractatus de recti et curvi proportione.* Dem Titel nach sollte man ausgiebige Untersuchungen über Rectification von Curven erwarten, und auf sie verweist auch ein im VI. (letzten) Buche ausgesprochener Grundsatz: *lineam curvam extendi posse.* Wesentlich Neues in dieser Richtung scheint sich aber nicht zu finden. Hervorzuheben dürfte sein, dass im V. Buche Figuren mittels einer Parallelbewegung gerader Linien erzeugt werden, dass im VI. Buche eine Spirallinie unter dem Namen *spiralis quadrantis* durch einen Punkt erzeugt wird, der in gleichmässiger Bewegung den Halbmesser eines Kreises durchläuft, während der Halbmesser in gleichfalls gleichmässiger Bewegung einer Drehung um 90° unterworfen ist, eine Curve also, welche einen besonderen Fall der archimedischen Spirale (Bd. I, S. 291—292) darstellt.

Eingehend haben wir uns nun mit Bonaventura Cavalieri[1]) zu beschäftigen. Er gab seine *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* zuerst 1635, dann in verbesserter Ausgabe 1653 heraus; zwischen beiden Veröffentlichungen erschienen 1647 *Exercitationes geometricae sex.* Das erstere werden wir, wie es üblich ist, kurz als die Indivisibilien bezeichnen, ohne wohl eine Verwechselung befürchten zu müssen, wo wir des gleichen Wortes in einer geometrischen Bedeutung uns zu bedienen haben. Die Indivisibilien also sind 1635 erstmalig im Drucke erschienen. Es ist nicht unwichtig, die Entstehung des Werkes nach rückwärts zu verfolgen, und solches gelingt bis zum Jahre 1626.

Am 21. März 1626 schrieb Cavalieri an Galilei[2]): „Was das Indivisibilienwerk betrifft, so wäre es mir sehr lieb, wenn Eure Herrlichkeit sich so rasch als möglich daran hielte, damit ich auch das meinige fördern könnte, an welchem ich mittlerweile feilen werde.“ Und eine ähnliche Mahnung liess er am 4. April folgen[3]): „Ich bin daran, mein Werk über die Körper in Buchform zu bringen. Pater Benedetto 〈Castelli〉 sagte mir, es würde sehr wohl aufgenommen werden, wenn ich es italienisch (*in lingua volgare*) schriebe, und ich schreibe es mithin so und gebe Eurer Herrlichkeit davon Nachricht, damit auch Sie mit Ihren Indivisibilien ähnlich verfahren oder, wenn Sie es missbilligen sollten, mir Nachricht gäben, damit ich mich mit Eurer Herrlichkeit in Einklang setze. Aber ich bitte dringend, machen Sie sich rasch daran, damit ich so schnell als möglich Etwas von

[1]) Kästner III, 205—209. — Montucla II, 38—42. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch I, 415—428. — Gerhardt, Entdeckung der höheren Analysis S. 18—27. — Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* IV, 70—90. [2]) Venturi, *Memorie e lettere inedite finora o disperse di Galileo Galilei* II, 96 (1819). [3]) Campori, *Carteggio Galileano inedito* (1881) pag. 243.

dem Meinigen zeigen und mich davon los an andere Gegenstände machen kann.“

Antwortschreiben Galilei's sind nicht bekannt, und so können wir aus diesen Briefstellen nur zwei Thatsachen entnehmen: erstens die, dass im März 1626 die Niederschrift der Cavalieri'schen Indivisibilien begonnen hat, welche gewiss noch vielfach umgemodelt wurden, bis sie zu dem 1635 gedruckten lateinischen Werke wurden, von welchem gesagt worden ist[1]), dass es den Preis der Dunkelheit verdiente, wenn solche Preise vergeben würden; und zweitens die, dass Galilei mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt war, von welchen aber nichts an die Oeffentlichkeit gelangt ist. Wir werden auf diese Thatsachen noch zurückkommen müssen.

Zunächst wenden wir uns zu dem Inhalte der Indivisibilien, wobei wir bemerken, dass alle unsere Hinweise auf die II. vervollkommnete Ausgabe von 1653 sich beziehen. Das Werk zerfällt in sieben Bücher, deren allgemeine Inhaltsangabe durch Cavalieri's Ueberschriften geliefert ist. Im I. Buche werden darnach[2]) elementare Sätze über die Schnitte von Cylindern und von Kegeln vorausgeschickt, sowie auch Sätze, von welchen in den nachfolgenden Büchern Gebrauch zu machen ist. Im II. Buche[3]) ist vorzugsweise vom Dreiecke und dem Parallelogramme die Rede und von den durch sie erzeugten Körpern, überdies wieder von Sätzen zur Anwendung in den folgenden Büchern. Das III. Buch[4]) überliefert die Lehre vom Kreise und der Ellipse und den von ihnen aus erzeugten Körpern. Aehnlicherweise ist das IV. Buch[5]) der Parabel und ihren Körpern, das V. Buch[6]) der Hyperbel, welche aus einander gegenüberstehenden Schnitten, *oppositis sectionibus,* hervorgeht und ihren Körpern gewidmet. Das VI. Buch[7]) handelt von den Räumen der Spirale und ihrer Körper und von einigen Folgerungen aus dem Vorangegangenen. Im VII. Buche[8]) endlich wird Alles, was in den vorhergehenden Büchern der Indivisibilien bewiesen wurde, in anderer Weise und unabhängig von jenen gezeigt.

Was sind nun, sollte man in erster Linie eine Antwort erwartend fragen, die Indivisibilien? Das Wort war seit Bradwardinus (S. 120), vielleicht schon länger, in der Wissenschaft bekannt, aber ein ganz klarer Begriff war damit nicht verbunden, und eine klare Auskunft hat auch Cavalieri nie gegeben. Eine so grosse Anzahl von Definitionen an die Spitze des ersten Buches gestellt ist, keine

[1]) Marie l. c. IV, 90. [2]) *Indivisibilien* pag. 1. [3]) Ebenda pag. 99. [4]) Ebenda pag. 197. [5]) Ebenda pag. 285. [6]) Ebenda pag. 365. [7]) Ebenda pag. 429. [8]) Ebenda pag. 482.

erklärt jenes Wort, welches zudem im ganzen I. Buche nicht vorkommt.

Dagegen ist ein anderes wichtiges Wort, *regula*, ebendort in seinem Sinne bestimmt. Bei jedem geschlossenen ebenen Gebilde, *figura*, lässt eine Gerade als Berührungslinie sich denken, welche einen Scheitel, *vertex*, genannten Berührungspunkt mit dem Gebilde gemein hat. Ihr parallel giebt es Gerade in beliebiger Zahl, endlich wieder eine, welche die Figur berührt und ihr gewissermassen als Abschluss dient. Sie wird die gegenüberliegende Tangente, *tangens opposita*, genannt. Bei Körpern findet Aehnliches statt, sofern statt des Wortes Gerade das Wort Ebene eingeführt wird. Regula heisst nun[1]) jene erste Gerade, beziehungsweise erste Ebene, mit Bezug auf welche die Begriffe des Scheitels und der gegenüberliegenden Berührenden festgestellt sind. Der Gebrauch der Regula in der Ebene ist folgender. Seien EO, BC etwa zwei gegenüberliegende Tangenten. Durch die als Regula benutzte EO wird eine Ebene gelegt, zu welcher eine Parallelebene durch BC vorhanden ist. Die erste Ebene wird in paralleler Lage bewegt, bis sie mit der zweiten zusammenfällt, eine Bewegung, welche als Fliessen bezeichnet wird. Die Durchschnittsgeraden der bewegten oder fliessenden Ebene mit der Figur, *communes sectiones talis moti sive fluentis plani et figurae*, bilden die Gesammtheit der Geraden der Figur, *omnes lineae figurae*[2]). Aehnlich ist der Gebrauch der Regula im Raume. Dort wird die fliessende Ebene selbst in gewissen durch die Gestalt des Raumgebildes bedingten Begrenzungen den Körper erzeugen, und Gesammtheit der Ebenen des Körpers, *omnia plana solidi*[3]), heissen alle ebenen Figuren, welche bei jener Bewegung entstehen. Ebene Figuren oder auch Körper stehen in demselben Verhältnisse wie die Gesammtheiten ihrer Geraden, ihrer Ebenen, welche nach irgend einer Regula genommen wurden[4]).

Cavalieri ist sich der Schwierigkeit voll bewusst gewesen, welche der Vorstellung einer solchen Gesammtheit anhaftet und damals in ganz anderer Weise anhaftete als heute, wo wir an ähnliche Begriffsbildungen so sehr gewöhnt sind, dass wir, höchstens wenn wir besonders darauf aufmerksam gemacht werden, den Widerspruch empfinden, der darin enthalten ist. Schon bevor er daher den erwähnten Satz aussprach, suchte er seine Leser darüber zu beruhigen[5]). „Man könnte, sagt er, Schwierigkeiten machen, wie der Anzahl nach unbe-

[1]) *Indivisibilien* pag. 3, Definitio E. [2]) Ebenda pag. 104. [3]) Ebenda pag. 105. [4]) Ebenda pag. 113, Liber II, propositio III. [5]) Ebenda pag. 111, Scholium.

stimmte, *indefinitae numero*, Gerade oder Ebenen, welche von mir die Gesammtheit der Geraden, der Ebenen genannt worden sind, in Vergleich gebracht werden können. Daher erscheint mir der Wink nothwendig, dass, wenn ich die Gesammtheiten der Geraden, der Ebenen eines Gebildes betrachte, ich nicht deren uns unbekannte Anzahl vergleiche, sondern nur die Grösse, welche dem von eben diesen Geraden[1]) eingenommenen Raume zukommt, und weil dieser Raum in Grenzen eingeschlossen ist, so ist auch jene Grösse in denselben Grenzen eingeschlossen, und man kann sie zuzählen, abzählen, ohne ihre eigene Anzahl zu kennen. Solches aber genügt zu deren Vergleichung, weil sonst die Rauminhalte der Figuren auch nicht unter einander vergleichbar wären. Ein Continuum ist entweder nichts Anderes als die Indivisibilien, oder es ist Anderes[2]). Ist es nichts Anderes als die Indivisibilien, und deren Zusammenfassung, *congeries*, lässt sich nicht vergleichen, so ist auch das Räumliche oder das Continuum der Vergleichung unfähig, weil wir eben gesagt haben, es sei nichts Anderes als die Indivisibilien selbst. Ist dagegen das Continuum noch Anderes ausser den Indivisibilien, so muss jenes Andere zwischen den Indivisibilien liegen. Wir haben also ein Continuum, welches in Bestandtheile von noch unbestimmter Anzahl zerlegbar ist, *disseparabile in quaedam, quae continuum componunt, numero adhuc indefinita*. Zwischen je zwei Indivisibilien muss Etwas von jenem Anderen liegen, welches ausser den Indivisibilien zum Continuum gehört, denn derselbe Grund, welcher es zwischen zwei Indivisibilien aufhebt, hebt es zwischen allen anderen auf. In diesem Falle aber können wir Continuum oder Räume wieder nicht mit einander vergleichen, weil eben das Zusammenzufassende und zusammengefasst zu Vergleichende, nämlich was das Continuum bildet, der Anzahl nach unbestimmt ist. Nun ist doch unerhört zu sagen, in Grenzen eingeschlossene Continuen seien nicht vergleichbar, mithin ist auch unerhört zu sagen, die Zusammenfassungen der Gesammtheiten der Geraden oder Ebenen zweier Raumgebilde seien nicht vergleichbar, wenn auch das Zusammengefasste in seiner Anzahl unbestimmt ist, weil dieses der Vergleichung der Continuen nicht im Wege steht. Mag demnach das Continuum, oder mag es nicht aus den Indivisibilien bestehen, die Zusammenfassungen der Indivisibilien sind mit einander vergleichbar und stehen in einem Verhältnisse.“ Sehr deutlich wird man diese weitschweifige Begründung nicht nennen wollen, weil sie, wie wir schon oben betonten, gerade das nicht sagt,

[1]) Hier beschränkt sich Cavalieri auf *omnes lineae* und lässt, offenbar um nicht allzu schleppend zu werden, *omnia plana* bei Seite. [2]) Man beachte das plötzliche unvermittelte Auftreten des Wortes Indivisibilien!

was zu wissen vorzugsweise nothwendig wäre, nämlich was Cavalieri unter Indivisibilien verstehe. Und doch stützt er auf das Verhältniss der im Unklaren verbleibenden Gesammtheiten seine ganze Lehre. „Um das Verhältniss zweier ebenen oder räumlichen Gebilde kennen zu lernen, heisst es nur wenige Seiten später[1]), genügt es, das Verhältniss der Gesammtheiten der von irgend einer Regula aus beginnenden Geraden oder Ebenen zu finden. Das ist das Fundament, welches ich dieser meiner neuen Geometrie zu Grunde lege."

Wie geht nun diese neue Geometrie zu Werke? Im 15. Satze des II. Buches[2]) soll bewiesen werden, dass der Inhalt ähnlicher ebener Raumgebilde sich verhalte, wie die Quadrate gleichliegender Seiten. Bei beiden Figuren werden einander entsprechende gegenüberliegende Berührungslinien, bei beiden einander entsprechende der Regula parallele Gerade gezogen, deren Länge proportional sein muss der Länge entsprechender Zwischengeraden in einander ähnlichen Dreiecken, die jeweils zwischen den beiden Paaren gegenüberliegender Berührungslinien liegen. Die Gesammtheiten der Geraden der Figuren verhalten sich also wie die Gesammtheiten der Geraden der Dreiecke, die Figuren selbst wie die Dreiecke. Dass aber ähnliche Dreiecke sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten, wird alsdann mittels des Durchgangs durch ein anderes Dreieck gezeigt (Figur 150). Das dem grösseren Dreiecke ABC ähnliche kleinere Dreieck EBD wird so auf ersteres gelegt, dass die Winkel bei B sich decken, und dann wird CE gezogen. Die Dreiecke ABC, EBC haben gleiche Höhe. In beiden können daher gleich viele, gleich weit von einander abstehende Parallele zur Grundlinie gedacht werden, die alle in gleichem Verhältnisse zu einander stehen, wie die Grundlinien AB, EB. Deren Gesammtheiten stehen also in gleichen Verhältnissen oder $\triangle ABC : \triangle EBC = AB : EB$. Aber die Dreiecke EBC, EBD besitzen ebenfalls gleiche Höhen. Unter gleicher Begründung kann man daher folgern

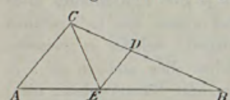

Fig. 150.

$$\triangle EBC : \triangle EBD = BC : BD = AB : EB.$$

Also findet er durch Vereinigung beider Verhältnisse

$$\triangle ABC : \triangle EBD = AB^2 : EB^2$$

nach einem Beweise, der von dem bei Euklid VI, 19 sich kaum anders unterscheidet, als durch das neu auftretende Wort der Gesammtheiten der Geraden. Nichtsdestoweniger weiss Cavalieri sich auf den Be-

[1]) *Indivisibilien* pag. 115, Corollarium. [2]) Ebenda pag. 127—131.

weis und namentlich auf dessen ersten Theil, der das Verhältniss ähnlicher Figuren überhaupt auf das ähnlicher Dreiecke zurückführt, sehr viel zu gute[1]). Welcher Fortschritt, ruft er aus, gegen die Methode früherer Schriftsteller! Dort musste für Dreiecke, Vierecke, Kreise der Beweis gesondert geführt werden; die neue Methode vereinigt Alles in einen Satz. Ganz ähnlich wird alsdann im 17. Satze des II. Buches[2]) gezeigt, dass ähnliche Körper sich wie die Würfel gleichliegender Seiten verhalten. Der 19. Satz[3]) behauptet, das Parallelogramm werde durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, deren jedes halb so gross sei als das Parallelogramm (Figur 151). Man betrachtet AF, CD als gegenüberliegende Tangenten, nimmt $CB = FE$ und zieht die Zwischengeraden BM, EH. Sie sind einander gleich, gleich also auch die Gesammtheiten der Geraden in den beiden Dreiecken CAF, FDC und gleich die Dreiecke selbst. Mithin ist jedes die Hälfte der Summe beider Dreiecke, d. h. des Parallelogramms. Immer noch im II. Buche, in dem 24. Satze[4]), gelangt Cavalieri dazu, nicht mehr Gesammtheiten einfacher Geraden, sondern solche der Quadrate dieser Geraden in Betracht zu ziehen. Ein Parallelogramm und das dessen Hälfte darstellende Dreieck sind die Figuren, deren Geraden gemeint sind. *Omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cuiusvis triangulorum per diametrum constitutorum sunt in ratione tripla*, d. h. die betreffenden Gesammtheiten verhalten sich wie $3:1$. Der Beweis, welchen Cavalieri giebt, stützt sich rückwärts auf allzuviele vorhergehende Sätze, als dass es möglich wäre, ihn kurz zusammenzufassen. Dass der Satz wahr ist, lässt sich daraus entnehmen, dass, sofern a, b die beiden Seiten des Parallelogramms sind, die genannten Gesammtheiten sich als

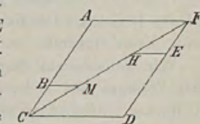

Fig. 151.

$$\int_0^a \frac{kb^2x^2}{a^2}\,dx = \frac{kab^2}{3}$$

und als

$$\int_0^a kb^2 dx = kab^2$$

darstellen, wo k von der Grösse der Winkel des Parallelogramms abhängt. Weiter wird alsdann gefolgert[5]), dass jeder Cylinder das Dreifache des Kegels von gleicher Grundfläche und Höhe sei

[1]) *Indivisibilien* pag. 133. [2]) Ebenda pag. 133—145. [3]) Ebenda pag. 146—147. [4]) Ebenda pag. 159—160. [5]) Ebenda pag. 185.

(Figur 152). Die Diametralebene $ACED$ zerschneidet die beiden Körper in dem Parallelogramme $ACED$ und dem Dreiecke BED, welche als Erzeugende der Körper betrachtet werden können. Da das Dreieck mit dem Parallelogramme gleiche Grundlinie und Höhe besitzt, kann der 24. Satz auf diese Figuren ausgedehnt werden. Parallelschnitte zum Grundkreise $DFEH$ schneiden Cylinder und Kegel in Kreisen, welche sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, d. h. wie die Quadrate eines Paares von Geraden des Parallelogrammes und des Dreiecks. Die Körper verhalten sich also wie die Gesammtheiten dieser Quadrate, und das ist wie $3:1$.

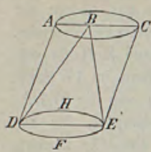

Fig. 152.

Wir wollen nicht länger bei dem II. Buche verweilen, vielmehr noch Weniges aus anderen Büchern berichten. Der 11. Satz des III. Buches[1]) beschäftigt sich mit der Quadratur der Ellipse. Ist $2a$ deren grosse, $2b$ deren kleine Axe und construirt man mit letzterer als Durchmesser den eingeschriebenen Kreis, überdies das der Ellipse umschriebene Rechteck und das dem Kreise umschriebene Quadrat, so ist vorhergegangenen Sätzen leicht zu entnehmen, dass die Ellipse und der Kreis sich wie jenes Rechteck und jenes Quadrat, diese sich wie die grosse und kleine Axe verhalten, dass also $ab\pi$ die Ellipsenfläche darstellen muss. Des Weiteren sind im III. Buche jene Umdrehungskörper von Kreisabschnitten auf ihren Rauminhalt geprüft, mit welchen Kepler sich theilweise mangelhaft beschäftigt hatte. Der 1. Satz des IV. Buches[2]) (Figur 153) spricht aus, dass ein Parallelogramm $AEHF$, der Parabelabschnitt $FCMH$ und das Dreieck FCH, deren Lagenverhältnisse aus der Figur einleuchten, sich wie $6:4:3$ verhalten. Man zieht $NM \parallel CG \parallel EH$. Vermöge der Eigenschaften der Parabel ist

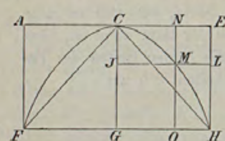

Fig. 153.

$$EH : NM = CE^2 : CN^2$$

oder

$$NO : NM = CE^2 : CN^2.$$

Die Gesammtheit der NO verhält sich desshalb zur Gesammtheit der NM, d. h. das Parallelogramm $CGHE$ zu dem dreilinigen Raume, *trilineum*, $CMHE$ wie die Gesammtheit der Quadrate der Geraden im Parallelogramm $CGHE$ zu der der Quadrate der Geraden CN, d. h. der Geraden im Dreiecke CHE. Deren Verhältniss war $3:1$ mithin ist das erwähnte Trilineum ein Drittel des Parallelogrammes,

[1]) *Indivisibilien* pag. 213. [2]) Ebenda pag. 285—286.

und das ergänzende Trilineum $CMHG$ zwei Drittel desselben, während das Dreieck CHG dessen Hälfte ist. Da links von CG ähnliche Verhältnisse obwalten, so ist damit der Satz bewiesen. Mit Uebergehung des ganzen V. Buches erwähnen wir den 9. Satz des VI. Buches[1]), welcher die Quadratur der Archimedischen Spirale enthält. Diese war, ebenso wie die Quadratur der Parabel, allerdings schon von Archimed ermittelt (Bd. I, S. 289—290), es bedurfte also keiner neuen Entdeckung, sondern nur eines neuen Beweises vom Gesichtspunkte der Indivisibilien aus. Bei dem ohnedies verwickelten Gegenstande sei ohne Veränderung des Ganges der Darstellung, wie Cavalieri sie giebt, eine etwas veränderte Ausdrucksweise hier gestattet (Figur 154). Unter Fläche der Spirale wird der Raum $ADCBA$ verstanden, welcher begrenzt ist durch die Spirale von ihrem Anfangspunkte A bis zu B, wo die erste Umdrehung des erzeugenden Leitstrahles vollendet ist, und von dem letzten Leitstrahle AB. Sie kann als Unterschied zweier anderer Flächen aufgefasst werden, nämlich des mit $AB = R$ als Halbmesser beschriebenen Kreises πR^2 und des Raumes $ADCBC_1D_1B$, welcher Q heissen mag. Die Gleichung der Spirale ist $\varrho = k\varphi$, wo ϱ den Leitstrahl, φ das Längenmaass des Kreisbogens vom Halbmesser 1 bedeutet, welcher die vollzogene Drehung des Leitstrahles bespannt. Da nun der Annahme nach $\varphi = 2\pi$ bei $\varrho = R$ wird, so ist $R = 2\pi k$, $k = \frac{R}{2\pi}$, $\varrho = \frac{R\varphi}{2\pi}$, $\varphi = \frac{2\pi\varrho}{R}$, $\varphi\varrho = \frac{2\pi\varrho^2}{R}$ = der Länge des Kreisbogens $D'D$, welcher als eine gekrümmte Indivisibilie des Raumes Q betrachtet werden kann. Nun werde ein Rechteck $EFGH$ mit der Grundlinie $FG = 2\pi R$ und der Höhe $EF = R$ gezeichnet, dessen Inhalt demnach $2\pi R^2$ ist. Innerhalb des Rechtecks mit E als Scheitel, EH als Axe, wird eine durch G hindurchgehende Parabel $y^2 = ax$ gezeichnet. Der vorgeschriebenen Bedingung der Zeichnung gemäss ist $R^2 = a \cdot 2\pi R$, $a = \frac{R}{2\pi}$, also die Parabelgleichung $y^2 = \frac{Rx}{2\pi}$ oder $x = \frac{2\pi y^2}{R}$. So oft folglich $y = \varrho$, ist x gleich der Länge des Kreisbogens $D'D$. Man kann aber x als Indivisibilie des Trilineums $EFGJE$ betrachten, in

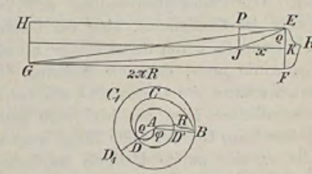

Fig. 154.

[1]) *Indivisibilien* pag. 436—439.

welchem es alle Werthe von 0 bis $2\pi R$ annimmt, genau so wie der Kreisbogen $D'D$ im Raume Q. Die Gesammtheiten beider müssen also gleich sein, d. h. $Q = EFGJE$ neben $2\pi R^2 = EFGH$ oder $\pi R^2 = \triangle EFG$. Daraus folgt $\pi R^2 - Q = EJGE =$ der Fläche der Spirale, deren Auffindung dadurch auf die Quadratur eines Parabelabschnittes zurückgeführt ist. Letztere wurde, wie wir oben sahen, als Drittel des Dreiecks EFG, d. h. als $\frac{\pi R^2}{3}$ erkannt, und ebensogross ist die Fläche der Spirale. Mit dem VI. Buche ist dasjenige, was Cavalieri nach der Methode der Indivisibilien erörtert hat, abgeschlossen.

Er fühle selbst, erklärt die Vorrede zu dem sich anschliessenden VII. Buche[1]), dass dem Leser manche Zumuthungen gemacht worden seien. Die Philosophen stritten sich herum über die Zusammensetzung des Continuums, über das Unendliche; die Vorstellung von der Gesammtheit von Geraden oder Ebenen möge Manchen unfassbar sein, sowie auch, dass die Meinung des Verfassers auf eine Zusammensetzung des Continuums aus Indivisibilien hinauslaufe. Jene Gesammtheiten seien am leichtesten negativ zu verstehen, nämlich so, dass keine Gerade, keine Ebene ausgeschlossen sei. Auf alle Fälle wolle er eine zweite Methode mittheilen, welche von jenen dem Zweifel ausgesetzten Betrachtungen frei sei. Ihre Grundlage stellt der 1. Satz des VII. Buches[2]) dar: Raumgebilde der Ebene wie des Raumes sind inhaltlich gleich, wenn in gleicher Höhe bei beiden geführte Schnitte gleiche Strecken beziehungsweise gleiche Flächen ergeben.

Die Dunkelheit der Cavalieri'schen Darstellung mag manche Leser abgeschreckt, andere nur um so stärker angezogen haben, ähnlichen Erfolg mögen die neuen Auffassungen gehabt haben, welche hier entgegentraten, jedenfalls erhoben sich in ungleich stärkerem Maasse als bei Kepler's Doliometrie Stimmen gegen die Geometrie der Indivisibilien neben solchen, welche Cavalieri beipflichteten.

Als Gegner offenbarte sich Paul Guldin[3]) (1577—1643), der in St. Gallen geboren war und als Goldschmiedgeselle anfing. Im 20. Lebensjahre trat er 1597 zu Freisingen gegen den Willen seiner protestantischen Eltern in den Jesuitenorden ein und verwandelte bei der Glaubensänderung seinen früheren Namen Habakuk in Paul. Guldin's Obere erkannten seine grosse mathematische Begabung und liessen ihn in Rom weiter ausbilden, wo er später selbst als Lehrer wirkte, bevor er zu gleicher Thätigkeit nach Wien, dann nach Graz

[1]) *Indivisibilien* pag. 482—483. [2]) Ebenda pag. 484. [3]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 129—130.

geschickt wurde. Er veröffentlichte ein aus vier Büchern bestehendes Werk *Centrobaryca*, dessen 1. Buch 1635, das 2. Buch 1640, das 3. und 4. Buch 1641 erschien. Schwerpunktsbestimmungen in vollständigerer Auswahl von Beispielen, als Guldin's Vorgänger (S. 695—696) sie geliefert hatten, bilden den Inhalt des 1. Buches. Im 2. Buche findet sich die sogenannte Guldin'sche Regel, dass der Rauminhalt eines Umdrehungskörpers durch das Product der erzeugenden Figur in den Weg ihres Schwerpunktes gemessen wird. Die letzten Bücher verwenden diese Regel bei Körpern, welche von Kepler und von Cavalieri untersucht worden waren, und das 4. Buch insbesondere ist der Bekämpfung dieser Mathematiker gewidmet. Kepler habe zu wenig Gewicht auf geometrische Reinheit und Genauigkeit gelegt, habe sich auf Analogieen und Conjecturen verlassen, nicht immer wissenschaftlich geschlossen und überdies Alles in dunkler Weise vorgestellt. Viel schärfer war noch der Tadel, welchen Guldin über Cavalieri aussprach. Ihm machte er den Vorwurf, als eigene Erfindung veröffentlicht zu haben, was er aus den Schriften von Souvey und Kepler entnommen habe.

Theils um diesen Vorwürfen zu begegnen, theils zur Erläuterung der Indivisibilien schrieb Cavalieri seine *Exercitationes geometricae sex* von 1647, auf deren Inhalt wir eingehen. Die Ueberschriften der sechs Abhandlungen, aus welchen der Band besteht, lauten: I. *De priori methodo Indivisibilium;* II. *De posteriori methodo Indivisibilium;* III. *In Paulum Guldinum e societate Jesu dicta Indivisibilia oppugnantem;* IV. *De usu eorundem Indivisibilium in potestatibus cossicis;* V. *De usu dictorum Indivisibilium in uniformiter difformiter gravibus;* VI. *De quibusdam proportionibus miscellaneis.*

Die I. Abhandlung, der Hauptsache nach eine Erläuterung zum II. Buche der Indivisibilien, vermeidet zwar streng genommen nicht minder als jenes Werk eine wirkliche Definition des Wortes Indivisibilien aufzustellen, aber sie erörtert deren Begriff immerhin etwas deutlicher mit Hilfe eines Bildes[1]). Ebene Figuren seien als Gewebe aus parallelen Fäden hergestellt zu denken, Körper als Bücher, welche aus einander parallelen Blättern bestehen. Dabei sei allerdings ein wesentlicher Gegensatz zu bemerken. Die Fäden des Gewebes, die Blätter des Buches seien in begrenzter, *finitum*, Anzahl vorhanden und haben einzeln eine gewisse Dicke, *crassitiem*; die Geraden der ebenen Figuren, die Ebenen der Körper dagegen seien in unbegrenz-

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 3: *Hinc manifestum est figuras planas nobis ad instar telae parallelis filis contextae concipiendas esse: solida vero ad instar librorum, qui parallelis foliis coacervantur.*

ter, *indefinitum*, Anzahl vorhanden und untheilhaft jeder Dicke, *omnis crassitiei expertia*. Es giebt zwei Methoden der Indivisibilien, welche zwar beide von jenen Geraden und Ebenen Gebrauch machen, aber in verschiedener Weise; die erste Methode benutze sie vereinigt, *collective*, die zweite einzeln, *distributive*[1]). Innerhalb zweier mit einander zu vergleichender Figuren muss die Entfernung der als unter einander gleich nachgewiesenen Geraden in der einen wie in der anderen Figur dieselbe sein[2]), aber davon, dass die Indivisibilien einer Figur der Bedingung gleicher gegenseitiger Entfernung unterworfen wären, ist keine Rede[3]). Die Geraden sind, in Uebereinstimmung mit dem im ersten Werke Vorgetragenen, auch Durchschnittslinien der gegebenen ebenen Figur mit einer im Flusse begriffenen Ebene, *planum motum seu fluens*[4]).

Man könnte die Frage aufwerfen, wesshalb eine solche Entstehungsweise der durch eine sich fortschiebende Gerade vorgezogen ist? Cavalieri äussert sich nicht darüber, aber vielleicht bestach ihn, dass diese Auffassung ihm gestattete, den Satz von dem Verhältnisse der Gesammtheiten von Quadraten der Geraden des Parallelogrammes und des halb so grossen Dreiecks den Sinnen näher zu bringen[5]). Besitzt die fliessende Ebene, welche man senkrecht zu den gegebenen Figuren sich vorstellen darf, die Gestalt eines Quadrates derjenigen Geraden, durch welche sie just hindurchgeht, so bilden alle diese Quadrate über dem Parallelogramme ein Parallelopipedon, über dem Dreiecke eine Pyramide, welche, da beide Körper von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche sind, ein Drittel des Parallelopipedons an Rauminhalt besitzt.

Die II. Abhandlung wendet sich der im VII. Buche der Indivisibilien gelehrten zweiten Methode zu und erläutert namentlich die drei ersten Sätze jenes VII. Buches, ohne Dinge hinzuzufügen, welche ein Verweilen gebieten.

Anders ist es mit der III. gegen Guldin und seinen Tadel gerichteten Abhandlung, in welcher Bemerkenswerthes enthalten ist. Guldin war 1643 gestorben, die Erwiderung gilt also einem Todten, und Cavalieri bedauert dieses[6]), sowohl weil die Wissenschaft an Guldin etwas verloren habe, als auch, weil er selbst jetzt in seiner Entgegnung einigermassen behindert sei. So sehr behindert, wie er

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 4. [2]) Ebenda pag. 17, Nr. XV. [3]) Wenn ebenda pag. 3, Nr. III die Linien *parallelae*, die Ebenen *aequidistantia* genannt sind, so ist mit letzterem Worte auch nur Parallelismus der Ebenen gemeint, wie aus anderen Stellen z. B. pag. 11 lin. 14 v. u. deutlich zu ersehen ist. [4]) Ebenda pag. 12, 16 und häufiger. [5]) Ebenda pag. 52—55. [6]) Ebenda pag. 177.

angiebt, fühlte sich übrigens Cavalieri doch nicht, denn er geht in seinen Gegenvorwürfen, wie wir sehen werden, ziemlich weit. Guldin, sagt Cavalieri, beschuldige ihn, Kepler ausgenutzt und nur dessen Erfindung aus dem Schatten in das Tageslicht gebracht zu haben. Beide Auffassungen seien aber wesentlich verschieden[1]). Kepler setzte aus kleinsten Körperchen grössere zusammen und liess sie dabei aneinanderstossen, er, Cavalieri, sage nur, die ebenen Figuren verhielten sich wie die Gesammtheiten paralleler Linien, die Körper wie die Gesammtheiten gleichfalls paralleler Ebenen, *plana esse ut aggregata omnium linearum aequidistantium, et corpora ut aggregata omnium planorum pariter aequidistantium*. An späterer Stelle[2]) verwahrt sich Cavalieri noch stärker, er habe nie gesagt, Körper und Gesammtheit der Ebenen sei das Gleiche, *nunquam autem ipse dixi, solidum et omnia plana idem esse*. Ferner solle er in der sogenannten zweiten Methode der Indivisibilien Souvey ausgenutzt haben. Dieser Vorwurf ist noch leichter zu entkräften[3]). Souvey's Schrift ist 1630 veröffentlicht worden, die Indivisibilien waren 1629 so weit vollendet, dass eine ganze Reihe namentlich angeführter Männer Einsicht von ihnen erhalten konnte. Der Vorwurf, andere Schriftsteller ausgenutzt zu haben, sei freilich leicht gemacht. Könnte man nicht sagen, Guldin habe seine Regel zur Bestimmung des Rauminhaltes von Umdrehungskörpern Kepler entnommen?[4]) Wenn letzterer den Ringinhalt als Product eines Querschnittes in die Kreislinie, welche der Mittelpunkt, gleichzeitig Schwerpunkt des Querschnittes, durchlaufe, zu berechnen lehre, so sei das die Guldin'sche Regel, und Guldin's Begründung derselben weiche gleichfalls von derjenigen, welche Kepler (S. 841) am angegebenen Orte ausspreche, kaum ab. Auch hier ist eine etwas spätere Stelle[5]) zu vergleichen, wo statt Kepler's ein anderer Vorgänger Guldin's in der Person von Johann Antonio Rocca genannt ist, der zwei Jahre vor dem Erscheinen des zweiten Buches von Guldin's Centrobaryca, mithin 1638, einen ganz ähnlichen Satz mitgetheilt habe. Es spricht nicht für die Belesenheit der damaligen Gelehrten, dass weder Cavalieri noch irgend ein Anderer die Rückverfolgung der Guldin'schen Regel bis zu Pappus fortsetzte, welcher sie schon besass (Bd. I, S. 421), und dessen Schriften Guldin in anderem Zusammenhange anführt, also jedenfalls gelesen hatte. Einen weiteren Vorwurf hatte Guldin der Methode Cavalieri's in der Richtung gemacht, dass sie zur Ableitung des Archimedischen Satzes von der Gleichheit der Kugeloberfläche mit der vierfachen Fläche des Grössten-

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 180. [2]) Ebenda pag. 200. [3]) Ebenda pag. 183. [4]) Ebenda pag. 183—185. [5]) Ebenda pag. 230.

kreises nicht ausreiche. Die Richtigkeit dieses Vorwurfes gesteht Cavalieri unbedingt zu[1]). Den Flächeninhalt gekrümmter Oberflächen könne er mittels Indivisibilien nicht entdecken, das sei wahr, aber, fragt Cavalieri weiter, einen Gegenvorwurf aus seinem Eingeständnisse bildend, reiche denn etwa Guldin's vielgerühmte Schwerpunktsbenutzung aus, jene Aufgabe zu bewältigen? Auch die ganze Schlussweise der Indivisibilien hatte Guldin bemängelt. Die Gesammtheit der Geraden einer Figur sei eine Unendlichkeit, die der Geraden einer zweiten Figur gleichfalls eine Unendlichkeit; zwischen Unendlichkeiten finde aber ein bestimmtes Verhältniss nicht statt. Ganz richtig, erwidert Cavalieri[2]), wenn einfach von Unendlichem die Rede ist, woher es nur immer stamme, unrichtig aber, wenn von Unendlichem gesprochen werde, welches mit Beziehung auf ein Endliches in Verhältnisse eingehe. Diese Bemerkung ist ungemein interessant, da sie zeigt, dass Cavalieri mit Bezug auf Unendlichgrosses denselben Unterschied zu machen wusste, der etwa zwischen einem Rechnen mit Differentialien und einem solchen mit Differentialquotienten besteht. Endlich bringt Cavalieri selbst eine Schwierigkeit zur Rede, die Guldin, wenn er denn doch die Methode der Indivisibilien bemängeln wollte, hätte hervorheben können, die ihm aber entgangen sei[3]) (Figur 155). Die zwei ungleichen rechtwinkligen Dreiecke ADH und GDH sollen mit der gemeinsamen Kathete DH aneinanderhängen. Zieht man KM und JL der Grundlinie AG parallel, so zeigt sich $KB = MF$, $JC = LE$, kurz jeder HD parallel gezogenen Geraden in ADH entspricht eine ihr gleiche in GDH; die Gesammtheiten derselben müssen also gleich sein, d. h. die ungleichen Dreiecke zugleich auch gleich sein. Das wäre doch wenigstens ein Einwurf von scheinbarer Gefährlichkeit gewesen, aber freilich auch nur scheinbar, weil die Geraden BK, CJ, DH nicht in derselben Entfernung von einander auftreten, wie die FM, EL, DH, was in der ersten Abhandlung[4]) ausdrücklich als nothwendig hervorgehoben sei (S. 841).

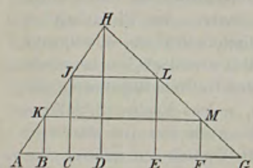

Fig. 155.

In den Indivisibilien, in den drei ersten Abhandlungen der Exercitationes war die Beweisführung eine ungewohnte, aber bis auf verhältnissmässig geringe Ausnahmen waren die Ergebnisse bereits be-

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 194—195. [2]) Ebenda pag. 202. [3]) Ebenda pag. 238—239. [4]) Ebenda pag. 17, Nr. XV.

kannt, und man konnte fast als Vorwurf äussern, was Cavalieri in der III. Abhandlung einmal zu Gunsten seiner Methode sagte[1]), man könne Alles, was er mit Hilfe von Indivisibilien zeige, auch in die Sprache Archimed's übersetzen, wenn man Umschweife nicht scheue. Wesentlich neu dagegen war der Inhalt der IV. Abhandlung. Wir haben (S. 837) gesagt, das was Cavalieri von der Gesammtheit der Quadrate eines Dreiecks behaupte, sei in den Zeichen heutiger Mathematik in Uebereinstimmung mit

$$\int_0^a \frac{kb^2x^2}{a^2}\,dx = \frac{kab^2}{3}.$$

In der gleichen Zeichensprache heisst der Gegenstand der IV. Abhandlung:

$$\int_0^a \frac{kb^nx^n}{a^n}\,dx = \frac{kab^n}{n+1}.$$

Cavalieri sprach die von ihm entdeckte Wahrheit zuerst 1639 als letzte Aufgabe seiner in Bologna gedruckten *Centuria di varii problemi per dimostrare l'uso e la facilita dei logaritmi nella Gnomonica, Astronomia, Geografia* aus. In den Exercitationes erzählt er dann[2]), wie er zu dem Satze gekommen sei. Eine Aufgabe aus Kepler's Doliometrie veranlasste ihn, die Gesammtheiten der vierten Potenzen der Geraden eines Parallelogrammes und des halb so grossen Dreiecks in Verhältniss zu setzen, wobei er $5:1$ fand. Er erinnerte sich, dass die Gesammtheiten der Geraden selbst und die ihrer Quadrate in den gleichen Figuren den Verhältnisszahlen $2:1$ und $3:1$ gehorchten. Um keine Lücke zu lassen, untersuchte er noch die Gesammtheiten der Würfel eben jener Geraden und fand ihr Verhältniss $4:1$, und nun begriff er bewundernd, *ita ut denique non sine magna admiratione comprehenderim*, dass jenes Zahlengesetz sich der natürlichen Zahlenreihe entsprechend fortsetze. Die Richtigkeit der Verallgemeinerung hat Cavalieri niemals bewiesen. Die ersten Einzelfälle dagegen sind von ihm streng durchgearbeitet worden. Er stützte sich dabei zum Theil auf folgende von ihm erkannte Identitäten[3]):

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$a^3 + b^3 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$a^4 + b^4 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 + 12\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 235. [2]) Ebenda pag. 243—244. [3]) Ebenda pag. 269—271.

Wir entnehmen ihm den Gang des Beweises für das Verhältniss 4 : 1 der Gesammtheiten der Würfel der Geraden im Parallelogramme und im Dreiecke[1]). Zunächst seien einige Zeichen erklärt, welche bei Cavalieri, wie wir fast überflüssigerweise bemerken, nicht vorkommen, deren wir uns aber zur Abkürzung bedienen wollen (Figur 156). Um die Summe der n^{ten} Potenzen aller Geraden in einer gegebenen Figur zu bezeichnen, schreiben wir das Summenzeichen vor die n^{te} Potenz einer Geraden und über das Summenzeichen die Figur, auf welche die Summirung sich bezieht. Mithin ist $\sum\limits^{ACDF} AF^3 =$ Summe der Würfel aller Geraden im Parallelogramme $ACDF$, und dafür kann man, weil im Parallelogramme die Geraden sich nicht ändern, auch $AF \cdot \sum\limits^{ACDF} AF^2$ schreiben. Ferner ist $\sum\limits^{ACF} NH^3 =$ Summe der Würfel aller Geraden im Dreiecke ACF u. s. w. Sind Producte wie $NH \cdot HE$ zu summiren oder ähnlich gebaute, deren erster Factor dem Dreiecke ACF, der zweite dem Dreiecke CDF angehört, so schreiben wir die Figur, über welche hier der erste, beziehungsweise der zweite Factor zu nehmen ist, oberhalb beziehungsweise unterhalb des Summenzeichens.

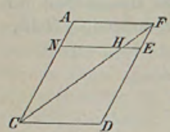

Fig. 156.

$\sum\limits^{ACF}_{CDF} NH \cdot HE^2$ bedeutet also: solche Producte $NH \cdot HE^2$ sollen durch das ganze Parallelogramm $ACDF$ derart gebildet werden, dass der lineare Factor immer dem Dreiecke ACF, der quadratische dem Dreiecke CDF angehört. Nach der Formel

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

ist nun leicht ersichtlich

$$\sum\limits^{ACDF} AF^3 = \sum\limits^{ACF} NH^3 + \sum\limits^{CDF} HE^3 + 3\sum\limits^{ACF}_{CDF} NH \cdot HE^2 + 3\sum\limits^{ACF}_{CDF} NH^2 \cdot HE.$$

Andererseits

$$\sum\limits^{ACDF} AF^3 = AF \sum\limits^{ACDF} AF^2,$$

und da

$$\sum\limits^{ACDF} AF^2 = 3 \sum\limits^{CDF} HE^2,$$

so ist ein zweiter Werth von

$$\sum\limits^{ACDF} AF^3 = 3AF \sum\limits^{CDF} HE^2 = 3\sum\limits^{ACDF}_{CDF} NE \cdot HE^2 = 3\sum\limits^{ACF}_{CDF} NH \cdot HE^2 + 3\sum\limits^{CDF} HE^3.$$

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 273—274.

Die beiden Werthe von $\sum\limits^{ACDF} AF^3$ sind einander gleichzusetzen, und das beiden gemeinsame $3\sum\limits^{ACF}_{CDF} NH \cdot HE^2$ fällt dabei weg. Es bleibt

$$3\sum\limits^{CDF} HE^3 = \sum\limits^{ACF} NH^3 + \sum\limits^{CDF} HE^3 + 3\sum\limits^{ACF}_{CDF} NH^2 \cdot HE.$$

Aber offenbar ist $\sum\limits^{ACF} NH^3 = \sum\limits^{CDF} HE^3$, diese Werthe können mithin auch auf beiden Seiten noch weggelassen werden, und man behält nur noch $\sum\limits^{CDF} HE^3 = 3\sum\limits^{ACF}_{CDF} NH^2 \cdot HE$. Wegen der vollständigen Symmetrie der Figur muss ebenso $\sum\limits^{CDF} EH^3 = 3\sum\limits^{ACF}_{CDF} NH \cdot HE^2$ sein. $\sum\limits^{CDF} HE^3 = \sum\limits^{ACF} HN^3$ haben wir bereits benutzt. $\sum\limits^{CDF} HE^3 = \sum\limits^{CDF} HE^3$ ist identisch wahr, und nunmehr lassen sämmtliche Glieder der ersten Entwickelung von $\sum\limits^{ACDF} AF^3$ sich durch $\sum\limits^{CDF} HE^3$ ersetzen, so dass man erhält:

$$\sum\limits^{ACDF} AF^3 = 4\sum\limits^{CDF} HE^3$$

und das ist der Satz, welcher bewiesen werden sollte.

Auch die V. Abhandlung, in welcher Cavalieri Guldin's eigenstes Gebiet der Schwerpunktsbestimmung betrat, enthält wesentlich Neues. Man hatte stets nur Schwerpunkte homogener Figuren und Körper, d. h. solcher von überall gleicher Dichtigkeit, untersucht. Cavalieri ging darüber einen wesentlichen Schritt hinaus. Er fragte nach dem Schwerpunkte solcher Gebilde, deren Dichtigkeit mit der Entfernung von einer gewissen Anfangsgrenze zunimmt, eine Frage, deren Gleichberechtigung mit den Untersuchungen eines Galilei und Torricelli über Ortsbewegung, mögen diese mit der Natur im Einklange stehen oder nicht, er beansprucht[1]). Man hat diese Aeusserung eines Schülers von Galilei auffallend gefunden, und sie wäre es in der That, wenn man nicht in Erwägung ziehen will, dass Cavalieri Ordensgeistlicher war, und dass man nach den Erfahrungen, welche man mit der Koppernikanischen Lehre gemacht hatte, nie wissen konnte, ob die Curie nicht auch in Galilei's mechanischen Gesprächen von 1638 noch Glaubensgefährliches wittern werde.

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 322.

Die VI. und letzte Abhandlung mit ihren aus verschiedenen Gebieten entlehnten Gegenständen weicht darin namentlich von der vorhergehenden ab, dass sie keine Indivisibilien anwendet. Wir wären daher berechtigt, mit Schweigen darüber hinwegzugehen, wollten wir nicht einer Aufgabe gegenüber eine Ausnahme machen, derjenigen von der Aufsuchung eines Punktes, dessen Entfernungen von drei gegebenen Punkten die kleinste Summe habe[1]). Cavalieri zeigt zunächst, dass, wenn die drei Punkte in einer Geraden liegen, der gesuchte Punkt derselben Geraden angehören müsse, und, wenn die Punkte Eckpunkte eines Dreiecks sind, der Ebene des Dreiecks. Er zeigt ferner, dass alsdann von dem gesuchten Punkte aus die drei Dreiecksseiten unter dem gleichen Winkel von 120° erscheinen.

Wir haben über die beiden Hauptwerke Cavalieri's ausführlich berichtet und uns, um den Gesammteindruck nicht zu stören, mit keiner Zwischenbemerkung über Grund oder Ungrund der gegen den Verfasser erhobenen Vorwürfe unterbrochen. Diese nothwendige Erörterung ist jetzt nachzuholen. Unzweifelhaft ist der Vorwurf auch nur der leisesten Anlehnung an Souvey ohne jede Begründung, da die von Cavalieri geltend gemachten Zeitdatirungen den schlagenden Gegenbeweis führen. Etwas anders steht es mit den Beziehungen Cavalieri's vielleicht auch Galilei's zu Kepler und dessen Doliometrie. Kepler und Galilei standen in Briefwechsel; sie verehrten sich gegenseitig Bücher, und wenngleich aus den erhaltenen Briefen nicht nachzuweisen ist, dass auch von dem Werke von 1615 ein Exemplar an den italienischen Fachgenossen geschenkweise gelangte, so ist doch beinahe ausgeschlossen, dass Galilei nicht von dem Werke gehört, und wenn er davon hörte, es nicht gelesen haben sollte, zumal, wie wir früher sahen, die Verbreitung der Doliometrie rasch vor sich ging. Nehmen wir weiter an, dass mit Galilei, vielleicht durch Galilei, auch Cavalieri das Buch kennen lernte, dass Beide über den Gegenstand mit einander verkehrten, so begreift sich die früher hervorgehobene beiderseitig gleichzeitige Beschäftigung mit den Indivisibilien, deren in Cavalieri's Briefen vorkommender Name (S. 832) Beiden geläufig gewesen sein muss. Warum Cavalieri Guldin gegenüber nicht ruhig zugab, was eigentlich schon in der Vorrede zu den Indivisibilien, wo von Kepler ausdrücklich die Rede ist, mittelbar eingestanden war? Man kann sich verschiedene Erklärungsversuche bilden. Cavalieri behauptet in jener Vorrede, die eigentliche Methode der Indivisibilien besessen zu haben, als er Kepler's Schrift

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 504—510.

und in ihr Beispiele zur Prüfung seiner Methode kennen lernte[1]). Vielleicht ist dieses buchstäblich wahr, wenn, wie wir als möglich aussprechen, Galilei es war, der Cavalieri die erste Anregung zu den neuen Untersuchungen gab. Vielleicht wollte Cavalieri nur Guldin kein Zugeständniss machen, weil dieser die geistige Beeinflussung als einen geistigen Diebstahl dargestellt hatte. Vielleicht war er sich selbst nicht ganz klar darüber, ob er Kepler etwas verdanke. Welchem Forscher wäre es nicht schon begegnet, dass ihm bei eifrigem, erfolgreichem Nachdenken über einen wissenschaftlichen Gegenstand aus dem Gedächtnisse entschwand, was ihn veranlasste, gerade diese Aufgabe zu behandeln? Das aber ist unter allen Umständen anzuerkennen, dass Cavalieri's Forschung von Erfolg begleitet war, dass er einen gewaltigen Schritt über Kepler hinaus machte. Nicht darin finden wir denselben, dass Kepler kleinste Raumelemente summirte, während Cavalieri nur von einer Gesammtheit sprach, zu welcher das betreffende Raumgebilde in einem Verhältnisse stehe. Dieser Unterschied ist mehr philosophisch als mathematisch. Wir sehen den Fortschritt von Kepler zu Cavalieri vielmehr in zwei Dingen. Erstens darin, dass Kepler's Raumelemente nicht immer einander parallel waren, während Cavalieri an dieser Grundbedingung festhielt. Zweitens darin, dass Cavalieri zu Gesammtheiten von Potenzen der Geraden überging. Gerade dieses Fortschrittes war Cavalieri sich deutlich bewusst. In der Vorrede zu den Indivisibilien macht er darauf aufmerksam, dass, wenn man ein Rechteck und das halb so grosse rechtwinklige Dreieck um die eine Rechtecksseite in Umdrehung versetzt denke, die beiden Körperräume, Cylinder und Kegel, im Verhältnisse von 3 : 1 stehen, und dass man dieses neuauftretende Verhältniss aus den Eigenschaften der sich drehenden Figuren zu entnehmen nicht im Stande sei. In der IV. Abhandlung der Exercitationes vollends zieht er die etwas gewagte Verallgemeinerung des Satzes in Betracht, er vergleicht Gesammtheiten irgend welcher Potenzen und ist der Bewunderung voll über das Ergebniss.

Dem Ursprunge eines anderen bei Cavalieri auftretenden Begriffes können wir leicht nachgehen. Wenn er der Ebene, die der Regula parallel sich fortschiebt, eine „fliessende“ Bewegung beilegte, so ist dieses offenbar Clavius (S. 556) oder Neper (S. 730) nachgebildet; aber ob Cavalieri wusste, wesshalb gerade dieses die Continuität der

[1]) *Cum ergo iam expositam metiendarum figurarum novam, ac, si dicere fas est, valde compendiosam methodum adinvenissem, foeliciter mecum actum esse existimavi, ut haec solida, praeter illa Archimedea, mihi suppeditarentur, circa quae illius vim ac energiam experiri liceret.*

Bewegung so deutlich schildernde Wort ihm in die Feder kam, vermögen wir nicht zu sagen.

Ein Zusammentreffen Cavalieri's mit einem anderen Mathematiker macht freilich grosse Schwierigkeit und wirft, je nachdem man es zu erklären sucht, unter Umständen einen solchen Makel auf einen sonst berühmten Schriftsteller, dass man zu einem Gesammturtheile über denselben sich nur schwer entschliessen kann. Wir haben (S. 839) gesehen, dass in den Indivisibilien von 1635 die Quadratur der Spirallinie durch eine Gleichsetzung des in Frage stehenden Flächenraumes mit einem Parabelabschnitte gefunden wird. Dieselbe gewiss nichts weniger als nahe liegende Methode findet sich in dem *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* des Gregorius von St. Vincentius und führt dort den besonderen Namen *Spiralis et parabolae symbolizatio*[1]). Es genügt nicht, auf das Druckjahr 1635 der Indivisibilien, auf dasjenige 1647 des grossen Werkes von Gregorius hinzuweisen, denn dieser Schriftsteller erzählt in der Vorrede zum ganzen Werke, dasselbe sei bis auf einen besonders genannten anderen Abschnitt schon 1625 vollendet gewesen; er wiederholt dann in der Einleitung zur Symbolizatio, er habe diese Methode 1625 in Rom dem Pater Christoph Grienberger mitgetheilt, welcher sein Mitschüler im Unterrichte durch Pater Clavius gewesen sei. Aber andererseits ist auch diese Erzählung nicht gegen jeden Zweifel gesichert, denn Grienberger war seit 1636 todt und konnte die auf ihn bezügliche Thatsache 1647 weder bestätigen noch Lüge strafen. Cavalieri dagegen starb im Erscheinungsjahre des Opus geometricum und kann dadurch an der Abwälzung des auf ihn geworfenen Verdachtes verhindert gewesen sein, er kann auch geschwiegen haben, weil er sich schuldig fühlte. Hier tritt also unvermittelt, und wie uns scheint, unvermittelbar das Dilemma zu Tage: entweder Gregorius hat eine geradezu lügenhafte Angabe gemacht, und dabei einen passenden Namen zu einer von Cavalieri herrührenden Methode erfunden, oder Cavalieri hat als sein Eigenthum vorgetragen, was er nicht erfand, was aber, weil dabei, wenn auch kreisförmig gekrümmte Indivisibilien, immerhin Indivisibilien in Anwendung kamen, sehr wohl seinem Geiste entstammt sein konnte. Oder will man den dritten Ausweg für möglich halten, dass beide Männer, jeder für sich, auf den fast sonderbar zu nennenden Einfall kamen? Wir verzichten darauf, für das Eine oder für das Andere oder für das Dritte uns zu entscheiden.

[1]) *Opus geometricum* pag. 664.

79. Kapitel.

Descartes. Fermat.

Wir wollten Cavalieri's Untersuchungen, welche man ähnlich wie die vorausgegangene Doliometrie Kepler's als Quadraturen und Kubaturen bezweckend bezeichnen wird, im Zusammenhange vortragen. Wir haben dadurch eine Anzahl von Jahren zwischen der ersten Ausgabe der Indivisibilien und dem Erscheinen der Exercitationes zunächst übersprungen, welche für die Geschichte der Infinitesimalbetrachtungen sehr fruchtbar waren. Kehren wir in die nächste Zeit nach 1635 zurück, zum Jahre 1637, dem Druckjahre der Geometrie des Descartes.

Dort ist zum ersten Male die Auflösung einer Aufgabe in die Oeffentlichkeit getreten, welche von nun an Jahrzehnte hindurch nicht aufgehört hat, die Mathematiker zu beschäftigen, der Tangentenaufgabe.

Descartes fasste sie etwas anders auf; für ihn war es die Normalenaufgabe[1]); er suchte solche Gerade, welche gegebene Curven oder, was ihm für das Gleiche gilt, deren Berührungslinien in gegebenen Punkten rechtwinklig durchschneiden. Er sagt eine allgemeine Auflösung dieser Aufgabe zu und scheut sich nicht, es auszusprechen, sie sei die nützlichste und allgemeinste nicht blos von denen, die er kenne, sondern die er jemals innerhalb der Geometrie zu kennen gewünscht habe[2]). Der Gedanke Descartes', wenn auch natürlich nicht der Wortlaut seiner Darstellung, ist folgender[3]) (Figur 157). Die Normale an die Curve AB mit der Gleichung $F(x, y) = 0$ im Punkte M sei MN. Um N als Mittelpunkt wird mit einem beliebigen Halbmesser r ein Kreisbogen beschrieben, welcher die gegebene Curve in den Punkten M_1 und M_2 schneidet. Diese Durchschnittspunkte muss man mit Hilfe der Curvengleichung einestheils, der Kreisgleichung anderntheils finden können, d. h. deren Ordinaten M_1P_1, M_2P_2 müssen als die Wurzeln einer quadratischen

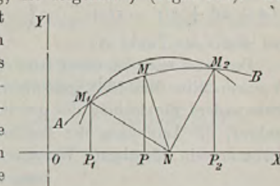

Fig. 157.

[1]) Descartes, Geom. I, 40 sqq. [2]) *Nec verebor dicere, Problema hoc, non modo eorum, quae scio, utilissimum et generalissimum esse; sed etiam eorum, quae in Geometria scire unquam desideraverim.* [3]) Schon Montucla II, 130—131 hat die Methode gut erfasst.

Gleichung sich ergeben, in welcher r gleichfalls vorkommt. Fallen die beiden Durchschnittspunkte M_1 und M_2 in M zusammen, d. h. wird der Kreis zum Berührungskreise, so bleibt die erwähnte quadratische Gleichung immer noch bestehen, aber mit zwei identischen Wurzeln. Die Bedingung dafür, dass solches stattfinde, muss darin bestehen, dass die linke Seite der Gleichung die Gestalt besitzt, welche aus der Multiplication von $y-e$ mit sich selbst hervorgeht[1]), also $y^2-2ey+e^2$, und dieses erzwingt man dadurch, dass r einen gewissen Werth annimmt. Kennt man diesen, so kennt man MN, also die gesuchte Normale.

Als Beispiel mag die Parabel $y^2=ax$ gewählt werden. Abscisse von N sei z, so ist die Gleichung des um N mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises $(x-z)^2+y^2=r^2$. Man ersetzt x durch $\frac{y^2}{a}$, so wird $\left(\frac{y^2}{a}-z\right)^2+y^2=r^2$, beziehungsweise

$$y^4-2\left(az-\frac{a^2}{2}\right)y^2=a^2(r^2-z^2),$$

folglich

$$y^2=az-\frac{a^2}{2}\pm a\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}-az},$$

und ein einziges positives y erscheint nur, wenn $r^2+\frac{a^2}{4}-az=0$, $r^2=az-\frac{a^2}{4}$ ist. Der Berührungskreis hat folglich die Gleichung $(x-z)^2+y^2=az-\frac{a^2}{4}$, während der Berührungspunkt als Punkt der Parabel die Gleichung $y^2=ax$ bedingt. Man erhält also als weitere Umformung

$$(x-z)^2+a(x-z)+\frac{a^2}{4}=\left(x-z+\frac{a}{2}\right)^2=0, \quad z=x+\frac{a}{2}$$

und damit den Punkt N.

Descartes blieb bei dieser Darstellung seiner Methode nicht stehen. In einem Mitte Mai 1638 geschriebenen Briefe deutete er noch eine etwas andere Einkleidung des gleichen Gedankens an[2]), d. h. des Gedankens, die Auffindung der Berührungslinie einer Curve mit dem Vorhandensein identischer Wurzeln einer Gleichung in Zusammenhang zu bringen (Fig. 158). Von der Berührungslinie MT als gegeben ausgehend zieht er von M noch nach einem anderen Punkte S der Abscissenaxe eine Gerade MS, und diese schneidet die Curve in einem Punkte M_1. Die Gleichung der Curve und die Lage von

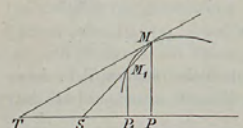

Fig. 158.

[1]) Descartes, Geom. I, 45 lin. 24—28. [2]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 62—64.

S auf der Abscissenaxe müssen genügen, um die beiden Ordinaten MP und M_1P_1 zu Wurzeln einer Gleichung zu machen, welche nur dann identisch werden, wenn S nach T fällt. So ist die Lage dieses Punktes, ähnlich wie in der Geometrie die von N, von dem Verschwinden einer gewissen Wurzelgrösse abhängig.

Descartes hat noch ein anderes Problem der Curvenlehre in seiner Geometrie und in nachgelassenen Papieren berührt, das der Rectification von Curven. In der Geometrie[1]) spricht sich Descartes in ganz negativer Weise über diese Aufgabe aus. Ein Verhältniss zwischen geraden und krummen Linien ist, sagte er, nicht bekannt und wird Menschen nicht bekannt werden. In seinem Nachlasse dagegen findet sich eine Methode[2]), um in beliebiger Annäherung zwar auch keine Rectification, aber das Entgegengesetzte derselben, eine Arcufication einer gegebenen Strecke zu liefern (Figur 159). Es handelt sich um die Auffindung des dem Quadrate $abkf$ isoperimetrischen Kreises. Zur Abkürzung und Vermeidung von Missverständnissen bezeichnen wir die Fläche eines Rechteckes durch zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte desselben mit einem Horizontalstriche darüber, so dass z. B. $\overline{bf}$ die Fläche von $abkf$ bedeutet. Nun suche man den Punkt c, welcher der Bedingung genüge:

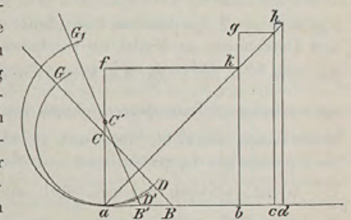

Fig. 159.

$$\frac{\overline{bf}}{4}=ac(ac-ab)=bg\cdot bc=\overline{cg}.$$

Ferner suche man den Punkt d, welcher der Bedingung genüge:

$$\frac{\overline{cg}}{4}=ad(ad-ac)=ch\cdot cd=\overline{dh}$$

u. s. w. ins Unendliche. Man nähert sich dabei einem Grenzpunkte t, dessen Entfernung at von a der Durchmesser des gesuchten Kreises wird. Zugleich ist auch die Summe der Flächeninhalte aller immer höher und schmaler werdenden Hilfsrechtecke bekannt. Sie ist mit Einschluss des ursprüngliches Quadrates

[1]) Descartes, Geom. I, 40. [2]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) XI, 442—443.

$$\overline{bf}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)=\frac{4}{3}\overline{bf}.$$

Die Construction der Punkte $c, d \ldots$ ist sehr einfach. Man halbirt ab in B, af in C und zieht BC bis zum Durchschnitte G mit dem um C als Mittelpunkt mit Ca als Halbmesser beschriebenen Kreise. Dann ist $BG \cdot BD = BG(BG-ab) = Ba^2 = \frac{\overline{bf}}{4}$ und folglich $BG = ac$. Weiter macht man $aB' = \frac{1}{2}aB$, $aC' = \frac{1}{2}ac$ und zieht $B'C'$ bis zum Durchschnitte G' mit dem um C' als Mittelpunkt mit $C'a$ als Halbmesser beschriebenen Kreise, so ist

$$B'G' \cdot B'D' = B'G'(B'G'-ac) = B'a^2 = \frac{\overline{bf}}{4^2}$$

und folglich $B'G' = ad$ u. s. w. Die Bedeutung der Annäherung endlich ist folgende. Es ist $ab = \frac{4ab}{4}$ Durchmesser des Kreises, dessen regelmässiges Tangentenviereck die Seite ab besitzt. Der Kreis mit dem Durchmesser ac besitzt ein regelmässiges Tangentenachteck von der Seite $\frac{ab}{2} = \frac{4ab}{8}$. Zu dem Kreise mit ad als Durchmesser gehört ein regelmässiges Tangentensechzehneck von der Seite $\frac{4ab}{16}$ u. s. w. Jeder neuen Länge entspricht, wenn man sie als Kreisdurchmesser wählt, ein regelmässiges Tangentenvieleck von 2^n Seiten, deren jede die Länge $\frac{4ab}{2^n}$ besitzt, wodurch augenscheinlich alle diese Tangentenvielecke isoperimetrisch werden, und die Gesammtlänge ihrer Seiten auf $4ab$ bringen. Bei wachsendem n ist aber das Tangentenvieleck von 2^n Seiten schliesslich vom Kreise selbst nicht mehr zu unterscheiden.

In dem Briefwechsel von Descartes sind da und dort noch manche Dinge enthalten, welche bei der damals allgemeinen Sitte, von der wiederholt die Rede war, Briefe bei Fachgenossen herumzuzeigen und mit Rücksicht darauf den Inhalt der eigenen Briefe genau zu überlegen, sie sogar aufzusetzen, als veröffentlicht gelten dürfen und darum als wissenschaftliches Eigenthum des Briefschreibers in fast gleicher Weise beansprucht werden müssen, als wenn sie im Drucke erschienen wären. Wir heben einige solcher Dinge hervor, welche der höheren Curvenlehre angehörend hier den richtigsten Platz finden, da sie mit Infinitesimalbetrachtungen eng verbunden sind.

Ein Brief vom 13. Juli 1638 enthält Schwerpunktsbestimmungen und Quadraturen von Parabeln verschiedener Ordnung und Kubaturen von deren Umdrehungskörpern[1]. Beweise giebt Descartes

[1]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 429—430.

nicht. Er meint die Mühe, sie niederzuschreiben, wäre zu gross, auch reiche die Mittheilung der Ergebnisse hin, weil Niemand zu denselben gelangen könne, ohne die Beweise zu kennen. Hat Descartes sich eigener Methoden bedient, ist er Cavalieri's Spuren nachgegangen? Wir möchten die letztere Vermuthung hegen, insbesondere dadurch unterstützt, dass auch eine andere Briefstelle auf den gleichen Schriftsteller als Quelle wird gedeutet werden müssen.

Wir meinen eine Stelle aus einem Briefe an Mersenne[1]) vom 27. Juli 1638. Er handelt von der Quadratur der Cycloide, und dort sagt Descartes, die Gleichheit zweier Figuren gehe schon daraus hervor, wenn sie gleiche Grundlinie und Höhe besitzen, und wenn alle Parallelen zur Grundlinie, die in beiden Figuren in gleicher Höhe gezogen werden, einander gleich seien, ein Satz, der vielleicht nicht von Jedem zugegeben wird, *un théorème qui ne serait peut-être pas avoué de tous*. Das klingt doch sehr, als wenn damals Descartes das VII. Buch der Indivisibilien, welches durchaus auf jenem Satze beruht, gekannt hätte.

Am 23. August theilte dann Descartes Mersenne auch die Tangentenconstruction bei der Cycloide[2]) mit. Auf diese Curve ist Galilei zuerst 1590 aufmerksam geworden[3]), und er hatte schon daran gedacht, ihre Quadratur zu ermitteln. Er gab ihr auch den Namen. Französische Gelehrte legten ihr andere Namen bei, den der Rolllinie, *Roulette*, den der *Trochoide*, und seit 1634 etwa hat die Curve Jahrzehnte lang nicht aufgehört, die Gelehrten Frankreichs, Italiens, Englands zu beschäftigen. Wir kommen auf die Geschichte dieser Cycloide später noch zurück; gegenwärtig kümmert uns nur die von Descartes in dem genannten Briefe gelehrte Tangentenconstruction (Figur 160). Descartes zeichnet die Mittellage des rollenden Kreises und von dem Cycloidenpunkte B aus, an welchen die Berührungslinie verlangt wird, die Gerade BN parallel zur Grundlinie bis zum Durchschnitte N mit jener Mittellage des Kreises. Dann verbindet er ND und zieht $BO \parallel ND$, welches die Normale an die Cycloide wird. Descartes' Beweis gründet sich auf die Eigenschaften

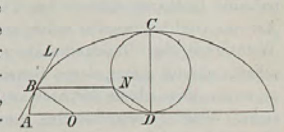

Fig. 160.

einer Curve, welche beim Rollen eines geradlinig begrenzten regel-

[1]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 113—118, besonders pag. 117 zweites Alinea. [2]) Ebenda VII, 88—90. [3]) Fabbroni, *Vitae Italorum doctrina excellentium qui saeculis XVII et XVIII floruerunt* (1778) II, 12. — Favaro, *Galileo Galilei e lo studio di Padova* I, 34.

mässigen Vielecks entsteht, und welche unverändert bleiben, wenn die Seitenzahl des Vielecks ins Unendliche wächst. Er setzt hinzu[1]), diese Curven seien mechanische, von welchen in der Geometrie abgesehen sei; daher sei nicht zu verwundern, dass die dort gegebenen Regeln zur Tangentenziehung bei ihnen den Dienst versagen.

In dem gleichen Briefe[2]) bespricht Descartes die Curve, deren Gleichung $x^3 + y^3 = nxy$ ist. Sie hat später den Namen des Cartesischen Blattes, *folium Cartesii*, erhalten und vermag dadurch Interesse zu erwecken, dass es vermuthlich eine der ersten, wenn nicht die erste Schleifenlinie ist, mit welcher man sich beschäftigt hat.

Am 12. September 1638 finden wir Descartes im Besitze einer neuen Curve[3]), der logarithmischen Spirale. Ihre Gleichung schreibt er allerdings nicht an, aber er weiss, dass die Berührungslinien mit den von dem Anfangspunkte aus nach den Berührungspunkten gezogenen Leitstrahlen gleiche Winkel bilden.

Endlich erwähnen wir noch eine Stelle[4]) eines Briefes vom 20. Februar 1639 an Florimond de Beaune. Dieser hat, wie wir uns erinnern (S. 820), Erläuterungen zu Descartes' Geometrie geschrieben, welche er schon 1639 dem Verfasser des erläuterten Werkes überschickte, denn in dem Briefe, von welchem wir gegenwärtig reden, ist warmer Dank für die mitgetheilten Anmerkungen, an denen nichts auszusetzen sei, ausgesprochen. De Beaune's Brief muss aber noch ein Weiteres enthalten haben, nämlich die Aufgabe: die Quadratur derjenigen Curve zu finden, bei welcher die Ordinate sich jedesmal zur Subtangente verhalte, wie eine gegebene Strecke zum Unterschiede der Ordinate und Abscisse[5]). Das war, wenn man die von Kepler behandelte Aufgabe über Kegelschnitte (S. 827) mitzählt, die zweite überhaupt gestellte inverse Tangentenaufgabe, aber von geschichtlich entschieden höherer Bedeutung als jene. Sie war nicht auf eine bestimmte Gruppe von Curven beschränkt, deren besondere Art nur ermittelt werden sollte, und vor Allem gab ihr der Umstand Wichtigkeit, dass Descartes sie zu würdigen wusste. Die Eigenschaft, schreibt dieser, deren Beweis Sie mir zuschicken, scheint mir so schön, dass ich sie der Archimedischen Quadratur der Parabel vorziehe. Jener untersuchte eine gegebene Curve, Sie bestimmen die Fläche einer nicht gegebenen Curve. Ich glaube nicht, dass es möglich ist, eine allgemeine Umkehrung meiner Tangentenregel oder derer, welcher Herr von Fermat sich bedient, und deren Anwendung in

[1]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 93—94. [2]) Ebenda VII, 94—97. [3]) Ebenda VII, 336—337. [4]) Ebenda VIII, 105 sqq. [5]) In der heute üblichen Bezeichnung $y : \frac{y}{y'} = a : (y - x)$ oder $a = (y - x)y'$.

manchen Fällen leichter als die der meinigen ist, zu finden. Dann geht Descartes auf einige Eigenschaften der De Beaune'schen Curven ein, auf ihre Asymptote u. s. w. Da man aber den Brief, welcher die Aufgabe und, dem Wortlaute der Antwort nach, auch zum mindesten einen Theil der Auflösung enthielt, nicht besitzt, so ist nicht zu unterscheiden, wie viel Descartes dem hinzufügte, was De Beaune schon gefunden hatte.

Was wir hier den nicht sofort gedruckten Arbeiten Descartes' zu entnehmen hatten, war keineswegs unwichtig und gereichte dem Erfinder zur hohen Ehre. Gleichwohl müssen wir unserer Anerkennung eine gewisse Einschränkung geben. Descartes zeigte sich als reich an Kunstgriffen, deren jeder einzelne für seine Genialität Zeugniss ablegt. Methodisch ist er, abgesehen von dem Grundgedanken der analytischen Geometrie und der Methode der unbestimmten Coefficienten, welche geometrisch keine Verwerthung durch ihn fand, nur bei der Auflösung der Tangentenaufgabe für algebraische Curven vorgegangen und an einen geistigen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Aufgaben, welche nachgerade eine höhere Mathematik darzustellen anfingen, hat er zunächst wenigstens nicht gedacht.

Dazu erhob sich erst Peter von Fermat. Wir haben (S. 816) gesehen, dass Fermat schon 1629 mit Maximal- und Minimalfragen sich beschäftigte, und dass er damals seine Methode einem Herrn Despagnet in Bordeaux mitgetheilt hat. Wollte man aber sagen, wozu nicht der leiseste Grund vorliegt, die Wahrheit dieser erst sieben Jahre später in einem Briefe an Roberval ausgesprochenen Zeitangabe sei dem Zweifel unterworfen, der Brief selbst ist vom 22. September 1636, mithin jedenfalls geschrieben, bevor Fermat von dem Inhalte der Descartes'schen Geometrie von 1637 Kenntniss haben konnte. Kaum war dieses Werk erschienen, so schickte Fermat gegen den 10. Januar 1638 durch Vermittelung von Mersenne seine Methode an Descartes und zwar vermuthlich in der lateinischen Niederschrift, welche später in den Varia Opera von 1679 als *Methodus ad disquirendum maximum et minimum* nebst den weiteren Aufsätzen über Tangenten und über Schwerpunkte, deren Ermittelung Fermat nur als einen Sonderfall der Bestimmung grösster oder kleinster Werthe betrachtet wissen wollte, veröffentlicht worden ist[1]). Später hat alsdann Fermat eine französische Bearbeitung[2]) des Tangentenproblems nachgeschickt, weil er entweder sich früher undeutlich ausgedrückt

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 63—73 und *Oeuvres* I, 133—179 unter Aufnahme mancher noch ungedruckter Stücke. [2]) Henry, *Recherches sur les manuscrits de Fermat* pag. 184—189 (*Bulletino Boncampagni* XII, 658—663).

oder Descartes die lateinische Ausdrucksweise falsch verstanden habe. Am Schlusse erklärt Fermat, er sei seit acht bis zehn Jahren im Besitze seiner Methode, und seit fünf bis sechs Jahren habe er sie verschiedenen Persönlichkeiten gezeigt. Demgemäss wäre als Datum der französischen Niederschrift etwa 1638 zu vermuthen, was auch damit übereinstimmt, dass die Tangente an die Curve $x^3 + y^3 = nxy$ gesucht wird, mit welcher Descartes im Sommer 1638 sich beschäftigte. Fermat hat seine Methode etwa folgendermassen geschildert:

Man setze in dem zu einem Maximum oder Minimum zu machenden Ausdrucke statt der Unbekannten A die Summe zweier Unbekannten $A + E$ und betrachte die beiden Formen als annähernd gleich, wie Diophant sage, *adaequentur, ut loquitur Diophantus.* Wir unterbrechen hier für einen Augenblick unseren Bericht, um hervorzuheben, dass Fermat mit jenen Worten auf die παρισότητος ἀγωγή des Diophant anspielt, von welcher dieser in der 12. und 14. Aufgabe seines V. Buches Gebrauch macht[1]). Damit gewinnen wir die zur Beurtheilung von Fermat's Geistesrichtung ungemein lehrreiche Erkenntniss, dass ihm auch die Infinitesimalbetrachtungen ein Ausfluss zahlentheoretischer Begriffsbildung waren. Ist die annähernde Gleichsetzung vollzogen, so streicht man auf beiden Seiten, was zu streichen ist und behält dadurch lauter mit E behaftete Glieder. Theilt man durch E und streicht alsdann wiederholt, *elidantur*, die E noch enthaltenden Glieder, so bleibt endlich die Gleichung übrig, welche den Werth von A liefert, der das Maximum oder Minimum hervorbringt.

In Zeichen geschrieben, welche Fermat und seine Zeit nicht kannten, heisst die Vorschrift, man solle A aus

$$\left[\frac{F(A+E) - F(A)}{E}\right]_{(E=0)} = 0$$

suchen oder aus

$$\frac{dF(A)}{dA} = 0.$$

Das erste Beispiel Fermat's verlangt B in zwei Theile zu zerlegen, welche das grösste Product geben, die erste Annahme wählt die Theile A und $B - A$, die zweite $A + E$ und $B - A - E$. Man muss also $A(B - A) = (A + E)(B - A - E)$ setzen oder

$$0 = E(B - 2A - E).$$

Nach Division durch E entsteht $B = 2A + E$. Nun *elidatur* E, so bleibt $2A = B$, $A = \frac{1}{2}B$.

[1]) *Diophant* (deutsch von Wertheim), S. 214.

Eine zweite Aufgabe[1]) verlangt $A^2(B - A)$ zu einem Maximum zu machen. Die aufeinander folgenden Schritte der Auflösung sind:

$$A^2(B - A) = (A + E)^2(B - A - E);$$
$$E(2AB - 3A^2 + BE - 3AE - E^2) = 0;$$
$$2AB - 3A^2 + E(B - 3A - E) = 0;$$
$$2AB - 3A^2 = 0; \quad A = \frac{2}{3}B.$$

Als drittes Beispiel[2]) entnimmt Fermat aus Pappus die Aufgabe[3]), (Figur 161) eine Strecke OD, auf welcher zwei Punkte M, J gegeben sind, in N so zu theilen, dass $\frac{ON \cdot ND}{MN \cdot NJ}$ ein Minimum werde. Fermat setzt $OM = B$, $MD = Z$, $MJ = G$, $MN = A$. Zum Minimum soll also $\frac{(B + A)(Z - A)}{A(G - A)}$ werden. Hier sind die einzelnen Schritte:

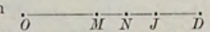

Fig. 161.

$$\frac{(B + A)(Z - A)}{A(G - A)} = \frac{(B + A + E)(Z - A - E)}{(A + E)(G - A - E)};$$
$$(B+A)(Z-A)(A+E)(G-A-E) = (B+A+E)(Z-A-E)A(G-A);$$
$$E[BZ(G-E) + (BE + EG - EZ - 2BZ)A + (G + B - Z)A^2] = 0;$$
$$BZ(G - E) + (BE + EG - EZ - 2BZ)A + (G + B - Z)A^2 = 0;$$
$$(Z - B - G)A^2 + 2BZA = BGZ,$$

woraus endlich der Werth von A zu finden sei. Derselbe werde in Uebereinstimmung mit der Behauptung von Pappus der Proportion genügen: $OM \cdot MD : OJ \cdot JD = MN^2 : NJ^2$. In der That schreibt sich diese Proportion mittels der eingeführten Abkürzungen

$$BZ : (B + G) \cdot (Z - G) = A^2 : (G - A)^2,$$

und aus dieser folgt Fermat's Gleichung.

Auf eine Begründung des Verfahrens darf man freilich sich nicht Rechnung machen, und noch zwei Schwierigkeiten entgingen Fermat's Beachtung, wie es scheinen möchte. Er unterschied nicht zwischen grössten und kleinsten Werthen. Er wusste nicht, dass der erste Differentialquotient den Werth Null annehmen kann, ohne dass ein Maximum oder Minimum stattfände.

Einige dieser Maximalaufgaben Fermat's und zugleich einige seiner Tangentenbestimmungen sind durch Hérigone in dem *Supplementum Cursus mathematici* in beiden Auflagen, der von 1642 und der von 1644, im Drucke veröffentlicht worden[4]). Wir wollen Fer-

[1]) *Varia Opera* pag. 66. *Oeuvres* I, 140. [2]) *Varia Opera* pag. 67. *Oeuvres* I, 142. [3]) Pappus (ed. Hultsch), pag. 756—758. Liber VII propositio 61. [4]) Fermat, *Oeuvres* I, 171 Note 1. Auch Montucla II, 117 hat auf diesen Abdruck aufmerksam gemacht.

mat's Verfahren bei Lösung der Tangentenaufgabe wieder in die Sprache späterer Mathematiker kleiden.

Sei $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer Curve, ihre *proprietas specifica*, wie Fermat sich ausdrückt. Sei M der Berührungspunkt mit den Coordinaten $x \mid y$ und P der Fusspunkt seiner Ordinate. Sei endlich MT die Berührungslinie, PT mithin die Subtangente A, auf deren Auffindung es ankommt. Ein M benachbarter Curvenpunkt M' mit den Coordinaten $x' \mid y'$ besitze den Fusspunkt P' der Ordinate, und P' stehe von P nur um das Stückchen E ab. Weil $x \mid y$ und $x' \mid y'$ Curvenpunkte sind, muss $F(x, y) = 0$ und $F(x', y') = 0$ sein. Ausserdem kann aber M' auch als Punkt der MT aufgefasst werden, so dass $\triangle MPT \sim \triangle M'P'T$, und aus dieser Aehnlichkeit folgen Beziehungen zwischen x', y', E, x, y, A, welche, wenn man $F(x, y) = F(x', y') = 0$ mit berücksichtigt, eine neue Gleichung $\Phi(x, y, E, A) = 0$ entstehen lassen, bei welcher E als Factor hervortritt. Durch ihn dividirt man die Gleichung, lässt sodann die Glieder weg, welche nach vollzogener Division noch E enthalten, und gewinnt so endlich $A = f(x, y)$.

Im einzelnen Falle nimmt das Verfahren, ohne dass der Grundgedanke sich änderte, mitunter einen etwas verschiedenen Gang, wie wir an dem Beispiele der Cissoide[1]) kennen lernen wollen (Figur 162). Damit an den Punkt H der Cissoide die Berührungslinie HF gezogen werden könne, soll $DF = A$ berechnet werden. Als bekannt wird vorausgesetzt $AD = Z$, $DG = N$, $DH = R$, und angenommen ist $DE = E$. *Ex proprietate specifica cissoidis* weiss man 1) $MD : DG = DG : DH$ und ähnlicherweise muss 2) $NE : EG = EG : EO$ sein. Weil aber O auch als Punkt der HF zu betrachten ist, muss weiter stattfinden 3) $EO : EF = DH : DF$. Folgert man aus diesen Proportionen unter nachmaliger Einführung der angegebenen Abkürzungen Gleichungen, denen wir die gleichen Ordnungsziffern geben, wie die Proportionen, aus welchen sie abgeleitet sind, sie führen, so ist 1) $DM \cdot DH = DG^2$; $MD^2 \cdot DH^2 = DG^4$; $AD \cdot DG \cdot DH^2 = DG^4$; $AD \cdot DH^2 = DG^3$ oder endlich 1′) $ZR^2 = N^3$. Ferner ist 3) $EO = \frac{DH \cdot EF}{DF}$ oder 3′) $EO = \frac{R(A - E)}{A}$. Weiter hat man 2)

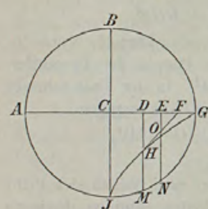

Fig. 162.

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 69—70. *Oeuvres* I, 159—161.

$$NE \cdot EO = EG^2;\ NE^2 \cdot EO^2 = EG^4;\ AE \cdot EG \cdot EO^2 = EG^4;$$
$$AE \cdot EO^2 = EG^3$$

oder unter Benutzung von 3′) auch $(Z + E)\frac{R^2(A - E)^2}{A^2} = (N - E)^3$, beziehungsweise

$$2') \ A^2R^2Z + (A^2R^2 - 2AR^2Z)E + (R^2Z - 2AR^2)E^2 + R^2E^3$$
$$= A^2N^3 - 3A^2N^2E + 3A^2NE^2 - A^2E^3.$$

Wegen 1′) fallen die ersten Glieder auf beiden Seiten von 2′), nämlich $A^2R^2Z = A^2N^3$, weg. Dann zeigt sich der Factor E, durch welchen dividirt werden muss, und es entsteht:

$$A^2R^2 - 2AR^2Z + (R^2Z - 2AR^2)E + R^2E^2$$
$$= -3A^2N^2 + 3A^2NE - A^2E^2.$$

Man elidirt wieder die mit E behafteten Glieder, so bleibt nur noch $A^2R^2 - 2AR^2Z = -3A^2N^2$ oder

$$(R^2 + 3N^2)A^2 = 2R^2ZA \quad \text{und} \quad A = \frac{2R^2Z}{R^2 + 3N^2}.$$

Nun benutzt man wieder 1′) $ZR^2 = N^3$ und gewinnt dadurch

$$A = \frac{2R^2Z \cdot Z}{R^2Z + 3N^2Z} = \frac{2N^3Z}{N^3 + 3N^2Z} = \frac{2NZ}{N + 3Z}.$$

Man könnte begierig sein, zu erfahren, ob Fermat, der bei Anwendung seiner Methode auf die Cissoide Wurzelgrössen aus dem Wege gehen musste, aber auch ihnen aus dem Wege zu gehen wusste, bei nichtalgebraischen Curven einen Ausweg kannte, wo Descartes (S. 856) das Unvermögen seine Methode anzuwenden eingestand. Bei der Cycloide[1]) tritt dieser Vorzug des Fermat'schen Verfahrens in ein helles Licht (Figur 163). Von dem Berührungspunkte R der Cycloide geht die Berührungslinie RB und die zur Grundlinie parallel gezogene RD aus, beide bis zum Durchschnitte mit dem senkrechten Durchmesser des rollenden Kreises in der Lage, wo der obere Endpunkt dieses Durchmessers zugleich Höhepunkt der Cycloide ist. Die RD schneidet jene Mittellage des erzeugenden Kreises in M, und dort ist die Berührungslinie MA an den Kreis gezeichnet. Ausser-

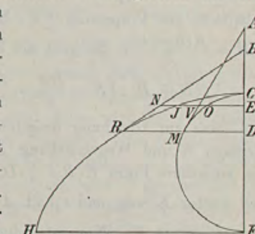

Fig. 163.

[1]) Fermat, *Varia Opera* 71—72. *Oeuvres* I, 162—165.

dem ist von dem nahe bei D gelegenen Punkte E aus die EN parallel zur Grundlinie gezogen. Proprietas specifica der Cycloide ist $RD = \text{arc } CM + MD$, eine Behauptung, von deren Wahrheit man sich leicht überzeugt. Nach heutiger Schreibweise ist, wenn P die Bezeichnung des Fusspunktes der Ordinate von R giebt und $HP = x$, $CF = 2r$, arc $MF = r\alpha$ gesetzt wird, $x = r\alpha - r \cdot \sin\alpha$. Mithin ist

$$RD = HF - x = r(\pi - \alpha) + r \cdot \sin\alpha.$$

Dabei ist aber $r(\pi - \alpha) = \text{arc } CM$, $r \cdot \sin\alpha = MD$, also die Fermat'sche Gleichungsform hergestellt. Die Abkürzungen, deren Fermat sich bedient, sind $DB = A$, $DE = E$ (wie immer), $DA = B$, $MA = D$ $MD = R$, $RD = Z$, arc $COM = N$. Die erste Gleichung heisst also 1) $Z = N + R$. Ferner ist

$$NE = \text{arc } CO + OE = \text{arc } CM - \text{arc } MO + OE,$$

und bei der Kleinheit von DE fällt arc MO mit dem Tangentenstück MV und zugleich OE mit VE zusammen. Es ist also

$$NE = N - MV + VE.$$

Da aus der Aehnlichkeit von Dreiecken $RD : NE = DB : EB$ folgt, so ist unter Einführung der schon gewonnenen Werthe

$$2)\quad (N + R) : (N - MV + VE) = A : (A - E).$$

Aber MV entspricht der Proportion $MV : MA = DE : DA$ und ist folglich $MV = \frac{D \cdot E}{B}$. Die andere noch auszurechnende Strecke VE entspricht der Proportion $VE : MD = AE : DA$ und ist demnach $VE = \frac{R(B - E)}{B}$. So geht die Proportion 2) über in

$$(N + R) : \left(N - \frac{DE}{B} + \frac{R(B - E)}{B}\right) = A : (A - E)$$

und diese zur Gleichung umgebildet liefert nach Wegschaffung des Nenners B und Wegstreichung gleicher Grössen auf beiden Seiten die einfachere Form $E(RA + DA - BN - BR) = 0$. Man lässt den Factor E weg und erhält $A = \frac{B(N + R)}{R + D} = \frac{BZ}{R + D}$ unter Mitbenutzung von 1). Nun ist beim Kreise nicht schwer zu beweisen, dass die Verbindungsgerade MC den Winkel AMD halbirt, dass also $AM : DM = AC : CD$. Daraus folgt $AM : AC = DM : CD$, ferner

$$(AM + MD) : (AC + CD) = DM : CD$$

oder $(AM + MD) : AD = DM : CD$ und $\frac{AD}{AM + MD} = \frac{CD}{MD}$, d. h. $\frac{B}{D + R} = \frac{CD}{MD}$, mithin $A = \frac{CD \cdot RD}{MD}$ oder $MD : CD = RD : BD$ und das findet statt, wenn $RB \parallel MC$. Ersichtlich steht auf der MC

die MF senkrecht. Dieser letzteren wird also die Normale an die Cycloide in R parallel laufen müssen, und das ist die Construction von Descartes, von welcher folglich die Fermat's nur als eine Umformung zu betrachten ist. Nach der Cycloide spricht Fermat noch von der Conchoide[1]) und bemerkt, sie habe einen Inflexionspunkt auf jeder Seite. Solche *puncta inflexionum* besitzen, behauptet er, die Eigenschaft, dass in ihnen der von der Berührungslinie mit der Abscissenaxe gebildete Winkel ein Minimum sei, wie man leicht beweisen könne, *ut facile est demonstrare*. Wegen Rückbeziehungen im 89. Kapitel ist es zweckmässig zu bemerken, dass Fermat's Abhandlung erst 1679 im Druck erschien.

In der französischen Darstellung, welche wir vermuthungsweise in das Jahr 1638 verwiesen haben, ging Fermat in der Anwendung der gleichen Buchstaben für gleiche geometrische Dinge noch einen Schritt weiter. Er setzte[2]) nicht bloss (Figur 164) ein für alle Mal die Subtangente $BD = A$, die Entfernung der Ordinate des Berührungspunktes von der benachbarten Ordinate $BF = E$, sondern auch die Ordinate des Berührungspunktes $BA = B$ und seine Abscisse $CB = D$. Der Fusspunkt F der benachbarten Ordinate hat demnach die Abscisse $D - E$ und sie selbst bis zum Durchschnittspunkte mit der Berührungslinie gehorcht der Proportion $FE : (A - E) = B : A$, ist also regelmässig $FE = \frac{AB - BE}{A}$ und wird immer so, wie hier geschehen, genannt werden[3]). Ist dieses geschehen, fährt Fermat fort, so ist gewiss, dass der Punkt E der EF, weil er auf der Tangente liegt, ausserhalb der Curve sich befinden wird, und daher wird die FE grösser oder kleiner als die bis zur Curve reichende, von F ausgehende Ordinate[4]). Sie ist grösser, wenn die Curve nach aussen gewölbt ist, *convexe en dehors*, kleiner, wenn die Curve nach innen gewölbt ist, *convexe en dedans*, denn die Regel genügt für alle Curven und bestimmt mit Hilfe der Gleichung der Curve, *par la propriété de la courbe*, nach welcher Seite hin sie gewölbt ist. Wenn nun auch die FE der von F bis zur Curve gezogenen Ordinate ungleich ist, so betrachte ich sie nichtsdestoweniger als ihr gleich und vergleiche sie

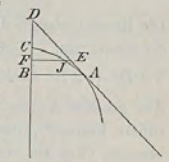

Fig. 164.

[1]) Fermat, *Varia Opera* 73. *Oeuvres* I, 166. [2]) Henry l. c. pag. 184 (XII, 658). [3]) *Et de quelque nature que soit la courbe nous donneront toujours les mêmes noms aux lignes CF et FE que nous venons de leur donner.*

[4]) Fermat sagt überall *l'appliquée*, aber wir ziehen im Texte den jetzt gebräuchlichen Namen vor.

folglich durch annähernde Übereinstimmung, *par adaequation*, mit der aus der Curvengleichung ermittelten FJ. Nach der Ableitung des allgemeinen Werthes von FE und der Erläuterung seiner eigentlichen Methode zeigt Fermat deren Anwendung[1]) auf die Descartes'sche Curve $B^3 + D^3 = NBD$. Statt $CF^3 + FJ^3 = N \cdot CF \cdot FJ$ wird näherungsweise richtig $CF^3 + FE^3 = N \cdot CF \cdot FE$ gesetzt, d. h.

$$(D - E)^3 + \left(\frac{AB - BE}{A}\right)^3 = N(D - E)\,\frac{AB - BE}{A}.$$

Unter Wegschaffung der Brüche wird dann ausmultiplicirt und links $A^3B^3 + A^3D^3$ gegen rechts NA^3BD weggelassen. Weiter wird durch E dividirt, und dann erscheint

$$-3A^3D^2 - 3A^2B^3 + E(3A^3D + 3AB^3 - A^3E - B^3E)$$
$$= -NA^2BD - NA^3B + NA^2BE.$$

Die Regel verlangt, Alles was noch mit E behaftet blieb, wegzulassen. So erhält man $-3A^3D^2 - 3A^2B^3 = -NA^2BD - NA^3B$, daraus $3AD^2 + 3B^3 = NBD + NAB$ und endlich $A = \frac{NBD - 3B^3}{3D^2 - NB}$.
Als grossen Vorzug seiner Methode gegenüber der von Descartes rühmt Fermat[2]), dass er die ursprüngliche Curvengleichung sofort benutze, ohne sie, was grosse Schwierigkeiten haben könne, und verwickelte Wurzelausziehungen erheische, nach der Ordinate aufzulösen. Dass man auch inverse Tangentenaufgaben stellen könne, bemerkt Fermat gleichfalls, spricht sich aber nicht über die Möglichkeit der Lösung solcher Aufgaben aus[3]).

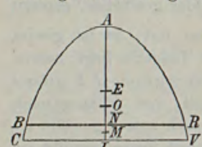

Fig. 165.

In der lateinischen Bearbeitung, welche, wie wir wissen, älter ist und nach einer und derselben Methode Maximalaufgaben und Tangentenaufgaben umfasst, ist noch eine dritte Gattung von Aufgaben behandelt, die der **Schwerpunktsbestimmung eines Umdrehungsparaboloides**[4]) (Figur 165). Das Paraboloid sei durch Umdrehung der Parabel CAV um ihre Axe AJ erzeugt, ein anderes wenig kleineres durch Umdrehung der Parabel BAR um AN, wobei $NJ = E$ ist. Der Schwerpunkt des ersteren Paraboloides sei in O, der des zweiten in E, und $AO = A$. Ausserdem sei $AJ = B$. Fermat dehnt nun

[1]) Henry l. c. pag. 185—186 (XII, 659—660). [2]) Ebenda pag. 188—189 (XII, 662—663). [3]) Ebenda pag. 189 (XII, 663): *On pourrait de suite chercher la converse de cette proposition, et la propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe, à qui cette propriété doit convenir.* [4]) *Varia Opera* pag. 65—66. *Oeuvres* I, 136—139.

einen von Archimed für die Parabel bewiesenen Satz[1]) ohne Weiteres auf das Paraboloid aus, den Satz, dass die Schwerpunkte ähnlicher Paraboloide deren Axen in gleichem Verhältnisse theilen, dass also hier $AO : AE = AJ : AN$ oder in den Abkürzungen $A : (A - OE) = B : (B - E)$, woraus $OE = \frac{A \cdot E}{B}$. Die Körperräume der beiden Paraboloide stehen im Verhältnisse der Quadrate ihrer Axen oder

$$\text{vol. } CAV : \text{vol. } BAR = AJ^2 : AN^2 = B^2 : (B - E)^2,$$

woraus weiter

$$(\text{vol. } CAV - \text{vol. } BAR) : \text{vol. } BAR = (B^2 - (B - E)^2) : (B - E)^2.$$

Der Unterschied vol. CAV — vol. BAR stellt aber den Umdrehungskörper von $CBRV$ dar, und dessen Schwerpunkt mag in M liegen. Vereinigen sich die Umdrehungskörper von $CBRV$ und von BAR, so liegt deren gemeinsamer Schwerpunkt O von den einzelnen Schwerpunkten M und E derart entfernt, dass die Entfernungen den Körperinhalten selbst umgekehrt proportional sind, d. h.

$$OM : OE = \text{vol. } BAR : \text{vol. } CBVR = (B - E)^2 : (2BE - E^2)$$

und

$$OM = \frac{(B - E)^2}{2BE - E^2} \cdot EO = \frac{(B - E)^2 \cdot A \cdot E}{(2BE - E^2) \cdot B},$$

indem man den vorher gefundenen Werth von OE einführt. Je kleiner E angenommen wird, um so näher muss M an J heranrücken, während allerdings genau gesprochen $OM < OJ$ bleibt; OJ selbst ist $= B - A$. In angenäherter Gleichung ist aber $B - A = \frac{(B - E)^2 \cdot A \cdot E}{(2BE - E^2)B}$, und nun verfährt man nach der oft benutzten Regel. Wegschaffung des Bruches, Umstellung einiger Glieder, Division durch E liefert

$$2B^3 - B^2E + 3ABE = 3AB^2 + AE^2.$$

Endlich lässt man fort, was noch E enthält und hat nur noch $2B^3 = 3AB^2$, mithin $A = \frac{2}{3}B$.

Wir haben uns soweit mit Fermat's Untersuchungen, welche nach heutigem Sprachgebrauche Anwendungen der Differentialrechnung zu nennen sind, beschäftigt. Wir müssen seine Spuren auch in der Integralrechnung verfolgen. Er hat hier der Aufgabe der Quadratur und der Rectification von Curven sich zugewandt.

Ein vor 1644 durch Vermittelung von Mersenne an Cavalieri geschicktes Schriftstück[2]), welches als Beantwortung Cavalieri-

[1]) *De planorum aequilibriis* Liber II, propos. 7 in Archimed (ed. Heiberg) II, 210. [2]) Fermat, *Oeuvres* I, 195—198.

scher Fragen bezeichnet ist und demgemäss wohl in einem gewissen Zusammenhange mit der IV. Abhandlung von Cavalieri's Exercitationes (S. 845) gestanden haben muss, wenn Cavalieri dort den Namen Fermat's auch nicht genannt hat, giebt ohne Beweis Quadraturen von Parabeln verschiedener Ordnung und Kubaturen von Umdrehungskörpern derselben, sowie Schwerpunktsbestimmungen eben dieser Körper. Theoretisch ungleich bedeutsamer ist Fermat's Aufsatz *Proportionis Geometricae in quadrantis infinitis parabolis et hyperbolis usus*[1]) für die Lehre von den Quadraturen.

Fermat gründet sie auf einen sehr einfachen Satz von unendlichen geometrischen Progressionen mit fallenden Gliedern. Eine solche besitze die Summe S, das Anfangsglied c und das zweite Glied cq mit $q < 1$, dann ist $(c - cq) : cq = c : (S - c)$ oder in Worten: Die Differenz der beiden ersten Glieder, aus welchen man das Gesetz der Progression ersieht, *differentia terminorum progressionem constituentium*, verhält sich zum zweiten Gliede wie das erste zur Summe aller nachfolgenden. Die Wahrheit des Satzes folgt aus $S = \frac{c}{1-q}$. Sei nun eine auf zwei zu einander senkrechte Asymptoten bezogene Hyperbel irgend welcher Ordnung gegeben, worunter Fermat erklärt verstehen zu wollen, dass irgend welche Potenzen der Abscissen sich umgekehrt wie irgend welche Potenzen der Ordinaten verhalten, mithin Curven mit Gleichungen wie $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$. Im besonderen Falle soll $y = \frac{a^3}{x^2}$ sein. Die Aufgabe besteht darin, die zwischen der Curve und ihrer Asymptote gelegene Fläche zu messen. Fermat zerlegt dazu diese Fläche in gemischtlinige Viereckchen, welche klein genug sind, um als Rechteckchen betrachtet zu werden, als deren

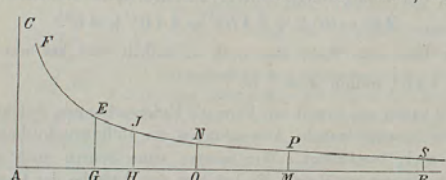

Fig. 166.

Höhe jeweils die links als Grenze dienende Ordinate gilt, und welche überdies einzeln genommen eine fallende geometrische Reihe darstellen, damit der obige Hilfssatz Anwendung finden könne. Solches

[1]) *Varia Opera* pag. 44—57. *Oeuvres* I, 255—285.

geschieht, indem man die Grundlinien der ihrer Höhe nach rasch abnehmenden Rechteckchen zunehmen lässt. Die Zunahme erfolgt nach Maassgabe eines zweiten hier einzuschaltenden Hilfssatzes: Heisst eine steigende geometrische Progression b, $b(1+\alpha)$, $b(1+\alpha)^2$ u. s. w., so ist die Differenz irgend zweier unmittelbar auf einander folgender Glieder das α-fache des kleineren der beiden Glieder oder

$$b(1+\alpha)^{r+1} - b(1+\alpha)^r = \alpha \cdot b(1+\alpha)^r.$$

Nun seien (Figur 166) die von A aus gemessenen Abscissen die Glieder einer solchen Reihe $AG = x$, $AH = x(1+\alpha)$, $AO = x(1+\alpha)^2$, $AM = x(1+\alpha)^3$, $AR = x(1+\alpha)^4$ u. s. w. Unter Anwendung des eben ausgesprochenen Satzes und unter Auswerthung der Ordinaten EG, JH, NO, PM, SR u. s. w. findet man:

$$\begin{array}{lll} GH = \alpha x, & EG = \frac{a^3}{a^2}, & GH \cdot EG = \frac{\alpha a^3}{x}, \\ HO = \alpha x(1+\alpha), & JH = \frac{a^3}{x^2(1+\alpha)^2}, & HO \cdot JH = \frac{\alpha a^3}{x(1+\alpha)}, \\ OM = \alpha x(1+\alpha)^2, & NO = \frac{a^3}{x^2(1+\alpha)^4}, & OM \cdot NO = \frac{\alpha a^3}{x(1+\alpha)^2}, \\ MR = \alpha x(1+\alpha)^3, & PM = \frac{a^3}{x^2(1+\alpha)^6}, & MR \cdot PM = \frac{\alpha a^3}{x(1+\alpha)^3}, \end{array}$$

u. s. w.

Jedes folgende Rechteckchen ist mithin das $\frac{1}{1+\alpha}$ fache des vorhergehenden und der erste am Anfang ausgesprochenn Hilfssatz ist anwendbar; man hat nur $c = \frac{\alpha a^3}{x}$ und $q = \frac{1}{1+\alpha}$ zu setzen, dann bedeutet S die bei EG beginnende Fläche. Die Proportion lautet alsdann

$$\left(\frac{\alpha a^3}{x} - \frac{\alpha a^3}{x(1+\alpha)}\right) : \frac{\alpha a^3}{x(1+\alpha)} = \frac{\alpha a^3}{x} : \left(S - \frac{\alpha a^3}{x}\right)$$

und aus ihr folgt $S = \frac{a^3}{x}(1+\alpha)$. Die beanspruchte Möglichkeit, die gemischtlinigen Viereckchen als Rechtecke betrachten zu dürfen, nöthigt aber dazu, nicht etwa $\alpha = \frac{1}{2}$ zu wählen, wie es um der deutlicheren Zeichnung willen in unserer Figur geschah, sondern α so klein zu nehmen als man immer kann, und dann wird $S = \frac{a^3}{x}$, indem $\frac{\alpha a^3}{x}$ verschwindet, *evanescit et abit in nihilum*.

Neben Hyperbeln irgend welcher Ordnung werden auch beliebige Parabeln der Quadratur unterworfen. Das Musterbeispiel ist die semicubische Parabel[1]) (Figur 167), deren Definition in der

[1]) *Varia Opera* pag. 48. *Oeuvres* I, 263.

Proportion $AB^3 : JE^3 = BC^2 : EC^2$ enthalten ist. Die Curve erscheint bei Fermat gegen die Axe CB concav, während gewöhnlich C zwar auch Anfangspunkt ist, aber CD als Axe der Curve gilt, gegen welche dieselbe alsdann convex erscheint. Fermat verfährt wie folgt, wenn wir seinen Schlussfolgerungen genau nachgehen und nur die Bezeichnung etwas übersichtlicher machen. Er nimmt auf BC verschiedene Punkte, deren Entfernungen von C in der Weise abnehmen, dass sie eine fallende geometrische Reihe bilden, und die so nahe bei einander liegen, dass gemischtlinige Vierecke wie $ABEJ$, wie $EJNO$ noch als Rechtecke von den Seiten AB und BE, beziehungsweise JE und EN betrachtet werden dürfen. Indem er also etwa $BC = a$, $VC = aq$, $RC = aq^2$, $\ldots NC = aq^6$ ansetzt, nimmt er zwar $q < 1$, aber nur sehr wenig von 1 verschieden. Unter Benutzung dieser Werthe erkennt man sofort die Richtigkeit der Proportion $BC^2 : EC^2 = BC^3 : RC^3$ (d. i. $a^2 : a^2 q^6 = a^3 : a^3 q^6$). Es war aber $BC^2 : EC^2 = AB^3 : JE^3$, mithin ist

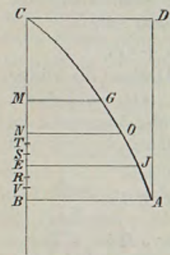

Fig. 167.

$$AB^3 : JE^3 = BC^3 : RC^3 \text{ und 1) } AB : JE = BC : RC.$$

Ferner finden noch zwei Proportionen statt

2) $BE : EN = BC : EC$ (d. i. $(a - aq^3) : (aq^3 - aq^6) = a : aq^3$)

und

3) $BC : EC = RC : TC$ (d. i. $a : aq^3 = aq^2 : aq^5$).

Aber auch zwischen den Rechteckchen $ABEJ$ und $JENO$ findet eine Proportion statt, welche unter allmähliger Anwendung von 1), 2), 3) folgende Gestalt annimmt:

$$ABEJ : JENO = AB \cdot BE : JE \cdot EN = BC^2 : EC \cdot RC$$
$$= RC \cdot BC : TC \cdot RC = BC : TC = 1 : q^5,$$

und einem eben solchen Verhältnisse werden je zwei aufeinanderfolgende Rechteckchen unterworfen sein, die somit eine fallende geometrische Reihe bilden, auf welche der erste Hilfssatz Anwendung findet, und dieser lautet hier

$$ABEJ : JECG = (BC - TC) : TC = BT : TC.$$

Daraus folgt weiter

$$ABEJ : ABCJ = BT : BC = AB \cdot BT : AB \cdot BC = AB \cdot BT : ABCD,$$

also auch

$$ABCD : ABCJ = AB \cdot BT : ABEJ = AB \cdot BT : AB \cdot BE = BT : BE.$$

In BT sind 5 einander nahezu gleiche Streckenelemente, in BE deren 3, also verhält sich das Rechteck $ABCD$ zur Fläche $ABCJ$ wie $5 : 3$, und dabei ist $5 = 3 + 2$ die Summe der Exponenten. Als allgemeine Regel[1]) findet man somit, dass wenn $AB^m : JE^m = BC^n : EC^n$, daraus $ABCD : ABCJ = (m + n) : m$ folgt. Wir würden heute sagen: aus $y^m = k^{m-n} x^n$ folge $\int_0^a y\,dx = \left(\frac{m}{m+n} xy\right)_{x=a}$.

Es lässt sich nicht verkennen, dass die Art, in welcher Fermat mit nahezu gleichen Elementen umspringt, eine sehr kühne ist. Ist die Gleichung der Curve verwickelter Natur, d. h. steht nicht x^n allein mit constanten Coefficienten auf der ersten Seite, sondern

$$k_1^{m-n_1} x^{n_1} + k_2^{m-n_2} x^{n_2} + \cdots,$$

so verwandelt Fermat die einzelnen Theile dieser Summe in $l^{m-1} v_1$, $l^{m-1} v_2, \cdots$, so dass $y^m = l^{m-1}(v_1 + v_2 + \cdots) = l^{m-1} v$ wird, und nun sind verschiedene parabolische Räume einfacher Natur zu quadriren.

Nächst der Quadratur von Curven, für welche noch andere Umformungen als die soeben angedeuteten in Kraft treten, hat Fermat auch mit Rectificationen sich beschäftigt. Die Abhandlung *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione*[2]) erschien zu Fermat's Lebzeiten 1660 im Drucke als Anhang zu einem Werke des Antoine de Lalouvère von Toulouse, dessen wir im 81. Kapitel kurz zu gedenken haben. Schon am 25. Juni 1660 schickte Carcavy das neu gedruckte Schriftchen an Huygens[3]), woraus man entnehmen mag, wie rasch es bekannt wurde.

Fermat's Grundgedanke ist folgender (Figur 168). Es sei $AHMG$ ein Stück irgend einer gegen AF concaven Curve, eine Bestimmung, welche Fermat in die Worte kleidet, die Tangente solle die AF und auch die FG ausserhalb der Curve schneiden, *in qua tangentes extra curvam cum base AF et axe FG concurrant.* Eine solche Tangente sei JHK und von J, H und K aus werden senkrecht zu AF die JRB, HC, KMD gezogen, ausserdem von K aus die Tangente KN, sowie parallel zu AF von J, H, K aus die JX, HV, KY. Fermat behauptet nun, es sei $HJ <$ arc HR, $HK >$ arc HM. Das

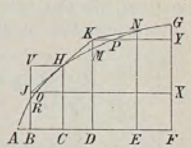

Fig. 168.

[1]) *Varia Opera* pag. 49. *Oeuvres* I, 265: *Canon vero universalis inde nullo negotio elicietur. Patet nempe fore semper parallelogrammum BD ad figuram AJCB ut aggregatum potestatum applicatae et diametri ad exponentem potestatis applicatae.* [2]) *Varia Opera* pag. 89—109. *Oeuvres* I, 211—254. [3]) *Oeuvres de* Huygens III, 85.

erstere folgt daraus, dass HJ der senkrecht auf VB aufstehenden HV näher liegt als die Sehne HR, welche selbst kleiner als der Bogen HR ist. Die zweite Behauptung folgt daraus, dass $HK + KN >$ arc HMN als denselben umfassend, die eine Strecke $KN <$ arc MN nach Analogie der ersten Ungleichung, also der Rest $HK >$ arc HM sein muss. Nachdem diese Ungleichungen feststehen, wird (Figur 169) eine und dieselbe Curve APH zweimal gezeichnet. Auf ihrer Axe AG werden beliebig klein gewählte gleiche Stückchen abgemessen $AB = BC = CD = DE = EF = FG$ und in jedem Theilpunkte errichtet man eine Senkrechte bis zum Durchschnitte mit der Curve. Nun werden in der ersten Zeichnung in $A, P, \ldots O$ Tangenten nach rechts, in der zweiten in $P, \ldots O, H$ Tangenten nach links gezogen bis zum jedesmaligen Durchschnitte mit der benachbarten Ordinate. Bei der gleichbleibenden Entfernung je zweier Ordinaten ist ersichtlich $PV = PV'$, $TZ = TZ'$, $\ldots OJ = OJ'$. Nur AQ in der ersten, HK in der zweiten Zeichnung treten vereinzelt auf, und sie allein stören die volle Uebeinstimmung der in beiden Zeichnungen zu bildenden Tangentensummen. Gleichwohl ist vermöge der bewiesenen Ungleichungen:

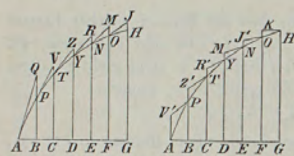

Fig. 169.

$$AQ + PV + \cdots + OJ > \text{arc } AH > PV' + \cdots + OJ' + HK.$$

Bei der Nähe sämmtlicher Ordinaten kann aber unmöglich AQ um Beträchtliches von HK sich unterscheiden. Um so eher ist es daher gestattet, die eine oder die andere Tangentensumme als Curvenlänge zu benutzen. Das ist die allgemein gehaltene Vorbereitung, welche die Möglichkeit einer Rectification darzuthun beabsichtigt.

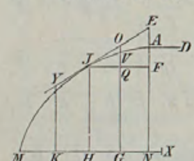

Fig. 170.

Als besonderes Beispiel wird (Figur 170) wieder die semicubische Parabel AJM benutzt, bei welcher also, da AN die Axe der Curve, wie Fermat sie zu zeichnen pflegte, darstellt, die Proportion stattfindet

$MN^3 : JF^3 = AN^2 : AF^2$ oder $y^3 = cx^2$,

wo y die Ordinaten $MN, JF, \ldots, x$ die Abscissen $AN, AF, \ldots$ der Reihe nach bedeuten kann. Fermat bediente sich allerdings bei der Rectification keiner Abkürzungen, sondern schrieb die Benennungen der einzelnen Strecken hin und ebenso eine Strecke AD statt unseres c. In seiner Figur ist auch an MN

noch jenseits N ein Stück $NX = \frac{4}{9} AD = \frac{4}{9} c$ angesetzt. In J wird die Tangente JE gezogen und nach der Tangentenmethode die Subtangente EF gesucht, welche als $\frac{3}{2} x$ sich erweist, d. h. $2EA = AF$. Mithin ist $EF^2 = \frac{9}{4} x^2 = \frac{9}{4} \frac{y^3}{c}$, während $JF^2 = y^2$ und $JE^2 = y^2 + \frac{9y^3}{4c}$ ist, sowie $JE = y\sqrt{1 + \frac{9y}{4c}}$. Wird statt der Länge JE der ganzen Tangente bis zum Durchschnitte mit der Axe AN nur das Stück JO bis zu dem Durchschnitte mit der sehr nahe bei JH verlaufenden VG gesucht, so wird $JO : JE = JQ : JF$ zu benutzen sein. Daraus folgt

$$JO = \frac{JQ}{JF} \cdot JE = \frac{HG}{y} \cdot y\sqrt{1 + \frac{9y}{4c}} = HG \cdot \sqrt{1 + \frac{9y}{4c}}$$

und

$$\frac{JO^2}{HG^2} = \frac{y + \frac{4}{9} c}{\frac{4}{9} c} = \frac{HX}{NX},$$

eine Gleichung, welche ohne weiteres als Proportion aufgefasst werden kann. Es kommt aber darauf an, über die ganze Curve hin solche Tangentenstückchen JO, beziehungsweise $HG \cdot \sqrt{1 + \frac{9y}{4c}}$ zu summiren (Figur 171). Fermat zeichnet zu diesem Zwecke neuerdings die semicubische Parabel, theilt die Schlussordinate EJ in beliebig viele gleiche Theile $EF = FG = \cdots = HJ$ und errichtet in jedem Theilpunkte eine Senkrechte bis zu dem jenseits der Curve gelegenen Durchschnittspunkte mit der Tangente, welche an den der vorhergehenden Senkrechten angehörenden Curvenpunkt gezeichnet ist. Endlich macht man wieder

$$AD = c, \quad JK = KL = \frac{4}{9} c$$

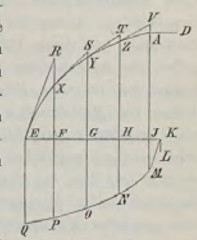

Fig. 171.

und bildet mit JK als Brennweite und K als Scheitel die Apollonische Parabel $KMN \ldots Q$, deren Gleichung, unter Annahme der KE als Axe der ξ und unter Bezeichnung der dazu senkrechten Ordinaten durch η, als

$$\eta^2 = 4 \cdot \frac{4}{9} c\xi = \frac{16}{9} c\xi$$

erscheint. Wendet man die Buchstaben der neuen Figur, welche abgesehen von den Abkürzungsbuchstaben x, y, c, ξ, η genau mit den von Fermat hier benutzten übereinstimmen, gleichwie dieses bei der vorigen Figur der Fall war, auf die oben bewiesene Proportion $JO^2 : HG^2 = HX : NX$ an, so geht sie über in $ZV^2 : HJ^2 = HK : JK$. Zugleich ist $HK : JK = HN^2 : JM^2$. Durch Vergleichung beider Proportionen erhält man $ZV^2 : HJ^2 = HN^2 : JM^2$ und $ZV : HJ = HN : JM$. Genau in gleicher Weise entsteht $YT : GH = GO : JM$ u. s. w. Statt Proportionen kann man aber Gleichungen $JM \cdot ZV = HJ \cdot HN$, $JM \cdot YT = GH \cdot GO$ u. s. w. bilden, und addirt man diese, so entsteht

$$JM(ZV + YT + \cdots) = HJ \cdot HN + GH \cdot GO + \cdots.$$

Die Einzelproducte rechts sind, je kleiner $EF = FG = \cdots = HJ$ gewählt wurde, um so mehr in Uebereinstimmung mit den Flächen der gemischtlinigen Viereckchen $HJMN$, $GHNO$, ..., ihre Summe ist also die von der Parabel begrenzte Fläche $EJMQ$. Das Product links ist JM. arc AZE, und da $JM = 2JK = \frac{8}{9}c$ und ebenso die Fläche $EJMQ$ bekannt ist, so ist die Rectification der semicubischen Parabel erzielt, erzielt durch Zurückführung auf eine Quadratur, oder in der Sprache der Neuzeit durch Zurückführung eines bestimmten Integrals auf ein anderes. Fermat blieb übrigens bei dieser ersten Rectification nicht stehen, sondern führte auch diejenige zahlreicher anderer Curven auf sie zurück.

Eine Frage muss jetzt noch erörtert werden, bevor wir die zuletzt besprochenen beiden Abhandlungen verlassen, nämlich die nach ihrer Entstehungszeit. Wir sind im Stande, sie ziemlich genau zu beantworten. Ueber die Entstehungszeit der Abhandlung über Rectificationen, von deren 1660 erfolgten Drucklegung wir schon wissen, geben die Anfangssätze Auskunft, welche, nach verschiedenen Richtungen von Interesse, hier mitgetheilt werden sollen: „Meines Wissens haben die Mathematiker noch nicht eine rein geometrische Curve einer gegebenen geradlinigen Strecke gleichgesetzt. Was von jenem scharfsinnigen englischen Mathematiker jüngst gefunden und bewiesen worden ist, dass die Cycloide die vierfache Länge des Durchmessers des erzeugenden Kreises besitzt, das scheint nach dem Dafürhalten sehr gelehrter Mathematiker nur unter Einschränkung hierher zu gehören. Sie verkündigen als Gesetz und Ordnung der Natur, dass eine Strecke, welche einer Curve gleich sei, nicht gefunden werden könne, wenn man nicht voraussetze, eine andere Curve sei bereits einer anderen Strecke gleich. Das sei bei dem vorgebrachten Beispiele von der Cycloide der Fall, und wir können dieses nicht in Abrede stellen. Die Bildungsweise der Cycloide selbst bedarf der Gleichheit einer anderen Curve mit einer Strecke, nämlich der des erzeugenden Kreises mit jener Strecke, welche alsdann Grundlinie der

Cycloide wird.“ Fermat macht sich dann diesem Einwurfe gegenüber anheischig, die semicubische Parabel zu rectificiren, und wir haben sein Verfahren dabei ausführlich genug dargestellt.

Der Engländer nun, von welchem die Rectification der Cycloide jüngst aufgefunden wurde, war Christoph Wren, und dessen Entdeckung drang, wie wir noch sehen werden, im October 1658 in die Oeffentlichkeit. Die Fermat'sche Abhandlung muss also zwischen diesem Zeitpunkte und dem 25. Juni 1660 (S. 869) verfasst worden sein, etwa 1659. Später als sie ist die Abhandlung über die Quadraturen niedergeschrieben, denn in dieser wird die Quadratur der semicubischen Parabel durch die Worte eingeleitet[1]): von dieser Curve sei in der Abhandlung *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione* die Rede. Viel später als jene ist sie aber nicht geschrieben, wie aus einer zweiten Stelle[2]) geschlossen werden darf. Schwerpunktsbestimmungen, sagt Fermat, Tangentenbeziehungen und deren Abhängigkeit von der Methode der Maxima und Minima seien längst, d. h. seit rund 20 Jahren den neueren Mathematikern bekannt gegeben, *dudum Geometris recentioribus innotuit hoc est ante viginti plus minus annos.* Wir wissen (S. 857), dass Fermat 1638 seinen Aufsatz über die genannten Gegenstände an Descartes gelangen liess. Die Zeit von rund 20 Jahren kann mithin kaum länger als wieder bis etwa 1659 ausgedehnt werden. Hatte Fermat inzwischen andere Versuche auf dem gleichen Gebiete kennen gelernt, welche er anzuführen sich nicht veranlasst sah, welche aber bewusst oder unbewusst ihn in seinen eigenen Untersuchungen förderten? Darauf werden wir antworten müssen, wenn wir noch andere Schriftsteller kennen gelernt haben.

Fermat schickte, sagten wir, 1638 seine Abhandlung über Fragen der Differentialrechnung an Descartes, der am 18. Januar dieses Jahres gegen Mersenne über das erhaltene Schriftstück sich äusserte. Das war indessen nicht die erste wissenschaftliche Begegnung beider Männer, und wiewohl die Ereignisse, von denen wir eine Andeutung geben müssen, weniger die Geschichte der Mathematik als die der Mathematiker angeht, so dürfen sie doch nicht ganz übergangen werden[3]).

Der Band Descartes'scher Schriften, welcher um Juni 1637 die Presse verliess, enthielt ausser der Geometrie noch andere Abhandlungen, darunter die Dioptrik. De Beaugrand, dessen Name uns

[1]) *Varia Opera* pag. 48 lin. 9. *Oeuvres* II, 263 lin. 14. [2]) *Varia Opera* pag. 49 lin. 16—20. *Oeuvres* I. 266 lin. 14—16. [3]) Gratien-Arnoult, *Polémique de Descartes et de Fermat durant les années* 1637 *et* 1638 in den *Mémoires de l'Académie des sciences de Toulouse* 1870, p. 383—401.

mehr begegnen wird, begierig, noch vor der eigentlichen Veröffentlichung die neue Lehre von der Lichtbrechung kennen zu lernen, verschaffte sich von Mersenne das Exemplar, welches Descartes zum Zwecke der Erwerbung eines französischen Privilegiums diesem anvertraut hatte[1]) und welches die ganze Dioptrik enthielt, und schickte es an Fermat zum Lesen. Dieses erfuhr Mersenne und schrieb nun seinerseits an Fermat, Descartes hege den Wunsch, Alle, denen er sein Buch als Geschenk zuschicke, möchten ihm ihre Bemerkungen darüber zukommen lassen, und wenn er, Fermat, die Dioptrik auch nicht auf diesem unmittelbaren Wege erhalten habe, so werde er doch gewiss gleichfalls den Wunsch des Verfassers erfüllen. Die Absicht war, dass nicht schon vor dem Erscheinen der Dioptrik Bemängelungen laut würden, und diese Absicht wurde erreicht. Fermat schickte kritische Bemerkungen in erheblicher Anzahl ein, aber wenn auch der Geschichte der Physik die eigentliche Aufgabe zufällt, diejenigen Streitigkeiten zu schildern, welche jetzt schon über die Dioptrik zwischen Fermat und Descartes entstanden, wir dürfen nicht verschweigen, dass Fermat wenigstens anfangs im Unrecht war, und dass man es Descartes kaum verübeln kann, wenn er am 18. Januar 1638 Mersenne auftrug, Fermat zu sagen, er möge ihm fernerhin nicht so unverdaute Dinge vorlegen.

Damals war aber Descartes gerade in Besitz der Abhandlung über Maxima und Minima gelangt, und, wie es im Leben so häufig vorkommt, er liess sich dieser Abhandlung gegenüber den gleichen Fehler in erhöhtem Grade zu Schulden kommen, den Fermat gegen seine Dioptrik begangen hatte. Bei der Dioptrik handelte es sich immerhin um Theorien, welche Naturerscheinungen zu erklären bestimmt waren, und über solche Versuche war und ist Meinungsverschiedenheit unvermeidlich. Bei der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen handelt es sich um eine mathematische Aufgabe, die gelöst oder nicht gelöst, richtig oder unrichtig aufgefasst, verstanden oder missverstanden werden musste, wenn es darüber zum Zwiste kommen sollte. Descartes verstand weder die Aufgabe, noch Fermat's geistreiche Auflösung derselben[2]). Die Tangentenaufgabe, meinte er, sei immer eine Maximalaufgabe, denn (Figur 172) die Berührungslinie EB an eine Curve sei die längste Gerade, welche von E aus an die Curve gezogen werden könne. Man

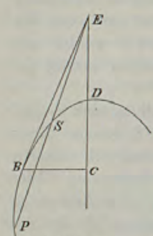

Fig. 172.

[1]) Tannery im *Bulletin Darboux* XXVIII, 62. [2]) Montucla II 139—140 stellte sich in dieser Frage schon ganz richtig auf Fermat's Seite.

dürfe nicht mit dem Einwande kommen, es sei $EP > EB$, denn auf EP liege der Curvenpunkt S näher bei E als P. Daher sei hier ES als die von E nach der Curve gehende Strecke zu betrachten, und sie sei kleiner als EB. Wolle man aber Fermat's Methode der grössten Werthe auf EB anwenden, so komme Unrichtiges.

Mersenne schickte diese Einwürfe nicht an Fermat, sondern gab sie Roberval und Pascal zu lesen, d. h. Etienne Pascal, dem Vater des damals $14\frac{1}{2}$ Jahr alten Blaise Pascal, und diese beiden Freunde Fermat's beeilten sich, Descartes über das Missverständniss aufzuklären, welches darin bestand, dass Descartes leugne, die von E nach P gezogene Gerade sei als Entfernung des Punktes E von einem Curvenpunkte aufzufassen. Weitere Briefe wurden von beiden Seiten gewechselt, ohne dass Descartes seinen Irrthum einsah, oder dass er in der recht schwachen Meinung, welche er von Fermat's Fähigkeiten äusserte, wankend geworden wäre. *Votre conseiller de Minimis* und ähnlich nennt er ihn in den an Mersenne gerichteten Briefen.

Im Juli 1638 schrieb endlich Fermat, der Hetzereien durch Mittelpersonen müde, selbst an Descartes, und wir gehen vielleicht nicht irre, wenn wir annehmen, die französische Niederschrift seiner Tangentenmethode (S. 857) sei diesem Briefe beigelegen. Wir schliessen es aus Descartes' Antwort vom 22. Juli 1638, in welcher von dem letzten Verfahren zur Tangentenbestimmung, *la derniere façon dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes*, die Rede ist. Dieses sei sehr gut und würde seinen Widerspruch nicht hervorgerufen haben, wenn Fermat es gleich auf solche Weise erläutert hätte. Noch ein Brief von Descartes an Fermat aus dem Monate September hat sich erhalten, in welchem er dem früheren Gegner das Lob grössten Wissens in der Geometrie spendet[1]). Ob das wirklich ernst gemeint, ob es höfliche Redewendung war, über welche Descartes als feiner Stylist in reichem Maasse verfügte, das ist hier nebensächlich und braucht nicht untersucht zu werden. Verdient war das Lob, auch wenn das engere Wort Geometrie durch das allgemeinere: Mathematik ersetzt gewesen wäre. Verdient wäre das gleiche Lob von Fermat in Bezug auf Descartes ausgesprochen worden.

Man kann über die persönliche schriftstellerische Liebenswürdigkeit von Fermat und Descartes, wenn wir dieses Ausdruckes uns bedienen dürfen, abweichender Meinung sein; man kann Neigung und Abneigung zwischen Beiden ungleich verteilen, und wir machen z. B. kein Hehl daraus, dass uns Descartes immer eine wenig an-

[1]) *Je n'ai jamais connu personne, qui m'ait fait paraître qu'il sût tant que vous en géométrie.*

genehme Persönlichkeit gewesen ist, während Fermat uns stets sympathisch war, aber darüber muss Einstimmigkeit herrschen, dass innerhalb der Zeit, welche dieser letzte Abschnitt des Bandes behandelt, kein grösserer Mathematiker als Descartes und Fermat gelebt hat. Vielseitigkeit und Grossartigkeit der Entdeckungen gehen bei ihnen Hand in Hand, und synthetische wie analytische Geometrie, Zahlentheorie wie Algebra, endlich und keineswegs am wenigsten die Lehre von den Infinitesimalbetrachtungen müssen die Namen der grossen Zeitgenossen mit dem Lorbeer wohlverdienten Ruhmes in ihrer Geschichte aufzeichnen. Ob auf dem einen Blatte, vielleicht dem der Algebra, Descartes, auf dem anderen, vielleicht dem der Infinitesimalbetrachtungen, jedenfalls dem der Zahlentheorie, Fermat obenan steht, das hat für die Gesammtwürdigung beider Geisteshelden keine Bedeutung.

80. Kapitel.

Roberval. Torricelli.

Unter den Gelehrten, deren Briefwechsel mit Descartes und mit Fermat von uns erwähnt wurde, kam der Name Roberval wiederholt vor. Giles Personnier[1]), latinisiert Personerius (1602—1675), ist in einem Dorfe *Roberval* unweit von Beauvais im nordwestlichen Frankreich geboren und nahm von seinem Geburtsorte den Beinamen Persone de Roberval an, der allmählig in Roberval allein überging. Mit 25 Jahren kam er nach Paris, wurde bald Professor der Philosophie am Collège St. Gervais daselbst und erhielt später die mathematische Professur am Collège Royal auf drei Jahre, welche Anstellung ihm dann regelmässig nach Ablauf dieser durch die Satzungen der Anstalt vorgeschriebenen Frist wieder erneuert wurde. Roberval selbst hat in einem fast mehr als groben Briefe an Torricelli eine Geschichte seiner mathematischen Entdeckungen gegeben, welche wir zunächst, ohne noch deren Glaubwürdigkeit zu prüfen, einfach annehmen wollen[2]).

Roberval will 1628 durch Pater Mersenne auf die Trochoide, wie Roberval sie nennt, auf die Cycloide, wie wir zu sagen fortfahren, aufmerksam gemacht worden sein. Untersuchungen über diese Curve

[1]) Montucla II, 49—51. — Poggendorff II, 665. — Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* IV, 112. — Tannery im *Bulletin Darboux* XXVIII, 63. [2]) Roberval's Schriften, darunter auch der Brief an Torricelli, sind vereinigt in dem VI. Bande der *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* in der Ausgabe von 1730. Wir citiren *Mém. Acad. Sci.* VI mit nachfolgender Seitenzahl.

überstiegen damals seine Kräfte, und volle sechs Jahre dachte er nicht mehr daran. Gegen 1634 erfand er die Lehre vom Unendlichen, *doctrinam infiniti*, welche ungefähr das Gleiche war wie Cavalieri's Methode der Indivisibilien[1]), freilich mit einem kleinen Unterschiede[2]). Cavalieri betrachtete die Indivisibilien jeder Oberfläche nach Maassgabe unendlich vieler Linien, die eines Körpers nach Maassgabe unendlich vieler Flächen, und desshalb wurden Vorwürfe gegen Cavalieri erhoben, als meine dieser, die Oberfläche, der Körper beständen wirklich aus Linien, aus Flächen. Er, Roberval, habe sich davor gehütet, Ungleichartiges mit einander in Vergleich zu bringen. Für ihn bestehe die Linie aus unendlich vielen oder der Zahl nach unbestimmt vielen Linien, *ex infinitis seu indefinitis numero lineis*, die Oberfläche, der Körper, der Winkel aus unendlich vielen Flächen, Körpern, Winkeln. Da habe Mersenne ihm die Cycloide ins Gedächtniss zurückgerufen und dabei angedeutet, er werde wohl absichtlich ihrer Untersuchung sich enthalten haben, weil die Schwierigkeit ihn zurückgeschreckt hätte, und nun sei ihm mit Hilfe der Indivisibilien sehr leicht geworden, was ohne dieses Hilfsmittel sehr schwer aussah. Das Jahr 1634 ist demnach dasjenige, in welchem Roberval die Quadratur der Cycloide ermittelt haben will.

Nachdem er die Lehre vom Unendlichen genügend ausgebildet hatte, wandte er sich der Tangentenaufgabe zu. Zuerst fand er durch die Kraft der Analyse[3]), *vi Analyseos*, eine Methode, welche viel später als allgemein anwendbar sich erwies, damals aber noch nicht in solchem Lichte erschien, und besonderen Kunstgriffen legte er keinen Werth bei. Die Cycloide gab ihm dann Gelegenheit, auf die Zusammensetzung von Bewegungen zu achten, und nur einer solchen Gelegenheit bedurfte es, damit er aus der Zusammensetzung der Bewegungen eine allgemeine Methode ableitete. Um 1636 habe er diese in die Oeffentlichkeit gebracht. Ein Herr Du Verdus aus Bordeaux habe die Vorlesungen nachgeschrieben und Viele eine Abschrift davon genommen[4]). Auch hieraus ist ein Ergebniss und zwar, wie wir glauben, ein zweifaches zu entnehmen, erstens dass Roberval zwei Tangentenmethoden besessen haben will, zuerst eine Methode, von deren genaueren Schilderung er Abstand nimmt, welche ihm nicht allgemein genug war, dann eine andere, welche auf die Bewegungs-

[1]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 366. [2]) Ebenda VI, 368—369. [3]) Ebenda VI, 370. [4]) *Occasio satis fuit, ac propositionem universalem tangentium inde deductam vulgarimus circa annum 1636. Exstant adhuc et circumferuntur hac de re lectiones nostrae a nobilissimo D. du Verdus nostro discipulo collectae, atque a multis exscriptae.*

lehre sich gründete, und zweitens, dass er von dieser letzteren Methode seit 1636 kein Geheimniss gemacht haben will.

Noch weitere Arbeiten entstanden in Folge seines Briefwechsels mit Fermat, dessen Eröffnung Carcavy 1635 vermittelte. Fermat wies ihn auf Spirallinien höherer Ordnung hin und hiess ihn Arbeit auf die Auflösung der gestellten Aufgaben zu verwenden, wie er, Fermat, es auch gethan habe. In der Arbeit bestehe ja hauptsächlich das Vergnügen. Roberval folgte der Mahnung und fand nun die Quadratur aller Parabeln beliebiger Ordnung. Fermat schlug sodann Schwerpunktsbestimmungen vor, und auch hier gelang es Roberval, zur Lösung der Aufgabe vorzudringen. Fermat hatte der Analyse sich bedient[1]); *ille quidem ad analysim recurrit*, und seine Methode war, wie es bei analytischen Erfindungen meist der Fall ist, sehr versteckt, sehr fein, sehr elegant. Seine, Roberval's, um einige Monate jüngere Methode sei einfacher und allgemeiner. Aus diesen Bemerkungen heben wir hervor, dass Roberval auf Fermat's Schwerpunktsbestimmungen das gleiche Wort der Analysis bezieht, welches er nur drei Seiten früher zur Kennzeichnung seiner ersten Tangentenmethode gebrauchte, dass also auch dort von analytischen Betrachtungen ausgegangen worden sein wird und man sich nicht versuchen lassen darf, an jener ersten Stelle Analysis etwa durch Analyse der Bewegungserscheinungen zu übersetzen.

Lassen wir diesem Auszuge aus Roberval's Briefe an Torricelli seine eigentlichen Leistungen folgen und zwar zuerst die Quadratur der Cycloide. Roberval hatte ihren durch den dreifachen Erzeugungskreis hergestellten Betrag 1634 Mersenne mitgetheilt. Im folgenden Jahre 1635 fanden Fermat und Descartes unabhängig von einander Beweise dieses Satzes, welche, wie sie keinerlei Aehnlichkeit mit einander besitzen, auch von dem Roberval'schen Beweise sich unterscheiden. Roberval hat seinen Ideengang in der Abhandlung *De Trochoide ejusque spatio* niedergelegt[2]). Er bedient sich dabei einer zweiten Curve, welche er erfunden hat, und welcher er den Namen *trochoidis comes* oder *socia* beilegt[3]), der ins Französische als *compagne de la cycloide* übersetzt worden ist (Figur 173). Die Entstehung dieser Curve $AV'VH$ ist folgende. Von jedem Punkte E' des zur Grundlinie senkrechten Durchmessers AC des Erzeugungskreises in seiner Anfangslage wird parallel zur Grundlinie die $E'V'$ gezogen, welche den ersten Erzeugungskreis in B schneidet. Nimmt man auf ihr $E'V' = \text{arc}\, AB'$, so ist V' ein Punkt der Gefährtin der Cycloide, welche, wie man leicht erkennt, jenseits HF sich in einem

[1]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 373. [2]) Ebenda VI, 295—345. [3]) Ebenda VI, 302.

zu $AV'VH$ symmetrisch-congruenten Aste bis nach L fortsetzt. Roberval bedient sich nur dieser geometrischen Definition, ohne sie in die Formelsprache der analytischen Geometrie zu kleiden. Mit Benutzung derselben findet man Folgendes. Der Halbmesser des er-

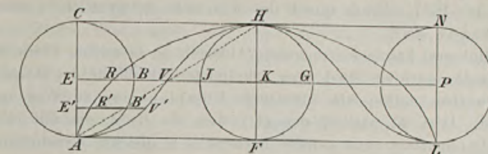

Fig. 173.

zeugenden Kreises heisse r, der Centriwinkel AEB' heisse α, und $x \mid y$ seien die Coordinaten von V' bezogen auf AL als Abscissenaxe, AC als Ordinatenaxe. Nun ist $x = r\alpha$, $y = r - r \cdot \cos\alpha$ und bei Verschiebung des Coordinatenkreuzes nach dem neuen Anfangspunkte V, wobei VP die neue Abscissenaxe ist und $\xi \mid \eta$ die neuen Coordinaten bezeichnen, ist sofort

$$\xi = x - \frac{r\pi}{2} = r\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\eta = y - r = - r \cdot \cos\alpha = - r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = r \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

oder endlich, indem r als Einheit gewählt wird, $\eta = \sin\xi$, so dass Roberval als Erfinder der Sinuslinie betrachtet werden muss. Wie nun die Gefährtin der Cycloide zu deren Quadratur führt, ist ebenso sinnreich als einfach. Der Raum $AR'RHF$, welcher die halbe Cycloidenfläche bildet, besteht aus zwei Theilen, erstens der halben Fläche der Gefährtin $AV'VHF$ und zweitens dem zwischen beiden Curven befindlichen Raume $AR'RHVV'$. Man braucht nur die Gerade AVH gezogen zu denken, um zu erkennen, dass die beiden Abschnitte, welche diese Gerade mit der Gefährtin bilden, und von denen der eine obere ihrer Fläche angehört, der andere untere nicht, einander congruent sind, dass also $AV'VHF = \frac{1}{2} ACHF$, d. h. dem erzeugenden Kreise gleich. In dem von beiden Curven begrenzten Raume ist immer $R'V' = E'B'$. Unter Festhaltung der oben eingeführten Bezeichnungen ist nämlich $E'B' = r \cdot \sin\alpha$, ausserdem $E'V' = r\alpha$ und, weil R' ein Punkt der Cycloide ist, $E'R' = r\alpha - r \cdot \sin\alpha$, mithin

$$R'V' = E'V' - E'R' = r \cdot \sin\alpha = E'B'.$$

Der Raum $AR'RHVV'$ besitzt also in gleicher Höhe lauter gleiche Parallelen zur Grundlinie wie der Halbkreis $ACBB'$, dem er folglich flächengleich ist, und damit ist der Satz bewiesen, dass die ganze Cycloidenfläche dem dreifachen erzeugenden Kreise gleich ist. Wir wiederholen, dass Roberval 1634 Mittheilung davon an Mersenne gelangen liess, dass auch Descartes und Fermat den Satz kennen lernten. Im Jahre 1637 vollends sprach ihn Mersenne gelegentlich in einem Druckwerke aus[1]).

Roberval hat in einer anderen Abhandlung, in seinem *Traité des Indivisibles* auch ein Stück einer gekrümmten Oberfläche der Messung unterworfen, mithin eine sogenannte Complanation zu Wege gebracht. Dort ist nämlich gezeigt[2]), dass ein Kreis, der mit einer dem Durchmesser eines geraden Kreiscylinders gleichen Zirkelöffnung auf der Oberfläche dieses Cylinders beschrieben wird, genau die Fläche des Quadrates des Cylinderdurchmessers besitzt.

Wir kommen nun zu Roberval's Tangentenbestimmung, einer ungleich bedeutenderen Leistung als was wir bisher auseinanderzusetzen hatten, da es hier um eine wahrhafte Methode sich handelt. Wir entnehmen sie der Abhandlung *Observations sur la composition des mouvemens et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes*[3]), welche allerdings nicht von Roberval selbst herrührt, sondern von seinem Schüler Du Verdus, dessen Name uns aus Roberval's Brief an Torricelli bekannt ist. Im Jahre 1668 theilte Roberval die Abhandlung mit einigen Verbesserungen, aber nicht allen, deren sie bedurft hätte, der Academie mit[4]). Schon vorher, nämlich 1644, hatte Mersenne eine Andeutung des von Roberval ersonnenen Verfahrens in seinen *Cogitata Physico-Mathematica* veröffentlicht[5]). Der Schüler Roberval's spricht es als ein Axiom aus, dass eine Kraft, welche einen beweglichen Punkt zwingt, eine Kreisbahn zu beschreiben, in der Senkrechten zu dem Durchmesser, an dessen Endpunkt der bewegliche Punkt sich gerade befindet, ihre Wirkung ausübt[6]). Daran schliesst sich der erste Lehrsatz: Wenn ein beweglicher Punkt zwei Bewegungen unterworfen ist, deren jede geradlinig und gleichförmig ist, so verläuft die aus beiden zusammengesetzte Bewegung wieder geradlinig und gleichförmig und, wenn auch von beiden verschieden, in der gleichen Ebene mit ihnen, so dass die von dem beweglichen Punkte beschriebene Gerade Diagonale eines Parallelogrammes ist, dessen Seiten sich zu einander wie die Geschwindigkeiten der beiden gegebenen Bewegungen verhalten[1]). Jenes Axiom und dieser Lehrsatz ermöglichen es, die Entstehung jeder Curve, vorausgesetzt, dass sie durch fortschreitende oder drehende Bewegung erzeugt wird, auf zwei geradlinige Bewegungen von gegebener Richtung und gegebenem Verhältnisse, wenn auch nicht gegebener absoluter Grösse zurückzuführen, und die Diagonale des aus ihnen gebildeten Parallelogrammes ist die Berührungslinie an die Curve[2]). Als erstes Beispiel ist die Parabel behandelt[3]) (Figur 174). In jedem ihrer Punkte E ist die nach dem Brennpunkte A gerichtete EA gleich der Entfernung des Fusspunktes J der Ordinate von E von dem festen Punkte B. Die Kräfte, welche die Parabel erzeugen, sind also EA und die ihr gleiche,

¹) Montucla II, 54. ²) *Mém. Acad. Sci.* VI, 241—253: *Tracer sur un cylindre droit un espace égal à un quarré donné, et ce d'un seul trait de Compas.* ³) Ebenda VI, 3—67. ⁴) Ebenda VI, 2: *Il est vray qu'en 1668 M. Roberval revit cet ouvrage avant que de le lire dans l'Académie Royale des Sciences, mais il n'y mit pas la dernière main.* ⁵) Jacoli, *Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti detto metodo del Roberval* im *Bulletino Boncompagni* VIII, 274—275. ⁶) *Mém. Acad. Sci.* VI, 5.

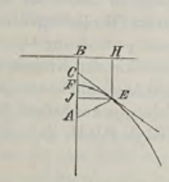

Fig. 174.

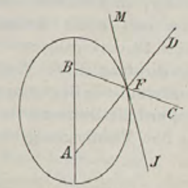

Fig. 175.

parallel zu AB gezogene EH. Bei zwei gleichen Kräften halbirt die Diagonale ihres Parallelogrammes den von beiden eingeschlossenen Winkel, also ist die Halbirungslinie EC des Winkels HEA die Berührungslinie der Parabel. Sei ferner (Figur 175) die Berührungslinie an den Punkt F einer Ellipse gesucht[4]). Die Brennpunkte der Ellipse sind A und B. Man weiss, dass AF und BF gleich bleibende Summen besitzen, wo auch F auf der Ellipse liege; nimmt also die Entfernung des Punktes F von A (oder B) ab, so nimmt die von B (oder A) um ein jener Abnahme gleiches Stück zu. Die bewegenden Kräfte sind also entweder in den Richtungen FA und FC oder in denen FB und FD zu erkennen und sind jedenfalls von gleicher Grösse. Die Berührungslinie halbirt daher den Winkel AFC, beziehungsweise BFD. Ein anderes Beispiel liefert die Curve, welche *Limaçon de Monsieur Paschal*[5]) genannt wird. Es ist der Ort derjenigen Punkte aller von einem und demselben Peripheriepunkte

¹) *Mém. Acad. Sci.* VI, 6. ²) Ebenda VI, 22. ³) Ebenda VI, 23. ⁴) Ebenda VI, 27. ⁵) Ebenda VI, 23 lin. 8. Bei Gelegenheit der Tangentenziehung auf pag. 35—40 ist nicht der volle Name des Erfinders der Curve genannt, sondern nur von dem *Limaçon de M. P.* die Rede.

eines Kreises ausgehenden Sehnen, welche von dem zweiten Durchschnittspunkte der Sehne mit der Kreislinie gleichweit entfernt sind; es ist mithin eine Kreisconchoide. Wenn Pascal als Erfinder der Curve bezeichnet ist, so kann darunter nicht Blaise Pascal verstanden sein, welcher zu Ende der dreissiger Jahre gewiss noch nicht genügend Mathematiker war, um Derartiges zu versuchen, sondern nur der Vater Etienne Pascal[1]), von welchem wir wissen, dass er mit Curvenlehre sich befasste, dass er sogar (S. 875) gemeinsam mit Roberval in den Streit über die Lehre von den grössten und kleinsten Werthen eintrat. Die Cycloide ist erst das elfte Beispiel, an welchem die Methode der Tangentenziehung zur Ausübung gelangt[2]) (Figur 176). Die beiden Bewegungen, welche dem Cycloidenpunkte E, der zugleich ein Punkt des erzeugenden Kreises in der Lage OEN ist, angehören, sind erstens eine Bewegung im Sinne des Kreises, also gemäss dem ersten Axiome in dessen Berührungslinie EP, zweitens eine Fortbewegung mit dem Kreise parallel zur Grundlinie, also in der Richtung EM. Weil die Grundlinie der Kreisperipherie gleich ist, müssen beide Bewegungen in jedem Augenblicke von gleicher Grösse sein, und die Diagonale ihres Parallelogrammes halbirt folglich den durch ihre Richtungen gebildeten Winkel PEM, d. h. EH ist

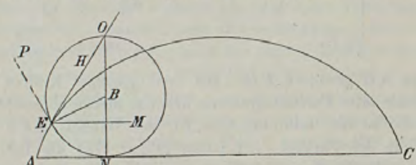

Fig. 176.

die gesuchte Berührungslinie. Dass dieselbe durch den Peripheriepunkt O des erzeugenden Kreises hindurchgehen müsse, ist weder ausdrücklich gesagt, noch in der der Abhandlung beigegebenen Figur beachtet[3]), wo die EH die ON unterhalb O schneidet. Roberval, beziehungsweise dessen Schüler, scheint also diese Eigenschaft der Cycloide nicht gekannt zu haben. Dagegen war ihm die sogenannte gedehnte oder verlängerte und ebenso die sogenannte verkürzte Cycloide bekannt, und er lehrte ihre Berührungslinien finden.

[1]) Diese Bemerkung rührt von Herrn P. Tannery her, der sie uns brieflich mittheilte. [2]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 58—63. [3]) Ebenda Figurentafel VIII zu pag. 66, Figur 1. Im *Traité des Indivisibles* pag. 211 dagegen, wo die Aufgabe wiederkehrt, ist der Eigenschaft zwar auch nicht gedacht, aber die Figur (Tafel XV zu pag. 214, Figur 3) ist wenigstens etwas richtiger.

Endlich ist es auch Roberval gewesen, welcher die Kubatur der beiden Umdrehungskörper der Cycloide vollbrachte, desjenigen, bei welchem die Grundlinie, und desjenigen, bei welchem die mittlere grösste Ordinate Umdrehungsaxe ist. Diese Untersuchungen sind ebenso wie die Rectification der Cycloide in der von uns schon angeführten Abhandlung *De Trochoide ejusque spatio* enthalten. Roberval will alle diese Dinge zwischen 1635 und 1640 entdeckt und mit Ausnahme der Rectification kein Geheimniss aus ihnen gemacht haben. Mittheilungen seien in seinen Vorlesungen, in gelehrten Zusammenkünften, im Privatverkehre mit gelehrten Freunden gemacht worden[1]). Die von ihm einzig verschwiegen gehaltene Rectification habe viele Jahre später ein geschickter Engländer ebenfalls zu Wege gebracht[2]).

So Roberval's Darstellung, und, wenn man ihr vollen Glauben beimessen dürfte, hätte Roberval eigentlich die ganze höhere Curvenlehre geschaffen. Cavalieri veröffentlichte zwar die Indivisibilien, die er längst kannte, Wren die Länge der Cycloide, die ihm nicht entgangen war, unbewusste Aneignungen dessen, was ihm gehörte; ein Schriftsteller dagegen habe sich offenen Raubes an ihm schuldig gemacht, und dieser sei Torricelli.

Pascal, der Sohn des nahen Freundes Roberval's, machte sich einfach zum Sprachrohre dieses schweren Vorwurfes[3]), und, was die Gehässigkeit des Angriffes noch steigert, er that es im November 1658, also elf Jahre nach Torricelli's Tode, und das war derselbe Pascal, dessen physikalische Erfolge auf die Erfindung des Barometers durch Torricelli sich gründeten, derselbe Pascal, der die Grösse des italienischen Gelehrten noch 1651 in einem Briefe an Herrn von Ribeyre ganz und voll anerkannte[4]). Wir müssen zusehen, welches Verbrechen Torricelli eigentlich begangen haben soll, und ob wir es einem Manne von derjenigen geistigen Bedeutung, die wir (S. 699—700) an Torricelli kennen gelernt haben, zutrauen dürfen.

Torricelli gab 1644 ein mathematisches Sammelwerk, *Opera Geometrica*, heraus[5]). Dasselbe beginnt mit zwei Büchern *De solidis sphaeralibus*, dann folgen zwei Bücher *De motu* und hierauf *De dimensione parabolae* und *De solido hyperbolico cum Appendicibus de Cycloide et Cochlea*. Im 18. Satze des 1. Buches De motu stellt sich Torricelli die Aufgabe, eine Berührungslinie an einen Punkt der Parabel zu ziehen und löst sie mit Hilfe des Parallelogrammes der

[1]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 342. [2]) Ebenda VI, 344. [3]) Pascal III, 338—339. [4]) Ebenda III, 76—77. [5]) Jacoli, *Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti detto metodo del Roberval* im *Bulletino Boncompagni* XII, 265—304.

Kräfte. Seine Lösung ist, wenn auch nicht dem Wortlaute nach, doch dem Gedankeninhalte nach, folgende[1]) (Figur 177). Sei cba die Parabel von der Gleichung $y^2 = px$ und f ihr Brennpunkt, mithin $fb = \frac{p}{2}$. Sei ausserdem $cd = ce = x$, $de = 2x$. Der die Parabel beschreibende Punkt war erst in b, dann in a und gelangte dorthin, indem er einer doppelten Bewegung unterworfen war, deren eine parallel mit cd, die andere senkrecht zu cd zu denken ist. Wäre der Weg von b nach a ein geradliniger gewesen, so hätte er die geradlinige Diagonale des Parallelogrammes der beiden genannten Bewegungen dargestellt, und es wäre auch weiter diese Diagonale eingehalten worden, die Entfernung jedes folgenden Punktes der Diagonale von der Axe cd hätte sich nach dem Verhältnisse $da : fb$ gerichtet. Nun ist bei $y^2 = px$ auch $y : \frac{p}{2} = 2x : y$, also lässt statt $da : fb$ das Verhältniss $ed : da$ sich einsetzen, welches bei der Parabel die Verhältnissgrösse der mehrgenannten beiden Bewegungen kundgiebt, und welches die Diagonale ea zur Folge hat, die somit die verlangte Berührungslinie ist. Wenn, setzt Torricelli hinzu, dieser Beweis ein besonderer für die Parabel ist, so kann man ihn doch für jeden Kegelschnitt verallgemeinern, indem man gleiche Bewegungen eines Punktes beachtet, der in gleicher Weise auf jeder vom Brennpunkte aus gezogenen Linie — Torricelli meint damit offenbar die Ordinate bf des Brennpunktes — sich bewegt. Bei der Archimedischen Spirale führe ein ähnliches Verfahren zum Ziele. Er habe den kleinen Satz einmal unter Freunden mitgetheilt und derselbe habe sich des brieflich ausgesprochenen Lobes des berühmten Galilei zu erfreuen gehabt[2]). Auch die Berührungslinie an die Cycloide könne man mittels des einen Satzes finden, was am Schlusse des Bandes ohne Beweis kurz berührt werden solle, ebenso wie die Körper der Cycloide und deren Schwerpunkte.

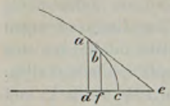

Fig. 177.

Unzweifelhaft ist Torricelli's Methode, mag man von deren Anwendung im Falle der Parabel denken, wie man will, der Roberval's nahe verwandt. Man hat nun, da die Jahreszahlen des Druckes der Mersenne'schen *Cogitata physico-mathematica* und der Torricelli'schen *Opera geometrica* übereinstimmend 1644 lauten, noch etwas näher

[1]) Jacoli, *Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti detto metodo del Roberval* im *Bulletino Boncompagni* XII, 268—269. [2]) *Quae propositiuncula cum olim inter amicos a me vulgata fuisset Clar. Virum Galileum meruit habere laudatorem, ut extant ipsius epistolae apud me.*

untersucht, in welchen Monat jede der beiden Veröffentlichungen zu setzen ist. Die letzte Druckerlaubniss der Opera geometrica ist vom 9. April 1644; an einer Stelle spricht Torricelli von einer halbjährigen Unterbrechung seiner Arbeiten, *omissa per integrum semestre libellorum cura;* fällt also, was nicht geradezu gesagt ist, dieses halbe Jahr in die Zeit während des Druckes, so gelangt man etwa zum October 1644 als Zeit der eigentlichen Ausgabe[1]). Daneben ist ein Brief Torricelli's vom 1. Mai 1644 zu beachten, in welchem er Mersenne berichtet, zwei seiner kleineren Schriften seien fertig gedruckt[2]). Das waren aber doch wohl die beiden ersten, also auch die *De motu*, welche den in Frage kommenden Satz enthält. Nun die Cogitata. Bei ihnen ist ein Zweifel nicht möglich. *Peracta haec est impressio die 15 Septembris 1644* heisst es am Schlusse[3]), und wenn vom Ende des Druckes bis zur Versendung nur wenige Wochen gerechnet werden, so kommen wir gleichfalls zum October 1644. Die beiden Bücher gelangten demnach so gut wie gleichzeitig an die Oeffentlichkeit, jedenfalls so nahe beieinander, dass es ausgeschlossen ist, dass Torricelli aus dem Buche von Mersenne oder Roberval aus dem Buche von Torricelli seine Methode entnehmen konnte. Letzterer Vorwurf ist überhaupt nie erhoben worden. Wenn aber ersterer auch in nichts zerfällt, worauf stützt sich dann Roberval's schwere Anklage geistigen Diebstahls gegen Torricelli?

Pascal erzählt es uns[4]). Es handelt sich gar nicht um die Tangentenziehung, bei welcher die Verwandtschaft der beiderseitigen Gedanken einen Zweifel an Torricelli's Unabhängigkeit allenfalls hätte entstehen lassen können, sondern um den Flächenraum der Cycloide. Im Jahre 1638 habe De Beaugrand alle von Roberval entdeckten Sätze über die Cycloide und Fermat's Methode der grössten und kleinsten Werthe an Galilei geschickt, ohne den eigentlichen Erfinder zu nennen, weil er damit wahrscheinlich die Meinung hervorrufen wollte, als sei Alles sein Eigenthum. Er habe diese irrige Meinung noch dadurch gestützt, dass er statt von der Trochoide oder Rolllinie zu reden, den Namen der Cycloide benutzte, den er sich ausgedacht hatte. Als nun Galilei und De Beaugrand beide gestorben waren, und Torricelli unter den Papieren des Ersteren den Brief des Letzteren fand, habe er geglaubt, sich Alles aneignen zu können mit alleiniger Ausnahme der Erfindung der Cycloide, welche er Galilei zuwies, dem sie aber ebensowenig angehörte als ihm das Uebrige.

Als Pascal 1658 diese Erzählung veröffentlichte, von welcher er

[1]) Jacoli l. c. pag. 269—270. [2]) Ebenda pag. 271. [3]) Ebenda pag. 275. [4]) Pascal III, 338.

nicht sagt, wie er selbst sie in Erfahrung gebracht habe, war von allen betheiligten Personen einzig Roberval am Leben. Dieser muss also wohl Pascal's Zuträger gewesen sein. Wer hätte es auch selbst in früherer Zeit, als De Beaugrand, als Torricelli lebten, sein sollen? De Beaugrand, auf welchen der Erzählung gemäss ein recht empfindlicher Flecken fällt? Oder Torricelli, der Angeklagte? Nachträglich wenigstens behauptet Pascal, habe Torricelli Alles eingestanden, und die Briefe seien vorhanden[1]). Wo, bei wem sie vorhanden seien, ob er selbst Einsicht davon genommen habe, darüber bleibt Pascal die Erklärung schuldig.

Jedenfalls ist niemals ein Brief Torricelli's von Roberval oder einem seiner Freunde veröffentlicht worden, dessen Datum 1644 oder noch später wäre. Nur ein Brief Torricelli's an Roberval über die Cycloide ist unter Roberval's gesammelten Abhandlungen veröffentlicht[2]). Er ist am 1. October 1643 geschrieben, mithin bevor die Opera geometrica ausgegeben wurden. Sehen wir zu, was er enthält. Galilei habe vor 45 Jahren (das war also 1598) der Cycloide ihren Namen gegeben; er habe versucht, deren Fläche zu messen und sich dazu unter anderem auch einer Wage bedient, auf welcher er die materielle Cycloidenfläche und ebenso den materiellen erzeugenden Kreis abwog, *appensis ad libellum spatiis figurarum materialibus.* Immer sei die Cycloidenfläche weniger als dreimal so schwer als der Kreis gewesen, und darauf habe Galilei seine Versuche aufgegeben, weil er vermuthete, es handle sich um ein incommensurables Verhältniss, *ob incommensurabilitatis suspicionem.* Später habe er, Torricelli, die Cycloidenfläche wider alles Hoffen, ja fast ohne darnach zu suchen, gefunden, und fünf verschiedene Beweise dafür ermittelt. Wie man die Berührungslinie an die Cycloide ziehe, habe Viviani ihm gezeigt. Ueber Umdrehungskörper der Cycloide besitze er nichts, *quoad solida nihil habeo.* Auch ein Brief von Roberval an Torricelli, über welchen wir schon berichtet haben, ist in jener Roberval'schen Sammlung gedruckt. Ein Datum ist ihm nicht beigegeben, aber da in ihm die Stelle vorkommt *ac tum demum anno 1645 ad id animum applicuistis*, so muss er später als 1645 geschrieben sein. Andererseits ist ein Brief Torricelli's vom 24. August 1647 an den nachmaligen Cardinal Michelangelo Ricci bekannt[3]), demzufolge er

[1]) *Mr. Roberval s'en plaignit donc à Torricelli par une lettre qu'il lui en écrivit la même année* (1644), *et le P. Mersenne en même temps, mais encore plus sévèrement: il lui donna tant de preuves, et imprimées et de toutes sortes, qu'il l'obligea d'y donner les mains, et de céder cette invention à M. de Roberval, comme il fit par ses lettres, que l'on garde écrites de sa main, du même temps.*
[2]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 359—361. [3]) Jacoli l. c. pag. 282.

damals von einem beleidigenden offenen Briefe Roberval's gehört, ihn aber noch nicht zu Gesicht bekommen habe. Folglich ist jener gedruckte Brief Roberval's vermuthlich vom Frühjahre 1647. Roberval's Papiere enthielten also keinen früheren Brief von Torricelli, keinen solchen von Torricelli aus dem Jahre 1644, welche zu Roberval's Gunsten hätten gedeutet werden können, denn wie sollte man sonst den fehlenden Abdruck erklären? Auch in dem gedruckten Briefe von 1647 ist von Eingeständnissen aus dem Jahre 1644 oder aus späterer Zeit, von denen Pascal 1658 unter Roberval's Einflusse als vorhanden sprach, keine Rede. Gab es denn gar keine Zeile Torricelli's, die veröffentlicht hätte werden können, und die jener Pascal'schen Anklageschrift als Begründung dienen konnte?

Es gab allerdings Briefe aus dem Jahre 1646, aber sie wurden von anderer Seite bekannt gemacht. Nachdem Pascal 1658 die Anklage erhoben, kam 1659 aus England eine Antwort, von der wir noch reden werden, und eine zweite 1663 aus Italien. Sie führte die Ueberschrift: *Lettera a Filaleti di Timauro Antiate della vera storia della cicloide e della famosissima esperienza dell' argento vivo*[1]), und ihr Verfasser war Carlo Dati (1619—1679), ein Schüler Torricelli's. Er theilte darin einen Brief Roberval's an Torricelli vom 1. Januar 1646 mit und ebenso die Antwort Torricelli's vom 7. Juli 1646.

Roberval behauptet hier, vor zehn Jahren, mithin zu Anfang des Jahres 1636, in öffentlicher wie vertraulicher Weise gelehrt zu haben, wie man Tangenten durch Zusammensetzung von Bewegungen sich verschaffe. Er habe damals das Verfahren an hervorragenden Beispielen geprüft, an der Quadratrix, der Cissoide, der Conchoide, der Spirale und vielen anderen Curven. Besonders leicht gestaltete sich die Auffindung der Berührenden an Cycloide und Spirale, weil diese Linien durch Zusammensetzung einer geradlinigen und einer kreisförmigen Bewegung entstehen, welche beide gleichförmig sind, und deren Geschwindigkeitsverhältniss in jedem Punkte der Curve definitionsgemäss gegeben ist. Das stimmt also so weit mit Roberval's späteren Behauptungen überein, wie kaum anders erwartet werden konnte.

Torricelli erwidert, er gestehe zu, dass er vor noch nicht so vielen Jahren jene Beweisführungen entdeckt habe, aber er habe sie nicht minder selbständig entdeckt, als dies von irgend einem Anderen vorher oder nachher geschehen sei. Stimme sein Verfahren irgendwie mit dem der Franzosen überein, so sei er darüber in voller Gemüths-

[1]) Auszüge aus der ungemein seltenen Schrift bei Jacoli l. c. pag. 280 sqq.

ruhe, und das sei ihm die Hauptsache. Er sei sich bewusst, Alles aus sich heraus gefunden zu haben; wer ihn kenne, werde das gleiche Zutrauen zu ihm haben; was Andere glauben, berühre ihn nicht. Das wonnige Gefühl, Richtiges erfunden zu haben, um dessenwillen allein er in Forschungen sich einlasse, werde ihm Niemand rauben. Um Ruhm, der nur durch Zank und Streit zu erwerben wäre, kümmere er sich nicht. Er sei bereit, alle jene Sätze irgend wem, wer sie nur wolle, zuzugestehen, unter der einzigen Voraussetzung, dass man sie ihm nicht unrechtmässigerweise entreissen wolle. Und weiter unten fährt Torricelli fort, er habe vor mehreren Jahren die aus der Bewegungslehre stammende Tangentenmethode erfunden, ohne dass ihm dabei Licht oder Hilfe von Anderen geworden sei. Er habe mit Freunden davon geredet. Später sei er zu den Sätzen über die Cycloide gelangt und habe auch sie Freunden mitgetheilt, bevor sein Buch herauskam. Plötzlich, ohne dass er es erwartet habe, sei die Botschaft eingetroffen, Alles sei vorher bereits durch Roberval erfunden. Wenn dem in Wahrheit so sei, dann freilich können die Sätze nicht ferner als sein Eigenthum gelten, wiewohl vielleicht kein Sterblicher jemals zu solchem Zugeständnisse sich herbeilassen würde. Sehet daraus, schliesst die Stelle, wie eines feinen Mannes würdig ich handle, indem ich abtrete, was mit gleichem Rechte mein wie Euer ist, da jeder von uns es selbständig erfand, abgesehen von einem kleinen Zeitunterschiede, wenn ein solcher vorhanden war.

Das klingt jedenfalls ganz anders, als Roberval gegen 1658 es Pascal erzählt haben muss, und man begreift, warum Roberval's Freunde diesen Brief Torricelli's, wenn er in seinen Papieren sich vorgefunden haben sollte, nicht zum Drucke beförderten, denn er hätte die Behauptung von einem Eingeständnisse Torricelli's, in unrechtmässiger Weise zu seinem Wissen gelangt zu sein, geradezu Lügen gestraft. Wenn wir so einer mindestens ungenauen Berichterstattung Roberval's auf die Spur gekommen sind, wenn wir früher (S. 711) schon einmal sahen, dass es Roberval nicht darauf ankam, noch 1655 den Satz von der Fläche des sphärischen Dreiecks für sich in Anspruch zu nehmen, den Girard 1629, Cavalieri 1632 im Drucke veröffentlicht hatte, so lohnt es sich, die vorher bei Seite geschobene Untersuchung aufzunehmen, ob denn Roberval dort überall bei der Wahrheit geblieben ist, wo er die Zeitpunkte seiner eigenen Erfindungen genau bestimmte[1]).

Roberval will also die Tangente als Diagonale des Parallelogrammes der die Curve erzeugenden Kräfte zu Anfang 1636 erkannt

[1]) Jacoli l. c. pag. 283—284 hat diese Untersuchung geführt.

haben. Aber am 11. October 1636 schrieb er an Fermat[1]), er habe die Tangenten an mehrere Curven gefunden, und er bringt deren Construction in Zusammenhang mit der Quadratur. Das sieht doch nicht nach mechanischen Betrachtungen aus! Der Wortlaut: *Pour les tangentes de la conchoide, je les ai considérées il y a longtemps, comme étans determinations d'équations quarre-quarrées* stimmt viel eher zu jener *vis Analyseos* (S. 877), mittels deren Roberval seinem gedruckten Briefe an Torricelli gemäss, welchen wir auf das Frühjahr 1647 bestimmt haben, schon 1634 die Tangente verschiedener Curven gefunden haben will. Weitere für Roberval's Versuche, die Cycloidentangente zu bestimmen, wichtige Stellen sind in Briefen von Descartes nachgewiesen worden[2]), welche wir ihrer Zeitfolge nach erwähnen. Am 23. August 1638 schrieb Descartes an Mersenne[3]), er freue sich ungemein über dessen Mittheilung, dass keiner seiner Mathematiker, auch nicht Roberval, die Cycloidentangente zu ziehen wisse. Descartes knüpfte daran die Mittheilung seiner eigenen Auflösung dieser Aufgabe (S. 855), welche somit die erste überhaupt gegebene war, welcher dann die von Fermat (S. 861) auf dem Fusse folgte. Schon am 25. September 1638 war sie im Besitze von Descartes, der an diesem Tage seine Bewunderung der Fermatschen Ableitung in die früher (S. 875) von uns erwähnten Worte kleidete, er habe Niemand gekannt, der auf ihn den Eindruck gemacht hätte, so viel wie Fermat von Geometrie zu verstehen. Bei der Cycloide, fuhr Descartes fort[4]), ist es nicht leicht, die Regeln anzuwenden, welche bei anderen Curven zum Ziele führen, und Herr von Roberval, der die Aufgabe stellte, und der zweifellos auch einer der ersten Geometer unseres Jahrhunderts ist, hat eingestanden, die Auflösung nicht zu kennen, auch kein Mittel zu wissen, zu ihr zu gelangen. Freilich hat er seitdem auch gesagt, er habe die Auflösung gefunden, aber das geschah folgenden Tages, nachdem er erfahren, dass wir beide ihm Lösungen zugeschickt hätten. Am 8. October 1638 äussert sich Descartes gegen Mersenne abermals in ähnlicher Weise[5]). Roberval mache sich bis zu einem gewissen Grade lächerlich, indem er glauben machen wolle, er habe die Cycloidentangente gerade am folgenden Tage erfunden, nachdem er erfahren, dass Descartes' Auflösung bei Mersenne angelangt sei. Wieder einen Monat später in einem Briefe an Mersenne vom 15. November 1638 macht sich Descartes über vier bis fünf verschiedene aber stets unrichtige Versuche Roberval's die

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 140. [2]) Montucla II, 56. [3]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 88. [4]) Ebenda VII, 86. [5]) Ebenda VII, 449.

Cycloidentangente zu ermitteln lustig[1]), und sogar noch am 30. April 1639 bricht er in Lachen aus[2]), *il faut que je rie*, dass Mersenne ihm jetzt schon fünf oder sechs stets von einander verschiedene Tangentenzeichnungen für die Cycloide zugeschickt habe, welche sämmtlich mit Fehlern behaftet gewesen seien. Nun mag ja zu Roberval's Gunsten diesen Bemängelungen seiner Constructionen durch Descartes nicht unbesehen Recht gegeben werden wollen, aber Eines geht aus Roberval's wiederholten Versuchen unwiderleglich hervor: dass er vor April 1639 nicht im Besitz der Anwendung der Methode des Kräfteparallelogrammes auf die Cycloidentangente gewesen sein kann, also auch wahrscheinlich überhaupt nicht im Besitze jener Methode, welche, wie Roberval am 1. Januar 1646 sehr richtig an Torricelli schrieb (S. 887), bei keiner Curve leichter als bei der Cycloide in Anwendung trete.

Damit fällt aber die gegen Torricelli erhobene Anklage, soweit sie sich (S. 885) auf die Tangentenziehung hätte berufen können, zusammen, denn De Beaugrand konnte unmöglich 1638 an Galilei schicken, was frühestens 1639 vorhanden war. Die Untersuchung hat somit festgestellt, was bei dem fast von keinerlei Makel betroffenen Charakter Torricelli's zu vermuthen war, dass diesem gerechterweise ein Vorwurf, die Tangentenmethode Roberval's sich widerrechtlich angeeignet zu haben, nicht gemacht werden kann, dass vielmehr beide, Roberval und Torricelli, selbständig und wahrscheinlich ziemlich gleichzeitig auf den geistreichen und an sich eines Eigenthumstreites wohl würdigen Gedanken gekommen zu sein scheinen. Was aber die Auffindung der Cycloidenfläche betrifft, so ist zwischen den Methoden Roberval's und Torricelli's so wenig Verwandtschaft nachweisbar, dass von einer Entwendung unmöglich die Rede sein kann. Ob De Beaugrand Galilei überhaupt Etwas mittheilte, und wie viel es gewesen sein kann, lässt sich bei dem Fehlen jeglichen Beweisstückes nicht mehr ermitteln.

Wir haben (S. 884) aus Torricelli's *Opera geometrica* nur seine Tangentenmethode erwähnt und sind wegen des darüber entstandenen erbitterten litterarischen Streites längere Zeit bei ihr stehen geblieben, aber auch Anderes ist noch erwähnenswerth[3]). In der Abhandlung *De solido hyperbolico* ist der Satz ausgesprochen, dass, wenn (Figur 178) CF die Asymptote der Hyperbel AE ist, der Umdrehungskörper des unendlichen bei AB anfangenden Flächenstückes zwischen Hyperbel und Asymptote um die Asymptote als Drehungsaxe dem Cylinder

[1]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VIII, 16. [2]) Ebenda VIII, 115. [3]) Montucla II, 90.

gleich sei, welchen das Rechteck $ABCD$ bei seiner Umdrehung um BC hervorbringe. Ein für die Zeit seiner Entstehung sehr merkwürdiger Satz wird auch aus der Abhandlung *De motu projectorum* angeführt[1]). Torricelli habe gewusst, dass, wenn man aus einem und demselben Punkte mit einer und derselben Anfangsgeschwindigkeit Körper in die Höhe werfe und nur den Winkel, unter welchem sie geworfen werden, jeden möglichen Werth annehmen lasse, die Scheitelpunkte aller dieser Wurfparabeln eine neue Parabel zum geometrischen Orte haben. Torricelli hat somit zuerst den Begriff der einhüllenden Linie geahnt,

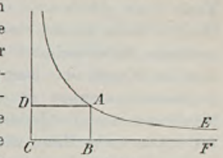

Fig. 178.

wenn auch keineswegs deutlich erkannt. In seinen Untersuchungen über die Cycloide machte er sich eines Irrthums schuldig. Er hielt den Umdrehungskörper der um ihre grösste Ordinate gedrehten Cycloide fälschlich für $\frac{11}{18}$ des umschriebenen Cylinders, während Roberval die Raumbestimmung dieses Körpers richtig stellte. Torricelli hat auch, wie bemerkt worden ist[2]), die logarithmische Spirale, vielleicht auch die logarithmische Curve, jedenfalls aber die Rectification der logarithmischen Spirale gekannt.

Gleich Torricelli hatte auch ein englischer Schriftsteller, den wir hier erwähnen müssen, Castelli zum Lehrer. Er nannte sich Richard White[3]) und mit latinisirtem Namen Ricardus Albius Anglus. Er ist 1590 geboren, hat sich aber, da die Gesetze seiner Heimath Katholiken aus den öffentlichen Schulen fernhielten, bis 1626 nicht mit Wissenschaft beschäftigen können. Dann besuchte er Frankreich und Italien, wo er Philosophie, später auch während zweier Jahre Mathematik trieb, worauf Familienangelegenheiten ihn nach England zurückriefen. Ein 1648 von ihm in Rom herausgegebenes Buch hat einen sehr langen, mit den Worten *Hemisphaerium dissectum*

[1]) Heller, Geschichte der Physik II, 106. [2]) Gino Loria, *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva* in den *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*. Sitzung vom 5. December 1897. [3]) Dass der richtige englische Name White ist, lässt schon die Uebersetzung in Albius vermuthen. Vergl. auch Graesse, *Trésor des livres rares et précieux* VI[2], pag. 442. Ein älteres englisches biographisches Sammelwerk hat statt White den Druckfehler Cohite, und dieser Irrthum ist in zahlreiche andere Werke übergegangen. In einem Briefe von De Sluse an Huygens (abgedruckt in der grossen Gesammtausgabe von Huygens II, 450) ist der Vorname von White als Thomas angegeben. Eine Anmerkung der Herausgeber nennt als dessen Lebensdauer die Jahre 1588—1680. Sollten zwei Brüder White gelebt haben?

beginnenden Titel[1]). Es betrachtet Oberfläche und Rauminhalt von verschiedenartigen Kugelabschnitten, ausserdem auch die Oberfläche eines schiefen Kreiskegels. Hat ein gerader Kreiskegel die Seite s und sein Grundkreis den Halbmesser r, so ist bekanntlich $\pi r s$ das Maass seiner gekrümmten Oberfläche, oder auch $\pi \varrho^2$, wenn $\varrho^2 = rs$. Die Oberfläche ist also einem Kreise gleich, dessen Halbmesser geometrisches Mittel zwischen dem Halbmesser des Grundkreises und der Seite des Kegels ist. Beim schiefen Kegel giebt es unendlich viele Kegelseiten paarweise in je einer durch die Kegelspitze und den Mittelpunkt des Grundkreises hindurchgehenden Ebene gelegen, und das arithmetische Mittel aller dieser Seiten muss statt s in die beim geraden Kreiskegel giltige Formel eingesetzt werden. Zwei Paare von Seiten zeichnen sich aus, erstens das Paar, welches in der Ebene liegt, die durch die senkrechte Höhe des Kegels hindurchgeht, zweitens das Paar, welches in der zur genannten Ebene senkrechten Ebene sich befindet. Das erste Paar besteht aus der grössten und kleinsten Seite, das zweite Paar ist das einzige gleichseitige. Die Summe des ersten Paares ist die grösste, die des zweiten die kleinste der überhaupt möglichen Summen. Den vierten Theil dieser vier ausgezeichneten Kegelseiten nimmt White als das arithmetische Mittel aller Kegelseiten. Geometrisch bewiesen sei es allerdings nicht, aber so lange nicht bewiesen werde, dass die Vorschrift falsch sei, halte er sie für richtig. Bequemer kann man sich eine Beweisführung in der Mathematik gewiss nicht machen.

81. Kapitel.

Gregorius a Sto. Vincentio. Wallis. Pascal. De Sluse. Hudde. Van Heuraet.

Von ungleich grösserer Bedeutung als der auf Strenge keinerlei Anspruch erhebende Versuch, von welchem am Ende des vorigen Kapitels anhangsweise die Rede war, ist das grosse *Opus geometricum* des Gregorius a Sto. Vincentio, welches wiederholt unsere Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat, zuletzt (S. 850) als wir von der Quadratur der Spirale sprachen, welche durch Gleichsetzung ihrer Fläche mit einem Parabelabschnitte sowohl in gedruckten Schriften des Gregorius als Cavalieri's ermittelt ist. Diese Quadratur der Spirale

[1]) Kästner III, 215—218. Dort ist aus der Vorrede des Buches das Wenige zusammengestellt, was wir von den Lebensverhältnissen White's angeben konnten.

war aber keineswegs der einzige Schritt in das Reich des Infinitesimalen, welchen Gregorius in jenem 1647 gedruckten *Opus geometricum* wagte. Er bediente sich meistens einer besonderen Methode, welche den Namen *Ductus plani in planum* führt, und deren Erörterung unsere nächste Aufgabe ist[1]).

Ducere heisst bekanntlich Multipliciren, und von einer Multiplication von Flächen ist im VII. Buche, welches die erwähnte besondere Ueberschrift besitzt, die Rede; an einen kinematischen Begriff, ein Hinübergleitenlassen einer Ebene über eine andere, ist nicht zu denken. Gregorius selbst giebt die Erklärung[2]): „Ich nenne *Ductum plani in planum* die Bildung jedes Körpers, welcher aus zwei Oberflächen mit derselben oder mit gleicher Basis entstanden ist.“ Uebermässig klar wird man diese Ausdrucksweise so wenig nennen wollen, als das ganze Opus geometricum. Die nähere Auseinandersetzung ist folgende. Gregorius denkt sich (Figur 179) zwei Figuren $ABCD$ und

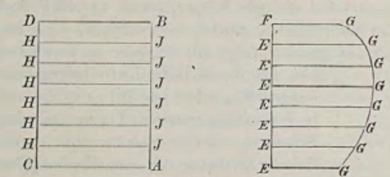

Fig. 179.

EFG, bei welchen $AB = EF$ ist, und stellt die zweite derart senkrecht zur ersten, dass EF mit AB zusammenfällt. In gleichen Entfernungen werden nun lauter Zwischenlinien EG und JH gezogen, welche bei der angegebenen Stellung der beiden Figuren zu einander einen rechten Winkel mit einander bilden, der durch neue in G und H errichtete Senkrechte zu einem Rechtecke sich ergänzt. Die Rechtwinkligkeit ist zwar, sagt Gregorius, nicht nothwendig, jede andere gleiche Neigung thäte es auch, aber bei senkrecht zu einander gewählten Figuren macht sich die Sache leichter. Jene sämmtlichen Rechtecke, von welchen jedes durch das Product der zwei Senkrechten EG mal JH gemessen wird, bilden einen Körper, und das ist eben der *corpus ortum ex ductu plani in planum*. Sind die beiden Figuren,

[1]) Auszüge aus dem *Opus geometricum* bei Kästner III, 225—247. Der vielfach missverstandene *Ductus plani in planum* ist zutreffend behandelt bei Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange (1856) S. 70—73, und bei Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* III, 188—193. [2]) *Opus geometricum* pag. 704—705.

welche gemeinsam den Körper erzeugen, einander vollkommen gleich und in gleicher Lage, so nennt man den Körper einen *corpus ex ductu superficiei AB in se*, einen Körper, könnte man allenfalls sagen, den die betreffende Figur mit sich selbst erzeugt. Von ihm ist der wechsel-

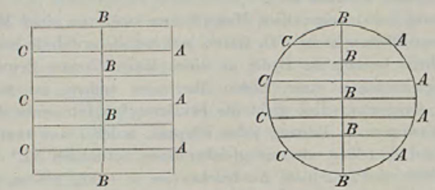

Fig. 180.

weise mit sich selbst erzeugte Körper, *corpus ex ABC ductum in se subalterne*, zu unterscheiden, welcher dann entsteht, wenn die gleichen Figuren nicht in gleicher Lage mit einander in Verbindung treten.

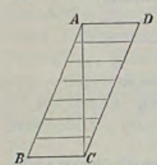

Fig. 181.

Bei den diesen Definitionen beigegebenen Abbildungen (Figur 180 und 181) sind die mit einander in Verbindung tretenden Figuren mit den gleichen Seiten an einander gesetzt, ohne durch perspektivische Zeichnung den entstehenden Körper irgend hervortreten zu lassen. Bei den an die Definition sich anschliessenden Sätzen dagegen sind an einer und derselben Abbildung beide Darstellungen regelmässig vereinigt: die Figuren erscheinen neben einander, und zugleich treten die Körper auf, z. B. wo (Figur 182) aus der Selbsterzeugung eines rechtwinkligen Dreiecks eine Pyramide

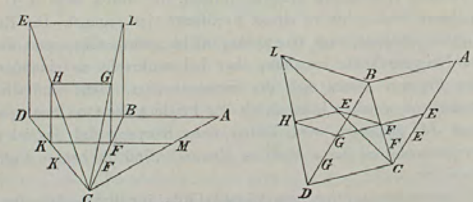

Fig. 182.

mit quadratischer Grundfläche entsteht, während die wechselweise Selbsterzeugung eben jenes rechtwinkligen Dreiecks eine Pyramide

dreieckiger Grundfläche hervorbringt, welche, wie Gregorius beweist[1]), die Hälfte der ersteren Pyramide ist.

Gregorius geht im Allgemeinen darauf aus, Körper bald auf eine, bald auf andere Weise durch dieselben Figuren erzeugen zu lassen und dann Zahlenbeziehungen zwischen jenen verwandten Körpern zu entdecken.

Ein ziemlich allgemeiner Satz in dieser Beziehung ist z. B. folgender[2]). Es sollen drei Figuren gegeben sein, die sämmtlich eine in allen drei Figuren gleich lange Strecke als Theil ihrer Begrenzung besitzen. Im Uebrigen soll die Begrenzung beliebig aussehen und nur dem Gesetze gehorchen, dass die in gleichen Höhen errichteten Senkrechten auf jener gleichen Strecke in den drei Figuren fortwährend stetige geometrische Proportionen bilden. Wird alsdann durch die erste Figur in Verbindung mit der dritten ein Körper erzeugt und ein zweiter Körper durch die zweite Figur mit sich selbst, so müssen beide Körper gleichen Rauminhaltes sein. Der Beweis wird durch Einbeschreibung sehr dünner Parallelopipeda in beide Körper geführt, worauf die Bemerkung folgt, die Anzahl solcher Parallelopipeda könne so gross genommen werden, dass die Körper ganz von ihnen erfüllt (wörtlich: erschöpft) würden, *parallelopipeda illa ita posse multiplicari ut corpora ipsa, quibus inscribuntur, exhauriant.*

Vielleicht ist dieses das erste Vorkommen des Wortes *exhaurire* in geometrischem Sinne, aus welchem man dann das Wort Exhaustionsmethode für das entsprechende schon bei Euklid und Archimed vorkommende, aber nicht besonders benannte Verfahren abgeleitet hat.

An geometrischer Strenge ist diese Abtheilung des Werkes des Gregorius den Indivisibilien Cavalieri's, mit welchen man am ersten geneigt sein dürfte, Vergleichungen anzustellen, wohl überlegen. Dagegen ist die Anwendbarkeit der Indivisibilien entschieden eine reichhaltigere und fruchtbarere gewesen, und eine gegenseitige Einwirkung, welchem von beiden Schriftstellern man nun Kenntniss der Leistungen des Anderen zutrauen wollte, ist hier so gut wie ausgeschlossen.

Erfüllte der *Ductus plani in planum* das VII. Buch des Opus geometricum, so darf auch aus dem VI. der Hyperbel gewidmeten Buche ein Satz nicht unerwähnt bleiben[3]). Wenn, sagt dort Gregorius, eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gezeichnet ist, und parallel zur einen Asymptote Gerade zwischen der Hyperbel und der

[1]) *Opus geometricum* pag. 708. [2]) Ebenda pag. 738—739. [3]) Ebenda pag. 597.

anderen Asymptote gezogen werden, welche jeweils gleiche Flächentheile in den entstehenden gemischtlinigen Vierecken begrenzen, so bilden jene Geraden eine geometrische Progression. Das ist offenbar die Wahrheit von der **Quadratur der auf ihre Asymptoten bezogenen Hyperbel durch Logarithmen**, welche hier entdeckt ist, aber ohne dass Gregorius sich dabei des Wortes Logarithmen bedient hätte.

Das Opus geometricum hat einen sichtlichen Einfluss auf ein vier Jahre später erschienenes Buch von Tacquet, dem Antwerpener Ordensgenossen von Gregorius, ausgeübt. Dessen *Cylindricorum et annularium libri quatuor*[1]) bieten zahlreiche Beispiele von Körperinhalten, welche zwar nach der Methode der Indivisibilien berechnet werden können, und von Manchem so berechnet worden seien, aber ohne dass damit den Anforderungen mathematischer Strenge genügt wäre, welche er, Tacquet, stelle. Er ziehe es vor, die zu messenden Räume zwischen zwei Summen von Cylindern oder ähnlichen Gebilden einzuschliessen, die theils Grösseres, theils Kleineres als jene Körper liefern, ihnen aber dabei beliebig nahe gebracht werden können. Das Wort *exhauriri*, dessen Tacquet sich bei dieser Gelegenheit bedient, zeigt den von uns angekündigten Einfluss des Opus geometricum. Ebendarauf weist die von Tacquet angewandte Redensart *ducitur perpendiculariter* (oder wenn nicht rechtwinklig *ductus obliquus*) hin, welche bei ihm freilich statt der multiplicativen Bedeutung eine kinematische angenommen zu haben scheint, welche wir im Sinne des Gregorius noch zurückweisen mussten.

Das gleiche Jahr 1651, in welchem Tacquet's Buch in Antwerpen erschien, war auch das Druckjahr eines mathematischen Werkes eines Toulouser Genossen des Jesuitenordens, des Antoine Lalouvère[2]) (1600—1664). Der Name kommt auch in der Form De la Loubère vor, als Lalovera und noch in anderen aber ähnlichen Schreibformen. Seine erste mathematische Schrift von 1651 führt den Titel *Elementa tetragonismica, seu demonstratio quadraturae circuli et hyperbolae ex datis ipsorum centris gravitatis*[3]). Es scheint ein gewisser Muth dazu zu gehören, diese und die späteren Schriften Lalouvère's zu lesen. Der Grundgedanke ist der der **Umkehrung der Guldinschen Regel**. Wenn der Inhalt eines Körpers, worunter immer ein Umdrehungskörper zu verstehen ist, bekannt ist, wenn auch der

[1]) Kästner III, 266—275. — Mansion, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale* (1887) pag. 288. [2]) Poggendorff I, 1501. — Tannery, *Pascal et Lalouvère* in den *Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* T. V (3e Serie). [3]) Montucla II, 77. — Tannery l. c. p. 6—8 des Sonderabzugs.

Schwerpunkt seines Querschnittes gegeben ist und damit zugleich der von diesem Schwerpunkte während der Umdrehung beschriebene Kreis, dann ist auch der Inhalt des Querschnittes Ergebniss eines einfachen Divisionsexempels. Das Auffallendste ist, dass Lalouvère den Guldinschen Satz unabhängig entdeckt haben will. Guldin's Name und Ansprüche seien ihm erst nachträglich aus Cavalieri's Exercitationes bekannt geworden. Von der Entdeckung durch Pappus weiss Lalouvère wieder nichts oder will nichts davon wissen. Lalouvère gehört auch zu den Mathematikern, welche mit der Cycloide sich beschäftigten. Im August 1658 veröffentlichte er eine kleine Schrift *De cycloide* mit der Raumbestimmung des Umdrehungskörpers der Cycloide um ihre Grundlinie. Am 15. September theilte er brieflich die Rechnung mit, welche ihm das Ergebniss geliefert habe, aber sie war irrig, und schon am 21. September zog er sie als solche wieder zurück. Das eigentliche Verfahren Lalouvère's war eben, trotzdem es auf dem gleichen Gedanken wie die Elementa tetragonismica beruhend von selbst zur Uebersetzung in eine Rechnung geführt haben müsste, in der Form altgeometrisch und Lalouvère selbst ein ungeübter und unsicherer Rechner. Der Hauptsache nach geometrisch war desshalb auch seine 1660 erschienene *Geometria promota in VII de cycloide libris*, welchen als Anhang Fermat's Abhandlung über Rectificationen von Curven beigegeben war (S. 869). Die in der Geometria promota veröffentlichten Dinge waren allerdings richtig, aber Lalouvère's Darstellung derselben kam zu spät, um ihm das Erfinderrecht zu verschaffen, denn nunmehr war das Alles schon seit einem Jahre bekannt.

An Quadraturen hat auch der spätere Bischof von Gap De Lyonne[1]) in einer Jugendschrift sich versucht, die 1654 durch Leotaud herausgegeben wurde, welcher uns selbst aus dem mit Gregorius von St. Vincentius und dessen Schülern über die Kreisquadratur geführten Streite (S. 716) bekannt ist. Lyonne's *Amoenior curvilineorum contemplatio* beschäftigt sich hauptsächlich mit den Mondchen des Hippokrates und Figuren ähnlicher Entstehungsweise, deren genauer Flächenraum bestimmt wird.

In Italien, von wo aus, wie bei aller Anerkennung der Verdienste Kepler's zugestanden werden muss, durch Cavalieri der wesentliche Anstoss zur allgemeinen Behandlung infinitesimaler Fragen gegeben worden war, hat die neue Lehre ausser durch Torricelli nur durch einen Schriftsteller noch Erweiterung gefunden. Es war das Stefano degli Angeli[2]) (1623—1697), Professor der Mathematik in Rom, dann in Padua. In der Ueberschrift seiner Werke nannte er sich

[1]) Montucla II, 76. [2]) Kästner III, 212—215. — Poggendorff I, 46—47.

Ordinis Jesuatorum S. Hieronymi in Veneta Provincia Definitor Provincialis, er war demnach Ordensgenosse Cavalieri's und nicht Jesuit, wie mitunter irrig angegeben ist. Schon 1654 schrieb er *De infinitis parabolis*, worunter Curven von der Gleichung $y^n = b^{n-1}x$ verstanden sind, und in seinem *Miscellaneum hyperbolicum et parabolicum* von 1659 ist denselben Curven Aufmerksamkeit zugewandt. Insbesondere ist das Tangentenproblem für dieselben gelöst, nachdem Cavalieri die Quadratur veröffentlicht hatte. Analytische Geometrie im Sinne von Descartes und Fermat findet man bei Angeli nicht. Gleichwohl ist durch ihn vermuthlich ein Wort in den mathematischen Sprachschatz eingeführt worden, welches gerade in der analytischen Geometrie sich als zukunftsreich bewährt hat. Um nämlich anzugeben, dass in der Parabel $y^n = b^{n-1}x$ die Subtangente aus zwei Stücken bestehe, von denen das jenseits vom Scheitel gelegene das $n-1$-fache des diesseits vom Scheitel, also innerhalb der Curve, befindlichen Stückes sei,

$$\left[s_t = \frac{y}{y'} = nx = x + (n-1)\,x\right],$$

spricht er von dem Verhältnisse des Theiles des Diameters ausserhalb der Parabel *ad partem abscissam ab ordinatim applicata versus verticem*. Wir kennen keine ältere Benutzung des Wortes Abscisse in lateinischen Originalschriften. Vielleicht kommt das Wort in Uebersetzungen der Apollonischen Kegelschnitte vor, wo Buch I Satz 20 von *ἀποτεμνομέναις* die Rede ist, wofür es kaum ein entsprechenderes lateinisches Wort als *abscissa* geben möchte.

Der Ueberschrift nach ist man geneigt, hier auch die *Exercitatio geometrica de maximis et minimis* von 1666 zu nennen, welche Cardinal Ricci[1]) (1619—1692) zum Verfasser hat. Es scheint indessen, als wenn dort nur antikgeometrische Untersuchungen angestellt wären[2]).

Noch weniger als in Italien sind in Deutschland Fortschritte in der Infinitesimalrechnung gemacht worden, wie sich aus den Zeitverhältnissen leicht begreift. Kepler's Doliometrie war im denkbar ungünstigsten Augenblicke erschienen. Wüthete doch 1618 bis 1648 in weitverbreiteten Gegenden Deutschlands der entsetzliche von seiner Dauer benannte Krieg. Hat man doch fast mehr Anlass zur Verwunderung darüber, dass während jener Zeit einzelne Persönlichkeiten, wie Schwenter und Faulhaber, wissenschaftlichen Sinn besassen und Aufbewahrenswerthes leisteten, als darüber, dass nach Aufhören des Krieges noch zwei Jahrzehnte verstreichen mussten, bis in dem materiell und geistig ausgesogenen Lande ein

[1]) Montucla II, 91. — Fabbroni, *Vitae Italorum doctrina excellentium II.*
[2]) Vergl. Davido Besso, *Sopra un opuscolo di Michelangelo Ricci.* Roma 1893.

Mathematiker ersten Ranges erschien, Leibniz, bis zu dessen Auftreten wir diesen Band fortführen. Der Wissenschaft selbst erwuchs durch das Brachliegen im einzelnen Lande kaum Schaden. Seit sie, dem nationalen Gebiete entrückt, Weltwissenschaft geworden war, fand sie bald da, bald dort Förderer und Förderung und wurde damit unabhängiger von politischen Begebenheiten, welche nachgerade aufhören, einen Einfluss von der Bedeutung zu üben, dass es unentbehrlich wäre, ihre Geschichte mit der Geschichte der Wissenschaften zu vermengen. Was Franzosen leisteten, während der dreissigjährige Krieg Deutschland verheerte, haben wir gesehen. England litt ähnlich wie Deutschland unter dem Gräuel blutiger Kämpfe, aber es waren wenigstens nicht fremde Heere, die dort ihre vernichtenden Schlachten schlugen, und als Cromwell gestorben und das Königthum wieder eingesetzt war, erholte die englische Wissenschaft sich verhältnissmässig schnell. Eine ganze Anzahl von Mathematikern trat dort auf. Ihre Untersuchungen griffen in fast alle Theile unserer Wissenschaft ein, auch in das Gebiet der Infinitesimalrechnung.

Vor allem haben wir bei John Wallis zu verweilen. Schon seine analytisch-geometrische Darstellung der Kegelschnitte von 1655 (S. 820) gehört bis zu einem gewissen Grade hierher, da in ihr die Indivisibilien Cavalieri's bewusste und erfolgreiche Anwendung fanden, aber ganz besonders hervorragend war die gleichfalls 1655 gedruckte *Arithmetica Infinitorum*[1]). Inhalt des Werkes ist die Auffindung von Quadraturen und Kubaturen, also wesentlich das Gleiche, was die Aufgabe von Cavalieri's Indivisibilien bildet. Auch darin zeigt sich Uebereinstimmung, dass bei den Quadraturen der durch eine Curve, durch die Abscissenaxe und eine Schlussordinate begrenzte Raum in seinem Verhältnisse zu dem Rechtecke aufgesucht wird, dessen Seiten die Schlussordinate und die Abscissenaxe sind, dass es bei den Kubaturen auf das Verhältniss der Umdrehungskörper der beiden erstgenannten ebenen Figuren ankommt. Endlich ist die Methode so weit übereinstimmend, dass die Summe gewisser Potenzen aller einzelnen Ordinaten einestheils, die der Schlussordinate anderntheils zur Herstellung jenes Verhältnisses ihre Hilfe bieten müssen. Hiermit und mit dem bei Cavalieri und bei Wallis übereinstimmend richtigen Endergebnisse mancher Untersuchungen ist aber die Aehnlichkeit abgeschlossen. Die grosse Verschiedenheit liegt darin, dass, während Cavalieri bemüht war, seine Ableitungen so geometrisch als irgend möglich zu

[1]) Johannis Wallis, *Opera mathematica* I, 355—478. Auszüge bei Montucla II, 348—353. — Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* IV, 149—165. — Ball, *History of the study of mathematics at Cambridge* pag. 41—44. — Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen S. 6—13.

gestalten, Wallis mit vollem Bewusstsein rechnerisch verfuhr und schon durch den gewählten Titel *Arithmetica Infinitorum* auf dieses Bestreben hinwies. Wir würden sagen: Wallis knüpfte an eine Integrationsmethode Kepler's an (S. 830), wenn wir nicht bezweifelten, dass er dieselbe kannte.

Soll z. B. gezeigt werden[1]), dass die Summe 3. Potenzen aller Ordinaten sich zu der gleicher Potenzen der Schlussordinate im Dreiecke wie 1 : 4 verhalten, was Cavalieri ausgesprochen hatte, so führt Wallis den Beweis dadurch, dass er mehr und mehr 3. Potenzen ganzer Zahlen von der 0 anfangend bildet und nun das gesuchte Verhältniss bei wachsender Anzahl der gewählten Glieder darauf prüft, ob wirklich 1 : 4 herauskommt. Er findet aber:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4},\quad \frac{0+1+8}{8+8+8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\quad \frac{0+1+8+27}{27+27+27+27}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12},$$

u. s. w. bis

$$\frac{0+1+8+\cdots+216}{216+216+216+\cdots+216}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}.$$

Der Bruch, um welchen $\frac{1}{4}$ übertroffen wird, hat zum Nenner offenbar, *ut patet*, stets um 4 zunehmende Zahlen und wird stetig kleiner, so dass er endlich kleiner als jeder beliebige angebbare Werth wird, und wenn man bis ins Unendliche die Versuche ausdehnt, geradezu verschwindet[2]). Aehnlicherweise werde man, fährt Wallis in den nachfolgenden Lehrsätzen fort, die Verhältnisszahl bei der Summe 4., 5., 6. Potenzen finden; sie sei 1 : 5, 1 : 6, 1 : 7 u. s. f. Denn, sagt er, der Versuch zeigt, dass die durch Induction gefundenen Verhältnisszahlen diesen stetig näher kommen, so dass der Unterschied kleiner als jeder angebbare wird, und bei Fortsetzung des Verfahrens ins Unendliche verschwindet[3]).

Man wird nicht verkennen, dass ein Stehenbleiben bei blosser Induction ohne Ableitung einer allgemeinen Formel, welche derselben als Stütze dient, dass ein kühl ausgesprochenes *patet*, es ist offenbar, nicht mit den heutigen Anforderungen mathematischer Strenge in Einklang zu bringen sind. Man wird ebensowenig verkennen, dass Wallis zur Anstellung seiner Versuche überhaupt erst überging, nach-

[1]) Wallis, *Opera* I, 382 Prop. XXXIX Lemma und Prop. XL. [2]) *Cum autem crescente numero terminorum excessus ille super rationem subquadruplam ita continue minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat (ut patet) si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est.* [3]) Ebenda I, 383 Prop. XLIII Lemma: *Facto enim experimento patebit rationes inductione repertas ad has continue propius accedere ita ut differentia tandem evadat quavis assignabili minor; adeoque in infinitum continuata evanescet.*

dem, man darf sogar getrost sagen, weil er die zu erwartenden Ergebnisse voraussah. Cavalieri, Fermat, Roberval, Torricelli hatten mehr oder weniger unabhängig von einander gezeigt, dass, sofern m nur eine ganze positive Zahl war, das Verhältniss der Summe der m^{ten} Potenzen der in arithmetischer Reihe wachsenden Zahlen zu der ebenso oft, als Glieder vorhanden waren, genommenen m^{ten} Potenz der grössten Zahl sich als $1:(m+1)$ erweise, und nun machte Wallis, der allerdings seiner bestimmten Aussage[1]) nach Cavalieri's Schrift nicht gelesen hat, aber deren Inhalt aus dem von Torricelli gegebenen Berichte kannte, nachträglich die hierdurch herausgeforderten Versuche!

Aber man wird ebensowenig Wallis das Verdienst absprechen, die heute noch übliche Form des Grenzüberganges erfunden zu haben. Das Wort, der Unterschied werde kleiner als jeder nur angebbare, *quavis assignabili minor*, hat erst das Verständniss einer Grenze als eines Werdenden zu erzeugen vermocht, und es würde hochbedeutsam hervortreten, wäre selbst Wallis im Uebrigen bei den schon bekannten Ergebnissen stehen geblieben.

Nun machte er aber über seine Vorgänger hinaus einen gewaltigen Schritt, indem er eine Kühnheit der Induction an den Tag legte, welche, an und für sich nicht gerechtfertigt, durch die ihr entnommenen Ergebnisse die Entschuldigung des Erfolges gewinnt. Wenn bei der m^{ten} Potenz der Bruch $\frac{1}{m+1}$, bei der $m+2n^{\text{ten}}$ Potenz der Bruch $\frac{1}{m+2n+1}$, bei der $m+n^{\text{ten}}$ Potenz der Bruch $\frac{1}{m+n+1}$ auftritt, so ist $m+n$ das arithmetische Mittel zwischen m und $m+2n$ und gleichzeitig der Nenner $m+n+1$ das arithmetische Mittel zwischen den Nennern $m+1$ und $m+2n+1$. Das arithmetische Mittel zwischen $m+1$ und $m+n+1$ ist nun $m+\frac{n}{2}+1$, folglich wird $\frac{1}{m+\frac{n}{2}+1}$ der Bruch sein, welcher bei Untersuchung der $m+\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Potenz (als Mittel zwischen m und $m+n$) entsteht, auch wenn n keine gerade Zahl ist, d. h. auch wenn es um Quadratwurzeln sich handelt, und ganz allgemein ist die Geltung der Verhältnisszahl $1:(m+1)$ davon unabhängig gemacht, ob m ganzzahlig oder nicht. Bei $m=\frac{1}{2}$ entsteht das Verhältniss $2:3$; bei $m=\frac{1}{3}$ entsteht $3:4$; bei $m=\frac{1}{10}$ entsteht $10:11$ und so fort[2]), *et sic deinceps.* Sogar den

[1]) Wallis *Opera* I, 357. [2]) Ebenda I, 390 Prop. LIV.

Fall, dass m irrational wird, schliesst der kühne Neuerer mit ein: *Sin Index supponatur irrationalis, puta* $\sqrt{3}$, *erit ratio ut* 1 *ad* $1+\sqrt{3}$ *etc.*, d. h. auch bei $m=\sqrt{3}$ ist die Proportion

$$\sum_{h=0}^{h=n} h^m : n^{m+1} = 1 : (m+1)$$

noch immer wahr!

Wie wird nun die Sache, wenn n aus den positiven Zahlen ausscheidet? Wallis[1]) sagt nicht geradezu, es sei $a^{-1}=\frac{1}{a}$, d. h. er benutzt noch nicht negative Exponenten, so wenig er ausdrücklich $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ schreibt, aber in seinen Schlüssen hat er dieses Bewusstsein, welches, wie die Leser dieses Bandes wissen, durch Jahrhunderte vorbereitet war, klar an den Tag gelegt. Wird $m=-1$, so geht $\frac{1}{m+1}$ in $\frac{1}{0}$ oder ∞ über. *Cum enim primus terminus in serie Primanorum*, d. h. der ersten Potenzen der auf einanderfolgenden Zahlen, *sit* 0, *primus terminus in serie reciproca*, d. h. in der Reihe der reciproken Zahlen, *erit* ∞ *vel infinitus: sicut in divisione, si divisor sit* 0, *quotiens erit infinitus*[2]). Wir machen auf das hier, wie in der Abhandlung über die Kegelschnitte (S. 820) auftretende Unendlichkeitszeichen aufmerksam, auf die nebenbei auftretende Bemerkung, der Divisor 0 bringe den Quotienten ∞ hervor, ohne dass von der Grösse des Dividenden dabei die Rede wäre, auf die Wortverbindung der reciproken Reihe, *series reciproca.* Wallis spricht auch von reciproken Potenzgrössen[3]). Wie die Indices der directen Reihe aufsteigend 1, 2, 3 ... sind, so haben die ihnen reciproken Grössen die entgegengesetzten negativen Indices, *indices contrarios negativos*, $-1, -2, -3 \ldots$

Wallis gelangt dabei zu dem von ihm allerdings nicht verstandenen Satze des Ueberganges vom Positiven zum Negativen durch das Unendlichgrosse hindurch[4]). Sein Missverständniss besteht darin, dass er meint, $\frac{1}{a}$ wachse fortwährend, wenn a um je eine Einheit abnehme, und dieses Wachsen habe keinen Abschluss bei $a=0$. Wallis meint also, es sei

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{1}{1}<\frac{1}{0}<\frac{1}{-1}$$

u. s. w., es seien die negativen Zahlen mehr als unendlich.

---

[1]) Wallis, *Opera* I, 395 Prop. LXIV. [2]) Ebenda I, 405 Prop. XCI. [3]) Ebenda I, 407 Prop. CI, Scholium. [4]) Ebenda I, 409 Prop. CIV.

Wir haben auf einige formelle Neuerungen hingewiesen, mit welchen Wallis vorging. Ihm gehört auch das Wort Interpolation an: zwei Reihen können leicht interpolirt werden, *interpolari possunt*[1]), indem man beliebig viele Stellen einschiebt. Ferner ist bei Wallis der Name der hypergeometrischen Reihe anzutreffen[2]); er versteht darunter die Reihe, deren Glieder

$$1,\quad 1\cdot\frac{3}{2},\quad 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4},\quad 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6},\cdots$$

heissen, deren allgemeines Glied also $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$.

Mit ähnlich gebauten Ausdrücken hat Wallis zu thun, wo er an die Aufgabe herantritt, die Quadratur des Kreises zu ermitteln und dabei die berühmte, seinen Namen führende Factorenfolge (S. 766) auffindet[3]). Ersetzt man die Bezeichnung von Wallis durch die der heutigen Mathematik, ohne von seinem Gedankengange abzuweichen, so ist die Fläche $\frac{\pi}{4}$ des Kreisquadranten vom Halbmesser 1 durch das Integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ dargestellt, das Quadrat des Halbmessers durch 1. Das Verhältniss dieses Quadrates zu jener Fläche ist also

$$4:\pi = 1:\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Jenes Integral ist aber enthalten in der allgemeineren Form

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}}\,dx$$

und nicht minder in der allgemeineren Form

$$\int_0^1 \left(1-x^{\frac{2}{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Aus der ersteren entsteht es durch $\lambda=1$, aus der zweiten durch $\mu=1$, aus der noch zusammengesetzteren Form

---

[1]) Wallis, *Opera* I, 443 Prop. CLXX. In Prop. CXC (I, 463) kommt statt *interpolatio* das Wort *intercalatio* vor, dessen man sich sonst vorzugsweise in der Chronologie (Schaltmonat, Schalttag) bediente. [2]) Ebenda I, 466 im 4. Alinea. [3]) Cayley, *The investigation by Wallis of his expression for* π in dem *Quarterly Journal of Mathematics* XXIII, 165 sqq. zeichnet sich keineswegs durch Klarheit aus. Vorzuziehen sind die Darstellungen bei Marie und bei Reiff a. a. O.

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{2}{\mu}}\right)^{\frac{\lambda}{2}} dx$$

durch gleichzeitige Annahme von $\lambda = 1$ und $\mu = 1$. Geradzahlige Werthe von λ gestatten die Potenzirung unter dem Integralzeichen auszuführen, wodurch zwar mehrgliedrige Ausdrücke auftreten, deren einzelne Monome aber nach den Regeln, über die wir berichtet haben, und die als

$$\int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1}$$

sich zusammenfassen lassen, integrirt werden können. Da ferner für Wallis bereits der Satz vorhanden war, den wir heute dahin aussprechen, das Integral einer Summe sei gleichbedeutend mit der Summe der Integrale, so findet er eine ganze Anzahl von Werthen der Function

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{2}{\mu}}\right)^{\frac{\lambda}{2}} dx$$

bei $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8$ und $\mu = -1, 0, 1, 2, \ldots 8$, von welchen die bei $\mu = -1$ erscheinenden allerdings falsch sind. Ist gleichzeitig λ und μ grad, so haben die Integrale eine sehr symmetrische Gestalt, und Wallis nimmt nach derselben Induction, von welcher er fortwährend Gebrauch macht, an, diese Symmetrie müsse erhalten bleiben, auch wenn λ ungrad gewählt wird. Kurzum Wallis beabsichtigt eine Interpolation, welche den doppelten Zweck erfülle, einen Mittelwerth zwischen zwei Ausdrücken zu finden, der als Werth zwischen beiden enthalten in der Form mit der Bauart beider übereinstimme. Diesem Doppelzweck rückt er allmählig dadurch näher, dass ein Factor, der als Quadratwurzel geschrieben die Symmetrie stört, allmählig beseitigt wird, und dieses geschieht, indem der Radicand der Einheit näher gebracht wird, während andere Factoren daneben erscheinen, die in das allgemeine Gesetz passen. Schliesslich erscheint

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$$

mit im Zähler und im Nenner ins Unendliche fortgesetzten Factorenfolgen[1]).

Wenige Jahre nach der Arithmetica Infinitorum gab Wallis 1659 eine Schrift heraus[2]), welche den umfangreichen Titel führt: *Tractatus duo. Prior de Cycloide et corporibus inde genitis. Posterior epistolaris, in qua agitur de Cissoide et corporibus inde genitis et de cur-*

[1]) Wallis, *Opera* I, 469 Prop. CXCI. [2]) Ebenda I, 489—569.

varum tum linearum Εὐθύνσει, tum superficierum Πλατυσμῷ. Auf die Veranlassung zu dieser Schrift[1]), welche, bevor sie gedruckt erschien, schriftlich und zwar vermuthlich in wenigstens theilweise anderem Wortlaute Verbreitung gefunden hatte, kommen wir sogleich zurück. Was den Inhalt betrifft, so setzt er sich zunächst aus den wichtigsten Sätzen über die Cycloide und über deren je nach Wahl der Umdrehungsaxe verschiedenartige Umdrehungskörper zusammen. Als Anhang folgen sodann[2]) die in Freundeskreisen seit Juli 1658 bekannt gegebenen Untersuchungen von Christoph Wren, über die Tangente der Cycloide und namentlich über deren Rectification, welche von allen Seiten ihm als Erfindung zugestanden worden ist (S. 873). Die Rectification vollzog Wren ganz anders als Fermat und auch ein holländischer Mathematiker Van Heuraet es thaten. Diese führten jedenfalls ohne von Torricelli's früheren Arbeiten (S. 891) Kenntniss zu haben die für sie neue, vielfach in ihrer Ausführbarkeit angezweifelte Aufgabe der Rectification auf die schon lange bekannte und für mannigfache Curven erfolgreich durchgeführte Quadratur zurück. Wren dagegen schloss die Curve in zwei sägeförmige Linienzüge, *polygona serrata*, ein, von welchen der innere kleiner, der äussere grösser als ein Gegebenes bleiben musste, während der Unterschied beider verschwindend klein wurde. Noch vor Wren's Arbeiten soll William Neil (1637—1670) bereits 1657 die Rectification der cubischen Parabel vollzogen haben. So behauptete[3]) wenigstens Wallis 1659, so wiederholte er in einem 1673 in den sogenannten Philosophical Transactions, den Mittheilungen der Londoner königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, zum Abdrucke gebrachten Briefe. Auch Neil's Rectification besteht in der Zurückführung auf eine Quadratur. Eine Möglichkeit der Rectification hatte übrigens auch Wallis selbst bereits in der Arithmetica Infinitorum behauptet, und auf diese Stelle machte ein weiterer Anhang der Schrift von 1659 aufmerksam.

Diesen Anhang bildet ein Brief an Huygens. Zuerst besprach Wallis in demselben die Anfeindungen Torricelli's, welche er ebenso verurtheilte, wie es später 1663 Carlo Dati that (S. 887). Torricelli sei gewiss kein litterarischer Dieb an Roberval's geistigem Eigenthum gewesen, und wenn Roberval's Landsleute fortwährend auf Briefe pochten, in welchen Torricelli Roberval's Erstlingsrechte anerkenne, so beweise diese Anerkennung nur die Unbefangenheit des edeldenkenden Mannes. Auf ein Geständniss aber, dass Torricelli

[1]) Montucla II, 68—70. [2]) Wallis, *Opera* I, 533—541 [3]) Ebenda I, 551—553.

von jenen Untersuchungen gewusst habe, lasse sich die Sache nicht zuspitzen. Dann wendet sich Wallis zu dem von Huygens entdeckten Satze, dass der von der Cissoide und ihrer Asymptote eingeschlossene Flächenraum das Dreifache des erzeugenden Kreises sei[1]), und liefert dessen Beweis durch die Arithmetica Infinitorum, d. h. einen Beweis durch Interpolation von Zahlenreihen. Diese Auseinandersetzung führt weiter zu Rectificationsversuchen. Hier gedenkt er[2]), bevor er Neil's Verdienste hervorhebt, dessen, was er seiner Zeit im XXXVIII. Satze der Arithmetica Infinitorum[3]) angedeutet habe. Die Sehnen einer Curve, heisst es dort ungefähr, sind stets Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke, deren Katheten Stücke von Abscissen und Ordinaten der Curve sind. Vermöge der Gleichung der Curve kann daher jene Sehne als von dem Abscissenstücke abhängig oder zu ihm in einem gewissen Verhältnisse stehend betrachtet werden, und da die Summe der Sehnen um so genauer mit der Curve zusammenfällt, je kleiner die einzelne Sehne ist, so kommt auch die Rectification auf die Gedankenfolge der Arithmetica Infinitorum zurück. Wir würden heute die letzte Behauptung in die Worte kleiden, es komme auf die Integration der Gleichung

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

an. Es ist wirklich auffallend, dass Wallis dieser die Aufgabe unmittelbar ins Auge fassenden Methode, von welcher die von Wren benutzte nach unseren darüber gegebenen Andeutungen nur so unwesentlich abweicht, dass eine Abhängigkeit Wren's von der betreffenden Stelle der Arithmetica Infinitorum gar nicht ausgeschlossen ist, selbst wieder den Rücken kehrt, wo er in der Fortsetzung des Briefes an Huygens die Ausstreckung, εὐθύνσις, der Curven, die Ausbreitung, πλατυσμός, der Oberflächen, worunter aber nur Quadraturen ebener Figuren zu verstehen sind, sich zur Aufgabe stellt. Da ist es immer wieder eine Zurückführung von Rectificationen auf Quadraturen, genauer gesagt die Führung des Nachweises, dass eine Curvenlänge zu einer Strecke sich ebenso verhalte, wie eine Curvenfläche zu einem Rechtecke, welche angestrebt wird. Wir können nicht umhin, auch auf Fermat's Rectification (S. 872) nochmals hinzuweisen. Fermat wusste in derselben von Wren's Rectification der Cycloide. Wenn er diese Kenntniss, wie sich zeigen wird, auch aus einem Briefe Wren's an Pascal schöpfte, so hat er doch muthmasslich Wallis' Schrift von 1659 gelesen. Sein erster Nachweis von der Möglichkeit einer Rectification ist im Charakter Wren's, seine Aus-

[1]) Wallis, *Opera* I, 545. [2]) Ebenda I, 550. [3]) Ebenda I, 380—381.

führung der Rectification verlässt die eingeschlagene Bahn wieder mit der gleichen Folgewidrigkeit, wie Wallis sie übte.

Wir haben zugesagt, auf die Veranlassung zur Veröffentlichung der Schrift *De Cycloide* zurückzukommen. Auch die Erfüllung dieser Zusage führt uns zurück nach Frankreich und zu einem Schriftsteller aus dem engsten Roberval'schen Kreise, zu Blaise Pascal. Seine Erfindung einer Rechenmaschine, seine Arbeiten über die Kegelschnitte, über das arithmetische Dreieck mit den verschiedenen Anwendungen desselben auf Wahrscheinlichkeitsrechnung, auf Zahlentheorie u. s. w. fallen sämmtlich vor Ende August 1654. Es folgte eine in mathematischer Beziehung unfruchtbare Unterbrechung. Im September 1654 wandte Pascal in Folge von Ereignissen, welche vollständig zu ermitteln noch nicht gelungen ist, von der Mathematik sich ab. Ganz andere Gedanken waren es, welche ihn ausschliesslich beschäftigten, welche ihn mit Männern gleicher Richtung in enge Verbindung brachten, und welche ihren schriftstellerischen Ausfluss in den vom Januar 1656 bis Juni 1657 erschienenen, gegen den Jesuitenorden gerichteten Provinzialbriefen hatten. Von da an etwa mögen die alten mathematischen Neigungen Pascal's wieder hervorgetreten sein, und in schlaflosen Nächten zu Anfang des Jahres 1658 erfolgreiche Untersuchungen über die Cycloide hervorgebracht haben. Im Juni 1658 traten dieselben in Gestalt eines namenlos veröffentlichten Preisausschreibens[1]) in die Oeffentlichkeit. Galilei und Torricelli, hiess es dort (S. 885), hätten mit der Cycloide sich beschäftigt. Gewisse Fragen seien aber noch immer unerledigt, und deren Beantwortung werde nun zur Wettbewerbung ausgeschrieben. Sei (Figur 183)

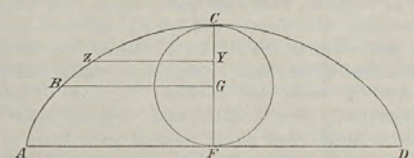

Fig. 183.

Z ein beliebiger Punkt der Cycloide und von ihm aus parallel zur Grundlinie AD eine Gerade ZY bis zum Durchschnitte mit der Axe CF gezogen. Man verlangt nun zu wissen: die Fläche CZY und deren Schwerpunkt; Rauminhalt und Schwerpunkt der Umdrehungskörper von CZY sowohl um ZY als um CY; endlich die Schwer-

[1]) Pascal III, 322 sqq.

punkte der vier Körperstücke, welche entstehen, wenn man die beiden genannten Umdrehungskörper je durch eine durch die jedesmalige Drehungsaxe hindurchgehende Ebene schneidet. Die Sonderfälle sollten dabei hervorgehoben werden, dass Z mit A und B zusammenfalle, Y also mit F und mit G (dem Mittelpunkte der Axe CF). Man verlange nur, dass die Methode der Ermittelung richtig und deutlich nachgewiesen werde, ob dabei etwa Rechenfehler unterlaufen, komme nicht in Betracht. Fernere Bedingung sei, dass die Lösung vor dem 1. October 1658 erfolge. Als Preis wurden 60 spanische Dublonen ausgesetzt, welche bei Herrn von Carcavy niedergelegt seien und von welchen dem ersten Einsender 40, dem zweiten 20 ausbezahlt werden sollten. Sollte überhaupt keine preiswürdige Lösung am 1. October vorhanden sein, so werde der Preisausschreiber seine eigenen Auflösungen veröffentlichen, deren dann Jeder als Ausgangspunkt zu weiteren Untersuchungen sich bedienen könne. Am 7. October 1658 folgte eine Erklärung[1]), der Zeitpunkt der Einsendung sei nun vorüber, und nur die zeitweilige Abwesenheit des Herrn von Carcavy verhindere, dass mit der Prüfung der eingegangenen Bewerbungsschriften begonnen werde. Darauf aber, was einige auswärtige Gelehrte beansprucht hätten, dass man die Ankunft ihrer Arbeiten abwarte, sofern sie nur den Nachweis einer vor dem 1. October erfolgten Absendung beibrächten, weil sonst die Pariser Gelehrten zu sehr bevorzugt seien, könne man sich nicht einlassen. Die Bedingungen des Preisausschreibens seien nun einmal so, wie sie seien, und müssten eingehalten werden. Auch wegen der gestatteten Rechenfehler wurden neue Einschränkungen gemacht. Darunter seien nur nebensächliche Irrthümer zu verstehen, nicht aber solche, welche einen wesentlichen Einfluss ausüben. Die eigenen Auflösungen des Preisausschreibers seien zur Zeit schon in den Händen der Herren von Carcavy und von Roberval und würden nach Prüfung der Eingänge veröffentlicht werden. Zunächst werde aber in einigen Tagen die *Histoire de la Roulette* erscheinen, welche berichten werde, wie und durch wen die ersten Untersuchungen über die in Frage stehende Curve zu Stande gekommen seien. In der That folgte die angekündigte Schrift[2]) unter dem 10. October. Es war jene Verherrlichung Roberval's und Schmähung Torricelli's, von welcher wir schon früher gehandelt haben. Torricelli soll, wie wir in aller Kürze wiederholen, gar nichts geleistet haben, Roberval soll alles gefunden haben: die Quadratur der Roulette, wie die Curve jetzt fortwährend genannt wird, während der Name der Cycloide verbannt ist, die Tangente, die Kubaturen der

[1]) Pascal III, 328—333. [2]) Ebenda III, 337—343.

beiden Umdrehungskörper, erst dessen um die Grundlinie, dann dessen um die Axe. Ausserdem habe Roberval auch die verlängerte und verkürzte Roulette in Untersuchung genommen. So weit sei die Forschung etwa 1644 gewesen und habe dann 14 Jahre geruht. In diesem Zeitpunkte sei der Preisausschreiber, der von geometrischen Dingen sich seit lange abgewandt hatte, durch einen Zufall ihnen wieder näher getreten, und er habe sich Methoden zur Auffindung von Quadraturen, Kubaturen, Rectificationen, sowie von Schwerpunkten von Körpern, ebenen und gekrümmten Flächen und Curven gebildet, welchen wenig Dinge entschlüpfen möchten. Diese Methoden habe er an den Rouletten geprüft und bewährt gefunden, worauf er sein Preisausschreiben in alle Weltgegenden schickte. Die eingegangenen Lösungsversuche würden dermalen geprüft, aber es seien auch Sendungen eingetroffen, welche, wenn auch nicht die Beantwortung der gestellten Fragen, doch Interessantes enthielten. Darunter wird die gedruckte Abhandlung Lalouvère's und ein Brief Wren's besonders hervorgehoben. Erstere enthalte nichts als die Entdeckungen Roberval's, nur anders dargestellt, was aber keine Schwierigkeit bereite, denn es sei immer leicht, einen schon bekannten Satz anders zu beweisen. Die Rectification der Roulette durch Wren dagegen sei neu und sehr schön. Einen Beweis habe allerdings Wren nicht mitgeschickt. Fermat habe einen solchen sofort gefunden. Roberval habe das Gleiche geleistet, und zwar sobald man ihm von der Sache sprach, die ihm nicht neu gewesen sei, denn er besitze eine sehr schöne Rectificationsmethode, die er nur noch nicht habe der Oeffentlichkeit übergeben wollen.

Unter dem 25. November 1658 erschien das Urtheil des Preisgerichtes[1]). Es hatte sich nur mit zwei Arbeiten zu beschäftigen. Die Verfasser, welche zunächst noch nicht genannt wurden, waren Lalouvère und Wallis. Beiden Verfassern könne ein Preis nicht zuerkannt werden. Lalouvère hatte nur ohne Begründung der angewandten Methode eine Rechnung eines der aufgegebenen Fälle eingereicht, er hatte dann in wiederholten Briefen vom September, October, November die Mangelhaftigkeit seiner Rechnung zugestanden, ohne sie zu berichtigen, und damit habe er selbst sein Urtheil gesprochen. Wallis hatte seiner Bewerbungsschrift, das Manuscript der 1659 gedruckten Abhandlung *De Cycloide* (S. 907), gleichfalls berichtigende Briefe nachfolgen lassen, hatte am 30. September noch gefragt, ob man nicht auch eine solche Lösung als befriedigend betrachten würde, welche der richtigen nahe käme, und dadurch den

[1]) Pascal III, 349—352.

Beweis eigenen Misstrauens gegen seine Ergebnisse geliefert. In der That seien dieselben mit Irrthümern behaftet, welche nicht als blosse Rechenfehler, sondern als Denkfehler, als Fehler des Verfahrens sich kennzeichneten. Er berücksichtige z. B. nicht, ob die Entfernung der unendlich vielen Oberflächen, welche er zu Hilfe ziehe, unter einander die gleiche sei oder nicht u. s. w. Da man der gedruckten Abhandlung von Wallis diesen Vorwurf nicht machen kann, so stammt daher die oben ausgesprochene Vermuthung, er habe bei der Veröffentlichung mehr als nur Nebensächliches abgeändert. Eine letzte Streitschrift, denn dazu waren Pascal's fortwährend ohne Unterschrift veröffentlichten Aeusserungen nachgerade geworden, bildet die Fortsetzung der Geschichte der Roulette[1]) vom 12. December. Sie ist gegen Lalouvère gerichtet und wirklich vernichtend für ihn, da sie an der Hand von Vorschlägen, welche man demselben gemacht hatte, und auf welche er nie einging, den Nachweis führt, dass seine Ansprüche auf Erhaltung des Preises so unbegründet als möglich seien, dass er sich nicht im Stande gefühlt habe, Richtiges zu liefern. Nicht gesagt ist aber, dass Pascal selbst über die Cycloïdenangelegenheit Briefe mit Lalouvère gewechselt hatte, in welchen ein ganz anderer durchaus anerkennender Ton herrschte[2]), nicht gesagt, dass am 8. December eine kurze aber scharfe Gegenerklärung von Lalouvère erschienen war, welche den anonymen Verfasser der Geschichte der Roulette einen Verleumder nannte[3]). Dadurch sind Pascal's Zornesergüsse ziemlich erklärt, wenn auch nicht genügend gerechtfertigt. Auszüge aus den erwähnten Briefen Pascal's an Lalouvère hat dieser in seiner Geometria promota von 1660 (S. 897) der Oeffentlichkeit übergeben.

Endlich kamen nun im Januar 1659 Pascal's Abhandlungen, aber sie kamen nicht unter dessen eigenem Namen, wenn die gewählte Maske ihn auch nicht lange verbarg. Die Provinzialbriefe hatte Pascal mit Louis de Montalte unterzeichnet, und uns ist kein Zweifel, dass dieser Name gewählt worden war, um an den auf hohem Berge, auf dem Puy-du-Dôme, angestellten Barometerversuch zu erinnern, über welchen Pascal seinen ersten Streit mit Mitgliedern des Jesuitenordens geführt hatte. Aus Louis de Montalte wurde jetzt durch blosse Buchstabenversetzung Amos Dettonville, und unter diesem Namen sind die Schriften verfasst, deren Vorgeschichte wir ausführlich zu schildern genöthigt waren, und auf die wir jetzt selbst einzugehen haben.

[1]) Pascal III, 352—357. [2]) Tannery, *Pascal et Lalouvère* in den *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* T. V (3. Série) pag. 11—15 des Sonderabzuges. [3]) Ebenda pag. 20 des Sonderabzuges.

Wir müssen zurückgreifen auf das Jahr 1654. Damals schickte Pascal (S. 753) seine Abhandlungen über das arithmetische Dreieck und dessen Anwendungen an Fermat und erhielt zur Antwort, auch Fermat habe Aehnliches gefunden. Zu jenen Anwendungen zählten wir, als wir von diesem Austausche von Mittheilungen sprachen, auch die Auffindung der Summen von Potenzen der aufeinanderfolgenden Zahlen. Bei Fermat bildete sie die Grundlage seiner Quadraturen von Parabeln jeder Ordnung, bei Pascal verknüpfte sie sich gleichfalls mit infinitesimalen Betrachtungen. In dem Aufsatze *Potestatum numericarum summa*[1]) erklärt Pascal, der Zusammenhang der Potenzsummen mit der Ausmessung von krummlinig begrenzten Flächenstücken, *spatiorum curvilineorum dimensiones*, sei Jedem ersichtlich, der einigermassen mit der Lehre von den Indivisibilien vertraut sei, und kurz darauf spricht er den Satz aus: *in continua quantitate, quotlibet quantitates cuius vis generis quantitati superioris generis additas nihil ei superaddere.* Dass man ihn recht verstehe, erklärt er dann diesen Ausspruch dahin, dass Punkte zu Strecken, Linien zu Flächen, Flächen zu Körpern hinzugefügt werden können, ohne sie zu verändern, dass auch bei Zahlen niedrigere Potenzen höheren gegenüber vernachlässigt werden können. Hatte Pascal also auch wirklich für einige Jahre mit der Mathematik gebrochen, so brauchte er den Faden nur an jener Stelle wieder anzuknüpfen, bis zu welcher er 1654 vorgedrungen war, um sofort in den brennenden Tagesfragen auf dem Laufenden sich zu befinden. In der That ist die Lehre vom Gleichgewichte am zweiarmigen Hebel, mit welcher der Brief von Dettonville an Carcavy[2]) beginnt, eine unmittelbare Anwendung einer Art von arithmetischem Dreieck (Figur 184). Sind von A nach B und C die Entfernungen 3 und 2, und hängen an allen Punkten ganzzahliger Entfernungen Gewichte in der Grösse der auf der Figur beigeschriebenen Zahlen, so findet bei Unterstützung des Punktes A

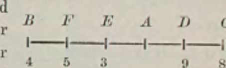

Fig. 184.

Gleichgewicht statt, weil $1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 4 = 1\cdot 9 + 2\cdot 8$ und die Wirkung des Gewichtes p in der Entfernung l durch lp gemessen wird. Die Summe $1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 4$ kann man aber auch schreiben

$$\begin{array}{r} 3 + 5 + 4 \\ + 5 + 4 \\ + 4 \end{array}$$

[1]) Pascal III, 303—311. Die im Texte angeführten Stellen gehören S. 310 und 311 an. [2]) Ebenda III, 364—385. Ein guter Auszug aller Infinitesimaluntersuchungen Pascal's bei Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* IV, 189—229.

und diese Summe soll die **bei 3 anfangende Triangularsumme von 3, 5, 4** heissen. Gleichgewicht findet also statt, wenn die Triangularsumme der von dem Unterstützungspunkte nach beiden Seiten vorhandenen Gewichte dem Unterstützungspunkte zunächst anfangend eine und dieselbe ist. Im Unterstützungspunkte selbst darf natürlich auch noch ein Gewicht von beliebiger Grösse vorhanden sein. So findet also auch wieder (Figur 185) bei Unterstützung von A Gleichgewicht statt, wenn abermals die beigeschriebenen Zahlen den Grössen der in den einzelnen Punkten aufgehängten Gewichte entsprechen. Nun bilde man etwa von C anfangend die Triangularsumme aller Gewichte $1\cdot 8 + 2\cdot 9 + 3\cdot 5 + 4\cdot 4 + 5\cdot 0 + 6\cdot 7 = 99$ und die einfache Summe aller Gewichte $8 + 9 + 5 + 4 + 0 + 7 = 33$, so ist die erstere Summe das Sovielfache der zweiten, als es wieder von C anfangend bis nach A, dieses selbst mitgezählt, Punkte giebt. Es ist natürlich, dass der Satz auch richtig bleiben muss, wenn man beide Summen von B aus bildet. Pascal giebt einen Beweis, dessen eigenthümliche Form verständlicher werden dürfte, wenn wir ihn vorher in allgemeine Buchstaben übersetzen. Die Gewichte mögen vom gewählten Anfangspunkte an gerechnet $p_1, p_2, \cdots p_{\mu+\nu-1}$ heissen, und p_μ hänge am Unterstützungspunkte. Die Triangularsumme jener Gewichte ist

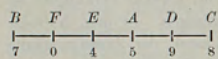

Fig. 185.

$$1\cdot p_1 + 2p_2 + \cdots + \mu p_\mu + (\mu+1)\,p_{\mu+1} + \cdots + (\mu+\nu-1)\,p_{\mu+\nu-1}.$$

Wegen des vorhandenen Gleichgewichtes ist

$$1\cdot p_{\mu+1} + 2p_{\mu+2} + \cdots + (\nu-1)\,p_{\mu+\nu-1} = 1\cdot p_{\mu-1} + 2p_{\mu-2} + \cdots + (\mu-1)p_1$$

oder

$$0 = (\mu-1)p_1 + (\mu-2)p_2 + \cdots + 1\cdot p_{\mu-1} + 0p_\mu - 1p_{\mu+1} - \cdots - (\nu-1)p_{\mu+\nu-1}.$$

Wird dieser den Werth nicht verändernde Ausdruck zur obigen Triangularsumme addirt, so geht dieselbe in

$$\mu\,(p_1 + p_2 + \cdots + p_{\mu+\nu-1})$$

über, womit der Satz bewiesen ist. Pascal schreibt nun in dem gegebenen Zahlenbeispiele

$$\begin{array}{llllll} 7 & 0 & 4 & 5 & 9 & 8 \\ 7 & 0 & 4 & 5 & 9 & \\ 7 & 0 & 4 & 5 & & \\ \hline 7 & 0 & 4 & & & \\ 7 & 0 & & & & \\ 7 & & & & & \end{array}$$

Aber das durch den Horizontalstrich abgetrennte kleine Dreieck

$$\begin{array}{lll} 7 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & \\ 7 & & \end{array}$$

beträgt wegen des vorhandenen Gleichgewichtes so viel wie

$$\begin{array}{ll} 8 & 9 \\ 8 & \end{array} \text{ oder wie } \begin{array}{ll} & 8 \\ 9 & 8 \end{array}.$$

Setzt man dieses Dreieckchen rechts von dem Diagonalstrich, so entsteht ein Rechteck

$$\begin{array}{llllll} 7 & 0 & 4 & 5 & 9 & 8 \\ 7 & 0 & 4 & 5 & 9 & 8 \\ 7 & 0 & 4 & 5 & 9 & 8 \end{array}$$

aus drei gleichen Zeilen, und, sagt Pascal[1]), wenn diese Beweisform auch ungewöhnlich ist, so ist sie kurz, klar und hinreichend für Solche, welche in der Kunst des Beweises bewandert sind. Bildet man in den allgemeinen von uns benutzten Buchstaben die bei $p_{\mu+\nu-1}$ anfangende Triangularsumme der Gewichte, so muss sie

$$\nu\,(p_1 + p_2 + \cdots + p_{\mu+\nu-1})$$

liefern. Die beiden von rechts und links anfangenden Triangularsummen verhalten sich also wie $\mu : \nu$ oder, wenn man die Zahl der Zwischenpunkte so vermehrt, dafs sie stetig aufeinander folgen und μ und ν unendlich gross werden, wie die Entfernungen des Unterstützungspunktes von den beiden Endpunkten der Strecke. Dadurch bestimmt sich aber der Unterstützungspunkt, d. h. der Punkt, bei dessen Unterstützung Gleichgewicht eintritt, oder der **Schwerpunkt** der mit Gewichten beschwerten Strecke.

Der Satz lässt sich auf höhere Raumgebilde ausdehnen, deren Theilchen man als auf die Punkte einer Geraden wirkend betrachten kann, welche senkrecht zu parallelen, die Oberfläche begrenzenden oder theilenden Ebenen steht. Man erfährt alsdann, in welcher Zwischenebene der Schwerpunkt der Oberfläche liegt. Wenn (Figur 186) die durch T hindurchgehende Ebene den Schwerpunkt der Oberfläche $YCFOZ$ enthält, so verhält sich $TO : TA$ wie die Triangularsummen der Theile der Oberfläche, deren erste bei B, die zweite bei C ihren Anfangspunkt hat. Man kann nämlich die Flächentheile als Gewichte betrachten, welche in den Punkten der Strecke OA wirksam sind. Desshalb brauche man nicht Scheu zu tragen[2]), die Sprache der Indivisibilien zu ge-

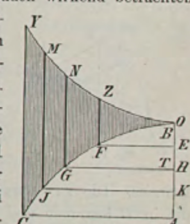

Fig. 186.

[1]) Pascal III, 367 Avertissement. [2]) Ebenda III, 372.

brauchen und von der Summe der Ordinaten u. s. w. zu reden. Man müsse nur den richtigen Gedanken damit verbinden. Wie hier Flächentheilchen als Gewichte auftreten, so sei dort von Linien oder vielmehr kleinen Rechteckchen die Rede, deren Grundlinien beliebig kleine Stücke der Axe der Figur sind.

Ausser den Triangularsummen bildete Pascal auch Pyramidalsummen[1]), welche die Summe von je um ein Element abnehmenden Triangularsummen sind. Aus A, B, C entstehen die Triangularsummen

$$1A + 2B + 3C, \quad 1B + 2C, \quad 1C;$$

aus diesen die Pyramidalsumme $1A + 3B + 6C$, wo der Coefficient des n^{ten} Elementes $\frac{n(n+1)}{2}$ ist, wie n dessen Coefficient in der ersten Triangularsumme ist. Zieht man die Triangularsumme beliebig vieler Elemente von ihrer verdoppelten Pyramidalsumme ab, so ist in dieser Differenz das n^{te} Element mit dem Coefficienten $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$ behaftet. Eine Triangularsumme verhält sich aber zur Pyramidalsumme wie eine Indivisible, weil sie um einen Grad niedriger ist[2]) und kann vernachlässigt werden. Man erkennt hier das Zurückgreifen auf den Satz der *Potestatum numericarum summa*, wenn Pascal sich auch auf diese frühere Arbeit nicht beruft. Das Ergebniss lautet dahin, dass die doppelte Pyramidalsumme gegebener Elemente als Summe dieser Elemente, jeweil mit dem Quadrate ihrer Ordnungsziffer vervielfacht erscheint.

Die Triangularsumme gegebener Elemente stellt sich dar als ein Körper, welchen Pascal *onglet* nennt[3]), ein Wort, welches verschiedene Bedeutungen in der französischen Sprache hat, z. B. Grabstichel, und an dessen Schneide dachte Pascal muthmasslich (Figur 187). Eine Figur BAC, die aus zwei zu einander senkrechten Geraden und einer Curve besteht, nennt Pascal ein *triligne* in augenscheinlicher Nachahmung des Cavalieri'schen *trilineum* (S. 838). Man bildet nun etwa von AC anfangend die Triangularsumme aller Ordinaten des dreilinigen Raumes. Die zu summierenden Zeilen stellen sich als Ebenen dar, die in B beginnen und unten durch zu AC parallele, aber B immer näher rückende Gerade abgeschlossen werden. Denkt man diese Ebenen als unendlich dünne prismatische Körperchen aufeinander gelegt, so

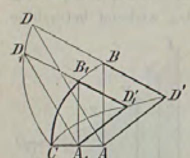

Fig. 187.

[1]) Pascal III, 376. [2]) Ebenda III, 377: *La somme triangulaire n'est qu'un indivisible à l'égard des sommes pyramidales puisqu'il y a une dimension de moins.*
[3]) Ebenda III, 379.

entsteht das Onglet $CABD$, begrenzt von drei Ebenen ABC, ABD, ADC und einer cylindrischen Oberfläche BCD. Man kann es auch so entstanden denken, dass über dem Triligne ABC ein gerader Cylinder von der Höhe $BD = BA$ errichtet ist und nun eine Schnittebene durch DAC hindurchgelegt wird, welche mit ABC einen Winkel von 45° bildet. Denkt man sich genau dieselbe Construction auch nach unten, wo ein Onglet $CABD'$ entsteht, so setzen beide sich zum Doppelonglet $DCAD'$ zusammen, und dieses steht zu dem halben Umdrehungskörper von ACD um AC in eigenthümlichen Beziehungen. Eine der Ebene DAD' parallel gelegte, durch einen Punkt A_1 der AC hindurchgehende Ebene schneidet das Doppelonglet in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke $D_1A_1D_1'$, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{2}A_1D_1'^2$ ist. Dieselbe Ebene schneidet den erwähnten halben Umdrehungskörper in einem Halbkreise vom Halbmesser A_1B_1, dessen Flächeninhalt $\frac{\pi}{2}A_1B_1^2 = \frac{\pi}{4}A_1D_1'^2$ ist. Letzterer Schnitt ist also das $\frac{\pi}{2}$fache des ersteren, und da das gleiche Verhältniss bei jedem Parallelschnitte obwaltet, so ist der genannte halbe Umdrehungskörper das $\frac{\pi}{2}$fache des Doppelonglet[1]). Pascal macht überdies noch auf andere Beziehungen beider Körper zu einander aufmerksam und beweist dieselben. Ihre gekrümmten Oberflächen, ihre Schwerpunkte u. s. w. treten dabei in Frage. Die Onglets dreiliniger rechtwinkliger Figuren sind damit in den Vordergrund der Betrachtungen gerückt, und mit ihnen beschäftigt sich eine besondere Abhandlung[2]). Gleich zu Anfang derselben stellt Pascal wieder einen neuen Begriff, den der Adjungirten der dreilinigen Figur, *l'adjointe du triligne*, auf, und dieses dürfte das erste Vorkommen des Wortes adjungiren in der Mathematik sein (Figur 188). Ist eine dreilinige Figur ABC links von einer Geraden AB gelegen und durch diese, durch die zu ihr senkrechte AC und durch die Curve BC begrenzt, und bildet man rechts von AB unter Zuhilfenahme der zu ihr senkrechten BK und irgend einer Curve AK eine zweite dreilinige Figur, so heisst diese der ersteren adjungirt. Wird nun die adjungirte Figur ABK durch Umfalzen in eine solche Lage gebracht, dass ihre Ebene senkrecht zur Ebene der ABC sich befindet, zieht man aus jedem Punkte D der AB senkrecht zu AB die selbst unter rechtem Winkel an einander stossenden DF, DO und vollendet aus

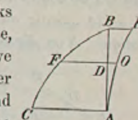

Fig. 188.

[1]) Pascal III, 380. [2]) Ebenda III, 385—403.

ihnen ein Rechteck, so entsteht ein Körper, den Pascal als *triligne multiplié par la figure adjointe* bezeichnet, hier sein Studium des Gregorius von St. Vincentius verrathend, nach dessen *ductus plani in planum* der Ausdruck offenbar gebildet ist. Der Rauminhalt dieses Körpers ist aber auch einer zweiten Zerlegung in parallele Schnitte fähig. Wie man die erstgenannten Ebenen parallel zu AC führte, kann man sie auch parallel zu AB führen. Der Körperinhalt verändert sich selbstverständlich nicht, er wird nur in andersartige Elemente zerlegt, ein Verfahren, dessen die spätere Integralrechnung sich mit Vorliebe bedient hat und noch bedient. Man hat desshalb auch die nicht sehr leicht verständliche Sprache Pascal's in die Zeichen der Integralrechnung zu übersetzen versucht[1]) und dadurch nachgewiesen, dass Pascal mit der sogenannten theilweisen oder partiellen Integration,

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du,$$

bekannt war, wenn er auch genöthigt war, den gegenwärtig allgemeinen Satz vielleicht in ein Dutzend von besonderen Sätzen zu theilen. Auch die übrigen Abhandlungen Pascal's aus dem Jahre 1659 sind wesentlich von Aufgaben der Integralrechnung erfüllt, bei deren Lösung Pascal immer wieder vermöge des Mangels an einer allgemeinen Bezeichnung schwerfällig von einer Sonderuntersuchung zur anderen fortschreiten musste, innerhalb dieser Einengung aber die Auflösungen wirklich lieferte. Ohne über alle diese Abhandlungen zu berichten, begnügen wir uns, deren Ueberschriften anzugeben[2]): *Propriétés des sommes simples triangulaires et pyramidales. Traité des sinus du quart de cercle. Traité des arcs de cercle. Petit traité des solides circulaires. Traité général de la roulette. Dimension des lignes courbes de toutes les roulettes. De l'escalier, des triangles cylindriques et de la spirale autour d'un cône. Égalité des lignes spirale et parabolique.* Von diesen Abhandlungen ist die *Dimension des lignes courbes de toutes les roulettes* mit einer besonderen Widmung an Huygens, die *De l'escalier* u. s. w. mit einer eben solchen an De Sluse versehen. Der *Traité des sinus du quart de cercle*[3]) beginnt mit einem Lemma, welches (Figur 189) die Aehnlichkeit der Dreiecke EKE und AID betont. Diese Figur ist, wie im 98. Kapitel gezeigt werden wird, von folgewichstigster Einwirkung auf Leibniz gewesen.

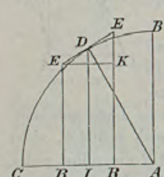

Fig. 189.

[1]) Marie l. c. IV, 202—215. [2]) Pascal III, 403—464. [3]) Ebenda III, 409.

So sehr Huygens selbst es verdient, auch wegen seiner vielfach bahnbrechenden Leistungen in der Curvenlehre, mithin als Mitarbeiter auf dem Gebiete der Infinitesimalbetrachtnngen ausführlich behandelt zu werden, so kann dieses doch nicht innerhalb dieses Bandes geschehen. Sein *Horologium oscillatorium,* in welchem die zahlreichsten und wichtigsten Entdeckungen sich vorfinden, wurde erst 1673 veröffentlicht, fällt also über die Grenze hinaus, welche wir uns gesteckt haben.

Anders verhält es sich mit De Sluse[1]). Seine mathematischen Leistungen der Oeffentlichkeit zu übergeben, zögerte er ungemein, doch ist Manches und keineswegs Unbedeutendes in Briefen niedergelegt. Das Cycloiden-Preisausschreiben, welches ihm durch Carcavy zugeschickt worden war, ohne dass der Name des Preisstellers dabei genannt worden wäre[2]), veranlasste ihn, an Pascal, mit welchem er ohnedies schon einige Briefe gewechselt hatte, darüber zu schreiben. Am 2. August 1658 erweiterte er dabei sehr wesentlich[3]) den Begriff der Cycloide. Dieses Namens bediente De Sluse sich fortwährend und nicht des Wortes Roulette, welches das Preisausschreiben ja auch noch nicht kannte. De Sluse denkt sich eine ganz beliebige Curve, welche längs einer Geraden mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortgeschoben wird, während ein Punkt gleichfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Curve durchläuft. Der Ort, welchen der genannte Punkt bei seiner doppelten Bewegung auf und mit der Curve beschreibt, heisst ihm Cycloide, in welchem Verhältnisse auch die beiden Geschwindigkeiten zu einander stehen mögen. Von dieser Beschreibungsart ausgehend, gelangt De Sluse zu einander gleichflächigen, gemischtlinigen Dreiecken, welche den Trilignen Pascal's nahe verwandt sind, wie De Sluse selbst in einem Briefe vom 29. April 1659 bemerkt[4]).

Eine Auflösung des Tangentenproblems für algebraische Curven[5]), deren Gleichungspolynom in Gestalt einer rationalen ganzen Function gegeben war, scheint De Sluse seit 1652 besessen zu haben. Sie besteht in Folgendem. Die Gleichung der Curve heisse $f(x, y) = 0$, wo x die Abscisse, y die Ordinate der Curve bedeutet, und a sei die Subtangente. Man schreibt sämmtliche Glieder von $f(x, y)$, in welchen der Buchstabe x vorkommt, links, sämmtliche Glieder, in welchen der Buchstabe y vorkommt, mit entgegengesetztem Vorzeichen, rechts hin. Glieder, welche x und überdies y enthalten, werden auf

[1]) *Correspondence de René François de Sluse publiée pour la première fois et précédée d'une introduction par* M. C. Le Paige im *Bulletino Boncompagni* XVII (1884) und C. Le Paige im *Bulletin de l'Institut archéologique Liègeois* XXI, 532—549 (1888). [2]) *Bulletino Boncompagni* XII, 499. [3]) Ebenda XII, 501. [4]) Ebenda XII, 507. [5]) Ebenda XII, 477—478, 605, 607.

beiden Seiten Stellung finden müssen. Die Glieder rechts werden, jedes für sich, mit dem Exponenten der in ihnen vorkommenden Potenz von y vervielfacht. Ebenso verfährt man links mit dem Exponenten der in jedem Gliede verkommenden Potenz von x und ersetzt dabei ein x in jedem Gliede links durch a. Schreibt man nun ein Gleichheitszeichen zwischen beide nach dieser Vorschrift veränderten Gliedergruppen, so hat man eine nach a lineare Gleichung, aus welcher diese Grösse sich ergiebt. Ist z. B.

$$x^{n+1} - cx^n + by^n = 0,$$

so wird zunächst

$$x^{n+1} - cx^n \qquad\qquad - by^n$$

angesetzt und daraus

$$(n+1)\,ax^n - nacx^{n-1} = -nby^n$$

gebildet, nebst

$$a = \frac{nby^n}{ncx^{n-1} - (n+1)\,x^n}.$$

Die Curve

$$py^2 + 2qxy^3 + sx^3 + t = 0$$

dagegen veranlasst den Ansatz

$$2qxy^3 + sx^3 \qquad\qquad - py^2 - 2qxy^3$$

und daraus

$$2qay^3 + 3asx^2 = -2py^2 - 6qxy^3,$$

also

$$a = -\frac{2py^2 + 6qxy^3}{2qy^3 + 3sx^2}.$$

Die erste Curve, welche wir hier als Beispiel gewählt haben, ist eine sogenannte Perle[1]), deren allgemeine Gleichung

$$by^n = (c - x)^p\, x^m$$

hier für den Sonderfall $p = 1$, $m = n$ in's Auge gefasst wurde. Diese Perlen sind von De Sluse zuerst untersucht worden, der die Quadratur des Kreises mit ihrer Hilfe für möglich hielt, beziehungsweise eine Abhängigkeit der Quadraturen beider Curven von einander behauptete.

Wir haben (S. 808) des Mesolabum von 1659 gedacht, in welchem De Sluse die Aufgabe behandelte, zwischen zwei Grössen zwei geometrische Mittel einzuschalten, und der zweiten Auflage dieses Werkes von 1668, in welcher De Sluse die früher bei Lösung jener besonderen Aufgabe brauchbaren Mittel als zur Behandlung jeder kubischen Gleichung tauglich erkannte. Diese zweite Auflage des Mesolabum besitzt noch einen Anhang mit der Ueberschrift: Verschiedenes, *Miscellanea*[2]).

[1]) *Bulletino Boncompagni* XII, 472. [2]) Ebenda XII, 475—476.

Neben anderen nicht uninteressanten Dingen findet man in den Miscellaneen die erste allgemeine Untersuchung von Inflexionspunkten von Curven und von solchen Curven, welche die untersuchten gerade in ihren Inflexionspunkten schneiden. Diese und andere Betrachtungen verschafften dem Werke unter den Zeitgenossen die höchste Anerkennung. Spätere Leistungen von De Sluse sind von geringerem Belang.

Es bleibt uns nur noch übrig, auf die Ausgabe der Descartes-schen Geometrie von 1659 zurückzugreifen und die darin zum Abdrucke gebrachten, nicht von Descartes herrührenden, auf die höhere Curvenlehre bezüglichen Abhandlungen zu besprechen. Sie gehören zwei holländischen Mathematikern an: Hudde und Van Heuraet.

Wir haben an die Methode von Johannes Hudde zur Erkennung der mehrfachen Wurzeln einer Gleichung (S. 802), welche in einem Briefe vom Juli 1657 niedergelegt ist, nur zu erinnern. Im Januar des folgenden Jahres 1658 entstand ein zweiter Brief Hudde's über Maximal- und Minimalwerthe, *De Maximis et Minimis*[1]). Er wendet zur Bestimmung der grössten und kleinsten Werthe genau das gleiche Mittel an, welches in dem früheren Briefe zur Ermittelung gleicher Gleichungswurzeln geführt hatte, nämlich die Multiplication der einzelnen Glieder des Ausdruckes, welcher einen grössten oder kleinsten Werth annehmen soll, mit Zahlen, welche eine arithmetische Progression bilden, und zwar, meint er, könne man füglich als solche Factoren die Exponenten der Potenzen von x in den einzelnen Gliedern wählen, wobei vorausgesetzt ist, dass der zu behandelnde Ausdruck erstlich rational ist und zweitens kein x im Nenner enthält. Ist dagegen eine gebrochene Function zu untersuchen, so weiss Hudde offenbar nur dann Rath, wenn der Nenner ein Monom x^n ist, und wenn es dann genügt, den Zähler für sich zu untersuchen. Auch an Fälle, in welchen mehrere Veränderliche vorkommen, die durch Gleichungen mit einander verbunden sind, wagt er sich heran und eliminirt mittels der betreffenden Gleichungen die störenden überzähligen Unbekannten. Einen Beweis seiner Methode giebt Hudde nicht. Zur Verdeutlichung unserer Schilderung lassen wir zwei von Hudde's Beispielen folgen. Erstlich soll

$$(3a - b)\,x^3 - \frac{2b^2ax}{3c} + a^2b$$

Maximum werden. Hudde vervielfacht die Glieder mit 3, 1, 0. Diese Zahlen bilden freilich keine arithmetische Progression, aber der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass in dem vorgelegten Ausdrucke

[1]) Descartes, Geom. I, 507—516.

streng genommen auch das Glied $0x^2$ vorkomme, welches mit dem unter den Multiplicatoren fehlenden 2 zu vervielfachen sei. Das Ergebniss der Multiplication ist

$$3(3a-b)x^3-\frac{2b^2ax}{3c}=0,\quad (9a-3b)x^2=\frac{2b^2a}{3c},$$

und damit begnügt sich Hudde. Zweitens soll $z=\frac{1}{2}v-y$ Maximum werden, während bekannt ist $y^3-nyx+x^3=0$ und $v-x=y$. Man setzt y aus der letzten Gleichung in die beiden vorhergehenden ein und findet

$$x=\frac{v}{2}+z,\quad v^3-3v^2x+3vx^2=vnx-nx^2.$$

Nun wird der Werth von x aus der ersten neuen Gleichung in die zweite eingesetzt und damit

$$\frac{1}{4}v^3-\frac{1}{4}nv^2+3z^2v+nz^2=0$$

erhalten. Das Gleichungspolynom vervielfacht Hudde mit der fallenden Progression 3, 2, 1, 0, so dass $\frac{3}{4}v^3-\frac{1}{2}nv^2+3z^2v=0$ entsteht und $z^2=\frac{1}{6}nv-\frac{1}{4}v^2$. Der so gewonnene Werth von z^2 verändert die vorher zwischen v und z gewonnene Gleichung in $v^2=\frac{1}{3}n^2$, ein Ergebniss, welches vollständig richtig ist. Hudde behauptet in einer Nachschrift[1]), auch darüber geschrieben zu haben, wie man Maximalwerthe von Functionen mehrerer Veränderlichen finde, wenn zwischen ihnen keine Gleichungen gegeben sind, doch ist das Alles, was wir von dieser hochbedeutsamen Erweiterung der Aufgabe wissen. Dass Hudde's Verfahren in dem Falle einer einzigen Veränderlichen noch an denselben Unvollkommenheiten leidet, welche dem von Fermat anhaften, dass es nämlich unentschieden lässt, ob Maximum oder Minimum eintritt, dass es versagt, wenn mehrere Ableitungen der untersuchten Function als nur die erste verschwinden, dass es überdies nur bei ganzen rationalen Functionen anwendbar ist, erkennt man sofort. Hudde scheint, wenn man einer Aeusserung Leibnizens volles Vertrauen schenken darf[2]), auch mit der ungemein wichtigen Aufgabe sich beschäftigt zu haben, die Gleichung einer Curve aus gegebenen Punkten derselben zu ermitteln, er soll sich sogar gerühmt haben, im Stande zu sein, die Gleichung der Umrisse des Bildnisses irgend einer Persönlichkeit herzustellen.

Heinrich van Heuraet ist (S. 905) der Erfinder einer Rectificationsmethode[3]), welche er in einem Briefe vom 13. Januar 1659

[1]) Descartes, Geom. I, 516. [2]) Montucla II, 150. [3]) Descartes, Geom. I, 517—520.

beschrieben hat. Er verwandelte die Frage nach der Länge einer Curve in die nach dem Flächenraume einer zweiten Curve, führte also die eine Aufgabe auf eine zweite zurück, deren Auflösung zwar auch nicht allgemein gegeben war, aber doch schon in so zahlreichen Fällen, dass man jene Zurückführung als einen Fortschritt zu bezeichnen hatte (Figur 190). Nach Van Heuraet ist die Fläche $ALKMB$ gleich dem Rechtecke, dessen Seiten eine Constante a und die Länge der Curve EDF sind, wenn nur auf jeder Ordinate KDC der beiden Curven die Proportion stattfindet $a:KC=DC:DN$, wo DN die Normale der auf ihre Länge zu untersuchenden Curve EDF im Punkte D ist. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich am leichtesten unter Anwendung neuerer Hilfsmittel. Wir setzen $OC=x$, $DC=y$, $KC=Y$, alsdann ist $DN=y\sqrt{1+y'^2}$ und die Proportion heisst

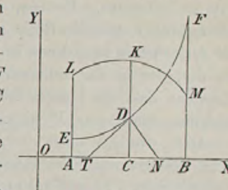

Fig. 190.

$$a:Y=y:y\sqrt{1+y'^2}.$$

Daraus folgt $Y=a\sqrt{1+y'^2}$ und

$$\int Y dx=a\int\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

wenn beide Integrationen zwischen denselben Abscissen, etwa beide von OA bis OB, vollzogen werden. Van Heuraet's Erfindung steht nicht allein. Wir haben Zurückführungen von Rectificationen auf Quadraturen auch bei Fermat, bei Neil ausführen sehen. Die Veröffentlichung Van Heuraet's ist unzweifelhaft die älteste, und ein Anlehnen an die beiden anderen Schriftsteller steht bei ihm ganz ausser Frage. Auch das Umgekehrte möchten wir nicht behaupten. Weit eher vermuthen wir den gemeinsamen Keim aller dieser Verwandlungen der Betrachtung einer Curve in die einer anderen in der durch Cavalieri zuerst zum Abdrucke gebrachten Vergleichung der Spirale mit der Parabel.

Ein kurzes Ueberdenken des in den vier letzten Kapiteln 78 bis 81 Zusammengestellten lässt Eines klar hervortreten: dass das halbe Jahrhundert von 1615—1668 als das der Erfindung der Infinitesimalrechnung benannt werden darf. Aufgaben der Integralrechnung wurden zuerst behandelt. Aufgaben der Differentialrechnung folgten. Dann lösten beide Gattungen von Aufgaben in buntem Gemische sich ab. Und bunt wie die Aufgaben mischt sich die stammliche Zugehörigkeit der Männer, welchen die gewaltigen

Fortschritte verdankt werden. Von Deutschland nach Italien, von dort nach Frankreich, nach den Niederlanden, nach England haben wir den Gedanken wandern sehen, an den gleichen Orten haben wir neue Gedanken begrüssen dürfen. Zweierlei ist aber aus dem Gewirre der Aufgaben, aus dem Gewühle der Mathematiker unzweifelhaft zu erkennen. Erstens, dass die Franzosen es waren, welche die eigentlich leitende Rolle spielen, und dass insbesondere Fermat als derjenige zu bezeichnen ist, der in der Differentialrechnung, Pascal als der, der in der Integralrechnung am erfolgreichsten thätig war. Zweitens, dass ein innerer Zusammenhang zwischen allen behandelten Aufgaben doch nur Wenigen, am meisten vielleicht Fermat einleuchtete, welcher auch den ersten Anlauf dazu nahm, eine einheitliche Bezeichnung einzuführen, der nur ein wesentlicher Mangel anhaftete: dem Fermat'schen E war nicht anzusehen, wovon es als Veränderung auftrat.

Das war also das Gebiet, welches nunmehr die Thätigkeit der hervorragendsten Mathematiker forderte und in Anspruch nahm. Es musste, wenn wir so sagen dürfen, gezeigt werden, dass der Wortlaut der scheinbar so verschieden klingenden Aufgaben schliesslich einer Sprache angehörte. Es musste dieser Sprache eine geeignete Schrift zur Verfügung gestellt werden.

Zwei Männer waren es vornehmlich, welche diesen Fortschritt der Wissenschaft an ihren Namen knüpften, und welche deshalb verdienen, in ähnlicher Weise am Ende dieses zweiten Bandes aufzutreten, wie Leonardo der Pisaner und Jordanus Nemorarius am Ende des ersten Bandes. Sie gehörten nicht mehr Frankreich an, sei es, dass man dort, seit Fermat's Arbeiten bekannter wurden, glaubte, dieser habe in der Bezeichnung schon Genügendes geleistet, sei es, dass der französische Geist dem Formalen sich weniger anpasst. Jedenfalls ist es England und Deutschland, wo inzwischen die Männer der Zukunft heranwuchsen, für welche das Jahr 1668 und das darauf folgende 1669 Wendepunkte ihres Lebens bilden.

1666 erschien in Leipzig die Doctordissertation von Gottfried Wilhelm Leibniz. 1668 knüpfte er Beziehungen zu einflussreichen Persönlichkeiten an verschiedenen Orten an, welche für seine Laufbahn von grösster Bedeutung wurden. 1669 wurde Isaac Newton Professor der Mathematik in Cambridge.

Register.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

X.

Y.

Z.

著者名 Cantor, M.-Vorleungen über

圖書名 Geschichte der Mathematik. II

部門 71　番號 800406

借用者科姓名印	借用期間	返納月日
科 Inaba	自 7年 9月 29日 至 年 月 日	8年 1月 6日 田中
科	自 年 月 日 至 年 月 日	年 月 日 田中
科	自 年 月 日 至 年 月 日	年 月 日
科	自 年 月 日 至 年 月 日	年 月 日
科	自 年 月 日 至 年 月 日	年 月 日
科	自 年 月 日 至 年 月 日	年 月 日