70. Kapitel.

Geschichte der Mathematik. Classikerausgaben.

Wir beginnen die Schilderung des Zeitraumes, dem der XV. Abschnitt gewidmet ist, wieder mit denjenigen Schriftstellern, welche die Geschichte unserer Wissenschaft selbst bearbeiteten.

Ein in Ungarn geborener Augsburger Arzt, zugleich Professor der Logik und Mathematik am dortigen Gymnasium und Bibliothekar ebendaselbst, Georg Henisch[1]) (1549—1618), veröffentlichte zwischen 1605 und 1609 mehrere Schriften, deren Erwähnung hier angemessen erscheint: eine Schrift über Zahlzeichen (*De numeratione multiplici, vetere et recenti*), eine solche über die römische Bruchrechnung (*De asse et partibus ejus*), einen Commentar zu der Sphaera des Proklus. Ebenfalls aus dem Jahre 1609 ist Henisch's *Arithmetica perfecta et demonstrata*, ein damals beliebtes Lehrbuch, welches aber so gar keinen Anlass zu Bemerkungen giebt, dass wir es hier schon nennen und nicht erst im 74. Kapitel, wo wir von Rechenbüchern handeln.

Giuseppe Biancani[2]), latinisirt Blancanus, aus Bologna, welcher dem Jesuitenorden angehörte und in Padua bis zu seinem Tode (1624) Mathematik lehrte, hat 1615 eine *Clarorum mathematicorum Chronologia* herausgegeben, welche in 26 Abschnitte von je einem Jahrhundert eingetheilt ist. Das erste derselben beginnt mit dem Jahre 852 vor Christus oder 100 vor der Gründung von Rom, das zweite mit der Gründung von Rom, beziehungsweise dem Jahre 752; das neunte ist als ein Semisäculum bezeichnet, weil es nur von 52 bis zum Geburtsjahre Christi führt. Dann beginnt jedes Jahrhundert mit den chronologisch allgemein als Anfang eines Jahrhunderts bezeichneten Jahrgängen, das 26. und letzte also mit dem Jahre 1601. Blancanus hält es für nothwendig, auf dem Titelblatte zu erklären, er habe solche Persönlichkeiten wie Atlas, Zoroaster, Endimion, Orpheus, Linus und Andere weggelassen, welche theils

---

[1]) Poggendorff I, 1064. — Allgem. Deutsche Biographie XI, 750—751. Artikel von J. Franck. [2]) De Backer, *Bibliothèque des écrivains de la compagnie de Jésus* I, 91.

der Fabel angehören, theils in ein ungewisses Alterthum zurückweisen. Ueberdies sei Jubal, der Erfinder der Musik, weggeblieben, weil er durch einen allzugrossen Zeitraum von den zunächst Behandelten getrennt sei. Die Unzuverlässigkeit des Blancanus ist haarsträubend. Ein Geminus lebt für ihn in dem 352 vor Christus beginnenden Jahrhunderte, ein zweiter Geminus von Rhodos, Lehrer des Proklus, in dem 301 nach Christus beginnenden. Theon von Smyrna gehörte dem XII. nachchristlichen Jahrhunderte an als Zeitgenosse des Jordanus Nemorarius. Im XV. Jahrhunderte hat Leonardo von Pisa gelebt. Diese wenigen Beispiele dürften genügen. Eine Angabe dessen, wodurch die betreffenden Mathematiker sich verdient gemacht haben, muss man vollends bei Biancani nicht suchen. Im günstigsten Falle ist der Titel eines oder des anderen Werkes jedes Verfassers angegeben.

Hugo Semple[1]), latinisirt Sempilius, 1594 in Schottland geboren, 1654 in Madrid gestorben, gehörte ebenfalls dem Jesuitenorden an. Seinen 1635 in Antwerpen gedruckten 12 Büchern *De Mathematicis disciplinis* soll[2]) ein ausführliches, innerhalb der einzelnen mathematischen Fächer alphabetisch geordnetes Verzeichniss der Mathematiker als Anhang dienen.

Gerhard Johann Voss, latinisirt Vossius, ist 1577 in einem Dorfe bei Heidelberg geboren, doch war die Familie niederländischer Abstammung. In den Niederlanden hat er auch frühzeitige Anerkennung gefunden. Schon 1600 wirkte er als Rector der Schule in Dordrecht, 1614 siedelte er an die Universität Leiden, 1643 an das neuerrichtete Gymnasium in Amsterdam über. Dort starb er 1649. Seine Leistungen liegen vornehmlich auf dem Gebiete des classischen Alterthums. Mythologie, Geschichte, Grammatik verdanken ihm Arbeiten, welche zu den bahnbrechenden gezählt werden. Mathematische Studien kamen dem entsprechend für Vossius nur so weit in Betracht, als sie sich mit seinen literärgeschichtlichen Forschungen kreuzten, und man sollte dessen bei Beurtheilung des 1650 in Amsterdam gedruckten umfangreichen Bandes *De universae mathesios natura et constitutione liber* eingedenk sein. Als Aufschrift seines Manuscriptes hatte Vossius zudem die Worte hinzugefügt: *Diutius si immorer, vereor, ne videar immori velle*, und sie waren zur Wahrheit geworden. Noch bevor der Druck vollendet war, war der Verfasser gestorben, und der Herausgeber durfte um so mehr das Motto des-

[1]) De Backer, *Bibliothèque des écrivains de la compagnie de Jésus* V, 690.
[2]) Joh. Nic. Frobesius, *Historica et dogmatica ad mathesin introductio* (Helmstädt 1750) pag. 67.

selben auf dem Titeblatte erscheinen lassen. Die einzelnen Theilgebiete der Mathematik: Arithmetik, Geometrie, Logistik, Musik u. s. w. werden der Reihe nach geschichtlich behandelt und überall die hauptsächlichen Schriftsteller ihrer Zeitfolge nach genannt. Das ziemlich genaue Register ist leider nach den Vornamen geordnet, was das Nachschlagen wesentlich erschwert. Es ist nicht zu leugnen, dass Vossius aus Schriftstellern schöpfte, die nicht eigentlich Fachmänner waren, dass er sogar die Mathematiker selbst zu lesen vermöge seiner Vorbildung kaum im Stande war, dass er auch seine unmittelbaren Gewährsmänner nur in den seltensten Fällen nennt. Diese Bemängelungen sind richtig, und richtig ist auch, dass kein unbedingtes Zutrauen allen bei Vossius gesammelten Angaben entgegengebracht werden kann. Immerhin ist der 502 enggedruckte Quartseiten starke Band das erste Werk, das man, ohne allzusehr schönfärberisch zu reden, eine Geschichte der Mathematik zu nennen hat.

Nach diesem Werke ist es fast ein Unrecht, eine neun Seiten lange, wesentlich aus Petrus Ramus geschöpfte Einleitung besonders zu nennen, welche Andreas Tacquet[1]) unter der Ueberschrift *Historica narratio de ortu et progressu matheseos* seinen erstmalig 1654, später häufiger gedruckten Elementa geometriae planae ac solidae quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata vorausschickte. Tacquet, von dem wiederholt die Rede sein wird, ist 1612 in Antwerpen geboren, 1660 ebenda gestorben. Er war Jesuit und 15 Jahre lang Lehrer der Mathematik an den Ordenscollegien zu Löwen und Antwerpen.

Wie wir im vorigen Abschnitte als den geschichtlichen Forschungen nahe verwandt Ausgaben alter Schriftsteller und Versuche deren verloren gegangene Schriften wiederherzustellen bezeichnet haben, so wollen wir auch gegenwärtig verfahren.

Als erste auf diesem Gebiete nennenswerthe Persönlichkeit begegnet uns Marino Ghetaldi[2]). Er ist 1566 in Ragusa geboren, 1627 ebenda gestorben. Auf wissenschaftlichen Reisen trat er bedeutenden Gelehrten, wie Clavius in Rom, Vieta in Paris nahe (S. 640). Von Vieta's Apollonius Gallus nahm Ghetaldi die Anregung zu zwei Veröffentlichungen, welche beide dem Jahre 1607 angehören. In dem *Apollonius redivivus seu restituta Apollonii pergae de inclinationibus Geometria* wurde, wie der Titel es ausspricht, eine Wieder-

[1]) De Backer, l. c. II, 615. [2]) E. Gelcich, Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des Marino Ghetaldi, Patricier von Ragusa aus dem Jahre 1630, Zeitschr. Math Phys. XXVII, Supplementheft S. 191—232. Vergl. zunächst besonders S. 195.

herstellung der verlorenen Schrift περὶ νεύσεων versucht. In dem *Supplementum Apollonii Galli* wurden sechs Berührungsaufgaben behandelt, bei welchen Vieta sich nicht aufgehalten hatte. „So wird“, sagt Ghetaldi in der Vorrede, „der Apollonius Galliens nicht ohne den Illyriens den pergäischen erwecken, der durch die Schädigung der Zeit vernichtet oder von der Rohheit unterdrückt dalag.“

Auch das folgende Jahr 1608 war Zeuge einer durch Willebrord Snellius[1]) versuchten Wiederherstellung einer apollonischen Schrift. Der Vater Rudolf Snellius, geboren 1546 in Oudewater, besuchte bereits im 15. Lebensjahre die auswärtigen hohen Schulen: Jena, Wittenberg, Heidelberg, Marburg, später Pisa und Florenz, dann wieder Marburg waren seine Aufenthaltsorte. Nach 16jähriger Wanderung kehrt er 1577 in die Heimath zurück und liess sich zunächst in Oudewater, dann aber 1578 in Leiden nieder, wo er in einem Einwohnerverzeichnisse von 1581 als Professor der Mathematik bezeichnet ist, und wo neben ihm und seiner Frau beider Söhnchen Willebrord genannt ist. Rudolf Snellius starb 1613 in Leiden. Irgend hervorragende Leistungen desselben sind nicht aufgezeichnet. Ganz anders verhält es sich mit dem Sohne Willebrord Snellius van Roijen. Er muss, wie bemerkt, 1581 gelebt haben, und nimmt man ausserdem als zuverlässig an, was er von sich selbst gesagt hat, er sei im Jahre 1600 eben 19 Jahre alt geworden, als er öffentliche Vorlesungen über den ptolemäischen Almagest hielt, so muss 1581 das Geburtsjahr gewesen sein. Bereits 1590 steht der Name des damals demnach 9jährigen Knaben in dem Matrikelbuche der Leidner Universität, was auf dessen frühe Reife gedeutet werden mag, wenn auch bei Professorensöhnen der für sie kostenfreie Eintrag aus anderen Zweckmässigkeitsgründen viel früher zu erfolgen pflegte, als an einen eigentlichen Universitätsbesuch zu denken ist. Von 1600 etwa bis gegen 1613 war Willebrord Snellius, dem väterlichen Beispiele folgend, auf Reisen. In Würzburg lernte er Adriaen van Roomen, in Prag Tycho Brahe und Kepler kennen. Beim Tode des Vaters, für den er schon während dessen letzter Krankheit Vorlesungen abgehalten hatte, wurde er 1613 zum Professor der Mathematik ernannt und blieb in dieser Stellung bis zu seinem 1626 erfolgenden Tode. Seine erste wissenschaftliche Veröffentlichung, welche uns die Veranlassung giebt, ihn an dieser Stelle zu nennen, ist sein *Apollonius Batavus*[2]) von 1608, die Wiederherstellung der apollonischen Schrift περὶ διωρισμένης τομῆς, über den bestimmten Schnitt. Allerdings

[1]) P. van Geer, *Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius* (*Archives Néerlandaises* Bd. 18 vom December 1883) und Rud. Wolf, Astronomische Mittheilungen Nr. LXXII. [2]) Kästner III, 187.

hat Snellius, wie ein späterer Wiederhersteller, Robert Simson, rügte, sich von der Art der Griechen weit entfernt und überdies nur vier Aufgaben besprochen, während Apollonius deren neun behandelte.

Auf Ghetaldi's vorher genannte Wiederherstellung der Berührungen kam Alexander Anderson 1612 mit seinem *Supplementum Apollonii redivivi* zurück[1]). Es ist das derselbe in Schottland geborene, aber in Paris lehrende Mathematiker, der um die Herausgabe Vieta-scher Schriften sich verdient gemacht hat.

In Blancanus lernten wir (S. 651) einen traurigen Geschichtsschreiber kennen. Das Machwerk, welches wir zu schildern hatten, ist 1615 als Anhang zu einem Werke erschienen, welches eine bedeutend günstigere Beurtheilung verdient: *Aristotelis loca mathematica ex universis ipsius Operibus collecta et explicata.* Der Titel giebt über den Inhalt genügende Auskunft. Es ist eine, wenn auch nicht ganz vollständige, doch sehr reichhaltige Sammlung der bei Aristoteles vorkommenden, auf Mathematik im weitesten Sinne des Wortes bezüglichen Stellen, jeweils mit Erläuterungen versehen, die auch heute noch, ebenso wie die Zusammenstellung selbst, des Nutzens nicht entbehren.

Im höchsten Grade verdienstlich war der 1621 in Paris herausgegebene und mit Anmerkungen versehene Abdruck des griechischen Textes des Diophant, welchen Claude Gaspard Bachet de Méziriac[2]) einer pariser Handschrift entnahm, die er mit zwei anderen und mit Xylander's Uebersetzung verglich. Bei dem schlechten Zustande der sämmtlichen gebrauchten Handschriften war die Arbeit des Herausgebers eine unsäglich mühevolle. Sie war überdies durch den Umstand erschwert, dass Bachet während der Arbeit in einem langwierigen Fieberzustande sich befand, dessen melancholische Einwirkung er durch um so angestrengtere Thätigkeit zu bekämpfen suchte. Bachet (1587—1638) war neben seiner mathematischen Thätigkeit auch in den schönen Wissenschaften heimisch und seit 1635 Mitglied der französischen Akademie[3]).

Claude Hardy[4]) († 1678) war gleich Bachet nicht ausschliesslich Mathematiker. Er war richterlicher Beamter am Chatelet zu Paris, und ausserdem rühmt man ihm nach, er habe die Kenntniss von 36 verschiedenen orientalischen Dialecten besessen. Er war mit Mydorge und Descartes, welche beide uns im 71. Kapitel zuerst wiederbegegnen werden, befreundet. Hardy hat um 1625 die erste griechische Ausgabe der euklidischen Data mit lateinischer Uebersetzung und Erläuterungen besorgt[5]).

[1]) Kästner III, 186. [2]) Ebenda III, 152—162. — Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 281—282. [3]) *Nouvelle Biographie universelle* III, 62—63. [4]) Ebenda XXIII, 370—371. [5]) Kästner III, 182.

Mancherlei Schriften griechischer Geometer hat Pierre Hérigone[1]) in einem Sammelwerke herausgegeben, welches zuerst 1634, dann 1644 sowohl in französischer als in lateinischer Sprache gedruckt ist. *Cours mathématique* ist der Titel des im Ganzen sechsbändigen Werkes, von welchem aber nur der erste Band jene alten Schriften enthält: die Elemente und Daten Euklid's und solche Wiederherstellungen von Abhandlungen des Apollonius, welche Vieta, Snellius, Ghetaldi geliefert hatten. Als eigene Zuthat Hérigone's ist eine Zeichensprache hervorzuheben, deren er sich, wenn auch nicht ausnahmslos, bediente, und welche als Vorläuferin allgemeinerer später durch Leibniz veranstalteter Versuche betrachtet worden ist[2]). Als Gleichheitszeichen benutzt er $2|2$. Ist dagegen eine 3 durch einen Verticalstrich von einer 2 getrennt, so ist dadurch Ungleichheit angezeigt, und zwar steht das Grössere auf Seiten der 3. Ist also eine Strecke a grösser als eine solche b, so kann man entweder durch $a\ 3|2\ b$ oder nach Belieben auch durch $b\ 2|3\ a$ dieses zur Anschauung bringen. Ein Verhältniss wird durch π als Anfangsbuchstabe von Proportion bezeichnet. Mithin hat $4\pi 6\ 2|2\ 10\pi 15$ bei Hérigone die Bedeutung: 4 verhalte sich zu 6 wie 10 zu 15.

Die euklidischen Porismen fanden einen Wiederhersteller in Albert Girard[3]). Von seinen Lebensumständen ist nur Weniges bekannt. Die durch ihn besorgte Gesammtausgabe der Werke von Simon Stevin erschien 1634, und in dem Widmungsbriefe beklagt Girard's Wittwe nebst 11 Kindern den nun ein Jahr alten Verlust des Gatten und Vaters, der nichts hinterlassen habe als einen guten Namen. Damit ist eine Tagebuchbemerkung von Constantin Huygens in Uebereinstimmung, welche den 9. December 1632 als Girard's Todestag nennt[4]). Aus einigen Anmerkungen der Stevin-Ausgabe geht ferner hervor, dass Girard in den Niederlanden fremd war und in gehässiger Weise eines gewissen Cardinals, offenbar des Cardinals von Richelieu, gedenkt. Nimmt man hinzu, dass Girard ausschliesslich französisch geschrieben hat, so gewinnt die Muthmassung an Wahrscheinlichkeit, er sei französischer Protestant gewesen und seines Glaubens wegen nach den Niederlanden ausgewandert. Die Wahrscheinlichkeit wird vollends zur Gewissheit durch den Ortsbeinamen

[1]) Kästner III, 46—50. [2]) *La logique mathématique avant Leibniz* par Gino Loria im *Bulletin Darboux* für 1894. [3]) Terquem in den *Nouvelles annales de mathématiques* XII, 195 (1853). — G. A. Vorstermann van Oijen im *Bulletino Boncompagni* III, 359—362 (1870). — Paul Tannery im *Bullet. Darboux* 2e Série T. VII (1883). — H. Dannreuther in den *Mémoires de la Société des lettres, sciences et arts de Bar-le-Duc*, 3e Série T. III (1896). [4]) Korteweg im *Intermédiaire des mathématiciens* II, 193 (Paris 1895).

Samielois, welchen Girard führte, und für welchen die Uebersetzung *aus Saint-Mihiel* (in Lothringen) als richtig nachgewiesen worden ist. In den Kirchenbüchern von Saint-Mihiel findet sich kein Albert Girard, dagegen ein am 11. October 1595 geborener Humbert Girard. Die Möglichkeit, dass Girard später seinen Vornamen geändert haben sollte, erscheint sehr gering, wenn auch in den Matrikelbüchern der Universität Leiden ein 1617 immatriculirter 22jähriger Student der Mathematik *Albertus Gerardus Metensis* (aus Metz) eingezeichnet ist, der folglich 1595 geboren sein muss. Der dort genannte Heimathsort Metz würde keine Schwierigkeit machen, da er bedeuten könnte, Albert sei von einer Metzer Schule zur Universität abgegangen. In einem Amsterdamer Kirchenbuche endlich hat man Albert Girard's Heirath unter dem 17. April 1614 eingetragen gefunden. Er wäre also damals erst 19 Jahre alt gewesen, noch nicht einmal Student, und wäre mit 37 Jahren gestorben. Von Girard rührt die französische Uebersetzung der Stevin'schen Werke her, von ihm die Uebersetzung des 5. und 6. Buches des Diophant, welche im Anschlusse an Stevin's Bearbeitung der vier ersten Bücher gedruckt ist. Girard hat aber, wiederholen wir, auch eine Wiederherstellung der euklidischen Porismen versucht[1]). Er hat es selbst in einem 1626 gedruckten kleinen Abrisse der Trigonometrie gesagt, wo er jene Wiederherstellung als schon mehrere Jahre alt bezeichnet, er hat es zum zweiten Male in der Statik Stevin's gesagt, wo er sich als den Neuerfinder der drei Bücher euklidischer Porismen rühmt und die Hoffnung ausspricht, sie, wie er bereits 1626 in Aussicht gestellt habe, veröffentlichen zu können. Allerdings sind diese fast mehr als kurzen Andeutungen Alles, was wir von Girard's Versuche wissen.

Viel mehr wissen wir auch nicht von einem andern Wiederherstellungsversuche des gleichen Werkes etwa um die gleiche Zeit durch Pierre de Fermat[2]). Dieser geniale Mann, der auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik neue Bahnen eröffnete, und den man einen der bedeutendsten, vielleicht überhaupt den bedeutendsten

[1]) Chasles, *Les trois livres de Porismes d'Euclide* (Paris 1860) pag. 3 Note 1. [2]) Chasles l. c. pag. 3—4. Biographisches vergl. bei Libri im *Journal des savants* 1839 pag. 539—561; 1841 pag. 267—279; 1845 pag. 682—694, und in der *Revue des deux mondes*, April bis Juni 1845 (Nouvelle Série X, 679—707). — E. Brassine, *Précis des oeuvres mathématiques de Fermat* (Paris 1853). — Hoefer in der *Nouv. Biogr. universelle* XVII, 438—451 mit wesentlicher Abhängigkeit von Libri und Brassine. — C. Henry, *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat* im *Bullet. Boncompagni* T. XII und XIII. — Paul Tannery, *Sur la date des principales découvertes de Fermat* im *Bulletin Darboux* 2e Série T. VII (1883) und *Les manuscrits de Fermat* in den *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*.

Mathematiker zu nennen hat, den Frankreich hervorbrachte, verdient, dass wir sein Leben in genaueren Linien schildern. Er ist im August 1601 in Beaumont de Lomagne bei Toulouse geboren. Der Vater war möglicherweise Lederhändler. Der Sohn widmete sich der Rechtsgelehrsamkeit und wurde am 14. März 1631 Parlamentsrath in Toulouse. Bald darauf verheirathete er sich. Zwischen diesem Zeitpunkte und 1638 muss er geadelt worden sein. Er starb den 12. Januar 1665 in Castres. Wenig mehr als ein Jahr vor seinem Tode wurde (im December 1663) ein geheimer Bericht über ihn an den Minister Colbert erstattet. Fermat, heisst es darin, ist ein Mann von grosser Gelehrsamkeit. Er hat einen allseitigen wissenschaftlichen Verkehr, ist ziemlich geldgierig, kein sehr guter Berichterstatter, confus, gehört auch nicht zu den Freunden des ersten Präsidenten. Die letzten Worte dürften vielleicht den Schlüssel zu der sicherlich übelwollenden Schilderung liefern, wenn auch nicht in Abrede gestellt werden will, dass die staunenswerthe Erfindergabe des Mathematikers der nüchternen Tagesarbeit des Parlamentrathes im Wege gestanden haben mag, und dass der kühne Flug seines Geistes sich nur schwer die Fesseln eines kein Zwischenglied übergehenden Berichtes in Rechtssachen anlegen liess. Die von ihm wiederhergestellten Porismen Euklid's beabsichtigte Fermat mit Erweiterungen herauszugeben[1], welche darauf zielten, statt des Kreises irgend Kegelschnitte und andere Curven mit Geraden in Verbindung zu setzen. Man kennt von dem allen nur fünf Sätze, welche Fermat als Porismen bezeichnet hat. Nach der Meinung eines vorzugsweise sachkundigen Beurtheilers[2] zeigt die *Porismatum Euclidaeorum renovata doctrina et sub forma isagoges recentioribus Geometris exhibita* — so sollte die Schrift heissen — dass Fermat die ganze Tragweite jenes Euklidischen Werkes erfasst hatte, wenn er auch über die Form der Porismen irriger Meinung gewesen sein mag und ihren Inhalt zu weit fasste, indem er alle Ortstheoreme hinein bezog. Das 3. Porisma (Figur 127) lässt die Sehne mn parallel zum Durchmesser ad und von m und n nach einem beliebigen Peripheriepunkte b die Sehnen mb, nb ziehen, welche ad in v und o schneiden. Dann stehen die Producte $ao \cdot dv$

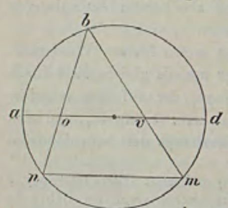


Fig. 127.

[1] Fermat, *Varia opera mathematica* pag. 119: *Imo et Euclidem ipsum promovebimus et porismata in coni sectionibus et aliis quibuscunque curvis mirabilia sane et hactenus ignota detegemus.* [2] Chasles, *Aperçu hist.* 67 (deutsch 64) und Derselbe, *Les trois livres de porismes d'Euclide*, pag. 3—4.

und $av \cdot do$ in einem constanten Verhältnisse, wo auch b angenommen wird. Bezeichnet man das constante Verhältnis als das zweier Strecken af, dg, deren Endpunkte auf ad liegen, so ist der Satz auch als Gleichung zwischen zwei Producten von je drei Strecken aufzufassen, d. h. in ihm liegt im Grunde der Satz von der Involution der sechs auf einer Geraden liegenden Punkte a, d, f, g, o, v eingeschlossen, deren beide letzten veränderlich, die vier ersten feste Punkte sind. Auch dem Apollonius hat Fermat ähnliche Bemühungen gewidmet. Er stellte dessen zwei Bücher über die ebenen Oerter *ἐπίπεδοι τόποι* wieder her, welche im Drucke bekannt sind. Er will, nach einem Briefe an Roberval, wieder eine Persönlichkeit, von der später die Rede sein wird, auch bei dieser Untersuchung Schönes und Bemerkenswerthes gefunden haben, doch fehlt darüber jede nähere Andeutung[1]. Oder sollte Fermat unter jenen Erfindungen diejenigen verstanden haben, welche er in einer Abhandlung *De contactibus sphaericis*[2]) veröffentlichte? Ihr Inhalt ist die räumliche Aufgabe, eine Kugel zu finden, welche vier gegebene Kugeln berührt, also das Seitenstück zu der Vieta'schen Auflösung der Aufgabe, einen Kreis zu finden, der drei Kreise berührt.

Zu den Schriftstellern, welche griechischen Mathematikern ihr besonderes Studium widmeten, gehörte ferner David Rivault de Flurance[3] (1571—1616), Lehrer der Mathematik am Hofe Ludwig XIII. Seine commentirte Archimedausgabe ist von 1615.

Jean Baptiste Duhamel[4] gab 1643 in seinen Elementa astronomica eine Bearbeitung der Bücher des Theodosius über die Kugel.

Ismael Boulliau lateinisch Bullialdus, (1605—1694), gab 1644 in Paris, wo er die längste Zeit seines Lebens in angesehener Stellung verbrachte, den Theon von Smyrna heraus, wobei er dessen Musik von der Arithmetik trennte und damit den Grund zu einem Irrthume legte, der erst im XIX. Jahrhunderte als solcher erkannt wurde[5].

Weiter nennen wir Claude Richard[6] (1589—1664). In Ornans in Burgund geboren, trat er schon 1606 dem Jesuitenorden bei, lehrte in der Folge sieben Jahre lang in Lyon Mathematik, war 1624 gerade im Begriff, sich in Lissabon als Missionar nach China einzuschiffen, als Philipp IV. ihn nach Madrid berief, wo er noch 40 Jahre hindurch Professor der Mathematik war. Von Madrid aus

[1] Chasles, *Aperçu hist.* 65 (deutsch 61). [2] Fermat, *Varia opera mathematica* pag. 74—88; *Oeuvres de Fermat* (Paris 1891) I, 52—69. [3] Poggendorff II, 256. [4] Ebenda I, 616. [5] Th. H. Martin in seiner Theonausgabe von 1849, besonders S. 15—17. — Poggendorff I, 258. [6] De Backer, *Bibliothèque des écrivains de la compagnie de Jésus* I, 627.

veranstaltete er folgende Ausgaben: Euclidis elementorum geometricorum libros XIII, Isidorum et Hypsiclem et recentiores de corporibus regularibus et Procli propositiones geometricas, 1645; Apollonii Pergaei Conicorum libri IV cum commentariis, 1655. Ob er auch einen neuen abermals erläuterten Abdruck des Rivault'schen Archimed veranstaltete, ist mindestens zweifelhaft.

An diese Namen schliesst sich Franciscus van Schooten der Jüngere[1]. Es gab zwei Mathematiker dieses Namens, Vater und Sohn. Beide waren Professoren an der Universität Leiden. Der Vater lebte 1581—1646, der Sohn 1615—1660. Letzterer veröffentlichte 1657 ein aus fünf Büchern zusammengesetztes Werk *Exercitationes mathematicae* und dessen drittes Buch ist eine Wiederherstellung der ebenen Oerter des Apollonius.

Aus Italien haben wir von einer Wiederherstellung und von einer Neuentdeckung zu berichten[2]. Vincenzo Viviani (1622—1703), der letzte Schüler Galilei's, wie er sich selbst mit pietätsvollem Stolze genannt hat, fällt zwar mit fast der Hälfte seiner Lebenszeit und mit den meisten seiner Veröffentlichungen jenseits des Zeitraumes, den wir in diesem Bande noch behandeln, aber mit einer Jugendarbeit desselben haben wir uns zu beschäftigen, mit der 1659 gedruckten Schrift: *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum librum Apollonii Pergaei adhuc desideratum.* Es ist eine der sehr wenigen Wiederherstellungen, von deren Werthe man nachträglich durch Wiederauffindung des wahren Wortlautes sich überzeugen konnte. Ein Mönch Golius hatte nämlich um 1625 die arabische Uebersetzung der sieben ersten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius aus dem Morgenlande mitgebracht und dem Grossherzoge von Toscana verkauft. In einer Bibliothek in Florenz lag der literarische Schatz halb verborgen, wenn auch Pater Mersenne (1588—1648), ein französischer Minorit, welcher mit nahezu allen hervorragenden Persönlichkeiten seiner Zeit in regem Briefwechsel stand und dadurch eine Mittelperson für die üppig hervorschiessenden Entdeckungen aller Art bildete, 1644 Kenntniss von demselben hatte. Auch zu Viviani war die Kunde gedrungen, und ferner darf man nicht vergessen, dass die Wiederherstellung der Kegelschnitte des Apollonius durch Maurolycus (S. 558) jetzt 1654 im Drucke herauskam. Es ist begreiflich, dass Viviani unter solchen Umständen sich die Selbständigkeit seines Schaffens zu sichern bestrebt war, und dass er vom Erzherzog Leopold, Bruder des Grossherzogs Ferdinand II. von

[1] Allgem. deutsche Biographie XXXII, 628—629. [2] Balsam, Des Apollonius von Perga sieben Bücher über Kegelschnitte (Berlin 1861), S. 3—4.

Toscana, sich ausdrücklich bescheinigen liess, dass ihm die wieder-aufgefundene Handschrift des Apollonius noch nicht bekannt gewesen sei, als er die Divinatio verfasste. Es ist aber auch ein Zeichen von kühner Zuversicht des Verfassers, dass er mit der Gewissheit, von der Auffassung des Maurolycus abzuweichen, mit der weiteren Gewissheit, durch die bevorstehende Veröffentlichung des wirklichen Apollonius werde über unglückliche Wiederherstellungsversuche der Stab gebrochen werden, zu rechnen hatte, und dass er gleichwohl zur Veröffentlichung von 1659 sich entschloss. Der Herausgeber von Maurolycus war Giacomo Alfonso Borelli (1608—1679), damals 1654 Professor der Philosophie und Mathematik in Messina. Im Jahre 1656 kam er als Professor an die Universität Pisa und wurde 1657 eines der Mitglieder der Accademia del Cimento, welche im Juni dieses Jahres in Florenz gegründet wurde, aber nur eine zehnjährige Dauer hatte. In der Stellung als Akademiker veröffentlichte Borelli 1658 seinen *Euclides restitutus*, welcher wiederholt aufgelegt wurde und von der dritten Auflage (Rom 1679) an um einen Auszug aus den vier ersten Büchern der Kegelschnitte des Apollonius und aus den Schriften Archimed's vermehrt erschien. Die Vorrede des Euclides restitutus ist durch die in ihr enthaltene Besprechung der Lehre von der Parallelen und der vom Contingenzwinkel nicht uninteressant. Für die Lösung der Schwierigkeit der Parallelenlehre beruft sich Borelli mit Clavius (S. 556) auf den Satz, dass wenn eine Senkrechte von unveränderlicher Länge und gegen die gerade Grundlinie unveränderter Neigung längs derselben fortgeschoben wird, auch der obere Endpunkt eine Gerade beschreibt[1]. In dem gleichen Jahre 1658 entdeckte Borelli in der Florentiner Bibliothek den mehrerwähnten arabischen Codex und erhielt die Erlaubniss, ihn nach Rom mitzunehmen, um dort einen Uebersetzer zu suchen. Er fand ihn in der Person von Abraham von Echelles, Professor der orientalischen Sprachen, der aber, wie er selbst in der Vorrede der vollendeten Uebersetzung erzählt, die grössten Schwierigkeiten dabei zu überwinden hatte, welche theils in dem Fehlen diakritischer Punkte, theils in der Dunkelheit des Inhaltes begründet waren. Der sachkundigen Beihilfe Borelli's sei es vielfach gelungen, einen Sinn zu ermitteln, den er als sprachkundig erst nachher in dem arabischen Wortlaute wiedererkannte. Somit ist Borelli als bei Anfertigung jener 1661 gedruckten Uebersetzung vollberechtigter Mitarbeiter zu betrachten. Für Viviani war die Veröffentlichung ein wahrer Triumph, da sie

[1] Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, S. 33.

zeigte, wie nahe er dem Gedankengange des Apollonius gekommen war. Viviani hatte übrigens schon 1645 eine andere Wiederherstellung unternommen, die der fünf Bücher körperlicher Oerter des Aristäus des Aelteren[1]). Auch sie ist im Drucke erschienen, aber erst im Jahre 1701.

71. Kapitel.

Geometrie.

Wenn wir der Gewohnheit des vorigen Abschnittes treu bleibend an die Forscher über die geschichtliche Entwickelung der Mathematik die Herausgeber alter Mathematiker anreihten, so behalten wir nicht minder den einmal eingeschlagenen Gedankengang bei, indem wir die eigentlichen Geometer folgen lassen.

Wir dürfen hier im Vorübergehen einer Würfelverdoppelung gedenken, welche, ohne als vollständig gelten zu wollen, für praktische Zwecke durchaus ausreicht. Sie ist 1604 von Villalpandus in einem Commentare zum Propheten Ezechiel veröffentlicht worden, rührt aber von Christoph Grienberger her, der, ohne genannt zu sein, mathematischer Mitarbeiter an jenem Commentare war. So meldet wenigstens Claude Richard in seiner Euklidausgabe, und als Zeit- und Ordensgenosse des Villalpandus sowie Grienberger's ist er hierin durchaus glaubwürdig[2]). Grienberger (1561—1636) aus Tyrol ist auch in der Geschichte der Kartographie rühmend zu nennen[3]).

Genauer verweilen werden wir bei einem Manne, der freilich auf anderen Gebieten viel Hervorragenderes geleistet hat: Johannes Kepler[4]), geboren 1571 in Weil der Stadt in Württemberg, gestorben 1630 in Regensburg. Graz, Prag, Linz sind die Orte gewesen, wo seine der Mathematik angehörenden Schriften verfasst wurden. In Graz ist die Erstlingsschrift *Mysterium cosmographicum* (1596) entstanden, und ihr gehört eine erste hier zu erwähnende Stelle an[5]), in welcher ein Sternvierzigeck gezeichnet ist. Wir haben wiederholt von Sternvielecken zu reden gehabt, aber ein solches mit so viel Ecken ist uns noch nirgend begegnet. Darin läge an sich indessen kein neuer Gedanke, höchstens wäre die Kühnheit des Zeichners an-

[1]) Montucla II, 93. [2]) Ambr. Sturm, Das Delische Problem, S. 122—124. [3]) S. Günther, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht XXIII, 523 (1892). [4]) Allgemeine deutsche Biographie XV, 603—624. Artikel von Günther. [5]) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, S. 25—39.

zuerkennen; neu dem Gedanken nach ist es dagegen, dass Kepler die Eckpunkte dieses Vielecks nicht so zählte, wie sie auf einer umschriebenen Kreislinie nebeneinander auftraten, sondern in der Reihenfolge, in welcher sie auf den einander durchkreuzenden Seiten erreicht werden, denn damit war das Wesen des Sternvielecks richtig erkannt. Das erwähnte Vierzigeck ist ein solches, bei welchem, nachdem der Umkreis in 40 Theile getheilt war, der zweite Punkt zum ersten die Lage einnimmt, dass zwölf Zwischenpunkte überschlagen werden, und ebenso bei den folgenden Punkten. In der *Harmonice mundi* (1619) ist Kepler wiederholt auf Sternvielecke aber auch auf Sternvielflächner zurückgekommen. Wir haben (S. 644) der in jenem Werke enthaltenen Vielecksgleichung Bürgi's gedenken müssen, aber neu sind in jeder Beziehung Kepler's Sternvielflächner. Wenn auch Jamitzer (S. 582) Zeichnungen von Sternvielflächnern geliefert hat, so entstammten sie seiner künstlerischen Phantasie, Kepler dagegen hat sie, und zwar solche, die bei Jamitzer nicht vorkommen, von mathematisch-astronomischem Gedankengange aus entstehen lassen. Im Jahre 1609 wurde in Frankfurt eine Schrift Kepler's unter dem Titel *Ad Vitellionem Paralipomena etc.* gedruckt, Zusätze zu der Optik des Witelo. In ihr ist das 3. Kapitel durch die Ueberschrift als Fundamente der Katoptrik bezeichnet. Darin kommt die Stelle[1]) vor: Die richtige Ueberlegung befiehlt den Kreis aufzufinden, welcher eben die Art der Krümmung besitzt, wie der Schnitt in β, dem Punkte des Zurückwerfens. (Solche gemischte Linien besitzen nämlich andere und immer wieder andere Krümmungen.) Damit hat Kepler den Begriff des Krümmungskreises in die Geometrie eingeführt, wenn es auch noch geraume Zeit dauerte, bis derselbe sich förmlich einbürgerte. Ferner ist das 4. Kapitel der Brechung des Lichtes gewidmet. Der Gegenstand ist in verschiedenen Paragraphen behandelt, deren vierter die Ueberschrift *De coni sectionibus*[2]), von den Kegelschnitten, führt. Er enthält eine Benennung und zwei wichtige Gedanken, welche wir hervorzuheben haben. Die Benennung ist die der Brennpunkte als solcher, d. h. das Wort *focus*[3]). Bei der Hyperbel und Ellipse gebe es zwei Brennpunkte, von welchen aus gerade Linien an einen beliebigen Curvenpunkt gezogen mit der Berührungslinie an die Curve in eben jenem Punkte gleiche Winkel bilden. Bei der Parabel liege der eine Brennpunkt innerhalb der

[1]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) II, 175: *At verior ratio jubet invenire circulum qui contineat rationem curvitatis quam habet sectio in β puncto repercussus (habent autem aliam atque aliam hujusmodi mistae lineae).* [2]) Ebenda II, 185—188. [3]) *Nos lucis causa et oculis in mechanicam intentis ea puncta focos apellabimus.*

Curve, der andere sei ein blinder d. h. unsichtbarer Brennpunkt, *focus caecus*. Er befinde sich sei es ausserhalb, sei es innerhalb der Curve, wie man sich vorstellen müsse, unendlich weit von dem ersten entfernt auf der Axe, so dass die nach ihm hin gezogenen Geraden der Axe parallel seien[1]). Hierin liegt der eine Gedanke, den wir meinen. Das Vorhandensein unendlich ferner Gebilde war durch Kepler in die Geometrie eingeführt, wenn wir auch darüber zweifelhaft sein mögen, ob er sich der Tragweite dieser Neuerung bewusst war, und ob der Ausspruch, jener unsichtbare Brennpunkt könne ausserhalb oder innerhalb der Parabel liegen, wirklich dahin zu verstehen ist, dass die beiden unendlich fernen Endpunkte der der Axe parallelen Geraden zusammenfallen. Deutlich war dagegen für Kepler ein zweiter Gedanke vorhanden: der der Schlussfolgerung von Eigenschaften eines Raumgebildes auf solche eines anderen. Die Analogie, sagt er, muss uns geometrisch leiten; denn über Alles liebe ich Analogien, meine getreusten Lehrmeister, welchen alle Geheimnisse der Natur bekannt sind[2]).

Diesen geometrischen Erfindungen in astronomischen Schriften stellen wir eine eigentlich geometrische Schrift gegenüber. Henry Savile[3]) (1549—1622) hielt am Merton-College in Oxford, dessen Vorsteher er war, Vorlesungen über griechische Geometrie, welche 1621 im Drucke erschienen. Er stiftete überdies zwei Professuren, welche dazu dienen sollten, Oxfords Rang in Beziehung auf mathematische Wissenschaften zu erhöhen, welche seither weit mehr in Cambridge gepflegt worden waren. Trotz der Savile'schen Professuren blieb indessen das Uebergewicht Cambridges erhalten. Savile selbst kam in seinen Vorlesungen, welche streng den Gang von Euklid's Elementen einhielten, nicht über den 8. Satz des I. Buches der Elemente hinaus, und die gedruckten Vorlesungen entsprechen vollständig den wirklich gehaltenen. Er waren volle 13 Vorlesungen, welche jenen allerersten Anfangsgründen eingeräumt waren, ein deutlicher Beweis dafür, dass in den Vorlesungen weit mehr Sprachliches, Philosophisches, Geschichtliches als eigentliche Geometrie zur Sprache kam. Eine Stelle darf vielleicht hervorgehoben werden, an welcher von zwei Flecken an dem schönen Leibe der Geometrie die Rede ist,

[1]) *In parabole unus D est intra sectionem, alter vel extra vel intra sectionem in axe fingendus est infinito intervallo a priore remotus, adeo ut educta HG vel IG ex illo caeco foco in quodcunque punctum sectionis G sit axi DK parallelos.* [2]) *Oportet enim nobis servire voces geometricas analogiae: plurimum namque amo analogias fidelissimos meos magistros, omnium naturae arcanorum conscios.* [3]) Kästner I, 249 und III, 19—26. — Poggendorff II, 762. — Ball, *History of mathematics at Cambridge*, pag. 29.

auf deren Vertilgung alte und neue Mathematiker Mühe verwandten[1]). Savile meint die Lehre von den Parallellinien und von den Proportionen.

Albert Girard ist unter den geometrischen Schriftstellern wegen einer Veröffentlichung von 1626 zu nennen[2]). In der Einleitung zu einer für den Halbmesser 10000 berechneten Tafel trigonometrischer Functionen sind die Fälle auseinandergesetzt, welche man zu unterscheiden habe, wenn aus Bestimmungsstücken einer geradlinigen Figur die noch fehlenden Stücke ermittelt werden sollen. Dabei geht nämlich Girard über das Dreieck weit hinaus und sieht sich so veranlasst, von Gattungen geradliniger ebener Vielecke zu reden. Vierecke giebt es bereits dreierlei, *la simple, la croisée et l'autre ayant l'angle renversée* (Figur 128). Das erste und dritte, d. h. das überall convexe Viereck und das mit einem einspringenden Winkel, sind auch früheren Mathematikern bekannt gewesen, aber das zweite überschlagene Viereck, eine Figur, welche den Sternvielecken darin ähnelt, dass einige Seiten einander kreuzen, darin von ihnen sich unterscheidet, dass nicht alle Seiten diese Eigenschaft besitzen, ist durchaus neu. Girard's Definition geht übrigens nicht von den Seiten, sondern von den Diagonalen des Vierecks aus, unter welchen die Verbindungsgeraden eines Eckpunktes mit demjenigen anderen Eckpunkte des Vierecks verstanden werden, nach welchem keine Vierecksseite führt. Bei dem einfachen Vierecke fallen beide Diagonalen in das Innere der Figur, bei dem überschlagenen beide ausserhalb, bei dem mit einspringenden Winkel fällt eine Diagonale in das Innere der Figur, eine ausserhalb. Girard geht weiter zu den Fünf- und Sechsecken, fügt aber hier dem aus der Lage der Diagonale herstammenden Eintheilungsgrunde einen zweiten hinzu, der von der Anzahl der Flächentheile herstammt, in welche die ohne Diagonalen gezeichnete Figur zerfällt. So gebe es 11 Fünfecksformen: 4 mit einer Fläche, 4 mit zwei Flächen und je 1 mit drei, vier, sechs Flächen. Unsere Figur 129 (folg. Seite) stellt die vier einflächigen

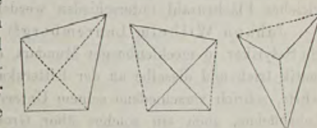


Fig. 128.

[1]) *Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis* (Oxford 1621), pag. 140. Wir entnehmen diese Bemerkung Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, S. 18. [2]) Kästner III, 108. — Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, S. 18—21.

Fünfecke mit 0, 1, 2, 3 äusseren Diagonalen dar[1]); die mehrflächigen Formen sind leicht zu zeichnen. Beim Sechseck will Girard 69 Formen

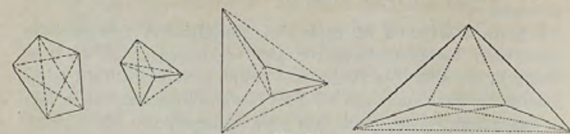


Fig. 129.

unterschieden wissen: 7 einflächige, 19 zweiflächige, 12 dreiflächige, 17 vierflächige, 4 fünfflächige, 6 sechsflächige, 3 siebenflächige, 1 achtflächige, wobei angenommen ist, es gebe in der Figur keinen Punkt, der mehr als zwei Seiten gemeinschaftlich wäre. Wie hier die Formen gleicher Flächenzahl unterschieden werden sollen, ist nicht ermittelt.

Johann Wilhelm Lauremberg[2]) (1590—1658) von Rostock, ein Satyriker in mecklenburger Mundart, der neben der Poesie Mathematik trieb und dieselbe an der Ritterakademie zu Sora auf Seeland lehrte, schrieb verschiedene seinem Unterrichte zu Grunde zu legende Lehrbücher, auch ein solches über Gromatik, also Feldmesskunst. Der Verfasser ist auf dem Gebiete der Dichtkunst zu gut bekannt, als dass man ihn nicht auch in dieser Verirrung schonend nennen müsste.

Daniel Schwenter[3]) (1585—1636) von Nürnberg war von den orientalischen Sprachen ausgegangen, deren Vertreter an der Altdorfer Hochschule er schon 1608 wurde. Mathematische Studien trieb er daneben für sich allein unter Benutzung der selbst minderwerthigen Werke von Wolfgang Schmid und Augustin Hirschvogel (S. 449). Dann wurde Prätorius ihm Freund und Berather, und endlich wurde ihm 1628 neben der Professur der orientalischen Sprachen auch diejenige der Mathematik in Altdorf übertragen. Schwenter selbst erzählt diesen seinen mathematischen Bildungsgang in der Vorrede zur *Geometria practica nova et aucta*, welche erstmalig 1618, dann mehrfach wiederholt im Drucke erschien[4]). Schwenter's

---

[1]) Günther l. c. S. 19 und briefliche Mittheilungen von A. N. Godefroy in Amsterdam, dem es gelang die Form mit drei äusseren Diagonalen herzustellen. [2]) Kästner III, 308—312. — Poggendorff I, 1386. — Allgem. deutsche Biographie XVIII, 58—59. Artikel von Erich Schmidt. [3]) Kästner III, 299—302. — Günther, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche (Weissenburg 1872), S. 7—11 und: Die mathematischen und Naturwissenschaften an der nürnbergischen Universität Altdorf (Separatabdruck aus dem III. Hefte der Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg), S. 25—27. [4]) Unsere Beschreibung stützt sich auf die 3. Auflage von 1641.

praktische Geometrie erfreute sich, wie aus den rasch aufeinander folgenden Auflagen ersichtlich ist, einer Beliebtheit, welche ein Eingehen auf ihren Inhalt empfehlen müsste, selbst wenn wir nichts von Bedeutung ihr zu entnehmen hätten. Sie zerfällt in vier Tractate, deren jeder mit besonderer Pagination versehen ist. Der „Tractatus I, darinnen auss rechtem Fundament gewiesen wird; wie man in der Geometria auff dem Papier und Lande, mit denen darzu gehörigen Instrumenten, als Zirckel, Richtscheid, Winckelhaken, etc. Ja zur noth ohne dieselben verfahren und practiciren solle“ besteht aus sieben Büchern. Schwenter lehrt darin die verschiedenartigsten theils genaue, theils nur angenäherte Constructionen, wie sie bei Dürer, bei Clavius u. s. w. sich finden, auch einige neue Verfahrungsweisen, welche er für sich selbst in Anspruch nimmt. Da nirgend ein Beweis beigegeben ist, sondern einfach vorausgesetzt wird, der Schüler werde blindlings nach den Vorschriften des Lehrers sich richten, ohne die Frage nach dem Warum aufzuwerfen, so hält es schwer, zu entscheiden, ob Schwenter seine Zeichnungen da, wo er nicht ausdrücklich von blosser Annäherung redet, für genau hielt. Fast möchte es bei einer Neuntheilung des Kreises, die er sein Eigenthum nennt[1]), einem offenbar bewussten Abweichen von der Dürer'schen Vorschrift (S. 462), so scheinen, (Figur 130). Das Neuneck soll in den Kreis, der mit dem Halbmesser oa um den Mittelpunkt o beschrieben ist, eingezeichnet werden. Schwenter lässt nun zunächst den etwas grösseren concentrischen Kreis mit dem Halbmesser or beschreiben und in diesen die drei Fischblasen on, op, or. Die Gerade or theilt er in l und i in drei gleiche Stücke $ol = li = ir$ und zieht vlm senkrecht zu or bis zum Durchschnitte mit der Fischblase. Die Verbindungsgeraden ov, om des Mittelpunktes mit den solcherweise bestimmten Punkten der Fischblase schneiden verlängert den gegebenen Kreis in a und b, alsdann sei ab die gesuchte Neunecksseite. So recht will Schwenter seiner Erfindung allerdings nicht trauen, denn er fügt hinzu: „Weil aber die operation sehr misslich, ists am besten, du theilest einen Circkel erstlich in drey theil auss, und jeden theil wider Mechanisch in drey theil, so darffstu dich keines Irrthums befürchten.“ Von sprach-

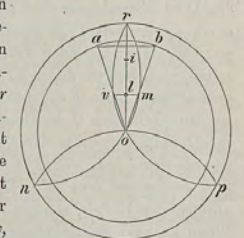


Fig. 130.

---

[1]) Die XXX Auffgab des vierdten Buchss dess ersten Tractats S. 205.

lichen Eigenthümlichkeiten mag auffallen, dass Schwenter eine Senkrechte bald *winckelrecht* bald *wagrecht* nennt[1]), und dass er *Hypothenusa*[2]) schreibt! Das Griechische scheint ihm demnach weniger geläufig gewesen zu sein als die orientalischen Sprachen. Von einer Beschreibung des Proportionalzirkels[3]) muss an späterer Stelle die Rede sein. Dem „Tractatus II Ohne einig künstlich Geometrisch Instrument, allein mit der Messrute und etlichen Stäben das Land zu messen", welcher in fünf Bücher zerfällt, hat Schwenter eine Vorrede an den Leser vorausgeschickt, in welcher er in eigenartiger Weise erörtert, wie er dazu gekommen sei, diesen Tractat zu verfassen. Vielfach behaupte man, Thales habe die Geometrie aus Aegypten nach Griechenland gebracht. Das könne ja wahr sein, schliesse aber nicht aus, dass auch anderwärts Geometrie geübt worden sei, und insbesondere zeigten viele Stellen des alten Testamentes solche Beschäftigungen an. Die Heiden seien daher nicht die Erfinder, sondern Geometrie sei eine uralte Kunst. Wo aber in den hebräischen Texten von Feldmessen und dergleichen die Rede sei, werde niemals eine andere Vorrichtung erwähnt als die Messruthe, Messtange oder Messschnur. Da habe er sich überlegt, wie weit man unter dieser Beschränkung kommen könne, und er habe auch nicht wenig von denjenigen erfahren, welche „wie man alsbald mit Ruten das Land überschlagen und messen soll" schon lange lehrten. Allerdings sei er weit über diese hinausgegangen, und das sei die Entstehung des vorliegenden Tractates. Er unterscheidet sich von dem ersten vornehmlich dadurch, dass in diesem zweiten Theile überall geometrische Beweise gegeben oder wenigstens in Erinnerung gebracht werden. Mit dem Unterschiede dagegen, dass in dem I. Tractate der Zirkel vielfach benutzt wird, der dem II. Tractate seiner Ueberschrift gemäss fremd sein sollte, ist es nicht so weit her. Auch im II. Tractate werden auf dem Felde Kreisbögen beschrieben, nur freilich nicht mittels eines Zirkels, sondern mittels einer Kette, welche mit je einem Ringe an zwei Stäben hängt, deren einer den Mittelpunkt bestimmt, während der andere unter Anspannung der Kette den herumbewegten Kreispunkt vorstellt. Zwei Dinge dürften besondere Erwähnung verdienen. In der 13. Aufgabe des 1. Buches des II. Tractates kommen Längen von 800, 900, 1500 Schritten vor. Zunächst werden in einem ersten Zusatze, im „ersten Erinnerung" mit Schwenter zu reden, diese Zahlen in 850, 750, 1500 abgeändert; eine zweite Erinnerung lehrt kleinere Zahlen anwenden, wie etwa 85, 75, 150, oder 17, 15,

[1]) S. 18 und 43 des I. Tractats. [2]) S. 17 des I. Tractats. [3]) S. 79 des I. Tractats.

30, oder $8\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, 15, damit man mit einer einzigen Messkettenlänge beim Abstecken auskomme. Die dritte Erinnerung endlich wirft die Frage auf[1]), ob man auch kleinere Zahlen anzuwenden im Stande sei, wenn theilerfremde Messzahlen wie 809, 704, 1301 von vorn herein vorliegen, oder wenn bei nur zwei Messungen die Zahlen 233, 177 auftreten? Schwenter bejaht die Frage unter Anwendung von Kettenbrüchen, so dass wir auf diese Stelle zurückzukommen haben, wenn wir von diesen Formen von Zahlenverbindungen reden. Unsere zweite Bemerkung bezieht sich auf die 5. Aufgabe des 3. Buches, in welcher die Dreiecksfläche aus den drei Seiten des Dreiecks hergeleitet werden soll. Schwenter sagt hier höchst auffallenderweise[2]), die Formel, nach welcher gerechnet werde, und welche selbstverständlich die Heronische ist, stamme aus der Geometria Jordani und sei erstmalig von Paciuolo bewiesen worden. Letztere Meinung ist so weit richtig, als der erste gedruckte Beweis in der That bei Paciuolo (S. 330) zu finden ist; wie aber die Anführung des Jordanus zu verstehen sein möchte, ist räthselhaft. In dessen Büchern *De triangulis* kommt die Heronische Formel jedenfalls nicht vor. Der Inhalt des III. Tractates ist durch dessen Titel „Mensula Praetoriana, Beschreibung des nutzlichen Geometrischen Tischleins, von dem fürtrefflichen und weitberühmten Mathematico M. Johanne Praetorio S[eelig] erfunden" genugsam bezeichnet. Schwenter hat in demselben den Messtisch, welchen sein Lehrer erfunden, und zu dessen Gebrauch er während des Unterrichtes die nöthige Anweisung gegeben hatte, ohne eine ausführliche Beschreibung desselben zu veröffentlichen, nachträglich zur allgemeinen Kenntniss gebracht und dadurch ebensowohl dem Ruhme jenes verstorbenen Lehrers als dem allgemeinen Nutzen einen wesentlichen Dienst erwiesen. Ausser dem Messtische kommt in diesem Tractate nur ein Winkelinstrument in Anwendung, welches bei Höhenmessungen nicht entbehrt werden kann, und welches im Wesentlichen noch immer mit Peurbach's geometrischem Quadrate übereinstimmt. Der III. Tractat besteht aus vier Büchern. Endlich der IV. Tractat, den die erste Auflage von 1618 allerdings noch nicht enthält[3]), handelt von einer Vorrichtung, welche in Italien am Anfange des Jahrhunderts durch Camillo Raverta[4]) von Mailand erfunden und 1602 von Curtio Casati[5]), gleichfalls einem Mailänder, beschrieben worden ist. Dieselbe setzt voraus, dass man nach

[1]) S. 68 des II. Tractates. [2]) S. 112 des II. Tractates. [3]) G. Wertheim brieflich. [4]) Hallervord, *Bibliotheca curiosa* pag. 42 (Königsberg und Frankfurt 1676). [5]) Zedler's Universallexicon beruft sich für ihn auf das uns unbekannte Werk Argelati, *Bibl. Mediol.*

dem Augenmaasse eine Gerade auf dem Papier in paralleler Lage zu einer in der Entfernung auf dem Felde zwischen gegebenen Endpunkten gedachten Geraden zeichnen könne. Schon Casati hatte gegen diese Erfindung, so hoch er sie preist, einige Bedenken, Schwenter theilte dieselben in verstärktem Maasse, und die spätere Zeit ist diesen Bedenken so sehr beigetreten, dass weder Raverta's noch Casati's Namen in den vollständigsten neueren Schriften über Feldmessung mehr vorkommen, während Muzio Oddi[1]) (1569—1638) aus Urbino, der Verfasser eines im Gefängnisse geschriebenen Werkes über Feldmessung von 1625, in welchem nach den uns bekannten Auszügen Neues sich nicht findet, erwähnt und wohl etwas über Verdienst gerühmt wird.

Beiläufig nennen wir Johann Ardüser[2]) (1584—1665) aus Davos, der als praktischer Meister in der Befestigungskunst berühmt ist und *Geometriae Theoricae et practicae* XII Bücher (Zürich 1627) herausgab, welches Werk in einer zweiten Bearbeitung von 1646 sich zu XIV Bücher erweiterte.

Ungefähr innerhalb derselben Lebensgrenzen wie Schwenter ist ein Schriftsteller in Ulm zu nennen, Johann Faulhaber[3]) (1580—1635). Er war der Sohn eines Webers und zum väterlichen Gewerbe bestimmt. Der Unterricht des Rechenmeisters David Selzlin (S. 611) führte ihn der Wissenschaft zu, und bald war er selbst Rechenmeister in Ulm, jedenfalls vor 1610, denn seine erste Veröffentlichung, welche diese Jahreszahl trägt, giebt ihm schon diesen Titel. Ihm gleichzeitig lebten in Ulm ein Arzt, Johannes Remmelin, und zwei Schulmänner, Zimpertus Wehe und Johann Baptista Hebenstreit, die beiden letzteren Gegner, der erste ein Freund und Gönner Faulhaber's. Die Streitigkeiten Faulhaber's drehten sich um Wortrechnungen. Aehnlich wie einst Michael Stifel hat auch Faulhaber in diese Spielereien sich verrannt, und er suchte die prophetischen Zahlen der Bibel auszubeuten, indem er sie mit Buchstaben, welchen Zahlenwerthe beigelegt waren, in Verbindung setzte. So war er durch sonderbare Zahlenhandhabung dazu geführt worden, in einem Kalender für 1618 auf den 1. September dieses Jahres einen Kometen zu verkünden. Ein solcher erschien zufälligerweise wirklich

[1]) Kästner III, 373. — Poggendorff II, 206. — Rossi, *Groma e squadro*, pag. 146—165 und 215—216. Poggendorff nennt 1631 als Todesjahr, Rossi 1638 mit Berufung auf die Ueberschrift eines von ihm beschriebenen Gemäldes.
[2]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz IV, 25—36.
[3]) Kästner III, 111—152 und IV, 510—511. — Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts (Ulm 1867). — Allgem. deutsche Biographie VI, 581—583. Artikel von Höchstetter.

und gab Veranlassung zu einem tiefgehenden Zwiespalte in Ulm. Faulhaber und seinen Freunden, zu welchen auch der Stadtpfarrer Dieterich gehörte, welcher sogar über den Kometen predigte, standen die erwähnten Schulmänner gegenüber, welche die Berechtigung zur Wortrechnung überhaupt und insbesondere zu astronomischen Vorhersagungen mittels derselben bekämpften. Faulhaber antwortete in heftigen Streitschriften, in welchen er seinen einen Gegner als „Hebandenstreit“ lächerlich zu machen suchte. Faulhaber's ausgesprochene Neigung zu überschwänglichen Dingen erwies sich ihm oftmals schädlich, eine Verbindung mit einem angeblichen Propheten brachte ihn sogar 1606 ins Gefängniss. Später trat er den Rosenkreuzern nahe und war überzeugter Alchymist. Es ist eine merkwürdige, wiederum an Michael Stifel erinnernde Erscheinung, dass mit diesen Schrullen wirkliche mathematische Begabung Hand in Hand ging, und dass die Wissenschaft gerade aus Faulhaber's Wortrechnungen Nutzen zog. Wir kommen in anderem Zusammenhange darauf zurück; hier, wo wir mit Geometrischem uns beschäftigen, ist nur eine Faulhaber'sche Schrift zu nennen, seine Ingenieurschule, die 1630—1633 in vier Theilen erschienen ist. Wie der Titel erkennen lässt, hat Faulhaber hier Feldmesserisches und auf die Befestigungskunst Bezügliches auseinandergesetzt. Bei einer Aufgabe mischen sich Geometrie und Wortrechnung oder mindestens prophetische Zahlen. Folgende sieben Zahlen nämlich können als weissagende betrachtet werden: 666 (Apokalypse XIII, 18), 1000 (Apokalypse XX, 2), 1260 (Apokalypse XI, 3 und XII, 6), 1290 (Daniel XII, 11), 1335 (Daniel XII, 12), 1600 (Apokalypse XIV, 20), 2300 (Daniel VIII, 14). Faulhaber verlangte im ersten Theile seiner Ingenieurschule aus Strecken, welche durch diese sieben Zahlen gemessen werden, ein Sehnensiebeneck herzustellen, dessen Winkel und den Halbmesser des Umkreises zu berechnen; es sei dieses eine „Question, welche sich durch die Logarithmos auff eine besondere newe Manier gar schön resolvieren lässt“. Eine Auflösung, soweit die Winkel in Betracht kommen, hat Faulhaber niemals veröffentlicht. Den betreffenden Kreishalbmesser gab er im zweiten Theile der Ingenieurschule zu 1582,6323 an, ohne anzudeuten, welchen Weg er zur Erlangung dieses Werthes eingeschlagen habe. Spätere Versuche, seinen Gedankengang zu ermitteln, schweben allzusehr in der Luft, als dass man ihnen geschichtlichen Werth beimessen könnte[1]).

[1]) Günther, Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Erlangen 9. März 1874. — German, Das irreguläre Siebeneck des Ulmer Mathematikers Johann Faulhaber (Ulm 1876). — Günther's Recension, Zeitschr. Math. Phys. XXII, Histor.-litter. Abthlg. S. 34—36.

Einen Nebenbuhler auf dem Gebiete der Anfertigung von Instrumenten und der Baukunst fand Faulhaber in seinem Heimathsgenossen Joseph Furtenbach[1]) (1591—1667), den wir hier nennen, weil sein Name anderwärts nicht gut untergebracht werden kann und doch nicht vollständig fehlen soll. Furtenbach's Haus in Ulm, der sogenannte Erbsenkasten, gehörte durch die aller Orten im Garten u. s. w. angebrachten Grotten und dergleichen lange Zeit zu den grössten Sehenswürdigkeiten von Ulm.

Joachim Jungius[2]) (1587—1657) hat in der Geschichte der atomistischen Lehre eine allzubedeutende Rolle gespielt, als dass wir nicht gern erwähnten, dass er an den Universitäten zu Giessen und Rostock die Lehrstellen der Mathematik inne hatte, und dass er an letzterem Orte 1627 eine mehrfach neu aufgelegte *Geometria empirica* im Drucke herausgab.

Antoine de Ville, ein Schriftsteller über Befestigungswesen, verdankt seine Namensnennung an dieser Stelle einer in seinem Buche *Les fortifications* (1628) enthaltenen Vorschrift zur Herstellung regelmässiger Vielecke von n Seiten, welche sich ziemlich weit verbreitet hat. Abraham de Bosse, von welchem weiter unten die Rede ist, hat sie in seinem *Traité des pratiques géométrales et perspective* (1665) aufgenommen und Nicolas Bion[3]) (1653—1733), Landkarten- und Globenhändler in Paris, beschreibt sie in seinem *Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques* (1713). De Ville's Vorschrift ist folgende[4]). Sei (Figur 131) C die Spitze eines über dem Kreisdurchmesser AB beschriebenen gleichseitigen Dreiecks, sei ferner $AE = ED = \frac{AB}{n}$. Wird CEQ gezogen und $QP' = AQ$ genommen, so ist AP' annähernd $\frac{1}{n}$ der Kreisperipherie. De Bosse hat die Vorschrift dahin verbessert, man solle CDP ziehen, wodurch AP noch näher mit $\frac{1}{n}$ der Kreisperipherie übereinstimme.

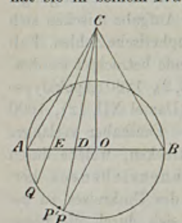


Fig. 131.

[1]) Kästner III, 366—368. — Ofterdinger l. c. — Allgem. deutsche Biographie VIII, 250—251. Artikel von Höchstetter. [2]) Wohlwill, Joachim Jungius und die Erneuerung atomistischer Lehren im XVII. Jahrhundert (Hamburg 1887) und ebenderselbe, Joachim Jungius, Festrede am 22. October 1887 (Hamburg und Leipzig 1888). [3]) Poggendorff I, 194—195. [4]) H. A. J. Pressland, *On the history and degree of certain geometrical approximations* in den Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Vol. X.

Wir gelangen nunmehr zu drei französischen Geometern ersten Ranges, welche weit über Allen, welche ausserhalb Griechenlands mit reiner, nicht rechnender Geometrie sich beschäftigt haben, stehen, so dass man versucht sein möchte, sie unmittelbar an die grossen Alexandriner anzuknüpfen. Wir meinen: Mydorge, Desargues, Pascal.

Claude Mydorge[1]) (1585—1647), ein genauer Freund von Descartes, stammte aus einer reich begüterten Beamtenfamilie. Auch er begann die gerichtliche Laufbahn, die er aber verliess, um unter dem Arbeitsverpflichtungen nicht mit sich führenden Titel eines Schatzmeisters (Trésorier de France) sich der Wissenschaft widmen zu können. Ein Werk von ihm über Kegelschnitte erschien 1631 in zwei Büchern, welchen zwei weitere Bücher 1639 folgten. Während die vier Bücher alsdann vereinigt wiederholten Abdruck fanden, ist eine selbst aus vier Büchern bestehende Fortsetzung verloren gegangen. Es heisst, ein Lord Cavendish und ein Lord Southampton, die als Freunde im Mydorge'schen Hause verkehrten, hätten sie mit nach England genommen, wo sie verschollen sind. Mehr als 1000 geometrische Aufgaben haben sich in der Handschriftensammlung der Pariser Akademie erhalten. Der Wortlaut der Aufgaben ist nachträglich auch im Drucke bekannt gegeben worden, der der zugehörigen Auflösungen nur zu sehr geringem Theile, und fast scheinen die interessantesten Auflösungen der Oeffentlichkeit vorenthalten geblieben zu sein. Dass Mydorge beispielsweise zur Siebentheilung des Kreises noch der alten Näherungsmethode sich bediente, die halbe Dreiecksseite als Siebenecksseite zu benutzen, kümmert uns weit weniger, als wenn wir wüssten, welches das Näherungsverfahren Mydorge's bei Auflösung seiner 363. Aufgabe war: ein Quadrat in ein regelmässiges Vieleck von beliebiger Seitenzahl zu verwandeln. Unter den dort vorkommenden Kunstausdrücken ist Parallaxe in der Bedeutung eines von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Kreisringes zu nennen, und insbesondere das Wort Parameter eines Kegelschnittes, welches Mydorge einführte[2]). Das Kegelschnittwerk war jedenfalls Mydorge's verdienstlichste Leistung und enthält neben schon Bekanntem aber neu Dargestelltem wesentlich neue Sätze. Im 2. Buche hat man den Satz bemerkt, dass, wenn von einem Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes Radien nach allen Punkten der Curve gezogen und diese in einem gegebenen Verhältnisse verlängert werden, ihre Endpunkte einen neuen, dem erstgegebenen ähnlichen Kegel-

[1]) Kästner III, 196. — Montucla II, 74. — Chasles, *Aperçu hist.* 89 (deutsch 85). — C. Henry im *Bulletino Boncompagni* XIV, 271—350; XVI, 514—527. [2]) Gino Loria, *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce* (Genova 1892), pag. 11.

schnitt bilden. Im 3. Buche ist in drei Sätzen (39, 40, 41) die Aufgabe gelöst, einen gegebenen Kegelschnitt auf einen gegebenen Kegel zu legen.

Girard Desargues[1]) (1593—1662), aus Lyon, spielt innerhalb der Geschichte der Mathematik eine höchst eigenthümliche Rolle. Von den ersten Geistern seiner Zeit geschätzt, von neidischem Unverstande begeifert, ist er so gut wie vergessen gewesen, bis man nicht etwa ein Exemplar seines 1639 in Paris gedruckten Hauptwerkes, sondern eine vollständige Abschrift desselben auffand, welche im Jahre 1679 durch Philippe De la Hire, einen hervorragenden Geometer, der selbst schon 1671 ein bedeutendes Werk über Kegelschnitte im Drucke herausgegeben hatte, angefertigt worden ist[2]). Wie Jemand in jener Zeit dazu kam, ein acht Druckbogen starkes Buch ganz abzuschreiben, statt es buchhändlerisch sich anzueignen, ist ein vollständiges Räthsel. Allenfalls wäre eine einzige Erklärung möglich, dass nämlich damals bereits kein Exemplar mehr aufzutreiben war, weil das zu schwer geschriebene und der grossen Leserwelt durchaus unverständliche Werk auch unverkäuflich war und als Maculatur vernichtet wurde[3]). Auf die wenigen geistig Ebenbürtigen machte es allerdings einen wesentlich anderen Eindruck, der aus den Briefesworten Fermat's ersichtlich ist: „Ich schätze Herrn Desargues sehr, und zwar um so höher, als er allein der Erfinder seiner Kegelschnitte ist. Sie sagen, das Büchelchen gelte für kauderwälsch (*jargon*). Mir erscheint es sehr verständlich und geistvoll"[4]). Desargues lebte seit 1626 etwa in Paris und wurde ein regelmässiger Theilnehmer an den Zusammenkünften geistig hochstehender Männer, welche es liebten, einander die Ergebnisse ihrer Forschungen mitzutheilen, während dieselben noch im Gange waren, welche zugleich auf Reinheit und Schönheit des sprachlichen Ausdruckes hielten, und welche so die Vorgänger der französischen Akademie wurden, von welcher man beinahe sagen möchte, Richelieu habe sie 1635 nicht sowohl gegründet als bestätigt. Wenigstens waren die ersten ernannten Mitglieder lauter Persönlichkeiten, welche an jenen Zusammenkünften theilgenommen hatten. Nachdem die französische Akademie ins Leben gerufen war, dauerten ungezwungene, wenn auch regelmässige Vereinigungen von Mathematikern und Physikern weiter fort, bis 1666 sich abermals eine förmliche Gründung vollzog, die der *Académie des sciences* durch Colbert. In jener frühen Zeit, von welcher wir gegenwärtig reden, bildete sich auf die erwähnte Weise der Bekanntenkreis von Desargues. Pater Mersenne, Roberval, der ältere Pascal, Carcavy, Bouillau, Gassendi gehörten dazu, lauter Persönlichkeiten, die uns mehr als nur einmal begegnen werden. Auch Descartes lernte Desargues hier kennen, und sie wurden Freunde, als Desargues 1628 an der Belagerung von La Rochelle als Kriegsbaumeister theilnahm und Descartes hinreiste, um die grossartigen Arbeiten zu besehen. Zu seiner Lyoner Heimath hat Desargues auch von Paris aus enge Beziehungen unterhalten. So z. B. wurden, als 1646 das neue Rathhaus jener Stadt gebaut wurde, die Risse an Desargues zur Begutachtung eingesandt und von ihm nicht unwesentlich abgeändert. Um 1650 kehrte Desargues vollständig nach Lyon zurück und war dort noch als Baumeister thätig. Auch scheint er damals strebsame Handwerker an sich gezogen zu haben, um ihnen Unterricht in denjenigen Abschnitten der Geometrie zu ertheilen, welche beim Bauen sich als unerlässlich vordrängen. Perspectivisches Zeichnen und der Steinschnitt gehören hierher, und auch schriftstellerisch hat Desargues sie bearbeitet. Sein erstes Buch von 1636 ist die *Perspective*; 1640 erschien ein Buch über Steinschnitt, Perspective und Herstellung von Sonnenuhren unter dem Titel: *Brouillon project d'exemple d'une manière universelle du S. G. D. L.*[1]) *touchant la practique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'architecture; et de l'esclaircissement d'une manière de réduire au petit pied en perspective comme en géométral et de tracer tous quadrans plats d'heures égales au soleil.* Dann gab Abraham Bosse, ein geschickter Kupferstecher und der begabteste Schüler von Desargues, 1648 ein grösseres Werk über Perspective heraus, welches in bedeutsamen Abschnitten als von Desargues verfasst betrachtet werden muss und auch gleich damals betrachtet wurde, da Gegenschriften, welche im Drucke erschienen, und welche die geometrische Auffassung zu Gunsten der handwerksmässigen, wenn auch nachweislich nicht selten irrigen Uebung bekämpften, sich ohne Weiteres gegen Desargues richteten. Alle diese Bücher des Desargues lassen sich als Vorläufer jener Wissenschaft bezeichnen, welche un-

[1]) *Oeuvres de Desargues réunies et analysées* par M. Poudra. Paris 1864. Wir citiren diese Ausgabe unter dem Namen Desargues. — Montucla II, 74—75. — Chasles, *Aperçu hist.* 74—79, 331—334 (deutsch 71—75, 344—348). — Marie, *Histoire des sciences mathématiques* III, 201—225. — Chrzaszczewski, Desargues' Verdienste um die Begründung der projectivischen Geometrie. Grun. Archiv 2. Reihe, XVI, 119—149. [2]) Desargues I, 132. [3]) Wer solches für undenkbar hält, erinnere sich an das Schicksal der Ausdehnnngslehre von Grassmann und der Statik von Möbius, deren erste Auflagen in der Mitte des XIX. Jahrhunderts als unverkäuflich eingestampft wurden. [4]) Fermat, *Varia Opera mathematica* pag. 173.

[1]) Abkürzung für *Sieur Girard Desargues Lyonais.*

gefähr 150 Jahre später den Namen der descriptiven Geometrie erhielt. Noch ungleich wichtiger und an fruchtbaren neuen Gedanken überreich war das, wie wir erzählt haben, in De la Hire's Abschrift erhaltene Werk von 1639: *Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan*, gewöhnlich kurz als *Brouillon project* des Desargues bezeichnet, ohne dass es mit dem die gleichen Anfangsworte im Titel enthaltenden Buche von 1640 verwechselt würde. Desargues nennt das Werk „Erste Niederschrift des Entwurfes eines Versuches über die Thatsachen, zu welchen der Schnitt eines Kegels durch eine Ebene Veranlassung giebt". Vorsichtiger, als es in den Anfangsworten dieses Titels geschah, hat sich niemals ein Schriftsteller ausgesprochen, aber die Neuheit der Auffassung machte Vorsicht nothwendig. Wir müssen einige wesentliche Dinge hervorheben und darunter zunächst die Anwendung des Unendlichen in der Geometrie. Nicht als ob noch kein Mathematiker mit dem Begriffe des Unendlichen als dem des Stetigen nahe verwandt sich beschäftigt hätte. In jedem Jahrhunderte tauchten solche Unendlichkeitsbetrachtungen auf, zuletzt bei Vieta (S. 586), wo er die krumme Linie als eine Zusammensetzung unendlich vieler unendlich kleiner Strecken erklärte. Auch Kepler hat 1615, Cavalieri 1635 in Druckwerken, deren Besprechung uns obliegen wird, wenn wir von den Anfängen der Infinitesimalrechnung reden, den gleichen Gedanken zu nie geahnten Folgerungen ausgebeutet, aber bei Desargues waren es ganz andere Unendlichkeitsbetrachtungen als bei diesen Vorgängern. Zwei oder mehrere Gerade treffen in einem Punkte zusammen, welcher das Ziel ihrer Anordnung, *but d'une ordonnance de droites*, heisst[1]). Dieser Zielpunkt kann in endlicher, er kann auch in unendlicher Entfernung liegen, im letzteren Falle heissen die Geraden parallel. Der menschliche Geist sucht die Grösse gegebener Linien zur Erkenntniss zu bringen und fasst sie als Gesammtheiten so kleiner Theile, dass deren beiderseitige Grenzen zusammenfallen[2]). Denkt man sich einen Kreis und einen Punkt ausserhalb der Kreisebene, und lässt man eine durch den Punkt hindurchgehende Gerade längs der Kreislinie hingleiten, so beschreibt

[1]) Desargues I, 104. [2]) Ebenda I, 103: *La raison essaye à connaître des quantités infinies d'une part, ensemble de si petites que leurs deux extrémités opposées sont unies entre elles.* H. Poudra hat diese Stelle durchaus missverstanden und gemeint, Desargues habe sagen wollen, es gebe nur einen Unendlichkeitspunkt einer Geraden, woran er gewiss nicht dachte. Auch in I, 105: *toutes ces droites sont entrelles d'une mesme ordonnance, dont le but est à distance infinie, et chacune d'une part et d'autre* darf man jenen modernen Sinn nicht hineinlesen.

sie dabei eine Kegeloberfläche; entfernt sich aber der Punkt auf unendliche Entfernung von der Kreisebene, so geht der Kegel, oder die Rolle, *rouleau*, wie Desargues sich gleichfalls ausdrückt, in eine solche von überall gleicher Dicke über, so wird sie zur Säule, *colomne*, oder zum Cylinder[1]). Nicht minder neu waren Sätze, welche auf Punkte sich bezogen, die auf einer Geraden liegen. Es sei ein Punkt A jener Geraden als Wurzel, *souche*, bezeichnet und auf ihn je ein Paar, *couple*, von Entfernungen nach bestimmten Punkten bezogen[2]), z. B. ein Punktepaar B und H, ein zweites C und G, ein drittes D und F. Bildet man die Rechtecke aus den Entfernungen eines Punktepaares von der Wurzel, welche durch die Producte jener Entfernungen gemessen werden, so können die drei Producte einander gleich sein: $AB \cdot AH = AC \cdot AG = AD \cdot AF$. In diesem Falle bilden die sechs Punkte eine Involution[3]). Die neuere Geometrie hat bekanntlich diesen Kunstausdruck sich angeeignet, aber mit einer anderen Definition versehen, so dass der Satz der Involution mit demjenigen übereinstimmt, den wir (S. 659) in einem der Porismen Fermat's enthalten fanden. Man hat nachgewiesen[4]), dass eine innere Uebereinstimmung zwischen beiden Ausdrucksweisen vorhanden ist. Ob Fermat dieses auch wusste, oder als er sein Porisma aufstellte, mit dem Brouillon project bekannt war, dürfte kaum zu ermitteln sein. Zieht man durch die sechs Punkte einer Involution ebensoviele Zweige, *rameaux*, mit einem einzigen Zielpunkte, so entsteht ein Busch, *ramée*, der die Eigenschaft besitzt, dass jede durch ihn hindurchgehende Gerade in sechs Punkten geschnitten wird, die abermals eine Involution bilden[5]). Desargues erkennt auch, dass, wenn ein Punkt auf die Wurzel fällt, der ihm entsprechende andere Punkt des Punktepaares in die Unendlichkeit fallen muss, weil nur Null mal Unendlich ein endliches Product liefern kann[6]). Hierauf vereinigte Desargues in seinen Untersuchungen die von ihm geschaffene Theorie der Involution mit der Kegelschnittlehre. Eine doppelte Neuerung führte er hier ein. Erstens wurde von Eigenschaften der Kreislinie, welche die Grundebene des Kegels begrenzte, auf die Eigenschaften des Kegelschnittes geschlossen, d. h. eine perspectivische Beweisführung war entdeckt. Zweitens konnte dementsprechend jetzt von Kegelschnitten überhaupt die Rede sein, statt dass Eigenschaften aller drei besonderen Kegelschnittarten in ebensovielen Sätzen ausgesprochen und bewiesen werden mussten. Von den zahlreichen allgemeinen

[1]) Desargues I, 157—158. [2]) Ebenda I, 112. [3]) Ebenda I, 119. [4]) Chasles, *Aperçu hist.*, Note X, pag. 308—327 (deutsch 318—340). [5]) Desargues I, 147. [6]) Ebenda I, 127.

Sätzen erwähnen wir nur einen, der vielfach den Namen Satz von Desargues enthalten hat, dass nämlich jedes in einem Kegelschnitte einbeschriebene Vierseit nebst dem Kegelschnitte selbst eine beliebige Transversale in den sechs Punkten einer Involution schneiden[1]. Auch die Polare eines Punktes mit Beziehung auf einen gegebenen Kegelschnitt war Desargues nicht unbekannt[2], wenn auch dieser Name erst späteren Ursprunges ist. Diese kurzen Auszüge mögen genügen, das vorher über das Brouillon project des Desargues Gesagte näher zu begründen. Bemerkenswerth dürfte noch sein, dass Desargues hier den Kunstausdruck *coadjuteur*[3]) einzubürgern versuchte für das, was bei Anderen (*ailleurs*) costé droit, parametre genannt werde. Der letztere noch nicht lange (S. 673) vorhandene Name behielt das Uebergewicht. Von den Verdiensten, welche Desargues als Baumeister sich erwarb, haben wir nicht zu reden. Einen einzigen Punkt müssen wir erwähnen. Nach der Aussage von De la Hire hat Desargues die epicycloidale Gestalt der Zähne ineinandergreifender Räder als diejenige erkannt und in Anwendung gebracht, bei welcher die geringste Reibung stattfindet[4], während die Erfindung der Epicycloide, wie wir uns erinnern (S. 461), Dürer angehört.

In dem S. 675 erwähnten Werke von Abraham Bosse über Perspective ist namentlich ein Satz bemerkenswerth, den der Verfasser 1636 von Desargues kennen gelernt haben will, und der darin besteht, dass wenn zwei geradlinige Dreiecke in einer Ebene so liegen, dass Verbindungsgerade ihrer gleichliegenden Ecken in einem und demselben Punkte zusammentreffen, alsdann auch ihre gleichliegenden Seiten sich in drei derselben Geraden angehörenden Punkten schneiden und umgekehrt[5]. Derartige Dreiecke haben bekanntlich durch Poncelet den Namen homologer Dreiecke erhalten.

Ein einziger Schriftsteller verstand Desargues' geometrische Leistungen sofort so vollkommen, dass er den eröffneten Weg weiter fortzugehen im Stande war: Blaise Pascal[6] (1623—1662). Wenn man der Erzählung seiner Schwester trauen darf, fand der frühreife Knabe, ohne vorher mathematischen Unterricht genossen zu haben, aus sich heraus den geometrischen Satz von der Gleichheit des Aussenwinkels am Dreiecke mit der Summe der beiden gegenüberliegenden inneren Winkel, worauf ihm zur belohnenden Erholung in

[1]) Desargues I, 186. [2]) Ebenda I, 164. [3]) Ebenda I, 203. [4]) Ebenda I, 31. [5]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 82—83 (deutsch 79—80). [6]) Dreydorff, Pascal, sein Leben und seine Kämpfe (Leipzig 1870). — Cantor, Blaise Pascal (Preussische Jahrbücher XXXII, 212—237). — *Oeuvres de Pascal* (Paris 1872 bei Hachette). Wir citiren diese Ausgabe der Werke unter dem Namen Pascal.

seinen Spielstunden eine lateinische Uebersetzung des Euklid in die Hände gegeben wurde. Derselben Quelle entstammt die Erzählung, Pascal's Vater, Etienne Pascal, welcher selbst ein ganz tüchtiger Mathematiker war, und während seines Aufenthaltes in Paris (1631—1638) an den Zusammenkünften von Mathematikern sich betheiligte, deren wir (S. 674) gedachten, habe nicht nur den Sohn zu jenen Zusammenkünften mitgenommen, sondern dem Knaben sei es gestattet gewesen, sich in die Besprechungen einzumischen. Sicher ist durch Pascal's eigene Aussage[1] von 1654, dass er im Alter von erst 16 Jahren, mithin vor 1640, ein Werk über Kegelschnitte verfasst hat, welches Leibniz, dem es später, längst nach Pascal's Tode, zur Begutachtung vorlag, zum Gegenstande eines unter dem 30. August 1676 an Pascal's Neffen gerichteten Briefes machte. Leibnitz verlangte nachdrücklich eine baldige Drucklegung des Werkes, welche um so dringender sei, als Lehrbücher erschienen, welche zu einem Abschnitte des Pascal'schen Werkes in Beziehung stünden[2]. Leider wurde Leibnizen's Wunsch nicht erfüllt. Nur ein ganz kurzes Bruchstück *Essai sur les coniques* ist im Drucke bekannt geworden[3], das Meiste ging verloren. Man ist daher fast ausschliesslich auf den Leibnizischen Brief für die Kenntniss des Inhaltes von Pascal's Jugendwerk angewiesen. Ein von Leibniz abgeschriebenes und aus dessen Nachlass veröffentlichtes Bruchstück[4] handelt nur von der Entstehung eines Kegelschnittes mittels Kegel und Ebene. Die Ellipse wird darin *Antobola* genannt. Ueber den Ursprung von Pascal's Forschungen giebt dessen Essai eine willkommene Ergänzung. „Wir beweisen, sagt Pascal[5], auch die nachfolgende Eigenschaft, deren erster Entdecker Herr Desargues aus Lyon ist, einer der grossen Geister unserer Zeit, einer der besten Kenner der Mathematik und unter Anderem der Kegelschnitte, wie seine Schriften über diesen Gegenstand, so kurz sie gefasst sind, dem reichlich zeigen, welcher in sie einzudringen sich bemüht. Ich gestehe es gern ein, dass ich seinen Schriften das Wenige, was ich über diesen Gegenstand gefunden habe, schulde, dass ich, so weit es mir möglich war, gesucht habe seine Methode nachzuahmen, welche darin besteht, dass er, ohne des Axendreiecks sich zu bedienen, von allen Kegelschnitten im Allgemeinen handelte." Darauf folgt der Desargues'sche Satz vom Sehnenviereck des Kegelschnittes. Als erstes Lemma[6] nennt ferner

[1]) Pascal III, 219—220: *Conicorum opus completum et conica Apollonii et alia innumera unica fere propositione amplectens; quod quidem nondum sexdecimum aetatis annum assecutus excogitavi, et deinde in ordinem congessi.* [2]) Ebenda III, 468. [3]) Ebenda III, 182—185. [4]) C. J. Gerhardt, Berl. Acad. Ber. 1892, S. 197—202. [5]) Pascal III, 184 lin. 14—30. [6]) Ebenda III, 182.

Pascal aber ohne Beweis den Satz, welcher als Satz vom Pascalschen Sechseck bekannt geblieben ist: Jedes Sehnensechseck eines Kegelschnittes hat die Eigenschaft, dass die drei Durchschnittspunkte von je zwei einander gegenüberliegenden Seiten auf einer und derselben Geraden sich befinden. Pascal spricht den Satz zunächst allerdings in seiner Beschränkung auf den Kreis aus, indem er sich eines Kunstausdruckes bedient, der einem Desargues'schen nachgebildet ist. *Ordonnance de droites* heisst bei Jenem der gemeinsame Durchschnittspunkt mehrerer Geraden und Pascal sagt von Geraden, die einen gemeinsamen Durchschnittspunkt besitzen, sie seien gleicher Anordnung, *de même ordre*. Ist $KNOVQP$ ein Kreissehnensechseck und PK, OV schneiden sich in M, während VQ, KN sich in S schneiden, so muss der Durchschnittspunkt von NO, QP mit M und S in gerader Linie liegen, und das heisst bei Pascal: NO, QP, MS müssen gleicher Anordnung sein. Kehren wir zum Leibnizischen Briefe, als der einzigen Quelle, welche einige Auskunft ertheilt[1]), zurück und entnehmen ihm die Inhaltsübersicht des verlorenen Werkes. An der Spitze stand die perspectivische Betrachtung, welche jeden Kegelschnitt optisch durch Durchschneidung des Strahlenkegels vom Auge nach dem Grundkreise erzeugt, indem der Kreis auf die Schnittebene sich projicirt[2]). Dann folgten die Eigenschaften einer gewissen aus sechs Geraden gebildeten Figur, des *Hexagramma mysticum*, unzweifelhaft des Pascal'schen Sechsecks unter Entfernung der oben erwähnten Beschränkung auf den Kreis, nachdem einmal der perspectivische Zusammenhang zwischen Kreis und Kegelschnitt hergestellt war. Das Hexagramm war in einem dritten Abschnitte benutzt, um die Eigenschaften von Tangenten- und Sehnenvierecken von Kegelschnitten nebst dabei auftretenden harmonischen Theilungen und Durchmessereigenschaften abzuleiten[3]). Ein vierter Abschnitt von den Proportionen zwischen den Abschnitten von Tangenten und Secanten scheint den gleichen Gegenstand weiter ausgebeutet und conjugirte Durchmesser sowie Brennpunkte besprochen zu haben[4]). Was im fünften Abschnitte stand, ist aus dessen Ueberschrift[5]) „von Punkten und Geraden, welche ein Kegelschnitt berührt“ schon einigermassen zu entnehmen. Deutlicher sprach sich Pascal in einem Schreiben aus. Bei Pater Mer-

[1]) Pascal III, 466—468. [2]) *projectio peripheriae, tangentium et secantium circuli in quibuscunque oculi, plani ac tabellae positionibus* und *la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cône des rayons.* [3]) *unde rectarum harmonice sectarum et diametrorum proprietates oriuntur.* [4]) *De proportionibus segmentorum secantium et tangentium; de correspondentibus diametrorum; de summa et differentia laterum, seu de focis.* [5]) *De punctis et rectis quas sectio conica attingit.*

senne hatten bis zu dessen Tode 1648 regelmässige wöchentliche Zusammenkünfte von Mathematikern, eine Art freier Akademie, stattgefunden. An deren Stelle traten Zusammenkünfte ausschliesslicher Anhänger von Descartes. Pascal hegte den Wunsch, wieder an jene ältere Vereinigung von weniger ausgesprochenem Parteicharakter anzuknüpfen, und das war die allerdings unerreichte Absicht[1]) eines Briefes von 1654, in welchem er die Arbeiten angab, welche damals fertig bei ihm bereit lagen. Dort spricht er nämlich von der Herstellung von Kegelschnitten, welche fünf beliebigen Bedingungen genügen[2]), worunter das Hindurchgehen durch gegebene Punkte und das Berühren gegebener Geraden inbegriffen sei. Eine sechste Abtheilung oder Abhandlung endlich war nach Leibnizens Urtheil dazu bestimmt, für sich allein veröffentlicht zu werden, weil Mancherlei aus dem zweiten Abschnitte, insbesondere die Definition des Hexagramma mysticum, dort wortgetreu wiederkehrte. Wenn Leibniz der Einzige war, welcher über die Untersuchungen des jungen Pascal über Kegelschnitte einen auf uns gelangten Bericht verfasst hat, so war er nicht der Einzige, der Kenntniss von ihnen nahm[3]). Descartes zwar dürfte nur den schon zu Pascal's Lebzeiten gedruckten Essai gesehen haben, und der von ihm berichtete Ausspruch, diese Schrift sei unmöglich die Arbeit eines 16jährigen jungen Mannes, sondern rühre, wenn nicht von Desargues, jedenfalls von Pascal dem Vater her, dürfte niemals erfolgt sein[4]), aber Pater Mersenne muss doch wohl das grössere Werk gekannt haben, um 1644 die Behauptung drucken zu lassen, Pascal habe aus einem einzigen allgemeinen Lehrsatze 400 Folgerungen abgeleitet, ja den ganzen Apollonius darin eingeschlossen gefunden. Wir haben hier noch eines Bruchstückes zu gedenken, welches von Pascal vorhanden ist, dessen Entstehungszeit sich aber nicht genauer bestimmen lässt, als durch die einzige Thatsache, dass das Descartes'sche *Cogito ergo sum* darin angeführt ist, womit eine obere Grenze etwa auf das Jahr 1637 als Druckjahr des Discours de la méthode gewonnen wird. Es ist eine Abhandlung über die Methode der geometrischen Beweisführung[5]). Sie allein, sagt Pascal, entspreche den Anforderungen, welche man an

[1]) Briefliche Mittheilung von P. Tannery. [2]) Pascal III, 219. [3]) Montucla II, 62. — Chasles, *Aperçu hist.* 73 und 330 (deutsch 70 und 343). [4]) So schon Bayle im *Dictionnaire historique* s. v. Pascal. Die entgegengesetzte Meinung stammt von einem Anonymus her, welcher sie in einer Vorrede aussprach, ohne eine Quelle dafür anzugeben, welche aber in einem Briefe Descartes' vom April 1640 zu finden sein dürfte. Dann fand die Legende durch Montucla unberechtigte Verbreitung. [5]) Pascal III, 163—182. Die im Texte hervorgehobene Stelle III, 178.

Definitionen, an Axiome, an irgend welche Beweisführungen zu stellen berechtigt sei, und welche zusammengefasst acht Vorschriften bilden. 1. Man soll Nichts definiren wollen, was an sich so bekannt ist, dass es an einfacheren Ausdrücken zu dessen Erklärung fehlt. 2. Man soll keinen irgend dunkeln oder Zweifel gestattenden Ausdruck ohne Definition lassen. 3. Man soll bei den Definitionen nur solcher Wörter sich bedienen, welche entweder vollkommen bekannt sind, oder vorher ihre Erklärung gefunden haben. 4. Man soll keinen nothwendigen Grundsatz, so klar und einleuchtend er sei, weglassen, ohne die Frage zu stellen, ob man denselben als Axiom gelten lasse. 5. Man soll als Axiome nur Dinge aufstellen, die an sich vollkommen einleuchtend sind. 6. Man soll Nichts zu beweisen suchen, was dergestalt einleuchtend ist, dass es keine klareren Beweismittel giebt. 7. Man soll jeden Satz beweisen, dem irgend Dunkelheit anhaftet, und als Beweismittel nur sehr einleuchtende Axiome oder vorher schon Bewiesenes, beziehungsweise Zugestandenes anwenden. 8. Man soll fortwährend in Gedanken das Definirte durch seine Definition ersetzen, um nicht vermöge des vielfachen Sinnes von Wörtern, die innerhalb der Definition enger gefasst wurden, zu Irrthümern verleitet zu werden. Die drei negativen Vorschriften (1., 4., 6.), fährt Pascal fort, könne man vielleicht als minder nothwendig ohne Gefahr vernachlässigen, die fünf anderen aber sind von absoluter Nothwendigkeit, und man könne keine derselben erlassen, ohne in wesentliche Mängel, oftmals sogar in Fehler zu verfallen. Wir wollen nicht versäumen, darauf aufmerksam zu machen, dass in diesem Pascal'schen Bruchstücke der erste moderne Versuch einer Philosophie der Mathematik gemacht ist. Auch eine neue Einleitung in die elementare Geometrie scheint Pascal vorbereitet zu haben, von welcher sich Leibniz ein Bruchstück abschrieb[1]).

Mydorge, Desargues, Pascal standen insgesammt in Beziehung zu Descartes. Von ihm haben wir jetzt zu reden. René Descartes du Perron (1596—1650), latinisirt Cartesius, gehört zu den Persönlichkeiten, deren vielbewegtes Leben die zahlreichsten Schilderungen gefunden hat. Man weiss, dass er 1604—1610 ein Zögling des Jesuitencollegiums La Flèche war. Im Jahre 1614 führte er in Paris das ausschweifendste Leben, aus welchem er sich nach einem Jahre plötzlich zurückzog, um in einem Verstecke ernsten Studien sich zu widmen. 1617—1627 durchstreifte er Europa als Glücksritter, zugleich überall auf die Erweiterung seiner Kenntnisse bestrebt. Holland, Deutschland, Ungarn, dann wieder Holland, Italien durchstreifte

[1]) C. J. Gerhardt, Berl. Akad. Ber. 1892, S. 202—204.

er nach allen Richtungen. In Breda war er 1618 in Verkehr mit dem vielseitig gelehrten Isaak Beeckman, der von Einfluss auf sein damals geschriebenes, aber erst 1648 gedrucktes Compendium Musicae gewesen ist. Dann war er 1620 in Ulm bei Johann Faulhaber, von dem er sich in algebraischen Dingen unterrichten liess[1]). 1628 nahm er an der Belagerung von La Rochelle theil, wo Desargues, wie wir sahen (S. 675), Ingenieurdienste leistete. Dann war Descartes 1629 wieder in Holland, von wo er 1631 eine Reise nach England, 1634 eine solche nach Dänemark unternahm. Den Verkehr mit seiner Familie hatte er vollständig abgebrochen. Den Tod des Vaters, Joachim Descartes, erfuhr er erst drei Monate nach dem Ereignisse, als er 1640 brieflich die Absicht kundgab, ein aussereheliches Töchterchen zur Erziehung nach Frankreich zu bringen. Da auch das Kind damals starb, blieb Descartes in Holland, philosophisch-religiöse Kämpfe dort bestehend, die zu einem geheimen, gefahrdrohenden Anklageverfahren gegen ihn führten, welches nur mit Mühe unter Beihilfe des französischen Gesandten niedergeschlagen wurde. Um 1643 trat Descartes in Briefwechsel mit der Prinzessin Elisabeth von der Pfalz, zu deren Besuch er dreimal 1644, 1647, 1648 nach Frankreich zurückkehrte. Auf der ersten Reise knüpfte er mit De Chanut, dem französischen Gesandten in Stockholm, persönliche Beziehungen an, welche seit 1647 einen Briefwechsel mit der Königin Christina von Schweden im Gefolge hatten. Ihrem Rufe folgte Descartes 1649 nach Stockholm, um dort nach wenigen Monaten zu sterben. Die für die Geschichte der Mathematik wichtigste Schrift Descartes' ist seine 1637 im Drucke erschienene *Géométrie*. Ausserdem ist sein Briefwechsel eine nicht zu vernachlässigende Quelle. Claude Clersellier (1614—1684 oder 1686), Parlamentsadvocat in Paris, der besonders nach dem Tode des Pater Mersenne in engster Beziehung zu Descartes stand, hat diesen Briefwechsel 1667 in drei Bänden herausgegeben. Beide kommen hier, wo wir nur Reingeometrisches besprechen, nicht in Betracht, sondern nur ein mathematisches Bruchstück aus ganz unbekannter Zeit, welches selbst nur in einer zwischen 1672 und 1676 durch Leibniz genommenen Abschrift lückenhafter Natur vorhanden ist[2]). Es bezieht sich auf die Lehre

[1]) Doppelmayr S. 91 Note aa. [2]) *Oeuvres inédites de Descartes par M. le Comte Foucher de Careil* II, 214 (Paris 1860). — Artikel von Prouhet und Mallet in der *Revue de l'instruction publique*, Nummern vom 22. December 1859, 5. Januar, 1. und 22. November, 6. December 1860. — Prouhet in den *Compt. Rend. de l'Académie des sciences* vom 23. April 1860. — Baltzer in den Monatsber. Berlin. Acad. 1861, S. 1043—1046. — De Jonquières in der von Eneström herausgegebenen *Bibliotheca mathematica* 1890, pag. 43—55.

von den Vielflächnern und enthält folgende Sätze: Das Product der Eckenzahl e in 4 Rechte um 8 Rechte verringert ist gleich der Summe w aller Polygonwinkel auf der Oberfläche des Vielflächners. Für die Summe w gilt die Wahrheit, dass sie mit dem Vierfachen der Flächenzahl f vereinigt die doppelte Anzahl aller Polygonwinkel, beziehungsweise das Vierfache der Kantenzahl k liefert, indem die Winkelanzahl desshalb der doppelten Kantenzahl gleichkommt, weil jede Kante zu zwei Flächen gehört und in jeder derselben bei der Winkelbildung mitwirkt. Die beiden Gleichungen $w = 4e - 8$, $w + 4f = 4k$ führen vereinigt zu der neuen Gleichung $e + f = k + 2$. Descartes kleidet sie in die Worte: *Numerus verorum angulorum planorum est* $2\varphi + 2a - 4$[1], indem die Zahl w der ebenen Winkel, wie wir soeben bemerkt haben, der doppelten Kantenzahl gleichkommt, φ die Flächenzahl (unser f), a die Zahl der körperlichen Winkel (*angulorum solidorum*) oder die Eckenzahl (unser e) bedeutet. Wir haben die Descartes'schen Buchstaben durch andere ersetzt, um die Form zu erhalten, in welcher später Euler den Satz neu entdeckte, welcher von diesem den Namen des Euler'schen Polyedersatzes zu führen pflegt. Descartes hat auch folgende Ungleichheiten noch behauptet: Die Zahl der Polygonwinkel ($2k$) ist mindestens das Dreifache der Eckenzahl, d. h. $2k \geq 3e$; das Doppelte der um 2 verminderten Eckenzahl ist die grösstmögliche Flächenzahl, d. h. $2e - 4 \geq f$; endlich $e + 4 \leq 2f$, welcher letztere Satz so ausgedrückt ist: Die kleinstmögliche Flächenzahl sei um 2 grösser als die Zahl, welche erhalten werde, wenn man die Hälfte der Eckenzahl oder, falls diese ungerade ist, der um 1 vermehrten Eckenzahl nehme.

Diese Sätze führen uns wieder zu den Vieleckswinkeln zurück und zu den mannigfachen Arten von Vielecken, denen Kepler und Girard ihr Augenmerk zugewandt haben. Auch Athanasius Kircher[2]) (1602—1680), ein Vielschreiber von berüchtigter Unzuverlässigkeit, hat wiederholt mit Sternvielecken zu thun gehabt. In der *Ars magna lucis et umbrae* von 1646 dient ihm das Sternsiebeneck zur Bestimmung der Sterne, welchen die einzelnen Wochentage zugeeignet sind. Den Entfernungen von der Erde nach geordnet heissen diese Sterne Saturn, Jupiter, Mars, Sonne, Venus, Merkur, Mond. Werden die Namen in dieser Reihenfolge kreisförmig hingeschrieben und nun bei Saturn anfangend unter jedesmaliger Ueberspringung von zwei Stellen geradlinige Verbindungen vollzogen, so

[1]) *Biblioth. math.* 1890, pag. 45 Z. 3 v. u. [2]) Chasles, *Aperçu hist.* 478 und 481 (deutsch 548 und 552). — Allgem. deutsche Biographie XVI, 1—4. Artikel von Erman.

erscheint das zweite Sternsiebeneck, dessen Spitzen die Reihenfolge Saturn, Sonne, Mond, Mars, Merkur, Jupiter, Venus bilden. In der Arithmologia von 1665 kam Kircher bei Besprechung mannigfacher Amulette auf das Sternfünfeck insbesondere zu reden, und es ist mit Recht hervorgehoben worden[1]), dass Kircher bei dieser Gelegenheit ungleich seinem Vorgänger eines unregelmässigen Sternfünfecks sich bedient.

Johannes Brożek[2]) oder Broscius, ein Krakauer Gelehrter, der Schüler des Adriaen van Roomen gewesen sein soll, und der unter Anderem 1637 *De numeris perfectis* und *De numeris amicitiae* schrieb, hat die Sternvielecke in seiner *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum et alios* (Danzig 1652) von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus betrachtet. Er leugnet sie. Er sieht z. B. in dem Sternfünfeck (Figur 132), welches er unter Entfernung der im Innern der Figur verlaufenden Strecken gezeichnet wissen will, ein Zehneck mit fünf spitzen und fünf überstumpfen Winkeln, und wenn er auch einsieht, dass die Summe der fünf spitzen Winkel zwei Rechte betrage, so sei doch die Winkelsumme des ganzen Zehnecks 16 Rechte. Der überstumpfe Winkel heisst ihm dabei *angulus reclinatus*. Broscius beruft sich in seiner Untersuchung auf das Werk des Bradwardinus und kennt gleich diesem verschiedene Ordnungen von Sternvielecken, deren Eckenzahl er nur nach seiner Auffassung anders bestimmt. Auch die Entstehung dieser Figuren ist bei Broscius eine wesentlich neue (Figur 133). Er halbirt sämmtliche Seiten des ursprünglichen n-ecks (etwa bei $n = 7$) und verbindet die Halbirungspunkte durch punktirte Strecken. Dreht man nun die sieben Dreiecke, welchen die punktirten Strecken als Grundlinien dienen, um diese herum, so dass sie mit ihren Spitzen nach innen fallen (z. B. ABC nach ABC'), so ist aus dem Siebeneck ein ihm isoperimetrisches, aber der Fläche nach kleineres Vierzehneck geworden.


Fig. 132.

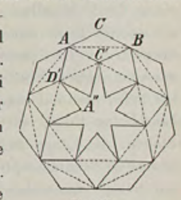


Fig. 133.

[1]) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, S. 15—16, wo aber irrig Kircher's *Arithmologia* S. 537 citirt ist statt S. 217. [2]) Kästner III, 199—205. — Chasles, *Aperçu hist.* pag. 486—487 (deutsch S. 558—560. In der Uebersetzung ist S. 559, Z. 21 v. u. Seiten in Winkel zu verbessern). — Günther l. c. S. 21—25. — J. N. Franke, Jan Brozek (J. Broscius) akademik krakowski 1585—1652 (Krakau 1884). — Briefliche Mittheilung von H. Studnička.

Die nach innen gekehrten Eckpunkte (z. B. C', D') verbindet Broscius wieder durch punktirte Strecken, so entstehen abermals sieben Dreieckchen mit punktirten Grundlinien, welche neuerdings um diese nach innen gedreht (z. B. $AC'D'$ nach $A''C'D'$) ein wiederum isoperimetrisches, aber der Fläche nach noch kleineres Vierzehneck hervorbringen. Aus dem Gewirre der gezeichneten Strecken treten neben dem äusseren rings convexen Siebenecke deutlich ein Sternsiebeneck erster und ein solches zweiter Ordnung hervor.

Eine andere Richtung geometrischer Schriftstellerei knüpft sich am leichtesten an Schwenter's Praktische Geometrie an, wenn auch keineswegs behauptet werden will, dieses Werk habe den Anstoss gegeben. Schwenter's zweiter Tractat (S. 668) lehrte Feldmessen unter alleiniger Anwendung der Messstange oder Messkette. Aehnliches hat ein polnischer Schriftsteller[1]) Namens Mathias Gloskowski, von dem man aus vereinzelten Angaben in seinem Buche weiss, dass er jener Nation angehörte und dem Prinzen Wilhelm II. von Oranien (1626—1650) nahe stand, in einer Schrift gelehrt, welcher er den Titel *Geometria peregrinans* beilegte. Diese Angaben genügen auch, um der ohne jede Ort- und Zeitangabe gedruckten Schrift jedenfalls ein späteres Datum als das der Schwenterschen Geometrie (1625) zuzuweisen. Sie gelangte in den Besitz des jüngeren Franciscus van Schooten (S. 660), und dieser druckte einen Theil derselben nebst ähnlichen Aufgaben eigener Erfindung als zweites Buch seiner *Exercitationes mathematicae* mit der Sonderüberschrift: *De constructione problematum simplicium geometricorum seu quae solvi possunt ducendo tantum rectas lineas.* Ebensowenig wie bei Schwenter hat man es hier mit ausschliesslicher Anwendung des Lineals zu thun, da die Annahme festgehalten ist, man sei im Stande, die Länge zugänglicher Strecken eben mit Hilfe der Messstange zu bestimmen, beziehungsweise Strecken von bestimmter Länge zu ziehen. Auch das erste Buch der *Exercitationes mathematicae* ist zur Hälfte der Geometrie eingeräumt. Dort sind 50 arithmetische und 50 geometrische Aufgaben vereinigt, sämmtlich so einfacher Natur, dass, wenn auch bei einigen Auflösungen Scharfsinn nicht zu verkennen ist, wir doch ruhig sagen können, den Druck hätten sie nicht verdient.

Der Zeit der Veröffentlichung nach gehört hierher auch eine Schrift von John Wallis[2]) (1616—1703), welcher mit theologischen

[1]) Franciscus van Schooten, *Exercitationes mathematicae*, pag. 160—161. — J. N. Franke und A. Jakubowski haben 1878 eine Einzeluntersuchung über Gloskowski in polnischer Sprache veröffentlicht. Vergl. S. Dickstein, *Biblioth. mathemat.* 1889, S. 49. [2]) Poggendorff II, 1253.

Studien beginnend seit 1649 der Mathematik als Professor der Geometrie an der Universität Oxford lehrend oblag. Er gab 1656 eine Abhandlung *De angulo contactus et semicirculi tractatus*[1]) heraus, welche in der wiederholt erwähnten Streitfrage wegen des gemischtlinigen Winkels zwischen einer Curve, insbesondere dem Kreise, und seiner Berührungslinie für die Ansicht eintrat, jener Winkel sei überhaupt nicht vorhanden, er sei positiv ausgedrückt ein *non-angulum*, ein *non-quantum*, und Clavius habe also Unrecht zu leugnen, dass der Halbkreis mit seinem Durchmesser einen rechten Winkel bilde. Abgethan war der Streit damit noch immer nicht. Eine Entgegnung in der *Cyclomathia* des Leotaud von 1662 machte eine *Defensio* Wallis' von 1685 nothwendig, welche aber die Grenzen der in diesem Bande behandelten Zeit allzuweit überschreitet, um mehr als im Vorübergehen genannt werden zu dürfen.

72. Kapitel.

Praktische und theoretische Mechanik.

Viel machte eine geometrisch-mechanische oder, wie man mit fast gleichem Rechte sagen könnte, eine arithmetisch-mechanische Erfindung von sich reden, die des Proportionalzirkels[2]).

Die erste Erfindung wird einem Antwerpener Schriftsteller über Schifffahrtskunde, Michel Coignet (1549—1623) zugeschrieben. Neben Coignet sind auch zwei italienische Schrifteller, Commandino und Del Monte, neben ihnen Christoph Schissler in Augsburg, von welchem ein Proportionalzirkel mit der Datirung 1574 sich im Besitze der Sternwarte von Kremsmünster befindet[3]), und Daniel Speckle, der deutsche Festungsbaumeister, Mitbewerber, und ihre Ansprüche gehen sämmtlich in das XVI. Jahrhundert zurück. Einigermassen genauer datirt ist auch die Erfindung Speckle's, welche in dessen *Architectura* von 1589 im Drucke veröffentlicht ist. Der Zweck des Proportionalzirkels ist der einer graphischen Tabelle. Auf zwei in Zirkelart mit einander verbundenen Linealen sind Längen der

[1]) *Opera Wallisii* III, 603—630. [2]) Kästner III, 336—352 und desselben Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspective (6. Auflage, Göttingen 1800), S. 489—495. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 909—917. — Quetelet pag. 123—125. — Favaro, *Galileo Galilei e lo studio di Padova* I, 212—248 und II, 353. [3]) Fellöcker, Geschichte der Sternwarte von Kremsmünster (Programm des k. k. Gymnasiums zu Kremsmünster 1864), S. 31.

verschiedensten Art ein für alle Mal aufgezeichnet: arithmetische Linien, deren Abtheilungen alle einander gleich sind; quadratische Linien, deren einzelne abgegrenzte Theile im Verhältnisse der Quadratwurzeln der beigeschriebenen Zahlen zu einander stehen; kubische Linien für die Kubikwurzeln der beigeschriebenen Zahlen u. s. w. So weit war es nicht erforderlich, dass die Lineale, auf welche jene Maassstäbe aufgetragen wurden, in zirkelartiger Verbindung standen, allein die Eigenschaft der Vorrichtung als wirklicher Proportionalzirkel trat hinzu und verlangte jene Vereinigung. Es sollten, während die Zirkelweite einer beliebigen Entfernung entsprechend gespannt wurde, zwei andere Punkte der Zirkelstangen von selbst eine Entfernung zeigen, die zur ersten in einem gewünschten Verhältnisse stand. Diesem Verlangen konnte entsprochen werden (Figur 134). In Deutschland gab man jedem der beiden als Zirkelstangen dienenden Lineale oben und unten eine Spitze und vereinigte beide mittels eines beweglichen Zirkelkopfes, so dass die Länge jeder Stange oberhalb und unterhalb des Kopfes wechselte. In Italien war der verbindende Zirkelkopf fest, dagegen war an jeder Zirkelstange eine zweite Spitze verschiebbar. Die meisten dieser Vorrichtungen sind im XVII. Jahrhunderte veröffentlicht worden und haben, vornehmlich in Italien, zu weit heftigeren Streitigkeiten Anlass gegeben, als die ganze Sache verdiente, insbesondere da, wie eben bemerkt wurde, von einer ganz neuen Erfindung überhaupt nicht gesprochen werden konnte.

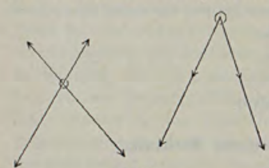


Fig. 134.

Innerhalb des XVII. Jahrhunderts fand die erste Veröffentlichung in Deutschland statt. Jobst Bürgi hatte einen Proportionalzirkel angefertigt und Philip Horcher[1]) beschrieb ihn 1605 in einer in Mainz gedruckten Abhandlung in lateinischer Sprache. Eine deutsche Beschreibung hatte Levinus Hulsius[2]) bereits 1603 verfasst, aber sie ist erst 1607 gedruckt. Sie führt den Titel: Beschreibung und Unterricht des Jobst Burgi Proportionalzirkels war in Verlegung der Wittwe Levini Hulsii. Hulsius oder Lievin van Hulst war in Gent geboren, brachte aber sein ganzes Mannesalter, etwa seit 1590, in Deutschland zu. Nürnberg wurde dort zunächst sein Aufenthalt, und er ernährte sich durch Ertheilung französischen Unterrichtes. Später

[1]) Kästner III, 336. [2]) Ebenda III, 379—385. — Quetelet pag. 179—180. — Le Paige in dem *Bullet. de l'institut archéologique Liégeois* XXI, 485—487.

ging er zum Buchhandel über und zog, nachdem er fast anderthalb Jahre auf Reisen zur Anknüpfung von Geschäftsverbindungen zugebracht hatte, um 1603 nach Frankfurt, wo er jedenfalls vor 1607 gestorben ist. Die Abhandlung über den Proportionalzirkel war die dritte von 15, welche Hulsius herauszugeben dachte, und welche alle damals irgend gebräuchlichen mechanischen Vorrichtungen in deutscher Sprache zu beschreiben bestimmt waren. Des Verfassers Tod verhinderte die Ausführung des Unternehmens. Den ersten Tractat gab er selbst 1604, den zweiten schon ein Jahr früher 1603 heraus. Den dritten verlegte, wie bemerkt, 1607 die Wittwe, der vierte Tractat endlich ist 1605 erschienen, ob noch durch Hulsius selbst oder schon durch seine Wittwe verlegt, ist auf dem Titel nicht angegeben. Weiteres kam nicht heraus.

Zwischen das Erscheinen der beiden Beschreibungen des Bürgischen Zirkels fällt die des Galilei'schen. Galileo Galilei (1564—1642) gehört mit seinen merkwürdigen Lebensschicksalen der Weltgeschichte an. Das Verbot von 1616, die koppernikanische Lehre irgendwie zu vertreten, die endgiltige Verurtheilung dieser Lehre durch eine geistliche Prüfungscommission 1620, die Wirkung, welche das Verbot von 1616 dann 1633 in dem Processe gegen Galilei übte, seine Verurtheilung, sein Lebensende als blinder Halbgefangener auf einer Villa bei Florenz bedürfen hier keiner genauen Erörterung, so wenig wie die meisten wissenschaftlichen Streitigkeiten seines an Kämpfen reichen Lebens, weil dieselben in der Hauptsache astronomische waren. Nur sein erster Streit war ein mathematischer und knüpft sich an die Erfindung des Proportionalzirkels. Galilei, in Pisa geboren und Zögling der dortigen Hochschule, wurde bereits 1589 ebendaselbst Professor der Mathematik. Von 1592—1610 war er sodann in gleicher Eigenschaft in Padua angestellt, und dort war es, dass er mit dem Proportionalzirkel sich beschäftigte. In einem Einnahmebuche Galilei's, welches sich erhalten hat, finden sich für das Jahr 1599 wiederholte Einträge von Summen, welche für Instrumente, von anderen, welche für Zirkel eingenommen wurden[1]). Dann erschien 1606 in Padua *Le operazioni del Compasso geometrico e militare di Galileo Galilei.* In der Vorrede erklärte der Verfasser, er habe Ergebnisse erstrebt und auch erreicht, welche Anderen, die ähnliche Instrumente schon ausführten, nicht in den Sinn gekommen seien. Im Frühjahre 1607 folgte der Druck einer Schrift *Usus et fabrica circini cuiusdam proportionis* von Baldassare Capra und die Ueberreichung eines Exemplares derselben an Giacomo Aloise Cornaro.

[1]) Favaro l. c. I, 207.

Um die ganze Bedeutung dieses kurzen Satzes zu ermessen, müssen wir um einige Jahre zurückgreifen. Ein Mailänder, Aurelio Capra, war kurz nach Galilei's Berufung nach Padua mit seinem Sohne Baldassare Capra ebendahin gekommen, und Vater und Sohn waren dort mit Galilei bekannt geworden. Die Vermittelung hatte Giacomo Aloise Cornaro übernommen, und in dessen Hause und eigener Gegenwart weihte Galilei Vater und Sohn in den Gebrauch des Proportionalzirkels ein. Von Cornaro entlieh dann Capra noch einen solchen Zirkel, um ihn genauer zu studiren. Es gehört zu den menschlichen Unbegreiflichkeiten, dass Capra es nunmehr 1607 wagte, eben demselben Cornaro eine Schrift zu überreichen, die nichts Anderes war, als eine von Missverständnissen wimmelnde Uebersetzung der Galilei'schen Schrift, ohne dass Galilei's Name auch nur ein einziges Mal darin erwähnt wurde.

Der entrüstete Cornaro sandte Capra das Buch zurück und machte zugleich Mittheilung an Galilei, der eine Klage gegen Capra bei der obersten Studienbehörde in Venedig einreichte. Es ist eine neue Unbegreiflichkeit, dass Galilei den wahren Thatbestand und seine eigenen Worte in der Vorrede von 1606 jetzt so sehr ausser Acht liess, dass er den Proportionalzirkel für seine ausschliessliche Erfindung erklärte, die er 1597 gemacht habe, und in welcher Niemand, wer es auch sei, ihm vorangegangen sei. Es ist aber noch unerklärlicher, dass Capra, dem es keineswegs an Zeit fehlte, eine Vertheidigung vorzubereiten, jene Uebertreibungen Galilei's nicht rügte, als falsch nachwies und zu seinen Gunsten verwerthete. Das Urtheil musste demnach vollständig gegen Capra ausfallen. Dessen Buch wurde unterdrückt[1]), während eine *Difesa contro alle calunnie et imposture di Baldassar Capra* aus Galilei's Feder, eine Streitschrift bissigster Natur, wie sie vielleicht seit den Cartelli Ferrari's und Tartaglia's nicht wieder gedruckt worden war, die weiteste Verbreitung fand. Wahrscheinlich durch den Wiederhall dieses Streites kam Galilei's Proportionalzirkel auch ausserhalb Italiens zu mehr als verdientem Ruhme und überflügelte den Bürgi's, welchen er allerdings auch durch eine grössere Zahl von aufgezeichneten Linien etwas übertreffen mochte.

Mathias Bernegger[2]) (1582—1640), ein Oesterreicher, welcher als Professor der Geschichte und der Beredsamkeit der Universität Strassburg angehörte, beschrieb 1612 den Galilei'schen Zirkel in lateinischer Sprache. Verbesserungen, welche aber an dem Mangel,

[1]) Einzelne Exemplare müssen der Vernichtung entgangen sein, denn sonst wäre der Wiederabdruck, der in den Werken Galilei's stattfand, unmöglich gewesen. [2]) Kästner III, 337—339 und 340.

der allen Proportionalzirkeln anhaftet, in hohem Grade unhandlich zu sein und bei der Vielheit angegebener Theilungen keine Zuverlässigkeit zu besitzen, in immer stärkerer Weise litten, veröffentlichte der uns bekannte Johann Faulhaber[1]) von Ulm 1612, dann Georg Galgemayr[2]) von Donauwörth 1615 und 1626. Als besonders vortrefflich wird von Zeitgenossen gerühmt Georg Brendel[3]), Das Schrägmess oder der Proportional Circkel (Ulm 1615).

Aus dem Jahre 1617 stammt ferner der Bericht und Gebrauch eines Proportionallineals, nebst kurzem Unterrichte eines Parallelinstrumentes von Benjamin Bramer[4]). Auch diese Persönlichkeit ist des Verweilens werth. Benjamin Bramer (1588 bis kurz nach 1648) war der jüngere Bruder von Jobst Bürgi's erster Frau und wurde als dreijährige Waise von diesem angenommen. Er folgte Bürgi 1603 nach Prag und blieb daselbst bis 1611. Die zweite Heirath seines inzwischen verwittweten Schwagers gab zur Trennung Anlass. Bramer kam dann als Baumeister zuerst nach Marburg, später nach Ziegenhayn. Er blieb übrigens trotz der Trennung von Bürgi demselben stets dankbar ergeben und rechnete es sich zur Aufgabe, Bürgi's Leistungen nicht in Vergessenheit gerathen zu lassen, noch zu dulden, dass Anderen zum Ruhme gereichte, was er als Bürgi's Verdienst betrachtete. Es ist kaum nothwendig hinzuzusetzen, dass auch Bürgi's Proportionalzirkel zu den von Bramer beschriebenen Vorrichtungen gehörte. In einer späteren Schrift[5]) Bramer's von 1648 ist auch ein Triangularinstrument Bürgi's beschrieben, d. h. eine aus drei Linealen gebildete Vorrichtung, welche bei feldmesserischen Arbeiten zu benutzen war.

Der Galilei'schen Richtung, wenn wir so sagen dürfen, näherte sich wieder Adriaen Metius[6]) von Alkmaar (S. 600) mit seiner *Praxis nova geometrica per usum circinis et regulae proportionalis* von 1623, und eine ähnliche Vorrichtung bürgerte Edmund Gunter (S. 604), dessen *Description and use of the Sector, Cross-staff, Quadrant and other instrument*, jedenfalls vor 1626, als dem Todesjahre des Verfassers, fertig gestellt wurde, in England ein. Ueber die Art von Proportionalzirkel, welche der pommersche Festungsbauer Wendelin Schildknecht 1652 in seiner Beschreibung Festungen zu bauen erläutert[7]), sind wir nicht unterrichtet.

Zu den Arbeiten einer praktischen Mechanik, welche der Geometrie sich nützlich erweisen, müssen wir auch solche zählen, die

[1]) Doppelmayr S. 94 Note b. [2]) Kästner III, 343 und 346. [3]) H. Rudel in der Festschrift des Pegnesischen Blumenordens (Nürnberg 1894), S. 368. [4]) Kästner III, 344. Allg. deutsche Biographie III, 234. [5]) Ebenda III, 368—371. [6]) Ebenda III, 345. [7]) Poggendorff II, 797.

geeignet sind, Messungen ganz kleiner Unterabtheilungen von Strecken oder Winkeln zu ermöglichen. Wir haben in Clavius (S. 580) den Erfinder einer solchen Vorrichtung kennen gelernt, wenig von derselben verschieden und namentlich darin mit ihr übereinstimmend, dass zwei unabhängig von einander bestehende geradlinige oder kreisbogenförmige Maassstäbe an einander zur Verschiebung kommen, waren die Vorschläge dreier Schriftsteller[1]), Peter Vernier (1631), Benedict Hedraeus (1643), Gerhard von Gutschoven (1674), deren Ersterer namentlich dazu ausersehen wurde, der betreffenden Erfindung seinen Namen aufzudrücken, unter welchem sie neben dem des Nonius sich erhalten hat.

Des weiteren haben wir von mechanischen Verfahren zur Herstellung von Kegelschnitten zu reden. Früher sahen wir (S. 578), dass Barozzi einen Kegelschnittzirkel erfunden hat. Aehnliches ist aus dem Jahre 1614 von Christoph Scheiner[2]) (1573—1650) zu berichten. Scheiner war Mitglied des Jesuitenordens und fand als Lehrer erst in Freiburg im Breisgau, dann seit 1610 in Ingolstadt Verwendung. Seine Lehrthätigkeit war beendigt, als er 1617 das Rectorat des Jesuitencollegiums zu Neisse übernehmen musste. Am bekanntesten neben Scheiner's 1612 beginnenden Streitigkeiten mit Galilei wegen der Entdeckung der Sonnenflecken, auf welche beide Anspruch erhoben, ist eine für praktische Zwecke der Zeichenkunst sehr fruchtbare Erfindung, auf welche wir zurückkommen. Zunächst berichten wir über eine Vorrichtung[3]), welche Scheiner durch einen Schüler Johann Georg Schönberger in Form einer Dissertation *Exegeses fundamentorum gnomicorum* 1614 in Ingolstadt veröffentlichen liess. Ein um eine Axe gedrehter Stift von veränderbarer Länge stellt die Erzeugende des Kegels vor, und giebt man zugleich der Axe eine bestimmte Neigung gegen die Zeichnungsebene, so wird diese zur Schnittebene des Kegels, auf welcher je nach der Neigung die gewünschte Curve entsteht. Der Gedanke ist, wie man sieht, dem Barozzi's verwandt. Ob Scheiner von jenem Kenntniss besass, sei dahingestellt.

Wieder den gleichen Gedanken verwirklichte Benjamin Bramer in zwei Ausführungen, welche vielleicht etwas richtigere Curven hervorbringen mochten, als Scheiner's für genaue Zeichnungen ungeschickter Apparat, aber dafür so umständlicher Benutzung waren,

---

[1]) Kästner, III, 356—360. [2]) Allgem. deutsche Biographie XXX, 718—720. Artikel von Günther. — A. von Braunmühl, Christoph Scheiner als Mathematiker, Physiker und Astronom (Bamberg 1891). [3]) A. von Braunmühl l. c. und Zeitschr. Math. Phys. XXXV, Histor.-liter. Abthlg. S. 163—164.

dass sie wenig Beifall fanden. Bramer beschrieb sie[1]) in seinem *Apollonius Cattus* oder Kern der ganzen Geometrie. Entstanden ist dieses Buch 1634, die Vorrede führt die Jahreszahl 1646, gedruckt wurde der Apollonius Cattus erst 1684. Den Namen hat Bramer dem Apollonius Gallus des Vieta und dem Apollonius Batavus des Willebrord Snellius nachgebildet. Ausser der Beschreibung des Werkzeuges zum Zeichnen von Kegelschnitten enthält das Buch allerlei Sätze über jene krummen Linien nebst deren Beweise.

Mit der Aufgabe, Kegelschnitte auf mechanischem Wege herzustellen, hat auch der jüngere Franciscus van Schooten in seinen *Exercitationes mathematicae* sich beschäftigt. Deren 4. Buch führt geradezu die Ueberschrift *De organica conicarum sectionum in plano descriptione*. Seine Methoden sind aber wesentlich andere als die seither geschilderten. Die Kegelschnitte sind nicht als solche, sondern als ebene Curven ins Auge gefasst, beziehungsweise van Schooten bedient sich zu ihrer Zeichnung solcher Eigenschaften, die von der Entstehung auf einem geschnittenen Kegel unabhängig sind. Er erklärt in der Vorrede, keine Schrift ähnlichen Inhaltes zu kennen. Er wisse wohl, dass Aiguillon eine solche geplant habe, aber durch dessen Tod sei die Vollendung verhindert worden. Auch von Otter heisse es, dass er viel über den Gegenstand nachgedacht habe, herausgegeben habe aber auch dieser nichts. Auf Aiguillon kommen wir noch zurück. Otter ist zweifellos Christian Otter[2]) (1598—1660) aus Ragnit in Preussen, welcher zuerst Hofmathematicus des Kurfürsten Friedrich Wilhelm von Brandenburg, später Professor der Mathematik in Nimwegen war, und der in der Geschichte des Festungsbaues mit grossen Ehren genannt wird. Der Natur der Eigenschaften entsprechend, von welchen van Schooten Gebrauch machte, und unter welchen die Eigenschaften der Brennstrahlen vorzugsweise häufig in Wirksamkeit treten, bestehen die Vorrichtungen vielfach aus drei, auch aus vier Linealen, welche an und in einander eine gewisse immerhin durch Scharnierverbindungen behinderte, durch Schlitze ermöglichte Beweglichkeit besitzen. Sie erinnern dadurch im Allgemeinen wenigstens an jene erste Erfindung Scheiner's, von welcher ankündigungsweise die Rede war.

Scheiner[3]) hat 1631 seine *Pantographice seu ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum* herausgegeben, will aber schon 1603, mithin in seiner Freiburger Zeit, darauf gekommen sein. Damals

---

[1]) Kästner III, 195—196. — A. von Braunmühl in Zeitschr. Math. Phys. XXXV, Histor.-liter. Abthlg. S. 164—165. [2]) Poggendorff II, 338. [3]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 710—712 s. v. Pantograph.

will er die Bekanntschaft eines Malers gemacht haben, welcher ihm die Eigenschaften einer in seinem Besitze befindlichen Vorrichtung zur mechanischen Wiederholung eines beliebigen Originals in anderem Maassstabe rühmte, den Anblick aber ihm verweigerte. Daraufhin grübelte Scheiner so lange, bis er den **Pantographen** oder **Storchschnabel** ersann, über welchen der Maler nicht genug erstaunen konnte (Figur 135). Vier Stangen BF, BH, CI, DG sind in Gelenken B, C, D, E mit einander verbunden und bilden ein unter Beibehaltung seiner Seitenlängen verschiebbares Parallelogramm. Wird der Apparat bei dem auf BF befindlichen Punkte P mit einem Stifte befestigt, und ist ein Punkt A der BH mit irgend einem Punkte des nachzubildenden Originals zur Deckung gebracht, so giebt es einen Punkt a der CI, welcher A so entspricht, dass die drei Punkte P, a, A in einer Geraden liegen. Ein in a befindlicher Zeichenstift wird diesen Punkt auf einer auf dem Originale aufliegenden Zeichenfläche bildlich darstellen. Dreiecksähnlichkeiten lassen erkennen, dass dabei die Längenverhältnisse stattfinden $Pa : PA = PC : PB = Ca : BA$. Ist alsdann das Parallelogramm unter Festhaltung von P verschoben, so dass der Punkt A auf einen neuen Punkt A' des Originals fällt, so schneidet die Gerade PA' jetzt die CI in einem Punkte a', und es wird zugleich $Pa' : PA' = PC : PB = Ca' : BA'$ sein müssen. Nun ist angenommenermassen $BA' = BA$, also muss auch $Ca' = Ca$ sein, d. h. der Zeichenstift darf in dem Punkte a der CI befestigt werden und durchläuft alsdann, während A auf den Umrissen des Originals herumgeführt wird, lauter Lagen, die der Verbindungsgeraden von P nach A angehören und dieselbe in dem unveränderlichen Verhältnisse $PC : PB$ schneiden. Der Zeichenstift a entwirft also bei dieser Bewegung des Storchschnabels eine dem Originale ähnliche und ähnlichliegende verkleinerte Abbildung. Wird a auf den Umrissen des Originals umhergeführt, und der Zeichenstift in A befestigt, so entsteht eine entsprechend vergrösserte Abbildung.

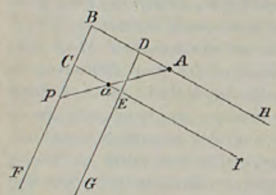


Fig. 135.

Die Indienststellung mathematischen Wissens für Zwecke des Künstlers ist uns, wenn auch in verschiedenartiger Ausführung, wiederholt begegnet. Eine richtige Perspective mathematisch herzustellen hatte Dürer, wie wir uns erinnern, als lohnende Aufgabe erkannt, und Andere vor ihm. Ueber mathematische Abbildung hat schon

Ptolemäus (Bd. I, S. 394—395) geschrieben, und die Kartographen des XVI. Jahrhunderts (S. 608) gehören wieder in dieselbe Gruppe von Künstlergelehrten. Ein hierzu zu rechnendes Werk von grosser Bedeutung fällt in die Zeit, welche uns gegenwärtig beschäftigt. **Franz von Aiguillon**[1]) oder **Aguillon** oder **Aquilonius** (1566—1617), ein Mitglied des Jesuitenordens, geboren in Brüssel und seit 1596 in Antwerpen als Lehrer thätig, scheint der Erste seines Ordens gewesen zu sein, welcher in Belgien Mathematik lehrte. Er gab 1613 ein Werk über Optik in sechs Büchern heraus. Eine Katoptrik und eine Dioptrik sollten folgen, blieben aber bei dem plötzlichen Tode des Verfassers unvollendet. Die fünf ersten Bücher der Optik handeln vom Sehen, von optischen Täuschungen, von der Natur des Lichtes u. s. w., sind also physiologischer und physikalischer Natur. Das 6. Buch gehört der Projectionslehre an, und in ihm sind die Namen der **orthographischen**, der **stereographischen**, der **scenographischen Projection** zuerst gebraucht. Orthographisch wird ein Gegenstand auf die Entwerfungsebene projicirt, wenn auf sie von jedem abzubildenden Punkte senkrechte Entwerfungslinien gefällt werden; das sehende Auge ist also in unendlicher Entfernung gedacht. Bei der stereographischen Projection ist das Auge im Pole einer Kugel befindlich, deren Aequatorialebene die Zeichnungsfläche abgiebt, während die abzubildenden Punkte der Kugeloberfläche selbst angehören. Die scenographische Projection ist die ebene Durchschneidung des von irgend einem Augenpunkte ausgehenden Sehkegels.

Haben wir hier eine Anzahl von Leistungen besprochen, welche wir in der Kapitelüberschrift als praktisch-mechanische bezeichneten, weil uns ein anderer zusammenfassender Name nicht gegenwärtig war und es sich schliesslich um Dinge handelte, welche auf praktische Anwendung zielten und mehr oder weniger mechanischer Ausführungen bedurften, so ist das XVII. Jahrhundert ungleich wichtiger für die **theoretische Mechanik** gewesen.

Zunächst wurde die Lehre vom **Schwerpunkte**, der **Commandinus** und **Maurolycus** ihre Bemühungen gewidmet hatten, weiter ausgebildet. **Luca Valerio**[2]) (1552—1618) ist hier in erster Linie zu nennen. Er war Neapolitaner, lehrte aber in Rom und war Mitglied der dortigen Accademia de' Lincei, bis er 1616 aus ihr ausgestossen wurde, weil er öffentlich Galilei für einen Koppernicaner erklärt hatte. Schon 1604 gab er drei Bücher *De centro gravitatis*

[1]) **Kästner** IV, 79—80. — **Quetelet** pag. 192—198. [2]) **Kästner** IV, 30—32. — **Poggendorff** II, 1167 mit Berufung auf **Colangelo**, *Storia dei filosofi e dei matematici Napolitani.*

solidorum heraus, von welchen 1661 eine neue Ausgabe veranstaltet wurde. Als nachgelassene Schrift erschien auch 1660 eine *Quadratura parabolae* des Valerio, welche die Schwerpunktsbestimmung zum Ausgangspunkte nimmt.

Aehnliche Betrachtungen waren allerdings damals (1660) schon längere Zeit veröffentlicht. Jean Charles de la Faille[1]), ein belgischer Jesuit, hatte 1632 in Antwerpen *Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellypsis* zum Drucke befördert und darin den doppelten Nachweis zu führen gesucht, dass, wenn die Quadratur des Kreises bekannt wäre, man den Schwerpunkt jedes Kreisabschnittes zu finden im Stande sei, und dass umgekehrt die Kenntniss dieser Schwerpunkte zu gebrauchen sei, um die Quadratur abzuleiten.

Valerio's vorgenannte Schrift fand, wie wir gleich sehen werden, 1638 im vierten Gespräche Galilei's über Mechanik, zu welchem wir uns wenden müssen, eine hohe Anerkennung von berufener Seite. Ueber die Schwerpunktsbestimmungen von Paul Guldin, von Fermat u. s. w. können wir erst im Zusammenhange mit den von diesen angewandten Betrachtungen des Unendlichkleinen berichten. Galilei's *Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*[2]) riefen eine ganz neue Wissenschaft, die Bewegungslehre oder Mechanik im engeren Sinne ins Leben, während, was vorher von mechanischem Wissen vorhanden war, sich fast ausschliesslich auf Statik bezog, d. h. auf das Gleichgewicht der Kräfte, welches die Ruhelage durch gegenseitig sich vernichtende Wirkung ungestört liess. Galilei hatte schon frühzeitig der Mechanik erfolgreiches Nachdenken gewidmet. Er hatte 1583 als Student in Pisa durch Beobachtungen festgestellt, dass ein Pendel die gleiche Schwingungsdauer besitze, möge es viel oder wenig aus seiner Gleichgewichtslage entfernt worden sein, sofern nur die Länge des Pendels unverändert bleibt. Er hatte auch Manches über die Mechanik zu Papier gebracht, veröffentlicht aber hat er die neuen Gesetze erst in den Discorsi von 1638. Gleich im ersten Gespräche tritt die Erklärung des Rades des Aristoteles auf (Figur 136); Galilei verbindet die Zeichnung von drei concentrischen Kreisen mit der von ebensovielen demselben einbeschriebenen ähnlich liegenden regelmässigen Sechsecken und lässt die rollende Bewegung des mittleren unter den drei Kreisen so vollziehen, dass die sechs Sechsecksseiten dieses Kreises nach einander in horizontale Lage kommen und eine fortlaufende gerade Linie bilden. Dabei nehmen auch die entsprechenden Sechsecksseiten der beiden anderen

[1]) Kästner II, 211—215. — Quetelet pag. 203—205. [2]) Kästner IV, 4—27. — Montucla II, 183—191.

Kreise horizontale Lage an, aber die des äusseren Kreises sind über einander weggeschoben, die des inneren Kreises weisen zwischen einander Lücken auf. Bei dem inneren wie bei dem äusseren Kreise

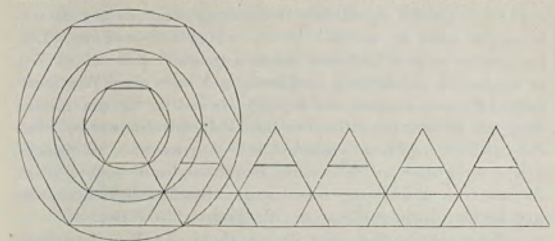


Fig. 136.

ist daher ein einfaches Rollen nicht vorhanden, und die Schwierigkeit der scheinbar gleichen Länge dreier wesentlich verschiedener Kreislinien ist damit beseitigt. Der Uebergang vom Sechsecke zum Kreise besteht nämlich einzig in dem Unendlichwerden der Seitenzahl der einander ähnlich liegenden regelmässigen Vielecke. Bei dem äusseren Kreise findet das Uebereinandergreifen dieser Seiten weiter statt, bei dem inneren Kreise das Lückenhafte, nur sind es unendliche viele unendlich kleine Lücken, welche auftreten und wegen dieser ihrer Eigenschaft nicht bemerkt werden können. Dem ersten Gespräche gehört auch der Beweis an, dass, entgegengesetzt der Aristotelischen Behauptung, Körper verschiedenen Gewichtes darum doch nicht verschiedene Fallzeit besitzen. Fiele ein Körper vom Gewichte 10, wie Aristoteles glaubte, 10mal so schnell als ein Körper vom Gewichte 1, und vereinigte man beide Körper, so müsste der langsamere etwas von der Geschwindigkeit des schnelleren aufheben, d. h. der Körper vom Gewichte 11 müsste langsamer fallen als der vom Gewichte 10, und das widerspräche der anfänglichen Annahme. Auch Pendelversuche mit Kugeln von Blei und von Zucker, also bei einem Gewichtsverhältnisse von 1 : 100 etwa angestellt, ergaben bei gleicher Fadenlänge, dass in gleicher Zeit gleichviele Schwingungen durch gleiche Bögen gemacht wurden, mochte man die Zahl der beobachteten Schwingungen auch 1000 übersteigen lassen. Das zweite Gespräch beschäftigt sich der Hauptsache nach mit dem inneren Zusammenhange fester Körper und mit der Kraft, welche erforderlich ist, denselben zu lösen, beziehungsweise mit der Frage, wie gross das Gewicht eines an einem Ende gestützten Körpers sein müsse, damit derselbe breche. Dabei ist auch von an beiden Endpunkten aufgehängten

Ketten und von der Gestalt der so entstehenden Curve die Rede. Galilei hält dieselbe für eine Parabel, und dies ist der einzige wesentliche Irrthum, den man ihm vorwerfen kann. Das dritte Gespräch bringt die eigentlichen Bewegungsgesetze, die der gleichförmigen sowie der natürlich beschleunigten Bewegung. Letztere werden in zwei Lehrsätzen zusammengefasst. Erstens: die Zeit, in welcher ein gleichförmig beschleunigter Körper einen Weg durchläuft, ist genau so gross wie diejenige, in welcher er den gleichen Weg mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen würde, sofern diese gleichförmige Geschwindigkeit halb so gross wäre als diejenige, welche der Körper am Ende seiner beschleunigten Bewegung erzielt. Zweitens: bei gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit verhalten sich die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten. Im vierten Gespräche endlich wird die parabolische Wurfbewegung von den verschiedensten Gesichtspunkten aus erörtert. Ein Anhang beschäftigt sich mit Schwerpunktsbestimmungen. Galilei hatte, von Del Monte aufgefordert, diesem von Commandinus noch nicht erschöpften Gegenstande seine Aufmerksamkeit zugewandt. Später fand er in einem Werke des Lucas Valerius eine methodisch von seinen eigenen Untersuchungen abweichende, aber sie inhaltlich überragende Darstellung und setzte desshalb seine Arbeit nicht weiter fort, damit die höchste Anerkennung jenes Werkes aussprechend.

Gleichzeitig mit Galilei's Discorsi erschien 1638 eine Schrift *De motu naturali gravium fluidorum et solidorum* von Giovanni Battista Baliani[1]), einem Genueser Edelmanne, welcher die beschleunigte Bewegung in ähnlicher Weise auffasste, wie es bei Galilei der Fall war. Zum besonderen Ruhme darf man aber Baliani dieses Zusammentreffen um so weniger anrechnen, als er in einer zweiten Auflage von 1646 die richtige Meinung zu Gunsten einer falschen wieder aufgab. Damit nach Galilei's Behauptung die unter Beschleunigung durchlaufenen Räume im Verhältnisse der Quadrate der Zeiten stehen, ist es nothwendig, dass die in den aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten durchlaufenen Einzelräume nach den ungeraden Zahlen der Zahlenreihe sich bemessen, weil $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$. Galilei sah dieses ein und gab auch seinem zweiten Lehrsatze der beschleunigten Bewegung die hier ausgesprochene Form. Baliani dagegen behauptete in seiner zweiten Auflage, jene Einzelräume seien freilich durch eine steigende Reihe zu bemessen, aber nicht durch die der ungeraden Zahlen, sondern durch die der natürlichen Zahlen, also durch 1, 2, 3, 4 . . . Die Verwunderung über diesen Rückschritt

[1]) Montucla II, 194—196.

Baliani's nimmt noch zu, wenn man weiss, dass er in ebenderselben Ausgabe von 1646 andere in der Ausgabe von 1638 unbewiesen gelassene Gesetze mit Begründungen versehen hat, welche denen Galilei's von 1638 nachgebildet sind, und welche daher Galilei's Meinung als Grundlage besitzen.

Schon zehn Jahre vor den Discorsi erschien ein mechanisch bedeutendes Werk eines hervorragenden Schülers von Galilei. Benedetto Castelli[1]) (1577—1644), ein Benedictinermönch und Professor der Mathematik am Collegio di Sapienza in Rom, schuf mit seinem Werke *Della misura dell' acque correnti* von 1628 eine wissenschaftliche Hydraulik, deren wesentliche Gedanken allerdings auch wieder Galilei entlehnt waren.

Evangelista Torricelli[2]) (1608—1647) empfing seinen ersten Unterricht durch einen Onkel von mütterlicher Seite, welcher dem Camaldulenserorden angehörte. Gegen 1628 kam er nach Rom, wo er der Schüler Castelli's wurde. Nach dem Erscheinen von Galilei's mechanischen Gesprächen von 1638 verfasste Torricelli 1641 einen *Trattato del moto*, der als eine Weiterführung der Galilei'schen Gedanken bezeichnet werden darf. Dieses Buch, Galilei durch Castelli vorgelegt, gab die Veranlassung zu dem Vorschlage, Torricelli solle in der Eigenschaft eines mehr oder weniger selbständigen Mitarbeiters seine noch junge Kraft dem erblindeten Greise zur Verfügung stellen. Im October 1641 kam Torricelli bei Galilei an, drei Monate später war dieser eine Leiche. Torricelli wollte nach Rom zurückkehren, wurde aber in Florenz in der Stellung, welche Galilei einst inne gehabt hatte, als grossherzoglicher Mathematiker zurückgehalten. Dort wurde 1643 durch Viviani der von Torricelli angegebene Versuch veranstaltet, zuzusehen, wieviel Quecksilber durch den Luftdruck gehoben würde, ein Versuch, der als Erfindung des Quecksilberbarometers gefeiert wird. Der Trattato del moto von 1641 enthält den wichtigen Satz, dass zwei mit einander verbundene Körper im Gleichgewichte sich befinden, wenn ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt durch irgend welche Lagenänderung weder gehoben noch gesenkt wird. Im Jahre 1644 gab dann Torricelli einen Sammelband unter dem Titel *Opera geometrica* heraus. Darin befand sich eine Abhandlung *De motu gravium naturaliter descendentium*, welche für die Lehre von den ausströmenden Flüssigkeiten bahnbrechend geworden ist. Torricelli sprach darin bereits die sechs wichtigsten Sätze aus[3]): 1. Das Wasser, welches aus einer Oeffnung in der Seitenwand eines

[1]) Heller, Geschichte der Physik II, 111. [2]) Ebenda II, 102—110.
[3]) Wir entnehmen die Fassung dieser Sätze wörtlich aus Heller l. c. II, 106.

Gefässes fliesst, bildet den Gesetzen der Wurfbewegung zufolge einen parabolischen Strahl; 2. der Parameter der Parabel ist am grössten, wenn sich die Oeffnung in der Mitte der Wasserhöhe befindet; 3. die Oeffnungen, welche sich in gleicher Entfernung über oder unter der mittleren Oeffnung befinden, geben Flüssigkeitsstrahlen von kleinerer, aber gleicher Bogenweite; 4. für gleiche Oeffnungen verhalten sich die in gleichen Zeiten ausfliessenden Wassermengen wie die Quadratwurzeln aus den entsprechenden Flüssigkeitshöhen; 5. die Zeiten, in welchen sich gleiche Gefässe durch gleiche Oeffnungen entleeren, verhalten sich ebenfalls wie die Quadratwurzeln aus den Flüssigkeitshöhen; 6. wenn man für den Fall einer im horizontalen Boden des Gefässes befindlichen Ausflussöffnung sich die Zeit, welche zur gänzlichen Entleerung des Gefässes nothwendig ist, in gleiche Zeiträume zerlegt denkt, so bilden die denselben entsprechenden Ausflussmengen eine bis zur Einheit abnehmende Reihe von ungeraden Zahlen.

73. Kapitel.

Trigonometrie und Cyclometrie.

Noch weit mehr als die Mechanik schliessen Trigonometrie und Cyclometrie sich den geometrischen Forschungen an. Als ältesten Schriftsteller auf diesem Gebiete, mit einem Fusse noch im XVI. Jahrhunderte stehend, nennen wir Philipp van Lansberge[1] (1561—1632) aus Gent. Er war Theologe und hatte die nothwendigen Studien in England gemacht. Aus Antwerpen, wo er zuerst die Stellung eines Predigers der reformirten Lehre einnahm, musste er 1585 fliehen, als die Spanier sich der Stadt neuerdings bemächtigten. Er fand in Goes in Zeeland einen neuen ähnlichen Wirkungskreis, dem er bis 1615 vorstand, dann siedelte er nach Middelburg über, wo er nur noch mit Mathematik sich beschäftigte. Die älteste Schrift *Triangulorum geometricorum libri quatuor* scheint indessen schon in Goes entstanden zu sein, wenigstens ist ein als Vorrede dienender Widmungsbrief mit der Jahreszahl 1591 versehen[2]. Späterer Entstehung (entweder 1616 oder 1628) ist die *Cyclometria nova*, welche die Berechnung der Zahl π mit einer bis zur 30. Decimalstelle sich erstreckenden Genauigkeit lehrt.

Praetorius[3] hat in seiner wiederholt (S. 589 und 619) genann-

[1]) Quetelet pag. 168—179. — Delambre, *Histoire de l'astronomie moderne*. T. IV passim. [2]) Delambre l. c. II, 40. [3]) Curtze in Zeitschr. Math. Phys. XL, Hist.-liter. Abthlg. S. 11.

ten Handschrift von 1599 die vollständige Auflösung des rechtwinkligen und des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks sehr übersichtlich in Tabellenform gebracht.

Gleich zu Beginn des Jahrhunderts finden wir dann einen englischen Schriftsteller zu erwähnen: Nathaniel Torporley[1]) mit seinem Werke *Diclides caelometrica sive Valvae astronomicae universales etc.* von 1602. Er war, nachdem er in Oxford studirt hatte, einige Jahre hindurch Schreiber bei Vieta. Später kehrte er nach England zurück, wo er der Gunst eines Grafen von Northumberland sich erfreute. In Vieta's Umgange mag Torporley sich die Gewohnheit angeeignet haben, neue Wörter zu erfinden und solche so unzweckmässig als denkbar auszuwählen. Die Aufgabe, welche Torporley in dem zweiten Theile seines Buches (der erste Theil ist astrologischen Inhaltes) sich stellte, ist die Auflösung sämmtlicher Fälle des rechtwinklig sphärischen Dreiecks. Die Fälle selbst nennt er Triplicitäten, weil jedesmal ausser dem rechten Winkel noch drei Stücke vorkommen, deren eines durch die beiden anderen bestimmt ist. Eine Triplicität heisst *solilateralis*, weil nur Seiten, d. h. die Hypotenuse und beide Katheten vorkommen. Die anderen Triplicitäten heissen *mixtae* und sind der Anzahl nach 5, nämlich 3 *plurilaterales* mit 2 Seiten und 1 Winkel (Hypotenuse, Kathete und der letzteren anliegender Winkel; Hypotenuse, Kathete und der letzteren gegenüberliegender Winkel; beide Katheten und ein Winkel) und 2 *plurangulares* mit 3 Winkeln und 1 Seite (Hypotenuse oder eine Kathete). Diesen im Ganzen sechs Fällen hat aber Torporley auch noch besondere Namen beigelegt. In der Reihenfolge, in welcher wir sie hier erwähnt haben, heissen sie bei ihm: *carcer* (Gefängniss), *forfex* (Schneiderscheere), *sipho* (Heber), *corvus* (Enterhaken), *hasta* (Spiess), *funda* (Schleuder), weil er in den betreffenden Figuren, bei welchen die jeder Triplicität zugehörigen Stücke stärker gezogen sind, jene Gestaltungen zu erkennen glaubte. Alle Triplicitäten vereinigt findet er in einer Figur, welche er *mitra* (Bischofsmütze) nennt (Figur 137). FR und IR sind unter einander gleiche, zu einander senkrechte Bögen grösster Kreise, und zwar jeder von ihnen kleiner als ein Quadrant. FO, RO, RE, IE sind

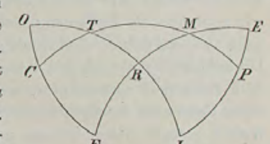


Fig. 137.

[1]) Kästner III, 101—107. — Montucla II, 120. — v. Zach in Bode's Jahrbuch u. s. w. Suppl. I, 23. — De Morgan im Philosophical Magazine (1843) XXII, 351.

Quadranten, welche auf FR, beziehungsweise auf RI senkrecht stehen. Auch $FM = IT$ sind Quadranten, und durch M und T ist der grösste Kreisbogen $PMTC$ gelegt. Torporley nennt dann $FOREI$ die Mitra und $PMTC$ eine an ihr befestigte Binde. Mit der mehrfach wiederholten Figur ist ein bald von rechts, bald von links gezeichneter Kopf in Verbindung und hilft die einzelnen Triplicitäten zur Anschauung zu bringen, und in gleicher Absicht sind noch andere nicht minder eigenthümliche Abbildungen vorhanden, welche vielleicht den entgegengesetzten Erfolg hatten, den sie haben sollten, und der Verbreitung des Buches mehr schadeten als nützten.

Um so mehr Anklang fand eine andere Zusammenstellung der gleichen sechs Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, welche 1614 in Edinburg die Presse verliess. Der Name des Verfassers ist in den verschiedensten Formen bekannt: John Neper[1]), oder Napier, oder Napeir, oder Napair u. s. w. Er ist 1550 unweit Edinburg in Merchiston, welches der Familie den Namen der Barone von Merchiston verlieh, geboren, 1617 gestorben. Der Name Nepair soll einer Legende nach daher rühren, dass der Erste, welcher ihn führen durfte, im XIV. Jahrhunderte in einer Schlacht sich so auszeichnete, dass Niemand ihm gleichkam. Neper's erste geistige Neigung war der Erklärung der Apokalypse zugewandt, über welche er eine 1593 gedruckte Schrift in englischer Sprache mit einem *John Napeir* unterzeichneten Widmungsbriefe an König Jacob VI. verfasste. Die späteren Schriften sind mathematischen Inhaltes, in lateinischer Sprache abgefasst und tragen den Namen *Joannes Neperus*. Wir werden allerdings der Hauptsache nach erst später von ihnen zu reden haben, da die Bildung und Benutzung von Logarithmentafeln in ihnen gelehrt wird. Eine Druckschrift von 1614, die *Descriptio mirifici logarithmorum canonis* (kürzer Neper's Descriptio genannt) verlangt schon jetzt unsere Aufmerksamkeit. Desshalb vereinigen wir auch hier die Mittheilung dessen, was wir von Neper's Bildungsgange wissen, dass er nämlich als ganz junger Mann eine Reise durch Deutschland, Frankreich und Italien machte, von der er 1571 wieder nach Schottland zurückkehrte, welches er nie wieder verliess. Von dieser Reise wird der als Einundzwanzigjähriger Zurückkehrende kaum Nutzen gezogen haben können, und was Neper erlernte, muss ihm

[1]) Biot's Bericht über die 1834 veröffentlichten Denkwürdigkeiten von Neper im *Journal des Savants* von 1835, pag. 151—162. Ueber Neper's mathematische Verdienste ebenda pag. 257—270. — *The construction of the wonderful canon of logarithmes by John Napier Baron of Merchiston translated by W. R. Macdonald* (1889). Introduction und die Anmerkung auf S. 84. Diese Ausgabe citiren wir als Neper, *Constructio*.

in Schottland zugänglich gewesen sein. Dieses war entschieden, ausser mit den älteren Schriften eines Regiomontan, eines Koppernicus, auch der Fall mit Van Lansberge's Büchern über die Dreiecke, mit Torporley's Diclides caelometricae und mit der 1600 in London gedruckten englischen Uebersetzung der Trigonometrie des Pitiscus von Hamson. Möglicherweise hat Neper den Pitiscus auch in dem lateinischen Originale gelesen. Die Benutzung aller dieser Bücher durch Neper steht fest. Regiomontan, Koppernicus, Van Lansberge und Pitiscus sind in der Descriptio ausdrücklich angeführt[1]), an einer späteren Stelle[2]) auch Adriaen Metius. Die Benutzung des Torporley folgern wir aus der Anwendung des nur von jenem Schriftsteller gebrauchten Wortes *Triplicität* bei Neper[3]), und wenn, wie wir überzeugt sind, aus solchen Wortbenutzungen sichere Schlüsse gezogen werden können, so muss Neper, der fortwährend *tangens* sagt[4]), auch die Geometria rotundi des Thomas Finck gekannt haben. Wahrscheinlich ist uns endlich auch, dass Neper die Arithmetica integra Michael Stifel's kannte, weil er die negativen Zahlen *minores nihilo* nennt[5]), wie es dort der Fall ist (S. 442). Nach diesen allgemeinen Bemerkungen, an welche wir gelegentlich uns zu erinnern haben werden, nennen wir die trigonometrischen Leistungen Neper's, welche ihn gerade in diesem Kapitel unserer Beachtung empfahlen. Die erste ist die sicherlich an Torporley anknüpfende, aber glücklicher ersonnene Zusammenfassung sämmtlicher Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks in zwei Sätze[6]): Der Cosinus eines mittleren Stückes ist gleich dem Producte der Cotangenten der anliegenden Stücke, beziehungsweise der Sinusse der getrennten Stücke, sofern man dabei die Katheten jeweil durch ihre Complemente zu 90° ersetzt. Mittleres Stück hiess dabei *pars intermedia*, die äusseren Stücke heissen *partes extremae*, und zwar *extremae vicinae aut circumpositae* und *extremae remotae aut oppositae*, je nachdem sie dem mittleren Stücke anliegen oder von ihm getrennt sind, während der rechte Winkel bei Feststellung dieser Unterscheidung bekanntlich als nicht vorhanden gilt. Eine zweite Leistung ist von grösserer Wichtigkeit und grösserer Selbständigkeit der Erfindung. Ausgehend von dem 2. Satze

[1]) Neper, *Descriptio*, pag. 34: *quod fusius a Regiomontano, Copernico, Lansbergio, Pitisco et aliis demonstratur.* [2]) Ebenda pag. 56. [3]) Ebenda pag. 34: *Verum quia in omnibus his triplicitatibus Tangens alterius extremae est ad sinumrectum intermediae ut sinus totus ad tangentem reliquae extremae* etc. [4]) Ausser in der eben angeführten Stelle der *Descriptio* pag. 34 kommt *tangens* noch vor ebenda pag. 26, 49 u. s. w. [5]) Ebenda pag. 4 und 5. [6]) Ebenda pag. 33—35.

im V. Buche von Regiomontan's Trigonometrie (S. 272), dass unter Bezeichnung der Winkel und der denselben gegenüberliegenden Bögen im sphärischen Dreiecke durch A, B, C, a, b, c die Gleichung $\sin a \cdot \sin b = \frac{\text{sin vers.}\, c - \text{sin vers.}\, (a-b)}{\text{sin vers.}\, C}$ stattfinde, welche wegen $\text{sin vers.}\, C = 1 - \cos C$ u. s. w. überführbar ist in die Form $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$, gelangt Neper zu Gleichungen[1]), welche in moderner Schreibweise

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{-a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a-b+c}{2}}{\sin a \cdot \sin b}}$$

und

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin a \cdot \sin b}}$$

heissen. Schon in der vor der Descriptio verfassten, aber, wie wir im 74. Kapitel sehen werden, erst 1619 gedruckten sogenannten Constructio hatte Neper seine dritte und wichtigste trigonometrische Erfindung niedergelegt, diejenigen Gleichungen[2]), welche man gegenwärtig die Neper'schen Analogien nennt, und welche man in moderner Schreibweise

$$\frac{\operatorname{tng} \frac{a+b}{2}}{\operatorname{tng} \frac{c}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}}, \quad \frac{\operatorname{tng} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tng} \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}},$$

$$\operatorname{tng} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{tng} \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}, \quad \operatorname{tng} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{tng} \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}$$

schreibt.

Hatte Torporley, hatte insbesondere Neper die sphärische Trigonometrie wesentlich gefördert, so wandte sich Willebrord Snellius beiden Trigonometrieen, der der geradlinigen Gebilde und der der Kugel, erfolgreich zu. Die hier in Betracht kommenden Schriften sind der *Eratosthenes Batavus* von 1617, die *Cyclometria* von 1621 und die *Doctrina triangulorum canonica*, welche kurz nach dem Tode des Verfassers 1627 im Drucke erschien. Der Eratosthenes Batavus ist in erster Linie von geodätischer Bedeutung[3]). Es kam Snellius darauf an, eine richtige Bestimmung des Umfanges der Erde, beziehungsweise eine richtige Gradmessung zu liefern, und zu diesem Zwecke stellte er zunächst zusammen, was über ältere Gradmessungen

---

[1]) Neper, *Descriptio* pag. 48 sqq. [2]) Ebenda pag. 68 sqq. [3]) Kästner IV, 108 sqq.

ihm bekannt war. Schon dieser Abschnitt des Werkes ist höchst lesenswerth und zeigt Snellius als gelehrten Kenner der gesammten Litteratur, so weit sie damals vorhanden war. Vorzugsweise eine Aufgabe der Feldmesskunst, welche Snellius als der Erste behandelt hat, verdient hervorgehoben zu werden: das sogenannte Rückwärtseinschneiden, welches als 11. Aufgabe des 10. Kapitels des II. Buches gelehrt wird[1]). Diese Aufgabe besteht in der Auffindung der Entfernung eines Punktes der Erdoberfläche von den drei Eckpunkten eines schon bekannten terrestrischen Dreiecks mit Hilfe der Winkel, welche in dem zu bestimmenden Punkte durch die Sehstrahlen nach jenen drei Eckpunkten gebildet werden. So wichtig diese Aufgabe für die Herstellung genauer Karten ist, entging sie in der Bearbeitung des Snellius so sehr der allgemeinen Beachtung, dass sie wiederholt den Gegenstand von einander unabhängiger Untersuchungen bildete. Wilhelm Schickard[2]) (1592—1635) hatte 1624 eine Karte von Württemberg zu entwerfen und löste, wie aus seinen an Kepler gerichteten Briefen hervorgeht, damals selbständiger Weise die genannte Aufgabe. Ja noch 1730 wurde eine Auflösung derselben durch Pothenot[3]) als wichtige Entdeckung angesehen, welche den Namen des Bearbeiters zu tragen verdiente und desshalb als Pothenot'sche Aufgabe bezeichnet wurde. Erwies sich die Nachwelt hier ungerecht gegen Snellius, so übte sie eine ähnliche Ungerechtigkeit zu seinen Gunsten in Bezug auf die Cyclometria. Dort ist die Gleichung $x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$ benutzt, um den Bogen aus seinen trigonometrischen Functionen zu berechnen, und von dort ist das Verfahren, welches Nicolaus von Cusa einst erfunden hatte (S. 201), als Eigenthum des Snellius in viele Werke übergegangen[4]). Das wird man allerdings zugestehen müssen, dass, wenn Snellius die Schriften des Cusanus kannte, er das Verdienst hatte, unter dessen vielen ungeordneten Versuchen denjenigen herauszufinden, welcher wenigstens bei kleinen Winkeln sich vortheilhaft anwenden lässt, und dass unzweifelhaft die Ableitung jener Formel bei Snellius mit der bei Cusanus nicht die geringste Aehnlichkeit besitzt (Figur 138, folg. Seite). Der Durchmesser AB eines um C als Mittelpunkt beschriebenen Halbkreises wird über A hinaus um

---

[1]) P. van Geer, *Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius* (*Archives Néerlandaises* Bd. 18 vom December 1883), pag. 12. [2]) Allgemeine Deutsche Biographie XXXI, 174—175. Artikel von S. Günther. [3]) *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris.* Tome X, 1730. [4]) Kästner, Geometrische Abhandlungen, 1. Sammlung (Göttingen 1790), S. 158—163. — Montucla II, 7. — Le Paige in der Zeitschrift *Mathesis* X, 34—36 (1890).

$$AE = \frac{1}{2} AB$$

verlängert und EGH geradlinig bis zum Durchschnitte mit der in B errichteten Berührungslinie an den Kreis gezogen. Ist alsdann $\sphericalangle GCB = \alpha$ und zieht man ausser dem Halbmesser CG noch die Senkrechte GL zum Durchmesser, so zeigt sich sofort

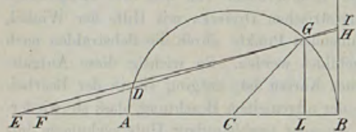


Fig. 138.

$$EL : GL = EB : HB$$

oder

$$(2r + r \cdot \cos\alpha) : r \cdot \sin\alpha = 3r : HB,$$

indem r den Kreishalbmesser bedeutet, d. h.

$$HB = \frac{3r \cdot \sin\alpha}{2 + \cos\alpha}$$

und nach Snellius ist $BH < \text{arc}\, BG$. Andererseits ist nach seiner Behauptung $IB > \text{arc}\, BG$, sofern I Durchschnittspunkt der Kreistangente in B mit der Geraden FDG ist, welche so gezogen wurde, dass $DF = r$. Da endlich I und H sehr nahe bei einander liegen, wenn α klein ist, so könne man $\frac{3r \cdot \sin\alpha}{2 + \cos\alpha}$ als Näherungswerth des Bogens $r\alpha$ benutzen. Der Beweis der beiden dieser Folgerung zu Grunde liegenden Ungleichheiten ($IB > \text{arc}\, BG > HB$) scheint die wunde Stelle der Entwickelung zu sein und jedenfalls der Klarheit zu entbehren. Einer der Schriftsteller, welcher sehr bald (schon 1626) die Formel als die des Snellius mittheilte, war Albert Girard[1]. In dem an dritter Stelle erwähnten Buche Doctrina triangulorum ist Buch II Satz 4 ein Beweis des Sinussatzes gegeben, welcher heute noch in den holländischen Lehrbüchern den Namen des Beweises von Snellius führt[2]) (Figur 139). O ist der Mittelpunkt des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises und des diesem concentrischen Einheitskreises, in welchen das kleinere Dreieck $\alpha\beta\gamma$ dem ABC ähnlich und ähnlichliegend eingezeichnet ist. $O\delta$ steht senkrecht auf $\alpha\beta$. Nun ist $\sphericalangle \alpha O \beta = 2C$, $\alpha O \delta = C$, also $\sin C = \sin \alpha O \delta = \alpha\delta = \frac{1}{2}\alpha\beta$, mit-

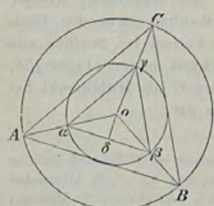


Fig. 139.

[1]) Le Paige l. c. pag. 35. [2]) Van Geer l. c. pag. 6.

hin $\alpha\beta = 2 \sin C$. Ganz ebenso findet man $\beta\gamma = 2 \sin A$, $\gamma\alpha = 2 \sin B$. Ausserdem ist $AB : BC : CA = \alpha\beta : \beta\gamma : \gamma\alpha$, mithin auch

$$AB : BC : CA = \sin C : \sin A : \sin B.$$

Buch III, Satz 8 wird von Snellius selbst als für die sphärische Trigonometrie sehr nutzbar erklärt[1]). Hier ist nämlich das sphärische Polardreieck deutlicher als bei Vieta (S. 605) gezeichnet, welches zu einem gegebenen sphärischen Dreiecke in der wechselseitigen Beziehung steht, dass die Winkel des einen mit den ihnen gegenüberliegenden Seiten des anderen sich zu 180° ergänzen. Da wir von Snellius nicht weiter zu reden haben, so sei wenigstens der Titel eines Werkes *Tiphys Batavus* von ihm genannt[2]), welches 1624 die Presse verliess, und in welchem ein wirkliches Lehrbuch der Schifffahrtskunde zu erkennen ist. Der Name der Loxodromen trat hier zum ersten Male auf, welcher seitdem unbeschränktes Bürgerrecht sich erwarb. Aus dem Commentare zu den ins Lateinische übersetzten Schriften des Ludolph van Ceulen, welche Snellius 1619 herausgab, ist die Formel für den Flächeninhalt des Sehnenvierecks zu erwähnen, von der Snellius als von seiner Erfindung spricht[3]). Es ist der gleiche Ausdruck

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad \text{mit} \quad s = \frac{a+b+c+d}{2},$$

welchen die Inder kannten (Bd. I, S. 605), welcher aber in Europa vor Snellius nicht mit Bestimmtheit nachgewiesen werden kann. Wir wollen Snellius nicht verlassen, ohne ihn als das zu bezeichnen, was er in der Geschichte der Mathematik uns ist: ein geistvoller, kenntnissreicher, vorzugsweise auf praktische Anwendungen bedachter Schriftsteller, welcher desshalb am meisten in denjenigen Abschnitten leistete, welche dem Schifffahrer und dem Kartenzeichner unentbehrlich sind. Von dem Brechungsgesetze des Snellius hat die Geschichte der Physik Kenntniss zu nehmen.

Snellius hat in Anwendung der Formel $x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$ das Beispiel einer Gleichung gegeben, in welcher ebensowohl ein Kreisbogen als trigonometrische Functionen desselben vorkamen. Eine noch weit schwierigere Aufgabe war es, den Bogen zu finden, welcher einer in dem erläuterten Sinne gemischten Gleichung genügen kann, und eine

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 55 (deutsch S. 52). — A. von Braunmühl, Zur Geschichte des sphärischen Polardreiecks in der *Biblioth. mathem.* 1898, S. 65—72. [2]) Kästner IV, 111. — Günther, Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie, S. 354—362. [3]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 292 und 432 (deutsch S. 297 und 481).

solche Aufgabe stellte Kepler[1]) schon in der *Astronomia nova* von 1609. Es handelt sich darum (Figur 140) von einem Punkte D des Durchmessers eines Halbkreises eine Gerade DM zu ziehen, welche die Halbkreisfläche in zwei Flächentheile ADM und BDM zerlege, deren Verhältniss $m:n$ gegeben ist. Man ziehe DE senkrecht zu CM, ferner sei

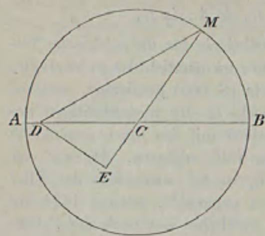


Fig. 140.

$$CD = e,\ CM = r,\ \sphericalangle BCM = x,$$
$$\sphericalangle ACM = 180^0 - x.$$

Alsdann ist

$$\text{Sector } ACM = \frac{r^2}{2}(180^0 - x),$$

Sector $BCM = \frac{r^2}{2} \cdot x$, $\triangle DCM = \frac{r}{2} \cdot DE = \frac{re}{2} \cdot \sin x$, Fläche $ADM = \frac{r}{2}[r(180^0 - x) - e \sin x]$, Fläche $BDM = \frac{r}{2}[rx + e \cdot \sin x]$. Folglich

$$\frac{r}{2}[r(180^0 - x) - e \cdot \sin x] : \frac{r}{2}[rx + e \sin x] = m : n$$

und daraus

$$rx + e \cdot \sin x = \frac{n}{m+n} \cdot r \cdot 180^0 = k.$$

Kepler stellte die Frage, welche den Namen der Kepler'schen Aufgabe behalten hat, aber er glaubte, eine directe Auflösung sei wegen der Heterogeneität von Winkel und Sinus unmöglich.

In der Untersuchung des Sehnenvierecks, mit welcher, wie wir oben sahen, Snellius sich erfolgreich beschäftigt hat, ging Albert Girard noch einen wesentlichen Schritt weiter. Girard hat 1626 im Haag *Tables de sinus, tangentes et sécantes selon le raid de 10000 parties*[2]) veröffentlicht, von welchen 1629 auch eine holländische Uebersetzung erschien. In der Einleitung zu diesen Tafeln findet sich das hier Gemeinte. Wenn a, b, c, d als Seiten eines Sehnenvierecks im Kreise vom Halbmesser r benutzt werden können, so ist einleuchtend, dass die Reihenfolge der Seiten keinen Einfluss auf diese Eigenschaft besitzt, dass es vielmehr drei verschieden aussehende Sehnenvierecke $abcd$, $abdc$, $acbd$ geben wird. Deren Flächeninhalt F ist aber einer und derselbe, nämlich der des Kreises vermindert um die vier Kreisabschnitte über a, b, c, d. Diagonalen kommen in allen diesen Sehnen-

[1]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) III, 401. [2]) Kästner III, 107—110. — Chasles, *Aperçu hist.* pag. 440, Note 1 (deutsch S. 492, Note 120).

vierecken drei vor, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, welche als Sehnen die Bögen $a + b$, $a + c$, $a + d$ bespannen, wenn wir diese leicht verständliche Abkürzung uns gestatten dürfen. Girard's Formel lautet in dieser Bezeichnung $F = \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_3}{4r}$. Eine sehr wichtige Neuerung besteht in einer allerdings nicht folgerichtigen Bezeichnung, deren Girard bei rechtwinkligen sphärischen Dreiecken sich bedient hat. Die Hypotenuse nannte er H, die perpendicular gezeichnete Kathete P, die als Basis dienende B, den Winkel an der Spitze A, den zwischen Basis und Hypotenuse V. Die Ergänzungen aller dieser Grössen zu 90^0 stellte er durch die entsprechenden kleinen Buchstaben dar: $a = 90^0 - A$, $b = 90^0 - B$ u. s. w. Alle diese Buchstaben werden von ihm aber auch ohne jeden Zusatz gebraucht, wenn ein Sinus gemeint ist, also B statt $\sin B$, b statt $\sin b$ beziehungsweise statt $\cos B$. Tangente und Secante sind durch die Silben tan und sec ausgedrückt: $\tan H$, $\sec A$, $\tan a$ u. s. w.

Der sphärischen Trigonometrie brachte Girard auch in einer späteren Schrift, in welcher man der Ueberschrift nach kaum Trigonometrisches erwarten sollte, einen wesentlichen Zuwachs. In der 1629 gedruckten *Invention nouvelle en l'algèbre* ist nämlich die sphärische Flächenformel erstmalig gegeben. Ein ebenes n-eck hat die Winkelsumme $(2n - 4)90^0$, ein sphärisches n-eck eine um e grössere Winkelsumme. Dieser Ueberschuss e verhält sich nach Girard zu acht Rechten, wie die sphärische Vielecksfläche zur ganzen Kugeloberfläche.

Trigonometrische Tafeln erschienen in grosser Anzahl. Mathias Bernegger[1]) (S. 690) gab sowohl 1612 als 1619 in Strassburg Tafeln der Sinus, Tangenten und Secanten heraus. Girard's Tafeln von 1626 haben wir erst erwähnt. Ein Jahr später gab Franciscus van Schooten der Vater eben solche heraus: *Tabulae sinuum, tangentium, secantium, ad Radium 10000000 avecq l'usage d'icelles en triangles plans* (Amsterdam 1627). Die in französischer Sprache verfasste ebene Trigonometrie giebt zu Bemerkungen keinen Anlass. Das Format der Tafeln ist aber vermuthlich das kleinste, welches für trigonometrische Tafeln benutzt worden ist. Es ist ein wahres Westentaschenbüchelchen.

Nunmehr haben wir einen italienischen Schriftsteller zu nennen: Bonaventura Cavalieri[2]). Sein Geburtsjahr wird zu 1598, sein Todesjahr zu 1647 angegeben, doch scheint die erstere Angabe durch 1591 ersetzt werden zu müssen. Auch der Name ist Zweifeln unter-

[1]) Kästner III, 340. [2]) Piola, *Elogio di Bonaventura Cavalieri* (1844). — Favaro, *Bonaventura Cavalieri nello studio di Bologna* (1888).

worfen, da die Formen Cavalieri, Cavallieri, Cavaglieri, Cavalerius, de Cavalleriis sich sämmtlich actenmässig nachweisen lassen. Die hier festgehaltene Schreibweise Cavalieri entspricht der Unterschrift zahlreicher Briefe. Ein Schüler Cavalieri's, Urbano Daviso, ist der Urheber der Erzählung, Cavalieri habe als 23jähriger Jüngling in Pisa zuerst einen Euklid in die Hand bekommen, habe ihn in wenigen Tagen studiert und sich dann weiter mit Mathematik beschäftigt. Mit welchem Erfolge geht daraus hervor, dass er schon im Mai 1619 Castelli in Pisa als Lehrer der Mathematik vertreten durfte und kurz darauf sich um eine in Bologna seit zwei Jahren offene Professur der Mathematik bewarb, die ihm allerdings nicht zu Theil ward, weil schriftstellerische Leistungen unerlässliche Bedingung der Anstellung waren, und Cavalieri verfügte noch nicht über solche. Gedruckt war von ihm ebenso 1629 noch nichts, als er neuerdings um die Stelle zu Bologna sich bewarb, deren Besetzung jetzt um so dringlicher erschien, als auch der Inhaber der zweiten Professur der Mathematik 1626 gestorben war, mithin seit zwei Jahren keinerlei mathematischer Lehrstuhl mehr besetzt war. Cavalieri konnte sich diesesmal auf handschriftlich vorgelegte Arbeiten und auf eindringliche Empfehlungen so einflussreicher Gelehrten wie Castelli und Galilei stützen. In Galilei's damaligem Briefe ist ausdrücklich von den glänzenden Fortschritten die Rede, welche Cavalieri gemacht habe, als er vor etwa 15 Jahren durch Castelli in Pisa auf die Mathematik hingewiesen wurde. Das muss also 1614 gewesen sein, und 23 Jahre früher schrieb man 1591. An Daviso's Angabe von dem 23. Lebensjahre, zu welchem Cavalieri erstmalig mit Mathematik sich beschäftigte, halten wir aus folgendem Grunde fest: wäre Cavalieri 1598 geboren, 1614 erst 16 Jahre alt gewesen, so hätte in so viel jüngeren Jahren ein unerhört rasches Fortschreiten in der Mathematik ihm nur noch grössere Ehre gemacht, und Daviso hätte sich mit Vergnügen dieses weiteren Grundes den von ihm verehrten Lehrer hoch zu preisen bedient. Die Anstellung in Bologna erfolgte 1629 auf 3 Jahre, wurde dann 1632 auf weitere 4, 1636 auf weitere 7 Jahre erneuert, 1643 auf 3 Jahre, 1646 auf 12 Jahre, von welchen Cavalieri aber nur eines noch erlebte. Neben seiner Universitätsstellung gehörte Cavalieri dem Orden der Jesuaten an. Das Erscheinen seiner Schriften trifft ziemlich genau mit dem Ablaufe der Zeiten zusammen, auf welche seine jedesmalige Anstellung in Bologna lautete. Man geht also kaum fehl, wenn man dasselbe mit seinem Wunsche nach einer Erneuerung der Anstellung in Zusammenhang bringt. Er gab 1632 zwei Werke gleichzeitig heraus: *Lo specchio ustorio, ovvero Trattato delle settioni coniche* und *Directorium generale uranometricum, in quo*

Trigonometriae logarithmicae fundamenta ac regula demonstrantur. Dem Jahre 1643 gehört die *Trigonometria plana et sphaerica linearis et logarithmica* an.

Den *Specchio ustorio* hätten wir im 72. Kapitel bei der Besprechung der Mechanik erwähnen können, weil in ihm Cavalieri die Parabel als Falllinie bezeichnete, allerdings unter Nennung Galilei's als Entdecker dieser Eigenschaft, aber ohne dessen Erlaubniss dazu einzuholen, eine gerade in jenem Augenblicke, wo die Angriffe auf den Verfasser der Gespräche über die beiden Weltsysteme schon anfingen, fast unverzeihliche Tactlosigkeit.

Das *Directorium* von 1632, welches zur *Trigonometria* von 1643 beinahe im Verhältnisse einer ersten zu einer zweiten Auflage des gleichen Werkes steht, enthält unter Anderem die Formel für die sphärische Dreiecksfläche mit einem Cavalieri angehörenden Beweise des Satzes. Zu ganz allgemein verbreiteter Kenntniss gelangte der Satz aber 1643 so wenig wie 1632, so wenig wie 1629, als Girard ihn aussprach, denn noch am Ende des Jahres 1655 machte Roberval[1]) die Flächenformel Huygens gegenüber als seine Entdeckung geltend und gab ihm zu Ende des Jahres 1656 brieflich seinen Beweis, wenn auch eine gedruckte Veröffentlichung durch Roberval nicht bekannt ist. Mit dem Verhältnisse von Kugelvielecken zur Kugeloberfläche beschäftigte sich auch Broscius[2]) einigermassen in seinem gegen Ramus gerichteten Werke von 1652, das uns (S. 685) bei Gelegenheit der Untersuchungen über Sternvielecke beschäftigt hat.

Emanuel Porto[3]), ein italienischer Jude, der in der ersten Hälfte des XVII. Jahrhunderts in Triest und Padua als Talmudlehrer gewirkt hat, verfasste auch einige mathematische Schriften und zwar in italienischer Sprache. Es sind diese der *Porto astronomico* von 1636 und eine *Breve e facil introduzione alla geografia e trigonometria* von 1640. Das erstere Werk ist eine Goniometrie und sphärische Trigonometrie nebst einer Tafel der Sinus, Tangenten und Secanten der Winkel unter 90° von Minute zu Minute für den Halbmesser 100000; das letztere ist eine mathematische Geographie, an welche eine ebene Trigonometrie sich anschliesst. Im Porto astronomico wird auch von der Prostaphaeresis umfassender Gebrauch gemacht, welche durch Josteglio erweitert und allgemein gemacht worden sei. Es kann kaum bezweifelt werden, dass unter Josteglio

---

[1]) *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, T. I (Haag 1888), pag. 370 u. 518. [2]) Kästner III, 203 und Derselbe in den Geometrischen Abhandlungen, II. Sammlung, Abhandlung 31, S. 416—420. [3]) G. Wertheim in der Monatsschrift für Geschichte und Wissenschaft des Judenthums. Jahrgang 41, S. 616—622 und 42, S. 375—380.

der Wittenberger Mathematiker Melchior Jöstel gemeint ist, der in Briefwechsel mit Tycho Brahe stand, von welchem eine *Logistica προσθαφαίρεσις astronomica* vom Jahre 1619 noch in der zweiten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts handschriftlich vorhanden war, aber vermuthlich niemals gedruckt worden ist[1]).

Johannes Tonski[2]) veröffentlichte 1640 in erster, 1645 in zweiter bedeutend vermehrter Ausgabe eine *Arithmetica vulgaris et trigonometria rectilineorum*, in welcher die allerdings von Rhäticus (S. 602) bemerkte, aber noch immer nicht allgemein bekannte Unbestimmtheit des Dreiecks durch zwei Seiten und den der einen Seite gegenüberstehenden Winkel hervorgehoben ist.

Einige Männer wandten ihr Augenmerk der Aufgabe zu, das Verhältniss zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser zu bestimmen, doch sind diese cyclometrischen Arbeiten gleichwie die in dem früheren Abschnitte von sehr verschiedenem schriftstellerischen Werthe.

Christian Longomontanus[3]), ein dänischer Astronom, welcher als Gehilfe Tycho Brahe's mit Ehren genannt wird, glaubte einen vollständig genauen Werth von π ermittelt zu haben und veröffentlichte seine vermeintliche Entdeckung in Schriften von 1638 und 1644. Seine Construction ist folgende (Figur 141): AC ist der Kreisdurchmesser, AB gleich dem Halbmesser r von 43 Einheiten. Ferner ist $CE = r$, $EF = \frac{27}{43} r = 27$. Dann schneidet FG senkrecht zu BC gezogen das dem Halbkreise gleiche Stück BG ab. Warum diese Gleichheit stattfinde, ist nicht ausgeführt. Die Rechnung aber ergiebt folgenden Werth:

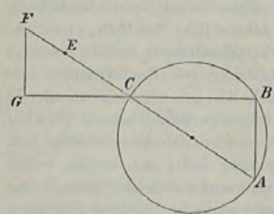


Fig. 141.

$$CF = 43 + 27 = 70, \quad CA = 86, \quad BC = \sqrt{86^2 - 43^2} = \sqrt{5547}.$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CFG und CAB ist ferner

$$CG = \frac{BC \cdot CF}{AC} = \frac{70}{86}\sqrt{5547},$$

$$BG = BC + CG = \frac{156}{86}\sqrt{5547} = \sqrt{18252} \sim 135{,}1$$

sehr nahezu und $\pi = \frac{135{,}1}{43} = \frac{314186\frac{2}{43}}{100000}$.

[1]) A. v. Braunmühl in der *Biblioth. mathem.* 1898, S. 94—95. [2]) Dickstein in der *Biblioth. mathem.* 1894, S. 24. [3]) Kästner III, 58. — Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (2. édition 1831), pag. 207—208.

Das ist aber der von Longomontanus für richtig erachtete Werth. An denselben knüpfte sich ein heftiger litterarischer Streit mit dem englischen Mathematiker John Pell (1610—1685), welcher 1646 seine *Controversy with Longomontanus concerning the quadrature of the circle* und 1647 eine lateinische Uebersetzung der gleichen Schrift herausgab. Andere Mathematiker, wie Roberval, Descartes, Cavalieri u. s. w. wurden als Schiedsrichter in den Streit hereingezogen, der zu einem eigentlichen Ergebnisse nicht führte[1]).

Gleich unfruchtbar waren Streitschriften, welche zwischen einigen holländischen Schriftstellern gewechselt wurden[2]). Cornelis van Leeuwen, Abraham de Graaf, Claas Gietermaker, Christiaan Martini Anhaltin erschöpften den Reichthum ihrer Muttersprache an Schimpfwörtern in Veröffentlichungen von 1663 und 1664, welche von trigonometrischen und Schifffahrtsaufgaben ihren bald verlassenen Ausgangspunkt nahmen, um in ein wüstes Geschimpfe ohne wissenschaftlichen Werth auszuarten.

Philipp Uffenbach[3]), ein Maler in Frankfurt am Main, lehrte 1653 geometrische Constructionen, welche geeignet waren, die Länge des Kreisumfanges nahezu richtig herzustellen.

Ein Schriftsteller ganz anderer Bedeutung war Gregorius von Sanct Vincentius[4]) (1584—1667), wenn wir ihn auch in diesem Kapitel von seiner wenigst vortheilhaften Seite kennen lernen. Er ist in Brügge geboren, in Gent gestorben, hat aber eine Anzahl von Jahren ausserhalb seines belgischen Vaterlandes verlebt. Seine Studienzeit brachte er in Rom zu, wo Clavius sein Lehrer war. Von 1629 bis 1631 weilte er als Professor der Mathematik in Prag, wo er alle Schrecknisse des Krieges durchmachte, und wo ein schon druckreifes Werk in den Flammen zu Grunde ging. Es waren drei stattliche Bände über Statik und Geometrie, welche so vernichtet wurden. Andere Papiere, deren Niederschrift bis auf 1625 zurückgeht, wurden gerettet, fuhren aber zehn Jahre in der Welt herum, bis sie in Gent wieder in den Besitz ihres Verfassers gelangten. Sie bildeten dann kaum verändert das grosse Werk, welches Gregorius 1647 als einen Folioband von 1225 Seiten in 10 Bücher eingetheilt zum Drucke beförderte: *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni.* Die Methode, welche Gregorius hier zur Erzielung einer genauen Quadratur des Kreises und ebenso auch der Kegelschnitte vorschlug, soll uns später beschäftigen. Hier muss genügen zu berichten, dass

[1]) E. Jacoli im *Bulletino Boncompagni* II, 299—312. [2]) Bierens de Haan im *Bulletino Boncompagni* XI, 383—452, sowie *Bouwstoffen* etc. II, 53—111 und 137—172. [3]) Kästner III, 54. [4]) Allgemeine deutsche Biographie IX, 631—633.

Gregorius nicht weniger als vier Verfahrungsarten schilderte, vermittels deren man zur Quadratur des Kreises gelangen könne.

Kaum war das umfang- und inhaltreiche Werk erschienen, als es die verschiedensten Urtheile hervorrief. Neben solchen, die es bewunderten, waren Verkleinerer desselben auf dem Platze, deren Stimme sehr viel galt. Descartes[1]) fand in einem Briefe an den jüngeren Franciscus van Schooten vom Frühjahre 1649 nichts Gutes darin; er habe die Schlüsse, so weit sie überhaupt verständlich seien, rückwärts verfolgt, und er sei auf offenkundige Fehler gestossen. Roberval und Mersenne traten noch früher öffentlich auf, und Letzterer insbesondere sprach auf S. 72 seines 1647 gedruckten Buches: *Novarum observationum physico-mathematicarum tomus tertius, quibus accessit Aristarchus Samius de mundi systemate*[2]) in verächtlichster Weise von dem Werke, ohne dessen Verfasser zu nennen. Gegen diese Angriffe wandte sich ein Anhänger des Gregorius, wie er Belgier, wie er Mitglied des Jesuitenordens, Alfons Anton de Sarasa[3]) (1618—1667). Seine *Solutio Problematis a. R. P. Marino Mersenno propositi* von 1649 war indessen weniger eine Erläuterung des Opus geometricum des Gregorius — eine solche stellte Sarasa für später in Aussicht, ohne alsdann sein Versprechen einzulösen — als ein Gegenangriff gegen Mersenne. Letzterer hatte die erwähnte Kritik mit den Worten beschlossen, dass die Mathematiker gegen jenes Werk Tadel erhöben, weil der Verfasser den in die Augen fallenden Titel der Zirkelquadratur ihm beigelegt, jedoch nichts zur Sache Gehöriges vorgebracht habe, als was schon vorher gefunden gewesen sei. Die Sache komme nämlich auf folgende Aufgabe hinaus, deren Lösung vielleicht noch viel schwieriger als die Quadratur des Kreises sei: mit Hilfe von Geometrie den Logarithmen einer dritten Grösse zu finden, sofern die Logarithmen zweier anderer gegeben seien, mögen jene drei Grössen beliebig rational oder irrational gewählt werden. An diese Schlusssätze klammerte sich Sarasa, d. h. an die Beantwortung der Frage, ob drei Grössen A, C, L immer einer und derselben geometrischen Reihe angehören, und ob man, wenn die Stellung von A und C innerhalb der Reihe gegeben ist, stets die Stellung von L erkennen könne, indem man geometrischer Hilfsmittel sich bediene. Sarasa stützt sich dabei auf das VI. Buch des Opus geometricum, welches von der Hyperbel handelt. Gregorius hatte dort nachgewiesen, dass Flächenräume, welche durch eine Hyberbel, deren eine Asymptote

[1]) *Oeuvres de Descartes* (édit. Cousin) X, 319. [2]) Die betreffende Stelle ist abgedruckt bei Kästner III, 251. Vergl. auch Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (1831), pag. 89. [3]) Kästner III, 251—254.

und Parallele zur anderen Asymptote begrenzt seien, in einem Verhältnisse stehen, welches gleich sei dem Exponenten der Potenzen, als welche die abschliessenden Ordinaten sich kundgeben. Mit anderen Worten, Gregorius hatte das Auftreten von Logarithmen bei den erwähnten Flächenräumen erkannt, wenn auch nicht mit Namen genannt. Letzteres that Sarasa, und darin liegt das wirkliche Verdienst seiner Streitschrift.

Nun trat 1651 ein neuer, damals noch ganz unbekannter junger Schriftsteller in die Kampfbahn ein, der eben 22jährige Christian Huygens[1]) (1629—1690). Zweiter Sohn des Constantin Huygens[2]), eines als Dichter und Staatsmann bekannten, aber auch die Naturwissenschaften pflegenden, Descartes eifrig bewundernden und nicht minder selbst in hohem Ansehen stehenden Vaters sollte Huygens gleichfalls einer diplomatischen Laufbahn sich widmen und studirte deshalb die Rechtsgelehrsamkeit, bis er 1655 den Doctorgrad beider Rechte sich erwerben konnte. Schon vorher trat er aber als Schriftsteller auf dem Gebiete auf, auf welches seine Begabung ihn vorzugsweise hinwies. Es war das mathematische, das physikalische, das astronomische Gebiet, und der jüngere Franciscus van Schooten war auf demselben seit 1645 sein Lehrer, später sein Freund und Bewunderer. Zunächst haben wir es mit Schriften von Huygens über die Kreisquadratur zu thun. Wir werden ihm dann im 75. Kapitel als Schriftsteller über Wahrscheinlichkeitsrechnung zuerst wieder begegnen. 1651 veröffentlichte Huygens *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro*, in welchem er sich auf De la Faille's Standpunkt stellte, wonach aus dem Schwerpunkte einer Figur deren Flächeninhalt abgeleitet werden könne (S. 696). Zugleich versprach er eine Widerlegung von Gregorius, und diese fand ihren Platz in der kleinen Abhandlung *Ἐξέτασις Cyclometriae clarissimi Gregorii a. S. Vincentio*. Sie war gegen die erste im Opus geometricum empfohlene Methode gerichtet und wies deren Hinfälligkeit nach. Schon diese Abhandlung erwarb ihrem jungen Verfasser laute Anerkennung, noch lauter durch den Wiederhall des immer lebhafter werdenden Streites.

Neue Schriften für und gegen Gregorius wechselten anhaltend.

[1]) Allgem. deutsche Biographie XIII, 480—486. — Vergl. auch den Briefwechsel von Huygens in den acht ersten Bänden der grossen Ausgabe: *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société Hollandaise des Sciences* 1888 flgg. Die Schreibweise Huygens dürfte vor der gleichfalls vorkommenden Huyghens den Vorzug verdienen. [2]) D. J. Korteweg, *Notes sur Constantijn Huygens considéré comme amateur des sciences exactes et sur ses relations avec Descartes* in den *Archives Néerlandaises*, T. XXII.

Für ihn trat 1653 Aloysius Kinner von Löwenthurm[1]) aus Prag mit seiner *Elucidatio geometrica problematis austriaci, sive quadraturae circuli feliciter tandem detectae per R. P. Gregorium a. Sto. Vincentio* ein, gegen ihn 1654 ein Ordensgenosse des Gregorius, wodurch die Bekämpfung schon äusserlich an Kraft gewann. Vincent Leotaud (1595—1672), der Lehrer am Jesuitencollegium in Lyon, hob überdies in seinem *Etymon quadraturae circuli hactenus editorum celeberrimae et examen circuli quadraturae Gregor a St. Vincentio* einen wunden Punkt hervor, welcher von nun an den Gegnern stets als Zielpunkt diente. Gregorius hatte, wie früher erwähnt, ganze vier Methoden vorgeschlagen, welche zur Quadratur des Kreises, mithin zur Berechnung der Verhältnisszahl π führen mussten. Warum brachte er keine dieser angeblich sicheren Methoden in Anwendung? Hielt er das eigentliche Auffinden von π für nebensächlich, oder hatte er erkannt und nur verschwiegen, dass seine Vorschläge sich in Rechnung nicht umsetzen liessen, mithin ihre eigene Widerlegung in sich trugen?

In dem gleichen Jahre 1654 erschien Huygens' *De circuli magnitudine inventa*[2]), in welcher nicht bloss die von Snellius unbewiesen gelassenen Sätze (S. 706) mittels Schwerpunktbetrachtungen, also auf Grundlage von Huygens' Schrift von 1651, gesichert wurden, sondern auch zahlreiche andere Sätze mit ebenso strengen als elementaren Beweisen versehen wurden. Als die wichtigsten Sätze gelten:

Satz 5. Jeder Kreis ist grösser als ein gleichseitiges Sehnenvieleck vermehrt um $\frac{1}{3}$ des Ueberschusses, um welchen es das gleichseitige Sehnenvieleck von halb so vielen Seiten übertrifft.

Satz 6. Jeder Kreis ist kleiner als $\frac{2}{3}$ eines gleichseitigen Tangentenvielecks vermehrt um $\frac{1}{3}$ des ihm ähnlichen Sehnenvielecks.

Satz 7. Jeder Kreisumfang ist grösser als der Umfang eines gleichseitigen Sehnenvielecks vermehrt um $\frac{1}{3}$ des Ueberschusses, um welchen dieser den Umfang des gleichseitigen Sehnenvielecks von halb so vielen Seiten übertrifft.

Satz 11. Der Umfang jedes Kreises ist kleiner als die kleinere der beiden mittleren Proportionalen zwischen den Umfängen einander ähnlicher gleichseitiger Sehnen- und Tangentenvielecke. Die Kreisfläche aber ist kleiner als das zu jenen ähnliche Vieleck, dessen Umfang die grössere jener beiden mittleren Proportionalen ist.

[1]) Quetelet pag. 218. [2]) Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung 1892. Der Bericht über die Abhandlung von Huygens S. 39—41, die Abhandlung selbst S. 85—131.

Satz 16. Bezeichnet a die Länge eines Bogens, welcher kleiner als der Halbkreis ist, s dessen Sinus, s' dessen Sehne, so ist stets

$$s' + \frac{s'-s}{3} < a < s' + \frac{s'-s}{3} \cdot \frac{4s'+s}{2s'+3s}.$$

Die Fassung von Satz 16 entspricht dem Sinne, aber nicht dem Wortlaute bei Huygens, in welchem Formeln durchweg vermieden sind. Huygens gewinnt mittels seiner Sätze schon durch Anwendung regelmässiger 60-ecke die Grenzen:

$$3{,}1415926533 < \pi < 3{,}1415926538.$$

Franciscus Xaverius Aynscom[1]) (1624—1660) veröffentlichte 1656 seine *Expositio ac deductio geometrica quadraturarum circuli R. P. Gregorii a S. Vincentio*, ohne auf den soeben erörterten Einwand sich einzulassen. Huygens antwortete noch im gleichen Jahre 1656 in einem Briefe an Aynscom, und endlich gab auch Leotaud 1663 noch eine Schrift *Cyclomathia* heraus, welche als die letzte derer betrachtet werden kann, die in diesem wissenschaftlichen Streite gewechselt wurden, an welchem — und das verdient bemerkt zu werden — Gregorius selbst sich nie betheiligt hat. Er erhielt, wie aus dem Briefwechsel von Huygens zu ersehen ist, alle gegen wie für ihn verfassten Schriften, er beantwortete die Zusendungen in liebenswürdiger Weise durch Dankbriefe, auf den sachlichen Inhalt ging er nicht ein.

Von ganz anderer Seite fasste ein englischer Schriftsteller, James Gregory[2]) (1638—1675), die Aufgabe der Quadratur in seiner 1667 gedruckten *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Gregory zeigte in einer für Kreis, Ellipse und Hyperbel gemeinschaftlichen Beweisführung, dass, sofern Vielecke, deren Seitenzahl fortwährend zunimmt, der Curve einbeschrieben und umschrieben werden, die Vielecke höherer Seitenzahl einen immer weniger von einander verschiedenen Flächeninhalt besitzen. Er zeigt ferner, dass, wenn A das erste Sehnenvieleck, B das erste Tangentenvieleck, C, D das zweite Sehnen- beziehungsweise Tangentenvieleck ist, alsdann $C = \sqrt{AB}$, $D = \frac{2BC}{B+C}$ sein muss, d. h. ersteres das geometrische Mittel zwischen den den Ausgangspunkt bildenden Vielecken, letzteres das harmonische Mittel zwischen dem ersten Tangentenvieleck und dem zweiten Sehnenvieleck. Sei (Figur 142) der Halbmesser OG des Kreises

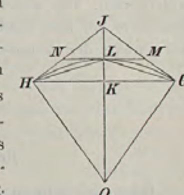


Fig. 142.

[1]) Kästner III, 261—265. [2]) Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (1831), pag. 95—101.

als Einheit gedacht und $\measuredangle HOG = 2\varphi$ der Centriwinkel, welchen die Seite GH des regelmässigen Sehnenvielecks von n Seiten bespannt. Man sieht sofort, dass alsdann

$$A = n \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$
$$B = n \operatorname{tng}\varphi$$
$$C = n \sin\varphi$$
$$D = 2n \operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}$$

ist, und diese Werthe entsprechen den obigen Zusammenhängen. Ebenso entstehen natürlich weitere Sehnen- und Tangentenvielecke E, F aus C, D u. s. w. Es bildet sich, wie Gregory schon in seiner Vorrede sagt, eine *Series polygonorum convergens, cujus terminatio est circulus*, und dieses Wort der Convergenz kehrt im Verlaufe der Schrift immer und immer wieder und ist von da an der Wissenschaft erhalten geblieben. Der Kreis ist also die Grenze, welcher beide Vielecksreihen zustreben, und zwar unter Anwendung eines Namens unserer Neuzeit als harmonisch-geometrisches Mittel. Der Grenzwerth, um dessen Auffindung es sich handelt[1]), wird erst nach unendlicher Gliederzahl der Reihe angetroffen, ist also von A, B ebensoweit entfernt als z. B. von E, F oder einem anderen Gliederpaare endlicher Rangordnung. Der Grenzwerth muss also in ganz gleicher Weise aus E, F wie aus A, B sich bilden. Ist ein endliches Verfahren dazu nicht vorhanden, so ist die Grenze nicht zu finden. Wir sagen statt dessen heute, der Grenzwerth sei eine Transcendente, aber wir verbinden damit den gleichen Sinn, der in Gregory's Ausdrucksweise sich verbarg. Für die damalige Zeit war diese Auffassung allerdings so überraschend neu, dass Huygens sie nicht verstand und ihr im Journal des Savans vom Juli 1668 entgegentrat, worauf Gregory in den Philosophical Transactions noch des gleichen Jahres widersprach. Die weitere wissenschaftliche Thätigkeit Gregory's, insbesondere auf dem Gebiete der Reihenlehre, fällt jenseits 1668, mithin jenseits der Zeitgrenze, welche wir diesem Bande gesteckt haben.

74. Kapitel.

Rechnen. Logarithmen.

Gehen wir nun zu dem zweiten grossen Gebiete der Mathematik über, das von den Zahlengrössen ausgehend die zuletzt besprochenen Untersuchungen, bei welchen gleichfalls ein Rechnen hilfeleistend

[1]) *Propositio VII: Oportet praedictae seriei terminationem invenire.*

stattfand, als grenzbenachbarte besitzt, von wo der Uebergang um so leichter erfolgt, und beginnen wir mit den ersten Anfangsgründen, dem einfachen Rechnen.

Dasselbe war allmälig auch über die dem alltäglichen Gebrauche dienenden Rechnungsarten mit ganzen, und zwar kleinen ganzen Zahlen hinaus Volkseigenthum geworden, und dem entsprechend hatte die wissenschaftliche Berechtigung sowohl als die Behandlung der Lehre vom Rechnen sich geändert. Umfassende Handbücher der Gesammtmathematik, die es auch im XVII. Jahrhunderte gab, konnten nicht umhin, das Rechnen zu lehren, ohne jedoch mehr das Hauptgewicht gerade darauf zu legen. Besondere Schriften suchten dann das Rechnen auch mit grossen und sehr grossen Zahlen zu erleichtern theils dadurch, dass sie instrumentale Hilfsmittel erfanden, theils durch Einführung neuer Kunstgriffe, unter welchen die Erfindung der Logarithmen unsere Aufmerksamkeit besonders in Anspruch nehmen muss. Dann treten neu hinzu gewisse Betrachtungen, welche etwa den Uebergang von der allgemeinen Arithmetik zu denjenigen Untersuchungen bilden, die später den Namen der algebraischen Analysis erhalten haben. Endlich werden wir von gewissen Aufgabensammlungen sprechen müssen, welche alle Theilgebiete der Mathematik zusammenfassen und uns überleiten werden zur Geschichte der zahlentheoretischen Untersuchungen und der Algebra.

Von den zuerst zu erwähnenden grösseren Handbüchern nennen wir die Encyclopädie von Johann Heinrich Alsted[1]) (1588—1638) von Herborn, ein 1620 in vier Foliobänden herausgegebenes encyclopädisches Werk, dem man nicht viel mehr nachrühmen kann, als dass es das erste derartige Druckwerk war, welches in Deutschland erschien. Leibniz[2]) nannte es ein dem Fassungsvermögen jener Zeit entsprechend lobenswerthes Werk, und ein späterer Schriftsteller[3]) erzählt, man habe die Buchstaben des Namens des Verfassers Alstedius versetzt, um das Wort sedulitas zu erhalten.

Wir nennen die Disciplinae mathematicae des Pater Johann Ciermans[4]) von 1640. Der in Herzogenbusch geborene Verfasser gehörte dem Jesuitenorden an, lehrte in Löwen und Antwerpen und starb 1648, als er im Begriffe stand, von Portugal aus eine Missionsreise nach China anzutreten. Das Werk ist in zwölf Monate getheilt,

[1]) Kästner III, 434—438. — Poggendorff I, 34. [2]) Leibniz, Philosophische Schriften (herausgegeben von C. J. Gerhardt) VII, 67: *Diligentissimus Joh. Henr. Alstedius cuius Encyclopaedia mihi pro captu illorum temporum certe laudanda videtur.* [3]) Joh. Friedr. Stockhausen, Historische Anfangsgründe der Mathematik, Berlin 1752, S. 30. [4]) Kästner III, 438—442. — Quetelet pag. 202—203.

in welchen die betreffenden Gegenstände nach dem Berichte des Verfassers thatsächlich gelehrt zu werden pflegten. Das Schuljahr beginnt mit October, endigt mit September. Jeder Monat zerfällt sonderbarer Weise in drei Wochen, der September hat deren gar nur zwei; vielleicht sind die nothwendigen Feier- und Erholungstage auf diese Weise in Rechnung gebracht. Im October wurde Geometrie vorgetragen, im November Arithmetik, im December Optik u. s. w.; zuletzt im September Chronologie. In der zweiten Novemberwoche ist von einer mit Rädern versehenen Vorrichtung die Rede, welche Ciermans erfunden haben will, und welche jede Multiplication und Division fehlerlos vollziehen lasse, also von einer Rechenmaschine; eine Beschreibung ist nicht beigegeben.

Wir nennen den Cursus mathematicus von Pierre Herigone aus dem Jahre 1644, den wir schon (S. 656) zu erwähnen hatten, als wir die Ausgaben alter Geometer besprachen.

Wir nennen das Directorium mathematicum von Abdias Trew[1]) von 1651, ein grosses Lehrbuch der gesammten reinen und angewandten Mathematik, welches durch Breite zu ersetzen suchte, was ihm an Tiefe abging.

Wir nennen den Cursus mathematicus des Kaspar Schott[2]) (1608—1666), eines in Königshofen bei Würzburg geborenen, in Würzburg selbst als Professor der Mathematik gestorbenen Mitgliedes des Jesuitenordens. Schott war übrigens nicht ausschliesslich in seiner Heimath thätig, sondern fand zeitweise auch in Palermo Verwendung als Lehrer der Mathematik und Moral. Der Cursus mathematicus wurde erstmals 1661, später wiederholt als starker Folioband gedruckt.

Wir nennen den uns gleichfalls schon bekannt gewordenen Pater Andreas Tacquet, von welchem zwar nicht innerhalb seiner Opera mathematica, aber als besonderes Bändchen von 1664 eine Arithmetik[3]) erschien.

Damit ist zugleich der Uebergang zu einem anderen Einzelwerke gewonnen, welches einen bedeutenden Einfluss ausübte: die *Clavis mathematica* von 1631, welche 1652 in neuem Abdrucke erschien. Ihr Verfasser William Oughtred[4]) (1574—1660) ist in Eton geboren, war Zögling der Universität Cambridge, seit 1603 Pfarrer in einem Landorte und konnte seiner Lieblingswissenschaft, der Mathematik, nur spärliche freie Stunden widmen, obendrein nur, wenn sie

[1]) Günther, Die mathematischen und Naturwissenschaften an der nürnbergischen Universität Altdorf, S. 27 (Separatabdruck aus dem 3. Hefte der Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg 1881). [2]) Poggendorff II, 838. [3]) Kästner III, 449. [4]) Ebenda III, 39—42. — Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge*, pag. 30--31.

in die Tageszeit fielen, denn am Abend entzog ihm seine haushälterisch gesinnte Frau das Licht, so dass er sich schmerzlich beklagt, dadurch sei manche Aufgabe nicht zur Lösung gelangt. Oughtred's Tod erfolgte aus Freude über die ihm unerwartete Nachricht von der Wiederherstellung des englischen Königthums. Zwei Neuerungen sind vornehmlich in der Clavis mathematica enthalten, welche rasch sich einbürgerten, das Multiplicationskreuz $\times$ und ein aus vier Punkten gebildetes Zeichen gleicher Proportionen $::$, dessen man wenigstens in England sich noch bedient. $a \cdot b :: c \cdot d$ bedeutet also bei Oughtred, a verhalte sich zu b wie c zu d. Der einfache Punkt zwischen den beiden in Verhältniss gestellten Grössen musste allerdings später einem Doppelpunkte weichen, nachdem im XVIII. Jahrhunderte durch Christian von Wolf der einfache Punkt das häufigste Multiplicationszeichen geworden war. Als Gleichheitszeichen bediente sich Oughtred des Recorde'schen $=$. Ausserdem benutzte er die Zeichen $\sqsupset$ für grösser als und $\sqsubset$ für kleiner als, sowie noch eine ganze Menge anderer Zeichen[1]). Bei dieser grossen Zahl neuer Abkürzungen dürfte es vergebliche Mühe sein, Gründe ausfindig machen zu wollen, warum Oughtred gerade dieses oder jenes Zeichen, also beispielsweise das Multiplicationskreuz, wählte. Vielleicht kann es von Interesse sein, dass Lord Brouncker 1668 dieses Zeichen gar nicht als Kreuz auffasste, sondern den Buchstaben x darin sah[2]). Auch neue Namen kommen bei Oughtred vor, so der Name *Unciae*, Klammergrössen, für die Binomialcoefficienten, denen er lange geblieben ist.

Wir sagten oben, es sei in der Richtung der Zeit gelegen, das Rechnen mit grossen Zahlen zu erleichtern. Wir fanden eine Veranlassung dazu in dem Umstande, dass das Rechnen überhaupt mehr und mehr in alle Volksschichten eindrang, und dass den gebildeten Classen ein gewisses Uebergewicht bewahrt werden wollte. Wir hätten auch auf die Verbreitung trigonometrischer Betrachtungen hinweisen können, welche ein Rechnen mit trigonometrischen Functionen nöthig machte, und diese waren in Gestalt grosser Zahlen bekannt, da nur ein sehr grosser Kreishalbmesser eine genügende Annäherung in den Schlussergebnissen der Rechnung versprach. Der Rechnung mit den trigonometrischen Functionen zu lieb war ja auch die Prosthaphaeresis erfunden worden.

Den Namen dieses Kunstgriffes, aber in ganz anderer Bedeutung als ihm ursprünglich inne wohnte, legte ein bayerischer Gelehrter, Hans Georg Herwarth (oder Hoerwarth) von Hohen-

[1]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch V, 1179 und 1181. — Briefliche Mittheilung von Herrn N. L. W. A. Gravelaar in Deventer. [2]) *Philosophical Transactions* II, 466: *And note that the letter x everywhere stands for Multiplication.*

burg[1]) (1553—1622), einem 1610 herausgegebenen Bande bei. Er war in erster Linie Staatsmann und leistete als bayerischer Kanzler seinem Fürstenhause namhafte Dienste, aber auch sein wissenschaftlicher Ruhm ist fest begründet. Von ihm stammt die erste Beschreibung der griechischen Handschriften der herzoglichen Bibliothek, er war in nicht unwichtigem fortgesetzten brieflichen Verkehre mit Mathematikern wie Praetorius und Kepler, von ihm wurde das Tabellenwerk berechnet, welches uns Veranlassung bot, von ihm zu reden, und dessen genauer Titel *Tabulae Arithmeticae ΠΡΟΣΘΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ universales* lautet. Eine Blattgrösse von 52 auf 27 cm, eine Dicke von $10\frac{1}{2}$ cm machen den Band unhandlich, aber wie wäre auf viel geringerem Raume auszukommen gewesen zu einer Zeit, welche auf die Handlichkeit noch kein so grosses Gewicht zu legen gewohnt war, dass sie auf besondere Abkürzungen sann, welche geeignet wären, Raumersparniss zu ermöglichen? Herwarth's Tabellen gestatten die Auffindung des Productes zweier Factoren, deren jeder innerhalb der Zahlen 1 bis 999 eingeschlossen ist, durch einmaliges Aufschlagen, und so konnten auch Producte noch grösserer Factoren durch Addition der Ergebnisse wiederholten Aufschlagens, mindestens ohne eigentliche Multiplicationsfehler befürchten zu müssen, erhalten werden. Sollte 789654 mal 461235987 gefunden werden, so verfuhr man wie folgt. Jede Seite enthielt die Producte der Zahlen 1 bis 999 in einen und denselben Factor, so dass die 1. Seite dem Producte in 2, die 2. dem in 3, die 653. dem in 654, die 788. dem in 789 u. s. w. gewidmet war. Auf der 653. und auf der 788. Seite, mithin unter zweimaligem Aufschlagen des Bandes, fand man also die zu addirenden Theilproducte

$$\begin{array}{lr}
654 \cdot 987 = & 645498 \\
654 \cdot 235 = & 153690 \\
654 \cdot 461 = & 301494 \\
789 \cdot 987 = & 778743 \\
789 \cdot 235 = & 185415 \\
789 \cdot 461 = & 363729 \\
\hline
\text{deren Summe:} & 364216842078498
\end{array}$$

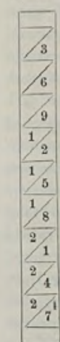
Ob damit ein wesentlicher Zeitgewinn gegenüber von dem untabellarischen Multipliciren, oder eine grössere Sicherheit verbunden war, sei dahingestellt.

Jedenfalls kamen andere Hilfsmittel häufiger als Herwarth's Tafeln zur Verwendung. Bis zu einem gewissen Grade müssen wir hier an die Proportionalzirkel erinnern, deren Name sie der Geometrie,

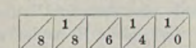
[1]) Allgem. deutsche Biographie XIII, 169—175. Artikel von Eisenhart. — Unger S. 126—130.

deren Anfertigung sie der praktischen Mechanik, deren Anwendung sie dem Rechenunterrichte zuweist. Wir meinen aber noch bestimmter ein Hilfsmittel, welches etwas später, als die Proportionalzirkel in Deutschland beziehungsweise den Niederlanden und Italien entstanden, von England ausging und eine sehr rasche Verbreitung auch auf dem europäischen Festlande erwarb: die Rechenstäbe von John Neper, welche von ihrem Erfinder mit lateinischem Namen *virgulae numeratrices* genannt wurden, wofür englisch das Wort Nepers Bones Aufnahme fand.

Die erste Beschreibung gab Neper in seiner *Rhabdologia* (Edinburgh 1617), welche in lateinischer Sprache in Leiden wiederholt nachgedruckt, aber auch ins Holländische und in das Italienische übersetzt worden ist. Zehn Stäbchen besitzen die Gestalt vierseitiger Parallelopipeda. Die vier Längsflächen jedes Stäbchens sind in je neun kleine Quadrate abgetheilt, deren jedes durch eine von rechts oben nach links unten verlaufende Diagonale in zwei Dreiecke zerfällt. Die Quadratchen einer Fläche sind mit den 9 ersten Vielfachen einer der 9 Zahlen 1 bis 9 beschrieben; ist ein solches Vielfache zweiziffrig, so trennt die erwähnte Diagonale die Stelle der Einer von der der Zehner. Eine solche Fläche, z. B. die der Vielfachen von 3, sieht also so aus:



Auf demselben Stäbchen stellen die drei anderen Flächen etwa die Vielfachen von 2, von 6, und von 7 dar. Will man nun multipliciren, so hat man eine Multiplicatorziffer mit jeder der Multiplicandusziffern zu vervielfachen, und dieses erreicht man, indem man die Stäbchen so nebeneinander legt, dass deren oberste Zahlen die aufeinanderfolgenden Ziffern des Multiplicandus sind. Kommen im Multiplicandus Nullen vor, so müssen auch ganz leere Stäbchen zu Gebote stehen, welche hier einzuschalten sind. Die in gleicher Höhe befindlichen Quadratchen sämmtlicher neben einander liegender Stäbchen lassen alsdann die einzelnen Theilproducte ablesen, indem man durch diagonale Addition jeden Zehner mit dem folgenden Einer vereinigt. Will man z. B. 7632 mal 49375 rechnen, so sieht die erste Multiplicationszeile so aus:



oder 98750 u. s. w. Wollte man die Rechenstäbe zur Division benutzen, so schrieb man den Dividenden hin, setzte den Divisor aus den obersten Zahlen von Rechenstäbchen zusammen und überzeugte sich dann, welches Vielfache des Divisors jedesmal als Theilproduct des Divisors in eine Quotientenstelle vom Dividenden abgezogen werden konnte.

Es ist fast unbegreiflich', dass dieses unbehilfliche Verfahren sich lautesten Beifall erringen konnte, dass Lobverse in lateinischer Sprache auf die Erfindung und den Erfinder angefertigt wurden, dass noch in unserem Jahrhunderte Neper's Büchelchen von einem so tüchtigen Gelehrten, wie Georg Simon Klügel es war, als ein kunstreiches hat bezeichnet werden können[1]). Der gleiche Gedanke der Rechenstäbchen scheint auch einem Lütticher Schriftsteller Jean Gallé gekommen zu sein, der ihn in einem 1616 gedruckten Buche äusserte und sich ungemein viel darauf zu gute that. Eine eigentliche Beschreibung seiner *dix petits bastons* scheint er aber nicht gegeben zu haben[2]).

Eine Verbesserung der Rechenstäbe machte Kaspar Schott (S. 720) in dem 1668 nach dem Tode des Verfassers gedruckten *Organum mathematicum* bekannt[3]). Er brachte nämlich das Einmaleins auf drehbare Cylinder und vereinigte diese in einem „Rechenkasten". Andere wirkliche oder vermeintliche Verbesserungen folgten bis zum Ende des Jahrhunderts.

Noch instrumentaler, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, gestaltete sich das Rechnen durch die Erfindung wirklicher Rechenmaschinen. Eine solche scheint, wie wir (S. 720) gesagt haben, Ciermans seit 1640 besessen zu haben. Der Oeffentlichkeit wurde aber erst einige Jahre später eine solche Vorrichtung übergeben[4]), welche Blaise Pascal mit 19 Jahren, also etwa 1642, herstellte, und für welche er 1649 ein königliches Privilegium erwarb. Kurbelumdrehungen setzten ein Räderwerk in Bewegung, welches nach wenigen vorhergegangenen Einstellungen ohne weitere Ueberlegung von Seiten des Rechnenden die vier einfachen Rechnungsarten vollzog. So vollkommen indessen die Einrichtung in der Theorie war, die Mechaniker der damaligen Zeit waren noch nicht im Stande, die Wünsche des Erfinders so genau zu erfüllen, dass die Vorrichtung wirklich leistungsfähig wurde, dass Irrthümer, sobald einmal richtig eingestellt war, der Benutzer also seine Schuldigkeit gethan hatte, nicht mehr vorkommen konnten. Pascal selbst hielt an der Hoffnung fest, man werde eine derartige Vollkommenheit erreichen, aber das noch in Paris vorhandene Exemplar seiner Rechenmaschine hat trotz mancherlei mit demselben angestellten Versuchen immer erkennen lassen, wie voreilig noch jene Hoffnung war. Die Kühnheit von Pascal's Gedanken bleibt selbstverständlich von der mangelnden Geschick-

[1]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch II, 738—739 s. v. Instrumentale Arithmetik. [2]) Le Paige in dem *Bulletin de l'institut archéologique Liégeois* XXI, 502—504. [3]) Unger S. 119. [4]) Pascal III, 185—208.

lichkeit seiner Hilfsarbeiter unberührt, und sie wurde auch von Allen, welche später vervollkommnete Apparate erdachten, zuerst 1673 von Leibniz, rühmend anerkannt.

Wir sagten oben, es sei fast unbegreiflich, wie Neper's Rechenstäbe Anklang finden konnten. Fast noch unbegreiflicher ist es, dass Neper eine derartige Erfindung, wenn sie überhaupt als solche zu bezeichnen ist, da die schachbrettartige Multiplication, seit lange vorhanden, den gleichen Gedanken zum Ausdrucke brachte, noch der Veröffentlichung werth hielt, nachdem er schon die Erfindung der Logarithmen im Drucke bekannt gemacht hatte.

Bevor wir indessen von dieser handeln, ist es wohl richtiger, von einer später veröffentlichten, doch mit grosser Wahrscheinlichkeit früher entstandenen verwandten Leistung zu berichten, von den Progress Tabulen des Jobst Bürgi[1]). Wir wissen (S. 691), dass Benjamin Bramer, Bürgi's Schwager, von 1603—1611 in dessen Hause in Prag lebte, dann aber ihn verliess. Nur in jenen Jahren kann daher eine Arbeit vollzogen worden sein, von welcher Bramer später (1630) in einer Vorrede sagte, dass Bürgi ihr obgelegen habe, und diese Zeitbestimmung deckt sich überdies vollkommen mit den von Bramer gebrauchten Worten: „Auff diesem Fundament hat mein lieber Schwager und Praeceptor Jobst Burgi vor zwantzig und mehr Jahren eine schöne progress tabul .... calculirt", denn mehr als 20 Jahre von 1630 abgezogen, führt eben in den Zwischenraum zwischen 1603 und 1611. Der Druck der Tafeln erfolgte 1620 in Prag unter dem Titel: „Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen, sambt gründlichen vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen vnd verstanden werden sol", und nur wenige Exemplare davon haben sich erhalten. Der im Titel versprochene „gründliche vnterricht" vollends ist in altem Drucke gar nicht vorhanden und nur handschriftlich einem in Danzig befindlichen Exemplare beigeheftet, woraus eine Veröffentlichung erfolgte[2]). Ob der gründliche Unterricht vorher überhaupt nie gedruckt worden war, ist unmöglich zu entscheiden. Denkbar wäre es allerdings bei der grossen Bedächtigkeit, um kein schärferes Wort zu gebrauchen, welche Bürgi als Schriftsteller an den Tag legte. Bürgi ging aus von dem Gedanken zweier zusammengehörenden Reihen, einer arithmetischen und einer geometrischen, wie er z. B. von Michael Stifel, wenn auch weder von diesem zuerst noch von diesem allein, deutlich

[1]) Gieswald, Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen. Danzig 1856. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 116—120. [2]) Durch Gieswald in dem genannten Danziger Schulprogramm von 1856.

in seiner Arithmetica integra ausgesprochen war[1]). Da Bürgi bekanntlich in der lateinischen Sprache nicht geübt war, auch Stifel nirgend nennt, so wird er nur mittelbar aus anderer Quelle jenen Gedanken sich angeeignet haben, und wir haben keinen Grund zu zweifeln, die von ihm ausdrücklich als seine Vorgänger angeführten Schriftsteller seien es gewesen, aus welchen er schöpfte[2]), „auch von etlichen Arithmeticis Simon Jacob, Moritius Zons und andere ist berürt worden, das was in der Geometrischen Progress oder in der Schwarzen Zahl Multiplicirt, dasselbige ist in der Arithmetischen Progress oder in der rothen Zahl addiern". Der Erstgenannte, Simon Jacob, hat uns früher beschäftigt. Von Moritius Zons dagegen ist nichts weiter bekannt, als dass er 1602 eine Wortrechnung herausgegeben hat[3]). Wie er diese Schwäche mit Stifel theilte, wird er wohl auch den wissenschaftlich werthvollen Gedanken ebendemselben entlehnt haben. Bürgi nennt an der hier aufgenommenen Stelle schwarze und rothe Zahlen als gleichbedeutend mit Zahlen der geometrischen, beziehungsweise der arithmetischen Reihe. Er hat diese Benennung fortwährend festgehalten, und der Drucker hat sich ihr anschliessen müssen, indem thatsächlich schwarze, beziehungsweise rothe Farbe bei jenen Zahlen in Anwendung kam. Die Tafel ist nach den in arithmetischer Reihenfolge auftretenden rothen Zahlen zu einer Tafel doppelten Einganges geordnet. Da nun offenbar die rothen Zahlen das sind, was andere Schriftsteller die Logarithmen genannt haben, während die schwarzgedruckten Zahlen die jenen Logarithmen entsprechenden Zahlen sind, so ist Bürgi's Progresstabul eine antilogarithmische Tafel, dergleichen nach ihr nicht viele zum Drucke befördert worden sind.

Von Wichtigkeit ist es, die Basis seiner Tafel zu kennen und, zu dieser Kenntniss führt uns eine etwas eingehendere Schilderung[4]). Die arithmetische Reihe der rothen Zahlen beginnt bei Bürgi mit 0 und setzt sich dann mit 10, 20 u. s. w. fort, d. h. besitzt 10 als Differenz. Die geometrische Reihe der schwarzen Zahlen beginnt mit 100000000 und setzt sich mit 100010000, 100020001 u. s. w. fort, d. h. besitzt $1\frac{1}{10000}$ als Quotient der Division jedes folgenden Gliedes durch das vorhergehende. Eine Logarithmentafel nach der Auffassung unserer Zeit ist dieses, wie man erkennt, nicht. Nachdem die Logarithmen als Exponenten solcher Potenzen der Basis erkannt waren,

[1]) *Arithmetica integra* fol. 35. [2]) Gieswald l. c. S. 27, Z. 3—5. [3]) Ebenda S. 22. [4]) Kästner, Fortsetzung der Rechenkunst (Göttingen 1801), S. 94—106. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 531—533. — Gieswald l. c. S. 23—25.

welche den entsprechenden Zahlen sich gleich erwiesen, musste wegen $b^0 = 1$, $b^1 = b$ immer dem Logarithmen 0 die Zahl 1, dem Logarithmen 1 die Basis b als Zahl gegenüberstehen, und das Bürgi'sche schwarze 100000000 neben der rothen 0 könnte nur so Berechtigung erlangen, dass man es als 1 mit einem achtstelligen aus lauter Nullen bestehenden Decimalbruche läse. Ebenso wäre die zum Logarithmen 10 gehörige Zahl 100010000 als 1,00010000 zu verstehen u. s. w. Aber Bürgi war von der Erklärung der beiden Reihen mittels des Potenzbegriffes mit Einschluss der Potenz mit dem Exponenten 0 weit entfernt. Es waren für ihn nur zwei Reihen, eine rothe und eine schwarze vorhanden, die eine eine arithmetische, die andere eine geometrische. Anfang und Fortschreitungsgesetz waren beliebig, sofern nur eine Zusammengehörigkeit solcher Glieder festgehalten wurde, welche in beiden Reihen mit gleichem Stellenzeiger auftreten. Von einer Basis der Progresstabul im heutigen Sinne des Wortes kann nur in abgeleiteter Weise die Rede sein, und zu dieser Ableitung führt die folgende Betrachtung. Nennen wir die rothen Zahlen oder Logarithmen x, die schwarzen Zahlen oder Logarithmanden y, so ist unter Berücksichtigung der als nothwendig erkannten Divisionen

$$x = 10n, \qquad y = 10^8\left(1 + \tfrac{1}{10^4}\right)^n.$$

Unter den zu einander gehörigen rothen und schwarzen Zahlen findet sich aber

$$x = 100000 \qquad y = 27184593$$
$$x = 230270022 \qquad y = 1000000000.$$

Abgesehen von angehängten Nullen ist also

1 der Logarithme von 2,7184593,

2,30270022 der Logarithme von 10.

In dem später sogenannten natürlichen Logarithmensysteme, dessen Basis seit Euler durch e bezeichnet wird, ist aber

$$e = 2{,}718281828\ldots \quad \text{und} \quad \log.\text{nat.}\,10 = 2{,}302585\ldots$$

Beide Zahlen stimmen mit den bei Bürgi vorkommenden nahe genug überein, um behaupten zu können: Bürgi's Logarithmen sind die Logarithmen mit der Basis e[1]).

Eine weitere Frage geht nothwendig dahin, wie Bürgi wohl die schwarzen Zahlen interpolirte, welche zu solchen rothen Zahlen gehörten, die in der tafelmässig in Unterschieden von 10 fortschreiten-

[1]) Kewitsch, Die Basis der Bürgi'schen Logarithmen ist e, der Neperschen $\frac{1}{e}$. Zeitschr. f. mathem. und naturwissensch. Unterricht XXVII, 321—333 (1896).

den Liste rother Zahlen fehlten? Der kurze Bericht bleibt auf diese Frage die Antwort schuldig. Dagegen lehrt er die Interpolation der rothen Zahlen, um diejenige derselben zu finden, welche einer in der Tafel nicht vorhandenen, gegebenen schwarzen Zahl entspricht[1]). Zu suchen sei die rothe Zahl zu der schwarzen Zahl 36. Keine schwarze Zahl unterhalb der neunziffrigen 100000000 steht in der Tabelle, folglich ist, damit die Tabelle überhaupt benutzbar werde, 36 durch Anhängung von 7 Nullen zu 360000000 zu verlängern. Die nächstkleinere und nächstgrössere schwarze Zahl der Tabelle ist 359964763 neben der rothen Zahl 128090 und 360000759 neben der rothen Zahl 128100. Man kann an diesen beiden schwarzen Zahlen beiläufig prüfen, ob die Berechnung der Progresstabul überall nach dem gleichen Verfahren stattfand. Zunahme der rothen Zahl um 10 entsprach, sagten wir, in den Anfangszahlen eine Vervielfältigung der schwarzen Zahl mit $1\frac{1}{10000}$. Nun ist

$$1\frac{1}{10000}\cdot 359964763 = 359964763 + 35996 = 360000759,$$

wie es in der Tabelle gedruckt ist. Zugleich erkennen wir den Unterschied 35996 der beiden tabellarisch auf einander folgenden schwarzen Zahlen. Der Unterschied von 359964763 bis zu 360000000 ist etwas geringer, nämlich 35237. Nun wird die Proportionalität des Zuwachses der schwarzen und der rothen Zahlen in einem engen Spielraume ohne weitere Begründung angenommen und

$$35996 : 35237 = 10000 : 9789$$

gerechnet. Eigentlich sollte 10 das dritte Glied der Proportion sein, statt welches nur zum Zwecke genauer Rechnung 10000 gewählt wurde. Das vierte Glied 9789 ist daher auch auf 9,789 zurückzuführen, wofür Bürgi $\overset{0}{9}789$ druckt mit der Bemerkung „und werden alle Zeit biss unter die 0 ganze verstanden und die folgen der Bruch“. So ist also 128099,789 die rothe Zahl, welche neben die schwarze Zahl 360000000 gehört. Dass diesem Interpolationsverfahren der rothen Zahlen ein ganz ähnliches auch auf Proportionalrechnung beruhendes für die schwarzen Zahlen zur Seite gestanden haben muss, liegt so ungemein nahe, dass wir kaum daran zweifeln, Bürgi habe deren Schilderung nur als überflüssig unterlassen.

Wir sagten oben, die Progresstafel sei nach um je 10 Einheiten wachsenden rothen Zahlen geordnet. Nur am Schlusse der Tafel ist eine Abweichung von dieser Anordnung vorhanden. Aus gleich zu erörternden Gründen sollte nämlich die Tafel, wie sie mit der runden

[1]) Gieswald l. c. S. 28—29.

schwarzen Zahl 100000000 begann, mit der nächsthöheren runden schwarzen Zahl 1000000000 abschliessen, deren rothe Zahl 230270,022 ist, und diese bildet wirklich den Schluss der Tafel. Diese Zahl 230270,022, welche also die Gleichung $b^{230270,022} = 100000,0000$ erfüllt, wobei $b = 1,000009990550012$, führt den Namen der **ganzen rothen Zahl**[1]) und soll bei manchen Anwendungen der Tafel, z. B. bei Divisionen, deren Quotient als echtgebrochen sich erweist, den gleichen Vortheil gewähren, welchen man bei den wirklichen Logarithmen durch ganzzahlige Vergrösserung der Charakteristik erreicht. Sei 154030185 durch 205518112 zu dividiren. Zu diesen schwarzen Zahlen gehören als rothe Zahlen 43200 und 72040, deren zweite von der ersten nicht abgezogen werden kann. Statt 43200 — 72040 rechnet desshalb Bürgi 230270,022 + 43200 — 72040 = 201430,022, zu welcher rothen Zahl die schwarze Zahl 749472554 gehört, wie ohne nähere Begründung behauptet wird, unter offenbarer Verschweigung der erwähntermassen hier nothwendig gewesenen Proportionalrechnung. Dann fährt Bürgi fort: „ihr gebürendt schwarze Zahl ist 749472554 und soviel kombt so man 154030185 durch 205518112 dividirt, welches doch keine ganze sondern lauter Bruch vom ganzen alss 0749472554 oder $0\frac{749472554}{1000000000}$.“

So Bürgi's Progresstafeln, welche also zwischen 1603 und 1611 entstanden, erst 1620 im Drucke erschienen, das bestätigend, was der Verfasser in seinem gründlichen Unterricht sagt[2]): „obwol ich mit diesen Tabulen vor etlichen Jahren hin umbgang so hat doch mein Beruff von der Edition derselben enthalten.“ Noch deutlicher sprach sich **Kepler** 1627 in der Einleitung zu den Rudolphini'schen Tafeln aus, Bürgi habe viele Jahre (multis annis) vor der Neper'schen Veröffentlichung seine Tafel besessen, „aber der zögernde Geheimnisskrämer überliess das eben geborene Kind sich selbst, statt es zum öffentlichen Nutzen gross zu ziehen“[3]).

Schützen diese verschiedenen Berichte das unabhängige Erfinderrecht Bürgi's und stellen ihn, den wir im vorigen Abschnitte auch als Neuerer auf dem Gebiete der Gleichungslehre, als im Besitze des Gedankens der Decimalbrüche, als Anwender dieses Gedankens bei trigonometrischen Rechnungen, bei der abgekürzten Multiplication kennen gelernt haben, in die Reihe der erfindungsreichsten Rechner, so spricht doch gerade Kepler in scharfer Weise das Urtheil aus, welches dem Erfinder, falls er als solcher gelten will, die Pflicht

[1]) Gieswald l. c. S. 30 und häufiger. [2]) Ebenda S. 26. [3]) *Etsi homo cunctator et secretorum suorum custos foetum in partu destituit, non ad usus publicos educavit.*

auferlegt, sein Eigenthum nicht zu verschliessen, sondern es der Allgemeinheit dienstbar zu machen, und solches that Neper.

Neper wurde desshalb in unbestrittener Weise mit dem Ruhme belohnt, das logarithmische Rechnen eingeführt zu haben, und wir müssen nun seine *Descriptio* von 1614, seine *Constructio* von 1619, welche wir schon erwähnt haben, als die trigonometrischen Leistungen Neper's uns beschäftigten, nach ihrem wesentlichsten und wichtigsten Inhalte kennen lernen. Damals machten wir (S. 703) auf einige Schriften aufmerksam, welche Neper offenbar studirt hat. Pitiscus erwähnt er selbst, das Studium Michael Stifel's glaubten wir wahrscheinlich machen zu können, und wenn unsere Muthmassung die Wahrheit traf, so ist damit zugleich die Quelle erkannt, aus welcher Neper unmittelbar das Gleiche entnahm, was Bürgi mittelbar aus ihr schöpfte, den Gedanken, die Verbindung einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe für das praktische Rechnen fruchtbar zu machen, indem ein für alle mal solche einander entsprechende Reihen hergestellt wurden. Die Glieder der arithmetischen Reihe nannte Neper Logarithmen[1]). Unabhängig von Stifel ist jedenfalls die Art, wie Neper durch einen mechanischen Vorgang, durch das Fliessen, *fluxus*, eines Punktes jede der beiden auf einander bezogenen Reihen entstehen liess. Das Wort *fluere* selbst entnahm er er vielleicht Clavius (S. 556). Von einem Punkte A aus fliesst ein Punkt B, welcher zuerst in der Zeiteinheit den Weg von A nach C durchfliesst, in der zweiten Einheit den von C nach D u. s. w.[2]). Sind die durchflossenen Wege einander gleich, so stellt die am Schlusse jeder der Zeiteinheiten vom Anfange der Bewegung an bis dahin zurückgelegte Entfernung jeweils ein Glied der arithmetischen Reihe, mithin einen Logarithmus dar. Nun findet aber eine zweite Bewegung[3]) gleichzeitig, *synchronus motus*, mit der ersteren statt, d. h. eben dieselben Zeiteinheiten wie bei der ersten Bewegung werden bei der zweiten der Betrachtung zu Grunde gelegt, nur ist der durchlaufene Weg nicht in jeder Zeiteinheit derselbe. Er nimmt vielmehr proportional ab. Ist in der 1. Zeiteinheit $\frac{1}{m}$ des ganz zu durchfliessenden Weges zurückgelegt, so liefert der Punkt in der 2. Zeiteinheit $\frac{1}{m}$ des noch übrigen Weges u. s. w., oder die jeweils zurückgelegten Wege

[1]) Neper, *Descriptio* pag. 5 Cap. II, propositio 1: *Proportionalium numerorum, aut quantitatum, aequi-differentes sunt Logarithmi.* [2]) Ebenda pag. 1—2: *Sit punctus A, a quo ducenda sit linea fluxu alterius puncti, qui sit B; fluat ergo primo momento B ab A in C, secundo momento a C in D* etc. [3]) Ebenda pag. 3—4.

sind $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{m}$, $\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^2\cdot\cdot$ Uebrig bleiben jedesmal noch die Wege:

$$1-\frac{1}{m}=\frac{m-1}{m},\quad \frac{m-1}{m}-\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{m}=\left(\frac{m-1}{m}\right)^2,$$
$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^2-\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^2=\left(\frac{m-1}{m}\right)^3,\cdots$$

d. h. die am Ende der einzelnen Zeiteinheiten noch übrigen Wege stellen die fallende geometrische Reihe dar, welche der erstgebildeten arithmetischen Reihe Glied für Glied zugeordnet ist.

Neper hat demnach zwei Reihen von entgegengesetzter Wachsthumsrichtung. Während die Logarithmen zunehmen, nehmen die Zahlen ab, mit zunehmenden Zahlen werden die Logarithmen kleiner. Es ist das ein Gegensatz zu der Gewohnheit Bürgi's, ein Gegensatz auch zu dem, was nicht lange später auch unter den Berechnern von Logarithmen nach Neper'schem Vorbilde sich einbürgerte.

Grundsätzlich war Neper auch schon 1614 für die von ihm getroffene Einrichtung nicht eingenommen. Nur Nützlichkeitsgründe bestimmten ihn. Es stehe, sagt er in einer Ermahnung an den Leser[1]), von Anfang frei, welchem Sinus und welcher Zahl man den Logarithmus 0 beilegen wolle, häufig sei aber mit dem Sinustotus (d. h. $\sin 90^0$) zu multipliciren oder zu dividiren, dessen Logarithmus also zu addiren oder zu subtrahiren, und da erscheine die Gleichsetzung gerade dieses Logarithmus mit 0 zweckmässig, weil die geringsten Beschwerden hervorbringend. Ueberdies kommen meistens Sinusse, beziehungsweise Zahlen vor, welche kleiner seien als der Sinustotus. Diese habe er mit positiven, *abundantes*, Logarithmen bedacht, andere mit negativen, *defectivos*, man hätte aber auch die entgegengesetzte Wahl treffen können.

Die Tafel selbst ist in sieben Kolumnen auf jeder Seite geordnet, und je zwei neben einander befindliche Seiten sind Winkelgraden gewidmet, welche oben am Blatte angegeben sind; am unteren Rande steht die Zahl der Winkelgrade, welche die obere zu 89^0 ergänzt. In der 1. Kolumne sind von oben nach unten Minuten von 1 bis 30 und von 30 bis 60 angegeben; in der 7. und letzten Kolumne wiederholt

[1]) Neper, *Descriptio* pag. 6: *Admonitio. Erat quidem initio liberum cuilibet sinui aut quantitati nullum seu 0 pro logarithmo atribuisse: sed praestat id prae caeteris sinui toti accommodasse: ne unquam in posterum vel minimam molestiam parturiret nobis additio et subtractio eius logarithmi in omni calculo frequentissimi. Caeterum etiam quia sinuum et numerorum sinu toto minorum frequentior est usus, eorum igitur logarithmos abundantes ponimus: aliorum vero defectivos, etsi contra fecisse initio liberum erat.*

sich diese Minutenangabe von unten nach oben. Die 2. und 6. Kolumne mit der Ueberschrift *Sinus* enthalten die Sinusse der zunächst neben ihnen angegebenen Winkel, also auch die Cosinusse derjenigen Winkel, deren Maass auf der gleichen Zeile, aber um Blattbreite entfernt, angegeben ist. Die 3. und 5. Kolumne mit der Ueberschrift *Logarithmi* enthalten die Logarithmen der daneben befindlichen Sinusse. Endlich die 4. mittlere Kolumne ist *Differentiae* überschrieben und enthält die Differenz der links und rechts stehenden Logarithmen. Das sind die Logarithmen der Tangenten, da ja $\log\sin\varphi - \log\cos\varphi = \log\operatorname{tang}\varphi$. Nehmen wir als Beispiel eine Zeile der rechts stehenden Seite desjenigen Blattes, welches die obere Bezeichnung Gr. 9, die untere Gr. 80 führt, etwa die Zeile

$$46 \mid 1696362 \mid 17740985 \mid 17594992 \mid 145993 \mid 9855068 \mid 14.$$

Der Sinn derselben ist:

$$\sin 9^0 46' = 1696362, \quad \sin 89^0 14' = \cos 9^0 46' = 9855068,$$
$$\log\sin 9^0 46' = 17740985, \quad \log\cos 9^0 46' = 145993,$$
$$\log\operatorname{tang} 9^0 46' = 17740985 - 145993 = 17594992.$$

Die Kolumnen der Sinusse und Cosinusse gestatten die doppelte Benutzung der Tafel als logarithmisch-trigonometrische und zugleich als logarithmische für Zahlen, vorausgesetzt, dass man noch reintrigonometrische Tafeln von ausreichender Genauigkeit zur Verfügung hat. Man will z. B. $\log 137$ finden[1]). Einer Secantentafel entnimmt man $13703048 = \sec 43^0 8'$. Nach Neper's Tafel ist

$$\log\cos 43^0 8' = 3150332,$$

und da $\log\sec 43^0 8' = -\log\cos 43^0 8'$, so ist $\log 137$ fast übereinstimmend mit -3150332. Freilich wäre bei Benutzung dieses Logarithmen 137 als gleichwerthig mit 13703048 angesehen, während zum mindesten der Unterschied zu beachten ist, dass letztere Zahl um fünf Stellen zu lang ist. Diese nothwendige Correctur deutet Neper durch Hinschreiben so vieler Nullen, als Stellen wegzulassen waren, mit vorgesetztem Minuszeichen an. Er schreibt also

$$\log 137 = -3150332 - 00000.$$

Auch eine Proportionalrechnung muss Neper besessen haben, wie aus vielfachen Beispielen hervorgeht. So ist einmal[2]) 6994224 Logarithme des Cosinus eines gesuchten Winkels. Nach den Tafeln ist

$$\log\cos 60^0 12' = 6992177, \quad \log\cos 60^0 13' = 6997258.$$

Neper behauptet, es sei $6994224 = \log\cos 60^0 12' 24\frac{1}{2}''$ [3]). An einer

[1]) Neper, *Descriptio* pag. 11. [2]) Ebenda pag. 53. [3]) Richtiger wäre $24\frac{1}{8}''$.

früheren Stelle behält sich übrigens Neper ausdrücklich vor[1]), bei anderer Gelegenheit ausdrücklich zu erörtern, wie auf das Genaueste zu jeder Zahl der Logarithmus, zu jedem Logarithmen die Zahl gefunden werde. An einer noch früheren Stelle[2]) will er erst das Urtheil der Gelehrten über die Tafel selbst kennen lernen, bevor er seine Methoden zur Herstellung derselben veröffentliche, und diese Zusage wiederholt er am Schlusse der Descriptio in einer Bemerkung des letzten Blattes mit dem Zusatze: Nichts sei von Entstehung an vollkommen, *Nihil in ortu perfectum*.

Die Erfüllung der Zusage war der Zweck der Constructio. Diese war, wie aus der Vorrede hervorgeht, noch vor der Descriptio geschrieben. Die Logarithmen heissen in ihr noch *numeri artificiales*, der in der Descriptio eingeführte Kunstausdruck war demnach noch nicht erfunden. Neper starb, ohne seine Anweisung zur Herstellung der Logarithmentafel dem Drucke übergeben zu haben. Sein Sohn Robert hielt es für seine Pflicht, die vorgefundene Handschrift zu veröffentlichen, wenn sie auch der letzten Feile entbehrte, und so erfolgte der Druck der Constructio von 1619, welcher ausserdem noch Zusätze von Henry Briggs und Trigonometrisches von John Neper, insbesondere Ausführlicheres über die Neper'schen Analogien brachte[3]).

Die geometrische Reihe, welche Neper bildete, und welche die Zahlen enthielt, während deren Stellung in der Reihe als in arithmetischer Folge stehend mit dem jedesmaligen Logarithmus verwandt ist, hat eine sehr zusammengesetzte Bildungsweise mit Hilfe von vier Reihen, welche A, B, C, D heissen mögen[4]). Die Reihe A beginnt mit 10000000 und zieht bei jedem folgenden Gliede ein Zehnmillionstel des vorhergehenden ab, mit anderen Worten hat als Factor, mit welchem die Glieder fortwährend zu vervielfachen sind, um das nächstfolgende zu bilden, den Bruch $q_1 = 0{,}9999999$. Unter Benutzung von sieben Decimalstellen, welche in der Constructio durch einen Punkt von der ganzen Zahl getrennt sind, wie Neper es aber nicht bei Pitiscus, den er freilich sowohl in der Descriptio als in der Rhabdologie wiederholt erwähnt, aber dessen Trigonometrie er nur in der älteren Ausgabe gelesen hatte, kennen lernte[5]), ist also die Reihenfolge der Glieder erstens 10000000, zweitens 9999999, drittens

[1]) Neper, *Descriptio* pag. 16, *Admonitio*. [2]) Ebenda pag. 7, *Admonitio*. [3]) Beschreibungen der *Constructio* bei Kästner III, 72—86. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 535—539. — Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, S. 271—290. [4]) Neper, *Constructio* pag. 12—16. [5]) Briefliche Mittheilung von H. Gravelaar, welcher diese Behauptung sehr wahrscheinlich zu machen weiss.

9999998 · 0000001, viertens 9999997 · 0000003, endlich als hundertunderstes Glied 9999900 · 0004950. Die zweite Reihe B hat das erste Glied mit A gemeinschaftlich und lässt ihm als zweites das letzte Glied von A oder doch eine von demselben kaum abweichende Zahl 9999900 folgen. Zur bequemeren Uebersicht mögen die Glieder von A durch a mit den Stellenzeigern 1 bis 101, die Glieder von B durch b wieder mit Stellenzeigern versehen dargestellt werden, und wie vorher $q_1 = \frac{a_2}{a_1}$, möge jetzt $q_2 = \frac{b_2}{b_1}$ sein. Nun war

$$b_1 = a_1 = 10000000, \quad b_2 = a_{101} = 9999900,$$

zwischen welchen die Glieder a_2 bis a_{100} eingeschaltet sind und mit b_1 und b_2 eine geometrische Reihe bilden. Die Reihe B wird mittels $q_2 = \frac{99999}{100000}$ fortgesetzt. Nach den uns schon bekannten b_1 und b_2 kommt $b_3 = 9999800 \cdot 001000$, $b_4 = 9999700 \cdot 003000$, endlich $b_{51} = 9995001 \cdot 224804$, statt welcher Zahl in Folge eines Rechenfehlers bei Neper 9995001 · 222927 angegeben ist. Wie die Glieder a_2 bis a_{100} zwischen b_1 und b_2 eingeschaltet waren, müssen mittels des gleichen Factors q_1 zwischen je zwei auf einander folgende b sich 99 Glieder a einschalten lassen, so dass die Gleichungen stattfinden $b_1 = a_1$, $b_2 = a_{101}$, $b_3 = a_{201}$, $b_{51} = a_{5001}$, und diese Reihe von 5001 Gliedern beginnt mit 10000000, endigt mit einer Zahl, welche nicht sehr von 9995000 sich unterscheidet. Nun fährt man ähnlich fort und verschafft sich eine Reihe C, deren Glieder c mit Stellenzeigern heissen. Man nimmt

$$c_1 = b_1 = a_1 = 10000000, \quad c_2 = b_{51} = a_{5001} = 9995000,$$

$$q_3 = \frac{c_2}{c_1} = \frac{9995}{10000} = \frac{1999}{2000}.$$

Neper rechnet bis $c_{21} = 9900473 \cdot 5780$, welches wenig verschieden von $9900000 = d_2$ ist. Nimmt man bei der jetzt beginnenden Bildung der Reihe D als Anfangsglieder $d_1 = c_1$ und das eben angegebene d_2, mithin $q_4 = \frac{d_2}{d_1} = \frac{99}{100}$, so wird $d_3 = q_4 \cdot d_2$ nahezu mit c_{41} übereinstimmen, wie d_2 nahezu mit c_{21}, und man erhält wenigstens in naher Uebereinstimmung $d_{69} = c_{1361} = 5048858 \cdot 8900$. Neper rechnet aber noch ein $d_{70} = c_{1381} = 4998609 \cdot 4034$ (indem er die C-Reihe mittels des Factors q_3 so weit fortsetzt) und betrachtet dieses Schlussglied als in Uebereinstimmung mit 5000000 oder mit der Hälfte des allen vier Reihen gemeinsamen Anfangsgliedes 10000000. Nun haben wir schon erörtert, dass neben $c_1 = a_1$, $c_2 = a_{5001}$ stattfindet. Der Stellenzeiger des mit c_{1381} übereinstimmenden a ist daher

$$1 + 1380 \times 5000 = 6900001,$$

oder es ist eine geometrische Reihe von 6900001 Gliedern, mit den Grenzgliedern 10000000 und 5000000 hergestellt, in welcher jedes Glied aus dem ihm vorhergehenden durch Vervielfachung mit

$$q_1 = 0.9999999$$

entsteht. Die Logarithmen zu diesen Zahlen müssen, wie wir schon andeuteten, eine arithmetische Reihe bilden und vermöge dessen den Ordnungszahlen oder den Stellenzeigern ihrer Zahlen verwandt sein, ohne sich mit ihnen decken zu müssen.

Neper vergleicht in der Constructio wie in der Descriptio die Bildung der geometrischen und der arithmetischen Reihe mit Bewegungen[1]) (Figur 143). Auf der Linie bi bewegt sich ein Punkt a mit gleichförmiger Geschwindigkeit und legt in der Zeiteinheit den Weg bc zurück. Auf der Linie TS bewegt sich gleichzeitig ein Punkt g, dessen Geschwindigkeit in T selbst mit der von a übereinstimmt, aber fortwährend gleichförmig abnimmt. In der ersten Zeiteinheit legt er den Weg Td zurück. Denken wir uns seinen Bewegungsanfang um eine Zeiteinheit zurückverlegt und auch räumlich nach o verschoben, so muss wegen der gleichförmigen Verlangsamung $oS : TS = TS : dS$ sein. Daraus folgt

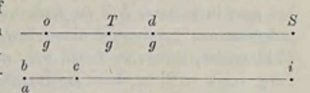


Fig. 143.

$$(oS - TS) : TS = (TS - dS) : dS, \; (oS - TS) : (TS - dS) = TS : dS$$

und wegen $TS > dS$ auch $oT > Td$. Der Punkt ist also zwischen o und T schneller, zwischen T und d langsamer als der Punkt a, und man kann etwa die Schnelligkeit von a dem arithmetischen Mittel der Bewegungen oT und Td gleichsetzen.

Darin liegt auf der einen Seite eine ungemein klare Begriffsfassung dessen, was man später Geschwindigkeit im Entstehungszustande oder Streben nach Bewegung genannt hat, aber es liegt noch mehr darin. Stellt TS eine ein für alle Mal gegebene Zahl, dS einen bestimmten Werth einer veränderlichen Zahl und bc den Logarithmus von dS dar, so ist immer noch annähernd

$$bc = \frac{1}{2}(oT + Td)$$

zu setzen. Sei etwa $TS = 10000000$, $dS = 9999999$, so ist

$$Td = 1, \quad oT = \frac{Td \cdot TS}{dS} = \frac{10000000}{9999999} = 1{,}00000010000001$$

und log 9999999 ziemlich genau auf 1,00000005 bestimmt, sofern

[1]) Neper, *Constructio*, pag. 20—21.

wir der bei Neper noch nicht vorkommenden Abkürzungssilbe log uns bedienen. Gleichzeitig setzt Neper log 10000000 = 0. Die Differenz der arithmetischen Reihe der Logarithmen ist somit

$$1{,}00000005 - 0 = 1{,}00000005,$$

der Gliederquotient der geometrischen Reihe der Zahlen $\frac{9999999}{10000000}$, unser früheres q_1. Bei der letzten Zahl der Neper'schen Rechnung, bei 5000000, giebt die Descriptio als Logarithmen 6931469 an[1]), in der Constructio dagegen heisst es[2]), die logarithmische Differenz solcher Zahlen, die im Verhältnisse von 2 : 1 stehen, sei 6931469,22.

Aus diesem Logarithmus und ähnlicherweise aus einigen anderen hat man in späterer Zeit die Basis von **Neper's Tafeln** herzustellen unternommen[3]), wiewohl dieser Begriff Neper zunächst, wenn auch nicht später, gerade so fremd war, wie er es Bürgi war. Die Rechnung zeigt erstlich, dass die Logarithmentafel Neper's zuvor einer Division durch 10000000 in den Zahlen wie in den Logarithmen bedarf, ehe man sie als eigentliche Logarithmentafeln betrachten kann, zweitens, dass dann der Logarithme einer Zahl u im Neper'schen Systeme, welches als das von der Basis N bezeichnet werden mag, keineswegs der **natürliche Logarithme** von u ist, oder mit anderen Worten, dass N keineswegs $2{,}718281828\ldots = e$ ist. In der Neper'schen Tabelle steht

0,693146922 als Logarithmus der Zahl 0,5

gegenüber. Aber es ist

$$\log \text{nat.}\, 2 = 0{,}6931472$$

fast genau übereinstimmend mit dem bei Neper angegebenen Logarithmen von $\frac{1}{2}$. Oder es ist $N^{\log \text{nat.}\, 2} = \frac{1}{2}$. Daraus folgt aber $N = \frac{1}{e}$ oder **die Basis der Neper'schen Logarithmen ist** $\frac{1}{e}$.

Neper hat der Constructio noch einen *Appendix* hinzugefügt[4]) und in diesem Anhange über Methoden der Logarithmenberechnung sich ausgesprochen, welche unter der Voraussetzung Platz greifen, dass **die Zahl 1 den Logarithmus 0 besitze.** Hier ist also erstmalige, wenn auch nicht besonders hervorgehobene Uebereinstimmung zwischen Logarithmen und Exponenten, erstmalige Anwendung einer wirklichen Basis des Logarithmensystems, indem von der Zahl gesprochen wird, welche 1 zum Logarithmus habe, und zwar wird entweder 10 oder $\frac{1}{10}$ als solche Zahl vorgeschlagen, deren Logarithmus 1 mit beliebig vielen Nullen dahinter sein solle. Ist $1 = \log 10$, so wird $0{,}2 = \log\left(\sqrt[5]{10}\right)$, $0{,}04 = \log\left(\sqrt[5]{\sqrt[5]{10}}\right)$ u. s. w. bis zur zehnmaligen Ausziehung von Wurzeln 5. Grades. Neper scheint indessen vor der furchtbaren Rechenaufgabe, welche er damit sich und solchen, die seinen Spuren folgen wollten, stellte, zurückgeschreckt zu sein, wenigstens giebt er keine einzige der Zahlen wirklich an, deren Berechnung er doch selbst verlangte.

[1]) **Neper**, *Descriptio* bei log sin 30°. [2]) **Neper**, *Constructio*, pag. 39. [3]) **Wackerbarth** in *Les mondes* XXVI, 26 und **J. W. L. Glaisher** in dem *Report of the Committee of mathematical Tables*, pag. 71—73 (Separatabdruck aus dem *Report of the British Association for the Advancement of Science for 1873*). Dessen irrige Behauptungen sind widerlegt durch **Kewitsch** in der Zeitschr. f. mathem. und naturwissensch. Unterricht XXVII, 321—333 (1896). [4]) **Neper**, *Constructio*, pag. 48—54.

Dagegen lässt er eine Methode folgen, welche nur Quadratwurzelausziehungen verlangt, und von deren Ergebnissen er wenigstens einige anschreibt. Bei log 10 = 1 ist log 5 folgendermassen zu suchen. $\log \sqrt{1 \cdot 10} = \log 3{,}16227766017 = 0{,}5$. Ferner

$$\log \sqrt{10 \cdot 3{,}16227766017} = \log 5{,}62341325191 = 0{,}75$$

u. s. w., wo man leicht sieht, wie man durch fernere Quadratwurzelausziehung aus dem Producte von 3,16 ... in 5,62 ... zu einer zwischen 4 und 5 liegenden Zahl mit dem Logarithmen 0,625 gelangt. Ueber die beiden auf 11 Decimalstellen hier angegebenen Zahlen hinaus setzt Neper allerdings die Rechnung wieder nicht fort.

Endlich drittens lehrt Neper, wie man, immer unter der Voraussetzung log 10 = 1, nur durch fortgesetzte Multiplication die Logarithmen zu finden im Stande sei. Bilde man das Product von 10000000000 Factoren, deren jeder 2 heisst, so entstehe eine Zahl von 301029996 Stellen, und daraus folge log 2 = 0,301029996.

Sind die in jenem Anhange geäusserten Gedanken sämmtlich Neper's Eigenthum? Es scheint nicht, aber ebensowenig scheint diejenige Auffassung richtig zu sein, welche Neper gar keinen Antheil an den so wesentlichen Aenderungen des ursprünglichen Gedankens gestatten will[1]). **Edward Wright**, dessen Name in der Geschichte der Schifffahrtskunde und der Kartographie einen ehrenvollen Platz einnimmt, war von Neper's Descriptio in hohem Grade entzückt. Er sah die Grösse der Erfindung, ihre Tragweite für alle praktischen Zwecke der Sternkunde in vollem Maasse ein, und setzte seine ganze Kraft in Bewegung, zur Verbreitung der Logarithmen beizutragen. Er übersetzte die Descriptio ins Englische und schickte die Handschrift Neper zur Begutachtung. Dieser erklärte sich durchaus einverstanden und befriedigt. Der Druck begann, aber bevor derselbe

[1]) **Glaisher** l. c. pag. 49—52. — **Ball**, *History of the study of mathematics at Cambridge*, pag. 27—30.

1616 vollendet war, starb Wright bereits 1615. Seine Einwirkung war demnach nur geringfügig. Um so erheblicher war die von Henry Briggs (1556—1630). In Cambridge aufgewachsen begann Briggs dort seine Lehrthätigkeit 1592. Vier Jahre später trat er in eine damals durch eine Stiftung von Sir Thomas Gresham gegründete und nach dem Stifter genannte Anstalt in London als Professor und verblieb daselbst, bis er 1619 nach Oxford übersiedelte, wohin er als erster Inhaber eines dort neu gegründeten Lehrstuhls, der Savile'schen Professur der Geometrie, berufen wurde. Als 1614 die Descriptio erschien, lebte Briggs demnach in London. Das Werk entzückte ihn. Neu und wundervoll nannte er in einem Briefe die Logarithmen. Sein Kopf und seine Hände seien jetzt in voller Thätigkeit, und er hoffe im nächsten Sommer mit dem Verfasser eines Buches zusammenzutreffen, welches wie kein anderes ihm gefallen und sein Erstaunen erweckt habe[1]). Brigg's Wunsch erfüllte sich durch einen 1615 Neper erstatteten Besuch, der bis zu einem Monate sich ausdehnte, ein zweiter Besuch erfolgte 1616, ein dritter war für 1617 in Aussicht genommen und unterblieb nur, weil Neper am 4. April dieses Jahres schon starb. Gleich 1615 schlug Briggs vor, der Zahl 10 den Logarithmen —1 zuzuweisen, im Uebrigen aber die Anordnung Neper's beizubehalten, d. h. die Zahl abnehmen zu lassen, während der Logarithme positiv wachse. Neper ergänzte den Vorschlag, welcher ihm ohnedies nicht ganz überraschend kam, da ja er selbst schon daran gedacht hatte, die beiden Progressionen etwas anders zu wählen[2]), dahin, der Zahl 10 den Logarithmus 1 zu geben, also Zahlen und Logarithmen gleichzeitig wachsen zu lassen. So muss man die im Anhange zur Constructio empfohlene Anordnung als gemeinsames Eigenthum von Neper und Briggs betrachten. Die Niederschriften müssen in der Reihenfolge stattgefunden haben, dass erst die Constructio, dann die Descriptio, zuletzt und nicht vor 1616 der Appendix entstand. Briggs rechnete allein weiter und gab 1617 seine *Logarithmorum Chilias prima* heraus[3]), in welcher die Logarithmen der Zahlen 1 bis 1000 für die Basis 10 auf 8 Decimalen gerechnet waren. Briggs begnügte sich nicht damit. Er liess 1624 eine *Arithmetica logarithmica* erscheinen, welche 14stellige Logarithmen

[1]) *Neper, lord of Markinston, hath set my head and hands at work with his new and admirable logarithms. I hope to see him this summer, if it please God; for I never saw a book which pleased me better, and made me more wonder.* [2]) Neper, *Descriptio* pag. 5 *Admonitio.* [3]) Wir folgen in der Angabe der Jahreszahlen Glaisher l. c. Andere setzen die Besuche Briggs' bei Neper in die Jahre 1615 und 1617, Neper's Tod 1618 und in eben dieses Jahr den Druck der *Chilias prima*.

der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 (in einzelnen Abzügen bis 101000) enthielten.

Die Neper'schen Logarithmen fanden ihren ersten Neubearbeiter in Deutschland in der Person von Benjamin Ursinus[1]), ursprünglich Behr (1587—1633 oder 1634). Er ist in Schlesien geboren, in Frankfurt a. d. O. als Professor an der dortigen Universität gestorben. Bevor er nach Frankfurt berufen wurde, war er seit 1615 am Joachimsthal'schen Gymnasium in Berlin thätig, und dort erschienen seine logarithmischen Schriften; der Druckort Köln ist demnach als Köln an der Spree, nicht als Köln am Rhein zu verstehen. Die Descriptio war noch nicht lange erschienen, so gab Ursinus 1618 mit einer sogar schon vom 17. Mai 1617 datirten Vorrede eine *Trigonometria logarithmica Iohannis Neperi* heraus. Es ist die Tafel der Descriptio, nur überall, in Zahlen wie Logarithmen, um die zwei letzten Stellen gekürzt. Dazu gehörte allerdings keine eigene Arbeit. Ursinus liess aber 1624 seinen *Magnus Canon Triangulorum Logarithmicus* folgen, welcher um eine Stelle über Neper hinausging. Die Winkel, deren Sinus nebst deren Logarithmen angegeben sind, wachsen in Zwischenräumen von je 10″. Einzelne Sinusse sind zur schärferen Prüfung anderer aus ihnen abgeleiteter besonders genau berechnet, nämlich für einen Halbmesser 10^{16}. Ihn wandte Ursinus beispielsweise bei den Winkeln von 30, 45, 18, 72, 36, 54, 9 Graden an. Sei es beim Druck, sei es wahrscheinlicher bei der Rechnung, schlichen in der letzten gegen Neper's Tafel neu hinzugetretenen Stelle sich manche von Ursinus nachträglich erkannte Fehler ein. Die Berliner Bibliothek besitzt ein Exemplar, in welchem die nöthigen Verbesserungen dieser letzten Ziffer von Ursinus' Hand vielfach vorkommen. Ein Jahr früher als der grosse Canon erschien, veranstaltete Ursinus auch eine deutsche Ausgabe der Neper'schen Rabdologie[2]).

Nächst Ursinus war Kepler um die Verbreitung der Neper'schen Logarithmen in Deutschland bemüht, eine Thatsache, welche um so auffallender erscheinen könnte, als diese Bemühungen 1620 beginnen, genau in dem Jahre des Druckes von Bürgi's Progresstafeln, und dass von diesen gar nicht die Rede ist. Bei den freundschaftlichen Beziehungen Kepler's zu deren Erfinder können wir uns die Sache kaum anders vorstellen, als dass Kepler über die Saumseligkeit Bürgi's, der selbst den gedruckten Tafeln den versprochenen gründ-

[1]) Neper, *Constructio* pag. 157—160. — Kästner III, 87—91. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 541—542. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 120—122. [2]) Neper, *Constructio*, pag. 152—153.

lichen Unterricht beizugeben noch zögerte, erzürnt war, dass er desshalb damals sich nicht bemüssigt fühlte, für einen wenn auch befreundeten Mann einzutreten, der mit den gedruckten Belegen seiner Leistungen zurückhaltend Kepler's etwaiger Absicht, ihm zu nützen, jeden festen Boden entzog, dass Kepler dagegen die schon veröffentlichten Neper'schen Tafeln für so unendlich wichtig hielt, dass er ihre Benutzung zu empfehlen als wissenschaftliche Pflicht erachtete. Mit blossen Empfehlungen begnügte ein Kepler sich nicht[1]). Er hatte gleich nach Erscheinen der Descriptio von ihr gehört, wenn auch in etwas anzweifelndem Tone. Er hatte dann durch des Ursinus Trigonometria logarithmica einen etwas genaueren Einblick gewinnen können. Er gelangte endlich im Juli 1619 in Linz in den Besitz der Descriptio selbst. Die geometrisch-mechanische Einkleidung, welche in der Descriptio, wenn auch nicht so ausgeführt wie in der Constructio, hervortrat, behagte den deutschen Gelehrten im Allgemeinen nicht, und Kepler machte darin keine Ausnahme. Auch die Anordnung der Neper'schen Tafel nach gleichmässig wachsenden Winkelgraden, deren trigonometrische Functionen eine nicht gleichmässig sich ändernde Zahlenreihe bildeten, sagte ihm nicht zu und in beiden Beziehungen wollte er bessernde Hand anlegen. Zu Maasszahlen von Verhältnissen, *ἀριθμοὶ τοῦ λόγου*, werden ihm die Logarithmen, und er berechnet sie nicht in der verhältnissmässig bequemen Weise Neper's mittels fortgesetzter Subtractionen gleicher und zwar einfacher Bruchtheile, sondern durch fortgesetzte Berechnung mittlerer geometrischer Proportionalzahlen, also ähnlich wie es im Anhange zur Constructio vorgeschlagen ist, wobei allerdings nicht zu vergessen ist, dass Kepler in dem, was er unterliess, wie in dem, was er that, ganz unabhängig dasteht, indem die Descriptio die Tafeln zwar enthielt, aber ihre Herstellung nicht lehrte. Die Veränderung der Anordnung, welche Kepler vornahm, bestand darin, dass er die Zahlen in arithmetischer Progression zunehmen liess. Freilich setzte er die Winkelgrössen, als deren Sinusse die Zahlen zu betrachten seien, wie es bei Neper der Fall war, in einer ersten Kolumne nebenan, aber während, wie wir erst gesagt haben, bei Neper Regelmässigkeit der Zunahme in der ersten, Unregelmässigkeit derselben in der zweiten Kolumne stattfand, war es bei Kepler umgekehrt. Die Zahlen der zweiten Kolumne zeigen gleichbleibende, die der ersten veränderliche Zunahme. Im Uebrigen herrscht selbstverständlich

[1]) Kästner, Geometrische Abhandlungen, I. Sammlung (Göttingen 1790), S. 495—508. — Gerhardt, Math. Deutschl., S. 124—129. — Glaisher l. c. pag. 73—74.

zwischen den Tafeln Kepler's und Neper's Uebereinstimmung des Planes. Auch bei Kepler gehörte zur grösseren Zahl der kleinere Logarithmus, und wo in den Tafeln Neper's und Kepler's gleiche Zahlen irgend einmal vorkommen, weichen deren Logarithmen höchstens in den allerletzten Stellen von einander ab, eine Folge der verschiedenartigen Berechnung bei gleichartigem Grundgedanken. Kepler's Tafel, die Zahlen 1 bis 1000 enthaltend, wurde im Winter 1621 auf 1622 vollendet. Er fügte ihr eine *Demonstratio structurae logarithmorum* in 30 Lehrsätzen bei und schickte das druckfertige Werk seinem alten Lehrer Mästlin, dem Tübinger Astronomen, zu, welchem er fortgesetzt die Zuneigung eines dankerfüllten Schülers bewahrte. Mästlin, der früher, wie oben angedeutet wurde, Neper's Tafeln grosses Misstrauen entgegenbrachte, sollte die Kepler'sche Arbeit prüfen, sollte sie einem der Tübinger Drucker zur Herausgabe empfehlen; aber sei es, dass jenes frühere Misstrauen ihn nicht verlassen wollte, sei es, dass er etwa früher allzu wegwerfend von der neuen Erfindung gesprochen hatte, als dass es ihm möglich gewesen wäre, nunmehr selbst einer Logarithmentafel zum Drucke zu verhelfen, er erfüllte Kepler's Wunsch nicht. Das Manuscript lag nutzlos in Tübingen. Erst ein Jahr später wandte sich Kepler an einen hochgestellten Gönner, den Landgrafen Philipp von Hessen-Butzbach, welcher einen gelehrten Briefwechsel mit ihm eröffnet hatte, mit der Bitte, ob dieser nicht für den Druck der Tafeln etwas thun wolle. Die Bitte fiel auf den denkbar günstigsten Boden. Der fürstliche Freund der Sternkunde liess die Handschrift sofort nach Marburg kommen und dort drucken, ohne dass Kepler davon erfuhr, bis 1624 die *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos* erschien. Eine Anweisung zum Gebrauche der Logarithmen hatte Kepler zuerst nicht niedergeschrieben. Auf den Wunsch des Landgrafen verfasste er sie nachträglich, und im folgenden Jahre 1625 erschien in acht Kapiteln Kepler's *Supplementum Chiliadis Logarithmorum continens praecepta de eorum usu*. Kepler benützte diese Logarithmen in seinen 1627 herausgegebenen Rudolphinischen Tafeln. Er beabsichtigte auch eine Veröffentlichung in erweitertem Umfange, aber sein 1630 erfolgender Tod unterbrach das begonnene Unternehmen.

Jacob Bartsch[1]), Kepler's Schwiegersohn, führte es zu Ende. Er war 1600 in Lauban in der Lausitz geboren und starb ebenda 1633, als er im Begriffe war, eine Stellung als Professor der Astronomie in Strassburg anzutreten. Die *Tabulae novae logarithmico-*

[1]) Kästner III, 92. — Poggendorff I, 111. — R. Wolf, Geschichte der Astronomie, S. 304.

logisticae sind 1630 in Sagan gedruckt, an demselben Orte 1631 die *Tabulae manuales logarithmicae I. Kepleri et I. Bartschii.*

Die ausführlichste Tafel Neper'scher Logarithmen ist die von Peter Crüger[1]) (1580—1639) aus Königsberg, Lehrer der Mathematik und Poesie am Gymnasium zu Danzig seit 1607. Seine *Praxis trigonometriae logarithmicae cum Logarithmorum tabulis ad triangula tam plana quam sphaerica sufficientibus* trägt die Jahreszahl 1634. Das Bemerkenswerthe an seinen Tafeln ist die Trennung der Zahlenlogarithmen von denen der trigonometrischen Functionen. Wenn bei Neper die Aufsuchung der Logarithmen einer Bruchtheile nicht mit sich führenden Zahl meistens eine Interpolationsrechnung nöthig machte, wenn bei Kepler das Gleiche der Fall war, so oft der Logarithme einer trigonometrischen Function eines in Graden und Minuten ohne sonstige Bruchtheile gegebenen Winkels verlangt wurde, so wollte Crüger beide Unannehmlichkeiten vermeiden. In einer ersten Tafel stellte er desshalb die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10000 zusammen. In einer zweiten Tafel folgten die Logarithmen der Sinusse und Tangenten aller Winkel von Minute zu Minute unter Angabe der Proportionaltheile für je 10″. Die Sinusse selbst sind nicht mit abgedruckt, und darin liegt eine Schmälerung des Tafelinhaltes gegen die ursprüngliche Neper'sche Anordnung. Bei Neper hatten die Logarithmen der trigonometrischen Tangenten, wie wir uns erinnern (S. 732), die mittelste Stelle inne. Crüger nannte sie, offenbar aus diesem Grunde, *Mesologarithmi*. Eine dritte Tafel enthält die Logarithmen der Sinusse der von Secunde zu Secunde wachsenden Winkel des ersten Winkelgrades. Endlich ist eine vierte Tafel beigefügt, als deren Berechner Bartsch genannt wird. Sie liefert die Logarithmen der Cosinusse der Winkel bis zu 1°41′ in Zwischenräumen von je 2″ unter dem Namen der *Antilogarithmi*, den man sich daher wohl hüten muss in dem Sinne zu verstehen, welchen das Wort nachmals erhalten hat. Es kann auffallend erscheinen, dass Crüger noch 1634, nachdem, wie wir bald sehen werden, die Briggischen Logarithmen auch in Deutschland schon Eingang gefunden hatten, dennoch das Neper'sche System seiner Bearbeitung zu Grunde legte. Er fühlte selbst, dass sein Verfahren einer Rechtfertigung bedurfte und sprach sie aus. Für ihn gab der Umstand den Ausschlag, dass alle Rechnungen der Rudolphinischen Tafeln mit Hilfe von Neper'schen Logarithmen ausgeführt, beziehungsweise gelehrt waren, und so lange die Hauptbenutzer der Logarithmen Astronomen waren,

[1]) Kästner, Geometrische Abhandlungen, I. Sammlung, S. 508—511. — Poggendorff I, 501. — Gerhardt, Math. Deutschl., S. 122—124.

so lange diese wesentlich des in den Rudolphinischen Tafeln aufgezeichneten Materials sich bedienten, war es wohl gerechtfertigt, besondere Rücksicht auf eben jene Tafeln zu nehmen.

Wir kehren zu Briggs und dessen 1617 und 1624 gedruckten Logarithmentafeln zurück. Er beabsichtigte eine Ergänzung derselben durch logarithmisch-trigonometrische Tafeln und hinterliess 1631 bei seinem Tode eine auf 10 Decimalen berechnete nahezu vollendete Tafel, welche die Eigenthümlichkeit besass[1]), den Winkelgraden decimale Unterabtheilungen beizulegen, also mit deren sexagesimaler Theilung in Minuten und Secunden, der mehrtausendjährigen Gewohnheit, zu brechen. Wohl wurde diese Tafel, wie wir noch sehen werden, 1633 gedruckt, aber die wichtige Neuerung, welche sich, wenn Briggs' Tafel die erste für die Basis 10 veröffentlichte gewesen wäre, vermuthlich eingebürgert hätte, ging nun verloren, denn es waren bereits Tafeln vorhanden, welche die Basis 10 bei sexagesimaler Winkeltheilung benutzten, ihren Besitzern also nicht das Aufgeben des zur zweiten Natur Gewordenen auferlegte.

Der Verfasser dieser schon 1620 gedruckten auf 7 Decimalen sich erstreckenden logarithmisch-trigonometrischen Tafel war Edmund Gunter[2]), und sein Vorgang beherrschte die künftige Zeit. Wir haben (S. 691) Gunter als Erfinder einer Art von Proportionalzirkel kennen gelernt. Im Jahre 1624 fertigte er Rechenstäbe an, welche beim logarithmischen Rechnen in Gebrauch genommen werden sollten, ähnlich wie die Neper'schen beim gewöhnlichen Rechnen. Sie erhielten den Namen Gunter's Scale[3]).

Die Tafeln von Briggs von 1624 gaben, sagten wir (S. 738), 14stellige Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000, beziehungsweise 101000. Eine grosse Lücke von 20000 bis 90000 war noch auszufüllen, und Briggs war emsig mit dieser Arbeit beschäftigt, aber ohne sein Wissen und Zuthun hatte ein Anderer, der die *Arithmetica logarithmica* von 1624 kennen gelernt hatte, an die gleiche Arbeit sich gemacht: Adriaen Vlack[4]). Ueber Vlack's Geburtsjahr sind wir nicht unterrichtet. Wir wissen nur, dass er in der holländischen Stadt Gouda geboren ist, einer angesehenen Familie angehörte, dass er wissenschaftliche Bildung besass, insbesondere der lateinischen Sprache mächtig war, dass es ihm auch an mathematischen reicheren Kenntnissen nicht fehlte, dass er in-

[1]) Glaisher l. c. pag. 63—64. [2]) Ebenda pag. 65. [3]) Poggendorff I, 980. Eine Beschreibung von Gunter's Scale gab John Robertson in den *Philosophical Transactions*, Vol. 48, Part. I, pag. 96 sqq. [4]) Kästner III, 97—98. — Glaisher l. c. pag. 51—53. — Bierens de Haan, *Bouwstoffen* etc. pag. 1—25 und 1*—37.

dessen nie dem Lehrberufe oblag. Im Jahre 1626 war er in seiner Vaterstadt bei der buchhändlerischen Firma Pieter Rammaseyn beschäftigt, der er vielleicht als Theilhaber angehörte. Von 1633—1642 lebte Vlack in London als Buchhändler, wesentlich dem Vertriebe von in Holland bei dem eben genannten Geschäfte erschienenen Werken sich widmend. Da vollzog sich in England die grosse staatliche Umwälzung, welche nach 16jährigen Kämpfen 1649 zur Hinrichtung Karl I., nach weiteren elf Jahren 1660 zur Wiedereinsetzung des Königthums führte. Es scheint gewiss, dass persönliche Gefahren, welche Vlack bei Beginn jener bürgerlichen Entzweiungen lief, seine vielleicht etwas beschleunigte Abreise aus dem ihm ungastlich gewordenen Lande veranlassten. Er siedelte 1642 nach Paris über, wo er bis 1648 verweilte, um sich dann im Jahre des westfälischen Friedens als Buchhändler im Haag niederzulassen. Dort lebte er noch 1655, und einer Vorrede eines damals bei ihm gedruckten Buches entstammen die angegebenen Einzelheiten. Während der Gouda'schen Zeit stand Vlack einem dortigen Feldmesser und Lehrer der Mathematik Ezechiel de Decker nahe, und beide zusammen studirten die auf Logarithmen bezüglichen Schriften, welche in England gedruckt worden waren, wobei De Decker, als des Lateinischen unkundig, mindestens ebensosehr der Beihilfe Vlack's bedurfte, als diesem De Decker's mathematische Unterstützung erwünscht sein mochte. Neper's Descriptio von 1614, dessen Rabdologia von 1617, dessen Constructio von 1619, Gunter's Canon triangulorum von 1620 und von 1623, endlich die Arithmetica logarithmica von Briggs von 1624 wurden gemeinschaftlich durchgearbeitet. Bei diesen Studien kam der Plan zur Reife, in holländischer Sprache und unter dem Titel *Nieuwe Telkonst*, neue Zahlenkunde, den Inhalt jener Werke neuerdings zu veröffentlichen; und in der That erschien 1626 bei Pieter Rammaseyn in Gouda, d. h. also unter Vlack's buchhändlerischer Beihilfe, ein erster Band der Nieuwe Telkonst. Den Inhalt bildet Neper's Rabdologie durch Adriaen Vlack aus dem Lateinischen übersetzt, kaufmännische Rechnungsvortheile, Zinstafeln u. s. w. von De Decker, endlich Stevin's Rechnung mit Decimalbrüchen. Das Format war Quart. Im gleichen Jahre 1626 erschien aus der gleichen Druckerei ein Octavband, welcher ebenfalls Nieuwe Telkonst überschrieben ist, aber nur De Decker als Herausgeber nennt und Vlack's Namen ganz verschweigt, auch die Bezeichnung als zweiter Band vollständig vermissen lässt; dagegen sind auf dem Titelblatte neben Neper auch Briggs und Gunter als Quellenschriftsteller erwähnt. Ein zweiter Band der Nieuwe Telkonst, der in dem ersten Bande von Vlack und De Decker in Aussicht gestellt worden war, ist niemals

erschienen, und doch war er als der umfangreichere angekündigt. Man nimmt an, als Ersatz für ihn habe die *Arithmetica logarithmica* dienen sollen, welche als stattlicher Foliant 1628 von Rammaseyn's Druckerwerkstätte ausging. Bei ihr ist jetzt De Decker's Name weggeblieben, während Neper und Briggs auf dem Titelblatte weiter erscheinen. Vlack von Gouda nennt sich bescheiden der Vermehrer der zweiten Ausgabe[1]). Die Vermehrung besteht in der Ausfüllung der bei den Briggischen Tafeln von 1624 noch vorhandenen Lücke, so dass, indem auch die von Briggs berechneten Logarithmen nur um 4 Decimalen gekürzt wieder abgedruckt waren, jetzt die zehnstelligen Logarithmen sämmtlicher Zahlen von 1 bis 100000 vereinigt im Drucke vorlagen. Irgend eine Vereinfachung des Druckes war nicht vorhanden, vielmehr war zu jeder Zahl der Logarithme vollziffrig mit Einschluss der Charakteristik abgedruckt. Am 25. October 1628 richtete Briggs einen Brief an John Pell[2]), in welchem die Ausgabe besprochen wird. Vlack habe davon 1000 Exemplare in lateinischer, holländischer und französischer Sprache gedruckt, und die meisten seien bereits verkauft. Dieser fast unglaublich rasche Verkauf erklärt sich dadurch, dass eine Anzahl von Exemplaren in den Besitz eines Londoner Buchhändlers Miller übergegangen sein wird. Wenigstens gab dieser 1631 Logarithmentafeln heraus, welche, abgesehen von einer Vorrede in englischer Sprache, so vollständig mit der Arithmetica logarithmica übereinstimmen, dass man schon daraufhin den Verdacht hegen konnte, es handle sich nur um eine neue Titelausgabe, ein Verdacht, der sich zur Gewissheit erhob, als man in einzelnen englischen Exemplaren noch an dem unteren Rande der Blätter holländische Druckvermerke wahrnahm, welche man bei ihm zu entfernen vergessen hatte. Was die Zuverlässigkeit der Vlack-schen Berechnung betrifft, so sind in seinen Tafeln im Ganzen etwa 300 Fehler nachgewiesen worden, welche nicht auf die letzte Decimale der Logarithmen sich beziehen[3]).

Man kann die Vermuthung kaum zurückweisen, dass der starke Absatz, welchen Vlack's Arithmetica logarithmica in England fand, mit zu den Beweggründen gehörte, die den Herausgeber 1633 zur Uebersiedelung veranlassten, in demselben Jahre, in welchem wieder ein neues Logarithmenwerk bei Rammaseyn herauskam, welches nicht zum mindesten auf den englischen Vertrieb angewiesen war, die *Trigonometria Britannica* von Henry Gellibrand[4]) (1597—1637),

[1]) *Editio secunda aucta per Adrianum Vlack Goudanum.* [2]) *Philosophical Magazine* vom Mai 1873. [3]) Glaisher l. c. pag. 53. [4]) Kästner III, 98—99. — Glaisher l. c. pag. 64. — Poggendorff I, 870—871.

der als Theologe begann, dann im Mannesalter der Mathematik sich zuwandte, seit 1627 der Nachfolger Gunter's in der astronomischen Professur am Gresham-College war. Gellibrand's Mitwirkung an der Trigonometria Britannica war keine sehr bedeutende. Wenig mehr als die Einleitung rührt von ihm her. Die Tafeln sind solche, die er bereits fertig berechnet vorfand, z. B. die früher erwähnte logarithmisch-trigonometrische Tafel von Briggs, welche auf der Eintheilung eines Winkelgrades in Centesimaltheile sich aufbaut.

Und wieder in demselben Jahre 1633 brachte die gleiche Druckerei ein Tabellenwerk unter Vlack's eigenem Namen, die *Trigonometria artificialis sive magnus Canon triangulorum logarithmicus*. Die Logarithmen sind zehnstellig, die Winkel, für deren trigonometrische Functionen man dort die Logarithmen findet, wachsen in Zwischenräumen von je 10″. Vlack hat durch seine rechnerischen Bemühungen, durch seine buchhändlerische Thätigkeit entschieden am meisten zur Verallgemeinerung des Gebrauches Briggischer Logarithmen beigetragen, und dieses Verdienst wird ihm nicht geschmälert, wenn auch einige andere Mathematiker gleichzeitig, aber mit geringerem Eifer, jedenfalls mit geringerem buchhändlerischem Erfolge, das gleiche Bestreben an den Tag legten.

Hier wäre etwa zunächst Edmund Wingate[1] (1593—1656) zu erwähnen, ein Londoner Advocat, der aus Liebhaberei auch mathematische Studien betrieb. Er ging 1624 auf einige Jahre nach Paris und veröffentlichte dort erst eine Nachahmung der Gunter'schen Rechenstäbe: *Construction, description et usage de la règle de proportion*, dann 1626 eine *Arithmétique logarithmique*, von welcher eine englische Uebersetzung 1635 in London erschien.

Denis Henrion[2], Professor der Mathematik in Paris, gab dort 1626 einen *Traicté des logarithmes* heraus, die erste in Frankreich gedruckte eigentliche Logarithmentafel.

In Deutschland folgte Johann Faulhaber[3], welcher in seiner Ingenieurs-Schul von 1630 lehrte, wie man trigonometrische Rechnungen logarithmisch zu vollziehen habe. Die Berufung auf Vlack und Briggs, welche neben Neper, Pitiscus, Bernegger auf dem Titelblatte erscheinen, lässt erkennen, dass hier vermuthlich zuerst in Deutschland die Neper'schen Logarithmen verlassen sind.

Kehren wir zu dem Jahre 1633 zurück, aus welchem wir schon zwei Tafelwerke zu erwähnen hatten, so lernen wir es als das Ver-

[1]) Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* III, 225—226. [2]) Ebenda III, 226. — Glaisher l. c. pag. 106 und 151. [3]) Ebenda pag. 99 und 148.

öffentlichungsjahr noch eines dritten bedeutsamen Bandes kennen. Nathaniel Roe's[1]) Tafeln der Briggischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000 zeichnen sich nämlich in doppelter Weise aus. Erstens ist es eine durchweg siebenstellige Logarithmentafel und aus der zehnstelligen Vlack'schen Tafel durch Weglassen von drei Endziffern gebildet. Von der etwaigen Erhöhung der letztbleibenden Ziffer um eine Einheit, wenn die gestrichenen Stellen den Werth 500 erreichen oder übertreffen, ist dabei nicht die Rede. Zweitens ist ein Schritt zur übersichtlichen und raumsparenden Anordnung der Tafel vollzogen. Die Zahlen stehen, soweit sie von den Hundertern aufwärts reichen, an der Spitze der Logarithmencolumnen, die beiden Randziffern von 00 bis 99 sind daneben gedruckt. Bei den Logarithmen sind die vier Anfangsstellen links, also die einziffrige Charakteristik und die drei ersten Decimalen, gleichfalls abgesondert gedruckt, während die vier letzten Stellen dann bei jeder Zahl voll gedruckt sich finden.

Die Vollendung der Raumersparniss durch Umwandlung der Logarithmentafel in eine Tafel doppelten Einganges, als welche sie gegenwärtig allzubekannt ist, als dass sie einer besonderen Beschreibung bedürfte, vollzog John Newton[2]) in seiner *Trigonometria Britannica* von 1658, welche nicht mit der früher erwähnten 1633 in Gouda gedruckten Trigonometria Britannica verwechselt werden darf, so wenig wie der Herausgeber mit dem berühmten Verfasser der Philosophiae naturalis principia mathematica. Die Newton'schen Logarithmen sind die ersten achtstelligen gewesen.

Eine eigenthümliche Methode zur Berechnung Briggischer Logarithmen hat Huygens 1666 der Pariser Academie in einer ihrer ersten Sitzungen vorgelegt[3]). Man solle $\sqrt[32]{10}$ und $\sqrt[64]{10}$ durch wiederholte Quadratwurzelausziehung berechnen. Nach Multiplication mit $d = 10^{13}$ zur Entfernung der Decimalbrüche wird der erstere Werth $a = 10746078283213$, der zweite $b = 10366329284377$. Alsdann wird $\frac{200da}{3d + 3a + 4b} + 40b - 3a - 3d = 559661035184532$ gebildet und diese Zahl mit $a - b$ vervielfacht. Wieder ganzzahlig geschrieben erscheint das Product $p = 4175509443116778$. Soll dann etwa $\log 2$ gesucht werden, so berechnet man wieder unter Weglassung der Decimalkomma

$$f = \sqrt[32]{2} = 10218917148654 1 \text{ und } g = \sqrt[64]{2} = 10108892860517.$$

[1]) Glaisher l. c. pag. 124 und 159. [2]) Ebenda pag. 118 und 156. [3]) Durch J. Bertrand aus den bisher ungedruckten Protokollen veröffentlicht in den *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* LXVI, 565—567 (1868).

Mittels d, f, g bildet man eine Hilfsgrösse ganz ähnlicher Art wie vorher mittels d, a, b, nämlich

$$\frac{200df}{3d+3f+4g} + 40g - 3f - 3d = 545869542830178$$

und multiplicirt sie mit $a - \frac{ad}{f}$. Man erhält das Product

$$q = 1256953589206.$$

Dann ist endlich $p:q = d:\log 2$ und $\log 2 = 30102999567$ natürlich immer ohne Decimalkomma. Die zehn ersten Stellen von links sind richtig, die elfte ist um eine Einheit zu hoch. Einen Beweis dieses Verfahrens scheint Huygens nicht vorgelegt zu haben, wenigstens hat ein solcher nicht unter den Protokollen der Akademie aufgefunden werden können.

75. Kapitel.

Erfindung von Methoden. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kettenbrüche. Aufgabensammlungen.

Nach der Entwickelungsgeschichte der Lehre von den Logarithmen kündigten wir (S. 719) ein Eingehen auf Untersuchungen an, welche die Vorläufer der späteren algebraischen Analysis genannt zu werden verdienen.

Insofern die sogenannten Wortrechnungen, denen Michael Stifel, wie wir uns erinnern, nur zuviel Zeit und Mühe widmete, statt der Buchstaben ihnen entsprechende Zahlen aus der Reihe der natürlichen Zahlenfolge oder aus der der Dreieckszahlen einsetzten, gaben sie Veranlassung, mit diesen Dreieckszahlen sich näher zu beschäftigen, aber auch sonstige Zahlenreihen zu untersuchen. Die Wortrechner erwarben sich dadurch wenigstens mittelbar einige Verdienste.

Unter ihnen ragt nächst Stifel Johann Faulhaber[1]) von Ulm weit hervor und nach ihm sein Freund und Mitarbeiter Johann Remmelin. Von 1612 bis 1619 gaben diese Beiden Schriften heraus, in welchen die Lehre von den arithmetischen Reihen wesentliche Förderung fand. Faulhaber gab Summenformeln für die Potenzen der aufeinanderfolgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bis zur Summe der elften Potenzen einschliesslich. Er sagt zwar nirgend, wie er zu diesen Formeln gelangte, es kann aber kaum ein Zweifel sein, dass er sich fortgesetzte Differenzenreihen bildete, dass er so den Begriff der arithmetischen Reihe höherer Ordnung gewann, dass er von ihm aus empirisch die Summenformel sich verschaffte und mit dem Zutreffen in einigen wenigen Fällen statt jeden Beweises sich begnügte. Es war also eine ungenügende Induction, auf welche Faulhaber sich verliess, und nur die Geduld und der rechnerische Scharfsinn sind zu rühmen, welche auf so wenig gesichertem Boden sich mit Glück zu bewegen vermochten.

[1]) Kästner III, 29—33 und 114—124.

Die Zeit war gekommen, in welcher die ungenügende Induction der sogenannten vollständigen Induction den Platz räumen musste, oder anders ausgesprochen: die Erfindung des Beweises von n auf $n+1$ stand bevor, und der ihn lieferte, war Blaise Pascal. Die Zeit der Erfindung genau anzugeben ist nicht möglich, jedenfalls fiel sie vor 1654. In dem *Traité du triangle arithmétique*, welcher 1662 bei Pascal's Tode in gedrucktem Zustande sich vorfand und dann 1665 in den Buchhandel kam, auf welchen aber in Briefen zwischen Pascal und Fermat aus dem Sommer 1654 deutlich angespielt ist, findet sich eine 12. Folgerung, *Conséquence XII*[1]), zu deren Beweis Pascal sich zweier Hilfssätze bedient. Erstlich sei die von ihm ausgesprochene Wahrheit in der zweiten Reihe von Zahlen augenscheinlich erfüllt, und dann behauptet der zweite Hilfssatz *que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.* Die Vereinigung der beiden Wahrheiten, dass was in einem Falle als richtig sich erweist, im nächsten Falle auch richtig sein muss mit der durch Augenschein erwiesenen Richtigkeit in einem bestimmten Falle, bildet aber die Methode der vollständigen Induction, eine der fruchtbarsten der gesammten Mathematik.

Noch 28 Jahre früher als die Methode der vollständigen Induction war 1637 eine andere Methode von grösster Fruchtbarkeit bekannt gemacht worden: die Methode der unbestimmten Coefficienten. Ihr Erfinder war Descartes. In dessen *Geometrie* von 1637 findet sich die Beschreibung der Methode, welche in der mehr verbreiteten lateinischen Ausgabe[2]) folgenden Wortlaut besitzt: *Attamen vos monere volo, quod inventio haec supponendi duas eiusdem formae aequationes ad comparandum separatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, ut inde ex una sola nascantur plures aliae, infinitis aliis Problematis inservire possit, neque una ex minimis methodis, qua utor existat*, d. h.: Im Vorbeigehen will ich einschärfen,

[1]) Pascal III, 248. [2]) *Geometria a Renato Descartes anno 1637 gallice edita* (ed. Franciscus van Schooten. Amsterdam 1659) I, 49.

dass die Erfindung der Annahme zweier Ausdrücke gleicher Gestalt, deren Glieder einzeln verglichen werden und so eine Gleichung mehrere andere erzeugen lassen, bei unendlich vielen anderen Aufgaben dienen kann, ja dass sie keineswegs die geringste unter den von mir benutzten Methoden ist. Wenn irgendwo, so war hier Descartes' selbstbewusster Stolz vollkommen an seinem Platze, und man kann fast so weit gehen, eben dieses volle Bewusstsein von der Wichtigkeit der neuen Methode ihrer Erfindung an die Seite zu stellen.

Die Dinge, bei welchen Descartes seine Methode in Anwendung brachte, gehören erst einem etwas später von uns zu erörternden Kapitel der mathematischen Wissenschaften an. Hier musste es genügen, ihren ganz abgesehen von etwaigen Ergebnissen vorhandenen analytischen Charakter hervortreten zu lassen. Anders verhält es sich mit Pascal's vollständiger Induction. Die ganze Abhandlung vom arithmetischen Dreiecke gehört nebst anderen sich ihr unmittelbar anschliessenden Untersuchungen [1]) ihrem Inhalte nach hierher und muss besprochen werden.

Das arithmetische Dreieck erinnert durch äussere Gestalt wie durch die zu erreichenden Zwecke an die Art, wie Stifel seine Binomialcoefficienten ordnet, ohne jedoch irgend damit verwechselt werden zu können. Schon darin, dass die Zeilenlänge von oben nach unten gerechnet bei Stifel zunimmt, bei Pascal abnimmt, ist ein wesentlicher Unterschied zu erkennen, und ebenso darin, dass bei Pascal eine erste Horizontalzeile sowie eine erste Kolumne aus lauter Einsern gebildet vorhanden ist, welche bei Stifel fehlen. Es wäre also im höchsten Grade ungerecht, eine Abhängigkeit Pascal's von Stifel zu vermuthen. Selbst wenn Pascal die Arithmetica integra gekannt hat, was wir noch sehr bezweifeln, war das arithmetische Dreieck durchaus sein geistiges Eigenthum. Die Entstehung ist folgende: Eine Anzahl von Einsern, etwa 10 an der Zahl, füllen ebensoviele in einer ersten Horizontalzeile neben einander befindliche Zellen. Eine zweite Horizontalzeile enthält eine Zelle weniger, also deren 9, und das geht so weiter bis zur zehnten einzelligen Horizontalzeile. Jede untere Horizontalzeile füllt ihre Zellen mit Zahlen, die mit 1 beginnen und nach dem Gesetze fortschreiten, dass jede Zelle die Summe der ihr links stehenden und der genau senkrecht über ihr stehenden Zahl enthält.

[1]) Pascal III, 243—322.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Die k^{te} Zelle der r^{ten} Zeile mag durch $(r)_k$, die darüber befindliche also durch $(r-1)_k$, die links stehende durch $(r)_{k-1}$ bezeichnet werden, so ist immer $(r)_k = (r-1)_k + (r)_{k-1}$. Das entstandene Zahlendreieck besitzt ebensoviele Verticalkolumnen als Horizontalzeilen, und die r^{te} Kolumne stimmt genau mit der r^{ten} Zeile überein. Ihr k^{tes} Feld ist aber die r^{te} Zelle der k^{ten} Zeile, also das weitere Gesetz vorhanden $(r)_k = (k)_r$. Ausser den Zeilen und Kolumnen, welchen Pascal die Namen beilegt *cellules d'un même rang parallèle* und *cellules d'un même rang perpendiculaire*, unterscheidet er noch als *cellules d'une même base* diejenigen, welche von einer gemeinsamen Geraden als Diagonale durchschnitten werden. Sie nehmen von links oben nach rechts unten je um eine Zelle zu, und jede enthält, wie der Augenschein lehrt, die Combinationszahlen von Elementen in einer um die Einheit anwachsenden Anzahl zu allen bei dieser Seitenzahl möglichen Classen. Eine Bezeichnung ähnlich der von uns zum Ausspruch einiger Gesetze in Anwendung genommenen kennt Pascal nicht, erst Leibniz hat Buchstaben mit Stellenzeigern in die Mathematik einzuführen gewusst. Die ausgesprochenen Sätze dagegen kennt er. Die Bildungsregel heisst: *Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle*[1]). Dass $(r)_k = (k)_r$ lautet: *En tout triangle arithmétique chaque cellule est égale à sa réci-*

[1]) Pascal III, 245.

proque[1]). Die Uebereinstimmung der ganzen Zeilen und Kolumnen spricht Pascal mit den Worten aus: *En tout triangle arithmétique un rang parallèle et un perpendiculaire qui ont un même exposant sont composés de cellules toutes pareilles les unes aux autres*[2]). Jede Basis besitzt ferner nach Pascal die doppelte Summe der ihr vorhergehenden[3]). In der fünften Basis z. B. ist in Folge des Bildungsgesetzes des Dreiecks $1 = 1$, $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$, $1 = 1$, also $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2(1 + 3 + 3 + 1)$. Da nun die Summe der ersten Basis 1 ist, so wird die der zweiten 2, die der dritten 4, und jede weitere Summe einer Basis ein weiteres Glied der mit 1 beginnenden geometrischen Reihe $1, 2, 4, \ldots$ sein, nämlich das sovielte, als die Reihennummer der Basis ist[4]). Die Bestimmung einer einzelnen Zellenzahl $(r)_k$ wird nach folgender Vorschrift vorgenommen[5]). Man bildet das Product der Zahlen $1 \cdot 2 \cdots (k - 1)$, ferner das der Zahlen $r \cdot (r + 1) \cdots (r + k - 2)$, so ist $(r)_k$ der Quotient der Division des zweiten Productes durch das erste, z. B.

$$(3)_5 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15.$$

Die in der Eckzelle links oben befindliche Zahl, gewöhnlich eine 1, heisst die Erzeugungszahl, *générateur*, des Dreiecks[6]). Ihr gleich müssen alle Zahlen der ersten Zeile und der ersten Kolumne gewählt werden, damit auch bei diesen $(r)_k = (r - 1)_k + (r)_{k-1}$ sei, und nach demselben Gesetze füllen alsdann die übrigen Zellen sich an. Die Sätze, welche wir ausgesprochen haben, ändern sich naturgemäss in einigen Beziehungen, wenn eine andere Zahl als 1 zur Erzeugungszahl genommen wird. Das Einheitsdreieck, wie wir jenes kurz nennen wollen, dessen Erzeugungszahl 1 heisst, hat vielfache Anwendung. Erstlich sind seine Zeilen und ebenso die denselben gleichen Kolumnen mit lauter arithmetischen Reihen steigender Ordnung besetzt, welche also einfach daraus abgeschrieben werden können. Die zweite Anwendung bildet die Auffindung der Combinationszahlen[7]), d. h. der Zahlen, welche angeben, auf wie viele verschiedene Arten man eine gegebene Anzahl von Elementen aus einer ebenfalls gegebenen nicht kleineren Anzahl von Elementen auswählen kann. Der moderne Sprachgebrauch sagt: n Elemente sollen zur Klasse k combinirt werden; bei Pascal heisst es, man suche *la multitude des combinaisons des k dans n*. Eines Zeichens bedient sich Pascal nicht für die Combinationszahlen, dagegen kannte er deren meiste Eigenschaften.

[1]) Pascal III, 246 Conséquence V. [2]) Ebenda III, 247 Conséquence VI. [3]) Ebenda III, 247 Conséquence VII. [4]) *dont l'exposant est le même que celui de la base.* [5]) Pascal III, 251 Problème. [6]) Ebenda III, 245. [7]) Ebenda III, 253—257: *Usage du triangle arithmétique pour les combinaisons.*

Schreiben wir $\binom{n}{k}$ für die Combinationszahl von n Elementen zur Klasse k, so weiss Pascal, dass $\binom{n}{n} = 1$, dass $\binom{n}{1} = n$, dass

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Pascal unterscheidet ferner ein 1., 2., .. n^{tes} Dreieck, je nachdem die erste Zeile und die erste Kolumne aus $1, 2, .. n$ Zellen bestehen. Er zeigt alsdann, dass $\binom{n}{k}$ die Summe sämmtlicher Zahlen der k^{ten} Zeile, oder, was auf das Gleiche herauskommt, die $(k + 1)^{\text{te}}$ Zelle der $(n + 1)^{\text{ten}}$ Basis, wenn dieselbe von links unten nach rechts oben in jener Basis abgezählt ist.

Pascal schickte seine Abhandlung über das arithmetische Dreieck im August 1654 nach Toulouse an Fermat, und mit dieser Sendung kreuzte sich[1]) eine solche von Fermat an Pascal fast gleichen Inhaltes, nämlich über figurirte Zahlen. Fermat befasste sich aber mit diesem Gegenstande sicherlich schon 1636, wo er in einem Briefe an Roberval vom 16. December von einer Methode der Summirung beliebiger Potenzen der ganzen Zahlen spricht[2]), mithin von der wissenschaftlichen Vollendung dessen, was Faulhaber wieder etwa 20 Jahre früher angebahnt hatte (S. 748). Von dessen Arbeiten hatte allerdings Fermat ganz gewiss keine Kenntniss. Fermat sagte in jenem Briefe an Roberval, er werde ihm die aufgeschriebene Erfindung sammt Beweis vorlegen, sobald er es wünsche[3]); erfüllt hat er die Zusage nie.

Mit dem *Traité du triangle arithmétique* vereinigt kam auch der *Traité des ordres numériques*[4]) heraus, welcher gewissermassen als Ergänzung des ersteren angesehen werden kann. Manche von den Sätzen jener Abhandlung kehren hier in veränderter Form wieder. Der XI. Satz[5]), von welchem Pascal ausdrücklich berichtet, Fermat habe ihn gleichzeitig und ganz unabhängig von seinem Gedankengange erkannt, ist folgender: Eine Zahl beliebiger Ordnung mit der vorausgehenden Wurzel vervielfacht und getheilt durch den Exponenten ihrer Ordnung giebt zum Quotienten die aus dieser Wurzel hervorgehende Zahl der folgenden Ordnung. In Zeichen geschrieben heisst der Satz: $\binom{n}{k+1} = (n - k)\binom{n}{k} : (k + 1)$. Unzweifelhaft haben Pascal und Fermat die grosse Bedeutung dieses Satzes für die Lehre von den figurirten Zahlen eingesehen. Ob sie sich ebenso klar seiner

[1]) Pascal III, 231. [2]) *Varia Opera Petri de Fermat* pag. 148. [3]) *J'en écriray cependant l'invention et démonstration que vous verres lorsqu'il vous plairra.* [4]) Pascal III, 268—271. [5]) Ebenda III, 271.

Wichtigkeit für die Binomialentwicklung bewusst waren, lässt sich aus dem Wortlaute nicht entnehmen, auch nicht ob sie die independente Formel $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$ jemals kannten oder zu kennen suchten.

Eine besonders bedeutsame Anwendung des arithmetischen Dreiecks ist die auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir haben (S. 678) als wir Pascal zum ersten Male nannten, nur in nothdürftigster Weise seine Lebensgeschichte berührt. Im Jahre 1649 kehrte Pascal aus Rouen, wo er eine Zeit lang Beamtendienste leistete, nach Paris zurück. Neben dem Verkehre mit den hervorragendsten Mathematikern, denen er seit seiner Kindheit nahe stand, fesselte ihn auch das wilde und nicht selten wüste Leben der Hauptstadt, und er stürzte sich in dasselbe mit der jugendlichen Gier seiner 26 Jahre, gehörte auch bis etwa zum September 1654 den lockeren Kreisen an, in denen er sich wohler fühlte, als es seiner Gesundheit und seiner Börse zuträglich war. Zu seinen damaligen nahen Bekannten gehörte ein Spieler De Méré, von dessen Verkehr mit Pascal einige Briefe erhalten sind. In einem Briefe meint er, Pascal habe ihm zwar gesagt, er halte nicht mehr viel von der Mathematik, aber, so sehr er sich dieser Sinnesänderung freue, glaube er nicht vollständig daran, weil in mancherlei Trugschlüssen, die Jener sich zu Schulden kommen lasse, noch immer der schädliche Einfluss mathematischen Denkens zu Tage trete[1]). Eben dieser De Méré stellte Pascal gegen Ende jenes lockeren Lebens zwei Aufgaben der Wahrscheinlichkeitslehre: Die eine fragte, ob es von Vortheil sei zu wetten, dass man in einer gewissen Anzahl von Würfen mit zwei Würfeln den Sechserpasch, *sonnez*, werfen werde; die zweite verlangte zu wissen, wie man theilen solle, *les partis*[2]), wenn man ein auf eine gewisse Anzahl gewonnener Einzelspiele gerichtetes Spiel zu unterbrechen gezwungen sei, bevor es zur Entscheidung kam. Die zweite Aufgabe fesselte Pascal ganz besonders, und er erfand eine Methode, *méthode des partis*, zu ihrer Lösung. Man kann ihren Kern darin finden, dass immer die Frage nach dem Betrage aufgeworfen wird, über welchen eigentlich ein bestimmtes Einzelspiel die Entscheidung

[1]) Der Brief ist zum grossen Theile abgedruckt in Bayle, *Dictionnaire historique et critique.* 3. Ausgabe. Rotterdam 1715, Bd. III, S. 917 in den Anmerkungen zum Artikel *Zenon.* Für die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt benutzten wir häufig das sehr umfangreiche und zuverlässige Werk von J. Todhunter, *A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace.* Cambridge and London 1865.
[2]) *Le parti* = die Theilung ist nicht zu verwechseln mit *la partie* = das Einzelspiel, die Partie.

giebt[1]). Gesetzt, das Spiel werde durch dreimaligen Gewinn entschieden und die Theilung solle vollzogen werden, wenn ein Spieler schon einmal, der andere noch gar nicht gewonnen hat. Pascal sagt dann so: Hätte der erste Spieler A 2 Gewinne, der zweite B 1 Gewinn, und sie spielen weiter, so kann zweierlei sich ereignen: A gewinnt und erhält den ganzen Einsatz, oder B gewinnt und steht dann mit A gleichauf, so dass jedem die Hälfte des Einsatzes zukommt. A erhält also unter allen Umständen die eine Hälfte des Einsatzes, spielt daher nur um die andere Hälfte. Diese letztere Hälfte ist, wenn das Spiel unterbleibt, zwischen A und B hälftig zu theilen, d. h. wenn der Gesammteinsatz 1 beträgt, hat A $\frac{3}{4}$ zu erhalten und B nur $\frac{1}{4}$. Nun stehe zweitens A mit 2 Gewinnen gegen B ohne Gewinn oder mit 0 Gewinnen. Fällt ein neu zu spielendes Spiel zu Gunsten von A aus, so hat er gewonnen und zieht den ganzen Einsatz; fällt es zu Gunsten von B aus, so ist der vorige Fall hergestellt, und A hat $\frac{3}{4}$ zu fordern. So viel bekommt er also mindestens und spielt nur um $\frac{1}{4}$. Dieses letzte Viertel ist, wenn das Spiel unterbleibt, zwischen A und B hälftig zu theilen, d. h. A hat $\frac{7}{8}$ und B $\frac{1}{8}$ zu erhalten. Endlich stehe das Spiel auf 1 gegen 0, wonach eigentlich gefragt wurde. Gewinnt A in einem weiter angenommenen Spiele, so ist der zuletzt erörterte Zustand geschaffen, und A bekommt $\frac{7}{8}$. Gewinnt dagegen B, so stehen die beiden Spieler gleichauf, und jeder erhält die Hälfte. A hat also diese Hälfte unter allen Umständen zu fordern und würde ein etwaiges Spiel nur um $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ spielen, wovon ihm bei Unterbleiben des Spieles die Hälfte mit $\frac{3}{16}$ zukommt. Die Theilung muss desshalb dem A $\frac{11}{16}$, dem B $\frac{5}{16}$ zusprechen.

Schon vor der Erfindung dieser sinnreichen Methode hatte Pascal, einer Aeusserung in einem Briefe an Fermat vom 29. Juli 1654 zufolge[2]), daran gedacht, durch Bildung von Combinationsformen die Aufgabe zu erledigen, wobei ihm aber die Umständlichkeit dieser Arbeit abschreckend erschien. Fermat fiel auf den gleichen Gedanken und muss ihn in einem verloren gegangenen Schreiben an Pascal auseinandergesetzt haben, wie aus der Antwort Pascal's vom 24. August zu ersehen ist[3]). Aus einem anderen Briefe Pascal's an Fermat vom

[1]) Pascal III, 221—225. [2]) Ebenda III, 221: *Votre méthode est très sûre, et c'est la première qui m'est venue à la pensée dans cette recherche. Mais parceque la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé.* [3]) Ebenda III, 226—231.

27. October 1654 erfahren wir aber auch, dass, was Pascal als combinatorische Methode sich dachte, von der Fermat's durchaus verschieden war[1]). Die Fermat'sche Methode ist für die oben auseinandergesetzte Aufgabe folgende: Wird auf 3 Gewinnspiele gespielt, und A steht auf 1, B auf 0, so ist in spätestens 4 Einzelspielen das Spiel zu Ende. Bezeichnet man nun jedes durch einen der Spieler gewonnene Einzelspiel durch den seinem Namen entsprechenden kleinen Buchstaben, so giebt es 16 Möglichkeiten: *aaaa*, *aaab*, *aaba*, *aabb*, *abaa*, *abab*, *abba*, *abbb*, *baaa*, *baab*, *baba*, *babb*, *bbaa*, *bbab*, *bbba*, *bbbb*. Davon sind die 8., 12., 14., 15., 16., also insgesammt deren 5 dem B günstig und die übrigen 11 dem A. Fermat dehnte diese seine Methode auch auf mehr als nur zwei Spieler aus, blieb aber damit Pascal unverständlich, bis er ihm am 25. September die Sache klarer auseinanderlegte[2]), worauf Pascal's erwähnte volle Zustimmung vom 27. October erfolgte.

Pascal hörte aber desshalb keineswegs auf, die ihm eigenthümliche Methode zu vervollkommnen, und bei ihrer Anwendung sich des arithmetischen Dreiecks bedienen zu können, erschien ihm mit Recht bemerkenswerth[3]). Man müsse, sagt Pascal, beachten, wie viele Gewinnspiele jedem der beiden Spieler, zwischen denen die Theilung erfolgen soll, noch fehlen, um überhaupt gewonnen zu haben. Die beiden Zahlen addirt man zusammen und sucht die sovielte Basis im arithmetischen Dreiecke, als jene Summe als Ordnungszahl betrachtet angiebt. Addirt man die Zellenzahlen von sovielen von unten, beziehungsweise von oben an gezählten Zellen dieser Basis, als durch die jedem Spieler fehlende Anzahl von Gewinnspielen vorgeschrieben wird, so liefern die beiden Summen die Verhältnisszahlen, nach welchen die Theilung in umgekehrter Reihenfolge der Spieler vor sich zu gehen hat. Fehlen beispielsweise dem ersten Spieler 2, dem zweiten 4 Gewinnspiele, so muss man zur $2+4=6$. Basis übergehen, und die Summe von 4 Zellen $1+5+10+10=26$ nebst der von 2 Zellen $1+5=6$ geben das Verhältniss an, in welchem der erste, beziehungsweise der zweite Spieler am Gesammteinsatze betheiligt ist. Der Beweis wird nach der Methode der vollständigen Induction geliefert[4]). Fehlten dem einen Spieler 2, dem anderen 3 Gewinnspiele und man müsste zur 5. Basis übergehen, so solle man

[1]) Pascal III, 235: *J'admire votre méthode pour les partis, d'autant mieux que je l'entends fort bien; elle est entierèment vôtre, et n'a rien de commun avec la mienne.* [2]) Ebenda III, 232—234. [3]) Ebenda III, 257—266: *Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties.* Vergl. besonders pag. 261 Problème I. [4]) Ebenda III, 263.

die Voraussetzung machen, es werde ein weiteres Spiel gespielt, welches entweder A oder B gewinnt. Dann fehlen entweder dem A 1, dem B 3 oder dem A 2, dem B 2 Gewinnspiele. Da

$$1+3=2+2=4$$

ist, so hat man es jetzt mit einer um 1 niedrigeren Anzahl von beiden Spielern zusammen fehlenden Gewinnspielen zu thun, für welche die Methode schon als bewiesen gilt. In den beiden angeführten Fällen haben also die beiden Spieler folgende Ansprüche:

$$A \text{ fordert } 1+3+3 \text{ und } B \text{ fordert } 1,$$
$$A \text{ fordert } 1+3 \quad \text{ und } B \text{ fordert } 1+3.$$

Die beiden Möglichkeiten vereinigen sich so, dass

$$A \text{ fordert } 1+(1+3)+(3+3) \text{ und } B \text{ fordert } 1+(1+3).$$

Das sind aber gerade die dem A, beziehungsweise dem B durch die Regel zugewiesenen Zellenzahlen der 5. Basis, d. h. die Regel gilt für $n+1$, wenn sie für n gilt. Ihre Geltung bei $n=2$ ist aber augenscheinlich, da alsdann nur zwei Fälle denkbar sind: entweder einem Spieler fehlen 2, dem anderen 0 Gewinnspiele, dann theilen sie nach den Brüchen $\frac{1+1}{2}$ und $\frac{0}{2}$; oder jedem Spieler fehlt 1 Gewinnspiel, dann theilen sie nach den Brüchen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Beides ist aber in Uebereinstimmung mit der Regel, die dadurch allgemein bewiesen erscheint. Die grosse Eleganz dieser Untersuchung ist bestrickend, und nur der Vorzug erhebt Fermat's combinatorische Methode über die Pascal's, dass sie noch anwendbar bleibt, wo jene versagt, nämlich wenn es um mehr als zwei Spieler sich handelt.

Pascal hielt mit diesen Untersuchungen nicht zurück. Wie er gegen Fermat rückhaltslos sich äusserte, theilte er auch den Pariser Freunden, besonders Roberval, die beiderseitigen Ergebnisse mit[1]), ohne aber Verständniss oder gar Anerkennung zu finden. Einige Einwürfe mehr philosophischer als mathematischer Natur waren die ganze Frucht der Besprechung. Gleichwohl muss die Kunde von den eigenartigen, ganz neue Ergebnisse zu Tage fördernden Untersuchungen sich ziemlich herumgesprochen haben, wenn auch der Traité du Triangle erst 1665 in den Buchhandel kam (S. 749), der Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat noch viel später in die Oeffentlichkeit gelangte.

Von einer Abhängigkeit der 1657 gedruckten Exercitationes mathe-

[1]) Pascal III, 227: *Je communiquai votre méthode à nos messieurs; sur quoi M. de Roberval me fit cette objection* (Brief Pascal's an Fermat vom 24. August 1654).

maticae des jüngeren Franciscus van Schooten von Pascal wird man nicht reden können, wenn auch dort[1]) mancherlei combinatorische Untersuchungen sich finden, von welchen namentlich eine in Dreiecksgestalt geordnete Vereinigung sämmtlicher aus gegebenen Buchstaben zu bildenden Combinationen Erwähnung verdient. Jeder neue Buchstabe beginnt eine neue Zeile und tritt in derselben hinter alle bereits gebildeten Formen, beiläufig bemerkt genau das gleiche Verfahren, welches Buckley (S. 480) einhielt. Das Dreieck sieht so aus:

$$\begin{array}{c} a\,. \\ b\,.\,ab\,. \\ c\,.\,ac\,.\,bc\,.\,abc\,. \\ d\,.\,ad\,.\,bd\,.\,abd\,.\,cd\,.\,acd\,.\,bcd\,.\,abcd. \end{array}$$

Dagegen behaupten wir eine gewisse Abhängigkeit von Pascal für einen Anhang zu den Exercitationes mathematicae, eine 14 Druckseiten starke Abhandlung *De ratiociniis in ludo aleae* von Christian Huygens. Seine geometrischen Erstlingswerke aus den Jahren 1651, 1654, 1656 haben uns (S. 715) beschäftigt. Sie führten dazu, den Namen des noch jugendlichen Verfassers rasch bekannt zu machen, und als Huygens im Sommer 1655 nach Paris kam, trat er schon in fast gleichberechtigten Verkehr mit Roberval und anderen Mathematikern. Dort erfuhr Huygens jedenfalls von dem zwischen Pascal und Fermat brieflich Verhandelten. Als er nach Holland zurückkehrte, blieb er in Briefwechsel mit französischen Gelehrten, so auch mit Pierre de Carcavy[2]). Dieser war der Sohn eines reichen Bankiers. Am Anfange des XVII. Jahrhunderts geboren, nahm er 1622—1636, also gleichzeitig mit Fermat, die Stellung eines Parlamentsrathes in Toulouse ein. Im Jahre 1636 siedelte er als Rath nach Paris über. Vermögensverlust nöthigte ihn 1647 seine dortige Stelle zu verkaufen, und nun trat er 1648 in den Dienst des Herzogs von Liancourt. Seit 1663 war er dann an der königlichen Bibliothek in Paris angestellt, welcher bei seinem Tode 1684 die werthvollen Sammlungen zufielen, die er angelegt hatte. Carcavy also schrieb unter dem 22. Juni 1656 an Huygens und legte einen vor wenigen Tagen von ihm erhaltenen Brief Fermat's bei, in welchem Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nicht aber das Verfahren zu denselben zu gelangen mitgetheilt waren[3]). Huygens wies desshalb mit Recht in der am 27. April 1657 niedergeschriebenen Vorrede zur Abhand-

[1]) Van Schooten, *Exercitationes mathematicae*, pag. 373—387. [2]) Vergl. eine ausführliche Abhandlung von Ch. Henry im *Bulletino Boncompagni* T. XVII (1884). Ergänzungen und Berichtigungen dazu von P. Tannery im *Bulletin Darboux* XXVIII, 61 (1893). [3]) *Oeuvres de Huygens* I, 431—434.

lung über das Würfelspiel die Ehre erster Erfindung zu Gunsten seiner französischen Vorgänger zurück, fügte aber mit gleichem Rechte hinzu, jene hätten ihre Methoden so geheim gehalten, dass er gezwungen gewesen sei, den ganzen Gegenstand von den ersten Anfängen an zu entwickeln[1]). Schon am 10. März 1656 waren Huygens Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Gange, am 20. April war Einiges druckfertig, am 6. Mai hatte Franciscus van Schooten schon zugesagt, vielleicht schon begonnen, die holländisch geschriebene Abhandlung ins Lateinische zu übersetzen[2]), um sie dann 1657 unter dem oben angegebenen Titel seinen eigenen vermischten Untersuchungen als Anhang anzuschliessen, und alle diese Daten liegen vor dem des Briefes, in welchem Carcavy die Fermat'sche Einlage übersandte, eine Bestätigung unserer Behauptung, dass der Keim zu Huygens' Untersuchungen in Gesprächen gelegt wurde, welche bereits in Paris stattfanden.

Die Grundlage, auf welche Huygens seine Betrachtungen stützt, ist die des arithmetischen Mittels. Wenn, sagt er unter Anwendung allgemeiner Buchstaben, in p Fällen jeweil eine Summe a, in q Fällen jeweil eine Summe b mir zufällt, so ist in jedem einzelnen Falle meine Erwartung $\frac{ap+bq}{p+q}$. Daran knüpft er dann Theilungsaufgaben, welche er vollständig in Pascal's Sinne, bevor dieser das arithmetische Dreieck anwandte, behandelt, so dass es wahrscheinlich wird, er habe durch Roberval mehr Andeutungen über das Verfahren Pascal's als über dasjenige Fermat's erhalten. An die Theilung zwischen zwei Spielern knüpfen sich ähnliche Aufgaben unter Annahme von drei oder noch mehr Spielern und wir erinnern uns, dass hier Pascal rathlos geblieben war, wenigstens seines Dreiecks Bequemlichkeit einbüsste. Huygens wendet auch hier ein recurrirendes Verfahren an. Es wird berechnet, wieviel jedem einzelnen Spieler unter der Voraussetzung zukomme, es sei ein weiteres Spiel gemacht worden und der Reihe nach zu Gunsten jedes der betheiligten Spieler ausgefallen.

Ausser den Theilungsaufgaben waren von De Méré seiner Zeit auch Würfelaufgaben gestellt worden. Pascal und Fermat liessen sich diese, als leichter, wenig angelegen sein. Huygens dagegen setzt sie von Propositio X seiner Abhandlung an auseinander, und wieder auf

[1]) *Sciendum vero, quod jam pridem inter praestantissimos tota Gallia geometras calculus hic agitatus fuerit, nequis indebitam mihi primae inventionis gloriam hac in re tribuat. Caeterum illi, difficillimis quibusque quaestionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuere, adeo ut a primis elementis universam hanc materiam evoluere mihi necesse fuerit.* [2]) *Oeuvres de Huygens* I, 389, 405, 413.

der Grundlage des arithmetischen Mittels aus den unter den verschiedenen möglichen Voraussetzungen zu erwartenden Gewinnen, *sors* oder *aestimatio expectationis*. Will man mit einem Würfel auf einen Wurf 6 Augen werfen, so sind sechserlei Würfe möglich, von welchen einer den Gewinn a liefert und fünf den Gewinn 0, die Erwartung ist also $\frac{1 \cdot a + 5 \cdot 0}{1 + 5} = \frac{a}{6}$. Stehen zwei Würfe frei, so liefert von sechs Möglichkeiten des ersten Wurfes eine den Gewinn a, die fünf anderen liefern wenigstens die Möglichkeit im zweiten Wurfe zu gewinnen, welche als mit $\frac{a}{6}$ zu veranschlagende bekannt ist. Die Erwartung ist also jetzt:

$$\frac{1 \cdot a + 5 \cdot \frac{a}{6}}{1 + 5} = \frac{11}{36}a,$$

und dem Gegenspieler kommen folglich $\frac{25}{36}a$ zu, so dass die beiderseitigen Erwartungen sich wie 11 : 25 verhalten[1]). Dieses Wettverhältniss geht bei 3 Würfen in 91 : 125, bei 4 Würfen in 671 : 625, bei 5 Würfen in 4651 : 3125, bei 6 Würfen in 31031 : 15625 oder annähernd in 2 : 1 über. Huygens hebt weiter auch noch hervor, dass die Zahl der Würfe durch die Zahl der bei einmaligem Wurfe gebrauchten Würfel ersetzt werden können, ohne übrigens diese Behauptung zu begründen, und fügt die mathematische Betrachtung einiger zusammengesetzten Spielarten mit Würfeln hinzu.

Auch nach dem Erscheinen der Ratiocinia in ludo aleae dauerte es wieder 14 Jahre, bis abermals in Holland eine Schrift über Wahrscheinlichkeitsrechnung gedruckt wurde. Das Jahr 1671 liegt aber bereits jenseits der Zeitgrenze dieses Bandes, und wenn wir auch mit einzelnen Abschnitten es weniger genau nehmen, über den Band hinaus wollen wir nicht greifen und versagen es uns desshalb, auf Jan de Witt's *Waerdye von lyf-renten nar proportie van los-renten*[2]) irgend näher einzugehen.

Dagegen erwähnen wir, dass John Graunt[3]) (1620—1674) sich mit Statistik beschäftigte und 1662 ein Buch unter dem Titel: *Natural and political observations mentioned in a following index and made upon the bills of mortality* veröffentlichte. Darin soll zuerst das Uebergewicht der Knabengeburten gegen Mädchengeburten im Ver-

[1]) *unde contracertanti lusori cedit reliquum* $\frac{25}{36}a$, *adeo ut sors utriusque sive aestimatio expectationis eam servet rationem quam* 11 *ad* 25. [2]) Ein Abdruck der sehr selten gewordenen Schrift erschien 1879 als Festgabe zum 100jährigen Jubiläum der *Wiskunig Genootschap te Amsterdam*. [3]) *Dictionary of national biography* (London 1890) XXII, 427—428.

hältnisse von 1068 : 1000 aus über 32 Jahre sich erstreckenden Beobachtungen gefolgert worden sein[1]).

Die Besprechung solcher Untersuchungen, welche an das Gebiet der algebraischen Analysis anstreifen, führt uns weiter zur Erfindung der Kettenbrüche.

Wir haben Pietro Antonio Cataldi als einen der Schriftsteller genannt (S. 596), welche ihre Stimmen gegen Scaliger erhoben, als er behauptete, die Kreisquadratur gefunden zu haben. Wir hätten ihn noch bei verschiedenen anderen Gelegenheiten nennen können, denn er war ein fruchtbarer Schriftsteller, wie ein beliebter Lehrer[2]). Schon 1563 war Cataldi Professor in Florenz; 1572 lehrte er in Perugia; 1584 trat er in den Verband der Universität Bologna, welchem er bis zu seinem Tode 1626 angehörte. Ueber 30 Schriften werden von ihm genannt. Die letzte, eine Vertheidigung Euklid's aus seinem Todesjahre 1626, muss er, da er die Florenzer Professur nicht leicht früher als mit 20 Jahren inne gehabt haben kann, in einem Alter von mindestens 83 Jahren geschrieben haben. Die erste Veröffentlichung Cataldi's ist aus dem Jahre 1572. Eine *Pratica aritmetica* hat er zwar mit 17 Jahren verfasst, aber ihr erster Theil kam erst 1602 unter dem aus Pietro Antonio umgestellten Pseudonym Perito Annotio im Drucke heraus, während der zweite Theil unter Cataldi's vollem Namen 1606 folgte. Die erste Schrift, welche Cataldi in Bologna vollendete, war eine Abhandlung über vollkommene Zahlen vom Jahre 1588. Das Manuscript kam ihm aber abhanden, und er war genöthigt, die ganze Arbeit neu zu vollenden, so dass der Druck erst 1603 erfolgen konnte. Aus dem gleichen Jahre ist eine Schrift über das Parallelenaxiom, *Operetta delle linee rette equidistanti*, welches auf einem Trugschlusse beruhen soll. Die Parallellinien werden darin als Linien gleichbleibenden Abstandes erklärt, eine Erklärung, welche Petrus Ramus wieder in die Geometrie eingeführt zu haben scheint, nachdem Posidonius (von Rhodos?) sie im Wesentlichen schon ausgesprochen hatte[3]). Fernere geometrische Schriften sind eine angenäherte Kreisquadratur von 1612, eine gegen Scaliger gerichtete Vertheidigung der Kreismessung Archimed's von 1620, eine Abhandlung über Dürer's Construction des regelmässigen Fünfecks gleichfalls von 1620, eine dreibändige Euklidausgabe von 1620—1625. Von diesen Schriften hätten wir die über vollkommene Zahlen dem 76. Kapitel aufsparen, die übrigen, wie gesagt, schon früher erwähnen müssen, wenn nicht nach dem uns vorliegenden

[1]) Moser, Die Gesetze der Lebensdauer (Berlin 1839), S. 210. [2]) Libri IV, 87—97. [3]) Proclus (ed. Friedlein), pag. 176 lin. 6—10.

Berichte deren Menge über ihren inneren Gehalt das Uebergewicht besessen zu haben schiene. Wir beschäftigen uns genauer nur mit einer 1613 gedruckten Abhandlung Cataldi's: *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri*[1]) (S. 623), weil in ihr eine Quadratwurzelausziehung mittels eines unendlichen Kettenbruches gelehrt ist. Zunächst ist allerdings ein anderer Weg eingeschlagen. Ist eine Zahl $N = a^2 + b$, und soll $\sqrt{N}$ ermittelt werden, so ist in erster Annäherung $\sqrt{N} \sim a$ zu klein, in zweiter Annäherung $\sqrt{N} \sim a + \frac{b}{2a} = A$ zu gross. Wird $A^2 - N$ gebildet und durch $2A$ getheilt, etwa $\frac{A^2 - N}{2A} = B$ gesetzt, so ist eine neue Annäherung $\sqrt{N} \sim A - B$ wieder zu gross. Man kann sich unter Einsetzung der Werthe der einzelnen Buchstaben überzeugen, dass $(A - B)^2 = N + \frac{b^4}{16a^2(4a^2N + b^2)}$. Setzt man ferner $\frac{B^2 - N}{2B} = C$ und wählt $\sqrt{N} \sim B - C$ als weitere Annäherung, so wird auch diese zu gross, wenn auch wieder dem wahren Werthe $\sqrt{N}$ beträchtlich näher kommend, und in ähnlicher Weise kann man fortfahren, immer andere Wurzelwerthe sich zu verschaffen, welche zwei Eigenschaften mit einander gemein haben: immer über dem wahren Werthe zu liegen und demselben näher und näher zu kommen. Einen allgemeinen Beweis führt Cataldi nicht und kann er nicht führen, weil er keiner allgemeinen Buchstaben sich bedient, sondern nur mit bestimmten Zahlenwerthen rechnet. Bestimmte Zahlenwerthe sind es auch wieder, mit denen allein er sich befasst, wo er die Kettenbruchmethode lehrt. In allgemeiner Darstellung ist sein Verfahren folgendes. Ist $\sqrt{a^2 + b} = a + x$, so ist $b = (2a + x)x$, $x = \frac{b}{2a + x}$ und folglich

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}$$

also beispielsweise

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cdots}}.$$

Die Schreibweise Cataldi's sieht fast genau so aus[2]), Cataldi schreibt nämlich zuerst

[1]) Libri IV, 92 Note 1 und 93 Note 1. — Favaro, *Notizie storiche sulle frazioni continue* im *Bulletino Boncompagni* VII, 534—547. [2]) Favaro l. c. pag. 535 hat die Stelle aus pag. 70—71 von Cataldi, *Trattato del modo brevissimo etc.* zum Abdrucke gebracht.

$$4 \mathbin{\&} \cfrac{2}{8 \mathbin{\&} \cfrac{2}{8 \mathbin{\&} \cfrac{2}{8}}}$$

Er sagt aber dann, im Drucke sei ein so geformter Ausdruck schwer wiederzugeben, desshalb ziehe er vor, künftig $4 \mathbin{\&} \frac{2}{8.} \mathbin{\&} \frac{2}{8.} \mathbin{\&} \frac{2}{8}$ setzen zu lassen, wo das Pünktchen, welches hinter der als Nenner auftretenden 8 stehe, die Bedeutung habe, der nächstfolgende Bruch solle ein gebrochener Theil eben dieses Nenners sein[1]). Dass Cataldi in Bologna die Algebra Bombelli's kennen lernen konnte, wenn nicht kennen lernen musste, und dass er in ihr die Anregung zu seinem Verfahren finden konnte (S. 622), ist nicht zu bezweifeln. Nicht weniger unzweifelhaft ist aber der ungeheure formale Fortschritt von Bombelli zu Cataldi bei einem Gegenstande, dessen Hauptvorzug gerade in der Form liegt.

Der nächste Schriftsteller, bei welchem Kettenbrüche sich finden, war Daniel Schwenter. Seine *Geometria practica* von 1618 ist uns schon bekannt geworden und bekannt auch, dass er in derselben der Kettenbrüche sich bediente, um gewisse Verhältnisse in kleineren Zahlen auszudrücken. Darauf haben wir jetzt genauer zurückzukommen[2]). „Wie man aber zwo grosse Zahlen, sagt Schwenter[3]), so numeri primi und Arithmetice nicht können auffgehebt werden, dem Gebrauch nach, kleiner machen soll, seynd bei den Logisticis und Rechenmeistern viel feine Regeln zu finden. Die beste, geheimeste und künstlichste will ich hierher setzen. Ich soll die zwo Zahlen 233 und 177, als welche für sich numeri primi, oder aber die Proportion $\frac{177}{233}$ in kleineren Zahlen Mechanice aussprechen: So mache ich nun folgende Disposition oder Ordnung. Wann nun ordentlich hierinnen verfahren, finde ich, aus gemeldter Tafel, dass ich für $\frac{177}{233}$ nehmen kann $\frac{79}{104}$ oder $\frac{19}{25}$ oder endlich $\frac{3}{4}$, welches denn eine sehr nützliche Regel zu diesem unserm Messen.“ Schwenter fügt hinzu, er habe aus gewissen Gründen in der ersten Auflage (das war 1618) sich begnügt, das Ergebniss anzusetzen, ohne zu enthüllen, wie er dazu gelangt sei; jetzt wolle er Alles auseinandersetzen. Nun folgt eine Figur, deren Entstehung er beschreibt:

[1]) *faciendo un punto all' 8 denominatore di ciascun rotto, a significare, che il sequente rotto e rotto d'esso denominatore.* [2]) Günther, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche, S. 7—11 (Weissenburg 1872). [3]) Schwenter, *Geometria practica* (III. Auflage von 1641), S. 68 des zweiten Tractates.

			1
233		1	0
177	1	0	1
56	3	1	1
9	6	3	4
2	4	19	25
1	2	79	104
0	0	177	233

Zuerst werde in dem Felde links 233 und darunter, aber durch einen Strich getrennt, 177 angeschrieben. In dem mittleren Felde auf dessen rechter Seite wird „hinter die grösste Zahl, als hie 233, allzeit 1, hinter die kleiner, als hie 177, allzeit 0“ geschrieben. Nun dividire man: 177 in 233 gehe 1 mal, Rest 56, desshalb stehe 56 unter 177 und 1 dicht neben 177; 56 in 177 gehe 3 mal, Rest 9, von diesen Zahlen stehe 3 neben, 9 unter 56; 9 in 56 gehe 6 mal mit dem Reste 2; 2 in 9 gehe 4 mal mit dem Reste 1; 1 in 2 gehe 2 mal mit dem Reste 0. Alle diese Zahlen finden ihren gleichmässigen Platz, die Quotienten neben, die Reste unter den jedesmaligen Divisoren. Neben dem letzten Reste 0, der wieder durch einen Horizontalstrich von den über ihm befindlichen Zahlen getrennt ist, erscheint eine zweite 0. Nunmehr geht es an die Bildung der im mittleren Felde auf der rechten Seite befindlichen Zahlen, deren beide obersten 1 und 0 durch einen Horizontalstrich von einander getrennt schon vorhanden sind. Jede Zahl wird mit ihrer linken Nachbarzahl des gleichen Mittelfeldes vervielfacht, die über ihr stehende Zahl hinzuaddirt, die Summe darunter gesetzt; also

$$1 \cdot 0 + 1 = 1, \quad 3 \cdot 1 + 0 = 3, \quad 6 \cdot 3 + 1 = 19, \quad 4 \cdot 19 + 3 = 79,$$
$$2 \cdot 79 + 19 = 177.$$

Das letzte Feld rechter Hand, in dessen oberste Sonderabtheilung man 1, 0 unter einander schreibt, wird in ganz ähnlicher Weise gefüllt. Multiplicatoren sind wieder die linksstehenden Zahlen des Mittelfeldes, vor deren Benutzung aber die in der oberen Sonderabtheilung des Mittelfeldes allein stehende 1 in Anwendung tritt. Die Zahlenbidung ist mithin

$$1 \cdot 0 + 1 = 1, \quad 1 \cdot 1 + 0 = 1, \quad 3 \cdot 1 + 1 = 4, \quad 6 \cdot 4 + 1 = 25,$$
$$4 \cdot 25 + 4 = 104, \quad 2 \cdot 104 + 25 = 233,$$

und diese letzte Zahl ist abermals durch einen Horizontalstrich von der ihr vorhergehenden 104 getrennt. Die Zahlen rechts im Mittelfelde und die gleicher Zeile im letzten Felde rechts stehen in nahezu gleichem Verhältnisse und geben von unten nach oben die Brüche

$\frac{177}{233}, \frac{79}{104}, \frac{19}{25}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}$. Deutlich genug ist diese Beschreibung Schwenter's der Kettenbruchentwickelung

$$\frac{177}{233} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}},$$

und von besonderer Geschicklichkeit zeigt die Einführung des Näherungswerthes $\frac{0}{1}$ zur bequemeren Fortsetzung des einmal begonnenen Rechnungsverfahrens bei Bildung der Näherungswerthe. Dass ein eigentlicher Beweis fehlt, wird man Schwenter kaum verübeln.

Schwenter starb 1636, und noch in dem gleichen Jahre gaben seine „hinterlassenen Söhne und Töchter“, wie die Unterschrift eines an Herzog August zu Braunschweig und Lüneburg gerichteten Widmungsschreibens besagt, eine Sammlung unter dem Titel *Deliciae physico-mathematicae oder Mathematische und philosophische Erquickstunden* heraus, deren wir bald wiederholt gedenken müssen. Für den Augenblick haben wir es nur mit der 87. Aufgabe des I. Theils dieser Erquickstunden zu thun[1]), in welcher unter Berufung auf die Geometrica practica ebendieselbe Aufgabe wie dort behandelt ist, nämlich Näherungswerthe für den Bruch $\frac{177}{233}$ in kleineren Zahlen ausfindig zu machen. Die Methode ist die gleiche geblieben, ein Beweis findet sich auch hier nicht, aber eine wesentliche Zwischenbemerkung hat Schwenter über die Art der Annäherung eingeschaltet: „je weiter man von dem untersten hinaufsteiget, je mehr es fehlet. Zum Exempel $\frac{79}{104}$ seynd näher bei $\frac{177}{233}$ als $\frac{19}{25}$, und $\frac{19}{25}$ näher als $\frac{3}{4}$ und so fortan.“

Schwenter und Cataldi, das kann man wohl mit voller Sicherheit behaupten, waren unabhängig von einander zur Erfindung der Kettenbrüche gelangt, denn hätte Schwenter von Cataldi's Wurzelausziehungsmethode Kenntniss gehabt, so hätte er sie zweifellos mitgetheilt, und ohne diese Methode gab es für Cataldi keine Kettenbrüche. Noch ein dritter, jedenfalls nicht minder unabhängiger Erfinder der Kettenbrüche trat in England auf. Es war Lord Brouncker[2]) (etwa 1620—1684), ein eifriger Anhänger der Monarchie und nach deren Wiederherstellung Kanzler und Grosssiegelbewahrer Karl II., in wissenschaftlicher Beziehung hochverdient um die Begründung der Royal Society, deren erster Vorsitzender er war. Zu den Freunden Brouncker's gehörte John Wallis (1616—1703), gleichfalls in nahen Beziehungen zu König Karl II. als dessen Kaplan stehend, und eines

[1]) Erquickstunden, S. 111—113. [2]) Poggendorff I, 309.

der ersten Mitglieder der Royal Society. In dessen *Arithmetica infinitorum* von 1659 war nun eine später nach dem Erfinder benannte Darstellung von π als Product unendlich vieler Factoren veröffentlicht, auf welche wir in anderem Zusammenhange zurückkommen. Wallis selbst war bei der ganz ungewohnten Form des von ihm gegebenen Ausdruckes seiner Sache nicht ganz sicher. Er legte seine Entwickelung Lord Brouncker vor, und dieser brachte das Product $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots$ in die Form des Kettenbruches

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}$$

Wie Lord Brouncker diese Umwandlung vollzogen hat, ist nicht bekannt.

Ein von Wallis gegebener Beweis ist derart gekünstelt, dass man unmöglich annehmen kann, die Erfindung sei auf einem ihm entsprechenden Wege gemacht worden[1]). Dagegen ist aus dem von Wallis Entwickelten deutlich zu erkennen, dass ihm die Bildungsweise der aufeinander folgenden Näherungswerthe $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}$ des Kettenbruches

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\ddots+\cfrac{b_n}{a_n}}}$$

nicht minder gut bekannt war, als sie Schwenter in dem besonderen Falle $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$ zu Gebote stand. Mit anderen Worten, wir müssen für Wallis die Kenntniss der Formeln

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}, \qquad q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$$

beanspruchen.

Auch Christian Huygens nimmt in der Geschichte der Kettenbrüche einen ehrenvollen Platz ein; aber was er auf diesem Gebiete leistete, ist erst in seiner *Descriptio automati planetarii* 1703 veröffentlicht worden und entzieht sich dadurch unserer Besprechung.

Wir haben zugesagt, auf Schwenter's Mathematische Erquickstunden zurückzukommen; wir haben früher eine Besprechung gewisser Aufgabensammlungen in Aussicht gestellt. Beide Zusagen werden gemeinsam erfüllt.

Dass in allen Werken, welche der Arithmetik und der Algebra,

[1]) Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen (Tübingen 1889), S. 14.

so weit sie in den einzelnen Zeiträumen schon vorhanden gewesen ist, gewidmet waren, stets ein Hauptgewicht auf zahlreiche Beispiele gelegt wurde, zeigt ein Blick in die Geschichte fast jedes Jahrhunderts, von welchem in diesem Bande die Rede war, und um so deutlicher, je weiter man gegen rückwärts blättert. Im XV. Jahrhunderte wurden besondere Sammlungen von Aufgaben angelegt, wie die aus Pamiers und die, welche dem Triparty folgt (S. 359). Anderwärts fand dieses Beispiel noch keine Nachahmung, noch weniger aber begnügte man sich mit der alten Form der Lehrbücher, welche man fast beschreiben könnte als Aufgaben mit darangeknüpften Erörterungen. Je mehr die Theorie sich vordrängte, um so mehr wurden die Lehrbücher zu Erörterungen mit als Beispiele dienenden Aufgaben. Im XVII. Jahrhunderte spaltete sich vollends das bisher Verbundene. Das Lehrbuch warf die Menge der Aufgaben als einen nicht an und für sich, aber für das Lehrbuch unnützen Ballast bei Seite und dafür erschienen wieder eigene Sammlungen von Aufgaben, in denen die Theorie kaum vorgetragen war, und die ihr Bestreben darauf richteten, die Aufgaben recht anmuthig und ergötzlich zu gestalten, den Lesern diese Eigenschaft auch im Titel so verlockend als möglich anzupreisen.

Der erste Schriftsteller, welcher dieses bald von Anderen befolgte Beispiel gab, war ein Franzose Claude Gaspard Bachet de Méziriac, der Herausgeber des Diophant im griechischen Urtexte (S. 655), welcher 1612 seine *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* dem Drucke übergab. Diesen folgte erst der Diophant 1621 und eine zweite Ausgabe der Problèmes plaisants 1624. Von deren ersten Ausgabe scheint kein einziges Exemplar mehr nachweisbar zu sein. Auch Exemplare der zweiten Auflage gehören zu den grössten Seltenheiten französischer Büchersammlungen, und es war ein, wie der Erfolg gezeigt hat, glücklicher Gedanke, in neuester Zeit weitere Auflagen des alten Werkes zu veranstalten[1]). Die Vorrede zur zweiten Auflage beginnt mit einer Erklärung Bachet's, welcher wir entnahmen, was wir über den Zweck des Titels *Problèmes plaisants* gesagt haben. „Elf Jahre, heisst es in jener Vorrede weiter, sind seit der ersten Druckgebung dieses Buches verflossen. Ich wollte es ans Licht bringen, ebensowohl um meine Kräfte zu versuchen, als um zu sondiren, wie man meine Leistungen beurtheilen werde, und damit es als Vorläufer zu meinem Diophant diene. Das kleine Werk ist von den hervorragendsten Geistern Frankreichs günstig aufgenommen worden; mit des Himmels Hilfe ist Diophant im Erscheinen

[1]) Einer 3. Auflage folgten rasch eine 4. und 5. Letztere von 1884 ist bezeichnet als *Cinquième édition revue, simplifiée et augmentée par A. Labosne.*

begriffen; es will mir daher scheinen, als könnte ich mit grösserer Zuversicht das Buch neuerdings veröffentlichen und mir eine gute Aufnahme desselben versprechen, da es in vollkommnerem Zustande erscheint als vordem.“ Worin die Vervollkommnung bestehe, spricht Bachet immer in ebenderselben Vorrede an einer etwas späteren Stelle aus: Fehler seien in geringerer Anzahl vorhanden, mehrere neue Aufgaben seien hinzugefügt, der Beweis, der zu dem 6. (in der früheren Ausgabe 5.) Probleme gehöre, sei vervollständigt. Ueberdies, meint Bachet, seien Dinge, wie sie in seinem Buche vorkommen, keineswegs ohne Nutzen, und beispielsweise erzählt er nun die Geschichte von Josephus, der nach der Einnahme von Jerusalem sein Leben rettete, indem er von einer Anordnung der mit ihm in einer Höhle eingeschlossenen Gefährten Gebrauch machte, welche dem Gedanken nach mit der von uns schon früher (S. 326 und 501) angeführten Aufgabe von den 15 Türken, welche mit 15 Christen auf einem Schiffe befindlich sind, während die Hälfte der Bemannung über Bord muss, übereinstimmt. Unter den von Bachet behandelten Aufgaben ist die der Zauberquadrate hervorzuheben, welche er nach einer Methode bildet, der der Name der Terrassenmethode beigelegt worden ist[1]). Am wichtigsten ist aber unzweifelhaft, wie Bachet selbst erkannte, jene 6. Aufgabe der zweiten Auflage. Sie ist eine zahlentheoretische und wird uns am Anfange des nächsten Kapitels beschäftigen. Jetzt haben wir noch von einigen Sammlungen zu sprechen, die in Nachahmung der Bachet'schen entstanden.

In dem gleichen Jahre 1624, welches die zweite Auflage von Bachet's Problèmes plaisants erscheinen sah, kam in Pont-à-Mousson ein Buch unter dem Titel *Récréations mathématiques* heraus. Als Verfasser nannte sich ein Van Etten. Es blieb aber nicht unbekannt, dass dieses nur ein Borgname war, und dass der Verfasser Jean Leurechon[2]) (etwa 1591—1670) hiess, ein Jesuit, welcher im Kloster seines Ordens in Bar-le-Duc in Lothringen Theologie, Philosophie und Mathematik lehrte. Leurechon hat in seine Sammlung die leichteren Aufgaben Bachet's übernommen, daneben eine Menge anderer Dinge, welche zum Theil aus Cardano's Büchern *De subtilitate* stammen mochten; an Bachet's wirklich werthvollen Kapiteln ist er vorbeigegangen.

Claude Mydorge gab 1630 im Anschlusse an die rasch verbreiteten Récréations ein *Examen du livre des récréations mathématiques et de ses problèmes* heraus, vielleicht etwas höher zu schätzen als das

[1]) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. [2]) Poggendorff I, 1438.

Buch, dessen Prüfung ausgesprochene Aufgabe war, aber den geometrischen Leistungen Mydorge's (S. 673) nicht ebenbürtig.

Leurechon's Buch kam auch nach Deutschland. Ein Gönner Schwenter's, wer es war, wissen wir nicht, schickte es ihm von Paris aus zum Geschenk. Schwenter, welcher in der Vorrede zu seinen Erquickstunden dieses erzählt, fügt hinzu, er sei der französischen Sprache nicht so mächtig gewesen, dass er sofort Alles verstanden hätte, aber der Inhalt habe an und für sich zum Verständniss der Sprache mitgeholfen, und sodann habe er Mühe und Kosten nicht gescheut, eine Persönlichkeit aufzufinden, welche des Französischen vollkommen kundig gewesen sei und ihn gegen Bezahlung beim Uebersetzen unterstützte. Anderes habe er lange Zeit vorbereitet und gesammelt gehabt und so sei endlich dieser Band zusammengekommen, der an Fülle des Inhaltes mit jenem französischen Musterwerkchen gar nicht mehr verglichen werden könne. Dass diese Behauptung Schwenter's nicht auf Ruhmredigkeit sich zurückführt, beweisen die 574 Druckseiten der Mathematischen Erquickstunden, beweisen Berufungen auch auf solche Werke, welche in hebräischer Sprache verfasst nur einem so gewandten Orientalisten, wie Schwenter es war, sich erschlossen, beweisen ihm eigene Untersuchungen, von welchen wir die über Kettenbrüche oben erörtert haben. Auch von den aus hebräischen Vorlagen stammenden Dingen wollen wir wenigstens ein Beispiel geben. Die Aufgabe von den 30 Menschen, welche so geschickt geordnet werden müssen, dass ein gewisses Abzählen eine zum voraus bestimmte Hälfte derselben dem Tode weiht, während die Anderen gerettet sind, und der Beziehung dieser Aufgabe zu Josephus haben wir wiederholt gedacht. Bei Schwenter tritt sie gleichfalls auf[1]). Auch ihr Vorkommen bei Christoph Rudolff, bei Leurechon wird erwähnt, die Stelle des Josephus wieder angeführt. Ueberdies aber ist eine älteste Quelle der Aufgabe als solcher genannt, welche Schwenter aufgestöbert habe. Elias Levita der Deutsche[2]) (1472—1549) verfasste ein 1518 in Rom gedrucktes Buch *Haharkava*, Abhandlungen über gemischte unregelmässige Sprachformen. Dort sei Ibn Esra als Erfinder des Kunststückchens genannt, welches er im Buche der Thaten beschrieben habe[3]). Die 30 zu ordnenden Leute sind dort zur Hälfte Ibn Esra's Schüler, zur Hälfte leichtfertige Gesellen. Ob das angeführte Buch der Thaten wirklich von Ibn Esra herrührt, ist eine andere, hier und für uns ziemlich gleichgiltige Frage. Sicher ist, dass ein sogenanntes „Maser-

[1]) Mathematische Erquickstunden S. 79—82. [2]) Allgem. deutsche Biographie XVIII, 505—507, Artikel von Ludw. Geiger. [3]) Vergl. auch Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. XXV, Supplementheft S. 123—124.

Buch" mehrfach vorkommt und Erzählungen mannigfacher Art von und über jüdische Gelehrte enthält[1]). Sicher ist aber auch, dass Ibn Esra (1093—1168) nicht der Erfinder des Kunststückchens sein kann, da es mit der für dessen Ausführung zu benutzenden Regel schon in einer Handschrift des X. Jahrhunderts sich vorfindet[2]). Spätere Vorkommen gehören dem XI. Jahrhunderte u. s. w. an[3]).

Schwenter's Buch fand rasch Nachahmung und Erweiterung durch Georg Philipp Harsdörfer[4]) (1607—1658), einen Nürnberger Rathsherrn und vielseitigen, auch einflussreichen Schriftsteller, der sich besonders durch acht Bände Gesprächsspiele (1642—1649) und durch die Gründung des Blumenordens an der Pegnitz (1644) in weiten Kreisen bekannt gemacht hat. Er gab 1651 und 1653 zwei Bände Fortsetzungen zu den Erquickstunden heraus, aus welchen der Mathematiker allerdings Erquickliches kaum zu melden hat. Harsdörfer war offenbar bei riesiger allgemeiner Belesenheit in der Mathematik am wenigsten bewandert, und was geometrisch interessant bei ihm auftritt, dürfte sicherlich nicht sein Eigenthum sein, wenn wir auch nicht überall seine Quelle nachzuweisen vermögen.

Mit dieser Fortsetzung blieb Schwenter's Buch Jahre lang das vollständigste seiner Art, dann liefen ihm 1697, also wieder zu einer Zeit, welche uns näheres Eingehen verbietet, die *Récréations mathématiques* von Jaques Ozanam den Rang ab. Es bedürfte der Untersuchung, ob Ozanam mit Wahrscheinlichkeit die Erquickstunden kannte und benutzte, oder nicht. Genannt hat er sie jedenfalls nicht.

Ob und in wie weit die drei Bände Apiaria universae philosophiae mathematicae in quibus paradoxa et nova pleraque machinamenta exhibentur, welche der italienische Jesuit Mario Bettini[5]) (1582—1657) in den Jahren 1641—1642 herausgab, und deren dritter Band 1660 unter dem Namen Recreationum mathematicarum Apiaria XII novissima neu aufgelegt wurde, als ein durchaus selbständiges Werk betrachtet werden müssen, wissen wir nicht. Harsdörfer hat es jedenfalls ausgenutzt.

Der 1665 in Schleswig gedruckte Arithmetische Lustgarten von Johann Mohr[6]) dürfte dagegen sicherlich eine Nachahmung Schwenter's sein.

[1]) Private Mittheilung von Hrn. Herm. Schapira. [2]) Curtze in der *Biblioth. mathem.* 1895, S. 34—36. [3]) Curtze ebenda 1894, S. 116 und Zeitschr. Math. Phys. XL, Supplementheft S. 112 Note (1895). [4]) Allgem. deutsche Biographie X, 644—646. Artikel von W. Creizenach. Dann besonders K. Rudel in der Festschrift des Pegnesischen Blumenordens (Nürnberg 1894), S. 301—403 über Harsdörfer als Physiker, Mechaniker u. s. w. [5]) Kästner, Geometrische Abhandlungen, I. Sammlung, S. 25—27. — Poggendorff I, 179. [6]) Poggendorff II, 170.

76. Kapitel.

Zahlentheorie. Algebra.

Zahlentheoretische Untersuchungen mannigfacher Art waren niemals ganz ausser Uebung gekommen, aber wesentlich Neues hatten sie weder nach der Richtung gebracht, dass die seit altgriechischer Zeit vorhandenen Gattungen von Aufgaben vermehrt worden wären, noch nach der Richtung, dass neue Methoden Anwendung gefunden hätten. Wenn Cataldi 1603 über vollkommene Zahlen schrieb (S. 761) und eine Divisorentabelle der Zahlen bis 1000 beigab, so ist darin wieder nichts Neues zu finden. Die Schrift hätte mehrere Jahrhunderte früher genau ebenso verfasst werden können. Das Gleiche gilt von der Tabelle mit den Primzahlen unterhalb 10000, gilt beinahe auch von der Abhandlung über befreundete Zahlen, welche der jüngere Franciscus van Schooten 1657 in seinen Exercitationes mathematicae drucken liess.

Ausserhalb der längst und wiederholt betretenen Pfade liegt die *Mathesis biceps vetus et nova*, welche 1670 ein gelehrter Bischof Johann Caramuel y Lobkowitz[1]) (1606—1682) veröffentlichte, und die wir bei der geringfügigen Zeitüberschreitung von zwei Jahren, deren wir uns dabei schuldig machen, noch in diesem Bande erwähnen. Caramuel trennte den Gedanken eines Zahlensystems überhaupt von dem auf der Grundzahl 10 sich aufbauenden decadischen System; er beschrieb vielmehr solche Systeme, deren Grundzahlen sämmtliche Zahlen von 2 bis zur 10 einschliesslich und überdies 12 und 60 sind. Im 2. Bande des umfangreichen Werkes ist ein besonderer Abschnitt der Combinatorik gewidmet, und in diesem heisst ein Kapitel *Kybeia*. Es enthält ziemlich unbedeutende Untersuchungen über das Würfelspiel[2]).

Vollends neue Bahnen eröffnete der Mann, welcher 1621 erstmalig den griechischen Diophant im Drucke herausgab: Bachet de Méziriac. Unter dem vollen Eindrucke des gewaltigen Virtuosen in der Kunst der unbestimmten Analytik (Bd. I, S. 448) stehend hat Bachet häufig Erörterungen und Zusätze eingestreut, welche den Werth der Ausgabe um ein Beträchtliches erhöhten. Am wichtigsten ist der Zusatz[3]) zu der Aufgabe IV, 41 des Diophant. Sein Inhalt ist

[1]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch I, 943—944. — Quetelet pag. 225—226. — Allgem. deutsche Biographie III, 778—781. Artikel von Stieve. [2]) Briefliche Mittheilung von H. Ambr. Sturm. [3]) In der II. Ausgabe (Toulouse 1670) auf pag. 194—198 abgedruckt.

unter Anwendung von Bezeichnungen, deren Bachet sich freilich nicht bediente, die aber dem heutigen Leser am geläufigsten sind, folgender. Die beiden Gleichungen

$$x + y + z = 41 \quad \text{und} \quad 4x + 3y + \frac{1}{3}z = 40$$

sollen erfüllt werden. Wenn $3y + \frac{1}{3}z = 40 - 4x$, so ist

$$9y + z = 120 - 12x.$$

Daneben ist $y + z = 41 - x$, also mittels Subtraction

$$8y = 79 - 11x \quad \text{d. h.} \quad y = 9\frac{7}{8} - 1\frac{3}{8}x$$

und

$$z = 41 - x - y = 31\frac{1}{8} + \frac{3}{8}x.$$

Jede Wahl von x würde daher Werthe von y und z finden lassen, welche mit x zusammen die beiden Gleichungen erfüllen. Nun verlangt Bachet nicht bloss positive Werthe für x, y, z, sondern hierin über Diophant hinausgehend auch ganzzahlige Werthe. In erster Linie muss also $9\frac{7}{8} - 1\frac{3}{8}x$ positiv sein, d. h. $x < \dfrac{9\frac{7}{8}}{1\frac{3}{8}}$ oder $x < 7\frac{2}{11}$. Für x stehen daher die Möglichkeiten der Werthe $x = 1$ bis $x = 7$ zur Verfügung. Dabei soll auch $31\frac{1}{8} + \frac{3}{8}x$ ganzzahlig, mithin $1 + 3x$ durch 8 theilbar sein, und dieses Verlangen wird durch $x = 5$ erfüllt. So findet Bachet $x = 5$, $y = 3$, $z = 33$. Die Auffindung von $x = 5$ gelingt freilich nur durch versuchsweise Anwendung der in Frage kommenden möglichen Werthe, und insofern ist das Verfahren zweifellos recht langwierig, aber immerhin ist so eine Methode vorhanden zur Auflösung einer der Hauptsache nach neuen Aufgabe, denn — wir wiederholen es — in Europa ist vor Bachet niemals mit gleicher Bestimmtheit wie von ihm darauf abgehoben worden, dass es ausschliesslich um ganzzahlige positive Auflösungen der unbestimmten Aufgabe sich handle.

Dieser Zusatz in der Diophantausgabe war für Bachet nicht die erste, nicht die letzte Gelegenheit, sich über unbestimmte Aufgaben ersten Grades auszusprechen. Schon in den *Problèmes plaisants et délectables* von 1612 war in der 5. Aufgabe die Behauptung enthalten, man könne stets ein kleinstes ganzes Vielfaches einer gegebenen Zahl finden, welches ein ganzes Vielfaches einer zweiten gegebenen Zahl um eine dritte gegebene Zahl übertreffe, vorausgesetzt, dass die beiden ersten gegebenen Zahlen theilerfremd seien. In der zweiten Auflage der Sammlung

von 1624 ist die 5. Aufgabe zur 6. geworden, die blosse Behauptung zu einem bewiesenen Lehrsatze, und zum Zwecke des Beweises hat Bachet aus einem anderen Werke *Eléments d'arithmétique*, welches er noch herausgeben wollte, aber niemals herausgegeben zu haben scheint, etwa zehn Sätze entnommen und hier eingeschaltet[1]). Darunter war der für jede wissenschaftliche Zahlentheorie grundlegende Satz, dass, wenn $a, b, c \ldots$ unter einander theilerfremde Zahlen sind, und M deren Product $abc \ldots$ bedeutet, wenn überdies n_1 und n_2 Zahlen unterhalb M sind, welche der Reihe nach durch $a, b, c \ldots$ dividirt die Reste $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ beziehungsweise $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots$ übrig lassen, das System der ersten Reste mit dem der zweiten nicht in Uebereinstimmung sein kann.

Bachet's Diophant übte durch seine eigenen Zusätze bereichert eine um so mächtigere Wirkung aus, und insbesondere war es Pierre de Fermat, welcher im Besitze eines Exemplars dieses Werkes die Blätter desselben mit Randbemerkungen füllte, welche dann später 1670 in einer neuen, durch Fermat's Sohn besorgten Diophantausgabe ihren Abdruck fanden. Andere zahlentheoretische Sätze Fermat's wurden in den *Opera varia* veröffentlicht, deren Druck gleichfalls der Sohn überwachte, noch Anderes steht in dem *Commercium epistolicum*, welchen John Wallis 1658 herausgab[2]). Eine Frage, deren Beantwortung schwierig, wenn nicht unmöglich ist, betrifft die Randbemerkungen zum Diophant. Was war Fermat's Absicht, als er sie niederschrieb? Dachte er an den Druck einer neuen Ausgabe, wie sie wirklich nach seinem Tode veranstaltet wurde, oder machte er nur zum eigenen Gebrauche flüchtige Aufzeichnungen über das, was ihm beim Studium auffiel, und was künftigen Arbeiten als Gegenstand dienen sollte? Im zweiten Falle wären gewisse Aeusserungen über von Fermat besessene Beweise nicht haarscharf zu nehmen. Welcher Mathematiker hätte sich bei ganz neuen Untersuchungen nicht schon getäuscht und Beweise für streng und vollwichtig gehalten, die später, wenn sie der Oeffentlichkeit übergeben werden sollten, sich als allzuleicht erwiesen? Im ersteren Falle hätte man dagegen bei dem Lakonismus jener ebenerwähnten Aeusserungen an ein absichtliches Schweigen zu denken, welches vielleicht die neue Ausgabe mit einem Reize mehr versehen sollte, und welches zu brechen Fermat sich vorbehielt, wann und wie es ihm beliebte, vielleicht richtiger gesagt wann und wie er der ihm angeborenen Scheu vor Ausarbeitungen

[1]) Vergl. die Vorrede von 1624, S. 10 des neuen Abdrucks. [2]) Der *Commercium epistolicum* ist auch in den Gesammtwerken von Wallis (Oxford 1695—1699) abgedruckt.

Herr zu werden vermochte. Jedenfalls fehlen uns die Beweise, von denen wir hier reden, und ebenso sicher ist, dass Fermat sie besessen hat oder besessen zu haben glaubte, da es sonst unbegreiflich wäre, dass er sie den Gelehrten, mit welchen er einen regen Briefwechsel zu führen pflegte, hie und da anbot. Unbegreiflich freilich ist es auch, dass dieses Anerbieten niemals angenommen wurde, wodurch der von uns betrauerte Verlust nirgend, wo es gelohnt hätte, abgewendet worden ist. Wir wollen nun einige der Fermat'schen Sätze in der Reihenfolge, in welcher sie in der Diophantausgabe von 1670 erschienen, angeben.

1. „Es ist ganz unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein irgend eine Potenz ausser dem Quadrate in zwei Potenzen von demselben Exponenten zu zerfällen. Hierfür habe ich einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, aber der Rand ist zu schmal, ihn zu fassen"[1]). Dieser Satz, welchem seine zufällige Stellung als Randnote den ersten Platz in unserem Berichte anweist, ist zugleich der berühmteste von allen, welche die Wissenschaft Fermat verdankt. Wie es sich mit jenem wirklichen oder vermeintlichen Beweise Fermat's verhielt, gehört zu den unlösbaren Räthseln. Nur sehr allmälig ist es verschiedenen hervorragenden Zahlentheoretikern[2]) gelungen, die Wahrheit des Satzes festzustellen. Sie benutzten dazu Beweismittel, welche Fermat zuverlässig nicht in seiner Gewalt hatte. Im Februar 1877 tauchte zwar in italienischen Zeitungen die Nachricht auf, ein H. Paolo Gorini habe einen einfachen Beweis entdeckt, doch ist in die eigentliche Fachliteratur nichts gedrungen, so dass jene Mittheilung gleich so manchen ähnlichen aus verschiedenen Ländern und Zeiten auf Irrthum beruht haben dürfte. Ganz zweifellos ist auch nicht der Zeitpunkt, zu welchem Fermat seinem Satze die erwähnte Form gab[3]). Wahrscheinlich im September oder October 1636 schickte Fermat an Pater Mersenne eine Anzahl von Aufgaben, welche einem Herrn de Sainte-Croix vorgelegt werden sollten. Vermuthlich ist damit der Prior des Klosters von Ste. Croix gemeint, welcher mit seinem

[1]) Diophant (1670), pag. 61. Vergl. die deutsche Diophantübersetzung von G. Wertheim (Leipzig 1890), S. 52. Wir citiren künftig die griechische Ausgabe von 1670 einfach als: Diophant, die Wertheim'sche Uebersetzung als deutsch mit nachfolgender Seitenzahl. [2]) Euler, Dirichlet, Kummer. [3]) Für alle diese Zeitbestimmungen vergl. C. Henry, *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat* im *Bulletino Boncompagni* T. XII. Wir citiren Henry mit der Seitenzahl des Sonderabdrucks und in Klammern die Stelle des *Bullet. Boncamp.* Ferner P. Tannery, *Sur la date des principales découvertes de Fermat* im *Bulletin Darboux.* 2. Série, T. VII (1883). Wir citiren die Seitenzahl des Sonderabdrucks.

weltlichen Namen André Jumeau hiess[1]). Unter diesen Aufgaben findet sich schon diejenige, zwei Kuben zu finden, deren Summe ein Kubus oder zwei Biquadrate, deren Summe ein Biquadrat sei[2]), und es ist mehr als nur wahrscheinlich, dass Fermat damals schon wusste, dass er hier Unmögliches verlangte, und dass er nur, um die Aufgabe noch schwieriger zu gestalten, nicht geradezu den Beweis der Unmöglichkeit verlangte. Wann aber die Ausdehnung des Satzes auf die Unmöglichkeit von $x^n + y^n = z^n$ bei $n > 4$ erfolgte, ist ganz unbekannt.

2. „Eine Primzahl von der Form $4n + 1$ ist nur einmal Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, ihr Quadrat ist es zweimal, ihr Kubus dreimal, ihr Biquadrat viermal u. s w."[3]). An einem Beispiele, etwa dem der Primzahl 5, erläutert sich dieser Satz folgendermassen:

$$5^2 = 3^2 + 4^2; \quad 25^2 = 15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2;$$
$$125^2 = 75^2 + 100^2 = 35^2 + 120^2 = 44^2 + 117^2.$$

Im unmittelbaren Anschlusse an diesen Satz behauptet Fermat weiter:

3. „Eine solche Primzahl und ihr Quadrat lassen sich nur einmal in zwei Quadrate zerfällen, ihr Kubus und ihr Biquadrat zweimal, ihr Quadratokubus und ihr Kubokubus dreimal u. s. w." Beispielsweise ist

$$5 = 1 + 4; \quad 25 = 9 + 16; \quad 125 = 4 + 121 = 25 + 100;$$
$$625 = 49 + 576 = 225 + 400 \text{ u. s. w.}$$

4. „Wir können eine Aufgabe lösen, welche Bachet unbekannt war, nämlich eine aus zwei Kuben zusammengesetzte Zahl in zwei andere Kuben zerlegen, und zwar ist das auf unendliche viele Weisen möglich"[4]).

5. „Ich habe sogar den schönen und ganz allgemeinen Satz entdeckt, dass jede Zahl entweder eine Dreieckszahl oder die Summe von 2 oder 3 Dreieckszahlen; entweder eine Quadratzahl oder die Summe von 2, 3 oder 4 Quadratzahlen; entweder eine Fünfeckszahl oder die Summe von 2, 3, 4 oder 5 Fünfeckszahlen ist, und dass weiter derselbe allgemeine Satz für Sechseckszahlen, Siebeneckszahlen, überhaupt beliebige Polygonalzahlen gilt. Den Beweis desselben, der aus vielen mannigfaltigen und ganz verborgenen Geheimnissen der Zahlen hergenommen wird, kann ich hier nicht beifügen. Ich habe nämlich vor, ein besonderes Werk diesem Gegenstande zu widmen und die Arithmetik in diesem Theile über die alten und bekannten Sätze hinaus in wunderbarer Weise zu erweitern"[5]). Der letzte Aus-

[1]) Henry pag. 23 (XII, 497). [2]) Tannery pag. 8. [3]) Diophant pag. 127 (deutsch 112). [4]) Ebenda pag. 133 (deutsch 119). [5]) Ebenda pag. 180—181 (deutsch 162).

spruch ist wieder einer von denen, auf welche man sich dafür berufen könnte, dass Fermat's Randnoten zum Diophant auf künftige Veröffentlichung als solche gemeint waren. Der Satz selbst ist in dem mittelbar für den Herrn von Sainte Croix bestimmten Briefe von 1636 aufgefunden worden[1]). Dieser scheint ihn alsdann Descartes mitgetheilt zu haben, welcher seinerseits wieder in einem Briefe an Mersenne vom 27. Juli 1638 ihn wiederholt, indem er ihn das Eigenthum des H. von Ste. Croix nennt[2]). Ganz klar ist die Sache nicht. Jedenfalls erscheint es wunderbar, dass Mersenne, welcher die erste Uebermittelung des merkwürdigen Satzes an den, welcher jetzt als Urheber gelten sollte, besorgt hatte, nicht für das Recht des eigentlichen Erfinders eintrat. Wieder 16 Jahre später, am 25. September 1654, theilte Fermat den Satz brieflich auch Pascal mit[3]). Der Beweis, sagte er, beruhe auf dem Satze von der Zerfällbarkeit jeder Primzahl von der Form $4n+1$ in zwei Quadrate. Ist dieser Beweis schon gleich bei Erfindung des Satzes in Fermat's Besitz gewesen, und ist dessen versuchte Datirung richtig, so stammt demnach auch ein Theil mindestens des vorhin unter 3. angegebenen Satzes ebenfalls aus dem Jahre 1636.

6. „Ich kann allgemein die Aufgabe lösen, beliebig viele Zahlen von der Beschaffenheit zu ermitteln, dass das Quadrat einer jeden eine Quadratzahl bleibt, mag man nun die Summe aller Zahlen zu denselben addiren oder von denselben subtrahiren“[4]).

7. „Warum sucht aber Diophant nicht zwei Biquadrate, deren Summe ein Quadrat sei? Diese Aufgabe ist allerdings unmöglich, wie mein Beweisverfahren in aller Strenge darthun kann“[5]).

Diesen Auszügen aus den Randbemerkungen zu Diophant lassen wir solche aus Briefen Fermat's folgen.

8. Die beiden ältesten Untersuchungen auf zahlentheoretischem Gebiete, mit denen Fermat sich beschäftigte, betrafen Zauberquadrate und vollkommene Zahlen. Wohin sie führten, ist unbekannt. Die Briefe, in welchen jene Andeutungen vorhanden sind[6]), führen die Daten von April und Juni 1640. Die Zauberquadrate hat Fermat in den Problèmes plaisants Bachet's kennen gelernt, deren er in der Ausgabe von 1624 sich bediente; es sind mehr als zehn Jahre, dass er selbst sich eine Methode zur Herstellung solcher Quadrate bildete.

9. Unter dem 18. October 1640 schrieb Fermat[7]) an Frénicle,

[1]) Tannery pag. 7. [2]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 112. [3]) Pascal III, 234. [4]) Diophant pag. 221 (deutsch 203). [5]) Ebenda pag. 258 (deutsch 248). [6]) Fermat, *Varia Opera* pag. 173 und 176. *Oeuvres* II, 189—197. — Henry pag. 48 (XII, 522). — Tannery pag. 9. [7]) Fermat, *Varia Opera* pag. 163. *Oeuvres* II, 209.

jede Primzahl theile unfehlbar den um die Einheit verminderten Betrag irgend einer Potenz einer beliebigen Zahl, und der Exponent jener Potenz, *l'exposant de ladite puissance*, sei selbst ein Theiler der um die Einheit verminderten Primzahl. Dieser Satz erhielt in den zahlentheoretischen Lehrbüchern unserer Gegenwart den Namen des Fermat'schen Satzes. In der Bezeichnung von Gauss wird er so geschrieben: $a^t \equiv 1 \pmod{p}$ und $p \equiv 1 \pmod{t}$.

10. Englischen Mathematikern legte Fermat 1657 die Doppelaufgabe vor, eine Kubikzahl zu finden, welche um ihre Untervielfache vermehrt zur Quadratzahl werde, eine Quadratzahl zu finden, deren Untervielfache sie zur Kubikzahl ergänzen[1]). Als Beispiel einer Auflösung der ersten Aufgabe wies er auf $7^3 = 343$ hin, weil

$$343 + 1 + 7 + 49 = 400 = 20^2.$$

11. Eine hochwichtige Aufgabe ist die der ganzzahligen Auflösung von $ax^2 + 1 = y^2$, wenn die nichtquadratische ganze Zahl a gegeben sei[2]). Fermat legte sie 1657 erst Frénicle vor, dann allen lebenden Mathematikern. Seine eigene Auflösung kennen wir, wie wir noch sehen werden, nur in ihren allerallgemeinsten Umrissen. In England fanden Wallis und Lord Brouncker gemeinsam ein sehr umständliches Verfahren, welches in dem Commercium epistolicum von 1658 veröffentlicht ist. Eine zweite Veröffentlichung erfolgte zehn Jahre später. John Pell hatte 1654—1658 als Resident Cromwell's in der Schweiz gelebt und war dort mit Johann Heinrich Rahn (1622—1676) bekannt geworden, welcher 1659 eine „Teutsche Algebra“ herausgab. Pell vermittelte eine englische Uebersetzung dieses Buches durch Thomas Brancker, welche 1668 gedruckt wurde. Rahn's Name blieb aber auf dem Titelblatte weg und kommt nur in der Vorrede in der Form Rhonius vor. Pell, der die Uebersetzung veranlasst hatte, gab auch einige Zusätze, und unter diesen ist der wiederholte Abdruck der englischen Auflösung von $ax^2 + 1 = y^2$ zu finden, ein anderes Verdienst hat Pell sich um diese Aufgabe nicht erworben, und gleichwohl ist sie als Pell'sche Aufgabe bekannt geblieben.

12. Ein Satz hat Fermat[3]) wiederholt beschäftigt. Wahrscheinlich war er ihm schon 1637, dann sprach er ihn als sicher am 18. October 1640 aus, und ebenso in einem Briefe vom 29. August

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 188. *Oeuvres* II, 332. [2]) Ebenda, *Varia Opera* pag. 190. *Oeuvres* II, 333. — Tannery pag. 10. — Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. — Allgem. deutsche Biographie XXVII, 174—175. [3]) Fermat, *Varia Opera* pag. 162. — Pascal III, 232. — Tannery pag. 10.

1654 an Pascal. Der Wortlaut dieser letzteren Mittheilung verdient von einem gewissen Absatze an Beachtung. Der Satz selbst besteht darin, dass die fortgesetzte Quadrirung von 2 bei Vermehrung der betreffenden Potenzen um 1 lauter Primzahlen gebe, dass also $2^{2^k}+1$ immer Primzahl sei. Als Beispiele führt Fermat an: $2^2+1=5$, $2^4+1=17$, $2^8+1=257$, $2^{16}+1=65537$, und nun fügt er hinzu: „Es ist das eine Eigenschaft, für deren Wahrheit ich einstehe; der Beweis ist sehr unangenehm, und ich bekenne, dass ich ihn noch nicht vollständig zu erledigen im Stande war. Ich würde Ihnen nicht vorschlagen, einen Beweis zu suchen, wenn ich damit zu Stande gekommen wäre.“ Das Eigenthümliche besteht darin, dass der Satz irrig ist, und dass, wenn Fermat in seinen Beispielen um einen einzigen Schritt weiter gegangen wäre, er mit

$$2^{32}+1=4294967297=641\cdot 6700417$$

die erste zusammengesetzte Zahl jener vermeintlichen Primzahlenform vor sich gehabt hätte. Fermat hat also in seiner Behauptung sich getäuscht. Um so schärfer tritt neben der festen Ueberzeugung von der Richtigkeit des Satzes die offene Erklärung entgegen, es sei ihm nicht geglückt, einen zureichenden Beweis aufzufinden. Sie muss uns in der Ueberzeugung bestärken, dass Fermat, wenn er auch vielleicht etwas rasch zu Verallgemeinerungen geneigt war, doch eine einfache Induction nicht als Beweis anerkannte, dass er also, wo er von thatsächlich geführten Beweisen sprach, auch wirklich solche, die ihm tadellos erschienen, besessen haben muss.

Worin bestanden aber die zahlentheoretischen Methoden Fermat's? Er rühmte sich solcher schon sehr frühe. Schon am 16. December 1636 schrieb er an Roberval[1]): *Pour ce qui est des nombres et de leurs parties aliquotes j'ai trouvé une méthode générale pour soudre toutes les questions par algèbre, de quoy j'ai fait dessein d'écrire un petit traité.* Allein da diese Abhandlung über aliquote Theile, vermuthlich also auch über deren Summe, über vollkommene Zahlen und dergleichen nicht zu Stande kam, so kann sie über die in ihr zur Anwendung gebrachte allgemeine Methode keine Auskunft ertheilen. Etwas bessere Ausbeute gewährt ein Bruchstück, welches unter der Aufschrift *Relation des découvertes en la science des nombres* in der Leidener Bibliothek aufgefunden worden ist[2]). Fermat erklärt darin, er habe, da die in den Büchern gelehrten Methoden sich beim Beweise schwieriger Sätze als untauglich erwiesen, eine neue Methode erfunden, welche er *la descente infinie ou indefinie*, die unendliche

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 149. [2]) Henry pag. 213—216 (XII, 687—690).

oder unbegrenzte Abnahme nannte. Insbesondere bei Unmöglichkeitssätzen sei dieses Verfahren angebracht, z. B. bei dem Satze, dass es kein ganzzahliges rechtwinkliges Dreieck gebe, dessen Fläche als Quadratzahl auftrete. Man könne nämlich beweisen, dass, falls ein solches Dreieck vorhanden sei, immer ein zweites in kleineren Zahlen die gleiche Eigenschaft besitze. Von diesem gelange man zu einem dritten, zu einem vierten u. s. w. ins Unendliche; unendlich viele ganze Zahlen von abnehmender Grösse gebe es aber nicht, also sei die erste Annahme unrichtig. Wie er den Beweis von der Möglichkeit eines solchen Dreiecks auf die eines kleineren führe, sage er hier nicht, denn einmal sei die Erörterung zu lang, und ferner liege gerade darin das Geheimniss seines Verfahrens, und er möchte gern, dass die Pascal, die Roberval und Andere, auf diese Andeutung gestützt, es ihm nacherfänden. Für den Beweis von bestimmten Behauptungen[1]) sei die Methode zunächst nicht anwendbar gewesen, wie z. B. für den Beweis des Satzes, dass jede Primzahl von der Form $4n+1$ Summe zweier ganzzahligen Quadrate sei. Da habe er sich folgendermassen geholfen: er habe gezeigt, dass, wenn irgend eine Primzahl von der Form $4n+1$ nicht die Summe zweier ganzzahligen Quadrate wäre, es eine kleinere Primzahl von gleicher Form und gleicher Eigenschaft geben müsste. Bei fortwährender Verkleinerung müsse man aber endlich zur kleinsten Primzahl von der Form $4n+1$ d. h. zu 5 gelangen, welche alsdann auch nicht Summe zweier ganzzahligen Quadrate sein könnte, während doch $5=1^2+2^2$ ist. Aehnlicherweise habe er unter Anwendung neuer, mitunter sehr schwierig aufzufindender Grundgedanken noch andere Sätze unter die Methode der unendlichen Abnahme untergebracht. Dahin rechne er den Satz, an dessen Beweis Bachet und Descartes — letzterer nach brieflichen Aeusserungen — geradezu verzweifelten, dass jede Zahl Quadratzahl oder Summe von 2, 3, 4 Quadratzahlen sei, dahin auch die ganzzahlige Auflösung von $ax^2+1=y^2$, so oft a keine Quadratzahl sei. Die Herren Frénicle und Wallis hätten allerdings einige besondere Auflösungen dieser letzteren Aufgabe geliefert, aber nicht die allgemeine. Diese beruhe eben auf der Methode der unendlichen Abnahme, und nun möchten die Herren sich wiederholt daran versuchen[2]). Auch der Satz, dass kein Kubus die Summe zweier Kuben sei, gehöre unter das gleiche Beweisverfahren.

[1]) *questions affirmatives* im Gegensatze zu den vorher erwähnten *propositions négatives.* [2]) *ce que leur indique, afin qu'ils adjoustent la demonstration et construction generale du theoreme et du probleme aux solutions singulieres qu'ils ont donnees.*

An diesen Auszug aus Fermat's Angaben knüpft sich von selbst die Frage, woher Fermat die Anregung zur Erfindung seiner Methode der unendlichen Abnahme erhalten haben mag? Man wird kaum irre gehen, wenn man den letzten Zusatz des Campanus zu Euklid IX, 16 (S. 105) als die Quelle nennt, aus welcher Fermat schöpfte. War doch das Studium Euklid's und seiner Erklärer noch ein selbstverständliches, dem Jeder oblag, welcher für Mathematik Sinn hatte, und Fermat hat gewiss der allgemeinen Uebung sich nicht entzogen. Aber sein Verdienst wird durch das Vorhandensein dieses um 300 Jahre älteren Vorgängers um nichts geschmälert. In jenen 300 Jahren haben Tausende vor und gleichzeitig mit Fermat den Grundgedanken der Methode der unendlichen Abnahme genau so wie er kennen gelernt. Sie alle haben nicht eingesehen, welcher Ausdehnung die einmalige Anwendung des Gedankens durch Campanus fähig war, sie alle gingen achtlos vorüber, die Perle im Fruchthaufen verschmähend, bis Fermat sie entdeckte und ihr die richtige Fassung verlieh.

Eine zweite Frage, welche sich anknüpft, ist die nach dem Zwecke und der Verbreitungsart der *Relation des decouvertes en la science des nombres.* Die Vermuthung spricht dafür, dass sie in zahlreichen Abschriften umlief, dass neben derjenigen, die in Leiden sich erhielt, andere an die in ihr zum Nacheifern geradezu herausgeforderten Mathematiker gegangen sein müssen, dass jene Herausforderung den eigentlichen Zweck des denkwürdigen Schriftstückes bildete. Der Erfolg aber war Null. So wenig wir zweifeln, dass Pascal und Roberval, Frénicle und Wallis die Relation erhielten und studirten — Bachet und Descartes waren schon todt, als sie 1659 verbreitet wurde[1]) — ebenso gewiss ist es, dass diese Männer nichts herausstudirt haben. Fermat's Geheimniss ist sein Geheimniss geblieben lange über das Grab hinaus.

Ausser in der Relation hat Fermat noch an einer Stelle seines Verfahrens unendlicher Abnahme gedacht, allerdings ohne diese Wortverbindung zu gebrauchen. Das erste in der Relation angeführte Beispiel der Anwendung der unendlichen Abnahme war das von der Unmöglichkeit eines ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecks mit einer Quadratzahl als Fläche. Diesen Satz kannte Fermat 1636, als er für den Herrn von Ste. Croix Aufgaben zusammenstellte, welche Unmögliches verlangten[2]), auf ihn kam er in seinen Diophantanmerkungen zurück[3]). Der letzte Satz des VI. Buches des Diophant hatte Bachet

[1]) Tannery im *Bulletin Darboux* XXVIII, 61—62. [2]) Tannery pag. 8.
[3]) Diophant pag. 338—339 (deutsch 294—295).

Gelegenheit geboten, noch eine ganze Anzahl von Aufgaben über das ganzzahlige rechtwinklige Dreieck folgen zu lassen. Die 20. derselben betraf die Auffindung eines rechtwinkligen Dreiecks von gegebener Fläche, und an sie knüpfte Fermat als Bedingung, unter welcher allein eine Auflösung möglich ist, den Ausschluss einer Quadratzahl als Fläche. Er hat auch den Beweis jener Unmöglichkeit in räthselhafter Kürze angedeutet, dessen Schluss allein ganz klar und verständlich ist: „Wenn es also zwei Quadrate giebt, deren Summe und Differenz Quadrate sind, so giebt es auch zwei andere ganze Quadratzahlen von derselben Beschaffenheit wie jene, welche aber eine kleinere Summe haben. Durch dieselben Schlüsse findet man, dass es eine noch kleinere Summe als die vermittels der ersteren gefundene giebt, und so werden ins Unendliche fort immer kleinere ganze Quadratzahlen gefunden werden, welche dasselbe leisten. Das ist aber unmöglich, weil es nicht unendlich viele ganze Zahlen geben kann, welche kleiner sind als eine beliebig gegebene ganze Zahl. Den Beweis ganz und ausführlicher hier mitzutheilen, dazu reicht der Raum nicht aus.“ Der vollständige Beweis findet sich in Frénicle's weiter unten zu nennenden Abhandlung über ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke. Man wird ihn vielleicht als Fermat's Eigenthum betrachten müssen, da Fermat einmal ausdrücklich sagt[1]), er habe an Frénicle die durch unendliche Abnahme geführten Beweise einiger Unmöglichkeitssätze geschickt.

Wir haben die Namen der Männer hervorgehoben, welche Fermat vermuthlich unmittelbar, jedenfalls mittelbar zur Nacherfindung seines Verfahrens und dadurch zu einer Art von Wettkampf herausforderte. Von einer Thätigkeit Roberval's in der Zahlentheorie ist nichts bekannt. Fermat dürfte ihn nur erwähnt haben, weil er dessen Fähigkeiten überhaupt hoch anschlug, und weil Roberval in dem Briefwechsel zwischen Fermat und Pascal als eine Art von Vertrauensmann des letzteren vorkommt, so dass es für Fermat nahe lag, beide Persönlichkeiten zu verbinden.

Pascal hat wirklich zahlentheoretisch gearbeitet. Zwei kleinere Abhandlungen sind uns von ihm bekannt. Die erste[2]) beschäftigt sich mit dem Producte von Zahlen, welche in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar aufeinanderfolgen, also mit

$$a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1),$$

wo a und k positive ganze Zahlen sind. Er nennt ein solches Pro-

[1]) Fermat, *Oeuvres* II, 436. Auf diese Stelle hat uns H. G. Wertheim aufmerksam gemacht und die entsprechenden Folgerungen aus ihr gezogen.
[2]) Pascal III, 278—282.

duct *produit des nombres continus* und zwar *de l'espèce k*, in lateinischer Sprache *productum continuorum speciei k*. Es sei das erste Mal, meint Pascal, dass solche Producte untersucht würden, und wenn wir ihm hierin beizupflichten haben, so ist nicht minder richtig, dass Pascal's mathematischer Blick ihn auf einen Ausdruck leitete, der hinfort eine immer bedeutendere Rolle spielen sollte. Unter Pascal's Sätzen ist der erste folgender, dem wir freilich durch Anwendung der Buchstaben h und k eine bei ihm nicht vorhandene Gestalt geben: Wenn h und k ganze Zahlen sind, so findet das Verhältniss statt:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdots (h-1) : k(k+1) \cdots (k+h-2) \\ = & 1 \cdot 2 \cdots (k-1) : h(h+1) \cdots (h+k-2). \end{aligned}$$

Im zweiten Satze ist die Theilbarkeit von $a(a+1) \cdots (a+k-1)$ durch $1 \cdot 2 \cdots k$ ausgesprochen und mittels der Betrachtung bewiesen, dass $\frac{a(a+1) \cdots (a+k-1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$ als a^{te} Zahl der $k+1^{\text{ten}}$ Ordnung eine ganze Zahl sein müsse. Dieser Beweis lässt uns zugleich den Zugangspunkt erkennen, von welchem aus Pascal in die Betrachtung der Eigenschaften ganzer Zahlen eintrat. Die weiteren Sätze der Abhandlung sind nicht von grosser Bedeutung.

Pascal's zweite Abhandlung[1]), die wir zu nennen haben, hat die Theilbarkeitsbedingungen von Zahlen zum Gegenstande, insofern dieselbe aus der Kenntniss der einzelnen Ziffern der zu prüfenden Zahl hervorgehe: *Caractères de divisibilité des nombres, déduits de la connaissance de la somme de leurs chiffres*, oder lateinisch: *De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis.* Die Theilbarkeitsfrage sei allerdings schon vielfach behandelt, sagt Pascal in den einleitenden Worten, und das Kennzeichen der Theilbarkeit durch 9 sei Gemeingut, aber er wolle ein ähnliches Verfahren lehren, welches die Theilbarkeit durch irgend ein A zur Entscheidung bringe. In Pascal's eigener Bezeichnung ist seine Vorschrift die folgende. Er schreibt in eine Zeile die Zahlen 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Unter die rechts zu äusserst befindliche 1 schreibt er wieder eine 1. Diese vervielfacht er mit 10, dividirt das Product durch A und schreibt den Rest B unter die 2. Sodann bildet er das Zehnfache von B, um es wieder durch A zu dividiren und den Rest C unter die 3 zu setzen u. s. w., so dass schliesslich eine Doppelreihe

$$\begin{array}{cccccccccc} 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ K & I & H & G & F & E & D & C & B & 1 \end{array}$$

vorhanden ist. Soll nun etwa $TVNM$, d. h. T Tausender, V Hunderter, N Zehner, M Einer auf Theilbarkeit durch A geprüft werden, so schreibt man die Zahl in eine dritte Zeile und zwar M unter 1, N unter B, V unter C, T unter D und vervielfacht so wie die Zeilenglieder unter einander stehen, worauf man die Producte addirt. Mit anderen Worten, man bildet die Summe $1 \cdot M + B \cdot N + C \cdot V + D \cdot T$ und mit ihr ist $TVNM$ gleichzeitig durch A theilbar oder nicht. Natürlich kann man die Summe, welche man erhielt, neuerdings einer ähnlichen Prüfung unterwerfen. Wir heben aus den Einleitungsworten noch besonders hervor, dass Pascal das volle Bewusstsein von dem Unterschiede hatte, welcher zwischen Zahlensystem überhaupt und dem an sich zufälligen decadischen Systeme[1]) besteht, und dass er hierin Vorgänger, aber jedenfalls unbekannter Vorgänger von Caramuel (S. 771) war.

[1]) Pascal III, 311—322.

Der zweite Mathematiker, den wir nächst Pascal in Frankreich als Zahlentheoretiker zu nennen haben, ist Bernhard Frénicle de Bessy[2]) (etwa 1602—1675). Er war im Münzamte angestellt und gehörte überdies der französischen Academie der Wissenschaften an, in deren Veröffentlichungen seine Abhandlungen vereinigt erschienen sind[3]). Ihr Gegenstand ist fast ausschliesslich zahlentheoretisch oder zahlentheoretisch-combinatorisch, indem wir z. B. die Zauberquadrate unter diese letztere Benennung unterbringen zu sollen glauben. Die rein zahlentheoretischen Abhandlungen beschäftigen sich vorzugsweise mit ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecken, *triangles rectangles en nombres*, um Frénicle's Ausdruck zu gebrauchen. Wenn eine Abhandlung die Ueberschrift *Méthode pour trouver la solution des problèmes par exclusion* trägt, so ist dieses ein einigermassen irreführender Titel. Eine Methode der Ausschliessung wird hier noch weniger gelehrt, als wir von Fermat sagen durften, er habe die Methode der unendlichen Abnahme gelehrt. Bei Frénicle besteht die Ausschliessung in Folgendem: Irgend ein Satz, z. B. ein Satz für die Seiten eines bestimmten ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecks wird ausgesprochen. Er sei, heisst es weiter, Sonderfall eines allgemeinen Satzes, dem man nachzuforschen habe. Nun versucht es Frénicle mit einer Erweiterung, aber ein anderes bestimmtes Beispiel passt für diese Erweiterung nicht, sie ist folglich unstatthaft. Aehnlich wird eine zweite, vielleicht eine dritte Erweiterung versucht und durch ihr widersprechende Beispiele ausgeschlossen. Das ist es, was unter der *exclusion* zu verstehen ist. Findet sich endlich eine allgemeine Formel, unter welche

[1]) *système dont la base est de pure convention contrairement à ce que le vulgaire pense sans raison aucun.* [2]) Poggendorff I, 798. — *Nouvelle Biographie universelle* XVIII, 803—805. [3]) *Mémoires de l'Académie royale des sciences* (*depuis* 1666 *jusqu'à* 1699), Tome V. Paris 1729.

alle vorgeführten Einzelbeispiele passen, was aber nicht methodisch bewerkstelligt wird, sondern ganz zufällig sich ergiebt, so ist der gesuchte Satz vielleicht entdeckt, keinenfalls bewiesen, wenn man jene Induction nicht als Beweis gelten lassen will. Andere Untersuchungen Frénicle's müssen unter der Hand bekannt gewesen sein, denn aus diesen von der Academie veröffentlichten Arbeiten ist die grosse Hochschätzung, welche Fermat insbesondere Frénicle widmete, in keiner Weise zu erklären. Die im Commercium epistolicum (S. 773) von Wallis wiederholt erwähnte Schrift Frénicle's: *Solutio duorum problematum circa numeros cubos et quadratos quae tanquam insolubilia universis Europae Mathematicis a clarissimo viro D. Fermat sunt proposita et a D. B. F. D. B. inventa*[1]), welche 1657 in Paris gedruckt wurde, ist zur Zeit unauffindbar.

Was Descartes und seine zahlentheoretischen Leistungen betrifft, so sind wir auf wenige Andeutungen angewiesen, welche in seinen Briefen an Pater Mersenne vorkommen. Die Zahlen 30240, 32760 u. s. w. bis zu einer zwölfziffrigen Zahl 403031236608 nennt Descartes als solche, deren aliquote Theile ihr Dreifaches als Summe haben, also 90720, 98280, ... endlich 1209093709824. Die aliquoten Theile von 14182439040 geben als Summe das Vierfache dieser Zahl 56729756160. Ganz zufälliges Auffinden so grosser Zahlen mit derartigen Eigenschaften ist wohl ausgeschlossen, aber wie verfahren worden ist, deutet Descartes nicht an. Er bediene sich seiner Analysis bei derartigen Fragen; sie so auseinanderzusetzen, dass sie von Leuten verstanden werden könne, welche auf andere Methoden eingeübt seien, nähme zu lange Zeit in Anspruch. In einem anderen Briefe redet Descartes von vollkommenen Zahlen und von der Möglichkeit, dass es solche gebe, welche ungerad seien, eine Möglichkeit, welche er allerdings auf den Fall beschränkt, dass die betreffende vollkommene Zahl Product einer Primzahl in die Quadrate anderer Primzahlen sein könnte. Auch Briefe an Frénicle sind vorhanden, welche ähnliche Fragen berühren, doch ist nirgend ein Hinweis auf Untersuchungsverfahren zu finden. Descartes vermeidet vielmehr und namentlich in Briefen an oder für Fermat, vielleicht weil er sich aus Gründen, von welchen später die Rede sein wird, diesem gegenüber doppelter Vorsicht befleissigen zu müssen glaubte, jedes Eingehen auf zahlentheoretische Dinge, gleich als wenn er sich nicht mehr damit beschäftigte[2]).

[1]) B. F. D. B. = Bernard Frénicle de Bessy. [2]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 70: *Je supplie aussi M. de Fermat de m'excuser de ce que je ne réponds point à ses autres questions; car comme je vous ai mandé par mes précédentes, c'est un exercise auquel je renonce entièrement.*

Noch ein französischer Schriftsteller hat hier seinen Platz zu finden: Jaques de Billy[1]) (1602—1679), ein Mitglied des Jesuitenordens, Lehrer der Mathematik in Dijon. Sein Hauptwerk ist der 1643 erschienene, 493 Seiten starke Quartband *Nova Geometriae Clavis Algebra*, in welchem die mannigfachsten Aufgaben über proportionale Grössen erst algebraisch und dann auf Grund des gewonnenen Ergebnisses durch Zeichnung gelöst werden[2]). Von der gleichen Natur ist ein 1660 durch den Druck veröffentlichtes Werk: *Diophantus geometra sive opus contextum ex arithmetica et geometria*. Nach einem in schwülstige Worte gekleideten Lobe des Diophant, welcher in der Arithmetik das sei, was Cicero als Redner, Virgil als Dichter, Hippokrates als Arzt u. s. w., werden 81 Aufgaben aus den verschiedenen Büchern Diophant's mehr oder weniger ausführlich und zum Theil recht geschickt behandelt. Z. B. gleich die erste Aufgabe des I. Buches des Diophant, eine gegebene Zahl als Summe zweier Zahlen von gegebenem Unterschiede darzustellen, wird zunächst an den bestimmten gegebenen Zahlen behandelt (100 als gegebene Summe, 40 als gegebener Unterschied lassen 30 und 70 als die gesuchten Zahlen erkennen). Dann lässt Billy eine allgemeine algebraische Auflösung folgen und endlich die geometrische Darstellung, welche aber selbst eine dreifache ist, je nach dem Raumgebilde, welches zur Versinnlichung der Zahlen in Anwendung tritt. Es wird also eine Strecke, ein Quadrat, ein Würfel in zwei Gebilde gleicher Natur zerlegt, deren Unterschied wieder eine gegebene Raumgrösse derselben Art (Strecke, Quadrat, Würfel) ist. Die Constructionen, welche dazu dienen, sind zum Theil recht hübsch. Als zweiter Theil des Diophantus geometra sind noch weitere 59 algebraische Aufgaben geometrisch gelöst, welche nicht aus Diophant's Arithmetik stammen. Die vier unter Nr. 25—28 behandelten Aufgaben beziehen sich z. B. auf die Einbeschreibung von Quadraten und Rechtecken in gegebene Dreiecke, Aufgaben also, welche seit Heron von Alexandria (Bd. I, S. 361 und 684) Mathematiker der verschiedensten Zeiten beschäftigt haben. Ein drittes Werk führt den Titel: *Diophanti redivivi pars prior et pars posterior* und ist 1670 in Lyon gedruckt. Im ersten Theile werden in drei Kapiteln 172 Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck im Anschlusse an das sechste Buch des Diophant, im zweiten Theile 85 und in einem Epiloge noch sechs weitere unbestimmte Zahlenaufgaben behandelt. Billy stand auch mit Fermat in Briefwechsel über zahlentheoretische Gegenstände. Die schon oft von uns erwähnte Diophantausgabe von

[1]) Poggendorff I, 191. [2]) G. Wertheim brieflich über sämmtliche Schriften De Billy's.

1670 enthält als Einleitung eine Schrift Billy's: *Doctrinae analyticae inventum novum*, welche aber durch die Zusatzbemerkung zu dem Titel: *ex variis epistolis quas ad eum diversis temporibus misit D. P. de Fermat Senator Tolosanus*, mag sie von Billy herrühren oder von dem jüngeren Fermat beigefügt sein, jedenfalls kundgiebt, dass man Fermat mit grösserem Rechte als Billy als den Verfasser zu nennen hätte. Das Inventum novum beschäftigt sich mit sogenannten doppelten und dreifachen Gleichungen, d. h. mit der Auffindung von ganzen Zahlen, welche zwei oder drei Ausdrücke, in denen sie vorkommen, zu vollständigen Quadraten machen. Doppelte Gleichungen in diesem Sinne des Wortes hatte Diophant bereits, dreifache noch nicht.

Neben diesen Schriftstellern über Zahlentheorie nannten wir an verschiedenen Stellen gelegentlich und nennen wir jetzt wiederholt zwei Mittelspersonen wissenschaftlichen Verkehrs, deren weit verzweigter Briefwechsel ungefähr die wissenschaftlichen Zeitschriften späterer Zeit ersetzte, wenn auch ungenügend ersetzte, da es vielfach vom Zufalle, von der grösseren oder geringeren Mittheilungslust, von freundschaftlichen oder feindseligen Gesinnungen, von räumlichem Beisammensein oder augenblicklichen Entfernungen dieser oder jener Persönlichkeit abhing, ob die gemeldete Neuigkeit zur rechten Zeit an die rechte Bestimmung gelangte. Genug, es gab damals nur solchen Briefverkehr, auch die Druckgabe von Academieschriften fällt erst in das Ende des XVII. Jahrhunderts und noch später. Die Personen, welche wir meinen, sind Peter von Carcavy und Pater Mersenne in Frankreich. Von Carcavy haben wir (S. 758) das Nöthige mitgetheilt. Pater Marie Mersenne[1]) (1588—1648) gehörte dem Minoritenorden an und lebte in den Klöstern seines Ordens in Paris, Nevers, dann wieder in Pasis. Er machte aber auch verschiedene Reisen nach Italien und nach den Niederlanden, bei welchen er zahlreiche Verbindungen anknüpfte. Einen ähnlich weiten Bekanntenkreis wie Carcavy und Mersenne besass ein Engländer, der aber vermöge seines langen Aufenthaltes in Paris fast als Franzose gelten kann. Sir Kenelm Digby[2]) (1603—1665) war der Sohn eines Verschwörers und selbst politischen Umtrieben zugethan. So kam es, dass er seine Heimath wiederholt zu verlassen sich genöthigt sah. Er führte in Paris das Leben eines Flüchtlings. In Frankreich wurde er Anhänger der Descartes'schen Richtung. Die Beziehungen der drei Männer zu den zahlentheoretischen Bestrebungen der Zeit waren fol-

[1]) *Oeuvres complètes de Christian Huygens* I, 19 Note 1. [2]) Ebenda II, 12 Note 2.

gende. Mersenne haben wir als den Empfänger von Briefen bezeichnet, in welchen Fermat, in welchen Descartes manche zahlentheoretische Mittheilung machten. Durch Carcavy's Vermittelung kam Fermat's Relation nach Leiden. Digby übersandte in Fermat's Auftrage seine Aufgaben nach England, damit man dort an deren Auflösung sich versuche. So muss man sagen, dass Fermat überall im Vordergrunde steht, dass er nach Leonardo von Pisa zuerst wieder als Erweiterer der Mathematik nach zahlentheoretischer Richtung auftrat, während man von Regiomontan höchstens sagen kann, dass er über die längst gesteckten Grenzen hinausschaute, ohne sie hinauszuschieben. Jetzt war ein neues Reich der Wissenschaft eröffnet, es waren in ihm Ziele gesteckt, zu deren Erreichung selbst wieder neue Wege gebahnt werden mussten, welche von Geistesverwandten Fermat's in späteren Jahrhunderten eröffnet wurden.

Bereits nicht mehr so neu war die Algebra, die Lehre von den Gleichungen. Wir haben für sie den Zeitpunkt wesentlich neuer Entdeckungen schon vor und in der ersten Häfte des XVI. Jahrhunderts beginnen sehen, aber der erreichbar höchste Punkt war noch keineswegs wirklich erreicht. Wir haben auch in den ersten 60 Jahren des XVII. Jahrhunderts neue Fortschritte aufzuzeichnen, in deren Spuren eintretend unmittelbare Nachfolger weitere Stufen erstiegen.

Albert Girard gab 1629 seine *Invention nouvelle en l'algèbre*[1]) heraus, eine Schrift von nur 64 Quartseiten, aber reichen Inhaltes. Von trigonometrisch wichtigen Dingen, welche dort zu finden sind, war S. 709 die Rede. Jetzt haben wir es mit dem zu thun, was durch den Titel recht eigentlich in Aussicht gestellt ist. Zunächst sind einige Bezeichnungen Girard's zu bemerken und vor allem die Klammern als Zeichen der Zusammengehörigkeit verschiedener Ausdrücke zum Zwecke der Ausführung einer neuen Operation, welche Girard in die Buchstabenrechnung einführte. Weniger glücklich war er in Beibehaltung von Vieta's Zeichen $=$, welches zwischen zwei Ausdrücken befindlich ihre Differenz bezeichnen sollte, mag nun der erste oder der zweite der grössere sein (S. 631). Auch Zeichen für grösser und für kleiner benutzte Girard; $A\,ff\,B$ hiess: A ist grösser als B, während $B\,\S\,A$ gelesen wurde: B ist kleiner als A; beides kam bald in Vergessenheit. Zeichen der Addition ist bei Girard $+$, Zeichen der Subtraction $-$ oder auch $\div$, Zeichen der Division ein Bruchstrich $\frac{A}{B}$. Zur Multiplication dient das einfache Nebeneinander-

[1]) H. Bierens de Haan hat 1884 in Leiden die ungemein selten gewordene Schrift neu drucken lassen. Auszüge in Klügel, Mathematisches Wörterbuch I, 52—57 und in den *Nouvelles annales de mathématiques* XIV, *Bulletin de bibliographie* pag. 135—152.

setzen zweier Buchstaben AB. Ein Gleichheitszeichen kommt nicht vor, Girard schreibt vielmehr statt dessen das Wort *egale*. Für die Unbekannten wendet Girard, offenbar in Nachfolge von Vieta, die Vocale an[1]). In der Potenzbezeichnung schliesst sich Girard einigermassen an Stevin an. Wie jener den Exponenten einringelte, so klammert Girard ihn ein und setzt ihn vor den zu potenzirenden Ausdruck, $\left(\frac{3}{2}\right)49$ bedeutet also $49^{\frac{3}{2}} = 343$. An Stevin erinnert auch der Glaube Girard's an ein weises Jahrhundert[2]). Die Unterscheidung positiver und negativer Zahlen bei der Quadratwurzelausziehung, sowie das Auftreten imaginärer Quadratwurzeln ist Girard ganz geläufig[3]) und ebenso das Auftreten solcher Zahlen als Gleichungswurzeln, welches er zu erklären unternimmt. Das Minuszeichen bedeute geometrisch eine Bewegung in entgegengesetztem Sinne als das Pluszeichen[4]). An einer anderen Stelle sagt er, man dürfe negative Gleichungswurzeln nicht unbeachtet lassen[5]). Der Grund dazu liegt in Folgendem: Girard weiss, dass jede Gleichung so viele Wurzeln besitzt, als ihr Grad anzeigt, und dass die Coefficienten der einzelnen Potenzen der Unbekannten aus den Combinationen der Wurzeln zu aufeinanderfolgenden Klassen sich zusammensetzen. Er nennt die Summe der Wurzelwerthe *premiere faction*, die ihrer Verbindung zu zweien, dreien *deuxieme faction*, *troisieme faction* u. s. w.[6]). An dem Gesetze der Coefficientenbildung wird er auch nicht irre, wenn gleiche Wurzeln vorkommen und ebensowenig, wenn imaginäre Wurzelwerthe auftreten. Bei der Gleichung, welche man gegenwärtig $x^4 - 4x + 3 = 0$ schreiben würde, und deren vier Wurzeln $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1 + \sqrt{-2}$, $x_4 = -1 - \sqrt{-2}$ er kennt, stellt er geradezu die Frage, wozu jene imaginären Wurzeln dienen, und er beantwortet die Frage dahin, dass es eben andere Wurzeln nicht gebe, und dass sie die Allgemeinheit des Bildungsgesetzes erläutern[7]). Diese Kenntnisse Girard's sind geläuterter, möchte man sagen, als die seiner Vorgänger, aber wesentlich neu sind sie nicht. Dieses Beiwort verdient dagegen ein

[1]) *les voyelles se posent pour les choses incognues.* [2]) *ceste science incognuë jusques à présent, si ce n'est devant le deluge.* [3]) *Soit $+ 9$, sa racine est $+ 3$ ou bien $- 3$, mais la racine de $- 9$ est indicible et n'est ny $+$ ny $-$.* [4]) *Jusques icy nous n'avons encore explique, à quoy servent les solutions par $-$ quand il y en a. La solution par $-$ s'explique en geometrie en retrogradant et le $-$ recule la ou le $+$ avance.* [5]) *or les solutions par $-$ ne se doivent omettre.* [6]) *la nature des equations qui est qu'icelles ont leurs termes composé des factions.* [7]) *On pourroit dire: à quoy sert ces solutions qui sont impossibles? Je reponds: pour trois choses, pour la certitude de la reigle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité.*

von ihm ausgesprochener Satz: Girard weiss die Summen der vier ersten Potenzen der Wurzelwerthe einer Gleichung aus den Gleichungscoefficienten herzustellen. Er nennt bei dieser Gelegenheit die Coefficienten nicht *faction*, sondern *meslé* und bezeichnet sie durch aufeinanderfolgende Initialen, ohne Rücksicht darauf, dass ihm A sonst eine Unbekannte darstellt. Er kennt also A als *premier meslé*, B als *second*, C als *troisiesme*, D als *quatriesme* (nämlich immer *meslé* hinzugedacht). Dann schreibt er:

$$\text{Alors en toute sorte d'équation} \left\{ \begin{array}{l} A \\ Aq - B2 \\ A\,\text{cub} - AB3 + C3 \\ Aqq - AqB4 + AC4 + Bq2 - D4 \end{array} \right\} \text{sera la somme des} \left\{ \begin{array}{l} \text{solutions} \\ \text{quarez} \\ \text{Cubes} \\ \text{quaré-quarez} \end{array} \right.$$

In heutiger Schreibweise würde der Satz so aussehen. Seien $x_1, x_2, \cdots x_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + a_4 x^{n-4} - \cdots \pm a_n = 0,$$

so ist

$$\Sigma x = a_1, \quad \Sigma x^2 = a_1^2 - 2a_2, \quad \Sigma x^3 = a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3,$$
$$\Sigma x^4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4.$$

Den Werth anderer symmetrischer Functionen der Gleichungswurzeln giebt Girard nicht an, er wird also solche vermuthlich nicht weiter gekannt haben. Eine Bemerkung Girard's über das Ausziehen der Kubikwurzel aus der Summe einer rationalen Zahl und einer Quadratwurzel ist folgende. Es sei $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = \alpha + \sqrt{\beta}$, so folgt daraus $\sqrt[3]{a^2 - b} = \alpha^2 - \beta$ und ebenso $\sqrt[3]{b - a^2} = \beta - \alpha^2$, und darin besteht Girard's beweislos ausgesprochene Behauptung. Genau ebenso beweislos hatte (S. 446) Michael Stifel den allerdings nicht ganz so deutlich ausgesprochenen Zusammenhang als Zusatz zu der Rudolffschen Coss veröffentlicht, doch scheint Girard keine Kenntniss davon besessen zu haben, weil er sonst kaum als Einleitung besonders betont hätte, Niemand habe die Kubikwurzelausziehung aus Binomien noch erfunden[1]). Die Regel, welche Girard aus $\sqrt[3]{a^2 - b} = \alpha^2 - \beta$ mit gleichzeitiger Berücksichtigung von $a = \alpha^3 + 3\alpha\beta$, also von $a > \alpha^3$, sich bildet, besteht darin: zuerst wird der Zahlenwerth $\sqrt[3]{a^2 - b}$ gesucht, dessen Rationalität allerdings vorausgesetzt ist; dann nimmt

[1]) *L'extraction Cubique des binomes n'estant encore inventée de personne, on se pourra servir de la reigle suyvante.*

man alle $\alpha > \sqrt[3]{a}$ und bildet aus ihnen α^2; zieht man von jedem α^2 die Zahl $\sqrt[3]{a^2 - b}$ ab, so erscheint das zu jenem α^2 gehörige β, und man gewinnt somit alle die Ausdrücke $\alpha + \sqrt{\beta}$, von denen einer $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$ sein kann.

Früher als Girard's Invention nouvelle en l'algèbre wurde jedenfalls ein Werk verfasst, welches wir gleichwohl nach jenem nennen, weil es nicht früher als 1631 an die Oeffentlichkeit gelangte. Thomas Harriot[1]) (1560—1621) ist in Oxford geboren und als Schüler der dortigen Hochschule aufgewachsen. Im Jahre 1585 machte er im Auftrage von Sir Walter Raleigh eine Reise nach Virginien, um das Land auszumessen, wovon er die Ergebnisse 1588 unter der Ueberschrift: A brief and true report of the new found land of Virginia veröffentlichte. Einen reichen und sachverständigen Gönner fand Harriot in Henry Percy Earl of Northumberland, dem er seine Entdeckungen mitzutheilen pflegte. Die wichtigsten derselben gehören der Astronomie und der Physik an. Der Mathematiker Harriot ist ausschliesslich durch sein nachgelassenes Werk *Artis analyticae praxis* bekannt, welches 1631, mithin zehn Jahre nach dem Tode des Verfassers, durch Walter Warner herausgegeben wurde. Genannt hat sich der Herausgeber allerdings nicht, auch nicht innerhalb der offenbar von ihm herrührenden Vorrede, in welcher der Verdienste der Italiener, Stevin's und besonders Vieta's um die Algebra rühmend gedacht ist. Manches dürfte noch handschriftlich in Oxford aufbewahrt werden, dessen Durchmusterung wünschenswerth erscheint; denn wenn Percy, der Vertraute Harriot's, in einem erhaltenen Brieffragmente zu ihm sagt, Vieta habe ihn um die Ehre gebracht, Erfinder der Algebra geworden zu sein[2]), so ist man versucht, diesem Ausspruche eine breitere Grundlage zu geben, als die der Artis analyticae praxis, selbst wenn diese schon vor 1591, also vor dem Erscheinen von Vieta's *In artem analyticam isagoge* (S. 629) druckreif gewesen sein sollte. Ein so frühes Datum kann aber nicht vermuthet werden, weil sonst nicht in der Vorrede[3]) des Herausgebers und noch weniger in dem Werke selbst das Früherrecht gerade Vieta's so stark anerkannt sein könnte, als es der Fall ist[4]). Nehmen wir die grosse

[1]) Kästner III, 42—46 und 176—181. — Montucla II, 105—111. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch I, 47—51. — v. Zach, Monatliche Correspondenz VIII, 43—60. [2]) *Vieta prevented you of the Gharland for the greate Invention of Algebra.* [3]) *Exegetice ista numerosa est quam hic proferimus e Thomae Harrioti nostri schediasmatis depromptam; non quidem ut primis Victae cogitationibus formata est, sed posterioribus Harrioti reformatam.* [4]) *Artis analyticae praxis* pag. 2, *Definitio* 7: *Huic analytices parti a Francisco Vieta, magno*

Aehnlichkeit mancher Kunstausdrücke hinzu, welchen wir bei Vieta und Harriot begegnen, so besteht kein Zweifel, dass so weit die Artis analyticae praxis allein massgebend bleibt, Harriot nur als Schüler, nirgend als Nebenbuhler Vieta's erscheint. Für Harriot ist jede Gleichung dadurch entstanden, dass Factoren von der Gestalt $a - b$ oder $a + c$ oder $a + d$, wobei a die Unbekannte bezeichnet, für welche Vieta die Initialvocale A u. s. w. benutzte, mit einander vervielfacht wurden. Alsdann wird das die Unbekannte nicht enthaltende Glied mit entgegengesetztem Vorzeichen rechts vom Gleichheitszeichen geschrieben, alle übrigen Glieder bleiben links stehen, also etwa

$$aaa - baa + caa + daa - bca - bda + cda = bcd,$$

in der Schreibweise Harriot's, welcher die Producte durch einfaches Nebeneinanderschreiben der Buchstaben darstellte, mochten die Factoren einander gleich oder von einander verschieden sein. Ob das rechtsstehende Glied positiv oder negativ ausfällt, gilt Harriot gleich, der nur darauf sieht, dass das höchste Glied links mit keinem anderen Coefficienten als der nicht besonders geschriebenen positiven Einheit behaftet sei. Das Gleichheitszeichen Recorde's benutzt Harriot fortwährend, ausserdem noch den liegenden Winkel $<$ beziehungsweise $>$ für kleiner und grösser, wie er seitdem im Gebrauche geblieben ist. Die Gleichung in der oben angegebenen Form, bei welcher die Entstehung jedes einzelnen Gliedes deutlich hervortritt, heisst bei Harriot *aequatio canonica*, und das ist wohl das erste geschichtliche Vorkommen des Ausdruckes einer canonischen Form. Bei der aequatio canonica unterscheidet Harriot noch die *aequatio canonica primaria* von der *aequatio canonica secundaria*, welche dadurch entsteht, dass durch eigens getroffene Wahl von b, c, d Glieder, welche gleich hohe Potenzen von a enthalten, wegfallen, z. B. die Glieder mit aa, wenn $b = c + d$. Sind Glieder, deren Gesammtcoefficient nicht verschwindet, zusammengefasst und mit einfachem Buchstabencoefficienten oder mit einem Buchstabencoefficienten mit vorgesetztem Zahlencoefficienten versehen, in welchem das Bildungsgesetz nicht deutlich hervortreten kann, so nennt Harriot die Gleichung eine *aequatio communis*, und ihre Auflösung beruht dann regelmässig darauf, dass sie mit der canonischen Gleichung des gleichen Grades zusammengestellt wird. Harriot vergleicht[1]) z. B. $aaa - 3bba = 2ccc$, wobei $c > b$ vorausgesetzt ist, mit der durch $a = q + r$ erfüllten canonischen Gleichung $aaa - 3rqa = rrr + qqq$. Ist nun $bb = rq$,

artis analyticae magistro, Exegetices, quasi declaratoriae seu exhibitoriae nomen impositum est.

[1]) *Artis analyticae praxis. Sectio quinta. Propositio* 1, pag. 79.

$2ccc = rrr + qqq$, so ist der Uebergang der zweiten dieser beiden Gleichungen in eine solche, in welcher nur r oder nur q vorkommt und leicht daraus gefunden wird, ersichtlich, und man kann also auch $r + q$, d. h. die Wurzel der vorgelegten Gleichung finden. Die beigegebene Bedingung $c > b$ führt zu $c^6 > b^6$, d. h.

$$\frac{r^6 + 2r^3q^3 + q^6}{4} > \frac{4r^3q^3}{4} \text{ oder zu } \left(\frac{r^3 - q^3}{2}\right)^2 > 0,$$

was sicherlich wahr ist. Von negativen Gleichungswurzeln will Harriot nichts wissen, nur positive haben für ihn einen Sinn. Ja, er beweist sogar, dass Gleichungen nur positive Wurzeln besitzen![1]) Die Gleichung $eee - 3bbe = -ccc - 2bbb$ sei, behauptet Harriot, unmöglich, *impossibilis est.* Denn entweder müsste, wenn die Gleichung möglich sein sollte, $e = b$ oder $e > b$ oder $e < b$ sein. Die Annahme $e = b$ führe zu $ccc = 0$, was unmöglich sei. Die Annahme $e > b$ oder $e = b + d$ führe zu $3bdd + ddd + ccc = 0$, was wieder unmöglich sei. Endlich die Annahme $e < b$ oder $e = b - d$ führe zu $ddd - 3bdd = ccc$; daher müsse $d - 3b$ positiv, $d > 3b$ und um so mehr $d > b$ sein. Die Annahme $e = b - d$ schliesse aber $b > d$ ein, also sei auch hier ein Widerspruch vorhanden, der den Beweis der Unmöglichkeit der Gleichung vollende, ein Beweis, der offenbar nur dann, dann aber in der That richtig ist, wenn andere als positive Wurzelwerthe ausgeschlossen sind. Eine zweite Abtheilung[2]) der Artis analyticae praxis führt die besondere Ueberschrift *Exegetice numerosa* und behandelt die Auflösung von Zahlengleichungen. Der Grundgedanke besteht darin, die unbekannte Grösse als Summe zweier Theile zu betrachten, deren einer bekannt ist, worauf der zweite näherungsweise gefunden wird. Lässt man dann ihre Summe die Rolle des ersten Theiles spielen, so gewinnt man wieder einen natürlich kleineren zweiten Theil und damit eine zweite Annäherung u. s. w. So der wesentliche Inhalt eines Werkes, von dessen Verfasser man gewiss nicht wird behaupten wollen, er verdiene nicht einen Platz in der Geschichte der Algebra, aber von dem man noch weit weniger behaupten darf, er sei Bahnbrecher auf diesem Gebiete gewesen, in dessen Werk man nicht hineinlesen darf, was nun und nimmermehr darin enthalten war[3]).

Einen wirklichen Markstein in der geschichtlichen Entwickelung der Lehre von den Gleichungen bildet dagegen die Geometrie von

[1]) *Artis analyticae praxis. Sectio sexta. Problema* 1. *Lemma* pag. 89—90. [2]) Ebenda pag. 117—180. [3]) Diesem Fehler verfiel John Wallis in seiner Algebra von 1685. Wer seinen Bericht mit der *Artis analyticae praxis* vergleicht, muss glauben, Wallis habe ein ganz anderes Werk vor Augen gehabt.

Descartes, insbesondere wenn man, wozu es an Berechtigung nicht fehlt, auch dasjenige dazu rechnet, was zur mitunter sehr nothwendigen Erläuterung von Anderen, Zeitgenossen und Schülern des Verfassers, hinzugefügt worden ist. Die *Geometrie* erschien zuerst 1637 in französischer Sprache[1]). Der jüngere Franciscus van Schooten veranstaltete 1649 die Ausgabe einer lateinischen Uebersetzung, und ihr folgte 1659 ein erneuter Abdruck mit zahlreichen Ergänzungen von verschiedenen Verfassern in zwei Bänden[2]). Wiewohl der Titel der in drei Bücher gegliederten Geometrie einen ganz anderen Inhalt vermuthen lässt, und wiewohl auch thatsächlich Descartes bei deren Veröffentlichung vorzugsweise die geometrischen Gedanken verbreiten wollte, welche ihm schon Grosses geleistet hatten, Grösseres in sichere Aussicht stellten, so ist die Bedeutung der Geometrie keineswegs in ihnen allein zu suchen. Als eine etwas bunt gewürfelte Vereinigung der verschiedenartigsten Untersuchungen stellt das Werk sich dar, schwer zu verstehen, namentlich damals schwer zu verstehen, als es erschien und dem Leser auf Schritt und Tritt ganz neue überraschende Dinge bot, die ihn schier zu verwirren geeignet waren. Nicht als ob der Schriftsteller, welcher über das methodische Denken geschrieben hat, nicht im Stande gewesen wäre, klar Erfasstes auch fassbar für Andere auszusprechen, weit entfernt davon! Aber er schrieb absichtlich dunkel. Er that es, wie er in einem seiner Briefe sich einmal ausgedrückt hat, weil man sonst behauptet haben würde, es sei weder Neues noch Bedeutendes an seinen Entdeckungen. Selbstverständlich war auch nicht Alles neu, aber Verbesserungen, Erweiterungen, Nutzbarmachung zu neuen Zwecken finden wir aller Orten bei ihm, wie aus dem kurzen Auszuge ersichtlich werden wird, den allein wir hier geben dürfen. Um bei dem Aeusserlichsten anzufangen, nahm die Bezeichnung der Grössen bei Descartes die Gestalt an, welche sie seitdem beibehielt. Statt der Vocale benutzte er die letzten Buchstaben des Alphabetes, vorzugsweise und in erster Linie x, sodann y, z zur Bezeichnung der Unbekannten, die ersten Buchstaben a, b, c u. s. w. zur Bezeichnung der bekannten Grössen. Wie er gerade auf diese Wahl kam, ist nirgend angedeutet. Die Annahme, dass er das $\mathfrak{x}$ früherer deutscher Werke, welches er auf seinen Reisen z. B. bei Faulhaber in Ulm, kennen gelernt haben muss, irrig als

[1]) Ein Abdruck in den *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) V, 313—428. Spätere besondere Neudrucke der *Géométrie* erfolgten in Paris 1886 und 1894. Eine deutsche Uebersetzung von Ludw. Schlesinger erschien Berlin 1894. [2]) Da diese lateinische Ausgabe von 1659 die unter Mathematikern weitaus verbreitetste ist, so citiren wir ausschliesslich nach ihr unter dem Titel: Descartes, Geom. mit nachfolgender Angabe von Band und Seitenzahl.

x gelesen und durch diesen Buchstaben zu wiederholen gedacht habe, ist noch immer nicht ausgeschlossen, wenn auch auf die Möglichkeit hingewiesen worden ist, Cataldi's 𝟏 (S. 623) habe als Muster gedient und sei in x übergegangen[1]). Die Potenzbezeichnung nahm bei Descartes gleichfalls die Gestalt an, welche ihr bleiben sollte. Er bediente sich rechts erhöht stehender Exponenten. Den Exponenten 2 findet man aber bei Descartes nicht; statt dessen ist der quadrirte Buchstabe zweimal geschrieben[2]), also aa, nie a^2. Allgemeine Exponenten wie a^n schrieb Descartes noch nicht, und ebensowenig negative oder gebrochene. Auch Wurzelexponenten über den Wurzelzeichen kommen bei ihm noch nicht vor. Die Quadratwurzel ist durch ein einfaches Wurzelzeichen, die Kubikwurzel durch Hinzusetzung des Buchstaben C zum Wurzelzeichen angedeutet[3])

$$\sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Diese Kubikwurzel bringt Descartes bei Auflösung kubischer Gleichungen bei, eine Auflösung, deren Erfindung, wie er sagt, Cardanus einem gewissen Scipio Ferreus zuschreibe. Wir erwähnen dieses, weil hier die einzige Stelle der Geometrie ist, in welcher überhaupt ein verhältnissmässig neuer Schriftsteller genannt ist. Sonst begegnet man höchstens Namen wie Pappus, Apollonius, also von Männern des Alterthums, welche als Vorgänger in der Algebra natürlich nicht in Frage kommen. Die Gleichungen sind meistens auf Null gebracht[4]), wie es vereinzelt schon bei Stifel vorkam. Eine Neuerung von Descartes besteht in der Andeutung solcher Glieder, die in dem Gleichungspolynome fehlen, durch ein Sternchen[5]):

$$y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y^* \infty 0,$$

wo ausserdem zweierlei zu beachten ist: der Coefficient 1, welcher bei dem quadratischen Gliede sich findet, den aber Descartes nur bei späteren Gliedern des Gleichungspolynomes, nie bei dem ersten (hier y^4) schreibt, und das aus einer umgekehrten Verschlingung der Buchstaben *ae* entstandene Gleichheitszeichen ∞.

Jede Gleichung kann, sagt Descartes, so viele unterschiedene

[1]) G. Wertheim in der Zeitschr. Math. Phys. XLIV. Histor.-liter. Abthlg. S. 48. [2]) Genau dieselbe Gewohnheit hatte auch Gauss, dessen Meinung war, eine Abkürzung müsse nur dann in Anwendung kommen, wenn sie wirklich geringeren Platz einnehme. Nun nimmt aa im Drucke nicht mehr Raum ein als a^2, also hat es bei der ersten Schreibweise zu verbleiben. [3]) Descartes, Geom. I, 93. [4]) Ebenda I, 41—42 erstmalig. [5]) Ebenda I, 71 erstmalig.

Wurzeln oder Werthe besitzen, als ihr Grad anzeigt[1]). Aber, setzt er auf derselben Seite hinzu, es kommt auch häufig vor, dass einige dieser Wurzeln falsch oder kleiner als Null sind[2]). Und wieder an einer anderen Stelle: Sowohl die wahren (positiven) als falschen (negativen) Wurzeln sind nicht immer reell, sondern mitunter nur imaginär, d. h. man kann in jeder Gleichung die Vorstellung von so vielen Wurzeln, als ich gesagt habe, sich bilden, aber inzwischen giebt es keine Grösse, welche unserer Vorstellung entspräche[3]). Dieses Vorkommen der beiden in Gegensatz zu einander gebrauchten Wörter reell und imaginär ist das erste, welches wir bemerkt haben. Die Sache selbst war keineswegs neu, und Descartes dürfte hier als Schüler von Girard's *Invention nouvelle en l'algèbre* sich verrathen, welche in Holland ihm unter allen Umständen nicht unbekannt geblieben sein kann.

Noch weniger neu war es, dass das Gleichungspolynom als Product binomer Factoren ersten Grades zu denken sei, dagegen zog Descartes zwei neue wichtige Folgerungen, welche, so nahe sie uns jetzt zu liegen scheinen, noch nicht gezogen worden waren. Es wird hervorgehoben[4]), dass das Gleichungspolynom, *summa aequationis*, einer Gleichung, welche mehrere Wurzeln besitzt, stets durch ein Binomium ersten Grades theilbar sei, welches aus der Unbekannten minus einem positiven Wurzelwerthe oder plus einem negativen Wurzelwerthe bestehe, und dass derartige Divisionen den Grad der Gleichung um ebensoviele Einheiten herabsetzen. Es wird ferner zu wiederholten Malen hervorgehoben[5]), was Cardano (S. 536) nur leise zu verstehen gab, dass die Wurzelwerthe einer Gleichung Theiler der Gleichungsconstanten sein müssen. Descartes sagt zwar nicht, dass er Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten und eben solcher Constanten meint, und dass er dann auch nur an ganzzahlige Theiler dieser letzteren denkt, aber die von ihm vorgeführten Beispiele dulden keine andere Auffassung. Besonders deutlich ist die Erörterung der Gleichung $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$. Das letzte Glied, nämlich 64, lasse sich ohne Bruch, *sine fractione*, durch 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 theilen. Man solle daher der Reihe nach den Versuch machen, jene

[1]) Descartes I, 69: *Sciendum itaque, quod incognita quantitas in qualibet aequatione tot diversas radices seu diversos valores habere possit, quot ipsa habet dimensiones.* [2]) Ebenda I, 69: *Verum saepe accidit, quod quaedam harum radicum sint falsae, seu minores quam nihil.* [3]) Ebenda I, 76: *Caeterum radices tam verae quam falsae non semper sunt reales, sed aliquando tantum imaginariae: hoc est, semper quidem in qualibet aequatione tot radices quot dixi imaginari licet; verum nulla interdum est quantitas, quae illis, quas imaginamur, respondet.* [4]) Ebenda I, 69—70. [5]) Ebenda I, 70 und deutlicher I, 77.

Gleichung durch eines der Binome $y^2 - 1$ oder $y^2 + 1$, $y^2 - 2$ oder $y^2 + 2$, $y^2 - 4$ oder $y^2 + 4$ u. s. w. zu dividiren; man werde finden, dass sie durch $y^2 - 16$ sich theilen lasse.

Weitaus am hervorragendsten ist freilich Descartes' Zeichenregel. Wir haben (S. 539) gesehen, dass Cardano eine Behauptung aufstellte, welche aus seiner undeutlichen Ausdrucksweise herausgeschält den Sinn besitzt, dass ein einmaliger Zeichenwechsel in einem Gleichungspolynome das Merkmal einer einzigen positiven Wurzel sei, während bei zweimaligem Zeichenwechsel entweder mehrere Wurzeln positiv oder alle imaginär seien. Es ist möglich, es ist vielleicht wahrscheinlich, dass Descartes, dessen Reisen, auf welchen er stets Kenntnisse zu sammeln bestrebt war, sich auch über Italien erstreckten, die Schriften Cardano's kennen lernte. Aber auch dieses als Thatsache vorausgesetzt, war jedenfalls Descartes der erste, welcher in dem erwähnten Cardano'schen Satze den Keim zu einer Verallgemeinerung sah, welche er folgendermassen aussprach: So viele Zeichenwechsel, so viele Zeichenfolgen ein Gleichungspolynom besitzt, so viele positive, so viele negative Wurzeln kann die Gleichung haben[1]). Descartes ist später wegen dieses Ausspruches vielfach gescholten worden. Eine Behauptung warf man ihm vor, sei kein bewiesener Satz, und überdies sei die Behauptung nicht einmal wahr, da sie die Fälle imaginärer Wurzeln unerörtert lasse. Beide Vorwürfe sind ungerecht. Der zweite scheitert an dem Worte *possint*, welches Descartes in vorsichtigster Weise gebraucht. Die Gleichung kann, sagt er, so und so viele positive, negative Wurzeln besitzen, und das ist buchstäblich wahr. Das enthält überdies auch mit eingeschlossen, dass es höchstens so und so viele Wurzeln sein können, denn man wird doch Descartes' *possint* nicht so aufzufassen im Stande sein, dass der Wurzeln auch noch mehrere sein können? Und der erste Vorwurf darf nicht Descartes, darf nur der Zeit gemacht werden. Beispiele unbewiesen ausgesprochener Sätze werden dem Leser mehr begegnen, wenn er nur in diesem Abschnitte zurückblättert. Man hatte sich noch nicht gewöhnt, jede mathematische Behauptung, auch wo sie nur gelegentlich auftrat, sofort mit strengem Beweise zu versehen.

Noch weitere algebraische Sätze spricht Descartes eben so gelegentlich, eben so ohne Beweis aus[2]), wenn man nicht Ausführung

[1]) Descartes I, 70: *Ex quibus etiam cognoscitur quot verae et quot falsae radices in unaquaque Aeqatione haberi possint. Nimirum tot veras haberi posse quot variationes reperiuntur signorum + et —; et tot falsas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa + vel duo signa —, quae se invicem sequuntur.*
[2]) Ebenda I, 74—75.

an einzelnen Beispielen als Beweis gelten lassen will. Besitzt eine Gleichung keine Gleichungsconstante, so ist 0 eine ihrer Wurzeln, und der Grad der Gleichung kann mittels Division durch die Unbekannte herabgesetzt werden. Man kann auch umgekehrt durch Multiplication mit der Unbekannten die Gleichung im Grade erhöhen, worauf sie keine Gleichungsconstante mehr besitzt. Man kann dann weiter die Unbekannte als Summe einer neuen Unbekannten und einer an sich beliebigen Zahl betrachten, um eine neue Gleichung mit einer Gleichungsconstanten zu erhalten, und man kann dabei jene beliebige Zahl so bestimmen, dass ein absichtlich gewähltes Glied der neuen Gleichung den Coefficienten 0 erhalte, d. h. fehle.

So entsteht aus $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ die neue Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 0$, aus dieser durch $x = y + z$ die fernere $y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = 0$, und endlich durch planmässige Bestimmung von z die Schlussgleichung $y^4 + py^2 + qy - r = 0$. Der Vortheil dieser Umwandlung, welche den Grad der Gleichung zwar erhöht, aber ihn zur geraden Zahl macht, besteht darin[1]), dass nunmehr eine Zerlegung in zwei Factoren gleich hohen Grades angestrebt werden kann.

Umgekehrt ist freilich jene Zerlegung, welche als eine Methode wesentlicher Erniedrigung des Grades einer aufzulösenden Gleichung aufgefasst werden kann, nur dann möglich, wenn es gelingt, zuvor eine Hilfsgleichung aufzulösen. Für die Gleichung

$$y^4 + py^2 + qy - r = 0$$

ist diese Hilfsgleichung

$$z^6 + 2pz^4 + (p^2 + 4r)z^2 - q^2 = 0$$

formell vom 6., eigentlich vom 3. Grade und liefert damit eine neue Auflösung der allgemeinen Gleichung 4. Grades mit Hilfe kubischer Gleichungen.

Wir haben schon (S. 795) darauf aufmerksam gemacht, dass Descartes die *Invention nouvelle en l'algèbre* zuverlässig kannte. Die gleiche Ueberzeugung gewinnt man aus einem Briefe, welchen Descartes unter dem 1. Februar 1640 an Jacob van Waessenaer richtete[2]). Ueber die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem aus einem rationalen Theile und einer irrationalen Quadratwurzel bestehenden Binomium war zwischen Stampioen und dem genannten Jacob van Waessenaer, einem in Utrecht wohnenden Anhänger von Descartes, ein Streit ausgebrochen. Descartes spielte, wenigstens

[1]) Descartes, Geom. I, 79 sqq. [2]) Veröffentlicht durch H. Bierens de Haan in der Zeitschr. Math. Phys. XXXII. Hist.-liter. Abthlg. S. 163 flgg. Vergl. auch Bierens de Haan, *Bouwstoffen* etc. II, 383—433.

hinter den Coulissen, eine Rolle in diesem Streite und versah seinen Schüler mit Gründen, welche dieser zur Verwerthung bringen könne. In dem erwähnten Briefe ist jener Satz über $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = \alpha + \sqrt{\beta}$ bewiesen, welchen wir bei Stifel, bei Girard auftreten sahen (S. 789), und der in der Gleichung $\sqrt[3]{a^2 - b} = \alpha^2 - \beta$ seinen Ausdruck findet. Hat Descartes ihn vielleicht auch nicht bewusst von Girard entlehnt, so hält es doch schwer, nicht an ein unbewusstes Nachwirken des früher Gelesenen zu denken.

Mochte Jacob van Waessenaer damals noch als Anfänger zu betrachten gewesen sein, der in einer ziemlich einfachen Sache der Anleitung bedurfte, in einer um etwa 20 Jahre späteren Zeit finden wir ihn mit Untersuchungen beschäftigt, welche an Descartes anknüpfen, aber über ihn hinausgehen. Wir sahen, dass Descartes dazu kam, Probeversuche mit sämmtlichen positiv und negativ zu wählenden Theilern der Gleichungsconstante zu empfehlen, ob man so eine Gleichungswurzel entdecke. Van Waessenaer gab ein Mittel an[1]), diese der Zahl nach oftmals ausserordentlich vielen Versuche wesentlich einzuschränken. Sei z. B. die Gleichung $x^3 - x^2 - 30x + 72 = 0$ vorgelegt, so giebt es 12 Theiler von 72, nämlich 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72, welche alle positiv und negativ durchprobirt ein 24maliges Rechnen beanspruchen würden. Van Wassenaer nimmt statt dessen zunächst zwei Umformungen vor, die eine durch $x = y + 1$, die andere durch $x = z - 1$, und er vollzieht sie nicht einmal vollständig, sondern begnügt sich mit der Auffindung der neuen Gleichungsconstanten, welche in dem einen Falle (bei der Gleichung in y) $1 - 1 - 30 + 72 = 42$, in dem anderen Falle (bei der Gleichung in z) $-1 - 1 + 30 + 72 = 100$ wird. Damit sind die Probezahlen für y als 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 und die für z als 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, jede sowohl positiv als negativ, gewonnen. Weil aber $x = y + 1$ und $x = z - 1$, so entstehen zwei neue Reihen positiver Versuchswerthe für x: aus den y die 2, 3, 4, 7, 8, 15, 22, 43, aus den z die 0, 1, 3, 4, 9, 19, 24, 49, 99. Nur $x = 3$ und $x = 4$ kommen gleichzeitig in allen drei Reihen möglicher Werthe von x vor, und mit diesen Zahlen hat man also die Rechnung wirklich anzustellen, welche alsdann zeigt, dass hier in der That Wurzelwerthe vorliegen.

Die Veröffentlichung dieses recht zweckmässigen Abkürzungsverfahrens fand, wie unser Citat erkennen lässt, in der zweiten lateinischen Ausgabe der Geometrie von 1659 statt. Eine weitere Ausdehnung desselben auf irrationale Wurzeln von einer gewissen

---

[1]) Descartes, Geom. I, 307.

Form ist um 1700 dem Hamburger Mathematiker Heinrich Meissner gelungen [1]).

Unter den Erläuterungen, welche der lateinischen Ausgabe der Geometrie von 1659 beigefügt sind, rühren die zuerst gedruckten von Florimond de Beaune[2]) (1601—1652) her, der zugleich als der erste französische Anhänger von Descartes zu nennen ist, welcher dessen Geometrie studirte und bewunderte. Descartes, welchem die Erläuterungen vor ihrer Veröffentlichung vorlagen, billigte dieselben vollkommen, als seine Gedanken durchaus richtig wiedergebend. Dabei war de Beaune nicht Mathematiker von Beruf, sondern zu Anfang Officier, später Rath am Gerichtshofe zu Blois, seiner Vaterstadt, wo auch Descartes, mit welchem er seit 1626 in Verbindung stand, 1644 eine Zeit lang sein Gast war. In den Erläuterungen geht De Beaune unter Anderem auf die gegenseitige Beziehung zwischen den beiden Gleichungen

$$y^4 + py^2 + qy - r = 0 \text{ und } z^6 + 2pz^4 + (p^2 + 4r)z^2 - q^2 = 0$$

(S. 797) näher ein[3]). Zwischen den beiden Unbekannten y und z möge der Zusammenhang stattfinden:

$$y^2 + zy + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z} = 0 \text{ oder } y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}p = \frac{q}{2z} - zy.$$

Quadrirt man letztere Gleichung, so entsteht

$$y^4 + z^2y^2 + \frac{1}{4}z^4 + py^2 + \frac{1}{2}pz^2 + \frac{1}{4}p^2 = \frac{q^2}{4z^2} - qy + z^2y^2$$

oder

$$y^4 + py^2 + qy + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}pz^2 - \frac{q^2}{4z^2} + \frac{1}{4}p^2 = 0.$$

Da aber $y^4 + py^2 + qy = r$ gegeben ist, so geht die zuletzt erhaltene Gleichung in

$$\frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}pz^2 - \frac{q^2}{4z^2} + \frac{1}{4}p^2 + r = 0$$

über oder nach Vervielfachung mit $4z^2$ in

$$z^6 + 2pz^4 + (p^2 + 4r)z^2 - q^2 = 0,$$

wie es bei Descartes sich findet. Kennt man erst z aus der letzteren Gleichung, so ist es leicht, y aus der nach dieser Unbekannten nur noch quadratischen Gleichung

$$y^2 + zy + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z} = 0$$

zu finden. Man kann aber ausserdem jetzt auch $y^4 + py^2 + qy - r$ in zwei quadratische Factoren zerfällen, deren einer

---

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XXXV. Hist.-liter. Abthlg. S. 180—181. [2]) Montucla II, 145. [3]) Descartes, Geom. I, 137—139.

$$y^2 + zy + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z}$$

heissen muss, während der andere $y^2 - zy + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2z}$ ist.

Franciscus van Schooten, welcher gleichfalls Erläuterungen beigab, hat die Factorenzerlegung des Gleichungspolynoms 4. Grades etwas anders eingeleitet[1]). Um $x^4 - px^2 - qx + r = 0$ auf zwei quadratische Gleichungen zurückzuführen, setzt er

$$\begin{aligned} x^4 - px^2 - qx + r &= (x^2 + yx + z)(x^2 - yx + v) \\ &= x^4 + (z - y^2 + v)x^2 + (vy - zy)x + vz, \end{aligned}$$

und nun zerfällt diese Gleichung nach einem Gedanken, der offenbar eine der ersten Anwendungen der Descartes'schen Methode der unbestimmten Coefficienten durch einen anderen als ihren Erfinder darstellt, in die drei neuen Gleichungen $z - y^2 + v = -p$, $-zy + vy = -q$, $vz = r$. Daraus ergebe sich, sagt Van Schooten, ohne den Gang des Eliminationsverfahrens anzudeuten, der übrigens bei den nach z und v linearen beiden ersten Gleichungen auf der Hand liegt, $z = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$, $v = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$. Einführung dieser Werthe in $vz = r$ giebt nach weiteren Umformungen, welche Van Schooten wieder dem Leser überlässt, die nach y^2 kubische Gleichung $y^6 - 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0$, aus welcher die Kenntniss von y folgt. Einsetzung der Werthe z und v in die vorher angenommenen Factoren giebt denselben die Gestalt

$$x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$$

und

$$x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}.$$

Jeder dieser Factoren gleich Null gesetzt, lässt endlich zwei Wurzelwerthe von x entdecken.

De Beaune hat ausser jenen Erläuterungen zu bestimmten einzelnen Stellen der Descartes'schen Geometrie auch eine Schrift *De limitibus aequationum* hinterlassen, welche gleichfalls Aufnahme fand[2]). Sie hat einen Untersuchungsgegenstand ganz neuer Art. Sie fragt nämlich, wenn auch nur in ganz besonderen Fällen, nach leicht bestimmbaren Grenzwerthen, zwischen welchen die Gleichungswurzel enthalten sein muss. Aus $x^2 - lx + m^2 = 0$ folgt beispielsweise $m^2 = lx - x^2$, d. h. $lx - x^2$ muss positiv und $l > x$ sein. Andererseits folgt aber auch $x^2 = lx - m^2$, d. h. $lx - m^2$ muss positiv und $x > \frac{m^2}{l}$ sein. Bei der kubischen Gleichung

[1]) Descartes, Geom. I, 315. [2]) Ebenda II, 121—152.

$$x^3 + lx^2 - m^2x + n^3 = 0$$

ergeben sich die Grenzen folgendermassen. Es ist $x^3 + lx^2 = m^2x - n^3$ positiv, mithin $x > \frac{n^3}{m^2}$. Es ist aber auch $x^3 + n^3 = m^2x - lx^2$ positiv, mithin $x < \frac{m^2}{l}$. Statt der letzteren oberen Grenze ist auch eine anderweitige angebbar. Man kann nämlich das Positivsein von $lx^2 + n^3 = m^2x - x^3$ als massgebend betrachten, woraus $m^2 > x^2$, d. h. $x < m$ hervorgeht.

Die Factorenzerlegung eines Gleichungspolynoms, mit welchem nach Descartes De Beaune und Van Schooten, wie wir wissen, sich beschäftigten, reizte auch einen zweiten holländischen Schriftsteller: Johann Hudde[1]). Im Jahre 1628 in Amsterdam geboren und unter dem 23. April in das dortige Taufbuch eingetragen, begab er sich 1659 nach vollendetem Rechtsstudium nach Frankreich. Von dort zurückgekehrt, trat er 1667 in die Verwaltung seiner Vaterstadt, welcher er nicht weniger als 19mal als Bürgermeister vorstand. Er starb 1704. Schon im Juli 1657, also als Rechtsstudirender in einem Alter von wenig über 29 Jahren, schrieb Hudde an Van Schooten einen Brief: *De reductione aequationum*, welchen dieser abdrucken liess[2]). Unter Reduction versteht Hudde die Zerlegung des Gleichungspolynoms in Factoren. Dabei hat Hudde in der XXI. Regula, 4. Exemplum[3]) auch die Auflösung kubischer Gleichungen, allerdings in nicht wesentlich verschiedener Art als die Italiener gelehrt. Ausgehend von $x^3 = qx + r$ setzt Hudde $x = y + z$ mithin $x^3 = y^3 + 3zy^2 + 3z^2y + z^3 = qx + r$ und zerlegt die Gleichung in zwei neue $3zy^2 + 3z^2y = qx$ und $y^3 + z^3 = r$. Die erstere geht über in $3zyx = qx$ oder $y = \frac{\frac{1}{3}q}{z}$, und durch Einsetzung dieses Werthes verwandelt sich die zuvor in $y^3 = r - z^3$ umgeformte zweite Gleichung in $\frac{\frac{1}{27}q^3}{z^3} = r - z^3$. Daraus folgt

$$z^3 = \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3} \text{ und } y^3 = r - z^3 = \frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3}.$$

Weil aber y und z sich einzig dadurch unterscheiden, dass das vor-

[1]) *Oeuvres complètes de Christian Huygens* I, 514, Note 2. — D. J. Korteweg, Das Geburtsjahr von Johannes Hudde (Zeitschr. Math. Phys. XLI. Hist.-liter. Abthlg. S. 22—23). Den Eintrag in das Taufbuch fand K. O. Meinsma und widerlegte dadurch eine frühere Vermuthung, nach welcher Hudde schon 1623 geboren wäre. [2]) Descartes, Geom. I, 407—506. [3]) Ebenda I, 499—500.

kommende Doppelzeichen einmal $\pm$ und einmal $\mp$ heisst, und man nur der Summe $y + z$ bedarf, sò genügt es beidemal, das obere Zeichen allein zu schreiben, und man hat

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}r + \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 - \tfrac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 - \tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Ferner findet sich schon in diesem Briefe als X. Regula[1]) gelegentlich die Frage behandelt, wie man entscheiden könne, ob eine Gleichung zwei oder gar mehrere gleiche Wurzeln besitze, und dieselbe sogenannte Hudde'sche Regel erscheint wieder, und zwar bewiesen[2]), in einem zweiten Briefe vom Januar 1658, welcher die Ueberschrift trägt: *De maximis et minimis.*

Die Regel besteht in Folgendem. Man bildet eine beliebige steigende oder fallende arithmetische Progression, unter deren Gliedern auch die Null vorkommen darf, und setzt dieselbe unter die auf einander folgenden Glieder des zu untersuchenden Gleichungspolynoms, dessen etwa fehlende Glieder mit dem Coefficienten 0 geschrieben oder sonstwie, etwa durch Sternchen, angedeutet werden. In dieser Stellung multiplicirt man jedes Glied des Gleichungspolynoms mit dem gerade unter ihm befindlichen Gliede der arithmetischen Reihe und vereinigt die sämmtlichen Producte zu einem neuen Gleichungspolynom, welches wieder gleich 0 gesetzt wird. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die vorgelegte Gleichung mehrfach auftretende Wurzeln besass, besteht alsdann in dem Vorhandensein eines Gemeintheilers zwischen dem ursprünglichen und dem zuletzt erhaltenen Gleichungspolynome.

Suchen wir den Beweis einem heutigen Leser etwas mundgerechter zu machen, so sieht er folgendermassen aus. Es sei

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$$

multiplicirt mit $(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$ und das Product gleich Null gesetzt, so wissen wir zum voraus, dass die so entstehende Gleichung:

$$\begin{aligned}\text{I.}\quad x^{m+2} &+ (a_1 - 2b)x^{m+1} + (a_2 - 2a_1 b + b^2)x^m + \cdots \\ &+ (a_m - 2a_{m-1}b + a_{m-2}b^2)x^2 + (-2a_m b + a_{m-1}b^2)x \\ &+ a_m b^2 = 0\end{aligned}$$

zwei gleiche Wurzeln $x = b$ besitzen wird. Die darunter zu setzende arithmetische Reihe heisst in ihren drei Anfangsgliedern α, $\alpha + \delta$, $\alpha + 2\delta$, in ihren drei letzten Gliedern $\alpha + m\delta$, $\alpha + (m+1)\delta$, $\alpha + (m+2)\delta$. Multiplication der Reihenglieder mit den Gliedern

[1]) Descartes, Geom. I, 433—439. [2]) Ebenda I, 507—509.

der Gleichuug I. in der vorbeschriebenen Weise liefert die neue Gleichung

$$\begin{aligned}\text{II.}\quad \alpha x^{m+2} &+ \big((\alpha + \delta)a_1 - (2\alpha + 2\delta)b\big)x^{m+1} \\ &+ \big((\alpha + 2\delta)a_2 - (2\alpha + 4\delta)a_1 b + (\alpha + 2\delta)b^2\big)x^m + \cdots \\ &+ \big((\alpha + m\delta)a_m - (2\alpha + 2m\delta)a_{m-1}b + (\alpha + m\delta)a_{m-2}b^2\big)x^2 \\ &+ \Big(-(2\alpha + (2m+2)\delta)a_m b + (\alpha + (m+1)\delta)a_{m-1}b^2\Big)x \\ &+ (\alpha + (m+2)\delta)a_m b^2 = 0\end{aligned}$$

und diese Gleichung ebenso wie die Gleichung I. ist durch $x - b$ theilbar. Die Ausführung der Division des Gleichungspolynoms II. durch $x - b$ liefert nämlich den Quotienten

$$\begin{aligned}\alpha x^{m+1} &+ \big((\alpha + \delta)a_1 - (\alpha + 2\delta)b\big)x^m \\ &+ \big((\alpha + 2\delta)a_2 - (\alpha + 3\delta)a_1 b\big)x^{m-1} + \cdots \\ &+ \Big((\alpha + m\delta)a_m - (\alpha + (m+1)\delta)a_{m-1}b\Big)x \\ &- (\alpha + (m+2)\delta)a_m b.\end{aligned}$$

Wurde dagegen

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

nur mit $x - b$ multiplicirt und dieses Product gleich Null gesetzt, so wird, sofern über die Coefficienten a ganz frei verfügt werden kann, die nunmehr entstehende Gleichung I′. keine zwei gleiche Wurzeln $x = b$ enthalten, dagegen durch $x - b$ selbstverständlich theilbar sein. Man behandelt sie genau so wie vorher die Gleichung I. Das Ergebniss ist alsdann eine neue Gleichung

$$\begin{aligned}\text{II}'.\quad \alpha x^{m+1} &+ (\alpha + \delta)(a_1 - b)x^m + (a + 2\delta)(a_2 - a_1 b)x^{m-1} + \cdots \\ &+ (\alpha + (m-1)\delta)(a_{m-1} - a_{m-2}b)x^2 \\ &- (\alpha + m\delta)a_{m-1}bx - (\alpha + (m+1)\delta)a_m b = 0,\end{aligned}$$

deren Gleichungspolynom nicht durch $x - b$ theilbar ist. Die Ausführung der Division lässt nämlich gleich in den Anfangsgliedern des Quotienten

$$\alpha x^m + \big((\alpha + \delta)a_1 - \delta b\big)x^{m-1} + \big((\alpha + 2\delta)a_2 - \delta a_1 b - \delta b^2\big)x^{m-2} + \cdots$$

erkennen, dass der Coefficient jeder folgenden Potenz von x immer länger wird. Er besteht bei x^m aus einem, bei x^{m-1} aus zwei, bei x^0 aus $m + 1$ Theilen, und diese können mit $-b$ multiplicirt unter keinen Umständen $-(\alpha + (m+1)\delta)a_m b$ liefern, d. h. die Division geht nicht auf.

Fermat's Namen in der Geschichte der algebraischen Untersuchungen auftreten zu sehen wird Niemand in Verwunderung setzen. Es sind zwei hochbedeutende Aufgaben, welche er sich stellte, und welche er mit einander in Verbindung brachte. Die erste ist die des Rationalmachens von Gleichungen[1]). Fermat erläutert zwar sein Verfahren nur an einem einzelnen Beispiele, aber es ist so methodisch, dass es als Muster für das Verfahren auch in jedem anderen Falle dienen kann. Wir benutzen bei der Darstellung gleich Fermat lateinische Initialen, A als Unbekannte, B, D als bekannte Grössen, aber ungleich Fermat wenden wir Wurzelzeichen, Exponenten und Gleichheitszeichen an. Die Gleichung

$$\sqrt[3]{2A^2 - A^3} + \sqrt[3]{A^3 + B^2A} = D$$

sei also von den Assymetrien, wie die Irrationalitäten nach Vieta's Vorgange genannt werden, zu befreien. Man bringt eine Wurzelgrösse z. B. $\sqrt[3]{2A^2 - A^3}$ allein auf eine Seite des Gleichheitszeichens und ersetzt sämmtliche andere auf der entgegengesetzten Seite des Gleichheitszeichens vorhandene Wurzelgrössen (hier nur die einzige $\sqrt[3]{A^3 + B^2A}$) durch einfache Buchstaben. Man gewinnt also zwei Gleichungen

$$\sqrt[3]{A^3 + B^2A} = E \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{2A^2 - A^3} = D - E.$$

Wäre etwa noch eine dritte Wurzelgrösse vorhanden, welche mit I bezeichnet würde, so käme als dritte Gleichung die Definitionsgleichung von I hinzu, während in der zweiten Gleichung ein weiteres Glied $-I$ zur Rechten aufträte. Sämmtliche nunmehr vorliegende Gleichungen lassen durch einfache Potenzerhebung sich rationalisiren. In dem gegebenen Falle genügt die Erhebung auf die 3. Potenz, welche folgende zwei neue Gleichungen liefert:

$$A^3 + B^2A = E^3, \quad 2A^2 - A^3 = D^3 - 3D^2E + 3DE^2 - E^3,$$

und die Aufgabe ist somit gelöst, wenn zwischen diesen Gleichungen die Hilfsunbekannte E eliminirt werden kann. Das Rationalmachen einer Gleichung, innerhalb deren n Irrationalgrössen auftreten, ist folglich auf eine durchaus andere Aufgabe zurückgeführt, auf die der Elimination von $n-1$ Unbekannten zwischen n Gleichungen höheren Grades. Diese zweite Aufgabe behandelt Fermat gleichfalls methodisch, allerdings zunächst unter der Voraussetzung $n = 2$, also so dass, wie in dem angeführten Beispiele, eine Unbekannte zwischen zwei Gleichungen wegzuschaffen ist. Er verfährt dabei folgendermassen[2]): Die Gleichungen werden so geschrieben,

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 60 und in der neuen Ausgabe der *Oeuvres de Fermat* (Paris 1891) I, 184—188. Die Darstellung in Klügel's Mathematischem Wörterbuche II, 953 ist ganz ausnahmsweise durchaus mangelhaft. [2]) Ebenda pag. 58—59. *Oeuvres* I, 181—184: *Nova secundarum et ulterioris ordinis radicum in analyticis usus.*

dass alle Glieder, welche die zu eliminirende Grösse enthalten, auf der einen, alle, welche sie nicht enthalten, auf der anderen Seite des Gleichheitszeichen stehen. Division mittels der die zu eliminirende Grösse nicht enthaltenden Gleichungsseite bringt jede der beiden Gleichungen auf die Form, dass die Einheit einem Ausdrucke gleich kommt, welcher die zu eliminirende Grösse als heraustretenden Factor besitzt. Gleichsetzung der beiden Einheitswerthe gestattet demnach eine durch Division zu bewirkende Herabsetzung des Grades in Bezug auf die zu eliminirende Grösse. Fortsetzung des gleichen Verfahrens unter stetiger Anwendung der vorhandenen Gleichungen niedrigsten Grades lässt schliesslich die zu eliminirende Grösse ganz in Wegfall bringen. Das Beispiel Fermat's ist $A^3 + E^3 = Z^3$ nebst

$$BA + E^2 + DE = N^2.$$

Fermat findet $1 = \frac{E^3}{Z^3 - A^3}$ und $1 = \frac{E^2 + DE}{N^2 - BA}$, also $\frac{E^2}{Z^3 - A^3} = \frac{E + D}{N^2 - BA}$. Letztere Gleichung geht über in $1 = \frac{(N^2 - BA)E^2 - (Z^3 - A^3)E}{D(Z^3 - A^3)}$ und dieser Einheitswerth wird mit $1 = \frac{E^2 + DE}{N^2 - BA}$ verglichen. Dabei erscheint nach abermaliger Division durch E die neue Gleichung

$$\frac{E + D}{N^2 - BA} = \frac{(N^2 - BA)E - (Z^3 - A^3)}{D(Z^3 - A^3)},$$

welche die Auffindung von E gestattet. Einsetzung von dessen Werth in $E^2 + DE = N^2 - BA$ vollendet die Elimination, aber diese letzten mit allgemeinen Buchstabenausdrücken mühseligen Ausführungen schenkt Fermat sich und seinen Lesern. Zum Schlusse der kurzen Abhandlung deutet Fermat an, dass wenn drei Gleichungen mit drei Unbekannten vorliegen, zunächst auf die Elimination einer Unbekannten hingearbeitet werden müsse, so dass man noch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten behalte, worauf das eben gelehrte Verfahren zur wiederholten Anwendung gebracht eine Schlussgleichung mit einer einzigen Unbekannten entstehen lasse, und das Gleiche gelte bei noch mehr Gleichungen mit einer entsprechenden Anzahl von Unbekannten.

Was die Frage betrifft, wann Fermat diese algebraischen Untersuchungen anstellte, so ist mit Recht der 26. December 1638 als Zeitpunkt angegeben worden, zu welchem er sie schon besass[1]), denn in einem Briefe an Mersenne von jenem Tage spricht er bereits von

[1]) Tannery, *Sur la date des principales découvertes de Fermat* pag. 13 mit Bezugnahme auf Henry, *Recherches sur les manuscrits de Fermat* pag. 178 (*Bullet. Boncamp.* XII, 652).

einer Curve, an welche er die Tangente ziehen könne, und welche (wenn wir neuere Schreibart anwenden) die Gleichung

$$y = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{cx - x^2} + \sqrt{\frac{x^3 - ax^2}{b}} + \sqrt{\frac{x^4 + b^2x^2}{a^2 + x^2}}$$

besitze. Er setzt hinzu, seine Methode genüge auch, wenn der Werth der Ordinate hundert und noch mehr Glieder enthielte, *serait composée de centinomies ou plus grand nombres de termes.* Später am 20. August 1650 kam Fermat in einem Briefe an Carcavy[1]) auf eine ganz ähnliche Tangentenaufgabe zu reden, in welcher die Curvengleichung 2., 3., 4. und 5. Wurzeln enthält. Er habe, sagt er dabei, nicht zögern wollen mit der Uebersendnng seiner *Méthode générale pour le debrouillement des assymétries.* Damals waren also die betreffenden Abhandlungen jedenfalls niedergeschrieben.

77. Kapitel.

Geometrische Gleichungsauflösungen. Analytische Geometrie.

Bei Schilderung der algebraischen Leistungen der unserer Betrachtung unterworfenen Zeit haben wir bisher eine Gattung von Untersuchungen vernachlässigt, diejenigen, welche trigonometrische und geometrische Lehren in den Dienst der Algebra stellen. Vieta hatte bereits (S. 636) den irreductiblen Fall der kubischen Gleichungen trigonometrisch behandelt. Es müsste Staunen erregen, wenn Männer, wie die von uns in diesem Abschnitte behandelten, die aus Vieta's Schriften die mannigfachste Anregung geschöpft haben, gerade an diesen Dingen vorbeigegangen wären.

Girard in seiner *Invention nouvelle en l'algèbre* löst die Gleichung $x^3 = 13x + 12$ geometrisch wie folgt (Figur 144). Mit $\sqrt{\frac{13}{3}}$ als Halbmesser wird um H als Mittelpunkt ein Halbkreis beschrieben. Dann wird $12 : \frac{13}{3} = FG$ aufgetragen, welches immer möglich sei, und der Bogen GK mit Hilfe einer Hyperbel (denn mit Zirkel und Lineal gehe es nicht) in drei gleiche Theile GJ, JL, LK getheilt; FL ist alsdann eine Gleichungswurzel. Wird wieder um H mit KL als Halbmesser ein Kreisbogen beschrieben, der FL in M und N

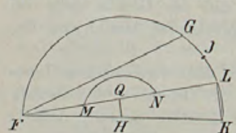


Fig. 144.

[1]) Henry l. c. pag. 193 (XII, 667).

schneidet, so seien $-FN$ und $-FM$ die beiden anderen Gleichungswurzeln. Ein Beweis, den Girard kaum andeutet, lässt sich ziemlich leicht herstellen. Die Gleichung heisse $x^3 = px + q$, und es sei $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$; der Halbmesser r des Halbkreises wird von der Länge $\sqrt{\frac{p}{3}}$ gewählt und $FG = q : \frac{p}{3} = \frac{3q}{p} < 2r$ unter Voraussetzung der angegebenen Ungleichung, so dass man die Richtigkeit der Bemerkung erkennt, FG, welches kleiner als der Durchmesser ist, könne als Sehne eingezeichnet werden. Nun heisse der Winkel $GFK = 3\varphi$, der Winkel $LFK = \varphi$. Es ist

$$FG = 2r \cdot \cos 3\varphi, \quad FL = 2r \cdot \cos\varphi.$$

Aber

$$\cos 3\varphi = 4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi,$$

demnach

$$FG = 2\sqrt{\frac{p}{3}}(4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi) = \frac{3q}{p}$$

und folglich

$$q = \sqrt{\frac{p^3}{27}}(8\cos\varphi^3 - 6\cos\varphi).$$

Nun ist weiter

$$8\cos\varphi^3 = \frac{FL^3}{r^3} = \frac{FL^3}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}, \quad 6\cos\varphi = \frac{3FL}{r} = \frac{p}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}FL.$$

Die gefundene Gleichung geht dadurch in $q = FL^3 - p \cdot FL$ über, woraus $FL = x$ ersichtlich ist. Zieht man die bei Girard nicht vorhandene Hilfslinie $HQ \parallel KL$, so ist leicht abzuleiten

$$-FM = 2r \cdot \cos(120^0 - \varphi), \quad -FN = 2r \cdot \cos(120^0 + \varphi),$$

wodurch auch diese Wurzelwerthe sich rechtfertigen.

Nur sehr unwesentlich verschieden ist die Figur, unter deren Zugrundelegung (Figur 145) Franciscus van Schooten eben jene Gleichung $x^3 = 13x + 12$, von welcher er sagt, dass er sie Girard entlehne, zur Auflösung bringt[1]). Der Kreishalbmesser FH ist wieder $\sqrt{\frac{13}{3}}$, die Sehne FG wieder $\frac{36}{13}$, der Kreisbogen GK ist in die drei gleichen Theile $GJ = JL = LK$ getheilt und sodann $FL = x$ gezogen. Neu ist aber, dass nunmehr das gleich-

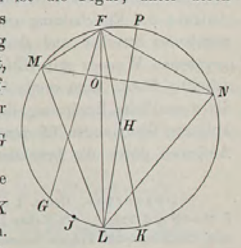


Fig. 145.

[1]) Descartes, Geom. *Appendix de cubicarum aequationum resolutione* I, 345—368, vergl. namentlich pag. 349.

seitige Sehnendreieck LMN mit L als Eckpunkt gezeichnet wird und dadurch die Sehnen FM, FN zur Construction gelangen, welche negativ genommen die beiden anderen Gleichungswurzeln sind. Auch der Beweis ist bei Van Schooten anders angelegt als bei Girard, nämlich alterthümlicher. Von irgend trigonometrischen Functionen ist nicht Gebrauch gemacht, vielmehr sind noch weitere Hilfslinien gezogen, welche ähnliche Dreiecke hervorbringen, und dann führen die Proportionalitäten entsprechender Seiten zu dem gewünschten Ergebnisse.

Auch die Auflösung einer kubischen Gleichung mittels der Durchschnittspunkte eines Kreises mit einer Parabel fehlt nicht in dieser Literatur. Descartes hat sie gelehrt[1]) und Van Schooten hat in seinen Erläuterungen gezeigt[2]), dass die Durchschnittspunkte eines Kreises mit einer Hyperbel zum Auffinden der Wurzeln einer vollständigen kubischen Gleichung führen, ohne dass man genöthigt wäre, das quadratische Glied zuvor wegzuschaffen, wie Descartes es thut. Aehnliches endlich lehren beide, Descartes und Van Schooten für die geometrische Auflösung biquadratischer Gleichungen ohne und mit kubischem Gliede[3]).

Demselben Gebiete gehören die Leistungen eines belgischen Schriftstellers an. René François de Sluse[4]) (1622—1685) stammt aus Visé an der Maas zwischen Lüttich und Maastricht. Sein Vater war Notar, Oheime von mütterlicher Seite waren kirchliche Würdenträger. Einer derselben zog De Sluse um 1643 nach Rom, wo er am Collegium der Sapienza die vielseitigen Studien fortsetzte, welche er in Lüttich begonnen hatte, und wo er den Titel eines Doctors beider Rechte erwarb. Seit 1651 war er Domherr in Lüttich. Er gab 1659 unter dem Titel *Mesolabum* eine Schrift heraus, welche die Aufgabe der Einschaltung zweier geometrischer Mittel zwischen zwei gegebenen Strecken und ebenso die Aufgabe der Dreitheilung eines gegebenen Winkels mit Hilfe eines Kreises und irgend eines Kegelschnittes löste. Eine zweite Auflage des Mesolabum von 1668 brachte als wesentliche Ergänzung die Erörterung, dass jene Aufgaben auf kubische Gleichungen führten und deshalb ebenso wie alle ähnlichen Aufgaben durch die benutzten Curven construirt werden könnten[5]).

---

[1]) Descartes, Geom. I, 85—95. [2]) Ebenda I, 327. [3]) Ebenda, I, 85—95 und 325. [4]) Ueber De Sluse hat C. Le Paige eine umfassende, alle einschlagenden Fragen behandelnde Abhandlung im *Bulletino Boncompagni* XVII veröffentlicht. Dort ist auch die Richtigkeit der Schreibart Sluse gegenüber von Sluze festgestellt. Ueber die mathematischen Leistungen verbreiten sich pag. 470—480. [5]) *Ac problematum omnium solidorum effectio per easdem curvas.*

Eine geometrische Aufgabe, welche algebraisch behandelt zu einer biquadratischen Gleichung geführt hätte, ist in einem 1630 gedruckten Werke, dessen Verfasser aber schon 1627 verstorben ist, behandelt. Marino Ghetaldi, um ihn handelt es sich, ist uns (S. 653) als Wiederhersteller einer Schrift des Apollonius bekannt geworden. Wir hätten unter den eigentlichen Geometern ihn gleichfalls im Vorbeigehen nennen dürfen wegen seiner *Variorum problematum collectio*[1]) von 1607, welche geometrisch solche Aufgaben löst, an die Regiomontanus und Andere mit den Hilfsmitteln der Algebra herangetreten waren. Hier haben wir es mit seinem nachgelassenen Werke *De resolutione et compositione mathematica*[2]) zu thun. Es sind fünf Bücher, von denen die vier ersten algebraischen und geometrischen Behandlungen von Aufgaben gewidmet sind, welche sämmtlich in Gleichungsform gebracht den zweiten Grad nicht übersteigen und sonderliche Schwierigkeiten nicht darbieten, auch neue Gedanken nicht nöthig machten noch förderten. Das 5. Buch in vier Kapitel getheilt hat einen anderen Charakter. Das 1. Kapitel beschäftigt sich ausser mit der archimedischen Kronenaufgabe mit arithmetischen Progressionen, löst aber die hier auftretenden Aufgaben nicht nach den damals längst bekannten Formeln, sondern nach Proportionen. Die erste dieser Aufgaben verlangt z. B. die Herstellung sämmtlicher Glieder der Progression, wenn deren Summe, das erste und das letzte Glied gegeben sind. Auffindung der Differenz d mittels jener gegebenen Grössen s, a, t ist demnach erforderlich. Ghetaldi geht dazu von der Proportion aus $2s:(a+t)=(t-a+d):d$, aus welcher die weitere folgt $(2s-a-t):(a+t)=(t-a):d$, und nun ist die Aufgabe gelöst. Das 2. Kapitel hat es mit neun unmöglichen Aufgaben[3]) zu thun, und Ghetaldi versteht darunter solche, die zu Gleichungen mit nur imaginären Wurzelwerthen führen oder zu der Wurzel 0, welche geometrischer Deutung unfähig ist. Zur letzteren Gattung gehört die Aufgabe, eine gerade Linie so zu schneiden, dass das Rechteck unter ihren Theilen mit dem Quadrate des Unterschiedes der Theile so viel betrage, als die Summe der Quadrate der Theile. Ist $2b$ die Summe, $2a$ der Unterschied der Theile, so heissen die Theile selbst $b+a$ und $b-a$, und es wird also verlangt

$$(b+a)\cdot(b-a)+(2a)^2=(b+a)^2+(b-a)^2$$

oder

$$b^2+3a^2=2b^2+2a^2, \text{ d. h. } b^2=a^2, \text{ und } b=\pm a,$$

---

[1]) Kästner III, 187—188. [2]) Ebenda III, 188—195. — E. Gelcich in Zeitschr. Math. Phys. XXVII, Supplementheft, besonders S. 199—214. [3]) *Problemata impossibilia, ex quorum resolutionibus cognoscitur eorum impossibilitas.*

wodurch einer der Theile zu 0 wird, d. h. die Linie ist gar nicht geschnitten. Zur anderen Gattung gehört die neunte Aufgabe, welche als Gleichung $3x(a-x)=a^2$ heisst. Denn diese giebt

$$x=\frac{a}{2}\pm\frac{a}{6}\sqrt{-3}.$$

Das 3. Kapitel vereinigt fünf eitle oder Scherzaufgaben[1]). Auch unter diesem Namen sind zweierlei Gruppen vereinigt: Aufgaben, die durch jede beliebige, und solche, die durch unendliche viele Annahmen befriedigt werden[2]). Die erste Gruppe ist also dadurch gekennzeichnet, dass sie auf identische, die zweite dadurch, dass sie auf unbestimmte Gleichungen sich zurückführt. In die erste Gruppe gehört z. B. die erste Aufgabe: Eine gegebene Strecke a derart zu theilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem Unterschiede der Theile nebst dem Quadrate des kleineren Theiles dem Quadrate des grösseren Theiles gleich werde, denn

$$a\cdot\left[\left(\frac{a}{2}+x\right)-\left(\frac{a}{2}-x\right)\right]+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2$$

ist eine Identität. Andere Aufgaben sind unbestimmt, so die vierte: Ueber einer gegebenen Grundlinie ein Dreieck zu zeichnen, dessen beide anderen Schenkel die halbe Grundlinie zum Unterschiede haben. Die Spitze des Dreiecks liegt auf einer Hyperbel, was aber Ghetaldi nicht bemerkt zu haben scheint[3]). Das 4. Kapitel endlich enthält acht Aufgaben, welche nicht in das Bereich der Algebra fallen[4]), d. h. solche, welche Ghetaldi nicht in Gleichungsform zu bringen wusste. Unter ihnen ist gleich die erste diejenige, welche wir meinten, als wir von einer Aufgabe sprachen, die richtig angefasst zu einer Gleichung 4. Grades hätte führen müssen. Eine Seite eines gegebenen Rhombus wird verlängert, dann soll in dem entstehenden Aussenwinkel eine gegebene Strecke so eingezeichnet werden, dass ihre Verlängerung in den Eckpunkt des Rhombus eintrifft, welcher dem Scheitel des Aussenwinkels gegenüberliegt[5]). Ist (Figur 146) a die Seitenlänge des Rhom-

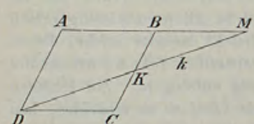


Fig. 146.

[1]) *Problema vanum seu nugatorium.* [2]) *cum id, quod Problema fieri jubet, quacumque ratione fiat Problemati satisfit, vel cum Problema infinitis modis construi potest.* [3]) Ist $2a$ die gegebene Grundlinie zugleich Richtung der Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen Anfangspunkt in der Mitte der Grundlinie liegt, so heisst die Gleichung des Ortes der Dreiecksspitze

$$y^2-3x^2=\frac{3}{4}a^2.$$

Vergl. Kästner III, 190. [4]) *De resolutione et compositione problematum quae sub Algebram non cadunt.* [5]) *Rombo dato et uno latere producto aptare sub*

bus, k die Länge der einzuzeichnenden Strecke MK, und wird $\sphericalangle BCD=\alpha$, $BM=x$ gesetzt, so ist

$$KD=\frac{ak}{x},\quad KC=a-BK=a-\frac{ax}{x+a}=\frac{a^2}{x+a}$$

und im Dreiecke CDK findet die Gleichung statt

$$\left(\frac{ak}{x}\right)^2=a^2+\left(\frac{a^2}{x+a}\right)^2-2a\cdot\frac{a^2}{x+a}\cdot\cos\alpha$$

oder

$$(x^2-k^2)(x+a)^2=(2(a+x)\cos\alpha-a)ax^2,$$

welche zu construiren bleibt[1]). Ghetaldi benutzt aber diesen Weg nicht, wie er überall die Anwendung trigonometrischer Functionen vermeidet, so sehr die Lösung der Aufgaben dadurch beschleunigt würde. Ihm war offenbar, trotz Regiomontanus und Vieta, welche er sorgsam studirt hatte, die Handhabung jener Functionen nicht ganz geläufig. Er versuchte lieber, und so auch bei der Aufgabe, von der wir gerade reden, eine geometrische Analysis in antikem Sinne und liess dann die Construction und deren Beweis folgen.

Fasst man die Leistungen Ghetaldi's mit denen von Girard, von Descartes, von Van Schooten, von Sluse zusammen, über welche wir hier neben einander berichtet haben, so erkennt man überall das Bestreben, bald die Geometrie der Algebra, bald die Algebra der Geometrie dienstbar zu machen, aber nirgend erhebt sich das Bestreben höher als bis zur Construction gewisser Strecken, die in Gleichungen als Unbekannte vorkommen. Am nächsten war Ghetaldi einem grossen, jetzt mit Nothwendigkeit zu vollziehenden Fortschritte bei den unbestimmten Aufgaben des 3. Kapitels seines 5. Buches. Dort musste er bei richtiger Fragestellung zu einer Gleichung zwischen zwei unbekannten Strecken gelangen, musste er dem geometrischen Sinne dieser Gleichung nachforschen. Er hat die Frage nicht richtig gestellt, und so entging ihm der Blick in ein von Oresme aus der Ferne gezeigtes, aber noch niemals eigentlich betretenes Gebiet.

Glücklicher, denn etwas Glück gehört auch zu den grössten Entdeckungen, waren Fermat und Descartes. Jener dürfte den entscheidenden Schritt früher unternommen haben, dieser veröffentlichte früher seine unabhängig von Fermat gewonnenen Ergebnisse, und da die Geschichte unwiderruflich die Veröffentlichungszeit als allein massgebend betrachten muss, wo Erstlingsrechte zu vergeben sind, so müssen wir zur Géométrie des Descartes von 1637 und deren geo-

angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quae ad oppositum angulum pertingat.

[1]) Ueber die Bedeutung der vier Wurzeln dieser biquadratischen Gleichung vergl. Kästner III, 192—193.

metrischen Inhalt uns wenden. Er besteht, um ihn mit einem heute allgemein verständlichen Namen zu kennzeichnen, aus der analytischen Geometrie der Ebene mit einem fast verstohlen geäusserten Gedanken einer analytischen Geometrie des Raumes.

Eine Schaar von unter einander parallelen Geraden wird gedacht, welche auf einer zu ihr senkrechten Geraden gewisse Strecken von einem angenommenen Anfangspunkte aus abschneidet. Endpunkte der Parallelen liegen dann in irgend einer Curve, und wenn zwischen den Strecken der geschnittenen Geraden und der durch sie und die Curve begrenzten Länge der Parallelen eine von Punkt zu Punkt der Curve sich nicht ändernde Gleichung besteht, so heisst diese die Gleichung der Curve. Die Parallelen selbst heissen *omnes ordinatim applicatae*[1]), woraus die Namen Ordinaten und Applicaten entstanden, welche von nun an der analytischen Geometrie angehören sollten. Erfunden hat Descartes diese Namen nicht. *Lineae ordinatae* hiessen irgend welche Parallellinien schon bei den römischen Feldmessern (Bd. I, S. 515) und auch die Wortverbindung *ordinatim applicata* ist in einem 1615 herausgegebenen Werke Kepler's gebraucht[2]).

Von einer Begriffsbestimmung der analytischen Geometrie von der Art, wie sie hier ausgesprochen worden ist, nimmt Descartes allerdings so wenig seinen Ausgangspunkt, dass sie sich sogar nirgend bei ihm ausdrücklich ausgesprochen vorfindet; man muss sie da und dort aus seinem Verfahren herauslesen. Sein Gedankengang ist vielmehr folgender:

Das I. Buch beginnt mit der Behauptung, jede geometrische Aufgabe laufe darauf hinaus, eine Anzahl von Strecken zu kennen. Eine solche, an sich beliebig, muss dabei als Einheit angenommen werden[3]). Buchstaben, welche alsdann für einzelne Strecken gewählt werden, können in Ausdrücken in gleichen Dimensionen, *aequemultis semper dimensionibus*, vorkommen, aber nothwendig ist es nicht, weil die Einheit immer zur Erklärung zur Verfügung steht, *ubique subintellegi potest*, wo sich zu viele oder zu wenige Dimensionen finden. Ist z. B. aus $a^2b^2 - b$ die Kubikwurzel zu ziehen, so muss man sich denken, a^2b^2 sei einmal durch die Einheit dividirt, b zweimal mit derselben multiplicirt[4]). Mittels der für die Strecken eingesetzten Buchstaben, seien es Stellvertreter bekannter oder unbekannter Werthe, sind nach den Bedingungen der Aufgabe Gleichungen herzustellen,

[1]) Descartes, Geom. I, 38 und häufiger. [2]) Kepler, *Opera* (ed. Frisch) IV, 598: *Sit a tactu B ad diametrum ordinatim applicata BA.* [3]) Descartes, Geom. I, 1: *quae vocetur unitas ut eo commodius ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu assumere licet.* [4]) Ebenda I, 3.

so viele an der Zahl, als Unbekannte vorkommen. Werden, trotzdem nichts in der Aufgabe Enthaltene vernachlässigt wurde, weniger Gleichungen als Unbekannte gefunden, so dient solches zum Beweise, dass die Aufgabe keine durchaus bestimmte ist[1]). Nun werden zunächst bestimmte Gleichungen zweiten Grades constructiv mittels des Kreises und der Geraden gelöst, dann wird der Uebergang zur ersten unbestimmten Aufgabe gemacht, zur sogenannten Aufgabe des Pappus. Sie besteht (Bd. I, S. 423) darin, den geometrischen Ort eines Punktes von der Beschaffenheit zu finden, dass, wenn man von ihm Linien unter gegebenem Winkel nach gegebenen Geraden der Ebene zieht, das Product gewisser dieser Verbindungsgeraden zu dem Producte aller übrigen in einem gegebenen Verhältnisse stehe. Descartes behandelt sie nach seiner Methode. Er findet, dass, wenn auf einer der gegebenen Geraden ein Anfangspunkt A gewählt wird, der von dem Durchschnittspunkte B mit der nach dieser Geraden gezogenen Verbindungslinie CB von der Länge y die Entfernung x besitzt, alsdann sämmtliche übrige Verbindungslinien Längen besitzen, welche aus drei Theilen bestehen, einem Vielfachen von y, einem Vielfachen von x und einem nur Bekanntes enthaltenden Theile, jeder bald positiv bald negativ[2]). Daraus folgt aber, dass, wenn $2n$ oder $2n-1$ Gerade gegeben sind, die Producte von n oder $n-1$ Verbindungslinien den n^{ten} Grad nicht übersteigen und damit den Grad der entstehenden Gleichung bedingen. Bei fünf Geraden ist eine Gleichung 3. Grades zu erwarten. Nimmt man dabei y als bekannt an, so kann, weil die erste Verbindungslinie, von x unabhängig, ihre Länge einfach mit y bezeichnet, nur eine nach x quadratische Gleichung auftreten, so dass der betreffende Durchschnittspunkt B auf der ersten Geraden mittels Zirkel und Lineal gefunden werden kann. Die Länge $CB = y$ ist aber nicht bestimmt, es können als solche andere und andere Werthe ins Unendliche gewählt werden, und entsprechend finden sich unendlich viele Werthe x nebst unendlich vielen Punkten C, welche eine Curve bilden[3]). Wir brauchen kaum besonders darauf hinzuweisen, dass dieses eine von den Stellen ist, welche wir oben im Auge hatten, als wir sagten, man müsse da und dort aus Descartes' Verfahren herauslesen, worin seine Methode bestehe.

Im II. Buche giebt Descartes zunächst die Dreitheilung der

[1]) Descartes I, 4. [2]) Ebenda I, 14. [3]) Ebenda I, 15: *Adeoque si in infinitum alia atque alia magnitudo sumatur pro linea y, invenietur quoque in infinitum alia atque alia pro linea x, atque ita obtinebitur infinitus numerus punctorum, cujusmodi est punctum C, quorum ope quaesita curva linea describetur.*

Aufgaben nach antikem Vorbilde an (Bd. I, S. 284). Ebene Oerter waren ihnen Gerade und Kreis, körperliche Oerter die Kegelschnitte, lineare Oerter alle übrigen Curven der Ebene. Descartes verlangt dagegen, man solle die Curven nach dem Grade unterscheiden[1]. Man bedürfe zu ihrer Herstellung nicht so weit hergeholter Mittel, wie z. B. das Schneiden eines Kegels durch eine Ebene, vielmehr genüge die Bewegung von zwei oder mehr Linien, die sich gegenseitig treffen[2]. Dann solle man des Weiteren die wirklich mechanischen Curven abtrennen, welche wie die Spirale, die Quadratix durch zwei Bewegungen verschiedener Natur erzeugt werden, zwischen welchen eine in genauen Zahlen ausgedrückte Beziehung nicht stattfindet[3]. Offenbar ist damit die Unterscheidung zwischen algebraischen und transcendenten Curven gemeint, wie der heutige an Leibniz sich anlehnende Sprachgebrauch sich ausdrückt. Vielleicht war die Aufgabe des Pappus für Descartes Veranlassung zu einer weiteren Unterscheidung der algebraischen Curven, deren er sich bedient. Dort sah er, dass, wenn $2n$, beziehungsweise $2n-1$ Gerade gegeben waren, ein Product aus n Strecken gebildet werden musste, welches zu einem Producte gleicher Dimension entweder aus lauter Unbekannten oder aus $n-1$ Unbekannten und der Einheit in Verhältniss trat. Jetzt im II. Buche unterscheidet er neben dem Grade, *gradus*, noch das Geschlecht, *genus*, der Curven. Der $2n-1^{\text{te}}$ und $2n^{\text{te}}$ Grad bilden ihm gemeinschaftlich das n^{te} Geschlecht[4]. Dabei beeinflusst die Wahl des geradlinigen Coordinatensystems, so verschieden sie getroffen werden kann, das Geschlecht der Curven nicht[5]. Nochmaliges Zurückgreifen auf die Aufgabe des Pappus führt Descartes nun dazu, eine gewisse Strecke $\sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$ näher zu untersuchen[6]. Kommt $\frac{p}{m}x^2$ in dem Radicanden überhaupt nicht vor, so ist der Kegelschnitt, welcher als geometrischer Ort auftritt, eine Parabel; hat jenes Glied das Vorzeichen $+$, so ist eine Hyperbel entstanden, und endlich eine Ellipse, wenn das Vorzeichen $-$ heisst. Nach einigen weiteren Auseinandersetzungen gelangt Descartes zur Aufgabe, in einem Punkte einer gegebenen Curve eine Senkrechte

[1] Descartes, Geom. I, 17: *Verum satis mirari non possum, quod non ulterius progressi lineas hasce magis compositas in certos distinxerint gradus.* [2] Ebenda I, 18. [3] Ebenda I, 18—19: *Quandoquidem illas duobus motibus describi imaginamur, qui a se invicem sunt diversi, nec ullam inter se relationem habent, quae exacte mensurari possit.* [4] Ebenda I, 21. [5] Ebenda I, 22: *fieri potest, ut linea eiusdem generis esse appareat.* Deutlicher war der französische Wortlaut: *on peut tousjours faire que la ligne paraisse de même genre. Oeuvres* (ed. Cousin) V, 339. [6] Ebenda I, 29.

zu der Curve oder ihrer Berührungslinie, *contingens*, zu ziehen[1], über deren Auflösung wir im 79. Kapitel berichten werden. Die Anwendung der Methode der Normalenziehung wird unter Anderem bei der Conchoide gemacht[2] und besonders bei einigen Curven, welche als die Descartes'schen Ovalen[3] bekannt geblieben sind. Es sind sogenannte Diakaustiken, d. h. sie haben die Eigenschaft, dass alle von einem Punkte ausgehenden und auf sie auffallenden und in Folge des Brechungsgesetzes gemäss einem gegebenen Brechungsexponenten abgelenkten Strahlen nach einem Punkte weiter geworfen werden, in welchem sie sich vereinigen, so dass man gewissermassen von Brennpunkten reden dürfte. Wie Descartes zu diesen Ovalen gelangt ist, sagte er nicht. Am Schlusse des II. Buches findet sich[4], was wir einen Gedanken über die analytische Geometrie des Raumes genannt haben. Was über ebene Curven gelehrt wurde, sagt Descartes ungefähr, ist leicht auf alle solche auszudehnen, welche durch regelmässige Bewegung von Punkten im dreidimensionalen Raume, *in spatio trium dimensionum*, entstanden sind. Man braucht nur von jedem Punkte der Curve Perpendikel auf zwei zu einander senkrechte Ebenen zu fällen, denn die Endpunkte dieser Perpendikel bilden zwei Curven, je eine auf einer der beiden Ebenen, die man nach der gelehrten Methode beide auf die Durchschnittslinie der beiden Ebenen beziehen kann, und alsdann ist die dreidimensionale Curve vollständig bestimmt. Sogar die Normale zur Raumcurve in einem ihrer Punkte könne man so erhalten. Jenem Punkte entspricht je ein Punkt in jeder der beiden ebenen Curven, also auch je eine Normale an die betreffende ebene Curve, und Ebenen, welche durch diese Normalen senkrecht zu den Curvenebenen gelegt sind, schneiden sich in der gesuchten Normale der Raumcurve. In dieser Allgemeinheit ist die Behauptung allerdings nicht richtig, vielmehr nur dann zutreffend, wenn die Raumcurve eben ist[5].

Das III. Buch lässt sich fast als ein Lehrbuch der Algebra bezeichnen. Nachdem in den beiden ersten Büchern gezeigt worden war, wie geometrische Aufgaben auf Gleichungen zurückgeführt werden, erwächst das Bedürfniss, mit deren Lehre genau bekannt zu sein, und desshalb setzt hier Descartes neben Anderem auch jene Sätze auseinander, über welche im 76. Kapitel berichtet ist. Eines Irrthums freilich machte er sich schuldig. Gleich zu Anfang des III. Buches giebt Descartes als Vorschrift[6], man solle eine vor-

[1] Descartes, Geom. I, 40 sqq. [2] Ebenda I, 49. [3] Ebenda I, 50: *Explicatio quatuor generum novarum ovalium opticae inservientum.* [4] Ebenda I, 66. [5] Auf die Nothwendigkeit dieser Einschränkung machte uns H. P. Stäckel aufmerksam. [6] Ebenda I, 67.

gelegte Aufgabe nicht durch beliebige zweckdienliche Curven lösen, sondern durch die einfachsten, welche man anwenden könne. Diese Vorschrift, muss man denken, hatte er noch vor Augen, als er an die Behauptung, nur zur Auflösung von Gleichungen 3. und 4. Grades könne man Kegelschnitte verwenden[1]), später eine weitere unrichtige Behauptung knüpfte, die sich kurz so aussprechen lässt: zur Auflösung von Gleichungen $2n - 1^{\text{ten}}$ oder $2n^{\text{ten}}$ Grades bedürfe es einer Linie n^{ten} Geschlechtes[2]). So wurde sie wenigstens von gleichzeitigen und von späteren Lesern[3]) verstanden und als irrig aufgefasst, wie wir bald sehen wollen.

Die Geometrie kam, wie wir wissen, 1637 heraus. Vor ihrem Erscheinen schrieb Fermat unter dem 22. September 1636 einen Brief an Roberval[4]), welcher für das Vorhandensein des darin Enthaltenen, bevor Fermat Einsicht in Descartes' Geometrie gewinnen konnte, beweiskräftig ist. Fermat beruft sich hier auf seine Methode *De maximis et minimis*, welche Roberval durch einen Herrn Despagnet kennen gelernt habe, welchem er, Fermat, sie vor sieben Jahren in Bordeaux mittheilte. Wir kommen damit bis zum Jahre 1629 zurück, und da die erwähnte Methode, welche wir im 79. Kapitel schildern, durchaus auf analytisch-geometrische Betrachtungen sich aufbaut, so müssen jene Grundbetrachtungen für Fermat spätestens 1629 vorhanden gewesen sein. Veröffentlicht freilich hat Fermat seine Untersuchungen erst nach 1637, in einer der betreffenden Abhandlungen kommt Descartes' Name wiederholt vor.

Die augenscheinlich älteste Fermat'sche Abhandlung über analytische Geometrie führt den Titel *At locos planos et solidos isagoge*[5]). Fermat sagt in dieser sogen. Isagoge, dass, wenn er diese Erfindung schon besessen hätte, als er vor langer Zeit die ebenen Oerter des Apollonius wiederherstellte, er dort weit eleganter hätte verfahren können[6]). Eine Zeitbestimmung ist damit so eigentlich nicht verbunden, da man nicht weiss, wann jene synthetisch-geometrische Schrift verfasst wurde. Ein Nekrolog Fermat's, vielleicht aus der Feder Carcavy's, jedenfalls von diesem beeinflusst, behauptet, die Isagoge sei geschrieben gewesen, bevor die Descartes'sche Geometrie gedruckt war[7]). Aber gelte dieses auch nicht für denjenigen Wortlaut, in welchem die Isagoge 1679 in den nachgelassenen Varia Opera er-

---

[1]) Descartes, Geom. I, 96: *Cur problemata solida construi non possint absque sectionibus conicis, nec quae magis composita sunt, sine aliis lineis magis compositis.* [2]) Ebenda I, 106. [3]) Jacobi Bernoulli *Opera* I, 343. [4]) Fermat, *Varia Opera* pag. 136. [5]) Ebenda pag. 2—11. *Oeuvres de Fermat* I, 91—110. [6]) *Varia Opera* pag. 8. *Oeuvres* I, 103. [7]) *Oeuvres de Fermat* I, 359—361.

schien, sei bei dieser letzten Niederschrift Fermat mit jener Geometrie von 1637 bekannt gewesen, jedenfalls geht sie in wesentlichen Dingen weit über Descartes hinaus. Nirgend hat Descartes die Herstellung der Gleichung eines geometrischen Ortes so klar beschrieben, wie Fermat gleich am Anfange der Isagoge es thut. Die Gleichungen, sagt er, können in bequemer Weise hergestellt werden, wenn wir zwei unbekannte Strecken unter gegebenem Winkel, zu welchem wir meistens einen rechten Winkel wählen, aneinandersetzen und für eine der beiden Strecken einen Anfangspunkt wählen[1]). Diesen Anfangspunkt bezeichnet Fermat regelmässig mit N und die von ihm beginnende Strecke mit A, die dazu senkrechte andere Strecke mit E. Ihr Fusspunkt heisst Z, der Punkt des geometrischen Ortes, wo sie endigt, J. Solche ein für allemal gewählten Bezeichnungen sind mehr als blosse Bezeichnungen. Sie bilden einen Theil des methodischen Verfahrens, und Niemand hat Fermat in dieser Beziehung übertroffen. Man könnte alle seine Feststellungen als mustergiltig rühmen, wenn er nicht allzusehr durch die Fesseln der Vieta'schen Schreibweise beengt gewesen wäre. Statt des Gleichheitszeichens schrieb er noch *egale*, statt der rechts erhöhten Zahlenexponenten die lästigen Anfangsbuchstaben der Potenzbenennungen. In diesen beiden Unbequemlichkeiten sei es uns gestattet, uns von Fermat zu entfernen, während wir im Uebrigen ihm genau folgen. Wir können alsdann folgenden Inhalt der Isagoge angeben, den man mit unseren Auszügen aus Descartes' Geometrie vergleichen mag.

$DA = BE$ bedeutet eine durch den Anfangspunkt N gehende Gerade. $Z^2 - DA = BE$ oder, indem $Z^2 = DR$ gesetzt wird, $D(R - A) = BE$ bedeutet dieselbe Gerade unter Verschiebung des Anfangspunktes. Fermat besitzt also ausdrücklich die Gleichung der geraden Linie, welche man bei Descartes vergebens sucht. Die Gleichung $AE = Z^2$ ist die einer Hyperbel auf ihre Asymptoten bezogen. $E^2 = DA$ und $DE = A^2$ sind zwei Parabeln, welche nur durch ihre Lagen sich unterscheiden, indem die Applicaten bald der einen, bald der anderen von zwei zu einander senkrechten Richtungen parallel sind. $B^2 - A^2 = E^2$ ist Kreisgleichung und auf eben diese Form ist jede Gleichung, welche noch Vielfache von A und von E enthält, zurückführbar, falls nur A^2 und E^2 gleiche Coefficienten besitzen, z. B. $B^2 - 2DA - A^2 = E^2 + 2RE$ geht über in

$$P^2 - (A + D)^2 = (E + R)^2, \text{ wo } P^2 = R^2 + B^2 + D^2.$$

---

[1]) *Commode autem possunt institui aequationes, si duas quantitates ignotas ad datum angulum constituamus, quem ut plurimum rectum sumemus, et alterius ex illis positione datae terminus unus sit datus.*

Ist dagegen $B^2 - A^2$ nicht gleich E^2, sondern steht zu E^2 in einem gegebenen Verhältnisse, so ist damit die Gleichung einer Ellipse gegeben; die Gleichung der Hyperbel ist dagegen vorhanden, wenn $A^2 + B^2$ zu E^2 in gegebenem Verhältnisse steht. Das sind Ergebnisse, welche in der Isagoge auf wenige Seiten zusammengedrängt erscheinen.

Ein zweiter Aufsatz, als Anhang zur Isagoge bezeichnet[1]), zeigt wie man mittels zweier Curven Gleichungen höherer Grade, in welchen nur eine Unbekannte vorkommt, bewältigen könne. Es ist die gleiche Aufgabe, welche wir in der Ueberschrift dieses Kapitels als geometrische Gleichungsauflösungen bezeichnet haben und welche wir noch vor der analytischen Geometrie zur Sprache brachten. Dorthin würde also streng genommen Fermat's Anhang zur Isagoge auch gehört haben, wenn ihm nicht das ganz abweichende elegantere Verfahren seinen Platz an dieser späteren Stelle angewiesen hätte. Fermat setzt regelmässig in der vorgelegten Gleichung jede der beiden Seiten, die desshalb mit Geschick auszuwählen sind, einem und demselben dritten Ausdrucke gleich, welcher mit beiden vorhandenen Ausdrücken Gemeintheiler besitzt, durch welche dividirt werden kann. Sei etwa $A^3 + BA^2 = Z^2B$ zu lösen. Fermat wählt als Vergleichsausdruck BAE, und nun geht $A^3 + BA^2 = BAE$ in $A^2 + BA = BE$ und $Z^2B = BAE$ in $Z^2 = AE$ über, d. h. Parabel und Hyperbel schneiden sich in einem Punkte, dessen A die vorgelegte Gleichung befriedigt. In einem anderen Falle sei $A^4 = Z^2A^2 - Z^3D$ aufzulösen. Fermat formt die Gleichung zunächst um zu

$$(A^2 - B^2)^2 = (B^4 - Z^3D) - (2B^2 - Z^2)A^2$$

und nimmt dann N^2E^2 als Vergleichsausdruck, wo $N^2 = 2B^2 - Z^2$. So werden eine Parabel $A^2 - B^2 = NE$ und ein Kreis

$$\frac{B^4 - Z^3D}{N^2} - A^2 = E^2$$

als die zur Lösung führenden Curven ermittelt. Ob Fermat Cardano's Schrift *De Regula Aliza* gelesen und dort die Methode gefunden hatte, eine Gleichung unter Beiziehung einer Hilfsgrösse in zwei Gleichungen zu spalten (S. 536), sei dahingestellt. Wahrscheinlich ist es uns nicht, und jedenfalls ging Fermat nicht algebraisch wie Cardano, sondern geometrisch zu Wege.

Der gleichen Methode bediente sich Fermat in einer ziemlich viel späteren Abhandlung: *De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas et unicuique problematum generi proprie convenientes*[1]). Sie muss 1660 entstanden sein, wie aus einem Briefe Carcavy's an Huygens vom 25. Juni 1660 hervorgeht. Ein vom 9. März 1661 datirter Auszug findet sich heute noch in Leiden, in der reichen Sammlung von Briefen an und von Huygens[2]). Fermat machte hier auf jenen Missgriff von Descartes aufmerksam, den wir oben bereits berührt haben, und der darauf hinauslief, dass Descartes nicht erkannte, dass zwei Curven, deren eine vom m^{ten}, die andere vom n^{ten} Grade ist, genügen, um eine Gleichung vom mn^{ten} Grade zu lösen, während Fermat die volle Einsicht davon hatte. Die Abhandlung ist also entschieden gegen Descartes gerichtet, aber um so mehr lohnt es sich, einige Stellen wiederzugeben, welche zeigen, wie Fermat wissenschaftliche Gegnerschaft übte. Man möge sich überzeugen, beginnt die Abhandlung, dass auch ein Descartes, wo es um geometrische Dinge sich handle, ein Mensch sei, dass dessen Zurückführung von Gleichungen auf Curvendurchschnitte mit einem Fehler behaftet sei. Wenn Fermat sich dann bei seiner Richtigstellung an Descartes und alle Cartesianer wendet, so liegt die Vermuthung nahe, er habe dieses desshalb gethan, weil in der mit Erläuterungen versehenen lateinischen Ausgabe der Geometrie von 1659 an jenem Irrthume schweigend vorübergegangen ist, als ob gar keine Veranlassung zur näheren Erörterung hier vorläge. Jene Vermuthung wäre gleichwohl wahrscheinlich unberechtigt, wie daraus hervorgeht, dass in Fermat's Abhandlung überall die Seitenzahlen der französischen Geometrie von 1637, nicht die der späteren Ausgaben citirt sind. Er sei, setzt Fermat dann hinzu, von der Bewunderung jenes übernatürlichen Genius so erfüllt[3]), dass er Descartes, wo er fehlgehe, immer noch höher schätze als Andere, die auf richtigem Wege wandern. Wir führen einige der Beispiele an, durch welche Fermat sein Verfahren erläutert. $A^7 = B^6D$ wird durch den Vergleichsausdruck DA^4E^2 auf zwei Curven 3. Grades $A^3 = DE^2$ und $B^3 = A^2E$ zurückgeführt. $A^{13} = B^{12}D$ geht mittels des Vergleichsausdruckes DA^8E^4 in $A^5 = DE^4$ und $B^3 = A^2E$, durch den Vergleichsausdruck DA^9E^3 in $A^4 = DE^3$ und $B^4 = A^3E$ über; man bedarf also entweder einer Curve 5. und einer 3. Grades, oder zweier Curven 4. Grades. Endlich $A^{257} = B^{256}D$ geht unter Anwendung des Vergleichsausdruckes $DA^{240}E^{16}$ in eine Curve 17. Grades $A^{17} = DE^{16}$ und eine Curve 16. Grades $B^{16} = A^{15}E$ über.

Einen Versuch, die analytisch-geometrische Methode auf den Raum

[1]) *Appendix ad Isagogem Topicam continens solutionem problematum solidorum per locos. Varia Opera* pag. 9—11. *Oeuvres* I, 103—110.

[1]) *Varia Opera* pag. 110—115. *Oeuvres* I, 118—131. [2]) *Oeuvres complètes de Huygens* III, 85 und 256. [3]) *Tanta me portentosissimi ingenii incessit admiratio.*

auszudehnen, wie wir ihn bei Descartes in geistreicher Andeutung vorfanden (S. 815), hat Fermat nicht gemacht. Wohl hat er sich in einem aus dem Jahre 1643 stammenden Briefe an Carcavy[1]) sogar mit Oberflächen zweiter Ordnung beschäftigt, aber nicht in analytisch-geometrischer Weise, sondern indem er, nicht ganz fehlerlos, die Curven besprach, in welchen eine solche Oberfläche durch eine Ebene geschnitten werde.

Der nächste Schriftsteller, den wir zu nennen haben, ist John Wallis. Er gab 1655 einen *Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis*[2]) heraus, dessen neue Methode eben die der analytischen Geometrie ist, deren Verbreitungskreis sich durch diese Veröffentlichung entschieden erweiterte. In Wallis' Schrift über Kegelschnitte findet sich, was man zuletzt dort suchen würde, das heutige Zeichen ∞ für unendlich gross[3]).

Die Zeitfolge führt uns wiederholt zur lateinischen Ausgabe der Descartes'schen Geometrie von 1659, welche, wie wir mehrfach erinnerten, auch Zuthaten anderer Verfasser enthielt. Wir haben algebraisch Bemerkenswerthes daraus im vorigen Kapitel zu melden gehabt; Algebra war ein schon etwas geläufigerer Gegenstand der Betrachtung. Neuer, ungewohnter war die analytische Geometrie, und wenn wir oben hervorhoben, die Erläuterer seien an der geometrischen Lösung von Gleichungen sammt den von Descartes begangenen Irrthümern ahnungslos vorbeigegangen, so gilt das Gleiche von den wichtigsten geometrischen Gedanken, welche wir zu bewundern hatten. Die breiten Bettelsuppen der *Notae breves* von Florimond de Beaune[4]), des *Commentarii* von Franciscus van Schooten[5]) enthalten kaum einen einzigen Brocken, den man herausfischen könnte, aber, sind wir genöthigt hinzuzusetzen, ihre Leere ist den Verfassern nicht allzuhoch anzurechnen; die grosse Menge, auch wenn die grosse Menge der Fachgelehrten allein unter dem Worte begriffen ist, verstand die Feinheiten der Geometrie noch nicht. Eine Ausnahmestellung nimmt die Bestimmung der Inflexionspunkte der Conchoide durch Franciscus van Schooten[6]) ein. Dieser weiss, dass die Gleichung, welche die Ordinate y eines Punktes der Conchoide mit dem durch die Normallinie an jenen Punkt auf der Ordinatenaxe abgeschnittenen Stücke r verbindet, vom 4. Grade in y ist, und dass sie im Inflexionspunkte drei gleiche Wurzeln besitzen muss. Er bildet also das Product $(y-e)^3 \cdot (y-f)$ und setzt dasselbe Glied

[1]) *Oeuvres de Fermat* I, 111—117. [2]) Abgedruckt in Johannis Wallis, *Opera mathematica* (Oxford 1699) I, 291—354. [3]) Ebenda pag. 297: *Esto* ∞ *nota numeri infiniti.* [4]) Descartes, Geom. I, 107—142. [5]) Ebenda I, 147—344. [6]) Ebenda I, 258—259.

für Glied in Uebereinstimmung mit dem Gleichungspolynome der Gleichung 4. Grades, von welcher soeben die Rede war. So gelangt er zu

$$e^3 = -3be^2 + 2bc^2$$

oder, weil im Inflexionspunkte $y = e$ sein muss, zu

$$y^3 = -3by^2 + 2bc^2,$$

woraus der betreffende Werth von y zu berechnen sei. Etwas mehr als die beiden schon Genannten leistete Johann de Witt in seinen *Elementa curvarum linearum*[1]). Dieselben zerfallen in zwei Bücher. Das erste Buch lehrt die Kegelschnitte als Ort des Durchschnittspunktes einer parallel verschobenen Geraden und des einen Schenkels eines um seinen Scheitelpunkt drehbaren Winkels kennen und steht daher, so interessant es für die Lehre von den Kegelschnitten ist, zur analytischen Geometrie in nur sehr loser Beziehung. Das zweite Buch dagegen ist eine elementare analytische Geometrie der Ebene. Die Gleichungen der geraden Linie, der einzelnen Kegelschnitte werden der Reihe nach vorgeführt. Möglicherweise waren die Kegelschnitte von Wallis nicht ohne Einfluss auf De Witt.

Eine wahrhaft reiche Ausbeute gewährten aber die analytisch-geometrischen Methoden nicht den Schriftstellern, welche auf elementarem Boden verblieben, sondern nur denjenigen, welche sie zur Grundlage einer höheren Curvenlehre machten, indem sie zu Betrachtungen sich aufschwangen, welche man sich gewöhnt hat, als infinitesimale zu benennen.

78. Kapitel.

Infinitesimalbetrachtungen. Kepler. Cavalieri.

Wir sind in unseren Auseinandersetzungen dahin gelangt, die Infinitesimalbetrachtungen in der Zeit von 1600 bis 1668 zu schildern, wobei gleich die letzten Worte des vorigen Kapitels Anlass geben, eine an sich naturgemässe Gegenseitigkeit anzukündigen. Die Infinitesimalbetrachtungen konnten auf analytischer Geometrie sich aufbauend eine höhere Curvenlehre stützen. Die analytische Geometrie fand erhöhte Wirksamkeit, als sie thatsächlich schon vorhandenen Infinitesimalbetrachtungen sich zugesellte. Jene Betrachtungen sind auch wirklich älter als die Geometrie Descartes' von 1637. Nicht als ob wir auf die Continuitätsbetrachtungen zurückgreifen

[1]) Descartes, Geom. II, 159—340.