66. Kapitel.

Tartaglia's Schriften. Cardano's spätere Schriften.

Tartaglia eröffnete seine schriftstellerische Laufbahn 1537 mit der Nuova scienza, einem Versuche die Lehre von dem Wurfe auf theoretischer Grundlage aufzubauen. Hervorzuheben ist daraus die Behauptung, dass die Bahn des geworfenen Körpers eine in jedem ihrer Theile krumme Linie bilde, während die Schulmeinung dahin ging, der Anfang und das Ende der Bahn sei eine gerade Linie[1]). Ausserdem wusste Tartaglia, dass der unter einem Winkel von 45° geworfene Körper am weitesten fliege. Im dritten Buche der Nuova scienza ist ausschliesslich von Aufgaben der Feldmessung die Rede, wobei ein rechtwinklig hergestelltes Viereck das Hauptwerkzeug bildet. Um die rechten Winkel selbst zu prüfen, solle man durch längs den Seiten gezogene Striche einen solchen zur Abbildung bringen, dann um den Scheitel als Mittelpunkt einen Kreis beschreiben und schliesslich messen, ob der von den Schenkeln begrenzte Kreisbogen sich viermal auf dem Kreise herumtragen lasse.

Demnächst veröffentlichte Tartaglia 1543 eine lateinische Ausgabe des Archimed[2]). Die Vorrede, natürlich gleichfalls in lateinischer Sprache geschrieben, enthält folgende Erzählung: „Nachdem durch einen Glückszufall eine zerrissene und kaum lesbare griechische Handschrift des Archimed in meine Hände gekommen war, wandte ich alle Arbeit, alle Mühe und Sorgfalt auf die Theile, die sich lesen liessen, sie in unsere Sprache zu übertragen, was freilich schwer war“[3]). Deutlicher und bestimmter kann man sich nicht ausdrücken, und nun hat die wörtliche Uebereinstimmung insbesondere solcher Stellen, deren Uebersetzung verfehlt und zum Theil ganz sinnlos ist, zur Gewissheit erhoben, dass Tartaglia die ganze Uebersetzung abgeschrieben hat, dass es die Arbeit Wilhelm's von Moerbecke (S. 99) war, die der freche Herausgeber als seine eigene rühmte!

Noch im gleichen Jahre 1543 erschien die italienische Uebersetzung des Euklid[4]) von Tartaglia, ein Werk, mit welchem er

[1]) Libri III, 160—161. — Heller, Geschichte der Physik I, 326—327. [2]) Heiberg's Archimedausgabe (1880—1881) Bd. III *Prolegomena* pag. XXIX sqq. und Heiberg, Neue Studien zu Archimedes. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Supplementheft, besonders S. 6—7. [3]) *Cum sorte quadam ad manus meas pervenissent fracti et qui vix legi poterant quidam libri manu graeca scripti illius celeberrimi philosophi Archimedis . . . omnem operam meam omne studium et curam adhibui, ut nostram in linguam, quae partes eorum legi poterant, converterentur, quod sane difficile fuit.* [4]) *Euclide Meg. Philos. solo introduttore delle*

offenbar grossen Erfolg gehabt haben muss, da nicht weniger als fünf Auflagen innerhalb 42 Jahren bekannt sind. Die italienische Uebersetzung ist, wie der Titel ausdrücklich erklärt, aus zwei lateinischen Texten, nämlich aus denen von Campano und von Zamberti, abgeleitet, während der griechische Euklid bereits seit zehn Jahren im Drucke vorhanden war. Das gleicht so ziemlich einem Eingeständnisse, dass Tartaglia nicht im Stande war, des griechischen Textes sich zu bedienen, und kann dadurch als Bestätigung gelten, dass Tartaglia noch viel weniger befähigt war, einen griechischen Archimed zu übersetzen. Im Uebrigen ist Tartaglia's Bearbeitung nicht ohne Verdienst. Sie ist mit vielen eingehenden Erläuterungen versehen, auch ist die Nummerirung der Sätze und die Anordnung des Stoffes zuweilen eine andere als bei Campano und Zamberti. Am Rande sind stets die Nummern jener beiden Ausgaben angegeben auch in den Fällen, in welchen alle drei Ausgaben übereinstimmen[1]).

Die Quesiti et invenzioni diverse sind von 1546. In deren V. Buche ist die Aufnahme topographischer Pläne mittels der Bussole gelehrt. Den sonstigen mathematischen Inhalt bildet ausschliesslich die Geschichte der Entdeckung der Auflösung kubischer Gleichungen. Sie ist von uns bereits ausführlich in Tartaglia'schem Sinne erzählt, aber auch dahin erläutert worden, dass irgend Neues, was der Leser, beziehungsweise also auch der Schreiber, nicht aus der Ars magna Cardano's wissen konnte, durchaus nicht vorkommt. Im Anschlusse an die Quesiti nennen wir der Vollständigkeit der Aufzählung wegen Tartaglia's Risposte auf die Cartelli Ferrari's.

Dann folgte 1551 La travagliata invenzione und kurz darauf Ragionamenti sopra la travagliata invenzione. Beide Schriften sind der Mathematik fremd. Wir müssen gleichwohl Weniges über sie bemerken und zugleich auf ein etwas älteres Werk Cardano's zurückgreifen. Cardano nämlich, dessen Vielseitigkeit als Arzt, als Astrolog, als Physiker, als Philosoph, als Mathematiker ihn zu einem der fruchtbarsten Schriftsteller seines Zeitalters machte, wovon zehn Foliobände erhaltener Werke ausreichendes Zeugniss liefern, hatte auch eine Schrift De subtilitate verfasst, welche 1550 in Nürnberg, 1552 abermals und zwar in Paris gedruckt worden ist. In XXI Bücher eingetheilt[2]) enthält sie Dinge aus fast allen Wissensgebieten. Im XI. Buche z. B. ist eine Zusammenstellung der ästhe-

Scientie Matematiche diligentamente reassetato et alla integrità ridotto per etc. Nic. Tartalea etc. et per commune commodo et utilita di latino in volgar tradotto 1543 in fol., 1544, 1545 in fol., 1565, 1569, 1585 in 4°.

[1]) Wertheim brieflich. [2]) Cardano III, 353—672.

tisch wirksamsten Verhältnisszahlen der menschlichen Gliedmassen zu finden[1]), im XVII. Buche die Beschreibung eines Schlosses, welches nur dann sich öffnet, wenn gewisse Wortstellungen drehbarer Buchstabenvereinigungen hervorgebracht sind[2]). Gleichfalls im XVII. Buche ist von einer Vorrichtung die Rede[3]), welche mittels dreier in einander greifender Stahlringe bewirkt, dass aus einer offenen Lampe, wie man sie auch halte, kein Oel herauslaufe. Das ist die sogenannte Cardanische Aufhängung, welche aber mit Unrecht diesen Namen führt, da nach dem Wortlaute bei Cardano selbst er hier über eine schon sehr alte Erfindung berichtet[4]). Von anderen Stellen der Bücher De subtilitate wird noch in anderem Zusammenhange die Rede sein. Hier nennen wir nur noch eine Erfindung gleich aus dem I. Buche. Dort[5]) ist eine Vorrichtung zur Hebung gesunkener Schiffe beschrieben, welche auf dem Gedanken beruht, das gesunkene Schiff mittels von Tauchern daran befestigten und straff angezogenen Tauen mit so schwer als möglich beladenen Kähnen in Verbindung zu setzen. Werden alsdenn die Kähne erleichtert, so hebt das Wasser sie und zugleich das an ihnen befestigte Schiff. Kein anderer Gedanke als dieser ist es, welcher der Travagliata invenzione Tartaglia's zu Grunde liegt, während der Name Cardano's vergeblich gesucht wird, und wenn auch nicht zu verkennen ist, dass zwischen einem hingeworfenen und einem ausführlich entwickelten Gedanken ein erheblicher Unterschied ist, so ist doch Tartaglia's Verschweigen des Namens dessen, der den Gedanken zuerst äusserte, um so bezeichnender, als der Streit über die kubischen Gleichungen zwischen Beiden vorhergegangen war. Gleichwie in der Travagliata invenzione fehlt Cardano's Name auch in den Ragionamenti, welche der Hauptsache nach eine weitere Ausführung der eben genannten Schrift sind. Dabei ist unter anderen das specifische Gewicht einer ganzen Anzahl von Stoffen auf das Gewicht des Regenwassers als Einheit zurückgeführt. Die Versuche Tartaglia's müssen indessen an einem bisher noch nicht ermittelten einheitlichen Fehler gelitten haben, da sämmtliche specifische Gewichte, die er angiebt, zu klein sind. Die Ragionamenti von 1551 sind in Gestalt von Gesprächen mit Richard Ventuorthe gedacht. Selbstverständlich kann diese Gesprächsform nicht gegen unsere Bemerkung (S. 490), jener Engländer sei 1541 in seine Heimath zurückgekehrt, verwerthet werden, denn man hat es sicherlich mit erdichteten Gesprächen zu thun, wie Tartaglia sie in allen neun Büchern der Quesiti als stylistische, auch sonst vielfach beliebte und gebrauchte Form benutzt hatte, und von einem neuen wirklichen Aufenthalte des „Gevatters" (mio Compare) in Italien ist nirgend eine Andeutung zu finden.

[1]) Cardano III, 555—556. [2]) Ebenda pag. 623. [3]) Ebenda pag. 612. [4]) Breusing, Die nautischen Instrumente bis zur Erfindung des Spiegelsextanten (Bremen 1890) S. 16—17. Berthelot hat in den Compt. Rend. CXI, 940 (Paris 1890) das Vorkommen der Cardanischen Aufhängung in einer Handschrift des XII. S. nachgewiesen. [5]) Cardano III, 364—365: *Modus quo naves demersae gurgitibus recuperantur.*

Nun gelangte der General Trattato di numeri et misure zur Veröffentlichung, das mathematische Hauptwerk Tartaglia's, welchem wir einen ausführlichen Bericht zu widmen haben, ebensowohl weil es an und für sich eines solchen würdig erscheint, als weil eine parteilose Beendigung der von uns begonnenen Untersuchung ihn nothwendig macht. Der I. Band, die 1. Parte enthaltend, trägt die Jahreszahl 1556. Der II. Band trägt die gleiche Jahreszahl und enthält die 2. Parte. Im III. Bande sind die 3., 4., 5., 6. Parte vereinigt, wenn auch jede mit neu beginnender Blattbezifferung; die Jahreszahl der Titelblätter dieser vier letzten Abtheilungen ist 1560. Jede einzelne Parte ist mit einer besonderen Widmung versehen, auf welche gleichfalls geachtet wird werden müssen, da geschichtlich Verwerthbares dort sich findet.

Die Parte 1 ist wieder dem englischen Edelmanne Ricardo Ventvorth zugeeignet, von dessen derzeitigem Aufenthaltsorte abermals keine Andeutung sich findet. Tartaglia beklagt die kostbare Zeit, welche er durch die Cartelli und Risposte verloren habe, jammert über Aerger und Zeitverlust in Brescia und setzt hinzu, dass er seit zwei Jahren — mithin seit 1554 — mit eisernem Fleisse an eine grosse Arbeit sich gemacht habe. Schnelligkeit habe nothgethan, weil er befürchten musste, durch Tod, Krankheit oder sonstige Zufälle wieder gestört zu werden. Jetzt sei er mit der Arbeit fertig, und sie sei in sechs Abtheilungen getheilt[1]). So schreibt Tartaglia am 23. März 1556. Nicht anders drückt er sich am 3. April 1556 in der an den Grafen L'Andriano gerichteten Widmung der Parte 2 aus. Er habe in den letzten zwei Jahren einen sechstheiligen Tractat verfasst, dessen zweiter Theil hier vorliege[2]). Die Widmungen der vier weiteren Theile hat Tartaglia, der, wie wir uns erinnern, im December 1557 starb, nicht mehr verfasst. Sie rühren vom Verleger Curtio Trojano dei Navo her, und deren erste trägt die Zeitangabe des 1. Januar 1560, die anderen sind nicht datirt. Die Widmung der Parte 6 enthält die Mittheilung, der Verfasser sei

[1]) *La ho ridutta a fine, & questa mia cosi longa fatica mi e parso da dividere in sei parti distinte.* [2]) *Havendo questi duoi anni passati composto un general Trattato di numeri & misure, ma in sei parti divisi per la diversità di lor soggetti, delle quali sei parti questa e la seconda.*

vor Vollendung dieser Schlussabtheilung vom Tode betroffen worden, aber so weit sei das Geschick gütig gewesen, dass es ihn nicht wegraffte, bevor in verschiedenen Bruchstücken und vielen Notizbüchern seine Absichten soweit schriftlich niedergelegt waren, dass er nur noch in einem Bande und in fortlaufender Darstellung zu vereinigen hatte, was auf viele Blättchen in lückenhafter Form geschrieben war; dieser Mühe aber konnte Jeder sich unterziehen, der nur mässiges Verständniss von mathematischen Dingen besass[1]). Ein gewisser Widerspruch zwischen diesen drei Aeusserungen und einem Zwischensatze der Parte 5, in welchem auf eine noch in Aussicht stehende neue Algebra verwiesen ist[2]), lässt sich nicht leugnen, aber so weit glauben wir mindestens den Worten des Verlegers trauen zu müssen, dass, als Tartaglia starb, in seinem Nachlasse nichts weiter sich vorfand, was auf Algebra sich bezog, als was nachher in der Parte 6 des General Trattato gedruckt wurde. Wir berufen uns dafür auf Tartaglia's Testament vom December 1557. Damals waren die vier ersten Abtheilungen des General Trattato im Drucke vollendet, und Exemplare derselben waren in Tartaglia's Besitz[3]), über welche letztwillig verfügt wird. Vom schriftlichen Nachlasse ist nicht in bestimmten Worten die Rede, aber der Verleger Trojan Navo ist ausdrücklich zum Testamentsvollstrecker ernannt[4]), und diese Thatsache verstärkt wesentlich unseren Glauben an die Erklärung dessen, der sicherlich alle vorhandenen Papiere durchstöberte, wie er sie durchstöbern musste. Gab doch grade dieser Verleger 1565 aus Tartaglia's Nachlasse das Werkchen des Jordanus Nemorarius *De Ponderositate* heraus[5]), eine Ausgabe, welche mit ihren 46 Sätzen zwar nicht alle 50 Sätze der Handschriften der Oeffentlichkeit übergab, aber doch weit über die 13 Sätze hinausging, welche Peter Apianus 1533 bei Petreius in Nürnberg zum Drucke beförderte. Und eine Nova Algebra, verschieden von dem, was als Parte 6 im General Trattato gedruckt ist, sollte er übersehen haben? Kaum glaublich. Tartaglia's „neue Algebra“ ist aufzufassen, wie so viele Aeusserungen des gleichen Schriftstellers, als ein auf die Zukunft ausgestellter

---

[1]) *... che non cel tolse prima, ch'egli havesse in diversi fragmenti & in molti memoriali scritta tutta intorno a tal parte l'intentione sua tanto, che non li restava a far altro se non quello, che egli haveva in molte carte scritto & con ragionamento interrotto, racogliere in un volume, & con continuato discorso, fatica ch'ogni mediocre intendente delle Matematiche poteva condurla a fine.* [2]) Parte 5 fol. 88 verso l. 7 v. u.: *si narrara nella nostra nova Algebra.* [3]) *Mi attrovo libri del mio general trattato de numeri et misure p.ª 2.ᵈᵃ 3.ª et 4.ª parte.* [4]) *Mio commissario et executor di questo mio ultimo testamento lasso it sop.to M. Troian Navo librer.* [5]) Gherardi l. c. S. 96 Note 2.

Wechsel, zu dessen Einlösung keine oder doch nur geringe Mittel bereit lagen.

Der General Trattato ist ein ganz vortreffliches Lehrbuch der Rechenkunst, von einer Reichhaltigkeit, welche auch hinter der der Summa des Paciuolo in keiner Weise zurücksteht, von grösster Klarheit und sogar einer gewissen Eleganz der Darstellung. Natürlich ist Vieles, man kann getrost sagen das Allermeiste, der Sache nach alt und nur in der Form neu, allein auch ganz Neues, uns wenigstens aus den Schriften keines anderen Verfassers bekannt, begegnet an verschiedenen Stellen den Blicken des aufmerksamen Lesers. Eine ganz besondere Neigung besitzt Tartaglia, frühere Schriftsteller tadelnd zu erwähnen, während er ihre Namensnennung da, wo er sich ihnen streng anschliesst, ziemlich regelmässig unterlässt. Ganz besonders Paciuolo und Cardano gegenüber ist diese doppelte Gewohnheit auffällig. Wir heben nunmehr Einzelheiten hervor, indem wir nach der Reihenfolge der Abtheilungen uns richten.

Parte 1. Die Campano'sche Euklidübersetzung nennt das Vervielfältigen unterschiedslos bald *multiplicare*, bald *ducere*[1]). Das hält Tartaglia für unrichtig. *Multiplicare* beziehe sich nur auf abstracte Zahlen, und der kleinste Multiplicator sei 2, *ducere* dagegen müsse bei geometrischen Quantitäten gesagt werden, wie bei der Vervielfältigung von Linien mit Linien oder von Linien mit Oberflächen[2]). Ganz ähnlich sei bei der entgegengesetzten Operation das *misurare*, welches bei Raumgrössen stattfinde, von dem auf Zahlen sich beschränkenden *partire* zu unterscheiden[3]). Diese Begriffsbestimmungen auf Brüche angewandt führen dazu, dass bei ihnen als an sich continuirlichen Grössen nur die Ausdrücke *ducere* und *misurare* in Anwendung kommen sollten[4]). Beim Multipliciren und Dividiren sind alle die zahlreichen Regeln gelehrt, welche dafür bekannt waren, insbesondere erscheint das *partire a danda* d. h. das Dividiren unterwärts[5]), welches von nun an gegen das alte Dividiren überwärts sich siegreich behauptet. Tartaglia lehrt es an dem Beispiele 912345 : 1987 mit dem *avenimento* (Quotient) 459 und dem *avanzo* (Rest) 312. Die *Pratica* d. h. dasjenige Verfahren, welches bei den deutschen Rechenmeistern die welsche Praktik hiess, und welches insbesondere beim Rechnen mit benannten Zahlen beliebt war, wird aufs Ausführlichste gelehrt[6]). Für das Zurückführen verschiedener Brüche auf den kleinsten Gemeinnenner, beziehungsweise für die Auffindung der

---

[1]) *Ducere* heisst es z. B. bei der Ausmessung der Rechtecke. Vgl. Kästner I, 294—295. [2]) *General Trattato*, Parte 1 fol. 17 verso. [3]) Ebenda fol. 27 recto. [4]) Ebenda fol. 119 recto und verso. [5]) Ebenda fol. 35 recto und verso. [6]) Ebenda fol. 53 verso bis 106 recto.

kleinsten ganzen Zahl, deren Bruchtheile von gegebenem Nenner ganzzahlig ausfallen, ist ein besonderer Name angegeben, *accatare*[1]) (wörtlich: betteln, borgen). Tartaglia lehrt, wie man einen Brodtarif anfertigen könne, der den Veränderungen des Fruchtpreises sich anpasse[2]). Seine Bemerkung, daran habe noch kein Verfasser einer Arithmetik gedacht, ist gegenüber den Vorgängern, von welchen wir wissen (S. 478), höchstens für Italien keine eitle Ruhmredigkeit. Die zeitliche Entfernung zweier bestimmter Tage wird durch eine Subtraction gefunden[3]), die derjenigen von benannten Zahlen nachgebildet ist. Die Zeit vom 17. des dritten Monats 1552 bis zum 23. des ersten Monats 1555 wird z. B. nach folgendem leichtverständlichen Schema berechnet:

	23	I	1555
	17	III	1552
differentia	6	X	2

Terminrechnung d. h. Abtragung verschiedener an verschiedenen Tagen fälligen Zahlungen an einem mittleren Tage heisst *reccare a un di*[4]). Die Rechnung wird so geführt, dass, wenn die Zahlungen $z_1, z_2, \ldots z_n$ nach $t_1, t_2, \ldots t_n$ Zeit zu leisten waren, die Entfernung T des mittleren Tages sich durch $T = \frac{t_1 z_1 + t_2 z_2 + \cdots + t_n z_n}{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}$ ergiebt. Nicht uninteressant ist eine Polemik gegen Paciuolo und Cardano über Zinseszins bei Bruchtheilen von Jahren[5]), eine Polemik, auf welche wir schon (S. 325) mit dem Bemerken hingewiesen haben, es handle sich dabei nicht um eigentlich Mathematisches. Die Frage heisst: Was wird aus 100 in $2\frac{1}{2}$ Jahren zu 20% mit Zinseszinsen? Darüber ist Tartaglia mit den beiden anderen Schriftstellern einig, dass 100 zu 20% mit Zinseszinsen in 1 Jahre zu 120, in 2 Jahren zu 144, in 3 Jahren zu $172\frac{4}{5}$, in $\frac{1}{2}$ Jahre zu 110 anwachse. Den Betrag nach $2\frac{1}{2}$ Jahren berechnen aber Paciuolo und Cardano vom dritten Jahre rückwärts mittels des Dreisatzes $110 : 100 = 172\frac{4}{5} : x$, $x = 157\frac{1}{11}$, Tartaglia dagegen vom zweiten Jahre vorwärts mittels des Dreisatzes $100 : 110 = 144 : x$, $x = 158\frac{2}{5}$. Der Zinseszins, sagt er, werde immer vom Gläubiger auferlegt, und dieser stelle die Bedingung zu seinem Vortheile, welcher demnach bei der Rechnung zu wahren sei. Auch eine Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und zwar wieder die Theilungsfrage bei unterbrochenen Spielen (S. 501), wird unter-

[1]) *General Trattato*, Parte 1 fol. 109 verso. [2]) Ebenda fol. 171 recto. [3]) Ebenda fol. 182 recto. [4]) Ebenda fol. 185 verso. [5]) Ebenda fol. 191 verso bis 192 verso.

sucht[1]). Eine streng beweisbare Auflösung gebe es nicht, weil die Frage mehr nach Recht als nach Vernunftgründen zu behandeln sei, *la risoluzione di una tal questione e piu presto giudiciale che per ragione.* Am wenigsten Anstoss errege folgende Theilung. Das Spiel soll wieder auf s Spiele gehen, und s_1, s_2 sind die von beiden Spielern erreichten Gewinnspiele. Der Erste ist dem Zweiten um $s_1 - s_2$ Gewinne vor. Da er bei s Gewinnen den ganzen Einsatz des Gegners ausser dem eigenen an sich zieht, so gebühren ihm jetzt $\frac{s_1 - s_2}{s}$ von dessen Einsatz, während Jenem nur $\frac{s + s_2 - s_1}{s}$ desselben bleibt. Der Erste behält überdies $\frac{s}{s}$ des eigenen Einsatzes, und da beide Einsätze als gleich vorausgesetzt werden, so verhalten sich die beiderseitigen Theile wie $(s + s_1 - s_2) : (s + s_2 - s_1)$. Bei $s = 60$, $s_1 = 50$, $s_2 = 30$ werden die Verhältnisszahlen $80 : 40$ oder der Erste nimmt $\frac{2}{3}$, der Zweite $\frac{1}{3}$ des Gesammteinsatzes.

Parte 2. Sehr verschiedenartige Reihen werden der Summirung unterworfen, unter anderen solche, deren Glieder nach dem Gesetze wachsen, dass jedes Glied das Doppelte der Summe sämmtlicher vorhergehender Glieder vorstellt[2]), mithin die Reihe

$$1 + 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + \cdots.$$

Ist s_n die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe, so ist s_n^2 die Summe der ersten $2n - 1$ Glieder oder $s_{2n-1} = s_n^2$. Ein Beweis ist der Behauptung nicht beigefügt, lässt sich aber leicht erbringen. Weil $1 + 2 = 3 = s_2$, so ist das dritte Glied $2 \cdot 3$ und

$$s_3 = 3 + 2 \cdot 3 = 3^2;$$

ähnlicherweise ist $s_4 = 3^2 + 2 \cdot 3^2 = 3^3$ und

$$s_n = 3^{n-1},\quad s_{2n-1} = 3^{2n-2} = s_n^2.$$

Die Anzahl aller Versetzungen aus n von einander verschiedenen Elementen[3]) ist $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Die arithmetischen Reihen auf einander folgender Ordnung werden gebildet, und zwar jede auf sechs Glieder, deren letztes der Bildungsweise entsprechend regelmässig die Summe sämmtlicher Glieder der unmittelbar darüber stehenden Reihe liefert[4]).

[1]) *General Trattato*, Parte 1, fol. 265 verso. [2]) Ebenda Parte 2, fol. 16 verso. [3]) Ebenda fol. 16 verso. [4]) Ebenda fol. 17 recto.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

Auffallend ist der Zweck, der mit diesen Reihen sich verbindet. Sie sollen die Anzahl der mit 1 bis 8 gewöhnlichen sechsflächigen Würfeln möglichen Würfe zählen, so dass es bei 6 Würfeln 462 solcher verschiedenen Würfe gebe, bei 8 Würfeln

$$1 + 8 + 36 + 120 + 330 + 792 = 1287.$$

Andere Schriften des XVI. Jahrhunderts lassen die etwas dunkle Stelle verstehen lernen. Man gab damals viel auf Würfel, die nicht nur zu Glücksspielen verwandt wurden, sondern auch zu regelmässiger Beantwortung von Fragen. Bücher, welche in deutscher Sprache diesem Gegenstande gewidmet sind, führen den Namen **Loossbuch**. Ihrer Beschreibung[1]) entnehmen wir Folgendes. Ist nur ein I. Würfel in Gebrauch, so können mit demselben sechs von einander verschiedene Würfe erzielt werden. Tritt ein II. Würfel hinzu, so mag man nur die Würfe als verschieden erachten, bei welchen II nicht weniger Augen zeigt als I, denn der Wurf I = 3 Augen, II = 1 Auge war alsdann in der Form I = 1 Auge, II = 3 Augen schon da, ist mithin kein neuer Wurf. Der verschiedenen Würfe mit den Würfeln I und II sind es daher $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ oder in der Sprache der Combinatorik: Die Anzahl der mit zwei sechsflächigen Würfeln möglichen wesentlich verschiedenen Würfe ist gleich der Anzahl der Combinationen mit Wiederholung aus 6 Elementen zur Classe 2. Durch Fortsetzung der gleichen Betrachtung erkennt man, dass mit k Würfeln von je n Flächen so viele wesentlich verschiedene Würfe möglich sind, als durch die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur Classe k angegeben ist, mithin $\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$. Bei $n = 6$, $k = 8$ erscheint $\frac{6 \cdot 7 \cdots 13}{1 \cdot 2 \cdots 8} = 1287$. Dieselbe Zahl ist aber auch die Summe der sechs ersten Glieder der aus den Zahlen 1, 8, 36, 120, 330, 792 bestehenden arithmetischen Reihe 7. Ordnung, und Tartaglia's Behauptung ist damit bestätigt. Eine Anwendung dieser Anzahl der wesentlich verschiedenen Würfe

[1]) Kästner I, 226—241.

bei Wahrscheinlichkeitsaufgaben ist allerdings unstatthaft, weil die Häufigkeit, in welcher jeder als wesentlich verschieden bezeichnete Einzelwurf vorkommt, nicht berücksichtigt ist. — Näherungsweise Ausziehung von Quadratwurzeln hatte Cardano in der Practica Arithmeticae generalis von 1537 gelehrt (S. 499). Auch Tartaglia beschreibt die gleichen Verfahrungsweisen[1]), indem er nicht mit Unrecht die eine, welcher in fortgesetzter Anwendung von $\sqrt{A} \sim a + \frac{A - a^2}{2a}$ besteht, auf die alten Araber zurückführt, während er für die andere — Anhängung von Nullen vor der Wurzelausziehung — auf Orontius Finaeus verweist. Quadratwurzeln aus Brüchen[2]) werden gewöhnlich, *piu commune*, durch annähernde Wurzelausziehung aus Zähler und Nenner, besser aber so gefunden, dass man dem Bruche durch Erweiterung einen quadratischen Nenner verschafft, um nur im Zähler einer angenäherten Wurzel zu bedürfen. Eine ganz feine Bemerkung hebt hervor[3]), dass jede angenäherte Wurzelausziehung einen Fehler mit sich führe, die Einsetzung solcher Werthe dürfe also immer erst am Ende einer ganzen Rechnung eintreten, damit die Fehler sich nicht vervielfältigen. Näherungsweise Ausziehung von Kubikwurzeln[4]) haben manche Schriftsteller, wie Sacrobosco, gar nicht, andere, wie Cardano, grundfalsch gelehrt. Michael Stifel hat für Wurzelausziehungen Vortreffliches geleistet, *nelle estrattioni delle radici rationali & discrete si e mostrato molto eccelente*, Näherungsverfahren aber nicht angegeben. Tartaglia behauptet alsdann 1514, das wäre demnach im Alter von 14 Jahren, etwa zur gleichen Zeit als er Schreibunterricht nahm, was die Glaubwürdigkeit der Behauptung nicht gerade erhöht, gefunden zu haben, dass in erster Annäherung

$$\sqrt[3]{A} \sim a + \frac{A - a^3}{3a + 3a^2} \quad (= a_1)$$

in zweiter Annäherung $\sqrt[3]{A} \sim a_1 + \frac{A - a_1^3}{3a_1 + 3a_1^2}$ zu setzen sei. Cardano und Ferrari, heisst es an einer späteren Stelle[5]), hätten aus dem Werke Stifel's gelernt, wie man auch höhere Wurzeln zu ziehen habe, ein eigentliches Näherungsverfahren fehle jedoch bei Stifel, so dass dessen Nachbeter hier rathlos gewesen seien und Fehler über Fehler machten. Dem Lobe Stifel's, dem damit verbundenen Eingeständnisse, die Arithmetica integra selbstverständlich gelesen zu haben, gegenüber musste man die eiserne Stirn Tartaglia's besitzen, um die Erfindung der Binomialcoefficienten, deren Bildungsgesetz

[1]) *General Trattato*, Parte 2, fol. 19 verso und 22 recto (durch einen Druckfehler sind diese Blätter mit 25 und 28 bezeichnet). [2]) Ebenda fol. 25 recto. [3]) Ebenda fol. 26 verso. [4]) Ebenda fol. 27 recto bis 28 verso. [5]) Ebenda fol. 42 recto l. 16 sqq.

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+k}{k+1},$$

deren Anwendung zur Ausziehung von Wurzeln mit beliebig hohem Wurzelexponenten ganz unbefangen für sich in Anspruch zu nehmen[1]), ohne bei dieser Gelegenheit Stifel's Namen auch nur zu erwähnen. Einen Hauptbestandtheil der Parte 2 bildet das Rechnen mit Proportionen, wie wir es von früheren arithmetischen Schriftstellern her zur Genüge kennen. Vielleicht zum ersten Male bediente sich Tartaglia hier des Wortes Dignität[2]), welches geraume Zeit der Kunstausdruck für Potenz geblieben ist. — Auch zahlentheoretische Bemerkungen treten auf, darunter solche über vollkommene Zahlen[3]). Tartaglia geht dabei von der ausgesprochenen, irrigen — vermuthlich Stifel (S. 435) entnommenen — Meinung aus, $2^{2n+1} - 1$ sei immer Primzahl, mithin auch immer $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ eine vollkommene Zahl. Beweislos fügt Tartaglia hinzu, alle vollkommenen Zahlen mit Ausschluss der 6 liessen durch 9 getheilt 1 zum Reste. Wir sind diesem Satze bei Bovillus (S. 385) begegnet. — Dem Rationalmachen von Brüchen, deren Nenner Summe oder Differenz zweier irrationaler Grössen ist, wird besonderes Gewicht beigelegt. Dabei ist die Vorschrift ausgesprochen[4]), welche allein das blinde Umhertasten zu einem verständigen Verfahren umzuwandeln im Stande ist, man müsse zunächst die im Nenner auftretenden Irrationalitäten zu Wurzelgrössen gleicher Benennung machen, also z. B. $\frac{10}{\sqrt[5]{5} + \sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt[10]{25} + \sqrt[10]{243}}$ setzen; dann habe man mit $\frac{243 - 25}{\sqrt[10]{243} + \sqrt[10]{25}}$, welches immer eine aufgehende Division darstelle, den Bruch zu erweitern.

Parte 3 ist geometrischen Untersuchungen gewidmet. Für einen Uebersetzer des Euklid, wie Tartaglia es war, klingt es da recht auffallend, wenn als *euklidische Definitionen*[5]) angegeben wird, die gerade Linie sei die kürzeste Ausdehnung von einem Punkte zum andern, die Ebene die kürzeste Ausdehnung von einer Linie zur anderen. Auf Nachlässigkeit eines fremden Herausgebers kann man die Schuld nicht schieben, da Tartaglia's Testament zeigt, dass der Druck von Parte 3 und 4 noch während seines Lebens vollendet war (S. 517).

[1]) *General Trattato*, Parte 2, fol. 69 recto: *Regola generale dal presente auttor ritrovata da sapere in tale estrattioni di radici in infinito piu oltra procedere nelle altri sequenti specie.* Die Tabelle der Binomialcoefficienten steht fol. 69 verso und fol. 71 verso und an letzterer Stelle auch das Bildungsgesetz. [2]) Ebenda fol. 138 verso: *Li numeri signalati detti quadri, cubi, censi di censi . . . che si chiamano dignita.* [3]) Ebenda fol. 146 verso. [4]) Ebenda Parte 2, fol. 153 recto. [5]) Ebenda Parte 3, fol. 3 verso und fol. 4 verso.

Er wird mithin selbst für diese und manche andere Versehen verantwortlich sein, entschuldigt durch zunehmende Kränklichkeit. Nur so ist es begreiflich, dass einmal von einem Rhombus mit der Seite 6 und den Diagonalen 10 und 20 die Rede ist[1]), als ob 5 und 10 die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 6 sein könnten, während an einer anderen Stelle des folgenden Abschnittes[2]) vollkommen richtig ein Rhombus von der Seite 13 und den Diagonalen 10 und 24 besprochen wird. — Die durch eine Zeichnung unterstützte Beschreibung des *squadro*[3]), jenes von Feliciano (S. 481) genannten Winkelkreuzes zur Absteckung senkrechter Linien auf dem Felde, dürfte die erste sein, welche in einem Druckwerke vorkommt. Die Prüfung dieser Rechtwinkligkeit durch Wiederholung des Verfahrens, welches nach Drehung der Vorrichtung um 90° genau die gleichen Signalstangen wie vorher als richtig aufgestellt ergeben muss, und Anwendungen des Winkelkreuzes werden gelehrt. Das Ausmessen beliebig begrenzter Felder[4]) erfolgt durch Theilung in geradlinige Figuren mittels Hilfslinien, die man auf den Feldern selbst absteckt, oder bei Unzugänglichkeit der Felder um diese herum zu legen hat. Weitere im Leben nützliche Aufgaben beziehen sich auf Körperinhalte, woraus wir die Berechnung des Mauerwerkes rechtwinkliger und kreisrunder Thürme[5]) hervorheben. Ist d die Dicke, h die Höhe der Mauer, u_a und u_i der äussere beziehungsweise innere Umfang, so ist in beiden Fällen der Mauerinhalt $h \cdot d \cdot \frac{u_a + u_i}{2}$, wofür indessen eine Ableitung nicht gegeben ist.

Parte 4. Hauptinhalt dieser Abtheilung ist Flächen- und Körperberechnung. Bei der letzteren schliesst sich Tartaglia anfangs an Euklid, später an Archimed an, welche er als seine Quellen nennt. Bei den Flächenberechnungen ist auch auf andere Schriftsteller Rücksicht genommen, insbesondere werden Irrthümer von solchen bemerkt[6]). Boethius irrte, indem er Dreiecksfläche und Dreieckszahl mit einander verwechselte; Orontius Finaeus beging mannigfache geometrische Irrthümer; Stifel's Würfelverdoppelung ist falsch; Bovillus und ebenso Albrecht Dürer haben das Quadrat in einen flächengleichen Kreis verwandelt, indem sie diesem $\frac{8}{10}$ der Diagonale zum Durchmesser gaben u. s. w. Zeigt schon dieser mehr kritische Abschnitt, dass Tartaglia's unleugbare mathematische Begabung vielleicht vorzugs-

[1]) *General Trattato*, Parte 3, fol. 26 verso. [2]) Ebenda Parte 4, fol. 9 verso. [3]) Ebenda Parte 3, fol. 24 recto. [4]) Ebenda fol. 29 verso. [5]) Ebenda fol. 47 verso. [6]) Ebenda Parte 4, fol. 5 recto, 19 recto bis 20 recto, 21 recto, 22 recto und verso.

weise auf geometrischem Gebiete lag, so gewinnt diese Auffassung fast Gewissheit, wenn wir zur folgenden Abtheilung übergehen.

Parte 5. Hier sind Auflösungen von durch Zeichnung erfüllbaren Aufgaben unter Anwendung von Lineal und Zirkel mit beliebiger, mitunter auch mit unveränderlicher Zirkelöffnung[1]) vereinigt, welche unsere Achtung vor dem Erfinder auf hohe Stufe bringen. Vielfach giebt Tartaglia ganz bestimmte Zeitpunkte an, wann er diese, wann er jene Auflösung zu Wege gebracht haben will, freilich ohne diesen Angaben irgend einen äusseren Beleg hinzuzufügen, so dass wir bei der wiederholt erkannten Unglaubwürdigkeit Tartaglia's diesen Zeitbestimmungen kaum Gewicht beizulegen haben. Im Jahre 1530 z. B. will er die Aufgabe gelöst haben, in ein gleichseitiges Dreieck ein Quadrat einzuzeichnen, dessen eine Seite auf einer Dreiecksseite liegen sollte, und diese Aufgabe habe er alsdann auf den Fall eines ungleichseitigen Dreiecks erweitert[2]) (Fig. 94). Sei bc die grösste Seite des Dreiecks abc. Man ziehe die zu ihr senkrechte Höhe ad des Dreiecks und ferner in den Endpunkten b, c die Senkrechten bf und ce, beide von gleicher Länge mit bc. Die Geraden fd, ed schneiden alsdann ab, ac in h, g, und diese Punkte sind zwei Eckpunkte des Quadrates, dessen zwei andere Eckpunkte i, k gefunden werden, indem man von h, g Senkrechte hi, gk auf die Grundlinie bc fällt. Es ist $\triangle cge \backsim agd$ und $\triangle bhf \backsim ahd$. Folglich $gc : ce = ga : ad$ und $fb : bh = da : ah$, welche letztere Proportion wegen $fb = ce$ auch $ce : bh = da : ah$ geschrieben werden kann. Vervielfacht man beide Proportionen mit einander, so entsteht $gc : bh = ga : ah$ und folglich ist $gh \parallel bc$. Die Rechtwinkligkeit des Vierecks $ghik$ ist damit bewiesen, die Gleichseitigkeit bleibt noch fraglich. Nun ist

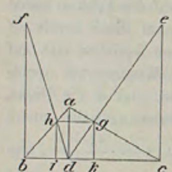

Fig. 94.

$$cd : ce = dk : gk, \quad db : bf = di : ih$$

oder wegen $ce = bf$ und $gk = ih$ auch $db : ce = di : gk$. Vereinigung der beiden Proportionen liefert $(cd + db) : ce = (dk + di) : gk$ d. h. $bc : ce = ik : gk$. Aber $bc = ce$, also auch $ik = gk$. Die nächste Aufgabe verlangt statt des eingezeichneten Quadrates ein Rechteck, dessen Seiten im Verhältnisse von $1:2$ stehen, und dessen eine

[1]) Ausführliche Auszüge bei W. M. Kutta, Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung in Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Academie der Naturforscher. Bd. 71 Nro. 3. Halle 1897. [2]) *General Trattato*, Parte 5, fol. 18 recto und verso.

grössere Seite auf der grössten Dreiecksseite liege. Der einzige Unterschied in der Zeichnung gegen vorhin besteht (Fig. 95) darin, dass die Senkrechten bf, ce in den Endpunkten der Grundlinie nicht mehr der ganzen, sondern der halben Grundlinie gleich gemacht werden. Im Uebrigen ist auch die Beweisführung bis zur Herstellung der Proportion $bc : ce = ik : gk$ buchstäblich abzuschreiben, dann heisst es weiter $bc = 2ce$, also auch $ik = 2gk$, und das Verlangte ist erfüllt. Die Bedeutung dieser zweiten Aufgabe besteht darin, dass sie die Lösung einer dritten Aufgabe vermittelt, der Aufgabe, in ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck ein Quadrat derart einzuzeichnen, dass dessen vier Ecken auf ebensovielen Fünfecksseiten liegen. Werden (Fig. 96) die Fünfecksseiten bc, ed bis zum Durchschnitte in g verlängert, werden sodann in die Dreiecke abg, aeg die Rechtecke $hilk$, $ilmn$ mit Seiten

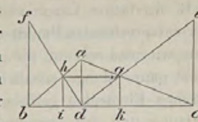

Fig. 95.

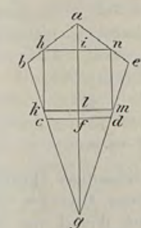

Fig. 96.

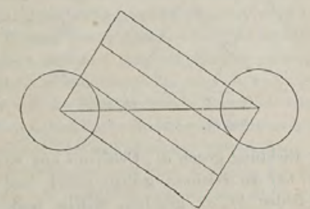
Fig. 97.

im Verhältnisse von $1:2$ eingezeichnet, so muss $hkmn$ das verlangte Quadrat sein. Diese Aufgabe ist die sechste von denen, welche Ferrari am 1. Juni 1547 in seinem dritten Cartello stellte, und Tartaglia gab die Auflösung schon in seiner dritten Risposta am 9. Juli 1547, allerdings ohne einen Beweis beizufügen, doch ist nicht denkbar, dass er zufällig und ohne den Grund des Verfahrens einzusehen auf dasselbe verfallen sein sollte. — Unter den mit unveränderter Zirkelöffnung zu lösenden Aufgaben verlangt die erste: eine Strecke in eine beliebig gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen[1]). Um die Endpunkte der Strecke werden (Fig. 97) mit dem gegebenen Zirkel Kreise gerissen und auf denselben Bögen von 60^0 vom Durchschnittspunkte der Strecke aus aufgetragen, auf dem einen Kreise nach oben, auf dem anderen nach unten. Die Mittelpunkte der Kreise verbindet man

[1]) *General Trattato*, Parte 5, fol. 22 verso.

mit den so auf den Kreisen selbst bestimmten Punkten durch Halbmesser, welche einander parallel verlaufen, und welche bis zu n-facher z. B. dreifacher Länge verlängert werden. Die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte auf beiden verlängerten Halbmessern schneiden, wie man erkennt, die gegebene Strecke in den gesuchten Punkten. Eine ganze Menge, nämlich 67 von den im Ganzen 75 in den euklidischen Elementen gelösten Aufgaben werden unter gegenseitiger Benutzung und mit unveränderter Zirkelöffnung behandelt[1]). Wir begnügen uns damit, die Behandlung der beiden ersten Aufgaben anzudeuten. Erstens sei (Fig. 98) über einer gegebenen Strecke ab ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen. Von a aus in der Richtung gegen b schneidet man mit der gegebenen Zirkelöffnung auf der, wenn nothwendig verlängerten ab die ad ab, und ebenso von b aus die bc in

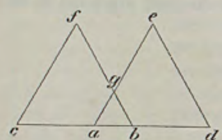

Fig. 98.

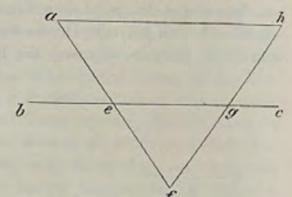

Fig. 99.

der Richtung gegen a. Ueber ad und bc die gleichseitigen Dreiecke ade, bcf zu zeichnen gelingt sofort, und mit diesen Dreiecken sind die Seiten bf, ae gegeben, welche beide mit ab Winkel von 60^0 bilden, also den dritten Eckpunkt des gesuchten Dreiecks abg als Durchschnittspunkt besitzen. Zweitens sei von einem Punkte a aus eine Parallele zu einer gegebenen Geraden bc zu ziehen. Die gegebene Zirkelweite reiche (Fig. 99) von a bis zu dem Punkte e auf bc. Man zieht ae und verlängert um $ef = ae$. Dann schneidet man von f aus den Punkt g der bc ein, so dass $fg = ef$, verlängert um $gh = fg$ und zieht ah als die gewünschte Parallele. Ist die Zirkelweite so gering, dass mit ihr von a aus kein Punkt e der Geraden bc getroffen wird, so zieht man eine ganz beliebige ae und wählt auf ihr einen, oder wenn nothwendig mehrere Zwischenpunkte $a_1, a_2 \ldots$, die alle weniger von einander und zuletzt von e entfernt sind, als die gegebene Zirkelweite, worauf man Hilfsparallelen zieht, bis man zuletzt zu derjenigen Parallelen gelangt, welche durch a hindurchgeht.

[1]) *General Trattato*, Parte 5, fol. 64 recto bis 81 recto.

Wir stellen diesen geistreichen Constructionen Tartaglia's eine von denen gegenüber, die Ferrari im October des Jahres 1547 veröffentlichte[1]). Von dem grösseren Schenkel eines Winkels, und zwar vom Scheitelpunkte aus, ein Stück abzuschneiden, welches dem kleineren Schenkel gleich sei. Zunächst wird (Fig. 100) $\sphericalangle bac$ durch die ad halbirt, was mit jeder Zirkelweite möglich ist, dann wird mit der gegebenen Zirkelweite be von b aus der Punkt e auf der ad, von e aus durch $ef = be$ der Punkt f auf der ac bestimmt, so ist $af = ab$. Diese Construction versagt allerdings, wenn die Zirkelweite be kleiner als die senkrechte Entfernung von b nach ad ist. Dann wird $\sphericalangle bad$ wiederholt durch ad_1, vielleicht auch noch $\sphericalangle bad_1$ durch ad_2 u. s. w. halbirt und einzigweis $ab = \cdots = af_2 = af_1 = af$ hervorgebracht, wo $f_1, f_2, \ldots$ Punkte jener Hilfslinien sind. Dass Ferrari sich mehrfach mit der Geometrie mit unveränderter Zirkelweite beschäftigte, hat auch Cardano im XV. Buche seines Werkes De subtilitate von 1550 bezeugt[2]).

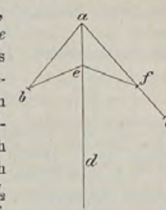

Fig. 100.

Die Leistungen Tartaglia's auf dem gleichen Gebiete gehen indessen um einen bedeutenden Schritt über alles, was von Anderen geliefert wurde, hinaus. Er war der Einzige, welcher auch auf Kegelschnitte bezügliche Aufgaben mittels unveränderter Zirkelöffnung zu lösen wusste[3]). In dem gleichen 5. Abschnitte, aus welchem wir wie aus dem 3. und 4. nur Geometrisches berichten konnten, begegnet dem Leser sehr unvermuthet eine Aufgabe ganz anderer Art[4]). Die Zahl 8 soll in zwei Theile zerlegt werden, welche mit einander und überdies mit ihrer Differenz vervielfacht das grösstmögliche Product hervorbringen; eine Aufgabe aus der Lehre von den Maximalwerthen einer Function ist also gestellt und, fügen wir hinzu, richtig gelöst. Die Regel, sagt Tartaglia, sei folgende: Man müsse 8 halbiren, das Quadrat der Hälfte um sein Drittel vermehrt sei alsdann das Quadrat der Differenz der beiden Theile. In Buchstaben kleidet sich die Regel folgendermassen. Sei a als Summe der beiden Theile $x + y$ gedacht, so wird

$$(x - y)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3}$$

und

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{12}}, \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{12}};$$

[1]) *Cartello V*, pag. 29. [2]) Cardano III, 589—592. [3]) *General Trattato*, Parte 5, fol. 81 verso bis 83 verso. [4]) Ebenda fol. 88 verso.

im gegebenen Einzelfalle $a = 8$ sind die beiden Theile $4 + \sqrt{5\frac{1}{3}}$, $4 - \sqrt{5\frac{1}{3}}$. Das ist vollständig richtig, denn prüfen wir nach dem heutigen Verfahren und setzen $\frac{a}{2} + z$, $\frac{a}{2} - z$ als die beiden Theile, $2z$ als die Differenz, so soll $2z\left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = \frac{a^2 z}{2} - 2z^3$ zum Maximum werden. Das bedingt $\frac{a^2}{2} - 6z^2 = 0$ und

$$z = \sqrt{\frac{a^2}{12}}, \quad \frac{a}{2} + z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{12}}, \quad \frac{a}{2} - z = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{12}}.$$

Wie hat aber Tartaglia die Regel gefunden? Der Grund, sagt er, hänge von der „neuen Algebra“ ab, und darunter ist wohl die Algebra der kubischen Gleichungen verstanden. Ein sehr geistreicher Wiederherstellungsversuch von Tartaglia's Verfahren ist folgender [1]). Wenn $\frac{a^2 z}{2} - 2z^3$ einen Maximalwerth m besitzen soll, so kommt es auf die Auflösung der Gleichung $\frac{a^2 z}{2} - 2z^3 = m$ oder $z^3 + \frac{m}{2} = \frac{a^2}{4} z$ an. In der Ars magna des Cardano war gelehrt (S. 504), dass diese Gleichung mittels $y^3 = \frac{a^2}{4} y + \frac{m}{2}$ gelöst werde, indem

$$z = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3y^2}{4}}$$

sei. Der grösste Werth, den y annehmen darf, so dass z reell bleibt, geht aus $\frac{a^2}{4} - \frac{3y^2}{4}$ hervor, d. h. ist $y = \frac{a}{\sqrt{3}}$, und dieser liefert $z = \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{12}}$, wie oben. Der grösste Werth von y liefert aber m als Maximum, denn $m = 2y^3 - \frac{a^2}{2} y = 2y\left(y^2 - \frac{a^2}{4}\right)$ muss mit y gleichzeitig wachsen, also auch gleichzeitig mit y seinen grösstmöglichen Werth erhalten.

Parte 6. Die Algebra bildet die letzte Abtheilung des General Trattato. Jeder Leser wird mit besonderer Begierde dieser Abtheilung sich zuwenden, denn Tartaglia, welcher (S. 488) Anderen, d. h. Cardano, den Vorwurf machte, sie füllten ihre Bücher mit breitgetretenen Geschichten, was er nicht wolle, wird doch diesem Grundsatze treu geblieben sein, wird doch Jahre hindurch Materialien aufgespeichert haben, von welchen er wiederholt versicherte, dass er sie besitze, und wird als Ort ihres Erscheinens die letzte Abtheilung seines grossen

[1]) H. G. Zeuthen, *Notes sur l'histoire des mathématiques. II. Tartalea contra Cardanum.* Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, 1893.

Handbuches ausersehen haben. Jeder Leser, sagen wir, wird mit solcher Erwartung an Parte 6 herantreten, wird beim Lesen die grösste Enttäuschung empfinden. Ausschliesslich quadratische Gleichungen oder solche, die auf quadratische sich zurückführen, wenn man eine Potenz der Unbekannten als neue Unbekannte wählt, sind behandelt. Dann folgt das Rationalmachen von Gleichungen, das Wegschaffen von Brüchen, Wurzelausziehungen aus beiden Seiten, schliesslich 56 Aufgaben zur Einübung aller Vorschriften, aber wesentlich Neues, Dinge, die vor dem General Trattato nicht auch schon bekannt gewesen wären, sucht man vergebens.

Tartaglia's schriftstellerische Laufbahn war beendet. Wir haben das Verdienstliche aus seinen theils während seines Lebens, theils nach seinem Tode erschienenen Schriften hervorgehoben. Wir haben wahrscheinlich gemacht, dass in Form von niedergeschriebenen Notizen nichts Weiteres von ihm vorhanden war. In das Innere seines Geistes einzudringen, zu ermitteln, welcherlei grosse oder kleine Entdeckungen dadurch zu Grunde gingen, dass Tartaglia sie nicht zu Papier brachte, ist ein Ding der Unmöglichkeit; aber denken wir uns Tartaglia's Schriften, so wie sie im Drucke vorliegen, seien niemals erschienen, so bleibt die Mathematik das, was sie ist, um keinen einzigen grösseren und fruchtbaren Gedanken ärmer. Sogar mit Bezug auf kubische Gleichungen gilt diese Wahrheit, insofern deren Behandlung durch Cardano der nachgelassenen Schrift Del Ferro's hätte entnommen werden können und dann gleiche Vervollkommnung durch ihn zu erfahren fähig war, wie es mit den Mittheilungen Tartaglia's erging. Und kommen wir auf die (S. 512) gestellte Frage zurück, ob Tartaglia wirklich fremde Erfindungen Cardano als seine eigenen mitzutheilen im Stande war, so müssen wir jetzt dieselbe voll und ganz bejahen. Wir glauben nicht an eine selbständige Auflösung der kubischen Gleichung durch Tartaglia. Ob Cardano freilich, ohne dass sein Geist durch die Begierde, dem Nebenbuhler es zuvorzuthun, zu übermenschlicher Anstrengung angespornt worden wäre, alles das vollbracht hätte, was er wirklich vollbrachte, ist eine andere Frage, und hier liegt ein, wenn auch sehr mittelbares Verdienst Tartaglia's um die Entwickelung der mathematischen Wissenschaften vor. Als unmittelbares Verdienst haben wir nur zu bezeichnen, dass Tartaglia in seinem General Trattato das für lange Jahre unerreicht beste Handbuch schuf, fähig und bestimmt Paciuolo's Summa abzulösen und zu verdrängen.

Wir haben von Vervollkommnungen gesprochen, welche Cardano zu Tartaglia's Mittheilungen hinzufügte. Schon unser Bericht über die Ars magna gestattet diesen Ausdruck, aber Cardano's wissenschaftliche Thätigkeit war noch lange nicht beendigt, und wir müssen nunmehr seinen mathematischen Schriften uns zuwenden, welche er nach 1560 herausgab, und zu denen, welche erst nach seinem Tode aus seinem Nachlasse an die Oeffentlichkeit gelangten.

Im Jahre 1570 erschien in Basel ein stattlicher Folioband, welcher drei Schriften Cardano's in sich vereinigte. Die erste war das Opus novum de proportionibus, die zweite ein neuer Abdruck der Ars magna von 1545, die dritte führte den nie und nirgend erklärten Titel De regula Aliza, der durch unrichtige Transscription aus dem arabischen Worte *a'izzâ* (schwierig anzustellen, mühselig, beschwerlich) entstanden sein kann[1]), und alsdann Regel der schwierigen Fälle bedeuten würde. Die *Ars magna* ist nach der ersten Nürnberger Ausgabe schon zur Genüge besprochen worden, wir haben es also nur mit den beiden anderen Schriften zu thun. Aus dem *Opus novum de proportionibus*[2]) dürfte Folgendes zu erwähnen sein. Die Schrift ist in Sätze, nicht wie andere Cardanische Werke in Kapitel getheilt. Im 137. Satze[3]) sind die Binomialcoefficienten als Erfindung Michael Stifel's bezeichnet und genau so wie in dessen Arithmetica integra zum Abdrucke gebracht. Man mag hierin eine Abfertigung der unbegründeten Anmassungen Tartaglia's (S. 524) von 1556 erkennen. Im 3. Satze[4]) sind die 15 zweielementigen Combinationen aus sechs von einander verschiedenen Elementen der Reihe nach gebildet. Im 170. Satze[5]) ist als Erfindung in Anspruch genommen, dass die Anzahl sämmtlicher Combinationen aus n von einander verschiedenen Elementen zu allen möglichen Classen von der 1. bis zur $n$ten einschliesslich durch $2^n - 1$ ermittelt werden. Dieser Satz veranlasst uns zu einer eigenthümlichen Frage. Michael Stifel[6]) führt ihn nämlich schon in seiner Arithmetica integra ausdrücklich als dem Cardano angehörend an. Demnach müsste der Satz 1544 veröffentlicht gewesen sein, was nur in der Arithmetik von 1539 der Fall sein konnte, wo wir aber vergeblich darnach gesucht haben. Auffallend genug ist es Cardano genau so wie uns ergangen, denn er bemerkt ausdrücklich[7]): Ich habe dieses schon anderwärts gelehrt, glaube aber bei der Rechnung mich geirrt zu haben; die Stelle selbst kann ich nicht auffinden. Der 70. Satz[8]) vergleicht zwei geometrische Progressionen von je drei Gliedern mit einander und behauptet, dass die Glieder der einen um die ausser der Reihe benutzten Glieder der

[1]) Diese Vermuthung rührt von H. Armin Wittstein her. [2]) Cardano IV, 463—601. [3]) Ebenda IV, 529. [4]) Ebenda IV, 467. [5]) Ebenda IV, 557. [6]) *Arithmetica integra* fol. 101 recto: *De regula quadam Hieronymi Cardani.* [7]) *Et hoc alias docui, quanquam credam me errasse in supputatione nam locum invenire non possum.* [8]) Cardano IV, 495.

anderen vermehrt eine arithmetische Progression liefern können, nicht aber wenn man die Glieder so zusammenfasse, wie ihre Anordnung in den geometrischen Progressionen es verlange; aus 2, 4, 8 und 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$ könne beispielsweise die arithmetische Progression $2+1$, $4+\frac{9}{4}$, $8+\frac{3}{2}$ gebildet werden. Cardano's Beweis in Buchstaben umgesetzt, sonst aber unverändert, ist folgender. Seien α, $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varepsilon^2$ und β, $\beta\eta$, $\beta\eta^2$ die gegebenen Progressionen, sei zugleich $\varepsilon > 1$ und $\eta > 1$, so kann $\alpha+\beta$, $\alpha\varepsilon+\beta\eta$, $\alpha\varepsilon^2+\beta\eta^2$ keine arithmetische Progression sein. Wegen der für ε und η ausgesprochenen Bedingung ist

$$\alpha\varepsilon^2 - \alpha\varepsilon > \alpha\varepsilon - \alpha,$$
$$\beta\eta^2 - \beta\eta > \beta\eta - \beta$$

und durch Addition

$$(\alpha\varepsilon^2 + \beta\eta^2) - (\alpha\varepsilon + \beta\eta) > (\alpha\varepsilon + \beta\eta) - (\alpha + \beta).$$

Ebensowenig kann aber $\alpha + \beta\eta^2$, $\alpha\varepsilon + \beta\eta$, $\alpha\varepsilon^2 + \beta$ eine arithmetische Progression sein. Diesen letzteren Beweis führt allerdings Cardano nicht aus, er lässt sich aber leicht ergänzen:

$$(\alpha + \beta\eta^2) - (\alpha\varepsilon + \beta\eta) = \beta\eta(\eta - 1) - \alpha(\varepsilon - 1),$$
$$(\alpha\varepsilon + \beta\eta) - (\alpha\varepsilon^2 + \beta) = \beta(\eta - 1) - \alpha\varepsilon(\varepsilon - 1).$$

Sollten beide Differenzen einander gleich sein, so müsste

$$\beta(\eta - 1)^2 = -\alpha(\varepsilon - 1)^2$$

oder eine Gleichung zwischen Positivem und Negativem stattfinden. Dass nämlich Cardano α, ε, β, η sämmtlich als positiv voraussetzt, geht schon aus seinem Beweise des ersten Falles hervor.

Auch Geometrisches und Mechanisches kommt in dem *Opus novum de proportionibus* vor. Die Sätze 159, 160, 161 stehen in innigem Zusammenhange[1]) und handeln von den Winkeln, welche Kreisbögen mit geraden Linien bilden. Diese Winkel hatten Campanus (S. 104) Schwierigkeiten bereitet, aber seither, also etwa 300 Jahre lang, hatte man sich nicht weiter darum gekümmert. Im XVI. Buche De subtilitate[2]) berührte Cardano den Gegenstand. Dann ging ein französischer Geometer, Peletier, von welchem erst im XIV. Abschnitte unseres Buches die Rede sein wird, wohin nach streng eingehaltener Zeitordnung auch Cardano's hierauf zielende Betrachtungen gehören würden, auf den Gegenstand genauer ein. Dann kamen eben die Cardano'schen Untersuchungen von 1570. Der Winkel, welchen (Figur 101) der Kreisbogen be mit der Geraden bc bildet, sagt

[1]) Cardano IV, 543—546. [2]) Ebenda III, 600—601.

Cardano, kann einem geradlinigen Winkel a nicht gleich sein. Jedenfalls kann man nämlich einen zweiten geradlinigen Winkel $cbd = a$ machen, so dass entweder bd innerhalb des Winkelraumes cbe fällt oder ausserhalb, letzteres wenn etwa $\sphericalangle cbd' = a$ wäre. In beiden Fällen müsste, wenn auch $\sphericalangle cbe = a$ wäre, der Theil gleich dem Ganzen sein. Daraus folgt weiter, dass ein solcher gemischtliniger Winkel durch eine Gerade nicht halbirt werden kann, weil die Halbirungsgerade ihn in einen geradlinigen und einen wiederum gemischtlinigen Winkel zerlegen würde, die einander nicht gleich sein können. Weiter ist gewiss, dass zwischen zwei einander berührende Kreise eine Gerade nicht gezogen werden kann (Figur 102). Die Be-

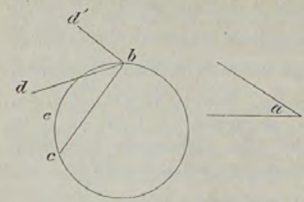

Fig. 101.

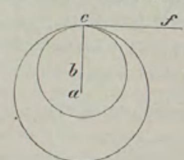

Fig. 102.

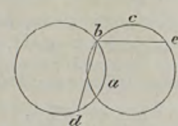

Fig. 103.

rührungslinie cf an beide Kreise steht auf den zusammenfallenden Halbmessern ac und bc senkrecht. Jede Gerade, die mit cf einen noch so kleinen Winkel in der Drehungsrichtung gegen cb einschliesst, liegt innerhalb des Kreises um b, also nicht zwischen beiden Kreisen. Dem Winkel zweier gleichen, sich schneidenden Kreise ist ein geradliniger Winkel allerdings gleich (Figur 103). Sind die Sehnen bd, be einander gleich, so ist $\sphericalangle dba = ebc$, also auch $\sphericalangle dbe = abc$ durch gleichmässige Veränderung gleicher Grössen. Zwischen zwei gerade Linien, welche einen Winkel bilden, kann man Kreisbögen in beliebiger Anzahl einschalten, denn man braucht nur den geradlinigen Winkel durch irgend eine Gerade zu theilen und diese Gerade als Tangente des zu zeichnenden Kreises im Scheitelpunkte des Winkels zu benutzen. Schon diese Dinge seien alle wahr, aber schwer zu begreifen, und mit ihnen sind die Schwierigkeiten keineswegs abgeschlossen. Man behauptet z. B., durch fortgesetzte Halbirung einer Grösse müsse man zu einer solchen gelangen, die kleiner sei als irgend eine ge-

gebene Grösse und diese Wahrheit versage beim geradlinigen Winkel verglichen mit dem Winkel, welchen der Kreisbogen mit seiner Berührenden bildet, dem *angulus contactus*, wie Cardano ihn nennt, während anderwärts vom Contingenzwinkel gesprochen zu werden pflegte. Eine andere Schwierigkeit entsteht (Figur 104) bei in a sich berührenden Kreisen durch Ziehen der Sehnen afd und age. Der geradlinige Winkel ead ist gleich dem doppelt krummlinigen Winkel gae, und doch ist die Basis ge des letzteren wesentlich grösser als die Basis de des ersteren, kann wenigstens wesentlich grösser gemacht werden dadurch, dass man mit age beliebig nahe an afd heranrückt. Die Schwierigkeiten, zumal die der Untheilbarkeit des Contingenzwinkels (sei es zwischen Kreisbogen und Tangente, sei es zwischen zwei einander berührenden Kreisbögen) beruhen der Hauptsache nach darauf, dass, wenn auch der Satz richtig ist, ein Vermindertes müsse schliesslich kleiner werden als ein Bleibendes, hier eine Ausnahme eintritt, weil[1]) das Bleibende die Krümmung des Kreises ist, das sich Vermindernde ein bis zum Punkte abnehmender Winkel; die Krümmung des Kreises verhindere mithin rechtmässig die Theilung. Wir kommen, wie gesagt, im folgenden XIV. Abschnitte wiederholt auf diese Dinge zu reden und wollen hier nur Cardano's keineswegs einwandfreie Aeusserungen aufbewahren.

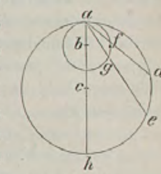

Fig. 104.

Der 173. Satz[2]) des *Opus novum de proportionibus*, bei welchem wir noch einen Augenblick verweilen, lehrt die Herstellung einer hin- und hergehenden geradlinigen Bewegung durch Drehungen. Es sei, erklärt Cardano, eine Erfindung des Ferrari; den Beweis aber habe dieser nicht zu führen vermocht, und er habe denselben desshalb ergänzt. Der 196. Satz[3]) beschäftigt sich mit dem sogenannten Rade des Aristoteles (Bd. I, S. 241). Cardano hilft sich mit ziemlich weitläufigen Redensarten um die Sache herum, statt dass er eine Erklärung für das nicht abzuleugnende Dilemma gäbe. Immerhin ist diese Betrachtung gleich der vorerwähnten über gemischtlinige Winkel geschichtlich bemerkenswerth. Man erkennt das erstmalig wieder auftauchende Bestreben, Fragen der Veränderung zu beantworten, neben dem Sein auch das Werden von Raumgebilden der mathematischen Betrachtung zu unterwerfen.

---

[1]) *cum ergo circuli curvitas maneat et angulus tendat in punctum perpetua diminutione, necesse est, ut curvitas circuli impediat divisionem recte.* [2]) Cardano IV, 560—561. [3]) Ebenda IV, 575—576.

Von ungleich grösserer Bedeutung ist die *Regula Aliza*[1]). Der letzte Absatz des 5. Kapitels dieses Buches spricht sich dahin aus, es sei leicht, einen, auch wohl mehrere Wurzelwerthe, *aestimationes*, zu entdecken, wenn die Gleichungsconstante eine zusammengesetzte Zahl sei; sei sie dagegen Primzahl, so sei es schwierig, eine einzige Wurzel zu finden[2]). Wenn auch nicht in klarsten Worten gesagt, ist die Entstehung der Gleichungsconstante als Product der Wurzelwerthe hier mindestens angedeutet, und das 17. Kapitel *Quot modis numerus possit produci ex non numero*[3]), d. h. auf wie viele Arten eine ganze Zahl das Product irrationaler Factoren sein kann, mit Beispielen wie

$$\left(3\tfrac{1}{5}+\sqrt{\tfrac{6}{25}}\right)\left(3\tfrac{1}{5}-\sqrt{\tfrac{6}{25}}\right)=10$$

und andere, zeigt, dass wir jene Andeutung richtig verstehen. Im 46. Kapitel[4]) ist eine Gleichung sechsten Grades, allerdings eine solche besonderer Gestalt, nämlich $x^6+ax^4+a^2x^2+a^3=bx^3$, dadurch zur Auflösung gebracht, dass Cardano sie als Eliminationsergebniss zweier Gleichungen auffasst, ein so neuer, eigenthümlicher Gedanke, dass er der Hervorhebung würdig ist. Setzt man

$$xy=a,\quad x^3+y^3+x^2y+xy^2=b,$$

so entsteht mittelst $y=\frac{a}{x}$ die vorgelegte Gleichung, aber auch eine andere Behandlung wird zulässig. Aus $xy=a$ folgt

$$2a(x+y)=2x^2y+2xy^2=(x+y)^3-x^3-y^3-x^2y-xy^2=(x+y)^3-b$$

und daraus $(x+y)^3=2a(x+y)+b$, eine Gleichung, welche nach $x+y$ aufgelöst werden kann; da überdies das Produkt $xy=a$ bekannt ist, so ist auch x und y einzeln als bekannt anzusehen. Neben der algebraischen Auflösung von Gleichungen ist Cardano auch die geometrische Construction nicht fremd, welche Wurzelwerthe mittels Durchschnitten von Kegelschnitten z. B. einer Parabel und einer Hyperbel bestimmen lässt. Weiss er doch, dass die Griechen schon dieses Verfahren übten, wo es um die Aufgabe der Würfelverdoppelung sich handelte, und dass Eutokius aus älteren Quellenschriften das Wichtigste überlieferte. Er, Cardano, sei über diesen einfachsten Fall kubischer Aufgaben weit hinausgegangen. Insbesondere steht

[1]) Cardano IV, 377—434. Der Erste, der dieses ebenso schwierige als inhaltreiche Buch verstand, war Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra II passim*, besonders pag. 331, 415, 441—484. [2]) Ebenda IV, 384: *Quintum, quod videmus numerum aequationis si sit compositus, ut* 18, 12, 24 *facile habere aestimationem et plures etiam, si autem primus difficile est invenire unam solam.* [3]) Ebenda IV, 393. [4]) Ebenda IV, 421—422.

die Gleichung $x^3+192=12x^2$ dabei im Vordergrunde[1]). Den vorwiegend umfassendsten Theil des Buches *De regula Aliza* hat Cardano jedoch der Betrachtung derjenigen Fälle gewidmet, bei welchen die Formel Del Ferro's unter der Kubikwurzel Ausdrücke auftreten lässt, welche selbst Quadratwurzeln aus Negativem enthalten, und dass er dabei, sowohl wegen der noch immer fehlenden allgemeinen Symbolik, als wegen der nur sehr langsam von der griechischen Gewohnheit der Unterscheidung aller überhaupt denkbarer Sonderfälle sich losreissenden Methodik, zahllose Unterfälle zu beachten sich veranlasst sieht, macht gerade die Schwierigkeit des Buches aus, ganz abgesehen davon, dass auch nicht wenige Druckfehler dem Verständniss im Wege stehen[2]). Wie sehr Cardano das Bewusstsein hatte, dass hier ein Unentbehrliches durch ihn geliefert sei, geht aus einer Bemerkung hervor, welche dem 12. Kapitel der Ars magna in der Basler Ausgabe hinzugefügt wurde, in welcher er den Leser für die hier erwähnten Fälle der Unmöglichkeit geradezu auf die *Regula Aliza* verweist[3]).

Wir haben, wie schon (S. 532) gesagt worden ist, auch noch mathematische Schriften von Cardano, welche in seinem Nachlasse aufgefunden und des Druckes würdig erachtet worden sind. Dazu gehört das (S. 499—500) erörterte Kapitel *De numerorum proprietatibus*, das ebenda im Vorbeigehen genannte Bruchstück *De integris*, aber auch Anderes, welches uns jetzt beschäftigen soll. Dem Buche *De ludo aleae*[4]), über das Würfelspiel, entnehmen wir, dass der Verfasser, wie er von der Leidenschaft des Spieles erfasst war, wie er von den dabei möglichen Betrügereien Kenntniss besass, auch den Fragen Beachtung schenkte, welche mathematischer Beantwortung zugänglich sind. Er weiss ganz genau, dass mit zwei Würfeln 6 Paschwürfe und 15 ungleiche Würfe möglich sind, von welchen letzteren aber jeder doppelt auftritt, so das im Ganzen 36 Würfe vorhanden sind. Er weiss, dass bei 3 Würfeln es 6 Dreipasche giebt, 30 Zweipasche, deren jeder dreimal vorkommt, 20 ungleiche Würfe, deren jeder sechsmal vorkommt. Die Gesammtzahl der Würfe ist 216. Ob er diese richtigen Zahlen durch Formeln, ob mindestens theilweise durch Aufzählung der Einzelfälle sich verschafft hat, ist nicht gesagt, doch hat eben wegen dieses Schweigens das letztere viel für sich. Für zahlreich angestellte Versuche spricht jedenfalls ein Ausdruck, der das Zusammentreffen von Vermuthung und Ereigniss bei häufiger Wieder-

[1]) Cardano IV, 389—390, Caput 12: *De modo demonstrandi geometrice aestimationem cubi et numeri aequalium quadratis.* [2]) So ist ebenda IV, 384 im 6. Kapitel der Satz ℞ $\bar{p}$ *est,* ℞ $\bar{m}$ *quadrata nulla est iuxta usum communem* dadurch für Viele unverständlich geworden, dass im Drucke das Komma nach *est* fehlt. [3]) Ebenda IV, 251. [4]) Ebenda I, 262—276.

holung betrifft[1]) und damit an das **Gesetz der grossen Zahlen** der späteren Zeit denken lässt. Noch viel deutlicher spricht aber Cardano dieses Gesetz an einer anderen Stelle aus[2]). Es handelt sich um die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln n-mal nach einander grad zu werfen, und dass darauf im Verhältnisse von $1 : (2^n - 1)$ zu wetten sei; bei unendlicher Anzahl der Würfe werde das Ergebniss mit der Erfahrung übereinstimmen, denn die Länge der Zeit ist es, welche alle Möglichkeiten zeigt.

Einem Werke *Ars magna arithmeticae*[3]) hat Cardano selbst einen hohen Werth beigelegt. Es umfasst 40 Sätze und daran anschliessend ebensoviele Aufgaben. Es werde, sagt der Verfasser in der Widmung an den Bischof von Burgo Sancti Sepulchri, ein Zeugniss von ewiger Dauer, *aeternum testimonium*, für die Trefflichkeit des Mannes abgeben, dem es zugeeignet sei. Nur zwei Dinge seien fremden Ursprunges und ihrem Erfinder ausdrücklich zugewiesen, alles Uebrige gehöre ihm selbst an. Jene fremden Erfindungen sind von **Ferrari** und beziehen sich auf Gleichungen 3. Grades mit allen vier Gliedern, deren Erörterung im 39. Kapitel vorgenommen ist[4]); sie besagen, dass

$$x^3 + ax^2 + \frac{1}{3}a^2x = b$$

und

$$x^3 + \frac{1}{3}a^2x = ax^2 + b$$

leicht gelöst werden können. Die Meinung ist offenbar die, man solle jenen beiden Gleichungen die Umformung in

$$\left(x \pm \frac{a}{3}\right)^3 = b \pm \frac{a^3}{27}$$

geben und dann die Kubikwurzel ausziehen. Cardano fügt dann eine ebenfalls viergliedrige Gleichung 4. Grades: $x^4 + a^2x^2 = 2ax^3 + b^2$ hinzu[5]), welche durch $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ erfüllt werde. Der leicht zu erkennende Gedankengang verlangte die Umwandlung in

$$(ax - x^2)^2 = b^2,$$

woraus die Folgerung $ax - x^2 = b$ beziehungsweise $x^2 + b = ax$ gezogen wurde, welcher die gegebenen Wurzelwerthe genügen. Dass Cardano nicht auch $(x^2 - ax)^2 = b^2$, $x^2 = ax + b$ zu Hilfe nahm, um zu $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ zu gelangen, ist vielleicht darin begründet,

[1]) Cardano I, 265: *Haec igitur cognitio est secundum coniecturam et proximiorem, et non est ratio recta in his. Attamen contigit, quod in multis circuitibus res succedit proxima coniecturae.* [2]) Ebenda I, 267: *In infinito numero iactuum id contingere proxime necesse est, magnitudo enim circuitus est temporis longitudo, quae omnes formas ostendit.* [3]) Ebenda IV, 303—376. [4]) Ebenda IV, 352—353. [5]) Ebenda IV, 356.

dass er einem wesentlich negativen Wurzelwerthe auszuweichen wünschte, während andererseits gerade bei Cardano eine solche Scheu nicht recht begreiflich ist. Weitaus die bedeutsamste Bemerkung findet sich im 18. Kapitel[1]). Sind die äussersten Glieder, heisst es dort, einander gleich, so giebt es nur eine Wurzel, und diese ist immer positiv ohne Rücksicht auf den Grad der Gleichung; sind dagegen die äussersten Glieder Zwischengliedern gleich, so giebt es immer mehr als eine Wurzel, und in diesem Falle kommen auch Unmöglichkeiten vor. Als Beispiele des ersten Satzes sind angegeben:

$$x^2 = 3x + 10,\quad x^2 + 3x = 10,\quad x^3 = 3x^2 + 6,\quad x^3 + 3x^2 = 6,$$
$$x^3 = 4x + 10,\quad x^3 + 10x = 20,\quad x^3 + 3x^2 = 7x + 20,$$
$$x^3 = 3x^2 + 7x + 20,\ x^4 + 3x^3 + 7x^2 = 10,\ x^4 + 3x^3 + 7x^2 = 20x + 10;$$

als Beispiele des zweiten Satzes:

$$x^2 + 10 = 8x,\ x^3 + 10 = 6x^2,\ x^3 + 10 = 6x,\ x^3 + 10 = 10x^2 + 3x,$$
$$x^4 + 3x^3 + 10 = 2x^2 + 5x.$$

Diese Beispiele erklären, was an dem Ausdrucke der Sätze dunkel geblieben sein mag. Cardano behauptet hier, allerdings ohne irgend einen Beweis, dass, **falls eine Gleichung n-ten Grades auf Null gebracht nur einen Zeichenwechsel der Glieder wahrnehmen lasse, immer eine und nur eine positive Wurzel vorhanden sei; zweimaliger Zeichenwechsel sei das Kennzeichen mehrerer positiver oder lauter imaginärer Wurzeln; auf vollständiges oder unvollständiges Vorhandensein der Gleichungsglieder kommt es nicht an.** — Um auch ein Beispiel von in diesem Buche enthaltenen Aufgaben vorzuführen, wählen wir die 37.[2]) (Figur 105). Ein bei A rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Höhe AD gezogen ist, soll aus den Angaben $AB + AC = 12$, $BC - AD = 6$ gefunden werden. Nun ist bekannt aus geometrischen Gründen

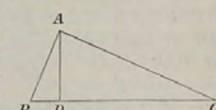

Fig. 105.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

und $2AB \cdot AC = 2BC \cdot AD$. Durch Addition beider Gleichungen entsteht $(AB + AC)^2 = 144 = BC^2 + 2BC \cdot AD$. Nun sei $AD = x$, mithin $BC = x + 6$, so nimmt die gefundene Gleichung

[1]) Cardano IV, 323: *Septimum notandum est quod cum fuerint denominationes extremae aequales extremis, semper aequatio erit una tantum et casus possibilis, quotquot fuerint denominationes. Cum vero denominationes intermediae fuerint aequales extremis tunc semper erunt plures aequationes in quaesito et casus poterit cum hoc etiam esse impossibilis.* [2]) Ebenda IV, 372.

die Gestalt an $3x^2 + 24x + 36 = 144$, woraus $x = AD = \sqrt{52} - 4$, $x + 6 = BC = \sqrt{52} + 2$. Ferner $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 56 + \sqrt{832}$ gemeinschaftlich mit $AB + AC = 12$. Sei $AC = 6 + y$, $AB = 6 - y$, so geht die erstere Gleichung über in $72 + 2y^2 = 56 + \sqrt{832}$ und $y = \sqrt{\sqrt{208} - 8}$, also $AC = 6 + \sqrt{\sqrt{208} - 8}$, $AB = 6 - \sqrt{\sqrt{208} - 8}$. Dieser sehr einfachen Entwickelung setzt dann Cardano eine doppelte Grenzbedingung für den Unterschied 6 zwischen BC und AD hinzu. Er müsse kleiner als die Summe von AB und AC sein, und das liegt auf der Hand, denn $AB + AC > BC$, also um so mehr $AB + AC > BC - AD$. Ferner aber müsse jener Unterschied grösser sein als die Quadratwurzel aus $\frac{1}{8}$ vom Quadrate von $AB + AC$. Bei der Aufstellung dieser Grenze kann Cardano etwa folgenden Gedankengang eingeschlagen haben (Figur 106). Die Spitzen sämmtlicher über BC als Hypotenuse beschriebener rechtwinkliger Dreiecke liegen auf dem Halbkreise BA_0A_1C. Unter ihnen zeichnet sich das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck BA_0C durch folgende Eigenschaft aus: Es hat die grösste Höhe A_0D_0 und desshalb auch den grössten Flächeninhalt. Letzterer wird durch $\frac{1}{2} BC \cdot A_0D_0$, aber auch durch $\frac{1}{2} A_0B \cdot A_0C$ gemessen. Somit ist $\frac{1}{2} A_0B \cdot A_0C$ und damit zugleich $2 A_0B \cdot A_0C$ ein Maximum. Weil aber $A_0B^2 + A_0C^2 = A_1B^2 + A_1C^2 = BC^2$ constant ist, muss des Weiteren $A_0B^2 + A_0C^2 + 2 A_0B \cdot A_0C = (A_0B + A_0C)^2$ ein Maximum sein, oder die Lage von A in A_0 macht das Quadrat der Kathetensumme des Dreiecks ABC zu einem Maximum. Ferner macht, wie wir schon sagten, die gleiche Lage A_0D_0 zu einem Maximum, also $BC - A_0D_0$ zu einem Minimum, so dass jedes $BC - AC \geqq BC - A_0D_0$ sein muss. Nun ist $BC - A_0D_0 = D_0C = \frac{A_0C}{\sqrt{2}} = \frac{A_0B + A_0C}{2\sqrt{2}}$ $= \sqrt{\frac{(A_0B + A_0C)^2}{8}} \geqq \sqrt{\frac{(AB + AC)^2}{8}}$, folglich um so gewisser $BC - AD \geqq \sqrt{\frac{(AB + AC)^2}{8}}$.

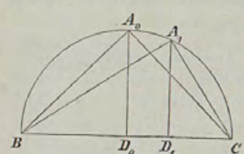

Fig. 106.

Noch andere nachgelassene mathematische Schriften des Cardano sind dem Drucke übergeben worden, aus welchen indessen Auszüge zu veranstalten kaum verlohnt. Der *Sermo de plus et minus*[1]) würde

[1]) Cardanus IV, 435—439.

vielleicht trotz seiner Kürze am ersten eine Bemerkung gestatten, wenn diese kleine Schrift nicht bereits unter dem Einflusse von Bombelli's Algebra verfasst wäre, von welcher im folgenden Abschnitte die Rede sein wird. Jene Algebra erschien in erster Auflage 1572, Cardano starb 1576; der Sermo de plus et minus gehört sonach jedenfalls zu dem Letzten, was aus seiner Feder stammte.

Fassen wir nun auch den Gesammteindruck dessen zusammen, was unsere verschiedenen Auszüge aus Cardanischen Schriften uns geliefert haben, so finden wir folgende wesentliche Dinge, die als Cardano's und Ferrari's Eigenthum gesichert sind. Für Cardano erhalten wir: eine näherungsweise Auflösung von Gleichungen höherer Grade, das Bewusstsein des Vorhandenseins dreier Wurzeln einer kubischen Gleichung, die Kenntniss des Zusammenhanges des Coefficienten des quadratischen Gliedes in der kubischen Gleichung mit der Summe der Wurzeln, auch im Falle gleicher Wurzelwerthe, die Wegschaffung des quadratischen Gliedes in der kubischen Gleichung, eine Ahnung von dem Zusammenhange der Gleichungsconstanten mit den Wurzeln, eine Ahnung von dem Zusammenhange zwischen dem Zeichenwechsel innerhalb einer Gleichung und deren Wurzeln, das Rechnen mit Imaginärem, erstmalige richtige Beantwortung einzelner Wahrscheinlichkeitsaufgaben, Herumtasten an geometrischen Untersuchungen, welche das Wesen krummer Linien und ihren Gegensatz gegen Gerade betreffen. Für Ferrari bleibt: die Auflösung der ein kubisches Glied nicht enthaltenden Gleichung vierten Grades, die Umsetzung kreisförmiger Bewegung in geradlinige. Was blieb uns für Tartaglia? Grosse geometrische Gewandtheit, eine wirkliche Methode zum Rationalmachen von Brüchen mit zweigliedrigem Nenner, einige Reihenbetrachtungen, die Lösung einer Maximalaufgabe, neben zahlreichen Aneignungen fremdem geistigen Eigenthums, worunter wir die Auflösung von des quadratischen Gliedes entbehrenden kubischen Gleichungen zu rechnen schwerwiegende Gründe besassen.

Wir erachten es nicht als überflüssig, zu bekennen, dass die Werthschätzung, welche wir sonach Cardano und Ferrari angedeihen lassen müssen, und welche beide, insbesondere aber Cardano, unvergleichbar höher als Tartaglia stellt, geradezu im Gegensatze zu der Auffassung der bisherigen Geschichtsschreibung sich befindet[1]), dass aber die weitverbreiteten Irrthümer, beziehungsweise was wir für Irrthum halten, insgesammt dem Grundfehler entstammen, dass man erst die *Quesiti* des Tartaglia las und unter deren Einflusse erst die

[1]) Gherardi, an welchen wir uns mehrfach anlehnten, bildet selbstverständlich eine Ausnahme.

Ars magna des Cardano, während die Zeitfolge der Veröffentlichung das umgekehrte Verfahren nothwendig macht.

Eine kurze Bemerkung müssen wir uns noch gestattten, bevor wir diesen XIII. Abschnitt, welcher der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts gewidmet war, abschliessen. Schon seit Erfindung der Buchdruckerkunst begann die nationale Abschliessung wissenschaftlicher Bestrebungen mehr und mehr zu schwinden. Im XVI. Jahrhunderte ist sie schon nahezu verwischt. Die grossen Druckereien in Paris, in Nürnberg, in Basel haben eine europäische Bedeutung angenommen. Wir haben beispielsweise Schriften des Italieners Cardano an allen drei Orten in die Oeffentlichkeit treten sehen. Erleichtert, um nicht zu sagen ermöglicht, wird solches wissenschaftliche Weltbürgerthum durch die Einheit der wissenschaftlichen Sprache. Neue Dinge werden ziemlich ausschliesslich in lateinischer Mundart veröffentlicht. Damit ist aber eine andere Thatsache eng verbunden: Schriften, welche in dem einen Lande entstanden sind, werden verhältnissmässig rasch in dem anderen Lande gelesen, rufen Nachahmung oder Widerspruch hervor. Orontius Finaeus findet in Nonius einen geometrischen Gegner, während Tartaglia ihn wegen seiner Wurzelausziehungen anführt. Bouvelles und Dürer werden in Italien gelesen. Stifel wird von Cardano und Tartaglia benutzt, und er selbst benutzt Erfindungen Cardano's. Wir haben dieses schon mit Bezug auf solche Stellen der Arithmetica integra bemerkt, welche der Arithmetik Cardano's von 1539 entlehnt sind. Die Regula del modo übte ihren Einfluss auf die allgemeine Regel Stifel's zur Gleichungsansetzung und Auflösung, Cardanische Gleichungsbeispiele, welche mittels Addition derselben Glieder auf beiden Seiten behandelt werden, bilden den Schluss der Arithmetica integra. Aber auch die Cardanische Ars magna fand in Stifel einen verständnissvollen Leser, und der Ausgabe der Rudolff'schen Coss, welche Stifel 1553 besorgte, ist ein Anhang beigefügt, welcher mit den kubischen Gleichungen sich beschäftigt, welcher Del Ferro als den Erfinder der Auflösung nennt. Dass Tartaglia, den Cardano in der Ars magna Del Ferro zur Seite stellte, bei Stifel nicht einmal genannt ist, wird dahin gedeutet werden müssen, dass Stifel auch von dem Cardano-Tartaglia'schen Streite Kenntniss erhalten hatte und auf des Ersteren Seite stand.

Alle diese eingetretenen Veränderungen in der Geschichte der Wissenschaften werden in unserer Darstellung derselben ihren Wiederschein erkennen lassen müssen.

XIV. Die Zeit von 1550—1600.

67. Kapitel.

Geschichte der Mathematik. Classikerausgaben. Geometrie. Mechanik.

Die zum Schlusse des vorhergehenden Abschnittes angedeuteten Verhältnisse und die als Folgen derselben nicht mehr von Volk zu Volk zu trennende Entwickelung der Wissenschaften nöthigen uns, die seither von uns gebrauchte geographische Eintheilung der einzelnen Abschnitte zu verlassen. Trennt man aber nicht mehr von Volk zu Volk, ist es eben so unmöglich die chronologische Trennung von Jahr zu Jahr, oder von Jahrzehnt zu Jahrzehnt vorzunehmen, weil der Jahrgang des Druckes doch nicht übereinstimmt mit den oft langen Jahren der Vorbereitung, und weil ferner alsdann Dinge verschiedenster Gattung neben einander, getrennt dagegen von Verwandtem aufzutreten drohen, so bleibt nur übrig, den Stoff nach dem Inhalte der Schriften, welche wir zu nennen haben, zu ordnen. Recht mangelhaft ist allerdings auch diese Anordnung. Ein und derselbe Schriftsteller wird nicht selten an verschiedenen Stellen genannt werden müssen; seine eigene Bedeutung wird möglicherweise dabei nicht in einem richtigen Lichte erscheinen, insbesondere dann, wenn er das erste Mal, dass er auftritt, uns vielleicht grade seine schwächste Seite zukehrt. Wir hoffen hier dennoch eine Abhilfe treffen zu können dadurch, dass wir den wirklich bedeutenden Mathematikern am Schlusse eine Zusammenfassung widmen. Lebensschicksale derselben in so engen Grenzen, als die Anlage unseres Werkes sie fordert und gestattet, werden berichtet werden, wo der Name zuerst erscheint.

Wir beginnen mit solchen Schriftstellern, welche die Geschichte der Mathematik selbst zum Gegenstande ihrer Forschung machten.

Petrus Ramus[1]), mit französischem Namen Pierre de la

[1]) Ch. Waddington: *Ramus, sa vie, ses écrits et ses opinions* (Paris 1855). — Cantor in der Zeitschr. Math. Phys. II, 354—359; III, 133—143; IV, 314—315. — L. Am. Sédillot, Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collège de France im *Bulletino Boncompagni* Bd. II und III (1869—1870). Ueber Ramus vergl. II, 389—418.

Ramée (1515—1572), gehörte zu den einflussreichsten Schriftstellern seiner Zeit, wozu ihn einestheils Beziehungen zu hochgestellten Persönlichkeiten, anderntheils eine ausgesprochen streitbare Geistesveranlagung machte, welche ihn in den Vordergrund von lebhaften Kämpfen stellte. Mit der These *Quaecunque ab Aristotele dicta essent commentitia esse* warf Ramus 1536 der ganzen, an allen Universitäten hochmächtigen Aristotelischen Schule den Fehdehandschuh hin. In den Hörsälen begann das geistige Ringen, aber an anderen Kampfplätzen und mit anderen als geistigen Waffen setzte es sich fort, bis die auf die Nacht des St. Bartholomäus folgende Nacht Ramus dem Dolche der Mörder überlieferte. Bis 1568 lebte Ramus in Frankreich, meistens in Paris. Dann entzog er sich den ihm dort drohenden persönlichen Gefahren durch eine mit königlicher Erlaubniss unternommene Reise nach Deutschland, die ausgesprochenermassen wissenschaftlichen Zwecken dienen sollte; Strassburg, Heidelberg, Frankfurt am Main, Nürnberg, Augsburg, Basel gehörten zu den besuchten Städten. Ueberall war Ramus im Dienste der von ihm vertretenen Sache thätig, überall knüpften sich an seinen Aufenthalt Streitigkeiten an. Im September 1570 kehrte er nach Paris zurück, welches er nicht wieder verliess. Von den zahlreichen Schriften, welche Ramus verfasste, nennen wir an dieser Stelle nur eine aus 3 Büchern bestehende von 1567, welche der Königin Katharina von Medicis gewidmet war[1]), und welche später, 1569 und häufiger, wiederholt gedruckt wurde, als die 3 ersten von 31 Büchern mathematischer Untersuchungen, *Scholae mathematicae.* Diese 3 Bücher stellen eine wirkliche Geschichte der Mathematik dar, natürlich in sehr bescheidenen Grenzen vermöge der äusserst geringen Mittel, über welche man damals noch verfügte, aber doch mit vorwiegender Benutzung solcher Quellen, welche heute noch als zuverlässige gelten. Beispielsweise hat Ramus offenbar sehr viel über griechische Mathematik aus Proklos entnommen, dessen Erläuterungen zum ersten Buche der euklidischen Elemente seit 1533, wie wir wissen (S. 406), durch Grynäus griechisch herausgegeben waren, während eine 1560 erschienene lateinische Uebersetzung weiter unten genannt werden wird. Ramus hat jedenfalls der griechischen Ausgabe sich bedient, da er wiederholt den griechischen Wortlaut anführt. Den deutschen Mathematikern hat Ramus eine fast übertriebene Bewunderung gezollt und sie insbesondere seinen Landsleuten als Muster hingestellt. Andrerseits wendet er sich freilich auch an deutsche Fürsten mit der Aufforderung, Professuren der Mathematik an ihren Universitäten zu errichten, und schlägt z. B. für Heidelberg

[1]) *P. Rami procemium mathematicum in tres libros distributum.*

ausdrücklich Xylander als geeignete Persönlichkeit vor, einen Gelehrten, der uns bald beschäftigen wird. Der Inhalt der Geschichte der Mathematik gliedert sich für Ramus in vier Perioden. Er unterscheidet 1. eine chaldäische Periode von Adam bis zu Abraham; 2. eine egyptische Periode, beginnend von Abraham, der die Mathematik in dieses Land brachte. Beide Perioden zusammen sind auf vier Seiten abgehandelt. 3. Die griechische Periode von Thales bis zu Theon von Alexandrien füllt bei Ramus 34 Seiten. 4. Die neuere Mathematik werde, hofft Ramus, einen anderen Bearbeiter finden.

Ein zweiter Schriftsteller, welcher auf geschichtliche Untersuchungen sein Augenmerk richtete, war Bernardino Baldi[1]) (1553 bis 1617). Er ist in Urbino geboren. Sein Familienname war eigentlich Cantagallina, während der Name Baldi sich von einem Urgrossvater auf ihn vererbte. Baldi war in neuen und alten Sprachen hochgelehrt; er sprach z. B. französisch und deutsch und las geläufig arabisch. In der Mathematik war er Schüler des Commandinus, von welchem wir noch zu reden haben. Im Jahre 1586 zum Abte von Guastalla gewählt, beschäftigte Baldi sich von da an wesentlich mit theologischen und kirchenrechtlichen Fragen. Seine mathematisch-wissenschaftliche Thätigkeit war aber damit doch nicht abgeschlossen. Früchte derselben sind eine *Cronica de' Matematici* und *Vite de' Matematici* aus der Zeit bis 1596. Erstere erschien 1707 in Urbino im Drucke, letztere befanden sich handschriftlich in der reichen Sammlung des Fürsten Boncompagni in Rom; eine gewisse Anzahl der in ihnen enthaltenen Lebensbeschreibungen ist veröffentlicht[2]). Leicht hat sich Baldi, welcher zwölf Jahre sammelte, dann zwei Jahre zur eigentlichen Niederschrift verwandte, seine Aufgabe nicht gemacht. Wie schwierig sie aber für ihn war und blieb, zeigt schon ein Blick in die nach der Zeitfolge geordnete Mathematikerchronik. Jordanus ist ziemlich richtig auf 1250 angesetzt, sein Name aber *Hemorarius* geschrieben. Leonardo von Pisa dagegen erscheint mit richtigem Namen im Jahre 1400. So ungewiss war damals die Kenntniss von jenen beiden grossen Männern. Baldi hat seine Arbeit bis in die Zeit fortgesetzt, welcher er selbst angehörte. Tartaglia, Ramus,

[1]) Affo, *Vita di Monsignore Bernardino Baldi da Urbino* (1783). — Kästner II, 129—142. — Libri IV, 70—78. [2]) *Bulletino Boncompagni* an vielen Stellen, welche in dem Gesammtregister der XX Bände des *Bulletino* pag. 731 angegeben sind. Vergl. *Bull. Boncamp.* Bd. V, XII, XIX, XX. Die Vorrede zu den *Vite* vergl. XIX, 355—357. Auf der letzten Seite die Stelle: *Dodici anni ho io penato nel raccogliere da varij autori la materia di questa historia, e quasi in due ho dato la forma che si vede a l'edifitio.*

Clavius kommen noch bei ihm vor, Guidobaldo del Monte ist die letzte bei ihm genannte Persönlichkeit. Bei Ramus sind besonders die Scholae mathematicae gerühmt, welche also vermuthlich auch als mittelbare Quelle benutzt wurden. Die Vite behandeln meistens ältere Mathematiker, hauptsächlich Griechen, dann Araber, doch sind auch spätere Schriftsteller nicht vernachlässigt, Campanus[1]) z. B., der in der Chronik auf das Jahr 1264 angesetzt ist, in der ausführlicheren Lebensbeschreibung dagegen unrichtig auf 1200. Die einzelnen Lebensbeschreibungen sind selbst genau datirt, so die des Campanus vom 13. October 1588. Die Chronik dürfte also hier die spätere Bearbeitung sein. Um so auffallender ist es, dass die Lebenszeit nicht ihr entsprechend auch in den Vite richtig gestellt wurde.

Ein besonderes Kapitel aus der Geschichte der Mathematik hat 1557 und in verbesserter Auflage 1569 der bekannte Nürnberger Humanist Joachim Camerarius (1500—1574) bearbeitet, die Lehre von den Zahlzeichen und vom Rechnen[2]). Der sehr umständliche Titel sagt, dass die griechischen und römischen, sowie die sarracenischen oder indischen Zahlzeichen beschrieben würden, auch die Anfänge griechischer Logistik, endlich sei ein Ueberblick über die Arithmetik des Nikomachus gegeben. Das Büchlein ist auch heute noch lesenswerth und enthält manche schätzbare Einzelheiten.

Matthäus Hostus[3]), ein Sprachforscher und Münzenkundiger (1509—1587), war 53 Jahre lang Professor der griechischen Sprache in Frankfurt an der Oder. Er gab 1582 in Antwerpen eine 62 Seiten starke Schrift *De numeratione emendata veteribus Latinis et Graecis usitata* heraus, welche gleichfalls heute noch lesenswerth ist.

Geschichtlichen Arbeiten nahe verwandt sind die Bemühungen der Männer, welche Werke des Alterthums, sei es im Urtexte, sei es in Uebersetzungen, zum ersten Male oder neuerdings herausgaben.

Wir hätten deren eine grosse Menge zu nennen, wenn wir Vollständigkeit anstrebten. Wir begnügen uns damit, die wichtigsten hervorzuheben. Joachim Camerarius, von dem wir erst gesprochen haben, gab 1549 die beweislosen Sätze der sechs ersten Bücher der euklidischen Elemente griechisch und lateinisch heraus. Eine Vorrede dazu schrieb Rhäticus. Später wurde 1577 die gleiche Ausgabe noch einmal aufgelegt durch Moritz Steinmetz, sogar 1724 noch einmal durch L. F. Weisse[4]).

Pierre Mondoré[5]), lateinisch Petrus Montaureus, Biblio-

[1]) *Bulletino Boncompagni* XIX, 591—596. [2]) Kästner, I, 134—136. [3]) Cantor, Mathem. Beitr. z. Kulturleb. d. Völker S. 159, Anmerkung 318. [4]) Kästner I, 345—348. [5]) Montucla I, 564.

thekar der königlichen Bibliothek in Paris, veröffentlichte 1551 das zehnte Buch der euklidischen Elemente, später beabsichtigte er Weiteres folgen zu lassen. Aber sein langes Zurückhalten brachte den vorbereiteten Schriften den Untergang. In der Bartholomäusnacht wurde Mondoré getödtet, sein Arbeitszimmer geplündert. Die Handschriften seiner Werke wurden vernichtet.

Jean de la Pène[1]), ein Professor am Collège de France, der, 1528 in Aix geboren, 1556 erstmalig in Folge von Wettbewerb seine Lehranstellung erhielt, aber schon 1558 im Alter von kaum 30 Jahren starb, gab 1557 die Sphärik des Theodosius griechisch und lateinisch, im gleichen Jahre auch ebenso die optischen und musikalischen Schriften des Euklid heraus.

Dasselbe Jahr 1557 ist das Druckjahr der Ausgabe der euklidischen Elemente durch Jacques Peletier oder Peletarius, von welcher wegen der Anmerkungen weiter unten zu reden sein wird und 1557 war es auch, dass Pasquier Duhamel († 1565) einen Commentar zu der Sandeszahl des Archimedes herausgab[2]).

Der Zeitfolge wenig voraneilend nennen wir eine französische Euklidübersetzung durch Pierre Forcadel[3]), Buch I bis V seiner Euklidübersetzung erschienen 1564, Buch VII bis IX sodann 1566. Schon vor der Euklidübersetzung gab Forcadel 1561 eine französische Uebersetzung der Arithmetik des Gemma Frisius (S. 411), den er Gemme Phrison nannte, und nachmals 1570 wieder eine französische Uebersetzung des Algorithmus demonstratus (S. 63). Forcadel aus Beziers gehörte gleich Jean de la Pène zu den Schülern im engeren Sinne und zu den Freunden von Ramus, welcher ihm 1560 zur Erlangung der mathematischen Professur am Collège de France behilflich war, die er bis zu seinem Tode 1573 inne hatte. Forcadel, vielgerühmt und vielgetadelt, lehrte ausschliesslich in französischer Sprache, und zwar 1548 in Lyon, seit 1550 in nicht officieller Stellung in Paris. Eine Reise in Italien fällt vor 1561.

Schon 1562 war in Deutschland eine deutsche Euklidübersetzung erschienen, welcher wir, sowie einer anderen Uebersetzung aus der Feder des gleichen Gelehrten, uns etwas ausführlicher zuwenden müssen. Wilhelm Holzmann, weitaus bekannter unter dem Gelehrtennamen Xylander[4]), ist 1532 in Augsburg als Sohn armer

[1]) Montucla I, 564. — Sédillot im *Bulletino Boncompagni* II, 391 und 422. [2]) Poggendorff I, 616. [3]) Ebenda I, 722. — L. Am. Sédillot, Les professeurs de mathématique et de physique générale au Collège de France im *Bulletino Boncompagni* II, 424—427. — Fontès, Pierre Forcadel lecteur du Roy es Mathématiques in den *Mémoires de l'Academie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse*. 9. Série, T. VI (1894), VII (1895), VIII (1896). [4]) Freher,

Eltern geboren und 1576 als Professor der aristotelischen Logik in Heidelberg gestorben. Diese Stellung nahm er seit 1562 ein, nachdem er vorher vier Jahre Professor der griechischen Sprache gewesen war, und in dem letzten dieser vier Jahre überdies mathematische Vorlesungen gehalten hatte. Einer seiner wenig berühmten Vorgänger in diesem letzeren Fache war Marcus Morsheimer, welchen wir nur nennen, weil ein 1558 von ihm veröffentlichtes Buch[1]) das erste zu sein scheint, welches über Rechnungen des Rechtsverkehrs in den Druck gegeben wurde. Als Xylander die logische Professur übertragen wurde, welche in jeder Beziehung höhere Ansprüche befriedigte, als die untergeordnete mathematische Lehrthätigkeit der damaligen Zeit, wurde für diese Simon Grynäus der Jüngere (1539—1582) mit dem unverhältnissmässig geringen Jahresgehalte von fl. 60 nebst freier Wohnung angestellt, der Sohn eines Vetters jenes älteren Simon Grynäus, welcher die erste griechische Euklidausgabe veranstaltet hatte. Wilhelm Xylander also hat schon 1562 von Heidelberg aus eine deutsche Uebersetzung der euklidischen Elemente Buch I bis VI in Basel drucken lassen. Vorangegangen war im Drucke eine 1556 von Augsburg aus veranstaltete Ausgabe der Lehrbegriffe des Psellus in griechischer und lateinischer Sprache, aber die Euklidübersetzung war schon vor diesem letztgenannten Drucke mindestens begonnen, denn in der Vorrede zum Euklid sagt *„M. Wilhelm Holzmann genannt Xylander, Griechischer Professor des Churf. Studiums in Heydelberg“*, er habe schon vor sieben Jahren, mithin 1555, die ersten vier Bücher Euklid's aus dem Griechischen ins Deutsche übersetzt und erläutert und von seiner Hand geschrieben der Augsburger Stadtbehörde übergeben, *die auch solches günstiglich angenommen und in sondern Gnaden gegen ihn erkannt haben.* Als erste Bearbeitung in einer lebenden Volkssprache ist Xylander's Euklid merkwürdig genug und mag in Deutschland durch Verbreitung geometrischen Wissens unter Malern, Goldarbeitern, Baumeistern, für welche ausgesprochenermassen die Uebersetzung bestimmt ist, also unter demselben Kreise, für welchen Albrecht Dürer einst schrieb (S. 459), wirksam gewesen sein. Die arithmetischen Bücher Euklid's waren schon etwas früher in deutscher Sprache bekannt. Ihr Herausgeber war Johann Scheybl[2]), lateinisch Scheubelius (1494—1570). Dessen Veröffentlichung von 1558 führt den Titel: Das sibend, acht und neunt Buch des hochberühmbten Mathe-

Theatrum virorum eruditione clarorum pag. 1471. — Kästner I, 184, 279, 348. — Zeitschr. Math. Phys. III, 138—139. — Allgem. Deutsche Biographie XLIV, 582—593 (Artikel von Fr. Schöll).

[1]) *Disputatio juridica de rebus mathematicis.* Basel 1558. [2]) Poggendorff II, 792.

matici Euclidis Megarensis. Der Xylander'schen Bearbeitung der ersten sechs planimetrischen Bücher sind nicht allzuviele Verdienste nachzurühmen. Die Beweise z. B., von welchen Xylander wie seine Vorgänger und wie noch viele Nachfolger annahmen, dass sie gar nicht dem Euklid angehörten, sondern Zusätze des Theon, des Hypsikles, des Campanus seien, die er unterschiedslos nach einander aufzählt, hat er mitunter weggelassen. *„Mögen auch etwa schwerlich von Ungelehrten begriffen werden, und ein einfältiger deutscher Liebhaber dieser Künste ist wohl zufrieden, so er die Sache versteht, ob er wohl die Demonstration nicht weiss.“* Statt der Beweise müssen nicht selten Zahlenbeispiele dienen, welche Xylander als seinen Zwecken entsprechender ansah, und die Beweise und Erklärungen, die er giebt, sind zum Theil überaus kläglich. Dass auf wirkliche Schwierigkeiten, wie sie z. B. die Lehre von den Parallellinien oder von den Berührungen bietet, nicht mit einer Silbe eingegangen ist, erscheint demnach nur als selbstverständlich. Ungleich wichtiger ist eine Veröffentlichung Xylander's aus dem Jahre 1575, in welcher er keinerlei Vorgänger besass, vielmehr einen ungemein schwierigen Schriftsteller des Alterthums für Europa erstmalig lesbar machte: seine lateinische Diophantübersetzung[1]). Wohl hatte Regiomontanus (S. 263) Diophant's Arithmetik in Italien gesehen und ihren hohen Werth erkannt, wohl hatte 1572 ein Italiener, Bombelli, der uns als algebraischer Schriftsteller wieder begegnen wird, in Gemeinschaft mit einem anderen Gelehrten, Pazzi, eine Vaticanhandschrift des Diophant zu übersetzen angefangen und davon sowie von dem nachmaligen Scheitern ihres Unternehmens in einer Vorrede von 1572 Mittheilung gemacht[2]), aber Xylander's Bemühungen waren davon ganz unabhängig, und, was die Hauptsache ist, sie waren erfolgreich. Auf einer Reise nach Wittenberg wurde Xylander von dortigen Professoren auf den griechischen Arithmetiker aufmerksam gemacht, indem er bei ihnen die Abschrift eines Bruchstückes zu sehen bekam. Ein gewisser Andreas Dudicius Sbardellatus, Gesandter des römischen Kaisers am polnischen Hofe, wurde ihm als Besitzer eines vollständigen Codex genannt. An diesen wandte sich Xylander, erhielt ohne Verzug die Handschrift mit der dringenden Ermunterung zur Herausgabe und vollzog die Uebersetzung, welche 1575 in Basel die Presse verliess. Ein griechischer Text war allerdings nicht mit abgedruckt, mancherlei Fehler der Uebersetzung sind später nachgewiesen worden, allein das

[1]) Nesselmann, Algebra der Griechen S. 279—280. [2]) Vergl. S. 4 der nicht paginirten Vorrede *Agli Lettori* in der Algebra von Rafael Bombelli (Venedig 1572).

Eine wie das Andere findet volle Entschuldigung darin, dass dem Uebersetzer nur ein einziger Text zur Verfügung stand. Statt Splitterrichterei zu üben, sollte man vielmehr das grosse Verdienst Xylander's um die Neuentdeckung des geistreichen Werkes anerkennen, welches alsbald von den hervorragendsten Geistern insbesondere in Frankreich und Belgien studirt wurde und ungeahnte Früchte trug. In der Xylander'schen Diophantübersetzung findet sich auf S. 9 und öfter ein Gleichheitszeichen in Gestalt zweier senkrechten Parallelstriche ‖. Ueber den Ursprung des Zeichens ist nichts angegeben. Vielleicht war in Xylander's griechischer Vorlage das Wort ἴσοι durch zwei ι abgekürzt, während eine Pariser Handschrift bekanntlich ein ι als Abkürzungszeichen dafür benutzt (Bd. I, S. 442). Da die von Xylander benutzte Handschrift mit grosser Wahrscheinlichkeit diejenige ist, welche gegenwärtig als Cod. Guelferbytanus Gudianus 1 in Wolfenbüttel aufbewahrt wird[1]), so möchte es sich lohnen, dort einmal nachzusehen. Jedenfalls erkennt man aus Xylander's Zeichen, dass das von Recorde erfundene damals, also 18 Jahre nach dessen Veröffentlichung (S. 479), sich noch nicht verbreitet hatte. Der Diophant ist dem Herzoge Ludwig von Württemberg zugeeignet. Es wird zwar berichtet, dieser habe die Widmung durch ein Geschenk von 500 Thalern beantwortet, doch betrug dasselbe in Wahrheit nur 50 Thaler, so dass Xylander, der sich fortwährend in Geldverlegenheiten befand, noch in dem gleichen Jahre 1575 oder zu Anfang von 1576 kurz vor seinem Tode sich bei der Universitätsbehörde um ein Darlehen von 50 Gulden bewarb, gegen welches er sein Silberzeug zu verpfänden sich erbot.

Zehn Jahre später 1585 gab ein belgischer Mathematiker, der uns mehrfach beschäftigen wird, Simon Stevin[2]), eine französische Bearbeitung der ersten vier Bücher des Diophant heraus.

Einer ganz eigenthümlichen Behandlungsweise des VII. Buches der Euklidischen Elemente bediente sich 1564 ein gewisser Johannes Sthen[3]) aus Lüneburg. Philomathes und Orthophronius unterhalten sich über mathematische Dinge, und bei dieser Gelegenheit werden Erklärungen und Sätze jenes VII. Buches griechisch angeführt. Die lateinische Uebersetzung und Erläuterung folgt jedesmal unmittelbar, aber kein Beweis. Statt dessen dienen vorzugsweise Zahlenbeispiele. Auch das VIII. und IX. Buch wollte Sthen in ähnlicher Weise bearbeiten, doch scheint er nicht dazu gekommen zu sein.

---

[1]) P. Tannery im II. Bande seiner in der *Bibliotheca Teubneriana* erschienenen Diophantausgabe, Prolegomena pag. XXVIII—XXIX, Nr. 11. [2]) Quetelet pag. 159, Note 1. [3]) Kästner I, 132—134.

Um die gleiche Zeit erschienen 1564 bis 1566 in Strassburg Abdrücke und Bearbeitungen der Euklidischen Elemente in griechischer und lateinischer Sprache, bei deren Zusammenstellung Conrad Dasypodius und Christian Herlinus[1]) theilweise zusammengewirkt hatten, ersterer in weitesten Kreisen bekannt durch die von ihm erfundene und ausgeführte, sowie 1578 beschriebene kunstreiche Uhr im Strassburger Münster[2]). Die von Dasypodius allein veranstalteten Abdrücke enthalten den Euklidischen Text in griechischer und lateinischer Sprache neben einander. Die Bearbeitung der sechs ersten Euklidischen Bücher, zu welcher Beide in der Weise sich vereinigten, dass Herlinus Buch I und V, Dasypodius Buch II, III, IV, VI übernahm, lassen alle Folgerungen in der Form schulgerechter Schlüsse erscheinen, eine wohl ziemlich zwecklose Künstelei, welche aber damals anders beurtheilt worden sein muss, sonst wäre nicht 1571 eine neue Auflage möglich gewesen.

Als einer der fleissigsten Uebersetzer und Herausgeber, wobei das lobende Beiwort Geltung behält, auch wenn wir den Vergleich auf Herausgeber aller Jahrhunderte ausdehnen, muss Federigo Commandino[3]) (1509—1575) von Urbino gerühmt werden. Schriften des Ptolemäus, des Archimed, des Apollonius, des Euklid, des Aristarch, des Pappus, des Heron hat er übersetzt, und diese Bearbeitungen erschienen in den Jahren 1558 bis 1592, also bis zu 17 Jahren nach Commandino's Tode. Einzelne dieser Uebersetzungen, insbesondere die des Pappus, sind Jahrhunderte lang die einzigen geblieben, welche überhaupt vorhanden waren, und sie mussten sogar den Urtext ersetzen, welcher noch nicht gedruckt worden war. Neben seiner mathematischen Uebersetzungsthätigkeit war Commandino auch Arzt.

Ein griechisch zwar schon in Verbindung mit den Euklidischen Elementen durch den älteren Grynäus herausgegebener Schriftsteller war Proklus. Seine Uebersetzung stellte ein venetianischer Edelmann Francesco Barozzi[4]), lateinisch Barocius (etwa 1538 bis nach 1587) sich als Aufgabe, und diese Uebersetzung erschien 1565. Auch Schriften von Heron hat Barozzi übersetzt, wenngleich diese Uebersetzungen sich wegen des äusserst mangelhaften Zustandes des zu Grunde liegenden Textes nicht sehr brauchbar erweisen konnten.

Immer blieb noch Euklid der meistbevorzugte griechische Schriftsteller, wie einige Namen bestätigen, welche wir jetzt zu nennen

---

[1]) Kästner I, 332—334. [2]) Ebenda II, 215—221. — Wilhelm Schmidt, Heron von Alexandrien, Konrad Dasypodius und die Strassburger astronomische Münsteruhr. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Supplementheft S. 177—194. [3]) Libri III, 118—121. [4]) Vossius pag. 336.

haben. Da tritt uns der sogenannte Euklid des Candalla gegenüber. François de Foix-Candale[1]) (etwa 1502—1594) war aus königlichem Blute, wie in Distichen gerühmt wird, welche zu Anfang der Euklidausgabe stehen. Er war Bischof im südlichen Frankreich und trieb Mathematik aus innerem Drange. Die Ausgaben der Euklidischen Elemente von Campanus und von Theon — unter letzterem Namen ist die von Zamberti verstanden — machten ihn stutzig. Entweder müssen der Verschiedenheit dieser Ausgaben gemäss mehrere Euklide gewesen sein, oder des einzigen Schriftstellers Werk müsse vielfache Veränderung erlitten haben. Dann war aber eine Wiederherstellung geboten, und dieser Aufgabe unterzog sich Candale oder Flussates, wie sein Name (von Foix abgeleitet) sich gleichfalls geschrieben findet. Unter dem Eigenen, welches Candale bei dieser Bearbeitung bot, nennen wir seine Bemerkung zu Euklid III, 16. Der Berührungswinkel, sagt er, sei von anderer Art als ein geradliniger, also kein Wunder, dass er kleiner sei als jeder geradlinige, und dass es doch unter den Berührungswinkeln immer kleinere und kleinere gebe. Die Art des Berührungswinkels sei eben kleiner als die des geradlinigen, wie die grösste Mücke kleiner sei als das kleinste Kameel. Candale hielt sich bei einer Bearbeitung von einiger Freiheit für berechtigt, den Elementen neue Bücher eigener Erfindung über regelmässige Körper hinzuzufügen. Der erste Abdruck von 1566 enthält ein solches Zusatzbuch, der zweite von 1578 deren drei. Unter den neuen Körpern ist einer durch 6 Quadrate und 8 Dreiecke, ein anderer durch 20 Dreiecke und 12 Fünfecke begrenzt. *Exoctaedron* und *Icosidodecaedron* sind die Namen, welche für jene Körper vorgeschlagen sind.

Das Jahr 1570 ist das Druckjahr des ersten englischen Euklid[2]). Sir Henry Billingsley war der Uebersetzer. Als Gehilfe diente ihm dabei eine ungleich interessantere Persönlichkeit, zu welcher wir uns wenden.

John Dee[3]) (1527—1608) verliess England schon mit 21 Jahren. Er lehrte 1549 in Löwen, 1550 in Paris. Seine Zuhörer, meist älter als er selbst, waren, wie er erzählt, so zahlreich, dass kein geschlossener Raum sie fasste; ein Theil drängte sich von aussen an die Fenster,

[1]) Kästner I, 313—324. — Poggendorff I, 764 unter dem Namen Flussates. P. Tannery in dem *Bulletin Darboux* XXVIII, 59 (1893) macht darauf aufmerksam, dass die Linie Foix-Candale ihren Namen von der englischen Grafschaft Kendal entnommen habe, mit welcher ihr Gründer belehnt worden war. [2]) Ball, *History of mathematics at Cambridge* pag. 22—23. [3]) Kästner II, 46—47 und I, 272. — *Encyclopaedia Britannica* (ed. IX) VII, 22. — Ball l. c. pag. 19—21.

um so bestmöglich hören und sehen zu können. Eine Berufung nach Oxford lehnte er 1554 ab. Mit dem Beginne der Regierung von Königin Elisabeth, also etwa 1558, trat dagegen Dee in königliche Dienste. Im Jahre 1564 begab er sich nach Deutschland zu Kaiser Maximilian II., dem er eine Schrift zugeeignet hatte. 1570 erschien Dee in Urbino bei Commandino. Er brachte die Uebersetzung der Euklidischen Schrift von der Theilung der Figuren mit (Bd. I, S. 272), deren arabische Bearbeitung durch Mohammed Bagdadinus er um 1563 in der Bibliotheca Cottoniana[1]) aufgefunden, übersetzt und als euklidisch erkannt hatte, ein Beweis für Dee's Sprachkenntnisse wie nicht minder für sein umfassendes Wissen in mathematisch-geschichtlicher Beziehung. Der Druck des Werkchens wurde 1570 durch Dee und Commandino gemeinschaftlich veranstaltet und erfolgte 1703 auf's Neue in der von David Gregory besorgten Gesammtausgabe der Euklidischen Werke. Dee's Wanderleben führte ihn auch 1571 nach Lothringen, 1578 wieder nach Deutschland, dazwischen wiederholt nach England, 1583 nach Polen und Böhmen, wo er viel mit Alchymie sich beschäftigte und in Folge dessen bei Kaiser Rudolf II. in grosser Gunst stand. Zuletzt lebte er in England in Noth und Zurückgezogenheit, weil er um einiger mechanischer Kunstwerke willen, die er angefertigt hatte und in Folge einer sehr auffälligen Tracht, die er anzulegen sich gewöhnt hatte, für einen Zauberer gehalten und von Jedermann gemieden wurde.

Die lateinische Ausgabe der euklidischen Elemente von Clavius gehört dem Jahre 1574 an und wurde 1589, 1591, 1603, 1607, 1612 neu aufgelegt. Christoph Clavius[2]), ursprünglich Schlüssel, ist 1537 in Bamberg geboren. Er war Mitglied des Jesuitenordens und lehrte 14 Jahre lang Mathematik in dem Collegium seines Ordens in Rom. Dort starb er 1612. Weiten Kreisen ist er bekannt als einer der Mitarbeiter an dem Werke der Kalenderverbesserung, zu welchem Papst Gregor XIII. ihn beizog. Die zahlreichen neuen Auflagen, in welchen sein Euklid gedruckt werden musste, beweisen die hohe Anerkennung, welche dieses Werk fand, und selten ist eine solche Anerkennung in gleich hohem Maasse verdient gewesen. Clavius hat in einem umfang- und inhaltreichen Bande vereinigt, was die früheren Herausgeber und Erklärer da und dort zerstreut mitgetheilt hatten. Er hat bei dieser Sammlung scharfe Kritik geübt, alte Irrthümer aufgedeckt und vernichtet. Er ist keiner

[1]) Von Sir Robert Cotton angelegt, wurde diese Sammlung 1700 Staatseigenthum und befindet sich gegenwärtig im Britischen Museum in London. [2]) Allgem. deutsche Biographie IV, 298—299, Artikel von Bruhns.

einzigen Schwierigkeit aus dem Wege gegangen. Er hat vielfach eigene Erläuterungsversuche mit Glück gewagt. Nur wenige Einzelheiten wollen wir hervorheben. Ob wir gleich das Erste, welches wir erwähnen, die Benutzung des Wortes *fluere* bei der Beschreibung der Entstehung[1]) von Linien und Oberflächen mittels fliessender Punkte und Linien Clavius zuschreiben dürfen, ist bei der grossen Aehnlichkeit seiner Ausdrucksweise mit der von Petrus Philomeni von Dacien (S. 91) gebrauchten fast zweifelhaft. Die Parallelentheorie sucht Clavius[2]) auf folgende beide Sätze zu stützen: 1. Eine Linie, deren einzelne Punkte gleich weit von einer derselben Ebene mit ihr angehörenden Geraden abstehen, ist gerade. 2. Wenn eine Gerade längs einer anderen Geraden so hingeschoben wird, dass beide fortwährend einen rechten Winkel mit einander bilden, so beschreibt auch der andere Endpunkt der verschobenen Geraden eine Gerade. Bei Clavius[3]) dürfte als einem der Ersten die jetzt wohl allgemein angenommene Ansicht ausgesprochen sein, dass die Entstehung des pythagoraeisches Lehrsatzes eine zahlentheoretische von der Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ aus war, und dass erst in zweiter Linie die Verallgemeinerung desselben auf jedes rechtwinklige Dreieck stattfand. Der Irrthum, dass Euklid von Megara Verfasser der Elemente gewesen sei, wird von Clavius endgiltig abgethan, während, wie wir noch sehen werden, der andere Irrthum, als wenn nur die Lehrsätze von Euklid, die Beweise dagegen von Theon herrührten, bereits 1559 durch Buteo beseitigt war. Unter den Prolegomena genannten Vorbemerkungen findet sich ein Abschnitt über die Persönlichkeit des Euklid, und in diesem ist ausdrücklich des Gegensatzes gedacht, welcher zwischen den Berichten des Proklos und des Valerius Maximus obwaltet, und ist die Entscheidung im Sinne des Proklos getroffen: unser Euklid, der so scharfsinnige Geometer, ist ein durchaus Anderer als der Philosoph von Megara[4]). Davon, dass Euklid die Beweise nicht selbst verfasst haben sollte, ist bei Clavius nur so weit die Rede, als er es durchaus verwirft[5]). Dagegen ist nach den Axiomen und unmittelbar vor dem Satze I, 1 ausdrücklich gesagt[6]), es seien Unterschiede zwischen der theonischen Ueberlieferung, *traditio Theonis*, und der von Campanus befolgten arabischen Ueberlieferung, *ordo quem Campanus ex traditione Arabum est secutus*, vorhanden, welche man

[1]) *Euclidis Elementa* ed. Clavius. Köln 1591 (III. ed.) pag. 2 und pag. 3. [2]) Ebenda pag. 50—51. Vergl. Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss (Leipzig 1895) S. 17—18. [3]) Clavius l. c. pag. 85. [4]) *Itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo Philosopho longe alius est.* [5]) Clavius l. c. II, pag. 191. [6]) Ebenda I, pag. 19.

kennen müsse, wenn man nicht durch Verweisungen, welche bald die eine, bald die andere Ausgabe berücksichtigen, in Verwirrung gerathen solle. Desshalb ist jeder Satz des Clavius mit doppelter Bezifferung versehen, einer im Texte fortlaufenden nach Theon, einer Randbezifferung nach Campanus, d. h. also nach den Arabern, und grade die dadurch in leichter Weise ermöglichte Vergleichung der einander entsprechenden Ordnungszahlen, welche gestattet, ohne Mühe zu erkennen, ob ein mittelalterlicher Schriftsteller nach dem arabischen oder nach dem griechischen Euklid seine geometrischen Kenntnisse sich erworben habe, lässt die Ausgaben von Clavius noch heute für geschichtliche Untersuchungen das Beiwort der Unentbehrlichkeit verdienen.

Von einer spanischen Uebersetzung[1]) der 6 ersten Bücher der euklidischen Elemente, welche 1576 in Sevilla gedruckt wurde, ist uns nur der Name des Uebersetzers Rodrigo Zamorano bekannt.

Ein Neapolitaner Giuseppe Auria[2]) übersetzte auf Grundlage einiger im Vatican befindlichen Codices geometrisch-astronomische Schriften des Theodosius, welche 1587 und 1588 gedruckt wurden. Eine Diophantübersetzung ins Lateinische soll ebenderselbe angefertigt haben, über deren handschriftliches Vorhandensein berichtet wird.

Baldi, der gelehrte Abt von Guastalla (S. 547), übersetzte die Automaten des Heron und gab sie 1589 im Drucke heraus. Die Originalhandschrift dieser Uebersetzung ist im Besitze Libri's[3]), eines Liebhabers solcher Schriftstücke, der sie zu beurtheilen verstand, gewesen. Nach seiner Aussage wäre die Ausführung der Federzeichnungen zu den Figuren von wunderbarer Vollendung gewesen, wodurch der Bericht an Glaubwürdigkeit gewinnt, dass Baldi ebensoviele Begabung als Neigung zur Malerei besessen habe und nur mit Gewalt von seinen Lehrern abgehalten worden sei, sich der Kunst zu widmen[4]). Auch Heron's Schrift über Wurfgeschosse hat Baldi übersetzt, doch fand diese erst 1616 Veröffentlichung[5]).

Ein für die damalige Zeit hochmerkwürdiges Druckwerk ist die arabische Bearbeitung der euklidischen Elemente von Naṣîr Eddîn (Bd. I, S. 735), welche 1594 in Rom erschien[6]). Es wird berichtet, dass Baldi grade dieses Buch mit Vorliebe in den Nachmittagsstunden gelesen habe[7]).

Als letzten Uebersetzer von Schriften des Alterthums nennen wir einen Mann, der seiner Lebenszeit nach schon wesentlich früher hätte

[1]) Kästner I, 263. [2]) Montucla I, 564. — Diophant übersetzt von Otto Schulz (Berlin 1822), Vorbericht S. XLII—XLIII. [3]) Libri IV, 72. [4]) Ebenda IV, 70. [5]) Ebenda IV, 77, Note 1. [6]) Kästner I, 367 flgg. [7]) Libri IV, 75.

erwähnt werden müssen, und dessen Bearbeitungen eine ganze Anzahl anderweitiger Bemühungen überflüssig gemacht hätten, wenn sie rechtzeitig zum Drucke gegeben worden wären. Francesco Maurolico[1]) (1494—1575) von Messina war wie Keiner befähigt grade solchen Arbeiten sich zu widmen. Sein Vater, ein byzantinischer Arzt, war vor den Türken fliehend nach Sicilien gekommen und unterrichtete selbst den hoffnungsvollen Sohn in Naturwissenschaften und Astronomie sowie in der griechischen Sprache, die überdies in Sicilien keineswegs ausgestorben war. Francesco Maurolico, mit latinisirtem Namen Maurolycus, auch wohl Maroli genannt, wurde Geistlicher, seine wissenschaftliche Thätigkeit aber griff nach allen Fächern über. Die blossen Titel der von ihm theils vollendeten, theils geplanten Werke füllen ganze Seiten. Die Stadt Messina ernannte ihn zu ihrem Geschichtsschreiber. Physikalische und besonders meteorologische Beobachtungen, welche er anstellte, gaben ihm unter den Physikern einen ehrenvollen Platz. Dabei fand er noch Zeit, die Festungsbauten von Messina bei ihrer Herstellung zu überwachen, schrieb er zahlreiche, handschriftlich vorhandene und in unserer Zeit gedruckte mathematische Abhandlungen. Für's Erste haben wir es nur mit seinen Uebersetzungen zu thun. Nur ein Sammelband ist 1558 bei Maurolico's Lebzeiten erschienen. Seinen Inhalt bilden die Sphärik des Theodosius, die des Menelaus, eine eben solche von Maurolico selbst, das Buch des Autolykus von der bewegten Kugel, Theodosius über die bewohnte Erde, die Phaenomena des Euklid. Nur seltene Exemplare dieses Bandes haben sich erhalten[2]). Noch im XVI. Jahrhunderte, aber erst nach dem Tode des Uebersetzers, erschienen 1591 die euklidischen Phaenomena abermals. Die beiden wichtigsten Uebersetzungen blieben dagegen fast ein volles Jahrhundert der Oeffentlichkeit vorenthalten. Die Kegelschnitte des Apollonius erschienen 1654. Maurolico hat hier erstmalig einen Versuch gewagt, der später vielfach den Scharfsinn der Mathematiker in Bewegung setzt, den einer sogenannten Restitution. Nur 4 Bücher Kegelschnitte haben griechisch sich erhalten. Maurolico stellte nun nach den ziemlich dürftigen Angaben über den Inhalt der folgenden Bücher, welche da und dort vorkommen, diese wieder her, allerdings ein missglückter Versuch, wie sich herausstellte, als im XVII. Jahrhunderte wenigstens das 5., 6. und 7. Buch in arabischer Bearbeitung aufgefunden wurden,

[1]) Kästner II, 64—74. — Libri III, 102—118; IV, 241. — F. Napoli im *Bulletino Boncompagni* (1876) IX, 1—22. [2]) Hultsch, Vorrede zur Ausgabe des Autolykos (Leipzig 1885) pag. XVI, Note 17: *Maurolyci libri quamvis typis olim expressi exempla nunc multo rariora sunt quam Autolyci codices Graeci manu scripti.*

aber immerhin Interessantes bietend, insbesondere wo es um grösste und kleinste Werthe sich handelt, welche gewisse mit den Kegelschnitten in Verbindung stehende Strecken annehmen, eine Gattung von Untersuchungen, welche den Inhalt des fünften Buches bildet. Am hervorragendsten ist die Archimedübersetzung Maurolico's, der sich unter den Zeitgenossen schon den Namen des zweiten Archimed erworben hatte. Erst 1670 begann man den Druck dieser Bearbeitung, welcher nach mannigfachen Zwischenfällen gar erst 1685 in Palermo vollendet wurde.

Wir haben eine ziemlich grosse Anzahl von Schriftstellern aller Länder genannt, welche Uebertragung der Werke griechischer Mathematiker bald ins Lateinische, bald in die lebenden Sprachen sich angelegen sein liessen, und wir haben, wie wir (S. 548) es aussprachen, nicht einmal auf Vollständigkeit in dieser Beziehung gesehen. Die Wirkung aller dieser Veröffentlichungen blieb nicht aus. Mit der Vervielfältigung der Mittel geometrische Kenntnisse zu erwerben wuchs die Verbreitung dieser Kenntnisse, mit dieser deren Werthschätzung. Hatte man lange genug den ersten Unterricht, so weit er überhaupt Mathematisches enthielt, auf das Rechnen beschränkt, so drängte jetzt die Geometrie sich vor. Von Heinrich von Navarra, dem nachmaligen Heinrich IV. von Frankreich, und von dessen Freund Coligny wissen wir, dass sie als Knaben hauptsächlich zwei Werke zu lesen bekamen, Plutarch's Lebensbeschreibungen und Euklid's Elemente[1]). Schriftsteller über Geometrie traten auf, in erster Linie jene Uebersetzer selbst, welche nicht immer sich damit begnügten, nur das Alte in neuer Sprache wiederzugeben, welche vielmehr es liebten, in Gestalt von Erläuterungen von dem Ihrigen hinzuzuthun. Die Lehre vom Contingenzwinkel bot zu solchen eigenen Gedanken reichlich Gelegenheit. Mit ihr hat sich, wie wir (S. 554) beiläufig erwähnten, Candale einigermassen beschäftigt. Cardano's Auffassung, hauptsächlich in dem *Opus novum de proportionibus* niedergelegt, haben wir (S. 533—535) vorgreifend geschildert, als wir die Gesammtthätigkeit dieses geistreichen Mannes darlegten. Damals nannten wir Peletier als den Vertreter einer anderen Meinung, welche er in einer Euklidausgabe aussprach; als wir jedoch (S. 549) jener Euklidausgabe von 1557 gedachten, verwiesen wir auf später, um von den Anmerkungen zu reden, worunter wir eben das auf den Contingenzwinkel Bezügliche verstanden. Wir wollen jetzt diese Zusage erfüllen, indem wir an den ausführlichen Bericht uns anlehnen,

[1]) De Jouy, *L'hermite en province. Le Berceau de Henry IV.* No. XIV. 28. Juni 1817 ed. Mozin II, 77.

welchen Clavius in seiner Euklidausgabe gegeben hat[1]). Darnach hat Peletier die Schwierigkeit dadurch zu heben versucht, dass er den Contingenzwinkel gar nicht als einen Winkel betrachtete, er sei ein Nichts, und, was genau damit übereinstimmt, der Winkel, welchen der Kreis mit dem Durchmesser bilde, sei von dem rechten Winkel nicht im mindesten verschieden. Clavius seinerseits meint, wenn dem so wäre, würde eine Schwierigkeit überhaupt niemals vorhanden gewesen sein, denn der Euklidische Satz III, 16 besage dann nur, dass das Nichts kleiner sei als ein spitzer Winkel, und das bedürfe nicht erst eines Beweises. Man komme vielmehr nur so über die Sache hinaus, dass man mit Cardano (er hätte hinzufügen können auch mit Candale, den er in der That an einer Stelle[2]) neben Cardano nennt) den Contingenzwinkel zwar für ein Etwas, für einen Winkel, aber für einen Winkel anderer Art, als der geradlinige sei, erkläre. Ein Grund, welchen Peletarius scharfsinnig genug für seine Meinung anführte, war folgender: Die Winkel, welche (Figur 107) concentrische, immer grösser werdende Kreise mit dem allen gemeinsamen Durchmesser bilden, werden vom kleineren zum grösseren Kreise verglichen jedenfalls nicht kleiner, denn sonst könnte, wenn man den äusseren Halbkreis längs des Durchmessers bis zur Berührung mit dem inneren Halbkreise verschiebe, sein mit dem Durchmesser gebildeter Winkel den des kleineren Halbkreises mit demselben Durchmesser nicht umschliessen. Grösser können jene Winkel aber auch nicht werden, weil sie sonst bei fortwährendem Wachsen, dem niemals ein Ende gesetzt zu werden brauche, schliesslich einmal grösser als ein rechter Winkel werden würden, was unmöglich sei. Folglich seien alle jene Winkel thatsächlich gleich und der bei der erwähnten Verschiebung auftretende Contingenzwinkel sei der Unterschied ganz gleicher Grössen, mithin Nichts. Clavius fühlte die Stärke des ersten, die Schwäche des zweiten Theils dieser Beweisführung und entgegnete, es sei einfach nicht wahr, dass bei fortwährender Vergrösserung eines Winkels die Grösse des rechten Winkels erreicht oder gar übertroffen werden müsse. Man denke sich nur (Figur 108) den geradlinig rechten Winkel BAF. Ziehe man AC, so weiche CAF von dem rechten Winkel um den spitzen Winkel CAB ab; aber man könne auch AD, AE und unendlich viele andere Gerade ziehen, deren mit AF gebildete

Fig. 107.

[1]) *Euclidis Elementa* ed. Clavius, Köln 1591 (ed. III) pag. 133—145.
[2]) Ebenda pag. 144.

Winkel grösser und grösser werden, ohne jemals den rechten Winkel zu erreichen. Alle übrigen Gründe, welche von beiden Seiten, und zwar, wie es in der Regel der Fall zu sein pflegt, mit um so grösserer Heftigkeit und Hartnäckigkeit, je weniger schliesslich bei dem Streite herauskam, ins Gefecht geführt wurden, waren von ähnlicher Art. Wichtig erscheint der Begriff der Grenze, welcher eine fortwährend wachsende Grösse sich nähert, ohne sie zu überschreiten, wichtig der Begriff der Krummlinigkeit, der als zur geraden Linie gegensätzlich sich bemerklich macht, wie er auch von der einen oder von der anderen Partei aufgefasst wurde. Wir sprechen von der einen und von der anderen Partei, weil der Streit nicht zwischen den bis hierher genannten Persönlichkeiten zu Ende geführt wurde. Noch Ströme von Tinte wurden vergossen, bis erst im XVII. Jahrhunderte der Streit über den Contingenzwinkel aufhörte, nicht weil eine Partei sich als besiegt zugestand, sondern weil im Streite über das Unendlichkleine ein noch mehr zu logischen Spitzfindeleien herausfordernder Gegenstand auftauchte.

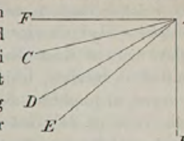

Fig. 108.

Das von uns erwähnte Erwachen geometrischer Neigungen zeitigte auch fruchtbarere Untersuchungen als solche über den Contingenzwinkel. Peletier hat 1573 eine kleine Schrift *De l'usage de la géométrie* dem Drucke übergeben. Neben Flächenberechnungen ist auch ein Distanzmesser[1]) beschrieben, auf dessen Erfindung Peletier sich sehr viel zu gute that, dessen genaue Einrichtung wir aber der uns zur Verfügung stehenden etwas sehr undeutlichen Beschreibung nicht zu entnehmen vermögen.

Ein geistvoller Geometer war Johannes Buteo[2]) oder Borrel (1492—1572). Er ist in Charpey in der Dauphinée geboren, wesshalb er in den Ueberschriften mitunter Delphinaticus heisst. Er gehörte dem Mönchsorden des heiligen Antonius an. Seine mathematischen Studien hat er unter Orontius Finaeus gemacht, was ihn aber nicht abhielt, gegen dessen vermeintliche Kreisquadratur aufzutreten. Gedruckt sind von ihm *Opera geometrica* 1554, *De quadratura circuli* mit einem Anhange *Annotationes in errores interpretum Euclidis* 1559 und eine *Logistica* 1559. In der Logistik sollen sämmtliche mit vier

[1]) Kästner I, 653—655. Brieflicher Mittheilung von H. Ambros Sturm zufolge ist in einem Antiquariatskataloge Peletarius, *De usu geometriae liber*, Paris 1571, angezeigt gewesen, vielleicht gleichen Inhaltes mit der jüngeren französischen Ausgabe. [2]) Montucla I, 574—575. — Kästner I, 468—476. — *Nouvelle Biographie universelle* VII, 898—899.

Würfeln überhaupt mögliche Würfe aufgezählt und Schlüssel mit Buchstabenversetzungen beschrieben sein, Aufgaben von der Art derer, mit welchen Cardano und Tartaglia sich beschäftigten. Die *Opera geometrica* sind einzelne Abhandlungen von sehr gemischter Natur, welche nur zu einem Bande zusammengestellt sind. Vieles ist antiquarischen Inhaltes, bildet also gewissermassen geometrische Erläuterungen zu römischen Schriftstellern. Buteo hat z. B. muthmasslich nach Valla (S. 345) auf jene Stelle des Quintilian aufmerksam gemacht, welche unrichtige Flächenberechnungen betrifft. Ferner sind römische Gesetze an der Hand der Geometrie geprüft. Ein Beispiel eigener Erfindungsgabe Buteo's liefert die Abhandlung *Ad problema cubi duplicandi*. Stifel's Würfelverdoppelung wird darin mit Recht getadelt, damit aber ein sehr ungerechtfertigter Spott über die barbarische Schreibweise der ganzen Arithmetica integra verbunden[1]) und insbesondere eine näherungsweise Würfelverdoppelung mittels Zirkel und Lineal gelehrt. Sie besteht in Folgendem. Sei ein Würfel von der Seite a, also dem Körperinhalte a^3 gegeben, so ist es leicht, durch Aneinandersetzung zweier solcher Würfel ein Parallelopipedon von dem Körperinhalte $2a^3$ zu erhalten, dessen Höhe a ist, während die Grundfläche aus einem Rechtecke von den Seiten a und $2a$ besteht. Diesen Körper will Buteo nach und nach in einen Würfel verwandeln. Zunächst verwandelt er die Grundfläche in ein Quadrat von der Seite $a\sqrt{2}$, und legt er nun den neuen Körper, welcher immer noch den Körperinhalt $2a^3$ besitzt, auf eine Seitenfläche, so ist $a\sqrt{2}$ die Höhe des neuen Parallelopipedons, dessen rechteckige Grundfläche die Abmessungen a und $a\sqrt{2}$ besitzt. Diese Grundfläche verwandelt sich in ein Quadrat von der Seite $a\sqrt[4]{2}$, und ein erneutes Umlegen des entstandenen Körpers zeigt ihn in Form eines Parallelopipedons von der Höhe $a\sqrt[4]{2}$ mit der Grundfläche, welche durch das Rechteck der Seiten $a\sqrt{2}$ und $a\sqrt[4]{2}$ gebildet ist. Es ist leicht ersichtlich, dass man in ganz ähnlicher Weise von dem jetzt bekannten dritten Parallelopipedon zu einem vierten, von diesem weiter gelangen kann. Das siebente Parallelopipedon hat Abmessungen, welche durch $a \cdot 2^{\frac{21}{64}}$, $a \cdot 2^{\frac{21}{64}}$, $a \cdot 2^{\frac{11}{32}}$ in heutiger Schreibweise dargestellt werden, und hier, sagt Buteo, sei die Ungleichheit nicht mehr merklich; was aber nicht in die Sinne falle, hindere beim Gebrauche

[1]) *In libro cui titulum fecit Arithmetica integra, ubi etiam multa super geometricis inculcavit, ab Euclide (ut ipse iactat) omissa. Cuius propositiones inquit non sunt evangelium Christi. Huiusmodi autem Arithmetica multiplici rerum verborumque barbarie tantum inter alias, quascunque legerim, caput extulit omnes (ut cum poeta dicam) Quantum lenta solent inter viburna cupressi.*

nicht, und von diesem Gedanken hätten auch Archimed und Ptolemäus bei der Kreisrechnung Gebrauch gemacht. Nach diesem Ausspruche weiss man schon, was man von Buteo's *De quadratura circuli* zu erwarten hat, Anerkennung näherungsweiser, Widerlegung vermeintlich genauer Kreisquadraturen. Die beiden Bücher, in welche jene Schrift zerfällt, erfüllen diese Erwartung. Das erste Buch ist vorzugsweise den Arbeiten Archimed's und seiner Vorgänger gewidmet. Mit vollendeter Klarheit weiss Buteo Archimed's Ziel und Verfahren darzustellen, aber, was noch mehr heissen will, er wird auch dem vielverketzerten Bryson (Bd. I, S. 191) gerecht[1]). Wenn man nur sage, das dem Kreise flächengleiche Quadrat sei irgend ein mittleres, *quadratum medium utcunque*, zwischen Sehnen- und Tangentenvieleck, so sei damit eine Wahrheit ausgesprochen. Nach der Auseinandersetzung der archimedischen Untersuchung ist unter der Ueberschrift *Quemadmodum et alii ad dimensionem limites vero propiores inveniantur*[2]), d. h. wie auch andere der Wahrheit näherkommende Grenzen für die Ausmessung gefunden werden, gezeigt, dass allerdings genauere Verhältnisszahlen als $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ gefunden werden können, aber nur auf Kosten der Bequemlichkeit der Rechnung, weil mit viel grösseren Zahlen alsdann umgegangen werden müsse. Hierher gehört das ptolemäische $3\frac{17}{120}$ (Bd. I, S. 394). Aus dem zweiten Buche erwähnen wir, dass $\pi = \sqrt{10}$ den Arabern zugeschrieben wird[3]). Ferner ist der sogenannten Quadratur des Campanus (S. 101) gedacht[4]). Es sei unmöglich der Verfasser dieses Schriftchens derselbe Campanus, welcher durch seine Uebersetzung der euklidischen Elemente aus dem Arabischen und durch seine Anmerkungen und Zusätze zu denselben sich so sehr verdient gemacht habe. Sodann widerlegt Buteo mit ziemlichem Geschicke verschiedene Quadraturen, die wir nebst ihren Urhebern Nicolaus von Cusa, Orontius Finaeus, Dürer, Bovillus bereits kennen. Dem zweiten Buche folgt noch der Anhang *Annotationes in errores interpretum Euclidis*. In ihm ist, wie (S. 556) schon erwähnt wurde, in ausführlicher Untersuchung[5]) und unter Zuziehung der einschlagenden Quellen, welche Buteo vollständig beherrscht, der Nachweis geliefert, dass Euklid selbst und nicht Theon der Verfasser der in den Elementen mitgetheilten Beweise, und Theon nur Herausgeber gewesen sei.

Unter die Schriftsteller über Geometrie ist bis zu einem gewissen Grade auch Ramus zu zählen, dessen *Scholae mathematicae* von 1569

[1]) *De quadratura circuli* (Lugduni 1559) pag. 14. [2]) Ebenda pag. 63. [3]) Ebenda pag. 106. [4]) Ebenda pag. 107. [5]) Ebenda pag. 209—212.

(S. 546) sich über nahezu alle Theile der Mathematik verbreiten und dadurch ihrem Verfasser mehr als nur einen Platz in unserer Zusammenstellung sichern zu müssen scheinen. Führen wir Einiges hierher Gehörende an. Vom 8. Buche der Scholae mathematicae an, welches die Sätze des I. Buches der euklidischen Elemente zu erläutern bestimmt ist, kommen wiederholt Figuren vor. Bald sind dieselben ohne jede Bezeichnung, bald führen sie in altgewohnter Weise Buchstaben, die den einzelnen Punkten als Benennung dienen[1]). Auffallend ist dabei die Reihenfolge der Buchstaben. Während früher entweder die griechische, beziehungsweise die arabische, oder die lateinische Reihenfolge, also entweder *a*, *b*, *g* oder *a*, *b*, *c* u. s. w. üblich war, entfernt Ramus sich von beiden. Er benutzt zunächst immer die Selbstlauter *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, *y*, und nur wenn mehr als sechs Punkte der Bezeichnung bedürfen, treten auch Mitlauter auf, zuerst *s*, dann *r*, *t*, *l*, *m* u. s. w. Einen Grund für die Abweichung von der eingebürgerten Uebung giebt Ramus nicht an. Wir halten es für müssig, unsererseits nach einem solchen zu suchen; die Thatsache selbst schien uns aber erwähnenswerth, weil bei der grossen Verbreitung der Schriften des Ramus insbesondere unter den Anhängern der kirchlichen Reformation hier vielleicht der Ursprung einer anderweitigen Bezeichnung liegt, von welcher wir im 69. Kapitel zu reden haben. Aber suchen wir Bemerkenswertheres auf. In der Bewunderung Euklid's stimmten und stimmen alle Schriftsteller überein, welche mit seinen Elementen sich beschäftigt haben. Ramus theilt kaum die Bewunderung der Elemente, geschweige denn die Euklid's[2]). Man müsse gleich Proklos von der Sucht, Euklid immer nur loben zu wollen, ergriffen sein, um gegen die grossen methodischen Fehler, welche er sich zu Schulden habe kommen lassen, blind zu sein. Die Arithmetik gehe ihrem Begriffe nach der Geometrie voraus, Euklid drehe die Reihenfolge um. Ferner stelle Euklid eine ganze Anzahl von Definitionen an die Spitze, und das sei vollends verkehrt. Die Natur hat nicht einen Wald dadurch hervorgebracht, dass sie am Anfange die Wurzeln aller Bäume steckte, der Architekt nicht dadurch eine Stadt, dass er am Anfange alle Fundamentirungen vornahm. Jedem folgenden Baume gab die Natur seine Wurzeln, jedem Gebäude der Baumeister seine Grundmauern. So musste Euklid das Dreieck definiren, wo die Lehre von den Dreiecken beginnt, das Vieleck, wo von Vielecken gehandelt wird, und denselben Weg überall bei den Anfängen einschlagen. Das X. Buch vollends, welches, wie wir (S. 549) gesehen haben, durch Mondoré besonders heraus-

[1]) *Scholae mathematicae* (ed. Frankfurt 1627) pag. 174, 176, 179, 180, 183 und häufiger. [2]) Ebenda pag. 96—98.

gegeben und dadurch bevorzugt worden war, ist für Ramus eine Qual[1]). Kein Theil der Geometrie erscheint ihm unnützer, keiner überladener mit Vorschriften und Lehrsätzen; es ist ihm zweifelhaft, ob überhaupt diese Spitzfindeleien berechtigt sind, innerhalb einer wahren Beschäftigung mit der Geometrie eine Stelle einzunehmen. Er selbst habe das X. Buch mit Eifer und Genauigkeit durchforscht, aber kein anderes Urtheil fällen können, als dass in ihm ein Kreuz für edle Geister errichtet sei. Um alle Beschwerden des Ramus gegen Euklid vereinigt zu sehen, greifen wir über die eigentlich geometrischen Bücher hinaus und sehen zu, was er von den arithmetischen Büchern sagt. Ihnen wird der Mangel an Brauchbarkeit durchweg vorgeworfen und, um ein bestimmtes Beispiel ins Auge zu fassen, der Satz IX, 20 von der Unendlichkeit der Anzahl der Primzahlen als zu speciell getadelt. Von allen Zahlengattungen gebe es unendlich viele, zusammengesetzte, gerade, ungerade[2]), vollkommene u. s. w. Man müsse desshalb als allgemeine Forderung aufstellen, dass jede Anzahl ins Unendliche wachse und nicht Sonderbeweise führen. Diese Auszüge, welche wir hier vereinigt haben, lassen, so kurz sie gewählt wurden, Ramus als das erkennen, als was wir ihn früher schilderten, als streitbaren und streitsüchtigen Dialektiker. Theoretische Feinheiten richtig zu würdigen war seine Sache nicht, und strengen, nach seiner Meinung ganz unnöthigen Beweisführungen der Geometrie zog er gewöhnliches Rechnen vor, wie es von den Kaufleuten der Strasse St. Denis in Paris zu erlernen war, die zu besuchen, und mit denen für ihn lehrreiche Gespräche zu führen für Ramus ein Genuss war[3]). So entziehen sich die Scholae mathematicae fast vollständig der Erwähnung in einem der Geschichte der Mathematik gewidmeten Werke, und man findet es begreiflich, dass Mathematiker, welche einen auch nur flüchtigen Blick hineinwarfen, nicht Neigung empfanden, ein Werk zu studiren, dessen drei ersten Bücher allein von Wichtigkeit gewesen wären, weil sie, wie wir (S. 546) sagten, für ihren geschichtlichen Inhalt Quellen verwertheten, denen heute noch das Lob der grössten Zuverlässigkeit gespendet werden muss. Ob eine von Ramus verfasste Geometrie, welche 1577 nach seinem Tode im Drucke erschien, sich von den Mängeln frei zu halten wusste, welche ihr Urheber Euklid vorzuwerfen liebte, ob sie dadurch so viel besser war, wissen wir nicht.

Ein wirklicher Geometer war Giovanni Battista Benedetti oder Benedictis (1530—1590), Philosoph und Mathematiker des

[1]) *Scholae mathematicae* (ed. Frankfurt 1627) pag. 252. [2]) Ebenda pag. 250. [3]) Ebenda pag. 52.

Herzogs von Savoyen. In Venedig geboren, nennt er sich bis zu einem gewissen Grade Schüler des Tartaglia[1]. Es sei billig und recht, Jedem das Seine zu geben, und desshalb sage er, dass Tartaglia ihm die vier ersten Bücher des Euklid, aber auch nur diese erklärt habe. Alles übrige habe er mit eigener Mühe und Arbeit untersucht, denn für den Wissbegierigen sei nichts schwer. So drückt sich Benedetti in der Vorrede zu einem 1553 gedruckten Werke[2] aus, welches er demnach mit 23 Jahren vollendet hatte. Der Inhalt ist eine vollständige Auflösung der Aufgaben, welche in den euklidischen Elementen vorkommen, sowie anderer unter Anwendung einer einzigen Zirkelöffnung. Da wir diesen Gegenstand wiederholt als italienische Liebhaberei bezeichnet haben, so ist es nicht überflüssig, die Jahreszahlen der einzelnen Veröffentlichungen ins Gedächtniss zurückzurufen. Die Cartelli und Risposte sind von 1547 bis 1548 erschienen, und in ihnen konnte Benedetti, welcher mit 18 Jahren für ein Wunder galt[3], Aufgaben dieser Gattung von seinem Lehrer gestellt, von Ferrari gelöst finden. Auch Cardano's De subtilitate von 1550 kann die Neigung gestachelt haben, die Geometrie mit bleibender Zirkelöffnung zu fördern. Die Auflösungen Tartaglia's dagegen erschienen erst 1560 im Drucke, und wenn eine Einwirkung vorhanden war, so kann sie nicht von Tartaglia auf Benedetti stattgefunden haben, sondern nur umgekehrt. Die Auszüge aus dem Benedetti'schen Werke[4], welche unserem Berichte zu Grunde liegen, zeigen indessen keine Aehnlichkeit des Ganges weder mit Ferrari noch mit Tartaglia, und auf den Gang, das heisst auf die Reihenfolge der behandelten Aufgaben, deren jede, sobald sie selbst gelöst ist, bei Lösung der folgenden Aufgaben dienen kann, kommt es natürlich hauptsächlich an. Die fünf ersten Aufgaben Benedetti's sind: 1. Auf einer Linie in einem bestimmten Punkte derselben eine Senkrechte zu errichten. 2. Eine Strecke um ein ihr gleiches Stück zu verlängern, sofern die Strecke kleiner ist als die gegebene Zirkelöffnung. 3. Das Gleiche zu leisten, sofern die Strecke grösser als die gegebene Zirkelöffnung ist. 4. Eine gegebene Strecke zu halbiren. 5. Von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte zu fällen. Wir führen nur die Auflösung der letzteren Aufgabe an, um ein Beispiel von Benedetti's Verfahren zu geben (Figur 109). Von d soll eine de senkrecht zu cf gezogen werden. Man zieht von

[1] Libri III, 123 Note 1. [2] Benedictis, *De resolutione omnium Euclidis problematum aliorumque una tantummodo circuli data apertura*. Venedig 1553. [3] Libri III, 123 Note 2 beruft sich für diesen Ausspruch auf Mazzuchelli, *Scrittori d'Italia* tomo II, part. 2, pag. 218. [4] Ebenda III, 266—271.

einem Punkte f der gegebenen Geraden aus die fd und verlängert sie gemäss 2. oder 3. um $da = fd$. Dann zieht man von a aus ac nach einem zweiten Punkte c der gegebenen Geraden und halbirt ac gemäss 4. in b. Die nun gezogene bd ist somit der cf parallel, und wird gemäss 1. die de senkrecht zu bd gezogen, so ist de auch senkrecht zu cf. Ein zweites Werk Benedetti's führt die Ueberschrift *Speculationes diversae* und ist 1585 gedruckt. Die im Titel ausgesprochenen verschiedenen Untersuchungen sind in der That verschiedenartig[1]. Sechs Abschnitte enthalten arithmetische Sätze, Perspective, Mechanik, Proportionen, Streitfragen, Briefe. Unter den arithmetischen Sätzen findet sich der Beweis der Vertauschbarkeit der Factoren eines Productes, welche bis dahin zwar wohl verschiedentlich bemerkt, aber noch nie als eines Beweises bedürftig gefunden worden war. In eben diesem Abschnitte sind algebraische Aufgaben durch geometrische Betrachtungen gelöst, während man sonst umgekehrt vorzog, die Auflösung geometrischer Aufgaben durch Zurückführung derselben auf Gleichungen zu erreichen. Seien beispielsweise drei Unbekannte x, y, z aus den Gleichungen $x + y = 50$, $y + z = 70$, $z + x = 60$ zu bestimmen. Durch $y = \frac{50 + 70 - 60}{2} = 30$ wird weiter $x = 50 - 30 = 20$, $z = 70 - 30 = 40$ gefunden. So weit ist freilich von Geometrie keine Rede, aber nachträglich zeigt Benedetti an einer Zeichnung die Richtigkeit der Rechnung (Figur 110). Dem Dreiecke abc ist der Kreis eou einbeschrieben und jede Seite ist die Summe zweier Unbekannten, welche als die Entfernungen der

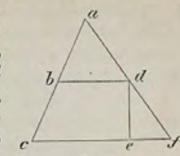

Fig. 109.

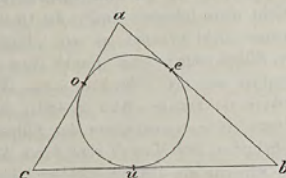

Fig. 110.

Eckpunkte des Dreiecks von den Berührungspunkten des Kreises aufgefasst werden. Man sieht hier deutlich, wie die eine Unbekannte doppelt übrig bleibt, wenn man eine Seite von der Summe der beiden

[1] Libri III, 124—131, 258—265, 272—276.

anderen abzieht. Eine zweite Aufgabe, die Gleichung $x^2 + Ax = B^2$ oder $(A + x)x = B^2$, wird geometrisch folgendermassen gelöst (Figur 111). Die Stücke $ef = A$, $de = B$ werden unter rechtem Winkel an einander gesetzt. Dann wird ef in a halbirt und um a als Mittelpunkt mit ad als Halbmesser ein Kreis beschrieben, bis zu dessen Durchschnitt in b und c die ef nach beiden Seiten verlängert wird. Offenbar ist $be = fc = x$. Hier vermuthlich ist die Aufgabe gelöst, mit vier gegebenen Strecken als Seiten ein Sehnenviereck zu zeichnen[1]).

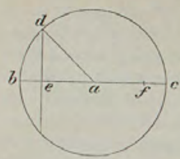

Fig. 111.

Bevor wir über den Abschnitt der Speculationes diversae berichten, welcher der Mechanik gewidmet ist, müssen wir zurückgreifend eines Schriftstellers gedenken, der auf diesem Gebiete Benedetti's Vorgänger war.

Guidobaldo del Monte[2]) (1545—1607) war ein hochangesehener Edelmann aus Pesaro. Er hatte erst beabsichtigt, sich dem Studium zu widmen, dann focht er gegen die Türken, später hat er als Inspector der Festungen Toscanas seinem Vaterlande gedient; zuletzt erfreute er sich auf seinen Gütern einer wissenschaftlich ausgefüllten Zurückgezogenheit. In seiner Mechanik von 1577 ist das Gesetz enthalten, dass Last und Kraft zu einander im umgekehrten Verhältnisse der Räume stehen, welche sie in derselben Zeit durchlaufen, aber über die Anwendung beim Flaschenzuge ging Del Monte nicht hinaus, die Lehre von der schiefen Ebene, vom Keil, von der Schraube hat er nicht verstanden[3]), 1579 wurde die *Theoria planisphaerorium* gedruckt. In ihr sind mancherlei Constructionen gelehrt, welche nicht ohne Interesse sind[4]); die Quellen, welchen sie entstammen, scheinen nicht genannt zu sein. Dort findet man die Beschreibung der Ellipse durch einen Punkt einer Strecke, welche mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines Winkels sich verschiebt, wie Proklus sie kannte (Bd. I, S. 466), die von den drei Brüdern beschriebene Gärtnerconstruction der Ellipse (Bd. I, S. 690) u. s. w. Andere Schriften Del Monte's sind durch Auszüge zu wenig bekannt, als dass wir uns ein Urtheil darüber bilden könnten, wie weit eine Geschichte der Mathematik bei denselben zu verweilen hat.

Und nun kehren wir zu Benedetti's Werk von 1585 zurück. In

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 443 (deutsch 496). [2]) Libri IV, 79—84. [3]) Lagrange, Analytische Mechanik (deutsch von Servus). Berlin 1887, S. 17 und 8. [4]) Vergl. Chasles, *Aperçu hist.* 98 (deutsch 95) mit *Les oeuvres mathématiques de Simon Stevin* (Leyden 1634), pag. 347—348.

dem mechanischen Abschnitte ist die Wirkungsweise des Keils und des Flaschenzuges, so wie auch die des Winkelhebels richtig verstanden. Wenn Benedetti sagt, dass die Grösse eines beliebigen Gewichtes oder die bewegende Kraft in Beziehung auf eine andere Grösse durch den Nutzen, *beneficio*, der Senkrechten erkannt werde, die vom Mittelpunkte der Wage auf die Linie der Neigung gezogen seien, so ist damit die Grundlage der gegenwärtigen Lehre von den Momenten ausgesprochen[1]). Benedetti hat ferner erkannt, dass ein auf gezwungener Bahn sich bewegender Körper, wenn er freigelassen werde, die Richtung der Berührungslinie einschlage[2]). In den Streitschriften, welche gegen Aristotelische Lehren gerichtet sind, wendet sich Benedetti unter Anderem der von Aristoteles geleugneten, ununterbrochen auf einer begrenzten Strecke fortdauernden Bewegung zu[3]). Aristoteles hatte nämlich in seiner Physik (VIII, 8 pag. 262a) darauf hingewiesen, dass der Körper am Ende der Strecke angelangt nothwendig anhalten müsse, bevor er den gleichen Weg zurückmache, dass also ein Augenblick der Ruhe die Bewegung unterbreche. Benedetti widerlegte die Behauptung dadurch, dass er die hin- und hergehende geradlinige Bewegung von einer in gleichbleibendem Sinne andauernden, also nie unterbrochenen kreisförmigen Bewegung abhängig machte, mithin bis zu einem gewissen Grade einer 1570 veröffentlichten von Ferrari gemachten Erfindung (S. 535) sich bediente (Figur 112). Der Punkt A, welcher den Kreisumfang ANU im Sinne des Zeigers einer Uhr durchläuft, ist in jeder seiner Lagen mit dem Punkte B geradlinig verbunden. NB und UB sind die Grenzlagen dieser Geraden, jede andere Lage schneidet die Strecke CD in irgend einem Punkte T, und während A einen ganzen Kreisumlauf vollzieht, bewegt sich T unterbrechungslos erst von C nach D, dann zurück von D nach C. Eine zweite gleichfalls geometrische Betrachtung Benedetti's wendet sich gegen die Aristotelische Behauptung, auf einer endlichen geraden Strecke sei eine unendliche Bewegung nicht denkbar. Die Gerade CR (Figur 113, S. 570) drehe sich im Sinne des Zeigers einer Uhr um C, so dass sie die Gerade BR in

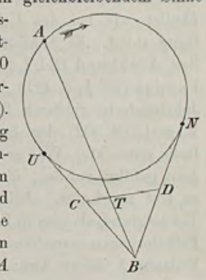

Fig. 112.

[1]) Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik (Berlin 1873) S. 17. [2]) Montucla I, 693—694. [3]) Lasswitz, Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton (Hamburg und Leipzig) II, 14—18.

einem von R sich weiter und weiter entfernenden Punkte A schneidet. Zugleich schneidet sie alsdann die RX, welche als Senkrechte die beiden Parallelen BR und CX verbindet, in einem Punkte I, und dieser Punkt I durchläuft die endliche Strecke RX, während A auf der Strecke BR einen unendlichen Weg zurücklegt, mithin vollzieht sich hier eine unendliche Bewegung auf RX.

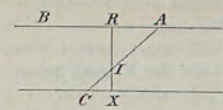

Fig. 113.

Es ist der Anfang einer geometrisch begründeten Mechanik, der sich in diesen Betrachtungen enthüllt. Die Mechanik hört allmälig auf, blosse Erfahrungssätze zu sammeln, oder, was noch schlimmer war, philosophisch abgeleitete Behauptungen in die Welt zu schleudern, unbekümmert darum, ob sie zur Erfahrung passen oder ihr widersprechen. Die Mechanik beginnt ein Kapitel der Mathematik zu werden.

Der Mechanik und der Geometrie gemeinschaftlich gehören Untersuchungen an, welche Maurolycus und Commandinus unabhängig von einander anstellten, und in deren Veröffentlichung Commandinus, ähnlich wie bei den Uebersetzungsarbeiten, seinem Vorgänger den Rang ablief. Es handelt sich um Schwerpunktsbestimmungen. Seit Archimed (Bd. I, S. 308—309) solche wiederholt vornahm, seit Pappus (Bd. I, S. 421) darauf zurückkam, war der Gegenstand lange Jahrhunderte hindurch fast unberührt geblieben, bis Lionardo da Vinci (S. 302) den Schwerpunkt einer Pyramide mit dreieckiger Basis entdeckte. War er durch das Studium Archimedischer Schriften dazu geführt worden, diese Aufgabe sich zu stellen? Wir möchten es fast annehmen. Jedenfalls traten Schwerpunktsaufgaben in den Vordergrund, als man in Folge des Erscheinens neuer mit reichhaltigen Erläuterungen versehener Ausgaben der griechischen Classiker die Bedeutung dieser Aufgaben zu würdigen lernte, und es ist nichts weniger als Zufall, dass die Herausgeber des Archimed und des Pappus zu den ersten Schriftstellern gehören, welche wieder an Schwerpunktsbestimmungen sich versuchten [1]). Maurolycus fand 1548 den Schwerpunkt der Pyramide, des Kegels, des Umdrehungsparaboloids, er verwerthete die Kenntniss desselben zur Raumbestimmung jener Körper ähnlich wie Pappus es gethan hatte. Gedruckt wurden allerdings alle diese Dinge erst 1685 in der Archimedausgabe des Maurolycus, nachdem die Wissenschaft in gewaltigen Schritten diese ersten Zielpunkte längst und weit hinter sich gelassen hatte, angekündigt waren

[1]) Libri III, 115—116.

sie in den *Opuscula mathematica* des Maurolycus von 1575. Commandinus dagegen gab seine fast gleichinhaltliche Schrift *De centro gravitatis solidorum* schon 1565 alsbald nach der Fertigstellung im Drucke heraus.

Eine Stelle der *Opuscula mathematica* des Maurolycus hat Beachtung gefunden [1]), in welcher man eine Art von geometrischer Dualität erkennen wollte. Man kann allenfalls diese Benennung gebrauchen, muss sich aber ja davor hüten, mehr aus diesem Namen herauslesen zu wollen, als Maurolycus bei der Sache dachte. Dieser sagt nämlich, der Würfel sei ein Würfel mit 6 Flächen und 8 Ecken, das Octaeder ein solcher mit 6 Ecken und 8 Flächen, sie entsprächen einander durch Correlation, *unde haec sibi invicem correlativa sunt.* Ebenso seien Ikosaeder und Dodekaeder correlative Körper, weil das Ikosaeder 20 Flächen und 12 Ecken, das Dodekaeder 20 Ecken und 12 Flächen besitze. Das Tetraeder mit 4 Flächen und 4 Ecken habe keinen correlativen Körper, es entspreche sich selbst, *ipsum enim met sibi respondet.*

Von den uns als Uebersetzer bekannt gewordenen Schriftstellern verdient auch Barozzi als Geometer genannt zu werden. Er hat 1586 einen Band veröffentlicht, welcher von den Asymptoten handelt [2]). Verdienstlich ist daran die umfassende Literaturkenntniss des Verfassers. Griechen (Apollonius, Pappus, Eutokius), neuere Schriftsteller (Orontius Finaeus, Werner, Cardano, Peletarius), jüdische Philosophen aus verschiedenen Jahrhunderten hat er gelesen, und er giebt sich die mitunter recht überflüssige Mühe, ihre philosophischen Zweifel zu erörtern. Dagegen hat er, so weit er in dieser ersteren Beziehung ausgreift, seinen eigentlichen Gegenstand zu eng gefasst. Nur die Asymptoten der Hyperbel sind betrachtet. Dass es auch andere krumme Linien mit geradlinigen Asymptoten gebe, wie z. B. die Conchoide (Bd. I, S. 335) ist mit keinem Worte angedeutet, und noch weniger ist natürlich von allgemeinen asymptotischen Eigenschaften die Rede.

68. Kapitel.

Fortsetzung der Geometrie und Mechanik. Cyclometrie und Trigonometrie.

Wir müssen noch einen Schriftsteller nennen, welcher auf den beiden hier in unserer Darstellung vereinigten Gebieten der Geo-

[1]) J. H. T. Müller in Grunert's Archiv der Mathematik und Physik XXXIV, 1—6. [2]) Kästner II, 94—98.

metrie und Mechanik sich grosse Verdienste erworben hat: Simon Stevin[1]).

Er ist 1548 in Brügge geboren, 1620 in Leiden oder im Haag gestorben. Er begann als Kaufmann in Antwerpen und setzte vermuthlich diese Beschäftigung auf Reisen in Polen, Dänemark, dem ganzen nördlichen Europa fort. Später stand Stevin in nahen Beziehungen zu Moritz von Oranien, der ebenso ausseramtlich auf seinen Rath hörte, als ihm amtliche Stellungen zuwies. Man weiss von einer Anstellung Stevin's als Vorstand des Waterstaet (Oberwasserbaumeister) und von einer solchen als Generalquartiermeister. Ein von Stevin zuerst ausgesprochener, dann von den Zeitgenossen viel bewunderter und weitergesponnener Gedanke ist der von dem „weisen Jahrhunderte“ [2]). Vor undenklichen Zeiten habe, behauptet er, das Menschengeschlecht ein allumfassendes Wissen besessen, von welchem mehr und mehr verloren ging, und welches erst allmälig wieder erworben werden müsse, damit dereinst ein zweites weises Jahrhundert erscheine. Stevin war Niederländer durch und durch und schrieb vorzugsweise in seiner niederdeutschen Muttersprache, welche er für diejenige erklärte, die vermöge ihres Reichthums an einsilbigen leicht zusammensetzbaren Stämmen sich vorzugsweise zur Weltsprache eigne[3]). Freilich fügte er sich der Thatsache, dass die von ihm erwünschte Allgemeinverständlichkeit des Niederdeutschen nicht entfernt vorhanden war, und übersetzte theils selbst seine Schriften nachmals ins Französische, theils liess er es zu, dass sie ins Lateinische übersetzt wurden. Zuerst scheinen 1584 Zinstafeln im Drucke erschienen zu sein, dann 1585 ein Band, welcher die Arithmetik, die vier ersten Bücher des Diophant, die praktische Arithmetik und eine Schrift mit dem Titel *La Disme* in sich schloss. Demselben Jahre 1585 gehören fünf Bücher geometrischer Aufgaben an. Im Jahre 1586 folgten einige Bücher mechanischen Inhaltes. Sehr mannigfaltig sind die *Hypomnemata mathematica*, welche Snellius ins Lateinische übersetzt hatte, und welche in dieser letzteren Sprache 1608 gedruckt wurden. Die Trigonometrie Stevin's fand 1628 einen Uebersetzer in die deutsche

[1]) Kästner III, 392—418. — Steichen, *Mémoire sur la vie et les travaux de Simon Stevin* (Bruxelles 1846). — Quetelet pag. 144—168. — Bierens de Haan, Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlande II, 183—229 und 440—445. — Allgem. deutsche Biographie. XXXVI, 158—160. Die Werke Stevin's wurden von Albert Girard 1634 in einem starken Foliobande im Drucke herausgegeben, den wir als Stevin citiren. Zwei Schriften (über Musik und über Mühlen) hat Bierens de Haan neu aufgefunden und 1887 l. c. pag. 231—360 zum Abdrucke gebracht. [2]) Stevin pag. 106 (Geographie, Definition VI). [3]) Stevin pag. 114 sqq.

Sprache in Daniel Schwenter[1]), der uns im 71. Kapitel bekannt werden wird. Noch späteren Datums sind Schriften Stevin's über die Befestigungskunst, welche unter den Fachmännern nicht minder berühmt sind, als die demselben Gegenstande gewidmeten Untersuchungen Dürer's (S. 468). Auch bei Stevin sind bahnbrechende Gedanken ausgesprochen, von welchen hier, wo wir mit einfacher Namensnennung uns begnügen müssen, der der Vertheidigung mittels Schleussenwerke erwähnt werden darf, weil er Stevin in seiner doppelten Eigenschaft als Wasser- und Festungsbaumeister kennzeichnet.

Die eigentlich mathematischen Schriften Stevin's nöthigen uns, ihm mehrfach unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden. Für's Erste haben wir es mit seinen geometrischen und mechanischen Werken zu thun, wobei aber eine Schwierigkeit auftritt. Die weitaus verbreiteste Ausgabe von Stevin's Werken ist die französische Uebersetzung durch Albert Girard, welche nach Stevin's Tode vorbereitet erst 1634 nach Girard's Tode herauskam. Bei der an Unauffindbarkeit grenzenden Seltenheit der früheren Drucke ist es uns unmöglich zu bestimmen, wie weit in dieser Girard'schen Gesammtausgabe, abgesehen von Zusätzen des Herausgebers, welche durch Beisetzung von dessen Namen als solche gekennzeichnet sind, noch Veränderungen eintraten. Ob z. B. die fünf Bücher geometrischer Aufgaben von 1585 in den sechs Büchern *De la practique de Géométrie* unserer Ausgabe enthalten sind, lässt sich nicht entnehmen. Unwahrscheinlich ist es nicht, aber denkbar wäre auch, dass jene erste geometrische Schrift für uns gänzlich verloren gegangen wäre. Die letztere Möglichkeit beruht darauf, dass in der lateinischen Ausgabe von 1605—1608, welche in manchen Dingen von der französischen Ausgabe sich unterscheiden soll, und welche namentlich eine Abtheilung *De miscellaneis* besitzt, welche dort ganz fehlt[2]), auch ein Verzeichniss von Schriften sich findet, welche hätten abgedruckt werden sollen, aber vom Herausgeber noch nicht druckfertig gestellt werden konnten und desshalb vorläufig zurückgelegt wurden[3]). Allerdings sind die *Problemata geometrica* weder in den *Miscellaneis* noch in dem Verzeichnisse fehlender Stücke enthalten, und damit ist für die erstere Möglichkeit eine Stütze gewonnen, welche durch einen Ausspruch des Adriaen van Roomen von 1593 wesentlich verstärkt wird. Dieser berichtet nämlich[4]) von einem umfassenden geometrischen Werke Stevin's, an welchem derselbe arbeite, nachdem er 1583(?) eine Probe davon in den fünf Büchern Aufgaben gegeben habe.

[1]) Wertheim brieflich. [2]) Kästner III, 407. [3]) Ebenda III, 410—411. [4]) Quetelet pag. 167, Note 1.

Die französische Ausgabe besteht aus sechs Theilen, von welchen der I. eine besondere Seitenzählung, S. 1—222, besitzt, während die Theile II bis VI gemeinschaftlich einer neuen Seitenbezeichnung, S. 1—678, unterworfen sind. Das Ganze bildet mithin einen sehr starken Folioband von 900 Seiten. Die durch zweifache Seitenzählung angedeutete wesentliche Zweitheilung des ganzen Bandes ist darauf zurückzuführen, dass in der vor S. 1 des I. Theils sich befindenden Inhaltsübersicht die Theile II bis V als *Memoires mathematiques du Prince Maurice de Nassau* (Accente sind im Drucke nur äusserst selten angegeben) bezeichnet sind, denen dann mit den einführenden Worten *et apres les susdites Memoires* der VI. Theil folgt. Natürlich ist nicht gemeint, die Theile II bis V seien von Moritz von Nassau verfasst. Dem widerspricht schon die Thasache, dass in ihnen die mechanischen Schriften inbegriffen sind, welche Stevin 1586 unter eigenem Namen veröffentlichte. Die Meinung ist vielmehr die, es seien hier Arbeiten vereinigt, welche für jenen Fürsten bestimmt waren, und auf deren Niederschrift er einen gewissen Einfluss ausübte, welcher da und dort durch die Bemerkung, solches rühre vom Prinzen her, hervorgehoben ist. Wie weit diese Bemerkungen selbst auf der Wahrheitsliebe Stevin's, wie weit sie auf seiner höfischen Gewandtheit beruhen, das zu ermitteln ist unmöglich. Der I. Theil enthält Arithmetisches und Algebraisches, der II. Theil mathematische Kosmographie, der III. Theil die oben erwähnten sechs Bücher praktischer Geometrie, der IV. Theil Mechanisches, der V. Theil Optisches, der VI. Theil auf das Kriegswesen bezügliche Schriften.

Dem III. Theile, zu welchem wir uns näher wenden, ein ganz allgemeines Lob zu spenden, ist nicht viel Veranlassung. Die praktische Geometrie Stevin's ist unzweifelhaft ein durch seine Anlage eigenthümliches Werk, aber darum noch kein weit hervorragendes. Die Eigenthümlichkeit besteht darin, dass Stevin bestrebt ist, der Geometrie eine arithmetische Anordnung zu geben. In der Arithmetik lernt man zuerst die Zahl aussprechen, dann führt man mit der Zahl die vier einfachen Rechnungsverfahren des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens, Dividirens aus, dann kommen die Proportionsrechnungen. Dem entsprechend lehrt die Geometrie zuerst die einzelnen Raumgebilde kennen, welche später den Rechnungsverfahren unterworfen, zuletzt in Verhältniss zu einander gebracht werden. In das Bereich des Kennenlernens einzelner Raumgebilde zieht aber Stevin Aufgaben, welche man nicht leicht dort suchen wird. Wir nennen deren zwei auf die Ellipse bezügliche, deren Auflösungen Stevin selbst anzugehören scheinen: die punktweise Zeichnung einer Ellipse, deren beide Axen gegeben sind, und die Auffindung der kleinen Axe,

wenn die grosse Axe und ein Ellipsenbogen gegeben sind[1]) (Figur 114). Die halbe kleine Axe wird als Verlängerung der grossen Axe gezeichnet, ausserdem eine ihr gleiche Senkrechte in dem Punkte errichtet, wo beide Axen aneinanderstossen und aus dem gleichen Punkte als Mittelpunkt mit der halben kleinen Axe als Halbmesser ein Kreisquadrant beschrieben. Den wagrechten Halbmesser des Kreisquadranten und ebenso die halbe grosse Axe theilt man, jede dieser Strecken für sich, in eine gleiche Anzahl, etwa vier gleiche Theile und nennt diejenigen Theilpunkte einander entsprechend, welche von dem mehrgenannten Aneinanderstossungspunkte der grossen und halben kleinen Axe nach rechts und links gezählt die gleichvielten sind. In allen Theilpunkten werden Senkrechte errichtet, auf den Theilpunkten der halben kleinen Axe bis zum Durchschnitte mit dem beschriebenen Kreisquadranten. Die Senkrechten in den Theilpunkten der halben grossen Axen macht man den nunmehr schon abgegrenzten Längen der Senkrechten in den entsprechenden Theilpunkten gleich, so sind dadurch Punkte der Ellipse gegeben. Für die zweite Aufgabe beruft sich Stevin auf einen Satz, welchen Guido Ubaldus, also offenbar Guidobaldo del Monte, bewiesen habe, und der dahin zielt, dass wenn von einem Punkte G der kleinen Axe (Figur 115) nach einem Punkte I der Ellipse die GI der halben grossen Axe gleich gezeichnet wird, das Stück HI dieser Geraden der halben kleinen Axe gleich sein muss und umgekehrt[2]). Kennt man also die grosse Axe, so zieht man in deren Mitte senkrecht die Richtung der kleinen Axe, schlägt von einem Punkte I des gegebenen Ellipsenbogens mit der halben grossen Axe einen Kreisbogen, der die Richtung der kleinen Axe in G schneidet und misst auf IG das Stück IH bis zum Durchschnitte mit der grossen Axe, so ist dadurch die halbe kleine Axe bestimmt. Bei der Definition der Körper sind Körpernetze gezeichnet[3]), wie Dürer sie auch hergestellt hat (S. 466). Für das Paralleltrapez ist der Name *hace* (Axt)

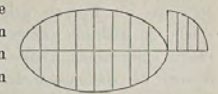

Fig. 114.

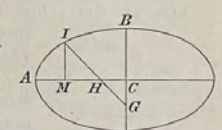

Fig. 115.

[1]) Stevin II, 348—349. Unter I, beziehungsweise II, verstehen wir die beiden Paginirungen, von welchen im Texte die Rede war. [2]) Die Wahrheit dieses Satzes beweist sich leicht wie folgt: $IH : HM = GH : HC$, also
$$IH(CM - MH) = GH \cdot MH,\quad IH \cdot CM = IG \cdot MH,\quad IG^2 = \left(\frac{IH \cdot CM}{MH}\right)^2 = \frac{b^2 x^2}{b^2 - y^2} = a^2.$$
[3]) Stevin II, 359.

statt des gebräuchlicheren *mensa* (Tisch) in Vorschlag gebracht[1]). Beim Addiren von Linien, welches ebenso wie das von Flächen und auch das von Körpern gelehrt wird, ist eines der vorgeführten Beispiele die Addition zweier Kreisperipherien[2]), welche durch die Peripherie eines neuen Kreises dargestellt werde, dessen Halbmesser die Summe der Halbmesser der beiden gegebenen Kreise sei. Unter dem Begriffe des Theilens von Flächen behandelt Stevin die Aufgabe, die Zähne eines kleinen Rades einzuschneiden[3]). Man befestigt das künftige Rädchen in dem Mittelpunkte einer sehr viel grösseren kreisrunden Platte, deren Umfang man in die vorgeschriebene Anzahl von Theilen theilt. Dann zieht man Halbmesser nach allen Theilpunkten, wodurch die kleinere Scheibe mit getheilt wird. Fehler seien auch bei der Theilung des grossen Kreises unvermeidlich, aber verkleinert werden sie unmerklich, *la faute se trouve du tout insensible en la petite plaque*. Auch Figuren mit einspringenden Winkeln werden der Theilung unterworfen[4]). Dabei ist die Bemerkung gemacht, welche als Definition solcher Figuren gelten kann, man müsse darauf achten, dass eine Gerade, welche dieselbe in zwei Theile zerlege, wirklich nicht mehr als zwei Theile hervorbringe.

Ungleich wichtiger als Stevin's geometrische Leistungen sind seine Verdienste innerhalb der Mechanik, welche wir hier im Verein mit jenen behandeln. Stevin war es, der das Gesetz des Gleichgewichtes auf der schiefen Ebene entdeckte (Figur 116). Das Dreieck ACB stehe senkrecht auf einer Ebene, welche die Grundlinie AC unterstützt[5]). Die Seite BC sei halb so gross als die BA. Man legt eine Kette von in gleichen Entfernungen von einander aufgereihten gleichen Kugeln um das Dreieck, so dass zwei Kugeln längs BC, vier längs BA hängen, fünf nach unten einen Zug ausüben.

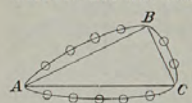

Fig. 116.

Das ganze System ist nun offenbar im Gleichgewichte, weil sonst in einem Drehungssinne oder in dem entgegengesetzten eine niemals aufhörende Bewegung eintreten müsste, was widersinnig ist, *et ainsi ce mouvement n'aurait aucune fin, ce qui est absurde*. Die fünf unten hängenden Kugeln halten sich aber bei dem gleichmässigen Zuge den sie ausüben, gegenseitig im Gleichgewichte und können daher entfernt werden, dann bleibt noch immer Gleichgewicht zwischen den vier Kugeln auf AB und den zwei Kugeln auf BC. Die vier Kugeln können dabei in eine und ebenso die zwei in eine vereinigt werden,

[1]) Stevin II, 373. [2]) Ebenda II, 389. [3]) Ebenda II, 403. [4]) Ebenda II, 405 und 411. [5]) Ebenda II, 448.

wenn nur ihre Gewichte den Geraden AB, BC proportional bleiben. Weiter wird alsdann die BC senkrecht gedacht und durch ein Seil um eine Rolle bei B, an welchem ein Gewicht hängt, ersetzt, so wird in dieser Form das Gesetz des Gleichgewichtes der schiefen Ebene vollends klar[1]). Aber Stevin geht noch einen grossen Schritt weiter: er erkennt das Gleichgewicht zwischen drei Kräften, welche den Seiten eines Dreiecks parallel und proportional sind[2]), er führt damit zugleich in die Mechanik die Uebung ein, Kräfte nach Richtung und Grösse durch gerade Linien zu versinnlichen, wodurch die Mechanik vollends eine geometrische Wissenschaft wird.

Noch hervorragender steht Stevin in der Geschichte der Hydrostatik da, wo er durch das sogenannte hydrostatische Paradoxon[3]) den ersten gewaltigen Fortschritt seit Archimed und über das von Jenem Geleistete hinaus vollbrachte. Mit jenem Namen hat man den Satz belegt, dass jede wie immer geformte Flüssigkeitssäule auf ihre Grundlage einen dem Producte der Höhe in die Basis der Säule proportionalen Druck ausübe. Stevin's Beweis ist folgender. Zuerst zeigt er, dass ein fester Körper, welcher einer Flüssigkeit *parigrave* ist — gleiche Dichtigkeit mit ihr hat — an jedem Orte der Flüssigkeit, wo er nur eingetaucht wird, in Ruhe verbleibt. Ein gerader Flüssigkeitscylinder drückt ferner seine Grundlage mit dem ganzen Gewichte, welches dem Producte aus Höhe in Basis proportional ist. Eine Veränderung kann an dieser Wahrheit nicht stattfinden, wenn nach dem Vorhergehenden ein parigraver Körper beliebiger Form eingetaucht wird, und ebensowenig, wenn man sich diesen Körper am Rande des Gefässes befestigt denkt, so dass er mit dem Gefässe eins wird, und nur die beliebig geformte Flüssigkeitssäule übrig bleibt. Der Seitendruck der Flüssigkeiten wird demnächst untersucht und dabei eine Methode angewandt, welche, wenn auch Archimed offenbar nachgebildet, doch von hervorragendster Bedeutung ist, insofern sie zum ersten Male uns wieder begegnet[4]). Die gedrückte Seitenwand wird in kleine Flächentheilchen zerlegt, und da zeigt sich, dass jedes Flächentheilchen einem Drucke ausgesetzt ist, welcher zwischen zwei Grenzen liegt, d. h. grösser ist als ein gewisser kleinster Druck, kleiner als ein anderer grösster Druck, dass ferner jene als Grenzen auftretenden Druckgrössen wie die Gewichte ein- und umschriebener Körper sich verhalten. Dann fährt Stevin aber fort: *Que si on divisait le fond ACDE en plus de 4 parties egales, soit en 8; il appert que les corps inscrits et circonscrits ne*

[1]) Stevin II, 449 Corollaire IV. [2]) Ebenda II, 449 Corollaire VI. [3]) Ebenda II, 488 Corollaire II. [4]) Ebenda II, 488 sqq. Théorème IX.

differoyent que de la moitié de la difference precedente; et est manifeste qu'on pourroit partir le fond en tant de parties egales que la difference des corps inscrits et circonscrits à la demi-colomne, differeroyent moins qu'aucun corps donné, si petit puisse-il estre. Es ist nicht zu verkennen, dass hier ein Grenzübergang vorgenommen ist auf Grundlage der Zerlegung eines Flächenstückes in mehr und mehr, kleinere und kleinere Flächentheilchen, und bei der grossen Wichtigkeit der späteren Entwickelung grade dieser Betrachtungsweise erscheint es wünschenswerth hervorzuheben, dass diese Untersuchungen Stevin's zuerst 1608 in der lateinischen Ausgabe der *Hypomnemata mathematica* in deren dritten Bande gedruckt wurden.

Die Schwimmfähigkeit beladener Schiffe untersuchend kam Stevin zu den Sätzen[1]), dass der Schwerpunkt des Schiffes tiefer als der Schwerpunkt des verdrängten Wassers sich befinden müsse, und dass ein Umschlagen des Schiffes um so leichter zu befürchten stehe, je höher sein Schwerpunkt liege. Wenn auch nicht deutlich ausgesprochen, lag darin die Unterscheidung des labilen von dem stabilen Gleichgewichte wenigstens angedeutet.

Bei seinen Zeitgenossen war Stevin viel bewundert wegen der Erfindung eines mit Segeln versehenen Wagens, der um das Jahr 1600 auf dem Strande zwischen Scheweningen und Petten seine Probefahrt machte. Der Wagen, dessen kleineres Modell man 1802 in Scheweningen noch aufbewahrte, war mit 28 Personen besetzt. Prinz Moritz selbst lenkte, und die alleinige Kraft des Windes trieb das Fuhrwerk 14 Wegstunden weit mit solcher Geschwindigkeit, dass kein Pferd mitkommen konnte[2]). Soviel zunächst über Stevin.

Den geometrischen und mechanischen Betrachtungen gleichmässig verwandt ist die Herstellung gewisser Vorrichtungen, welche in das Ende des XVI. Jahrhunderts fällt.

Commandinus soll einen doppelten Zirkel mit beweglichem Scharnier und veränderlichen Zirkelstangen erfunden haben[3]), welcher dazu diente, eine gegebene Strecke in eine Anzahl von gleichen Theilen zu theilen.

Barozzi hat einen Kegelschnittzirkel eigener Erfindung beschrieben[4]). Ob freilich die Erfindung eine ganz selbständige war, oder ob Barozzi auf irgend eine Weise Kenntniss von arabischen Vorarbeiten (Bd. I, S. 707) erhalten hatte, müssen wir dahingestellt sein lassen. Jedenfalls ist Barozzi's Vorrichtung denen der Araber sehr

[1]) Stevin II, 512—513. [2]) Quetelet pag. 155—156. [3]) Libri III, 121. [4]) Kästner II, 98. — A. von Braunmühl, Notiz über die ersten Kegelschnittzirkel. Zeitschr. Math. Phys. XXXV, Histor.-literar. Abthlg. S. 161—165.

ähnlich. Die Beschreibung findet sich in dem Buche über Asymptoten und kennzeichnet die Vorrichtung als eine solche, welche den Kegelschnitt als Durchschnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel entstehen lässt. Die eine Zirkelstange enthält nämlich ein Röhrchen, in welchem ein Stift derartig verschiebbar ist, dass er, während das Röhrchen einen Kegelmantel beschreibt, fortwährend mit der Zeichnungsebene in Berührung bleibt und auf ihr, je nach der Stellung des Zirkels, diesen oder jenen Kegelschnitt hervorbringt. Nach seinem Instrumente hat dann Barozzi noch ein zweites beschrieben, welches ungefähr auf dem gleichen Grundgedanken beruht, und welches von einem anderen Italiener Giulio Thiene[1]) erfunden worden ist.

Ein Professor Hommel (1518—1562) in Leipzig bediente sich[2]) des sogenannten Transversalmaassstabes (Figur 117), bei welchem durch Transversallinien, die von dem oberen Rande des Maassstabes gegen den unteren geneigt gezeichnet sind, die Möglichkeit gegeben ist, auch solche Längen abzumessen, welche in Gestalt von Bruchtheilen der kleinsten in Anwendung kommenden Maasseinheit sich ausdrücken. Dass er in Levi ben Gerson (S. 289) einen Vorgänger hatte, war ihm vermuthlich unbekannt.

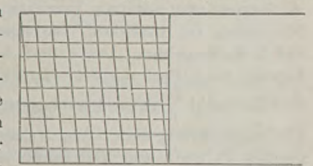

Fig. 117.

Eine ähnliche Aufgabe hatte, wie wir uns erinnern, Nonius sich gestellt (S. 389), eine ähnliche löste Clavius[3]). Allerdings fällt die Veröffentlichung der von Clavius ersonnenen Vorrichtung schon in den Anfang des XVII. Jahrhunderts, aber unsere Leser sind daran gewöhnt, dass wir die Zeitgrenzen nicht genau einhalten können. Clavius verlangt, man solle einen Maassstab in 100 oder, wenn seine Länge es gestattet, in 1000 gleiche Theile theilen. Auf einem besonderen Stäbchen werde die Länge von 11 Theilen aufgetragen und selbst in 10 gleiche Theile getheilt. Jedes Theilchen des Hilfsmaassstabes beträgt also 11 Tausendstel des ursprünglich 100theiligen, beziehungsweise 11 Zehntausendstel des ursprünglich 1000theiligen Maassstabes, und durch Verschiebung längs dem ursprünglichen Maassstabe kann eine Messung auf $\frac{1}{10}$ der dortigen kleinsten Längeneinheit

[1]) Ueber ihn vergl. Lampertico, *Di Giulio Thiene uome d'arme e di scienza del Secolo XVI* in den Atti des R. Instituto Veneto für 1891. [2]) Kästner II, 355. [3]) Breusing, Nonius oder Vernier? in den Astronomischen Nachrichten von 1880 Nr. 2289 (Band XCVI, S. 129—134).

genau vorgenommen werden. Das Neue und Wichtige bei dieser Einrichtung ist die **Auftragung der Hilfstheilung auf ein frei bewegliches Stäbchen**, welche von da an, wenn auch nicht sofort, Regel und stete Uebung geworden ist. Clavius veröffentlichte seine Erfindung 1606 in seiner *Geometria practica*, und in einer zweiten Schrift, *Astrolabium*, hat er sie auch auf Winkelablesungen ausgedehnt. Ein in einzelne Grade abgetheilter Kreisquadrant dient zur Ablesung von einzelnen Winkelminuten, sofern ein Hilfsbogen von 61^0 in 60 gleiche Theile getheilt zum Anlegen vorbereitet ist. Die Geometria practica verdient vollauf das Lob, welches in den Worten ausgesprochen ist[1]), sie sei „das Muster eines Lehrbegriffes der praktischen Geometrie, vollkommen für ihre Zeit". Das Werk ist in acht Bücher getheilt. Das 1. Buch enthält die Beschreibung von zu Längen- und Winkelmessungen nöthigen Vorrichtungen und die trigonometrische Berechnung von Dreiecken. Die eigentliche Feldmessung ist im 2. und 3. Buche gelehrt. Das 4. Buch bringt Inhaltsformeln für ebene Figuren, das 5. Buch solche für Raumkörper, wobei die archimedische Verhältnisszahl $\frac{22}{7}$ als genügend benutzt wird. Das 6. Buch löst allerlei Theilungsaufgaben, sowie solche, welche auf Vergrösserung von Raumgebilden in gegebenem Verhältnisse sich beziehen. Die Würfelverdoppelung bildet einen besonderen Fall der letzteren Aufgabe, und Clavius bedient sich bei ihr der von griechischen Schriftstellern zu gleichem Zwecke benutzten krummen Linien. Im Anschlusse an die Würfelverdoppelung erscheint die Lehre von den Wurzelausziehungen, um die vorher geometrisch gelösten Aufgaben auch rechnerisch bewältigen zu können. Das 7. Buch bezeichnet sich als das von den isoperimetrischen Figuren und Körpern nebst einem Anhange von der Quadratrix. In dem ziemlich umfangreichen 8. Buche sind sehr verschiedene geometrische Aufgaben vereinigt. Dort sind z. B. auch einige von den Näherungsconstructionen besprochen, welche Dürer gelehrt hat (S. 462), und welche unter Handwerkern weit verbreitet waren. Trigonometrische Rechnung führt im 29. Satze dieses Buches zur Auffindung der Winkel in dem mit fester Zirkelöffnung hergestellten gleichseitigen Fünfecke, und damit zum Nachweise, dass von genauer Gleichwinkligkeit hier nicht die Rede sein könne. Im 30. Satze wird die Auffindung der Siebenecksseite als halbe Dreiecksseite gelehrt, aber in einer anderen Ausdrucksweise und unter Berufung auf Carolus Marianus Cremonensis, eine Persönlichkeit, die damals bekannter gewesen sein muss, als sie gegenwärtig

[1]) Kästner III, 287.

ist. Seine Vorschrift verlangt[1]), dass man (Fig. 118) den Halbmesser DA des Kreises, in welchen das regelmässige Siebeneck eingezeichnet werden soll, um $AE = \frac{1}{4} DA$ verlängere. Dann soll man um E mit $EB = DA$ als Halbmesser einen neuen Kreis beschreiben, welcher den ersten in B schneide, so sei AB die Siebenecksseite. Die Rechnung liefert $DE = \frac{5r}{4}$, wenn $BE = BD = r$. Ist $BG \perp DE$, so folgt weiter $DG = GE = \frac{5r}{8}$ und

$$BG^2 = BE^2 - GE^2 = r^2 - \frac{25r^2}{64} = \frac{39r^2}{64}.$$

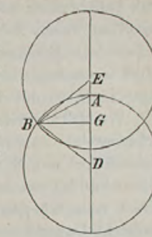

Fig. 118.

Ferner ist

$$AB^2 = BG^2 + AG^2 = BG^2 + (DA - DG)^2 = \frac{39r^2}{64} + \left(r - \frac{5r}{8}\right)^2 = \frac{3r^2}{4},$$

also $AB = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, und das ist die Hälfte der Seite des regelmässigen Sehnendreiecks. Den Schluss des ganzen Werkes bildet eine Tafel der Quadrate und Würfel aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000 und eine Anweisung, wie man bei Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln diese Tafel mit Vortheil anwenden könne. So weit die Tafel Kubikzahlen enthielt, war sie die von grösster Ausdehnung, welche noch veröffentlicht worden war und blieb es auch für lange Zeit. Die Tafel der Quadratzahlen aber war schon vor ihrem Erscheinen durch die *Tabula tetragonica* von 1592 des italienischen Astronomen Magini (1555—1615) weit überboten[2]). Auf 24 Blättern enthält diese die Quadrate der Zahlen von 1 bis 100100.

Hätten wir streng die Zeitfolge eingehalten, so wäre vor Clavius ein anderer ganz tüchtiger Geometer zu nennen gewesen. Simon Jacob[3]) ist in Coburg geboren und 1564 in Frankfurt am Main gestorben. Er verfasste ein Rechenbuch nebst Geometrie als zweite Bearbeitung eines bloss der Rechenkunst gewidmeten Werkes und schrieb 1552 die Vorrede dazu. Der Druck begann 1557, wurde aber unterbrochen. Als der Verfasser dann 1564 starb, besorgte sein Bruder Pancraz Jacob 1565 die neue Ausgabe, welche selbst wiederholt gedruckt wurde. In dem dritten, geometrischen Theile ist im

[1]) Auf das Verfahren des Cremonesers hat S. Günther, Zeitschr. Math. Phys. XX, Hist.-literar. Abthlg. S. 116 aufmerksam gemacht, dann H. A. J. Pressland, *On the history and degree of certain geometrical approximations* in den Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Vol. X. [2]) J. W. L. Glaisher, *Report of the Committee of mathematical tables*. London 1873, pag. 26. [3]) Allgem. deutsche Biographie XIII, 559.

59. Satze angegeben, die Seiten 25, 33, 60, 16 in der genannten Reihenfolge aneinander gefügt bildeten ein Sehnenviereck im Kreise vom Durchmesser 65, die beiden Diagonalen seien 52 und 39. Wie Jacob zu diesen Zahlen gekommen ist, hat er mit keinem Worte angedeutet. Erwähnenswerth mag aber auch erscheinen, dass das Wort *corauscus*, eine andere Form für *coraustus*, erklärt wird als „eine Linie, so mit dem Basi Parallel oder gleichweitig ist“.

Wenzel Jamitzer[1]) (1508—1586), dessen Name auch in den Schreibweisen Jamnitzer und Gamiczer vorkommt, ein geschickter Goldschmied zur Nürnberg, hat 1568 Abbildungen zahlreicher geometrischer Körper der Oeffentlichkeit übergeben. Hat die Sammlung gleich mehr künstlerisches als geometrisches Interesse, so darf doch vielleicht bemerkt werden, dass in ihr auch Zeichnungen von Sternpolyedern vorkommen, den ersten, welche nachgewiesen worden sind.

Eine ganz andere Persönlichkeit als diejenigen, welchen wir die letzten Seiten gewidmet haben, war Franciscus Vieta[2]), der grösste französische Mathematiker des ganzen XVI. Jahrhunderts. François Viète Seigneur de la Bigotière ist 1540 in Fontenay-le-Comte in Poitou geboren, 1603 in Paris gestorben. Er gehörte einer katholischen Familie an und starb als Katholik. Da er unzweifelhaft eine Reihe von Jahren hindurch zu den Hugenotten gehört hat, so muss eine zweimalige Glaubensänderung bei ihm angenommen werden. Vieta widmete sich der Rechtsgelehrsamkeit und begann nach in Poitiers vollendetem Studium seine Laufbahn als Rechtsanwalt in seiner Vaterstadt, eine Stellung, welche er jedoch 1567 freiwillig wieder aufgab. Als er später Parlamentsrath in Rennes geworden war, vertrieben ihn die aus Religionszwistigkeiten entstandenen Unruhen, und Herzog von Rohan, der bekannte Führer der Hugenotten, nahm Vieta unter seinen persönlichen Schutz. Auf seine Empfehlung hin wurde Vieta 1589 Maître des requêtes, Berichterstatter über Bittschriften. Nachdem Heinrich von Navarra als König Heinrich IV. den Thron bestiegen hatte, wurde Vieta 1589 Parlamentsrath in Tours, später Mitglied des königlichen geheimen Raths. Vieta's Tod wird von dem Herausgeber seines Nachlasses als ein plötzlicher bezeichnet, *praecipiti et immaturo autoris fato*[3]), Näheres ist aber nicht

[1]) Doppelmayr S. 160 und 205. — Kästner II, 19—24. — Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften S. 35—36. — Allgemeine Deutsche Biographie XIII, 691—692. Artikel von R. Bergau. [2]) Kästner III, 37—38 und 162—175. — *Nouvelle Biographie universelle* (Paris 1866) XLVI, 135—137. Die 1646 veranstaltete Ausgabe von Vieta's Werken citiren wir als Vieta mit nachfolgender Seitenzahl. [3]) Vieta pag. 83.

bekannt. Von Vieta's amtlicher Thätigkeit wird nur eine verdienstliche Leistung berichtet: in Tours sei es ihm gelungen, den Schlüssel zu einer aus mehr als 500 Zeichen bestehenden Geheimschrift zu ermitteln, deren die mit Frankreich auf feindlichem Fusse stehende spanische Regierung sich bediente, wodurch alle aufgefangenen Depeschen plötzlich leicht verständlich wurden. Schriftsteller war Vieta nur auf mathematischem Gebiete und zwar in äusserst fruchtbarer Weise. Er liess seit 1571, besonders aber seit 1591, zahlreiche Abhandlungen und Bücher auf eigene Kosten drucken und verschickte sie an Fachgenossen aller Länder. Dabei kamen ihm seine günstigen Vermögensverhältnisse zu statten. In dieser Beziehung wird erzählt, es hätten sich 20000 Thaler in klingender Münze neben seinem Sterbebette vorgefunden. Für den guten Gebrauch, welchen er von seinen Geldmitteln zu machen wusste, und nicht minder für die Milde seines Charakters zeugt die Thatsache, dass er zwischen 1600 und 1601 einen wissenschaftlichen Gegner, Adriaen van Roomen, einen Monat lang als Gast bei sich beherbergte und ihm alsdann die Rückreise bezahlte[1]). Vieta's Schriften wurden gemäss der erwähnten Art ihrer Verbreitung rasch bekannt, gingen aber auch rasch verloren, und so war bereits 1646 Franciscus van Schooten, der eine Gesammtausgabe der Vieta'schen Abhandlungen veranstaltete, nicht mehr im Stande, sie sämmtlich beizubringen. Wir werden sehen, dass muthmasslich wenigstens einige wesentliche Verluste zu beklagen sind. Dazu gehört bereits der *Canon mathematicus* von 1579. Es war ein Tabellenwerk[2]), welches die Sinus, Tangenten und Secanten aufeinanderfolgender Winkel, noch verschiedene andere Tafeln und eine ebene und sphärische Trigonometrie enthielt. Zahllose Druckfehler entstellten das Werk, und deshalb zog Vieta alle Exemplare, deren er habhaft werden konnte, zurück und vernichtete sie. In Folge dessen gehört Vieta's Canon von 1579 zu den grössten Seltenheiten[3]), und noch weniger bekannt ist ein Abdruck, welcher 1609, also nach Vieta's Tode, veranstaltet wurde[4]). In dem Canon findet sich eine entschiedene Absage an die Sexagesimalbrüche zu Gunsten der Decimalbrüche. Letztere sind meistens durch kleinere Typen von den ganzen Zahlen unterschieden, zuletzt ausser durch kleinere Typen

[1]) So berichtet der französische Geschichtsschreiber De Thou im 129. Buche seiner Geschichte, aus welchem ein Auszug der Gesammtausgabe von Vieta's Werken vorgedruckt ist. [2]) Montucla I, 610—611. [3]) Ein Exemplar findet sich in der Landesbibliothek zu Kassel. Vergl. Hunrath in Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, Histor.-literar. Abthl. S. 25. [4]) Ein Exemplar findet sich in der königlichen Bibliothek zu Stockholm. Vergl. G. Eneström in der Biblioth. mathem. 1892 S. 92.

noch durch einen sie von den ganzen Zahlen trennenden senkrechten Strich, den Vorgänger des später eingeführten Pünktchens[1]). Die Gesammtausgabe von 1646 enthält die in ihr gesammelten Schriften nicht in der Zeitfolge ihres Erscheinens geordnet, auch nicht innerhalb der sachlich zusammengehörenden Abhandlungen ist diese Zeitfolge genau eingehalten, und ebensowenig unterstützen Datirungen die Uebersicht; man ist vielmehr genöthigt, aus anderen bibliographischen Schriften die Angaben zu entnehmen, wann die einzelnen Stücke erstmalig gedruckt worden sind[2]).

Zunächst haben wir es mit Vieta als Geometer zu thun und haben desshalb mit zwei Abhandlungen zu beginnen, welche 1593 zuerst im Drucke erschienen: *Effectionum geometricarum canonica recensio*[3]) und *Supplementum Geometriae*[4]). Die erstere Schrift ist das, was man heute algebraische Geometrie zu nennen pflegt, d. h. eine Zusammenstellung derjenigen mit Zirkel und Lineal ausführbaren Constructionen, welche dazu dienen, gewisse Rechnungsoperationen, z. B. Auffindung des geometrischen Mittels zwischen zwei gegebenen Werthen, Auffindung des vierten Gliedes einer Proportion, von welcher drei Glieder bekannt sind u. s. w., durch Zeichnung auszuführen. Das war freilich keineswegs neu. Fast jede der in den *Effectiones geometricae* beschriebenen Constructionen ist bereits in den Euklidischen Elementen gelehrt oder stützt sich unmittelbar auf dort Gelehrtes, und wenn auf ganz neuerdings Veröffentlichtes Rücksicht genommen werden will, so hat Benedetti in seinen *Speculationes diversae* von 1585 (S. 567) Aehnliches behandelt. Aber neu war die Zusammenstellung dieser Aufgaben, ihre Vereinigung in der bestimmten Absicht, rechnerisch erhaltene Ausdrücke geometrisch zu ermitteln, und darin lag ein bemerkenswerther Fortschritt. Zirkel und Lineal genügen aber entfernt nicht, alle Aufgaben zu lösen. Sie reichen schon bei solchen nicht aus, die wir kubische Aufgaben nennen, weil sie in Gleichungsgestalt vorgelegt zum dritten Grade sich erheben. Dazu kann man sich dann verschiedener Curven bedienen, z. B. der nikomedischen Conchoide, welche die Aufgabe löst, von einem gegebenen Punkte aus eine Gerade so zu ziehen, dass deren zwischen zwei gegebenen Linien liegendes Stück eine gegebene Länge besitze; auch Archimed zählte die Ausführung dieses Verlangens zu den erfüllbaren Forderungen[5]). Mit Constructionen solcher

[1]) Hunrath l. c. S. 26. [2]) Wesentliche Dienste leistet z. B. J. G. Th. Graesse, *Trésor de livres rares et précieux ou Nouveau Dictionnaire Bibliographique.* [3]) Vieta pag. 229—239. [4]) Ebenda pag. 240—257. [5]) Ebenda pag. 240: *Et opus ille videtur absolvisse Nicomedes sua conchoide . . . . Postulatum autem omnino admisit Archimedes.*

Art hat es das *Supplementum Geometriae* zu thun. Im 9. Satze desselben ist z. B. die Dreitheilung eines Winkels in der Weise vollzogen, dass man (Figur 119) den zu theilenden Winkel DBE als Centriwinkel eines Kreises zeichnet, den einen Schenkel DB bis zum zweiten Durchschnitte C mit dem Kreise und darüber hinaus verlängert und alsdann vom Endpunkte E des anderen Schenkels nach dem verlängerten ersten Schenkel DB eine Gerade EF zieht, deren jenseits des Kreises gelegenes Stück GF dem Kreishalbmesser BE gleich sei. Der Winkel bei F ist alsdann ein Drittel des zu theilenden Winkels. Vieta's Construction ist nicht die des Nikomedes (Bd. I, S. 337), sondern diejenige des Archimed (Bd. I, S. 284). Nun ist aber nicht überflüssig in Erinnerung zu bringen, dass die archimedische Construction in den sogenannten Wahlsätzen erhalten ist, die nikomedische bei Pappus. Die Sammlungen des Pappus waren seit 1588 durch Commandinus herausgegeben, und Vieta hat sie, wie aus vielfachen Uebereinstimmungen ausser Zweifel ist, eingehend studirt. Die Wahlsätze Archimed's dagegen wurden aus dem Arabischen erstmalig 1659 durch Foster bekannt[1]). Daraus geht hervor, dass die Dreitheilung des Winkels, welche Vieta lehrte, kein Anlehen bei einem alten Schriftsteller, sondern selbständige Nacherfindung war. Die ganze Bedeutung des Supplementum Geometriae enthüllt aber der 16. und besonders der 25. und letzte Satz, der allgemeine Folgesatz[2]), *consectarium generale*, Vieta's, dass jede kubische oder biquadratische Aufgabe, wenn sonst nicht lösbar, ihre Lösung dadurch finde, dass man sie entweder auf eine Einschiebung zweier mittleren Proportionalen oder auf eine Winkeldreitheilung zurückführe. Für die biquadratischen Aufgaben gelte diese Behauptung, weil biquadratische Gleichungen, wie in der Abhandlung *De aequationum recognitione* gezeigt sei, immer auf kubische sich zurückführen lassen. Zweierlei können wir diesem Ausspruche nebenher entnehmen. Erstens geht aus ihm hervor, dass die *Recognitio aequationum*, wenn sie auch erstmalig 1615 durch Anderson dem Drucke übergeben wurde, doch 1593 bereits der Hauptsache nach fertig gestellt war. Zweitens kann man den Ausdruck *omnia Problemata alioqui non solubilia*, nachdem die Auflösung kubischer Gleichungen durch

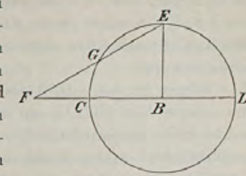

Fig. 119.

[1]) Archimedes (ed. Heiberg) II, 428. [2]) Vieta pag. 257.

ein algebraisch allgemeines Verfahren einmal bekannt war, billigerweise nicht anders verstehen, als dass Vieta sich vollständig klar darüber war, dass die geometrische Auflösung den grossen Vorzug vor der algebraischen besass, dass für sie die Schwierigkeit von unter dem Kubikwurzelzeichen auftretenden imaginären Quadratwurzeln nicht vorhanden war.

Wieder im Jahre 1593 erschien *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII* [1]), ein einzelnes Buch aus einer Sammlung, welche leider nicht vollständiger bekannt geworden ist. In dem allein veröffentlichten achten Buche ist auch der Streit über den Contingenzwinkel Gegenstand der Betrachtung[2]). Vieta stellt sich ganz und voll auf den Standpunkt Peletier's, der Contingenzwinkel sei kein Winkel, aber die Beweisführung ist neu. Der Kreis, sagt Vieta, wird als eine ebene Figur von unendlich vielen Seiten und Winkeln betrachtet; eine gerade Linie aber, welche eine Gerade berührt, *recta rectam contingens*, wird, von wie unbedeutender Länge sie sein mag, mit jener Geraden zusammenfallen, *coincidit in eandem lineam rectam*, und bildet keinen Winkel, *nec angulum facit*. Nirgend war noch so deutlich ausgesprochen worden, was eigentlich unter Berührung zu verstehen sei. Des Wortes Contingenzwinkel oder eines ähnlich klingenden bedient sich übrigens Vieta nicht. Er übersetzt das griechische κερατοειδής (Bd. I, S. 250) mit *cornicularis*. Das ist überhaupt eine Eigenthümlichkeit Vieta's, durch welche seine Schriften meistens so schwer zu lesen sind, dass er es liebte, mit Neubildungen um sich zu werfen, in deren Auswahl er meistens so wenig glücklich griff, dass seine Ausdrücke kaum je Bürgerrecht erlangten. Vieta besass durchweg die Neigung, seine Entdeckungen in thunlich dunkelste Sprache zu kleiden, vielleicht mit der Absicht, in deren Alleinbesitz zu bleiben, während andererseits durch den Druck sein Erstlingsrecht gewahrt war.

Dem Jahre 1596 entstammt der *Pseudomesolabum et alia quaedam adiuncta capitula* [3]). Es war eine Streitschrift gegen einen in ihr nicht mit Namen genannten Verfasser, den aber jeder zeitgenössische Leser sofort als Josef Scaliger erkennen musste. Dessen Werk von 1594, die in Leyden gedruckten *Cyclometrica elementa*, nebst den vielen Widerlegungen, welche es hervorrief, werden noch in diesem Kapitel zur Rede kommen. Vieta's Pseudomesolabum erörtert die Möglichkeit einer Würfelverdoppelung, sofern andere Aufgaben als bereits gelöst vorausgesetzt werden, aber freilich sind das selbst

[1]) Vieta pag. 347—435. [2]) Ebenda pag. 386. [3]) Ebenda pag. 258—285. Für die Datirung vergl. Chasles, *Aperçu hist.* pag. 443 Note 3 (deutsch S. 497 Note 126).

Aufgaben, deren Bewältigung andere Mittel als die ausschliessliche Benutzung von Zirkel und Lineal erfordert.

Die Zusätze, *adiuncta capitula*, betreffen zunächst die Aufgabe, aus vier Strecken, von denen je drei eine grössere Summe als die vierte haben, ein Sehnenviereck herzustellen. Die schon von Regiomontanus ins Auge gefasste Aufgabe hatte jetzt zeitgemässes Interesse. Benedetti und Jacob waren Vieta vorausgegangen, ein anderer deutscher Geometer, den wir gleich nennen werden, folgte, auch Scaliger, und das gab offenbar Vieta Veranlassung zum Nachdenken über die Aufgabe, hatte eine Behandlung derselben vorgeschlagen, die wie gewöhnlich falsch war. Seien a, b, c, d die vier zur Bildung eines Sehnenvierecks geeigneten und gegebenen Strecken. Nun seien $\sqrt{a^2+b^2}$ und $\sqrt{c^2+d^2}$ die Hypotenusen, welche a, b beziehungsweise c, d zu einem rechtwinkligen Dreieck ergänzen; ihr arithmetisches Mittel $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2}$ werde der Durchmesser des Umkreises des verlangten Sehnenvierecks sein. Die Widerlegung Scaliger's war für Vieta leicht. In denselben Umkreis, sagte er, müsse das Sehnenviereck wie in der Reihenfolge a, b, c, d der Seiten, so auch in deren Reihenfolge a, c, b, d sich einzeichnen lassen, aus welcher für den Durchmesser des Umkreises nach Scaliger's Vorschrift

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+d^2}$$

sich ergebe; es würde also

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}$$

sein müssen, und das ist nicht wahr. Bei $a=15$, $b=20$, $c=7$, $d=24$ ist

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{225+400}+\sqrt{49+576}=25+25=50$$

und

$$\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{225+49}+\sqrt{400+576}<17+32<50.$$

Vieta bleibt bei dieser Widerlegung nicht stehen, sondern zeigt nun seinerseits, wie unter Anwendung von Zirkel und Lineal die Aufgabe der Lösung fähig sei[1]), wobei er vorzugsweise den Fall von vier unter einander ungleichen Strecken als den einzigen, der wirkliche Schwierigkeiten macht, behandelt (Figur 120, folg. S.). Weil im Sehnenvierecke gegenüberliegende Winkel sich zu zwei Rechten ergänzen, muss $\sphericalangle ABE = 180^0 - ADC = CDE$ sein; ferner ist $\sphericalangle AEB$

[1]) Vieta pag. 278.

$= CED$, also $\triangle ABE \sim CDE$, also $EA:EB:AB = EC:ED:CD$. Mit Hilfe dieser Proportion kann man jede Seite des Dreiecks CDE berechnen, also auch die Höhe CK und den Abschnitt EK. Ferner ist

$$\triangle ECK \sim EDL,$$

wenn DL senkrecht zu BC gezogen ist. Die Aehnlichkeit dieser Dreiecke gestattet DL und CL unmittelbar zu finden, mittelbar auch BL. Dann liefern DL und BL die Diagonale DB, und diese gestattet mit den vier gegebenen Strecken, das Viereck $ABCD$ wirklich zu zeichnen. Dessen Umkreis ist zugleich Umkreis des in allen

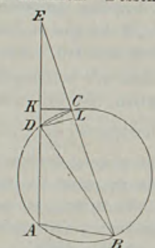

Fig. 120.

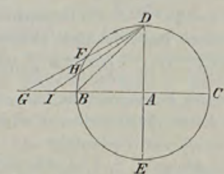

Fig. 121.

seinen Seiten gegebenen Dreiecks ABD, und den Durchmesser des Umkreises eines Dreiecks aus dessen Seiten zu finden, ist bekannt. Ein zweiter Zusatz zu dem Pseudomesolabum[1]) lehrt die näherungsweise Auffindung der Seiten der regelmässigen Fünfecke, Siebenecke, Neunecke, die einem gegebenen Kreise einbeschrieben sind (Figur 121). In dem gegebenen Kreise ist DB die Vierecksseite, DF die Sechsecksseite. Letztere wird zum Durchschnitte G mit dem verlängerten Durchmesser CB ausgezogen, dann wird BG in I halbirt und DI gezogen, deren Stück DH der Ungleichung $DF < DH < DB$ genügt und nahezu den fünften Theil der Kreisperipherie bespannt. In ähnlicher Weise wie 5 zwischen 6 und 4, liegt 7 zwischen 8 und 6, liegt 9 zwischen 10 und 8. Das Sehnensiebeneck wird demnach gefunden, indem man (Figur 122) von der Spitze des senkrechten Kreisdurchmessers aus die Seiten des Sehnensechsecks und des Sehnenachtecks zeichnet und bis zum Durchschnitte mit dem wagrechten Durchmesser verlängert. Die durch jene

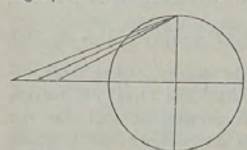
Fig. 122.

[1]) Vieta pag. 283—285.

Durchschnittspunkte begrenzte Strecke wird halbirt und der Halbirungspunkt wieder mit der Spitze des senkrechten Durchmessers vereinigt, so entsteht eine Sehne über nahezu dem Siebentel der Kreisperipherie. Die Zeichnung des Neunecks mit Hilfe der Achtecks- und Zehnecksseite ergiebt sich darnach von selbst. Vieta hat das volle Bewusstsein der nur näherungsweisen Richtigkeit dieser Zeichnungen in dem Maasse, dass er am Schlusse durch Rechnung nachweist, wie gross der dabei begangene Fehler ist.

Ein deutscher Geometer, sagten wir, habe nach Vieta die Aufgabe vom Sehnenvierecke behandelt. Johannes Richter (1537 bis 1616), fast ausschliesslich unter dem wissenschaftlichen Namen Prätorius[1]) bekannt, war Verfertiger mathematischer Instrumente in Nürnberg, dann von 1571 ab während fünf Jahren Professor der Mathematik in Wittenberg, worauf er in gleicher Eigenschaft nach der nürnbergischen Universität Altdorf übersiedelte. Er erfand etwa im Jahre 1590 den Messtisch, welcher nach ihm auch wohl Mensula Praetoriana genannt worden ist. Dem Jahre 1598 entstammt eine eigene Schrift über das Sehnenviereck[2]): *Problema, quod jubet ex quatuor lineis rectis datis quadrilaterum fieri, quod sit in circulo, aliquot modis explicatum.* Prätorius beginnt mit einem geschichtlichen Ueberblicke. Die Aufgabe sei eine bereits alte, und die Fragen, welche man sich vorgelegt habe, seien hauptsächlich die nach dem Durchmesser des Umkreises und nach dem Flächeninhalte des Vierecks. Regiomontanus habe mit der Aufgabe sich beschäftigt, Simon Jacob habe die Diagonalen des Vierecks und den Kreisdurchmesser berechnet. Vieta's Auflösung der Aufgabe wird alsdann erörtert, und die Bemerkung ist beigefügt, es gebe noch neuere Auflösungen, welche er (Prätorius) aber nicht kenne. Endlich geht Prätorius dazu über, die Ausdrücke für die Diagonalen zu bestimmen und zu zeigen, wie alsdann der Durchmesser des Umkreises berechnet werde. Sein Bestreben geht dahin, alle sieben auftretenden Maasszahlen rational werden zu lassen, und dieses gelingt ihm in dreifacher Möglichkeit: erstens durch die Seiten 25, 39, 52, 60; zweitens durch 33, 39, 52, 56; drittens durch 16, 25, 33, 60, welche letzteren Zahlen Jacob schon angegeben hatte. Prätorius hat auch 1599 ein in der Münchner Bibliothek aufbewahrtes Manuscript niedergeschrieben, welches Bemerkenswerthes enthält. In ihm findet sich eine angenäherte Würfelverdoppelung, welche auf der Gleichsetzung von $\sqrt[3]{2}$ mit sec $37^0\,30'$ beruht, und bei welcher angegeben ist, der in der Zeichnung benutzte Winkel sei

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXVI, 519—520. Artikel von Günther.
[2]) Chasles, *Aperçu hist.* 444—445 (deutsch 498—499).

kaum um 2′ unrichtig. Da $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599210$, sec $37^0\ 30' = 1{,}2604724$, sec $37^0\ 28' = 1{,}2599101$, so erkennt man, wie genau Prätorius gerechnet hat[1]).

Wir kehren nach dieser Einschaltung zu Vieta's geometrischen Schriften zurück, deren wichtigste, der *Apollonius Gallus*[2]) von 1600, noch aussteht. Adriaen van Roomen hatte 1593 öffentlich allen Mathematikern eine Aufgabe gestellt, auf welche wir noch zu reden kommen. Vieta löste dieselbe und liess seine gegen den Urheber der Aufgabe einigermassen höhnisch gefasste Auflösung drucken. Zugleich stellte er die Gegenaufgabe, die verlorene Schrift des Apollonius von Pergä von den Berührungen, *περὶ ἐπαφῶν*, so weit wiederherzustellen, dass man einen Kreis zeichne, der drei gegebene Kreise berühre; bringe Belgien keinen Apollonius hervor, so werde ein gallischer auftreten. Van Roomen, ein geborener Belgier, gab nach nicht langer Zeit eine Auflösung mit Hilfe einer Hyperbel. Darauf erschien der schon genannte *Apollonius Gallus*. Eine Auflösung mit Hilfe der Hyperbel sei nicht verlangt worden; eine solche sei nicht eigentlich geometrisch; vielmehr müsse sie, um diesen Namen zu verdienen, sich auf die Anwendung von Zirkel und Lineal beschränken, und eine derartige Auflösung gab nun Vieta in der That. Sie beruht auf der Kenntniss der beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise[3]), welche Vieta in Lemmen zum 8. Probleme als solche Punkte auf der Centrallinie zweier Kreise, *in jungente ipsorum centra*, definirt, welche die Eigenschaft besitzen, dass jede durch sie hindurchgehende Secante der beiden Kreise ähnliche Kreisabschnitte beider hervorbringt. Wahrscheinlich gelangte Vieta durch das Studium des 7. Buches von Pappus zur Entdeckung dieser Punkte, da dort, gerade in den Lemmen zu den Berührungen des Apollonius, derselben soweit vorgearbeitet ist (Bd. I, S. 423), als wenigstens gelehrt wird, dass die Verbindungsgerade der entgegengesetzten Endpunkte paralleler Halbmesser zweier sich äusserlich berührender Kreise durch den Berührungspunkt gehe, und als auch der äussere Aehnlichkeitspunkt einer Figur entnommen werden kann. Aber habe Vieta dort auch die Anregung zur Stellung der Aufgabe, habe er dort einen Gedanken gefunden, der fruchtbar sich erwies, immerhin ist das bei Pappus Vorhandene durch Vieta

[1]) Curtze in Zeitschr. Math. Phys. XL, Histor.-literar. Abthlg. S. 11—12.
[2]) Vieta pag. 325—346. Mit Wiederherstellungsversuchen der Apollonischen Berührungen haben sich beschäftigt: J. Wilh. Camerer, *Apollonii de tactionibus quae supersunt*, 1795. C. G. Haumann, *Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Pergä von den Berührungen*, 1817. W. L. Christmann, *Apollonius Suevus sive tactionum problema nunc demum restitutum*, 1821.
[3]) Ebenda pag. 334—335.

weitaus überholt, so dass ihm mit vollem Rechte die eigentliche Entdeckung der Aehnlichkeitspunkte zugeschrieben wird. Anhänge zum Apollonius Gallus beschäftigen sich dann weiter mit der Auflösung mittels Zirkel und Lineal von anderen Aufgaben, welche von Vieta's Vorgängern immer nur algebraisch behandelt worden waren. Dreiecke werden gezeichnet, deren Grundlinie und Höhe gegeben ist und als drittes Stück das Product der beiden anderen Seiten oder deren Quotient, deren Summe, deren Differenz, oder auch der Winkel an der Spitze des Dreiecks. Ferner wird ein rechtwinkliges Dreieck hergestellt, dessen Seiten eine stetige geometrische Proportion bilden. Bei der letzteren Aufgabe ist ganz beiläufig ausgesprochen, der Kreisdurchmesser verhalte sich zum Quadranten sehr nahezu, *proxime*, wie $100000 : 78540$, d. h. Vieta setzt hier $\pi = 3{,}14160$. Eigenthümlich genug erscheint es, dass im Apollonius Gallus Vieta die rein geometrischen Auflösungen den algebraisch-geometrischen vorzieht, er, der wie wir gesehen haben, die algebraische Geometrie als zusammenhängendes Ganzes gelehrt hat, der, wie wir noch sehen werden, der Algebra selbst zu wesentlichsten Fortschritten verhalf.

Einen geometrischen Gegenstand haben wir seither nur ganz gelegentlich und dadurch recht stiefmütterlich in Betracht zu ziehen gehabt, welcher von nun an aufmerksamere Beachtung in so hohem Grade verlangt, dass er einen selbständigen Abschnitt geometrischer Untersuchung bildet: die Cyclometrie oder Ausmessung des Kreises[1]).

Zu denen, welche im XVI. Jahrhunderte glaubten, den Kreis genau in ein Quadrat verwandeln zu können, gehörten Orontius Finaeus (S. 378), Bouvelles (S. 383). In Nonius (S. 389) und Buteo (S. 563) nannten wir Widerleger ihrer Irrthümer. Auch Clavius hätten wir diesen beigesellen dürfen, welcher in seiner Geometriae practica gegen Finaeus auftrat. Ein neuer der Natur der Sache nach gleichfalls unglücklicher Verfasser von für genau gehaltenen Kreisquadraturen war Simon Duchesne. Man kennt seinen Geburtsort, Dôles in Frankreich. Er muss aber frühzeitig nach Holland gekommen sein, wo sein Name sich in Van der Eycke,

[1]) Hervorragende Untersuchungen über die Geschichte der Cyclometrie bei Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle.* 2e édition (Paris 1831). — Vorsterman van Oijen im *Bulletino Boncompagni* I, 141—156 (Rom 1868). — J. W. L. Glaisher im *Messenger of Mathematics, New Series* No. 20 (1872) und 26 (1873). — Bierens de Haan im *Bullet. Boncomp.* VII, 99—140 (1874) und *Bouwstoffen voor de Geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden* (1878). — Rudio, Das Problem von der Quadratur des Zirkels (Zürich 1890)

lateinisch a Quercu umwandelte, und wo er seine Muttersprache so gründlich verlernte, dass seine französisch geschriebenen Bücher schlechten wörtlichen Uebersetzungen aus dem Holländischen gleichen[1]). Er wohnte 1584 in Delft und lebte noch 1603. Er hat 1583 einen ersten, 1586 einen zweiten Versuch zur Kreismessung gemacht. Er wusste, dass Archimed dem Verhältnisse des Kreisumfanges zum Durchmesser, also derjenigen Zahl, welche seit der Mitte des XVIII. Jahrhunderts etwa durch π bezeichnet wird[2]), zwei Grenzen gesetzt hat, indem er $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ nachwies, und er erkannte zunächst die Richtigkeit dieser archimedischen Grenzen an. Zwischen ihnen lag auch die erste von Duchesne gegebene Verhältnisszahl $\pi = 3\frac{69}{484}$, denn in Decimalbrüche umgesetzt ist

$$3\tfrac{10}{71} = 3{,}14084507\cdots,\quad 3\tfrac{69}{484} = 3{,}14256198\cdots,\quad 3\tfrac{1}{7} = 3{,}14285714\cdots.$$

Die Duchesne'sche Zahl $3\frac{69}{484}$ besitzt überdies die Eigenschaft, ein vollständiges Quadrat $\left(\frac{39}{22}\right)^2$ zu sein, und dadurch ist die Auffindung des dem Kreise flächengleichen Quadrates wesentlich erleichtert, da dessen Seite $\frac{39}{44}\,d$ wird, unter d den Kreisdurchmesser verstehend. Die von den Aegyptern benutzte Verhältnisszahl führte zu $\frac{8}{9}\,d$ als Quadratseite (Bd. I, S. 57), Inder fanden sie als $\frac{7}{8}\,d$ (Bd. I, S. 602), Franco von Lüttich[3]) benutzte $\frac{9}{10}\,d$. Diese drei Werthe scheinen die einzigen zu sein, welche neben dem von Duchesne π als quadratisch auftreten lassen. Wahrscheinlich 1585 erschien eine Gegenschrift von Ludolph van Ceulen, dessen hervorragende eigene Leistungen in ein späteres Jahr fallen und uns dort Gelegenheit geben werden, von ihnen zu reden. Wider diese Gegenschrift wandte sich Duchesne in einer Veröffentlichung von 1586, welcher im gleichen Jahre eine abermalige Entgegnung von Ludolph van Ceulen folgte[4]). So viel hatte die Gegenschrift gefruchtet, dass Duchesne nicht bei seinem ersten Werthe blieb, aber er ersetzte ihn durch einen weitaus unvollkommneren, durch

$$\pi = \sqrt{\sqrt{320} - 8} = 3{,}1446055\cdots,$$

d. h. durch eine Zahl, welche grösser war als die von Archimed auf-

[1]) *Bouwstoffen* etc. pag. 100. [2]) Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1889, pag. 28. [3]) Zeitschr. Math. Phys. XXVII, Supplementheft S. 187. [4]) *Bouwstoffen* etc. pag. 112—113.

gestellte obere Grenze $3\frac{1}{7}$, und Duchesne handelte hierbei keineswegs unbewusst. Er erklärt vielmehr ruhig: demzufolge komme die richtige Verhältnisszahl zwischen Durchmesser und Kreisumfang ausserhalb der archimedischen Grenzen zu liegen und sei grösser als $3\frac{1}{7}$.

Trotz dieser Eigenschaft des neuen Werthes, welche jeden ernsthaften Mathematiker auch der damaligen Zeit kopfscheu machen musste, fand derselbe einen Bewunderer in Raimarus Ursus[1]). Dieser Landmesser aus dem Dithmarschen, welcher durch eigenes Studium vom Schweinehirten zum kaiserlichen Mathematiker aufgestiegen war, widmete in seinem *Fundamentum astronomicum* von 1588 ein besonderes Blatt *Simoni a Quercu inventori divini artificii*. Die Erfindung selbst wird folgendermassen geschildert (Fig. 123). Sei AB ein Kreisdurchmesser und BD Berührungslinie an den Kreis, ferner AD so gezogen, dass das innerhalb des Kreises fallende Stück AC dem von der Berührungslinie abgeschnittenen Stücke BD gleich wird, so ist AC zugleich auch die Länge des Kreisquadranten. Zieht man die Hilfslinie BC, so sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABD, BCD einander ähnlich, mithin $AD : BD = BD : CD$. Nun heisse $BD = AC = x$, $CD = y$, $AB = d$, so ist

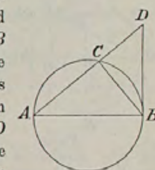

Fig. 123.

$$(x + y)^2 = x^2 + d^2,\quad y = \sqrt{x^2 + d^2} - x$$

und jene Proportion geht über in

$$\sqrt{x^2 + d^2} : x = x : (\sqrt{x^2 + d^2} - x),$$

woraus $x = \frac{d}{4}\sqrt{\sqrt{320} - 8}$ folgt. Ist nun x wirklich die Länge des Quadranten oder $\frac{\pi d}{4}$, so erscheint in der That $\pi = \sqrt{\sqrt{320} - 8}$, aber für jene Gleichsetzung, welche doch erst bewiesen werden müsste, scheint eine Begründung nicht versucht zu sein.

Vieta gab, wie wir schon gesagt haben, 1593 das 8. Buch der vermischten Aufgaben heraus, und dort sind der Zahl π mehrere Annäherungen gegeben, welche aber immer nur als Annäherungen bezeichnet Vieta's wissenschaftlichen Standpunkt wahren[2]). Zunächst erklärt Vieta, er sei den Spuren Archimed's folgend weit über das von diesem erreichte Ziel hinausgekommen. Er habe nämlich gefunden:

[1]) Kästner I, 632. — Allgem. deutsche Biographie XXVII, 179—180. — Rud. Wolf, Astronomische Mittheilungen Nr. LXVIII. [2]) Vieta pag. 392—393.

$$\frac{31415926535}{10000000000} < \pi < \frac{31415926537}{10000000000}.$$

Nächst dieser auf 9 Dezimalstellen genauen Ermittelung schlägt Vieta folgende vor: das kleinere Stück einer im goldenen Schnitt getheilten Strecke verhalte sich zur ganzen Strecke wie der Kreisdurchmesser zu $\frac{10}{12}$ der Peripherie. Dieser Annahme entspricht

$$\pi = \frac{18 + \sqrt{180}}{10} = 3{,}14164075\ldots,$$

d. h. ein Werth, welcher von dem des Ptolemäus (Bd. I, S. 394) sich erst von der 5. Decimalstelle an unterscheidet. Eine Konstruktion desselben ist folgende (Figur 124): BC und DE sind zwei im Mittelpunkte A sich senkrecht durchkreuzende Durchmesser. AD ist in F halbirt und durch B und F die BG bis zum Durchschnitte mit der Kreislinie gezogen, dann von G aus die $GH \parallel DE$. Man macht $FZ = FA$, $EI = BZ$, zieht IH und mit ihr parallel EK, so ist AK die angenäherte Länge des Kreisquadranten. Wegen $AB = 2AF$ ist $BH = 2GH$, und da $GH^2 = BH \cdot HC$, so ist auch $GH = 2HC$, $BH = 4HC = \frac{4}{5}d$, $AH = \frac{4}{5}d - \frac{1}{2}d = 0{,}3\,d$. Ferner

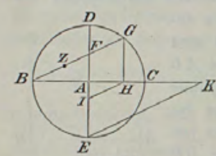

Fig. 124.

$$FB = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \frac{d}{4}\sqrt{5},\quad BZ = EI = \frac{d}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

$$AI = AE - EI = \frac{d}{4}(3 - \sqrt{5}).$$

Aber $AI : AE = AH : AK$, mithin

$$AK = \frac{AE \cdot AH}{AI} = \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{3d}{10}}{\frac{d}{4}(3 - \sqrt{5})} = \frac{3}{20}d(3 + \sqrt{5}),$$

und da AK der Kreisquadrant oder $\frac{d\pi}{4}$ sein soll, so wird $\pi = \frac{18 + \sqrt{180}}{10}$ wie oben. Auch eine Zeichnung des flächengleichen Quadrates wird unter Voraussetzung des gleichen Werthes von π gelehrt.

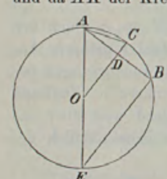

Fig. 125.

Wissenschaftlich weit merkwürdiger ist eine zweite von Vieta eingeschlagene Gedankenfolge[1]), von welcher er selbst aussagt, sie sei das in Rechnung umgesetzte Verfahren des Antiphon (Bd. I, S. 190). Sei (Figur 125) $AB = a_n$ die

[1]) Vieta pag. 398—400.

Seite des regelmässigen Sehnen-n-ecks, dessen Fläche F_n heisse, sei ferner $AC = a_{2n}$ die Seite des regelmässigen Sehnen-$2n$-ecks und F_{2n} dessen Fläche. $OC = r$ ist der Halbmesser, $BE = \alpha_n$ ist die Supplementarsehne von AB, für welche Vieta des Namens *Apotome* sich bediente. Offenbar ist

$$\triangle ABE \sim ADO,$$

mithin $BE : AE = OD : OA$ oder $\frac{OD}{r} = \frac{\alpha_n}{2r}$. Ferner ist

$$\triangle OAC = \frac{1}{2n}F_{2n},\quad \triangle OAD = \frac{1}{2n}F_n,$$

$$F_n : F_{2n} = \triangle OAD : \triangle OAC = OD : OC = \alpha_n : 2r.$$

Genau ebenso beweist sich $F_{2n} : F_{4n} = \alpha_{2n} : 2r$, $F_{4n} : F_{8n} = \alpha_{4n} : 2r$ u. s. w. Multiplicationen von k solcher aufeinander folgenden Proportionen giebt

$$F_n : F_{2^k \cdot n} = \alpha_n \cdot \alpha_{2n} \ldots \alpha_{2^{k-1} \cdot n} : (2r)^k.$$

Ist $n = 4$, so ist $F_4 = 2r^2$ und $2^k \cdot n = 2^{k+2}$, $2^{k-1} \cdot n = 2^{k+1}$, also

$$F_{2^{k+2}} = 2r^2 \cdot \frac{2r}{\alpha_4} \cdot \frac{2r}{\alpha_8} \cdots \frac{2r}{\alpha_{2^{k+1}}}.$$

Bei unendlich werdendem k fällt $F_{2^{k+2}}$ mit der Kreisfläche $r^2\pi$ zusammen und durch leichte Umformung ist

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\alpha_4}{2r} \cdot \frac{\alpha_8}{2r} \cdot \frac{\alpha_{16}}{2r} \cdots \text{ in infin.}$$

Nun ist aber $\frac{\alpha_n}{2r} = \cos AEB = \cos\frac{360^\circ}{2n}$ oder die unendliche Factorenfolge rechter Hand würde sich heute in der Form

$$\cos\frac{90^\circ}{2} \cdot \cos\frac{90^\circ}{4} \cdot \cos\frac{90^\circ}{8} \cdots$$

darstellen. Die Werthe dieser einzelnen Factoren sind aber

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}},\quad \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}},\ldots$$

und so kommt

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}} \cdots,$$

wie Vieta gefunden hat. Es war das die erste unendliche Factorenfolge, welche aufgestellt worden ist, und ein glücklicher Zufall wollte, dass es eine convergente Factorenfolge war, welche entstand[1]).

Eine praktische Folge hatten die vollständig aus dem gewohnten Gedankenbereiche sich entfernenden Untersuchungen Vieta's nicht. Sie

[1]) Den Beweis der Convergenz hat H. Rudio in der Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, Histor.-liter. Abtheilung S. 139—140 geführt.

verhinderten nicht einmal, dass ein auf anderen Gebieten hervorragender Gelehrter schon im folgenden Jahre mit neuen Verkehrtheiten an die Oeffentlichkeit trat. Joseph Scaliger[1]) (1540—1609), geboren in Agen in der französischen Provinz Guienne, kam als bereits weit und breit berühmter Mann 1593 an die Leidener Hochschule, welcher er bis zu seinem Lebensende angehörte. Sein *Opus de emendatione temporum* von 1583 war ein bahnbrechendes Lehrbuch der Chronologie und erwarb ihm den keineswegs unverdienten Namen, der Vater dieser Wissenschaft gewesen zu sein. Begreiflicherweise sah man daher mit zum voraus hochgespannter Erwartung seinen *Cyclometrica elementa* entgegen, welche 1594 bei einem der ersten damaligen Drucker, Raphelengius (Franz von Ravelingen) in Leiden in glänzender Ausstattung erschienen (S. 586), und welchen noch im gleichen Jahre das *Mesolabium* sowie ein *Appendix ad cyclometrica* nachfolgten. Wie verkehrt Scaliger's Meinungen waren, zeigt gleich die Thatsache, dass im ersten Buche der Cyclometrica der Satz ausgesprochen ist, das Quadrat des Kreisumfanges sei das Zehnfache des Quadrates des Durchmessers $(\pi = \sqrt{10})$, während im zweiten Buche behauptet wird, die Kreisfläche sei gleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie die Seite des dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks und dessen Höhe $\frac{9}{10}$ des Kreisdurchmessers sei $(\pi = \sqrt{9{,}72})$. Einen Widerspruch sah Scaliger in diesen beiden Behauptungen deshalb nicht, weil er die Wahrheit des archimedischen Satzes leugnete, die Flächen des Kreises und eines rechtwinkligen Dreiecks mit Kreisumfang und Halbmesser als Katheten seien gleich. Ja es kam ihm auch darauf nicht an, herauszurechnen, die Seiten des regelmässigen Sehnenzwölfecks besässen eine grössere Summe als der Kreisumfang u. s. w. Ein französischer Schriftsteller über Befestigungskunst, Jean Errard de Barleduc[2]), Ludolph van Ceulen, Clavius, Van Roomen, Vieta, ein Italiener Pietro Antonio Cataldi erhoben ihre Stimmen gegen Scaliger, aber ohne ihn eines Besseren zu belehren. Sein Appendix giebt zwar einige Fehler der Cyclometrica zu, aber es seien nur nebensächliche Irrthümer, während die archimedische Lehre in allen Hauptpunkten falsch sei. Vieta hatte sich nicht nur in dem schon von uns genannten *Pseudomesolabium* gegen Scaliger ausgesprochen, sondern auch in einer zweiten Schrift *Munimen adversus nova cyclometrica*. Aus dieser erwähnen

[1]) Kästner I, 487—497. — *Bouwstoffen* etc. pag. 280—314. — Wolf, Geschichte der Astronomie pag. 337. [2]) Diese Schreibweise entnehmen wir dem in den *Bouwstoffen* etc. pag. 293 abgedruckten Titel der *Refutation*. Poggendorff I, 672 schreibt Erard.

wir nur die Bemerkung, Scaliger's $\pi = \sqrt{10}$ sei nicht einmal neu, sondern von Arabern längst in Anwendung gebracht[1]).

Auch Jacob Christmann[2]) (1554—1630), Orientalist und Astronom in Heidelberg, schrieb 1595 eine vornehmlich gegen Scaliger gerichtete *Tractatio geometrica de quadratura circuli*, welche den Satz vertheidigte, es sei überhaupt nicht möglich, den Kreis irgend einer geradlinig begrenzten Figur genau gleich zu setzen, nur eine annäherungsweise Quadratur sei ausführbar. An Christmann's Persönlichkeit knüpfen sich zwei bemerkenswerthe Dinge, erstens, dass für ihn in Heidelberg 1609 die erste Professur der arabischen Sprache gegründet wurde, welche es überhaupt in Europa gab, und zweitens, dass er eine Zeit lang der Besitzer der Originalhandschrift des Werkes des Koppernicus über die Weltsysteme war. Eine 1611 von ihm in Heidelberg zum Druck gegebene *Theoria lunae* enthält eine Stelle aus Johannes Werner's Trigonometrie, in welcher man die erste abendländische Anwendung der Prosthaphaeresis (S. 454) erkannt hat.

Die Zeitfolge führt uns zu einem weiteren Bearbeiter der Kreismessung, dessen Namen wir schon einigemal zu nennen hatten: Adriaen van Roomen[3]), latinisirt Adrianus Romanus (1561 bis 1615). Er ist in Löwen geboren und hat sich dort, dann in Köln, zuletzt in Italien medicinischen und mathematischen Studien gewidmet. Im Jahre 1586 war er bereits verehelicht und wohnte in Berlin, bis er als Professor an seine heimathliche Hochschule berufen wurde. Die mitunter auftretende Behauptung, Van Roomen sei an Stelle des verstorbenen Gemma Frisius berufen worden, beruht auf Irrthum, da jener 1555, also sechs Jahre vor Van Roomen's Geburt starb. Ebensowenig kann aber die Berufung an Stelle des Sohnes Cornelis Gemma Frisius (1535—1577) stattgefunden haben, bei dessen Tode Van Roomen erst 16 Jahre alt war. In Löwen veröffentlichte er 1593 seine *Ideae mathematicae*. Den Inhalt bildeten wesentlich Untersuchungen über regelmässige Vielecke und über den Werth ihrer Seiten in Bruchtheilen des Durchmessers des einbeschriebenen, aber auch desjenigen des umschriebenen Kreises. In dieser Weise fand er π auf 17 Decimalstellen genau und damit näher, als man diese Zahl bisher kannte. Auch eine Aufgabe stellte er gleichzeitig den Mathematikern aller Orten: *Problema Mathematicum omnibus totius orbis mathematicis ad construendum propositum*. Das war jene

[1]) Vieta pag. 439. [2]) Kästner I, 497—498. — Allgem. deutsche Biographie IV, 222. — Urkundenbuch der Universität Heidelberg (1886) Bd. II, S. 180, Nr. 1488 und 1489. [3]) Kästner I, 457—468 und 504—511. — *Bouwstoffen* etc. pag. 315—326.

Aufgabe, welche Vieta löste und mit der Gegenfrage nach dem drei gegebene Kreise berührenden Kreise beantwortete (S. 590). Van Roomen erledigte sie, wie wir wissen, unter Anwendung von Kegelschnitten, was Vieta wieder die Gelegenheit zur Veröffentlichung seines *Apollonius Gallus* bot. Van Roomen hatte inzwischen seinen Aufenthalt verändert. Er war nach Würzburg berufen worden und 1594 etwa dorthin übergesiedelt. Dort gab er jedenfalls 1597 eine Streitschrift heraus. Sie begann mit der Uebersetzung und Erläuterung von Archimed's Kreismessung, dann folgte *Apologia pro Archimede* gegen Scaliger, den Schluss bildeten *Exercitationes cyclicae* gegen Orontius Finaeus und gegen Raimarus Ursus, also eigentlich gegen Simon Duchesne. In dieser Streitschrift, welche einer von Ludolph van Ceulen verfassten Schrift ganz ähnlichen Inhaltes ziemlich rasch nachfolgte, vielleicht hervorgerufen durch einen hochtrabenden Brief Scaliger's[1]), der dessen Missachtung Aller, welche ihm zu widersprechen gewagt hatten, Ausdruck gab. Van Roomen zeigte dabei, dass Duchesne's $\pi^2 = \sqrt{320} - 8$ einer der Werthe war, welche Nicolaus von Cusa beiläufig einmal angegeben, Regiomontanus widerlegt hatte. Dieselbe Bemerkung war auch von Ludolph van Ceulen gemacht worden, und sie ist insofern nicht unwichtig, als sie zeigt, dass man damals unter den niederländischen Kreisberechnern jener älteren Literatur volle Aufmerksamkeit widmete. Nun folgte 1600 Vieta's Apollonius Gallus und die im Anschlusse daran unternommene Reise nach Frankreich. Der Aufenthalt in Würzburg wurde Van Roomen durch den dort eintretenden Tod seiner Gattin verleidet. Er gab seine Professur ab und beabsichtigte sich in ein Kloster zurückzuziehen. Er muss damals nach Löwen zurückgekehrt sein, von wo er 1606 neuerdings nach Würzburg übersiedelte. Ein 1606 gedrucktes *Speculum astronomicum* Van Roomen's nennt den Verfasser auch ausdrücklich Kanonikus der Johanneskirche in Würzburg. Im Jahre 1610 folgte Van Roomen einer Berufung nach Polen. Nach fünfjährigem Aufenthalte daselbst wollte er seiner zerrütteten Gesundheit durch Gebrauch der Bäder in Spaa wieder aufhelfen. Unterwegs starb er in Mainz.

Ludolph van Ceulen[2]) (1540—1610) haben wir schon wiederholt genannt. Der Name kommt auch in der Form van Keulen und van Collen vor, vielleicht einen kölnischen Ursprung der Familie bezeugend. Ludolph ist in Hildesheim geboren, in Leiden gestorben, wo er die von Prinz Moritz von Oranien gegründete Professur der Kriegsbaukunst inne hatte. Er wurde in der Peterskirche zu Leiden begraben, woselbst 1840 die inzwischen nicht wieder aufgefundene Inschrift noch vorhanden war, welche π auf 35 Decimalstellen genau bestimmte, eine alle früheren Berechnungen so weit übertreffende Annäherung, dass es nicht unverdient erscheint, wenn man jene Verhältnisszahl häufig die Ludolphische Zahl genannt hat. Die genaue Berechnung von π bildet den Hauptgegenstand der Schriften Ludolph's van Ceulen, sowohl der Streitschriften, welche er gegen Simon Duchesne und gegen Scaliger verfasste, als auch eines selbständigen Werkes *Van den Circkel*, welches erstmalig 1596 im Drucke erschien und nochmals 1615 nach dem Tode des Verfassers, sowie zum dritten Male 1619 in lateinischer Sprache. Die lateinische Ausgabe rührt von Willebrord Snellius her, die zweite holländische von der Wittwe Ludolph's van Ceulen, Adriana Symonsz, welche ihrem Gatten auch schon bei der mühsamen Rechnung geholfen hatte. Die Berechnung selbst ging den seit Archimed altbekannten Weg, dass unter Anwendung fortwährender Quadratwurzelausziehungen die Länge der Seiten eingeschriebener und umschriebener regelmässiger Vielecke zu der des Kreisdurchmessers in Verhältniss gesetzt wurde, indem man von dem jeweil betrachteten Vielecke zu dem mit doppelter Seitenzahl überging. Die Tangentenvielecke verfolgte Ludolph van Ceulen mit dem Sechsecke beginnend bis zu dem mit 192 Ecken, die Sehnenvielecke wurden berechnet bis zu dem mit 96 Ecken. In den gedruckten Werken ist dieser Genauigkeit entsprechend π erst auf 20, später auf 32 Decimalstellen bekannt gemacht. Die in der Grabschrift angegebenen drei weiteren Stellen rühren aber gleichfalls von Ludolph van Ceulen her, wie durch ein 1621 erschienenes Werk von Snellius bestätigt wird[1]). Ludolph van Ceulen hat eine andere Schrift noch hinterlassen *De arithmetische en geometrische Fondamenten*. Diese wurde 1615 in holländischer Sprache gedruckt, später abermals in einer lateinischen Bearbeitung von Snellius.

Der letzte hier zu erwähnende Schriftsteller ist Adriaen Anthonisz[2]) (1527—1607), welcher in Metz geboren in den Niederlanden als Kriegsbaumeister thätig war. Er war in Alcmaer ansässig und wurde sogar 1573 zum Bürgermeister dieser Stadt ernannt. Von dem Geburtsorte Metz ist der Beiname Metius abgeleitet, welcher den beiden Söhnen von Anthonisz, Adriaen und Jacob, geradezu als Familienname diente. Von diesen beiden Söhnen war Jacob Glas-

¹) Kästner I, 506—508. ²) Kästner III, 50—51. — *Bouwstoffen* etc. pag. 123—170. — Allgem. deutsche Biographie IV, 93.

¹) *Bouwstoffen* etc. pag. 147 die 32 Decimalstellen Ludolph's van Ceulen; ebenda pag. 151 die 35 Stellen abgedruckt aus dem Cyclometricus von Willebrord Snellius. ²) *Bouwstoffen* etc. pag. 219—253.

schleifer, Adriaen Metius (1571—1635) aber Mathematiker. Aus einer 1625 gedruckten *Arithmetica et Geometria nova* dieses Adriaen Metius ist ersichtlich, dass dessen Vater[1]) eine Gegenschrift gegen Duchesne verfasst hat und in dieser zwei Grenzwerthe aufstellte, zwischen welchen π enthalten sein müsse: $3\frac{15}{106} < \pi < 3\frac{17}{120}$. Später ging dann Anthonisz einen Schritt weiter, indem er diesen Grenzwerthen einen Mittelwerth dadurch entnahm, dass er, wie es einst Chuquet gemacht hatte (S. 352), die Zähler und die Nenner zu einander addirte:

$$\pi = 3\frac{15+17}{106+120} = 3\frac{32}{226} = 3\frac{16}{113} = \frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots,$$

also 6 richtige Decimalstellen. Die Entstehungsweise des Werthes von Anthonisz wird man nicht füglich anders als eine zufällige nennen können; aber da die Ludolphische Annäherung bereits bekannt war, als Anthonisz die seinige fand, so ist es unglaublich, dass nicht durch ihn selbst eine Vergleichung sollte angestellt worden sein, welche das vortreffliche Uebereinstimmen von $\frac{355}{113}$ nachwies, und welche dadurch die grossen Vorzüge dieses in verhältnissmässig sehr kleinen Zahlen ausgedrückten Verhältnisses enthüllte. Jedenfalls hat der Sohn diese Thatsache hervorgehoben.

Bei allen cyclometrischen Versuchen wirklicher Mathematiker, die wir aufzuzählen hatten, spielten Wurzelausziehungen ganz regelmässig eine wesentliche Rolle. Man wird kaum etwas Auffallendes darin finden, dass nicht häufiger trigonometrische Functionen dabei genannt wurden, welche doch die Beziehungen zwischen Vielecksseiten und Kreisdurchmesser so bequem erkennen lassen, denn im Grunde genommen handelt es sich dabei nur um andere Namen für die gleiche Sache. Die trigonometrischen Functionen selbst entstammen Wurzelausziehungen, und dieser Zusammenhang mag äusserlich darin sich spiegeln, dass wir im Anschlusse an die Kreismessung jetzt von der Anfertigung trigonometrischer Tafeln handeln.

Als ein hervorragender Tabellenberechner ist uns schon (S. 474) Rhäticus bekannt geworden. Wir müssen der unterbrochenen Lebensgeschichte dieses Gelehrten uns wieder zuwenden, den wir zuletzt 1542 von Wittenberg nach Leipzig übersiedeln sahen. Dort begann er die Berechnung eines grossartigen Tafelwerkes der Sinus, Tangenten und Secanten für Winkel, welche um je 10″ zunehmen, und

[1]) *Parens meus P. M.* Die beiden Buchstaben *P. M.* sind eine oft gebrauchte Abkürzung von *piae memoriae*. Man hat daraus früher irrthümlich einen Peter Metius gemacht. Vergl. Bierens de Haan im *Bullet. Boncomp.* VII, 124.

unter Benutzung eines Kreishalbmessers 10000000000, d. h. also auf 10 Decimalstellen. Das Wort Sinus vermied Rhäticus dabei, es sei barbarisch, und er bediente sich statt dessen des Wortes *perpendiculum;* für den Sinus complementi sagte er *basis*[1]). Wenn wir von der Berechnung durch Rhäticus sprechen, so wäre es fast richtiger gewesen, von einer Berechnung unter seiner Aufsicht zu reden, denn er benutzte zwölf Jahre lang mehrere Rechner zur Beihilfe, was ihn *multa florenorum millia,* Tausende von Gulden kostete[2]). Gegen 1575 meldete sich bei Rhäticus ein gewisser Valentinus Otho, von dem lange Zeit bekannt war, was er selbst über sich berichtet, dass er in Wittenberg von des Rhäticus Arbeiten gehört und sich ihm darauf als Gehilfen angeboten habe. Er nennt sich *Parthenopolitanus*, muss also wohl in Magdeburg geboren sein und zwar um 1550, denn Rhäticus verglich sein Alter mit dem, in welchem er selbst 25-jährig zu Koppernikus gereist sei[3]). Johann Prätorius hat in einem in der Münchner Bibliothek aufbewahrten Schriftstücke[4]) (S. 589) diese Mittheilungen ergänzt. Prätorius war es, der 1573 in Wittenberg den Otho auf Rhäticus hinwies. Er selbst hatte den jungen Mann im Monat August des erwähnten Jahres dadurch kennen gelernt, dass dieser ihm zwei Näherungswerthe von π vorlegte. Einmal sei

$$6\frac{4247779609}{15000000000} < 2\pi < 6\frac{4247779611}{15000000000}$$

(in Decimalen geschrieben $3{,}14159265365 < \pi < 3{,}1415926537$) und zweitens sei annähernd $\pi = \frac{355}{113}$. Der letztere Werth sei ein Mittelwerth zwischen dem archimedischen $\frac{22}{7}$ und dem ptolemäischen $\frac{377}{120}$ und dadurch aus beiden erhalten, dass Zähler von Zähler und zugleich Nenner von Nenner abgezogen wurde. Prätorius macht die Zusatzbemerkung, jene erste Angabe habe er später bei Vieta gefunden, aus dessen Schule sie vermuthlich stamme. So wahr es ist, dass Vieta die Zahlen kannte (S. 594), so hat er sie doch erst 1593 in Druck gegeben, und der Nachweis ist nicht gebracht, dass Vieta schon 20 Jahre früher in deren Besitz war. Was den anderen Werth $\frac{355}{113}$ betrifft, so haben wir (S. 600) gesehen, dass Adriaen Anthonisz ihn durch Addition zweier Zähler und zweier Nenner sich verschaffte, als er ihn in einer Streitschrift gegen Duchesne veröffentlichte. Du-

[1]) Kästner I, 601. [2]) Kästner, Geometrische Abhandlungen I. Sammlung S. 576. [3]) *Profecto in eadem aetate ad me venis, qua ego ad Copernicum veni.* [4]) Curtze, Zur Biographie des Rheticus in der Altpreussischen Monatsschrift XXXI, 491—496.

chesne selbst schrieb (S. 592) nicht vor 1583. Die Gegenschrift ist mithin mindestens zehn Jahre später verfasst, als Valentin Otho seinen Besuch bei Prätorius machte, und somit muss Otho als Erfinder jenes Werthes gelten, womit die Selbständigkeit von Anthonisz in keiner Weise in Abrede gestellt werden will. Rhäticus nahm Otho's Anerbieten an und begann ihn zu unterweisen. Dazu bedurfte er schon fertig berechneter Theile der Tafeln, welche, es ist nicht gesagt wieso, in Krakau sich befanden, und Otho wurde abgesandt, sie von dort zu holen, während Rhäticus einer Einladung auf ein Schloss folgte, wo er ein neu getünchtes Zimmer beziehen musste und daran erkrankte. Drei Tage nach Otho's Rückkehr reisten beide nach Kaschau in Ungarn zu Johannes Ruber, einem hohen Beamten. Dort verschlimmerte sich der Zustand des Rhäticus von Tag zu Tag, und kaum eine Woche nach der Ankunft starb Rhäticus in den Armen seines jungen Freundes, welchen er als Erben seiner Arbeit und der schon vollendeten Abschnitte derselben eingesetzt hatte; Otho solle die letzte Hand daran legen und den Druck überwachen. Kaiser Maximilian II. bestätigte diese Verfügung und sagte zu, für die Kosten aufzukommen. Allein 1576 starb der Kaiser, und sein Nachfolger hatte für derartige Zwecke kein Geld übrig. Ruber deckte einige Zeit die Kosten, bis Otho zur Wittenberger Professur der Mathematik berufen wurde und der Kurfürst August von Sachsen sich der Sache annahm. Aber da brachen die kryptocalvinistischen Händel aus, in deren Folge der Kurfürst seine Hand von der Universität abzog, und Otho musste wiederholt einen neuen Gönner aufsuchen. Er fand ihn in Kurfürst Friedrich IV. von der Pfalz, und mit dessen Unterstützung wurde das Werk vollendet und 1596 in Neustadt als *Opus Palatinum de Triangulis*[1]) gedruckt. Ausser den Tafeln und der Lehre von ihrer Berechnung ist auch eine vollständige ebene und sphärische Trigonometrie darin enthalten, aus welcher letzteren insbesondere die Unterscheidung der zweideutigen Fälle hervorzuheben ist[2]). Unter den Formeln, deren Rhäticus zur Berechnung der Tafeln sich bediente, in welchen, wie naturgemäss, die meisten Zahlen mittelbar aus anderen wenigen, die unmittelbar ausgerechnet waren, abgeleitet wurden, hat man

$$\sin n\alpha = 2\sin(n-1)\alpha \cdot \cos\alpha - \sin(n-2)\alpha,$$
$$\cos n\alpha = 2\cos(n-1)\alpha \cdot \cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$$

hervorgehoben[3]), deren Richtigkeit am Einfachsten aus

[1]) Die Beschreibung bei Kästner I, 590—611. [2]) Kästner I, 603.
[3]) Rud. Wolf, Handbuch der Astronomie, ihre Geschichte und Literatur I, 170 (Zürich 1890).

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$$

und

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$$

sich ergiebt.

Rhäticus hatte ausser den im Opus Palatinum abgedruckten Tafeln noch grössere berechnet, bei welchen der Halbmesser zu 1 mit 15 Nullen angenommen war. Die Winkel wuchsen in denselben um je 10″, für den ersten und letzten Grad des Quadranten aber waren die Winkel gar von Secunde zu Secunde unterschieden, allerdings nur unter Angabe des Sinus. Diese grossen Tafeln waren, wie Otho sich erinnerte, vorhanden, aber er wusste nicht mehr wo. Diese Gedächtnissschwäche, der als Grund sein Alter beigefügt wird, während er 1596 doch noch nicht einmal 50 Jahre zählte, ist einigermassen auffallend, aber an ihrem Vorhandensein ist nicht zu zweifeln, da ein eigener Bote nach Wittenberg geschickt wurde, um die, wie Otho meinte, dort vielleicht von ihm zurückgelassenen Tafeln zu ermitteln. Natürlich war die Sendung fruchtlos, denn als Otho starb und der gesammte Nachlass des Rhäticus, den Otho besessen hatte, mit Einschluss der Originalhandschrift des Werkes des Koppernikus, in Christmann's Hände kam (S. 597), fand sich darunter jene grosse Tafel, der sogen. *grosse Canon*. Dessen Bearbeitung wurde einer für uns neuen Persönlichkeit anvertraut.

Bartholomäus Pitiscus[1]) (1561—1613), aus Grüneberg in Schlesien, war Hofprediger des Kurfürsten Friedrich IV. von der Pfalz, doch waren mathematische Neigungen ihm angeboren, für die er neben der Theologie manche Zeit verwandte. Als Abraham Scultetus[2]) (1566—1625), gleich Pitiscus in Grüneberg geboren und in Heidelberg ansässig, wo er zuerst als Professor der Theologie, später als Hofprediger Friedrich V. wirkte, im Jahre 1595 *Sphaericorum libri tres* in Heidelberg erscheinen liess, gab Pitiscus dazu einen 57 Seiten starken Anhang unter dem Titel *Trigonometria, sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus*, dessen acht letzte Seiten von ebenen Dreiecken handelten. Aus diesem Anhange entstand ein Werk, welches gleichfalls Trigonometria genannt im Jahre 1600 in Augsburg gedruckt wurde. In einem Antiquariatskataloge finden wir eine ebenfalls 1600 in London gedruckte von einem gewissen Hamson herrührende englische Uebersetzung angezeigt. Wir

[1]) Kästner I, 564—565, 581—590, 612—626; II, 743—745. — Allgem. deutsche Biographie XXVI, 204—205. — N. L. W. A. Gravelaar, *Pitiscus Trigonometria* in dem Nieuw Archief voor Wiskunde, 2. Reihe, III. Theil (auch als Sonderabdruck 1898). [2]) Poggendorff II, 883.

wissen nicht, ob sie nach dem Anhange von 1595 oder schon nach der Augsburger Ausgabe hergestellt war. Eine abermals erweiterte Ausgabe erschien 1612 in Frankfurt und ist auf dem Titelblatte als dritte Ausgabe bezeichnet, wodurch die Abhandlung von 1595 doch wohl mit Wissen des 1612 noch lebenden Pitiscus zum Range einer ersten Ausgabe des umfangreichen Werkes heraufrückte. Der Titel Trigonometrie ist, wie es scheint, von Pitiscus erfunden, wenigstens lässt er sich früher nicht nachweisen. Dieser Trigonometrie sind Tabellen beigegeben, welche die trigonometrischen Linien, Sinus u. s. w., liefern, und zwar in der Auflage von 1612 mit Decimalstellen, welche durch einen Punkt von den übrigen Stellen getrennt sind, vielleicht in Nachahmung Vieta's (S. 584). Das eigentliche Tabellenwerk aber, um dessen Vollendung Pitiscus sich Verdienste erwarb, der grosse Canon des Rhäticus, erschien 1613 unter dem Titel *Thesaurus mathematicus*. Bei denjenigen Rechnungen, welche Pitiscus selbst zur Ergänzung der vorhandenen Lücken vornahm, bediente er sich vorzugsweise der Regula falsi, welche allmälig zu wahren Näherungsmethoden für Auflösung von Zahlengleichungen sich ausgebildet hatte, und mittels deren man die trigonometrische Dreitheilung und Fünftheilung des Bogens vollzog, d. h. eigentlich Gleichungen dritten und fünften Grades löste. Bei Pitiscus finden sich fortwährend die Namen Tangente und Secante in Gebrauch, doch rühren diese nicht von ihm her. Sie sind etwas älteren Ursprunges. Ihr erstes Vorkommen ist in der 1583 in Basel gedruckten *Geometria rotundi*. Deren Verfasser, Thomas Finck[1]) (1561—1656) aus Flensburg, war Mediciner und Mathematiker und bald in der einen, bald in der anderen Eigenschaft thätig, bald 1587 Leibarzt des Herzogs von Schleswig-Holstein in Gottorp, bald 1591 Professor der Mathematik in Kopenhagen, dann wieder seit 1603 ebenda Professor der Medicin. Noch ein Name entstand um den Anfang des XVII. Jahrhunderts, der Name Cosinus statt des bei Pitiscus z. B. noch üblichen Sinus Complementi. Diese Umstellung (complementi sinus, co. sinus, cosinus) rührt von dem Engländer Edmund Gunter (1581—1626) her, von welchem wir später noch zu reden haben, während wir hier nur im Zusammenhange die Männer nennen wollen, welche verschiedene Namen zuerst benutzten, die dann rasch sich einbürgerten.

Zu den trigonometrischen Schriftstellern gehört auch der namentlich als vorzüglicher Beobachter berühmte Astronom Tycho Brahe (1546—1601). In einem Hefte[2]), welches auf der Aussenseite die

[1]) Allgem. deutsche Biographie VII, 13—14 [2]) Als Photographotypie durch H. Studnička 1886 in Prag herausgegeben.

Jahreszahlen 1591 und 1595 trägt, hat er die wichtigsten Sätze der ebenen und der sphärischen Trigonometrie zusammengestellt.

Ganz anderer Natur waren die Fortschritte, welche die Lehre von den trigonometrischen Functionen und welche die Trigonometrie in den Händen Vieta's und Van Roomen's machten. Das 8. Buch von Vieta's vermischten Aufgaben von 1593 hat (S. 586) schon einmal unsere Aufmerksamkeit beansprucht. In ihm ist auf S. 402 der sogenannte Cosinussatz der ebenen Trigonometrie in der Form $2ab:(a^2+b^2-c^2)=\sin 90^0:\sin(90^0-C)$ ausgesprochen. In demselben ist auch eine ziemlich vollständige Sammlung von Aufgaben der sphärischen Trigonometrie enthalten, z. B. der beiden Aufgaben, aus den drei Seiten einen Winkel, aus den drei Winkeln eine Seite zu finden[1]), mit welchen seit Regiomontan (S. 271) kein Mathematiker mehr sich beschäftigt hatte, und Vieta giebt die jenen Aufgaben entsprechenden Lösungen seiner Gewohnheit gemäss in fast unverständlichen Worten[2]), welche aber in die Proportionen

$$\sin a\cdot\sin b:(\cos c\mp\cos a\cdot\cos b)=1:\cos C$$
$$\sin A\cdot\sin B:(\cos A\cdot\cos B\pm\cos C)=1:\cos c$$

haben umgesetzt werden können. Insbesondere aber ist zum ersten Male das reciproke Dreieck eines sphärischen Dreiecks erwähnt, welches entsteht, wenn aus den Eckpunkten des gegebenen Dreiecks als Mittelpunkten grösste Kreise beschrieben werden, die alsdann bei ihrem gegenseitigen Durchschneiden eben jenes reciproke Dreieck bilden[3]). In demselben Jahre 1593 stellte Van Roomen, wie wir wiederholt erzählt haben, eine öffentliche Aufgabe. Es handelte sich um eine Gleichung 45. Grades, welche gelöst werden sollte. Vieta war im Stande, schon 1594 die richtige Auflösung im Drucke erscheinen zu lassen. *Responsum ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus*[4]) nannte Vieta seine Abhandlung. Es handelte sich um Folgendes, wenn wir durch Anwendung unserer heutigen Bezeichnung den Gedankengang leichter verständlich machen, als er es in der Sprache Vieta's ist. Gegeben war also eine Gleichung 45. Grades, in welcher sämmtliche Potenzen der Unbekannten mit ungeraden Exponenten jeweils abwechselnd mit positiven und negativen Zahlencoefficienten versehen vorkamen. Man sollte daraus den Werth der Unbekannten ermitteln. Die Potenzen

[1]) Vieta pag. 407. [2]) A. von Braunmühl, Zur Geschichte des sphärischen Polardreiecks in *Biblioth. math.* 1898, S. 65—72. [3]) Vieta pag. 418: *Si sub apicibus singulis propositi tripleuri sphaerici describantur maximi circuli, tripleurum ita descriptum tripleuri primum propositi lateribus et angulis est reciprocum*; vergl. A. von Braunmühl l. c. [4]) Vieta pag. 305—324.

der Unbekannten waren nach dem Vorgange Stevin's, wie wir noch sehen werden, durch die eingeringelten Exponenten dargestellt, also x durch ①, x^3 durch ③, ... x^{45} durch ㊺. Die ganze Gleichung war:

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11} + 105306075x^{13} - 232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19} + 483841800x^{21} - 378658800x^{23} + 236030652x^{25} - 117679100x^{27} + 46955700x^{29} - 14945040x^{31} + 3764565x^{33} - 740259x^{35} + 111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = B.$$

Van Roomen hatte hinzugesetzt, dass, wenn

$$B = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

sei, der Werth sich ergebe

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}.$$

Vieta erkannte die Beziehung zwischen x und B als eine derartige, dass sich $B = 2\sin\varphi$ und $x = 2\sin\frac{\varphi}{45}$ darstellte, oder, nach geometrischer Aussprache, dass B eine Sehne und x die Sehne des 45. Theiles ihres Bogens war. Vieta fügte auch, in der Erkenntniss, dass $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ ist, hinzu, die Aufgabe lasse in drei andere sich spalten, nämlich in die Auflösung von $3z - z^3 = B$ mit $z = C$, dann $3y - y^3 = C$ mit $y = D$, endlich von $5x - 5x^3 + x^5 = D$ mit $x =$ dem gesuchten Werthe. So weit mag man die Verdienste der beiden Nebenbuhler um die Erweiterung der Kenntnisse von den trigonometrischen Linien etwa als gleiche betrachten. Wenn Vieta das scheinbar alle menschliche Kunst Ueberschreitende geleistet hat, dass er den Ursprung der vorgelegten Gleichung sofort erkannte, so war dieses schlechterdings nur dadurch möglich, dass er **die Bildung der Sehne des m-fachen Bogens aus der Sehne des einfachen bereits kannte.** Genau das Gleiche müssen wir aber auch für Van Roomen in Anspruch nehmen. War sein Wissen von den erwähnten Beziehungen nur irgend geringer als das Vieta's, so wäre es ihm nie gelungen, die Gleichung aufzustellen, welche er der Oeffentlichkeit übergab, so wäre es ihm nie eingefallen, für x die Sehne von $\frac{30^0}{16} = 1^0\,52'\,30''$ zu setzen, um B als die Sehne von $\frac{45 \cdot 30^0}{16} = 84^0\,22'\,30''$ zu finden und dann rückwärts zu sagen, aus jenem B ergebe sich dieses x.

Nun ging aber Vieta noch einen gewaltigen Schritt über Van Roomen hinaus. Letzterer war mit Vieta an der Spitze aller Mathematiker, die mit dem Zusammenhange trigonometrischer Linien

einfacher und vielfacher Bogen sich beschäftigten, aber Vieta war überdies, was Van Roomen nicht war, der grösste Algebraiker seiner Zeit. Er wusste, das wird im folgenden Kapitel sich zeigen, von der Anzahl der Wurzeln einer Gleichung. Wenn also für Van Roomen die Umkehrung, dass er x aus B abzuleiten verlangte, während er B aus x hergestellt hatte, lediglich eine solche Bedeutung hatte, wie wenn man etwa einem geometrischen Satze, den man gefunden hat, eine Aufgabe entnimmt, zu deren Auflösung er sich eignet, so war für Vieta die Umkehrung von ganz anderem Inhalte erfüllt. Ausser dem Werthe von x, welcher zur Auffindung von B geführt hat, kann es, sagte er sich, noch andere geben, und diese anderen Werthe von x hat Vieta fast sämmtlich zu finden gewusst, nachdem er mit grosser Wahrscheinlichkeit der Aufgabe diese neue Fassung gegeben hatte. Denselben Werth $\frac{B}{2}$, welchen $\sin\varphi$ besitzt, besitzen auch die Sinuslinien anderer Winkel, nämlich $\sin(360^0 + \varphi)$, $\sin(2 \cdot 360^0 + \varphi)$; $\sin(3 \cdot 360^0 + \varphi)$ u. s. w. und nicht minder auch $\sin(180^0 - \varphi)$, $\sin(360^0 + 180^0 - \varphi)$, $\sin(2 \cdot 360^0 + 180^0 - \varphi)$ u. s. w. Somit ist für $\frac{x}{2}$ als dem Sinus des 45. Theiles des vorgenannten Bogens auch eine viele Möglichkeiten enthaltende Auffindung vorhanden. Dasselbe kann sein $\sin\frac{\varphi}{45}$, $\sin\left(8^0 + \frac{\varphi}{45}\right)$, $\sin\left(16^0 + \frac{\varphi}{45}\right)$ u. s. w., beziehungsweise $\sin\left(4^0 - \frac{\varphi}{45}\right)$, $\sin\left(12^0 - \frac{\varphi}{45}\right)$, $\sin\left(20^0 - \frac{\varphi}{45}\right)$ u. s. w. Wie weit konnte, durfte dieses u. s. w. sich erstrecken? Noch immer war man an die Schranke positiver Gleichungswurzeln gebunden, noch immer gab es Sinuslinien nur für Bögen zwischen 0 und 180°. Demzufolge musste $\varphi < 180^0$, $\frac{\varphi}{45} < 4^0$ sein, und als weitere Folge konnten nur die Werthe

$$\sin\frac{\varphi}{45},\ \sin\left(1 \cdot 8^0 + \frac{\varphi}{45}\right),\ \sin\left(2 \cdot 8^0 + \frac{\varphi}{45}\right),\ \ldots \sin\left(22 \cdot 8^0 + \frac{\varphi}{45}\right)$$

als Gleichungswurzeln gelten oder

$$\sin\left(4^0 - \frac{\varphi}{45}\right),\ \sin\left(4^0 + 1 \cdot 8^0 - \frac{\varphi}{45}\right),\ \ldots \sin\left(4^0 + 22 \cdot 8^0 - \frac{\varphi}{45}\right),$$

welche in umgekehrter Reihenfolge genau dieselben Wurzelwerthe sind, wie vorher. **Es gab deren 23.** Das ist, was Vieta gefunden hat, wenn auch weitaus nicht in der scharfen, leicht durchsichtigen Ausdrucksweise, welche die heutige Sprache seinen Gedanken zu leihen weiss. Wer es versucht, Vieta's Abhandlung durchzulesen, wird sicherlich der Ueberzeugung sich anschliessen, dass es ein wenn auch nur nachträgliches, doch keineswegs geringfügiges Verdienst

Van Roomen's bildet, Vieta's *Responsum* verstanden und gewürdigt zu haben.

Vieta schrieb über verwandte Untersuchungen, welche, wie wir zu zeigen gesucht haben, bei Anfertigung des Responsum schon abgeschlossen gewesen sein müssen, wenn wir auch nicht wissen, wie weit sie zu Papier gebracht waren, *Theoremata ad angulares sectiones*[1]). Erst gegen 1615 hat Anderson, ein Mathematiklehrer in Paris, diese Sätze mit Beweisen versehen. Von Van Roomen ist noch ein *Canon triangulorum sphaericorum*[2]) von 1609 anzuführen, welcher die Weitschweifigkeit des Opus Palatinum eindämmend statt 28 Sonderfälle der sphärischen Trigonometrie deren nur 6 anerkannte. Aehnliches hatte Vieta in seinen vermischten Aufgaben von 1593 geliefert.

Eine gewisse Berechtigung hat es wohl, wenn wir im Anschlusse an die Schriftsteller, welche mit Trigonometrie sich beschäftigten, ganz im Vorbeigehen bemerken, dass die Niederlande von der zweiten Hälfte des XVI. Jahrhunderts an auch Wohnsitz von solchen Gelehrten waren, welche die Entwerfung von Landkarten zu ihrer Aufgabe wählten[3]). Gerhard Mercator (1512—1594) von Rupelmonde an der Schelde diene als Vertreter dieser Richtung. Die ausführlichere Darstellung seiner Projectionsmethode und dessen, was seine Schüler aus ihr gemacht haben, gehört allerdings der Geschichte der Geographie oder der Kartographie an.

69. Kapitel.

Rechenkunst und Algebra.

Wir gehen zur Rechenkunst und zur Algebra über. Die Rechenbücher, mit denen wir es in den früheren Abschnitten zu thun hatten, waren fast durchgängig beiden gewidmet. Sie lehrten das gewöhnliche Rechnen oftmals gar in doppelter Art, so dass das Rechnen auf den Linien und das auf der Feder neben einander hergingen, sie lehrten auch Gleichungen ersten und zweiten Grades auflösen, sie enthielten überdies einen rechnend geometrischen Abschnitt. Gegen Ende der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts gewann die Algebra an Ausdehnung. Rudolf und Stifel in Deutschland, Recorde in England, Cardano und Tartaglia in Italien schrieben Bücher, die

[1]) Vieta pag. 237—304. [2]) Montucla I, 579. [3]) Quetelet pag. 110—126. — Breusing, Gerhard Mercator, der deutsche Geograph (1869).

fast lediglich der Lehre von den Gleichungen gewidmet waren. Dieser Umschwung vollzieht sich in der zweiten Hälfte des XVI. Jahrhunderts immer mehr. Wohl erschienen noch Rechenbücher, welche man ebensogut Lehrbücher der gesammten Mathematik nennen könnte, weil sie neben dem Zahlenrechnen die Lehre von den Gleichungen und Feldmesserisches in sich schliessen, aber eine Theilung der Ziele bringt mehr und mehr gesonderte Bearbeitungen hervor. Geometrie als solche haben wir weiter oben besprochen und haben dabei zum Voraus des Simon Jacob als Rechenmeisters gedacht (S. 581). Einige Jahre vor seinem Rechenbuche erschienen 1556 zwei allenfalls erwähnenswerthe Schriften, ein Hilfsbuch zur Berechnung des Silbergehaltes und des Silberwerthes von Johann Marheld[1]) in deutscher und ein ganz kurzgefasster Lehrgang des Rechnens mit Sexagesimalbrüchen nebst Anweisung zur Auflösung quadratischer Gleichungen von Kaspar Peucer[2]) (1525—1602) in lateinischer Sprache. Das erstere ist ein mit Tabellen versehenes um nicht zu sagen aus Tabellen bestehendes Buch von einer Art, wie uns vorher noch keins begegnete. An dem zweiten ist nichts interessant als der Verfasser, ein Schwiegersohn Melanchthon's, der von 1554—1559 eine mathematische Professur in Wittenberg inne hatte und dann zur medicinischen Facultät überging. Er musste schwer unter dem Verdachte des Kryptocalvinismus leiden und brachte zwölf Jahre in harter Gefangenschaft auf der Pleissenburg in Leipzig zu. Er hatte vermuthlich Valentin Otho den Rath ertheilt (S. 602), Wittenberg noch rechtzeitig zu verlassen und an den Pfälzer Hof nach Heidelberg sich zu begeben.

Von Simon Jacob's Rechenbuch ist uns nur die vervollständigte Ausgabe von 1565 bekannt. So weit wie der Verfasser eines lateinischen Lobliedes, welches der Vorrede zum *New und wolgegründt Rechenbuch* unmittelbar folgt, möchten wir freilich nicht gehen. Er behauptet schlankweg, Koburg sei durch den dort geborenen Jacob zu gleicher Berühmtheit gelangt, wie die beiden anderen fränkischen Städte: Königsberg und Karlstadt durch Regiomontanus und Johannes Schoner und versündigt sich dadurch an Regiomontanus, aber immerhin ist Jacob's Rechenbuch besser als viele, vielleicht als die meisten ähnlichen Werke der gleichen Zeit. Jacob lehrt der Uebung folgend am Anfange auch das Linienrechnen, aber er ist sich der Umständlichkeit desselben wohl bewusst und weiss ferner, wo es passende Anwendung findet, wo nicht. *Wahr ist's, dass sie zu Haussrech-*

[1]) Kästner I, 131. [2]) Ebenda I, 131—132. Allgem. deutsche Biographie XXV, 552—556, Artikel von Wagenmann.

nungen, da man viel Summierens, Aussgebens und Eynnemens bedarff, etwan förderlich erscheinen, aber in Kunstrechnungen, die ein wenig etwas wichtig, zum offtenmal verhinderlich. Nicht sag ich, dass man auff den Linien dieselben Rechnungen nicht auch machen köndte, sondern so viel vortheils ein Fussgänger, der leichtfertig und mit keiner Last beladen ist, gegen einen, der unter einer schwären Last stecket, hat, so viel vortheils hat auch ein Kunstrechner auf oder mit den Ziphern für einem mit den Linien[1]). Damit entschuldigt es Jacob, dass er nunmehr vom Dividiren ab das Linienrechnen ganz bei Seite lasse. Er kennt[2]) die Summe der Quadratzahlen in Gestalt der Formel $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n+1}{3}(1 + 2 + \cdots + 2n)$, sowie die der Kubikzahlen $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ und beruft sich für den Beweis auf das 8. Buch der Arithmetik des Jordanus, welche mithin damals in Deutschland noch gelesen wurde. Die Berufung ist hier allerdings nicht glücklich gewählt, oder mindestens nicht hinreichend begründet, denn im 8. Buche der genannten Arithmetik kommt weder die Summenformel der Quadratzahlen noch die der Kubikzahlen vor. Jacob musste desshalb sagen, auf welche Sätze jener Beweis sich stützen solle. Im 2. Theile ist das Dreieck der Binomialcoefficienten[3]) bis zu denen der 11. Potenz nicht in der Form wie bei Stiefel, dagegen ganz ähnlich wie in Tartaglia's General Trattato von 1556 abgedruckt mit dem einzigen Unterschiede, dass bei Tartaglia die Coefficienten bis zu denen der 12. Potenz sich erstrecken. Jacob beruft sich auf Vorgänger — *und wirt diese Tafel von etlichen also gemacht* — wo er die Enstehungsweise

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$

mittheilt. Einige unbestimmte quadratische Aufgaben[4]) sind so gelöst, dass die an bestimmt gegebenen Zahlen gelehrte Vorschrift zugleich als allgemein giltig bezeichnet ist. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$ sei eine Zahl, welche um die gegebene Zahl a vergrössert oder verkleinert zur Quadratzahl werde; $\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 - a$ werde zur Quadratzahl, wenn man entweder die gegebene Zahl a addire, oder die gleichfalls gegebene Zahl b subtrahire; $\left(\frac{d+1}{2}\right)^2$ und $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$ seien zwei Quadratzahlen von der gegebenen Differenz d u. s. w. Auf diese wenigen von uns besonders hervorgehobenen Dinge beschränkt sich keineswegs das Interesse von Jacob's Rechenbuch. Ungemein viele kaufmänni-

[1]) New und wolgegründt Rechenbuch fol. 10 verso. [2]) Ebenda fol. 15 verso bis 16 recto. [3]) Ebenda fol. 104 verso. [4]) Ebenda fol. 239 recto.

sche Aufgaben, Gesellschaftsrechnungen, Mischungsrechnungen, zusammengesetzte Proportionen und dergleichen sind behandelt, wobei die welsche Praktik nicht zu kurz kommt. Der dritte Theil gehört der Geometrie an, und von ihm war im 68. Kapitel die Rede.

Rechenmeister, wenn auch nicht alle Jacob ebenbürtig, gab es damals in Deutschland, wo man hinblickte. Eine Stadt dürfte aber noch besonders namhaft gemacht werden, in welcher eine vollständige Rechenschule entstanden war: Ulm[1]). Diese Reichsstadt wetteiferte hierin wie in Vielem mit Nürnberg. Die Ulmer Schule ist begründet durch Conrad Marchtaler, der sich 1545 von Wittenberg, wo er studirte, wo ihm aber die Mittel zum längeren Verweilen ausgingen, dem Ulmer Rathe zur Errichtung einer Rechenschule anbot, ein gern und rasch angenommener Vorschlag. Marchtaler's Nachfolger hiess Gallus Spänlein. Dann war Johannes Kraft 1597 Modist und Rechenmeister. Er verfasste mehrere Lehrbücher, die sehr verbreitet waren. Gleichzeitig war auch ein gewisser David Selzlin Rechenmeister, der Lehrer eines bekannteren Schülers, von dem wir im XV. Abschnitte reden: Johann Faulhaber.

In Frankreich sind Schriften von Pierre Forcadel[2]) (S. 549) nennenswerth. Eine 1556—1557 erschienene dreibändige *Arithmétique* enthält manches Eigenthümliche. Zahlentheoretische Aufgaben, wie z. B. die Auflösung von $x^3 + x^2 = y^2$ mittels $x = z^3 - 1$, $y = z(z^2 - 1)$ stehen schon im ersten Bande. Ebendort wird die 5. Potenz der Unbekannten bald *quatriesme quantité*, bald *cinquiesme produit* genannt. Die Binomialcoefficienten sind im dritten Bande als die Ziffern der auf einander folgenden Potenzen von 11 erkannt. Das ist sofort ersichtlich bei $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$. Bei der 5. Potenz hilft sich Forcadel dadurch, dass er gewissermassen zweiziffrige Ziffern einführt und

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \hline 1 & 5 & (10) & (10) & 5 & 1 \end{array}$$

als das Product von $11 \cdot 14641$ betrachtet. Eine *Arithmetique par les gects* von 1558 ist ein Lehrbuch des Linienrechnens.

Das Linienrechnen lehrte auch Jean Trenchant in seinem 1566 in Lyon gedruckten Buche *L'arithmétique departie en trois livres. Ensemble un petit discours des changes avec l'art de calculer aux*

[1]) Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts (Ulm 1867). [2]) Fontès in den Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-lettres de Toulouse, Série 9, T. VI (1894), VII (1895), VIII (1896).

jetons [1]), von dessen Beliebtheit Ausgaben von 1571, 1588, 1602, 1632 zeugen. Jean Trenchant hat auch Zinstafeln herausgegeben[2]).

Petrus Ramus mit seinen *Scholae mathematicae* von 1569 verdient hier gleichfalls einen kleinen Platz. Bei den Gesprächen des Verfassers mit Kaufleuten, welche er bei seinen Spaziergängen besuchte (S. 565), lernte er mancherlei unbedeutende Rechenvortheile, welche er schildert. Wir brauchen ihm darin nicht zu folgen. Das Einzige, was wir dem Buche entnehmen möchten, ist die lakonische Art, in welcher das Multiplikationsergebniss: Minus mal Minus giebt Plus, gerechtfertigt wird: *E duabus negatis fit affirmatus, quia multiplicator non est integer*[3]), aus zwei Negativen wird ein Positives, weil der Multiplicator nicht vollständig ist. Als Beispiel dient

$$(8-9)\cdot(8-9) = -72 + 81 + 64 - 72 = 1.$$

Hier ist uns im Drucke zuerst ein Anklang an das Wort negativ begegnet, und dem Dialectiker, welcher den Satz kannte, dass zwei Negationen bejahen, lag die Benutzung gerade dieses Ausdruckes nahe. Handschriftlich können wir das Wort etwas weiter zurückverfolgen.

Eine Handschrift der Göttinger Bibliothek, welche in den Jahren 1545—1548 geschrieben ist und einst dem 1574 verstorbenen Mathematiker und Schreibkünstler Stephan Brechtel[4]) gehörte, enthält eine muthmasslich auf eine viel ältere Quelle zurückweisende Algebra, die der Namen *numeri affirmativi* und *negativi* sich bedient.

Ein Schüler des Ramus war Salignac[5]), ein zweiter Urstisius[6]), deutsch Wursteisen (1544—1588), von welchen jener 1575, dieser 1579 ein lateinisches Rechenbuch herausgab, an welchen nichts bemerkenswerth erscheint, als die grosse Verehrung ihres Lehrers, welchem übrigens Salignac doch Fehler nachweist.

Eine herzlich unbedeutende Arithmetik und eine Algebra, der man kein besseres Zeugniss auszustellen vermag, hat Lazarus Schoner[7]), ein Sohn von Andreas und Enkel von Johannes Schoner, 1592 herausgegeben. Als Verfasser ist Petrus Ramus genannt, als eine eigene Zugabe des Herausgebers ist aber ein Buch über figurirte Zahlen und ein anderes über das Rechnen mit Sexagesimalbrüchen bezeichnet[8]). Unter figurirten Zahlen versteht Schoner solche, welche

---

1) B. Boncompagni im *Bulletino Boncompagni* I, 150 Note. 2) Bierens de Haan, *Bouwstoffen* etc. II, 186. 3) *Scholae mathematicae* pag. 269. 4) Doppelmayr S. 203. 5) Kästner I, 136—139. 6) Ebenda I, 139—143. 7) Doppelmayr S. 81 Note g. 8) *Petri Rami Arithmetices libri duo et Algebrae totidem a Lazaro Schonero emendati et explicati. Eiusdem Schoneri libri duo: alter, de Numeris figuratis; alter de Logistica sexagenaria* (Frankfurt 1592).

durch Multiplication entstanden sind, die Factoren werdsn Seiten genannt[1]). Eine einzige Bemerkung des Buches lohnt die Mühe des Durchlesens. Schoner beruft sich nämlich einmal auf den 33. Satz des Algorithmus demonstratus des Jordanus[2]). Damit ist festgestellt, dass der Enkel dessen, welcher 1543 den Algorithmus demonstratus herausgab, die Ueberzeugung besass, jene Schrift stamme von Jordanus, und dass er ohne weiteren Zusatz, gleichsam als seinen Lesern hinlänglich bekannt, jener Ueberzeugung Worte lieh. Bedürfte es äusserer Bestätigung für die gegenwärtige Annahme, wer den Algorithmus demonstratus verfasste, so wäre sie, scheint es, hier schwerwiegend gegeben.

Von Tartaglia's General Trattato (S. 517) scheint der erste Band wiederholt besonders herausgegeben worden zu sein. Eine Ausgabe[3]) führt z. B. den Titel: Tutte l'Opere d'Arithmetica del Famosissimo Nicolo Tartaglia (Venedig 1592—1593). Ein ähnlicher, aber natürlich älterer erste Band wurde vielleicht 1577 in Frankreich unter dem Namen der Arithmetik des Tartaglia von einem Guillaume Gosselin[4]) ins Französische übersetzt und mit Erläuterungen versehen. Welcher Art diese sind, mag an einem Beispiele klar werden, welches überdies sehr an dasjenige erinnert, was wir erst aus den Scholae mathematicae des Ramus vorführten. Es sei

$$6 = 8 - 2 = 10 - 4,$$

also müssen $(8-2)\cdot(10-4) = 36$ sein, und es komme nur heraus, wenn Minus mal Plus Minus und Minus mal Minus Plus gebe. Ob es ein anderer Gosselin mit dem Vornamen Pierre war, der 1577 in Paris ein Werk *De arte magna* herausgab, und ob dieses Werk in seinem Titel eine Abhängigkeit von Cardano verrathen sollte, wissen wir nicht.

Franciscus Maurolycus (S. 558) hat 1575 in Venedig eine Arithmetik in zwei Büchern herausgegeben, welche wir wegen eines darin vorkommenden neuen Untersuchungsgegenstandes nebst zugehörigem Kunstausdrucke erwähnen. Sei $p(n)$ eine n^{te} Vieleckszahl, so nennt Maurolycus deren Product in n eine *columna*, Säule, und leitet eine ganze Reihe von Sätzen über solche Säulen von Polygonalzahlen her[5]).

Kaum mit solchen minderwerthigen Leistungen vergleichbar, jedenfalls einen ganz anderen wissenschaftlichen Standpunkt einneh-

---

1) *Figuratus dicitur numerus multiplicatione factus: eiusque factores dicuntur latera* (pag. 217). 2) pag. 234 lin. 16—17. 3) G. Wertheim brieflich. 4) Kästner I, 197—200. — Poggendorff I, 929—930. 5) G. Wertheim in der Zeitschr. Math. Phys. XLIII, Histor.-literar. Abthlg. S. 42.

mend, sind die arithmetischen Schriften von **Simon Stevin**. Bereits 1584 hat er **Zinstafeln** dem Drucke übergeben[1]), welche mit vlämischem Texte in Leiden angefertigt und dem Bürgermeister dieser Stadt gewidmet waren, wenn auch der Druck in Antwerpen in der berühmten Plantin'schen Druckerei erfolgte. In der Leidner Werkstätte des gleichen Hauses erschien alsdann 1585 ein stärkerer Band, vier Schriften in französischer Sprache enthaltend[2]): eine *Arithmétique*, die vier ersten Bücher des Diophant, eine *Practique d'Arithmétique* und eine Abhandlung, welche den Titel *La Disme* führte, und welche laut einer Vorbemerkung ursprünglich vlämisch niedergeschrieben war. Hier haben wir es mit den beiden letzten Schriften des Bandes zu thun, da die *Arithmétique*, eigentlich eine Algebra, erst nachher zur Rede kommt, die Diophantbearbeitung schon (S. 552) erwähnt wurde.

Die *Practique d'Arithmétique* lehrt alle Rechnungen ausführen, welche die Regeldetri zur Grundlage haben, und die nicht im kaufmännischen Leben vorkommen. Als Schriftsteller, welche Derartiges erfolgreich gelehrt haben, nennt Stevin Namen aus verschiedenen Ländern[3]), abermals ein Zeugniss dafür, wie völkergemeinsam damals bereits mathematische Schriften waren. **Cardano**, **Stifel**, **Tartaglia**, **Gemma Frisius**, **Cuthbert Tonstall** sind die Erwähnten, und wenn ausserdem **Juan Peris de Moya** auftritt, so ist das in den damals noch fast spanischen Niederlanden begreiflich. Ueberdies hat die *Aritmetica practica y especulativa* dieses Schriftstellers nur innerhalb der Zeit von 1609 bis 1761 dreizehn Auflagen erlebt[4]). In einer noch älteren Ausgabe von 1590 findet sich auf fol. 227 die Ausziehung der Quadratwurzel unter Anwendung der von Chuquet erfundenen Regel der mittleren Zahlen (S. 352), welche De Moya aus dem vielverbreiteten Lehrbuche des De la Roche (S. 371—374) kennen gelernt haben dürfte[5]). Stevin bezog sich auf den früher erschienenen *Tratado di matemáticas* (Alcala 1573). In letzterem ist auch über die Darstellung der Zahlen mittels Fingerbiegung bei den Arabern gehandelt[6]). **De Moya** ist, wie wir hier einschaltend erwähnen[7]), in der Sierra Morena in St. Stefano geboren und war Canonicus in Granada. Das Hauptgewicht legt Stevin in der *Practique d'Arithmétique* auf Zinstafeln, welche hier in neuem Abdrucke und mit sachlich,

[1]) **Quetelet** pag. 147. [2]) Ebenda pag. 159 Note 1. [3]) **Stevin** I, 181. [4]) G. **Vicuña** in der Bibliotheca mathematica, 1890, pag. 35. [5]) G. **Wertheim**, Die Berechnung der irrationalen Quadratwurzeln und die Erfindung der Kettenbrüche in Zeitschr. Math. Phys. XLII, Supplementheft S. 150. [6]) *Bulletino Boncompagni* I, 312—313. [7]) Vergl. *Bibliotheca Hispana nova auctore D. Nicolao Antonio Hispalensi I. C.* (Madrid 1783) I, 757.

nicht bloss sprachlich verändertem Texte erscheinen[1]). Es sind, genauer gesagt, Rabattirungstafeln, welche den Baarwerth einer Forderung von 10000000 erkennen lassen, welche erst in 1, 2 bis 33 Jahren fällig zu Zinseszins auf die Gegenwart zurückzuführen ist. Der Zinsfuss ist zunächst in ganzen Procenten als 1, 2 bis 16procentig angenommen, dann in Stammbrüchen des Kapitals als $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{16}$ bis herab zu $\frac{1}{22}$, wofür die Ausdrücke dienen *au denier* 15, *au denier* 16 bis zu *au denier* 22, d. h. 1 ₰ Zins für 15, 16, ... 22 ₰ Kapital. Wird umgekehrt nach der Summe gefragt, zu welcher ein Kapital in einer gegebenen Zeit bei Zinseszins zu einem gegebenen Procentsatze anwächst, so soll man mittelbaren Gebrauch von den Tafeln machen. Ist z. B. vermöge derselben 6005739 der Baarwerth von nach 13 Jahren fälligen 10000000 bei 4%, so wächst das Kapital K zu 4% in 13 Jahren zu $\frac{10000000}{6005739}K$ an. Auch Zeitfragen werden beantwortet[2]). In welcher Zeit wird 800 zu $\frac{1}{17}$ Zins zu 2500? Wir verändern 2500 in 10000000, mithin 800 in 3200000 und suchen diese Zahl in der Tafel von $\frac{1}{17}$ Zins. Bei 19 Jahren steht dort 3375605, also ist die gesuchte Zeit länger als 19 Jahre. Den überschüssigen Bruchtheil eines Jahres soll man folgendermassen suchen. Es fand sich eine um $3375605 - 3200000 = 175605$ zu grosse Zahl; 3200000 giebt zu $\frac{1}{17}$ im Jahre $\frac{3200000}{17}$ Zins; 175605 Zins entstehen also in $\frac{17 \cdot 175605}{3200000} = \frac{2985285}{3200000}$ Jahren. Allerdings kleidet Stevin seine Regel etwas anders ein. Statt den Ueberschuss so zu suchen, wie wir es thaten, vervielfacht er das ganze 3375605 mit 17 und dividirt dieses Product durch 3200000, wobei als Quotient $17\frac{2985285}{3200000}$ erscheint, und von diesem Quotient müsse man immer die ganze Zahl, hier also 17, weglassen[3]). Ist die Frage nach dem Zinsfusse gestellt, mittels dessen etwa 1000 in 7 Jahren zu 2000 geworden sind, so sollen die Tafeln folgendermassen benutzt werden[4]). Statt 2000 muss 10000000, also statt 1000 die Zahl 5000000 gesetzt werden, und nun suche man, in welcher Tabelle beim 7. Jahre 5000000 stehe. Bei 10% findet sich 5131582, bei 11% steht 4816585, also ist der Zinsfuss zwischen 10 und 11%, etwas näher bei 10 als bei 11.

Nach der Practique d'Arithmétique kommt auf nur sieben Seiten eine Abhandlung[5]), welche den vielsagenden Titel führt: *La Disme*

[1]) **Stevin** I, 191—197. [2]) Ebenda I, 199. [3]) *lesquels 17 on delaissera pour reigle generale.* [4]) **Stevin** I, 201. [5]) Ebenda I, 206—213.

enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes. Ohne Brüche, nur mittels ganzer Zahlen sollen alle Rechnungen, welche im menschlichen Geschäftsleben vorkommen, ausgeführt werden! Wir wissen heute, dass dieser Ausspruch wirklich gewagt werden durfte, dass Decimalbrüche in der That das leisten, was Stevin versprach. Er war von der grossen Bedeutung des in der *Disme* Gelehrten durch und durch erfüllt. Am Schlusse macht er es den Regierungen zur Pflicht, das Ihrige zu thun, um das neue Rechnen zu einem in allen Fällen unmittelbar anwendbaren zu machen; er verlangt mit dürren Worten Decimaltheilung der Münzen, der Maasse, der Gewichte. Möge, fährt er fort, die Einführung der Decimalbrüche vielleicht nicht so bald in Aussicht stehen, als er es wünsche; das sei sicher, dass ein künftiges Geschlecht, wenn nur die Menschennatur die gleiche bleibe, nicht immer einen so grossen Vortheil ausser Acht lassen werde[1]. Er ahnte nicht, dass es noch zwei Jahrhunderte dauern sollte, bis man anfing, seinen Plan zu verwirklichen, trotzdem möglicherweise ein hervorragender Kirchenfürst, Bischof Ernst von Baiern[2] zu Köln ähnliche Gedanken hegte, zum Mindesten wie Adrian van Roomen in einer Vorrede von 1609 erzählt hat, alle Maasse und Gewichte auf eine einzige geometrische Reihe gründen wollte[3]. Wir greifen mit diesem Zwischensatze in eine damals weit entlegene Zukunft vor, wir thun es, um das ganze Gewicht der Stevinschen Leistung auf uns wirken zu lassen. Der Gedanke decimaler Theilung und decimaler Rechnung, könnte man einwerfen, sei nicht neu gewesen. Gewiss, seit Jahrhunderten hatte das eine Verfahren zur Auffindung angenäherter Wurzelwerthe, hatte die Einrichtung von Sinustafeln, in welchen die Länge des Halbmessers durch eine mit Nullen versehene Einheit dargestellt wurde, darauf vorbereitet. Aber decimal leicht aussprechbare Längen und sogar die Benutzung von Brüchen, deren Nenner aus Einheiten mit Nullen bestehen, sind noch keine Decimalbrüche. Dazu gehört ein Weiteres: die Anwendung der Stellung zur Bezeichnung des verminderten Werthes der einzelnen Zahlzeichen, das darauf beruhende Weglassen der Nenner, und will man daran erinnern, dass auch dieser Gedanke nichts weniger als neu war, dass er bei der fortgesetzten Sexagesimaltheilung der Winkelgrade seit Jahrtausenden bereits in Uebung war, so mag Stevin

[1] *Il est certain que si les hommes futurs sont de telle nature comme ont este les precedens qu'ils ne seront pas tousiours negligens en leur si grand avantage.* [2] Allgemeine Deutsche Biographie VI, 250—257. Artikel von Ennen. [3] Le Paige, *Notes pour servir à l'histoire des mathématiques dans l'ancien pays de Liège* in dem Bulletin de l'institut archéologiques Liégeois XXI, 490—491.

vielleicht an diese Anregung gedacht haben; aber seiner Erfindung ist dadurch, möchten wir sagen, nur höherer Wert beigelegt; denn warum haben jene Jahrtausende nicht geleistet, was Stevin als nothwendig erkannte? So ganz vollständig ist allerdings das Wegbleiben der Nenner bei Stevin noch nicht. Er benutzt noch nicht ein Pünktchen oder Komma, um die Einer von den Decimalbruchstellen zu trennen. Er schreibt vielmehr von der Einheitsstelle an jeder Stelle zur Rechten ein Rangzeichen bei, welches in einer eingeringelten Zahl besteht. Eine eingeringelte 0, 1, 2, 3 bezeichnet die links davon befindliche Stelle als Einer, Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, z. B. 237 ⓪ 5 ① 7 ② 8 ③ bedeutet ihm $237\frac{578}{1000}$. Aber er sieht doch bereits die Möglichkeit einer kürzeren Schreibweise, denn 54 ② bedeutet ihm schon $\frac{54}{100}$ und in der *Practique de Geometrie*, welche in einzelnen Theilen vielleicht auch bis 1585 zurückgeht (S. 572), findet sich[1] 707 ② für $7\frac{7}{100}$. Bei der Ausführung der Rechnungen, der Additionen, Subtractionen, Multiplicationen, Divisionen, werden die eingeringelten Stellenzeiger über die betreffenden Ziffern gesetzt und gelten beispielsweise bei der Addition für sämmtliche Posten, sowie für die aus ihnen gebildete Summe, wodurch die Vereinfachung der Schreibweise sich noch erhöht:

		⓪	①	②	③
	2	7	8	4	7
	3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	3	0	4

Was für Stevin die eigentliche Bedeutung der eingeringelten Stellenzeiger war, werden wir bei Besprechung seiner algebraischen Leistungen sehen.

Ein Pünktchen oder eine den Einern ihre Wölbung zukehrende Halbklammer zur Abgrenzung von Decimalstellen scheint zuerst Joost Bürgi[2] (1552—1632 oder 1633) benutzt zu haben. Er war Schweizer von Geburt, brachte aber den grössten Theil seines Lebens in Kassel und Prag zu. In Kassel war Bürgi Hofuhrmacher des um die Sternkunde hoch verdienten Landgrafen Wilhelm IV., in Prag kaiserlicher Kammeruhrmacher. Dort stand er in persönlichen

[1] Stevin II, 390 letzte Zeile. [2] Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz (Zürich 1858) I, 57—80. Derselbe, Astronom. Mittheilungen Nr. LXXII und LXXXI. Derselbe, *Bibliotheca mathematica* 1889 p. 33. Derselbe, Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur (Zürich 1890) I, 86—88 und 173—175.

Beziehungen zu Kepler. Im Jahre 1622 kehrte Bürgi nach Kassel zurück, wo er den Abend seines Lebens verbrachte. Von den Schreibweisen des Namens Bürgi, Burgi, Byrgi ist durch Funde im St. Galler Archive die erste als die richtige gesichert, wenigstens hat seit dem XVI. Jahrhunderte die Familie stets nur Bürgi geheissen. Die lange Lebenszeit Bürgi's und noch mehr die verschiedenartigen Verdienste, um derenwillen die Geschichte der Mathematik sich mit ihm zu beschäftigen hat, macht es nothwendig, ihn ausser im XIV. auch noch im XV. Abschnitte zu behandeln. Hier haben wir es zunächst nur mit dem Rechner Bürgi zu thun. Was wir von seiner Bekanntschaft mit Decimalbrüchen oben angedeutet haben, beruht zum Theil auf einer nur handschriftlich vorhandenen *Arithmetica*[1]), welche wahrscheinlich kurz nach dem im August 1592 erfolgten Tode des Landgrafen Wilhelm IV., von dem in der Vorrede mit dem Beiworte „hochselicher Gedächtniss" die Sprache ist, verfasst wurde, und welche mit dem Kepler'schen Nachlasse auf die Bibliothek von Pulkowa kam, der sie noch angehört, zum wesentlicheren Theile auf der Aussage von Kepler. Letzterer sagt in seinem 1616 veröffentlichten *Auszug aus der uralten Messe-Kunst Archimedis*[2]), wo er jene Halbklammer den Lesern erklärt: „diese Art von Bruchrechnung ist von Jost Bürgen zu der sinusrechnung erdacht". Darnach müsste man auch Bürgi's Unabhängigkeit von Stevin annehmen, was bei einem ohne wesentlichen Unterricht Aufgewachsenen[3]) glaubhaft ist. In der handschriftlichen Arithmetik dient eine unter der Einerstelle befindliche 0 bisweilen als Abtheilungszeichen $\overset{1414}{0} = 141\frac{4}{10}$. Am gleichen Orte wird die abgekürzte Multiplication gelehrt, wofür das Beispiel sich findet

$$\begin{array}{r|l}
01234 & \\
12358 & \\
\hline
01234 & \\
0246 & 8 \\
037 & 0 \\
06 & 1 \\
0 & 9 \\
\hline
01525 &
\end{array}$$

Hier ist allerdings kein Abtheilungszeichen, und man muss aus dem Ergebnisse folgern, dass eigentlich 0,1234 und 1,2358 die Factoren

[1]) Ein Auszug von Rud. Wolf in dessen Astronom. Mittheilungen Nr. XXXI. [2]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) V, 547. [3]) In der Vorrede zur handschriftlichen Arithmetik sagt Bürgi von sich: „der ich doch Griechischer und lateinischer Sprach unerfahren und derohalben die Jenige, wölliche hiervon geschrieben in Irer rechten Sprach nit vernehmen khönde." Wolf, Astron. Mittheil. Nr. XXXI S. 9.

sind, welche das Product 0,1525 liefern. In Uebereinstimmung mit Kepler's Aussage ist die (S. 604) angeführte Thatsache, dass Pitiscus im Tabellenanhange seiner Trigonometrie von 1608 sowie von 1612 (nicht in den früheren Auflagen) das Decimalstellen abtrennende Pünktchen benutzt hat. In derselben Ausgabe seiner Trigonometrie S. 44 nennt aber Pitiscus den Bürgi in einer Weise, als ob er dessen Unterricht genossen hätte, wenn wir auch nicht anzugeben wissen, wo das stattgefunden haben sollte. Es mag für die Einführung jenes Decimalpünktchens nicht unerinnert bleiben, dass längst bevor man Decimalbrüche schrieb, Pünktchen benutzt wurden, um in sehr grossen Zahlen Gruppen von bald je drei, bald je vier Stellen abzugrenzen. Prätorius hat in seiner Handschrift von 1599 (S. 589) unzweifelhaft selbständig unter der Ueberschrift *Compendiosa multiplicatio duorum inter se sinuum quando factus per 1000 etc. dividendus est* die abgekürzte Multiplication deutlicher und genauer als Bürgi gelehrt[1]).

Neben Vieta, Stevin, Bürgi, Prätorius ist ein fünfter Bewerber um die selbständige Erfindung der Decimalbrüche vorhanden: Johann Hartmann Beyer[2]) (1563—1625) aus Frankfurt am Main. Dieser veröffentlichte 1603 eine mehrfach neu aufgelegte *Logistica decimalis, das ist die Kunstrechnung mit den zehntheiligen Brüchen.* Beyer nimmt deren Erfindung ausdrücklich für sich in Anspruch. Er bemerkt, es habe ihn, indem er sich zuweilen in den mathematischen Künsten erlustiret, die Praxis der Astronomen, geringere Theile als Grade mit 60theiligen Scrupeln zu messen, auf den Gedanken gebracht, dass statt der sechzigtheiligen Brüche, welche einen mühsamen Calculum erfordern, wohl auch eine andere Denomination anwendbar, und dass hierzu die 10 eine sonderlich bequeme und gleichsam privilegirte Zahl sei, welche im Addiren, Subtrahiren, vornehmlich aber im Multipliciren und Dividiren grosse, bei keiner andern Zahl zu findende Vortheile gewähre. Beyer nennt die Bruchtheile: erste, zweite, dritte ... Zehnder, oder erste, zweite, dritte ... Scrupel, oder Primen, Secunden, Terzen ... und bezeichnet sie durch überschriebene Indices, nach den Ganzen setzt er einen Punkt: $8.79\overset{v}{8}$ bedeutet bei ihm also $8\frac{798}{100000}$. Darüber, dass Beyer die Stevin'schen Schriften gekannt hat, ist Zweifel nicht möglich. Die Ausdrücke Prime, Secunde u. s. w. zeigen eine auffallende Aehnlichkeit mit der Practique d'Arithmetique[3]).

[1]) Curtze in Zeitschr. Math. Phys. XL, Histor.-liter. Abthlg. S. 7—11. [2]) Poggendorff I, 183. — Unger S. 105, dem wir die Beschreibung der *Logistica decimalis* wörtlich entnehmen. [3]) Stevin I, 208 Definition 3: *Et chasque dixiesme partie de l'unité de commencement nous la nommons Prime; et chasque dixiesme partie de l'unité de Prime nous la nommons Seconde, et ainsi*

Ueberdies ist auf S. 113 von Beyer's Logistica decimalis sogar von Johann Semsen[1]) Decimalrechnung (auss Anweisung Simon Stevins) im 3., 4., 5. und 6. cap. lib. Geodaes. ausdrücklich die Rede[2]).

Von Stevin's Schriften sei gegenwärtig noch eine erwähnt, *De Apologistica Principum Ratiocinio Italico*, welche 1605 in dem II. Bande der Hypomnemata mathematica erschien[3]). Rechnung der Fürsten nach italienischer Weise hat man den Titel übersetzt. Es ist die Anwendung der doppelten Buchführung auf den Staatshaushalt. Stevin hatte für die Hofhaltung des Prinzen Moritz von Nassau italienische Buchführung eingerichtet, welche ihm entweder aus den Schriften italienischer oder niederländischer und deutscher Gelehrten, oder wahrscheinlicher durch eigene Uebung während der Zeit, in welcher er kaufmännisch sich bethätigte, bekannt war. Waren doch in Nachahmung der Italiener Anleitungen zur doppelten Buchführung von Jan Ympyn 1543, von Valentin Mennher aus Kempten 1550 und 1565 in vlämischer und in französischer Sprache in Antwerpen im Drucke herausgekommen, und waren doch bei Mennher die unpersönlichen Conti neben den persönlichen in fortwährendem Gebrauche[4]). Jetzt wünschte Stevin die Anwendung des in kleineren Verhältnissen Erprobten in einem grossen Staatswesen einzuführen und wandte sich desshalb an den französischen Staatsmann Sully, der ja gerade dem Finanzwesen die grösste Aufmerksamkeit schenkte. Ihm widmete er die Schrift, welche zur Empfehlung jener Buchführung dienen sollte. Wesentlich ist derselben nicht nur das doppelte Eintragen jedes einzelnen Postens, der einmal in einem Soll, das andere Mal in einem Haben vorkommen muss, sondern auch die Einführung der vorerwähnten unpersönlichen Conti. Gerade diese letzteren — z. B. in einem Geschäfte, welches überseeische Producte führt, die Anlegung eines Kaffeeconto, Theeconto, Pfefferconto u. s. w. — erleichtert ungemein

des autres chasque dixiesme partie de l'unité de son signe precedent tousiours en l'ordre un d'avantage.

[1]) Johann Sems, ein Niederländer, verfasste gemeinsam mit Joh. Pietersen Dou eine später auch ins Deutsche übersetzte Geodäsie. Kästner III, 291—293. [2]) Hunrath in Neue philologische Rundschau (herausgegeben von Wagner und Ludwig) 1892, S. 235. [3]) Der II. Band der Hypomnemata erschien 1605, der I. erste erst drei Jahre später 1608. Der Grund lag darin, dass die Schriften des I. Bandes noch ins Lateinische zu übersetzen waren, während die des II. Bandes ursprünglich lateinisch verfasst waren. Ueber die Apologistica vergl. Kästner III, 408—410 und Jäger, Lucas Paccioli und Simon Stevin (Stuttgart 1876), S. 109—137. [4]) Kheil, Ueber einige ältere Bearbeitungen des Buchhaltungs-Tractates von Luca Paccioli (1896) und Kheil, Valentin Mennher und Antich Rocha (1896).

die Uebersichtlichkeit, und diesen Vortheil beabsichtigte Stevin auch in der Staatsbuchführung hervortreten zu lassen, was ihm vollständig und weit rascher gelang, als die Durchsetzung seiner Wünsche nach decimalen Theilungen. Die unpersönlichen Conti, welche Stevin hier einführte, waren die der fürstlichen Küche, der Wohnung, des Marstalls, der Rechnungskammer, ferner solche über das Seewesen, Strafgelder u. s. w.

Wir gelangen zur letzten Gruppe mathematischen Wissens, deren Entwickelung in der zweiten Hälfte des XVI. Jahrhunderts wir zu suchen haben, zur Algebra.

Einige Schriften, welche ihrem Inhalte wie ihrer Entstehungszeit nach fast besser hierher gehören würden, sind vorgreifend im XIII. Abschnitte geschildert worden. Um den Einblick in den Zusammenhang der Erfindungen nicht einzubüssen, rufen wir die Ueberschriften jener Werke, welche uns statt der Inhaltsangabe dienen müssen, und deren Druckjahre ins Gedächtniss zurück. Wir nennen Cardano's Practica arithmeticae generalis von 1539, Stifel's Arithmetica integra von 1544, Cardano's Ars magna von 1545, die von Stifel besorgte II. Auflage der Rudolf'schen Coss von 1553, Recorde's Whetstone of witte von 1556, Cardano's Regula Aliza von 1579, desselben Sermo de plus et minus zwischen 1572 und 1576. Für die letztgenannte ganz kurze Abhandlung war die Zeitbestimmung dadurch gegeben, dass Cardano 1576 starb, während die Abhandlung ein 1572 erstmalig gedrucktes Werk voraussetzt: Bombelli's Algebra. Von diesem Buche und seinem Verfasser haben wir jetzt zu reden.

Was wir freilich von Rafaele Bombelli[1]) aus Bologna wissen, ist kaum mehr, als in diesen Worten bereits gesagt ist. Sein Vorname, seine Heimath sind bekannt. Der Titel seines berühmten Werkes heisst *l'Algebra*. Er schrieb dasselbe auf Aufforderung des ihm geneigten Bischofs von Malfi, und es ist zuerst 1572 in Venedig, dann abermals 1579 in Bologna gedruckt. Damit sind die Notizen über seine Persönlichkeit im Wesentlichen erschöpft.

Der Inhalt der Algebra gliedert sich in drei Bücher. Das 1. Buch besteht aus einer Lehre von den Wurzelgrössen, so weit solche bei der Auflösung von Gleichungen Anwendung findet; insbesondere ist Gewicht auf die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Binomium gelegt, von dessen beiden Theilen der eine eine Quadratwurzel ist. Das 2. Buch ist die eigentliche Algebra, die Lehre von den Gleichungen der vier ersten Grade mit einer Unbekannten. Das 3. Buch ist eine Sammlung von ungefähr 300 Aufgaben, welche zur Einübung des in den beiden ersten Büchern Gelehrten dienen.

[1]) Libri III, 181—184.

Eine wichtige Stelle des ersten Buches ist lange Zeit so gut wie unbeachtet geblieben. In ihr ist die Ausziehung der Quadratwurzel mittels der Kettenbrüche gelehrt[1]), also die Formel

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}$$

Freilich hat sich Bombelli mit dem Zahlenbeispiele $\sqrt{13}$ begnügt. Er findet $a=3$, $b=4$ und als ersten Näherungswerth $3+\frac{4}{6}=3\frac{2}{3}$; dann lässt er $\frac{4}{6}$ zu dem im Nenner befindlichen 6 hinzufügen, so entsteht als weiterer Näherungswerth $3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6}}=3\frac{3}{5}$. Dass Bombelli über die Sache klarer dachte als er sie auszudrücken wusste, geht aus seiner weiteren Behandlung hervor, welche wir in unserem Berichte nur so weit abändern, dass wir die Unbekannte und deren Quadrat durch x und x^2 ersetzen. Ist $\sqrt{13}=3+x$, so folgt $13=9+6x+x^2$, $4=6x+x^2$. Gewöhnlich vernachlässigt man x^2 und schreibt nur $4=6x$, woraus $x=\frac{2}{3}$ folgt. Will jetzt das vernachlässigte x^2 auch in Rechnung gezogen werden, so muss $x^2=\frac{2}{3}x$ oben eingesetzt werden. Man erhält also $4=6x+\frac{2}{3}x=\frac{20}{3}x$ und $x=\frac{3}{5}$. Dieser neue Werth nöthigt zu $x^2=\frac{3}{5}x$ d. h. zu $4=6x+\frac{3}{5}x=\frac{33}{5}x$ nebst $x=\frac{20}{33}$ u. s. w.

Da die Gleichungen dritten und vierten Grades den Schwerpunkt des Werkes bilden, so ist natürlich, dass Bombelli auch in der damals noch in ganz frischem Angedenken stehenden, kaum erst durchgefochtenen Streitsache zwischen Tartaglia auf der einen, Cardano und Ferrari auf der anderen Seite Partei ergreifen musste. Er that es zu Gunsten der beiden Letztgenannten, sei es dass die Gerechtigkeit ihrer Sache ihn überzeugte, sei es dass für ihn auch ins Gewicht fiel, dass Ferrari von Bologna seine eigene Heimath theilte. Tartaglia, so drückt Bombelli sich aus[2]), sei von Natur so gewöhnt gewesen, Böses zu sagen, dass er dachte, ein ehrenvolles Zeugniss

[1]) Wertheim, Die Berechnung der irrationalen Quadratwurzeln und die Erfindung der Kettenbrüche. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Supplementheft S. 149—160 mit Berufung auf Bombelli, Algebra S. 35. [2]) *Di sua natura era cosi assuefatto a dir male, che all' hora egli pensava di haver dato honorato saggio di se, quando che di alcuno havesse sparlato* (S. 5 des Vorwortes *Agli Lettori*).

für sich abgelegt zu haben, wenn er von einem Anderen Uebles geredet hatte. Auffallen muss dabei, dass Bombelli in dem ganzen Buche nicht ein einziges Mal des Scipione Del Ferro gedenkt, der doch auch Bologneser war, und dem nach übereinstimmender Aussage der Gegner die erste Auflösung der kubischen Gleichung geglückt war.

Die rasche Aufeinanderfolge der beiden Ausgaben, in welchen 1572 und 1579 die Algebra erschien, ist Zeugniss dafür, dass sie Käufer fand, eine für diese Käufer selbst schmeichelhafte Thatsache, da Bombelli's Schreibart durch ungewohnte Namen und Bezeichnungen zuerst fast abschreckend wirken musste. Die Unbekannte nannte Bombelli *tanto* oder *quantita*, ihr Quadrat *potenza*, und das dürfte das erste Vorkommen dieses Wortes sein, welches später die allgemeine Bedeutung erhielt, welche ihm heute noch anhaftet, während Bombelli für den weiteren Begriff mit Tartaglia des Wortes *dignita* sich bedient. Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl heisst *piu di meno* oder *meno di meno*, je nachdem sie selbst positiv oder negativ genommen werden soll. Auch in den Bezeichnungen schlug Bombelli andere als die gewohnten Bahnen ein. Es war gewiss ein glücklicher Gedanke von ihm, die aufeinanderfolgenden Potenzen der Unbekannten durch Zahlen anzudeuten, unter welchen ein kleiner Bogen sich befand, also $\overset{1}{\smile}, \overset{2}{\smile}, \overset{3}{\smile}, \overset{4}{\smile}$ zu schreiben, eine Bezeichnung, welche wenig später von Pietro Antonio Cataldi in seinem *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* von 1613, von welchem im 75. Kapitel zu reden sein wird, aber auch schon in seinem *Trattato dell' Algebra proportionale* von 1610 dahin verändert wurde, dass die kleinen Bögen unter den Zahlzeichen wegfielen und letztere durchstrichen wurden. Bei Cataldi war also $\cancel{3}$ die dritte, $\cancel{7}$ die siebente und sogar $\cancel{1}$ die erste Potenz der Unbekannten[1]). Glücklich war auch Bombelli's Gedanke, die Wurzeln aus zusammengesetzten Ausdrücken durch eine besondere Bezeichnung deutlich hervortreten zu lassen. Paciuolo (S. 320) besass bereits das Wort *Radix universalis* mit der Bezeichnung ℞V, um Wurzeln aus vereinigten Grössen zu ziehen, z. B. ℞V7$\tilde{p}$℞14 $=\sqrt{7+\sqrt{14}}$. Cardano in seiner *Practica Arithmeticae generalis* von 1539 unterschied von der *Radix universalis* die *Radix ligata*[2]), bei welcher das erste Wurzelzeichen nur der unmittelbar folgenden Zahl gilt, also zwei Quadratwurzeln addirt werden. Als eigentlich ganz überflüssiges

[1]) G. Wertheim in der Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Histor.-liter. Abthlg. S. 48. [2]) Cardano IV, 14.

Zeichen schrieb Cardano ein L vor die erste Wurzel, z. B. L℞ 7 p ℞ 14 $=\sqrt{7}+\sqrt{14}$. Bombelli war der Meinung, man solle für Radix universalis beide Namen, Radix universalis oder Radix legata, unterschiedlos gebrauchen[1]); er selbst bediente sich später fast ausschliesslich des Ausdruckes Radix legata. Dabei schrieb er ein L hinter das erste ℞, und eine Umkehrung desselben in der Form ⅃ schloss am Ende den ganzen der Wurzelausziehung unterworfenen Ausdruck ab, z. B.

$$\text{℞ L } 7\, p\, \text{℞ } 14 \text{ ⅃} = \sqrt{7+\sqrt{14}}\,.$$

Solche Vereinigungen unter ein gemeinsames Wurzelzeichen wandte er auch bei Wurzeln höheren Grades und auch in Wiederholung an

℞ q L ℞ c L ℞ q 68 p 2 ⅃ m ℞ c L ℞ q 68 m 2 ⅃ ⅃

$$=\sqrt{\left[\sqrt[3]{(\sqrt{68}+2)}-\sqrt[3]{(\sqrt{68}-2)}\right]}\,^{2)},$$

℞ c L 4 p di m ℞ q 11 ⅃ p ℞ c L 4 m di m ℞ q 11 ⅃

$$=\sqrt[3]{(4+\sqrt{-11})}+\sqrt[3]{(4-\sqrt{-11})}\,.^{3)}$$

Wir benutzen dieses letztere Beispiel, um zu zeigen, wie Bombelli an demselben die Wurzelausziehung vollzieht. Sei zunächst allgemein angenommen, man habe es mit $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}$ zu thun, und es sei $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}=p+\sqrt{-q}$. Die Erhebung zum Kubus und Gleichsetzung der reellen wie der imaginären Theile zeigt, dass $a=p^3-3pq$, $\sqrt{-b}=(3p^2-q)\sqrt{-q}$ und dadurch ergiebt sich die zweite Kubikwurzel als $\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}=p-\sqrt{-q}$, die Summe beider also als

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}=p+\sqrt{-q}+p-\sqrt{-q}=2p.$$

Es kommt also ausschliesslich auf die Auffindung von $2p$ an. Multiplicirt man die beiden Kubikwurzeln miteinander, so entsteht $\sqrt[3]{a^2+b}=p^2+q$ und, wenn $\sqrt[3]{a^2+b}=c$ rational ist, $p^2+q=c$, $q=c-p^2$, $-3pq=3p^3-3cp$, $p^3-3pq=4p^3-3cp$. Wir hatten aber als ein erstes Ergebniss $a=p^3-3pq$, mithin ist p eine Wurzel der kubischen Gleichung $4p^3-3cp=a$.

In dem gegebenen Zahlenbeispiele ist

$$a=4,\ b=11,\ c=\sqrt[3]{4^2+11}=3$$

und $\quad 4p^3-9p=4,\ 8p^3-18p=8,\ (2p)^3-9(2p)=8$

[1]) Bombelli, Algebra S. 99. [2]) Ebenda pag. 356. [3]) Ebenda pag. 294—295.

aufzulösen. Kann man, was in diesem Beispiele nicht zutrifft, hieraus mit Leichtigkeit $2p$ ermitteln, so ist die Aufgabe gelöst.

Dagegen bilde ein anderes Mal[1]) $z^3=15z+4$ den Ausgangspunkt der ganzen Untersuchung. Die Formel des Del Ferro lehrt $z=\sqrt[3]{(2+\sqrt{-121})}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{-121})}$. Hier ist

$$a=2,\ b=121,\ c=\sqrt[3]{2^2+121}=5,\ 4p^3-15p=2,\ (2p)^3-15(2p)=4,$$

welches bei $2p=4$ erfüllt wird. Das hier vorhandene Rationalsein von c tritt immer ein, so oft eine kubische Gleichung den Ausgangspunkt bildete. Aus $x^3=mx+n$ folgt nämlich

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)}$$

$$\text{mit } a=\frac{n}{2},\quad b=\left(\frac{m}{3}\right)^3-\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

also $a^2+b=\left(\frac{m}{3}\right)^3$ und $c=\sqrt[3]{a^2+b}=\frac{m}{3}$.

Die Bedeutung der Bombelli'schen Untersuchung liegt offenbar nicht etwa darin, dass sie die kubische Gleichung leichter auflösen lehrte. Wir haben ja gerade an dem zuletzt von uns besprochenen Beispiele gesehen, dass die Umwege nur dahin führten, dass man schliesslich zu derselben Gleichung zurückkehrte, von welcher man ausgegangen war, und deren Wurzel 4 somit unmittelbar hätte gefunden werden können. Aber durch die geführte Untersuchung wurde einleuchtend gemacht, dass jene beiden Kubikwurzeln der Del Ferro-schen Formel der Auswerthung fähig waren, und dass in Folge derselben die imaginären Theile sich weghoben. „Ein ausschweifender Gedanke", sagt Bombelli[2]) „nach der Meinung Vieler. Ich selbst war eine Zeit lang der gleichen Ansicht. Die Sache schien mir auf Sophismen mehr als auf Wahrheit zu beruhen, aber ich suchte so lange, bis ich den Beweis fand."

Die Gleichung vierten Grades behandelt Bombelli[3]) nach Ferrari, und da wir dessen Methode schon früher (S. 509—510) aus Cardano's Ars magna erörtert haben, so dürfen wir uns hier an der Bemerkung genügen lassen, dass alle Einzelfälle in grosser Ausführlichkeit durchgesprochen werden.

Der Auflösung von Gleichungen durch allgemeine Formeln steht die durch Rechnung mit bestimmten Zahlen gegenüber. Auch mit einer solchen Methode hat, wie wir wissen, Cardano es versucht.

[1]) Bombelli, Algebra pag. 293. [2]) Ebenda die drei letzten Zeilen von pag. 293. [3]) Ebenda pag. 353 sqq.

Ein eigenthümliches Verfahren ersann Johannes Junge[1]) aus Schweidnitz, Rechenmeister zu Lübeck. Er soll es 1577 veröffentlicht haben, aber in welcher Weise ist unbekannt. Die Gleichung wird in zwei Glieder getheilt, so dass die höchste Potenz der Unbekannten für sich allein das eine Glied bildet. Alsdann muss die Gesammtheit aller anderen wieder zu einem Gliede vereinigten Bestandtheile wiederholt durch einen angenommenen Werth der Unbekannten sich theilbar erweisen, wenn die Annahme richtig war. Ein Beispiel, welches Raimarus Ursus (S. 593) in einem nachgelassenen, 1601 gedruckten Werke *Arithmetica analytica vulgo Cosa* aufbewahrt hat, lautet in der verlangten Form: $x^3 = 486 - 90x - 21x^2$. Ist nun $x = 3$ richtig gewählt, so kann $486 = 3 \cdot 162$ mit $-90x$ zu $3(162 - 90) = 3 \cdot 72$ vereinigt werden; $3 \cdot 72$ aber $= 3^2 \cdot 24$ vereinigt sich sodann mit $-21x^2$ zu $3^2(24 - 21) = 3^3$, welches mit x^3 übereinstimmt. Freilich gilt von diesem Verfahren in vollem Maasse, was Raimarus darüber sagt, dass es „etwan Conjectural vnd durch etzliche, biszweilen auch wol durch viele mutmassungen vnd gleichsam vorattungsweiss verrichtet wird“.

Simon Stevin's im Jahre 1585 gedruckter Band begann mit einer Schrift, die den Titel führte: *L'arithmétique contenant les computations des nombres arithmetiques ou vulgaires: aussi l'Algebre avec les equations des cinq quantitez.* Die letzten Worte geben die Grenze an, bis zu welcher das Buch sich erstreckt, bis zu Gleichungen vierten Grades, da diese aus fünf Einzelgliedern bestehen können. Darüber hinaus oder, wie Stevin sagt[2]), über Lois de Ferrare, d. h. Ludovico Ferrari, sich zu erheben, sei ihm nicht gelungen. Er kannte dessen Leistungen offenbar aus Bombelli, welchen er anführt. An Bombelli schliesst Stevin sich im Gebrauche des Wortes *potence* wie in dem von *dignites* an. In ersterer Beziehung geht aber Stevin weiter, da ausser *potence* für das Quadrat der Unbekannten auch *potence cubique*[3]) für deren dritte Potenz bei ihm vorkommt. Die Bezeichnung der Potenzen stammt bei Stevin ausgesprochenermassen[4]) aus der gleichen Quelle. Er benutzt dazu die eingeringelten Zahlen ①, ②, ③ u. s. w. Der ⓪ habe Bombelli sich nicht bedient, sie entspreche der Zahl. Auch der Begriff eines eingeringelten Bruches fehlt nicht, wenngleich Stevin ihn nicht anwendet. Er sagt ausdrücklich[5]), ein eingeringeltes $\frac{2}{3}$ würde das Symbol für die Kubikwurzel aus dem Quadrate der Unbekannten sein. Kommen mehrere Unbekannte in

[1]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 84—87. — Treutlein, Deutsche Coss, Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplem. S. 99—102. — Allgem. Deutsche Biographie XIV, 705. [2]) Stevin I, 6. [3]) Ebenda I, 58. [4]) Ebenda I, 8. [5]) Ebenda I, 64.

einer Aufgabe vor, so nennt Stevin[1]) die zweite, dritte derselben *Quantite posposee seconde, tierce* und schreibt 1 sec ①, 1 ter ① u. s. w. Auch für Producte solcher Unbekannten sieht Stevin eine Bezeichnung mittels des Multiplicationsbuchstabens M vor, z. B.

$$3xyz^2 = 3 \text{ ① } M \text{ sec ① } M \text{ ter ②}.$$

Dividiren soll man durch den Divisionsbuchstaben D, z. B.

$$\frac{5x^2z^2}{y} = 5 \text{ ② } D \text{ sec ① } M \text{ ter ②}.$$

Wir kommen hier auf die Anwendung solcher eingeringelter Zahlen zurück, welche die Rangordnung der Decimalbrüche in Stevin's *Disme* andeuten. Es kann bei dem gleichzeitigen Erscheinen der Disme mit der Algebra kaum einem Zweifel unterworfen sein, dass Stevin, wenn er es auch nirgend ausdrücklich sagt, jene Stellenzeiger als die aufeinander folgenden Potenzen von $\frac{1}{10}$ sich dachte.

Hatte Bombelli ein Zeichen der Zusammengehörigkeit L J eingeführt, so führte Stevin eine aus zwei mit den gekrümmten Seiten aneinanderstossenden Klammern gebildetes Trennungszeichen[2]) ein. Für die Quadratwurzel schrieb er mit Stifel $\sqrt{\ }$, und nun bedeutet $\sqrt{}9$)(②, dass das Wurzelzeichen zwar auf 9, aber nicht auf ② sich beziehen solle, dass also $3x^2$ gemeint sei. Neben diesen für die Weiterbildung algebraischer Form nicht ganz unwichtigen Dingen, zu welchen noch der Name *Multinomie algebrique*[3]) zu zählen wäre, finden wir bei Stevin auch sachlich Bemerkenswerthes.

Da erwähnt er[4]), die Summe zweier Quadratwurzeln könne der zweier anderen Quadratwurzeln nicht gleich sein, wenn die beiden ersten Radicanden theilerfremd seien, d. h. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$ erfordere $a = m^2 f$ und $b = n^2 f$.

Da sagt er[5]), man könne den grössten Gemeintheiler zweier algebraischer Multinomien finden. Nonius freilich habe es nicht fertig gebracht (S. 389), aber man brauche nur das Verfahren einzuschlagen, welches bei ganzen Zahlen zum Ziele führe. Soll z. B. der grösste Gemeintheiler von $x^3 + x^2$ und $x^2 + 7x + 6$ gesucht werden, so muss man ersteren Ausdruck durch letzteren dividieren. Der Quotient ist x und $-6x^2 - 6x$ bleibt als Rest. Mit diesem Reste dividiert man in $x^2 + 7x + 6$. Der Quotient ist $-\frac{1}{6}$ und $6x + 6$ bleibt als Rest. Letzterer ist in $-6x^2 - 6x$ ohne Rest enthalten, giebt also den gesuchten Gemeintheiler. Die Frage ist, wenn auch leicht zu beantworten, keine müssige, wodurch

[1]) Stevin I, 7. [2]) Ebenda I, 10. [3]) Ebenda I, 7. [4]) Ebenda I, 51. [5]) Ebenda I, 56.

Stevin, wodurch vor ihm Nonius sich veranlasst fühlte, überhaupt diese Aufgabe sich zu stellen? Es handelte sich dabei offenbar um die Auflösung von Gleichungen höherer Grade. Die ersten Versuche zu deren Bewältigung liefen bis zu Cardano's Buch von 1539 und Stifel's Arithmetica integra einschliesslich darauf hinaus, durch glückliches Errathen gewisser hinzuzuaddirender Ergänzungen solche Formen einander gleichwerthiger Ausdrücke hervorzubringen, welche ein Weglassen von gemeinschaftlichen Factoren gestatteten. War man nun im Stande, einen solchen gemeinschaftlichen Factor leicht aufzufinden, so mochte man wähnen, damit um einen wesentlichen Schritt in der Lehre von den höheren Gleichungen weiter gekommen zu sein.

Die Auflösung quadratischer Gleichungen beruht schliesslich auf einer auf beiden Seiten der Gleichung vorzunehmenden Ergänzung, und Stevin hat sie von diesem Gesichtspunkte aus gelehrt[1]), wenn er auch hinzusetzte, insgemein begnüge man sich damit, die schon abgeleitete Regel anzuwenden.

Bei den kubischen Gleichungen machte Stevin auf die Schwierigkeit aufmerksam, welche das Auftreten negativer Zahlen unter dem Quadratwurzelzeichen verursache[2]). Cardano habe in seiner Regula Aliza, Andere anderwärts gesucht, der Schwierigkeit Herr zu werden. Er finde es unnöthig darauf einzugehen, weil eine allgemeine Regel noch nicht gefunden sei — in unserem Berichte über die Algebra Bombelli's haben wir das Zutreffende dieser Behauptung erkannt —, Zufallerfolge verdienten aber nicht, dass man sich lange mit ihnen aufhalte.

Bei manchen Aufgaben, heisst es anderwärts[3]), gebe es auch Auflösungen durch Minus (*solutions par* —), $x^2 = 4x + 21$ werde z. B. durch $x = -3$ erfüllt.

Endlich heben wir eine näherungsweise Gleichungsauflösung hervor[4]), deren Stevin sich als seiner Erfindung rühmt, und welche jedenfalls den theoretischen Vorzug besitzt, den gesuchten Wurzelwerth allmälig in seinen einzelnen Stellen von der höchsten zur niedersten absteigend entdecken zu lassen. Sei etwa

$$x^3 = 300x + 33915024$$

aufzulösen. Setzt man nach einander $x = 1$, $x = 10$, $x = 100$, so wird jedesmal x^3 kleiner und erst bei $x = 1000$ grösser ausfallen als der Werth von $300x + 33915024$. Folglich weiss man schon, dass x zwischen 100 und 1000 liegt, mithin dreiziffrig ist. Man sucht die Ziffer der Hunderter, welche einen der Werthe 1, 2, ... 9 haben

[1]) Stevin I, 69. [2]) Ebenda I, 71—72. [3]) Ebenda I, 77. [4]) Ebenda I, 88.

muss. Die 1 hat sich schon als zu klein gezeigt, man macht also den Versuch mit 2, 3, 4 und erkennt, dass 2, 3 zu wenig, 4 zu viel giebt, also liegt die Unbekannte zwischen 300 und 400. Die Zehner von 1 an durchprobierend ermittelt man 310, 320 als zu klein, 330 als zu gross, sodass man berechtigt ist, 32 als richtigen Anfang anzunehmen und die Einer von 1 an in Angriff zu nehmen. 321, 322, 323 geben zu wenig, 324 stimmt ganz genau und ist daher der Werth der Unbekannten. Stevin macht zwei wichtige Zusatzbemerkungen. Erstens sei es möglich, dass die Unbekannte einen ganzzahligen Werth überhaupt nicht besitze, dann solle man die folgenden Decimalstellen sich verschaffen, was genau nach dem gleichen Verfahren geschehe, welches man zur Ermittelung der höheren Stellen einschlug, und das gleiche Verfahren führe auch zum Ziele, wenn die Unbekannte kleiner als 1 sei. Zweitens komme es vor, dass man sich begnügen müsse, dem Werthe der Unbekannten unendlich nahe zu kommen, ohne ihn zu erreichen[1]), und das sei in zwei Fällen möglich, entweder bei Brüchen wie $\frac{5}{6}$, die in einen genau gleichen Decimalbruch sich nicht verwandeln lassen, oder bei Wurzelgrössen, welche irrational sind.

Stevin's Bearbeitung des Diophant haben wir hier nur so weit zu erwähnen, als wir bemerken, dass die gleichen Zeichen dort angewandt sind, welche der Algebra dienen, dass ein Gleichheitszeichen da wie dort fehlt, wiewohl Stevin bei Xylander, dessen lateinische Uebersetzung er nur weiter ins Französische übertrug[2]), ein solches hatte kennen lernen müssen.

Der grösste Algebraiker der Zeit war Vieta. Seine erste algebraische Schrift *In artem analyticam isagoge*[3]), Einleitung in die analytische Kunst, erschien 1591. Sie wollte nur einen Theil eines grösseren Werkes unter dem Namen der wiederhergestellten mathematischen Analysis oder der neuen Algebra bilden. Die Titel sämmtlicher Theile sind der Widmung vorausgeschickt, welche in schwülstigem Tone an die aus dem Geschlechte Melusinens stammende Fürstin Katharina von Rohan gerichtet ist. Wir bemerken dabei, dass überhaupt die Sitte der Zeit in Frankreich und Deutschland einer einfachen, klaren Sprache abhold war. Je mehr dem Griechischen entlehnte Neubildungen, je mehr Floskeln, je farbenreichere

[1]) *Il peut avenir qu'on pourra approcher infiniment au requis sans toutesfois par ceste maniere pouvoir parvenir a la parfaicte solution.* [2]) Stevin I, 102. [3]) Vieta pag. 1—12. — F. Ritter hat eine mit Anmerkungen bereicherte Uebersetzung im *Bullet. Boncompagni* I, 225—244 erscheinen lassen, welcher der Originaldruck von 1591 zu Grunde liegt.

mythologische Bilder vorkamen, für um so vollendeter galt eine Abhandlung. Man muss dies wissen, um Stevin's unübertreffliche Klarheit würdigen, um Vieta's und Anderer Unverständlichkeit verzeihen zu können. Ob jene 1591 dem Titel nach vorhandenen Schriften auch thatsächlich alle bereits druckreif waren, wissen wir nicht, wahrscheinlich ist es wohl. Dann stammen aus jener frühen Zeit die 1593 gedruckten *Effectionum geometricarum canonica recensio* (S. 584) und das *Supplementum geometriae*, ebenso die gar erst 1615 mit Beweisen versehenen *Theoremata ad angulares sectiones* (S. 608), welche selbst nur ein Auszug aus einer dreitheiligen Schrift waren[1]), von der das Meiste verloren ging. Verloren sind auch die 1591 genannten 7 ersten Bücher der Antworten auf verschiedene Fragen[2]), zu welchen offenbar als Fortsetzung das 1593 gedruckte 8. Buch (S. 586) gehörte, jedenfalls ein ungemein zu beklagender Verlust, wenn die ersten Bücher dem letzten nur halbwegs ebenbürtig waren. Die Isagoge ist, wie ihr Name es aussprechen soll, wirklich nur eine Einleitung. Nachdem die Analysis oder Zetetik als diejenige Kunst des Auffindens geschildert worden, welche von dem als bekannt angenommenen Gesuchten ausgeht, nachdem eine Reihe von beweislos einleuchtenden Sätzen (Gleiches und Gleiches durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division verbunden giebt Gleiches. Vier Grössen, von denen zwei zu einem Producte vereinigt das gleiche Product wie die beiden anderen geben, stehen in Proportion u. s. w.) zusammengestellt ist, spricht Vieta im III. Kapitel das erste und allbezügliche Gesetz der Homogeneität aus[3]). Den Griechen war dieses Gesetz ursprünglich ein selbstverständliches. Nur Längen können Längen, nur Flächen Flächen, nur Körper Körpern, nur Verhältnisse Verhältnissen verglichen werden. Später wich man von diesem Gesetze, das eine unbeabsichtigte aber zuverlässige Beglaubigung ausgesprochener Sätze mit sich führte, ab. Heron vereinigte Längen und Flächen zu einer Summe (Bd. I, S. 376), Diophant gestattete sich das Gleiche (Bd. I, S. 454). Mag sein, dass Vieta gerade beim Studium des Diophant, den er in der Isagoge selbst anführt[4]), auf das Unstatthafte aufmerksam wurde. Jedenfalls hat er zuerst als

[1]) *Analyse des sections angulaires distribuée en trois parties* nach Ritter's Uebersetzung. [2]) *Sept livres de différentes réponses sur des sujets mathématiques.* [3]) *Prima et perpetua lex . . . quae dicitur lex homogeneorum.* Ueber dieses Gesetz vergl. Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* III, 9—19, wo allerdings viel mehr hinein- als herausgelesen wird. [4]) Vieta pag. 5: *Haec est λεῖψις Diophanto, ut adfectio adiunctionis ὕπαρξις.* Die hier vorkommenden griechischen Ausdrücke beweisen, dass Vieta den Diophant aus einem griechischen Texte kannte.

Gesetz erkannt und ausgesprochen, was meistens nur in dunklem Gefühle der Richtigkeit geübt worden war, und dieses Verdienst ist weit grösser als Mancher denken mag. Nachdem das Gesetz der Homogeneität einmal aufgestellt war, hat Vieta im IV. Kapitel seine Folgerungen daraus gezogen. Dieses Kapitel ist den Vorschriften der Logistica speciosa, *De praeceptis Logistices speciosae*, gewidmet, und damit war ein Kunstausdruck geschaffen, der fast allein von den zahllosen Neuerungen Vieta's ihn überlebte. Logistik war von Alters her Rechenkunst. Vieta unterschied zwei Gattungen derselben. Sie war *numerosa*, wenn mit Zahlen, *speciosa*, wenn mit versinnlichenden Zeichen von Raumgebilden[1]), z. B. mit Buchstaben gerechnet wurde. Die Buchstaben, lauter Initialen des lateinischen Alphabets, stellen demnach Gebilde vor, welche dem Homogeneitätsgesetze unterworfen sind. Es sind Grössen, nicht Zahlen. Auch Tartaglia hob den Unterschied zwischen Zahlen und Quantitäten hervor (S. 519). Für jene bediente er sich der Wörter *multiplicare* und *partire*, für diese gebrauchte er *ducere* und *misurare*. Aehnlich unterscheidet Vieta. Die Grundsätze von Kapitel II enthalten die Ausdrücke *multiplicare* und *dividere*, im Kapitel IV heisst es *ducere* und *adplicare* vielleicht mit Anlehnung an Tartaglia, wahrscheinlicher der Euklidausgabe des Campanus II, 2 beziehungsweise I, 44 entnommen. Das Homogeneitätsprincip hat freilich, und auch dafür liefert Kapitel IV die Belege, den rein geometrischen Untergrund längst aufgegeben. Nicht auf Mannigfaltigkeiten von 1, 2 oder 3 Abmessungen beschränkt sich die Algebra. Fast beliebig hoher Dimension können die in einer Gleichung auftretenden Glieder sein, wenn nur alle gleich hoher. Die von Vieta gelieferten Beispiele erstrecken sich bis zum *solido-solido-solidum*, d. h. bis zur 9. Potenz der behandelten Grösse, da die einzelnen Bestandtheile addirt werden, wie es von Diophant geübt wurde, und nicht multiplicirt, wie es bei den Italienern und deren Nachahmern, z. B. Stifel geschah. Die Vervielfachung wird durch das Wort *in*, die Theilung durch den Bruchstrich angedeutet. Das Produkt von $\frac{A \text{ planum}}{B}$ in $\frac{Z \text{ quadratum}}{G}$ ist $\frac{A \text{ planum}}{B \text{ in } G}$ in Z quadratum u. s. w. Als Zeichen der Addition und Subtraction sind $+$ und $-$ benutzt, ausserdem giebt es noch $=$ als Zeichen der Differenz zweier Grössen[2]), ohne dass man anzugeben braucht, welche von beiden die grössere sei. Im V. Kapitel kommt Vieta auf die eigentlichen Gleichungen zu reden. Die gesuchten Grössen, *magnitudines quaesititiae*, werden durch die Vocale A, E, I,

[1]) *per species seu rerum formas.* [2]) Vieta pag. 5.

O, V, Y dargestellt, die gegebenen, *datae*, durch Consonanten B, G, D u. s. w.[1]). Vielleicht suchte Vieta durch diese Anwendung der Vocale sich mit der Uebung von Ramus, dem damals in Frankreich hochgeschätzten Schriftsteller, in Einklang zu setzen, der die gleichen Buchstaben (S. 564) bei der Figurenbezeichnung bevorzugte. Von den Gesetzen, welche Vieta ausspricht, sei nur eines erwähnt[2]): *Antithesi aequalitatem non immutari.* Antithesis heisst nichts Anderes als das Hinüberschaffen eines Gliedes mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite, welches also als ein die Richtigkeit der Gleichung nicht Beeinträchtigendes gestattet wird. Das VI., VII., VIII. Kapitel geben zu besonderen Bemerkungen wenig Anlass. Höchstens dass aus dem letztgenannten anzuführen wäre, dass die Gleichung dazu führe, das Geheimniss der Winkeltheilung zu enthüllen, ohne desshalb Gerades mit Krummem zu vergleichen, wogegen das Homogeneitätsgesetz sich zu sträuben scheine[3]).

Unter die 1591 gleichfalls angeführten Schriften gehören *Ad Logisticen speciosam notae priores* und *posteriores*. Es ist nicht wahrscheinlich, dass eine Veröffentlichung zu Lebzeiten Vieta's stattfand, und der zweite Theil ist dann überhaupt nie bekannt geworden[4]), nur der erste ist in der Gesammtausgabe von 1646 vorhanden[5]). Man kann diese Anmerkungen zur Logistica speciosa füglich in zwei Abtheilungen trennen. Die erste Abtheilung lehrt Multiplicationen von Summen in Differenzen und Potenzerhebungen von Binomien, dann vom 25. Satze an auch Berechnung von Ausdrücken von der Gestalt $(A+B)^m + D^n(A+B)^{m-n}$. Die letztgenannten geben zur Einführung eines Wortes Gelegenheit. Im einfachsten Falle

$$(A+B)^2 + D(A+B)$$

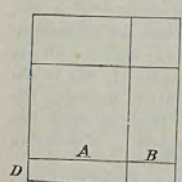

Fig. 126.

handelt es sich geometrisch gesprochen (Figur 126) um das Quadrat einer zweitheiligen Grösse, welche durch Anfügung eines Rechteckes vergrössert ist, dessen eine Seite in Gestalt jener zweitheiligen Quadratseite gegeben ist, während die andere gleichfalls gegebene Seite mit an der Bildung der Figur betheiligt ist. Vieta nennt[6]) sie offenbar aus dem hier erörterten, wenn auch bei ihm nicht ausgesprochenen Grunde *longitudo coefficiens*, und damit war das Wort Coefficient in die Wissenschaft eingeführt. Die zweite Abtheilung

[1]) Vieta pag. 8 No. 5. [2]) Ebenda pag. 9 Propositio I. [3]) Ebenda pag. 12 No. 27 und 28. [4]) Ritter im *Bullet. Boncompagni* I, 245. [5]) Vieta pag. 13—41. Die französische Uebersetzung von Ritter l. c. pag. 246—276. [6]) Vieta pag. 23 und öfter.

beginnt mit dem 45. Satze und handelt von der Entstehung rationaler rechtwinkliger Dreiecke aus einander. Damit aus zwei Zahlen A, B, welche die Wurzeln des rechtwinkligen Dreiecks heissen[1]), ein solches gebildet werde, benutzt man sie als Anfangsglieder einer geometrischen Reihe, deren drittes Glied folglich $\frac{B^2}{A}$ heisst. Summe und Differenz der beiden äusseren Glieder und das doppelte mittlere Glied (in Vieta's Schreibweise: $A + \frac{B \text{ quadrato}}{A}$, $A = \frac{B \text{ quadrato}}{A}$, $B\,2$, indem der Zahlenfactor 2 dem B nachgesetzt wird) sind alsdann die drei Seiten des rationalen Dreiecks. Vervielfache man Alles mit A, damit sämmtliche Seiten auf dieselbe Benennung gebracht seien, *ut ad idem genus adplicationis latera quaeque revocentur*, so heissen die Seiten: A quadr. + B quadr., A quadr. = B quadr., A in B 2. Nun seien zwei rechtwinklige Dreiecke Z, B, D und X, F, G gegeben, d. h. es sei, um von jetzt an die heute gewöhnliche Schreibweise anzuwenden, $Z^2 = B^2 + D^2$, $X^2 = F^2 + G^2$. Dann ist auch $(ZX)^2 = (BG + DF)^2 + (BF - DG)^2 = (BF + DG)^2 + (BG - DF)^2$ mit zweifacher Zerlegung des Productes zweier Quadratsummen in eine neue Quadratsumme, wie sie seit Diophant (Bd. I, S. 451) bekannt war, oder es ist aus zwei Dreiecken in doppelter Art ein drittes gebildet. Statt zweier verschiedener Dreiecke kann man dasselbe Dreieck, etwa A, B, D, zweimal nehmen[2]). Das eine neue Dreieck heisst dann A^2, $2BD$, $B^2 - D^2$, und es hat die Eigenschaft, dass sein einer spitzer Winkel doppelt so gross ist, als ein spitzer Winkel des ursprünglichen Dreiecks. Vieta beweist diese Winkeleigenschaft nicht, er spricht sie nur aus; bei seiner uns aus der Auflösung der Aufgabe Van Roomen's bekannten Gewandtheit, mit trigonometrischen Functionen zu rechnen, kann aber nicht gezweifelt werden, dass sein Gedankengang etwa folgender war. Hiess im ursprünglichen Dreiecke der eine spitze Winkel α, so war $\sin\alpha = \frac{D}{A}$, $\cos\alpha = \frac{B}{A}$, $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha = \frac{2BD}{A^2}$ und also im neuen Dreiecke der Winkel 2α nachgewiesen, als dessen Cosinus $\frac{B^2 - D^2}{A^2}$ erscheint. An diesem Gedankengange ist um so weniger zu zweifeln, als Vieta der eben erörterten Aufgabe als nächste die der Bildung des Dreiecks mit dreifachem Winkel[3]) anschliesst. Durch Vervielfachung von $A^2 = B^2 + D^2$ mit $(A^2)^2 = (2BD)^2 + (B^2 - D^2)^2$ erhält er

[1]) Vieta pag. 33: *Triangulum rectangulum a duabus radicibus effingere.* [2]) Ebenda pag. 36: *A duobus triangulis rectangulis aequalibus et aequiangulis tertium triangulum rectangulum constituere.* [3]) *Triangulum anguli tripli.*

$$(A^3)^2 = (B^3 - 3BD^2)^2 + (3B^2D - D^3)^2$$

und

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha$$
$$= \frac{D}{A} \cdot \frac{B^2 - D^2}{A^2} + \frac{B}{A} \cdot \frac{2BD}{A^2} = \frac{3B^2D - D^3}{A^3},$$

was wirklich für den einen spitzen Winkel des neuen, dritten Dreiecks zutrifft. Sogar zum allgemeinsten Falle erhebt sich Vieta[1]) und erkennt, dass die stets nach gleicher Vorschrift vorgenommene Bildung des n-ten Dreiecks aus dem $(n-1)$-ten und dem ersten einen spitzen Winkel $n\alpha$ entstehen lässt. Mit anderen Worten: Vieta kannte die Formeln, welche $\sin n\alpha$ und $\cos n\alpha$ aus $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ zusammensetzen, nur dass er D statt $\sin\alpha$ und B statt $\cos\alpha$ schrieb und die Hypotenuse des ersten Dreiecks A, die des n-ten Dreiecks A^n nannte. Die noch folgenden Sätze können, als von weitaus geringerer Wichtigkeit, übergangen werden.

Auch fünf Bücher Zetetica[2]), von welchen ein Abdruck von 1593 bekannt ist, müssen 1591 vorhanden gewesen sein. Man schildert sie am Zutreffendsten als eine Sammlung von Aufgaben, welche Diophant entlehnt oder nachgebildet sind. Als einzelnes Beispiel erwähnen wir die 2. Aufgabe des V. Buches[3]), welche drei in arithmetischer Progression stehende Quadratzahlen verlangt. Als das erste Quadrat setzt Vieta A^2, als das zweite $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, das dritte muss folglich $A^2 + 4AB + 2B^2$ heissen und möge $(D-A)^2$ sein. Diese letzte Gleichung giebt, wie ohne weitere Zwischenrechnung gesagt wird, $A = \frac{D^2 - 2B^2}{4B + 2D}$. Dann heisst es sofort weiter: die Seite des ersten Quadrates ist folglich proportional, *similis*, $D^2 - 2B^2$, die des zweiten proportional $D^2 + 2B^2 + 2BD$, die des dritten proportional $D^2 + 2B^2 + 4BD$.

Immer wieder dem gleichen Jahre 1591 gehören nach dem öfters von uns benutzten Inhaltsverzeichnisse die Abhandlungen *De aequationem recognitione et emendatione*[4]) an, welche erst 1615 aus Vieta's Nachlasse durch Anderson dem Drucke übergeben worden sind. Die Bezeichnung wechselt in diesen Abhandlungen ebenso wie der Druck. Während der eigentliche Text die Buchstabenbezeichnung in der Art durchführt, wie wir sie als Vieta's Eigenthum kennen gelernt haben (also Vocale für Unbekannte, Consonanten für Bekann-

[1]) Vieta pag. 37: *Consectarium generale in diductionibus triangulorum rectangulorum.* [2]) Ebenda pag. 42—81. [3]) Ebenda pag. 76: *Invenire numero tria quadrata aequo distantia intervallo.* [4]) Ebenda pag. 84—126 die erste Abhandlung: *De recognitione* und pag. 127—158 die zweite: *De emendatione.* Ihre Zusammengehörigkeit tritt in den Benennungen als Tractatus primus und Tractatus secundus hervor.

tes, den Buchstaben nachgesetzte Silben quad., cub. u. s. w. zur Bezeichnung der Potenzirung, diesen wieder nachgesetzt Zahlenfactoren) enthalten jedem Kapitelchen beigefügte Anmerkungen Zahlenbeispiele, welche ausser durch die Verschiedenheit der Typen auch dadurch sich unterscheiden, dass in ihnen die Unbekannte und ihre Potenzen durch N (numerus), Q, C mit ihnen vorausgehenden Zahlenfactoren ausgedrückt werden. Im Texte steht z. B. $Aq4$, während die Anmerkung $4Q$ enthält. Man könnte geneigt sein, diese Anmerkungen als von Anderson hinzugefügt anzunehmen, dem Vieta's Notizbücher, *Adversaria*, zur Herausgabe anvertraut worden waren, wenn nicht gerade dieser selbst in einer Vorrede, welche in die Gesammtausgabe von 1646 übergegangen ist, erklärte, sowohl die Gleichungen als die nachträglichen Beispiele[1]) hätten sämmtlich von ihm nochmals nachgerechnet werden müssen. Uns gelten desshalb also auch die Anmerkungen als von Vieta herrührend, und darin machen uns die einleitenden Worte des Herausgebers der Gesammtwerke nicht irre, „das Folgende sei, was er über die Anmerkungen Anderson's hinaus zu bemerken gefunden habe“[2]), denn wir verstehen unter diesen Anmerkungen Anderson's einen Zusatz am Schlusse der Emendatio, der ausdrücklich dessen Namen führt[3]). Aus der Recognitio heben wir nun Folgendes hervor. Vieta spricht die Aufgabe der eigentlichen Gleichungsauflösung in anderer Form aus. Nicht um die Auffindung einer Unbekannten handelt es sich, sondern um Herstellung einer aus einer gegebenen Anzahl von Gliedern bestehenden geometrischen Progression. Aehnlich war die Fragestellung schon bei italienischen Schriftstellern gewesen (S. 487), Veranlassung konnte jene mit einer arithmetischen Indexreihe verglichene Reihe der auf einander folgenden Potenzen der Unbekannten gegeben haben, welche uns wiederholt aufgefallen ist. Aber Vieta ging über seine Vorgänger weit hinaus. Die quadratische Gleichung leitet sich für ihn aus einer der drei stetigen Proportionen:

$$A : Z = Z : \begin{cases} (A+B) \\ (A-B) \\ (B-A) \end{cases}$$

ab[4]), welche Z^2 als Product zweier Factoren $A(A+B)$, $A(A-B)$, $A(B-A)$ darstellt. Im letzten der drei Fälle ist die gegebene Zahl B in zwei Theile zerlegt, deren jeder als die Unbekannte be-

[1]) Vieta pag. 83: *exemplorum notae epilogisticae.* [2]) Ebenda pag. 549: *Praeter ea quae hic adnotavit Andersonus animadvertimus porro haec quae sequuntur.* [3]) Ebenda pag. 159—161: *Appendix ab Alexandro Andersono operi subnexa.* [4]) Ebenda pag. 85—86.

trachtet werden kann, und darin liegt der Grund der Zweideutigkeit solcher Aufgaben. Die kubische Gleichung stammt aus einer geometrischen Reihe von vier Gliedern[1]). Ist B das gegebene erste, A das unbekannte zweite Glied, so wird $\frac{A^2}{B}$ das dritte, $\frac{A^3}{B^2}$ das vierte Glied, und kennt man nun noch Z als Summe des zweiten und vierten Glieder, so entspricht die Aufgabe der kubischen Gleichung $A^3 = B^2 Z - B^2 A$. Aehnlich wird auch die Gleichung $A^3 - 3B^2 A = B^2 D$ einer viergliedrigen Reihe entnommen. Heisst diese Reihe a, ac, ac^2, ac^3 und ist gegeben die Summe D und das Product B^2 der beiden äussersten Glieder, so entspricht die Summe A der beiden inneren Glieder der ebengenannten Gleichung. Hier ist die Uebereinstimmung mit den erst in Erinnerung gebrachten Italienern so gross, dass zur Gewissheit wird, Vieta habe deren Schriften gekannt, was ohnedies durch Zeitfolge und Verkehrsverhältnisse schon fast ausser Zweifel gesetzt war. Grade diese Form der kubischen Gleichung bietet aber Veranlassung, einmal $x^3 - 300x = 432$ und dann $300x - x^3 = 432$ ins Auge zu fasssen[2]), deren erste durch $x = 18$, die zweite durch $x = 9 \pm \sqrt{57}$ erfüllt wird. Vieta vereinigt nicht alle drei Auflösungen, indem er der Gleichung $300x - x^3 = 432$ auch die Wurzel $x = -18$ zuspricht, weil er hier wie anderwärts negative Wurzeln nicht anerkennt. Im Uebrigen erscheint hier bei $B > \frac{1}{2}D$ der irreductible Fall, und Vieta verweist für dessen Klarstellung ausdrücklich auf die Lehre von der Winkeltheilung[3]). Damit ist die aus der Schrift über die Van Roomen'sche Aufgabe schon in hohem Grade wahrscheinliche Annahme sicher gestellt, dass Vieta zur Lösung des genannten Falles von dem trigonometrischen Satze $\cos a^3 - \frac{3}{4} \cos a = \frac{1}{4} \cos 3a$ ausging, und zu dem gleichen Ergebnisse führte (S. 585) ein genaueres Studium der 1591 schon vorhandenen, 1593 gedruckten Schrift Supplementum Geometricum. Nun folgen, immer noch in der Recognitio, Umformungen, *transformationes*. Zwischen zwei Unbekannten A, E können die mannigfachsten Beziehungen obwalten. Die erstere A kann ersetzt werden durch $E - B$, durch $B - E$, durch $B + E$, durch $\frac{E}{B}$, durch $\frac{B}{E}$; es kann zwischen E^2 und AE die Differenz, es kann deren Summe gegeben sein und sonst jede beliebige für zweckmässig erachtete Verbindung[4]), immer wird an Stelle der Gleichung

[1]) Vieta pag. 86. [2]) Ebenda pag. 91. [3]) *At elegantius et praestantius ex analyticis angularium sectionum huiusmodi aequalitatum constitutio eruitur.* [4]) Vieta pag. 92: *Postremo per modos compositos et excogitanda ab artifice et tentanda, quae suo fini magis inservire coniiciet, figmenta.*

in A eine solche in E treten, und kennt man die Wurzel der einen, so ist die der anderen mitgefunden. Vieta kommt in höchst eigenthümlicher Fassung auf die Vielheit der Wurzeln einer Gleichung zu reden[1]). Er frägt nämlich nach den Beziehungen zwischen solchen Gleichungen, welche nur darin sich unterscheiden, dass die Unbekannte das eine Mal A, das andere Mal E sei, während alle bekannten Grössen unverändert auftreten. Alsdann könne man, sagt er, diese bekannten Grössen durch die A und E darstellen, und er versteht darunter die Abhängigkeit der Coefficienten einer Gleichung von ihren Wurzeln. $\overline{F + G}$ in $A - Aq$ aequari F in G sei z. B. die Gleichung, deren Wurzeln F und G sind. Auch hier sind aber nur positive Wurzeln gemeint, und einer Möglichkeit negativer Wurzeln geht Vieta bei quadratischen Gleichungen ebenso aus dem Wege, wie er es bei kubischen Gleichungen that. Er sagt[2]), wenn $A^2 + BA = Z^2$ und $E^2 - BE = Z^2$, so müsse $B = E - A$, $Z^2 = EA$ sein. Die Abhängigkeit der Coefficienten von den positiven Wurzeln bei Gleichungen höherer Grade ist Vieta gleichfalls nicht entgangen, doch hat er diese erst in der Emendatio erörtert, deren Besprechung wir uns jetzt zuwenden. Die Verbesserung einer Gleichung besteht in der Anwendung von Mitteln, welche die Recognitio bereits kennen lehrte. Vieta giebt diesen Mitteln einzelne Namen, welche hier erwähnt werden mögen, um zu rechtfertigen, was früher von Vieta's Benennungssucht bemerkt wurde. *Expurgatio per uncias*[3]) ist die Wegschaffung des zweithöchsten Gliedes in der Gleichung n-ten Grades durch die Einsetzung von $x = y - \frac{a}{n}$, wie man in den Zeichen neuerer Algebra, deren wir von hier an uns zu bedienen gedenken, schreiben würde. Insbesondere bei quadratischen Gleichungen in ihren sämmtlichen drei althergebrachten Formen wird die Anwendung gelehrt und damit jede derselben in eine reinquadratische Gleichung umgeformt, mithin gelöst. Auch bei der kubischen Gleichung ist die Anwendung bei allen zahlreichen Einzelfällen, welche sich unterscheiden lassen, vorgenommen. *Transmutatio* πρῶτον — ἔσχατον[4]) setzt $x = \frac{k}{y}$ und schafft dadurch ebensowohl Minuszeichen als irrationale Gleichungsconstanten weg. Sei $x^4 - 8x = \sqrt[3]{80}$ vorgelegt. Mittels $x = \frac{\sqrt[3]{80}}{y}$ gelangt man zu $y^4 + 8y^3 = 80$. *Anastrophe*[5]) findet ihre Anwendung bei Gleichungen ungeraden Grades und besteht in Folgendem: $ax - x^3 = k$ lässt die Folgerung $x^3 + y^3 = ax + (y^3 - k)$

[1]) Vieta pag. 106 sqq. [2]) Ebenda pag. 123—124. [3]) Ebenda pag. 127—132. [4]) Ebenda pag. 132—134. [5]) Ebenda pag. 134—138.

zu. Wäre nun $y^3 - k = ay$ oder $y^3 - ay = k$, so könnte jene gefolgerte Gleichung durch $x + y$ dividirt werden und gäbe den Quotienten $x^2 - yx + y^2 = a$, d. h. eine nach x quadratische Gleichung, welche leicht gelöst ist, wenn man y kennt. Die Umwendung bestand also in der Zurückführung von $ax - x^3 = k$ auf $y^3 - ay = k$. Aehnlich verwandelt man $ax^2 - x^3 = k$. Zunächst schreibt man $x^3 + y^3 = ax^2 - (k - y^3)$; dann nimmt man an, es sei $k - y^3 = ay^2$, also $y^3 + ay^2 = k$ der Lösung unterbreitet; zuletzt wird wieder mit $x + y$ in die dazu vorbereitete Gleichung dividirt, und es entsteht neuerdings eine quadratische Gleichung $x^2 - yx + y^2 = ax - ay$. *Isomoeria*[1]) heisst die Umwandlung in Folge von $x = \frac{y}{a}$ oder von $x = ay$, welche entweder Brüche fortschafft oder Gleichungsconstanten herabsetzt. $x^3 + \frac{11}{12}x = \frac{57}{12}$ verwandelt sich durch $x = \frac{y}{12}$ in $y^3 + 132y = 8208$, während $x^3 + 12x^2 + 8x = 2280$ durch $x = 2y$ in $y^3 + 6y^2 + 2y = 285$ übergeht. Dann kommt noch *Climactica Paraperosis*[2]), welche das Rationalmachen einzelner Coefficienten durch Potenzirung bezweckt, worauf der Grad der neuen Gleichung dadurch wieder herabgesetzt wird, dass man eine Potenz der Unbekannten als neue Unbekannte wählt. Nach diesen fünf Verbesserungsverfahren wendet sich Vieta zur Gleichung 4. Grades, die er auf eine solche 3. Grades zurückführt[3]). Schält man aus den behandelten Einzelfällen den gemeinsamen Gedanken heraus, so zeigt sich eine Verwandtschaft mit Ferrari's Verfahren (S. 509), insofern die vom kubischen Gliede befreite Gleichung so umgewandelt wird, dass eine Quadratwurzelausziehung thunlich ist, aber volle Uebereinstimmung ist nicht vorhanden. Vieta schliesst nämlich von $x^4 + ax^2 + bx = c$ auf $x^4 + x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + c - ax^2 - bx$ oder

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)^2 = (y^2 - a)\,x^2 - bx + \left(\frac{1}{4}y^4 + c\right).$$

Die Quadratwurzelausziehung rechts ist möglich, wenn

$$4\,(y^2 - a)\left(\frac{1}{4}y^4 + c\right) = b^2 \text{ oder } y^6 - ay^4 + 4\,cy^2 = 4\,ac + b^2,$$

beziehungsweise bei $y^2 = z$, wenn $z^3 - az^2 + 4cz = 4ac + b^2$. So ist Vieta zu der Nothwendigkeit gelangt, die kubische Gleichung aufzulösen, und er schlägt dabei einen ihm eigenthümlichen Weg ein[4]), welcher um so geistreicher erscheint, je gewisser wir (S. 636) behaupten konnten, dass Vieta mit den Arbeiten seiner italienischen Vorgänger bekannt gewesen sein muss. Sei $x^3 + 3ax = 2b$, so ist

---

[1]) Vieta pag. 138—139. [2]) Ebenda pag. 140. [3]) Ebenda pag. 140—148. [4] Ebenda pag. 149—156.

$y^2 + xy = a$ zu setzen, also $x = \frac{a - y^2}{y}$, wodurch die gegebene Gleichung in die nach y^3 quadratische Form $y^6 + 2by^3 = a^3$ übergeht. Wie kam Vieta zu dieser Substitution? Er sagt es nicht, aber es ist, glauben wir, gelungen[1]), seinen Gedankengang herzustellen. Er mag $x^3 + 3ax = x\,(x^2 + 3a)$ gesetzt und an seine Anastrophe gedacht haben, d. h. er wollte den einen Factor als Differenz $z - k$, den anderen als $z^2 + kz + k^2$ herstellen, damit als Product die Differenz $z^3 - k^3$ auftrete, auf welche Tartaglia's Verse schon hinwiesen (S. 488). Ist aber $x = z - k$, so ist $x^2 + 3a = z^2 - 2kz + k^2 + 3a$, und dieses wird zu $z^2 + kz + k^2$, wenn $z = \frac{a}{k}$, d. h. $x = \frac{a}{k} - k = \frac{a - k^2}{k}$. Nun war bei dieser Annahme die Unbekannte ganz verloren gegangen. Vieta versuchte, ob $k = y$ gesetzt deren Stelle einnehmen könne, und das Gelingen des Versuchs bildete die neue Auflösung. Vieta giebt nun noch eine Anzahl von Betrachtungen, welche auf besonders geformte Coefficienten, auf Rationalität oder Irrationalität der Gleichungswurzel u. s. w. sich beziehen und schliesst die Abhandlung mit einem *Collectio quarta* überschriebenen Kapitel[2]), welches den Zusammenhang zwischen den positiven Wurzeln einer Gleichung und deren Coefficienten vollständig enthüllt, welcher in der Recognitio erst angedeutet war. Die Gleichungen 2., 3., 4., 5. Grades werden vorgeführt: $x = a$, $x = b$ seien die zwei Wurzeln von

$$(a + b)\,x - x^2 = ab;$$

$x = a$, $x = b$, $x = c$ seien die drei Wurzeln von

$$x^3 - (a + b + c)\,x^2 + (ab + ac + bc)\,x = abc;$$

$x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = d$ seien die vier Wurzeln von

$$\begin{aligned}&(abc + abd + acd + bcd)x\\ &- (ab + ac + ad + bc + bd + cd)\,x^2\\ &+ (a + b + c + d)\,x^3 - x^4 = abcd;\end{aligned}$$

$x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = d$, $x = e$ sind die fünf Wurzeln von

$$\begin{aligned}&x^5 - (a + b + c + d + e)\,x^4\\ &+ (ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de)\,x^3\\ &- (abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde)\,x^2\\ &+ (abcd + abce + abde + acde + bcde)\,x = abcde,\end{aligned}$$

und damit wolle er die Abhandlung krönen; er habe anderwärts ausführlich davon gehandelt[3]). Wo diese ausführliche Behandlung stattfand, ist durchaus unbekannt; wir wagen es kaum, unsere Leser an

---

[1]) Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* III, 59—60. [2]) Vieta pag. 158. [3]) *Atque haec elegans et perpulchrae speculationis sylloge, tractavi alioquin effuso, finem aliquem et Coronidem tandem imposito.*

die verlorenen *Notae posteriores ad Logisticen speciosam* denken zu lassen. Auffallen könnte der Wechsel der Anordnung in den vier Gleichungen. Beim 2. und 4. Grade beginnt das Gleichungspolynom mit der ersten, beim 3. und 5. Grade mit der höchsten Potenz der Unbekannten. Der Grund davon liegt auf der Hand. Vieta will die Gleichungsconstante immer positiv und will auch das Gleichungspolynom immer mit einem positiven Gliede anfangen lassen.

Wir sind bei der letzten Abhandlung Vieta's angelangt: *De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesin resolutione*[1]. Auch sie steht im Bande von 1591 als eine Abtheilung der Algebra vorn aufgezeichnet, aber auch sie ist erst wesentlich später gedruckt. Ghetaldi hat 1600 in Paris die Herausgabe besorgt[2]. Zuerst ist die Auflösung von reinen Gleichungen vollzogen[3], wozu es selbstverständlich nur Wurzelausziehungen bedarf. Vieta zieht solche Wurzeln bis zur sechsten, wobei die Binomialcoefficienten der betreffenden Potenz als bekannt vorausgesetzt sind; langwierige Rechnungen, deren Unverlässlichkeit es geradezu zu einer Lebensfrage der Rechenkunst machte, bald ein anderes sie ersetzendes Mittel zu ersinnen. Der weit umfassendere zweite Abschnitt[4] handelt von den unreinen Gleichungen, welche in näherungsweiser Auflösung nach einem der Wurzelausziehung verwandten Verfahren behandelt werden. Es ist ein Verfahren, welches zwar mit dem Grade der Gleichung sich ändert, mithin als ein vollkommen einheitliches nicht erachtet werden kann; als weiterer Mangel ist stets die Auffindung nur einer, und zwar positiven Wurzel angestrebt, aber immerhin ist der Grundgedanke ein bleibender und ein weit vollkommenerer als der, dessen Erfinder Stevin war. Sei die quadratische Gleichung $x^2 + cx = a$ zu lösen, welche durch die Wurzel $x = x_1 + x_2 + x_3$ erfüllt werde, deren einzelne Bestandtheile Ziffern von aufeinanderfolgendem Stellenrange bedeuten sollen. Die Gleichung nimmt durch Einsetzung dieses Werthes die Gestalt an:

$$\begin{aligned} a &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 + cx_1 + cx_2 + cx_3 \\ &= x_1^2 + cx_1 + (2x_1 + c)x_2 + x_2^2 + \big(2(x_1 + x_2) + c\big)x_3 + x_3^2. \end{aligned}$$

Man sucht zuerst x_1, was verhältnissmässig leicht ist, bildet alsdann $a - x_1^2 - cx_1$ und sucht mittels Division durch $2x_1 + c$ die nächste Stelle x_2 zu ermitteln u. s. w. Wir wollen Vieta's Beispiel

$$x^2 + 7x = 60750$$

prüfen[5]. Hier ist $x_1 = 200$. Dann ist $60750 - 41400 = 19350$ durch $2x_1 + 7 = 407$ zu dividiren, wodurch

[1] Vieta pag. 163—228. [2] Ebenda pag. 550. [3] Ebenda pag. 163—172. [4] Ebenda pag. 173—228. [5] Ebenda pag. 174—175.

$$x_2 = 40, \quad (2x_1 + c)x_2 + x_2^2 = 17880$$

entsteht, und der nächste Rest ist $19350 - 17880 = 1470$. Der weitere Divisor ist $2(x_1 + x_2) + c = 487$, der Quotient also $x_3 = 3$. Nun lässt $\big(2(x_1 + x_2) + c\big)x_3 + x_3^2 = 1470$ den Rest 0 erscheinen, folglich ist $x = 243$. Bei einer Gleichung dritten Grades $x^3 + cx = a$, deren Wurzel wieder als $x = x_1 + x_2 + x_3$ gedacht ist, findet sich durch Einsetzung dieses Werthes und leichte Umformung

$$\begin{aligned} a = {} & x_1^3 + cx_1 + (3x_1^2 + c)x_2 + (3x_1 + x_2)x_2^2 + \big(3(x_1 + x_2)^2 + c\big)x_3 \\ & + \big(3(x_1 + x_2) + x_3\big)x_3^2 \end{aligned}$$

und die Anwendung[1] auf $x^3 + 30x = 14356197$ liefert abermals $x = 243$. Zur Auflösung von $x^3 + cx^2 = a$ führt die Formel[2]

$$\begin{aligned} a = {} & x_1^3 + cx_1^2 + (3x_1^2 + 2cx_1)x_2 + (3x_1 + x_2 + c)x_2^2 \\ & + \big(3(x_1 + x_2)^2 + 2c(x_1 + x_2)\big)x_3 + \big(3(x_1 + x_2) + x_3 + c\big)x_3^2. \end{aligned}$$

Wir begnügen uns mit dieser Angabe und mit der Bemerkung, dass Vieta als so unerschrockener Rechner sich bewährt, dass er an die Gleichung $x^6 + 6000x = 191246976$ sich wagt[3]. Auch Fälle mit negativem x werden dann untersucht, wie[4] $x^2 - 240x = 484$ mit der Wurzel $x = 242$ u. s. w.

Den Leistungen eines Vieta gegenüber, welche seit 1591 zur Veröffentlichung vorbereitet, theilweise seit eben jener Zeit veröffentlicht worden sind, erscheint doppelt dürftig, was im letzten Jahrzehnt des XVI. Jahrhunderts in Deutschland unter dem Namen Algebra gedruckt werden konnte. Wir müssen dahin die (S. 612) im Vorbeigehen erwähnte, 1592 gedruckte Algebra von Ramus zählen, für welche vielleicht mit mehr Recht Lazarus Schoner verantwortlich zu machen ist, dahin auch ein Rechenbuch von Andreas Helmreich[5] von Eissfelde, Rechenmeister und Visirer zu Halle, welches 1595 die Presse verliess. Wir bemerken, dass Ramus die unbekannte Grösse durch l als Anfangsbuchstaben von *latus* bezeichnet. Helmreich und sein Buch würden wir der verdienten Vergessenheit überlassen, wenn es nicht eine eigenthümliche Uebereinstimmung mit der (S. 612) gleichfalls erwähnten Göttinger Handschrift von 1545—1548 zeigte, welche einen immerhin beachtenswerthen Gegenstand betrifft. Bei Helmreich findet sich eine geschichtlich sein sollende Notiz von einem Algebras zu Ulem, dem grossen Geometer in Egypten zur Zeit des Alexandri Magni, der da war ein Präceptor Euklid's des

[1] Vieta pag. 177—178. [2] Ebenda pag. 180. Vieta's Beispiel ist $x^3 + 30x^2 = 86220288$. [3] Ebenda pag. 193. [4] Ebenda pag. 197. [5] Kästner I, 147—149.

Fürsten von Megarien und dergleichen tolles Zeug noch mehr. Genau derselbe Wust eröffnet als Prolog jene Handschrift, nur noch etwas ausführlicher. Auch eine noch ältere, auf das XIV. bis XV. Jahrhundert geschätzte Handschrift in Dresden[1]) enthält ähnlichen Wust. Da soll das Buch arabisch verfasst sein zur Zeit Alexander des Grossen, von diesem ins Indische, von Archimed ins Griechische, von Appulejus ins Lateinische übersetzt sein. Die Anfangsworte der Göttinger Handschrift lauten: *Algebrae Arabis Arithmetici viri Clarissimi liber ad Ylem Geometram praeceptorem suum*, und das Sonderbarste dabei ist, dass dieses Ylem, wie es bei dem Einen, Ulem, wie es bei dem Anderen heisst, eine Verketzerung eines arabischen Wortes, welches Lehren bedeutet, sehr ähneln soll, wie Sprachkundige uns versichern. Hier könnte also die Erinnerung, wenn nicht gar die mittelbare Erhaltung einer sonst nicht näher bekannten arabischen Algebra vorhanden sein.

Dem gewiss gerechten Bedauern über die Drucklegung so unbedeutender Leistungen in Deutschland könnte ein mit der Literatur geringen Gehaltes in anderen Ländern genauer bekannter Leser vielleicht ein Wort des Trostes entgegensetzen, es sei auch dort die Druckerschwärze nicht selten missbraucht worden. Wir begnügen uns mit dem jedenfalls angenehmeren Gefühle, zum Schlusse des Abschnittes auch noch Männer nennen zu können, welche in Deutschland sich wirkliche Verdienste um die Algebra erworben haben: Joost Bürgi, Pitiscus und Raimarus Ursus. Bürgi[2]) kam zu den algebraischen Arbeiten bei Berechnung einer genauen Sinustabelle, die selbst einen doppelten Zweck erfüllen sollte. Sie sollte einmal da dienen, wo in Folge trigonometrisch behandelter Aufgaben Sinusse vorkamen, sie sollte zweitens bei prosthaphäretischen Multiplicationen in Anwendung treten. Es ist (S. 454) gezeigt worden, worin dieses Verfahren bestand, und (S. 597) dass es Werner zugeschrieben worden ist. Damit fällt die Erzählung, welche Raimarus Ursus entstammt[3]). Der eigentliche Erfinder wäre darnach Paul Wittich aus Breslau, der um 1582 bei Tycho Brahe auf der Insel Hveen war und dort, vielleicht mit Tycho gemeinsam, das Verfahren ersann und übte. Als er etwa 1584 nach Kassel kam, habe er es ohne Beweis Bürgi mitgetheilt, der nun selbst einen Beweis fand, dabei die Fruchtbarkeit des Satzes erkannte und ihn erweiterte. Wittich's Satz,

---

[1]) Codex Dresdensis C. 405. Curtze brieflich. [2]) Vergl. einen Auszug aus den in Pulkowa aufbewahrten Bürgi'schen Papieren von Rud. Wolf in dessen Astronomischen Mittheilungen Nr. XXXI (Zürich 1872). [3]) Rud. Wolf, Astron. Mittheilungen Nr. XXXI S. 10—11 und Nr. XXXII S. 55—67.

den er sehr wohl selbständig nacherfunden haben kann, war vermuthlich der folgende:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\,[\sin(90^0-\alpha+\beta)-\sin(90^0-\alpha-\beta)]$$

d. h.

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

unter der Voraussetzung $\alpha+\beta<90^0$, und Bürgi's Erweiterung liess $\alpha+\beta>90^0$ zu, so dass alsdann

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\,[\sin(90^0-\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta-90^0)].$$

Gegenwärtig ist dieses wegen $\sin A = -\sin(-A)$ sofort einleuchtend und bedarf keines neuen Beweises. In den achtziger Jahren des XVI. Jahrhunderts war das noch wesentlich anders, und jede Formel musste besonders entdeckt werden. Wir erinnern nur an die noch anderen, wenn auch prosthaphäretischen Formeln sehr nahe verwandten Gleichungen des Rhäticus (S. 602). Um so überraschender ist eine weitere Anwendung, welche Bürgi von dem Gedanken der Prosthaphäresis machte, und die in wiederholter Benutzung desselben unter wahrscheinlich erstmaliger Einführung eines Hilfswinkels besteht. Die Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos a = \cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

verwandelte er durch $\sin b\cdot\sin c = \frac{1}{2}\,[\cos(b-c)-\cos(b+c)] = \cos x$ in die nur Additionen erfordernde Gestalt

$$\cos a = \frac{1}{2}\,[\cos(b-c)+\cos(b+c)+\cos(x-A)+\cos(x+A)].$$

Ein gewisser Jacob Curtius scheint dann Clavius von der prosthaphäretischen Methode Kenntniss gegeben zu haben, der selbst wiederum an Tycho darüber schrieb. Andere erhoben gleichfalls Ansprüche auf die Urheberschaft der damals wichtigen Methode, aber ohne dass dieselben gerechtfertigt erscheinen. Jedenfalls war also Bürgi's Augenmerk auf die Herstellung einer genauen Sinustafel gerichtet, und dazu musste er in geometrische Untersuchungen eintreten, welche ihm Gleichungen zwischen einer Sehne und der Sehne des n-ten Theils ihres Bogens verschafften. Bei $n=2$ war das Quadrat der Sehne $4x^2-x^4$. Bei $n=3$ war die Sehne $3x-x^3$. Bei $n=4$ war das Quadrat der Sehne $16x^2-20x^4+8x^6-x^8$, wofür Bürgi $\overset{\text{II}}{16}-\overset{\text{IV}}{20}+\overset{\text{VI}}{8}-\overset{\text{VIII}}{1}$ schrieb, und ähnliche Gleichungen leitete er ab bis zu $n=20$. Die Schreibweise, welche wir eben als die Bürgi's bezeichneten[1]), und welche wiederholt in dessen Papieren älteren

---

[1]) Rud. Wolf, Astronom. Mittheilungen Nr. XXXI S. 18.

Datums vorkommt, aus einer Zeit, in welcher Bürgi noch nicht mit Kepler bekannt war, ähnelt der von Bombelli sowie der von Stevin, doch dürfen wir desshalb die Selbständigkeit Bürgi's hier so wenig anzweifeln, als bei der Erfindung der Decimalbrüche (S. 617). Wir haben das frühe Datum betont, zu welchem Bürgi seiner Bezeichnung der Potenzen der Unbekannten sich bediente, weil damit ein Widerspruch, wenn nicht erklärt, doch unwirksam gemacht wird, der in einem Ausspruche Kepler's enthalten ist. Im I. Buche der 1619 gedruckten *Harmonice mundi* setzt Kepler mit ausdrücklicher Berufung auf Bürgi die Gleichung auseinander, welche die Seite des regelmässigen Sehnensiebenecks im Kreise vom Halbmesser 1 bestimmen lasse. Bürgi, sagt er[1]), schreibe $1R$, $1\mathfrak{z}$, $1c$, $1\mathfrak{z}\mathfrak{z}$, $1\mathfrak{z}c$ u. s. w. und dann fährt er fort: *quod nos commodius signabimus per apices sic*, was ich bequemer durch Gipfelzahlen bezeichnen will, nämlich so

$$1,\ 1^{\mathrm{I}},\ 1^{\mathrm{II}},\ 1^{\mathrm{III}},\ 1^{\mathrm{IV}},\ 1^{\mathrm{V}},\ 1^{\mathrm{VI}},\ 1^{\mathrm{VII}} \text{ etc}.$$

Man wird darnach annehmen müssen, dass Bürgi in seiner Schreibweise wechselte, und dass er gerade an der hier von Kepler erwähnten Stelle sich der althergebrachten Bezeichnungen bediente, welche dann Kepler durch diejenigen ersetzte, von denen er wusste, dass Bürgi sich ihrer meistens zu bedienen pflegte. Dass er letzteres nicht durch eine besondere Bemerkung hervorhob, mag darin seinen Grund gehabt haben, dass er der Sache keine übermässige Wichtigkeit beilegte und sich keineswegs eine Erfindung zuschreiben, sondern eine getroffene Abänderung entschuldigen wollte. Die Stelle des Kepler'schen Werkes lehrt in ihrer Fortsetzung noch zwei hochwichtige Dinge kennen, welche als Bürgi's Eigenthum erscheinen. Die betreffende Gleichung der Siebenecksseite, heisst es nämlich weiter, sei die folgende: *figurae nihili aeque valent quantitates hae*

$$7^{\mathrm{I}} - 14^{\mathrm{III}} + 7^{\mathrm{V}} - 1^{\mathrm{VII}} \text{ vel } 7 - 14^{\mathrm{II}} + 7^{\mathrm{IV}} - 1^{\mathrm{VI}}.$$

Prodit autem illi ex aequatione, quam iuvat mechanice, valor radicis non unus, sed in quinquangulo duo, in septangulo tres, in nonangulo quatuor et sic consequenter. Bürgi hat darnach mit vollem Bewusstsein erstens die Gleichung auf Null gebracht, zweitens erkannt, dass unter Benutzung derselben Theilpunkte der Kreisperipherie als Eckpunkten 2 Fünfecke, 3 Siebenecke, 4 Neunecke u. s. w., allgemein n Vielecke von $2n + 1$ Seiten möglich seien, wenn man ausser dem convexen Vielecke auch die Sternvielecke verschiedener Ordnung in Betracht ziehe, und dass die Seiten der letzteren Vielecke die weiteren Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung seien. Wir

[1]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) V, 104.

haben gesagt, dass Bürgi Gleichungen zwischen den Sehnen des einfachen und des n-fachen Bogens bis zu $n = 20$ abgeleitet habe. Er hat sie auch in Form einer Tabelle zusammengestellt, deren beliebige Ausdehnung möglich sei. Um die Sehne von 4 Winkelsecunden zu erhalten, müsse man erwägen, dass

$$360^0 = 360 \cdot 60 \cdot 60 = 1296000''$$

das 324000-fache von 4″ sei, und müsse die Tafel so weit verlängern. „Ich will Dirs aber nit rathen diss zu besorgen, Du möchtest das Nachtmahl darüber versäumen“ meint er dabei und fährt fort, man könne, wegen $324000 = 2^5 . 3^4 . 5^3$, sich etwas leichter die nothwendige Gleichung verschaffen, indem man 5 Verdoppelungen des Bogens, 4 Verdreifachungen, 3 Verfünffachungen nach einander vornehme. Bürgi war also, und zwar muthmasslich gleichfalls selbständig, zu ganz ähnlichen Ergebnissen gelangt wie Van Roomen und Vieta jeder für sich (S. 606). Die Frage, welche uns gegenwärtig die bedeutsamste ist, richtet sich darauf, wie Bürgi die einmal aufgestellten Gleichungen von theilweise sehr hohem Grade zur näherungsweisen Auflösung brachte. Bei der Dreitheilung kam es, wenn x die Sehne des einfachen, 1 die Sehne des dreifachen Bogens darstellte, auf die Gleichung $1 = 3x - x^3$ an und dabei insbesondere auf die Auffindung einer Verbesserung Δx_1, nachdem ein Näherungswerth x_1 einmal gefunden war. Die Einsetzung von $x = x_1 + \Delta x_1$ in $1 = 3x - x^3$ liefert

$$\begin{aligned} 3x_1^2 . \Delta x_1 + 3x_1 . \Delta x_1^2 + \Delta x_1^3 - 3\Delta x_1 &= 3x_1 - x_1^3 - 1 \\ &= (3 - x_1^2)\, x_1 - 1 \end{aligned}$$

und daraus $\Delta x_1 = \frac{(3 - x_1^2)\, x_1 - 1}{2x_1^2 + (3x_1 + \Delta x_1)\, \Delta x_1 - (3 - x_1^2)}$. Wir haben gewiss nicht erst zu sagen, dass Bürgi keine auch nur ähnliche Entwickelung vornimmt, Thatsache ist aber, dass er bei der wirklichen Rechnung nur den im Nenner auftretenden Theil $(3x_1 + \Delta x_1)\, \Delta x_1$ durch $2x_1 . 10^n$ ersetzt, wo n die Stellung der gesuchten Verbesserung bestimmt, beziehungsweise den Rang derjenigen decadischen Einheit ergiebt, welche grösser ist als die Verbesserung. Er setzt nämlich $x_1 = 1$ und gleichzeitig $n = 0$, so wird $\Delta x_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$ und $x_1 + \Delta x_1 = x_2 = 1{,}5$. Jetzt wird $n = -1$ und

$$\Delta x_2 = \frac{(3 - 1{,}5^2)\, 1{,}5 - 1}{2 \cdot 1{,}5^2 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1}{10} - (3 - 1{,}5^2)} = \frac{0{,}125}{4{,}05} > 0{,}03.$$

Man wird daher $\Delta x_2 = 0{,}03$, $x_2 + \Delta x_2 = x_3 = 1{,}53$, $n = -2$ setzen müssen, und das ist es, was Bürgi thut! Bei höherem Grade der Gleichung rechnet Bürgi nach einer verfeinerten Methode des doppelten falschen Ansatzes, auf welche auch Cardano's goldene Regel sich gründete (S. 506). Der Auszug aus der Pulkowaer Handschrift, welchem wir folgen, giebt als Beispiel Bürgi's Behandlung der Neunecksgleichung $9 - 30x^2 + 27x^4 - 9x^6 + x^8 = 0$. Durch graphische Versuche wird gefunden, dass $0{,}68 < x < 0{,}69$, d. h. dass eine Länge von 0,68 des Halbmessers eines Kreises in den Zirkel genommen mehr als 9 Mal im Umkreise sich auftragen lässt, während 0,69 bei gleichem Versuche über den Ausgangspunkt hinaustrifft. Jetzt beginnt für Bürgi die Rechnung und indem er für x die beiden genannten Werthe in die Gleichung einsetzt, findet er selbstverständlich als Summe des Gleichungspolynoms nicht 0, sondern $+\,0{,}0569$ bei $x = 0{,}68$ und $-\,0{,}0828$ bei $x = 0{,}69$. Einer Zunahme von x um 0,01 entspricht eine Abnahme des Gleichungspolynoms von 0,1397. Damit 0 entstände, müsste die Abnahme 0,0569 betragen, Bürgi setzt desshalb in Proportion $0{,}1397 : 0{,}0569 = 0{,}01 : \Delta x$ mit $\Delta x = 0{,}0040$. Behufs einer zweiten Rechnung wird nun $x = 0{,}6840$ und $x = 0{,}6841$ eingesetzt. Die hier auftretenden Fehler sind $+\,0{,}00056410$ bei $x = 0{,}6840$ und $-\,0{,}00004029$ bei $x = 0{,}6841$. Aus ihnen folgt die Proportion

$$0{,}00140012 : 0{,}00056410 = 0{,}0001 : \Delta x \text{ mit } \Delta x = 0{,}00004029,$$

und folglich ist in sehr bedeutender Annäherung $x = 0{,}68404029$ zu setzen.

Die gleiche Aufgabe der Auffindung von Sehnen einfacher Bögen aus denen der n-fachen Bögen mit Hilfe von zwischen diesen Strecken obwaltenden Gleichungen höherer Grade hat **Pitiscus** im zweiten Buche seiner Trigonometrie von 1612 erklärtermassen im Sinne **Bürgi's** (S. 619) gelöst[1]). Die nach der Regel des doppelten falschen Ansatzes geführten Rechnungen stimmen auch vollständig mit Bürgi's Gedankengange überein. Pitiscus will z. B. aus der Sehne von 30^0, welche 5176381 zur Länge hat, die von 10^0 berechnen. Die Gleichung heisst hier $a = 3x - x^3$, wo a die bekannte Sehne bedeutet[2]). Aus ihr folgt $x = \frac{a}{3} + \frac{x^3}{3}$ oder $x > \frac{a}{3}$. Nun ist $\frac{a}{3} = 1725460$, und etwas grössere Zahlenwerthe wären 1730000, 1740000, 1750000. Die Annahme $x = 1730000$ giebt $3x - x^3 = 5138223$ oder 38158 zu wenig. Die Annahme $x = 1740000$ giebt $3x - x^3 = 5167320$ oder 9061 zu wenig. Nun wird nach den Regeln des doppelten falschen Ansatzes $1740000 \cdot 38158 - 1730000 \cdot 9061 = 50719390000$ durch $38158 - 9061 = 29097$ dividirt, wodurch der Quotient 1743114

[1]) **Pitiscus**, *Trigonometria* (1612) pag. 44: *Adhuc aliter, per subtensas et per Algebram ex mente Iusti Byrgii (Algebram qui nescit, Algebraica transiliat, hic et per totum reliquum librum. Non enim necessitati, sed tantum curiositati haec data sunt).* [2]) Ebenda pag. 51—53.

sich ergiebt, und dieser dient als neuer Näherungswerth. Setzt man ihn in $3x - x^3$ ein, so entsteht 5176378 oder 3 zu wenig. Richtig muss demnach ein x sein, welches um ein Geringes grösser ist als 1743114. Der Versuch zeigt, dass 1743115 bereits zu gross ist, dass also x zwischen den beiden angegebenen Zahlen liegt, welche ganzzahlig geschrieben ebenso wie der Zahlenwerth von a als Theile des zu 10000000 angesetzten Halbmessers verstanden werden müssen. Die Zwischenrechnungen sind bei Pitiscus nicht ausführlicher als hier in unserem Berichte mitgetheilt. Algebraisch nennt Pitiscus folgende Behandlung z. B. der Gleichung $(10000000)^2 = 4x^2 - x^4$, welche x als Sehne von 30^0 enthält, wenn die Sehne von 60^0 oder der Halbmesser als 10000000 gegeben ist[1]). Die durch $x^2 = y$ umgeformte Gleichung $4y = 10^{14} + y^2$ lässt erkennen, dass man 4 als Divisor des Ausdruckes rechts zu benutzen hat, dem man aber bei Fortsetzung der Division immer die Verbesserung y^2 wieder hinzufügen muss. Ist etwa $y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$, wo $y_1, y_2, y_3 \ldots$ aufeinanderfolgende Stellen bedeuten, so kommen bei fortschreitender Division regelmässig zwei Nullen vom Dividendus an den Theilrest herunter, und überdies ist bei der ersten Division an der niedrigsten Stelle, d. h. rechts, y_1^2 zu addieren, bei der zweiten Division ebenda $2y_1y_2 + y_2^2$, bei der dritten $2(y_1 + y_2)\,y_3 + y_3^2$ u. s. w. Zum mindesten geht solches aus dem Verfahren des Pitiscus hervor, das Verfahren zu erläutern schien ihm entweder überflüssig oder unausführbar. Er rechnet $1 : 4 = 0$, $10 : 4 = 2$, nimmt also $y_1 = 2$, $y_1^2 = 4$ und bildet $100 + 4 - 80 = 24$ beziehungsweise unter Herabziehung von zwei Nullen 2400. Nun heisst es weiter

$$24 : 4 = 6 = y_2,\quad 2y_1y_2 + y_2^2 = 2 \cdot 20 \cdot 6 + 36 = 276,$$

also $2400 + 276 - 2400 = 276$ ist der neue Rest, 27600 der neue Dividendus. $27 : 4 =$ beinahe $7 = y_3$. Nun folgt

$$2(y_1 + y_2)\,y_3 + y_3^2 = 2 \cdot 260 \cdot 7 + 49 = 3689,$$

$27600 + 3689 - 28000 = 3289$ und 328900 als neuer Dividendus u. s. w. Wir sahen, dass y_3 etwas grösser gewählt wurde und gewählt werden durfte, als $27 : 4$ eigentlich zulässt, weil vor der Abziehung des Theilproductes der Theildividendus noch eine Ergänzung erfuhr. Das Gleiche tritt jedesmal ein, und demgemäss wird man stets den Versuch wagen müssen, den Theilquotienten eher etwas zu gross als zu klein zu wählen. Pitiscus nennt bei dem soeben beschriebenen Verfahren die unbekannte Grösse *latus* und bezeichnet sie, ihr Quadrat und Biquadrat durch l, q, bq. Daneben hat bei ihm l auch die Bedeutung der Seite eines gegebenen Quadrates, d. h. einer Quadratwurzel.

[1]) **Pitiscus**, *Trigonometria* (1612) pag. 47—49.

Noch ein zweiter Schüler Bürgi's hat auf Auflösung von Zahlengleichungen sein Augenmerk gerichtet: Raimarus Ursus[1]), als Verbesserer des Junge'schen Verfahrens (S. 626). Raimarus schlägt nämlich vor, statt eines beliebigen Versuchswerthes der unbekannten Grösse einen derartigen zu wählen, dass die Muthmassung „nicht mehr so vnendlich circumvagiern vnd vmbschweiffen mag". Dazu habe man ein Mittel „durch Erfindung aller Divisorum oder theiler". Die Stelle lässt kaum eine andere Deutung zu, als dass Raimarus verlangt, man solle die einzelnen Theiler der Gleichungsconstanten versuchsweise statt der Unbekannten einsetzen. Er wird wohl dabei nicht das Bewusstsein gehabt haben, dass der Wurzelwerth ein Theiler der Gleichungsconstanten sein müsse; diese Kenntniss war ihm fern. Er dachte nur daran, dass, wenn etwa $x^3 = 486 - 90x - 21x^2$ zur Auflösung vorlag, der Theiler 3 der Zahl 486 es möglich machte, $486 - 90x$ zu $3\,(162 - 90)$ u. s. w. umzuwandeln, beziehungsweise zu vereinigen.

Unsere in diesem Abschnitte getroffene Anordnung entbindet uns der Aufgabe, nochmals zusammenfassend zu erörtern, was auf jedem Gebiete geleistet worden ist, da diese Leistungen schon gebietweise vereinigt auftreten. Zur Würdigung einzelner, besonders hervorragender Geister müssen wir dagegen, wie wir (S. 546) es in Aussicht gestellt haben, deren Einzelleistungen zu einem Gesammtbilde vereinigen. Stevin, Vieta, Bürgi waren Männer so umfassender Thätigkeit, dass bei ihnen geboten erscheint, was wir zusagten. Zur Schilderung Bürgi's besitzen wir noch nicht alle Züge. Eine gewaltige Leistung wird erst der nächste Abschnitt uns vor die Augen führen. Nur Stevin und Vieta bilden unsere augenblickliche Aufgabe.

Stevin war uns ein Mechaniker allerersten Ranges, war uns der erste Erfinder des Rechnens mit Decimalbrüchen, der Empfehler ihrer praktischen Einführung. Er war endlich der Urheber einer ersten theoretisch richtig erdachten Auflösung von Zahlengleichungen.

Vieta ragt noch ungleich grösser aus seiner geistigen Umgebung hervor. Ein gewandter Geometer, ein geistreicher Zahlentheoretiker, ein geübter Rechner in cyclometrischen Untersuchungen würde er schon um der Leistungen auf diesen Gebieten willen zu den aussergewöhnlichen Schriftstellern gehören. Grösseres leistete er in der Lehre von den trigonometrischen Functionen, in der Lehre von den Gleichungen, in der Verbindung beider Gebiete. Das Grösste ist und bleibt seine Erfindung der Buchstabenrechnung, die Ausdehnung des Gedankens, unbekannte Grössen durch Symbole zu beziehen auf bekannte, aber unbestimmt gelassene Grössen.

[1]) Gerhardt, Mathem. Deutschl. S. 85.

XV. Die Zeit von 1600—1668.