XIII. Die Zeit von 1500—1550.

59. Kapitel.

Französische, spanische und portugiesische Mathematiker.

Als wir im vorigen Kapitel mit Chuquet uns beschäftigten, beriefen wir uns für die Behauptung, sein Triparty sei ein für die damaligen Franzosen zu gedankenreiches Werk gewesen, auf einen Schriftsteller dieses Landes, der nur kurze Zeit später lebend der Handschrift des Triparty sich bediente. Wir meinten Estienne de la Roche genannt Villefranche aus Lyon. Von seinem Leben ist ausser dem Geburtsorte, den wir dem Titelblatte seines Buches *Larismethique nouellement composee par maistre Estienne de la roche dict Villefranche natif de Lyon sus le Rosne* entnehmen, nicht das Geringste bekannt. Diese Arithmetik ist 1520 zuerst, dann 1538 in einem zweiten Abdrucke erschienen. Nimmt man an, der Verfasser habe das Buch mit 40 Jahren veröffentlicht, so gelangt man zu einem Geburtsjahre um 1480, welches angegeben worden ist[1]), aber jene Annahme selbst schwebt durchaus in der Luft und kann sich ganz gewiss nicht auf eine in dem Buche zu erkennende besondere geistige Reife des Verfassers stützen. De la Roche gesteht von vornherein zu, dass er nur die Blüthen mehrerer geübten Meister vereinigt und aufgehäuft habe, wozu er irgend kleine Zuthaten beifügte, welche er als Praktiker ersonnen habe[2]). Als die von ihm vorzugsweise benutzten Meister nennt er Nicolas Chuquet von Paris und Bruder Lucas von Burgo Sancti Sepulcri, d. h. also Paciuolo. Zwischen beiden uns wohlbekannten Namen erscheint auch als dritte Quelle ein Philipp Friscobaldi von Florenz. Vielleicht gelingt es italienischen Fachgenossen über diese Persönlichkeit und über ihre Leistungen

[1]) Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* II, 228. [2]) *Aut playsir et louange de dieu le createur et de la tres glorieuse vierge marie sa tressacree mere et de mon seigneur saint estienne mon tresreverend patron et de toute la court celestielle de paradis ay collige et amasse la fleur de plusieurs maistres expertz en cest art: comme de maistre nicolas chuquet parisien, de philippe friscobaldi florentiis: et de frere luques de burgo sancti sepulcri de lordre des freres mineurs avecques quelque petite addicion de ce que iay peu invente et experimente en mon temps en la pratique.*

Klarheit zu schaffen. Da, wie wir wiederholt hervorgehoben haben, wichtige italienische Quellenschriften uns noch fehlen, so ist jede Spur zu verfolgen, welche möglicherweise dahin führen könnte, den Algebraiker zu erkennen, welchen Chuquet, welchen der Verfasser der Dresdner Algebra benutzte.

De la Roche's Arithmetik besteht aus drei Abtheilungen. Die erste von 140 Druckseiten ist vielfach wörtlich dem Triparty entnommen und stellt für sich ein Lehrbuch der Rechenkunst und der Algebra vor. Die zweite Abtheilung von 298 Druckseiten beschäftigt sich mit dem kaufmännischen Rechnen, wie es bei Paciuolo in aller Ausführlichkeit gelehrt ist. Die letzten 20 Druckseiten können, wiewohl nicht äusserlich von der zweiten Abtheilung getrennt, als dritte Abtheilung betrachtet werden; sie wenden die Rechenkunst auf Geometrie an. Wir haben den Triparty als wesentliche Quelle der ersten Abtheilung genannt. Wir würden ein ganz verkehrtes Bild derselben erwecken, wenn wir nicht auf die Lücken hinwiesen, die eine genauere Vergleichung bemerken lässt. De la Roche hat aus dem Triparty nicht übernommen die den Begriff des logarithmischen Rechnens enthaltende Vergleichung einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe, nicht den Exponenten Null, nicht die negativen Exponenten, nicht den Ausblick auf Gleichungen mit mehr als drei Gliedern oder mit ungleich von einander entfernten Gliedern als Aufgabe der Zukunft. Das sind aber gerade die bahnbrechenden Gedanken Chuquet's, welche weggelassen sind, offenbar nur aus dem Grunde, welchen wir oben andeuteten, weil eben De la Roche sie in ihrer Bedeutung zu würdigen nicht fähig, wenigstens nicht reif war. Am deutlichsten zeigt sich diese Unreifheit bei dem Exponenten Null. Wenn Chuquet gesagt hat, man könne (S. 355) einfache Zahlen als solche betrachten, die gar keinen Namen, beziehungsweise den Namen Null führen, so schrieb De la Roche, als er an die betreffende Stelle kam, nicht etwa einfach ab, sondern er liess die bessere Hälfte des Satzes weg und sprach nur von Zahlen, welche keinen Namen führen[1]). Er hat eben nicht verstanden, dass das unscheinbare Zeichen 0 rechts erhöht geschrieben eine Erfindung darstellte, die erst nach weiteren 100 Jahren zur Geltung kommen sollte. Mit aller Breite verweilt De la Roche dagegen bei den kaufmännischen Rechnungsaufgaben, die ihm des reichlich doppelten Raumes würdig erscheinen, den er der ersten Abtheilung widmete. Hier sind auch jene Regeln mitgetheilt, welche insbesondere bei Vervielfachungen benannter Zahlen in Anwendung

[1]) De la Roche, *Larismethique* etc. fol. 42 recto letzte Zeile: *les nombres qui nont nulle denomination sont occupans le premieur lieu en lordre des differences.*

traten, und welche auf der Auffassung des Multiplicators als einer Summe beruhen, deren einzelne Summanden die Vielfachen leicht finden lassen. Tolletrechnung war der Name, unter welchem wir (S. 224 —225) Aehnliches in Deutschland kennen gelernt haben. Jetzt heisst das Verfahren[1]) Regeln der Praktik, und diesem Namen wie der Sache selbst werden wir künftig in allen Ländern begegnen. Ein Beispiel möge den Sinn unserer Worte erläutern[2]). Man will in Livres ausgedrückt das 960fache von 6 Sous 9 Deniers wissen, während 1 Livre = 20 Sous, 1 Sou = 12 Deniers ist. Man zerfällt 6 Sous 9 Deniers in 5 Sous, 1 Sou 3 Deniers, 6 Deniers oder in $\frac{1}{4}$ Livre $+ \frac{1}{16}$ Livre $+ \frac{1}{40}$ Livre und rechnet:

$$\frac{1}{4} \text{ von } 960 \text{ ist } 240,$$

$$\frac{1}{16} \text{ von } 960 \text{ ist } 60,$$

$$\frac{1}{40} \text{ von } 960 \text{ ist } 24,$$

zusammen 324 Livres.

Auch einiges Geometrische, sagten wir, sei in De la Roche's Buch vorhanden[3]). Gross ist das Wissen nicht, von welchem hier Anwendung gemacht ist, aber es sind wenigstens richtige Formeln, nach denen gerechnet ist, wie wir im Gegensatze zu einem vielgebrauchten encyklopädischen Werke, von welchem wir auf deutschem Boden zu reden haben werden, anerkennen dürfen. Es handelt sich um Kreisausmessungen mittels des archimedischen Werthes $\pi = \frac{22}{7}$, um mehrfache Benutzung des pythagoräischen Lehrsatzes, um die Ausrechnung der Dreiecksfläche nach der heronischen Formel, um Zerlegung von Vielecken in Dreiecke. Ein Kreisabschnitt wird zum Kreisausschnitt ergänzt, der alsdann der sovielte Theil der ganzen Kreisfläche ist, als sein Bogen Theil der Kreislinie[4]): Z. B. sei 6 die Länge des Bogens und $3\frac{1}{2}$ der Halbdiameter. Die Kreislinie hat demnach die Länge $2 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} = 22$ und die Kreisfläche ist $\frac{22}{2} \cdot 3\frac{1}{2} = 38\frac{1}{2}$. Die Regeldetri $22 : 38\frac{1}{2} = 6 : 10\frac{1}{2}$ liefert mit $10\frac{1}{2}$ die Fläche des Kreisausschnittes. Von ihr ist alsdann wieder das ergänzende Dreieck ab-

[1]) De la Roche fol. 77 verso: *Des regles briefves aultrement dictes regles de pratique.* [2]) Ebenda fol. 79 recto. [3]) Ebenda fol. 220 recto: *Comment la science des nombres se peult applicquer aux mesures de geometrie.* [4]) Ebenda fol. 223 recto.

zuziehen, von dessen Ausrechnung jedoch nichts gesagt ist. Endlich kommen noch einige Körperausrechnungen vor.

So das Buch des Estienne de la Roche. Das Urtheil über dasselbe hat sich im Verlaufe von etwa zehn Jahren sehr zu seinen Ungunsten verschoben. Auf uns, welche wir die bessere Vorlage kennen, macht es den Eindruck eines recht untergeordneten Werkes; auf eine Zeit, welcher der Triparty noch nicht zugänglich war, durfte und musste es befriedigender wirken. Sah man doch nur die von Chuquet entlehnten Dinge, ohne zu wissen, wie genau sie entlehnt waren, und vor allen Dingen ohne zu wissen, was dem Abschreiber in der Feder stecken geblieben war.

Wir heben diesen Gegensatz in der Würdigung eines und desselben Schriftstellers durch gleich gewissenhafte Forscher, möglicherweise durch den gleichen Forscher innerhalb kurzer Zwischenzeit nicht ohne Absicht hervor. Uns däucht, es falle dadurch ein bedeutsames Licht auf den Werth mancher Urtheile in der Geschichte der Wissenschaften. Sehen wir doch hier das deutlichste Beispiel davon, dass der glänzendste Ruhmestitel eines Gelehrten unter Umständen darin bestehen kann, dass man seine Vorgänger nicht kennt, dass das Dunkel, welches den Einen unverdientermassen umhüllt hat, den Hintergrund bildet, von welchem das nur mässig helle Bild des Anderen sich abhebt. Müssen wir bei solchen Erwägungen nicht misstrauisch werden namentlich gegen die Urtheile über solche Männer, deren Thätigkeit viele Jahrhunderte hinter dem Zeitalter der häufigen und erleichterten Vervielfältigung von schriftstellerischen Leistungen zurückliegend ein zufälliges Verlorengegangensein dieser oder jener Quellenschrift um so eher möglich erscheinen lässt? Nur ein Beweismittel erscheint uns nahezu untrüglich. Wir meinen nicht etwa die einstimmige Anerkennung der Zeitgenossenschaft. Wie sehr diese trügen kann, beweist jedes Jahrhundert an Beispielen, die aufzufinden nicht schwierig sind. Aber wir meinen das Vorhandensein verschiedener, von einem Verfasser herrührender Werke, welche alle den Stempel höherer Begabung tragen. Der Fall ist kaum denkbar, dass es einem Menschen gelänge, wiederholt in die Fusstapfen früher Lebender so einzutreten, dass jede Spur des Vorgängers verwischt würde. Darum dürfen wir getrost den Ruhm eines Euklid, eines Archimed, eines Apollonius als einen durch keine Neuentdeckung zu gefährdenden erachten, dürfen wir mit gleicher Zuversicht Männer wie Leonardo von Pisa, wie Regiomontanus ihnen zur Seite stellen. Von ihnen allen trifft das Merkmal zu, dass ihr Ruf, als bahnbrechende Geister in der Mathematik gewirkt zu haben, auf mehr als nur eine von ihnen verfasste Schrift sich gründet.

Einstimmige Anerkennung der Zeitgenossenschaft, sagten wir, kann trügen. Ein Beispiel bietet uns gleich der nächste Schriftsteller, von welchem wir zu reden haben. Am Ende des XV. Jahrhunderts lebte in Briançon, einer Bergveste unweit der französisch-italienischen Grenze, ein Arzt François Fine, nicht *Finé*, wie man aus der latinisirten Form Finaeus zu schliessen geneigt ist, welcher auch mit Astronomie sich schriftstellerisch beschäftigte. Ihm wurde 1494 ein Sohn Oronce, latinisirt Orontius Finaeus[1]), geboren der am 8. October 1555 in Paris starb, unbemittelt aber weit und breit berühmt, der Neubegründer mathematischer Studien in Frankreich, wie er in einem an König Franz I. gerichteten Einleitungsschreiben seiner *Protomathesis* sich selbst nennt, worin aber auch die ganze Mitwelt einstimmte. Was nur von geistiger Bedeutung in Paris lebte, Männer der Wissenschaft und der schönen Künste, Beamte und Höflinge, Gesandte, Prinzen, der König selbst vereinigten sich in den Vorlesungsräumen des Collège royal, wo Finaeus seit 1532 eine für ihn errichtete Lehrstelle inne hatte und als Professor mit beispiellosem Zulaufe wirkte. Sehen wir zu, welche schriftstellerische Leistungen der Hochbewunderte hinterliess. Auf die grosse Anzahl derselben braucht man von vornherein kein sonderliches Gewicht zu legen. Er vervielfältigte dieselben in jeder Weise: durch Uebersetzung in andere Sprachen, durch Veränderung der Ueberschrift oder auch bloss des Formats, durch Herausgabe bald im Einzelnen, bald als Sammlung, nur um diese Druckwerke immer anderen hochgestellten Persönlichkeiten widmen zu können, von denen er vergeblich Befreiung aus drückenden Geldverhältnissen erflehte. Die Geschichte der Mathematik hat es nur mit zwei Werken des Orontius Finaeus zu thun. Die Protomathesis[2]) von 1532 handelt in vier Büchern von der Arithmetik, in zwei Büchern von der Geometrie, in fünf Büchern von der Kosmographie, in vier Büchern von der Gnomonik. Die drei ersten arithmetischen Bücher sind dem gemeinen Rechnen gewidmet und unterscheiden sich, wie es nach den Auszügen, auf welche unser Bericht sich stützt, den Anschein hat, nur dadurch von anderen gleichzeitigen Lehrbüchern, dass dem Sexagesimalsystem ein grösserer Spielraum gegeben ist. Die Quadratwurzelausziehung z. B. lehrte er so[3]), dass dem Radikanden $2n$ Nullen rechts angefügt und dann ganzzahlig die Wurzel gesucht werden soll, welche solcher Weise

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* XVII, 706—712. — L. Am. Sédillot, *Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collège de France* im *Bulletino Boncompagni* Band II und III. Ueber Orontius Finaeus II, 363—364. [2]) Kästner I, 449—453. [3]) Tartaglia, *General Trattato de' numeri et misure.* Parte II fol. 22 (Venetia 1556).

um n Stellen zu lang ist. Diese n rechts überschiessenden Stellen soll man dann mit 60 vervielfachen und abermals n Stellen rechts abschneiden, mit denen man wiederholt in gleicher Art zu verfahren habe, um Sexagesimalbrüche zu erhalten. Die Kubikwurzelausziehung schloss sich an und wurde wohl nach ähnlichen Vorschriften gelehrt. Auch ein *Canon Sexagenarum* war beigefügt, offenbar eine Art von Einmaleinstafel im Sexagesimalsystem mit Stellungswerth der durch Kommata getrennten Zahlen, die jeder nach links vorrückenden Zahl den 60fachen Werth als der gleichen rechts stehenden verleiht, z. B. $64 = 1 \cdot 60 + 4 \cdot 1 = 1, 4$; $169 = 2 \cdot 60 + 49 \cdot 1 = 2, 49$ u. s. w. Das vierte arithmetische Buch geht zu den Proportionen über und gipfelt in der *regula sex proportionalium quantitatum*, also in den zusammengesetzten Proportionen, die bei 6 darin vorkommenden Grössen 18 Versetzungen unterworfen werden können, wie sowohl Leonardo von Pisa (S. 16) als Jordanus Nemorarius (S. 67) gelehrt haben, deren Ersterer Achmed den Sohn Joseph's als Quelle angab. Bei den zwei geometrischen Büchern wird insbesondere die vorzügliche Ausführung der Figuren gelobt, ein Zeugniss für die Geschicklichkeit des Verfassers im Zeichnen, auf die er sich somit nicht umsonst etwas zugute that. So soll der Abdruck eines Maassstabes von 6 Pariser Zoll bei einer durch Kästner[1]) angestellten Vergleichung mit einem sehr genauen Messingstabe haarscharfe Uebereinstimmung gezeigt haben, so soll auch die Perspective der Raumfiguren besonders gut gelungen sein. Im Uebrigen wird als Inhalt des ersten geometrischen Buches angegeben: Erklärungen, Vorbereitung den Euklid leichter zu verstehen, von Kreisen auf der Kugel, Maasse, eine Sinustafel durch alle Minuten in Sechzigsteln des Halbmessers ausgedrückt. Aus dem zweiten geometrischen Buche nennt unsere Vorlage Feldmesserwerkzeuge, Ausrechnung ebener Figuren, Archimed's Kreisrechnung, Ausrechnung der Körper. Unter der Bezeichnung Kreisrechnung dürfte die Benutzung der Verhältnisszahl $\pi = \frac{22}{7}$ zu verstehen sein. Finaeus wusste, dass dieser Werth nicht anders als angenähert richtig ist. Unbegreiflich erscheint daher, dass er von dieser Kenntniss aus den Rückschritt vollzog, eine zeichnende Umwandlung des Kreises in ein Quadrat, welche gleichfalls in diesem zweiten geometrischen Buche gelehrt ist, und welche, wenn auch nicht von $\pi = \frac{22}{7}$ ausgehend, doch auf eben diesen Werth führt, für genau zu halten, ein Rückschritt, an welchem nicht zu zweifeln ist, da Finaeus anderwärts sich ausdrücklich gerühmt hat[2]), er habe zur grossen Wuth seiner Gegner

[1]) Kästner I, 451. [2]) *Nouvelle Biographie universelle* XVII, 708, Note 1.

die Quadratur des Kreises, von welcher Aristoteles an verschiedenen Stellen sage, sie sei nicht unauffindbar, aber noch nicht aufgefunden, wirklich entdeckt und bewiesen. Ueber die kosmographische und die gnomonische Abtheilung gehen wir, als dem Inhalte unserer Darstellungen fern gelegen, hinweg. Ebenso begnügen wir uns mit dem Hinweise auf eine von Finaeus vorgeschlagene Methode zur Längenbestimmung[1]). Mit Finaeus war ein Pariser Arzt und Astronom Antoine Mizauld[2]) (1520—1578) befreundet. Diesem hatte Finaeus den Auftrag hinterlassen, nach seinem Tode ein zweites mathematisches Werk dem Drucke zu übergeben, und es erschien schon 1556 unter dem prunkhaften Titel der vier Bücher von den bisher ersehnten mathematischen Dingen, De rebus mathematicis hactenus desideratis[3]). Diese ersehnten Dinge sind der Reihenfolge nach 1. Auffindung zweier mittleren Proportionalen zwischen gegebenen Strecken, 2. Rectification des Kreises, 3. Theilung der Kreislinie in 3, 5, 7, 11, 13 gleiche Längen, beziehungsweise Einbeschreibung von regelmässigen Vielecken von der entsprechenden Seitenzahl, 4. Zerschneidung der Kugel in zwei Abschnitte, deren Rauminhalt im gegebenen Verhältnisse stehen soll. Alle diese Aufgaben glaubte Finaeus unter alleiniger Anwendung von Zirkel und Lineal gelöst zu haben, woraus die Unrichtigkeit seiner Lösungen hinlänglich hervorgeht. Ihnen allen liegt übrigens ein einziger Gedanke zu Grunde, die Benutzung der göttlichen Proportion, worunter Finaeus den goldenen Schnitt versteht. Er feierte ihn auch in einem an die Spitze gestellten Distichon[4]):

Authoris distichon de divina proportione.
Si quid divinum condebat pulchra mathesis
Quod Geometra colat; haec tibi sola dabit.

Was von göttlichem Inhalt Verehrungswerthes Mathesis
Dem Geometer verbarg, giebt Dir die Eine allein.

Unter den Versen befindet sich die Zeichnung einer nach äusserem und mittlerem Verhältnisse getheilten Strecke. Der Ausdruck *Divina proportio* der Ueberschrift lässt vermuthen, dass Finaeus mit der Divina Proportione des Paciuolo bekannt war und zu den dort gerühmten Vorzügen des goldenen Schnittes noch andere, bewundernswerthere hinzuzufügen dachte. Jene Kenntniss konnte Finaeus in der That besitzen. Der buchhändlerische Verkehr begann bereits ein lebhafterer zu werden, und wir dürfen auch wohl noch auf den besonderen Umstand hinweisen, dass Lionardo da Vinci, der Zeichner der Figuren-

[1]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 379 (München 1877). [2]) Poggendorff II, 163. [3]) Kästner I, 454—457. [4]) Ebenda S. 455.

tafeln zur Divina Proportione, die letzten Jahre seines Lebens bis 1519 am Hofe desselben Königs Franz I. zugebracht hatte, in welchem Finaeus einen wenn auch nicht sehr freigebigen Gönner verehrte. Finaeus sagt in seinem nachgelassenen Werke, die Verhältnisszahl π liege zwischen $\frac{22}{7}$ und $\frac{245}{78}$, und diese Grenzen sind ja auch richtig. Dann aber legt er seinen Zeichnungen den zweiten kleineren Werth zu Grunde und preist ihn an, er führe zur genauen Rectification. Nicht als ob die Zeichnungen selbst mit diesem Werthe in völliger Uebereinstimmung sich befänden; es bleibt ein Fehler, welchen Finaeus auf $\frac{1}{3702857}$ eines Theiles, deren 60 auf einen Kreishalbmesser gehen, berechnet, wenn die Länge der dem Kreisquadranten gleichen Strecke in Frage steht, aber dieser so kleine und unvermeidliche Fehler dürfe vernachlässigt werden. Gewiss ist auch letztere Behauptung berechtigt und die ganze Zeichnung eine **praktisch** vollauf genügende, wenn nur der **theoretische** Fehler nicht begangen wäre, dass bald $\frac{245}{78} < \pi$, bald genau $\frac{245}{78} = \pi$ gesetzt würde. Noch weniger gerechtfertigt sind die Constructionen, deren Finaeus bei den anderen oben erwähnten Aufgaben als längst ersehnter Erfindungen sich rühmt, und man darf mit einigem Bedauern feststellen, dass das nachgelassene Werk des wahrscheinlich mit Recht wegen seiner ausgezeichneten Lehrgabe bewunderten Mannes seiner erworben geglaubten Unsterblichkeit ein schnelles Ende bereitete. Wenn die Nachwelt, unbeirrt durch anfänglichen Ruhm, durch späteren Misserfolg Finaeus fortwährend eines Lobes für würdig hält, so ist es eines solchen, welches in Finaeus dem Menschen und nicht dem Mathematiker gilt. Finaeus war es sicherlich in erster Linie um die Wissenschaft zu thun. Er war keine jener eifersüchtigen Naturen, die es nicht ertragen können, dass einem Anderen als ihnen selbst ein Verdienst zugebilligt werde. Das hat er durch die Herausgabe fremder Werke bewiesen, denen er dadurch selbst den Stempel seiner Achtung aufdrückte. Die Arithmetik des **Silicius** hat er 1519, die **Margaritha Philosophica** 1523 neu herausgegeben, zwei Werke, von denen die theils chronologische, theils geographische Gliederung, welcher wir folgen, uns verbietet, jetzt schon mehr als nur die Namen zu nennen. Es folgte 1525 eine Ausgabe von Peurbach's astronomischem Hauptwerke, der Theorica nova Planetarum, und Anderes mehr, was unserem Gegenstande noch ferner liegt.

Fast genau derselben Zeit wie Finaeus gehörte **Jean Fernel**[1]) (1497—1558) an. Zuerst zweifelhaft, ob er der Kanzel oder dem

[1]) **Montucla** I, 576. — *Nouvelle Biographie universelle* XVII, 477—483.

Vertheidigerstande sich widmen solle, wurde er nur deshalb Arzt, weil er fühlte, dass seine Stimme für die Anforderungen der beiden anderen Berufe zu schwach war. Er hat eine glückliche Wahl getroffen. In der Geschichte der Medicin führt er den Beinamen des modernen Galenus, ein hinlänglicher Beweis dafür, dass der Schwerpunkt seines wissenschaftlichen Lebens in seiner ärztlichen Thätigkeit zu suchen ist. Seine medicinischen Leistungen beginnen indessen erst 1534, und vorher waren es astronomisch-mathematische Arbeiten, die ihn beschäftigten. Dem Jahre 1528 gehört eine Schrift *De proportionibus* an. Seine *Cosmotheoria* aus dem gleichen Jahre schildert eine unweit Paris durch Fernel ausgeführte Gradmessung, welche nicht durch die Vorzüglichkeit der Methode, wohl aber durch die zufällig erreichte Genauigkeit bekannt geblieben ist. Die Geschichte der reinen Mathematik zeichnet Fernel's Namen als den eines Mannes auf, dessen auf anderem Gebiete erworbene Berühmtheit seiner Beschäftigung mit unserer Wissenschaft Interesse verleiht.

Jodocus Clichtovaeus[1]), in Flandern geboren und 1543 in Chartres gestorben, wo er Canonicus war, hat über die geheimnissvollen Eigenschaften der Zahlen geschrieben, ausserdem ein Rechenbuch, hat aber überdies möglicherweise ein viel älteres Rechenbuch (vielleicht das des Sacrobosco?) zum Drucke befördert (S. 88).

Den bis hierher in diesem Kapitel genannten mathematischen Schriftstellern lassen wir **Charles de Bouvelles**[2]), lateinisch **Bovillus** folgen. Der Mann kommt auch in den Formen **Bouelles** und **Bouilles** vor. Er ist 1470 in Saucourt in der Picardie geboren und war Professor der Theologie und Canonicus in Noyon, wo er 1553 starb. Sein Hauptwerk erschien 1503 in lateinischer Sprache: Geometriae introductionis libri sex, breviusculis annotationibus explanata, quibus annectuntur libelli de circuli quadratura et de cubicatione sphaerae et introductio in perspectivam Caroli Bovilli. Der Titel einer französischen Ausgabe von 1542 lautet: Livre singulier et utile, touchant l'art et pratique de Géométrie, composé nouvellement en françois par maître Charles de Bouvelles, chanoine de Noyon. Andere Ausgaben des wiederholt aufgelegten Werkes sind von 1547, 1551, 1557, 1608. In der französischen Ausgabe[3]) spricht Bouvelles

— **Wolf**, Geschichte der Astronomie, S. 168—169. — Les historiettes de Tallemant des Reaux IV, 169 Note 1 (geschrieben 1657—1659, gedruckt Paris 1862).

[1]) **Kästner** I, 222—226. — **Chasles**, *Aperçu hist.* 473 (deutsch 540).

[2]) **Poggendorff** I, 253. — **Fontès**, *Caroli Bovilli liber de numeris perfectis* in den *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles Lettres de Toulouse* 1894.

[3]) **Chasles**, *Aperçu hist.* 481 (deutsch 551). — **S. Günther**, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (Leipzig 1876), S. 5—10.

von den regelmässigen Vielecken und anderen, welche sich daraus ableiten. Er beginnt (Figur 72) mit dem Fünfeck *ABCDE*

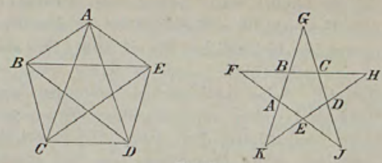


Fig. 72.

und leitet durch Ziehung aller Diagonalen ein ähnliches inneres aber mit der Spitze nach unten gekehrtes Fünfeck ab, welches selbst wieder durch Verlängerung sämmtlicher Seiten zum Sternfünfecke wird. Diese beiden Entstehungsweisen vereint betrachtet lassen aber die Winkelsumme des Sternfünfecks erkennen. Alle Fünfeckswinkel zusammen betragen 6 Rechte, der einzelne 108°. Die gezogenen Diagonalen zerfällen jeden Winkel wieder in 3 gleiche Winkel von je 36°. Das Sternfünfeck hat somit 5 Winkel von je 36° mit der Gesammtsumme von 2 Rechten. Ob die Einschränkung auf regelmässige Vielecke, welche Bouvelles sich auferlegt, neu ist, dürfte fraglich sein. Bradwardinus und die Anderen, welche Sternvielecken ihre Aufmerksamkeit zuwandten, sagen zwar nirgend etwas von dieser Einschränkung, und deshalb haben wir geglaubt, in unseren Berichten gleichfalls schweigen, in unseren Figuren uns nicht an die Regelmässigkeit binden zu dürfen, aber die Figuren jener älteren Schriftsteller sind thatsächlich alle regelmässig gezeichnet. Neu ist nur bei Bouvelles, dass er der Regelmässigkeit als Beweismittel sich bedient und sie desshalb betont. In der lateinischen Ausgabe von 1557 erscheint zwar einmal ein unregelmässiges Sternachteck[1]), so erzeugt, dass (Figur 73) die 4 Eckpunkte eines Quadrates je mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbunden werden; aber ob Bouvelles dieses Achteck *AEDHCGBF* als Sternvieleck anerkannt hätte, geht aus dem Texte in keiner Weise hervor. Die französische Ausgabe geht weiter zum Sechsecke, dessen *angles egredients* (Winkel des Sternsechsecks) 4 Rechte betragen. Jede solche Figur bestehe (Figur 74) aus zwei

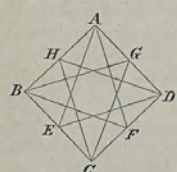


Fig. 73.

[1]) Günther l. c. S. 8, Figur 6 mit Berufung auf Blatt 33 der lateinischen Ausgabe.

sich durchsetzenden gleichseitigen Dreiecken und habe die doppelte Fläche ihres regelmässigen Sechsecks, das heisst desjenigen Sechsecks, durch dessen Seitenverlängerung sie hervorgebracht ist. Beim Siebeneck giebt es ein herausgehendes und ein noch mehr herausgehendes Siebeneck[1]). Bei dem letzteren, also bei dem Sternsiebeneck zweiter Art, sei die Winkelsumme 2 Rechte, wie sie bei dem Sternfünfeck war. Das eine Mal sei eben eine Theilung durch 7 vorzunehmen, wo das andere Mal nur eine solche durch 5 erforderlich sei. Bouvelles will damit wohl sagen, die Winkelsumme des Siebenecks (n-ecks) oder $10(2n-4)$ Rechte, sei durch 7 (n) zu theilen, um den Winkel des regelmässigen Siebenecks (n-ecks) in der Grösse $\frac{10}{7}\left(\frac{2n-4}{n}\right)$ Rechten zu finden. Dann theilt sich jeder Winkel durch $5\ (n-2)$ Diagonalen in ebenso viele kleinere Winkel von der Grösse $\frac{2}{7}\left(\frac{2}{n}\right)$ Rechte, und 7 (n) solcher Winkel betragen 2 Rechte. Der ganze letzte, eigentlich wesentlichste Theil des Beweises ist schweigend vorausgesetzt. Die obengenannte lateinische Ausgabe von 1557 geht in mancher Beziehung über den französischen Text von 1542 hinaus. Gleich beim Fünfeck ist die Figur und deren Beschreibung vollständiger als je zuvor (Figur 75). Die beiden früheren Veränderungen des convexen Fünfecks *ABCDE* durch Diagonalenziehung und Seitenverlängerung sind hier vereinigt. Es ist bemerkt, dass im Dreieck *ACE* und den gleichartig gebildeten jeder der beiden Winkel bei *A* und *E* doppelt so gross sei als der Winkel bei *C*. Die Axe *CF* des herausgehenden Fünfecks heisst es, sei zweimal so lang als die des einförmigen, *uniformis*, ein gar nicht übler Kunstausdruck für die nach allen Seiten convexe Figur, der Bouvelles wohl eigenthümlich ist. Das Sechseck und Siebeneck scheint zu weiteren Bemerkungen keinen Anlass geboten zu haben. Dagegen ist in der lateinischen Ausgabe auch das Achteck noch hinzugekommen und

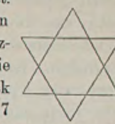


Fig. 74.

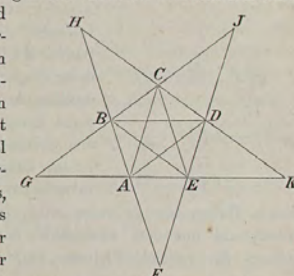


Fig. 75.

[1]) *Si on prolonge les costez de lheptagone saillant ou il surviendra ung aultre heptagone moult plus egredient que le premier.*

zwar sowohl das aus zwei sich durchsetzenden Quadraten gebildete erste Sternachteck, wenn man dieses gleichwie das aus zwei Dreiecken gebildete Sechseck wirklich ein Sternvieleck nennen darf, als auch das zweite eigentliche Sternachteck. Dass das letztere die Winkelsumme von 2 Rechten besitze, scheint Bouvelles nicht gesagt zu haben. Es bleibe dahingestellt, ob er es als selbstverständlich verschwieg, weil, wie wir oben zeigten, seine Andeutungen beim Siebeneck einem allgemein geführten Beweise ähneln oder ob jene unsere Auffassung Bouvelles zu viel zutraute und schon beim Achtecke eine Lücke seines Wissens wie seines Könnens sich bemerklich macht.

Bouvelles wird gemeiniglich als derjenige Gelehrte genannt, welcher nächst dem Cardinal von Cusa (S. 202) zuerst das Rollen eines Rades auf einer geradlinigen Basis beobachtete und somit in der Geschichte der Cykloide Erwähnung verdiene[1]). Richtig daran ist, dass Bouvelles ausdrücklich erzählt, er habe einmal auf einer Brücke in Paris auf das Rad eines über das ebene Pflaster rollenden Wagens geachtet. Da sei ihm klar geworden, dass, wenn ein Rad einen ganzen Umlauf vollendet habe, der zurückgelegte Weg dem Kreisumfange gleich sein müsse, und dass man, wenn die Punkte der Basis, auf welche einzelne Punkte des Rades auftreffen, gefunden werden, damit zugleich Strecken erhalte, welche Theilen des Kreisumfanges gleich seien. Die Curve dagegen, welche etwa ein Nagel des Rades in der Luft beschreibt, während jene Umdrehung sich vollzieht, also die eigentliche Cykloide, hat Bouvelles keineswegs erkannt. Er hält vielmehr (Figur 76) die bei einer halben Umdrehung erzeugte Curve ohne weiteres für einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt um den vierten Theil des Halbmessers des rollenden Kreises tiefer liegt als der Punkt, in welchem jener Kreis die Basis trifft, und dessen Halbmesser gefunden wird, indem man den so bestimmten Mittelpunkt mit dem Endpunkte des der Basis parallelen Durchmessers des rollenden Kreises verbindet. Eine Erörterung dieser Zeichnung hat zu folgendem Ergebnisse geführt. Vermöge $EH = \frac{5}{4}r$ und $ED = r$ ist $HD = r\sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{r}{4}\sqrt{41}$. Ferner

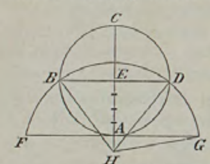


Fig. 76.

[1]) Wallis in den *Philosophical Transactions* Vol. XIX (für die Jahre 1695, 1696, 1697) pag. 561—566. — S. Günther, War die Zykloide bereits im XVI. Jahrhunderte bekannt? in Eneström's *Biblioth. mathem.* 1887, S. 8—14. Auf S. 8 der Abdruck der wesentlichen Stelle aus der französischen Ausgabe von Bouvelles und daran anknüpfend die Discussion der Construction.

$$AH = \frac{r}{4}, \quad HG = HD = \frac{r}{4}\sqrt{41},$$

also

$$AG = \frac{r}{4}\sqrt{41 - 1} = \frac{r}{2}\sqrt{10}.$$

Aber $AG = \text{arc.}\,AD$ stellt ein Viertel der Kreisperipherie, d. h. $\frac{r\pi}{2}$ dar, mithin ist Bouvelles' Zeichnung gleichbedeutend mit der Annahme $\pi = \sqrt{10}$. Ob ihm dieser indische Werth (Bd. I, S. 606) von aussen zugetragen worden, ob er von selbst auf ihn verfiel, dürfte mit Gewissheit sich nicht entscheiden lassen. Auffallend ist das Zusammentreffen unter allen Umständen.

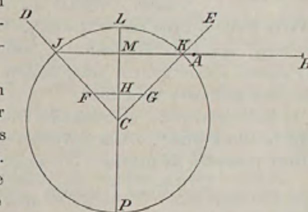


Fig. 77.

Einen zweiten missglückten Versuch auf dem Gebiete der Kreismessung machte Bouvelles in Gestalt einer Arcufication[1]). Man theile (Figur 77) eine Strecke AB in drei gleiche Theile und trage auf den Schenkeln eines rechten Winkels DCE vom Scheitel C aus je ein Drittel $CF = CG = \frac{1}{3}AB$ ab. Nachdem FG gezogen, wird zu dieser Geraden parallel innerhalb des rechten Winkels JK gesucht, so dass $JK = CF + CG + FG$. Alsdann soll der um C als Mittelpunkt mit CK als Halbmesser beschriebene Kreis die vierfache Länge von AB besitzen. Sei $AB = a$, $CG = \frac{a}{3}$. Weil CGH ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck ist, ergiebt sich $HG = \frac{a}{3\sqrt{2}}$, $FG = 2HG = \frac{a}{3}\sqrt{2}$. Daraus folgt

$$JK = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2}) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}JK = MK = MC = \frac{a}{6}(2 + \sqrt{2}),$$

$$CK = MK \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{3}(1 + \sqrt{2}).$$

Die gezeichnete Kreisperipherie mit CK als Halbmesser ist folglich $2\pi \cdot \frac{a}{3}(1 + \sqrt{2})$ und wird für $4a$ gehalten. Das bedeutet $\pi = \frac{6}{\sqrt{2} + 1} = 6(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{72} - 6 = 2{,}4852814\cdots$, mithin ein viel zu kleiner Werth.

Ein dritter Versuch ist der einer Circulatur. Halbmesser des

[1]) Buteo, *De quadratura circuli* (Lyon 1559) pag. 155—158 berichtet darüber.

dem Quadrate (Figur 78) flächengleichen Kreises ist die Verbindungslinie des Mittelpunktes des Quadrates mit dem einen Eckpunkte zunächst gelegenen Viertheilungspunkte der Quadratseite. Ist a die Quadratseite, so ist jener Halbmesser offenbar $\frac{a}{4}\sqrt{5}$ und die Kreisfläche $\frac{5}{16}a^2\pi$. Sie soll dem Quadrate a^2 gleich, also $\pi = 3{,}2$ sein.

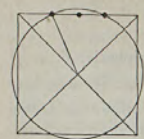


Fig. 78.

Genau die gleiche Construction[1]) lehrte Joachim Fortius Ringelberg in seinem *Chaos mathematicum*, welches in einer Gesammtausgabe seiner Werke 1531 in Lyon gedruckt wurde. Ringelberg[2]) ist in Antwerpen geboren, am Hofe Maximilian I. erzogen. Nachdem er erst mit 17 Jahren Latein gelernt hatte, studirte er in Löwen, Paris, Orleans, Bourges und starb etwa 1536.

Endlich viertens entnahm Bouvelles noch eine Circulatur, wie uns berichtet wird[3]), einem in Volkssprache geschriebenen, von einem Bauer verfassten Büchelchen. Der einem Quadrate flächengleiche Kreis hat nämlich nach dieser Vorschrift $\frac{8}{10}$ der Diagonale als Durchmesser. Sei a die Seite des Quadrates, a^2 die Kreisfläche. Die Diagonale ist $a\sqrt{2}$, der Kreisdurchmesser

$$2r = \frac{8}{10}a\sqrt{2}, \quad a = \frac{5r}{2\sqrt{2}}, \quad a^2 = 3\frac{1}{8}r^2 = \pi r^2 \quad \text{und} \quad \pi = 3\frac{1}{8}.$$

Werth und Construction sind uns wieder von früher her bekannt. Der Werth $\pi = 3\frac{1}{8}$ ist uns in diesem Bande bei Paciuolo (S. 317) als untere Grenze jener Verhältnisszahl schon vorgekommen, die Construction ähnelt einer indischen (Bd. I, S. 601—602) und fällt ganz mit ihr zusammen, wenn wir die damalige versuchsweise aufgestellte Vermuthung von dem Näherungswerthe $\sqrt{2} \sim \frac{10}{7}$, aus welcher folgte, dass der Kreisdurchmesser dort $\frac{8}{10}$ der Diagonale war, jetzt rückwärts auf die ausdrücklich ausgesprochene Vorschrift stützen dürfen. Immer auffallender wird dabei das ganz unvermuthete und uns kaum erklärliche Zusammentreffen mit Indischem, von welchem die zuerst angeführte Rectification schon ein Beispiel gab.

Bouvelles hat zwischen der lateinischen Ausgabe seiner Geometrie von 1503 und deren französischen Uebersetzung von 1542 (S. 379) auch noch ein von derselben verschiedenes französisches Buch: *Géo-*

[1]) So berichtet wieder Buteo l. c. pag. 151. [2]) Jöcher, Allgemeines Gelehrten-Lexikon III, 2102—2103. [3]) Tartaglia, *General Trattato de' numeri et misure*, Parte IV fol. 22 (Venetia 1560).

métrie en françoys verfasst, welches 1511 und wiederholt 1514 in Paris erschien. Noch ein Jahr früher gab der gleiche Pariser Drucker *Opuscula de Charles de Bouvelles* (1510) heraus, einen Sammelband, in welchem auch eine theologisch-philosophisch-arithmetische Abhandlung *Opus de XII numeris* eine Stelle gefunden hat. In ihr ist Einiges über vollkommene Zahlen enthalten, z. B. der Satz, dass ausser der 6 jede andere vollkommene Zahl nach Abzug von 1 durch 9 theilbar werde, umgekehrt lasse sich aber der Satz nicht behaupten[1]).

Wir haben hier noch eines Guillaume Postel[2]) (1510—1581) zu erwähnen, welcher 1540 anonym ein *Compendium de Mathematicis disciplinis ex Cassiodoro* herausgegeben zu haben scheint. Aus diesem Buche wird die wichtige Stelle berichtet[3]): *Huius disciplinae tota vis in exemplis, additionibus et detractionibus partium, est sita: quam partem qui volet plenissime pernosse, L. Appulejum legat; qui primus Latinis haec argumenta demonstravit*, aus welcher ähnlich wie aus dem Algorithmus linealis (S. 222) der Schluss gezogen worden ist (Bd. I, S. 524), ein Rechenbuch des Appuleius müsse sich bis zum Anfange des XVI. Jahrhunderts erhalten haben.

Wir wenden uns von Frankreich nach Südwesten zur pyrenäischen Halbinsel. Mag es doch unseren Lesern wunderlich genug erscheinen, dass von diesem Theile Europas in diesem Bande noch gar nicht die Rede war. Spanien war unter arabischer Herrschaft, wie wir im I. Bande gesehen haben, der Sitz einer hoch entwickelten wissenschaftlichen Bildung. Mathematische Studien blühten dort. In der Mitte des XIII. Jahrhunderts, als die Araber nach Granada zurückgedrängt wurden, herrschte Alfons X el Sabio (der Weise) über die Sieger, der Astronom auf dem Königsthrone, welcher, wie wir mehrfach anzuführen in der Lage waren, in den Alfonsinischen Tafeln eine Tabellensammlung berechnen liess, deren die Astronomen von ganz Europa sich Jahrhunderte lang bedienten. Als endlich mit der Einnahme von Granada am 2. Januar 1492 auch das letzte Bollwerk des Islam gefallen war, da verliess nur sieben Monate später Christoforo Colombo auf spanischem Schiffe Europa, um die erste seiner vier im Dienste des gleichen Landes gemachten Entdeckungsreisen anzutreten. Das benachbarte Portugal war nicht minder an den grossen Entdeckungen betheiligt, welche die Kenntniss der Erdoberfläche erweiterten. In der ersten Hälfte des XV. Jahrhunderts

[1]) Fontès l. c. Der Satz selbst ist richtig und wurde zuerst von Wantzel in den *Nouvelles annales de mathématiques* III, 337 bewiesen. [2]) Poggendorff II, 508—509. [3]) Vossius pag. 40.

lebte der Infant Don Henrique der Seefahrer, in der zweiten Hälfte des gleichen Jahrhunderts trat Martin Behaim, der Schüler von Regiomontanus (S. 289) in portugiesische Dienste, am Ende des Jahrhunderts umschiffte Vasco de Gama die Südspitze Afrikas. Solche kühne Seereisen sind undenkbar, wenn die Führer nicht der praktischen Sternkunde in hohem Grade mächtig sind. Sternkunde andererseits setzt immer und überall eine ihr gleichlaufende Entwickelung der Schwesterwissenschaft der Mathematik voraus. Wer waren die Träger dieser Entwickelung in Spanien und Portugal? Wir haben die Frage aufgeworfen und dadurch ihre Berechtigung anerkannt. Wir müssen aber als Antwort die auffallende Erscheinung ins Licht treten lassen, dass von jener Entwickelung der Mathematik auf spanischem und ebenso auf portugiesischem Boden nur sehr dürftige Spuren nachweisbar sind, so dürftige, dass man sich gezwungen sieht, anzunehmen, das kaum Glaubliche sei wirklich Wahrheit: die Schifffahrtskunde habe, wie kaum je zuvor, Fortschritte gezeigt, die Mathematik sei daneben so gut wie unbeachtet geblieben. Die wenigen Namen, welche wir zu nennen haben, bestätigen lediglich diesen Ausspruch.

Um die Wende des Jahrhunderts haben wir Petro Sanchez Ciruelo[1]) zu erwähnen. Er studirte in Salamanca, zog dann in jungen Jahren nach Paris, wo er während zehn Jahren Mathematik und Philosophie lehrte. 1510 wurde er Professor der Theologie und Philosophie an der Universität zu Alcala, später Canonicus an der Kathedrale von Salamanca. Er war einer der drei Lehrer und zwar der höchstgestellte des nachmaligen Königs Philipp II. Seine Arithmetik *Arithmetice pratice seu Algorismi Tractatus* ist 1505 in Paris gedruckt, ebenda schon früher 1502 (nach Anderen 1495?) die von Ciruelo herausgegebene Arithmetica speculativa des Bradwardinus, ebenda 1508 eine Ausgabe der Sphaera des Sacrobosco mit reichhaltigen Erläuterungen, so dass man fast verpflichtet wäre, den Spanier als

[1]) Poggendorff I, 446. Wie dieser sonst so sorgfältige Schriftsteller dazu kam, als Geburtsjahr 1500 etwa anzugeben, während er 1496 als Druckjahr der Arithmetik angiebt, ist unerfindlich. — Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert S. 42 (Supplementheft zu Zeitschr. Math. Phys. XXII) hält Sanchez für den Familiennamen. — *Nouvelle Biographie universelle* X, 620—621. — G. Vicuña, *Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne aux XVI et XVII Siècles* in Eneström's *Bibliotheca mathematica* 1890, 33—36. — A. F. Vallin, *Cultura scientifica de España en el siglo XVI. Discursos leidos ante la real academia de sciencias*, Madrid 1893, ist uns nur durch einen Bericht von G. Eneström (*Bibliotheca mathem.* 1894, pag. 33—36) bekannt, scheint aber wesentlich bibliographische Notizen ohne Inhaltsangabe der betreffenden Werke zu enthalten.

Franzosen zu behandeln, wenn nicht 1516 und wiederholt 1518 in Alcala ein *Cursus quatuor mathematicarum artium liberalium* erschienen wäre. Bemerkenswerth ist aus seiner Arithmetik, dass er Namen für 10^6 und 10^{12} kennt, welche von den bei Chuquet vorkommenden abweichen; 10^6 heisst ihm *cuento* und 10^{12} erst heisst *millon*. Die geometrische Abtheilung des Cursus soll sich hauptsächlich an Campanus und Bradwardinus anschliessen, in der Angabe zweier Kreisquadraturen folge er Bouvelles. Die Darstellung der Perspective sei reich an geschichtlichen Bemerkungen.

Wir schalten hier den Namen eines Ungarn Magister Georgius de Hungaria ein, der, wie die von ihm benutzten Zahlwörter *cuento* und *millon* beweisen, als Schüler Ciruelo's betrachtet werden muss. Diese Abhängigkeit weist ihm hier seinen Platz an, während das Erscheinungsjahr 1499 seiner in Holland gedruckten Arithmetik[1]) ihn schon im 55. Kapitel zur Erwähnung hätte bringen sollen.

Etwa in gleiche Linie mit Ciruelo ist Juan Martinez Guijeno[2]) zu stellen. Das Wort Guijeno bedeutet Kieselstein und wurde als Silicius latinisirt, unter welchem Namen der hier gemeinte Schriftsteller verhältnissmässig am bekanntesten ist. Er war Professor der Philosophie an der Universität Salamanca, später Erzbischof von Toledo und Cardinal. Auch er war einer der Lehrer Philipp II., wozu er als Nachfolger des Ciruelo ernannt wurde, nachdem dieser, wie man erzählt, durch seinen kleinen Wuchs sich als nicht recht tauglich erwiesen hatte. Silicius liess 1514 in Paris eine praktische Arithmetik drucken, welche, wie wir schon wissen (S. 219) das Linienrechnen lehrte, und welche (S. 378) Finaeus wenige Jahre später wiederholt zum Drucke beförderte, und gab Schriften des Suisset heraus.

Gasper Lax[3]) war, obwohl Spanier von Geburt, Lehrer an der Universität Paris und gab dort Schriften über Arithmetik und über Proportionenlehre heraus. Später kehrte er nach seiner Heimath zurück und lehrte in Saragossa, wo er 1560 starb.

Juan de Ortega[4]) gehörte dem Orden der Prädicatoren an. Er liess 1512 in Barcelona eine *Compusicion de la arte de la arismetica y Juntamente de geometria* erscheinen, welche dann wiederholt und in verschiedenen Sprachen gedruckt worden ist. Wir sind durch

[1]) Die Arithmetik des Magisters Georgius de Hungaria aus dem Jahre 1499 von Coloman von Szily und August Heller. Math. und naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XII. Budapest 1894. Die Arithmetik selbst ist gleichfalls 1894 in Budapest in Neudruck erschienen. [2]) Poggendorff, II, 930—931. [3]) Ebenda I, 1395. [4]) Kästner, I, 96—99. — Jos. Perott, *Sur une arithmétique espagnole du seizième siècle* im *Bulletino Boncompagni* XV, 163—169.

Auszüge damit bekannt, dass auch bei Ortega das Wort *cuento* mit der Bedeutung einer Million vorkommt, ferner dass

$$\sqrt{55702} = 236\tfrac{6}{473} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{18889} = 26\tfrac{1313}{2106}$$

gerechnet ist. Man erkennt in diesen Werthen die beiden Formeln

$$\sqrt{A} \sim a + \frac{A - a^2}{2a + 1}, \quad \sqrt[3]{A} \backsim a + \frac{A - a^3}{3a(a + 1)}.$$

Die erste derselben ist, wie wir uns erinnern wollen, arabischen Gebrauchs gewesen, die zweite weicht um ein Geringes von der Formel Leonardo's von Pisa (S. 32)

$$\sqrt[3]{A} \sim a + \frac{A - a^3}{3a(a + 1) + 1}$$

ab. Die Quadratwurzel ist aber auch nicht regelmässig nach der gegebenen Formel gebildet. Es kommen Angaben vor wie

$$\sqrt{128} = 11\tfrac{16}{51}, \quad \sqrt{80} = 8\tfrac{17}{18}, \quad \sqrt{75} = 8\tfrac{103}{156} \text{ u. s. w.},$$

welche hergestellt werden konnten, indem man sich eines neuerdings seit 1894 wieder bekannt gewordenen Verfahrens des Heron von Alexandria bediente, von welchem überhaupt zahlreiche Spuren vermuthet werden.

Das ist die ganze Ausbeute, welche Spanien bis zur Mitte des XVI. Jahrhunderts uns bietet. Portugal bietet für den gleich bemessenen Zeitraum weniger und zugleich mehr: einen einzigen Namen, aber als Träger desselben einen Mann, der die Wissenschaft um mehrere fruchtbare Gedanken bereichert hat, Pedro Nuñez, lateinisch Nonius[1]). Er ist 1492 zu Alcazar de Sol geboren, studirte in Lissabon, dann in Salamanca. Im Jahre 1519 kam er in die verantwortungsreiche Stellung eines Oberaufsehers der Zölle nach Goa in Indien, von wo er 1529 als königlicher Kosmograph zurückkehrte. 1544 bis 1562 war er Inhaber eines für ihn gegründeten Lehrstuhls der höheren Mathematik an der Universität Coimbra. Er unterrichtete den Prinzen Heinrich von Portugal, welcher später den Königsthron dieses Landes bestieg. Nonius starb zu Coimbra 1577. Seine Schriften hat er theils in lateinischer, theils in portugiesischer Sprache verfasst. Eine der letzteren hat er nachträglich selbst ins Spanische übersetzt, und in dieser Gestalt ist sie 1567 in Antwerpen als *Livro de Algebra em Arithmetica e Geometria* gedruckt worden.

[1]) Kästner II, 337 und 587—590. — *D'Araujo d'Azevedo* in von Zach's Monatlicher Correspondenz für Beförderung der Erd- und Himmelskunde III, 203—206. — *Nouvelle Biographie universelle* XXXVIII, 361—363. — R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 327, 365, 367. — S. Günther, Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie S. 341—344.

In dieser Algebra scheint der Versuch enthalten zu sein[1]), den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweier algebraischen Ausdrücke zu ermitteln. Wir haben noch drei andere Schriften zu erwähnen. Sein *De crepusculis liber unus*, gedruckt 1542 in Lissabon (*Olysipone*) enthält die Auflösung der in der Geschichte der Astronomie wohlbekannten Aufgabe der kürzesten Dämmerung, ist für uns aber durch den Vorschlag, wie man bei Winkelmessungen verfahren solle, der nebenbei gemacht ist, merkwürdig. Nonius will eine aus 46 concentrischen Kreisquadranten bestehende Vorrichtung angefertigt wissen. Der äusserste und grösste Kreisbogen soll in 90 Theile, mithin in ganze Grade eingetheilt sein, der nächstfolgende in 89 Theile, deren jeder also $1\frac{1}{89}$ Grad oder $1^0\,40,''4494\ldots$ beträgt. Jeder folgende Quadrant soll wieder in gleiche Theile eingetheilt sein, deren Anzahl um je eine Einheit abnimmt. Der innerste Quadrant hat mithin nur 45 Theile von je 2^0. Wird nun der eine Schenkel eines spitzen Winkels mit dem einen die Vorrichtung begrenzenden Halbmesser, der Scheitel des Winkels mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte aller Quadranten zur Deckung gebracht, so hatte man nur zuzusehen, bei welchem von den Quadranten der andere Schenkel mit einem Theilstriche zusammenfiel und der wievielte Theilstrich es war, um den Winkel mit grosser Genauigkeit gemessen zu haben. Dass die sehr sinnreiche Vorrichtung wenigstens für Winkelmessung sich nicht einzubürgern vermochte, beruht wohl wesentlich auf der technischen Schwierigkeit, jene 46 unter sich verschiedenen Bogentheilungen mit gleicher Zuverlässigkeit auszuführen, eine Schwierigkeit, welche erst zu einer Zeit vollkommen besiegt wurde, als andere vollkommnere Einrichtungen die des Nonius überholt und verdrängt hatten. Gleichwohl hat die Nachwelt den Namen des Nonius mit den genauen Winkelmessungen verknüpft, welche nicht nach seinem Gedanken zur Ausführung kamen.

Die zweite von uns zu nennende Schrift *De erratis Orontii Finei* ist 1546 in Coimbra (*Conimbricae*) gedruckt. Sie macht gegen den damals auf der Höhe seines Ruhmes stehenden pariser Lehrer Front.

Die dritte Schrift gleichen Druckjahres und gleichen Druckortes wie die eben angegebene heisst *De arte atque ratione navigandi*. Von einem Punkte der Meeresoberfläche zum anderen führen zahllose Wege. Einer derselben ist der kürzeste und würde, wäre die Meeresoberfläche eben, eine gerade Linie sein. Das war auch die ursprüngliche Meinung der Seefahrer, welche in gerader Linie zu segeln ver-

[1]) *Les oeuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges* (Leiden 1634) pag. 56, Problème LIII.

meinten, wenn sie die Richtung zum Bestimmungsorte unverändert festhielten. Nonius war der erste, welcher es aussprach, dass die Schiffsbahn, welche sämmtliche Meridiane der Erdoberfläche unter gleichem spitzen Winkel schneidet, als auf einer Kugel verlaufend keine gerade Linie, aber auch kein Grössterkreis der Erdkugel und ebensowenig ein aus Stücken von Grösstenkreisen zusammengesetzter Weg sein könne. Sie sei vielmehr durch das Zusammenwirken zweier, unter Umständen mehrerer Kräfte zu Stande gekommen, gleich wie die Spirale durch zwei vereinigte Bewegungen entsteht, und sei eine eigenartige Linie, *rumbus*. Damit war die Entdeckung derjenigen Linie doppelter Krümmung vollzogen, welche am Anfange des XVII. Jahrhunderts durch Willebrord Snellius den Namen Loxodrome erhielt. Die deutschen Seeleute gaben ihr den der Nonius'schen Bezeichnung nachgebildeten Namen Rhumbs, weil die beiden sich vereinigenden Bewegungen jeweils als die Seiten eines Rhombus erschienen. Nonius hat nicht nur das Vorhandensein dieser krummen Linie entdeckt, er ist auch zur Kenntniss einer ihrer überraschendsten Eigenschaften vorgedrungen, derjenigen nämlich, dass Loxodromen, wenn wir uns erlauben schon jetzt des gebräuchlichsten Namens uns zu bedienen, zwar in Windungen um den Erdpol herumgehen und demselben ohne Aufhören näher kommen, aber den Pol selbst nicht zu erreichen im Stande sind. Wäre solches der Fall, so müsste das letzte Stückchen der Loxodrome mit irgend einem Meridian zusammenfallend diesen unter dem Winkel 0 treffen, d. h. dem Gesetze widersprechen, dass die Loxodrome alle Meridiane, welchen sie begegnet, unter gleichem Winkel schneide.

60. Kapitel.

Mathematiker an deutschen Universitäten.

Deutschland hat in dem Zeitraume des XIV. Abschnittes so viele Persönlichkeiten hervorgebracht, welche genannt werden müssen, dass nothwendigerweise eine gewisse Anordnung zu treffen ist, welche die Uebersicht uns ermögliche. Demgemäss werden wir zuerst von der Mathematik an den Universitäten handeln und dabei geographisch von Osten nach Westen fortschreiten. Dann aber sprechen wir von den viel zahlreicheren Mathematikern, welche nicht an einer Universität wirksam waren, und müssen bei ihnen als neuen Eintheilungsgrund das engere mathematische Gebiet wählen, auf welchem sie ihr Arbeitsfeld fanden. Wir geben den Rechenmeistern die erste Stelle,

knüpfen an sie die Cossisten an, dann die Geometer mit Einschluss derjenigen, welche dem besonderen mehr rechnenden Kapitel der Geometrie, welches den Namen der Trigonometrie führt, ihre Kräfte widmeten.

Wir knüpfen unmittelbar an Früheres an, wenn wir Wien als die Hochschule nennen, welche vorzugsweise die mathematischen Wissenschaften pflegte. Maximilian I., über dessen Verdienste um das deutsche Reich die Ansichten noch so weit auseinander gehen können, ohne zu beeinträchtigen, was er für seine österreichischen Erblande, was er insbesondere für seine Hauptstadt Wien war, wusste in den letzten Jahren des XV. Jahrhunderts Männer an die dortige Universität zu ziehen, welche ihr zu einer noch nicht erreichten Höhe verhalfen [1]. Konrad Celtis, der berühmte Wanderprediger des Humanismus, der von Ort zu Ort sein Wissen und seine Leidenschaften, seinen Trieb zu lehren und zu dichten, seine in jedem Sinne rastlose Thätigkeit trug, kam 1497 nach Wien. Mit ihm kam sein Freund Andreas Stöberl aus Oettingen im Ries, bekannter unter der lateinischen Namensform als Stiborius [2]. Beide wurden hervorragende Mitglieder der von Ofen nach Wien verlegten Donaubruderschaft, eines gelehrten Kreises, welcher Geschichte, Mathematik und Musik pflegte, und aus welchem eine eigentlich wissenschaftliche Vereinigung mit besonderen Satzungen und feierlicher Eröffnung am 4. Februar 1502 herauswuchs, gewissermassen die erste Akademie der Wissenschaften in Deutschland. Ihr Name war der des *Collegium poetarum et mathematicorum*, und der Vorsitzende der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abtheilung war Johannes Stabius [3] († 1522), der eben erst in Nürberg am Chor der St. Lorenzkirche eine berühmte Sonnenuhr angefertigt hatte, welche in unserem Jahrhunderte unter fachkundiger Leitung wieder hergestellt worden ist [4], der andrerseits auch eine flächentreue Landkartenzeichnung erdachte, wahrscheinlich die älteste, welche grade diese Seite der Aufgabe bildlicher Darstellung von Theilen der Erdoberfläche bestimmt ins Auge fasste. Von Ergebnissen, welche aus der Gründung des genannten Collegiums für unsere Wissenschaft hervorgegangen wären, lässt sich nichts berichten, es sei denn, dass wir als solche die Errichtung von zwei mathematischen Lehrstühlen an der Wiener Universität gelten lassen, welche Maxi-

[1] Gerhardt, Math. Deutschl. S. 36—41 und S. 51—60. Günther, Unterricht Mittela. S. 249—264. [2] Aschbach, Geschichte der Universität Wien II, 374—376. [3] Ebenda S. 363—373. [4] Günther, Unterricht Mittela. S. 252 Note 1.

milian vollzog, und wozu er die Anregung, wenn nicht von dem Collegium als solchem, doch sicherlich von einflussreichen Mitgliedern desselben erhalten hatte, die alle in einer oder der andern Weise an der Universität lehrten, beziehungsweise vielleicht lehren wollten. Celtis lehrte unter Anderem mathematische Geographie[1]) unter Zugrundelegung eines gereinigten Textes des Ptolemäus und unter Erläuterung des Vorgetragenen an einer künstlichen Erd- und Himmelskugel, Vorrichtungen, welche vermuthlich damals zuerst beim Unterrichte benutzt wurden.

Von den beiden mathematischen Professuren erhielt Stiborius die eine, zur anderen wurde 1503 Rosinus, das ist Stephan Rösel aus Augsburg, ernannt, der 1501 von Krakau nach Wien übergesiedelt war, und ebendort 1533 verstarb. Wie lange er dem ihm anvertrauten Lehramte vorstand, ist nicht bekannt. Von seinen schriftstellerischen Leistungen erwähnen wir einer in deutscher Sprache geschriebenen *Praktik*, ein Titel, der uns von De la Roche her (S. 373) schon bekannt ist. Stiborius behielt seine Professur nur ganz kurze Zeit. Bereits 1503 hatte sie einen neuen Inhaber Tannstetter.

Georg Tannstetter[2]) war etwa 1480 in Rhein am Lech geboren und hatte sich, da Rain in seiner Heimath so viel wie Grenzpfad bedeutete, den lateinischen Namen Collimitius beigelegt. Zum Magister wurde er in Ingolstadt ernannt, und von dort kam er nach Wien. Neben einer fruchtbaren Thätigkeit als Schriftsteller und Lehrer, von der gleich noch die Rede sein muss, widmete er sich auch der Heilkunde und zwar mit solchem Erfolge, dass Maximilian ihn als Leibarzt an seine Person fesselte, ihm bei dieser Gelegenheit den Adelstitel Tannstetter von Thamnau verleihend. Er war auch 1519 um den Kaiser bei dessen Tode im Schlosse zu Wels. Er selbst starb 1530. Als Schriftsteller bemühte sich Tannstetter namentlich um die Drucklegung damals schon klassischer Werke, ein wahres Verdienst in einer Zeit, in der es immer noch galt, Gutes durch Vervielfältigung zum Allgemeingute zu machen, und wenn die Nachwelt in der Verleihung des Beiwortes gut auch nicht immer der damaligen Gegenwart beipflichtete, so hat sie unter allen Umständen dankbar anzuerkennen, dass ein Lefèvre d'Etaples, ein Orontius Finaeus, ein Tannstetter vielleicht durch jene Drucklegungen Schriften vor dem Untergange bewahrt haben, die auch so noch zu den grössten buchhändlerischen Seltenheiten geworden sind, und ohne deren Kenntniss wir über gar Vieles noch mehr im Unklaren wären, als wir es

[1]) Aschbach l. c. II, 62. — Günther l. c. S. 250 Note 2. [2]) Poggendorff II, 1067. — Aschbach l. c. II, 271—277.

sind. Das erste durch Tannstetter's Vermittelung gedruckte Werk erschien 1514 in Wien bei den Brüdern Leonhard und Lucas Alantsee, welche von 1498 bis 1522 aus ihrer Druckerwerkstätte im Ganzen 109 Werke hervorgehen liessen, eine für die damalige Zeit bedeutende Zahl[1]). Der Band von 1514 ist eine Vereinigung[2]) der Tabulae eclypsium von Peurbach und der Tabula primi mobilis von Regiomontan. An der Spitze steht als Einleitung[3]) *Viri mathematici, quos inclytum Viennae gymnasium ordine celebres habuit*, mithin eine Art von Geschichte der Wiener Mathematiker, welche die Hauptquelle dessen geworden ist, was man von der dortigen mathematischen Schule weiss. Bei Nennung des Stiborius, als dessen Schüler Tannstetter sich bezeichnet, giebt er ein Verzeichniss von dessen reichhaltiger Büchersammlung. Ausserdem geht den Peurbach'schen Tafeln noch eine Vorrede des Stiborius voraus[4]), welche weitere Namen deutscher Mathematiker aufbewahrt hat. Ein zweiter gedruckter Band von 1515 ist eine Vereinigung der fünf wichtigsten Schriften der mittelalterlichen Mathematik[5]), Schriften, welche unsere Leser insgesammt kennen: die Arithmetik von De Muris, die Proportionenlehre von Bradwardinus, die Latitudines von Oresme in der durch Blasius von Parma erläuterten Ausgabe, das Rechnen mit ganzen Zahlen von Peurbach, das Bruchrechnen von Johann von Gmunden bilden den Band, welchen Tannstetter einem Schüler, Bunderl, zu lieb zum Drucke befördert hat. Dessen Inhalt bildete sonach offenbar einen wesentlichen Theil des Stoffes, welchen der Schüler sich anzueignen angewiesen war. Unter den eigenen Schriften Tannstetter's erwähnen wir noch eine mit Stiborius gemeinsam verfasste. Papst Leo X. hatte die Frage der Kalenderverbesserung sich angelegen sein lassen und von Kaiser Maximilian die Unterstützung der Wiener Mathematiker erbeten[6]). Die Universität um Rath gefragt ernannte Stiborius und Tannstetter zur Anfertigung eines Gutachtens, welches handschriftlich sich erhalten hat. Das Zusammenwirken mit einem gelehrten Freunde entsprach vollständig den Neigungen Tannstetter's, der auch freilich ohne nennenswerthe Erfolge versuchte, in der *Collimitiana* genannten Gesellschaft einen Ersatz für das nach dem Tode des Celtis eingegangene poetisch-mathematische Collegium zu schaffen[7]). Unter Tannstetter's Verdiensten stand ohne Zweifel seine Lehrthätigkeit obenan. Rühmen ihn doch die Schüler, so oft sie schriftstellerisch zu Aeusserungen Gelegenheit fanden, um die Wette.

[1]) Allgem. deutsche Biographie I, 170. [2]) Kästner II, 526 flgg. [3]) Ebenda S. 529—532. [4]) Ebenda S. 532 Nr. 8. [5]) Denis, Wiens Buchdruckereigeschicht bis MDLX (Wien 1782) S. 134 flgg. [6]) Aschbach l. c. II, 376. [7]) Ebenda S. 273.

Einer dieser Schüler war der steiermärker Astronom und Arzt Andreas Perlacher[1]), und dessen Schüler wieder war Johann Vögelin[2]) aus Heilbronn. Letzterer begann seine eigene Lehrthätigkeit an der Domschule zu Augsburg. In Wien nahm ihn sodann Tannstetter als Gehülfen, um seine Vorlesungen ersatzweise zu halten, wenn er selbst ärztlich in Anspruch genommen dieselben aussetzen musste. Im Jahre 1528 wurde Vögelin mit der damals erledigten mathematischen Professur bedacht und hatte namentlich den Lehrauftrag für die Sphaerik des Theodosius, die er 1529 im Drucke herausgab[3]). Vögelin ist aber wesentlich durch eine andere schriftstellerische Leistung bekannt, durch sein *Elementale geometricum ex Euclidis geometria* von 1528. Euklid's Elemente bildeten, wie wir uns erinnern (S. 251—254), einen Lehrgegenstand der Universitäten, aber doch nur in sehr beschränkter Weise. Die vier ersten Bücher der Elemente oder, wenn man von der Proportionenlehre in einem Athem mitreden will, allenfalls die fünf ersten Bücher waren der Meistbetrag dessen, was den Studirenden geboten wurde. Sollte um dieses Stoffes willen der Schüler genöthigt werden, eine der im Preise kostbaren umfangreichen Euklidausgaben anzuschaffen, oder sollte er ohne gedrucktes Hilfsmittel den Vorlesungen folgen müssen? Das Erstere schien vielleicht unerreichbar, jedenfalls unzweckmässig, das Zweite widersprach allen Gewohnheiten der Zeit. Desshalb liess ein gewisser Lacher[4]) aus Mersburg am Bodensee 1506 in Frankfurt an der Oder einen besonderen Abdruck der vier ersten Bücher nach der Ausgabe des Campanus bewerkstelligen. Etwas selbständiger ging Vögelin vor, der es sich angelegen sein liess, das Nothdürftigste aus der euklidischen Geometrie der Ebene zu wenigen Druckbogen zusammenzustellen, wofür er freilich einer anderen Ausdrucksweise sich bedient, wenn er in der Widmung an Tannstetter sagt[5]), er habe zum Vortheile aller Studirenden diejenigen Sätze aus der Geometrie Euklid's ausgezogen, welche häufiger bei Beweisen vorkommen, und welche ziemlich nahe daran sind, zum Gipfelpunkte der Wissenschaften hinzuführen. Armseliger Gipfelpunkt, aber noch armseligere Genügsamkeit der Zeit, welche Vögelin's kleinen Auszug in wiederholten Nachdrucken zu Tage förderte und an den verschiedensten Anstalten

[1]) Aschbach, l. c. II, 339—343. [2]) Ebenda S. 340 und S. 342. — Günther, Unterricht Mittela. S. 58 und S. 256. [3]) Ueber diese Ausgabe vergl. Nizze's deutsche Ausgabe des Theodosius (Stralsund 1826), Vorrede pag. VI. [4]) Kästner I, 302—305. [5]) *Propter omnium studiosorum commoda ex Euclidis Geometria eas dumtaxat excerpi Propositiones, quae in demonstrationibus linearibus crebrius observantur, quaeque satis prope sunt ad disciplinarum culmen perducere*

mit Vorliebe benutzen liess! Geometrie, das sehen wir auch aus dieser Thatsache wieder, war nicht die starke Seite der deutschen Mathematiker im Allgemeinen, und um so höher werden wir diejenigen zu stellen haben, welche grade auf diesem Gebiete sich auszeichneten.

Ausser Vögelin war ein zweiter Schriftsteller Schüler Tannstetter's und, wenn auch ohne Inhaber einer der beiden Professuren zu sein, Lehrer an der wiener Universität, Heinrich Schreiber aus Erfurt, genannt Grammateus[1]). Er hat 1507 bis 1512 in Wien[2]) studirt, wo Stiborius und Tannstetter seine Lehrer waren, dann in Krakau und hat dort schon 1514 einen *Algorismus proportionum* verfasst. Nach Wien übergesiedelt, wo er 1518 Procurator der sächsischen Nation war, ein Ausdruck, welcher auf die damals übliche Einreihung der Studenten in Nationen mit erwählten Führern sich bezieht, war er gleichzeitig Lehrer, wie aus der Einleitung zu seinem gleich zu erwähnenden Rechenbuche hervorgeht. Im Jahre 1521 wurden die Hörsäle der Wiener Universität wegen einer Seuche geschlossen, Grammateus begab sich damals über Nürnberg nach Erfurt zurück. Später war er wieder in Wien und starb daselbst 1525, als er eben neuerdings zum Procurator gewählt war[3]). In Nürnberg[4]) erschien 1521 sein seit 1518 vollendetes Rechenbuch in deutscher Sprache. Der Titel, welcher eine vollständige Inhaltsangabe in sich schliesst und dadurch allein schon bemerkenswerth ist, lautet wie folgt: „Ayn new künstlich Buech welches gar gewiss und behend lernet nach der gemainen regel Detre, welschen practic, regeln falsi und etlichen regeln Cosse mancherley schöne und zuwissen notürfttig rechnung auf kauffmannschafft. Auch nach den proportion der kunst des gesangs jm diatonischen geschlecht ausz zutaylen monochordum, orgelpfeyffen und andere jnstrument ausz der erfindung Pythagore. Weytter ist hierjnnen begriffen buechalten durch das zornal, Kaps und schuldbuch. Visier zu machen durch den Quadrat und triangel mit vil andern lustigen stücken der Geometrey. Gemacht auf der löblichen hoen schul zu Wienn in Osterreich durch Henricum Grammateum, oder schreyber von Erffurdt der sieben freyen künste Maister.“ Als Einleitung dient eine Widmung an Johannes Tschertte mit der Ort- und Zeitangabe Wien 1518. Tschertte, sonst auch Schertte und Tzerte genannt, war bürgerlicher Rathsherr in Wien, der Mathematik

[1]) Denis, Wiens Buchdruckereigeschicht bis MDLX, S. 181 flg. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 36—38 und S. 51—54. — Günther, Unterricht Mittela. S. 258 und häufiger. — Unger S. 47 und häufiger. — Christ. Friedr. Müller, Henricus Grammateus und sein Algorismus de integris. Zwickau 1896. [2]) Müller l. c. S. 8 Note 34 und S. 10—11. [3]) Ebenda S. 16. [4]) Ebenda S. 18.

aber so kundig, dass Tannstetter ihm in seinem Mathematikerverzeichnisse einen Platz eingeräumt hat[1]). Andere Beziehungen Tscherte's zu Mathematikern werden im 63. Kapitel Erwähnung finden. Ihm also widmete Grammateus sein Buch, als demjenigen, der ihn ermuntert habe, ein solches „den unwissenden und sondern liebhabern der kunst an den tag zu bringen", nachdem er ihm vorher Einsicht davon gegeben. Titel und Beschreibung des in mehrfachen Auflagen gedruckten Buches lassen erkennen, dass es mit Zahlenrechnen und Algebra, mit Buchführung und Geometrie zu thun hat, dass es also eine gewisse Vollständigkeit anstrebte, wie Paciuolo sie in seiner Summa erreicht hat. Dass italienische Druckschriften und unter ihnen die Summa damals in Wien zu Handen sein konnten, ist keinem Zweifel unterworfen, und dass die aus Humanisten zusammengesetzte wiener Schule mit Vorliebe bei italienischen Schriftstellern sich Rath suchte, kann ebenfalls nur als selbstverständlich erscheinen. In der That erinnert auch Grammateus sehr an das Vorbild Paciuolo's, ohne desshalb eine vollständige Wiederholung desselben zu sein. So lässt Grammateus erstmalig unter deutschen Schriftstellern die Verdoppelung und Halbirung weg, weil sie im Begriffe des Multiplicirens und Dividirens mit enthalten seien, wie wir (S. 310) bei Paciuolo es fanden, während er in dem 1514 in Krakau gedruckten *Algorithmus proportionum* die Duplatio und Mediatio noch besonders betrachtete. Eine Verdoppelung und Halbirung eines Verhältnisses war Erhebung zum Quadrate und Quadratwurzelausziehung, und deren Einzelbetrachtung hat niemals aufgehört zweckmässig zu sein[2]). In dem deutschen Rechenbuche weicht dann Grammateus darin von Paciuolo ab, dass er an die Addition nicht die Subtraction, sondern die Multiplication anschliesst, weil „in dieser operation werden funden alle aigenschafft der addition". Beim Addiren soll man „hab fleiss dass die figuren gleich stehen uber einander"[3]) u. s. w. Bei der Bruchlehre[4]) wird die Addition, Subtraction und Division durch Zurückführen der beiden mit einander in Verbindung tretenden Brüche auf gemeinsamen Nenner vollzogen. Näherungsweise Quadrat- und Kubikwurzeln zu ziehen, werden die Zahlen nach rechts hin durch Nullen verlängert, deren Anzahl ein Vielfaches von 2, beziehungsweise von 3 ist, wie wir solches wiederholt gelehrt fanden. Bei der Regeldetri werden Buchstaben angewandt[5]). „Wie sich hadt a zum b also hat sich c zum d." Neben dem Zahlenrechnen ist fortwährend auch das Rechnen auf den Linien gelehrt. In dem algebraischen Abschnitte[6])

[1]) Kästner II, 532. [2]) Müller l. c. S. 18. [3]) Unger S. 73. [4]) Ebenda S. 48. [5]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 38 Note 1. [6]) Ebenda S. 51—54. — Treutlein, Die deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplement S. 35.

beginnt nach Grammateus „ain newe und besunder art der rechnung gezogen auss den regeln Cosse gleicformig in der übung allain das die namen der quantitet sein verandert". Er fängt seine Betrachtung damit an, dass er die Reihe der von 1 an sich fortwährend verdoppelnden Zahlen hinschreibt

$$1 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 8 \,.\, 16 \,.\, 32 \,.\, \text{etc.}$$

Von diesen heisst 1 der numerus, dann 2 die erste Quantität *prima*, 4 die andere Quantität *secunda*, 8 die dritte Quantität *tertia* u. s. w. Diese Reihe und neben ihr die Reihen, welche aus den Potenzen von 3, 4 u. s. w. entstehen, bilden ihm die Grundlage der Gleichungslehre, denn in den 7 überhaupt in Erörterung gezogenen Gleichungsformen (als deren Musterbeispiele $2x = 4$, $3x^2 = 27$, $2x^3 = 128$, $2x^2 + x = 55$, $2x^2 + 18 = 15x$, $12x + 24 = 2\frac{10}{49}x^2$, $5x^4 = 20480$ angegeben sind) seien zuerst zwei auf einander zunächst folgende Glieder einer Reihe betrachtet, dann zwei Glieder, zwischen welchen eines fehle, zwei Glieder, zwischen denen zwei fehlen u. s. w. Die Progression, aus welcher hier die Gleichung abgeleitet wird, haben wir (S. 244) in der Dresdner Algebra angetroffen; die Namen *prima*, *secunda*, ... mahnen auf's deutlichste an Chuquet's Erstzahlen, Zweitzahlen, ... (S. 355). Müssen wir neuerdings auf die Aufgabe hinweisen, diese Aehnlichkeiten zu erklären? Genügt es nicht daran zu erinnern, dass Italien uns als dasjenige Land erschien, von wo die Allen gemeinsame Quelle stammen muss? Die Algebra des Grammateus wendet fortwährend die Zeichen + und — an. Das Buchhalten ist, soweit bekannt, durch Grammateus zuerst in deutscher Sprache gelehrt worden[1]). Die im Titel enthaltenen Namen *Zornal* und *Kaps* bedeuten Journal und Kapsel, also das Tagebuch und das Cassabuch als Aufzeichnung des in einer Kapsel verwahrten baaren Geldes. In Erfurt hat Grammateus im Jahre 1523 einen lateinischen *Algorismus de integris* herausgegeben. Die vier einfachen Rechnungsverfahren nebst der Regeldetri sind darin in ganzen Zahlen mit mustergiltiger Klarheit gelehrt[2]). Auf der letzten Seite des Algorismus integris findet sich als *Regula generalis pro solutione quorundam exemplorum* die indische Umkehrungsrechnung, welche Leonardo von Pisa (S. 22) als Regula versa gelehrt hat.

Schüler des Grammateus war ein Mann, welcher, wie es scheint, den grössten Theil seines Lebens in Wien zubrachte, welcher aber der wiener Universität als Lehrer nie angehört hat. Es ist eine be-

[1]) Unger S. 47—48. [2]) Müller l. c. S. 21—33 giebt einen Abdruck der sehr seltenen Schrift.

wusste Folgewidrigkeit, welche wir uns zu Schulden kommen lassen, wenn wir an dieser Stelle anfangen von ihm zu reden, und dennoch thun wir es, um ihn nicht loszureissen von dem Boden, auf welchem er erwachsen ist, und dessen Spuren überall in ihm sich nachweisen lassen. Christoph Rudolff[1]) ist in Jauer geboren. Sein Geburtsjahr ist ebensowenig bekannt wie sein Todesjahr. Die von ihm veröffentlichten Schriften sind eine Coss von 1525, eine Beispielsammlung von 1530 „seynen schülern zu sonderer übung auch allen handthierungen personen zu nutz und gutem verfertigt", ein Rechenbuch von 1532 (die Vorrede ist allerdings schon von 1526), welches 1540 zum wiederholten Abdrucke kam. Die Druckorte wechseln. In Strassburg, in Nürnberg, in Augsburg verliessen die Bücher die Presse, die insgesammt in Wien geschrieben sind. Wir dürfen vielleicht aus diesen Beziehungen Rudolff's zu Druckern an weit entlegenen Wohnsitzen einen Schluss auf die weitreichende Bekanntschaft seines Namens ziehen. Zum gleichen Schlusse führt der Umstand, dass 1552 kein Exemplar der Coss mehr aufzutreiben war, wenn man auch den dreiund vierfachen Preis dafür zu zahlen sich erbot[2]), und dass darum eine neue Ausgabe durch Michael Stifel zum Drucke besorgt wurde. Rudolff selbst war demnach 1552 jedenfalls nicht mehr unter den Lebenden[3]). Wir haben den Namen Rudolff geschrieben, wie er fast überall in den Drucken sich findet, auch in der zweiten Ausgabe der Coss, während auf deren Titelblatte und in einigen Ueberschriften Ludolff steht, ein vereinzeltes Vorkommen, welchem grosses Gewicht unmöglich beigelegt werden kann. Die Coss ist dem Fürstbischof Sebastian von Brixen zugeeignet, und in dem Widmungsschreiben bezeichnet sich Rudolff als „liephaber der freien künsten". Berücksichtigt man, dass dieser Zusatz in keiner der späteren Schriften vorkommt[4]), und dass, wie oben bemerkt, die Beispielsammlung von 1530 den Schülern zur Uebung angefertigt wurde, so wird daraus zu entnehmen sein, dass Rudolff doch allmälig vom freien Gelehrtenthum zum Lehrer übergegangen ist, wenn auch ausser Beziehung zur wiener Universität. Die Coss zerfällt in zwei Theile[5]), deren erster

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXIX, 571—572. [2]) Vorrede zur zweiten Ausgabe. [3]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 340 giebt das Geburtsjahr 1499, das Todesjahr „etwa 1545". Wir wissen nicht, worauf die erstere Zahl sich gründet. Die zweite wird als zwischen 1540 und 1552 gelegen, also zwischen einem Jahre, in welchem Rudolff noch lebte, und einem zweiten, in welchem er verstorben war, annähernde Richtigkeit besitzen. [4]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 38 Note 2. [5]) Drechsler, Scholien zu Christoph Rudolph's Coss (Programmabhandlung des Vitzthum'schen Geschlechtsgymnasiums in Dresden zu Ostern 1851).

der Rechenkunst gewidmet ist, während der zweite mit Gleichungen sich beschäftigt. Der erste Theil entspricht also inhaltlich dem Rechenbuche von 1532, ohne mit demselben sich vollständig zu decken. Im Rechenbuche ist z. B. das Wort *Million* benutzt, aber allerdings nur ein einziges Mal[1]). Im Rechenbuche findet sich ferner die Regel, die Division durch 10, 100, 1000 u. s. w. lasse sich so ausführen, dass man so viele Ziffern, als der Divisor Nullen besitze, „mit einer virgel" abschneide[2]), mit anderen Worten: Rudolff ist ähnlich wie vor ihm Piero Borgi (S. 305) der Erfindung der Decimalbrüche recht nahe gewesen, aber dass es eine Erfindung war, erkannte die Zeit noch nicht. Das Rechenbuch lehrt nach dem Ziffernrechnen das auf den Linien[3]), welches bei einfachen Aufgaben am bequemsten sei, während es „zu subtilen Rechnungen zum dickermal[4]) seumlich" sich erweise. Aus der Coss erwähnen wir nur die im 7. Kapitel des I. Theils vorhandenen Wurzelzeichen $\surd$, $\surd\surd\surd$, $\surd\surd$ für Quadrat-, Kubik- und Biquadratwurzel. Offenbar haben die Pünktchen, von denen (S. 243) die Rede war, sich zu Strichen verlängert, welche alsdann durch feinere Züge mit einander in Verbindung traten; die Ursprungsfrage ist damit nicht im Geringsten geklärt. Rudolff kannte auch den Kettensatz[5]) und gab, wenn auch ohne eigentliche Herleitung, die Entstehung desselben aus der Regeldetri an. Vielleicht ist bei Rudolff erstmalig hervorgehoben, dass beim Kettensatze mit Vortheil eine Kürzung der einzelnen Zahlen auftreten könne. So weit, was wir an dieser Stelle von Rudolff zu sagen beabsichtigten. Wir kehren zu ihm zurück, wenn wir von den ausserhalb der Universitäten stehenden Cossisten reden.

Wir gehen zur Universität Leipzig über. Am Anfange des Jahrhunderts lehrte dort Udalrich Kalb als Professor der Mathematik, und sein Schüler, der Baccalaureus Balthasar Licht[6]), widmete ihm dankbar seinen *Algorithmus linealis* genau nach der Art, wie in den nürnberger Rechenschulen das Verfahren gelehrt wurde. Der Druck erfolgte 1500 bei Lotter in Leipzig[7]). Seit 1513 erschien in Krakau und zwar in etwa 15 Auflagen ein *Algorithmus linealis* von Johannes de Landshut[8]). Wieder etwas später 1520 erschien in Wien ein anderer *Algorithmus linealis* von einem leipziger

[1]) Das Wort Million kommt schon in der Ausgabe von 1532 vor und zwar Blatt 𝔄 III recto, und nicht, wie meistens behauptet wird, erst in der Ausgabe von 1540. Wertheim brieflich. [2]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 39. [3]) Ebenda S. 40. [4]) zum dickermal = zum Oefteren (holländisch dikwijls). [5]) Unger S. 92. [6]) Kästner I, 84—88. [7]) Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplement S. 24. Die von Kästner beschriebene Ausgabe ist aus dem Jahre 1513. [8]) Curtze brieflich.

Professor, nämlich von **Heinrich Stromer**[1]. Dieser geistreiche Gelehrte aus Auerbach in der bayrischen Oberpfalz gebürtig und häufig mit dem Namen seines Geburtsorts bezeichnet, wie er auch diesen Namen auf einen von ihm in Leipzig erbauten Hof und Keller übertrug, war seines eigentlichen Faches Mediciner und beispielsweise 1523 Decan der medicinischen Facultät in Leipzig. Jedenfalls lehrte er auch Arithmetik, denn in der an Andreas Humelhaym (einem Verwandten seiner Frau Anna Humelhaym) gerichteten Widmung spricht Stromer von seinen Schülern, für welche er schreibe, damit ihnen die Rudimente nicht verborgen blieben, *ne te ceterosque meos discipulos rudimenta eius prorsus laterent.* Ob dabei an Universitätsvorlesungen zu denken ist, erscheint einigermassen fraglich. Wir neigen eher der anderen Meinung zu, es habe sich ausserhalb des Universitätsrahmens um die Unterweisung eines Stromer näher stehenden Kreises gehandelt. Stromer's Algorithmus linealis dürfte vermöge des in unserer Zeit erfolgten Wiederabdrucks leichter als andere ähnliche Schriften zur Hand sein; überdies ist das Latein desselben unvergleichlich viel besser als das vieler dem Anfange des XVI. Jahrhunderts angehörenden Bücher, ein Zeichen für die höhere allgemeine Bildung des Verfassers. Diese beiden Umstände vereint veranlassen uns grade an ihn einige Bemerkungen über das Linienrechnen anzuknüpfen und dadurch zu ergänzen, was wir (S. 216) nur in aller Kürze erörtert haben. Beim Numeriren wird der Grundgedanke des Linienrechnens hervorgehoben, dass nämlich ein Rechenpfennig auf einer Linie eine Einheit um so höherer Ordnung bedeute, je weiter die Linie nach oben rücke, dass ein Rechenpfennig zwischen zwei Linien den halben Werth nur besitze als wenn er auf der oberen, den fünffachen als wenn er auf der unteren sich befände. Dem Numeriren ist das Eleviren und Resolviren angeschlossen. Ersteres bedeutet die Darstellung einer Zahl durch die wenigsten Rechenpfennige, indem man, wo immer eine Vereinigung und Zusammenfassung an höherer Stelle möglich ist, solches ausführt. Letzteres löst umgekehrt eine Einheit höheren Ranges in niedrigere auf, indem unter Benutzung einer grösseren Menge von Rechenpfennigen nach unten weiter gegangen wird, um die Zahl dort anzulegen. Diese beiden Hilfsbegriffe kommen bei den zwei folgenden Operationen, der Addition und Subtraction, in Betracht, nur dass beidemal das gleiche Wort Reduciren sowohl statt Eleviren als statt Resolviren gebraucht wird. Das Linien-

[1] Allgemeine deutsche Biographie I, 638. Einen Abdruck des *Algorithmus linealis* besorgte S. Günther in den Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellsch. der Wissenschaften VI. Folge, 10. Band (1880).

rechnen Stromer's kennt noch die alten Rechnungsarten des Duplirens und Halbirens, wie nicht anders zu erwarten steht, da des Grammateus Rechenbuch noch nicht erschienen war, welches, wie wir wissen, für Deutschland den Abbruch mit dem alterthümlichen Gebrauche bezeichnet. Beim Dupliren werden die auf Linien stehenden Rechenpfennige verdoppelt, die in einem Zwischenraume befindlichen nach oben verschoben. Das Halbiren verfolgt den gleichen Grundgedanken in entgegengesetzter Weise. Beim Multipliciren beginnt man an der untersten Stelle und vervielfacht zeilenweise bei gleichzeitigem Eleviren. Das Dividiren theilt von oben nach unten unter gleichzeitigem Resolviren, und dabei wird das Rechnen mit Brüchen leise angedeutet. Gelangt man nämlich beim Theilen und Resolviren zu der untersten Linie, so ist ein Weiterrücken in verwandelter Form nicht mehr thunlich. Was alsdann bei der Theilung übrig ist heisst der Rest, und er als Zähler stellt mit dem Divisor als Nenner einen Bruchtheil eines Ganzen dar[1]. Dagegen hat der andere von uns erwähnte Schriftsteller über das Linienrechnen, Balthasar Licht, sich ausführlicher mit Brüchen beschäftigt, insbesondere mit ihrem Vorkommen in einzelnen Gliedern einer Regeldetri[2]. Stromer giebt nach dem Dividiren die Regel zur Summirung einer arithmetischen Progression, während er als Beispiel zur Anwendung der Regel nur die mit 1 beginnende Reihe der natürlichen Zahlen bis zu einer graden oder ungraden Endzahl benutzt. Dann kommt zum Schlusse die Regeldetri oder goldene Regel oder Kaufmannsregel[3]. Man hat bei ihr folgende drei Bedingungen zu beachten: 1. Die Fragezahl soll immer rechts stehen. 2. Die erste und die dritte Zahl sollen sachlich und im Namen übereinstimmen. 3. Die vierte aus der Regel hervorgehende Zahl muss immer der zweiten entsprechen. Dann verfährt man nach der Regel: Multiplicire die zweite Zahl mit der dritten, dividire das Product durch die erste, und im Quotient kommt die vierte Fragezahl heraus.

Die Universität Ingolstadt dürfte nächst und mit Wien diejenige gewesen sein, an welcher die Leitung eine gewisse Vorliebe für mathematische Studien bethätigte, und an welcher demzufolge auch mathematisch veranlagte Persönlichkeiten gern verweilen mochten. Stabius und Stiborius sind von Ingolstadt nach Wien gekommen, und Peter Apianus[4] hat Ingolstadts wegen Berufungen nach

[1] *relictum dicitur: quod simul tanquam numerator cum divisore fractionem integri constituit.* [2] Kästner I, 87. [3] *Sequitur Regula que nunc de Tri: nunc Aurea: nunc Mercatorum vocitatur.* [4] Allgemeine deutsche Biographie I, 505—506 Artikel von Bruhns. — Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplement S. 15, 22, 56, 73 und Die deutsche

Leipzig, Tübingen, Wien und sogar über die deutschen Grenzen hinaus nach Padua und Ferrara ausgeschlagen. Dieser vielseitig gebildete Gelehrte, der in der Geschichte der Astronomie, der Geographie, ja sogar der Inschriftenkunde einen nicht minder ehrenvollen Platz als in der der Mathematik einnimmt, lebte von 1495 bis 1552. Sein deutscher Name Bennewitz oder Bienewitz wurde bald durch das latinisirte Apianus vollständig verdrängt. Der Geburtsort war Leisnig in Sachsen (etwa in der Mitte zwischen Dresden und Leipzig). An der Leipziger Universität hat Apianus vermuthlich unter Professor Kalb die mathematischen Studien begonnen. Unter seinen eigenen Schülern war später kein Geringerer als Kaiser Karl V., so dass es nicht Wunder nehmen kann, dass Apianus von engen Verhältnissen ausgehend als wohlhabender, ja reichbegüterter Edelmann gestorben ist, ein nicht von gar vielen Fachgenossen getheiltes Schicksal. Die Adelserhebung fand 1541 als Folge der Herausgabe eines dem Kaiser gewidmeten grossen astronomischen Werkes statt, welches überdies dem Verfasser ein Geschenk von 3000 Goldgulden eintrug, abgesehen davon, dass der Kaiser die Druckkosten deckte. Die erste Schrift, um deren willen wir es mit Apian zu thun haben, ist ein in deutscher Sprache verfasstes Rechenbuch: Ein newe und wolgegründt underweisung aller Kauffmanns Rechnung in dreien Büchern. Die Widmung führt die Zeitangabe des 7. August 1527, der Druck scheint aber erst 1532 stattgefunden zu haben. Andere Auflagen sind von 1537 und häufiger. Seit Grammateus war Apian wieder der erste Universitätslehrer, der ein deutsches Rechenbuch verfasste, und der durch jenen Vorgänger sich soweit beeinflussen liess, dass er die dort überwundene Verdoppelung und Halbirung nicht wieder in ihr missbräuchliches Gewohnheitsrecht einsetzte. Aber darum allein geben wir selbstverständlich Apianus keinen Platz in unserer Darstellung, und ebensowenig wegen der gleichmässigen Behandlung, die bei ihm Linienrechnen und Ziffernrechnen erfuhren, sondern wegen einiger anderen verdienstlicheren Besonderheiten. Apianus lässt in seinem Rechenbuche ausser der gewöhnlichen Neunerprobe auch die durch die Zahlen 6, 7, 8 oder durch irgend andere Zahlen zu und insbesondere die Probe durch das entgegengesetzte Rechnungsverfahren. Im ersten Buche ist von den geometrischen Progressionen die Rede, welche ähnlich wie es (S. 397) bei Grammateus hervorgehoben wurde, mit einer arithmetischen Reihe in Verbindung gebracht sind. Apian's Dar-

Coss, Zeitschr. Math. Phys. XXIV. Supplement S. 17. — Günther, Peter und Philip Apian in den Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellsch. der Wissenschaften VI. Folge, 11. Band. — Unger, S. 51, 80, 83, 101.

stellung ähnelt noch mehr der von Chuquet, insofern als die arithmetische Reihe mit 0 beginnt. Apianus hebt auch die Brauchbarkeit jener Reihen beim Multipliciren hervor, indem man die entsprechenden Glieder der arithmetischen Reihe addire und nennt diese letzteren die Signaturen. Das ist aber ein besonderer Kunstausdruck, und Schaffung einer neuen Benennung durch Kunstausdrücke beweist immer, dass wer sie schuf der Bedeutung des Gegenstandes sich bewusst war. Im zweiten Buche ist die Kubikwurzelausziehung

$$\sqrt[3]{14886936} = 246$$

deutlicher dargestellt, als es wohl irgend früher geschah[1]). Apianus giebt den nach einander gefundenen Ziffern 2, 4, 6 die Stellenzeiger a, b, c und lässt die Nebenrechnungen zur Auffindung von $3a^2$, $3a$, später von $3(a+b)^2$, $3(a+b)$ am Rande ausführen, wo sie sehr übersichtlich hervortreten. Im dritten Buche ist das Dividiren unterwärts gelehrt[2]), welches zwar als *Divisio danda* in Italien schon mindestens ein halbes Jahrhundert bekannt war, aber in Deutschland jetzt erstmalig auftrat, freilich ohne rasch allgemeinen Eingang zu finden. Auch hier sind Buchstaben als Stellenzeiger der allmälig herunterzuziehenden Ziffern des Dividenden vorhanden. Heutiger Sprech- und Schreibweise gegenüber ist zu bemerken, dass Apianus eine Zahl nicht durch, sondern in eine andere getheilt sein lässt, und dass die Theildividenden, wie sie nach einander in Betracht kommen, unter einander gestellt werden, ohne ihrer Rangordnung im Dividenden entsprechend nach rechts fortzurücken. Ein Beispiel des Apianus sieht darnach so aus:

Dividirt 378784 in 224
Steht also.

abc	quotient
378784	1691
224	
1547 *a*	
1344	
2038 *b*	
2016	
224 *c*	
000	

Endlich ist im dritten Buche die Tolletrechnung (S. 224—225) gelehrt. Ein anderes Werk des Apianus sollte mit der Algebra sich beschäftigen. Das schon erwähnte Widmungsschreiben zum Rechenbuche verspricht ausdrücklich: „die Regulam Cosse mit sampt dem Centi-

[1]) Treutlein, Rechnen im XVI. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXII. Supplement S. 72—73. [2]) Unger, S. 54 und 80.

loquio, darinne der kern ligt, wird ich in kürtzer Zeit (wil Got) auch in Druck geben", aber das Versprochene ist nicht erschienen, und was das Wort Centiloquium bedeuten sollte (etwa eine Beispielsammlung von 100 Textgleichungen?) ist durchaus fraglich. Ob Apianus auch der Geometrie seine Thätigkeit zugewandt hat, ist zweifelhaft. Ein *Liber de mensuratione vasorum cum artificiali partis vacuae inventione* wird zwar genannt[1]), allein diese entweder überhaupt nie gedruckte oder gänzlich verschollene Schrift dürfte nur einem bestimmten handwerksmässigen Bedürfnisse gedient haben, dessen wir früher (S. 237) Erwähnung gethan haben. Dem Titel nach kann es kaum etwas anderes als ein Visirbüchlein gewesen sein. Um so sicherer gestellt ist Apian's Beschäftigung mit dem Grenzgebiete geometrischer und astronomischer Forschung, mit der Trigonometrie. Können wir ihm doch schon als Verdienst anrechnen, dass er 1534 die seiner Zeit durch Gerhard von Cremona ins Lateinische übersetzte Astronomie des Dschâbir ibn Aflah (Bd. I, S. 749) in Nürnberg zum Drucke beförderte, aber dieser Uebersetzung schickte Apianus als Einleitung eine eigene Abhandlung voraus: *Instrumentum primi mobilis*, deren Bedeutung gewürdigt werden muss[2]), und ein Jahr früher bereits war er in seiner *Introductio geographica in doctissimas Verneri annotationes* auf ganz ähnliche Dinge[3]) eingegangen und hatte dort auf neun Seiten eine Sinustabelle zum Drucke gegeben, welche innerhalb des ersten Quadranten die Sinusse aller Winkel in Zwischenräumen von je einer Minute finden liess. Das Instrumentum primi mobilis ist eine Vorrichtung zur Auffindung des Sinus und des Sinus versus (oder 1 minus dem Cosinus) eines Winkels im ersten Quadranten mit der bei Ablesungen überhaupt erzielbaren Genauigkeit (Fig. 79). Ein rechter Winkel BAC ist durch den Kreisquadranten BC abgeschlossen[4]). Die Halbmesser BA und AC sind, die erstere Strecke von B nach A, die letztere von A nach C in eine gleiche Anzahl von n (bei Apian vorschlagsweise 100000) Theile getheilt, an denen Zahlen angebracht sind, welche die Bestimmung haben, das Ablesen zu erleichtern. Ueber AB sowie über AC als Durchmesser sind von den Mittelpunkten D und E aus die Halbkreise AHB und AKC be-

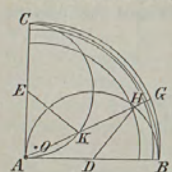


Fig. 79.

[1]) Günther, Peter und Philip Apianus S. 27. [2]) Kästner I, 578—581. Weit eingehender Günther l. c. S. 31—34. [3]) Günther l. c. S. 28—31. [4]) Wir haben die Druckschrift Apian's nicht zu Handen, glauben aber der Beschreibung Günther's l. c. S. 32 unter Annahme zweier Druckfehler, wo A und B vertauscht sind, unsere Figur und Erklärung entnehmen zu dürfen.

schrieben. Ersterer heisst *semicirculus versus*, letzterer *semicirculus rectus*. Auf der Halbirenden des Winkels BAC mit der Entfernung $\frac{AD}{2\sqrt{2}}$ von A wird ein neuer Mittelpunkt O bestimmt, von welchem aus drei concentrische Kreisbögen beschrieben werden, deren äusserster durch B und C geht, während die beiden inneren in kleiner Entfernung von jenem und von einander auf AB und AC aufstehen. Diese Kreisbögen begrenzen ein Stück Kreisring, auf welchem die Eintheilung von 0 bis 90^0 unter Angabe auch von Bruchtheilen von Graden in der Richtung von A nach C abgelesen werden kann. Endlich ist in A ein in beliebiger Richtung AG spannbarer Faden vorhanden. Nun sei $\sphericalangle GAB = \alpha$ und AG schneide in dieser Lage den semicirculus versus in H, den semicirculus rectus in K. Denkt man die Halbmesser jener Halbkreise DH, EK gezogen, so ist $\frac{\frac{1}{2}AH}{AD} = \frac{AH}{AB} = \cos\alpha$ und $BA - AH = BA$ sin vers. α. Ferner $\frac{\frac{1}{2}AK}{AE} = \frac{AK}{AC} = \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$. Trägt man somit durch einen in A eingesetzten Zirkel $AI = AH$ auf AB und $AL = AK$ auf AC auf, was in unserer Figur unterblieb, um sie nicht weiter mit Buchstaben zu beschweren, so kann man in I die Strecke $BI =$ sin vers. α, in L diejenige $AL = \sin\alpha$ ablesen. Dass Apianus ein nicht minder feiner Höfling als Mathematiker war, bewies er dadurch, dass er in den drei sich durchsetzenden Kreisbögen AHB, AKC, BGC die Gestalt eines Fuchseisens erkannte, des Wappens der Freihern von Stadion, und dass er daraus Gelegenheit nahm, seine Schrift dem diesem Geschlechte entstammenden Bischofe Christoph von Augsburg, der sich ihm stets als Gönner erwiesen hatte, zuzueignen. Bemerkenswerth erscheint, dass Apianus nur vom Sinus, Sinus versus und Sinus Complementi (unserem Cosinus) Gebrauch machte. Die Tangenten finden sich nirgend bei ihm vor, so sehr Regiomontan's Tabula foecunda geeignet war, sie dem Astronomen zur Anwendung zu empfehlen.

Während der Zeit, von welcher hier die Rede ist, vollzog sich eine wissenschaftliche That an der Universität Basel. Dort starb 1541, dort lehrte zuletzt Simon Grynaeus der ältere[1]), der in Wien und Ofen, in Heidelberg und Tübingen vorher seine humanistische

[1]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz II, 10, Note 10 und 12. — Poggendorff I, 967. — Weissenborn, Die Uebersetzungen des Euklid durch Campanus und Zamberti S. 64.

Tüchtigkeit bewiesen hatte. In Basel gehörte seine Lehrthätigkeit vorzugsweise der Theologie an, selbstverständlich im Sinne der kirchlichen Reformbestrebungen, denen er sich vollständig angeschlossen hatte. Zugleich aber stellte er seine Kenntniss des Griechischen in den Dienst der Mathematik und gab 1533 in Basel die erste Ausgabe des Urtextes der euklidischen Elemente sowie der Erläuterungen des Proklos zu denselben in Druck. Wenige Jahre später, 1538, liess er erstmalig einen griechischen Almagest erscheinen. Unter dem Ausdrucke einer wissenschaftlichen That, dessen wir uns bedienten, verstanden wir in erster Linie die griechische Euklidausgabe. Sie war es wirklich durch die nunmehr einem Jeden gebotene Möglichkeit, sich von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Uebersetzungen desjenigen Werkes zu überzeugen, ohne welches, wie wir wiederholt sahen, ein mathematisches Wissen nicht gedacht werden konnte. Sie war es auch durch die als thatsächliche Folgerung sich ergebende Herausgabe der anderen grossen Geometer des griechischen Alterthums. Wieder in Basel erschien schon 1544 eine griechische Archimedausgabe unter der Leitung von Thomas Venatorius[1]), dessen deutscher Name Gechauff war.

Drei deutsche Universitäten Heidelberg, Tübingen, Wittenberg sind eng verknüpft durch ihre Beziehungen zu einem Manne, der, ohne Hervorragendes als Mathematiker geleistet zu haben, dennoch in einer Geschichte der Mathematik so wenig fehlen darf als in der Geschichte irgend einer Wissenschaft, aus der ein allgemeiner Unterrichtszweig geworden ist. Wir meinen natürlich Philipp Melanchthon[2]), der als Sohn des kurpfälzischen Waffenschmieds Georg Schwartzerd 1497 in Bretten geboren wurde und 1560 in Wittenberg starb. Von October 1509 bis Sommer 1512 war er an der Universität Heidelberg immatriculirt und erwarb sich dort im Juni 1511 das Baccalaureat. Bei seiner Bewerbung um die Magisterwürde wurde er wegen zu grosser Jugend zurückgewiesen. Darauf siedelte er im September 1512 nach Tübingen über und erlangte hier, aber auch nicht vor Januar 1514, den Grad eines Magisters der freien Künste. In Tübingen begannen Melanchthon's theologische Studien. Im Sommer 1518 folgte er einem Rufe nach Wittenberg, welcher Universität er fortan bis zu seinem Lebensende angehörte. Zuerst war er in Wittenberg als Professor der griechischen Sprache und Literatur angestellt. Im Jahre 1526 übernahm er dazu eine zweite theologische Professur,

---

[1]) Vossius pag. 56. — Doppelmayr S. 41, Note nn und S. 51—52.
[2]) Hartfelder, Philipp Melanchthon als *Praeceptor Germaniae* (VII. Band der *Monumenta Germaniae paedagogica*), Berlin 1889.

und von seinem thatkräftigen Eingreifen in die grosse kirchliche Bewegung der Zeit weiss die politische und Kirchengeschichte zu erzählen. Wissenschaftlich beschränkte seine Einwirkung sich gleichfalls keineswegs auf die beiden Fächer, mit welchen sein Beruf ihn verband. Die Bildung des Volkes, so weit die Ausdehnung des Wortes Bildung gefasst werden mochte, war das hohe Ziel, auf welches seine edlen Bestrebungen sich richteten. Darum gab die Mitwelt schon ihm den Namen *Praeceptor Germaniae*, darum bestätigt die Nachwelt dankbar das schon alte Wort und nennt ihn den ersten Lehrer Deutschlands. Allerdings haben wir dabei eine nicht unbedeutende Einschränkung vorzunehmen. Die Schule, deren Verbesserung und Verallgemeinerung Melanchthon und gleich ihm seinem Freunde Martin Luther am Herzen lag, war keineswegs die deutsche Volksschule. Wohl entstand diese am Anfange des XVI. Jahrhunderts aus den Katechisationen, welche mit der Jugend vorzunehmen die kursächsische Schulordnung von 1528 den Pfarrern vorschrieb, und zu deren Vorbereitung ein Unterricht nothwendig war, den der Pfarrer allmälig auf die Schultern des Küsters lud, der von diesem in der Woche abgehalten wurde und nach und nach vom Unterrichte in den Evangelien auf das Lesen, Psalmensingen, zuletzt auf das Schreiben sich ausdehnte. Wohl gab es daneben deutsche Schulen, Rechenschulen, Schreibschulen, durch ihre besonderen Namen deutlich zu erkennen gebend, was in jeder einzelnen gelehrt wurde, wobei wir den Umfang des Gelehrten nicht enge genug uns denken können. Aber für alle diese Schulen hat Melanchthon niemals Vorschriften gegeben. Er erachtete sie dessen sicherlich nicht werth. Erst die niedere Lateinschule, in drei Haufen (wir sagen dafür heute Classen) zerfallend und darum Trivialschule genannt, erfreute sich des Wohlwollens des für die Schule begeisterten Humanisten, der so sehr Humanist war, dass er einen Unterricht nicht würdigte, welcher nicht in lateinischer Sprache ertheilt wurde, also den Unterricht in der Lehrsprache als Vorschule zur Voraussetzung hatte. Die Schulmeister, sagte Melanchthon, sollen selbst so weit möglich nichts denn lateinisch mit den Knaben reden. Gelehrt wurde aber in allen drei Classen wieder kaum etwas anderes als Latein. Die Grammatik dieser Sprache zu beherrschen, einen reichen Wortschatz sich anzueignen, zahlreiche Schriftsteller zu lesen, selbst fliessend lateinisch sprechen zu können, darin gipfelte der Plan der Trivialschule. Die Erwerbung von Kenntnissen in Geschichte, in Geographie, im Rechnen wurde nicht einmal angestrebt, geschweige denn erreicht. Das Rechnen, wir haben es schon gesagt, veranlasste die Gründung besonderer Rechenschulen, deren Lehrer sich etwas Höheres zu sein dünkten als der Schreiblehrer oder der Lehrer im Deutschen. Sie waren wesentlich Bildungsstätten für den Kaufmannsstand. Wer aber ausserhalb der Rechenschule Kenntnisse im Hantieren mit Zahlen sich verschaffen wollte, der musste, wenn ihm das Selbststudium zahlreich vorhandener Rechenbücher nicht genügte, zur Universität gehen. Hier begegnen wir wieder dem Einflusse Melanchthon's, welcher dringend verlangte und durchzusetzen wusste, dass die Wiener Einrichtung von zwei besonderen mathematischen Professuren unter den zehn Professuren der philosophischen Facultät, wie man jetzt statt des früheren Namens der Artisten zu sagen anfing, in Wittenberg und wo man sonst auf Melanchthon's Wort hörte, Nachahmung fand. „Die Anfangsgründe der Arithmetik, das Addiren und Subtrahiren sind unbedingt zum täglichen Gebrauche nothwendig und so leicht, dass Knaben sie erlernen können; die Regeln der Multiplication und Division erfordern allerdings ein wenig mehr Aufmerksamkeit, aber bei einiger Anstrengung werden sie doch bald begriffen.“ So lautet Melanchthon's Programm für den arithmetischen Inhalt von Universitätsvorlesungen. Es ist freilich geeignet, ein halb spöttisches, halb mitleidiges Lächeln hervorzurufen, aber vergessen wir doch Eines nicht: dass bei Neuschaffungen es meistens schwieriger ist, für den Inhalt die richtige Form, als für die Form den richtigen Inhalt zu finden. Waren erst die Lehrstühle vorhanden, so konnten allmälig deren Inhaber den Unterrichtsstoff den Zeitbedürfnissen nach ummodeln, und das ist geschehen. Darin besteht die ganze weitere in Deutschland und anderwärts allerdings zuerst unsäglich langsam fortschreitende Entwickelung des mathematischen Universitätsunterrichtes von drei Jahrhunderten. Melanchthon, der in Tübingen den Unterricht Stöffler's genossen hatte, eines Astronomen, welcher von der Zeitkrankheit der Sterndeutung mit genügender Stärke ergriffen war, um sie auf seine Schüler zu übertragen, nicht aber zugleich das Heilmittel streng geometrischer Prüfung ihnen vererbte, sah nun einmal nicht weiter, als wir es mit seinen Worten angegeben haben, und konnte über den eigenen Horizont hinaus auch Anderen nicht als Wegweiser dienen.

Innerhalb des Gesichtskreises, welchen er beherrschte, lag dagegen die Herausgabe classischer Werke, in erster Linie solcher von griechischen und arabischen Schriftstellern, in zweiter aber auch solcher, welche, neueren Ursprungs, vermöge der anerkannten Berühmtheit ihrer Verfasser als classisch gelten durften[1]. Aratus, Ptolemäus, Proklus, Alfragan gehören zur ersten, Sacrobosco und Peurbach zur zweiten Gruppe, an deren Drucklegung Melanchthon mehr oder weniger thätig war. Selbst gleichzeitigen Schriftstellern von mathematischer Bedeutung erwies er sich gern nützlich. Wir werden auf Michael Stifel, zu dessen *Arithmetica integra* er eine Vorrede[1] verfasste, noch zu reden kommen, eine andere Vorrede verfasste er zu Voegelin's *Elementale geometricum* (S. 394), welche alsdann unter Veränderung weniger Schlussworte einer 1546 bei Hervagius gedruckten lateinischen Euklidausgabe neuerdings beigegeben wurde[2], wir meinen aber vorzugsweise Melanchthon's Declamationen. Declamationen nannte man lateinische Reden, welche bei festlichen Gelegenheiten gehalten wurden, und deren Uebung Melanchthon in Wittenberg einbürgerte. Elegante Sprache war dem Humanistenkreise, der die Professuren an den deutschen Hochschulen für sich und seine Freunde in Erbpacht genommen hatte, die Hauptsache, und da diese Hauptsache wiederum nicht Jedermanns Sache war, so wurde es Uebung, dass mancher Redner die ihm aufgetragene Declamation von einem Anderen schreiben liess, ja es wird erzählt[3], dass Melanchthon die meisten öffentlichen Reden verfasste, welche in Wittenberg gehalten wurden, und dass es vorgekommen sei, dass der Festredner schon begonnen hatte, während Melanchthon an seinem Schreibtische noch beschäftigt war, das Ende der Rede niederzuschreiben. Eine Declamation über Regiomontanus schrieb und hielt Melanchthon selbst. Eine weitere über den Nutzen der Arithmetik war die Antrittsrede für den 1536 als Professor der Mathematik nach Wittenberg berufenen Rhäticus, und ihr sind die Worte entnommen, welche wir vorher als Melanchthon's Programm für den arithmetischen Universitätsunterricht anführten. In Melanchthon's Werken ist noch eine dritte scheinbar hierher gehörige Declamation abgedruckt, aber mit Unrecht[4]. Es ist die Rede, welche einst Regiomontanus in Padua als Einleitung zu seinen Vorlesungen über Alfraganus hielt (S. 260), die sich hier eingeschlichen hat. Wir sagten, Melanchthon habe sich um den Druck der Werke des Alfraganus bemüht. Der 1537 erschienene Band ist eröffnet durch ein Widmungsschreiben Melanchthon's an die städtische Obrigkeit von Nürnberg, dem Druckorte. Darauf folgt die Rede des Regiomontanus, und dann die Werke Alfragan's. Offenbar hat später die räumliche Zusammengehörigkeit des Briefes und der Rede, ver-

[1]) Vergl. das chronologisch geordnete Verzeichniss der Arbeiten Melanchthon's bei Hartfelder l. c. S. 579—620 mit 709 Nummern, wovon folgende hierher gehören: 44, 187, 228, 257, 502, 528.

[1]) Hartfelder, l. c. S. 599, Nr. 346 des Verzeichnisses. [2]) Mittheilung von H. Max Simon. [3]) Hartfelder l. c. S. 101 mit Berufung auf Camerarius, *De Philippi Melanchthonis ortu, totius vitae curriculo et morte* pag. 63 (Leipzig 1566). [4]) *Corpus Reformatorum* ed. C. G. Bretschneider XI, 531—543.

bunden mit der schönen Form dieser letzteren den Irrthum veranlasst, für beide einen Verfasser zu vermuthen.

In Rostock, später in Köln lehrte Jan Bronkhorst (1494—1570) aus Nimwegen, der nach seiner Vaterstadt den Beinamen Noviomagus führte. Im Jahre 1539 gab er in Köln eine Schrift *De numeris* heraus, in welcher (Buch I, Kapitel 15) eine geschichtlich merkwürdige Stelle sich findet, die Schilderung gewisser aus graden Strichen zusammengesetzter Zahlzeichen, deren *Chaldaei et Astrologi* sich bedient hätten. Beispielsweise bedeuten ┌, ┐, └, ┘ der Reihe nach 1, 10, 100, 1000; ⊬, ⅄, ⊦, ⅄ der Reihe nach 4, 40, 400, 4000 u. s. w. Wer die von Bronkhorst gemeinten Chaldaeer waren, ist durchaus ungewiss. Möglicherweise ist an spätrömische oder gar an mittelalterliche Sterndeuter zu denken[1]).

Auf unserer Rundschau in deutschen Universitäten gelangen wir nunmehr nach einer schon geraume Zeit nicht mehr zu Deutschland gehörenden Hochschule, welche aber damals als eine deutsche zu bezeichnen ist, jedenfalls nicht leicht unter ein anderes Reichsgebiet gebracht werden kann, Löwen. Dort finden wir Rainer Gemma-Frisius[2]), ursprünglich van den Steen, geboren 1508 zu Dockum in Friesland, woher ihm der Beiname Frisius stammt, Arzt und Mathematiker, seit den vierziger Jahren auf Empfehlung seines muthmasslichen Lehrers Peter Apianus Professor der Mathematik in Löwen, eine Stellung, welche er vor 1553 mit der eines Professors der Medicin vertauschte. Als solcher starb Gemma-Frisius 1555. Seine Erfindung eines sogenannten astronomischen Ringes, einer Methode zur Bestimmung der geographischen Länge mittels einer genau gehenden kleinen Uhr, welche dem Grundgedanken nach sich bis auf den heutigen Tag erhalten hat, ist hier nicht weitläufiger zu schildern. Sein libellus de locorum describendorum ratione (Antwerpen 1533) war von grundlegender Bedeutung. Hier finden sich die ersten Vorschriften zu einer wahren Triangulation veröffentlicht. Zwei Orte von bekannter gegenseitiger Entfernung — Gemma wählte zu diesem Zwecke Kirchthürme in Brüssel und Antwerpen — werden als Grundpunkte aufgezeichnet. Von jedem derselben werden andere neue Punkte einvisirt und die Sehlinien gezeichnet. Die Durchschnittspunkte solcher

[1]) Cantor, Mathem. Beitr. z. Kulturleben der Völker S. 167, Anmerkung 337, Figur 37. — Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer (Erlangen 1869), S. 12. [2]) Kästner I, 129 und II, 334, 573, 579. — Quételet pag. 78. — Max. Curtze in Grunert's Archiv für Mathematik und Physik LVI, 313. — Allgemeine deutsche Biographie VIII, 555. — Wauwermans, *Essai de l'histoire de cartographie anversoise au seizième siècle* im Bulletin de la société royale de géographie d'Anvers. 1893—1894.

Sehlinien legen sodann neue Punkte auf der Karte fest und gestatten, von ihnen aus wieder weitere Punkte einzuschneiden und dadurch die Karte zu vervollständigen. Mit diesen praktisch so wichtigen Lehren trat Gemma an die Spitze einer niederländischen geographischen Schule, von welcher im XIV. Abschnitte die Rede sein wird, und deren bedeutendster Vertreter, Mercator, unmittelbar Gemma's Unterricht genoss. Als arithmetischer Schriftsteller trat Gemma 1540 mit einem lateinisch verfassten Lehrbuche auf, welches zahlreiche Abdrücke erlebte. Einige Dinge aus diesem Lehrbuche sind erwähnenswerth. Gemma spricht über Verdoppelung und Halbirung; Manche bezeichneten diese als von Multiplication und Division verschieden; was aber diesen Dummköpfen als Beweggrund diene, wisse er nicht[1]). Gerade so gut müsse man Verdreifachung, Vervierfachung u. s. w. als besondere Rechnungsarten aufführen. Bei der Ausführung der Quadratwurzelausziehung werden die verdoppelten Wurzelziffern, soweit sie bereits gefunden sind, unter die gerade in Behandlung stehende Abtheilung des Radicanden mit Einrückung um eine Stelle nach links geschrieben, und in die rechts noch frei gebliebene Stelle tritt alsdann die durch Division neu ermittelte Wurzelstelle, so dass mit ihr alsdann die ganze dastehende Zahl behufs weiterer Theilsubtraction vom Radicanden vervielfacht werden kann. Z. B.:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{11\,90\,25} = 345 \\
\;\;9 \\
\hline
\;\;290 \\
\;\;\;\;64 \\
\;\;256 \\
\hline
\;\;\;\;3425 \\
\;\;\;\;\;\;685 \\
\;\;\;\;3425 \\
\hline
\end{array}$$

wobei wir nur darin von Gemma abweichen, dass wir die Theilreste abwärts zum Abdrucke brachten, während bei Gemma dieselben noch immer nach altem Brauche über dem Radicanden unter Durchstreichung der vernichteten Radicandenziffern erscheinen. Endlich findet sich bei Gemma die Anwendung der Regel des doppelten falschen Ansatzes auf quadratische, des einfachen auch auf kubische Aufgaben, worauf er sich nicht wenig zu gute thut, da ein gewisssr Christoph Rudolff von Jauer, *Christophorum quendam Rudolphum Januerum* (sic), die Möglichkeit davon in Abrede gestellt habe. Aus 5832 Steinwürfeln soll eine Mauer errichtet werden, deren

[1]) *Quid vero moverit stupidos illos nescio.*

Länge um die Hälfte grösser sein soll als die Dicke, und die Höhe um die Hälfte grösser als die Länge. Nimmt man die Abmessung von 2 Steinen als Dicke an, so ist 3 die Länge, $4\frac{1}{2}$ die Höhe und es werden 27 Steine verbraucht. 5832 durch 27 dividirt giebt 216 als Quotient, und weil $\sqrt[3]{216}=6$, sind die einzelnen Abmessungen zu versechsfachen, also 12 auf 18 auf 27 Steine zu nehmen. Zusammengesetzter ist die Anwendung des doppelten falschen Ansatzes auf quadratische Aufgaben, wiewohl von Gemma an einer früheren Stelle seines Buches gelehrt. Ein rechteckiges Feld von 200 Quadratellen besitzt eine Länge, welche um die Hälfte grösser ist als die Breite; beide Abmessungen werden gesucht. Eine Breite von 4 Ellen bei einer Länge von 6 Ellen giebt 24 Quadratellen, also 176 zu wenig. Eine Breite von 20 Ellen bei einer Länge von 30 Ellen giebt 600 Quadratellen, also 400 zu viel. Nun bildet man $4^2=16$ und $20^2=400$, sowie $4^2\cdot 400+20^2\cdot 176=76800$ nebst $400+176=576$. Der Quotient $\frac{76800}{576}=133\frac{1}{3}$ giebt durch Quadratwurzelausziehung die Breite mit $11\frac{27}{50}$. Die Länge ist folglich $17\frac{31}{100}$. Die beiden Zahlen mit einander vervielfacht geben nahezu 200, während die wahre Breite und Länge niemals in Zahlen ausgedrückt werden kann[1]). Wie Gemma zu dem Näherungswerthe

$$\sqrt{133\tfrac{1}{3}}\sim 11\tfrac{27}{50}$$

gelangte, ist leicht zu vermuthen. Er wird wohl

$$10000\cdot 133\tfrac{1}{3}=1333333$$

gesetzt haben; als Quadratwurzel fand er dann 1154 und nach Division durch 100 jene im Texte genannte Zahl. Für die Länge giebt Gemma durch einen offenbaren Druckfehler $17\frac{3}{100}$. Das ganze Verfahren wollen wir einmal an Buchstaben prüfen. Sei $y=ax$, $p=xy=ax^2$ die in Gleichungsform geschriebene Aufgabe. Nun liefern $x=x_1$ und $y=y_1=ax_1$ das Product $p_1<p$, sowie $x=x_2$ und $y=y_2=ax_2$ das Product $p_2>p$, und zwar sei $p-p_1=d_1$, $p_2-p=d_2$. Gemma rechnet $\sqrt{\frac{x_1{}^2d_2+x_2{}^2d_1}{d_1+d_2}}=x$ und das ist auch richtig. Man hat

$$x_1{}^2d_2+x_2{}^2d_1=x_1{}^2p_2-x_1{}^2p+x_2{}^2p-x_2{}^2p_1$$
$$=x_1{}^2\cdot ax_2{}^2-x_1{}^2\cdot ax^2+x_2{}^2\cdot ax^2-x_2{}^2ax_1{}^2=ax^2(x_2{}^2-x_1{}^2).$$

[1]) *Hi duo numeri in invicem ducti, 200 fere constituunt, neque unquam vera longitudo aut latitudo numeris exprimi potest.*

Ferner

$$d_1+d_2=p-p_1+p_2-p=p_2-p_1=ax_2{}^2-ax_1{}^2=a(x_2{}^2-x_1{}^2).$$

Der gebildete Quotient beider Zahlen ist folglich x^2 mit der Quadratwurzel x. Wenn aber doch bei der einen Aufgabe die Kubikwurzelausziehung, bei der anderen die Quadratwurzelausziehung nicht vermieden werden konnte, warum der Umweg durch den falschen Ansatz, welcher nur noch mehr Rechnung nöthig machte? Wir finden als Antwort auf diese Frage zwei Beweggründe, welche bei Gemma wirksam gewesen sein werden. Erstens wollte er die Coss nicht lehren, welche gleichwohl als bekannt vorausgesetzt zu werden scheint, da ihr Name wiederholt im Texte auftritt, und zweitens versprach er sich offenbar aus der Anwendung des doppelten falschen Ansatzes in einem Falle, wo dieselbe als theoretisch unmöglich bezeichnet worden war, hohen wissenschaftlichen Ruhm, der ihm auch in der That nicht vorenthalten blieb. Hat man doch mit seinem Namen Gemma alle die Wortspiele durchgeführt, zu welchen er Anlass gab, ja sogar ihn als Edelgestein verdeutscht, während die Sitte der Zeit sonst nur zur Umwandlung deutscher Namen in fremdländische führte.

Erasmus Oswald Schreckenfuchs[1]) (1511—1579) lehrte in Tübingen Hebräisch, später in Basel neben Sebastian Münster[2]) (1489—1552), dem Hebraisten und Kosmographen, und von Basel aus auch in Freiburg Mathematik. Schreckenfuchs kam in Besitz eines 1534 in Constantinopel gedruckten Exemplars des Sefer-Hamispar von Elias Misrachi (S. 229) und gab 1546 gemeinschaftlich mit Münster einen Auszug aus diesem Werke in hebräischer Sprache mit lateinischer Uebersetzung heraus. Elias Misrachi selbst (etwa 1455—1526) war jüdischer Oberrabbiner in Constantinopel und nahm als solcher eine sehr hervorragende und einflussreiche Stellung ein. Sein „Buch der Zahlen" ist wesentlich nach griechischen und arabischen Mustern gearbeitet, enthält aber auch noch manches Eigene, wie Misrachi selbst betont hat. Dazu gehört weniger ein in Dreiecksgestalt angeordnetes Einmaleins, für welches wir (S. 229) einen jüdischen Vorgänger denken müssen, als die Entwickelung der Summenformeln für $1+2+\cdots+n$, für $1^2+2^2+\cdots+n^2$ und für $1^3+2^3+\cdots+n^3$. Misrachi schliesst so $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1+2}{3}=\frac{2}{2}$, $\frac{1+2+3}{4}=\frac{3}{2}$, also auch $\frac{1+2+\cdots+n}{n+1}=\frac{n}{2}$ und $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie XXXII, 467—468. Artikel von S. Günther. [2]) Ebenda XXIII, 30—33. Artikel von Ludwig Geiger.

Ferner $\frac{1^2}{2} = 1$, $\frac{1^2+2^2}{1+2} = 1 + \frac{2}{3}$, $\frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3} = 1 + 2\cdot\frac{2}{3}$, also auch $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n} = 1 + (n-1)\cdot\frac{2}{3} = \frac{2n+1}{3}$ und $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 3}$.
Endlich sagt er:

$$\frac{1^3+2^3}{1+2} - \frac{1^3}{1} = 2,$$

$$\frac{1^3+2^3+3^3}{1+2+3} - \frac{1^3+2^3}{1+2} = 3,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{1+2+\cdots+n} - \frac{1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3}{1+2+\cdots+(n-1)} = n$$

und durch Addition sämmtlicher Gleichungen $\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{1+2+\cdots+n} = 1+2+\cdots+n$, also auch $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$. Allerdings bedient sich Misrachi bei diesen Schlüssen nur der Induction, aber deren Statthaftigkeit hat nachträglich bewiesen werden können [1]).

Wir haben dem 59. Kapitel ein Schlusswort gar nicht beigefügt. Was hätten wir auch über die herzlich unbedeutenden Leistungen sagen sollen, die wir mit einziger Ausnahme der Schriften des Nonius und höchstens noch des Charles de Bouvelles nur um der Pflicht der Vollständigkeit nach Kräften zu genügen überhaupt erwähnen mussten? Und Nonius wiederum trat aus dem Rahmen des Kapitels so weit hervor, dass man ein falsches Bild bekäme, wenn man ihn, nachdem er im Einzelnen Gegenstand unseres Berichtes war, noch einmal zusammenfassend als Vertreter einer Mathematik auf der Pyrenäenhalbinsel schildern wollte. Gleichmässiger ist und gestattet eher eine Zusammenfassung, was wir im 60. Kapitel erörtert haben. Die Leistungen der Männer, welche an den deutschen Universitäten Wien, Leipzig, Ingolstadt, Basel, Tübingen, Heidelberg, Wittenberg, Löwen die Stellung eines Professors einnahmen, kommen darauf hinaus, dass das Rechnen sich entwickelte, dass die veraltete Verdoppelung und Halbirung mit immer bewusster werdender Verachtung entfernt wurden, dass das Dividiren unterwärts auftauchte, dass ein Rechnen mit Decimalbrüchen sich anbahnte, dass die sogenannte wälsche Praktik Allgemeingut zu werden begann. Algebraische Aufgaben konnten durch die Coss beantwortet werden, neben welcher (oder sollen wir sagen vor welcher?) auch die Regeln des einfachen wie des doppelten falschen

[1]) Die Arithmetik des Elia Misrachi von G. Wertheim (Braunschweig 1896), S 20—23.

Ansatzes geübt wurden. Geometrie war noch immer ein ziemlich vernachlässigter Zweig der Wissenschaft, an welchem eigene neue Triebe sich nicht zeigten. Trigonometrisches haben wir nur bei Apianus und bei Gemma zu erwähnen gehabt, allerdings in einer Weise, die beiden Männern alle Ehre machte.

61. Kapitel.

Deutsche Rechenmeister und Cossisten ausserhalb der Universitäten.

Wir reden nunmehr von solchen Verfassern von Rechenbüchern, welche nicht an Universitäten thätig waren. Dass derartige Schriften in einer Anzahl vorhanden waren, welche fast eher die Anwendung des Wortes Unzahl gestattet, haben wir berührt (S. 408). Eines dieser Werke, welches einen encyklopädischen Inhalt besitzend, ein Spiegelbild jeglicher Schriften für wissenschaftlichen Selbstunterricht am Beginne des XVI. Jahrhunderts in Deutschland darbietet, ist die Margaritha philosophica des Karthäuserpriors Gregor Reisch [1]). Der Verfasser ist in Balingen in Württemberg geboren. Er studirte seit 1487 in Freiburg und erwarb dort die akademischen Grade eines Baccalaureus und eines Magisters. Dann trat er dem Karthäuserorden bei, in welchem er zu hohem Ansehen gelangte. Als Prior des Freiburger Karthäuserklosters starb er 1523. Die Margaritha philosophica ist zuerst 1503 gedruckt [2]), weitere Ausgaben folgten, wovon die meisten in Strassburg die Presse verliessen. Eine Ausgabe wurde 1523 durch Orontius Finaeus (S. 378) in Paris veranstaltet. In Gestalt eines Zwiegespräches zwischen Lehrer und Schüler sind die sieben freien Künste in ebensovielen Büchern der Reihe nach in lateinischer Sprache behandelt. Meistens stellt der Schüler die Frage, welche der Lehrer ihm beantwortet, doch kommt auch das Gegentheil vor, dass der Schüler Fragen des Lehrers zu beantworten hat. Vor den meisten Büchern befindet sich eine symbolische Abbildung des zur Behandlung gelangenden Gegenstandes, und insbesondere das Bild, welches die Rechenkunst eröffnet, ist als bemerkenswerth wiederholt geschildert worden. Die Rechenkunst als Frau dargestellt, *Typus arithmeticae*, nimmt die Mitte des Bildes ein und streckt mit jeder Hand ein ge-

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXVIII, 117, Artikel von Prantl. — Hartfelder in der Zeitschrift für Geschichte des Oberrheins Nr. 5, V. 2, S. 170 bis 200. [2]) Die Unrichtigkeit der Behauptung, es gäbe auch schon eine Ausgabe von 1496, hat Hartfelder l. c. dargethan.

öffnetes Buch aus. Ihr Kleid trägt vorn als Verzierung die beiden nach abwärts gehenden Progressionen

	1
3	2
9	4
27	8

deren gleiche Anfangszahl 1 nur einmal vorkommt, wie unsere überdies in der Form der Zahlzeichen nicht getreue Abbildung es erkennen lässt. Links von der Arithmetik sitzt *Pytagoras*, wie die Ueberschrift ihn nennt, der auf einem Rechentische die Zahlen 1241 und 82 mit Rechenpfennigen angelegt hat, ausserdem noch einen Haufen Rechenpfennige daneben liegen hat, welchem seine rechte Hand sich nähert. Zur Rechten der Arithmetik sitzt an einem Tische *Boetius*, gleichwie sein Gegenüber durch eine Ueberschrift gekennzeichnet, gleich ihm in der Tracht eines wohlhabenden Bürgers des XVI. Jahrhunderts. Boethius rechnet mit Ziffern, doch ist den vor ihm befindlichen theilweise durchstrichenen Zahlzeichen ein richtiger Sinn nicht abzugewinnen. Man darf getrost diese Abbildung als das Interessanteste an dem ganzen der Arithmetik gewidmeten Buche bezeichnen. Der ihr folgende Text bietet Zahlentheoretisches nach Boethius, die Eintheilung der Zahlen in Finger- und Gelenkzahlen, die sieben Rechnungsarten: Numeration, Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Wurzelausziehung und Progression mit ganzen Zahlen, gemeinen Brüchen und Sexagesimalbrüchen, das Linienrechnen und die Regeldetri, ohne dass irgendwo eine Besonderheit hervorträte, welche unsere Aufmerksamkeit zu fesseln verdiente. Weit mehr ist solches in dem geometrischen Buche des Werkes der Fall, welches selbst wieder in speculative und praktische Geometrie eingetheilt ist. Das Titelbild des ersten Tractates stellt Frau Geometrie dar. Ihre rechte Hand hält einen Zirkel, mit welchem sie Längen an einem Fasse abnehmen zu wollen scheint, auf welchem ein eingetheilter Maassstab liegt, ein Hinweis also auf die Visierkunst. Die linke Hand hält einen als Winkelinstrument zu benutzenden Quadranten. Die speculative Geometrie selbst ist ein unendlich dürftiger Auszug aus Euklid, der Hauptsache nach blosse Erklärungen, daneben einige wenige Sätze, unbewiesen aber richtig, das ziemlich getreue Ebenbild des ersten Buches der Geometrie des Boethius, nur in noch abgemagerterer Gestalt. Den zuverlässigsten Beweis der Benutzung einer unmittelbar oder mittelbar römischen Vorlage liefert das Vorkommen des Wortes *corauscus*[1])

[1]) *Discipulus: Basis quid est? Magister: Est linea figurae planae quae tota jacet in fundamento sive plano. Linea vero huic aequaliter superposita dicitur corauscus.*

für Scheitellinie. Eine eigenthümliche Abbildung versinnlicht die drei räumlichen Abmessungen an einem unbekleideten von drei Spiessen durchbohrten Menschen durch Beisetzung der Wörter oben und unten (Länge), rechts und links (Breite), vorn und hinten (Tiefe) an die Spiesse selbst. Nun folgt der zweite der praktischen Geometrie vorbehaltene Tractat. An eine kurze Maasstabelle schliesst sich die Beschreibung eines Winkelinstrumentes nach Art des Astrolabiums und die Vorschrift, wie man es zu Höhenmessungen zu benutzen habe, nämlich um ähnliche Dreiecke herzustellen, auf deren Berechnung Alles hinauslaufe. Als zweites wichtiges Messwerkzeug wird der Jacobsstab genannt und geschildert. Nun kommt die eigentliche rechnende Geometrie, beginnend mit Kreismessungen unter Anwendung von $\pi = 3\frac{1}{7}$. Bei der Flächenmessung geradliniger Figuren ist die Abhängigkeit von Schriften römischer Agrimensoren noch viel deutlicher wahrnehmbar, als an den vorher erwähnten Merkmalen. Der Durchmesser des Innenkreises eines rechtwinkligen Dreiecks wird gefunden als Rest der um die Hypotenuse verminderten Summe der beiden Katheten; die Höhe eines mittels seiner drei Seiten gegebenen Dreiecks wird unter Beiziehung des pythagoräischen Lehrsatzes berechnet, und auch der Abschnitt auf der Grundlinie, beziehungsweise die Ueberragung, welche bei spitz- und stumpfwinkligen Dreiecken durch Ziehen der Höhe entsteht, ist nach richtigen, den Feldmessern bekannten Formeln erhalten; ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke werden gebildet; endlich gelten die Formeln der Vieleckszahlen, vom Dreieck und Fünfeck beginnend bis zum Zehneck einschliesslich als Flächenmaasse jener regelmässigen Figuren. Das sind untrügliche Kennzeichen, an welchen sich bestätigt, was (S. 234) mit Bezug auf Widmann von uns behauptet werden durfte: dass nämlich um 1500 die römische Feldmesskunst in Deutschland aus langem Winterschlafe zu allerdings nicht nachhaltigem Leben erwachte.

Schon vor dem Sammelwerke des Gregorius Reisch, welchem wir nur als Sammelwerke, aus welchem einige wenige Bücher unser Interesse in Anspruch nahmen, den Vorrang liessen, wurde 1501 eine Schrift gedruckt: das Enchiridion von Huswirt[1]). Der Verfasser heisst zu Ende des Büchleins *Johannes Huswirt Sanensis.* Vielleicht weist dieser Ortsname nach Sayn im Westerwalde, wo einst eine Prämonstratenserabtei stand. Jedenfalls stimmen die in den Auf-

[1]) Anleitung zum Rechnen aus dem Anfange des XVI. Jahrhunderts von Huswirt, neu herausgegeben mit historischer Einleitung und Commentar von Prof. Dr. Wildermuth. Programm des königl. Gymnasiums in Tübingen zum Schlusse des Schuljahres 1864—1865.

gaben des Enchiridion genannten Münzsorten mit denjenigen überein, deren man in der Rheingegend sich bediente. Die Sprache ist die lateinische. Da Huswirt[1]) früher schrieb als Grammateus, darf man sich nicht wundern, bei ihm noch dem Verdoppeln und Halbiren als besonderen Rechnungsarten zu begegnen. Die Reihenfolge, in welcher diese Rechnungsarten erscheinen, ist aber einigermassen auffallend. Wo zuerst das Rechnen mit der Feder gelehrt wird, folgen sich Addition, Subtraction, Multiplication, Verdoppelung, Division, Halbirung[2]). Wo alsdann das Linienrechnen an die Reihe kommt, ist Verdoppelung und Halbirung zwischen Subtraction und Multiplication eingeschoben[3]), und ebenso, wo wieder etwas später das Rechnen mit Brüchen gelehrt wird[4]). Bemerkenswerth erscheint auch das Vorkommen des Wortes *cifra* in doppelter Bedeutung[5]) als Null und als Ziffer. Die Ausführung der einzelnen Rechnungsarten mit der Ergänzung einer beim Subtrahiren geborgten Zehn durch Erhöhung der nächsten Subtrahendenstelle um die Einheit, mit der überall benutzten Neunerprobe, mit dem Dividiren überwärts bietet nicht viel, was nicht aus anderen Schriften uns mehrfach schon bekannt wäre. Allenfalls könnte auf die Regel zur Summirung arithmetischer Progressionen hingewiesen werden, welche in Verse gebracht ist[6]):

Si primus numerus cum postremo faciat par,
Eius per medium loca singula multiplicabis,
Ast impar medium vult multiplicari locorum.

Die halbe gerade Summe des ersten und letzten Gliedes will sie mit der Gliederzahl multiplicirt haben oder die ganze ungerade Summe ebenderselben mit der halben Gliederzahl. Ferner dürfen wir auf das Vorhandensein einer kleinen Tabelle[7]) der neun ersten Kubikzahlen aufmerksam machen. Ein letzter Abschnitt[8]) enthält 28 „Regeln“, d. h. natürlich, wie schon bei Widmann und früheren Schriftstellern seit Leonardo von Pisa, einzelne Musteraufgaben, welche nicht einmal immer durch ihren Inhalt den Namen, welchen sie führen, rechtfertigen, sondern mittels dieses Namens nur an eine mitunter recht alte Vorgeschichte der Aufgabe erinnern. Die 6. Regel vom fliehenden Hasen[9]) z. B. erzählt uns kein Wort von einem durch einen Hund

[1]) Anleitung zum Rechnen aus dem Anfange des XVI. Jahrhunderts von Huswirt, neu herausgegeben mit historischer Einleitung und Commentar von Prof. Dr. Wildermuth. Programm d. königl. Gymnasiums in Tübingen zum Schlusse des Schuljahres 1864—1865, S. 3. [2]) Ebenda S. 8—16. [3]) Ebenda S. 22. [4]) Ebenda S. 26. [5]) Ebenda S. 7: *Decima vero theca, circulus, cifra sive figura nihili appellatur* und S. 23: *Quoniam de integris tam in cifris quam in proiectilibus, dei auxilio, dictum est.* [6]) Ebenda S. 17. [7]) Ebenda S. 20. [8]) Ebenda S. 28—38. [9]) Ebenda S. 31.

verfolgten Hasen, sondern lässt einen von Köln gegen Rom fliehenden Mann durch einen Verfolger einholen, welcher Köln erst 5 Tage später als der Erste verlässt.

Theoderich Tzwivel[1]) hat 1507 ein Buch zum Drucke befördert, dessen Titelblatt verspricht, einen Algorithmus zu lehren *per figurarum (more alemannorum) deletionem*. Sich selbst nennt der Verfasser gleichfalls auf dem Titelblatte einen *ingeniosus Pythagorista*. Diese Bezeichnung und jenes Versprechen sind, scheint es, das Bemerkenswertheste an dem Buche. Was die alemannische Gewohnheit der Auswischung der Zeichen war, sagt unsere Vorlage nicht. Wir vermuthen, es sei das Ueberwärtsrechnen gemeint, welches fortwährendes Auslöschen nothwendig machte; aber warum alemannische Gewohnheit? Höchst eigenthümlich ist Tzwivel's Stellung zur Verdoppelung und Halbirung gewesen. Er hatte das Bewusstsein und sprach es gradezu aus, dass beide Rechnungsverfahren vom Multipliciren und Dividiren nicht zu trennen seien. Er war also hierin ein deutscher Vorgänger des Grammateus (S. 396). Gleichwohl hat Tzwivel beide Sonderfälle in besonderen Abschnitten behandelt[2]).

Es ist kaum möglich, geschweige denn nothwendig, alle Rechenbücher in lateinischer und deutscher Sprache aufzuzählen, welche ihrer Entstehungszeit gemäss hierher gehören. Wir begnügen uns mit der Nennung einiger weniger, welche durch irgend besondere Gründe der Aufmerksamkeit empfohlen sind. Jacob Köbel[3]) von Heidelberg (1470—1533) studirte in Krakau seit etwa 1490 und widmete sich dort insbesondere den mathematischen Wissenschaften, nachdem er zuvor an seiner heimathlichen Universität das Baccalaureat der Rechtswissenschaft schon erworben hatte. In Krakau war Köbel Studiengenosse des Kopernikus. Nach Süddeutschland zurückgekehrt liess Köbel sich als Stadtschreiber in Oppenheim nieder und entwickelte dort als Dichter eines gereimten Lehrgedichtes über das Verhalten bei Tische, die „Tischzucht“ genannt, als Zeichner und Holzschneider, als Buchdrucker und Verleger, als Verfasser mathematischer Schriften neben seinem amtlichen Berufe eine ungemeine Rührigkeit. Ein Rechenbuch auf der Linien von 1514, ein solches mit der Feder von 1520, ein Visirbuch von 1515, sämmtlich wiederholt aufgelegt, eine Vereinigung der drei Schriften, die dabei wesentlich vermehrt erschienen, von 1531, welche selbst wieder neue Auflagen erlebte, das sind die Schriften Köbel's[4]), welche wir zu verzeichnen haben. Uns

[1]) Kästner I, 82—84. — Nagl, Ueber eine Algorismusschrift des XII. Jahrhunderts. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Hist.-litter. Abthlg. S. 145. [2]) Christ. Friedr. Müller, *Henricus Grammateus* S. 18 Note 95. [3]) Allgemeine deutsche Biographie XVI, 345—349, Artikel von Eisenhart. [4]) Unger S. 44—46.

lag dabei eine Auflage[1]) von 1543 vor, welche bei Christian Egenolff in Frankfurt am Main gedruckt ist und den Titel führt: „Zwei rechenbüchlin uff der Linien und Zipher mit eym angehencktem Visirbüch so verstendtlich fürgeben das jedem hieraus on eiñ lerer wol zu lernen. Durch den Achtbarn und wol erfarnen H. Jacoben Köbel Statschreiber zu Oppenheym.“ Die römischen Zahlzeichen sind mindestens am Anfange vorwiegend im Gebrauche und werden als die gewenlich teutsch Zal im Gegensatz zu der ziffern zale benannt[2]), eine Benennung, auf welche wir bei dieser Gelegenheit zum ersten Male aufmerksam machen, welche aber doch schon etwas älterer und häufigerer Uebung ist. Man hat sie in einem in Wittenberg 1525 gedruckten „Bökeschen vor de leyen und Kinder“, sowie in einer Schrift aus dem Jahre 1530 von Joannem Kolross tüdtsch Leermeystern zu Basel vorgefunden[3]). Köbel gehörte noch der alten Schule an, welche das Verdoppeln und Halbiren besonders lehrte. Er bediente sich des Linienrechnens auch bei der Quadratwurzelausziehung[4]), wo $\sqrt{4356} = 66$ sehr ausführlich dargestellt ist. Verfasser anderer Rechenbücher in deutscher Sprache sind Johann Böschenstein[5]) mit Ausgaben von 1514, 1516, 1518, welchen den Beweis der grossen Verbreitung dieser Schrift liefern, und Georg Reichelstain[6]) 1532. Letzterer ist einer der Ersten in Deutschland, welcher Arithmetik und Dichtkunst zu vereinigen bestrebt war, und seine Subtractionsregel

> So du magst von der obern nit
> Ein ziffer subtrahirn mit sitt,
> Von zehen sollt sie ziehen ab,
> Der nechst under addir eins knab

ist vielfach als Muster solcher Darstellungsweise angeführt.

Weitaus am bekanntesten unter den deutschen Rechenmeistern ist Adam Riese[7]). Sein Name hat sich sprichwörtlich auch bei Persönlichkeiten, denen Riese selbst eine fast mythische Figur geworden ist, in der Redensart „nach Adam Riese“ erhalten, welche von jedem sehr einfachen Rechenergebnisse gebraucht zu werden pflegt. Auch die kleine Geschichte ist aufbewahrt[8]), wie Riese einen

[1]) Das Werk besteht aus 144 Blättern, die acht ersten Blätter sind ohne Numerirung, dann beginnt eine solche sofort mit der Zahl 9 und geht blattweise durch den ganzen Band. [2]) Köbel fol. 9 verso. [3]) Unger S. 9—13. [4]) Köbel fol. 49—50. [5]) Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert, Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplementheft S. 13. — Unger S. 46. [6]) Treutlein l. c. S. 37, 45. — Unger S. 56. [7]) Unger S. 48—53 giebt die genaueste und ausführlichste Auskunft über Riese's Schriften, theilweise nach Berlet, Ueber Adam Riese 1855 und Berlet, Die Coss von Adam Riese 1860, aber mit zahlreichen Ergänzungen. [8]) Kästner I, 111.

Feldmesser demüthigte, der, um sich als Meister des Zirkels zu erkennen zu geben, einen silbernen Zirkel auf dem Hute trug, und doch nicht wusste, dass es genügt, einen Halbkreis über einen Durchmesser zu zeichnen, um in kürzester Zeit beliebig viele rechte Winkel in diesem Halbkreise zu erhalten. Adam Riese, auch Ries, Rys, Ryse geschrieben, ist 1492 zu Staffelstein bei Lichtenfels in Franken geboren. Er war 1522 Rechenmeister in Erfurt, 1525 Rechenmeister in Annaberg. Ebenda trat er 1528 in öffentliche Dienste bei der Buchführung der Bergwerke. Sein Todesjahr ist 1559. Vier verschiedene Bücher von ihm sind, jedes in wiederholten Auflagen, im Drucke erschienen. Das erste ist eine Rechnung auf der Linie von 1518, das zweite ein Rechenbuch auf Linie und Feder von 1522 zur Zeit als Riese noch Rechenmeister in Erfurt war. Das dritte und häufigste Buch führt den Titel „Rechnung nach der Lenge auff den Linichen und Feder. Darzu forteil und behendigkeit durch die Proportiones Practica genannt mit grüntlichem unterricht des visirens. Durch Adam Riesen im 1550 Jar.“ Ihm ist das Bildniss Riese's mit der Umschrift „Anno 1550 Adam Ries seines Alters im LVIII“ beigegeben, woraus das Geburtsjahr des Verfassers hat erschlossen werden können. Man hat in diesen drei Werken den Fortschritt zu erkennen, welchen Riese als Lehrer machte, und welchen er auf seine Schüler fortpflanzte. Zu einem klaren Unterrichte im volksthümlichen, aber auch nur einfachsten Volksbedürfnissen genügenden Linienrechnen gesellt sich ein Rechnen mit Ziffern, zu beiden alsdann ein Anwenden aller der „forteil und behendigkeit“, deren die Zeit fähig war, ohne dass die beiden ersten Theile dadurch verkürzt würden. Man darf nicht vergessen, dass die Lehre vom Unterrichten als solche damals erst im Entstehen war, dass Männer wie unser früher genannter Melanchthon, wie Johannes Sturm[1]), der Schulvorstand in Strassburg, erst an ihrer Begründung arbeiteten, um Riese's Stellung innerhalb seiner Zeit zu würdigen. Was seine Bücher, insbesondere das vollständigste dritte Rechenbuch auf der Lenge lehrten, erhob sich in keiner Weise über das übliche Maass. Es würde sehr schwer fallen, eigene Gedanken, und beträfen sie nur geringe Rechenvortheile, bei Adam Riese nachzuweisen. Dagegen hat er zu vereinigen und zweckdienlich zu ordnen gewusst, was vorhanden war. Aus seiner Anordnung konnte der Rechenunterricht die methodischen Vorschriften sich bilden, welche heute als selbstverständlich gelten. Die Vorschrift des Aufsteigens vom concreten Denken zum abstracten wird in jedem Rechenunterrichte heute beachtet; bei

[1]) Hartfelder, Melanchthon S. 148—150.

Riese ist das Rechnen mit Rechenpfennigen dem mit Ziffern vorausgeschickt. Die zweite Grundregel ist die des Ueberganges vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren, und auch diese war Riese's Rechenbuch auf der Lenge zu entnehmen. Die Rechnungsarten sind dort zuerst so breit und umständlich zur Ausführung gebracht, als es in ihrer Natur liegt, dann erst wird mehr und mehr auf eine gewisse Eleganz des Verfahrens Rücksicht genommen. Mit verschiedenen Multiplications- und Divisionsarten, mit dem Kürzen bei Bruchrechnungen, mit der welschen Praktik als wesentlich leichterer Lösung der Regeldetriaufgaben, mit falschem Ansatze, mit unbestimmten Aufgaben, mit Zauberquadraten wird der Schüler Riese's in umfassendster Weise bekannt gemacht, aber erst nachdem er das gemeine Ziffernrechnen überwunden hat. Endlich die dritte für das Rechnen fast mehr als für irgend einen Lehrgegenstand erspriessliche Vorschrift verlangt stete Uebung des einmal Erlernten. Auch Riese hat wohl beherzigt, dass Uebung den Meister macht. Es ist immer der gleiche Stoff, der in immer neuen Aufgaben, in immer neuer Form, so weit als möglich in angenehmem Gewande, bis zu fünf- und sechsmal wiederholt erscheint. Ein gleichzeitiger Schriftsteller, der geistig unendlich hoch über Riese stand, Michael Stifel, nannte dessen Aufgaben „holdselig“ und entnahm sie ihm für sein eigenes Werk[1]). Andere folgten diesem Beispiele ohne in gleicher Offenheit ihre Quelle zu nennen, und so galt hinfort für einen Meister der Rechenkunst, wer Adam Riese's Rechnung nach der Lenge vollständig durchgearbeitet hatte[2]). Ein viertes Buch gab Adam Riese 1533 zu Ehren des „Erbarn Weisen Rath auff Sanct Annenbergs“ heraus. Es war „ein gerechent Büchlein auff den Schäffel, Eimer und Pfundtgewicht“, mithin eine Sammlung von 116 Tabellen, die zu Preisberechnungen dienen[3]). Hier findet sich unter Anderem die berühmte Annaberger Brodordnung, welche das Gewicht angiebt, das ein Halbgroschenbrod, ein Pfennigbrod und ein Semmelpaar haben müssen, während die Kornpreise von 20 bis zu 84 Geldeinheiten steigen. Ausser den in Druck gegebenen Schriften Riese's hat sich von ihm noch eine Coss[4]) handschriftlich erhalten. Wir entnehmen ihr, dass mancherlei Anregung von Aquinas Dacus, jenem früher (S. 238) erwähnten Mönche des Predigerordens, ausging, welcher übrigens nach der Sitte der Zeit sein

[1]) Unger S. 51, Note 5. [2]) Doppelmayr, S. 169, Note oo. [3]) Unger S. 96. [4]) Berlet, Die Coss von Adam Riese (Annaberg 1860) enthält umfangreiche wortgetreue Auszüge. Vergl. ausserdem Treutlein, Die deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplement S. 12 und 14—15 und besonders Wappler, Zur Geschichte der deutschen Algebra im XV. Jahrhunderte (Zwickau 1887).

Wissen zu Kauf trug und sich beispielsweise für die Mittheilung einer natürlich von ihrer Auflösung begleiteten Aufgabe von einem gewissen Hans Conrad, der erst in Eisleben, dann neben Adam Riese in Annaberg lebte, einen Gulden geben liess. Wir lernen einen Hans Bernecker aus Leipzig kennen, der selbst Beispiele anfertigte. Wir erfahren von einem Magister Andreas Alexander, welcher ein ganzes Buch über die Coss geschrieben hat. Die wissenschaftliche Wirksamkeit aller dieser Persönlichkeiten mag vielleicht vor 1500 begonnen haben, reicht aber gewiss wenigstens theilweise bis gegen Ostern 1524, als dem Zeitpunkte, in welchem Riese's Coss vollendet worden ist. Es wird uns von ihm auch nicht vorenthalten, woher er seine Beispiele nahm. Er nennt eine alte Handschrift seine Quelle, und dieses heute noch in Dresden vorhandene Manuscript ist dasjenige[1]), welches wir die Dresdner Algebra zu nennen uns angewöhnt haben, und welches einst im Besitze von Johannes Widmann war. Aufgaben des Jordanus, Aufgaben aus der lateinischen Algebra von unbekanntem Verfasser, ebenso die Randaufgaben (S. 248) hat Riese benutzt, und nicht minder sind seine theoretischen Auseinandersetzungen den dortigen ähnlich. Ihm selbst, vielleicht beeinflusst durch die deutsche Dresdner Algebra mit ihrem „Czebreyen“, dürfte möglicherweise das Missverständniss zuzuschreiben sein, welches auf den „berumbsten In der Zall erfarnen Algebram den Arabischen meister“[2]) Bezug nimmt und welches noch auffälliger wird, wenn es an einer etwas späteren Stelle gar heisst[3]): „Volgenn hernach die Acht equaciones Algebre, gezogenn auss seynem ersten Buch genant gebra vnd almuchabola“. Die angekündigten acht Equaciones lauten in unserer gegenwärtigen Zeichensprache:

$$1.\ ax^{n+1}=bx^n. \quad 2.\ ax^{n+2}=bx^n. \quad 3.\ ax^{n+3}=bx^n.$$
$$4.\ ax^{n+4}=bx^n \quad 5.\ ax^{n+2}+bx^{n+1}=cx^n. \quad 6.\ ax^{n+2}+cx^n=bx^{n+1}.$$
$$7.\ ax^{n+2}=bx^{n+1}+cx^n. \quad 8.\ \text{Irgend eine Gleichung zwischen}$$
$$x^n,\ x^{n+m},\ x^{n+2m}.$$

Von diesen acht allgemeinen Fällen, die allerdings meistens in der besonderen $n=0$ voraussetzenden Form auftreten, hat die Dresdner lateinische Algebra (S. 245) die sieben ersten. Woher Riese die achte entnahm, können wir nicht genauer nachweisen. Aus den acht Equaciones werden dann weiter „24 Regeln“ gebildet. Die deutsche wie die lateinische Dresdner Algebra besitzen sie in von einander abweichender Anordnung, und Riese hat wieder eine dritte Anordnung

[1]) Wappler hat l. c. diese Thatsache ausser Zweifel gestellt. [2]) Berlet l. c. S. 9. [3]) Ebenda S. 12.

getroffen, ohne dass die Einzelfälle selbst eine Aenderung erfahren hätte. Riese's Reihenfolge ist diese:

1. $ax = b$.	2. $ax^2 = b$.	3. $ax^2 = bx$.
4. $ax^2 + bx = c$.	5. $ax^2 + c = bx$.	6. $ax^2 = bx + c$.
7. $ax^3 = bx^2$.	8. $ax^3 = bx$.	9. $ax^3 = b$.
10. $ax^3 + bx^2 = cx$.	11. $ax^3 + cx = bx^2$.	12. $ax^3 = bx^2 + cx$.
13. $ax^4 = bx^3$.	14. $ax^4 = bx^2$.	15. $ax^4 = bx$.
16. $ax^4 + bx^3 = cx^2$.	17. $ax^4 + cx^2 = bx^3$.	18. $ax^4 = bx^3 + cx^2$.
19. $ax^2 = \sqrt{bx}$.	20. $ax^2 = b\sqrt{x^2}$.	21. $ax^4 = b$.
22. $ax^4 + bx^2 = c$.	23. $ax^4 + c = bx^2$.	24. $ax^4 = bx^2 + c$.

War Riese's Coss zunächst noch nicht Allgemeingut, so war dagegen Rudolff's Coss, wie wir schon wissen, seit 1525 im Drucke vorhanden und verhältnissmässig rasch vergriffen. Wir haben versprochenermassen jetzt auf sie zurückzukommen, zuvor aber auf eine Vorlage, welche ihm gedient hat. Wir haben früher (S. 240) einer Wiener Handschrift des XVI. Jahrhunderts gedacht, welche die Aufschrift Regulae Cosae vel Algebrae führt. Die Abhandlung ist zuverlässig vor 1510 entstanden, denn ausser in der Wiener Handschrift 5277 steht sie auch in einer Münchner Handschrift, welche von einem Besitzer im Jahre 1510 um 13 Kreuzer käuflich erstanden wurde, wie es in einer auf ihr angebrachten Notiz heisst. Die Regulae Cosae vel Algebrae[1]) bestehen aus 33 Blättern. Zunächst sind Regeln der Addition, Subtraction, Multiplication für mit Vorzeichen versehene Zahlen ausgesprochen, und ganz besonders bemerkenswerth tritt der Umstand hervor, dass in den kurzgefassten Regeln nur jene Vorzeichen (*notae*) $+$ und $-$ ohne beigefügte Zahlen erscheinen. So heisst es für die Addition:

> Conditiones circa $+$ vel $-$ in additione. $\left.\begin{matrix} + \text{ et } + \\ - \text{ et } - \end{matrix}\right\rangle$ facit $\left.\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\right\rangle$ addatur non habendo respectu quis numerus sit superior. Si fuerit $\left\langle\begin{matrix} + \text{ et } - \\ - \text{ et } + \end{matrix}\right\rangle$ simpliciter subtrahatur brevior numerus a majori et residuo sua ascribatur nota.

Bezüglich der Subtraction sind die Regeln nicht minder kurz und dennoch ausreichend klar, sobald man eingesehen hat, dass die zuerst genannte Zahl immer als Minuendus, die zweite als Subtrahendus genannt ist.

---

[1]) Gerhardt in den Monatsberichten der Berliner Akademie für 1870, S. 143—147. — Curtze brieflich.

> Conditiones circa $+$ et $-$ in subtractione. Si fuerit $+$ et $+$ vel $-$ et $-$, existente numero superiore majore, fiat subtractio et relicto sua ascribatur nota. Quodsi inferior excesserit superiorem, fiat subtractio et residuo apponatur nota aliena. Si fuerit $\left\langle\begin{matrix} + \text{ et } - \\ - \text{ et } + \end{matrix}\right\rangle$ addatur absque ullo respectu superioris et inferioris, quandum ad excessum, per dictum habebit $\left\langle\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\right.$.

Von der Rechnung mit Monomen wird sodann der Uebergang zum Rechnen mit algebraischen Summen gemacht und jede einzelne Regel an mehrfachen Beispielen geübt. Bruchrechnung und Regeldetri schliessen sich an und an diese wieder die eigentliche Lehre von den Gleichungen. Als Beispiele der acht Formen sind $3x = 6$, $3x^2 = 12$, $2x^3 = 16$, $4x^4 = 64$, $3x^2 + 4x = 20$, $3x^2 + 4 = 8x$, $2\frac{1}{2}x^2 = 2x + 6$, $2x^2 + 12 = 1\frac{1}{4}x^4$ behandelt, denen allen der Wurzelwerth $x = 2$ gemeinschaftlich ist. Ausserdem folgen aber noch zahlreiche Beispiele aller Formen, meistens in lateinischer, andere aber auch in deutscher Sprache. Dann folgen noch Aufgaben von einer neunten und zehnten Form $x^2 = b\sqrt{x}$, $x^2 = b\sqrt{x^2}$. Endlich auf dem vorletzten Blatte folgen unter der Ueberschrift *Regule Cosse* 24 Gleichungsformen, denen zu begegnen uns nicht mehr in Erstaunen setzen kann.

Aus dieser Handschrift also schöpfte Christoph Rudolff, und schon seine Zeitgenossen wussten es, wobei ihr Urtheil über seine Handlungsweise weit auseinander ging. In der Vorrede zur zweiten Auflage der Coss, welche (S. 398) Michael Stifel besorgte, sagt dieser: „Was aber dieser Christoff Rudolff bey etzlichen für danck hab will ich mich nicht jrren lassen. Ich höret auff ein zeit jm grewlich vnd vnchristlich fluchen das er die Coss hatte geschrieben vnd das beste (wie der flucher sagt) hatte verschwigen, nemlich die Demonstrationes seyner Regeln. Vnd hatte seine Exempla (wie er saget) auss der Librey zu Wien gestolen. Das sagt einer der sich treffentlich gelehrt wüst vnd das ansehen haben wolt, als were jhm sehr ernst die künsten zu promoviren. Du lieber Gott was solt doch einer sollichen leuthen rechts thun können? Ob denn gleich Christoff Rudolff sein Exempla nicht alle selbs hatte gedichtet, sondern etzlich in der Librey zu Wien abgeschriben, vnd vns die selbige durch den truck mitgeteylet, wem hat er damit schaden gethan?“ Mit dem Abschreiben selbst hat es auch nur theilweise seine Richtigkeit. Rudolff band sich keineswegs knechtisch an seine Vorlage. Er liess aus ihr weg, was ihm nicht passte, er fügte da und dort bei, was ihm beifügungswerth erschien, er übernahm einfach, was ihm gefiel. Zu letzteren

Dingen gehören die kurzen Zeichenregeln der Addition[1]), der Subtraction[2]) sowie der Multiplication[3]). Als Zusatz sind die (S. 399) erwähnten Wurzelzeichen zu nennen. So heisst es[4]) „zu mercken das radix quadrata in diesem Algorithmo von kurtz wegen vermerckt wird mit sollichem Character $\surd$. Als $\surd 4$ bedeutet radicem quadratam auss 4. ist 2." Weggelassen sind die 24 Regeln[5]): „Lass dich nicht jrren, das etliche bisher vnd noch von 24 Regeln der Coss gross geschrei machen, denn angesehen yhre meynung vnd die Cautel (deren sye sich zu volliger zal der 24 regeln auch behelffen) will ich auss den 8 regeln nicht alleyn 24 sondern etlich vnd hundert machen. Ist ein verdriesslicher vberfluss, von einer Kunst gross geschwetz treyben, so mit einem wenigeren, nicht allein ordenlicher, sonder auch verstentlicher vollkommenlicher alles mag daregeben werden."

Die Cautelen, gleichfalls bereits in der wiener Algebra enthalten, sind vier an der Zahl, mittels deren nach Rudolff's Ansicht die Regeln fast beliebig vermehrt werden können. Sie lauten wie folgt[6]): Erstlich kann, wenn auf beiden Seiten der Gleichung wie wir heute sagen würden, Grössen gleicher Benennung (Zahlen, Unbekannte in erster, zweiter u. s. w. Potenz) vorkommen, die kleinere mit entgegengesetztem Zeichen hinübergeschafft und dort durch Subtraction mit der grösseren vereinigt werden. Zweitens kann eine negativ auftretende Grösse als positiv hinübergeschafft werden. Diese beiden Cautelen beruhen ersichtlich auf den Sätzen: Gleiches von Gleichem giebt Gleiches, Gleiches zu Gleichem giebt Gleiches. Die dritte Cautel schafft Wurzelzeichen durch Potenzirung, die vierte Brüche durch Multiplication mit dem Nenner fort. Diese beiden beruhen mithin auf den Sätzen: Gleiche Potenzen von Gleichem sind gleich, Gleiches mit Gleichem vervielfacht giebt Gleiches.

Alles, was auf diese Cautelen noch folgt, sind Beispiele für die sämmtlichen acht Regeln, welche keine anderen sind, als die im Wiener Manuscripte zuerst behandelten Fälle, und am Schlusse noch acht Aufgaben, zu welchen jene Regeln nicht sofort ausreichen. Die sechste, siebente und achte derselben sind kubische Gleichungen[7]), welche aufgelöst werden, nämlich $x^2(10-x)=63$ mit $x=3$, ferner

$$\frac{x^3-x^2}{2}=605$$

mit $x=11$, endlich $x^3=10x^2+20x+48$ mit $x=12$. Aber wie findet Rudolff diese Wurzelwerthe? Durch fein ausgeklügelte, in

[1]) Coss (Ausgabe von 1553) fol. 64 verso. [2]) Ebenda fol. 66 recto. [3]) Ebenda fol. 69 recto. [4]) Ebenda fol. 86 recto. [5]) Ebenda fol. 139 verso. [6]) Ebenda fol. 148 verso bis 151 recto. [7]) Ebenda fol. 477 recto flgg.

jedem dieser Einzelfälle gerade zutreffende Kunststückchen. Die letzte Gleichung z. B. behandelt er folgendermassen. Zuerst addirt er 8 auf beiden Seiten, dann dividirt er durch $x+2$, erhält also der Reihe nach

$$x^3+8=10x^2+20x+56 \text{ und } x^2-2x+4=10x+\frac{56}{x+2}.$$

Aus dieser letzteren Gleichung bildet er zwei $x^2-2x=10x$ und $4=\frac{56}{x+2}$, welchen beiden $x=12$ genügt. Das ganz Zufällige dieser Auflösung leuchtet ein. In der vorgelegten Gleichung stimmt die Zerlegung, in anderen würde sie Widersprechendes zu Tage fördern. Rudolff wusste, muss man sagen, von der Aufgabe der Zeit, die keine andere war als die Auflösung kubischer Gleichungen. Er kannte die Wurzeln einiger solcher Gleichungen, vielleicht weil er von dieser Kenntniss aus die Gleichungen sich gebildet hatte, und tastete nach allerlei Kunstgriffen, welche diese Wurzelwerthe ihn finden liessen, aber dass er auch nur auf dem Wege zu einem methodischen Auflösungsverfahren gewesen sei, kann man nicht behaupten.

Trotz der freien Benutzung der Zeichen $+$ und $-$ kennt Rudolff doch nur positive Zahlen, wenigstens nur positive Gleichungswurzeln und berücksichtigt desshalb nur dann zwei Wurzeln einer quadratischen Gleichung, wenn diese die Form $ax^2+b=cx$ besitzt und überdies c^2-4ab positiv ist. Ja auch diese Zwiespaltigkeit, um Rudolff's Ausdruck anzuwenden, bringt er erst nachträglich zur Rede.

Für die einzelnen Potenzen der Unbekannten werden Symbole benutzt, wie sie ähnlich von verschiedenen deutschen Schriftstellern her uns bekannt geworden sind[1]). Sie führen den Namen Charakter, und sehen so aus

ϑ, 𝔵, 𝔷, 𝔠, 𝔷𝔷, ß, 𝔷𝔠, 𝔅ß, 𝔷𝔷𝔷, 𝔠𝔠.

Rudolff's Beispiele sind, wie schon bemerkt, vielfach aus der Handschrift der Wiener Bibliothek entnommen, aber auch eine gedruckte Quelle hat er keineswegs zu benutzen verschmäht, wie die oftmals bis in die Zahlen nachgewiesene Uebereinstimmung mit Johann Widmann[2]) darthut, es sei denn, dass die Wiener Handschrift auch jene Widmann'schen Aufgaben enthielte, worüber Untersuchungen noch fehlen.

Auch Aufgaben mit mehreren Unbekannten hat Rudolff unter dem Namen *Regula quantitatis* behandelt[3]), indem er die eine Unbekannte durch das Zeichen 𝔵, die andere als Quantität durch q darstellt

[1]) Coss (Ausgabe von 1553) fol. 141 recto. [2]) Treutlein, Die deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplement S. 121. [3]) Coss fol. 307 flgg. — Treutlein l. c. S. 84—85.

stellt, und unter diesen Aufgaben finden sich sowohl bestimmte als unbestimmte. Bestimmt ist z. B. Rudolff's 191. Exemplum[1]). Beim Pferdekauf um 34 Gulden bedarf von drei Gesellen A die Hälfte, B ein Drittel, C ein Viertel des Geldes der beiden Anderen, um die Bezahlung zu ermöglichen. Hat A die Summe $\mathfrak{x}$ und B und C zusammen $\mathfrak{q}$, so ist $\frac{2\mathfrak{x}+\mathfrak{q}}{2}=34$, $\mathfrak{q}=68-2\mathfrak{x}$, der Gesammtbesitz von A, B, C also $68-\mathfrak{x}$. Nun habe B allein die Summe $\mathfrak{q}$ und mithin A mit C zusammen $68-\mathfrak{x}-\mathfrak{q}$, dann ist

$$\mathfrak{q}+\frac{68-\mathfrak{x}-\mathfrak{q}}{3}=34,\quad \mathfrak{q}=\frac{34+\mathfrak{x}}{2}.$$

Besitzt endlich C die Summe $\mathfrak{q}$, also A mit B zusammen $68-\mathfrak{x}-\mathfrak{q}$, so ist $\mathfrak{q}+\frac{68-\mathfrak{x}-\mathfrak{q}}{4}=34$, $\mathfrak{q}=\frac{68+\mathfrak{x}}{3}$. Die Besitzstände sind demnach $\mathfrak{x}$, $\frac{34+\mathfrak{x}}{2}$, $\frac{68+\mathfrak{x}}{3}$ mit der Summe $68-\mathfrak{x}$, folglich $\mathfrak{x}=10$. Unbestimmt dagegen ist das 188. Exemplum[2]), wo es darauf ankommt $\mathfrak{x}+14$ so in zwei Theile $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{x}+14-\mathfrak{q}$ zu zerlegen, dass der erste um 8 vom zweiten vermehrt, um 2 grösser als der dreifache Rest des zweiten sei. D. h. $\mathfrak{q}+8-2=3(\mathfrak{x}+14-\mathfrak{q}-8)$, $\mathfrak{q}=\frac{3\mathfrak{x}+12}{4}$; der zweite Theil ist daher $\mathfrak{x}+14-\frac{3\mathfrak{x}+12}{4}$ $=\frac{\mathfrak{x}+44}{4}$. Wie gross man nun $\mathfrak{x}$ wählen soll, ist in der Aufgabe durch keine weitere Bedingung vorgeschrieben, „so ists ein Zeychen, das diss Exemplum vil verantwortung leydet, Vnd nicht der artigen Exempeln eins ist“. Es bedarf kaum der Bemerkung, dass unsere Darstellung nicht buchstäblich Rudolff entnommen ist, der insbesondere von einem Gleichheitszeichen noch nichts weiss.

Die hier angeführte unbestimmte Aufgabe veranlasst uns, wiederholt auf Rudolff's Rechenbuch von 1532 (S. 398) zurückzugreifen, um von der in dessen Anhange abgedruckten Schimpffrechnung, d. i. Rechenscherzen zu reden[3]). Unter diesen Aufgaben befindet sich diejenige Methode, eine Zahl unterhalb 105 zu errathen, welche die Chinesen Ta yen genannt haben, und welche durch nicht aufgeklärte Uebertragung um 1200 Leonardo von Pisa (S. 26), um 1400 Byzantinern bekannt gewesen zu sein scheint. Unter ihnen befindet sich aber auch eine andere unbestimmte Aufgabe, von welcher wir eben so gut bei Apianus und bei Adam Riese hätten reden können,

[1]) Coss fol. 309 verso bis 310 verso. [2]) Coss fol. 307 verso bis 308 recto. [3]) Unger S. 53, 100, 106.

wenn die Druckwerke dieser Schriftsteller nicht später als Rudolff's Rechenbuch veröffentlicht worden wären, so dass es richtiger erschien, die Aufgabe bei dem zu besprechen, der sie zuerst im Drucke bekannt machte. Wir meinen die Aufgabe von der gemeinsamen Zeche. Eine gegebene Anzahl von Personen, Männer, Frauen und Jungfrauen, haben zur Tilgung einer gemeinsamen Schuld nach Verhältnisszahlen beizutragen, welche für jeden einzelnen Mann, jede einzelne Frau, jede einzelne Jungfrau so gegeben sind, dass die Schuld genau getilgt wird; man will wissen, wie viele Männer, wie viele Frauen, wie viele Jungfrauen unter der Gesellschaft sich befanden[1]). Die Aufgabe geht unter verschiedenen Namen, *regula virginum*, auch *regula potatorum*, am häufigsten *regula coeci* durch zahlreiche Bücher bis tief in das XVIII. Jahrhundert herab, wo Euler noch sich des letzteren Namens als Ueberschrift des 2. Kapitels des 2. Abschnittes des II. Bandes seiner Algebra bediente. Man hat den Namen mit dem blinden Umhertasten nach einer Auflösung in Verbindung gebracht. Weit ansprechender ist die Ableitung von *Zeche*, aus welchem *coeci* ohne grossen sprachlichen Zwang entstehen konnte.

In diesem 61. Kapitel haben wir hauptsächlich die aus der Zahl der Rechenbücher entnehmbare Verbreiterung derjenigen Volksschichten, welche rechnen zu können als wünschenswerth, wenn nicht als nothwendig erkannten, bemerken können, und fast gleichen Schritt mit dem Rechnen mit bestimmten Zahlen hielt die Coss. Die wenigsten Schriftsteller unter denen, welche wir nannten, sind von hervorragender Bedeutung gewesen, wenn auch keinem von ihnen eine gewisse provinzielle Berühmtheit abging. Nur Christoff Rudolff und Adam Riese haben über den engeren Ort und die engere Zeit ihres Lebens hinaus eine Wirksamkeit sich bewahrt, entsprechend der Kunst ihrer stylistischen Darstellung, entsprechend auch eigenen Gedanken, die wir wenigstens nicht weiter aufwärts zu verfolgen im Stande waren. Am Bedeutsamsten erscheint darunter Rudolff's Aufräumen mit den 24 Regeln, dem Paradepferde seiner Vorgänger.

62. Kapitel.

Michael Stifel.

Der Herausgeber der 2. Auflage von Rudolff's Coss war, wie (S. 398) schon gesagt worden ist, Michael Stifel, eine nach den

[1]) Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplementheft S. 90—92. — Unger S. 100—101.

verschiedensten Seiten hochmerkwürdige Persönlichkeit, welcher wir ein besonderes Kapitel schuldig sind.

Michael Stifel[1]) ist 1486 oder 1487 in Esslingen geboren, 1567 in Jena gestorben. Er gehörte schon frühe dem Augustinerorden an, der mit Franziscanern und Dominicanern nicht ohne Glück in der allgemeinen Werthschätzung wetteiferte, und der namentlich in Deutschland zahlreiche Niederlassungen besass. Auch Luther war bekanntlich Augustiner, und dessen umwälzende Gedanken fanden im Esslinger Kloster Eingang und Anhänger, unter welchen Stifel der eifrigste war. Die schroffe Vertretung dieser Meinungen zwang ihn 1522 zur Flucht aus dem Kloster, und nun begann ein unstetes Wanderleben als Geistlicher der neuen Richtung. Im Mansfeldischen, in Oesterreich, in der Nähe von Wittenberg, in Preussen hat Stifel als Geistlicher gewirkt. Während seines Aufenthaltes in und bei Wittenberg wandte Stifel, der schon früher an mystischen Zahlenspielereien Vergnügen gefunden und ihretwegen arithmetische Kenntnisse, zum mindesten die der Dreieckszahlen, sich erworben hatte, ein eifriges Studium auf die Rudolff'sche Coss. Er „fasset sie auf, allein mit lesen leichtlich, ohn allen mündtlichen bericht“, wie er 1553 in der Wortrechnung erzählt[2]), doch müssen wir annehmen, dass er damals, wenn nicht früher, mit anderen mathematischen Schriften, welche er in einem schon 1544 gedruckten Werke, der Arithmetica integra, da und dort erwähnt, sich gründlich bekannt machte. Dort ist das Rechenbuch Adam Riese's angeführt[3]); dort Schriften von Albrecht Dürer[4]), dort die euklidischen Elemente in der Bearbeitung durch Campanus[5]). Griechisch verstand Stifel nicht und bediente sich dafür des Rathes von Männern wie Dionysius Roner von Esslingen, Johann Heinrich Mayer von Bern, Adolf von Glauburgk von Frankfurt[6]). Rudolff's Coss beschäftigte ihn jedenfalls am längsten, volle 14 Jahre, und diente ihm als Anknüpfungspunkt für eigene wissenschaftliche Untersuchungen, welche nach und nach im Drucke erschienen.

Zuerst kam die schon genannte Arithmetica integra von 1544 heraus, dann die deutsche Arithmetica von 1545, endlich die durch zahlreiche Zusätze und die gleichfalls schon genannte nachtragsweise

---

[1]) Strobel, Neue Beiträge zar Litteratur besonders des XVI. Jahrhunderts. Ersten Bandes erstes Stück. Nürnberg und Altdorf 1790. — Realencyclopädie für protestantische Theologie und Kirche (II. Auflage) Bd. XIV, 702—706 (Leipzig 1884). — Allgemeine deutsche Biographie. [2]) Wortrechnung fol. B 1 recto. [3]) *Arithmetica integra* fol. 226 verso. [4]) Ebenda fol. 211 recto. [5]) Ebenda fol. 104 verso und häufiger. [6]) Ebenda fol. 143 verso.

gedruckte Wortrechnung vermehrte zweite Auflage der Rudolff'schen Coss von 1553. Von diesen Schriften haben wir zu reden[1]).

Die Arithmetica integra erschien bei dem damals berühmtesten Buchdrucker Johannes Petreius in Nürnberg, mit welchem Stifel, damals Pastor der kleinen Gemeinde Holzdorf bei Wittenberg, durch Vermittelung des Wittenberger Professors Justus Jonas in Verbindung getreten war[2]), während ein zweiter Professor der gleichen Universität, der berühmte Melanchthon, eine Vorrede zu dem Werke verfasste (S. 409), welche den hohen Werth der Arithmetik in ein glänzendes Licht zu stellen bestimmt war. Den Namen Arithmetica integra hatte Milichius vorgeschlagen[3]), welcher seit 1524 erst als Professor der Philosophie, in welcher Eigenschaft er auch die ersten mathematischen Vorlesungen in Wittenberg hielt[4]), dann der Medicin dieser Universität angehörte und dem engeren Freundeskreise Stifel's beigezählt werden muss. Milichius war es auch, welcher Stifel mit guten Gründen die Ueberzeugung beibrachte, das Wort Algebra stamme von dem Astronomen Geber, dem Erfinder derselben[5]). In das schon druckfertige Manuscript hat Stifel auf ausdrücklichen Wunsch des Petreius noch die Regula falsi hineingearbeitet[6]) und mancherlei Veränderungen anbringen müssen, welche den Druck noch weiter herumzogen, während die Niederschrift schon vorher volle fünf Jahre fertig dagelegen hatte[7]). Das Werk besteht aus drei Büchern, von denen das 1. von den rationalen, das 2. von den irrationalen Zahlen, das 3. von der Algebra handelt.

Am meisten Eigenthümlichkeiten zeigt das 1. Buch, auf welches auch mit Recht meistens ziemlich ausschliesslich eingegangen wird, wo es sich um die Würdigung Stifel's handelt. Aus diesem 1. Buche sind es dann selbst wieder zwei Stellen, die besonders hervorgehoben zu werden pflegen. Die erste Stelle, zu deren Ergänzung allerdings Stellen des 3. Buches beigezogen werden müssen, handelt von dem Nutzen, den es gewähre, immer einer arithmetischen Progression eine geometrische entsprechen zu lassen[8]). Das ist derselbe Gedanke,

---

[1]) Ueber Michael Stifel als Mathematiker vergl. Kästner I, 112—128 und 163—184. — Cantor, Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus. Zeitschr. Math. Phys. II, 353—376. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 60—74. — Treutlein, Deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft S. 17—20 und häufiger. — Giesing, Michael Stifel's *Arithmetica integra* I. Theil (Döbeln 1879). — Unger S. 58 und häufiger. [2]) *Arithmetica integra* fol. 102 recto. [3]) Ebenda fol. 93 recto. [4]) Poggendorff II, 150. [5]) *Arithmetica integra* fol. 226 verso zu vergleichen mit 30 recto, 55 recto, 231 verso u. s. w. [6]) Ebenda fol. 93 recto. [7]) Ebenda in dem angehängten Druckfehlerverzeichnisse. [8]) *Sequitur utilis quaedam tractatio, ut progressioni Arithmeticae*

dem wir bei Nicolas Chuquet, dem wir bei deutschen Cossisten begegnet sind, für welchen wir einen italienischen Ursprung vermuthet haben. Also ein Erfinderrecht auf den Gedanken kann man für Stifel unter keinen Umständen in Anspruch nehmen. Ist es aber der alte Gedanke in seiner alten Form? Diese Frage dürfte zu verneinen sein. Stifel sucht überall einen praktischen Gewinn aus dem Gedanken zu ziehen, wie er diesem Nutzen auch in der Ueberschrift *utilis tractatio* genügende Bedeutung beilegte. Schon die Thatsache, dass a, $a+d$, b, $b+d$ (um allgemeine Symbole zu gebrauchen) dem Gesetze $(b+d) = b + (a+d) - a$ gehorchen, lässt ihn folgern[1]), dass man das 4. Glied einer Regeldetri finden werde, wenn man das Product des 2. und 3. Gliedes durch das 1. dividire, während bei der sogenannten umgekehrten Regeldetri die Vorschrift nur dahin zu ändern sei, dass man das Product des 1. und 2. Gliedes durch das 3. dividire. An späterer Stelle ist die arithmetische wie die geometrische Reihe als nach beiden Seiten fortsetzungsfähig gekennzeichnet. Eine beispielsweise Versinnlichung hat folgende Gestalt:

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

und es sei möglich, sagt Stifel hier ausdrücklich[2]), an dieser Stelle ein ganz neues Buch von den wunderbaren Eigenschaften der Zahlen einzuschalten, eine Versuchung, welcher er jedoch sich entziehen und mit geschlossenen Augen von dannen gehen müsse. So sehr hat Stifel mit dem Instincte des Genies die Fruchtbarkeit des Begriffes empfunden, welchen wir den des Logarithmirens nennen dürfen. Noch ist es nicht Licht geworden, aber deutlicher treten doch die Umrisse bei Stifel als bei Chuquet hervor, und mag Stifel der Gedanke von Anderen überkommen sein, mag er, wie es uns mit Rücksicht auf die von ihm studirten Werke wahrscheinlicher däucht, in seinem Geiste neu entstanden sein, man sieht, dass die Erfindung der Logarithmen nun nicht gar lange mehr auf sich warten lassen wird. Ein Kunstausdruck tritt insbesondere hier bei Stifel auf, der später in erweitertem Sinne allgemeines Bürgerrecht erwerben sollte. Die Glieder der arithmetischen Reihe heissen Exponenten der zugehörigen Glieder der geometrischen Reihe.

respondeat Geometrica progressio. Arithmetica integra fol. 35 recto zu vergleichen mit fol. 235 verso und besonders 249 verso.

[1]) *Arithmetica integra* fol. 36 recto. [2]) Ebenda fol. 249 verso: *Posset fere hic novus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subducam, et clausis oculis abeam.*

Wesentlich vollkommener sind die Anschauungen, welchen Stifel an der zweiten stets hervorgehobenen Stelle Ausdruck verleiht[1]). Die Zahlen, von denen er dort sagt, dass sie zu ihren besonderen Wurzelausziehungen gehören, sind nichts anderes als die Binomialcoefficienten. Es erscheint uns als sehr müssige Spitzfindelei, zweifeln zu wollen, ob Stifel wirklich das Bewusstsein gehabt habe, dass diese Zahlen zur Ausrechnung von $(a+b)^n$ Dienste leisten, weil er nur deren Anwendung auf die Ausziehung $n$ter Wurzeln lehre. Gewiss ist diese Behauptung unbestreitbar wahr, aber welcher deus ex machina konnte Stifel mit den bei den Wurzelausziehungen unentbehrlichen Binomialcoefficienten bekannt gemacht haben, wenn er dieselben nicht durch Potenzerhebungen sich bildete? Fragt man aber, warum Stifel in den Namen, den er den Binomialcoefficienten beilegt, von der Potenzerhebung schweigt, so liegt die Antwort darauf auf der Hand. Dass etwa $12^4 = 20736$, konnte nach der Formel

$$(10+2)^4 = 10^4 + 4 \cdot 10^3 \cdot 2 + 6 \cdot 10^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 10 \cdot 2^3 + 2^4$$

ausgerechnet werden, aber bequemer war das Verfahren allmäliger Multiplication, und so konnte eigentlich nicht behauptet werden, die Zahlen 4, 6 seien der Potenzerhebung eigenthümlich. Umgekehrt konnte $\sqrt[4]{20736} = 12$ nur von jener Entwickelung aus ermittelt werden, der Wurzelausziehung waren mithin die Zahlen 4, 6 wirklich eigenthümlich. Stifel wusste, dass er hier eine Erfindung gemacht habe, eine Erfindung, deren Bedeutung er zu betonen wusste. Die Vorrede zum 2. Buche war es, in welcher er folgendermassen sich aussprach[2]). Er habe die Regeln der Wurzelausziehung erheblich vermehrt, weit über das hinaus, was Apianus vielleicht wusste, aber jedenfalls nicht lehrte, denn dessen Vorschriften erstreckten sich nicht weiter als darauf, wie man bei der Ausziehung 5. und 7. Wurzeln Gruppen von je 5 und 7 Ziffern zu bilden habe. „Ich werde, sagt Stifel an der ersten Stelle, wo die Binomialcoefficienten auftreten[3]), die Erfindung durch folgende Tabelle mittheilen, deren Fortsetzung ins Unendliche jeder leicht einsieht, wenn er erst die Art sie herzustellen erkannt hat." Dann folgt die Tabelle bis zu den Binomialcoefficienten der 17. Potenz. (Siehe S. 434.)

Das Gesetz, nach welchem die Zahlen gebildet sind, wird ausführlich erörtert. Wir können es mit Hilfe jetzt gebräuchlicher Zeichen kurz dahin aussprechen, dass Stifel von dem Satze

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

[1]) *Arithmetica integra* fol. 44 verso: *De inventione numerorum, qui peculiariter pertinerent ad suas species extractionum.* [2]) Ebenda fol. 102 recto. [3]) Ebenda fol. 44 verso.

seinen Ausgangspunkt nahm. Beim Gebrauch zur Wurzelausziehung ist jede Horizontalzeile zu vervollständigen, indem man ihre Zahlen rückläufig, *retrograde*, wiederholt, mit Ausnahme der letztgeschriebenen Zahl, welche sich nicht wiederholt. Bei grader Anfangszahl giebt das eine ungrade, bei ungrader eine grade Anzahl von Gliedern[1]).

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Sind diese beiden Stellen des 1. Buches der Arithmetica integra, und besonders die zweite, diejenigen, welche als die folgewichtigsten sich erwiesen haben, so fehlt es keineswegs an anderen gleichfalls recht bemerkenswerthen Dingen, auf deren einige noch aufmerksam gemacht werden mag. Schon Leonardo von Pisa hat (S. 11) Theilbarkeitsmerkmale für die Theilung durch 2, 3, 5, 9 aufgestellt. In Deutschland hat vermuthlich Christoph Rudolff in seinem Rechenbuche von 1526 die gleichen Regeln[2]) zuerst mitgetheilt. Stifel ging darüber hinaus, indem er[3]) Theilbarkeitsregeln für jeden der Theiler 1 bis 10 angab. Die Regel für 7 dürfte ihm angehören. Sie ist richtig, wenn auch zu eng. Sie behauptet nur, 7 theile jede Zahl, welche die Summe von 3, 6, 9, 12 Gliedern einer geometrischen Progression vom Gliederquotienten 2, 4 oder 16 sei. — Bei Besprechung vollkommener Zahlen schreibt Stifel vor[4]), man solle die geometrische Reihe

4 . 8	16 . 32	64 . 128	256 . 512	etc.

[1]) *Arithmetica integra* fol. 46 recto. [2]) Unger S. 84. [3]) *Arithmetica integra* fol. 8 verso. [4]) Ebenda fol. 10 verso.

bilden und wie in dem Schema, welches wir ihm entnehmen, je zwei Glieder derselben von 4 und 8 beginnend zu einer Gruppe vereinigen; das Product der kleineren Zahl in die um 1 verringerte grössere Zahl sei alsdann stets eine vollkommene Zahl. Wir heben diese Behauptung hervor, weil sie einen Irrthum enthält. Euklid IX, 36 wusste ganz gut, dass diese Regel nur insofern Bestand hat, als jene um 1 verringerte grössere Zahl eine Primzahl ist, und wenn Stifel diese einschränkende Bedingung wegliess, so glaubte er offenbar $2^{2n+1}-1$ sei immer Primzahl, ein Irrthum, von welchem er sich schon bei dem letzten Zahlenpaare seines Schemas hätte überzeugen können, da $511 = 7 \cdot 73$ und demzufolge $256 \cdot 511 = 130816$ keine vollkommene Zahl ist. Der Begriff der vollkommenen Zahl führt dann weiter dazu, die Theiler einer Zahl aufzusuchen und ihre Anzahl zu ermitteln, was allerdings zunächst[1]) nur durch gewisse Versuche in Erfahrung gebracht wird. An einer späteren Stelle[2]) ist die Anzahl der Theiler eines Productes von n Primzahlen zu $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$ angegeben, wobei zwar die 1, aber nicht die Zahl selbst als Theiler mit eingerechnet ist. Das Interessante bei diesem letzten Satze besteht nicht bloss darin, dass Stifel ihn überhaupt kennt, sondern dass er ihn als Satz des Cardanus bezeichnet und dadurch zeigt, dass er eine Schrift dieses letzteren italienischen Mathematikers bereits gesehen hatte, welche gleichzeitig mit der Arithmetica integra bei Petreius im Drucke befindlich war. Diametralzahlen nennt Stifel[3]) das Product zweier Zahlen, deren Quadratsumme ein rationales Quadrat ist. Anders ausgedrückt kann man sagen, eine Stifel'sche Diametralzahl sei der doppelte Flächeninhalt eines pythagoräischen Dreiecks, und da jedes Sehnendreieck, dessen eine Seite Kreisdurchmesser ist, ein rechtwinkliges Dreieck sein muss, so giebt es viele rechtwinklige Dreiecke zu derselben Hypotenuse und mehr als eine Diametralzahl mit gleicher Quadratsumme ihrer beiden Factoren. Es ist z. B. $65^2 = 25^2 + 60^2 = 39^2 + 52^2$, also sind $25 \cdot 60 = 1500$ und $39 \cdot 52 = 2028$ Diametralzahlen von gleichem Diameter[4]). Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass Stifel's numerus diametralis etwas ganz anderes ist, als der *διάμετρος* Theon's von Smyrna (Bd. I, S. 407), der einen Näherungswerth der irrationalen Diagonale eines Quadrates darstellt, während bei Stifel die

[1]) *Arithmetica integra* fol. 11 verso bis 12 verso. [2]) Ebenda fol. 101 recto. [3]) Ebenda fol. 14 verso flgg. [4]) Ebenda fol. 15 verso: *Possibile autem est, unam diametrum esse plurium diametralium numerorum diametrum, ut satis ostenditur hac figura sequenti,* worauf ein Kreis mit dem Durchmesser 65 und den beiden Rechtecken folgt, deren Diagonale der Durchmesser ist, während die Seiten 25 und 60, beziehungsweise 39 und 52 sind.

rationale Diagonale eines Rechtecks den Ausgangspunkt liefert. Um so mehr ist zu vermuthen, dass Stifel aus sich selbst auf diese Untersuchung kam, die er so weit führt, dass er behauptet, ein Product ab sei dann und nur dann Diametralzahl, wenn

$$a : b = (2n^2 + 2n) : (2n + 1)$$

oder

$$a : b = (4n^2 + 8n + 3) : (4n + 4).$$

Natürlich sagt er solches nicht in den hier gebrauchten allgemeinen Symbolen, sondern so, dass er die Verhältnisszahlen in einer der Formen $1\frac{1}{3}, 2\frac{2}{5}, 3\frac{3}{7} \cdots$ oder $1\frac{7}{8}, 2\frac{11}{12}, 3\frac{15}{16} \cdots$ sucht. In der That ist

$$(2n^2 + 2n)^2 + (2n + 1)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$$

und

$$(4n^2 + 8n + 3)^2 + (4n + 4)^2 = (4n^2 + 8n + 5)^2.$$

Wieder eine Stifel eigenthümliche Aufgabe ist die von der circulären Bezifferung[1]), *de numeratione circulari*. Ihr Wesen besteht darin, dass die $4n - 4$ Randfelder eines aus n^2 kleinen Quadraten bestehenden grösseren Quadrates mit Ordnungsziffern versehen werden sollen, indem man an irgend einem Randfelde beginnend nach Abzählung einer jeweils bestimmten Felderzahl in bestimmter Richtung eine Ordnungsziffer einsetzt, bis sämmtliche Felder mit Ausnahme dessen, bei welchem das Abzählen angefangen hat, beziffert sind; man fragt, wie viele Felder jedesmal abzuzählen sind, damit die Aufgabe erfüllt werde, welche also eine Art von Schliessungsproblem ist. Weiter bemühte sich Stifel[2]) um die Herstellung von Zauberquadraten. Nachdem Inder, Chinesen, Araber und Byzantiner (Bd. I, S. 594, 633, 697, 480) mit dieser Zahlenspielerei sich beschäftigt hatten, fand sie im XV. Jahrhunderte, wie es scheint, Eingang in Deutschland. Aus jener Zeit stammt ein Quadrat der ersten 25 Zahlen[3]). Albrecht Dürer benutzte im Jahre 1514 in seinem „Melancholie“ genannten Holzschnitte das Quadrat der ersten 16 Zahlen in der Form:

[1]) *Arithmetica integra* fol. 16 verso. Vergl. Giesing l. c. S. 45—50.
[2]) Ebenda fol. 24 verso bis 30 recto. Vergl. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (Leipzig 1876), Kap. IV Historische Studien über die magischen Quadrate (besonders S. 220—228) und Giesing l. c. S. 56—61, endlich Fontès, *Sur les carrés à bordure de Stifel* in den Veröffentlichungen der Association Française pour l'avancement des sciences (Congrès de Bordeaux 1895). [3]) Curtze brieflich.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Agrippa von Nettesheim (1487—1535) hat alsdann in seinem Werke *De occulta philosophia* (1533) eine ganze Anzahl von Zauberquadraten sowohl mit grader als ungrader Seitenzahl beschrieben. Jedem Planeten ist ein bestimmtes Zauberquadrat eigen und hat entsprechende geheimnissvolle Eigenschaften. Der erste Mathematiker, welcher in Deutschland mit Zauberquadraten sich beschäftigte, war Adam Riese (S. 422). Er that dieses am Ausführlichsten in seiner Rechnung nach der Lenge von 1550, welche mithin späteren Datums als die Arithmetica integra ist, womit unsere Bezeichnung Riese's als erster deutscher Mathematiker, welcher die Frage in Angriff nahm, hinfällig würde, aber Riese beruft sich in diesem späteren Werke ausdrücklich auf das Rechenbuch von 1522, in welchem er gleichfalls schon eine Vorschrift zur Bildung von Zauberquadraten gegeben habe. Wir haben nichts weniger als die Absicht, auf den für die Gesammtentwickelung der Mathematik sehr nebensächlichen Gegenstand näher einzugehen, aber bemerken müssen wir doch, dass Riese's Regel und die nach ihr gebildeten Quadrate von denen Stifel's verschieden sind und die Selbständigkeit beider Schriftsteller von einander verbürgen. Damit ist auch für Riese eine gewisse zahlentheoretische Begabung festgestellt, wenn auch nicht in dem hohen Grade wie für Stifel, dessen dahin sich neigende Geistesrichtung durch alle Einzelheiten, welche wir angaben, bezeugt wird. Wir können uns dafür auch auf ein Kunststückchen Stifel's berufen[1]), welchem wir nirgend anderswo begegnet zu sein uns erinnern können. Man lasse eine n- z. B. zweiziffrige Zahl x denken, und merke sich eine Zahl a von der Beschaffenheit, dass $a(a+1)$ eine $n+1$-ziffrige Zahl werde, z. B. $a = 10$, $a(a+1) = 110$. Dann lasse man sich die Reste r_1, r_2 sagen, welche die Divisionen $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{a+1}$ übrig lassen. Bildet man alsdann für sich $r_1(a+1) + r_2(a^2) = S$, so ist nach Stifel's Behauptung x immer der Rest, welcher bei der Division $\frac{S}{a(a+1)}$ übrig bleibt. Die Richtigkeit seiner Vorschrift ist unter Anwendung des Symbols $E\left(\frac{p}{q}\right)$ zur Be-

[1]) *Arithmetica integra* fol. 38 verso.

zeichnung der grössten in $\frac{p}{q}$ steckenden ganzen Zahl leicht zu erweisen. Offenbar lassen sich die Reste r_1, r_2 als

$$r_1 = x - a \cdot E\left(\frac{x}{a}\right), \quad r_2 = x - (a+1)\,E\left(\frac{x}{a+1}\right)$$

schreiben, und alsdann folgt

$$\begin{aligned} S &= (a+1)x - a(a+1)E\left(\frac{x}{a}\right) + a^2x - a^2(a+1)E\left(\frac{x}{a+1}\right) \\ &= x + a(a+1)\left[x - E\left(\frac{x}{a}\right) - aE\left(\frac{x}{a+1}\right)\right] \end{aligned}$$

und damit ist Stifel's Regel schon gerechtfertigt[1]), sofern der in eckigen Klammern stehende Ausdruck nicht negativ ausfallen kann. Das ist aber unmöglich, denn $a(a+1) > x$ und S ist seiner Entstehung nach positiv. Wäre also das ganzzahlige

$$x - E\left(\frac{x}{a}\right) - aE\left(\frac{x}{a+1}\right)$$

negativ, so würde es mit $a(a+1)$ vervielfacht absolut genommen grösser als x sein, mithin ein negatives S hervorbringen. Ob freilich Stifel bereits eine derartige Ueberlegung anstellte, dafür sind wir ohne jeglichen Anhaltspunkt.

Das 2. Buch ist, wie wir schon ankündigten, den **Irrationalen** gewidmet. Gleich zu Anfang steht der wichtige Satz: *Impossibile est ut ex multiplicatione fracti in se fiat numerus integer*[2]), aus der Multiplication eines Bruches mit sich selbst könne niemals eine ganze Zahl entstehen. Gehe nämlich schon der Nenner des Bruches nicht in dessen Zähler auf, so könne noch weniger das Quadrat, der Kubus u. s. w. des Nenners in dem Quadrate, dem Kubus u. s. w. des Zählers aufgehen. Kein Irrationales könne demnach einem Rationalen gleich sein, wenn es auch zwischen zwei rationale Zahlen falle. Euklid leugne deshalb die Zahleneigenschaft des Irrationalen und handle in seinem ganzen X. Buche nur von irrationalen Strecken. Stifel schliesst sich soweit an, dass sein ganzes zweites Buch der Arithmetica integra als Erläuterung zu jenem schwierigen euklidischen Buche aufgefasst werden kann. Eine Frage, mit welcher Stifel sich sehr eingehend beschäftigt hat, ist die nach den **Gründen der**

[1]) Die gleichzeitig zu erfüllenden Congruenzen $x \equiv r_1 \pmod{a}$ und $x \equiv r_2 \pmod{a+1}$ erfordern $x \equiv (a+1)r_1 - ar_2 \pmod{a(a+1)}$. Addirt man, um das mögliche Auftreten einer negativen Zahl zu vermeiden, rechts noch $a(a+1)r_2$, so erscheint:

$$x \equiv (a+1)\,r_1 + a^2r_2 \pmod{a(a+1)}.$$

Aber solcher Schlüsse war Stifel gewiss nicht fähig. [2]) *Arithmetica integra* fol. 103 verso.

Verschiedenheit der Euklidübersetzung des Campanus von derjenigen, welcher unmittelbar die Theon'sche Ausgabe zu Grunde lag[1]). Es sei schon möglich, dass erstere mitunter die richtigere Reihenfolge der Sätze darbiete als Theon, in dessen Hände die euklidischen Elemente doch erst nach mehreren Jahrhunderten gelangt seien, und euklidische Sätze seien doch kein Evangelium, ein freieres Urtheil sei daher statthaft. Die Beweise vollends hielt Stifel auf die Aussage seiner des Griechischen kundigen Freunde hin[2]) für Theonisches Beiwerk.

Bei diesen im 2. Buche gegebenen Erläuterungen — oder sollen wir sie eine algebraische Uebersetzung des geometrischen Textes nennen? — sind verschiedene Zeichen in Anwendung. Vor allem erscheinen hier die Zeichen + und —, dann aber auch Wurzelzeichen von verschiedenen Wurzelexponenten, sämmtlich durch $\surd$ dargestellt, welchem alsdann ein die Art der Wurzel näher bezeichnender Buchstabe folgt[3]). Die Wurzeln von der zweiten bis zur dreizehnten sehen demnach so aus:

√ʒ, √cℭ, √ʒʒ, √ß, √ʒcℭ, √*b*ß, √ʒʒʒ, √cℭcℭ, √ʒß, √*c*ß, √ʒʒcℭ, √*d*ß.

Bezieht sich ein Wurzelzeichen auf additiv oder subtractiv vereinigte Grössen, so hat es einen Punkt hinter sich z. B.

√ʒ · √ʒ 20 — 4 — √ß 8 = $\sqrt{\sqrt{20} - 4 - \sqrt[5]{8}}$.

Beim Rechnen mit den Zeichen + und — wird die Regel aufgestellt[4]): *A ponit M et S ponit S.* Das ist eine von den Gedächtnisshilfen, an welchen die Zeit reich war, und von welchen zahlreiche Beispiele anzuführen nicht schwer hielte. Der Sinn der Regel ist der, dass bei der **Addition** ungleichbezeichneter Zahlen **Major**, die grössere Zahl, den Ausschlag gebe, bei der **Subtraction** solcher Zahlen dagegen immer das Vorzeichen des **Superior**, der oben stehenden Zahl, zu nehmen sei.

Uebrigens giebt das 2. Buch auch Veranlassung zu Aeusserungen Stifel's über geometrische Dinge. Er verweist für die Netze von Vielflächnern auf Albrecht Dürer[5]) und bringt in dem Druckfehlerverzeichnisse am Ende des ganzen Bandes diese Netze selbst. Er verweist ausserdem einmal[6]) auf eine Geometrie, welche er selbst zu schreiben beabsichtigte. Von einer Ausführung dieser Absicht ist nichts bekannt, wir haben indessen keinen Grund, das Unterbleiben

[1]) *Arithmetica integra* fol. 158 verso. [2]) Ebenda fol. 143 verso. [3]) Ebenda fol. 109 recto und häufiger. [4]) Ebenda fol. 124 recto. [5]) Ebenda fol. 211 recto. [6]) Ebenda fol. 226 recto: *Sed de his omnibus suo loco in Geometria mea dicam latius.*

besonders zu beklagen, wenn wir die einzige Stelle beachten, an welcher Stifel als eigentlicher Geometer sich kundgiebt[1]). Zwischen (Figur 80) AB und dem doppelt so grossen AC, welches zu AB senkrecht gezeichnet ist, sollen zwei mittlere Proportionalen eingeschaltet werden. Stifel halbirt AC in D, AD in E, AE in F, EF in I und beschreibt um I als Mittelpunkt mit IC als Halbmesser den Halbkreis $CLSK$. Dann wird um M, Halbirungspunkt der BL, als Mittelpunkt mit ML als Halbmesser der Halbkreis LGB beschrieben und behauptet, es sei

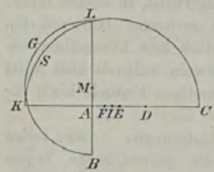


Fig. 80.

$$AB:AK = AK:AL = AL:AC.$$

Der Irrthum besteht, wie leicht ersichtlich, darin, dass angenommen wird, der zweite Halbkreis gehe gleichfalls durch den Punkt K, was nicht der Fall ist. Ist nämlich $AB = a$, $AC = 2a$, so ist

$$CI = \frac{13}{8}a, \quad AK = \frac{5}{4}a, \quad AL = \sqrt{2a \cdot \frac{5}{4}a} = a\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Schneidet nun der Halbkreis LGB die verlängerte CA in K', so ist $AK' = \sqrt{AB \cdot AL} = a\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$ und sollte K' mit K zusammenfallen, so müsste $\frac{5}{4}a = a\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$ sein oder $\frac{5}{4} = \sqrt[3]{2}$. Nicht viel vertrauenerweckender ist ein Anhang zum zweiten Buche über die Quadratur des Kreises[2]), in welchem der mathematische Kreis von dem physischen unterschieden und diesem die Quadrirbarkeit zugeschrieben, jenem aber desshalb abgesprochen wird, weil der Kreis ein Unendlichvieleck sei, die unendliche Zahl aber nicht angegeben werden könne.

Im 3. Buche der Arithmetica integra ist die Algebra enthalten. Man habe Regeln in Fülle aufgestellt und ihnen lächerliche Namen beigelegt[3]). Da gab es *Regulae aequalitatis*, *separationis*, *transversionis*, *commixtionis*, *positionis*, *legis*, *augmenti*, *decrementi*, *pluris*, *residui*, *collectionis*, man könne sie alle zusammen als Menschenquälerei, *vexationes populi*, bezeichnen. Statt dessen genüge die einzige Regel des Algebras, welche so lautet[4]): „Ist eine unbekannte Zahl zu finden, so setze man statt ihrer 1 Coss (wir schreiben dafür 1 ℛ), und ist alsdann eine Gleichung hergestellt, so bringe man sie auf eine wo möglich einfachere Form. Dann theile man durch die

[1]) *Arithmetica integra* fol. 119 verso flgg. Vergl. Treutlein, Die deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft S. 53. [2]) Ebenda fol. 224 recto bis 226 recto. [3]) Ebenda fol. 227 recto. [4]) Ebenda fol. 227 verso.

mit der höchsten cossischen Grösse verbundene Zahl das ihr Gleichgesetzte mit seiner Benennung. So erscheint immer die unbekannte Zahl entweder als der Quotient oder als eine Wurzel desselben. Ist aber eine Wurzel auszuziehen, so giebt das diejenige cossische Grösse, von welcher der Divisor hergenommen wurde, durch ihr cossisches Zeichen schon zu erkennen.“

Wir werden uns später überzeugen, dass Stifel hier in einiger Abhängigkeit von Cardanus sich befindet. Im Uebrigen muss an das Zeichen ℛ eine Bemerkung geknüpft werden. Dass es aller Wahrscheinlichkeit nach als der Buchstabe r zu deuten ist, haben wir gesagt, als es zum ersten Male vorkam, aber warum r? Die nächstliegende Vermuthung, unterstützt durch die Worte *1 Coss* (*nos autem ponimus 1 ℛ*), wird die sein an *res* als Uebersetzung von *Coss*, *cosa* zu denken, dessen Anfangsbuchstabe gewählt wurde; aber nichts wäre irriger. Viele Stellen, an welchen neben ℛ das Wort radix abgedruckt ist, beweisen dass jenes Zeichen so zu deuten ist, und ganz unwiderlegbar ist in dieser Beziehung eine Stelle, wo es heisst *quaerenda erit 1 ℛ de quotiente*[1]), man suche die Wurzel des Quotienten, wo also ℛ überhaupt kein Symbol der Unbekannten, sondern einfach eine Abkürzung für *radix* ist.

Die eine Regel, deren Wortlaut wir angegeben haben, ersetze, sagt Stifel[2]), die 8 Regeln, welche Rudolff, sowie die 24, welche Andere aufzustellen für nöthig fanden, und sie ist unschuldig daran, wenn man eine durch sie geforderte Operation nicht auszuführen im Stande ist, wie z. B. wenn man aus $x^3 = 5x^2 + 192$ nicht weiss $x = 8$ abzuleiten. Zweite Wurzeln, *radices secundae*, werden weitere in der Gleichung vorkommende Unbekannte genannt[3]). Als Zeichen für sie sind neben ℛ die Initialen $A, B, C, D\ldots$ in Gebrauch, aber man soll sie nur dann anwenden, wenn es nicht möglich ist mit einer Unbekannten auszukommen[4]). Die höheren Potenzen der zweiten Wurzeln heissen Aʒ, Aꝯ, Aʒʒ u. s. w. Die so zu sagen regelrechte Anordnung der *aequatio reducta* ist nach Stifel's allgemeiner Vorschrift die, bei welcher die höchste Potenz der Unbekannten mit positivem Zahlencoefficienten auf der einen, alles Uebrige auf der andern Seite steht. Stifel benutzt aber auch jede andere Anordnung, ja in einem Falle bringt er die Gleichung auf Null[5]),

116 + √ʒ 41472 — 18 ℛ — √ʒ 648ʒ aequantur 0,

[1]) *Arithmetica integra* fol. 233 verso. Man vergleiche ferner 235 verso, 267 verso u. s. w. [2]) Ebenda fol. 250 verso. [3]) Ebenda fol. 251 verso. [4]) Ebenda fol. 252 verso: *Persuade tibi peccatum esse, si per plura fiunt quae possunt fieri per pauciora.* [5]) Ebenda fol. 283 recto.

wahrscheinlich das erste solche Vorkommen und damit ein allerdings durchaus unbewusstes Muster für die Zukunft.

Wenn wir sagten, Stifel habe jede Anordnung der Gleichung benutzt, so müssen wir nachträglich eine einzige Anordnung davon ausnehmen. Es kommt nie vor, dass lauter Glieder mit positiven Vorzeichen solchen mit ausschliesslich negativen Vorzeichen gleich gesetzt werden, weil solche Gleichungen durch positive Wurzelwerthe nicht erfüllt werden können, für Stifel aber nur positive Gleichungswurzeln einen Sinn haben. Auch bei den quadratischen Gleichungen hat in seiner Behandlung nur die Form $ax^2 = bx - c$ die beiden Wurzeln $x = \frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$, weil beide positiv werden; dass $4ac > b^2$ sein könnte, wird gar nicht in Betracht gezogen. Doch bedurfte dieses kaum der Hervorhebung, denn diese Beschränkung des Wurzelbegriffes ist allen deutschen Cossisten gemein, wenn wir auch nicht für nothwendig hielten, bei jedem einzelnen Schriftsteller besonders darauf hinzuweisen.

Was Stifel auszeichnet, oder womit er wenigstens aus dem Kreise der deutschen Cossisten heraustrat, das ist die Erklärung der negativen Zahl als kleiner als Null, welche mit ihm ihren Einzug in die Mathematik hielt, um Jahrhunderte lang nicht mehr aus ihr zu verschwinden. *Finguntur numeri minores nihilo ut sunt* $0-3$, $0-8$ *etc.* sagt Stifel schon in seinem 1. Buche[1]), und im 3. Buche häufen sich die Stellen[2]), wo die negativen oder mit Stifel zu reden die absurden Zahlen für kleiner als Null erklärt werden. Da heisst es: 0 *i. e. nihil* (*quod mediat inter numeros veros et numeros absurdos*). Da wird darauf hingewiesen, dass bei absurden Zahlen Alles absurd oder verkehrt, *absurde sive inverse*, geschehe; bei wirklichen Zahlen, *in veris numeris*, bringe die Subtraction Verminderung hervor, bei absurden dagegen Vermehrung. Ob bei dieser Auffassung an eine Abhängigkeit von Paciuolo (S. 319) zu denken ist, scheint sehr zweifelhaft.

Zum Schlusse des 3. Buches ist eine ganze Anzahl von schwierigeren algebraischen Aufgaben des Cardanus behandelt. Bald sind es solche, die auf Gleichungen 4. und 3. Grades führen, bald solche, die nur 2. Grades sich dadurch auszeichnen, dass es auf geschickte Wahl der Unbekannten ankommt. Die Gleichungen 4. Grades werden so gelöst, dass beide Seiten der Gleichung zu vollständigen Quadraten ergänzt werden, um dann durch beiderseitige Wurzelausziehung eine nur noch quadratische Gleichung zu liefern. Bei den Gleichungen

[1]) *Arithmetica integra* fol. 48 recto. [2]) Ebenda fol. 248 verso bis 250 verso.

3. Grades findet die Zurückführung auf einen niedrigeren Grad dadurch statt, dass wieder beiderseitige Ergänzungen vorgenommen werden, welche diesmal keine Wurzelausziehung, aber die Division durch einen beiden Seiten gemeinsamen Factor gestatten. Zurückführung von einem höheren auf einen niedrigeren Grad ist also der Zweck, aber ein einheitliches Verfahren zur Erreichung des Zweckes ist nicht vorhanden, sondern immer neue besondere Kunstgriffe müssen geübt werden.

Nur ein Jahr später als die Arithmetica integra erschien 1545 bei dem gleichen Drucker Johann Petreius in Nürnberg die „Deutsche Arithmetica inhaltend die Haussrechnung, deutsche Coss, Kirchrechnung". Das Titelblatt enthält noch eine Lobpreisung des Inhaltes in folgender Fassung: „Mein lieber Leser, Nach dem die Coss (welche ist ein Kunstrechnung der gantzen Arithmetick) bissher den Deutschen mit vil frembden worden, vermangt und verblend, schwer ist gewesen, So weit sie hie mit new erfundenen vortheil vnnd Regeln, sehr leicht vnd kurtz herfur bracht vnd gelehrt vnd mit guten Deutschen bekantlichen worten vnd Exempeln erweyset. Das ander so hierin gelert wird von der Haussrechnung vnd Kirchrechnung bringt seinen bericht genugsam mit sich. Alles durch Herr Michael Stifel, auff eine besondere newe vnd leichte weis gestellet." Ist schon diese Empfehlung des Buches und die deutsche Sprache, in welcher es verfasst ist, dazu angethan, einen anderen Leserkreis als denjenigen, für welchen Stifel seine Arithmetica integra geschrieben hatte, vermuthen zu lassen, so wird die Vermuthung zur Gewissheit durch den Ausspruch[1]) „sollichen geübten leuthen schreibe ich hie in diesem büchlin gar nichts, wie ich mich des bedingt hab bey dem anfang". Dem weniger wissenschaftlichen Zwecke entsprechend beschränkt sich Stifel wesentlich auf das Rechnen auf den Linien. Dieses freilich lehrt er in seinem ganzen Umfange, und er zeigt eben so gut, wie man das Halbiren mit Rechenpfennigen vollzieht[2]), als deren Gebrauch zum Wurzelausziehen[3]). Dass das Halbiren sich noch erhielt, während das Verdoppeln abhanden gekommen ist, mag dadurch entschuldigt sein, dass es in der That bei Anwendung von Rechenpfennigen besonders leicht auszuüben war. Lagen Rechenpfennige in grader Anzahl auf einer Linie, so nahm man die Hälfte derselben fort, ein überschiessender einzelner Rechenpfennig wurde auf das darunter befindliche Spacium geschoben[4]). Die Wurzelausziehung auf den Linien hatte Köbel gelehrt (S. 420), aber Stifel

[1]) Haussrechnung fol. 5 recto. [2]) Ebenda fol. 6 recto. Von dem halbiren und vom greyffen der Linien. [3]) Ebenda fol. 43 verso bis 48 verso. [4]) Ebenda fol. 1 verso: Spacium ist ein feld zwischen zweien Linien.

geht über ihn hinaus. Er zeigt nicht bloss an $\sqrt{82573569} = 9087$ die Quadratwurzelausziehung, er lehrt auch die Kubikwurzelausziehung $\sqrt[3]{644972544} = 864$ mittels Rechenpfennigen und versteigt sich sogar bis zu $\sqrt[4]{614656} = 28$. Letzteres Ergebniss wird allerdings in der Gestalt $\sqrt{\sqrt{614656}} = \sqrt{784} = 28$ durch doppelte Quadratwurzelausziehung gefunden, trotzdem an anderer Stelle der Haussrechnung[1]) die Binomialcoefficienten bis zur 16. Zeile, also nur um eine Zeile gegen die Arithmetica integra verkürzt, abgedruckt sind. Man könne, sagt er dabei, die Anwendung der Tabelle wie die Bildung ihrer Zahlen aus einander leicht verstehen, „wer sich aber selbs nich kan drauss verrichten, mag jm solliche zeygen lassen“.

Die Wurzelzeichen sind von denen der Arithmetica integra verschieden. Statt $\sqrt{}$ʒ, $\sqrt{}$ℭ, $\sqrt{}$ʒʒ ist hier z/, $\overset{z}{z}$, $\overset{z}{\underset{z}{z}}$ angegeben[2]). Die Zeichen der Addition und Subtraction sind geblieben. Für Multiplication und Division sind neue Zeichen hinzugekommen[3]): „wie man addiret durch das zeichen + also multipliciret ich durch das zeichen 𝔐 und dividiret durch das Zeichen 𝔇“, wobei es auffallen mag, dass diese letzten dem Wortlaute nach von Stifel selbst erfundenen Zeichen ausser hier, wo sie dem Leser vorgestellt werden, in der ganzen Haussrechnung nicht ein einziges Mal vorkommen.

Ausser dem gemeinen Rechnen, welches „jederman seine Kinder, wenigstens die Knaben, lernen lassen sollte“[4]), wird in einem zweiten Theile auch die deutsche Coss gelehrt, worunter verstanden ist, dass bei der Auseinandersetzung deutsche Ausdrücke und nicht Fremdwörter benutzt werden sollen, von welchen Rudolff's Coss. wimmle[5]). So heisst z. B. die unbekannte Zahl nicht *cosa*, sondern Sum̄. und beim Multipliciren wird diese Silbe nur mehrmals wiederholt, ähnlich wie man es mit Zahlen mache, welche Nullen als Randziffern besitzen[6]). Die Multiplication von 20000 mit 3000 giebt 2 mal 3 oder 6 mit 4 und 3 oder 7 Nullen; die Multiplication von 6 sum sum sum mit 12 sum sum sum giebt 6mal 12 oder 72 sum sum sum sum sum sum. Sollen mehrere ungerechnete d. h. unbekannte Zahlen unterschieden werden, so nenne man sie Sum A, Sum B u. s. w.[7]). Dann wird auf derselben Blattseite fortfahrend die Regel der Coss gegeben, welche natürlich dem Sinne nach mit jener übereinstimmt, die wir der Arithmetica integra entnahmen. Die behandelten Aufgaben führen bis zu gemischten quadratischen Gleichungen[8]).

Endlich schliesst sich an die deutsche Coss noch der dritte Theil

[1]) Haussrechnung fol. 71 verso. [2]) Ebenda fol. 61 verso. [3]) Ebenda fol. 74 recto. [4]) Ebenda, Vorrede. [5]) Ebenda fol. 17 verso. [6]) Ebenda fol. 20 verso. [7]) Ebenda fol. 22 recto. [8]) Ebenda fol. 50 recto flgg.

von der Kirchenrechnung[1]), „die man nennet Computum Ecclesiasticum“. Wir heben aus diesem dritten Theile nur einen deutschen Cisojanus[2]) hervor, d. h. Reimverse, welche für jeden Monat aus so vielen Silben bestehen, als der Monat Tage hat, und in welchen die Hauptfeiertage genannt sind, so dass wieder ihre Anfangssilben mit dem Datum der betreffenden Tage zusammenfallen. Für Juni, oder mit dem von Stifel gebrauchten deutschen Namen für den Brachmonat ist z. B. folgende Strophe vorhanden:

Alweg bald nach Pfingsten
Haben wir den tag am lingsten.
Veyt macht ein kurtzes Metrum
Wie Sant Johannes suche Petrum.

Von den 30 Silben dieser Strophe ist die 15. Veyt, die 24. Sant, die 29. Pet und damit soll gesagt sein Juni habe 30 Tage und am 15. Juni sei Veit, am 24. Johanni, am 29. Peter und Paul. Ueberdies sollen die beiden ersten Zeilen dem Gedächtnisse einprägen, dass Pfingsten und auch der längste Tag in den Monat fallen.

Wir kommen zur dritten von uns zu besprechenden Veröffentlichung Stifel's, zu der Ausgabe der Rudolff'schen Coss von 1553. Wir haben erwähnt, dass zahlreiche Zusätze zu dem vorhandenen Texte von Stifel herrühren, und in diesen Zusätzen begegnen wir Manchem wieder, was in der Arithmetica integra bemerkenswerth erschien. Da finden wir die Theilbarkeitsregeln der Zahlen[3]), da die Tafel der Binomialcoefficienten[4]), allerdings dahin abgeändert, dass sie nur bis zur 7. Potenz reicht, dafür aber sämmtliche Coefficienten enthält, ohne dass an den Benutzer die Anforderung gestellt würde, das nur zur Hälfte Angegebene rückwärtsgehend zu ergänzen. Die Tafel sieht nämlich hier so aus:

1 ʒ.	2	1					
1 ℭ.	3	3	1				
1 ʒʒ.	4	6	4	1			
1 ß.	5	10	10	5	1		
1 ʒℭ.	6	15	20	15	6	1	
1 𝔅ß.	7	21	35	35	21	7	1

[1]) Haussrechnung fol. 75 recto flgg. [2]) Ebenda fol. 76 verso flgg. Ueber den Cisojanus vergl. K. Pickel, Das heilige Namenbuch (Strassburg 1878) S. 19. [3]) Coss fol. 23 verso. [4]) Ebenda fol. 168 recto.

und unter der Tafel steht: „So weyt ist yetzt genug.“ In einem Zusatze finden wir auch wieder die Regel der Coss[1]), welche alle 24 alten Regeln in sich schliessen soll und unmittelbar an dieselbe anknüpfend „die vorige Regel mit wenigern worten. Für das facit deiner auffgab setz 1 ℞. Handle da mit nach der auffgab bis du kommest auff ein equatz. Die selbige reducir so lang bis du sihest das 1 ℞ resoluirt ist.“ In den Zusätzen lehnt sich Stifel so weit an die Rudolff'sche Bezeichnung der Wurzelgrössen (S. 399) an, dass er bei der Quadratwurzel den kennzeichnenden Wurzelexponenten ʒ weglässt und damit ist dem Zeichen $\sqrt{}$ die Bedeutung als Quadratwurzel errungen, welche es hinfort behielt.

Ein Zusatz[2]) lehrt die Kubikwurzelausziehung aus $45 + \sqrt{1682}$. Man bilde $45^2 - 1682 = 343$; man nehme $\sqrt[3]{343} = 7$; man suche die Ergänzung von 7 zu einer Quadratzahl, etwa 2 weil $7 + 2 = 3^2$, und sehe zu, ob der Radicand 1682 durch sie getheilt einen quadratischen Quotienten giebt; ist dieses, wie hier, der Fall, indem $\frac{1682}{2} = 29^2$ ist, so bleibe man bei der gewählten Ergänzung stehen und hat $3 + \sqrt{2}$ als die gewünschte Kubikwurzel. Einen Beweis des Verfahrens giebt Stifel nicht. Um dasselbe zu verstehen, setzen wir

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = \alpha + \sqrt{\beta}$$

und erheben auf die dritte Potenz. Gleichsetzung der beiderseitigen rationalen und irrationalen Bestandtheile giebt

$$a = \alpha^3 + 3\alpha\beta, \quad b = \beta(3\alpha^2 + \beta)^2 = 9\alpha^4\beta + 6\alpha^2\beta^2 + \beta^3,$$
$$a^2 - b = \alpha^6 - 3\alpha^4\beta + 3\alpha^2\beta^2 - \beta^3 = (\alpha^2 - \beta)^3$$
$$\alpha^2 - \beta = \sqrt[3]{a^2 - b}$$

und das ist die in dem Beispiele enthaltene Zahl 7. Diese muss durch die Zahl β zum Quadrate α^2 ergänzt werden, zugleich muss aber auch $\frac{b}{\beta} = (3\alpha^2 + \beta)^2$ ein Quadrat sein. Der einzige Mangel an Stifel's Verfahren besteht also darin, dass er sich damit begnügt zu wissen, $\frac{1682}{2} = 29^2$ sei Quadrat, ohne sich zu vergewissern, ob

$$29 = 3\alpha^2 + \beta = 3 \cdot 3^2 + 2 \text{ ist.}$$

Unter dem Titel Beschlussexempeln, und zwar als deren erstes sind die befreundeten Zahlen 220 und 284 angegeben[3]), wenn auch dieser Name fehlt.

Ein anderer unmittelbar vorhergehender Zusatz endlich[4]) enthält

[1]) Coss fol. 147 verso. [2]) Ebenda fol. 481 recto und verso. [3]) Ebenda fol. 486 verso. [4]) Ebenda fol. 483 verso bis 486 recto.

die Regel des Scipione Del Ferro zur Auflösung kubischer Gleichungen und Beispiele dazu, welche Stifel aus den Schriften des Cardanus kennen gelernt hatte. Wir müssen uns hier mit dieser dürftigen Angabe begnügen, da wir die Regel selbst und die Geschichte ihrer Erfindung und Veröffentlichung erst dann zu behandeln haben, wenn wir mit den italienischen Mathematikern des XVI. Jahrhunderts uns beschäftigen werden.

Als Anhang zu seiner Ausgabe der Rudolff'schen Coss hat Stifel auch seine Wortrechnung abdrucken lassen. Sie setzt die Paginirung der Coss nicht einfach fort, sondern ist nur nach Buchstaben bezeichnet. Die Sache verhält sich folgendermassen: Stifel war, als er die Coss sammt der Wortrechnung dem Drucker in Königsberg überlieferte, noch Geistlicher in Haberstrom bei Königsberg, hatte aber die Aussicht oder wenigstens die Hoffnung, demnächst wieder in die Nähe von Wittenberg zurückkehren zu können. Da bat er denn, man möge die Wortrechnung zuerst in Angriff nehmen, so lange er noch selbst den Druck überwachen könne, weil hierbei der unbedeutendste Fehler von ungemeiner Tragweite sei, und diesen Wunsch wird der Drucker wohl erfüllt haben. Die an sich geringfügige Thatsache ist geradezu kennzeichnend für Stifel und für die Wichtigkeit, die er seiner Wortrechnung beilegte. Ebendasselbe lässt sich aus der Ausführlichkeit erkennen, mit welcher er über die Entstehung der Wortrechnung berichtet[1]). Er war noch Augustinermönch in Esslingen, aber innerlich dem Mönchsthum seit 1520 entfremdet, als er die ersten Deutungsversuche an den geheimnissvollen Zahlen der Apokalypse anstellte. Dass die Zahl 666 nur auf Leo X., der von 1513 bis 1521 den päpstlichen Thron innehatte, gehen könne, war ihm klar, nur bildeten die in Leo DeCIMVs enthaltenen Zahlenbuchstaben MDCLVI = 1656 eine Zahl, welche um 1000 zu gross, um 10 zu klein war. Daran erkannte er die Nothwendigkeit, dem Worte *decimus* noch das Zahlzeichen X folgen zu lassen, und las man nun M nicht als 1000, sondern als *Mysterium*, so war die Sache im Reinen. Der erste Erfolg spornte Stifel an, Weiteres zu suchen. Als Hofprediger zu Mansfeld kam er auf den Gedanken, nicht bloss einzelne Buchstaben einer Wortverbindung mit Zahlenbedeutung zu versehen, sondern alle Buchstaben. Ganz neu war das nicht, denn abgesehen von der jüdischen Gematria (Bd. I, S. 96) hatte auch Rudolff seiner Coss eine Wortrechnung einverleibt[2]), der zufolge die Buchstaben A bis Z der Reihe nach die natürlichen Zahlenwerthe 1

[1]) Die acht ersten Seiten der Wortrechnung (der ganze Buchstabe A) handeln davon. [2]) Coss fol. 488.

bis 24 erhalten sollten. Den Anfangsbuchstaben eines Geheimwortes solle man durch $\mathcal{H}$, die folgenden, je nachdem sie im Alphabete früher oder später erscheinen, durch $\mathcal{H}$ verbunden mit angegebenen abzüglichen oder hinzuzufügenden Zahlen darstellen, endlich solle man $\mathcal{H}$ als Wurzel einer Gleichung benutzen, welche dem Kundigen den Zahlen- beziehungsweise Buchstabenwerth von $\mathcal{H}$ und damit schliesslich das Geheimwort selbst enthüllen werde. Aber Stifel's Entdeckung war anders geartet. Er gab den Buchstaben A, B, C bis Z den Werth der auf einander folgenden Dreieckszahlen[1]) 1, 3, 6.... bis 276 und suchte nun Wörter auf, deren Buchstabensumme die räthselhaften Zahlen der Apokalypse und des Buches Daniel waren. Diese Rechnung zeigte er Luther, welcher aber meinte, es wäre nichts gewisses daran, und so „liess ichs gar fallen bis auff das Jahr 1532“. Im genannten Jahre gab Stifel, ohne seinen Namen zu nennen, ein Büchelchen heraus, in welchem „die Zahlen Danielis misbrauchet“ waren, so dass „ungeschickt und ungereimt gerechnet ist“, und der Weltuntergang auf eine bestimmte Stunde eines bestimmten Tages vorhergesagt wurde, aber nicht eintraf. Volle 14 Jahre unterbrach Stifel seine Wortrechnungen, bis er im Bade sitzend erkannte, dass die Buchstaben des Satzes *vae tibi Papa vae tibi* als Dreieckszahlen addirt die Summe 1260 gaben, welche Zahl in der Apokalypse XI, 3 und XII, 6 vorkommt. Von da an war ihm kein Zweifel mehr möglich, und er entdeckte nicht nur eine Wortverbindung, sondern ganze Blätter voll von mehr oder weniger zusammenhängenden Sätzen, so dass jeder Satz die gleiche Buchstabensumme bildet, welche jedesmal eine der Zahlen ist, in welche die genannten Bücher der Heiligen Schrift die tiefsten Geheimnisse versiegelt sein lassen wollen. Es kann natürlich hier auf die immerhin grossen Scharfsinn beanspruchende Spielerei nicht weiter eingegangen werden. Was wir darüber erzählt haben, war fast schon zu viel, wenn es nicht aus mehreren Gründen nothwendig gewesen wäre. Erstens erfahren wir dadurch, dass, wie wir bei den biographischen Angaben schon sagten, Stifel mindestens mit den Dreieckszahlen schon bekannt war, bevor er die Rudolff'sche Coss studirte. Zweitens bewährt sich in der Wortrechnung der gleiche auf das innere Wesen der Zahl gerichtete Geist, von welchem wir in der Arithmetica integra, als dem wissenschaftlichen Hauptwerke Stifel's, anderweitige Spuren deutlich erkennen durften.

Wir sind damit in den Stand gesetzt, ein endgiltiges Urtheil

[1]) Unter Dreieckszahlen versteht man bekanntlich (Bd. I, S. 149) Zahlen von der Form $\frac{n(n+1)}{2}$.

über Stifel dahin zusammenzufassen, dass wir in ihm einen nicht bloss Fremdes wiedergebenden und allenfalls in Einzelheiten verbessernden, sondern geradezu einen, wenn auch leider von Verschrobenheiten nicht freien, schöpferischen mathematischen Geist zu bewundern haben, den ersten grossen deutschen Zahlentheoretiker der Zeit nach, einen der Ersten für alle Zeiten, sofern man erwägt, dass er so gut wie ganz unberührte Aufgaben sich gestellt hat. Dadurch tritt er gewaltig aus der Schaar der deutschen Rechenmeister und Cossisten der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts hervor und bezeichnet einen Höhepunkt, der vorher nie erreicht war, von dem es nach Stifel's Tode für eine ziemliche Zeit nur ein Herabsteigen gab.

63. Kapitel.

Deutsche Geometer. Englische Mathematiker.

Wir gelangen nun zu den deutschen Geometern. An einen dürftigen Zustand des geometrischen Denkens und Wissens in der grossen Menge der Gebildeten haben uns einige Schriftsteller gewöhnt, welche wir nebenbei auf ihre Thätigkeit auf diesem Gebiete zu prüfen hatten. Zwar haben wir Apianus (S. 404) als einen sinnreichen Erfinder von trigonometrisch anwendbaren Vorrichtungen, Gemma Frisius (S. 410) als einen bahnbrechenden Feldmesser kennen gelernt, aber dürftig war das Wissen Vögelin's, Köbel's, dürftiger was wir in der Magaritha philosophica fanden, sogar die Genialität eines Stifel litt in der geometrischen Frage der Würfelverdoppelung kläglich Schiffbruch (S. 440). Keinen besseren Eindruck machen die Auszüge aus einigen geometrischen Schriften, welche aufbewahrt sind. Die Geometrie des Wolffgang Schmid[1]), Rechenmeister zu Bamberg von 1535, die Visirkunst des Burchard Mithobius[2]), welche er 1544 unter dem Titel Stereometrie herausgab, die Perspective des Hieronymus Rodler[3]) von 1546, welche nur von niedrigerem Standpunkte wiederholte, was wir noch in diesem Kapitel besser aus der Feder Dürer's kennen lernen werden, die ganz ähnliche Zwecke verfolgende Anweisung in die Geometrie des Augustin Hirschvogel[4]) scheinen ein längeres Verweilen bei ihnen nicht zu rechtfertigen. Und doch würden wir der deutschen Geometrie das grösste Unrecht zufügen, wenn wir sie ausschliesslich nach diesen Persönlichkeiten beurtheilen wollten. Es gab denn doch auch Schriften und Schriftsteller, welche mit Ehren als Geometer zu nennen sind.

[1]) Kästner I, 681—683. [2]) Ebenda I, 678—679. [3]) Ebenda II, 9—13. [4]) Ebenda II, 13—17.

An die Spitze unserer Darstellung setzen wir gleichsam als Uebergang vom Schlechten zum Guten die Geometria deutsch eines unbekannten Verfassers aus unbekannter Zeit, welche in einem alten Sammelbande der Nürnberger Stadtbibliothek aufgefunden und neu veröffentlicht worden ist[1]). Mancherlei Umstände könnten zwar veranlassen, den Druck des aus sechs Blättern in Quart bestehenden Schriftchens als einer älteren Zeit angehörend zu vermuthen, und Fachmänner haben das Jahr 1487 als obere Grenze der Zeit angegeben, zu welcher die Geometria deutsch erschienen sein kann. Wir erlaubten uns, bei der immerhin vorhandenen Ungewissheit, ob sie der Zeit unseres XII. oder unseres XIII. Abschnittes angehört, sie erst hier in Erwähnung zu bringen, wo ein innerer Zusammenhang mit dem Werke eines berühmten Nürnbergers unsere Aufmerksamkeit um so mehr zu fesseln im Stande sein wird, je näher räumlich die Schilderungen beider Schriften gerückt sind. Die Geometria deutsch lehrt neun geometrische Aufgaben lösen, ohne bei irgend einer Auflösung einen Beweis auch nur anzudeuten. Die erste Aufgabe verlangt die Herstellung eines rechten Winkels (Figur 81). Zwei einander in a schneidende beliebige gerade Linien bc und de werden gezogen; von a aus wird die gleiche Länge $ab = ac = ad$ auf der einen Geraden nach beiden Seiten, auf der anderen einmal aufgetragen; Verbindung

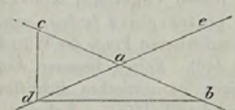


Fig. 81.

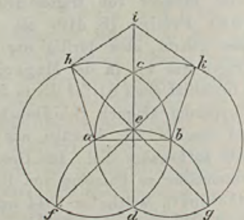


Fig. 82.

der Punkte bd und cd giebt den rechten Winkel. Die zweite Aufgabe lehrt ein regelmässiges Fünfeck „mit unverrücktem Zirkel" zeichnen (Figur 82). Um die Endpunkte a und b einer Strecke werden mit dieser Strecke als Halbmesser Kreise beschrieben, ein dritter Kreis um den Durchschnittspunkt d der beiden ersten Kreise

[1]) S. Günther hat diese Veröffentlichung in der Zeitschr. Math. Phys. XX, Hist.-litter. Abthl. S. 5—7 vollzogen. Vergl. dazu ebenda M. Curtze S. 57 flgg. und Günther S. 113 flgg. Ferner Günther, Unterricht Mittela. S. 347—354.

als Mittelpunkt. So bestimmen sich, wenn auch noch die gemeinsame Sehne cd der beiden ersten Kreise gezogen wurde, die Punkte e, f, g, welche dazu dienen, mittels fek, geh die Punkte k und h zu erhalten. Bögen von h und k aus bestimmen endlich i, und $abkih$ ist das verlangte Fünfeck. Die dritte Aufgabe zeichnet ein regelmässiges Siebeneck „behend" in einen Kreis, wenn als Seite desselben eine Strecke gewählt wird, welche mit der Hälfte der Seite des gleichseitigen Sehnendreiecks übereinstimmt. Die vierte Aufgabe giebt den Uebergang von einem Quadrate zu einem regelmässigen Achtecke durch Kreisbögen, welche von den vier Ecken als Mittelpunkten mit der halben Diagonale des Quadrates als Halbmesser beschrieben werden, und welche die Quadratseiten in den Eckpunkten der verlangten Figur schneiden. Die fünfte Aufgabe liefert die Länge einer Kreislinie als $3\frac{1}{7}$ mal dem Durchmesser. Die sechste Aufgabe lehrt den verlorenen Mittelpunkt eines Kreisbogens finden (Figur 83). Von beliebigen Punkten c und h auf dem Bogen ab als Mittelpunkten werden mit einem und demselben Halbmesser Bögen geschlagen, welche den Bogen ab in d und g schneiden, von d und g aus noch zwei mit dem unveränderten Halbmesser; so findet man die Punkte e, f, i, k, und die Verbindungsgeraden ef, ik schneiden einander in dem gesuchten Punkte l. Die siebente Aufgabe

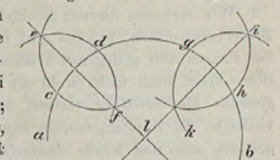


Fig. 83.

verwandelt ein gleichseitiges Dreieck in ein flächengleiches Quadrat, indem $^2/_3$ der Dreiecksseite als Quadratseite gelten. Die achte und die neunte Aufgabe verlangen die Zeichnung eines Stechhelms und eines Schildes als geometrische Figuren.

Diese beiden letzten Aufgaben bieten zur Besprechung keinen Anlass. Kaum mehr thun es die 1., 4., 5., 6. Aufgabe, welche an Euklid, Heron, Archimed und wieder Euklid anschliessen; höchstens wäre bei der 1. Aufgabe darauf zu verweisen, dass ihre Auflösung noch zur Zeit Adam Riese's nicht allgemein bekannt war (S. 421). Die 3. Aufgabe löste Lionardo da Vinci (S. 298) genau so wie die Geometria deutsch, und wir haben, als wir es mit jenem Schriftsteller zu thun hatten, auf noch früheres Vorkommen hingewiesen. Die 2. und 7. Aufgabe veranlassen einige Bemerkungen. Die Fünfeckszeichnung der 2. Aufgabe, welche uns vor der Geometria deutsch nirgend vorgekommen ist, wurde von einem Mathematiker, der um 1600 schrieb, von Christoph Clavius der Rechnung unterworfen[1]). Er fand die Grösse der Winkel des entstandenen allerdings gleichseitigen Fünfecks nicht sämmtlich zu 108°, sondern

$$a = b = 108^\circ\,22', \quad h = k = 107^\circ\,2', \quad i = 109^\circ\,12'.$$

Eine in neuerer Zeit wiederholte Rechnung[2]) hat ergeben, dass Clavius die Winkel h und k um je 20″ zu nieder, den Winkel i um 40″ zu hoch angegeben hat. Die 7. Aufgabe setzt $\left(\frac{2a}{3}\right)^2$ als Fläche des gleichseitigen Dreiecks von der Seite a, welche eigentlich $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ beträgt. Demnach bedeutet die Construction, dass $3 \sim \left(\frac{16}{9}\right)^2$ angenommen ist. Es ist hier auf den ungemein eigenthümlichen Zufall, wenn wirklich nur Zufall, aufmerksam gemacht worden[3]), dass von den beiden als gleichwerthig angenommenen Zahlen die eine $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ bei den Aegyptern (Bd. I, S. 57), die andere 3 bei nahezu allen Völkern des Alterthums als die Verhältnisszahl des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser galt.

Wir verlassen hiermit die kleine Schrift, welche bei dem vielfach Bemerkenswerthen, welches dort auf so engem Raume erscheint, bei den Spuren weit entlegenen Wissens, die sich in ihr vereinigen, doch ihrer Form nach nicht wohl als von einem Mathematiker für angehende Mathematiker verfasst betrachtet werden kann. Sie mag vielleicht für Zunftangehörige irgend eines Kunstgewerbes bestimmt gewesen sein und würde dadurch jenen Bauvorschriften näher rücken, welche seit dem XV. Jahrhunderte schon auftraten[4]), aber so wenig eigentlich Mathematisches enthalten, dass wir glaubten sie übergehen zu sollen.

Wir kommen zu einer bestimmten Persönlichkeit, zu Johannes Werner[5]). Er ist am 14. Februar 1468 in Nürnberg geboren, widmete sich der Theologie und wurde auch wirklich nach Rückkehr von einem fünfjährigen (1493—1498) Aufenthalte in Rom Pfarrer zu St. Johann in seiner Vaterstadt. In diesem Amte blieb er bis zu seinem Tode 1528. Neben der Theologie studirte Werner aufs eifrigste Mathematik, und ihr sowie der Geographie gehören seine schrift-

---

[1]) Clavius, *Geometria practica* Lib. VIII prop. 29. In der fünfbändigen Folioausgabe seiner Werke (Mainz 1611) findet sich die Stelle II, 210. [2]) Günther, Die geometrischen Näherungsconstructionen Albrecht Dürer's (Ansbach 1886) S. 6—7. [3]) Günther, Unterricht Mittela. S. 352 Note. [4]) Ebenda S. 335 bis 346. — Obenrauch, Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie (Brünn 1897) S. 167—192. [5]) Doppelmayr, S. 31—35. — Kästner II, 52—64. — Chasles, *Aperçu hist.* 120, 532—533 (deutsch 117, 628—629). — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 23—25. — Günther, Unterricht Mittela. S. 330.

stellerischen Leistungen an. Was er 1514 an geographischen Schriften herausgab[1]), bleibe unerörtert so weit es auf Kartenzeichnung sich bezieht, wie wir auch bei Peter Apianus, der hierin als Schüler Werner's betrachtet werden muss, die gleiche Enthaltsamkeit übten. Tragen wir doch die schwersten Bedenken, die ohnedies so weitschichtige Geschichte der Mathematik noch mit anderen Zuthaten zu belasten. Dagegen müssen einige rein mathematische Dinge berührt werden, welche in dem Anhange zu einer Abhandlung eines griechischen Schriftstellers sich finden. Georg Amirucio war in Trapezunt geboren und ging, als seine Heimath 1461 unter türkische Herrschaft gerieth, selbst zum Islam über, worauf er in Konstantinopel eine angesehene Stellung einnahm[2]). Eine in griechischer Sprache von ihm verfasste Abhandlung über zur Geographie nothwendige Vorkenntnisse kam handschriftlich nach Wien, wo sie von Stabius eingesehen wurde. Nun war aber Stabius mit Johannes Werner näher befreundet und hat auf dessen Verwendung hin jene Sonnenuhr in der Lorenzkirche zu Nürnberg angefertigt, von der die Rede war, als wir Stabius zuerst nannten. Er schlug seinem Freunde, dessen wissenschaftliche Neigungen und Fähigkeiten ihm bekannt waren, vor, die griechische Abhandlung zu übersetzen, und diese Uebersetzung erschien eben 1514 unter dem Titel *De his quae geographiae adesse debent Georgi Amirucii opusculum*. Vorher war die Schrift so gut wie nicht vorhanden, und das ist der Grund, warum wir auch mit ihr in diesem Kapitel uns beschäftigen, statt in demjenigen, welches das Ende des XV. Jahrhunderts als die Entstehungszeit behandelt; wäre doch ohnehin in jenem Abschnitte die Schrift eines Byzantiners schwer unterzubringen gewesen. Was wir ihr zu entnehmen haben, ist die Auflösung einer Aufgabe der sphärischen Trigonometrie[3]): Die Entfernung zweier durch ihre Länge und Breite gegebenen Punkte einer Kugel in Graden des die Punkte verbindenden Bogens eines Grösstenkreises zu bestimmen. Die Lösung schlägt folgenden Gang ein, bei welchem ausschliesslich Kenntnisse der ebenen Trigonometrie zur Anwendung kommen (Figur 84). Die Meridiane der beiden Punkte c, d, um die es sich handelt, werden bis zum Pole a verlängert und $ae = ad$, $ab = ac$ gemacht. Weil beide Punkte durch ihre

---

[1]) S. Günther, Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie (Halle 1877—1879) V. Heft, S. 277—332 (Johann Werner aus Nürnberg und seine Beziehungen zur mathematischen und physischen Erdkunde) giebt über alle geographischen Schriften Werner's ausführliche Auskunft. Werner's Schriften selbst, von denen darin die Rede ist, lagen uns in einem Bande der Münchener Bibliothek vor. [2]) Doppelmayr S. 33, Note y. [3]) Günther, Studien u. s. w. S. 306—308.

Länge und Breite bekannt sind, kennt man auch die Bögen de, bc von Parallelkreisen und deren Halbmesser. Folglich sind auch die

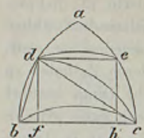


Fig. 84.

Strecken de, bc als Sehnen jener Bögen bekannt und $bf = \frac{1}{2}(bc - de)$. Ueberdies ist der Meridianbogen bd und durch ihn seine Sehne bd bekannt. Ferner berechnet sich jetzt

$$df = \sqrt{bd^2 - bf^2}, \quad cd = \sqrt{df^2 + fc^2}$$

und endlich zu cd der entsprechende Bogen des Grösstenkreises. Werner hat der Uebersetzung einen aus 11 Sätzen bestehen Anhang *In Georgii Amirucii Constantinopolitani opusculum Ioannis Verneri Norimbergensis appendices* nachfolgen lassen. Er zeigt sich in demselben als mit stereometrischen Sätzen, insbesondere mit der Lehre vom Dreikant wohl vertraut.

Den Veröffentlichungen von 1514 ist ein kaiserliches Privilegium vorgedruckt[1]), welches noch eine Reihe anderer Schriften nennt, die Werner im Drucke herauszugeben beabsichtigte. Leider fand er dafür keinen Verleger, und die nachweislich schon vollendeten Schriften gingen verloren. Darunter befand sich eine offenbar recht vollständige sphärische Trigonometrie in fünf Büchern *De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V*, welche nach Werner's Tode an einen Nürnbergischen Mechaniker Georg Hartmann, von diesem 1542 an einen Mathematiker, von welchem weiter unten die Rede sein wird, Rhäticus, gelangte[2]). Von da an ist die Handschrift verschollen, und es ist nur eine allerdings an und für sich nicht unwahrscheinliche Vermuthung, dass Rhäticus den Inhalt derselben seinen eigenen Arbeiten einverleibt haben werde. Mehr als Vermuthung ist es aber, wenn ein anderer Schriftsteller[3]) behauptet, in diesen Büchern über die Dreiecke sei die Erfindung der Prosthaphaeresis enthalten gewesen. Der sprachlich recht unglücklich aus πρόςθεσις, Hinzusetzung, und ἀφαίρεσις, Wegnahme, zusammengesetzte Ausdruck lässt sich etwa als Additions- und Subtractionsmethode übersetzen und bezeichnet ein eigenthümliches, vor Erfindung der Logarithmen sehr brauchbares Verfahren, Multiplicationen durch Additionen oder Subtractionen zu ersetzen. Grundlage ist die Formel:

$$2 \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

Waren also beliebige Zahlen mit einander zu vervielfachen, so konnte

[1]) Ueber das Privilegium vergl. auch Doppelmayr S. 33—34 nebst Note q (S. 32) und Note aa (S. 33). [2]) Ebenda S. 33, Note bb und S. 34, Note cc. [3]) Montucla I, 584 und 617—619. — A. v. Braunmühl in der *Biblioth. mathem.* 1896 S. 105—108.

jede derselben nach vorhergegangener Division oder Multiplication mittels einer mit Nullen versehenen Einheit als Sinus eines Winkels α (β) in einer mit genügender Genauigkeit berechneten Sinustafel nachgewiesen werden. Dann waren aber aus der Tafel auch die zu $(\alpha - \beta)$ und zu $(\alpha + \beta)$ gehörenden Cosinusse zu entnehmen, und nach vollzogener Subtraction war nur noch die zum Beginne eingeführte Veränderung der Zahlen um Einheiten verschiedener Ordnung und eine Halbirung zu vollziehen, um das Product zu erhalten, welches man suchte. Sollte addirt werden und nicht subtrahirt, so wählte man als Ausgangspunkt

$$2 \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta).$$

Unter den verloren gegangenen Schriften Werner's war ferner ein *Tractatus resolutorius qui prope pedisequus existit libris datorum Euclidis* und ein *Libellus arithmeticus qui complectitur quaedam commenta arithmetica*. Die erstere Abhandlung kennzeichnet sich selbst als einen offenbar fortlaufenden Commentar zu den euklidischen Daten, während für den Inhalt der zweiten Abhandlung nicht der geringste Anhaltspunkt gegeben ist, denn der Titel arithmetischer Erörterungen kann alles Mögliche unter sich fassen.

Endlich ist der Verlust noch eines Werner'schen Werkes zu bedauern. Zu den durch Wohlstand wie durch feine Geistesbildung sich auszeichnenden Patriziern der Zeit gehörte Bilibald Pirckheimer[1]), welcher aus Eichstädt stammend, in Nürnberg eine zweite Heimath gefunden hatte. In seinem Hause verkehrten Venatorius, Camerarius, Osiander, Dürer, Werner, kurzum wer nur auf humanistische und besonders auf humanistisch-mathematische Gelehrsamkeit Anspruch machen konnte. In seiner den Freunden stets zugänglichen Büchersammlung hatte Pirckheimer vereinigt, was er nur an alten, namentlich an griechischen Handschriften auftreiben konnte, einen griechischen Euklid, einen griechischen Archimed, welchen Venatorius (S. 406) herausgeben durfte u. s. w. Er besass auch von Walther's Erben erhandelt Regiomontan's Bücher De Triangulis und Anderes mehr. Durch Pirckheimer's Vermittelung trat Werner in Beziehung zu Sebald Beheim, einem geschickten Stückgiesser, dessen Sohne Werner er mathematischen Unterricht ertheilte. Er legte demselben eine eigens dazu angefertigte deutsche Uebersetzung der euklidischen Elemente mit jedem Satze beigefügten Erläuterungen zu Grunde, für welche er von Beheim 100 Thaler, eine damals sehr

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXVI, 810—817, Artikel von L. Geiger leider ohne Benutzung von Doppelmayr S. 36—44 bearbeitet.

grosse Summe, erhielt, welche Uebersetzung aber schon um das Jahr 1550 trotz emsigen Suchens darnach nicht mehr aufzufinden war[1]).

Wieviel die mathematischen Wissenschaften durch das Verlorengehen aller dieser Schriften einbüssten, kann man etwa aus dem durch einen Druck von 1522 vor dem Untergange Bewahrten ermessen. Damals verlegte der berühmte Wiener Buchhändler Lucas Alantsee einen Sammelband Werner'scher Schriften, welcher unter den Augen des Verfassers in Nürnberg gedruckt wurde. In dem einleitenden Briefe Werner's an Alantsee wird erzählt[2]), dass dieser vorher selbst in Nürnberg gewesen war und von Werner's Arbeiten in Begleitung eines Freundes Einsicht genommen hatte. Der Begleiter war Johannes Tschertte, der einst Grammateus zur Herausgabe seines Rechenbuchs (S. 395) veranlasste. Werner rühmt ihn hier als besonders geschickt in der Perspective. Der Werner'sche Sammelband gehörte bald zu den Seltenheiten des Buchhandels. Schon am Ende des XVI. Jahrhunderts liess ihn Tycho Brahe vergeblich in ganz Deutschland suchen und stöberte ihn endlich in Italien auf[3]). Die erste darin enthaltene Schrift ist ein 34 Seiten füllender *Libellus super viginti duobus elementis conicis*. Werner versteht darunter 22 Sätze von den Kegelschnitten. Kegel nennt er, gleichwie Apollonius es schon that, diejenige Oberfläche, welche eine Gerade erzeugt, die durch einen festen Punkt gehend um den Umfang eines Kreises herumgeführt wird, ausserhalb dessen Ebene der betreffende Punkt liegt. Dagegen weichen Werner's Beweisführungen wesentlich von denen des Apollonius ab. Dieser untersuchte den einmal hervorgebrachten Kegelschnitt als ebene Curve, und in seinen Figuren ist der Kegel nirgend mit gezeichnet. Für Werner bleibt umgekehrt die Parabel und die Hyperbel (mit der Ellipse beschäftigt er sich nicht) immer Kegelschnitt, und an dem Kegel, der in nahezu allen Figuren auftritt, sind die Beweise geführt, welche in Folge dieser Werner angehörenden Auffassung wesentlich als sein Eigenthum bezeichnet werden müssen. Der letzte von ihm bewiesene Satz ist der von dem constanten Rechtecke der Strecken, welche aus einem Hyperbelpunkte parallel zu den beiden Asymptoten und jeweil bis zum Durchschnitte mit der anderen Asymptote gezogen werden, der Satz also, den die Coordinatengeometrie in die Worte kleidet, die Gleichung der auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen bezogenen Hyperbel sei $xy = k^2$. Die Asymptoten heissen bei Werner *non coincidentes*. Die zunächst ungemein auffallende Erscheinung, dass eine Abhandlung von den

[1]) Doppelmayr S. 35 und ebenda Note oo. [2]) Kästner II, 54. [3]) Ebenda II, 52.

Kegelschnitten nur zwei von den drei überhaupt vorhandenen in Betracht zieht, erklärt sich durch den Zweck der Abhandlung. Werner schrieb sie, wie er selbst am Anfange der zweiten in seiner Sammlung gedruckten Schrift ausspricht, nur als Einleitung in diese, also in den *Commentarius seu paraphrastica enarratio in undecim modos conficiendi eius problematis quod cubi duplicatio dicitur*. Georg Valla (S. 345) war Besitzer einer sehr alten Handschrift des Archimed[1]) mit Einschluss der Erläuterungen des Eutokius zu den Büchern über Kugel und Cylinder. Aus ihr übersetzte er die von Eutokius aufbewahrten Würfelverdoppelungen ins Lateinische, aber, meint Werner in dem oben erwähnten Einleitungsbriefe an seinen Verleger, Valla versah diese Würfelverdoppelungen mit einer harten und schäbigen Uebersetzung, dura scabraque admodum traductione, und diese wollte Werner durch eine andere ersetzen, bei welcher er auch die Reihenfolge der mitgetheilten Würfelverdoppelungen abgeändert zu haben scheint. Eratosthenes, der bei Eutokius als vorletzter erscheint, wird erster, Plato, der erste bei Eutokius, wird siebenter, und auch andere Umstellungen sind noch vorhanden. Am auffallendsten erscheint, dass das als zweite Würfelverdoppelung mitgetheilte Verfahren des Philon von Byzanz zugleich auch dem Phyloponus (sic) zugeschrieben wird, einem Schriftsteller also, der später als Eutokius lebte, und dessen Name somit keinenfalls diesem entnommen sein kann. In allen diesen Würfelverdoppelungen kommen, so weit Kegelschnitte angewandt werden, nur Parabel und Hyperbel vor, und desshalb dürfte Werner auf Untersuchungen über die Ellipse in der einleitenden Abhandlung verzichtet haben. Den Würfelverdoppelungen sind 12 Zusätze beigegeben: einen Würfel zu finden, der zu einem gegebenen Würfel in gegebenem Verhältnisse stehe, eben einen solchen gleich einem gegebenen Parallelopipedon; ein Parallelopipedon mit gegebener Höhe einem gegebenen Würfel und einem gegebenen Parallelopipedon gleich herzustellen, letztere Aufgabe auch unter der Bedingung, dass statt der Höhe die Grundfläche des herzustellenden Parallelopipedons gegeben sei; einen Cylinder zu finden einem gegebenen Cylinder ähnlich und zu demselben in gegebenem Raumverhältnisse stehend. Der siebente Zusatz zeigt, dass die Flächen eines Quadrates und des eingeschriebenen Kreises sich wie 14 : 11 verhalten, und von diesem Verhältnisse machen drei weitere Zusätze Gebrauch zur Verwandlung eines Parallelopipedons in einen Cylinder von gleicher Höhe, eines Cylinders in einen Würfel. Der 11. Zusatz

[1]) Die Beschreibung des Valla'schen Codex — jetzt Florentiner Codex A — vergl. Heiberg's Archimed-Ausgabe III, Prolegomena pag. VIII.

behauptet, die Sonnenstrahlen kämen scheinbar parallel auf der Erde an und beweist diese Behauptung wie folgt (Figur 85). Werden von dem Sonnenpunkte a aus auf zwei Strahlen lauter gleiche Strecken $ad = ai = de = ih$ u. s. w. aufgetragen, so verhalten sich die Verbindungsgeraden der bemerkten Punkte $di : eh : fg : bc$ u. s. w. wie $1 : 2 : 3 : 4$ u. s. w. In grosser Entfernung von der Sonne verhalten sich also zwei solche parallele Verbindungsgerade zwischen zwei Strahlen wie zwei grosse in der Zahlenreihe unmittelbar auf einander folgende Zahlen, d. h. sie zeigen nur einen unmerkbaren und fast nicht vorhandenen Längenunterschied[1]) und lassen die Strahlen dadurch parallel erscheinen.

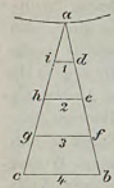


Fig. 85.

Zu derselben Ueberzeugung könne man erfahrungsmässig gelangen, indem man von zwei nicht allzuweit von einander entfernten Erdpunkten auf dem gleichen Meridian gleichzeitig die Sonnenhöhe messe und genau zu demselben Winkel gelange. Bei grösserer Entfernung von etwa 5000 Schritten zwischen den Beobtungspunkten finde man allerdings verschiedene Winkel. Der Zweck dieses 11. Zusatzes wird im 12. und letzten klar, wo hervorgehoben ist, ein parabolischer Spiegel vereinige die parallel auf ihn fallenden Sonnenstrahlen in einem Punkte, der sphärische Spiegel thue das nicht, ersterer zünde daher leichter als letzterer[2]). Nun folgt eine Abhandlung über den archimedischen Kugelschnitt (Bd. I, S. 294), d. h. die Aufgabe, die Kugel durch eine Ebene derart zu schneiden, dass die Rauminhalte der beiden Kugelabschnitte in gegebenem Verhältnisse stehen. Diokles hat diese Aufgabe mit Hilfe von Hyperbel und Ellipse (Bd. I, S. 338), Dionysodorus mit Hilfe von Hyperbel und Parabel gelöst (Bd. I, S. 383), beide Auflösungen hat Eutokius in seinen Erläuterungen zu Archimed's Bücher über Kugel und Cylinder aufbewahrt[3]), und diese standen, wie wir schon wissen, Werner zu Gebote. Die Auflösung des Dionysodorus giebt er aus dieser seiner Quelle ausführlich wieder. Bezüglich der Auflösung des Diokles begnügt er sich damit, die dort angewandte Fragestellung anzuführen, ohne die eigentlichen Vorschriften zur Anfertigung der Zeichnung zu erörtern. Er fühlte sich hier offenbar dadurch beengt, dass er in der Kegelschnittabhandlung die Behandlung der Ellipse übergangen hatte. Zum Schlusse fügte er eine ihm eigene Auflösung mittels Hyperbel und Parabel bei. Die beiden noch übrigen Schriften des Wernerschen Bandes sind astronomischen Inhaltes.

[1]) *insensibiliter ac pene nihil differe magnitudine videbuntur.* [2]) *Ergo speculum concavum concavitate parabolica fortius celeriusque incendit speculo sphaerico.* [3]) Archimed (ed. Heiberg) III, 180—206.

Was wir an geometrischen Ergebnissen aus Johannes Werner's Schriften kennen gelernt haben, zeigt, mag es auch der Menge nach nicht sehr viel sein, diesen Mathematiker jedenfalls in zwei Beziehungen weit über die Zeitgenossen sich erhebend: einmal dadurch, dass er bei gründlicher Bekanntschaft mit der griechischen Kegelschnittlehre der Nothwendigkeit strenger geometrischer Beweisführung sich bewusst war, zweitens dadurch, dass er bei solcher Beweisführung seine eigenen Wege ging.

Zu dem Pirckheimer'schen Kreise (S. 455) gehörte auch Albrecht Dürer[1]), geboren in Nürnberg 1471, gestorben ebenda 1528, in weitesten Kreisen berühmt als der hervorragendste deutsche Künstler des XVI. Jahrhunderts, aber kaum minder bedeutend in seiner Eigenschaft als Schriftsteller, welche er in drei Veröffentlichungen aus den Jahren 1525, 1527, 1528 (die letztere erst nach dem Tode des Verfassers ausgegeben) bewährte. Die erste Schrift von 1525 führt den Titel „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebnen vnnd gantzen corporen durch Albrecht Dürer zusamen getzogen vnd zu nutz allen kunstliebhabenden mit zugehörigen figuren in truck gebracht“ und ist Pirckheimer zugeeignet. In der Widmung meint Dürer, es gebe recht viele im Uebrigen ganz geschickte Maler in Deutschland, welche Mancherlei ganz falsch zeichneten, auch ihre Schüler es so machen lehrten, als wenn sie Wohlgefallen an ihrem Irrthume hätten, während doch die alleinige Ursache sei, dass sie die Kunst der Messung nicht gelernt haben, ohne die kein rechter Werkmann werden oder sein könne. Dem Zwecke, welcher Dürer darnach vorschwebte, den Maler in den Stand zu setzen, gewisse Constructionen nicht aus freier Hand ohne Gewähr der Richtigkeit, sondern nach geometrischen wenn auch unbewiesenen Vorschriften auszuführen, sind im Ganzen 89 Seiten eines kleinen Folioformates gewidmet, deren Inhalt nach vier Büchern sich gliedert. Dürer's Sprache vermeidet die Fremdwörter und giebt höchst wahrscheinlich selbstgebildete deutsche Ausdrücke für geometrische Begriffe. So nennt er die Kreisfläche „eyn runde Ebne“, das Quadrat „gefierte Ebne“, aber auch die Kugel, die Cylinderfläche „eyn kugelete Ebne“ und „eyn bogen Ebne“. Der Punkt ist ihm „eyn

[1]) Ueber das Leben Dürer's vergl. M. Thausing, Dürer, Geschichte seines Lebens und seiner Kunst (Leipzig 1876). Ueber Dürer als Schriftsteller: Kästner I, 684. — Chasles, *Aperçu hist.* 529—530 (deutsch 623—625). — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 26—27. — S. Günther, Die geometrischen Näherungsconstructionen Albrecht Dürer's (Ansbach 1886). — Derselbe, Unterricht Mittela. S. 354—370. — H. Staigmüller, Dürer als Mathematiker (Stuttgart 1891).

tupff", Parallelen „die alweg gleich weit von einander lauffen" oder auch „eyn barlini". Man sieht daraus, wie sein Bestreben das der Deutlichkeit war, und wie er das Werk gerade für junge Künstlerkreise verfasste, welche fremder Sprachen nicht mächtig zu sein pflegten. Für sie giebt er gleich im ersten Buche die Entstehung des Würfels durch eine Parallelbewegung einer quadratischen Grundfläche, einer Kugel durch Umdrehung eines Kreises um einen als Axe benutzten Durchmesser, für sie die Vorschriften zur Zeichnung mancherlei krummer Linien. Allerdings sind diese Vorschriften, wie die krummen Linien selbst, sehr verschiedener Natur. Schneckenlinien verschiedener Art, worunter Dürer theils Spiralen, theils die perspectivische Zeichnung von Raumschneckenlinien versteht, ferner Eigestalten werden construirt, aber nicht etwa so, dass die geometrisch richtige Figur entsteht, sondern nur eine künstlerisch gesprochen ähnliche Gestaltung, zusammengesetzt aus lauter Kreisbögen von wechselndem Mittelpunkte und Halbmesser. Bedeutsam ist dabei freilich der Gedanke, einer perspectivischen Zeichnung eine mathematische Vorschrift zu Grunde zu legen, und dass Dürer für Deutschland der Begründer einer ganzen perspectivischen Literatur wurde, ist gewiss wahr, wenn wir auch nicht so weit gehen, für ihn einen Platz unter den Begründern der descriptiven Geometrie beanspruchen zu wollen. Die Halbmesser der Kreisbögen, aus welchen jene krummen Linien sich zusammensetzen, sind durch Zahlenverhältnisse unter einander verbunden, welche theils genau, theils nicht genau erfüllt werden, und im letzteren Falle, der allerdings einer Gesetzmässigkeit darum nicht entbehrt, sollen ganz besonders schöne Curven hervorgebracht werden. Die getheilte Strecke, welche die Halbmesser zu liefern hat, ist nämlich (Figur 86) die Berührungslinie an einen in genau gleiche Theile getheilten Kreisbogen, und die allmälig sich weiter von einander entfernenden Theilpunkte der Strecke sind durch Verlängerung der Halbmesser nach den Bogentheilpunkten eingeschnitten. Dürer zeichnet sodann die drei Kegelschnitte. Deutsche Namen für dieselben kenne er nicht, wolle aber solche bilden. Die Ellipse, die einem Ei fast ähnele, wolle er Eierlinie nennen, die Parabel Brennlinie, weil aus ihr Spiegel gebildet werden, durch die man zünden könne, die Hyperbel Gabellinie, ein Name, den er nicht weiter begründet. Die Kegelschnitte zeichnet er punktweise, indem er auf einer Grundlinie in gleichen Abständen Senkrechte errichtet, deren Längen aus gewissen Verhältnisszahlen

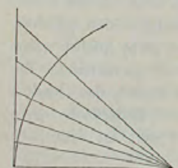


Fig. 86.

sich ergeben. Auffallenderweise scheint Dürer zu glauben, die Ellipse besitze nur die grosse Axe als Symmetrieaxe[1]). Wieder eine andere Linie, deren Entstehung nach einem geometrischen Gesetze sich ausspricht, ist die Muschellinie, wohl zu unterscheiden von der Conchoide der Alten (Bd. I, S. 334) (Fig. 87). Auf einer Geraden AB steht eine zweite CD senkrecht. Wird $AK = CL$ auf den beiden Geraden aufgetragen, KL gezogen und KM auf ihr gleich AB genommen, so gehört M der Muschellinie an, welche, wenn man AB und CD als Coordinatenaxen betrachtet, einer Gleichung 4. Grades entspricht[2]). Die Spinnenlinie entsteht folgendermassen: eine Strecke AB dient als Halbmesser eines Kreises um A; aus jeder Lage des Punktes B als Mittelpunkt ist wieder ein Kreis mit anderem Halbmesser beschrieben und auf diesem Kreise ein Punkt C dadurch bestimmt, dass BC eine ganze Umdrehung vollzieht, während das Gleiche von der AB gilt. Mit anderen Worten: Dürer hat in seiner Spinnenlinie die *Epicykloide* erfunden. Er geht sogar noch weiter und vereinigt mehr als nur zwei Zirkelstangen mit einander in Gelenken, welche verhältnissmässig selbständige Einzelbewegungen zulassen, so dass durch organische Bewegung Curven erzeugt werden können, welche sehr zusammengesetzter Entstehung sind.

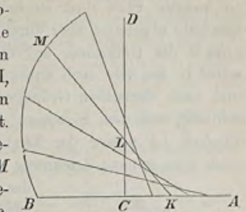


Fig. 87.

Das 2. Buch kann als Buch der vorzugsweise geradlinigen Constructionen den Curvenzeichnungen des 1. Buches gegenübergestellt werden. In ihm finden wir geschichtlich Bekanntes, aber in wesentlich neuer Auffassung. Der rechte Winkel wird genau in der Art gezeichnet wie in der 1. Aufgabe der Geometria deutsch, das regelmässige Fünfeck und Siebeneck wie in der 2. und 3. Aufgabe jener Schrift. Deren 6. Aufgabe ist schon im ersten Dürer'schen Buche mit der gleichen Figur gelöst[3]). Die 7. Aufgabe kommt wieder im 2. Buche vor[4]). Darf man daraus den Schluss ziehen, Dürer habe die Geometria deutsch, welche zu seinen Lebzeiten sehr wohl in Nürnberg vorhanden sein konnte, in Händen gehabt und benutzt? Wir glauben kaum, dass dieser Schluss gerechtfertigt wäre. Die in der 4. Aufgabe gelehrte Achteckzeichnung hat nämlich bei Dürer keinen

[1]) Staigmüller l. c. S. 16. [2]) Ebenda S. 17, Note 1. [3]) Figur 23 bei Dürer, welcher die einzelnen Figuren in jedem Buche mit besonderen Nummern versehen hat. [4]) Buch II, Figur 28.

Eingang gefunden[1]), während diese so einfach und sinnreich ist, dass wir es für unmöglich halten, Dürer habe sie vernachlässigt, wenn er sie kannte. Statt ihrer ist bei Dürer das Achteck zwar auch aus dem Quadrate abgeleitet, aber durch die Halbirungssenkrechten vom Mittelpunkte des Umkreises auf die Quadratseiten, welche den Umkreis selbst in den vier noch unbekannten Eckpunkten des Achtecks treffen, und nach demselben Grundgedanken ist aus dem Achteck das Sechzehneck, aus dem Siebeneck das Vierzehneck abgeleitet[2]). Für das Fünfeck ist ausser der Zeichnung mit unveränderter Zirkelöffnung auch eine genaue Zeichnung gelehrt[3]), welche bereits im 9. Kapitel des 1. Buches des Almagestes vorkommt (Figur 88). Zwei zu einander senkrechte Durchmesser werden gezeichnet. Auf dem einen bc wird ac in e halbirt und von e als Mittelpunkt aus die Entfernung bis zum Endpunkte d des anderen Durchmessers in den Zirkel genommen und ein Bogen geschlagen, der den ersten Durchmesser wieder in f schneidet. Alsdann ist df die Fünfecksseite, af die Zehnecksseite des gegebenen Kreises, was durch beigesetzte Zahlen in der Figur angedeutet wird.

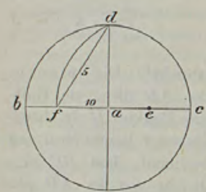


Fig. 88.

Geht von einem und demselben Peripheriepunkte eine Dreiecksseite und eine Fünfecksseite aus, so stehen deren Endpunkte um $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ Umkreis von einander ab. Die Halbirung dieses Bogens bringt daher die Fünfzehnecksseite als Sehne hervor, und so verfährt Dürer wirklich[4]). Höchst eigenthümlich ist Dürer's Neuneckszeichnung[5]). Unter **Fischblasen** verstand die Ornamentzeichnung ein Zweieck von Kreisbögen, welche mit gleichem Halbmesser beschrieben wurden. Werden nun (Fig. 89) in einen Kreis mit dem Halbmesser des Kreises selbst drei Fischblasen ab, ac, ad gezeichnet, welche aus Theilen von drei Kreisen sich zusammensetzen, wird der Durchmesser ab der einen Fischblase in den Punkten 1 und 2 gedrittheilt, mit dem Halbmesser $a2$ ein kleiner Kreis um a beschrieben, und werden dessen Durchschnittspunkte e und f mit der Fischblase geradlinig verbunden,

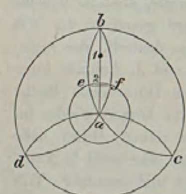


Fig. 89.

[1]) Auf Buch II, Figur 27 dafür hinzuweisen scheint uns unstatthaft.
[2]) Buch II, Figur 12 das Vierzehneck, Figur 14 das Achteck und Sechzehneck.
[3]) Buch II, Figur 15. [4]) Buch II, Figur 17. [5]) Buch II, Figur 18.

so soll ef die Neunecksseite des kleinen Kreises sein. Bogen ef müsste demnach 40^0 sein und weicht etwa um $\frac{1}{3}^0$ davon ab[1]). Diese Construction ist noch nirgend sonst als bei Dürer aufgefunden, und sie ist insbesondere durchaus verschieden von derjenigen des Lionardo da Vinci, sowie von derjenigen, welche aus dessen Achtzehneckconstruction (S. 300) sich herleiten liesse. Wenn Dürer des weiteren $\frac{9}{32}$ des Kreisdurchmessers als Elfecksseite, $\frac{1}{4}$ desselben als Dreizehnecksseite benutzt[2]), so ist die erstere Vorschrift eine sehr genaue, da der so gewonnene Kreisbogen nur um 3′ 26″ zu klein ist. Bei dem Dreizehneck dagegen wird der Bogen um mehr als $1\frac{1}{4}^0$ zu gross. Unmittelbar an die letzterwähnten Figuren schliesst sich eine Dreitheilung eines beliebigen Kreisbogens, Dürer sagt: „ytlich trum eines zirckels“, welche rechnungsmässig geprüft[3]) bei nicht allzugrossen Bögen eine sehr brauchbare Regel giebt (Figur 90). Man theilt die Sehne ab in drei gleiche Theile $ac = cd = db$ und errichtet in c und d die Senkrechten cg, dh. Dann be-

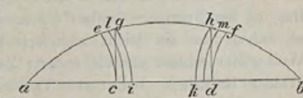


Fig. 90.

schreibt man aus den Mittelpunkten a und b die Kreisbögen ce, gi und df, hk. Dann ist, behauptet Dürer, arc. $ae = bf = gh$, und nur die Bogenstückchen eg, fh sind von der Theilung noch ausgeschlossen. Man begreift sie ein, indem man ci und dk drittheilt und vom zweiten Theilpunkte von c und d aus gezählt neue Kreisbögen wieder um a und b als Mittelpunkte schlägt, welche in l und m eintreffen, alsdann sei arc. $al = lm = mb$. Von den Theilungen des ganzen Kreisumfanges, welche bei der Herstellung der regelmässigen Vielecke nöthig waren, von der Dreitheilung eines Kreisbogens wendet sich Dürer zur Anfertigung von anmuthigen Mustern von Mosaikböden, gebildet aus regelmässigen Vielecken und aus Kreisbögen. Er weist dabei darauf hin, dass regelmässige Dreiecke, Vierecke, Sechsecke, aber auch die Zusammensetzung zweier regelmässiger Dreiecke zu Rauten ausreichen, die Ebene zu erfüllen, während andere Gestalten dazu nöthigen, zur Erfüllung der Ebene Figuren mehrerer Gattungen gleichzeitig anzuwenden. Am Schlusse des zweiten Buches erörtert er noch die Umwandlung eines gleichseitigen Dreiecks in ein flächengleiches

[1]) **Günther**, Näherungsconstructionen Dürer's S. 10—11, berechnet arc. $ef = 39^0\ 39'\ 52''$. [2]) Buch II, Figur 19. — **Günther** l. c. S. 12—13.
[3]) **Kästner**, Geometrische Abhandlungen. Erste Sammlung (Göttingen 1790) S. 241—248. — **Günther** l. c. S. 13—18. — **Staigmüller** l. c. S. 26, Note 1.

Quadrat, eines beliebigen Dreiecks in ein flächengleiches Rechteck, eines Quadrates in einen flächengleichen Kreis[1]). Jede dieser Aufgaben giebt uns zu einer Bemerkung Anlass. Die erste Umwandlung ist die der 7. Aufgabe der Geometria deutsch und vorhin bereits erwähnt worden. Wo zweitens ein beliebiges Dreieck in ein Rechteck verwandelt werden soll (Figur 91), zieht Dürer eine Höhe des Dreiecks, welche immer der Art gewählt wird, dass sie in das Innere des Dreiecks fällt, und bildet aus ihrer Hälfte und der Grundlinie das gesuchte Rechteck, indem die oberen dreieckigen Stückchen, welche nach Ziehung einer Parallelen zur Grundlinie durch die Mitte der Höhe hervortreten, nach unten umgeklappt werden. Die gleiche Zeichnung tritt bei indischen Geometern auf (Bd. I, S. 614), ohne dass wir durch diesen Hinweis die Vermuthung einer Uebertragung hervorzurufen beabsichtigen. Gerade diese Construction liegt so nahe, dass sie leicht mehrfach hat erfunden werden können. Weit näher scheint uns ein anderer Zusammenhang zu liegen. Jener Wiener Rathsherr **Johannes Tschertte**, der Freund des Grammateus, der Besucher Werner's in Nürnberg, war auch zu Dürer in freundschaftliche Beziehungen getreten und ein Brief von Tschertte an Dürer wird im Britischen Museum aufbewahrt[2]). In diesem Briefe ist ein ungleichseitiges Dreieck durch eine Figur in ein Rechteck gleichen Flächeninhaltes umgewandelt, und wenn auch der Veröffentlicher die Figur mitzutheilen unterlassen hat, so liegt die Muthmassung doch nahe, es sei vielleicht die in Dürer's zweitem Buche benutzte gewesen, oder Dürer, welcher Tschertte die in dem Briefe besprochene Aufgabe gestellt hatte, habe gerade damals zu seinem zweiten Buche das Material vorbereitet. Drittens, die Circulatur des Quadrates beruht auf der Annahme $\pi = 3\frac{1}{8}$, von welcher Vitruvius[3]) (Bd. I, S. 508), von welcher Inder (Bd. I, S. 602) Gebrauch machten. So bewährt sich unser Ausspruch, dass im zweiten Buche geschichtlich Bekanntes auftrete, in ziemlich grossem Maasse. Aber wir setzten hinzu, das geschichtlich Bekannte erscheine hier in wesentlich neuer Auffassung. Wie ist das gemeint? Nirgend, wo uns auch Näherungsconstructionen schwieriger Figuren früher begegneten, war mit einem Worte darauf aufmerksam gemacht, dass eine geometrische Genauigkeit nicht erreicht werde. Offenbar wähnte man richtige Vorschriften

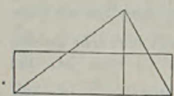


Fig. 91.

[1]) Buch II, Fig. 28, 32, 34. [2]) Staigmüller l. c. S. 51, Note 2 mit Berufung auf Jahrbücher für Kunstwissenschaft I, 21. [3]) Ebenda l. c. S. 29, Note 1 hält die Stelle bei Vitruvius für fehlerhaft. Dieser habe $\pi = 3$ gerechnet.

zu besitzen. Lionardo da Vinci sagte es sogar ausdrücklich bei der Siebenecksconstruction. **Albrecht Dürer ist der erste, welcher die Näherungsconstructionen mit vollem Bewusstsein ausgeführt hat.** Beim Siebeneck spricht er von einem „gemeinen weg den man von behendigkeyt wegen in der arbeyt braucht". Beim Elfeck heisst es „also das es sich Mechanice aber nit demonstrative findet", beim Dreizehneck „ist aber auch mechanice und nit demonstrative". Bei der Bogendreitheilung lautet Dürer's Ausspruch: „wer es will genauer haben, der such es demonstrative". Die Verwandlung des gleichseitigen Dreiecks in ein Quadrat schränkt er ein durch die Worte: „Man mag auch ein Dryangel vnd ein quadrat von der behendigkeit wegen also gegen eynander vergleychen". Bei der Circulatur des Quadrates endlich ist vollends der Satz vorausgeschickt: „Solches ist noch nit von den gelerten demonstrirt. Mechanice aber das ist beyleyfig also das es im werck nit oder gar ein kleyns felt mag dise vergleychnüss also gemacht werden". Beim Fünfeck, hergestellt unter Anwendung einer einzigen Zirkelöffnung, und beim Neuneck fehlen ähnliche Bemerkungen. Ob Dürer diese beiden Constructionen für genau hielt? Mag er in diesen Irrthum verfallen sein, den wir für möglich, aber keinenfalls für erwiesen halten, wie vielen Gelehrten ist nicht das Gleiche begegnet, dass sie gerade innerhalb ihres eigenen Gebietes einen Fehlschritt thaten! Dass er in anderen Fällen so deutlich zwischen Richtigem und nur in der Ausübung Nützlichem unterschied, stellt ihn auf eine wissenschaftliche Höhe, welche kaum ein zweiter Geometer des XVI. Jahrhunderts erreicht hat. Dieses Urtheil wird, meinen wir, noch dadurch bestärkt, dass Dürer bei vielen Constructionen Althergebrachtem sich gegenüber befand, bei welchem einen wissenschaftlichen Zweifel zu hegen weitaus nicht so nahe lag, als bei Selbsterdachtem oder durch Versuche Ermitteltem. Wir haben weiter oben von der Hand gewiesen, dass Dürer der Geometria deutsch sich bedient haben könne. Unsere damalige Begründung erscheint uns auch jetzt vollständig zutreffend, aber die Uebereinstimmung mehrerer Verfahren ist doch nicht zu verkennen. Da sind wir wohl genöthigt für beide, für Dürer wie für den Verfasser der Geometria deutsch, eine und dieselbe Quelle anzunehmen, anzunehmen (S. 452) dass hier Vorschriften vorliegen, welche im Baugewerbe üblich waren, und deren Ursprung nachzuforschen um so schwieriger ist, als gerade die sogenannte **Bauhütte** es immer geliebt hat, sich recht geheimnissvoll zu gebahren. Sogar das Werk des **Vitruvius**, wenn es auch bewusst oder unbewusst noch immer den grössten Einfluss in der Baukunst übte, gelangte erst mehr als zwanzig Jahre später als Dürer's Unterweysung in die

Oeffentlichkeit der des Lateinischen unkundigen deutschen Baumeister. Wieder ein Nürnberger war es: Walter Rivius[1]), Arzt und Mathematiker, der 1548 Vitruv in deutscher Sprache herausgab.

Das 3. Buch bietet geringen Anlass dabei zu verweilen. Es handelt von mancherlei Körpern, von aus Vielflächnern zusammengesetzten Denkmälern, von Höhenmessungen mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks mit in einem Gelenke beweglicher Hypotenuse[2]), von der Herstellung von Sonnenuhren, endlich von der Anfertigung eines Alphabetes aus lauter geometrischen Bestandtheilen. Eine solche geometrische Schönschrift, wie man die Sache ganz kennzeichnend genannt hat, ist uns schon (S. 344) bei Paciuolo begegnet.

Das 4. Buch beginnt mit einem, so viel wir wissen, ganz neuen Gegenstande, für welchen Dürer hiernach das Erfinderrecht zukommt. Regelmässige und halbregelmässige Vielflächner im Modelle herzustellen war bekannt; aber war es möglich ein zusammenhängendes Netz für solche Körper zu zeichnen, welches zusammengesetzt dieselben entstehen liess? Dürer beantwortete die Frage durch die That. Er zeichnete in dem 4. Buche die Netze der fünf regelmässigen Vielflächner, sodann diejenigen solcher Körper, deren Grenzflächen folgende sind: 1) 4 Sechsecke, 4 Dreiecke; 2) 6 Achtecke, 8 Dreiecke; 3) 6 Viereke, 8 Dreiecke; 4) 8 Sechsecke, 6 Vierecke; 5) 18 Vierecke, 8 Dreiecke; 6) 6 Vierecke, 32 Dreiecke; 7) 6 Achtecke, 8 Sechsecke, 12 Vierecke; 8) 6 Zwölfecke, 32 Dreiecke; 9) 6 Vierecke, 12 Dreiecke. Ueberall sind die Grenzflächen regelmässig gedacht, nur beim 8) Körper sind 24 unter den 32 Dreiecken nicht gleichseitig sondern nur gleichschenklig, oder wie Dürer es ausspricht, „sie haben aber nit all gleych seyten". Nun folgt die Würfelverdoppelung oder allgemeiner Würfelvervielfachung, indem Dürer ausdrücklich hervorhebt, auch bei letzterer komme es nur auf das Einschalten zweier geometrischer Mittel an. Dürer lehrt zwei Auflösungen, die Platonische und die Heronische (Bd. I, S. 214 und 350), ohne freilich deren Erfinder zu nennen. Woher er die Methoden hatte, ist nicht schwierig zu errathen: Werner wird sie ihm mitgetheilt haben. Gelesen hat aber Dürer Werner's Buch nicht, da ihm die Kenntniss der lateinischen Sprache abging. Wieder ein anderer Gegenstand folgt, die auf einen Würfel angewandte Lehre von der Beleuchtung und vom Schattenwerfen durch mehrfache Zeichnungen erläutert, bei welchen der Stand der Sonne stets so gewählt ist, dass sie mit dem sehenden Auge auf der gleichen Seite des Würfels sich

[1]) Doppelmayr an verschiedenen Stellen. [2]) Buch III, Figur 19. Der erklärende Text findet sich erst drei Seiten später gegenüber von Figur 21.

befindet. Dazwischen ist kurz ausgesprochen und an einer schematischen Zeichnung[1]) (Figur 92) zur Anschauung gebracht, dass dem

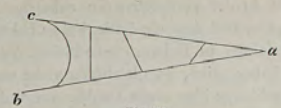


Fig. 92.

Auge in einer Grösse erscheine, was zwischen denselben Grenzstrahlen enthalten sei, „es sey nahent oder fern, aufrecht vber ort oder krum".

Am Schlusse des Werkes erscheinen zwei Holzschnitte von geometrisch-künstlerischer Bedeutung. Alberti hatte (S. 293) eines Schleiers zur Anfertigung perspectivisch richtiger Abbildungen sich bedient. Dürer veränderte Alberti's Erfindung einigermassen, und seine Vorrichtungen sind in den beiden Holzschnitten zur Anschauung gebracht. Ein Rahmen ist mit einer nach aussen sich öffnenden inwendig papierüberzogenen Thüre verschlossen. An den vier Seiten des Rahmens und mit denselben gleichlaufend befinden sich Stäbchen, längs deren ein oben und unten befestigter Verticalfaden und ein rechts und links befindlicher Horizontalfaden verschiebbar sind. Der Zeichner sitzt hinter dem Rahmen, und hinter dem Zeichner ist an einem Wandhaken ein langer Faden befestigt. Bei geöffneter Apparatthüre wird jener Faden bis zu einem abzubildenden Punkte gespannt und der Ort, wo der Faden durch den Rahmen geht, durch Kreuzung der beiden verschiebbaren Fäden bemerklich gemacht. Nun wird der lange Faden wieder zurückgezogen, der Apparat geschlossen und ein Punkt auf das Thürinnere bei der soeben bewerkstelligten Fadenkreuzung gemalt. Beliebig viele Punkte des abzubildenden Gegenstandes können so nach einander erhalten werden und geben jedenfalls ein richtiges Bild, dessen Augenpunkt der Wandhaken ist, von welchem der lange Faden ausgeht. Ein zweiter Vorschlag Dürer's, der in dem zweiten Holzschnitte verdeutlicht ist, benutzt statt des Rahmens eine Glastafel, auf welcher mit einem Stifte die Umrisse des abzubildenden Gegenstandes festgehalten werden. Wir haben behauptet, Dürer habe damit nur Alberti's Erfindung abgeändert, und darin liegt zugleich die weitere Behauptung, er habe sie gekannt. Daran kann in der That nicht gezweifelt werden. Dürer war in den Jahren 1505 bis 1507 in Venedig, um den staatlichen Schutz seines Monogramms, d. h. Schutz gegen Nachdruck seiner Holzschnitte zu

[1]) Buch IV, Figur 55.

erwirken. In einem Briefe aus Venedig hat nun Dürer von einem Abstecher erzählt, welchen er Ende 1506 nach Bologna machte, um daselbst Unterricht in der Perspective zu nehmen. Der Lehrer war natürlich ein Italiener, und dass ein italienischer Lehrer seinen Schüler mit dem seit 70 Jahren in Uebung befindlichen Verfahren Alberti's bekannt gemacht haben wird, ist gleichfalls nicht mehr als natürlich. Ungewissheit herrscht nur über einen Punkt: wer wohl Dürer's Lehrer gewesen sein mag? Man hat an Lucas Paciuolo gedacht, aber dieser lebte schon seit 1503 in Florenz und nicht mehr in Bologna[1]). Scipio Ferreus dagegen lehrte von 1496 bis 1526 ununterbrochen in Bologna. Haben wir anzunehmen, dass Dürer seinen Unterricht genoss, dass er vielleicht auch von ihm in die Kunst Constructionen mit nur einer Zirkelöffnung auszuführen eingeweiht wurde? Es ist fruchtlos solchen Vermuthungen nachzujagen, die man weder beweisen noch widerlegen kann.

Dürer's zweite Schrift von 1527 heisst Etliche vnderricht zu befestigung der Stett, Schloss und Flecken. Sie ist gradezu bahnbrechend in der Geschichte des Festungskriegs geworden, indem in ihr zum ersten Male die grossen Grundgedanken ausgesprochen sind, welche als unerlässlich bei der Anlage und Vertheidigung eines befestigten Platzes in Geltung blieben, so vielfältige Abänderungen im Einzelnen die Fortschritte der Bewaffnung hervorbrachten. Die Geschichte der Mathematik hat mit dem Werke nichts zu thun.

Nicht viel länger verweilt dieselbe bei Dürer's vier Büchern Von menschlicher Proportion von 1528. Dürer überwachte nur den Druck des 1. Buches, die drei folgenden lagen zwar bei seinem Tode handschriftlich vor, allein man hat immerhin damit zu rechnen, dass der Verfasser selbst während des Druckes starb. Dieses Werk[2]) entspricht gleichfalls einer Vorarbeit Alberti's, wie wir es für die perspectivischen Vorrichtungen behauptet haben, und die Wahrscheinlichkeit ist nicht von der Hand zu weisen, dass Dürer, nachdem er Alberti einmal als zuverlässigen Führer erkannt hatte, auch ein zweites Mal sich gern seiner Leitung anvertraute. Die Anlehnung ist besonders darin ersichtlich, dass Dürer gleich Alberti die ganze Körperlänge des Menschen in 600 Theile zerlegt hat, von welchen eine gewisse Anzahl auf jeden Körperabschnitt kommt. Daneben kennt er allerdings auch andere Verhältnisszahlen, z. B. dass der Mensch 7 Kopflängen gross sei u. s. w.

Waren Werner und Dürer unbedingt die für unsere Betrachtung

[1]) Staigmüller, Lucas Paciuolo in Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Histor.-literar. Abthlg. S. 94 Note 5. [2]) Kästner I, 694—697.

hervorragendsten Persönlichkeiten des Pirckheimer'schen Kreises, so sind doch zwei andere Männer noch in aller Kürze zu erwähnen: Johannes Schöner und Andreas Osiander. Ersterer, auch Schoner[1]) genannt, ist 1477 in Karlstadt in Franken geboren, 1547 in Nürnberg gestorben. Er war Priester an der St. Jacobskirche in Bamberg, als er 1526 zur Stelle des Professors der Mathematik an dem damals unter Mitwirkung von Melanchthon gegründeten Gymnasium in Nürnberg berufen wurde. Geographische und namentlich astrologische Schriften machten ihn so berühmt, dass etwa 20 Jahre nach seinem Tode ein dichterischer Lobredner des gleichfalls vor Kurzem verstorbenen Simon Jacob die drei berühmten Franken Regiomontan, Schoner, Jacob in Vergleich bringen durfte[2]), welche ihren Heimathsorten Königsberg, Karlstadt, Coburg zu gleichem Ruhme gereichten. Von diesen Uebertreibungen haben wir uns selbstverständlich fern zu halten, doch erkennt die Geschichte der Mathematik es dankbar an, dass Schöner mehrere Schriften aus Regiomontan's Nachlasse, welche ihm zu diesem Zwecke übergeben wurden, zum Druck beförderte, insbesondere das Werk *De triangulis* sammt der beigefügten Gegenschrift gegen die Kreisquadraturen des Nicolaus von Cusa. Auch Regiomontan's Schrift über die Kometen, dessen Sinustafeln, dessen Erläuterungen zum Almagest hat Schöner herausgegeben, dessgleichen Peurbach's Büchlein *De quadrato geometrico* und nicht minder den *Algorithmus demonstratus*, der sich in Regiomontan's Nachlasse vorfand, da jener ihn aus einer Wiener Handschrift abgeschrieben hatte. Das Lob dürfen wir also Schöner unbedingt zuerkennen, dass er in der Wahl der Schriften, welche er der Oeffentlichkeit übergab, sehr glücklich war. An der Drucklegung eines letzten Werkes betheiligte er sich gemeinschaftlich mit Andreas Osiander[3]) (1498—1552). Dieser streitbare Prediger der neuen Glaubenslehre ist vorzugsweise Reformator auf kirchlichem Gebiete gewesen, als solcher in zahlreiche Zwistigkeiten verwickelt, wo immer er verweilte, in Nürnberg ebensowohl als später in Königsberg am Hofe des Herzogs Albrecht. Dort zählte er z. B. Michael Stifel unter seine Gegner. Wir haben seiner hier in einer ganz anderen Eigenschaft zu gedenken. Gemeinsam mit Schöner leitete er den 1543 in Nürnberg vollendeten Druck des koppernikanischen Werkes über die Kreisbewegungen der Weltkörper, und Osiander allein fügte dem ursprünglichen Titel *De revolutionibus* die

[1]) Doppelmayr S. 45—50 und S. 80 Note tt. — G. A. Will, Nürnbergisches Gelehrtenlexicon III, 559—561 (Nürnberg und Altdorf 1757). [2]) Zeitschr. Math. Phys. XX, Histor.-literar. Abthlg. S. 66. [3]) Doppelmayr S. 58—61. — Allgem. deutsche Biographie XXIV, 473—483 Artikel von W. Möller.

abschwächenden Worte *orbium caelestium* bei, unterdrückte eine Einleitung des Verfassers und ersetzte sie durch die unglückselige Vorrede, welche mit der Aeusserung, es sei nicht erforderlich, dass Hypothesen über astronomische Dinge wahr oder auch nur wahrscheinlich seien, es reiche schon allein hin, dass sie eine mit den Beobachtungen übereinstimmende Rechnung ergeben, welche mit dieser Aeusserung, sagen wir, die allerdings keineswegs beabsichtigte Veranlassung zu späterer Ketzerrichterei gegen das Werk und seine Verehrer gab.

Damit gewinnen wir selbst aber den Uebergang zu dem Verfasser des unsterblichen Werkes, welchen die Geschichte der Mathematik stolz ist nennen zu dürfen, wenn sie auch nicht gleich der Geschichte der Sternkunde einen neuen Abschnitt mit ihm zu beginnen hat. Nicolaus Koppernigk[1]), wie die wahrscheinlichste Rechtschreibung des Namens lautet, ist in Thorn am 19. Februar 1473 geboren, in Frauenburg am 24. Mai 1543 gestorben. Er studirte 1491—1494 in Krakau, 1496—1500 in Bologna. Während dieses Aufenthaltes wurde er 1497 zum Frauenburger Domherr erwählt. Auch in Rom verweilte der junge Domherr noch über ein Jahr, bevor er 1501 auf kurze Zeit nach Hause reiste. Nach Juli 1501 setzte er medicinische und juristische Studien in Italien, zunächst in Padua fort. Den juristischen Doctortitel erwarb er den 31. Mai 1503 in Ferrara. Zwischen 1505 und 1506 war die endgültige Rückkehr in die Heimath. Die verschiedensten Geschäfte erfüllten dort sein Leben, und dazwischen arbeitete er seit 1506 unablässig an dem grossen Werke, das ein neues Weltsystem begründen sollte. Gegen 1530 war es vollendet. Etwa drei Jahre später verfasste Koppernikus eine Selbstanzeige, die erst 1878 aus einer Wiener Handschrift zur Veröffentlichung gelangte. Die erste gedruckte Nachricht von dem koppernikanischen Werke gab die *Narratio prima de libris revolutionum* von 1539 aus der Feder eines Schülers, Georg Joachim von Lauchen, von welchem gleich nach Koppernikus die Rede sein wird. Eben dieser brachte 1541 das druckreife Manuscript der „Revolutionen“ nach Nürnberg und überwachte den Satz der ersten Bogen, dann reiste er ab, und Schöner und Osiander übernahmen, wie wir wissen, die Besorgung. Der Druck dauerte bis 1543, und die Sage will, das erste fertige Exemplar sei dem Verfasser auf dem

[1]) Nicolaus Coppernicus von Leopold Prowe. Bd. I: Das Leben. Bd. II: Urkunden (Berlin 1883—1884). Bd. III: Die Lehre, ist in Folge des Todes des Verfassers leider unvollendet geblieben. Die beste Ausgabe des Werkes *De revolutionibus orbium caelestium* ist die sogenannte Jubiläumsausgabe (Thorn 1873), ins Deutsche übersetzt von Menzzer (Thorn 1879).

Todtenbette überreicht worden. Wir haben es mit dem grossen Werke nur soweit zu thun, als es mathematisches Wissen des Verfassers verräth und mittheilt, und das ist vorzugsweise im 12., 13., 14. Kapitel des I. Buches der Fall, welche die Ueberschriften führen: 12. Ueber die geraden Linien, welche Sehnen im Kreise sind. 13. Ueber die Seiten und Winkel der ebenen geradlinigen Dreiecke. 14. Ueber die sphärischen Dreiecke. Ursprünglich bildeten diese Kapitel ein besonderes, und zwar das II. Buch des Werkes[1]), später wurden sie von Koppernikus unter mancherlei Kürzungen zum I. Buche geschlagen und büssten so einen Theil ihrer Selbständigkeit ein, in welcher sie dem Leser ein kurzgefasstes Lehrbuch der Trigonometrie ersetzten. Wir glauben über den Inhalt[2]) genügend Rechenschaft zu geben, wenn wir bemerken, dass Koppernikus sich ziemlich streng an den Almagest des Ptolemäus anschloss, mit der Trigonometrie des Regiomontan dagegen anfangs kaum bekannt gewesen sein dürfte. Als er später diese Bekanntschaft erwarb, fügte er, wie aus der Originalhandschrift zu erkennen ist[3]), die beiden wichtigsten Aufgaben der sphärischen Trigonometrie, aus den drei Seiten die Winkel, aus den drei Winkeln die Seiten des sphärischen Dreiecks zu ermitteln, nachträglich bei, aber die Beweisführung ist ihm hier durchaus eigenthümlich. Auch an anderen Stellen der Revolutionen kommen geometrische Dinge vor, welche Beachtung verdienen, und welche eine genaue Durchforschung des koppernikanischen Werkes nach dieser Richtung als vielleicht lohnend vermuthen lassen. Man hat z. B. bemerkt[4]), dass im 4. Kapitel des III. Buches der Satz ausgesprochen und bewiesen ist, dass jeder Punkt des Umfanges eines im Innern eines Kreises von doppeltem Halbmesser längs dessen Umfang rollenden Kreises bei seiner Bewegung einen Durchmesser des grösseren Kreises beschreibt. Zur Würdigung der mathematischen Kenntnisse des Koppernikus sind ausser den Revolutionen noch die Einzeichnungen zu beachten, welche er in verschiedene nachweislich von ihm besessene Bücher machte[5]). Zu diesen Büchern gehörte ein Exemplar der *Tabula directionum* Regiomontan's in einem Augsburger Drucke, der 1490 aus Ratdolt's Werkstätte hervorgegangen war. Koppernikus hat darin die *Tabula foecunda* des Regiomontanus durch eine

[1]) Jubiläumsausgabe S. 34 Note. [2]) Ueber den Inhalt vergl. Fasbender, Die Kopernikanischen Sehnen- und Dreiecksberechnungen. Programm des Thorner Gymnasiums und der Realschule erster Ordnung für 1872. [3]) Prowe l. c. Bd. I Abtheilung 2 S. 478—479 Note **. [4]) Max. Curtze in der *Biblioth. mathem.* 1888 S. 65—66 und 1895 S. 33—34. [5]) Max. Curtze, *Reliquiae Copernicanae*, Zeitschr. Math. Phys. XIX, 76—82 und 432—458. XX, 221—248. Ueber die trigonometrische Secante vergl. l. c. XX, 221—222.

neuberechnete Columne ergänzt, welche die Ueberschrift Ὑποτεινουσα führt, während die von Regiomontan herrührenden Zahlen mit Καθετος überschrieben sind. Der Sinn dieser Ausdrücke ist aus den beistehenden Zahlen mit Sicherheit zu entnehmen und entspricht auch dem Augenscheine (Fig. 93). *BC* ist καθετος, *AC* ist ὑποτεινουσα oder trigonometrisch ausgedrückt ersteres ist die Tangente, letzteres die Secante, welche durch Koppernikus in die Wissenschaft eingeführt war. Der Oeffentlichkeit gehörte aber diese trigonometrische Function vorläufig noch nicht an; wenigstens ist eine Anwendung derselben nicht einmal in den Revolutionen des Koppernikus selbst nachweisbar.

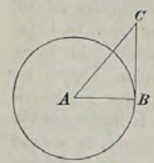


Fig. 93.

Wir erwähnen hier gelegentlich auch eine von Koppernikus aufgestellte Brodordnung, welche etwa gleichzeitig mit der durch Adam Riese berechneten Annaberger Brodordnung (S. 422) sein mag. Deren Handschrift (nicht von Koppernikus selbst gefertigt) findet sich mit einer Handwerksordnung von 1531 vereinigt in einem zu Upsala aufbewahrten Sammelbande[1]).

Es war von einem Schüler des Koppernikus Rhäticus[2]) die Rede. Wie der eigentliche Name dieses Gelehrten lautete, steht nicht fest. Er ist fast ausschliesslich als Rhäticus, der im Voralberg Geborene, bekannt nach seinem Heimathsorte Feldkirch, wo er 1514 zur Welt kam. Er starb 1576 zu Kaschau in Ungarn. Unter den verschiedenen Vermuthungen über den Familiennamen hat diejenige viel für sich, er habe Georg Joachim von Lauchen geheissen, während Andere Joachim für den Familiennamen halten. Rhäticus studirte in Zürich, Wittenberg, wo er 1535 den Grad als Magister erwarb, Tübingen, Nürnberg und trat an diesem letzteren Orte zu Johannes Schöner in engere Beziehung. Während Rhäticus in Nürnberg verweilte, starb 1536 Volmar in Wittenberg, vor wenigen Jahren sein Lehrer in Mathematik und Astronomie. Melanchthon, damals, wie wir wissen (S. 408), allmächtig in Universitätsangelegenheiten vorab so weit sie Wittenberg betrafen, setzte die Zweitheilung der einen bisher vorhandenen mathematischen Professur durch und liess für die höhere Mathematik, worunter man die Astronomie zu verstehen hat, Erasmus Reinhold[3]) ernennen, während für die

[1]) Curtze in den Mittheilungen des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst. Heft I, S. 47—51 (Leipzig 1878). [2]) Allgemeine deutsche Biographie XIV, 93—94 Artikel von Bruhns und XXVIII, 388—390 Artikel von Günther. [3]) Ebenda XXVIII, 77—79 Artikel von Günther.

niedere Mathematik, Arithmetik und Geometrie umfassend, wieder auf Melanchthon's Vorschlag, der noch nicht 23jährige Rhäticus berufen wurde. In der Antrittsvorlesung vom 5. Januar 1537 verlas dieser die von Melanchthon angefertigte Declamation über den Nutzen der Arithmetik. Zwei Jahre verwaltete Rhäticus sein Amt, da drang das Gerücht von der neuen Lehre, welche der Domherr in Frauenburg besass, zu ihm, und er zog offenbar mit Einwilligung der Universitätsbehörde, da ihm seine Stelle sonst doch nicht offen gehalten worden wäre, im Frühjahr 1539 nach Preussen, um dort einen bis zum Spätherbst 1541 dauernden Aufenthalt zu nehmen. Erste Frucht des täglichen Umganges mit Koppernikus war die noch 1539 in Danzig gedruckte *Narratio prima de libris revolutionum*, eine vorläufige aber schon ziemlich ausgedehnte Mittheilung über das zu erwartende Werk. Ein *Encomium Borussiae* war angehängt, eine im Humanistenstyle verfasste, etwas überschwängliche Schilderung des Landes, in welchem Rhäticus sich befand. Er trat dadurch zu Herzog Albrecht in persönliche Beziehung und verfasste für diesen eine im August 1541 vollendete Chorographie Preussens[1]). Inzwischen wurden die Revolutionen des Koppernikus vollendet. Rhäticus brachte die fertig gestellte Handschrift Ende 1541 nach Nürnberg, wo der Druck bei Petreius begann, zuerst, wie wir gesehen haben, unter des Rhäticus eigener Ueberwachung, dann unter der Schöner's und Osiander's. Die Originalhandschrift hat sich bis auf den heutigen Tag erhalten. Mit dem Druck verglichen zeigt sie einestheils erhebliche Abweichungen von demselben, anderntheils durchaus keinerlei Strichelchen oder dergleichen, wodurch der Setzer sich bemerklich gemacht haben könnte, wie weit er im Satze gelangt war. Beide Umstände vereinigt nöthigen dazu anzunehmen, es sei von der Originalhandschrift noch eine Abschrift genommen worden, welche beim Drucke selbst diente. Diese Setzerabschrift, wie man sie wohl genannt hat, muss von einem humanistisch Gebildeten angefertigt worden sein, der z. B. viele in der Handschrift des Koppernikus lateinisch geschriebene Wörter mit griechischen Lettern schrieb, der die bei Koppernikus regelmässig auftretende Wortform *caelum* eben so regelmässig in *coelum* umwandelte u. s. w. Letztere Schreibweise ist in der Narratio prima des Rhäticus in fortwährender Uebung und hat wesentlich zu der Vermuthung geführt, Rhäticus werde die Setzerabschrift hergestellt haben[2]). Es ist um so auffallender, dass Osiander, der doch die Fortsetzung des Druckes leitete, in seiner unterschriftlosen Vorrede nicht bloss

[1]) F. Hipler hat den Abdruck in der Zeitschr. Math. Phys. XX, Histor.-literar. Abthlg. veranlasst. [2]) Prowe l. c. Bd. I, Abtheilung 2, S. 504 Note *.

zu der Form *caelum* zurückkehrte, sondern sie sogar mit Plinius durch Ableitung von *caelare* rechtfertigte.

In jenen zweiten Nürnberger Aufenthalt fällt die von Rhäticus gehegte, aber nicht zur Ausführung gebrachte Absicht, die Kegelschnitte des Apollonius herauszugeben, von welchen ein griechischer Text aus Regiomontan's Nachlasse in Nürnberg vorhanden war.

Folgenden Jahres 1542 war Rhäticus wieder in Wittenberg und gab dort die Schrift *De lateribus et angulis triangulorum libellus* im Drucke heraus[1]). Regiomontan habe, so erklärt Rhäticus in einer Vorrede, über Dreiecke geschrieben, und diese Schrift sei unlängst veröffentlicht worden, aber lange vor dieser Veröffentlichung habe Koppernikus unabhängig davon die gleichen Gegenstände behandelt, indem er an Ptolemäus vielmehr sich anlehnend dieser Sätze bei der wissenschaftlichen Begründung der Lehre von der Bewegung der Himmelskörper bedurfte, und dessen Untersuchungen übergebe er nun dem Drucke. Der *libellus triangulorum* von 1542 ist in der That nicht mehr und nicht weniger als das 13. und 14. Kapitel des I. Buches der Revolutionen, welche losgetrennt aus dem Uebrigen früher in die Oeffentlichkeit gelangten. Sie wurden allerdings mannigfach von Rhäticus, wie man annehmen muss, abgeändert und auch eine wesentliche Anordnungsänderung hat dieser sich gestattet. Koppernikus hat seinem 13. und 14. Kapitel im 12. Kapitel eine Tafel der halben Sehnen des doppelten Bogens — des Wortes *Sinus* bedient er sich nicht — für die um je 10′ wachsenden Winkel von 0 bis zu 90° vorausgeschickt und den Kreishalbmesser zu 100000 angenommen. Rhäticus hat eine Tabelle verwandter Natur den beiden trigonometrischen Kapiteln nachfolgen lassen, die offenbar seine eigene Arbeit gewesen ist. Das Wort *Sinus* vermied er, wie es in den Revolutionen vermieden ist, aber die Winkel liess er, statt um 10′, um je 1′ wachsen, und sein Kreishalbmesser war hundertmal grösser, also 10000000. Jeder Winkelspalte ist die Angabe der Grade am Kopfe beigedruckt, die der Minuten am Rande von oben nach unten zunehmend. Aber eine zweite Angabe von Graden und Minuten findet sich unten am Fusse der Spalte und am anderen Rande von unten nach oben zunehmend und jene erstere Angabe zu 90° ergänzend, so dass es möglich ist abzulesen, welcher Winkel der jedesmalige Complementwinkel ist, der den aufgefundenen Sinus, wie wir heute sagen, zum Cosinus hat. Diese Einrichtung rührt mit grösster Wahrscheinlichkeit von Rhäticus her. Was wir aus der Vorrede zum Libellus triangulorum anführten, bestätigt das (S. 471) Gesagte, dass

[1]) Prowe l. c. Bd. I, Abtheilung 2, S. 480—489.

Koppernikus bei der ersten Niederschrift seiner Trigonometrie mit der des Regiomontanus wohl nicht bekannt war. Auch die weitere Behauptung, er habe später diese Kenntniss erlangt, sind wir in der Lage bestätigen zu können. Ein Exemplar von Regiomontan's De triangulis hat sich erhalten[1]), welches die eigenhändige Widmung des Rhäticus an Koppernikus trägt. Leider ist dieselbe nicht datirt, so dass es unmöglich ist genau zu bestimmen, ob dieses Geschenk in Frauenburg während des Rhäticus Aufenthalt daselbst von Hand zu Hand erfolgte, oder ob es von Nürnberg oder Wittenberg aus als Zeichen der Dankbarkeit dem fernen Lehrer zugeschickt wurde. Wahrscheinlicher ist das erstere, denn wie wollte man sonst die ebenfalls (S. 471) erwähnte Einschaltung zweier Sätze des Regiomontan in die koppernikanische Originalhandschrift erklären, welche doch Rhäticus aus Preussen nach Nürnberg brachte.

Des Rhäticus Bleiben in Wittenberg war nicht von langer Dauer. Noch im gleichen Jahre 1542, in welchem er heimgekehrt war, verliess er diese Universität, um nach Leipzig überzusiedeln, wohin er einem Rufe folgte. Hier beginnt die zweite Periode seiner Wirksamkeit, von welcher wir in dem XIV. Abschnitte zu reden haben. Wenn wir auch sonst kein Bedenken tragen und im 66. Kapitel den Beweis dafür reichlich liefern werden, die Grenzen der als Ueberschriften der Abschnitte gewählten Zeiträume ziemlich weit zu überschreiten, wenn es darauf ankommt, das Bild einer Persönlichkeit nicht zu zerreissen, bei Rhäticus ist es anders. Seine seit 1542 entfaltete Thätigkeit gipfelt in einem erst 1596 fast 20 Jahre nach seinem 1577 erfolgten Tode unter anderen Händen vollendeten Werke und hängt mit weiteren Arbeiten ähnlicher Natur eng zusammen, welche alsdann auch im Zusammenhange behandelt werden müssen.

Wir dürfen jetzt, nachdem wir Werner und Dürer, Koppernikus und Rhäticus kennen gelernt haben, mit grösserer Befriedigung als am Anfange des Kapitels auch Apian's und des Gemma Frisius uns erinnern, sechs würdige Vertreter geometrisch-trigonometrischer Bestrebungen in Deutschland, von denen allerdings vier eher den Trigonometern als den Geometern angehören, einer, Werner, eine Mittelrolle spielt, Dürer endlich das volle Zeug zum wirklichen Geometer besass: Sinn für geometrische Strenge, verbunden mit der dem Geometer und dem Künstler gemeinsamen Freude an der Gestalt.

Wir würden ein neues Kapitel hier zu beginnen haben, wenn nicht ganz äusserliche Gründe uns veranlassten noch fortzufahren. England, wohin wir unsere Blicke zu wenden haben, liefert uns

[1]) Prowe l. c. Bd. I, Abtheilung II, S. 408.

am Anfange des XVI. Jahrhunderts nur etwa drei Persönlichkeiten, welche unsere Aufmerksamkeit fesseln, aber nicht genügen ein ganzes Kapitel zu füllen, und welche immerhin leichter an Deutschland als an Italien, wohin wir im Nachfolgenden übergehen, sich angliedern lassen.

Cuthbert Tonstall[1]) (1474—1559) studirte in Oxford, dann in Cambridge, später in Padua, wo er den Grad eines Doctors der Rechte sich erwarb, wo er aber auch mathematische Kenntnisse in sich aufnahm, insbesondere aus den Werken von Regiomontanus und Paciuolo. Seine vielseitige Bildung warf ihn 1522 mitten ins politische Leben. Er wurde Bischof von London, Mitglied des geheimen Raths, seit 1530 war er Bischof von Durham. Bald als Botschafter zu diplomatischen Verhandlungen entsandt, bald unter dem Verdachte heimlicher Verschwörung in den Tower geworfen, durch Königin Maria befreit und seinem Amte wiedergegeben, durch Königin Elisabeth neuerdings abgesetzt, lernte er Gunst und Ungunst seiner Fürsten in rascher Abwechslung kennen. Bevor er 1522 zu Amt und Würde gelangte, gab er als Lebewohl an die Wissenschaft, *a farewell to the science*, eine Arithmetik in vier Büchern heraus: *De arte supputandi libri quatuor*, welche auch ausserhalb England sich grossen Beifalls erfreute und 1544 in Strassburg von dem eifrigen Pädagogen jener Stadt, Johannes Sturm, neu herausgegeben wurde. Viel Neues ist in dem Werkchen nicht vorhanden, und Tonstall selbst beruft sich gegen Ende des II. Buches auf Paciuolo als seine Quelle[2]). Man kann dagegen Tonstall das Lob klarer Darstellung, geschickter Anordnung, glücklicher Auswahl von Beispielen nicht vorenthalten.

Wir heben einige wenige Einzelheiten hervor, die bemerkenswerth sein möchten. Tonstall ordnet an verschiedenen Stellen eine Anzahl von Ergebnissen, deren man öfters bedarf, in Tabellen. Eine Einsundeins-, sowie eine Einsvoneinstabelle, ein quadratisch gedrucktes Einmaleins fehlt so wenig als eine Tafel der zehn ersten Kubikzahlen[3]). Bruchbrüche werden so geschrieben, dass nur bei dem ersten ein Bruchstrich steht[4]), z. B. $\frac{3}{4}\,\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\,\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ bedeutet $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{2}$. Beim Quadratwurzelausziehen sucht man Näherungswerthe nach der Regel[5]) $\sqrt{A} = \frac{1}{a}\sqrt{A \cdot a^2}$. Getreidepreis und Brodpreis sollen im

[1]) Kästner I, 94—96. Poggendorff II, 1117. W. W. Rouse Ball, *A History of the study of Mathematics at Cambridge* (Cambridge 1889) pag. 10. [2]) *Ea autem rudimenta ex Arithmetica Lucae de Burgo, cuius nomen in ea arte non parum, neque abs re celebratur: excerpsimus.* pag. 175 der Strassburger Ausgabe, welche uns vorlag. [3]) Ebenda pag. 25, 39, 50, 106—107. [4]) Ebenda pag. 119. [5]) Ebenda pag. 167.

Verhältnisse zu einander stehen und können tabellarisch übersichtlich gemacht werden[1]). Die Fassung der Regel zur Auffindung der Summe einer geometrischen Reihe[2]) ist die gleiche, welche Prodocimo di Beldomandi (S. 207) lehrte. Neu scheint uns eine Regel zur Auffindung des harmonischen Mittels[3]) zweier Zahlen. In Buchstaben, die freilich bei Tonstall nicht vorkommen, läuft sie auf die Formel hinaus, das harmonische Mittel zwischen a und b sei $\frac{(b-a)\cdot a}{b+a} + a$. Tonstall hat seine Arithmetik dem späteren unglücklichen Kanzler Thomas Morus gewidmet und denselben gebeten, Gedächtnissverse zum leichteren Behalten der Regeln des doppelten falschen Ansatzes anzufertigen. Diese Verse lauten[4]):

A plure deme plusculum.
Minus minore subtrahe,
Pluri minus coniungito.
Atque ad minus plus adiice.

Der zweite Schriftsteller, den wir nennen, ist Robert Recorde[5]) (1510—1558). Er war Leibarzt König Eduard VI. und nachmals der Königin Maria, muss aber in seinen Ausgaben die durch diese Stellung möglichen reichen Einnahmen weit überschritten haben, denn der Tod ereilte ihn im Schuldgefängnisse Kings Bench. Schriftstellerische Leistungen hat er seit 1540 veröffentlicht. Ein erstes Werk unter dem Titel *The Grounde of Artes* wurde später von John Dee vermehrt und 1582 in abermals vermehrter Auflage durch John Mellis herausgegeben[6]). Die Engländer, klagt Recorde in der Vorrede, seien zwar nur von wenigen Völkern an natürlichem Menschenverstande übertroffen, aber sie seien entsetzlich unwissend, und dem wolle er durch sein Buch einigermassen abhelfen. Er hat es in Gestalt eines Gespräches zwischen Lehrer und Schüler auf englisch verfasst. Nicht selten kommen im fortlaufenden Texte Reimzeilen vor, welche aber durch den Druck nicht bemerklich gemacht sind[7]). Anfangs werden Fehler des Schülers getadelt und zurechtgewiesen, in deren Auswahl nicht zu verkennen ist, dass Recorde wusste, wo und wie Rechenfehler zu befürchten sind. Einmal schreibt z. B. der Schüler eine 6 statt

[1]) Ebenda pag. 224. [2]) Ebenda pag. 378. [3]) Ebenda pag. 330. [4]) Ebenda pag. 390. [5]) Rouse Ball l. c. pag. 15—19. [6]) Uns lag nur diese 3. Auflage von 1582 vor, nach welcher wir citiren. [7]) Der Schüler sagt z. B. einmal: *And I to youre authoritie my witte doe subdue, whatsoever you say, I take it for true,* worauf der Lehrer erwidert, das sei zu viel und *Thoughe I mighte of my Scholler some credence require, yet except I shew reason, I do it not desire.*

der 9; beim Addiren schreibt er ein anderesmal eine zweiziffrige Theilsumme hin, statt deren Zehner im Sinne zu behalten; einen dritten Fehler begeht er beim Kürzen von Brüchen: er war angewiesen worden, im Zähler und Nenner auftretende Randnullen zu streichen und kürzt dem entsprechend $\frac{400}{650}$ in $\frac{4}{65}$, was dem Lehrer Veranlassung giebt zu betonen, die zu streichenden Nullen müssten in Zähler und Nenner von gleicher Anzahl sein. Die Neunerprobe spielt bei allen Rechnungsverfahren eine wichtige Rolle ungleich der Tonstall'schen Arithmetik, in welcher sie nie angewandt ist. Auch beim Rechnen mit benannten Zahlen, z. B. Pfunden, Schilling, Pence ist die Neunerprobe wichtig. Da 1 £st. = 20 sh. = (18 + 2) sh. und 1 sh. = 12 ₰ = (9 + 3) ₰, so zählt bei der Neunerprobe 1 £st. für 2 sh. und 1 sh. für 3 ₰. Davon sehe ich den Grund nicht, sagt der Schüler. Von vielen anderen Dingen auch nicht, *no more doe you of manye things else*, tröstet der Lehrer, aber man müsse zuerst durch kurz gefasste Regeln die Kunst erlernen, bevor man deren Begründung verstehen könne. Nach dem Zifferrechnen wird auch das Rechnen mit Rechenpfennigen, *counters*, gelehrt, welches nicht nur den Unkundigen des Schreibens und Lesens zu empfehlen sei, sondern auch den Kundigen, wenn sie zufällig Feder oder Tafel nicht zur Hand haben[1]), und auch an den Händen kann man rechnen[2]). Die Einmaleinstabelle gibt Recorde in ihrer dreieckigen Anlage. Die goldene Regel, *the golden rule*, oder directe Regeldetri wird von der rückwärtsigen Regel, *the backer rule*, unterschieden. Wie viel Yard eines 3 Yard breiten Canvas braucht man, um 30 Yard 2 Yard breites Tuch zu füttern, fragt der Lehrer als Beispiel der zweiten Gattung. So breiten Canvas giebt es nicht, *why, there is none so broade*, antwortet der Schüler, worauf ihn der Lehrer mit einem: das gilt mir gleich, *I doe not care for that*, auf das bloss Rechnungsmässige der Aufgabe hinweist. Wir haben bei Tonstall der Tabelle für Getreide- und Brodpreis gedacht. Recorde belehrt uns, dass es eine öffentliche Liste mit Gesetzeskraft, *Statute of Assise of breade*, gab, welche das Gewicht eines Brodes von gleichbleibendem Preise zu dem wachsenden Preise des Weizens in Beziehung setzte, dass aber diese gesetzliche Liste fehlerhaft war. Wir erinnern hier an die von Riese 1533 verfertigte Annaberger Brodordnung (S. 387), welche dort einer öffentlichen Anordnung zu Grunde gelegt wurde. Zuletzt erscheint bei Recorde die Regel des doppelten falschen An-

[1]) *whiche doth not onely serve for them, that cannot write and reade, but also for them, that can doe both, but have not at some times their pen or tables readie with them.* [2]) *The arte of numbering on the hande.*

satzes, *the rule of Falsehode*, und bei dieser Gelegenheit werden die Zeichen + und — eingeführt[1]). Ersteres bedeute, dass die Annahme ein zu Grosses, letzteres dass sie ein zu Kleines geliefert habe. Welcherlei Quellen Recorde gedient haben ist nirgend angegeben. Wenn es einmal heisst *Some men* (*as Stifelius*), so ist das sicherlich ein Zusatz einer späteren Ausgabe, da 1540 die Arithmetica integra noch nicht erschienen war, Stifel's Name als Mathematiker also noch nicht bekannt sein konnte. Ob der Zusatz erst der dritten Ausgabe angehört, oder schon in der zweiten vorkommt, ist uns nicht möglich aufzuklären.

Gewiss nicht minder interessant als Recorde's erste Schrift muss seine zweite sein, welche uns nur durch einen sehr dürftigen Auszug bekannt geworden ist. Es ist eine Algebra, welche er 1556 wieder in Form eines englischen Gespräches zwischen Lehrer und Schüler veröffentlicht hat. Sie führt den Titel: *The Wetstone of witte* in Folge eines recht kühnen Wortspiels: aus *Regula Coss* wurde *cos ingenii*, daraus durch Uebersetzung der Wetzstein des Witzes. Jedenfalls hatte also Recorde die Algebra nicht als *Regula della Cosa*, sondern als *Regula Coss* d. h. aus einem in Deutschland verfassten Werke kennen gelernt. Am bekanntesten ist aus Recorde's Algebra die Einführung des Gleichheitszeichens geworden. Recorde bediente sich dazu des wenn auch nicht sofort, doch endlich zur alleinigen Uebung gewordenen =, weil nichts einander gleicher sein könne, als zwei parallele Strichelchen[2]). Es ist unbegreiflich, dass man klüger als der Erfinder hat sein wollen und die Behauptung aufstellte, = sei desshalb zu der Bedeutung gleich gekommen, weil ein mittelalterliches Abkürzungszeichen für *id est* so aussehe. Auch das Verdienst wird Recorde zugeschrieben[3]), die Ausziehung der Quadratwurzel aus algebraischen Ausdrücken zuerst gelehrt zu haben. Das „zuerst“ wird sich wohl auf England beziehen, wie Recorde auch nachgerühmt wird, er sei der erste Engländer gewesen, der der Koppernikanischen Lehre sich anschloss, denn in anderen Ländern haben wir viel früher als 1556 Quadratwurzeln aus Ausdrücken ziehen sehen, welche aus Summen von mit bestimmten Zahlen vervielfachten

[1]) + *whyche betokeneth too muche, as this line,* — *plaine whitout a crosse line, betokeneth too little.* [2]) *And to avoide the tediouse repetition of these wordes: is equalle to I will sette as I do often in woorke use a pair of paralleles, or Gemowe lines of one length, thus:* =, *because noe 2 thynges can be more equalle.* [3]) *Encyclopaedia Britannica* (9. Edition Edinburgh 1886) XX, 310: *The adaption of the rule for extracting the square root of an integral number to the extraction of the square root of an integral algebraical function is also said to be due to Recorde.*

Potenzen der Unbekannten bestanden, und um Anderes kann es sich nicht gehandelt haben.

Einige weitere Bücher des gleichen Verfassers werden genannt, ein *Pathway to knowledge* (1551), *Principles of geometry* (1551), eine nicht datirte *Mensuration*, verschiedenes Astrologische (1556). Eine Uebersetzung von Euklid's Elementen soll handschriftlich geblieben sein.

Im Vorübergehen nennen wir noch drittens William Buckley[1]), der am Hofe Eduard VI. in Ansehen stand und gegen 1550 starb. Er verfasste eine *Arithmetica memorativa* in lateinischen Versen. Bei Ausziehung von Quadratwurzeln lässt er dem Radicanden sechs Nullen rechts beifügen, um die Wurzel auf $\frac{1}{1000}$ genau zu erhalten. Wir wissen, dass Tonstall Aehnliches lehrte (S. 476). Ausserdem wusste Buckley[2]), wie viele Combinationen zu allen möglichen Classen aus n Elementen gebildet werden können, aus vier Elementen z. B. $1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

64. Kapitel.

Italienische Mathematiker. Die kubische Gleichung.

Wir gelangen in unserer Wanderung nach Italien, dem Lande, welches den unbestritten ersten Rang der dort gemachten Erfindungen den letzten Platz in der mathematischen Entwickelungsgeschichte des Anfanges des XVI. Jahrhunderts verdankt, den wir ihm zu geben uns veranlasst sehen, da Grosses nur dann in seiner ganzen Höhe erscheint, wenn man die niedrigere Gestaltung der Umgebung in Vergleich zu ziehen vermag.

Auch in Italien hat es freilich für die Männer, welche den wesentlichen Ruhepunkt unserer Erzählung bilden müssen, an kleineren Vergleichungspersönlichkeiten nicht gefehlt. Wir müssen zu diesen sogar einen Uebersetzer zählen, Gianbattista Memmo, latinisirt Memmius[3]), einen venetianischen Edlen, welcher glaubte ohne Fachwissen, bloss auf Kenntniss der griechischen Sprache gestützt eine lateinische Uebersetzung der vier ersten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius anfertigen zu können, die sein Sohn 1537 im Drucke herausgab.

Ferner hat es in Italien gleichwie in Deutschland eine grosse

[1]) Kästner I, 48—49. — Poggendorff I, 332. [2]) Todhunter, *History of the Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace* pag. 26. [3]) Vossius pag. 55.

Anzahl von Rechenmeistern geringerer Art gegeben, von denen Druckwerke sich erhalten haben, die ehemalige Verbreitung dieser Schriften bezeugend und der Zukunft die Namensnennung dieser Schriftsteller ermöglichend, aber keineswegs zur unabweisbaren Pflicht machend[1]). Eine rühmliche Ausnahme bildet Francesco Ghaligai[2]), der in seiner Summa de arithmetica von 1521, welche vielleicht von der Practica d'arithmetica von 1548 und von 1552 nicht verschieden ist, ein, so weit der Druck von 1552 dem Urtheile zu Grunde gelegt wird, vortreffliches aus 13 Büchern bestehendes Werk geliefert hat. Die ersten drei Bücher behandeln das Rechnen mit ganzen Zahlen und Brüchen, die Ausziehung der Quadratwurzeln und die Proportionen, die folgenden vier die Regeldetri und deren Anwendung auf kaufmännische Aufgaben (Münzrechnungen, Gesellschaftsrechnungen u. s. w.). Das 8. Buch enthält Aufgaben über die Zerlegung von Zahlen in Theile von vorgeschriebenen Eigenschaften, das 9. ist der Regula falsi gewidmet. Die vier letzten Bücher behandeln recht gründlich die eigentliche Algebra, deren Gegenstände (Ausziehen der Kubikwurzel, Rechnen mit Wurzelgrössen, quadratische Gleichungen u. s. w.) an Aufgaben durchgenommen werden. Ghaligai liebt geschichtliche Notizen, insbesondere nennt er fortwährend Leonardo von Pisa, an den er sich vorzugsweise anschliesst. Ganz eigenthümlich sind wenn nicht die Namen doch die Bezeichnungen der Potenzen der Unbekannten, deren Ghaligai sich bediente. Er schreibt für x^1 = cosa = c^0, x^2 = censo = □, x^3 = cubo = ◫, x^4 = censo di censo = □ di □, x^5 = relato = ⊟. Er hat noch einen Namen für x^{13} = dromico = ⊞. Aber für Uberti, Thesoro universale de abacho (1548), Feliciano, Libro di arithmetica e geometria intitulato scala grimadelli (1550), Verini, Specchio del mercatante (1542), Catani, Pratica delle due prime matematiche (1546) werden auch von dem Geschichtsschreiber, welchem wir diese Büchertitel entnehmen, keine besonderen Verdienste in Anspruch genommen, während ein anderer Schriftsteller[3]) von Feliciano zu berichten weiss, er sei der erste, der von einer feldmesserischen Vorrichtung mit Namen *Squadro* spreche, welche auf einer Figur durch einen kleinen Kreis dargestellt sei, und welche nach einem Berichte des Feliciano über Reisen, welche er unternahm, um sich zu unterrichten, schon seit Ende des XV. Jahrhunderts in Gebrauch gewesen sein müsse. Der Name Sfortunati's begegnet uns von mitunter ihn zurechtweisenden Bemerkungen begleitet in den Schriften der wirklich hervorragenden Mathematiker

[1]) Libri III, 145—147. [2]) Wertheim brieflich. [3]) Giov. Rossi, *Groma e squadro* (Torino 1877) pag. 116—121.

der Zeit, von denen wir gleich zu reden haben. Der hochtrabende Titel seines Werkes lautet: Nuovo lume, libro di arithmetica (1534). Gabriel de Aratoribus aus Mailand ist der Einzige, von dessen Erfindungen uns eine ausdrücklich genannt wird[1]). Er habe zuerst bemerkt, dass $\left(b-\sqrt[3]{c}\right)\left(b+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{b^3}}\right)=b^2-\frac{c}{b}$, eine Bemerkung, welche dazu führt, den Bruch $\frac{a}{b-\sqrt[3]{c}}$ rational machen zu können. Natürlich ist die Regel nur an einem Zahlenbeispiele $\frac{10}{3-\sqrt[3]{5}}$ auseinandergesetzt, an diesem aber so, dass man erkennen muss, wie dem Ergebnisse

$$4\tfrac{1}{11}+\sqrt[3]{12\tfrac{903}{1331}}+\sqrt[3]{2\tfrac{463}{1331}}$$

entsprechend in ähnlichen Fällen gerechnet werden soll.

Die Mathematiker, deren wir in Ausführlichkeit zu gedenken haben, sind Scipione del Ferro, Hieronimo Cardano, Nicolo Tartaglia, Luigi Ferrari.

Gleich für den Erstgenannten sind wir allerdings leider genöthigt, unsere Zusage sofort wieder wesentlich einzuschränken, nicht weil wir eine Ausführlichkeit der Darstellung seiner Verdienste für übel angebracht hielten, sondern weil wir so wenig von ihm wissen[2]). Wann und wo Scipione del Ferro, lateinisch Scipio Ferreus, geboren ist, wissen wir schon nicht. Seine Lehrthätigkeit an der Universität in Bologna dauerte 30 Jahre von 1496 bis 1526, und im letzten Jahre seiner Wirksamkeit ist er zwischen dem 29. October und 16. November gestorben, wie aus Einträgen von Besoldungsauszahlungen in Bologneser Acten hervorgeht. Am 29. October wurde noch eine Summe an ihn ausbezahlt, am 16. November ist schon von ihm als Verstorbenem die Rede. Nachfolger Del Ferro's in der Professur war während eines noch längeren Zeitraumes als dieser sie inne gehabt hatte (1526—1560) sein Schwiegersohn Annibale della Nave, der auch in Besitz der nachgelassenen Schriften des Verstorbenen kam, sie aber leider nicht durch den Druck zum Allgemeingute der damaligen mathematischen Welt machte, sondern nur Einzelnen den Einblick gewährte. Wohin der handschriftliche Nachlass Del Ferro's nach dem Tode seines Erben gekommen sein mag, ist

[1]) *Practica Arithmeticae generalis* von Cardanus (1537) Cap. LI, § 17.
[2]) Gherardi, Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna (deutsch von Max. Curtze) Berlin 1871 (Separatabzug aus Grunert's Archiv Bd. LII).

auch nicht aus den leisesten Andeutungen zu errathen. Zwei Dinge werden uns in Bälde von Scipione del Ferro berichtet werden: dass er vielfach mit jener damals bei einzelnen Italienern beliebten Geometrie mit unverändert bleibender Zirkelöffnung sich beschäftigte und zur Verbreitung dieser geistreichen Spielerei das Seine beitrug, dass er eine hervorragende Stelle in der Geschichte der Auflösung der kubischen Gleichung von der besonderen Form $x^3+ax=b$ gespielt hat.

Wie er die Auflösung dieses für Paciuolo noch unmöglichen, von Anderen in verkehrter Weise behandelten Falles zu Wege brachte, ist nicht berichtet[1]), wenn wir auch glauben durch Rückschlüsse einige Kenntniss davon erlangen zu können. Wann er die Entdeckung gemacht, ist zweifelhaft, indem zwei einander widersprechende Angaben darüber im Drucke erschienen sind. Cardano erzählt in seiner *Ars magna de Regulis Algebraicis*[2]) von 1545: Scipio Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc invenit, tradidit vero Anthonio Mariae Florido Veneto. Er verlegt also die Erfindung etwa auf 1515 und lässt ungewiss, wann die Mittheilung an jenen Floridus erfolgte. Tartaglia dagegen in seinen *Quesiti* von 1546 erzählt[3]), jene Mittheilung an Floridus sei etwa 1506 erfolgt, denn aus einem am 10. December 1536 stattgefundenen Gespräche werden die Worte berichtet: se avantava che già trenta anni tal secreto gl era stato mostrato da un gran mathematico. Die Entdeckung selbst würde somit möglicherweise noch weiter hinaufrücken. Uns scheint, so wenig auf die Festlegung der Erfindungszeit an sich Gewicht zu legen ist, weil keinenfalls vor 1545 etwas davon in die grössere Oeffentlichkeit drang, die Angabe Cardano's die glaubwürdigere, weil sie, wie wir sehen werden, auf Mittheilungen des Schwiegersohnes des Erfinders sich stützt.

Aber dieser Widerspruch in den Zeitangaben ist nur ein kleines Beispiel von den Gegensätzen in den Darstellungen, welche über die Geschichte der Auflösung der kubischen Gleichungen von einander feindseligen Schriftstellern gegeben worden sind, und wir müssen,

[1]) Der erste Versuch, die Lösung des Del Ferro nachzuerfinden, dürfte 1780 von Francis Masères angestellt worden sein, der ihn in den Philosophical Transactions für jenes Jahr, Vol. LXX pag. 221—238, veröffentlichte. [2]) *Ars magna de Regulis Algebraicis, caput XI: De cubo et rebus aequalibus.* In der Lyoner Gesammtausgabe der Werke des Cardano von 1663, die wir als Cardano kurzweg citiren, findet sich die Stelle Bd. IV, pag. 249. [3]) *Quesito XXV fatto da M. Zuane di Tonini da Coi personalmente. l'anno 1536 adi 10. Decembrio in Venetia.* In den 1606 in Venedig gedruckten *Opere del Tartaglia* steht die Stelle in dem *Quesiti* benannten Abschnitte, den wir kurzweg als *Quesiti* citiren werden, auf pag. 235.

um zu einer unparteischen Würdigung zu gelangen, die verschiedenen Erzählungen, wie sie auf einander gefolgt sind, uns vorführen. Wir gestatten uns zur Erleichterung der Uebersichtlichkeit nur die Veränderung, dass wir die vorkommenden Gleichungen u. s. w. in der heute üblichen Form schreiben und nicht von cubo, censo, cosa, numero sprechen, um Potenzen der Unbekannten oder die Gleichungsconstante zu bezeichnen, wie es bei Cardano sowohl als bei Tartaglia alleinige Uebung war.

Im Jahre 1545 erschien in Nürnberg bei dem dortigen Buchdrucker Petreius und mit einer Widmung an Andreas Osiander versehen ein Buch des Cardano unter dem Titel *Ars magna de rebus Algebraicis*. Gleich im I. Kapitel und dann wiederholt im XI. Kapitel[1]) erzählt der Verfasser, wie die Entwickelung der Algebra geschichtlich verlaufen sei. Der Araber Muhammed habe die Lehre begründet. Die quadratischen Gleichungen seien von ihm erledigt worden, wie man aus dem Zeugnisse des Leonardo von Pisa entnehmen könne. Abgeleitete Gleichungsformen, welche Paciuolo veröffentlichte, haben dem sich fügen müssen; wer sie bewältigte, wisse man nicht. Gemeint sind diejenigen Gleichungen, welche in der allgemeinsten Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ enthalten sind. Andere abgeleitete Formen, in welchen eine Gleichungsconstante neben x^3 und x^6 vorkomme, seien, fährt Cardano fort, wie er gelesen habe, von einem Unbekannten behandelt worden; im Drucke seien diese Ergebnisse nicht erschienen. In der Neuzeit erfand Scipio Ferreus die Auflösung von $x^3 + ax = b$ und theilte sie seinem Schüler Floridus mit. Letzterer hatte aber einen wissenschaftlichen Wettkampf mit Nicolaus Tartalea, und bei dieser Veranlassung entdeckte Tartalea neuerdings die Auflösung. Von ihm, *seinem Freunde*, habe er mit vielen Bitten die Auflösung erlangt[2]), welche er bisher, durch Paciuolo's Aeusserungen irre geleitet, für unmöglich gehalten hatte. Jetzt in den Besitz des einen Falles gelangt habe er auf den Beweis Jagd gemacht und dabei erkannt, dass noch Mancherlei gefunden werden könne. Auch Ludovicus Ferrari, sein ehemaliger Schüler, hat Einiges hinzuentdeckt. Was diese Männer fanden werde mit ihrem Namen versehen werden, wo ein Name fehle, seien die Sätze sein Eigenthum[3]).

Die Ars magna de rebus Algebraicis war noch kein Jahr erschienen, so verliess 1546 in Venedig ein Werk des Tartaglia die

---

[1]) Cardano IV, 222 und 249. [2]) *qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit.* [3]) *Porro quae ab his inventa sunt illorum nominibus decorabuntur, caetera quae nomine carent nostra sunt.*

Presse, welches die Ueberschrift führte: *Quesiti et inventioni diverse de Nicolo Tartaglia.* Es waren zunächst acht Bücher voll von Erfindungen, welche zumeist der Mechanik mit Einschluss der Ballistik oder Lehre von den Geschossen und der Befestigungskunde angehörten. *Quesiti*, Fragen, war als Ueberschrift benutzt, weil die Auseinandersetzung immer an Fragen anknüpfte, welche zu bestimmt angegebenen Zeiten von bestimmt genannten Persönlichkeiten vorgelegt worden waren, eine untrügliche Sicherstellung der betreffenden Erfindung und der angeführten Thatsachen, wenn die Personen, auf welche Bezug genommen wurde, noch am Leben und erreichbar waren. Als 9. Buch schloss sich genau in der gleichen Darstellungsform, wie wir sie als die der acht ersten Bücher geschildert haben, eine Reihe von 42 quesiti an, worin von mathematischen Dingen, hauptsächlich von kubischen Gleichungen und deren Auflösung die Rede ist. Das Bild, welches hier von dem geschichtlichen Gange gegeben ist, ergänzt Cardano's Zeichnung durch sehr wesentliche Züge. Im Jahre 1530, so weit greift Tartaglia's Darstellung zurück, legte ein gewisser Zuane de Tonini da Coi, mit lateinischer Namensform Colla, ihm zwei Aufgaben vor: Eine Zahl zu finden, welche mit ihrer um 3 vermehrten Quadratwurzel vervielfacht das Product 5 gebe ($x^3 + 3x^2 = 5$), und drei Zahlen zu finden, von welchen jede folgende um 2 grösser sei als die vorhergehende und die als Product 1000 geben ($x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$). Tartaglia hielt es nicht für unmöglich die zweite Aufgabe zu lösen, wenn er auch keine Regel dafür kannte; für die Auflösung der ersten Aufgabe vollends war er überzeugt eine allgemeine Regel gefunden zu haben, die er aus verschiedenen Gründen noch zu verschweigen für gut halte[1]). Trotz dieses absichtlichen Schweigens können wir aus anderen Angaben wenigstens die Richtung erkennen, wohin Tartaglia's *regola generale* zielte. In den ersten Monaten des Jahres 1535 stellte nämlich Tartaglia seinerseits die Aufgaben[2]), eine irrationale Grösse zu finden, welche mit ihrer um 40 vermehrten Quadratwurzel vervielfacht ein rationales Product gebe, und gleichermassen eine zweite irrationale Grösse, welche mit dem Unterschiede zwischen 30 und ihrer Quadratwurzel vervielfacht Rationales liefere. Darnach vermochte er $x^3 + 40x^2$ und $30x^2 - x^3$, wahrscheinlich allgemein $x^3 + ax^2$ zu einem rationalen Werthe zu machen, aber das war noch lange nicht die Auflösung von $x^3 + ax^2 = c$, d. h. Auflösung der vorgenannten Aufgabe

---

[1]) *Quesiti* pag. 224: *quello de cubo e censo equal a numero io me persuado di hauervi trovato la sua regola generale, ma per al presente la voglio tacere per piu rispetti.* [2]) Ebenda pag. 236.

mit Angabe desjenigen rationalen Werthes, den $x^3 + ax^2$ erhalten sollte. Am 15. December 1536 gab Tartaglia den Werth von x an, welcher $x^2(x + 40)$ rational zu machen geeignet sei. Nehme man $x^2 = 78 - \sqrt{308}$, so sei $x = \sqrt{78 - \sqrt{308}} = \sqrt{77} - 1$ und

$$(78 - \sqrt{308}) \cdot (\sqrt{77} - 1 + 40) = 2888.$$

Da Coi erhob den Einwand, welchen wir grade geäussert haben; er sagte, Tartaglia's Beispiel gründe sich darauf, dass $x^3 + ax^2$ mittels $x^2 = 2a - 2 - \sqrt{8a - 12} = (\sqrt{2a - 3} - 1)^2$ rational werde, aber Tartaglia behauptet in einem Briefe an Cardano vom 12. Februar 1539, Da Coi habe seine Aufgabe nur für den besonderen Fall der Form $x = \sqrt{m} - n$ zu lösen verstanden[1]). Worin seine regola generale bestehe, oder auch nur wie weit er, Tartaglia, die Leistung Da Coi's zu überbieten vermöge, erfahren wir 1539 so wenig als 1530. Es war hier von Aufgaben aus dem Jahre 1535 die Rede. Damals trat eine weitere Persönlichkeit in den Kreis der von Tartaglia Genannten: Antoniomaria Fior, der Floridus des Cardanischen Berichtes. Dieser habe in einen mathematischen Wettkampf auf 30 Aufgaben, welche jeder dem Gegner zu stellen berechtigt sein sollte, mit Tartaglia sich eingelassen, und der Verlauf des Wettkampfes wird in einem Gespräche mit Da Coi vom 10. December 1536 erzählt[2]). Die Aufgaben Fior's waren sämmtlich von der Form $x^3 + ax = b$, und Fior gab dabei an, er sei, wenn auch einfacher Praktiker, schon seit 30 Jahren im Besitze der ihm von einem grossen Mathematiker anvertrauten Auflösungsmethode[3]). Tartaglia strengte sich nun aufs Höchste an, die Regel sich zu verschaffen, und durch sein gutes Geschick fand er sie, *per mia bona sorte la ritrovai*, acht Tage vor Ablauf des Termins, an welchem die Auflösungen einem Notare übergeben werden mussten, nämlich am 12. Februar 1535. Folgenden Tags, am 13. Februar, fand Tartaglia auch die Auflösung des Falles $x^3 = ax + b$. So war Tartaglia im Stande, sämmtliche 30 Auflösungen rechtzeitig und richtig einzuliefern. Fior dagegen rühmte sich, auch die ihm gestellten Aufgaben gelöst zu haben, verlangte aber, einige seiner Freunde sollten zur Prüfung seiner Auflösungen auserwählt werden, worauf Tartaglia, so erzählt dieser wenigstens[4]), ihm öffentlich ein Geschenk mit dem Wettbetrage

1) *Quesiti* pag. 239, 243, 262. 2) Ebenda pag. 234—237. 3) *anchor che non havesse theorica, se avantava che già trenta anni tal secreto gli era stato mostrato da un gran mathematico.* 4) *lui voleva che se elegesse alcuni suoi amici, che giudicassero se lui gli haveva ben risolti, over non, la qual cosa vedendo, che da ognuno era giudicato per perdente, io gli feci publicamente un presente del precio giocato.*

machte, da Fior von Jedem als besiegt betrachtet wurde. In Briefen vom 8. Januar, vom 17. Februar 1537 drängte nunmehr Da Coi, dass Tartaglia seine Entdeckungen veröffentlichte. Sein könne er sie ohnedies nicht nennen, da Fior sie gleichfalls besitze und aus verletzter Eigenliebe leicht dahin geführt werden könne, etwaigen Gegnern von Tartaglia bei Wettkämpfen beizustehen. Nach zwei weiteren Jahren liegen die Sachen noch genau ebenso, wie sie 1537 lagen[1]). Cardano, der nach Tartaglia's Darstellung jetzt zum ersten Male in Scene trat, wandte sich am 12. Februar 1539 brieflich an Tartaglia um dessen Entdeckungen. Er stellte dabei die Frage[2]) nach vier in stetiger geometrischer Progression gebildeten Zahlen, deren Summe 10 und deren Quadratsumme 60 sei; eine ähnliche Aufgabe habe Paciuolo schon gestellt, aber nicht beantwortet. Ausserdem war in dem Briefe die Rede von einem gewissen an Geld und Einfluss reichen Marchese, welcher die grösste Sehnsucht besitze, Tartaglia's Untersuchungen kennen zu lernen. Schon am 18. Februar antwortete Tartaglia. Die sehr elegante Auflösung der Aufgabe von der geometrischen Progression kommt im Wesentlichen auf Folgendes heraus[3]). Seien a, ae, ae^2, ae^3 die Reihenglieder und A ihre Summe; sei ferner $ae + ae^2 = x$, mithin $a + ae^3 = A - x$. Man findet leicht

$$x^3 = (A + 2x)\,a \cdot ae^3$$

oder in anderer Form

$$x^3 = (A + 2x)\,ae \cdot ae^2.$$

So gewinnt man zwei Gleichungspaare

$$ae + ae^2 = x \quad \text{nebst} \quad ae \cdot ae^2 = \frac{x^3}{A + 2x},$$

$$a + ae^3 = A - x \quad \text{nebst} \quad a \cdot ae^3 = \frac{x^3}{A + 2x}.$$

Die als Summe und Product gegebenen Grössen sind aber dadurch noch einzeln gegeben und somit erhält man in von x abhängenden Werthen die vier Glieder der Reihe

$$ae = \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{\frac{1}{4}Ax^2 - \frac{1}{2}x^3}{A + 2x}}$$

$$ae^2 = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{\frac{1}{4}Ax^2 - \frac{1}{2}x^3}{A + 2x}}$$

1) *Quesito* XXXIII, pag. 254—263. 2) Ebenda pag. 256. 3) Ebenda pag. 259—260.

$$a = \frac{A}{2} - \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{\frac{1}{4}A^3 - \frac{3}{4}Ax^2 - \frac{1}{2}x^3}{A + 2x}}$$

$$ae^3 = \frac{A}{2} - \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{\frac{1}{4}A^3 - \frac{3}{4}Ax^2 - \frac{1}{2}x^3}{A + 2x}}.$$

Werden die einzelnen Glinder quadrirt und dann addirt, und heisst B die bekannte Quadratsumme, so findet man $\frac{A^3 - 2Ax^2}{A + 2x} = B$, und nun ist x und sind durch x die Reihenglieder als gefunden zu betrachten. Bezüglich der kubischen Gleichung aber antwortete Tartaglia entschieden ausweichend. Er mache es nicht wie Andere, die ihre Bücher mit breitgetretenen Geschichten füllen; er liebe es, nur Entdeckungen in denselben zu veröffentlichen. Wann freilich das sein werde, sagte Tartaglia in diesem Briefe nicht, aber Da Coi gegenüber hatte er sich am 15. December ausgesprochen[1]), und im gleichen Sinne äusserte er sich in einer mündlichen Unterredung mit Cardano, welche am 25. März 1539 in Mailand stattfand[2]); er sei mit einer Euklidübersetzung beschäftigt, und bevor diese vollendet sei, gebe er seine Auflösung von $x^3 + ax = b$ nicht her; sie bilde nämlich den Schlüssel zu zahlreichen weiteren Entdeckungen, welche er sich nicht von Anderen wegnehmen lassen wolle, was zu befürchten stehe, wenn er gegenwärtig schon diesen Schlüssel aus der Hand gebe. So wohlbegründet diese Abweisung war, so liess sich Tartaglia doch in der gleichen Unterredung, in welcher wieder von dem bewussten, nie mit Namen genannten, im Augenblicke zufällig abwesenden Marchese die Rede war, und in welcher Cardano einen heiligen, später in einem Briefe vom 12. Mai 1539 bestätigten[3]) Eid schwur, das ihm Anvertraute geheim zu halten, so weit breitschlagen, dass er in Versen seine Methode aussprach.

Quando che'l cubo con le cose appresso,
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouan dui altri, differenti in esso.
Dapoi terrai, questo per consueto,
Che'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo, delle cose neto.
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi, ben sottratti
Varrà la tua cosa principale.
In el secondo, de cotesti atti;
Quando che'l cubo restasse lui solo,
Tu osserverai quest' altri contratti,

[1]) *Quesiti* pag. 237. [2]) Ebenda pag. 265. [3]) Ebenda pag. 269.

Del numer farai due, tal part' à uolo,
Che l'una, in l'altra, si produca schietto,
El terzo cubo della cose in stolo;
Delle qual poi, per commun precetto,
Torrai li lati cubi, insieme gionti
Et cotal somma, sarà il tuo concetto:
El terzo, poi de questi nostri conti,
Se solue col secondo, se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questi trouai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecent' è quattro è trenta;
Con fondamenti ben saldi, e gagliardi.
Nella Città dal mar' intorno centa[1]).

Der scheinbare Widerspruch gegen die frühere Datumsangabe des 12. Februar 1535 (S. 486) beruhte auf der venetianischen Zeitrechnung mit späterem Jahresanfange, so dass der Monat Februar dem Jahresende von 1534 angehörte. Nach der Unterredung, beziehungsweise der Mittheilung der Verse, die man kaum als Stegreifverse wird betrachten dürfen, so dass es beinahe aussieht, als habe Tartaglia sich darauf vorbereitet, sich überrumpeln zu lassen, reiste dieser schleunigst ab. Cardano verstand den Sinn der Verse nicht, was man ihm kaum wird verübeln können, und wandte sich am 9. April abermals brieflich an Tartaglia um Erläuterung, welche dieser in seiner Antwort vom 23. April 1539 nunmehr auf's Deutlichste gab[2]). Man müsse, um $x^3 = ax + b$ aufzulösen, die beiden Gleichungen $u - v = b$, $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ behandeln, dann sei $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Auch hier bedarf es kaum der Bemerkung, dass unsere Darstellung den Sinn, aber nicht die Form von Tartaglia's Auseinandersetzungen wiedergiebt, in denen allgemeine Buchstabenausdrücke überhaupt nicht vorkommen. Nun machte Cardano sich neuerdings an die Untersuchung und bemerkte[3]) am 4. August 1539 die Schwierigkeit des Falles, welchen man später den irreductibeln genannt hat, und welcher zu Tage tritt, wenn $\left(\frac{a}{3}\right)^3 > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ z. B. bei $x^3 = 9x + 10$, wo $27 > 25$. Tartaglia erkannte aus dieser Beobachtung Cardano's, dass derselbe mit eigenen Forschungen vorangegangen war und suchte in seiner Antwort ihn irre zu leiten, was ihm aber nicht gelang. Inzwischen kam Da Coi im Januar 1540 nach Mailand, verkehrte daselbst mit Cardano, gab auch einige Monate hindurch mathematischen Unterricht, dann reiste er mit Schimpf und Schande bedeckt wieder ab, um plötzlich Mitte April neuerdings dort aufzutauchen und in die dem Cardano abgenommene Professur der Mathematik einzutreten[4]).

[1]) *Quesiti* pag. 266. [2]) Ebenda pag. 268. [3]) Ebenda pag. 271. [4]) Ebenda pag. 275 und 278.

Noch ein letztes Gespräch aus dem Jahre 1541 ist in den Quesiti abgedruckt. Es findet zwischen Tartaglia und einem englischen Freunde Ricardo Venthuorthe vor dessen Rückreise in die Heimath statt und enthält zwei nicht unwesentliche Mittheilungen, welche wir zu späterer Benutzung uns merken wollen. Erstens behauptet Tartaglia, $ax^2 = b + x^3$ besitze zwei oder vielleicht noch mehrere Auflösungen[1]), und zweitens erzählt er[2]), er habe in der schlaflosen Nacht von Martini 1536 die Auflösung der Gleichungen $x^6 + ax^3 = b$, $x^6 + b = ax^3$ und $x^6 = ax^3 + b$ gefunden. Ueber Cardano's Buch von 1545 ist in den Quesiti keine unmittelbare Aeusserung vorhanden, aber die Erzählung von dem am 25. März 1539 geleisteten, am 12. Mai gleichen Jahres bestätigten Eide kam doch der unmittelbaren Beschuldigung, durch jenes Buch einen Eidbruch begangen zu haben, sehr nahe. Tartaglia's englischer Freund hiess in richtiger Schreibart des Namens Richard Wentworth und war der Sohn von Thomas Wentworth, der wegen seines Reichthums Gold-Thomas, *Golden Thomas*, genannt wurde und einer hohen Geldstrafe sich unterwarf, um nicht zum Ritter ernannt zu werden. Ebenderselbe Thomas erhielt 1528 das Vorrecht, in Gegenwart des Königs bedeckten Hauptes bleiben zu dürfen[3]).

Lodovico oder Luigi Ferrari, der dankerfüllte Schüler Cardano's, der sich mit seinem Lehrer so sehr eins wusste, dass er sich selbst von ihm geschaffen, *che sono creato suo*, nannte, nahm den hingeworfenen Fehdehandschuh auf, oder vielmehr beantwortete ihn durch eine öffentliche Herausforderung an Tartaglia, und bei dieser allein blieb es nicht, denn Tartaglia gab eine Erwiderung, und nicht weniger als sechsmaliger Wechsel solcher Schmähschriften liess die gelehrte Mitwelt erkennen, dass wenigstens im Gebrauche von Ausdrücken, wie man sie nur auf Fischmärkten zu vernehmen pflegt, die beiden Gegner einander vollständig gewachsen waren. Sämmtliche 6 *Cartelli* und 6 *Risposte*, Herausforderungen und Erwiderungsschreiben, haben sich erhalten[4]). Sie waren als Flugschriften gedruckt und wurden massenweise verbreitet. Alle führen neben der Unterschrift des Verfassers auch die von Zeugen, welche das Datum der Unterschrift beglaubigten. Ferrari's Cartelli sind vom 10. Februar, 1. April,

[1]) *Quesiti* pag. 281. [2]) Ebenda pag. 282. [3]) *Catalogue Libri* (1861) II, 737—738. [4]) *I sei cartelli di matematica disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di Lodovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolo Tartaglia comprendenti le soluzioni de' quesiti dall' una e dall' altra parte propositi. Raccolti autografati e pubblicati da Enrico Giordani.* Milano 1876. Der Ausdruck *che sono creato suo* ist von Ferrari erstmalig *Cartello I* pag. 2 gebraucht.

1. Juni, 10. August, October 1547, 14. Juli 1548. Tartaglia's Risposte sind vom 19. Februar, 21. April, 9. Juli, 30. August 1547, 16. Juni, 24. Juli 1548, so dass also durch rund anderthalb Jahre die wüste Schimpferei in Thätigkeit blieb. Wir würden sie unberücksichtigt lassen, wenn nicht zwischen dem gegenseitigen Schelten auch Thatsächliches mitgetheilt wäre, welches zu wissen nothwendig ist. Ferrari, sagten wir, trat als Kämpfer für seinen geliebten Lehrer auf. Er behauptet in den ersten Büchern der Quesiti, deren 8. Buch ein Plagiat an Jordanus Nemorarius sei (eine Anklage, welche im II. Cartello wiederkehrt)[1]) eine Menge von Fehlern nachweisen zu können; er behauptet, Tartaglia habe mit Unrecht Tadel gegen Cardano erhoben, den er zu nennen kaum würdig sei, il quale a pena sete degno di nominare; er erbietet sich, um einen zu hinterlegenden Betrag, der bis zur Höhe von 200 Scudi von Tartaglia bestimmt werden möge, mit diesem über alte und neue Schriftsteller, fremde und eigene Erfindungen öffentlich zu disputiren. Tartaglia erwiderte, er denke gar nicht daran, auf Ferrari's Herausforderung einzugehen; er habe nur mit Cardano einen Streit, und wenn dieser sich bereit finde hervorzutreten, dann sei es ihm recht. Er schlage dann vor, sich gegenseitig Aufgaben zu stellen, die Jeder in seiner Heimath, Cardano und Ferrari in Mailand, er in Venedig zu lösen habe; dadurch sei die Reise an einen fremden Ort ebensowohl als die öffentliche Disputation und die Wahl von Richtern vermieden. Im II. Cartello kam Ferrari auf die Geschichte der Auflösung der kubischen Gleichungen[2]). Tartaglia's Vorwürfe gegen Cardano beruhten darauf, dass dieser seine Erfindung preisgegeben habe. Wie aber, wenn das von Cardano Veröffentlichte die Erfindung eines Dritten war? „Vor jetzt fünf Jahren, erklärt Ferrari dadurch das Jahr 1542 bezeichnend, als Cardano nach Bologna reiste und ich ihm Begleiter war, sahen wir Annibale de Nave, einen Mann von Geist und liebenswürdigen Umgangsformen, der uns ein von der Hand seines Schwiegervaters Scipione del Ferro vor langer Zeit geschriebenes Büchlein zeigte, in welchem jene Erfindung mit Eleganz und Gelehrsamkeit entwickelt niedergelegt ist. Ich würde Solches nicht schreiben, um nicht den Schein auf mich zu laden, dass ich, wie es Deine Gewohnheit ist, Gespräche erfinde, wenn nicht Annibale noch am Leben wäre, und als Zeuge beigezogen werden könnte. Und überdies was bedarf es äusseren Zeugnisses? Gestehst Du am Ende Deines Buches, in eben jenem Abschnitte, in welchem Du in so unverschämter Weise Cardano nennest, nicht selbst zu, dass Dein Gegner Fior vor vielen

[1]) *Cartello I* pag. 2 und *Cartello II* pag. 6. [2]) *Cartello II* pag. 3.

Jahren die genannte Erfindung besass?“ Wir lassen sofort aus Tartaglia's Risposta[1]) seine Erwiderung auf diesen Punkt folgen. „Was diese Einzelheit betrifft, so scheint es mir nicht erlaubt, sie zu bestreiten, geschweige denn zu leugnen, denn es wäre eine übergrosse Anmassung von mir, zu verstehen zu geben, dass Dinge, welche durch mich erfunden worden sind, nicht zu anderen Zeiten von Anderen erfunden worden sein können und in gleicher Weise in Zukunft von Anderen erfunden werden dürften, auch wenn sie nicht durch den genannten Herrn Hieronymo oder mich der Oeffentlichkeit übergeben worden wären. Wohl aber kann ich der Wahrheit gemäss sagen, dass ich diese Dinge niemals bei irgend einem Schriftsteller gesehen habe, dass ich sie vielmehr und zwar rasch erfunden habe, zugleich mit anderen Einzelheiten, die vielleicht von noch grösserer Bedeutung sind.“ Vielleicht rechnete Tartaglia zu diesen Einzelheiten die auf der gleichen Seite der II. Risposta erwähnte Erledigung der drei Fälle vom Kubus, Census und Zahl, welche er, wie vielen Leuten in Venedig bekannt sei, schon fünf Jahre vor seinen sonstigen Eröffnungen an Cardano, mithin 1534, vollzogen haben will. Wieder in der II. Risposta[2]) wendet sich Tartaglia gegen den früher erwähnten Vorwurf eines Plagiates an Jordanus Nemorarius. Jedenfalls seien die Beweise, sei die Anordnung von ihm selbst, und ein mathematischer Satz ohne Beweis sei werthlos; auch habe jeder Schriftsteller, welcher ein Werk in anderer Anordnung als sein Vorgänger herausgebe, auch bei gleichem Inhalte, das Recht von seinem Werke zu reden. Werfe man ihm vor, Jordanus gar nicht genannt zu haben, so sei das aus Schonung geschehen, denn er hätte Jordanus nicht nennen können, ohne ihm schwere Vorwürfe wegen der Dunkelheit seiner Darstellung zu machen. Abgesehen von diesen thatsächlichen Aeusserungen, denen wir nachher noch einige weitere hinzuzufügen haben werden, handelt es sich in dem II. Cartello und der zugehörigen Risposta vielfach um Formfragen, welche auch in den folgenden Streitschriften wiederkehren. Tartaglia wünscht regelmässig die Person Cardano's ins Spiel zu ziehen, Ferrari lehnt diesen Versuch eben so regelmässig ab. Ferrari will eine öffentliche Disputation in einer der vier Städte Rom, Florenz, Pisa, Bologna, die nähere Wahl der Stadt Tartaglia freistellend; die Richter sollen dann dem Orte der Disputation entnommen werden; Tartaglia besteht darauf, man wolle sich gegenseitig gedruckte innerhalb bestimmter Frist zu lösende Aufgaben vorlegen, des Ortswechsels bedürfe es so wenig wie der Richter, weil mathematische Auflösungen, wenn richtig, überall und von Jedem als

[1]) *Risposta II* pag. 6. [2]) Ebenda pag. 7—8.

richtig erkannt, beziehungsweise zugestanden werden müssten. Einen weiteren Streitpunkt bildet die Frage, wo und bei wem die beiden Gegner die betreffende Wettsumme in Verwahrung zu geben haben sollten, und ob baares Geld niedergelegt werden müsse, oder ob Tartaglia berechtigt sein solle, statt eines Theiles der Summe die noch in seinem Besitze befindlichen Druckexemplare der Quesiti zu benutzen. Tartaglia's Bestreben, sagten wir, ging fortwährend dahin, einer persönlichen Begegnung auszuweichen und dafür Aufgaben stellen zu lassen. Er selbst stellte schon in der II. Risposta deren 31, zu deren Beantwortung er Ferrari $2\frac{1}{2}$ Monate als Frist setzte. Ferrari stellte im III. Cartello 31 Gegenaufgaben, welche Tartaglia gleich in der III. Risposta beantwortete, von da an immer höhnend, er sei bereits Sieger, da er die ihm gestellten Aufgaben in kürzester Frist gelöst habe, Ferrari dagegen jede Beantwortung schuldig geblieben sei. Im V. Cartello begegnete Ferrari diesem Hohne in doppelter Weise. Erstlich zerpflückte er unbarmherzig die sogenannten Auflösungen Tartaglia's, von welchen er nur fünf als richtig gelten liess, vierzehn seien gar nicht, zwölf unrichtig beantwortet; zweitens schickte er die Beantwortung sämmtlicher Aufgaben des Tartaglia ein. Bei letzterer Gelegenheit ist ein Ausspruch Ferrari's nicht ohne Bedeutung. Die siebzehn ersten Aufgaben des Tartaglia bezogen sich auf Geometrie mit einer einzigen Zirkelöffnung[1]), und dieses, sagt Ferrari, freue ihn, weil er wohl wisse, dass seit etwa 50 Jahren viele schönen Geister erfolgreiche Mühe darauf verwandten, unter welchen Scipione del Ferro aus Bologna seligen Angedenkens einen grossen Antheil habe. Während die vier ersten Risposte den Cartelli innerhalb weniger Wochen nachfolgten, verging jetzt ein achtmonatlicher Zwischenraum, bevor Tartaglia antwortete, und noch überraschender als die Zeitangabe ist der Inhalt der V. Risposta. Tartaglia erklärte sich nämlich jetzt plötzlich zu der bisher von ihm abgelehnten öffentlichen Disputation bereit[2]) und sogar bereit, zu diesem Zwecke nach Mailand zu kommen. Der Umschwung ist ein zu unvermittelter, als dass nicht nach einem begründenden Zwischengliede gefragt werden müsste, und Ferrari fand dasselbe darin[3]), dass Tartaglia, der inzwischen nach Brescia übergesiedelt war, sich mit Annahme der Herausforderung einer Bedingung fügte, die man an seinem neuen Wohnsitze ihm gestellt hatte.

[1]) *Cartello V* pag. 25: *quella bella inventione di operare senza mutare l'apertura del compasso.* Ausführliche Auszüge bei W. M. Kutta, Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung in Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Bd. 71 Nr. 3. Halle 1897. [2]) *Risposta V* pag. 7. [3]) *Cartello VI* pag. 9.

Wie dem sei, das öffentliche Zusammentreffen in Mailand fand am 10. August 1548 statt, und über dessen Verlauf ist ein Bericht von Tartaglia vorhanden[1]. Er habe sich eingefunden nur von einem Bruder begleitet, während Ferrari mit einer grossen Zahl von Freunden erschien, Cardano hatte das Weite gesucht. Als er der versammelten Menge auseinandergesetzt habe, was der Ursprung des Streites und wesshalb er nach Mailand gekommen sei, und nun begonnen habe, eine Kritik der 31 Auflösungen Ferrari's zu geben, sei er mit dem Verlangen, erst müssten Kampfrichter gewählt werden, unterbrochen worden. Er habe diesem Ansinnen widersprochen, weil er keinen der Anwesenden kenne; Alle sollten Richter sein, und mit ihnen Alle, welchen seine gedruckte Kritik zu Handen kommen werde. Endlich liess man ihn reden. Er fing mit der Kritik der Beantwortung einer auf Ptolemäus bezüglichen Frage an und brachte den Gegner dahin, nicht leugnen zu können, dass er diese Aufgabe unrichtig gelöst habe. Er habe fortfahren wollen; da sei er mit lautem Zurufe unterbrochen worden, nun müsse Ferrari zur Kritik seiner Auflösungen das Wort haben. Vergeblich habe er mit der Stimme durchzudringen versucht und beansprucht, man möge ihn vollenden lassen, dann könne Ferrari reden, was er wolle. Man verlangte auf's Ungestümste das Wort für Ferrari und dieser erhielt es. Der habe dann über eine auf Vitruvius bezügliche Aufgabe, zu deren Lösung er, Tartaglia, angeblich nicht im Stande gewesen sei, so lange geschwatzt, bis die Mittagsstunde herankam und Jeder zum Essen ging. Da habe er, Tartaglia, an diesem Verlaufe gemerkt, wie es gehen werde, habe für den folgenden Tag noch Schlimmeres befürchtet und sei schweigend und auf einem anderen Wege als der war, auf dem er gekommen, nach Brescia zurückgekehrt. Auf die Brescianer selbst ist Tartaglia in diesem seinem Berichte gleichfalls nicht sehr gut zu sprechen. Man habe ihn dorthin zur öffentlichen Erklärung des Euklid mit grossen Versprechungen und kleinen Erfüllungen berufen; man habe, als er seine Besoldung verlangte, ihn von Herodes zu Pilatus geschickt; man habe einen Rechtsstreit, den er darüber begonnen, Monate lang herumgezogen, ihn endlich mit seinen Ansprüchen auf einen der ersten Rechtsgelehrten von Brescia verwiesen, mit welchem zu processiren er nicht Lust gehabt habe, und so sei er endlich nach grossen Verlusten nach Venedig zurückgekehrt.

Damit schliessen die gedruckten Akten über den Streit wegen der Erfindung der Auflösung der kubischen Gleichung. Aussprüche von Da Coi und von Fior sind nicht vorhanden. Ob sie bei Ver-

[1] Tartaglia, *General trattato di numeri et misure* Part. II fol. 41 (Vinegia 1556).

öffentlichung der Quesiti beide schon gestorben waren? Es hält fast eben so schwer, es zu glauben, als es in Abrede zu stellen. Denn wenn Fior noch lebte, wie kommt es, dass keiner der beiden Gegner auf ihn als Zeugen sich beruft? wenn er todt war, wie kommt es, dass wieder mit keinem Worte in den Streitschriften davon Erwähnung geschieht? Und das gleiche Dilemma gilt für Da Coi.

Genöthigt aus dem nun einmal allein Vorhandenen ein Urtheil zu begründen, müssen wir dazu noch eine, wie uns scheint, sehr wichtige, sogar unerlässliche Vorfrage beantworten: wer sind die Gegner selbst? Wir meinen, was war ihr persönlicher Charakter, was ihre durch wissenschaftliche Thaten bekundete Leistungsfähigkeit?

Die uns für diesen Zweck zu Gebote stehenden Quellen sind nicht über jeden Zweifel erhaben. Cardano hat in einer besonderen Schrift *De vita propria*[1] von sich erzählt. Tartaglia hat Autobiographisches dem 6. Buche der Quesiti einverleibt[2]. Ueber Ferrari berichtet sein Freund und Lehrer Cardano unter der Ueberschrift *Vita Ludovici Ferrarii Bononiensis* in kurzem Lebensabrisse[3].

Cardano hat ein jedenfalls nicht geschmeicheltes Bild seiner selbst der Nachwelt hinterlassen. Ein Widerstreit von Leidenschaften der niedrigsten Art und tiefster Frömmigkeit, von umfassendstem Wissen und blindem Aberglauben steht er vor uns. Seine äusseren Lebensschicksale zeigen ihn uns frühreif durch harte, alle körperlichen und geistigen Kräfte fast im Uebermaasse anstrengende Erziehung. Schon 1523 mit 22 Jahren lehrte Cardano in Pavia die Mathematik; drei Jahre später war er Doctor medicinae in Padua, konnte aber das durch diese Stellung ihm eröffnete einträgliche Gewerbe nicht ausüben, weil der Makel ausserehelicher Geburt an ihm haftete; erst 1539 gelang es ihm, in der Genossenschaft der Mailänder Aerzte Aufnahme zu finden. Nun schienen die Vermögensverhältnisse des auch durch zahlreiche Veröffentlichungen mathematischen, philosophischen, medicinischen Inhalts bald hochberühmten Gelehrten sich bessern zu müssen, aber es schien nur so. Nach Dänemark und Schottland wurde er berufen, Frankreich und Deutschland durchstreifte er, überall lohnenden Erfolg findend, aber auch allen Ausschweifungen sich ergebend. In Bologna, wo er von 1562 bis 1570 lehrte, führte eine Schuld von 1800 Scudi, die er nicht zu tilgen vermochte, ihn ins Gefängniss. Sein letzter Aufenthaltsort war Rom, wo er am 21. September 1576 starb.

[1] Cardano I, 1—54. [2] *Quesiti* pag. 151—153. [3] Cardano IX, 568—569. Vergl. Gherardi, Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna S. 126—132.

Sein Schüler, im Wissenswürdigen wie im wenig Nachahmungswerthen, wurde 1537 der damals 15jährige Luigi Ferrari aus Bologna. Begabt und gelehrt in den mathematischen Wissenschaften aber von zügelloser Ausgelassenheit sei er gewesen, und für die Treue der Schilderung spricht ein Raufhandel, in welchen er mit 17 Jahren sich einliess, und bei welchem der jähzornige Jüngling sämmtliche Finger der rechten Hand einbüsste, spricht sein nicht viel späteres Auftreten als Lehrer in Mailand. Die Cartelli gegen Tartaglia schrieb er mit 25 Jahren. Wenn Cardano, welcher das Geburtsjahr 1522 ausdrücklich nennt, die Behauptung ausspricht, Ferrari habe Tartaglia besiegt, bevor er 20 Jahre alt gewesen, so ist dieses ein offenbarer Irrthum, vielleicht sogar absichtlich begangen, um Ferrari's Bedeutsamkeit zu erhöhen. In Mailand war Ferrari in der Zeit zwischen 1549 und 1556 auch Vorsteher des Katasterwesens. Eine Fistel, die er sich zuzog, und die es ihm unmöglich machte, zu Pferde zu sitzen und wie ehedem die praktischen Arbeiten seiner Untergebenen da und dort zu beaufsichtigen, veranlassten ihn wohl, die Stellung aufzugeben und nach der Heimath, nach Bologna zurückzukehren. Dort lebte er als Lehrer seiner Wissenschaft bis 1565. Ueber seinem Tode schwebt ein geheimnissvolles Dunkel. Seine Schwester, so wird kurz berichtet, habe ihn muthmasslich vergiftet.

Tartaglia endlich erzählt, sein Vater Micheletto — einen Familiennamen will er von ihm niemals gekannt haben — sei 1506 etwa gestorben und habe es der Wittwe überlassen, sich mit ihren drei Kindern, unter welchen Nicolo, der damals sechs Jahre alt war, aber bereits lesen konnte, zu ernähren. Der etwa zwölfjährige Knabe wurde 1512 bei der Einnahme Brescias durch die Franzosen im Dome, wohin die Mutter sich mit den Kindern geflüchtet hatte, schwer verwundet. Ein furchtbarer Hieb über die unteren Theile des Gesichts heilte nur mangelhaft, die Zähne blieben wacklig, die Sprache wurde stotternd, und um ihretwillen legten Nicolo's Altersgenossen ihm einen Spottnamen bei, den er später freiwillig als Namen behielt: der Stammler, Tartaglia. Als er 14 Jahre alt geworden war, brachte die Mutter ihn zu einem Schreiblehrer. Es war Sitte, das Schulgeld in drei Abtheilungen zu entrichten. Das erste Drittel musste voraus erlegt werden, das zweite, wenn die Hälfte der Buchstaben, also A bis K, erlernt war, das letzte Drittel am Ende des Unterrichts. Tartaglia's Mutter hatte nur das erste Drittel aufzubringen gewusst. Der Knabe wurde desshalb entlassen, noch ehe er die Anfangsbuchstaben seines Namens zu schreiben erlernt hatte, wie er mit bitterer Selbstverhöhnung erzählt, und war von da an in Allem sein eigener Lehrer, sich stets nach den Vorschriften der Verstorbenen richtend, *sopra le opere degli huomini defonti continuamente mi son travagliato.* Die Erzählung ist jedenfalls sehr geschickt angelegt, das Mitleid und damit auch das Wohlwollen der Leser anzuregen. Ob sie überall wahrheitsgetreu ist, ist eine andere Frage. Einen Familiennamen seines Vaters will Tartaglia z. B. 1546 nie gekannt haben. Als er elf Jahre später am 10. December 1557 in Venedig sein Testament machte[1]), wird in diesem amtlichen Actenstücke als Familiennamen Fontana angegeben. Ist das der Name der Mutter gewesen, oder hat ihn Tartaglia sich selbst beigelegt, weil etwa ein Brunnen bei seinem Hause stand, oder hat die Nothwendigkeit, ein Testament genau anfertigen zu lassen, sein Gedächtniss so sehr geschärft, dass der väterliche Name ihm nun doch einfiel? Alle drei Möglichkeiten sind vorhanden. Eine Zusatzbemerkung des Notars zum Testamente giebt an, der Erblasser sei in der Nacht vom 13. auf den 14. December 1557 verstorben. Aus unseren Auszügen aus den Streitschriften wissen wir überdies, dass Tartaglia eine mathematische Lehrthätigkeit abwechselnd in Venedig, in Brescia, dann wieder in Venedig ausübte; die wesentlichsten Umstände auch seines Lebens sind uns mithin bekannt.

65. Kapitel.

Cardano's ältere Schriften.

Weit wichtiger für die abschliessende Beurtheilung des grossen Streites, wichtiger unter allen Umständen für die Geschichte der Mathematik ist es, kennen zu lernen, was jeder Einzelne unter den Männern, mit welchen wir uns beschäftigen, wissenschaftlich geleistet hat. Allerdings werden wir uns dabei entschliessen müssen, bei Aufzählung der Verdienste Cardano's die Zeitgrenze von 1550 weiter zu überschreiten, als wir es uns irgend seither gestatteten. Der Zusammenhang seiner Leistungen muss gewahrt bleiben, wenn man die ganze Bedeutung des Mannes erkennen will.

Wir beginnen mit einer Schrift recht untergeordneter Bedeutung, mit Cardano's *Libellus qui dicitur Computus minor*[2]) von 1539. Kaum dass wir Zinsrechnungen und ein grosses Einmaleins mit der Ausdehnung bis zu 20 mal 20 darin erwähnenswerth finden.

Dem gleichen Jahre 1539 gehört die *Practica Arithmeticae gene-*

[1]) Veröffentlicht durch Fürst Bald. Boncompagni in dem Bande *In memoriam Dominici Chelini. Collectanea mathematica* (Milano 1881) pag. 363—412. [2]) Cardano IV, 216—220.

ralis[1]) an. Im Grossen und Ganzen der Summa des Paciuolo nachgebildet, enthält sie doch manches Eigenthümliche. Der Gedanke, Gleichungen dadurch in ihrem Grade zu erniedrigen und damit einer Auflösung fähig zu machen, dass man auf beiden Seiten Gleiches addirt und dann durch einen sich kund gebenden Gemeintheiler dividirt, ist wiederholt in Anwendung gebracht[2]). Aus

$$2x^3 + 4x^2 + 25 = 16x + 55$$

wird durch beiderseitige Addition von $2x^2 + 10x + 5$ die neue Gleichung $(2x + 6)(x^2 + 5) = (2x + 6)(x + 10)$ und daraus $x^2 = x + 5$, aus welcher $x = \frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{1}{4}}$ sich ergiebt. Umständlicher verfährt Cardano bei $6x^3 - 4x^2 = 34x + 24$. Zunächst addirt er beiderseitig $6x^3 - 4x^2$ und erhält $2(6x^3 - 4x^2) = 6x^3 - 4x^2 + 34x + 24$. Dann addirt er nochmals links $2(12x^2)$, rechts $24x^2$ und erhält

$$2(6x^3 + 8x^2) = 6x^3 + 20x^2 + 34x + 24$$

oder

$$2 \cdot 2x^2(3x + 4) = (3x + 4)(2x^2 + 4x + 6),$$

woraus $x^2 = 2x + 3$ und $x = 3$ sich ergiebt. Auch darauf wird aufmerksam gemacht[3]), dass die Division $a^3x^3 - a^3$ durch $a(x - 1)$, sowie die von $a^3x^3 + a^3$ durch $a(x + 1)$ aufgehe, und dass man dieses sich wohl merken müsse, um Gleichungen von der Form

$$\alpha x^3 = \beta x + \gamma \quad \text{und} \quad \alpha x^3 + \gamma = \beta x$$

durch beiderseitig vollzogene Additionen in eine durch $x \pm 1$ theilbare Gestalt zu bringen. Irgend eine Aufgabe kaufmännischer Natur dadurch in Gleichungsgestalt zu bringen, dass man eine unbekannte Grösse als res betrachte und als solche in die Rechnung einbeziehe, nennt Cardano *Regula de modo*[4]). Es ist im Grunde die gleiche Vorschrift, welche einige Jahre später Michael Stifel bei jeder Gelegenheit breittrat (S. 440), und in welcher wir Cardano's Einfluss gemuthmasst haben. Jedenfalls hat nämlich Stifel die Practica Arithmeticae generalis gekannt, welcher er einige am Ende des 3. Buches der Arithmetica integra mitgetheilte Aufgaben ausdrücklich entnahm[5]). Gleichungen mit mehreren Unbekannten behandelt Cardano nach der von ihm erfundenen *Regula de duplica*[6]), welche in der Einsetzung neuer, die Rechnung erleichternder Hilfsgrössen besteht. Die beiden Gleichungen, welche wir heute $x^2 + y^2 = a$ und $xy + x + y = b$ schreiben würden, bringt Cardano z. B. durch $xy = z$ zur Auflösung.

[1]) Cardano IV, 14—215. [2]) Ebenda IV, 29 und 61. [3]) Ebenda IV, 83. [4]) Ebenda IV, 79. [5]) Beispielsweise ist *Arithmetica integra* fol. 306 recto identisch mit Cardano IV, 139 Nr. 14 u. s. w. [6]) Cardano IV, 86.

$x + y = b - z$, $(x + y)^2 = (b - z)^2$. Abera uch $(x + y)^2 = a + 2z$ und daher

$$b^2 - 2bz + z^2 = a + 2z, \quad z = b + 1 - \sqrt{a + 2b + 1},$$
$$x + y = b - z = -1 + \sqrt{a + 2b + 1}.$$

Dieses letzte Ergebniss lässt erkennen, warum bei Auflösung der nach z quadratischen Gleichung die Wurzelgrösse mit dem Minuszeichen genommen werden musste. Weiter ist

$$(x - y)^2 = a - 2z = a - 2b - 2 + \sqrt{4a + 8b + 4},$$

also auch

$$x - y = \sqrt{a - 2b - 2 + \sqrt{4a + 8b + 4}}$$

bekannt, und nun sind die Werthe x und y sofort zu finden.

Quadratwurzeln, deren Ausziehung bei den Gleichungsauflösungen vielfach verlangt wird, sind schon vorher nach zwei Methoden näherungsweise berechnet[1]). Die erste Methode geht aus von $\sqrt{a} \sim b$, wo b die ganzzahlige Annäherung bedeutet; ist dann $a - b^2 = r_1$, so ist die zweite Annäherung $\sqrt{a} \sim b_1$ mit $b_1 = b + \frac{r_1}{2b}$; dann wird weiter

$$b_1^2 - a = \frac{r_1^2}{4b^2} = r_2, \quad a = b_1^2 - r_2$$

gesetzt und

$$\sqrt{a} \sim b_2 \text{ mit } b_2 = b_1 - \frac{r_2}{2b_1} \text{ u. s. w.}$$

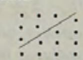
als neue Annäherungen. Die zweite Methode dient für Quadrat- und Kubikwurzeln in gemeinschaftlich erkannter Weise; man hängt dem Radicanden rechts 2, 4, 6 ..., beziehungsweise 3, 6, 9 ... Nullen an, begnügt sich dann bei Ausziehung der Wurzel mit ganzzahliger Annäherung, deren Ganze aber nur Zehntel, Hundertel, Tausendstel ... sind.

Das 42. Kapitel von den wunderbaren Eigenschaften der Zahlen[2]), *de proprietatibus numerorum mirificis* enthält vieles, was auf Leonardo von Pisa zurückgeht. Cardano hat den Gegenstand später ungefähr in gleicher Ausdehnung, aber als besondere kleine Schrift[3]): *De numerorum proprietatibus caput unicum* wiederholt behandelt und hierbei nicht Unwichtiges hinzugefügt. Die Bearbeitung von 1539 lehrt die Entstehung der vollkommenen Zahlen nach der euklidischen Regel und spricht den Satz aus[4]), die Randziffer sei immer 6 oder 8, was allerdings Nikomachus[5]) schon bemerkt hatte; die spätere Bearbeitung beweist diesen Satz[6]). Nach Euklid (Bd. I, S. 253—254) ist $(1 + 2 + \cdots + 2^n)2^n$ eine vollkommene Zahl, sofern

[1]) Cardano IV, 30—31. [2]) Ebenda IV, 51—63. [3]) Ebenda IV, 1—13. [4]) Ebenda IV, 52. [5]) Nikomachus, *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 40 lin. 20—21 (Buch I, Kap. XVI, § 3). [6]) Cardano IV, 3.

$$1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Primzahl ist. Die Randziffer von 2^n ist stets 2, oder 4, oder 8, oder 6, die von $2^{n+1} - 1$ also 3, oder 7, oder 5, oder 1. Die dritte Möglichkeit fällt weg, weil $2^{n+1} - 1$ Primzahl sein muss, also entsteht die Randziffer der vollkommenen Zahl ausschliesslich durch $2 \cdot 3$, oder $4 \cdot 7$, oder $6 \cdot 1$ und ist 6, 8, 6. In der ersten Bearbeitung sind Dreieckszahlen und Quadratzahlen durch Punkte dargestellt[1], in der zweiten ist hinzugefügt[2], dass zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen eine Quadratzahl geben, wenn man sie *iunctis capitibus adversis* d. h. über Kopf aneinanderfüge, womit offenbar eine Punktenvereinigung gleich der folgenden



gemeint ist. Der zweiten Bearbeitung gehört auch die wichtige Behauptung an[3], dass die Wurzel einer ganzen Zahl niemals ein Bruch sein könne, was am Anfange des dritten Tractates gezeigt werde.

Diesen in den gedruckten Werken Cardano's unauffindbaren dritten Tractat sind wir im Stande zu bezeichnen und zugleich eine obere Grenze für die Zeit der Niederschrift der zweiten Bearbeitung anzugeben. In der Abhandlung über die eigenen Bücher, *De libris propriis*, welche selbst in mehrfacher Bearbeitung erhalten ist, erzählt Cardano, dass er nach Bemeisterung der kubischen Gleichung, mithin nicht wohl vor der 1542 vorgenommenen Reise nach Bologna, ein mathematisches Gesammtwerk als *Opus perfectum* zu schreiben beabsichtigte, welches aus 14 Büchern bestehen sollte[4]). Die Ueberschriften der 14 Bücher sollten heissen:

1. Von den ganzen Zahlen. 2. Von den Brüchen. 3. Von den Quadrat- und Kubikwurzeln. 4. Von den Unbekannten. 5. Von den Proportionen. 6. Von den Eigenschaften der Zahlen. 7. Vom Handel. 8. Von den Erträgen (*De redditibus*, vermuthlich Zinsrechnung). 9. Von den aussergewöhnlichen Aufgaben (*De his quae sunt extra ordinem*). 10) Von den grossen Regeln oder der sogenannten Ars magna. 11. Von der Ausmessung ebener Figuren. 12. Von Körpermessungen. 13. Arithmetische Aufgaben. 14. Geometrische Aufgaben.

Ausser den Ueberschriften giebt Cardano auch die Anfänge einzelner dieser 14 Bücher an, welche demnach schon in der Ausarbeitung ziemlich weit vorgeschritten gewesen sein müssen. Das erste Buch *De integris* sollte mit den Worten anfangen: *Si ab antiquitate aut necessitate disciplina ulla nobilis dici potest*, und ein so beginnen-

[1]) Cardano IV, 53. [2]) Ebenda IV, 6. [3]) Ebenda IV, 8. [4]) Ebenda I, 103.

des Bruchstück ist vorhanden[1]). In dem dritten Buche von den Quadrat- und Kubikwurzeln konnte sehr gut der Satz vorkommen, von welchem wir oben mit Cardano sagten, dass er am Anfange des dritten Tractates gezeigt sei. Ueber das sechste Buch äussert er sich, er habe 96 Blätter davon geschrieben, welche anfangen: *Numerorum alii dicuntur primi*, und genau so beginnt jenes Kapitel, welches wir bisher als zweite Bearbeitung eines Kapitels der Practica Arithmeticae generalis benannt haben. Es ist daher nichts Anderes als wieder ein Bruchstück des leider unvollendet gebliebenen Opus perfectum und kaum vor 1542 geschrieben.

Wir kehren zu dem Werke von 1539, zur Practica Arithmeticae generalis zurück. Eine nicht unbedeutsame Bemerkung desselben, die bei einer unbestimmten Aufgabe gemacht ist, lautet[2]): „Ich habe nicht gesagt in ganzen oder gebrochenen Zahlen, weil jede Frage, deren Erledigung in Brüchen erfolgt, auch ganzzahlig erfüllt werden kann und ich desshalb Eines von dem Anderen nicht trennen wollte." Eine von Georg Valla herrührende Aufgabe[3]) (S. 345) unbestimmter Natur ist die, zwei Rechtecke von gleicher Seitensumme zu finden, deren Flächen Vielfache von einander sind. Cardano giebt a und $ab(b+1)$ als die Seiten des einen, $a(b+1)$ und ab^2 als die Seiten des anderen b-fachen Rechtecks. Eine andere von Cardano behandelte Aufgabe[4]) ist die von den 2 mal 15 Männern, die in einem Kreise so zu ordnen sind, dass ein gewisses Abzählen nur immer auf eine Persönlichkeit der einen Gruppe trifft, während die andere Gruppe verschont bleibt. Sie begegnete uns schon in einer französischen Sammlung (S. 362), Cardano giebt ihr einen Namen. Er nennt sie *Ludus Joseph*, das Josephsspiel, weil sie einst von Josephus zur Rettung seines Lebens ersonnen worden sei. Näheres werden wir von zwei Schriftstellern unseres XV. Abschnittes erfahren.

Auch Reihen sehr verschiedener Art kommen vor, z. B. arithmetische Reihen von gleichen Unterschieden, welche in einander geschoben eine einzige Reihe bilden[5]). Aus 1, 7, 13,... und 3, 9, 15... entsteht nach dieser Bildungsweise 1, 3, 7, 9, 13, 15 ... Die Reihe $x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \cdots$ sei leicht zu summiren, dagegen stelle $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$ eine schwierige Summenbildung dar[6]).

Eine Anzahl von Aufgaben gehört der Wahrscheinlichkeitsrechnung an. Paciuolo (S. 327) beantwortete die Frage nach der richtigen Theilung zwischen zwei Spielern, von denen der eine s_1, der andere s_2 Spiele gewonnen hatte, und die sich trennen, bevor die s Gewinnspiele, auf welche die ganze Entscheidung geht, von Einem

[1]) Cardano IX, 117—128. [2]) Ebenda IV, 57 (§ 78). [3]) Ebenda IV, 179. [4]) Ebenda IV, 113. [5]) Ebenda IV, 33. [6]) Ebenda IV, 37.

erreicht sind, dahin, sie müsse nach dem Verhältnisse $s_1 : s_2$ sich richten. Cardano erkannte es als wesentlichen Mangel dieses Theilungsvorschlags, dass die Zahl s, welche die wichtigste ist, gar nicht berücksichtigt werde[1]). Sein Gegenvorschlag ist allerdings wenig glücklich. In dem besonderen Beispiele, von welchem Cardano redet, ist $s = 10$, $s_1 = 7$, $s_2 = 9$, der erste Spieler hätte also noch dreimal, der zweite einmal zu gewinnen. Um nun ein erstes Spiel zu gewinnen, bedarf der zweite wie der erste Spieler eines Gewinnspiels. Um ein zweites Spiel als solches zu gewinnen, sind dem ersten zwei Gewinnspiele nöthig, denn ohne einen ersten Gewinn gelangt er nicht zum zweiten. Um ein drittes Spiel als solches zu gewinnen, sind dem ersten drei Gewinnspiele erforderlich, deren Begründung in der Nothwendigkeit liegt, überhaupt zu einem dritten Gewinne zu gelangen. Um das erste, zweite und dritte Spiel zu gewinnen, bedarf es somit $1 + 2 + 3 = 6$ Gewinnspiele und das Theilungsverhältniss der beiden Spieler muss wie $1 : 6$ sein, allgemein wie

$$(1 + 2 + \cdots + (s - s_2)) : (1 + 2 \cdots + (s - s_1)).$$

Anschliessend an diese Aufgabe und des gleichen Gedankenganges sich bedienend, besprach Cardano eine andere, welche hiermit in die Wissenschaft eingeführt war, um erst etwa zwei Jahrhunderte später als sogenannte Petersburger Aufgabe zur richtigen Geltung zu gelangen. Ein Reicher und ein Armer spielen um gleichen Einsatz. Gewinnt der Arme, so wird am folgenden Tage um verdoppelten Einsatz gespielt und dieses Verfahren fortgesetzt, während ein einmaliges Gewinnen des Reichen dem Spiele ein für alle mal ein Ende macht. Cardano begründete hier den grossen Nachtheil, in welchem der Reiche bei diesen Spielbedingungen sich befinde.

Endlich gedenken wir noch mit einem Worte der Stellung, welche Cardano 1539 zu nichtpositiven Gleichungswurzeln einnahm. Negativen Wurzeln (*fictae*) erkannte er die Bedeutung zu[2]), dass für einen Gegenstand nicht nur nichts erlöst wird, sondern für dessen Beseitigung noch gezahlt werden muss. Imaginäres nennt er einfach unmöglich[3]): *cum numerus non possit detrahi a quadrato dimidii radicum, tunc casus est impossibilis*, d. h. wenn in der Auflösung der Gleichung $x^2 + b = ax$, bei welcher $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ herauskommt, b von $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ nicht abgezogen werden kann, so ist es ein Zeichen von der Unmöglichkeit des Geforderten.

[1]) Cardano IV, 112: *Ad rationem ludorum sciendum est quod in ludis non habet considerari nisi terminus ad quem, et hoc in progressione dividendo totum per easdem partes.* [2]) Ebenda IV, 157. [3]) Ebenda IV, 72.

Diese Auszüge dürften genügend erkennen lassen, dass die Veröffentlichung von 1539 bereits einen hohen Grad mathematischer Befähigung Cardano's bewies, dass sie ahnen liess, es stehe Grosses von ihm zu erwarten, wenn er mit erweitertem Wissen noch unbetretene Bahnen einschlage. Diese Ahnung wirkte vielleicht bei Tartaglia, welcher die Practica Arithmeticae generalis schon kannte, mit, als er sich 1539 des Eides Cardano's versicherte, bevor er ihm die Regel zur Auflösung von $x^3 + ax = b$ anvertraute.

Den Eid der Verschwiegenheit hat Cardano in seiner Veröffentlichung von 1545 unzweifelhaft gebrochen. Das Unrecht, welches er Tartaglia gegenüber dadurch beging, mag durch die rühmende Nennung des Verletzten einestheils, durch den Umstand, dass Cardano inzwischen von Del Ferro's schriftlich erhaltenen früheren Arbeiten Kenntniss erhalten hatte, anderntheils gemindert sein, aus der Welt geschafft ist es nicht. Aber die Geschichte der Mathematik sitzt weniger über den Menschen als über den Mathematiker zu Gericht, und desshalb ist es unter allen Umständen nothwendig, zuzusehen, ob etwa in dem Werke von 1545 nur die Entdeckung von Tartaglia, beziehungsweise von Del Ferro sich vorfindet, oder was Cardano selbst zugeschrieben werden muss.

Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus[1]) ist der Titel des, wie wir schon wissen, in Nürnberg gedruckten und Osiander zugeeigneten Buches. Das 10. Buch des Opus perfectum sollte (S. 500) die Ueberschrift *Ars magna* führen. Seine Anfangsworte sind in der Abhandlung über die eigenen Bücher angegeben[2]). Beides stimmt mit dem Drucke von 1545 genau überein. Eine weitere Uebereinstimmung liegt darin, dass in diesem Drucke von einem 3. und 4. Buche die Rede, welche ihrem Inhalte nach mit Wurzelgrössen, mit Unbekannten es zu thun haben müssen, also mit den ebenso bezifferten Büchern des Opus perfectum sich decken. Kein Zweifel ist daher möglich: die Ars magna von 1545 ist das 10. Buch des Opus perfectum, und wenn wir vorher sahen, dass der Plan zu diesem grossartig gedachten Werke kaum vor 1542 entstanden sein kann, so wissen wir jetzt, dass er 1545 mit Einschluss eines ganz vollendeten Buches in fertiger Gestalt vorgelegen haben muss.

Die kubischen Gleichungen nebst ihrer Auflösung bilden gewiss den wesentlichen Inhalt der Ars magna, aber Zusätze Cardano's sind deutlich zu erkennen, um welche er das von Tartaglia Erlernte vermehrt hat[3]). Die Gleichungen $x^3 + ax = b$, $x^3 = ax + b$ aufzulösen

[1]) Cardano IV, 221—302. [2]) Ebenda I, 103. [3]) Das Cardano Eigenthümliche ist vortrefflich hervorgehoben bei Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra* (Parma 1797—1799) Vol. II, pag. 159 sqq.

hatte Tartaglia ihn deutlich gelehrt, und wenn er die so erhaltenen Auflösungen in eine geometrische Form kleidete[1]), so ist damit nicht das geringste Verdienst verbunden. Die Form $x^3 + b = ax$ war in Tartaglia's Terzinen (S. 489) sehr stiefmütterlich behandelt. *Se solve col secondo* hiess es im 20. Verse, sie sei mittels $x^3 = ax + b$ zu lösen; mehr war nicht gesagt. Cardano's Auflösung[2]) kam auf folgende Betrachtung hinaus. Sei $y^3 = ay + b$ zugleich mit $x^3 + b = ax$, so ist $b = ax - x^3 = y^3 - ay$. Daraus folgen aber Proportionen und Gleichungen:

$$(y^2 - a) : (a - x^2) = x : y,$$
$$(y^2 - a + a - x^2) : (a - x^2) = (x + y) : y,$$
$$(y^2 - x^2) : (y + x) = (a - x^2) : y,$$
$$(y - x) : 1 = (a - x^2) : y,$$
$$y^2 - xy = a - x^2,$$
$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4} y^2},$$

so dass, sobald man y kennt, nicht bloss ein Werth von x ermittelt ist, sondern gleich deren zwei. Demnächst werden die Gleichungen in Angriff genommen, welche Kubus, Census und Zahl enthalten[3]),

$$x^3 = ax^2 + b, \quad x^3 + ax^2 = b, \quad x^3 + b = ax^2.$$

Die beiden ersten Formen werden durch $x = y + \frac{a}{3}$, $x = y - \frac{a}{3}$ vom quadratischen Gliede befreit. Ein Beispiel lautet

$$x^3 + 6x^2 = 100$$

und führt zu

$$x = \sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}} - 2.$$

Die dritte Form $x^3 + b = ax^2$ behandelt Cardano mittels $x = \frac{\sqrt[3]{b^2}}{y}$, wodurch sie in $y^3 + b = ya\sqrt[3]{b}$ übergeht und diese liefert, wie erst gezeigt worden ist, unter Benutzung von $z^3 = za\sqrt[3]{b} + b$ zwei Werthe von y, also auch von x. Bei kubischen Gleichungen mit allen vier möglichen Gliedern[4]) führen Substitutionen, welche immer auf $x = y \pm \frac{a}{3}$ hinauslaufen (a als Coefficient des quadratischen Gliedes gedacht) auf früher behandelte Gleichungsformen zurück, auch ist nicht ausser Auge zu lassen, dass die Anordnung der Ars magna der Art getroffen ist, dass von solchen Umformungen, *de capitulorum trans-*

[1]) *Ars magna*, Cap. XI und XII. [2]) Ebenda, Cap. XIII. [3]) Ebenda, Cap. XIV, XV, XVI. [4]) Ebenda, Cap. XVII—XXIII.

mutatione[1]), die Rede ist, bevor Cardano den kubischen Gleichungen sich zuwendet.

Von grosser Wichtigkeit ist ein Ausspruch Cardano's, der sich im XVIII. Kapitel findet[2]). Er hatte die drei Gleichungen

$$x^3 + 10x = 6x^2 + 4, \quad x^3 + 21x = 9x^2 + 5, \quad x^3 + 26x = 12x^2 + 5$$

behandelt. Er hatte gefunden, dass jede derselben drei Wurzeln besitze, die erste $2, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$, die zweite $5, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$, die dritte $2, 5 + \sqrt{19}, 5 - \sqrt{19}$. Schon darin lag ein ungeheurer Fortschritt, da noch niemals Gleichungen mit mehr als zwei Wurzelwerthen bekannt geworden waren. Aber Cardano geht viel weiter. Er addirt die jedesmaligen Wurzelwerthe und bemerkt, dass in allen drei Fällen die Summe der Wurzelwerthe den Coefficienten des quadratischen Gliedes bilde. Er verweist dabei zugleich rückwärts auf das I. Kapitel, welches jetzt erst dem dem Leser vollkommen deutlich wird. Dort findet sich unter Anderem die Bemerkung[3]), $x^3 = 12x + 16$ habe die Wurzeln $x = 4$ und $x = -2$, die positive Wurzel (*vera*) sei das Doppelte der negativen (*ficta*). Kann es, bei Beachtung der Rückverweisung im XVIII. Kapitel, einem Zweifel unterworfen sein, dass Cardano das Vorhandensein zweier gleichen negativen Wurzeln zum mindesten ahnte, dass er das Nichtvorkommen eines quadratischen Gliedes auf das gegenseitige Aufheben der drei Wurzelwerthe zurückführte?

An die Auflösung der kubischen Gleichungen mit wie immer gearteten Coefficienten schliessen sich Untersuchungen über besondere Fälle an[4]). Wir erwähnen davon nur die beiden ersten, wonach

$$x^3 = (a + b^2)x + ab$$

durch

$$x = \frac{b}{2}\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$$

und $x^3 = (a^2 + b^2)x + 2ab(a + b)$ durch $x = a + b$ erfüllt wird.

Wir können aber der Ars magna auch solche Dinge entnehmen, welche nicht im Geringsten mit der von Tartaglia empfangenen Belehrung zusammenhängend nur um so gewisser Cardano's geistiges Eigenthum bilden. Das XXX. und das XXXVII. Kapitel sind in dieser Beziehung ganz besonders reicher Ausbeute. Das XXX. Kapitel[5]) führt die Ueberschrift *De regula aurea* und enthält eine Methode zur näherungsweisen Auflösung numerischer Gleichungen, die erste, welche in Europa zur Veröffentlichung gelangte. Wohl

[1]) *Ars magna*, Cap. VII. [2]) Cardano IV, 259, letztes Alinea der zweiten Columne. [3]) Ebenda IV, 223. [4]) *Ars magna*, Cap. XXV. [5]) Cardano IV, 273—274.

hatte ein Araber (Bd. I, S. 736) $x^3+b=ax$ unter der Voraussetzung, dass a gegen b sehr gross sei, näherungsweise lösen gelehrt. Wohl hatte Leonardo von Pisa (S. 46—47) eine sehr nahezu genaue Wurzel von

$$x^3+2x^2+10x=20$$

erkannt, aber wie er sich dieselbe verschafft, ist nirgend angedeutet, und anzunehmen, Cardano's Regula aurea sei gerade Leonardo's Methode gewesen[1]), ist eine Vermuthung, welche nicht die geringste Stütze besitzt. Cardano's Verfahren, welches wir als seine Erfindung rühmen zu müssen glauben, ist allerdings von ihm nur an Gleichungen dritten und vierten Grades geübt, doch liegt nichts in dem Verfahren selbst, was diese Beschränkung nothwendig machte. Wir erlauben uns daher zur besseren Würdigung der goldenen Regel sie in ganz allgemeinen Buchstaben zu schildern. Es sei $f(x)$ eine ganze algebraische Function von x, welche von der $n$ten bis zur 1. Potenz der Unbekannten mit positiven Coefficienten (dieses Positivsein der Coefficienten bildet die einzige Einengung der goldenen Regel), welche theilweise auch 0 sein können, herabsteigt, und es sei eine Wurzel der Gleichung $f(x)=k$ zu suchen. Nun seien a und $a+1$ zwei auf einander folgende positive ganze Zahlen von der Eigenschaft, dass $f(a)=k-b$, $f(a+1)=k+b'$, so ist x zwischen diesen beiden ganzen Zahlen enthalten, d. h. wir können nach Belieben

$$x=a+((a+1)-a)\vartheta \quad \text{oder} \quad x=(a+1)-((a+1)-a)\varepsilon$$

setzen mit ϑ und ε als positiven echten Brüchen. Ersteres Verfahren wollen wir das additive, letzteres das subtractive Ergänzungsverfahren nennen. Wegen

$$f(a+1)>f(x)>f(a) \quad \text{ist} \quad f(a+1)-f(a)>f(x)-f(a)$$

und

$$\frac{f(x)-f(a)}{f(a+1)-f(a)}=\frac{k-(k-b)}{(k+b')-(k-b)}=\frac{b}{b+b'}<1.$$

Diesen Bruch benutzen wir als ϑ, d. h. wir wählen in zweiter Annäherung $x \backsim a+\frac{b}{b+b'}$. Nehmen wir nun an, es würde etwa $f\left(a+\frac{b}{b+b'}\right)=k-b''<k$. Wir wenden nun weiter das subtractive Ergänzungsverfahren an; wir setzen

$$x=(a+1)-\left((a+1)-\left(a+\frac{b}{b+b'}\right)\right)\varepsilon=a+1-\frac{b'\varepsilon}{b+b'},$$

wo es nur darauf ankommt, ein geeignetes $\varepsilon<1$ einzusetzen. Als solches dient

[1]) Genocchi in den von Tortolini herausgegebenen *Annali di scienze matematiche e fisiche* VI, 165—168.

$$\varepsilon=\frac{f(a+1)-f(x)}{f(a+1)-f\left(a+\frac{b}{b+b'}\right)}=\frac{(k+b')-k}{(k+b')-(k-b'')}=\frac{b'}{b'+b''}$$

und die dritte Annäherung wird

$$x \backsim a+1-\frac{b'}{b+b'}\cdot\frac{b'}{b'+b''},$$

worauf

$$f\left(a+1-\frac{b'}{b+b'}\cdot\frac{b'}{b'+b''}\right)$$

ausgerechnet und der Betrag mit k verglichen wird. Je nachdem k zwischen dem neuen Substitutionswerthe und $f(a)$ oder zwischen demselben und $f(a+1)$ liegt, wird nach additivem oder subtractivem Ergänzungsverfahren weiter gerechnet, wodurch man dem wahren x so nahe kommen kann, als man nur will. Wir haben weiter oben die Beschränkung hervorgehoben, nach welcher $f(x)$ nur positive Coefficienten enthalten darf. Cardano lässt sie nachträglich fallen, indem er eine Gleichung $x^4+nx^2+q=mx^3+p$ nach der goldenen Regel behandelt. Er setzt auch in solchem Falle $x=a$ und $x=a+1$ und zieht das Substitutionsergebniss der rechten Seite von dem der linken ab, um die beiden dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Zahlen $-b$ und b' zu finden, welche den zweiten Näherungswerth $x \backsim a+\frac{b}{b+b'}$ herstellen lassen u. s. w. Man darf gewiss nicht sagen, dass mit dieser Erweiterung die Nullsetzung eines Gleichungspolynoms an die Stelle der bisherigen Gleichungen mit nur positiven Gliedern auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens getreten sei, aber ebenso gewiss war Cardano damit auf dem Wege zu dieser wichtigen Neuerung, und keinenfalls verdient die goldene Regel den wegwerfenden Namen eines wilden Näherungsverfahrens. Wie Cardano zu ihr geführt wurde, ist unschwer zu errathen[1]). Sie entstand in seinem an weittragenden Gedanken überreichen Geiste aus der alten Methode des doppelten falschen Ansatzes, welche sie zu ersetzen bestimmt war, und welche von nun an auch wirklich ihren Jahrhunderte hindurch behaupteten Platz in den Lehrbüchern räumt und wahre Näherungsverfahren an ihre Stelle treten lässt.

Noch weit merkwürdiger ist das XXXVII. Kapitel[2]) *De regula falsum ponendi.* Negatives hat, wie wir früher gesagt haben, nicht die Berechtigung, eine wahre Gleichungswurzel darzustellen. Gleichwohl rechnet Cardano mit solchen Zahlen, und weiss ihnen mit Hilfe des Begriffes einer Schuld statt eines Besitzes oder einer Bezahlung statt eines Ertrags einen Sinn abzugewinnen. Aber so weit hatte er

[1]) Vergl. Cossali l. c. II, 321. [2]) Cardano IV, 286—288.

vielfache Vorgänger, welche wir an verschiedenen Stellen dieses wie des I. Bandes nennen konnten. Wie verhielt es sich dagegen mit Quadratwurzeln aus negativen Zahlen? Einmal haben wir (S. 360) in einer französischen Aufgabensammlung mit solchen Ausdrücken rechnen sehen; eine Randnote macht darauf aufmerksam, diese Ausdrücke forderten Unmögliches, aber ob die Randnote auch dem XV. Jahrhunderte angehörte, ob sie jünger war, ist nicht sichergestellt, und unter allen Umständen blieb jenes vereinzelte Vorkommen, so viele Ehre es dem Schreiber in unseren Augen macht, ungedruckt und damit wirkungslos. Bahnbrechend dagegen für alle Zukunft wurde Cardano's Kühnheit, in der Ars magna mit Quadratwurzeln aus Negativem zu rechnen, also mit solchen Zahlen, welche er früher als ganz unmögliche bezeichnet hatte. „Die zweite Art einer falschen Annahme, sagt Cardano[1]), ist die durch eine Wurzel aus Minus, per radicem m̃. Soll z. B. 10 in zwei Theile getheilt werden, deren Product 40 sei, so ist das offenbar eine unmögliche Forderung, aber wir verfahren so: nimm die Hälfte von 10, also 5; vervielfache sie mit sich selbst, giebt 25; ziehe 40, das verlangte Product davon ab, so bleibt -15, dessen Wurzel zu 5 addirt und von 5 abgezogen die gewünschten Theile $5+\sqrt{-15}$ und $5-\sqrt{-15}$ liefert. Vervielfache $5+\sqrt{-15}$ mit $5-\sqrt{-15}$. Die kreuzweise entstehenden Producte fallen weg, *dimissis incruciationibus*, und es entsteht 25 minus -15, was so viel ist wie $+15$. Das Product ist also 40." Etwas weiter unten fährt er dann fort: *quae quantitas vere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m. nec in aliis operationes exercere licet, nec venari quid sit*, d. h. es ist dieses eine auf formaler Logik beruhende Grösse, weil es nicht gestattet ist, die Rechnungsverfahren an ihnen wie an reinen Minusgrössen oder an anderen zu üben, noch einem Sinne derselben nachzustellen.

Wahrlich, es waren nicht geringe Entdeckungen, denen der aufmerksame Leser in der Ars magna des Cardano begegnete, aber es bedurfte schon eines mehr als gewöhnlichen mathematischen Geistes, um alle diese Dinge zu würdigen oder auch nur zu verstehen. Dem gewöhnlichsten Leser dagegen musste eine Leistung in die Augen fallen, welche wir darum zum Schlusse unserer Darstellung aufgespart haben: die Auflösung der Gleichung vierten Grades. Schon im XXVI. Kapitel zeigt Cardano, dass die Gleichung

$$x^4 \pm ax = bx^2 + \frac{a^2}{4b}$$

leicht aufzulösen sei. Er führt sie nämlich in die Form $x^4 = b\left(x \mp \frac{a}{2b}\right)^2$

[1]) Cardano IV, 287.

über, welche die Quadratwurzelausziehung gestattet und dann nur noch eine quadratische Gleichung zu behandeln verlangt. Aehnlich verhält es sich mit anderen Formen. Aber das sind doch nur ganz besondere Fälle. Allgemeinerer Natur sind die Fragen des XXXIX. Kapitels, auf welche Cardano durch die von Da Coi gestellte Aufgabe, $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ aufzulösen, aufmerksam gemacht worden war. Er selbst gesteht zu, nicht im Stande gewesen zu sein, diese Aufgabe zu bewältigen. Luigi Ferrari ist der Erfinder, der erst 23 Jahre alte Erfinder, setzen wir hinzu. Ferrari ging aus[1]) von der Quadrirung einer dreitheiligen Grösse, deren beide ersten Theile, sofern sie nicht zu dem dritten in Beziehung treten, vereinigt aufgefasst werden, also von der Formel

$$(A + B + C)^2 = (A + B)^2 + 2AC + 2BC + C^2.$$

Ist nämlich, wie in Da Coi's Aufgabe

$$x^4 + ax^2 + c = bx$$

vorgelegt und addirt man beiderseitig $(2\sqrt{c} - a)x^2$, so entsteht

$$(x^2 + \sqrt{c})^2 = (2\sqrt{c} - a)x^2 + bx.$$

Der Ausdruck links als $(A + B)^2$ aufgefasst und $C = t$ gesetzt zeigt, dass wieder linker Hand ein Quadrat auftreten muss, wenn

$$2AC + 2BC + C^2 = 2x^2t + 2\sqrt{c}\cdot t + t^2$$

beiderseitig addirt wird, oder dass man erhält

$$(x^2 + \sqrt{c} + t)^2 = (2\sqrt{c} - a + 2t)x^2 + bx + (t^2 + 2t\sqrt{c}).$$

Wäre auch der Ausdruck rechter Hand ein Quadrat, so könnte man die Wurzelausziehung auf beiden Seiten vornehmen und würde damit die Aufgabe auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt, d. h. aufgelöst haben. Nun wird aber der Ausdruck rechter Hand wirklich ein Quadrat, wenn nur $4(2\sqrt{c} - a + 2t)(t^2 + 2t\cdot\sqrt{c}) = b^2$ oder anders geschrieben, wenn

$$t^3 + \left(3\sqrt{c} - \frac{a}{2}\right)t^2 + \left(2c - a\sqrt{c}\right)t = \frac{b^2}{8}.$$

Man muss also t aus einer kubischen Gleichung finden, und das ist wieder eine Zurückführung einer noch ungelösten Aufgabe auf eine schon gelöste. Wir lassen den lateinischen Wortlaut der hier erläuterten Entwickelung folgen, der nunmehr unseren Lesern verständlicher sein dürfte, als ohne die vorausgeschickte Auseinandersetzung:

> Semper reduces partem quad. quadrati ad ℞ addo tantum utriqendue parti, ut 1 quadr. quadratum cum quadrato et numero habeant radicem, hoc facile est cum posueris dimidium numeri quadratorum radicem numeri;

[1]) Eine sehr klare Darstellung des Ferrari'schen Verfahrens bei Cossali l. c. II, 299—305.

item facies, ut denominationes extremae sint plus in ambabus aequationibus, nam secus trinomium seu binomium reductum ad binomium necessario careret radice. Quibus iam peractis addes tantum de quadratis et numero uni parti, ut idem additum alteri parti, in qua erunt res, faciant trinomium habens ℞ quadratam per positionem, et habebis numerum quadratorum et numeri addendi utrique parti, quo habito ab utroque extrahes ℞ quadratam quae erit in una 1 quadratum p̄ numero (vel m̄ numero), ex alia 1 positio vel plures p̄ numero (vel m̄ numero, vel numerus m̄ positionibus), quare habes propositum.

Wesentlich ist das Fehlen des kubischen Gliedes in der Gleichung vierten Grades. Nun sollte man denken, der Erfinder der Befreiung der kubischen Gleichung vom quadratischen Gliede werde auch hier die zweckentsprechende Substitution leicht erkannt und die Unbekannte einer neuen Unbekannten weniger dem Viertel des Coefficienten des früheren kubischen Gliedes gleich gesetzt haben; aber hier ist eines jener deutlich sprechenden Beispiele dafür, dass das Naheliegende mitunter längere Zeit übersehen wird. Cardano zog die so naturgemässe Folgerung aus seiner früheren Erfindung keineswegs. Er verwandelte[1]) z. B.

$$x^4 + 6x^3 = 64 \text{ durch } x = -\frac{\sqrt[3]{64}}{y} \text{ in } y^4 + 6y = \sqrt[3]{64} = 4,$$

d. h. allgemein, er liess $x^4 + ax^3 = c$ durch $x = -\frac{\sqrt[3]{c}}{y}$ in

$$y^4 + ay = \sqrt[3]{c}$$

übergehen.

Wir sind mit unseren Auszügen aus der Ars magna von 1545 zu Ende. Was erwartet man von Tartaglia, was muss man von ihm erwarten, sobald er das grossartige Werk gelesen? Entweder dass er vor dem Genius des Verfassers in Bewunderung sich beugte und schweigend sich mit den ihm gewordenen Lobeserhebungen begnügte, oder wenn sein Charakter kleinlicher war, beziehungsweise wenn seine Verhältnisse es mit sich brachten, dass er aus seiner Erfindung so viel als möglich für sich herauszuschlagen suchen musste, dass er in diesem letzteren Falle schleunigst die Ars magna zu überbieten suchte und seine eigenen Entdeckungen der Oeffentlichkeit übergab. Vergleichen wir damit neuerdings den schon geschilderten Inhalt der Quesiti[2]).

Tartaglia behauptet, schon längst in Besitz vieler Dinge zu sein,

[1]) Cardano IV, 297. *Quaesito VII.* [2]) Wir stehen in dieser Darstellung in wesentlicher Uebereinstimmung mit Gherardi, der in seinen schon wiederholt genannten Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna (deutsch von Max. Curtze, Berlin 1871) zum ersten Male die Tartaglia-Legende prüfte und ihre Unglaubwürdigkeit darthat.

welche er nennt, welche aber auch in der Ars magna stehen, er behauptet auch noch vieles Andere zu wissen. Den Beweis für das Eine bleibt er schuldig, die leiseste Andeutung, worin seine sonstigen Entdeckungen bestehen, vermeidet er. Oder soll es als Beweis gelten, wenn er 1547 Gespräche, die er geführt haben will, mit Zeitangaben versieht, denen jede Bestätigung abgeht? Ob Da Coi damals, wie wir (S. 495) als möglich hinstellten, gestorben oder verschollen war, ob das Gleiche für Fior gilt, kommt nicht gar sehr in Betracht. Die von diesen beiden etwa zu erhärtenden oder zu widerlegenden Thatsachen sind nicht so erheblich. Bedeutsam ist nur das Gespräch von 1541 mit Ventuorthe, und dieser Engländer war nach Tartaglia's eigener Aussage eben 1541 in sein Vaterland zurückgekehrt, sein Zeugniss in Italien somit 1547 so gut wie unbeibringlich, wenn man die damaligen Verkehrsverhältnisse berücksichtigt. In diesem Gespräche will Tartaglia behauptet haben, $ax^2 = b + x^3$ besitze zwei oder vielleicht noch mehr Auflösungen, eine Wahrheit, die er sehr gut erst durch Cardano's Ars magna kennen gelernt haben kann. In diesem Gespräche giebt er die Lösung der Gleichung $x^3 + 6x^2 = 100$ mit $x = \sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}} - 2$, in welcher die Befreiung der kubischen Gleichung vom quadratischen Gliede durch das in jenem Wurzelwerthe vorkommende -2 mittelbar gesichert ist, aber gerade dieses Beispiel nebst seiner Auflösung waren wir in der Lage (S. 504) aus der Ars magna anzuführen. Will man glauben, Cardano habe auch dieses von Tartaglia besessen, und Tartaglia habe in den Quesiti nur versäumt, auf den weiteren Diebstahl aufmerksam zu machen? Nein, Tartaglia war im Stande $x^3 + ax^2 = b$ mit rationalen Coefficienten a und b zu versehen, indem er von einem quadratisch-irrationalen x ausging (S. 486), aber die Befreiung der allgemeinen kubischen Gleichung von ihrem quadratischen Gliede hat er nie besessen, hat er, als er sie in der Ars magna las, nicht einmal verstanden, sonst hätte er in den Quesiti ganz anders darüber sich ausdrücken müssen. Von allen Ruhmredigkeiten Tartaglia's über seine Verdienste um die Erweiterung der Lehre von den Gleichungen bleibt für's erste nur die Thatsache, dass er 1539 die Auflösung der eines quadratischen Gliedes entbehrenden kubischen Gleichung besass. Weiteres wollte Tartaglia seiner in den Streitschriften von 1547 bis 1548 wiederholt auftretenden Zusicherung gemäss dann der Welt mittheilen, wenn er in späterer Zeit die Arbeit, deren Vollendung ihn jetzt voll beschäftigte, die Uebersetzung des Euklid, abgeschlossen haben werde. Und wie verhält es sich mit der späteren Zeit? Tartaglia hat von 1556 ab seinen *General Trattato de' numeri e misure* dem Drucke übergeben. Der 1. Band erschien 1556, der 2. Band 1558, der 3. Band 1560, nachdem Tartaglia schon gestorben war. Nirgend ist auch nur eine weitere Entdeckung im Gebiete der Gleichungslehre mitgetheilt. Wir werden Tartaglia's Schriften im nächsten Kapitel genauer Besprechung unterziehen, aber schon jetzt dürfen wir unsere Verwunderung aussprechen, dass er, auch nachdem der öffentliche Streit gegen Ferrari und Cardano durch die Disputation vom 10. August 1548, wie sie auch betrachtet werden mag, zu Ende geführt war, nachdem also aus dem Besitze algebraischer Geheimnisse ein klingender Vortheil für Tartaglia nicht mehr in Aussicht stand, gar nicht eilte, die Entdeckungen zu veröffentlichen, welche ihn zum grössten Mathematiker seiner Zeit stempeln mussten, sondern Jahr um Jahr der Niederschrift von verhältnissmässig unbedeutenden Dingen widmete. Mit dieser Verwunderung regt sich zugleich auch der Zweifel, wie es mit jenen erwähnten nachweisbaren Kenntnissen von 1539 sich verhielt.

Nicht ob er sie besass, können wir anzweifeln, aber woher er sie besass? Wir haben Scipione del Ferro als ersten Auflöser der Gleichung $x^3 + ax = b$ kennen gelernt, wir haben (S. 483) gesagt, es sei zwar nirgend berichtet, wie er verfuhr, aber gewisse Rückschlüsse seien berechtigt. Hier ist der Ort, sie zu ziehen. Cardano und Ferrari nahmen 1542 Einsicht von Del Ferro's Buche. Cardano nannte am Anfange des XI. Kapitels der Ars magna von 1545 den ersten Erfinder, nannte Tartaglia als zweiten[1]). Die Auflösungsmethode, welche er mittheilt, ist genau die des Tartaglia, wie wir sie aus dessen Terzinen und aus dessen an Cardano gerichtetem Briefe vom 23. April 1539 kennen. Folgt daraus nicht mit an Gewissheit grenzender Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Verfahren, das des Del Ferro und das des Tartaglia, nur eines und dasselbe waren? Findet diese Annahme nicht eine weitere Bestätigung in Ferrari's Worten, welche er im sechsten Cartello[2]) Tartaglia entgegenschleudert: „Herr Hieronymus konnte diesen Gleichungsfall dem ersten Erfinder, d. i. Herrn Scipio del Ferro aus Bologna zuschreiben und ausser diesem noch Herrn Antonio Maria Fiore, welcher — Ihr gesteht es in Eurem Buche ein — die Sache früher als Ihr wusste. Nichtsdestoweniger war er so höflich, Euch glauben zu wollen, dass auch Ihr das Verfahren erfunden habet, ohne es von einem von diesen oder von einem ihrer Schüler erhalten zu haben und hat Euren Ruhm zugleich mit dem

[1]) *Scipio Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc invenit, tradidit vero Anthonio Mariae Florido Veneto, qui cum in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellense aliquando venisset, occasionem dedit ut Nicolaus invenerit.* [2]) *Cartello VI*, pag. 4—5.

jener Beiden verkündet. Und Ihr? Für diese Wohlthat, an die ich Euch in meinem zweiten Cartello erinnerte[1]), für viele andere, welche ich bezeugen kann, habt Ihr zur Unzeit so bäuerisch über ihn geschrieben, dass Ihr verrückt erscheint.“ Wir nageln den Ausdruck „er war so höflich Euch glauben zu wollen“, *e stato si cortese, che vi a voluto credere*, fest, welcher Ferrari's Zweifel an Tartaglia's Erfinderrecht ausspricht.

Ist es denn nur in einer Weise möglich, die kubischen Gleichungen aufzulösen? Die Geschichte hat diese Frage mit lautem Nein beantwortet. Eine 1615 gedruckte Auflösung von Vieta, von welcher noch in diesem Bande die Rede sein wird, eine 1683 veröffentlichte Auflösung von Tschirnhausen, Dutzende von späteren Auflösungen weichen alle unter einander und von der, wie wir begründet haben, Tartaglia und Del Ferro gemeinschaftlichen ab. Ist es unter diesen Umständen nicht gestattet, Zweifel daran zu hegen, dass beide untereinander übereinstimmende Gedankenfolgen ganz unabhängig in zwei verschiedenen Köpfen sich bildeten?

Nur zwei wichtige Bedenken stehen diesem Zweifel wiederum gegenüber. Erstlich wer sollte Tartaglia die Del Ferro'sche Entdeckung mitgetheilt haben? Diesem Bedenken gegenüber haben wir keine andere Entgegnung als: wir wissen es nicht, und wir empfinden selbst diese Lücke aufs Unangenehmste. Nur das könnte gesagt werden, dass wo eine Handschrift vorhanden war, wo Fior die Methode kannte, es wenigstens nicht ausgeschlossen erscheint, dass auch ein Zweiter, ein Dritter heimliche Kenntniss erhielt und sie ebenso heimlich weiter verbreitete[2]). Dann muss man freilich auf den neuen Einwurf gefasst sein, warum dieser Zweite, dieser Dritte nicht hervortrat und für sich und seinen eigenen Nutzen das Geheimniss verwerthete ähnlich wie Fior es that? Diesem Einwurfe gestehen wir die kräftigste Wirkung zu. Das zweite Bedenken äussert sich in der Frage, ob Tartaglia denn zuzutrauen war, dass er, auf eine oder die andere Art in den Besitz von Del Ferro's Geheimniss gelangt, doch immer nur von seiner eigenen Entdeckung sprach? Wir müssen die Beantwortung aufschieben, bis wir Tartaglia's Schriften besprochen haben, eine Aufgabe, welcher wir uns jetzt zuwenden.

[1]) *Cartello II*, pag. 3: *Te inventorem celebravit, te exoratum sibi tradidisse commemoravit. Quid vis amplius?* [2]) So ist die Ansicht Gherardi's l. c. S. 115—116.