XI. Die Zeit von 1400—1450.

50. Kapitel.

Deutsche Rechenlehrer. Johann von Gemunden, Georg von Peurbach.

Wir haben zu Beginn des 48. Kapitels ein Zurückweichen der mathematischen Wissenschaften in Frankreich und England für den Anfang des XV. Jahrhunderts angekündigt.

Was die englische Mathematik betrifft, so könnten vielleicht Forschungen im Lande selbst ein günstigeres Ergebniss liefern, als wir anzunehmen geneigt sind, wenn es wahr sein sollte, was ein Schriftsteller[1]) berichtet, dass gerade damals ein ganzer Flug von Mathematikern (a coye of mathematicians) aufstieg. Zur Veröffentlichung gelangten indessen bisher nur ärmliche Zeugnisse. Wenn z. B. Höhenmessungen mit der festen Stange (Bd. I, S. 812) vorgenommen werden[2]), so ist das doch ein entschiedener Rückschritt, und einen grossen Fortschritt können wir auch nicht in den Vorlesungen von Johannes Norfolk[3]) über Progressionen, Johannis Norfolk in artem progressionis Summula, erkennen, welche 1445 gehalten wurden. Als eigene Erfindung wird der Inhalt ohnehin nicht vorgebracht. Progressionen seien von einem gewissen Könige Algor von Castellien (sic!) in seinem Algorismus der ganzen Zahlen gelehrt und sollen hier nur vor Vergessenheit bewahrt werden. Die Vergessenheit scheint aber allerdings schon angefangen zu haben, denn 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 2, 7, 12, 17, 22 wird eine *geometrische*, und 1, 2, 4, 8, 16 oder 1, 3, 9, 27 eine *arithmetische Progression* genannt! Nehmen wir diese Benennungen in den Kauf, so besteht Norfolk's obendrein geborgte Weisheit darin, dass die von ihm sogenannte geometrische Progression in *stetige* und *unterbrochene* zerfällt, je nachdem die Differenz 1 oder grösser als 1 ist, dass ferner unterschieden wird, ob die Gliederzahl grad oder ungrad ist, und dass für alle vier

---

[1]) Fuller, *History of the worthies of England* (ed. 1811) II, 413. [2]) Halliwell, *Rara Mathematica* pag. 29—31. [3]) Ebenda pag. 94—106. Die Datirung pag. 103.

Fälle Regeln der Summenbildung angegeben werden. Von seinen arithmetischen Progressionen nennt Norfolk nur die der Potenzen von 2, also 2, 4, 8, 16 u. s. w. Sie werde summirt, indem man das erste Glied von dem verdoppelten letzten Gliede abziehe. Namen von Lehrern der Astronomie an englischen Universitäten in diesem Zeitraume sind uns gleichfalls aufbewahrt, aber von mathematischen Werken derselben etwa über das Grenzgebiet der Trigonometrie ist nicht mehr die Rede, so dass ein Uebergehen jener blossen Namen mehr als nur gerechtfertigt für uns erscheint. Ferner sind uns Prüfungsordnungen der Universität Oxford erhalten[1]). Für das Baccalaureat war im Jahre 1408 Rechnen mit ganzen Zahlen und Kirchenrechnung vorgeschrieben. Die Anforderungen für das Licentiat sind von 1431 bekannt. Sie belaufen sich auf die Arithmetik und Musik des Boethius, auf euklidische Geometrie ohne Angabe der geforderten Bücherzahl oder statt ihrer auf die Perspective des Witelo, endlich auf astronomische Kenntnisse nach Ptolemäus. Man kann ja zugeben, dass diese Anforderungen schon über das in Paris nicht gar lange vorher geforderte Maass (S. 140) hinausgehen, aber den Anforderungen wie den Leistungen von Prag und Wien sind sie nicht zu vergleichen.

Haben wir soeben der Satzungen der Universität Paris aus dem XIV. Jahrhunderte gedacht, so brachte eine 1452 durch den päpstlichen Legaten Tuttavilleo vorgenommene Neuordnung[2]) keine Besserung. Für das Baccalaureat war Mathematik gar nicht vorgeschrieben, für das Licentiat aliqui libri mathematici, eine irgend nähere Bestimmung dieser Schriften fehlt.

Den niedrigen Stand der mathematischen Studien in Frankreich bestätigt ferner die geringe Anzahl von Namen, welche wir auffinden. Höchstens eine einzige Persönlichkeit haben wir aus der ersten Hälfte des XV. Jahrhunderts zu nennen: Pierre d'Ailly[3]), gewöhnlich Petrus de Alliaco genannt, wurde 1350 in Compiegne geboren. Er war eine Zeit lang Vorsteher des Collège de Navarre in Paris, später Rector der pariser Universität. Papst Johann XXIII. ernannte ihn zum Bischof von Cambray und zum Cardinal-Legaten für ganz Deutschland. Er starb in Avignon etwa 70 Jahre alt; als sein Todestag wird allgemein der 8. August genannt, für das Todesjahr wechseln aber die Angaben zwischen 1419, 1420 und 1425. D'Ailly nahm am Concile von Konstanz theil und legte demselben einen Vorschlag zur Kalenderverbesserung vor. Man solle alle 130 Jahre einen Schalt-

[1]) Suter, Math. Univ. S. 52. [2]) Ebenda. [3]) Weidler, *Historia astronomiae* pag. 295—296. — Poggendorff I, 19. — Suter, Math. Univ. S. 44.

tag weglassen, um den Irrthum wieder gut zu machen, der in der zu grossen Annahme der Jahresdauer von $365\frac{1}{4}$ Tagen läge. Das ist die ganze Thätigkeit, um derenwillen wir D'Ailly allenfalls erwähnen durften. Die Geschichte der Geographie nennt noch sein 1410 geschriebenes Buch de imagine Mundi, aus welchem Columbus sich mancherlei für seine Reisepläne nicht unwichtige Kenntnisse angeeignet haben soll.

Wir begeben uns nach Deutschland. Gleich mit Anfang des XV. Jahrhunderts haben wir als kennzeichnend das Auftreten der Modisten[1]) anzuführen. Ein Modist war ein Kenner der „alamodischen" Schreibkunst, d. h. der damals zur Mode gelangenden Kanzleischrift im Gegensatze zu den alten Schriftzügen. Solche Kunst und die Anfangsgründe des Wissens überhaupt lehrte der Modist die zu ihm zur Schule gehenden Kinder, vorzugsweise Knaben, aber auch Mädchen genossen schon einen gewissen Unterricht[2]). Der Lehrplan für die Knaben umfasste frühzeitig die Anfangsgründe der Rechenkunst, und seitdem kann man den Modisten auch als Rechenlehrer betrachten, der gewerbsmässig dieser Beschäftigung sich widmete und daraus seinen Lebensunterhalt zog. Schon 1409 wird von Jobs Kapfer, stulschreiber in Nürnberg, berichtet, der „kint lernt". 1422 war in Frankfurt am Main ein gewiser Heincze, kinderlehrer, der auch unter dem Namen Heincze schriber der modiste vorkommt. Aehnliche Verhältnisse walteten aller Orten in Deutschland, und aus den von Einzelnen ins Leben gerufenen und geleiteten, aber amtlich erlaubten und besteuerten Unterrichtsanstalten entwickelte sich allmählich die deutsche Schule im Gegensatze zur Lateinschule, im ferneren Gegensatze zur nicht erlaubten, aber darum doch in halb öffentlichem Geheimnisse entstehenden Winkelschule. Auf allen diesen Schulen, welcher Art sie angehörten, kann der Rechenunterricht nicht elementar genug gedacht werden. Kaum irgendwo wird er das Rechnen mit ganzen Zahlen überschritten haben, Lehrbücher der Modisten scheinen sich nicht erhalten zu haben, wohl aber ein solches für die Lateinschule[3]). Es ist durch eine basler Handschrift bekannt und in derselben nach Zeit und Bestimmung gekennzeichnet. An das Rechenbuch schliesst sich nämlich eine von

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 294—297; über das Wort Modist S. 295. — Unger, Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart (1888) S. 17—19. Wir citiren dieses Buch künftig als Unger schlechtweg. [2]) Unger S. 20. [3]) Das älteste deutsche Rechenbuch herausgegeben und übersetzt von Friedrich Unger, Zeitschr. Math. Phys. XXXIII, Histor.-liter. Abthlg. S. 125—145. Der Text stammt aus der Handschrift F. VII. 12 der basler Universitätsbibliothek.

derselben Hand geschriebene andere Abhandlung an, und an deren Ende hat der Schreiber sich als einen Hildesheimer Stiftsschüler Bernhard unterzeichnet und das Jahr 1445 als das der Vollendung jener Schrift angegeben. Spätestens 1445 muss also Bernhard der Stiftsschüler auch das Rechenbuch zu Ende geschrieben haben, und man geht wohl kaum in der Annahme fehl, er würde des Beiwortes „Hildesheimer Stiftsschüler" sich nicht bedient haben, wenn das Rechenbuch nicht für jene Stiftsschule bestimmt gewesen wäre, welche unzweifelhaft eine Lateinschule war. Um so verwunderlicher freilich erscheint es, dass das Rechenbuch nicht in lateinischer, sondern in niederdeutscher Sprache verfasst ist, wobei die Kunstausdrücke natürlich lateinische blieben. Ob Bernhard es selbst verfasst, ob nur abgeschrieben hat, darüber fehlt jegliche Auskunft. Das Rechenbuch Bernhard's, wie wir uns deshalb etwas doppelsinnig auszudrücken bescheiden müssen, lehrt nur das Rechnen mit ganzen Zahlen in dem uns schon oft bekannt gewordenen Umfange mit den 7 Rechnungsarten der Addition und Subtraction, der Verdoppelung und Halbirung, der Multiplication und Division, der Wurzelausziehung. Addition, Subtraction und Halbirung beginnen rechts (an die recht syde), die übrigen Rechnungsarten links (an die slinker syde). Bei der Lehre vom Anschreiben der Zahl ist der numerus digitus vom numerus articulus und vom numerus compositus oder mixtus unterschieden. Beim Subtrahiren (aff trecken) ist das Borgen (aff dren) einer Einheit von der Ziffer nächsthöherer Ordnung, welche 10 werth ist (die een is 10 weerf) vorgeschrieben, die nächste Ziffer bleibt um die geborgte Einheit erniedrigt. Beim Multipliciren wird 9 mal 8 in 10 weniger 1 mal 8 verwandelt, also 8 von 80 abgezogen. Das Dividiren erfolgt überwärts. Quadrat- und Kubikwurzeln werden so weit ausgezogen, als es ganzzahlig möglich ist, von weitergehender Annäherung ist keine Rede. Man sieht, es ist das alte in den Klosterschulen bekannte und gelehrte Rechnen, welches wir bis auf Jordanus in Europa zurückverfolgen können. Kaum dass im Wortlaut ein Unterschied von dem ältesten handwerksmässigen Leitfaden, dem des Johannes von Sacrobosco, wahrnehmbar wäre.

Klopfen wir an die Thüre der deutschen Universitäten, so finden wir zwar Mathematik über das Rechnen hinaus, das Rechnen selbst aber auf keiner höheren Stufe als an den vorbereitenden Schulen. Wien war, wie wir (S. 141) gesagt haben, die vorzugsweise mathematische Universität. An ihr wirkte Johann von Gemunden[1]).

[1]) Allgem. deutsch. Biogr. XIV, 456—457. Ueber die wissenschaftlichen Leistungen vergl. M. A. Stern in Ersch. und Gruber's Allgem. Encyklop. der

Er mag um 1380 geboren sein. Für seine Heimath hielt man bald Gmunden am Traunsee, bald ein Dorf Gemünd in Niederösterreich, bald suchte man sie in Schwäbisch Gemünd. Die letztere Meinung stützt sich auf die Auffindung eines Computus, welchen im Jahre 1404 Johannes Wissbier de Gamundia ulme studens verfasst hat. Dieser Verfassersangabe hat man einestheils entnommen, dass schon um die Wende des XIV. zum XV. Jahrhundert die oberschwäbische Reichsstadt eine Art von Bildungsmittelpunkt für die süddeutschen Länder abgab, und dieses Ergebniss wird unter allen Umständen zu bemerken sein, anderntheils dass ein in Ulm dem Studium Obliegender mit grösserer Wahrscheinlichkeit dem benachbarten schwäbischen Gemünden als dem Städtchen im Salzkammergute oder gar einem niederösterreichischen Dorfe entstammte. Fraglich bleibt die Sache immer, so lange der Familienname des gemünder Professors in Wien nicht gesichert ist, ob er Wissbier hiess oder wie sonst. Man findet zwar die Angabe[1]), jener Professor sei in dem Todtenregister der Domherren zu St. Stephan, unter welche er 1411 aufgenommen wurde, als Johannes Nyden de Gemünden eingetragen, doch scheint sie urkundlich nicht nachweisbar. Besser gestützt ist ein dritter Familienname Schindler, der gleichfalls berichtet wird. Fünf Handschriften der Wiener Bibliothek aus dem XV. Jahrhundert nennen sämmtlich Johannes Schindler de Gamundia als Verfasser. Von ihm müsste man dann einen Johannes Schindel aus Königgrätz[2]) unterscheiden. Letzterer ist um 1375 in Königgrätz geboren, lehrte zwischen 1406 und 1410 in Wien, dann in Prag, wo er vor 1450 starb. Im Auslande war er als Joannes Pragensis weit und breit berühmt. Wäre Wissbier doch der richtige Name, so könnte der Umstand, dass Johannes Wissbier 1404 in Ulm studirte und Johannes von Gemunden am 21. März 1406 in Wien zum Magister der freien Künste wurde, bei der oftmals sehr langen Zeit, über welche Studien sich ausdehnten, einen Widerspruch nicht bilden. Die Lehrthätigkeit an den Universitäten war damals noch keine nach Fächern streng gesonderte, so wenig es Studirende dieses oder jenes Einzelfaches in der Artistenfacultät gab. Eigent-

Wissensch. u. Kunst II. Section, 22. Theil S. 188—190. — C. J. Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland (1877) S. 5—8. Wir citiren dieses Buch künftig als Gerhardt, Math. Deutschl. — Günther, Unterricht Mittela. S. 232—235.

[1]) Rud. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 86. [2]) Czerny im Archiv für Oesterreichische Geschichte (1888) LXXII, 300—301. F. J. Studnička in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Jahrgang 1892. S. 103—104.

liche Fachwissenschaften waren noch nicht so hoch entwickelt, um eine besondere Lebensaufgabe des Einzelnen bilden zu müssen. Wer lehren wollte, war bereit Alles zu lehren und musste um so mehr dazu bereit sein, nachdem (S. 141) die Ueberzahl der Lehrer in Wien den uns heute so unmöglich scheinenden Ausweg betreten liess, dass am Jahresanfang durch Verlosung die Reihenfolge bestimmt wurde, nach welcher die Professoren Gegenstand und Stunde der Vorlesung sich wählen durften. Wer spät zur Wahl kam, musste in beiden Beziehungen mit dem vorlieb nehmen, was die Vorgänger verschmäht hatten. Vor und nach Johannes von Gemunden finden wir daher Nichtmathematiker mit mathematischen, Mathematiker mit nichtmathematischen Vorlesungen betraut, wenn wir unseren eigenen Aeusserungen entgegen diese Bezeichnungen beibehalten dürfen. Mathematiker nennen wir nicht solche Persönlichkeiten einer frühen Zeit, welche ausschliesslich der Mathematik ihr öffentliches Leben widmeten, denn solche gab es nicht, sondern Männer, deren Spuren die Geschichte erhalten hat; von wem derartige Spuren nicht vorhanden sind, der ist für uns Nichtmathematiker gewesen. Johannes von Gemunden selbst begann mit philosophischen Vorlesungen, wie z. B. mit einer Vorlesung De sensu et sensato. Im Jahre 1412 lehrte er den Algorismus de integris, 1414 Perspectiva communis, 1416 und 1417 Algorismus de minutiis. Seit 1420 las er über die verschiedensten mathematischen Gegenstände, aber ausschliesslich über solche, bald über die Elemente Euklid's und die Sphaera materialis, bald über die Theoriae planetarum, bald über den Gebrauch des Astrolabiums, welche letztere Vorlesung er zuerst in Wien einführte. Es mag wohl allmälig die Gewohnheit sich herausgestellt haben, ihm, zu welchem Augenblicke auch die Reihe ihn traf, denjenigen Gegenstand freizuhalten, den er gerade vorzutragen wünschte, und damit war der allmälige Uebergang von der Professur in der Artistenfacultät überhaupt zur Fachprofessur der Mathematik in Wien angebahnt. Allerdings setzte eine solche Rücksichtnahme auf persönliche Wünsche des Einzelnen eine hohe Achtung voraus, in welcher er selbst und seine Lehrthätigkeit bei den Mitprofessoren stehen musste. Dass dem bei Johannes von Gemunden so war, wird auch dadurch bestätigt, dass man ihm 1418 gestattete, während einer Unpässlichkeit von längerer Dauer seine Vorlesungen im eigenen Hause zu halten, was gegen alle Regel war. Er setzte seine erspriessliche Thätigkeit bis zu seinem am 23. Februar 1442 erfolgenden Tode fort. Seine Bücher und Instrumente hatte er, unter dem Vorbehalte sie lebenslänglich frei benutzen zu dürfen, schon 1435 der Universität geschenkt. Die Bücher sollten in der Bibliothek gesondert aufgestellt und gegen Entrichtung eines in die

Facultätskasse fliessenden Betrages auch ausgeliehen werden. So war Johannes von Gemunden gewiss eine hochansehnliche Lehrkraft. Die Geschichte der Astronomie hebt rühmend hervor, dass er einen, vielleicht auch zwei Kalender anfertigte, die in Holz geschnitten und auf diese Weise vervielfältigt wurden[1]), dass auch andere Tabellen, z. B. die ersten Ephemeriden, von ihm berechnet wurden. In seinen Vorlesungen über den Algorismus de integris hat Johannes von Gemunden stets Sacrobosco's Leitfaden zu Grunde gelegt. In den Vorlesungen über das Bruchrechnen benutzte er sicherlich wenigstens zum Theil eine von ihm selbst verfasste Anleitung, welche 1515 in Wien gedruckt worden ist, und welche den Titel führt: Tractatus de Minutiis phisicis compositus Viennae Austriae per M. Joannem de Gmunden[2]). Welches Buch er bei dem Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen benutzte, darüber sind wir leider ohne Auskunft. Unter den minutiae phisicae nämlich sind, wie immer unter diesem Ausdrucke, Sexagesimalbrüche verstanden. Dass der 360. Theil des Kreisumfanges als Grad bezeichnet wird, der in 60 Minuten zerfällt, während jede Minute aus 60 Secunden u. s. w. besteht (Bd. I, S. 388), ist bekannt genug. Aber auch nach aufwärts war ein Zusammenfassen von Graden wünschenswerth. Dazu pflegte man sich des Thierkreises mit seinen 12 Zeichen zu bedienen, so das ein Zeichen, signum, aus 30 Graden bestand. Das war freilich eine Regelwidrigkeit gegen die Sechzigtheilung, und ihr konnte entgangen werden, wenn zwei Thierkreiszeichen, also 60 Grade, als eine höhere Einheit zusammengefasst wurden. Dieses vollzog Johann von Gemunden und nannte die 60 Grade ein *signum phisicum*, von welchen also 6 den Kreisumfang bildeten. Diese Neuerung, die keineswegs als eine ganz unbedeutende zu erachten ist, da sie ein deutliches Erfassen des Grundgedankens der Sexagesimalrechnung verräth, war übrigens nicht Eigenthum des Johannes von Gemunden, noch wurde sie von ihm als solche in Anspruch genommen. Er beruft sich vielmehr ausdrücklich auf König Alfons X. von Leon als Vorgänger[3]), und wirklich sind auch in dessen 1252 vollendeten astronomischen Tafeln die 60gradigen Zeichen eingeführt, die nur keine Nachahmung fanden. Jordanus Nemorarius ging bei seiner Darstellung, wie wir (S. 66) ausdrücklich hervorgehoben haben, überhaupt nicht vom Kreise aus. Für ihn gab es dess-

[1]) von Zach, Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde XVIII, 583—593 mit einem Abdruck einer der erhaltenen Originalholzschnitttafeln. Ferner ebenda XIX, 196—198 und 284—292. [2]) Wir berichten nach dem Auszuge bei Gerhardt, Math. Deutschl. S. 5—8. [3]) *In tabulis vero alphoncii et in tabulis meis non ponuntur talia signa, sed signa phisica quorum quodlibet valet duo signa communia.*

halb weder Zeichen noch Grade, sondern nur Ganze und deren Bruchtheile, die Minuten, Secunden, Tertien. Johannes von Gemunden zeigt nun an einem Beispiele die Verwerthung der Stellung zur Angabe des Ranges der Sexagesimalbrüche. Auch davon war bei Jordanus keine Rede und konnte vermöge der rein theoretischen Anlage seines Algorithmus demonstratus, in welchem Zahlenbeispiele grundsätzlich bald gar keine, bald eine Nebenrolle spielten, kaum die Rede sein. Johannes von Gemunden dagegen lehrt 2 Zeichen 24 Grade 36 Minuten 45 Secunden werden .2. 24. 36. 45. geschrieben. Diese Schreibweise, repraesentatio minuciarum phisicarum, inbegriffen, lehrt er 10 Rechnungsarten. Nämlich 2. Verwandlung von Ganzen in Brüche und umgekehrt, sowie Zurückführung von Brüchen verschiedener Benennung auf den gleichen Nenner und umgekehrt, 3. Addition, 4. Subtraktion, 5. Halbirung, 6. Verdoppelung, 7. Multiplication, 8. Division, 9. Quadratwurzel, 10. Kubikwurzel. Addiren, Subtrahiren, Halbiren beginnen nach alter Gewohnheit rechts, dazu kommt aber abweichend von dem früheren Brauche die Verdoppelung; sie sei nur Addition zweier gleicher Zahlen, und desshalb müsse bei ihr wie bei der Addition verfahren werden. Bei der Multiplication und Division kommen als Sexagesimalbrüche höchster Ordnung solche mit dem Nenner 60^6, also ausser den Tertien noch Quarten, Quinten, Sexten vor. Beim Ausziehen der Quadratwurzel wechseln plötzlich, sofern die Annäherung weiter getrieben werden will, als der unmittelbar gegebene Radicand es zulässt, Sexagesimalbrüche mit Decimalbrüchen. Ganz neu ist ja deren Anwendung auch nicht. Johannes von Luna hat schon (Bd. I, S. 752) sich ihrer ganz ähnlich bedient. Aber dort waren Sexagesimalbrüche nicht schon im Laufe der Rechnung benutzt. Man soll, so ist die Vorschrift des Johann von Gemunden, den ganzen Radicanden auf die Benennung des letzten Sexagesimalbruches bringen, der aber nothwendig von grader Ordnung (60^{2n}) gewählt werden muss und ihm rechts noch Nullenpaare in beliebiger Anzahl beifügen. Dann theilt man von der Rechten anfangend den als ganze Zahl betrachteten neugestalteten Radicanden in zweistellige Gruppen und zieht die Wurzel, bleibt ein Rest, so wird er weggelassen[1]). Von der gefundenen Wurzel schneidet man rechts halb so viele Ziffern ab, als Nullen angefügt waren, und verwahrt sie. Die nach links übrigen Stellen bilden den Zähler der Wurzel, deren Nenner von halb so hoher Ordnung (60^n) ist, als der anfängliche Radicand. Nun nimmt man die vorher verwahrten Stellen, vervielfacht sie mit 60, schneidet wieder genau so viele Ziffern rechts ab als vorher, nämlich immer

[1]) *si sit aliquid residuum pro nihilo computetur.*

halb so viele als Nullen angefügt worden waren u. s. w. So findet man die Zähler weiterer Sexagesimalbrüche, und je mehr Nullen angefügt worden waren, um so genauer erhält man die Wurzel[1]). Das ist ein um so eigenthümlicher gemischtes Verfahren, als Theon von Alexandria (Bd. I, S. 461) die Aufsuchung angenäherter Quadratwurzeln unmittelbar an Sexagesimalbrüchen genau gelehrt hatte, ein Verfahren, welches offenbar nicht zu den Arabern gelangt oder durch deren Vermittelung noch nicht wieder in das Abendland gedrungen war, so wenig dieses mit dem griechischen Texte der Fall gewesen sein muss.

Wir haben somit in Johann von Gemunden einen Mathematiker und Astronomen kennen gelernt, der in mancher Leistung, als Schriftsteller (wofür wir auch eine Abhandlung *De arcubus et sinibus* anführen könnten) wie als Lehrer, über das schon Vorhandene hinausging, der aber trotzdem es nicht verschmähte, noch dem Bildungsgange der damals Studirenden gegenüber es verschmähen durfte, ab und zu das niedrigste Rechnen mit ganzen Zahlen zu lehren. Nicht anders wurde es an den anderen deutschen Universitäten gehalten.

In Prag lebte Křištan von Prachatic[2]) von 1392—1437. Sein *Algorismus prosaycus* enthält was alle ähnliche Schriften damals boten, aber auch Einiges darüber hinaus. Bei ihm findet sich die Netzmultiplication (Bd. I, S. 571), bei ihm ein kleines Einmaleins in quadratischer, ein grosses Einmaleins bis zu 20 mal 20 in dreieckiger Anordnung, bei ihm eine kleine Tafel der Quadrat- und Kubikzahlen bis zu 81 und 729.

In Erfurt musste im XV. Jahrhunderte ein Monat auf die Vorlesung über den Algorismus, ebenso ein Monat auf die über den Computus verwandt werden[3]). Die Universität Leipzig entstand 1409 durch aus Prag dorthin sich wendende Lehrer und Studirende, welche böhmischer Unduldsamkeit sich entzogen. Die ersten Satzungen der neuen Hochschule verlangen für das Baccalaureat die Sphaera materialis, die zweiten Satzungen von 1436 und 1437 fügen dem die Forderung des Algorismus und Computus bei[4]), und ähnliche Vorlesungen liessen sich ohne Schwierigkeit auch an anderen Universitäten nachweisen.

Kehren wir nach Wien zurück, so wissen wir Schüler des Johann von Gemunden als dessen Nachfolger nicht zu nennen. Er soll zwar

[1]) *et quanto plures cifras praeposueris tanto praecisius habebis radicem.*
[2]) F. J. Studnička in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, Jahrgang 1892, S. 100—103 und: *Algorismus prosaycus Magistri Christiani anno fere 1400 scriptus* herausgegeben von F. J. Studnička. Prag 1893.
[3]) Suter, Math. Univ. S. 42. [4]) Ebenda S. 53.

deren viele gehabt haben, aber wenn schon nach einem Jahrhunderte von ihnen gesagt ist, dass die Zeit ihre Namen verloren gehen liess[1]), so wird denselben vermuthlich nicht viel nachzurühmen gewesen sein. Anders verhält es sich mit dem Manne, der, ohne Schüler des Johann von Gemunden gewesen zu sein, als sein Nachfolger bezeichnet werden darf. Er reicht zwar über die Grenze der ersten Hälfte des XV. Jahrhunderts um einige Jahre hinaus, aber so haarscharf können wir die Abschnitte, in welche wir diesen Band gliedern, nicht begrenzen, dass wir, seltene Ausnahmen vorbehalten, eine Persönlichkeit durchschneiden, um sie in mehreren Abschnitten zu behandeln. Georg von Peurbach[2]), den wir hier im Auge haben, ist geboren den 30. Mai 1423 an der bairisch-österreichischen Grenze unweit von Linz in dem Orte Peurbach. Die Rechtschreibung des Ortes und des Mannes wechselt mehrfach, man findet auch Peyerbach und Burbach. Peurbach, so nennt man ihn jetzt gewöhnlich mit dem Ortsnamen selbst, studirte jedenfalls in Wien und erwarb dort den Grad eines Magisters in der Artistenfacultät. Dann begab er sich auf Reisen, insbesondere nach Italien, wo er mit zwei Männern bekannt wurde, von denen weiter unten die Rede sein muss, mit Bianchini und mit Nicolaus Cusanus. Im Jahre 1453 spätestens kehrte Peurbach nach Wien zurück und lebte dort in sehr ärmlichen Verhältnissen, von Schulden bedrückt, bis er 1454 in die Stellung des Astronomen Königs Ladislaus von Ungarn eintrat. Etwas später finden wir ihn als Lehrer an der wiener Universität. Man würde irren, wenn man glaubte, er habe vorzugsweise mathematische und astronomische Vorlesungen gehalten. Einige von letzterer Art werden allerdings erwähnt, er schrieb auch einen Algorismus für „die jungen Studenten der hoen schuel zu Wien", allein er las mit Vorliebe über lateinische Schriftsteller: 1456 über Juvenal, 1458 über Horaz, 1460 über die Aeneis des Vergil. Peurbach starb den 8. April 1461 und soll im Stephansdome beerdigt worden sein. Von den Schriften Peurbach's haben wir soeben seinen Algorismus angeführt. Derselbe wurde seit Ende des Jahrhunderts, zuerst vielleicht 1492 unter dem Titel Opus algorismi jocundissimum, mehrfach gedruckt und bildete gleich Peurbach's astronomischem Lehrbuche, Theoricae planetarum, welches in der Zeit von 1460 bis 1581 nicht weniger als 14mal gedruckt worden ist, lange Zeit das stehende Lehrbuch der Universitäten.

[1]) *quorum vetustas nomina abolevit* sagte Tannstetter. Vgl. Kästner II, 529. [2]) Kästner I, 529—548. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 8—12. — Günther, Unterricht. Mittela. S. 235—241. — Alb. Czerny, Aus dem Briefwechsel des grossen Astronomen Georg von Peurbach im Archiv für Oesterreichische Geschichte LXXII, 283—304.

Peurbach, kann man sagen, löste in dieser Beziehung Sacrobosco ab. Der *Algorismus* freilich, der bald Opus Algorismi jocundissimum, wie wir schon gesagt haben, bald Opus Algorithmi, bald Institutiones in arithmeticam, bald ohne nähere Inhaltsbezeichnung Opusculum Magistri Georgii Peurbachii heisst, erhebt sich kaum über den, welchen er verdrängte. Gleich dem Algorismus des Sacrobosco giebt er nur Regeln, nirgend Beweise; gleich ihm beschleppt er sich mit Mediatio und Duplatio als besondern Rechnungsarten; gleich ihm handelt er in den meisten Druckausgaben nur von ganzzahligem Rechnen, ist also ein algorithmus de integris. Man könnte dieses begreiflich finden, auch eine Erklärung dafür darin sehen, dass für das Bruchrechnen, soweit es einer neuen Bearbeitung zu bedürfen schien, soeben erst durch Johann von Gemunden gesorgt worden war, allein eine durch Melanchthon und Voegelin besorgte, in Wittenberg gedruckte Ausgabe von 1536 enthält einen dem Peurbach zugeschriebenen algorithmus de minuciis und einen algorithmus de proportionibus, von welchen der erstere echt zu sein scheint, da er auch in einer Münchener Handschrift des XV. Jahrhunderts vorkommt. Es will scheinen als ob Peurbach zunächst darin sogar hinter seinem Vorgänger Sacrobosco zurückblieb, dass er die Kubikwurzelausziehung wegliess, wiewohl aus den unter einander verschiedenen Drucken, die ja alle mindestens 30 Jahre nach Peurbach's Tode erfolgten, ein sicherer Schluss nicht gezogen werden kann[1]), wiewohl anzuerkennen ist, es sei wahrscheinlicher, dass ein zweiter Drucker dem Bedürfnisse der Zeit Rechnung tragend etwas hinzufügte, was er gleichviel von wem sich anfertigen liess, als dass ein erster Drucker aus dem handschriftlich Vorhandenen etwas fortgelassen hätte. Die Ausführung der Rechnungsarten hat vollends keinerlei Veränderung erhalten. Wüssten wir von keinem anderen Werke Peurbach's, so würden wir die Bewunderung, welche ihm gezollt wurde, und welche z. B. in seiner Grabinschrift[2]) ausgesprochen ist, kaum begreifen. Um so verständlicher wird uns dieselbe, wenn wir eine andere Arbeit in's Auge fassen.

Wir meinen den *Tractatus Georgii Purbachii super Propositiones*

[1]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 10 sagt: In seiner ursprünglichen Gestalt enthält der Algorismus Peurbach's die folgenden mathematischen Operationen: *Numeratio*, *Additio*, *Subtractio*, *Mediatio*, *Duplatio*, *Multiplicatio*, *Divisio*, *Progressio*, mit welcher letzteren die Ausziehung der Quadratwurzel verbunden ist. Günther, Unterricht Mittela. S. 237 giebt nach einem Drucke von 1503 an, dass nach der *Radicum extractio quadrata* noch kommen: *Radicum extractio cubica*, *Regula aurea sive de tre*, *Regula societatis*, *Enigma*. [2]) Erhalten bei Weidler, *Historiae Astronomiae* pag. 300.

Ptolemaei de sinubus et chordis, der 1541 in Nürnberg gemeinschaftlich mit einer Tabelle des Regiomontanus, Peurbach's berühmtestem Schüler, gedruckt worden ist, wenn er auch eine gewisse Abhängigkeit von Johann's von Gemunden Abhandlung De arcubus et sinibus nicht verkennen lässt[1]). Bekanntlich unterscheidet sich die Trigonometrie des Ptolemäus von der arabischen Trigonometrie wesentlich dadurch, dass in ersterer Sehnentafeln, in letzterer Sinustafeln (Bd. I, S. 391 und 694) benutzt wurden. Diejenigen Astronomen, welche an Schriften beiderlei Ursprungs ihre Studien machten, waren dadurch genöthigt, mit beiden Auffassungen sich bekannt zu machen. Dass dabei die praktischen Vortheile der Sinustrigonometrie, wenn es gestattet ist diese Wortverbindung zu wagen, deutlich und deutlicher hervortraten, liegt in ihnen selbst begründet. Dass damit im Zusammenhange der Wunsch nach neuen und genauen Sinustafeln auftrat, ist leicht begreiflich, und diesen Wunsch zu befriedigen hat Peurbach zuerst in Deutschland sich zur Aufgabe gestellt. Die beabsichtigte Genauigkeit war nun in zwei Richtungen zu suchen, einmal in der Richtung, dass der Kreishalbmesser, in dessen Theilen die Sinuslinie gemessen wurde, möglich gross angenommen wurde, zweitens in der Richtung, dass die Winkel, deren Sinus unmittelbar aus der Tabelle zu entnehmen waren, in kleinstmöglichen Zwischenräumen auf einander folgten. In letzterer Beziehung hat Peurbach die Winkel von 10 zu 10 Minuten zunehmen lassen[2]). Die Länge des Halbmessers hat er mit 600000 angesetzt[3]). Wir glauben nicht irre zu gehen, wenn wir in dieser für den *Sinus totus*, den Sinus in seiner ganzen erreichbaren Länge, d. h. eben den Halbmesser, gesetzten Zahl eine Nachwirkung der von Johann von Gemunden beliebten Vermengung sexagesimaler und decimaler Theilung, von der wir oben sprachen, erkennen. Jener hielt es für nothwendig die decimale Theilung nur als Durchgangspforte gleichsam zu behandeln und nachträglich wieder zu Sexagesimalbrüchen überzugehen. Peurbach ersparte sich die letztere Arbeit durch die Wahl von 60×10^4 als Längeneinheit. Der nächste Schritt musste den Halbmesser rein decimal theilen, und wir werden sehen, dass derselbe nicht lange mehr auf sich warten liess. Die Sinustafel, welche in der die Nummer 5277 tragenden Handschrift der wiener Bibliothek sammt Erläuterungen vorhanden ist, und in deren Beschreibung Proportionaltheile ganz wie in späterer Zeit zur

[1]) Curtze brieflich. [2]) Tannstetter sagt: *Nova tabula sinus de decem minutis in decem per multas millenarias partes.* Vergl. Pfleiderer, Ebene Trigonometrie mit Anwendungen und Beiträgen zur Geschichte derselben (1802) S. 21 Note 6. Dieses allzuselten zu Rathe gezogene, ungemein gewissenhaft gearbeitete Buch citiren wir als Pfleiderer. [3]) Kästner I, 535.

Anwendung empfohlen sind[1]), ist nicht zum Abdrucke gelangt, wohl aber, wie wir sagten, im Jahre 1541 die einleitenden Bemerkungen, der Tractatus super Propositiones Ptolemaei u. s. w., und in ihnen[2]) giebt sich Peurbach als klardenkenden Mathematiker zu erkennen, der seinen Stoff überdies durchaus beherrscht, für welchen ihm, wie es scheint, zwei Quellen zu Gebote standen, eine der vorhandenen Uebersetzungen des ptolemäischen Almagestes, so gut oder schlecht sie war, und eine Uebersetzung von Werken eines westarabischen Astronomen Arzachel[3]). Auf ihn beruft sich Peurbach ausdrücklich bei Auseinandersetzung der Rechnung, mittels deren er die Sinusse gewisser Winkel auffindet, und welche er im Geiste Arzachels geführt[4]) nennt. Arzachel, der gegen Ende des XI. Jahrhunderts lebte, setzte die Länge des Durchmessers mit 300, die des Halbmessers mit 150 an[5]), war also auf die von uns besonders betonte Wahl von 600000 für den Halbmesser ohne jeden Einfluss. Wohl aber dürfte sonst mancherlei bei Peurbach auf ihn zurückzuführen sein. Peurbach beginnt mit der Frage nach dem Verhältnisse des Kreisumfanges zum Durchmesser. Er weiss, dass Archimed es zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ eingeschlossen hat, dass Ptolemäus es zu $\frac{377}{120}$ annahm (Bd. I, S. 394), dass die Inder (Bd. I, S. 606) es mit $\sqrt{10}$ für einerlei erklären; wüsste also Jemand die Wurzeln solcher Zahlen zu finden, welche einer rechten Wurzel entbehren, so fände er leicht, wie viel Theile der Durchmesser im Verhältnisse zum Kreisumfange hätte[6]). Wieder Andere, fährt Peurbach fort, sagen, jenes Verhältniss sei wie 20000 zu 62832 (Bd. I, S. 604), aber streng genommen ist ein Verhältniss überhaupt nicht vorhanden, weil das Gerade und das Krumme nicht Grössen derselben Art sind; dagegen waltet zwischen ihnen eine gegenseitige Beziehung, denn der Sinus ist Sinus eines bestimmten Bogens, und der Bogen ist Bogen eines bestimmten Sinus[7]). Mit Ptolemäus stimmt Peurbach in der Berechnung der Seiten der regelmässigen Sehnenvielecke von 3, 4, 5, 6, 10 Seiten überein, mit ihm in der Benutzung des Satzes, dass der Quotient der grösseren Sehne getheilt durch die kleinere, kleiner ist als der Quotient der von den Sehnen bespannten Bögen, zur Auffindung der Sehne von 1^0.

[1]) Curtze brieflich. [2]) Kästner I, 540—548. [3]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 72. [4]) *Haec de mente Arzahelis.* [5]) Kästner I, 524. [6]) *Indi vero dicunt: si quis sciret radices numerorum recta radice carentium invenire, ille faciliter inveniret quanta esset diameter respectu circumferentiae. Et secundum eos, si diameter fuerit unitas, erit circumferentia radix de decem.* [7]) . . . *eo quod rectum et curvum non sunt eiusdem speciei. Est tamen inter eos mutua relatio, nam sinus est portionis sinus, et portio est sinus portio.*

Peurbach hat auch einen praktischen Gebrauch von seiner Sinustafel zu astronomischen sowohl als zu geodätischen Zwecken gemacht. Sie dienten ihm bei Anwendung eines von ihm erfundenen Messinstrumentes, dessen Beschreibung er einem Erzbischof Johannes von Gran (Strigonium) in Ungarn zueignete[1]). Der gewöhnliche Name jenes Messinstrumentes lautet *Quadratum geometricum*, es ist aber nicht mit jenem Quadrate zu verwechseln, dessen man sich etwa hundert Jahre früher in England (S. 112) zu ähnlichen Zwecken bediente. Jenes wurde selbst gedreht, damit man längs einer Seite desselben nach einem Punkte hinvisiren konnte. Einen solchen Gebrauch gestattet Peurbach's Vorrichtung, welche weit mehr an Gerbert's Astrolabium (Bd. I, S. 812) erinnert, schon ihrer Ausmessungen wegen nicht. Das Quadratum geometricum (Fig. 30) aus Holz oder Metall hergestellt, hatte Seiten von je zwei Ellen Länge. Zwei derselben, als *latus versum* und *latus rectum* bezeichnet, waren in je 1200 Theile getheilt, so dass jedes Theilchen etwa 1 Millimeter betrug. Die Bezeichnung 1200 befand sich an jenem Endpunkte, wo die beiden getheilten Seiten aneinander stiessen. Um den diagonal gegenüberliegenden Eckpunkt war ein mit zwei Dioptern ausgestattetes Lineal drehbar. Die Aufstellung des Quadrates wurde durch ein Bleisenkel geregelt, welches von einem Ansatze an die senkrechte ungetheilte Quadratseite herabhing und durch einen Schlitz in einer ähnlichen Verlängerung der wagrechten ungetheilten Seite hindurch sich fortsetzte, so dass ihm etwas Spielraum gegeben war. Von einem Stative ist keine Rede. Wurde nun mit Hilfe des Diopterlineals irgend ein Punkt, Stern, Thurmspitze oder dergleichen einvisirt, so schnitt das Lineal dabei eine getheilte Seite in einem ablesbaren Punkte, z. B. im Punkte 600 des *latus rectum*. Die Länge des Diopterlineals vom Drehpunkte bis zum Schnittpunkte war dann $\sqrt{1200^2 + 600^2} = \sqrt{1800000} = 1341\frac{641}{1000}$ (sexcenta et quadraginta una millesimae fere), mit dieser Zahl ist in 600 mal 600000,

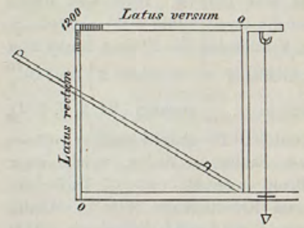

Fig. 30.

[1]) *Canones pro compositione et usu gnomonis pro Reverendissimo domino Joanne Archiepiscopo Strigon. a praeclarissimo Mathematico Georgio Burbachio* (sic!) *compositi.* Der Druck ist unter dem Namen *Quadratum Geometricum* 1516 in Nürnberg erfolgt. Dessen Beschreibung bei Kästner I, 529—540.

weil der Halbmesser als 600000 gedacht ist, zu dividiren, und das geschieht, indem dem Dividendus noch drei Nullen angefügt werden; man rechnet demnach 360000000000 : 1341641 und erhält 268328. Zu dieser Zahl gehört den Sinustafeln gemäss der Winkel von $21^0\,33'\,55''$, und dieser Winkel entspricht also dem Theilstriche 600 auf dem latus rectum. Wir haben der Rechnung, die nahezu wörtlich aus dem Peurbachischen Texte übersetzt ist[1]), nur Weniges hinzuzufügen. Einmal dass aus den Sinustafeln, wenn sie, wie wir wenig späterem Berichte folgend annahmen, für Winkel von 10 zu 10 Minuten berechnet waren, der hier gefundene Winkel nicht unmittelbar hat entnommen werden können. Peurbach muss sich also dazu eines Interpolationsverfahrens bedient haben, welches er uns hier nicht näher beschreibt (S. 182). Zweitens ersetzt die angestellte etwas umständliche Rechnung den Mangel einer Tangententafel, denn es handelt sich in der angeführten Aufgabe doch eigentlich um nichts anderes als um Auffindung des Winkels, dessen Tangente $\frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$ ist. Die von Peurbach berechnete Hilfstafel zum Quadratum geometricum ist also streng genommen eine Tafel vom Argustangens k, wo k durch alle Zwölfhundertstel hindurchgehend die Werthe von $\frac{1}{1200}$ bis 1 annimmt.

Peurbach's rein astronomische Schriften entziehen sich selbstverständlich wieder unserer Betrachtung. Nur von einer Aufgabe haben wir noch ein Wort hier zu reden, welche Peurbach sich stellte, welche für ihn eine Lebensaufgabe sein sollte, aber in deren Erfüllung er durch den Tod unterbrochen wurde. Es war die Anfertigung einer guten lateinischen Uebersetzung des ptolemäischen Almagestes aus dem griechischen Urtexte. Wie und durch wen Peurbach zu dieser Arbeit ermuntert wurde, mag da ausführlicher zur Sprache kommen, wo der Veranlasser der Arbeit, Bessarion, uns beschäftigen wird.

Im Anschlusse an die trigonometrischen Leistungen Peurbach's sei hier aus einer Münchner Handschrift von 1446 eine geographische Abhandlung erwähnt, in welcher die decimale Theilung der Winkelgrade durchgeführt ist[2]).

[1]) Kästner I, 535. [2]) Codex latinus Monacensis 11067 (Pass. 67). Blatt 174ʳ—176ʳ: *Et notandum quod in praesenti tabula quilibet gradus et hora dividitur in 100 minuta, et quodlibet minutum in 100 secunda et sic de aliis.* Vergl. *Petri Philomeni de Dacia in Algorism. vulgar. Ioh. de Sacrobosco Comment.* edid. M. Curtze, pag. VIII in der Note.

51. Kapitel.

Nicolaus Cusanus.

Der nächste deutsche Mathematiker, dem wir uns zuwenden, war kein Universitätslehrer. Cardinal Nicolaus von Cusa[1]) oder Cusanus hat überhaupt unserer Wissenschaft nur als ganz beiläufiger Nebenbeschäftigung gehuldigt; um so bemerkenswerther sind seine Leistungen. Cusanus war als Sohn eines Fischers Johannes Chryppfs (Krebs) 1401 in dem Dorfe Cues am linken Moselufer geboren. Dem elterlichen Hause entlaufen wuchs Nicolaus im Dienste des Grafen von Manderscheid auf. Wissenschaftliche Vorbildung erhielt er auf der Schule zu Deventer. Schon 1416 vor Johanni wurde er als Nicolaus Cancer de Coesze clericus Trever. dyoc. in das Matrikelbuch der Universität Heidelberg eingetragen[2]). Später widmete er in Padua sich der Rechtsgelehrsamkeit. Dort war er Mitschüler des späteren geographischen Schriftstellers Paolo Toscanelli, dessen Name in der Geschichte der Entdeckung von Amerika genannt wird, der auch der Astronomie Dienste erwies, indem er auf Fehler in den Alfonsinischen Tafeln aufmerksam machte. Vielleicht waren beide, Cusanus und Toscanelli, unter den Zuhörern des Prodocimo de' Beldomandi, mit welchem das 52. Kapitel uns bekannt machen wird. Wenigstens war zeitlich die Möglichkeit solcher Beziehungen geboten, da Beldomandi 1422 als Professor der Astronomie in Padua angestellt wurde, und Cusanus diese Universität 1424 nach Erlangung der juristischen Doctorwürde verliess. Er verlor in Mainz seinen ersten Process und wandte sich dann vollständig der Theologie zu. An den Kirchenstreitigkeiten, welche fast während des ganzen Lebens des Cusanus dauerten, betheiligte er sich in hervorragendem Maasse, zuerst auf dem Basler Concile von 1432—1437 als berufenes Mitglied, später als päpstlicher Legat, seit December 1448 mit dem Titel Cardinal, zu welchem im März 1450 die Verleihung des Bisthums Brixen hinzukam. An diese letztere Verleihung knüpften sich persönliche Streitigkeiten für den Cardinal, welche nur mit seinem am 11. August 1464 in Todi in Umbrien erfolgenden Tode ein Ende

[1]) Biographisches vergl. in der Allg. deutschen Biographie IV, 655—662, einen alle vorhandenen Lebensbeschreibungen benutzenden Artikel von Prantl. Nur den Aufenthalt in Heidelberg konnte er nicht kennen, da damals (1876) das Heidelberger Matrikelbuch noch nicht veröffentlicht war. [2]) Töpke, Die Matrikel der Universität Heidelberg von 1386 bis 1662 (1884—1886) I, 128 Z. 4 v. u.

nahmen, und welche einen ziemlich langen Aufenthalt in Italien veranlassten, bei welcher Gelegenheit er, wie (S. 180) erwähnt worden ist, mit Georg von Peurbach persönlich bekannt wurde und zu demselben in wissenschaftliche Beziehungen trat, welche durch Schriftenübersendung sich äusserten. Die Werke des Cardinals Ecusa, wie er gleichfalls oft genannt wird, sind ziemlich vielseitig. Welche Quellen ihm zur Verfügung standen, kann noch heute aus seiner in Cues aufbewahrten Bibliothek ersehen werden. Theologisches, Staatsrechtliches, Philosophisches wechselt in ziemlich buntem Gemenge, und die überall durchblickende mystisch-scholastische Färbung gehört nicht minder ihm selbst als der Zeit an, in welcher er lebte und schrieb. Uns beschäftigen diese philosophischen Gedanken nur so weit sie mathematische Folgerungen erzeugten. Die sonstigen Schriften übergehen wir vollständig mit Einschluss eines Gesprächs über Versuche mit der Wage, welches der Geschichte der Physik angehört. Die Gesammtwerke wurden im XV. Jahrhunderte in Paris dem Drucke übergeben. Eine zweite Ausgabe, welche auch mit Anmerkungen eines gewissen Omnisanctus (?) versehen ist, erschien in Basel 1565. Wir folgen der letzteren Ausgabe[1]).

Die ersten mathematischen, oder richtiger gesagt chronologisch-astronomischen Arbeiten des Cusanus sind seine Vorschläge zur Kalenderverbesserung und zur Verbesserung der Alfonsinischen Tafeln, welche zusammengehören, und mit welchen er 1436 den Versuch machte, das Basler Concil zu einer Beschlussfassung über den Gegenstand zu veranlassen, dessen Wichtigkeit fortwährend in der religiösen Unsicherheit gefunden wurde, welche bald einen Fasttag halten liess, wo kein solcher geboten war, bald auch, und darin lag die Gefahr, Fleischgenuss an Tagen gestattete, die von Rechtswegen durch Fasten begangen werden mussten[2]). Das von Cusanus vorgeschlagene Heilmittel bestand in der Weglassung von 7 Tagen in der Weise, dass im Jahre 1439 Pfingstsonntag noch am 24. Mai gefeiert werden solle, wie die vorhandenen Kalender es wünschten. Dann aber solle man den Pfingstmontag mit der Bezeichnung des 1. Juni versehen und künftig regelmässig alle 304 Jahre

[1]) Einzeluntersuchungen über die mathematisch-astronomischen Leistungen des Cusanus hat Dr. Schanz in Programmbeilagen des Gymnasiums zu Rottweil für die Jahrgänge 1871—1872 und 1872—1873 veröffentlicht: I. Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Mathematiker. II. Die astronomischen Anschauungen des Nicolaus von Cusa und seiner Zeit. Wir citiren sie als Schanz I und Schanz II. Die Basler Ausgabe (1565) der Werke des Cusanus citiren wir als Cusani Opera. [2]) Schanz II, 17—31. Cusani *Opera* pag. 1155—1167: *Reparatio Calendarii* und pag. 1168—1173: *Correctio Tabularum Alphonsi.*

ein Schaltjahr wegfallen lassen, so werde die Fehlerquelle versiegen, die darin liege, dass im julianischen Jahre mit in vierjähriger Regelmässigkeit eingeschobenem Schalttage die Jahreslänge genau zu $365\frac{1}{4}$ Tagen und damit um ein Geringes zu gross angenommen sei. Das Basler Concil spaltete sich am 7. Mai 1437. Cusanus gehörte zu der Minderheit, welche austrat und sofort mit Entschiedenheit auf die Seite des Papstes sich stellte. Von einer Beschlussfassung über Kalenderfragen war keine Rede mehr.

Ausführlicher müssen diejenigen Schriften uns beschäftigen, welche als philosophisch-mathematische zu bezeichnen sind, und welche den Jahren nach 1450 angehören, wenn auch der philosophische Grundgedanke schon in einem Werke enthalten ist, welches zwischen December 1439 und Februar 1440 theils in einem Kloster in der Eifel, theils in Cues, dem Heimathsorte des Verfassers, niedergeschrieben ist, und welches den Titel De docta ignorantia[1]) führt. Die gelehrte Unwissenheit ist ein innerer Widerspruch, welchen der Verfasser folgendermassen rechtfertigt. Erkenntniss findet statt, wenn man das Verhältniss des Erforschten zu allem, was da ist, zum Bewusstsein gebracht hat. Es sind folglich, entsprechend den unendlich vielen Vergleichungsgegenständen, unendlich viele Vergleichungen anzustellen, und solches ist dem menschlichen Geiste unmöglich. Darum habe schon Sokrates sich dahin ausgesprochen, er wisse nichts als die Thatsache seiner Unwissenheit, und ihm darin nachzufolgen reizt uns der bei alledem in uns gelegte Erkenntnisstrieb. Kommen wir über unser Nichtwissen ins Klare, so dürfen wir von einer gelehrten Unwissenheit reden.

Wir haben zu dieser Erörterung des Cusanus noch einen kleinen, aber nicht unwichtigen Zusatz zu machen. Bei jedem anderen Schriftsteller wäre man versucht, in dem so erklärten Titel eine Absicht in sofern zu erkennen, als solle der Leser durch eine anspruchsvolle Ueberschrift angeregt werden, sich in die Schrift zu vertiefen. Bei Cusanus war es wohl mehr als das, was ihn beeinflusste. Allerdings wählte er absichtlich den sich selbst widersprechenden Titel, aber, wie wir vermuthen möchten, desshalb, weil Vereinigung der Gegensätze für ihn die Grundlage des Wissens ist. Später nennt er eine jede derartige Vereinigung die Kunst der Coincidenzen[2]) und behauptet, mittels ihrer sei das Eindringen in das Verborgene möglich. Die gelehrte Unwissenheit selbst baut auf der Grundlage

---

[1]) Cusani *Opera* pag. 1—62. [2]) Ebenda pag. 1095 in der Abhandlung *De sinibus et chordis: .... ut videatur potentia artis coincidentiarum, per quam in omni facultate occulta penetrantur.*

solcher Coincidenzen sich auf. Jede Untersuchung, sagten wir schon, geht von Vergleichungen aus. Die Vergleichung führt zur Zahl, und das habe Pythagoras wohl im Auge gehabt, als er das Urtheil abgab, Alles bestehe und Alles werde begriffen durch die Kraft der Zahlen.

Vom Grösseren und Kleineren, welches bei der Vergleichung auftritt, steigt man auf zum Grössten und zum Kleinsten. Das Grösste ist dasjenige, über welches hinaus ein Grösseres nicht gedacht werden kann, und ebensowenig kann es selbst als kleiner gedacht werden, weil es alles ist, was es sein kann. Aber auch das Kleinste ist ein Solches, über welches hinaus Kleineres nicht sein kann, und weil das Grösste von gleicher Art ist, findet zwischen dem Kleinsten und dem Grössten Coincidenz statt[1]). Die Zahl gestattet freilich ein Aufwärtssteigen zu einer thatsächlich grössten, aber weil sie eine begrenzte Zahl bleibt, ist sie nicht zu dem absolut Grössten, über welches hinaus ein Grösseres nicht sein kann, geworden, denn dieses ist unbegrenzt[2]).

Das ist gleichfalls ein Gedanke, den Cusanus nie verleugnet hat. In einer seiner spätesten Schriften kommt er auf ihn mit den Worten zurück[3]): Wenn wir 10 vergangene Sonnenläufe und 100 und 1000 und alle zählen können, und es sagt Einer, alle seien durch eine Zahl nicht angebbar, sondern es seien unendlich viele Umläufe vorangegangen, so ist das, als wenn er sagte, im nächsten Jahre werde wieder ein Umlauf vollendet, und dann seien es unendlich viele und eins, was unmöglich ist.

Wirklich unendlich ist nur Gott, aber man kann auch mit mathematischen Versinnlichungen dem Unendlichen beizukommen suchen. Die unendliche Grade ist zugleich auch Dreieck und Kreis[4]). Wie diese Coincidenzen gemeint seien, wird sodann näher erörtert. Der Kreis besitzt Krümmung und ist länger als sein Durchmesser. Je

---

[1]) Cusani *Opera* pag. 3 in der *Docta ignorantia* Lib. I, cap. 4: *Maximum sicut non potest maius esse, eadem ratione nec minus, quum sit omne id quod esse potest. Minimum autem est, quo minus esse non potest. Et quoniam maximum est huius modi, manifestum est minimum maximo concidere.* [2]) Ebenda pag. 4 (*Docta ignor.* Lib. I, cap. 5): *Si ascendendo in numeris devenitur actu ad maximum, quoniam finitus est numerus, non devenitur tamen ad maximum, quo maior esse non possit, quoniam hic esset infinitus.* [3]) Ebenda pag. 1113 (*Complementum theologicum* cap. 8): *Si enim numerare possumus decem revolutiones praeteritas, et centum, et mille, et omnes: si quis dixerit, non omnes esse numerabiles, sed praeteriisse infinitas, et dixerit unam futurum revolutionem in futuro anno, essent igitur tunc infinitae et una, quod est impossibile.* [4]) Ebenda pag. 9 (*Docta ignor.* Liber I, cap. 13): *Si esset linea infinita, illa esset recta, illa esset triangulus, illa esset circulus.*

grösser der Durchmesser wird, um so kleiner wird die Krümmung. Die Kreislinie grössten Durchmessers ist selbst grösste Kreislinie, also von kleinster Krümmung, also von grösster Geradheit, wodurch Coincidenz des Grössten mit dem Kleinsten hergestellt ist. Mit dem Dreiecke verhält es sich folgendermassen. Zwei Dreiecksseiten zusammen sind immer grösser als die dritte. Ist also eine Seite unendlich gross, so müssen es die beiden anderen auch sein. Weil ferner zwei Unendlichkeiten nicht stattfinden können[1]), so kann das unendliche Dreieck aus mehreren Linien nicht zusammengesetzt sein. Als Dreieck muss es aber drei Seiten besitzen, folglich ist die eine unendliche Gerade eine Dreiheit von Geraden, und die drei Geraden fallen in eine zusammen. Ebenso schliesse man für die Winkel. Jedes Dreieck habe drei Winkel, die zusammen zwei Rechte betragen. Wird ein Winkel zu zwei Rechten, so gehen in ihm alle drei Winkel auf, und die Gerade ist alsdann Dreieck. So ist das einfach Grösste die grösste Länge, welche wir Wesenheit nennen können, und Dreieck, wesshalb es Dreifaltigkeit genannt werden kann, und Kreis, wesshalb es Einheit heisst[2]). Hier beginnt der mathematische Faden in ein theologisch-philosophisches Gespinnst überzugehen und reisst schliesslich ab. Die Geschichte der Astronomie hat dem zweiten Buche der gleichen Schrift werthvolle Gedanken zu entnehmen, welche Cusanus einen Platz in der Entwickelung der Kenntnisse von der Erdbewegung, von den Sonnenflecken, von der Natur der Sonne sichern. Uns ist es gestattet, an diesem zweiten Buche und noch rascher an dem dritten vorüberzugehen.

Wir gelangen zu einer anderen philosophischen Schrift, welche den eigenthümlichen Titel De Beryllo[3]) führt. Der Beryll, so sagt der Verfasser, ist ein heller, weisser, durchsichtiger Stein, dem sowohl eine concave als eine convexe Gestalt beigelegt wird, und wer durch ihn hindurchsieht, erkennt vorher Unsichtbares. Unterbrechen wir unseren Bericht mit der beiläufigen Bemerkung, dass die genannte Eigenschaft des Berylls seit geraumer Zeit bereits bekannt war und der daraus hergestellten Sehvorrichtung den Namen der Brille verschafft hat. Bei den Italienern hiessen übrigens die Brillen *occhiali*; ihre Erfindung geht vermuthlich auf den 1317 gestorbenen Florentiner Salvino degli Armati zurück[4]). Wir kehren zu Cusanus zurück. Wird dem geistigen Auge, fährt er fort, ein geistiger Beryll — sagen wir nur gradezu eine geistige Brille — vorgesetzt, die ebensowohl

[1]) Cusani *Opera* pag. 10 (*Docta ignor.* Liber I, cap. 14): *quoniam plura esse infinita non possunt.* [2]) Ebenda pag. 14 (*Docta ignor.* Liber I, cap. 19). [3]) Ebenda pag. 267—284. [4]) Heller, Geschichte der Physik I, 201.

die Gestalt des Grössten als die des Kleinsten besitzt, so erkennt man den unsichtbaren Ursprung aller Dinge. Man sieht hieraus, dass Cusanus in der genannten Abhandlung es wieder mit der Coincidenz der Gegensätze zu thun hat, und zwar derselben Gegensätze des Grössten und Kleinsten, von denen in dem ersten Buche der gelehrten Unwissenheit die Rede war. War aber dort vorzugsweise das Grösste betrachtet worden, so wendet Cusanus im Berylle sein Augenmerk ausschliesslich dem Kleinsten zu. Der Punkt, sagt er, ist untheilbar, aber von übertragbarer Untheilbarkeit[1]). Er ist untheilbar nach jeder Art des stetigen Seins und der Ausdehnung. Die Arten des Seins für das Stetige sind die Linie, die Oberfläche, der Körper. Es nimmt die Linie Theil an der Untheilbarkeit des Punktes, insofern sie nichtlinienhaft untheilbar ist, d. h. sie kann nicht in Stücke zerlegt werden, die nicht Linien sind, und sie ist nach Breite und Dicke untheilbar. Die Oberfläche nimmt Theil an der Untheilbarkeit des Punktes, weil sie unoberflächenhaft untheilbar ist; der Dicke nach lässt sie keine Theilung zu, weil sie eben kein Körper ist. Der Körper endlich nimmt Theil an der Untheilbarkeit des Punktes, insofern er in Nichtkörper nicht zerlegt werden kann, der Dicke nach ist er theilbar. In der Untheilbarkeit des Punktes sind also alle jene anderen Untheilbarkeiten mit inbegriffen, und in ihnen wird nichts gefunden als die Entfaltung der Untheilbarkeit des Punktes. Alles was im Körper gefunden wird, ist folglich nichts anderes als der Punkt oder ihm einzig Aehnliches[2]). Und ein Punkt losgelöst vom Körper, oder der Oberfläche, oder der Linie wird nicht gefunden, weil er das innere Princip ist, welches die Untheilbarkeit verleiht.

Bei diesen Stellen erwacht von selbst die Erinnerung an Bradwardinus (S. 119), der dem Punkte die Eigenschaft beilegte, die Untheilbarkeit an einen bestimmten Ort zu binden, und der jede Wissenschaft wahr nannte, in welcher die Voraussetzung nicht gemacht werde, Stetiges setze sich aus Untheilbarem zusammen, der auch das Unendlichgrosse in das Bereich seiner Betrachtungen zog. Von selbst gedenken wir jenes Walther, jenes Heinrich, mit denen Bradwardinus sich auseinandersetzte. Der alte Streit über das Stetige, welcher wohl in dem Jahrhunderte, das zwischen Bradwardinus und Cusanus liegt, auch nicht vollständigem Frieden Platz gemacht hat, wenn er auch mehr ein chemisch-physikalischer zu werden den Anschein gewinnt, findet in Cusanus einen neuen Kämpfer. Wir wissen von ihm

[1]) Cusani, *Opera* pag. 271 (*De Beryllo* cap. 17): *punctum autem communicabilis indivisibilitas.* [2]) *Omni igitur quod reperitur in corpore, non est nisi punctum seu similitudo ipsius unius.*

selbst, dass er es liebte, Klosterbibliotheken zu durchstöbern. An einem oder dem anderen Orte, wo er seine Bildung gewann, fand er vielleicht auch Zeit und Gelegenheit, eine Vorlesung über die Latitudines formarum zu hören. So mag ihm die Streitfrage, mögen ihm die älteren Kampfmittel bekannt geworden sein, mag er der Auffassung von der Zusammensetzung räumlicher Gebilde aus ihnen ähnlich gearteten Elementen, um nicht zu sagen aus Differentialen, sich mehr angeschlossen haben, als dass er sie erfand. Seine Verdienste werden durch diese Annahme keineswegs geschmälert. Es erklärt sich nur, wie Cusanus dazu kam, seinen Coincidenzen so grosses Gewicht beizulegen. Es bestätigt sich nur die Wahrheit dessen, was wir früher andeuteten, dass die Unendlichkeitsfragen nicht wieder zur Ruhe kamen. Noch an ein Anderes, begrifflich einigermassen verwandt, müssen wir bei dieser Rückschau nach den Quellen der Ansichten des Cusanus erinnern. Campanus hat einen geometrisch-philosophischen Satz an einer Stelle ausgesprochen, an einer zweiten Stelle bekämpft, den Satz, dass bei stetigen Grössen irgend einmal Zwischenzustände eintreten müssen, die ein vorgelegtes Verhältniss erfüllen (S. 104). Albert von Sachsen hat (S. 144) des gleichen Satzes sich bedient. Wir werden auch an ihn genug Anklänge finden, sobald wir die im eigentlichen Wortsinne mathematischen Schriften des Cusanus durchmustern, wozu wir uns jetzt anschicken.

Es war eine einzige Aufgabe, welche Cusanus sich gestellt hat, welcher er etwa seit 1450 bis 1460, also zehn Jahre hindurch, in verschiedenen Abhandlungen sein fast ausschliessliches Nachdenken widmete, aber freilich eine Aufgabe schwierigster Art: die der Arcufication einer Geraden. Albert von Sachsen, sagten wir früher (S. 145), und mit ihm fast (S. 127 und 154) das ganze Mittelalter, hielten $\pi = 3\frac{1}{7}$ nicht etwa für einen Näherungswerth, sondern für genau richtig. Von dieser Meinung zurückzukommen war schon ein Fortschritt, und Cusanus machte denselben. Erleichtert war er ihm allerdings durch den Umstand, dass, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, wo wir der italienischen Mathematik der ersten Hälfte des XV. Jahrhunderts uns zuwenden wollen, grade damals eine Uebersetzung des Archimed in lateinischer Sprache verfasst und Cusanus in die Hände gegeben worden war. So musste er die beiden Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{11}$ kennen lernen, zwischen denen π sich befindet, so musste er zugleich die genaue Bestimmung von π als eine noch nicht gelöste Aufgabe erkennen. Er versuchte ihre Behandlung im Sinne der Arcufication, d. h. er ging aus von einem gegebenen gleichseitigen Dreiecke als einfachstem regelmässigen Vieleck, er ging dann über zu ihm umfanggleichen regelmässigen Vielecken von grösserer Seitenzahl, bis er zur Kreislinie von gleicher Länge gelangte, deren Halbmesser gesucht wurde. Fand man diesen, so war in der That die Länge des Dreiecksumfangs in eine Kreislinie verwandelt. Zur Kreislinie konnte er aber auf solche Weise gelangen, weil er sie als Unendlichvieleck betrachtete, wie er an vielen Stellen es ausgesprochen hat[1]). Das war also eine neue Fragestellung verschieden von der archimedischen, verschieden von der im Abendlande überhaupt bisher eingebürgerten, und ob die indischen Versuche (Bd. I, S. 606) zu des Cusanus Kenntniss gelangt sein können, ist uns mehr als zweifelhaft, wenngleich Georg von Peurbach (S. 183) den indischen Werth $\pi = \sqrt{10}$ kannte. Ein Werth von π kann leicht weitere Verbreitung gefunden haben, ohne dass die Auffassung, mittels deren man zu ihm gelangte, sich mit verbreitet hätte. Eine neue Fragestellung ersinnen hat aber stets als fruchtbares Förderungsmittel der Mathematik sich erwiesen, und dieses Verdienst muss mithin Cusanus in erster Linie angerechnet werden.

Dass bei neuer Fragestellung die Merkmale, welche die Richtigkeit des Verfahrens bekunden sollen, um so leichter versagen, je neuer das Verfahren selbst gleichfalls ist, darf nicht Wunder nehmen. Grade die Geschichte der Entwicklung der Stetigkeitsbetrachtungen, und um diese handelt es sich, zeigt auf's deutlichste, dass jeder Schritt vorwärts von Fehlschritten begleitet war, die kaum Einem erspart blieben. Auch Cusanus stellt keine Ausnahme von dieser Regel uns dar. Sein rasch aufwallender Geist liess ihn Schlüsse für vollwichtig halten, denen er bald selbst als allzu leicht gezogenen misstraute, und es ist geradezu kennzeichnend, dass er, nachdem er in einer Abhandlung die Aufgabe gelöst haben will, sofort einer neuen Lösung eine neue Abhandlung widmet, und dass in den späteren Schriften, trotz der dem Gelingen näheren Versuche, die Sprache eine immer vorsichtigere wird.

Die Ueberschrift der ersten Abhandlung lautet: De transformationibus geometricis. Sie trägt die Widmung: ad Paulum magistri dominici Physicum Florentinum, d. h. an den Florentiner Arzt Paulus den Sohn des Magister Dominicus, worunter der frühere

[1]) Am deutlichsten in der Stelle Cusani *Opera* pag. 1110 (*Complementum theologicum* cap. 5): *Quanto autem polygonia aequalium laterum plurium fuerit angulorum, tanto similior circulo; circulus enim si ad polygonias attendas est infinitorum angulorum. Et si ad ipsum circulum tantum respicis nullum angulum in eo reperies, et est interminatus, inangularis: et ita circulus inangularis et interminatus in se complicat omnes angulares terminationes, polygonias datas et dabiles.*

Studiengenosse von Cusanus in Padua Paolo Toscanelli[1]) verstanden ist. Es handle sich, sagt der Verfasser in der Zueignung, um die Verwandlung von Krummem in Gerades und von Geradem in Krummes. Ein rationales Verhältniss sei zwischen beiden nicht möglich. Das Geheimniss müsse in einer gewissen Coincidenz der Extreme verborgen liegen. Die Coincidenz beziehe sich auf das Grösste, das sei eben der unbekannte Kreis, müsse also an dem Kleinsten, welches das Dreieck ist, aufgesucht werden. Cusanus denkt bei diesen Worten offenbar an die Eckenzahl beider Figuren. Drei ist die kleinste, unendlich gross die grösste Zahl der Ecken, mit denen ein Vieleck überhaupt möglich ist. Ist (Figur 31) bcd das gegebene Dreieck, so ist af der Halbmesser des Innenkreises, ab der des Umkreises, die beide dem Dreiecke nicht umfanggleich sein können, da man weiss, dass der Umfang des Innenkreises stets kleiner, der des Umkreises stets grösser ist als der irgend eines regelmässigen Vielecks, zu welchem der betreffende Kreis gehört, und dass der jedesmalige Unterschied der Umfänge der Kreise einerseits, des Vielecks andrerseits beim Dreieck am grössten ist. Der gesuchte Kreis muss folglich einen Halbmesser haben, der grösser

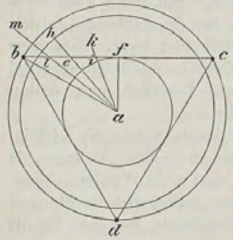

Fig. 31.

als af, kleiner als ab ist. Nun wird fb in vier gleiche Stücke zerlegt und die Theilpunkte i, e, l werden gradlinig mit a verbunden, diese Verbindungsgeraden ai, ae, al aber um ik, eh, lm verlängert, so dass die Verlängerte zur Verlängerung sich verhalte wie die bc zur Entfernung von f bis zu dem betreffenden Theilpunkte. Man macht daher $ik = \frac{1}{8} ai$, $eh = \frac{1}{4} ae$, $lm = \frac{3}{8} al$. Nun ist aber i dem Punkte f, l dem Punkte b allzunahe, als dass ak oder am der gesuchte Halbmesser sein könnte, folglich ist ah richtig. Die Mangelhaftigkeit der Schlüsse ist so augenscheinlich, dass es verwundern muss, wie wenig mangelhaft das Ergebniss ausfällt. Sei $bc = 8$, so ist der Dreiecksumfang 24 und dieser getheilt durch $2ah$ giebt π, oder $\pi = \frac{12}{ah}$. Ferner ist

$$af = \frac{1}{2} ab, \quad bf = 4, \quad 3af^2 = 16, \quad af = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad ae^2 = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3},$$

$$ae = \frac{1}{3}\sqrt{84}, \quad ah = \frac{5}{4} ae = \frac{5}{12}\sqrt{84},$$

[1]) Ueber Toscanelli's Familienverhältnisse vergl. Gust. Uzielli im *Bullettino Boncompagni* XVI, 611—618.

und folglich

$$\pi = \frac{144}{5\sqrt{84}} = \sqrt{9 \cdot 87428571428571 \cdots} = 3{,}142337 \cdots,$$

während

$$3\frac{1}{7} = 3{,}142857 \cdots \text{ und } 3\frac{10}{71} = 3{,}140845 \cdots.$$

Der Werth von π, dem die Construction von Cusanus entspricht, ist also dem richtigen Werthe um 0,00052 näher als das archimedische $3\frac{1}{7}$.

In diesem Arcuficationsversuche redet Cusanus von der Coincidenz, benutzt sie aber streng genommen nicht. Desto mehr hat er dieses in anderen Schriften gethan, welche die Titel führen: De mathematicis complementis (Papst Nicolaus V. zugeeignet), De quadratura circuli (Georg von Peurbach gewidmet), De una recti curvique mensura und De mathematica perfectione. Ihnen allen ist ein Gedanke gemeinsam, nämlich folgender. In jedem regelmässigen Vielecke giebt es eine Primlinie und eine Secundlinie, *linea prima* und *linea secunda*. Die erstere ist der Halbmesser des Innenkreises, die zweite der des Umkreises, und bezeichnen wir diese Längen durch p und s, welchen als Stellenzeiger die Seitenzahl n des Vielecks beigegeben werden mag, so ist immer $s_n > p_n$, und der Unterschied $s_n - p_n$ ist das, was die Sagitta genannt wird, d. h. die Mittelsenkrechte einer Vielecksseite in ihrer Ausdehnung von der Vielecksseite an bis zum Durchschnitte mit dem Umkreise. Diese Sagitta ist beim Dreieck $(n = 3)$ am grössten, beim Kreise als Unendlichvieleck wird sie Null, und Prim- und Secundlinie fallen bei ihm zusammen. Werden umfanggleiche Vielecke mit einander verglichen, so ist $p_n - p_3$ um so grösser, je kleiner $s_n - p_n$ ist. Mithin ist der grösste Werth von $p_n - p_3$ bei $n = \infty$, d. h. beim Kreise, dessen Sagitta verschwindet, erreicht. Die Primlinien sind aber den Flächeninhalten der Vielecke selbst proportional, und somit übertrifft der Inhalt des Kreises den des umfanggleichen Dreiecks am meisten. Da gleichzeitig, wie wir sahen, die Dreieckssagitta $s_3 - p_3$ die grösstmögliche ist, so wird angenommen, der Unterschied der Kreisfläche über die Dreiecksfläche sei dieser Sagitta proportional. Heisst der Proportionalitätsfactor λ, so schreibt sich diese Annahme:

$$\text{Kreisfläche} - \text{Dreiecksfläche} = \lambda(s_3 - p_3).$$

Es war aber daneben auch $s_\infty - p_\infty = 0$, also ebenfalls

$$\text{Kreisfläche} - \text{Kreisfläche} = 0 = \lambda(s_\infty - p_\infty).$$

Jetzt wird das Princip der Coincidenz zu Hilfe gezogen: was für das Vieleck von der geringsten Seitenzahl 3 und von der grössten Seitenzahl ∞ wahr ist, muss bei jeder Seitenzahl wahr sein. Also muss sein:

$$\text{Kreisfläche} - m\text{-ecksfläche} = \lambda(s_m - p_m),$$
$$\text{Kreisfläche} - n\text{-ecksfläche} = \lambda(s_n - p_n).$$

Bei der Division dieser Gleichungen durch einander fällt dann der unbekannte Proportionalitätsfactor λ heraus, und es entsteht

$$\frac{\text{Kreisfläche} - m\text{-ecksfläche}}{\text{Kreisfläche} - n\text{-ecksfläche}} = \frac{s_m - p_m}{s_n - p_n}.$$

Aber auch diesem ersten Ergebnisse kann man eine wesentlich vortheilhaftere Gestalt geben. Der gemeinschaftliche Umfang aller untersuchten Figuren sei U, und r heisse der Halbmesser des umfanggleichen Kreises, so erkennt man sofort die Richtigkeit der drei Flächenformeln:

$$\text{Kreisfläche} = \frac{1}{2}\,U \cdot r,$$
$$m\text{-ecksfläche} = \frac{1}{2}\,U \cdot p_m,$$
$$n\text{-ecksfläche} = \frac{1}{2}\,U \cdot p_n.$$

Setzt man diese Werthe in obige Gleichung ein und kürzt den Bruch links durch $\frac{1}{2}\,U$, so entsteht

$$\frac{r - p_m}{r - p_n} = \frac{s_m - p_m}{s_n - p_n},$$

und folglich

$$r = \frac{p_n s_m - p_m s_n}{(s_m - p_m) - (s_n - p_n)} = \frac{p_n(s_m - s_n) + s_n(p_n - p_m)}{(s_m - p_m) - (s_n - p_n)}.$$

Wir machen dabei die unter allen Umständen gestattete Annahme, dass $m < n$, damit in dem Werthe von r der Zähler sowohl als der Nenner positiv ausfällt.

Natürlich ist bei Cusanus die Schlussfolge nicht so sehr, wie es hier geschah, unserem heutigen Gedankengange nach Form und Inhalt angepasst, aber der Hauptsache nach darf unser Bericht auf die Bezeichnung als treu Anspruch erheben, und insbesondere geht aus demselben hervor, worin die Mangelhaftigkeit des Verfahrens besteht, nämlich darin, dass der Proportionalitätsfactor λ als ein und derselbe in den beiden auf das m-eck und n-eck bezüglichen Gleichungen, in welchen er vorkommt, betrachtet wird, was nur sehr näherungsweise der Fall ist, wenn m und n wenig von einander verschiedene nicht allzukleine Zahlen sind.

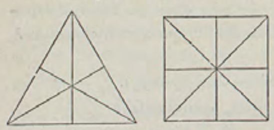

Fig. 32.

Gesetzt es sei $m = 3$, $n = 4$ und der gemeinsame Umfang

$U = 12$, so ist (Figur 32) die Länge der Dreiecksseite 4, die der Vierecksseite 3. Man erkennt leicht, dass alsdann

$$p_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad s_3 = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad p_4 = \frac{3}{2}, \quad s_4 = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

und

$$r = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\right)}.$$

Da aber auch der Umfang $12 = 2\pi r$, so wird

$$\pi = \frac{6}{r} = 4 + \sqrt{8} - \sqrt{13{,}5} = 3{,}15419 \cdots$$

gefunden. Dagegen soll $m = 24$, $n = 48$ der Genauigkeit auf 4 Decimalen genügen und $\pi = 3{,}1415 \cdots$ liefern. Ueber die erstbesprochene Annahme $m = 3$, $n = 4$ hat Cusanus eine sehr einfache Construction des Halbmessers des gesuchten, dem gegebenen Dreiecke wie dem gegebenen Quadrate umfanggleichen Kreises gelehrt[1]). Ueber $af = p_3$ wird (Figur 33) das Quadrat $acef$, über ce das Quadrat $cbde$ gezeichnet, so dass $ab = 2p_3 = s_3$ ist. Von f aus wird gegen a hin $fl = s_4 - p_4$ abgeschnitten und in l eine Senkrechte $lm = p_4$ errichtet. Die Gerade cm schneidet alsdann df in h und $fh = r$ ist der gesuchte Halbmesser. Bezeichnet man (was in der Druckausgabe des Cusanus nicht der Fall) den Durchschnittspunkt der lm mit der ce durch t, so ist

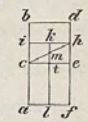

Fig. 33.

$$eh : mt = ec : tc \quad \text{oder} \quad eh = \frac{mt \times ec}{tc} = \frac{(ml - tl)ec}{ec - et} = \frac{(p_4 - p_3)p_3}{p_3 - (s_4 - p_4)}.$$

Addirt man dazu $ef = p_3$, so entsteht

$$fh = \frac{2p_3 p_4 - p_3 s_4}{p_3 - (s_4 - p_4)}.$$

Aber $s_3 = 2p_3$, $p_3 = s_3 - p_3$ und diese Werthe liefern in den für fh gefundenen Ausdruck eingesetzt $\frac{s_3 p_4 - p_3 s_4}{(s_3 - p_3) - (s_4 - p_4)}$, d. h. den Werth von r. Es kann wohl nicht zweifelhaft sein, dass Cusanus, wiewohl er einen Beweis nicht liefert, diese Schlüsse etwa gezogen haben muss, die auf den euklidischen Elementen beruhend, welche er oft anführt, ihm nahe lagen, während nicht anzunehmen ist, dass er eine so einfache Construction erfunden haben sollte, ohne sich bewusst zu sein, dass sie mit seiner Formel in Uebereinstimmung war.

Auch eine eigentliche Quadratur des Kreises mit Hilfe von

[1]) Cusani *Opera* pag. 1014.

Mondchen wird zugesagt[1]). Das Wort lunula, sowie die Bemerkung, die Alten hätten diesen Weg vergebens einzuschlagen versucht, erinnern an die Mondchen des Hippokrates (Bd. I, S. 192—194), allein diese Erinnerung bleibt nicht bestehen, wenn man näher zusieht. Ein Mondchen, d. h. ein durch zwei Kreisbögen begrenztes Flächenstück, benutzt Cusanus überhaupt nicht. Was er so nennt, ist ein Kreisabschnitt. Er zeichnet zu dem Kreise vom Halbmesser 7 die Seiten des Sehnen- und des Tangentenquadrates. Das erstere besitzt die Fläche 98, das zweite die Fläche 196. Nun wählt Cusanus — warum, ist auch nicht leise angedeutet — ein Quadrat von der Fläche 121, bildet $121 - 98 = 23$, dessen Doppeltes 46 er von 196 abzieht, und der Rest 150 soll die gesuchte Kreisfläche sein, von der Cusanus behauptet, sie sei desshalb etwas zu klein gerathen, weil 46 und damit ein zu Grosses abgezogen worden sei; es hätte eigentlich statt $121 = 11^2$ ein etwas kleineres Quadrat gewählt werden müssen, dann wäre ein genaueres Ergebniss erschienen. In der That liefert 150 den Werth $\pi = 3{,}061224$, der beträchtlich zu klein ist. Verfolgt man die Rechnung, indem man statt 7 den Buchstaben r setzt, $11 = \frac{22}{7} \cdot \frac{r}{2}$, $98 = 2r^2$, $196 = 4r^2$, so kommt man zu $150 = r^2\left[8 - \frac{1}{2}\left(\frac{22}{7}\right)^2\right]$. Wie aber Cusanus zu der weiteren Annahme, es sei $\pi = 8 - \frac{1}{2}\left(\frac{22}{7}\right)^2$ gelangte, das ist uns unklar geblieben. Jedenfalls halten wir es den geistvollen, wenn auch nicht immer strengen sonstigen Methoden des Cusanus gegenüber für gewagt, die Sache einfach als geometrischen Unsinn bei Seite schieben zu wollen.

Paolo Toscanelli, welchem die Mathematica complementa zugeschickt worden waren, strauchelte offenbar gleichfalls über deren unklare Vorschriften. In einem von Cusanus niedergeschriebenen Gespräche zwischen ihm und dem Jugendfreunde, welches schwerlich ganz freie Erfindung ist[2]), sagt Paulus ausdrücklich, die Mathematica complementa seien ihm ganz und gar dunkel und entbehrten der Gewissheit[3]). Er erbittet sich leichtere Vorschriften, und Cusanus lehrt ihn darauf eine Rectification des Kreises vollziehen, die somit wieder nach neuen Regeln ausgeführt wird. Die Seite des dem zu rectificirenden Kreise eingeschriebenen Quadrates wird zu dessen Halb-

[1]) Cusani *Opera* pag. 1059 flg. *(Mathematica complementa)*: *Volo nunc investigare quomodo per lunulas quadratura circuli investigetur, quam viam veteres frustra attentaverunt.* [2]) Ebenda pag. 1095 flgg.: *Dialogus inter Cardinalem sancti Petri Episcopum Brixinensem et Paulum physicum Florentinum de circuli quadratura.* [3]) *post mihi missos tuos de Mathematicis complementis utique mihi obscuros atque íncertos libellos.*

messer gefügt und um diese Linie als Durchmesser ein neuer Kreis beschrieben. Der Umfang des ihm eingezeichneten gleichseitigen Dreiecks soll dem ersten Kreise umfanggleich sein. Ist r der ursprüngliche Halbmesser, so ist die Seite des Sehnenquadrates $r\sqrt{2}$, also $r(1 + \sqrt{2})$ der Durchmesser des zweiten Kreises, der für einen Augenblick 2ϱ heissen mag. Die Seite des Sehnendreiecks in dem neuen Kreise ist $\varrho\sqrt{3}$ und dessen Umfang

$$3\varrho\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,r \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = r \cdot \frac{\sqrt{27} + \sqrt{54}}{2} = 2\pi r.$$

Diese Annahme liefert demnach $\pi = \frac{1}{4}(\sqrt{27} + \sqrt{54}) = 3{,}13615\cdots$ mit viel geringerer Genauigkeit, als sie in den Mathematicis complementis erreicht war.

Das Vollkommenste, was Cusanus geleistet hat, ist in seiner letzten Abhandlung enthalten, die er auch in stolzer Selbstzufriedenheit De mathematica perfectione[1]), von der mathematischen Vollkommenheit, betitelte. Sie ist einem Cardinal Antonius zugeeignet und nach der Aussage der Widmung binnen zwei Tagen niedergeschrieben, während ein böser Fuss den Verfasser an seine Wohnung fesselte. Wir begnügen uns damit, aus dieser inhaltreichen Schrift nur ein Ergebniss zu entnehmen, welches über die in den früheren Schriften enthaltenen Dinge weit hinausgeht. Der Gedankengang ist etwa folgender. Es sei (Figur 34) $bc = \frac{a_n}{2}$ die halbe Seite eines regelmässigen Sehnen-n-ecks, dessen Primlinie $ab = p_n$, dessen Secundlinie $ac = s_n$. Heisse $\sphericalangle\, bac = \varphi$, so ist $\varphi = \frac{360^0}{2n}$. Vom Quadrate an ist nun $bc \leqq ab$, wie leicht einzusehen ist, wesshalb auch Cusanus einen Beweis zu führen unterlassen darf. Im rechtwinkligen Dreiecke abc ist nämlich $\sphericalangle\, acb = 90^0 - \frac{360^0}{2n} \geqq \frac{360^0}{2n}$, sofern $n \geqq 4$.

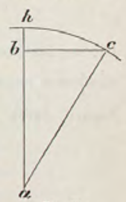

Fig. 34.

Je mehr das n-eck dem Kreise sich nähert, um so genauer ist $bc = \text{arc.}\,hc$ oder $\frac{a_n}{2} = \text{arc.}\,\varphi = \varphi \times s_n$. In dem gleichen Falle des Unendlichvielecks ist $s_n = p_n$ sowie $s_n + x = p_n + x$, was auch x bedeute. Im Unendlichvielecke ist folglich ebensowohl $\frac{s_n \varphi}{a_n : 2} = 1$ als $\frac{s_n + x}{p_n + x} = 1$, mithin in Proportionsform geschrieben:

[1]) Cusani *Opera* pag. 1110—1154.

$$s_n\varphi : \frac{a_n}{2} = (s_n + x) : (p_n + x) \quad \text{bei } n = \infty.$$

Beim Quadrate $\left(n = 4,\ \varphi = 45^0,\ \frac{a_n}{2} = p_n\right)$ wird nun gleichfalls auch ein x vorhanden sein, welches die ganz ähnlich lautende Proportion erfüllt:

$$s_4\varphi : \frac{a_4}{2} = (s_4 + x) : (p_4 + x).$$

Man erräth schon, dass Cusanus sich wieder auf sein Princip der Coincidenz berufen wird. Die Proportion findet statt bei $n = 4$ sowohl als bei $n = \infty$, also auch bei allen Zwischenmöglichkeiten. Er unterzieht $n = 4$ und $n = 6$ der Rechnung.

Bei $n = 4$ ist

$$s_n \cdot 45^0 : \frac{s_n}{\sqrt{2}} = (s_n + x) : \left(\frac{s_n}{\sqrt{2}} + x\right)$$

oder

$$45^0 : \frac{1}{2}\sqrt{2} = \left(4 + \frac{x}{s_n}\right) : \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{x}{s_n}\right).$$

Bei $n = 6$ ist

$$s_n \cdot 30^0 : \frac{s_n}{2} = (s_n + x) : \left(\frac{s_n}{2}\sqrt{3} + x\right)$$

oder

$$30^0 : \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{x}{s_n}\right) : \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{x}{s_n}\right).$$

Die beiden Proportionen werden unter allerdings unstatthafter, zum mindesten ungenauer Voraussetzung, es sei dasselbe $\frac{x}{s_n}$ in beiden vorhanden, durch einander dividirt und liefern so die neue Proportion:

$$\frac{3}{2} : \sqrt{2} = 1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{x}{s_n}}{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{x}{s_n}}$$

und aus ihr ergiebt sich $\frac{x}{s_n} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3\sqrt{2} - 4} = 1{,}913\cdots$ Mit wenigstens annähernder Genauigkeit ist demnach $x = 2s_n$ und setzt man dieses x in die allgemeine oben ausgesprochene Proportion ein, so geht sie in folgende über:

$$s_n\varphi : \frac{a_n}{2} = (s_n + 2s_n) : (p_n + 2s_n).$$

Aus dieser aber folgt endlich

$$\varphi = \frac{3\,\frac{a_n}{2s_n}}{2 + \frac{p_n}{s_n}}.$$

Man versteht die ganze Tragweite dieses Ergebnisses besser, wenn man in der Anwendung neuerer Bezeichnungen noch um einen Schritt weitergeht. Heute schreiben wir $\frac{a_n}{2s_n} = \sin\varphi$, $\frac{p_n}{s_n} = \cos\varphi$. Die Cusanische Näherungsformel heisst alsdann $\varphi = \frac{3\sin\varphi}{2 + \cos\varphi}$. Das Wort Sinus hätte übrigens auch Cusanus hier in Anwendung bringen können, wie er es sonst verschiedentlich benutzt hat, z. B. in den Mathematischen Complementen[1]), wo er die Kenntniss der zu Bögen von 1, 2, 4 u. s. w. Winkelgraden gehörenden Sehnen als eine Vervollkommnung der Kunst von dem Sinus und Sehnen in Aussicht stellt.

In den Mathematischen Complementen hat eine andere Stelle[2]) die Aufmerksamkeit späterer Leser besonders auf sich zu ziehen gewusst. Zuerst wird gelehrt aus Metall oder Holz, in aere aut ligno, ein Dreieck phq (Fig. 35) herzustellen, welches bei h rechtwinklig

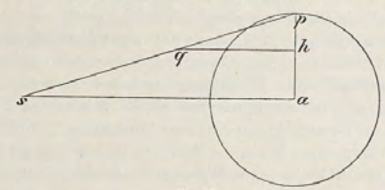

Fig. 35.

sei, und dessen eine Kathete hq die Länge der halben Kreislinie besitze, welche mit der anderen Kathete hp als Halbmesser beschrieben wurde. Ist nun ein beliebiger Kreis zu rectificiren, so zeichnet man zwei im Mittelpunkte a sich senkrecht durchschneidende Durchmesser und legt an den einen das feste Dreieck so an, dass ph auf den Durchmesser, der Punkt p auf die Kreislinie selbst zu liegen kommt. Die verlängerte pq schneidet alsdann den anderen Durchmesser in einem Punkte s, welcher von dem Mittelpunkte a um einen halben Umkreis entfernt ist. Unmittelbar an diese erste vollständig richtige Vorschrift knüpft sich eine zweite nicht minder richtige zur Auffindung der Quadratur des Kreises. Die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Halbmesser und der halben Peripherie des

[1]) Cusani *Opera* pag. 1025: *Ex ante habitis quicquid hactenus in Geomitricis ignotum fuit, inquiri poterit. Fuit autem incognita perfectio artis de sinibus et chordis: nemo unquam scire potuit chordam arcus gradus unius et duorum et quatuor et ita consequenter, quae nunc sic habetur.* [2]) Ebenda pag. 1024.

Kreises solle gesucht werden; diese sei alsdann die Seite des verlangten Quadrates. Dazu ist in der Druckausgabe eine Figur gezeichnet, bei welcher der zu quadrirende Kreis zweimal gezeichnet erscheint, beidemal berührend aufstehend auf einer und derselben graden Linie, während über dieser als Durchmesser noch einmal ein Halbkreis gezeichnet ist. Die genannte grade Linie ist die Summe aus Halbmesser und halbem Umkreis des in Frage stehenden Kreises, und der erwähnte grosse Halbkreis dient zur Ermittelung der geforderten mittleren Proportionale. Nun hat 1697 ein englischer Mathematiker, John Wallis[1]), mit Berufung auf eine ihm zu Gebote stehende Handschrift die Behauptung ausgesprochen, die betreffende Figur sei von dem Herausgeber des Druckes ganz gegen den Sinn des Verfassers, *omnino contra mentem Cusani*, eingefügt. Jener habe eine Cycloide gezeichnet gehabt, deren Endpunkte durch die beiden Bogen des gerollten Kreises bezeichnet seien. Man hat mit vollem Rechte zwar ein abschliessendes Urtheil ausgesetzt, weil die Handschrift, auf welche jene Behauptung sich wesentlich gründete, keinem anderen Gelehrten zu Gesicht kam, trotzdem aber die Unwahrscheinlichkeit der Wallis'schen Behauptung hervortreten lassen. Im Texte ist nämlich mit keinem Worte von einem Wälzen des Kreises die Rede, und wo Cusanus in einer andern Abhandlung[2]) wirklich einmal von dem Wälzen eines Kreises spricht, erwähnt er nur die Thatsache, dass der Kreis während seines Wälzens die Gerade, über die er fortbewegt wird, stets nur in einem Punkte berühre, während einer durch einen Kreispunkt dabei beschriebenen Radlinie nicht entfernt gedacht ist. Wenn gleich Cusanus, wie wir in unserer gedrängten Uebersicht seiner mathematischen Leistungen an mehr als einer Stelle hervortreten lassen mussten, nicht grade als Muster schriftstellerischer Klarheit gerühmt zu werden beanspruchen kann, das ist doch kaum zu denken, dass er ein mechanisch-geometrisches Verfahren wie das Wälzen eines Kreises auf gradliniger Unterlage benutzt, oder gar näher studirt haben sollte, ohne dasselbe zu erwähnen.

Wir haben von Rechenkunst, von Geometrie, von Trigonometrie in Deutschland zu reden gehabt. Noch eine andere Unterabtheilung der Mathematik begann im XV. Jahrhunderte dort bekannt zu werden: die Algebra. Wir erinnern uns, dass im XIII. Jahrhunderte zuerst von

[1]) *Philosophical Transactions* Bd. XIX für die Jahre 1695, 1696 und 1697 pag. 561—566. Vergl. S. Günther, War die Zykloide bereits im XVI. Jahrhunderte bekannt? in Eneström's *Bibliotheca mathem.* 1887 S. 8—14. [2]) Cusani *Opera* pag. 1112 (*Complementum Theologicum* cap. 8): *Sed etiam non praetereundum quomodo si circulus circumvolvitur super lineam rectam non tanget eam nisi in puncto.*

einer abendländischen Algebra gesprochen werden konnte, dass sie bei Leonardo von Pisa einestheils, bei Jordanus Nemorarius anderntheils in einem sofort so ausgebildeten Zustande erschien, dass man eine schleunige Weiterentwickelung ihr zu erhoffen sich geneigt fühlen musste. Aber die Zeitgenossen der beiden grossen Männer waren nicht reif, deren Schriften vollständig zu verstehen, geschweige denn sie fortzubilden, und besonders für die eigentlichen Gelehrtenkreise gilt dieses harte Urtheil auch noch im XIV. Jahrhunderte, während damals (S. 159—162) italienische Kaufleute der Algebra so viel Verständniss entgegenbrachten, dass wenigstens versucht wurde, Aufgaben zu lösen, welchen die früheren Schriftsteller ohnmächtig gegenüberstanden. Jetzt im XV. Jahrhunderte, wiederholen wir, beginnt eine deutsche Algebra. Wir müssen gleich in der ersten Hälfte des Jahrhunderts Anfänge derselben als vorhanden annehmen, weil es sonst kaum denkbar wäre, dass plötzlich mit dem Jahre 1450 etwa eine Lehre solche Verbreitung gewann, wie wir es sehen werden, ohne vorher überhaupt geübt worden zu sein. Aber das ist auch Alles, was wir hierüber zu sagen vermögen. Quellen besitzen wir gegenwärtig erst aus der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts, und werden daher mit deren Besprechung noch warten müssen.

52. Kapitel.

Italienische Mathematiker.

Der letzte Italiener, von welchem (S. 165—166) die Rede war, Biagio Pelacani von Parma, reichte bereits in's XV. Jahrhundert herüber. Bis 1411 sahen wir ihn in Padua thätig, an jener Universität, deren älteste Satzungen aus dem XIII. Jahrhunderte die Professur der Astrologie schon als die wichtigste, ihren Vertreter als den nothwendigsten Lehrer betrachtete[1]), dessen Unterricht namentlich den Aerzten nicht fehlen durfte. Astrologie war aber damals ein sehr weiter Begriff. Ihr gehörte die Kunst an, aus Sternbeobachtungen Schlüsse auf das Schicksal der Menschen im Allgemeinen und einzelner Menschen im Besonderen zu ziehen, eine Kunst, welche den vermeintlichen Nutzen jener Beobachtungen offenbarte, um dessen willen in erster Linie man sie anzustellen sich übte. Zur Astrologie gehörte aber auch die wissenschaftliche Sternkunde, zu ihr die Rechenkunst, die Geometrie. Der Professor der Astrologie war zunächst

[1]) Libri II, 54 Note 1: *quem tanquam necessarissimum habere omnino volumus.*

Astrologe, daneben Professor der gesammten damaligen Mathematik, und ein solcher in allen Theilen der genannten vielseitigen Thätigkeit war jener Pelacani.

Zu den Schülern des Pelacani zählte **Prosdocimo de' Beldomandi**[1]. Er gehörte einer alten Familie Padua's an. Er studirte in den Jahren 1400 und 1402 an der Universität seiner Vaterstadt[2]. Ob ein Studienaufenthalt in Bologna, wo er die Abschrift einer astronomischen Tabelle anfertigte[3], früher oder später fällt, ist unbekannt. Jedenfalls wurde er wieder in Padua am 15. Mai 1409 nach abgelegter Prüfung, zu welcher Pelacani und zwei andere Professoren erschienen, zum Magister befördert[4]. Am 15. April 1411 legte Beldomandi gleichfalls in Padua eine medicinische Prüfung ab[5]. Unter den bei letzterer Prüfung genannten Professoren war **Jacopo Della Torre** aus Forli, ein berühmter Arzt, der aber auch nicht ohne philosophisch-mathematische Kenntnisse gewesen sein muss, da er einen Tractatus de intensione et remissione formarum verfasste, welcher muthmasslich noch im XV. Jahrhunderte im Drucke herauskam[6]. Im Juli 1420 gehörte Beldomandi, der Padua nicht verlassen zu haben scheint, dem dortigen Sacro collegio di arti e medicina an[7], 1422 erhielt er die Professur der Astrologie[8], und die gleiche Stellung behielt er bis zu seinem Tode, welcher 1428 im kräftigsten Mannesalter ihn traf[9]. Sein Geburtsjahr ist allerdings nicht bekannt, dürfte aber aus dem Zeitpunkten, in welchen Beldomandi die einzelnen Stufen seiner gelehrten Laufbahn erreichte, nach rückwärts annähernd bestimmt kaum viel früher als 1380 zu setzen sein[10].

Die schriftstellerische Thätigkeit Beldomandi's war eine mannigfaltige. Zuerst scheint er der Musik sich zugewandt zu haben, was wohl mit der zu seiner Zeit in Padua herrschenden Geistesrichtung zusammenhing, denn Padua war damals der Sitz der gelehrten Theoretiker in der Musik[11]. Schon 1404 schrieb Beldomandi Erläuterungen[12] zu einem musikalischen Werke des Johannes de Muris, und auch selbständige Schriften werden genannt, so z. B. eine Abhandlung von 1412, die den Titel Contrapunctus completus führt[13], und in welcher Contrapunkt dahin erklärt ist, man verstehe darunter die

[1] Eine ausführliche Monographie Prosdocimo de' Beldomandi von Ant. Favaro erschien im XII. Bande des *Bulletino Boncompagni* und in einem Sonderabzuge. Wir citiren letzteren als Favaro. Eine Fortsetzung seiner Untersuchungen hat der gleiche Verfasser im *Bulletino Boncompagni* XVIII veröffentlicht. [2] *Bulletino Boncomp.* XVIII, 420. [3] Ebenda pag. 407. [4] Favaro pag. 24. [5] Ebenda pag. 25. [6] Ebenda pag. 30. [7] Ebenda pag. 31. [8] Ebenda pag. 36. [9] Ebenda pag. 37 und 40. [10] Ebenda pag. 18. [11] Ebenda pag. 186. [12] Ebenda pag. 201. [13] Ebenda pag. 191.

Stellung einer einzelnen Note gegen eine andere innerhalb einer Melodie. Es ist begreiflich, dass der Verfasser bei solchen Untersuchungen auf Wohlklänge und Missklänge aufmerksam werden musste, und so wird als Leistung Beldomandi's hervorgehoben[1], er zuerst habe die kleine Sexte als Consonanz erkannt, der Quarte eine Mittelstellung zwischen Consonanzen und Dissonanzen angewiesen, da sie allerdings einen Missklang gebe, aber keinen so unangenehmen wie etwa die Secunde oder die Septime.

Die nächste Aufgabe, welche Beldomandi 1410 löste[2], war die Anfertigung eines **Algorismus de integris**. Diese zweimal, 1483 in Padua und 1540 in Venedig, gedruckte Schrift[3] ist für uns von spannender Bedeutung. Nicht als ob der Inhalt in irgend einer Weise über das Rechnen mit ganzen Zahlen sich erhöbe, aber es ist der erste italienische Algorithmus, über welchen wir genügend unterrichtet sind, um an seiner Hand eine culturgeschichtlich wichtige Frage beantworten zu können. Wir haben wiederholt des Gegensatzes zwischen gelehrter und kaufmännischer Rechenkunst gedacht. Wir haben Leonardo von Pisa als den Vertreter der letzteren, Jordanus Nemorarius und mit ihm Johannes von Sacrobosco als die Vertreter der ersteren kennen gelernt. Ihre Schüler fanden wir in allen Ländern jenseits der Alpen, wo nur Rechenunterricht nach Büchern gegeben wurde. Auch in Italien fanden wir, und das war (S. 156) die letzte Gelegenheit, bei welcher wir den Gegenstand berührten, eine vereinzelte Handschrift, die es nahe legte zu vermuthen, auch dorthin sei die minderwerthige gelehrte Rechenkunst eingedrungen und habe unter ihrem wuchernden Unkraut den Samen fast vollständig erstickt, den Leonardo eingelegt hatte. Es war nur eine Vermuthung, welche kaum ausgesprochen wurde. Gegenwärtig wird die Vermuthung zur Gewissheit. Die italienische Universität war, möchten wir sagen, mehr Universität als italienisch, und ihre Rechenkunst war die des Sacrobosco, erhob sich über sie nur so weit, als ein Anlehnen an den grösseren Vorgänger Jordanus es möglich machte, und zeigte nur geringe Spuren, welche an Leonardo erinnern. Das lehrt uns eben der Algorismus de integris des Prosdocimo de' Beldomandi von 1410 sowohl in der Druckausgabe, als in Handschriften, welche von der Druckausgabe etwas abweichen. Die Abhängigkeit von Sacrobosco enthüllt sich schon darin, dass Beldomandi ausser der Neunerprobe, von welcher fortwährend Gebrauch gemacht wird, auch auf die Proben durch entgegengesetzte Rechnungsverfahren,

[1] Favaro pag. 211. [2] Ebenda pag. 60. [3] Ebenda pag. 43 und 48.

Subtraction durch Addition u. s. w., hinweist[1]), deren Erfinder ausdrücklich genannt ist, damit jeder Zweifel an dem Ursprunge schwinde. Ebenso deutlich erkennt man den Einfluss Sacrobosco's an der Halbirung und Verdoppelung, welche als besondere Rechnungsarten Aufnahme gefunden haben[2]). Dagegen ist aus der Erinnerung an Leonardo zu erklären die Subtraction mit Borgen einer Einheit höheren Ranges im Minuendus, welche sodann im Subtrahendus zurückgezahlt wird[3]), und ebenso die schachbrettartige Multiplication. Wir sagen Leonardo, ohne damit ausdrücklich zu meinen, Beldomandi habe von ihm oder seinen Schriften gewusst; das kann ja der Fall gewesen sein, aber eben so gut kann aus der Schule Leonardo's, d. h. aus kaufmännischen Kreisen, das Eindringen stattgefunden haben. Die Erwähnung der Araber, als der Erfinder des Zahlenschreibens[4]), kann dagegen wieder aus Sacrobosco entnommen sein. Mit eben diesem trifft Beldomandi bei der Kubikwurzelausziehung zusammen[5]), wenn auch die Bildung des Kubus nach der Formel

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a(a+b)b + b^3$$

bei Sacrobosco nicht so klar wie bei Beldomandi hervortritt, diesem Letzteren also mehr oder weniger anzugehören scheint. In den Druckausgaben des Beldomandi, auch in der älteren von 1483, sind Beispiele der einzelnen Rechnungsverfahren durch Buchstaben in der Weise dargestellt, dass das jedesmalige Ergebniss durch einen neuen Buchstaben bezeichnet ist[6]). Das erinnert täuschend an Jordanus, und wenn auch den vorhandenen Handschriften diese Buchstabenbeispiele fehlen, so ist einestheils nicht ausgeschlossen, dass verschiedene Texte vorhanden gewesen sein können, indem Abschreiber das, was sie nicht verstanden und darum für überflüssig hielten, wegliessen, anderntheils ist aber auch das blosse Vorkommen in dem Drucke von 1483 genügender Hinweis auf das, was uns das Wichtigste ist: dass nämlich im XV. Jahrhunderte in der italienischen Gelehrtenwelt Schriften mit Dingen verbrämt waren, welche auf Jordanus zurückführen. Für Beldomandi selbst dürften wahrscheinlich neben der schon erwähnten Gestalt der Kubirungsformel eigenthümliche Summenformeln bei geometrischen Progressionen[7]) in Anspruch zu nehmen sein. Er lehrt nämlich, und zwar in nahezu unverändertem Wortlaute in den Handschriften wie in den Druckausgaben, dass unter der Voraussetzung eines ganzzahligen q

---

[1]) Favaro pag. 102: *oportet uti probationibus positis in algorismo de integris Johannis de sacro buscho.* [2]) Ebenda pag. 94. [3]) Ebenda pag. 96. [4]) Ebenda pag. 93—94. [5]) Ebenda pag. 101. [6]) Ebenda pag. 90. [7]) Ebenda pag. 99—100.

immer $a + qa + q^2a + \cdots + q^{n-1}a = q^{n-1}a + \frac{q^{n-1}a - a}{q-1}$ sei, und dass, falls $q = \frac{p}{p-1}$ sei (eine proportio superparticularis nannte er mit dem seit Boethius gangbaren Namen einen solchen Werth von q), die Formel dahin sich ändere, dass

$$a + \left(\frac{p}{p-1}\right)a + \left(\frac{p}{p-1}\right)^2 a + \cdots + \left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1} a = p\left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1} a - (p-1)a$$

werde. Allerdings sind beide Formeln, deren Richtigkeit sofort durch Umwandlung der allbekannten Summenformel sich ergiebt, nicht bewiesen. Sie sind auch zunächst nur für die Sonderfälle $q = 2, 3, 4, 5$ und $p = 2, 3, 4$ ausgesprochen, aber daran knüpfen sich beidemal die Worte *et sic ultra*, welche zur Gewissheit erheben, dass es für Beldomandi sich nicht um einzelne Fälle, sondern um allgemeine Gesetze handelte.

Wir bemerkten ausdrücklich, Beldomandi habe nur einen Algorismus de integris verfasst. Die Druckausgaben vereinigen mit demselben den Algorismus de minuciis des Johannes de Lineriis[1]) (S. 126), das war also das Lehrbuch der Bruchrechnung, dessen wenigstens die italienische Universität sich damals neben Beldomandi's ganzzahligem Rechnen zu bedienen pflegte.

An den Algorismus reiht sich dem Inhalte nach eine handschriftlich vorhandene Arbeit des Beldomandi an, ein Canon[2]) in quo docetur modus componendi et operandi tabulam quandam. Es ist eine Einmaleinstafel, welche von 1 mal 1 bis zu 22 mal 22 sich ausdehnt. Sie ist als Tafel doppelten Eingangs gefertigt in quadratischer Gestalt und so, dass am oberen Tafelrande von links nach rechts und an dem linken Tafelrande von oben nach unten die Zahlen 1 bis 22 auf einander folgen. Die Kreuzungsstellen der jedesmaligen Zeilen und Kolumnen enthalten die betreffenden Producte. Die Quadratzahlen, welche in der Diagonale von links oben nach rechts unten erscheinen, heben sich gleich den Randzahlen in rothen Schriftzügen hervor, während alles Uebrige schwarz geschrieben ist. Das Vorhandensein einer Einmaleinstafel war ja nicht neu. Nikomachus (Bd. I, S. 402) hat eine solche in ähnlicher viereckiger Gestalt gegeben. Boethius folgte in seiner Arithmetik (Bd. I, S. 539) dem griechischen Musterwerke, und eine heute noch vorhandene Arithmetik des Boethius war vermuthlich einst Beldomandi's Eigenthum[3]). Auch Bernelinus hat (Bd. I, S. 826) seinen Lesern eine

---

[1]) Favaro pag. 43. [2]) Ebenda pag. 102 und 107—109. [3]) Ebenda pag. 121 und 128.

Einmaleinstafel nicht vorenthalten, bei welcher in ganz besonders auffallender Weise die Quadratzahlen fehlen. Leonardo von Pisa (S. 8) hat nicht minder das Einmaleins, allerdings nicht in quadratischer Anordnung. Auch des mündlichen Einübens des Einmaleins wird wiederholt und zu verschiedenen Zeiten gedacht (Bd. I, S. 796 und 495), aber immer handelt es sich um das kleine Einmaleins, um die Vervielfachungen von 1×1 bis zu 10×10. Bei Beldomandi ist, soweit bekannt, nach Petrus von Dacien (S. 91) und neben Křištan von Prachatic (S. 179), erstmalig eine Ausdehnung zum grossen Einmaleins vorgenommen, denn die Angabe von 11^2 bis 20^2 in der alten französischen Geometrie des XIII. Jahrhunderts (S. 93) ist kaum als grosses Einmaleins zu betrachten. Wesshalb grade 22×22 den Schluss bildet, dafür scheint kaum ein anderer Grund ersichtlich als der, dass die Ausdehnung der Tafel nach der des Papierblattes sich richten musste, auf welches sie geschrieben war. Der Entstehungszeit nach hätten wir diesen Canon schon vor dem Algorismus zu besprechen gehabt, denn er ist laut Angabe der Handschrift bereits 1409 in Padua vollendet. Jetzt, da wir den Algorismus schon kennen, wird uns das Fehlen einer ähnlich gebauten Einmaleinstafel in ihm als absichtliche Lücke nicht entgehen können. Wir werden auch hierin wieder ein Anlehnen an das Althergebrachte, an das gleiche Musterwerk zu erkennen haben, dem Beldomandi's Algorismus sich fortwährend anschliesst.

Wir kommen nun zu einem kurzen geometrischen Bruchstücke[1]) Beldomandi's. Es handelt sich (Fig. 36) darum, ein Parallelogramm $bceg$ zu zeichnen, welches einem Dreiecke abc flächengleich sei. Die Construction wird an drei Figuren ausgeführt, die sich darin unterscheiden, dass der Dreieckswinkel bei c ein stumpfer, ein spitzer, ein rechter Winkel ist.

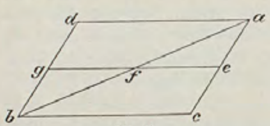

Fig. 36.

Jedesmal wird ad parallel und gleich bc gezogen und d mit b verbunden; wird alsdann ac in e und db in g halbirt und eg gezogen, so ist $bceg$ das verlangte Parallelogramm.

Sonstige geometrische Schriften Beldomandi's sind nicht bekannt, indem eine in einem Handschriftenkataloge ihm zugeschriebene Geometrie sich bei näherer Untersuchung[2]) als eine Abschrift der euklidischen Elemente in der Uebersetzung des Campanus erwiesen hat. Eine Schrift über das Astrolabium[3]) genüge es uns genannt zu haben.

[1]) Favaro pag. 132. [2]) Ebenda pag. 129—131. [3]) *Bibliotheca mathematica* 1890 p. 81—90 und 113—114.

Ein Commentar, welchen Beldomandi 1418 zu der Sphäre des Sacrobosco verfasste, fordert unsere Aufmerksamkeit nur durch eine Stelle[1]) heraus, in welcher die damalige Unkenntniss griechischer Sprache bei den berühmtesten Gelehrten zu Tage tritt. Isoperimetrischer Körper soll nämlich so viel heissen als einer, welcher um einen anderen beschrieben werden kann, denn ysos heisse Figur, peri um und metros das Maass.

Die Zeit nahte mit raschen Schritten, in welcher solche Irrthümer, namentlich in Italien, zu den Unmöglichkeiten gehörten. Schon war Kenntniss des Griechischen zu einer erwünschten Zierde geworden. Sie wurde von Einzelnen gesucht und erworben. Bald war sie Nothwendigkeit, und griechisches Wissen auf allen Gebieten, auf dem der Philosophie wie der Poesie, der Mathematik wie der Astronomie, erhielt einen solchen Ruf des Uebergewichtes, dass Jeder es sich anzueignen bestrebt war, der Eine in der Ursprache, der Andere in Uebersetzungen, welche jetzt ausschliesslich aus der Ursprache und nicht mehr mit Durchgang durch morgenländische Uebertragungen hergestellt wurden. Die Uebersetzer waren theils Italiener, theils nach Italien übergesiedelte Griechen.

Unter den Ersteren haben wir Jacob von Cremona[2]) zu nennen, oder mit seinem heimathlichen Namen und Titel Jacopo da S. Cassiano Cremonese canonico regolare. Er lebte 14 Jahre lang in Mantua, war Schüler des Vittorino und trat um 1446 nach dessen Tode an seine Stelle als Lehrer der Söhne des Markgrafen Lodovico Gonzaga. Im Jahre 1449 wurde er nach Rom berufen. Dort hatte seit März 1447 Nicolaus V. den päpstlichen Stuhl inne, ein geistlicher Fürst von eben so feinem Kunstsinne als grosser Gelehrsamkeit. Den Anstoss zum Neubau der Peterskirche in Rom gegeben, die vaticanische Handschriftensammlung mächtig bereichert, griechische Gelehrte nach Rom berufen oder dort festgehalten zu haben, das sind unvergängliche Ruhmestitel des geistvollen Mannes. Um die vorhin genannte Zeit wurde nun entweder unter Neuanschaffungen oder unter schon vorhandenen Handschriften ein griechischer Archimed entdeckt, und dessen Uebersetzung vollzog Jacob von Cremona im päpstlichen Auftrage. Das war die Bearbeitung, welche Cusanus kennen lernte (S. 192), und welche er in einem Send-

1) Favaro pag. 147: *Circa hanc partem notandum primo quod isoperimeter dicitur ab ysos graece quod est figura latine, et peri quod est circa, et metros quod est mensura, unde corpus isoperimetrum id est corpus habens figuram circa aliud mensurantem sive alteri circumscriptibilem quod idem est.* [2]) Val. Rose in der deutschen Literaturzeitung V. Jahrgang (1884) S. 292.

schreiben an den Papst diesem zu hoher Ehre anrechnete. Erhalten scheint sich die Uebersetzung nicht zu haben.

Auch zu der Uebersetzung eines anderen griechischen Werkes trat Jacob von Cremona kurze Zeit vor seinem bald nach 1449 eintretenden Tode in Beziehung. Georg von Trapezunt[1]) hatte den Almagest des Ptolemäus und Theon's Erläuterungen zu demselben bearbeitet. Dieser Grieche war 1396 auf der Insel Kreta geboren. Er starb 1486 in Italien. Den Namen, unter welchem er bekannt ist, wählte er nach dem Orte, woher sein väterliches Geschlecht stammte. Er beherrschte die griechische Sprache allerdings, aber mit dem Inhalte des von ihm übersetzten Werkes verhielt es sich keineswegs so, und er scheint durch diesen Mangel zu schlimmen Schnitzern geführt worden zu sein. Wenigstens trat Jacob von Cremona als feindlicher Kritiker gegen die Uebersetzung auf.

Noch einen zweiten Feind hatte Georg von Trapezunt sich zugezogen, den wir hier zu nennen haben, wenn er auf die Geschichte der Mathematik auch nur sehr mittelbar einwirkte: Bessarion. Bekanntlich war seit der Mitte des XI. Jahrhunderts zwischen der griechischen und lateinischen Kirche eine bleibende Trennung eingetreten. Gegen Ende des XIII. Jahrhunderts wurden zwar Versuche angestellt, den Riss wieder zu heilen, aber sie misslangen. Als 1437 das basler Concil auseinanderfiel, wurden neue Versuche gemacht. Die Partei des Concils wie die des Papstes Eugen IV. wetteiferten, wer die Griechen zu versöhnen vermöge, wozu die immer näher rückende Türkengefahr ohnedies mahnte. Cusanus ging im August 1438 als päpstlicher Abgeordneter nach Konstantinopel, und unter denjenigen Würdenträgern, welche er zu bestimmen wusste, ihn nach Italien zu begleiten, war Bessarion der Bischof von Nicäa, der später ganz zur römisch-katholischen Kirche übertrat und zum Cardinal ernannt wurde. Cardinal Bessarion, sagten wir, lebte mit Georg von Trapezunt in Feindschaft. Der Grund war ein ganz wissenschaftlicher. Bessarion war ein begeisterter Bewunderer Plato's, Georg von Trapezunt ein eben solcher von Aristoteles und dagegen ein Verkleinerer Plato's, den er in einer eigenen Schrift heftig tadelte. Das war der Ursprung einer bis zum Hasse sich steigernden Aufregung für Bessarion, das vielleicht der Grund, warum dieser auch die Almagestübersetzung Georgs von Trapezunt von vornherein für verfehlt erklärte, warum er bei einem Aufenthalte in Wien zu Peurbach in Beziehung trat und denselben aufforderte, sich an eine Uebersetzung des Meisterwerkes des griechischen Astronomen zu wagen.

[1]) Kästner II, 318.

Wenn wir hiermit den Abschnitt beschliessen und nach unserer Gewohnheit umschauend einen Ruhepunkt für unser Auge suchen, so haftet dasselbe vorzugsweise an Nicolaus von Cusa. Andere Namen kommen ja auch vor. Wir verweilten bei deutschen und italienischen Rechenmeistern niederen und höheren Styles; wir sahen die Universitätswissenschaft ziemlich aller Orten von gleich geringfügiger Art, mit gleich geringen Erhebungen über den tiefstmöglichen Stand; wir sahen auch Johann von Gemunden, Georg von Peurbach zu trigonometrischen Neuerungen einen Anlauf nehmen. Als genialer Kopf mit dem Stempel des Erfinders ausgezeichnet war aber nur Einer, nur Cusanus, und für die Mängel seiner Erfindungen ist vielleicht verantwortlich, dass er nicht ausschliesslicher Mann der Wissenschaft, in erster Linie Mathematiker, sein durfte.

XII. Die Zeit von 1450—1500.

53. Kapitel.

Rechnen auf den Linien. Das Bamberger Rechenbuch.

Die zweite Hälfte des XV. Jahrhunderts beginnt mit einer Erfindung, deren Erwähnung nirgend fehlen darf, wo von den Fortschritten menschlicher Bildung auf was immer für einem Wissensgebiete gesprochen wird. Wir meinen natürlich die *Buchdruckerkunst*. Deutschland war, wie gegenwärtig wohl keinem Zweifel unterliegt, die Heimath dieser Erfindung, und da wir mit der Geschichte der Mathematik in Deutschland den Anfang unseres neuen Abschnittes machen, so scheint eine doppelte Verpflichtung vorzuliegen, jene Erwähnung nicht zu versäumen. Eine Gegenbemerkung könnte gemacht werden. Die Buchdruckerkunst trat nämlich nicht gleich von Anfang an und nicht in Deutschland zuerst in den Dienst unserer Wissenschaft. Nicht vor 1471 werden wir einem in diesem Buche zu erwähnenden Druckwerke begegnen, und die Presse, aus der es hervorging, stand in Italien. Aber mit 1472 beginnt auch die Zeit deutschen mathematischen Druckes und rechtfertigt einigermassen unser Vorgreifen, zumal es sich auf die einfache Erwähnung beschränkt, dass man nicht mehr auf die Feder der Abschreiber allein angewiesen war.

Noch eine weitere Thatsache ist zu erwähnen. Die zweite Hälfte des XV. Jahrhunderts ist die Zeit, in welcher die Stellungsarithmetik mit ihren zehn Zahlzeichen mehr und mehr in Kreise drang, denen es um nichts weniger als um das Rechnen zu thun war. Wir meinen die Verwendung dieser Zahlzeichen zur Angabe der *Blattfolge gedruckter Bücher*, zur Ausprägung von mit *Jahreszahlen versehenen Münzen*, zur Anfertigung von *Grabinschriften*. Das älteste bekannte Druckwerk mit in der angegebenen Weise gezählten Blättern ist ein 1471 in Köln erschienenes Werk Petrarca's[1]). Dass die Jahreszahlen auf Münzen erst mit dem Ende des XV. Jahrhunderts in Stellungszahlen auftreten, wird von Niemand angezweifelt. Etwas fraglicher könnte die Zeit der Anwendung auf Grabdenkmälern er-

[1]) *Unger*, S. 16.

scheinen. Es werden Pforzheimer und Ulmer Grabdenkmäler aus dem XIV. Jahrhundert erwähnt[1]), von noch älteren ganz zu schweigen. Die Inschriften sind vorhanden, das ist gewiss, aber sind sie immer zu der Zeit eingemeisselt, welche sie angeben? Ist nicht etwa der alte Grabstein auf irgend eine Weise z. B. in den wüsten Bilderstürmereien des XVI. Jahrhunderts zerstört oder so verletzt worden, dass eine Erneuerung nöthig wurde, welche alsdann, ohne dass irgend Absicht vorlag, den Geschichtsforschern ein Kuckucksei in das Nest zu legen, die alte römische Jahreszahl durch die weniger Zeichen erfordernde Ziffernschrift ersetzte? Die Form jener Denkmalsziffern, welche sehr von den in Rechenbüchern der Zeit benutzten Zahlzeichen abweicht, giebt gegründeten Anlass zu dieser Vermuthung, und insbesondere die Pforzheimer Inschrift dürfte nach an Ort und Stelle eingezogenen Erkundigungen kaum früher als im XVI. Jahrhunderte entstanden sein.

Ein Drittes haben wir, beginnend in der ersten, sich verbreitend in der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts, aus Deutschland zu berichten: das Auftreten von Vorschriften darüber, wie auf den Linien zu rechnen sei. Das Abacusrechnen der Römer und des frühen Mittelalters ist jedem Leser unseres I. Bandes zur Genüge bekannt, bekannt auch wie es zu einem Kolumnenrechnen ward, bei welchem die Rechenpfennige auf den betreffenden senkrecht zum Rechner gebildeten Kolumnen zu einem Zahlzeichen sich verdichteten, während die Kolumnen selbst vor Einbürgerung der Null nicht entbehrt werden konnten. Bekannt ist ferner, wie die Null durch die Algorithmiker eingeführt den Kampf um das Dasein gegen die alten Methoden eröffnete und siegreich durchführte. Jetzt, am Ende des XV. Jahrhunderts und bis tief in das XVI., ja in das XVII. Jahrhundert sich erstreckend erscheint plötzlich eine neue, oder doch eine wesentlich veränderte Rechnung mit Rechenpfennigen, und zwar in Deutschland, Frankreich, England, aber nicht in Italien. Der Name der Unterlage dieser Rechnung ist der der Rechenbank oder der Bankir, auf welcher wagrechte Linien gezogen sind, die den Namen des Rechnens auf den Linien zu einem ebenso berechtigten als leicht verständlichen machen. Die Linien geben den auf ihnen liegenden Marken von unten nach oben je zehnfach höheren Werth; eine zwischen zwei Linien befindliche Marke hat den fünffachen Werth als wenn sie der unteren, den halben als wenn sie der oberen Linie angehörte; das Rechnen, insbesondere das Addiren, als die Grundlage jedes Rechnens, vollzieht sich genau so wie bei dem ältesten Abacus.

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 175.

Die Frage musste aufgeworfen werden, wie man das plötzliche Auftreten dieses Verfahrens zu erklären habe, welches einem schon vollständig überwundenen Standpunkte angehörend geradezu einen Rückschritt bedeute. Man hat besonderes Gewicht auf den Gegensatz der wagrechten Linien zu den früheren senkrechten Kolumnen gelegt und auf ihn gestützt eine Neueinführung behauptet, deren Muster der chinesisch-mongolische Swán pân (Bd. I, S. 622) gewesen sei, der „während des XV. Jahrhunderts durch den Handel in Deutschland in Gebrauch kam“[1]). Gegen diese Meinung ist sehr vieles einzuwenden. Die Nachbildung eines Eingeführten pflegt doch diesem selbst ähnlich zu sein, und da ist nun von vornherein gar nicht richtig, dass der alte Swán pân mit wagrechten Drähten hergestellt gewesen sei[2]). Dann ist mit Recht hervorgehoben worden, dass die Vermittlung des chinesisch-europäischen Handelsverkehrs in den Händen der Italiener lag, und grade diese haben das Rechnen auf den Linien nicht in ihren Rechenbüchern gelehrt[3]). Es ist weiter zu beachten, dass die Schriften über das Rechnen auf den Linien, wo sie überhaupt eines Ursprunges gedenken, niemals auf Asiaten verweisen, sondern auf Appuleius von Madaura (Bd. I, S. 524), und wir dürfen uns wiederholend jene Namensnennung so deuten, dass es schwer halte, des Glaubens sich zu erwehren, dass wer so bestimmt sich ausdrückte wie jene Rechenmeister des XV. und XVI. Jahrhunderts, die Schrift Appuleius' selbst vor Augen hatte, von der freilich keine Handschrift mehr vorhanden ist. Wir geben ferner zu bedenken, dass der Hauptunterschied der Richtung der Kolumnen, die aus senkrechten zu wagrechten wurden, erklärt werden kann, wenn wir an das Aufhängen einer solchen Rechenvorrichtung denken, welches nur ein Verschieben der Kugeln nach rechts und links, nicht nach oben und unten gestattet, ohne behaupten zu wollen, diese Erklärung sei die richtige.

Endlich aber ist, wie uns scheint, eine vollständige Erledigung aller Zweifel dadurch gegeben, dass die zwischen dem XII. und XV. Jahrhunderte vorhandene Lücke, den allmählichen Uebergang von Abacus zur Rechenbank darstellend, nunmehr ausgefüllt ist, zwar

[1]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 28—29, Anmerkung 2. [2]) Vergl. z. B. Abbildung und Beschreibung des Swánpân mit gegen den Rechner senkrechten Drähten bei Duhalde, Ausführliche Beschreibung des chinesischen Reiches und der grossen Tartarei (aus dem Französischen), Rostock 1749. Bd. III, S. 350. Kaspar Schott in seinem *Cursus mathematicus* von 1699 beruft sich pag. 21 und 52 ausdrücklich auf einen Missionar Martinius, durch welchen er wisse, dass die Kugeln des chinesischen Rechenbrettes *sursum atque deorsum mobiles* seien, was nur bei gegen den Rechner senkrechter Lage der Drähte möglich ist. [3]) Unger, S. 69.

nicht durch ein Lehrbuch, wie man mit Rechenpfennigen umgehen solle, aber durch die Rechenpfennige selbst[1]). Sie führten in französischer Sprache den Namen *Jetons* von *jeter*, werfen oder auswerfen, mit Bezug auf ihren Gebrauch, bei welchem sie auf die Rechenbank geworfen wurden. Lateinisch heissen sie aus dem gleichen Grunde *projectilia*. Die Engländer sagten *counters*, Zähler, die Deutschen *Rechenpfennig* oder *Raitpfennig*. Es ist gelungen, eine ganze Reihe solcher Marken selbst oder doch deren Erwähnung ausfindig zu machen, welche ein lückenloses Vorhandensein beweisen, wenn auch die Beweisstücke nicht alle dem gleichen Orte entstammen.

In Frankreich ist ein Rechenpfennig der Königin Blanche vorhanden[2]), welche 1252 starb. In Brügge finden sich unter den Ausgabeposten der städtischen Rechnungsämter solche für Anschaffung von Rechenpfennigen[3]) aus den Jahren 1284, 1303, 1331—1332. Der Gebrauch von Rechenpfennigen zur Zeit Philipp VI. von Frankreich († 1350) ist gesichert[4]), gesichert auch für die Zeit von Philipp dem Kühnen von Burgund († 1404), von Anton von Brabant († 1450). In dem alten Cataloge des Musée Cluny in Paris (vor der Uebersiedelung der Sammlung) war unter Nr. 3245 angegeben: Tapisserie de haute lisse aus der Zeit Ludwig XII. (1462—1515). Auf dieser Stickerei gab die Dame Arithmétique Rechenunterricht. Ein Zuhörer hielt einen kleinen Bogen, *à la corde duquel sont suspendus des bâtonnets de longueurs inégales*, und diese verschieden langen Stäbchen müssen doch wohl zu einem instrumentalen Rechnen gedient haben. Aehnlich wie wir es von Brügge aussprechen durften, sind auch in Frankfurt am Main städtische Rechnungen erhalten[5]) mit Ausgabeposten „umb ein hundert Rechenpfennige“. Solche waren daher 1399, 1402, 1431 im Gebrauch. Wieder aus dem XV. Jahrhunderte kennt man eine ganze Anzahl von Nürnberger Rechenpfennigen[6]), die den Anfang eines regen Gewerbes bezeichnen. *Rechenpfennigmacher* heisst ein Hans Laufer[7]) am Anfange des XVII. Jahrhunderts, und auf den heutigen Tag ist ähnliche Nürnberger Waare grade so gut, nur bei verändertem Gebrauche als Spielwerk, weit und breit zu finden, als damals, da der genannte Hans Laufer in den In- und Umschriften nach dem Geschmacke aller Länder sich richtete[8]), wohin seine Erzeugnisse verkauft wurden.

Ein Land fehlt in der Liste der Gegenden, wohin Rechenpfennige

---

[1]) Alfred Nagl, Die Rechenpfennige und die operative Arithmetik in der (Wiener) Numismatischen Zeitschrift. 19. Jahrgang (1887), S. 309—368. [2]) Ebenda S. 317. [3]) Ebenda S. 328. [4]) Ebenda S. 332—333. [5]) Ebenda S. 336. [6]) Ebenda S. 346. [7]) Ebenda S. 344. [8]) Ebenda S. 346.

gingen, und wo mit solchen umgegangen wurde: Italien[1]). Wenn ein spanischer Schriftsteller Juan Martinez Silicius[2]) im Jahre 1514 das Rechnen auf der Linie lehrt, damit ein Nutzen für alle die daraus erwachse, welche der Zahlzeichen unkundig seien; wenn noch Buffon[3]), der berühmte Naturforscher des XVIII. Jahrhunderts, das Rechnen mit Marken rühmt und erzählt, dass Frauen und so und so viele andere Leute, welche nicht schreiben können oder nicht schreiben wollen, es lieben mit Jetons zu hantiren; wenn um 1611 in Shakespeare's Wintermärchen[4]) (Act IV, Scene 2) der junge Schäfer sagt: ich kann es ohne Rechenpfennige nicht herausbringen, *I cannot do't without counters*, so spricht ein italienischer Humanist vom Ende des XV. Jahrhunderts, Ermolao Barbaro[5]) († 1495), sich mit einigem Hochmuthe dahin aus, die Alten hätten beim Rechnen der Steinchen sich bedient, einer Sitte, die heute noch fast bei allen ungebildeten Völkern sich erhalten habe *(qui mos hodie apud barbaros fere omnes servatur)*.

Diese Thatsachen und Erwägungen alle zusammengefasst scheinen mit Nothwendigkeit die Sätze zu begründen, dass das einfache Rechnen mit Rechenpfennigen Jahrhunderte lang neben dem wissenschaftlicheren Kolumnenrechnen, wie neben dem Rechnen mit Zahlzeichen mit Stellungswerth und mit der Null sich erhielt, dass es höchst wahrscheinlich in solchen Gesellschaftsschichten erblich war, welche, um das späte Wort Buffon's zu wiederholen, nicht schreiben konnten oder nicht schreiben wollten, dass innerhalb der vielen Jahrhunderte nur eine wesentliche Aenderung, die der senkrechten Linien in wagrechte, auf nicht mit Sicherheit nachzuweisende Art eintrat, dass von jenem sich vererbenden Nothbehelfe grade Italien, das Mutterland des römischen Abacus, sich vollständig reinigte.

Für diese letztere Erscheinung ist es nicht schwer, eine Begründung zu geben. Haben wir doch grade in Italien ein wissenschaftliches Laien- und Kaufmannsrechnen entstehen sehen! Also eben jene Kreise, die in Frankreich, in Deutschland, in England in dem bequemen Schlendrian alter Unwissenheit weiter lebten und ihm dadurch Erhaltung sicherten, sie waren in Italien die Träger eines Fortschrittes, der neben der Welt der Gelehrten seine eigenen Wege ging. Wer hätte also in Italien die Rechenpfennige und ihren Gebrauch zum Range eines ewigen, weil für Viele unentbehrlichen Mittels erheben sollen?

Eine andere letzte Frage haben wir aufzuwerfen. Wenn Jahr-

---

[1]) Alfred Nagl S. 347—348. [2]) Ebenda S. 326. [3]) Ebenda S. 327. [4]) Ebenda S. 333. [5]) Ebenda S. 348.

hunderte lang nördlich von den Alpen mit Rechenpfennigen gerechnet worden ist, wenn wirklich, wie wir oben sagten, dieses Verfahren in Gesellschaftskreisen niedrigerer Bildung erblich war, ohne dass es nothwendig gewesen zu sein scheint, es in Schriften zu lehren, wie kommt es, dass es nun plötzlich seit Ende des XV. Jahrhunderts in zahllosen Werken mit und neben dem Ziffernrechnen empfohlen wird?

Wir könnten auf diese Frage mit einer Gegenfrage antworten: wie kommt es, dass ein so hervorragender Mathematiker, als Poncelet es war, ein Rechenbrett mit an Drähten aufgereihten Kugeln, welches er als Kriegsgefangener in Russland zum Rechnen hatte verwenden sehen, nach seiner Rückkehr nach Frankreich in die Schulen von Metz einführte[1]), wo es den ganz passenden Namen *boullier*, Kugelbrett, erhielt, dass es von da in fast alle Kinderschulen Europas drang? Poncelet erkannte die Vorzüglichkeit einer Vorrichtung, für welche er als Mittel zum eigentlichen Rechnen sich gewiss nie erwärmt hat, als Lehrmittel, und ein Aehnliches nehmen wir für die Zeit des XV. und XVI. Jahrhunderts in Anspruch. Die Buchdruckerkunst war soeben erfunden. „Mit der Entstehung von Druckschriften wurden die Bildungsstätten für's gemeine Volk zum Bedürfniss und zur Möglichkeit, denn aus Handschriften konnten Bauernkinder nicht lesen lernen“[2]). Und die Schule erzeugte wieder Unterrichtsverfahren. Man konnte, man sollte in durch den Druck vervielfältigten Büchern Lehrmittel schaffen, die Jedem zugänglich seien, die der Gesammtbevölkerung oder doch einem weit grösseren Theile derselben, als bisher dem Unterrichte unterworfen werden konnte, zu Gute kämen. Da musste man bei Abfassung solcher Bücher Umfrage halten, wie es denn in jenen Kreisen üblich sei, die bis dahin nur mündlich unterrichtet worden waren, da musste man dazu kommen, auch die dort herrschende Uebung, falls man ihre Lehrzweckdienlichkeit erkannte, mit dem Freibriefe allgemeiner Anwendung zu versehen. So unsere persönliche Meinung, die wir allerdings mit genauen Beweisen zu unterstützen nicht im Stande sind, die aber uns wenigstens erklärt, was erklären zu wollen noch nicht versucht wurde. Wir könnten zum Vergleiche wie zur Unterstützung daran erinnern, dass in China (Bd. I, S. 629) die Lehrbücher der Rechenkunst für die Addition und Subtraction gar keine Regeln aufstellen, offenbar mit Rücksicht darauf, dass diese Rechnungsarten auf dem Swán pân ausgeführt wurden.

Von dem ersten gedruckten deutschen Rechenbuche sind nur geringfügige Ueberbleibsel[3]), 9 kleine Pergamentstreifchen, erhalten,

[1]) Chasles in den *Comptes Rendus de l'Académie des sciences* vom 26. Juni 1843. T. XVI, pag. 1409. [2]) Unger, S. 2. [3]) Ebenda S. 36.

welche der Bamberger Bibliothek angehören. Sie genügen grade, um durch die Schlussworte *Anno dñi 1482 kl' 16 Iunii p. Henr. peczensteiner Babenberge: finit Ulrich wagner Rechēmeister zu Nürnberg* Drucker und Verfasser kennen zu lernen. Ersterer, Heinrich Petzensteiner, druckte in den Jahren 1482—1490 in Bamberg und ist dadurch in der Geschichte der Buchdruckerkunst wohl bekannt. Letzterer, Ulrich Wagner, gehörte als Nürnberger Rechenmeister einer in deutschen Landen und darüber hinaus berühmten Classe von Männern an, welche, wie wir noch im Verlaufe dieses Abschnittes sehen werden, zur Verbreitung mathematischen Wissens viel beitrugen.

Vielleicht war Wagner auch der Verfasser eines zweiten Rechenbuches, das 1483 bei demselben Drucker Heinrich Petzensteiner erschien und mit dem gleichen Schriftsatz gedruckt worden sein muss, der ein Jahr vorher diente. Dieses Rechenbuch, von dem ersten verschieden, wie aus dem erwähnten Ueberbleibsel des älteren Buches durch Vergleichungen entnommen werden konnte, hat den Namen des Bamberger Rechenbuchs von 1483 erhalten[1]). Es ist in mehrfacher Beziehung wichtig genug, um eine etwas eingehendere Schilderung zu erhalten. Es besteht aus 77 Blättern, zu welchen noch ein „*Register*“ kommt, welches gleichsam Vorrede und Einleitung zugleich darstellt. *Hie nach folget dz Register dises Rechenpuchleins nach seinen Capiteln und was in einem yzlichen begriffen. Hierumb den fleissigen merckern das mit gantzen fleys ersucht mit seinen Canonen*[2]) *und Exempeln nachvolgende und ob yndert eyn ciffern oder mer verkert wern. wil ich entschuldigt sein oder zu vil oder zewenig weren was du gar leichtlich durch die abgemalten Canones und ir regel finden magst alle rechnung in diesem puchlin. Auch ein izlicher in teutschem Lesen und in ciffern erfahren mag an alle unterweyſſung vor im selbs soliches gelernen und garvil alsdan in welschen, teutschen und andern landen in allen kauffschlagen oder kauffmanschatz wie die genant seyn not zu wiſsen ist alles ander daſs gleych magst (an allen zweyffel) vinden. und magst auch sollichs allen nach den rechnungen der ciffern der Tolleten. Auch der linien machen also das du fleissig merckest wie du die rechnung mit der feddern oder kreyden machest das du die pfennig in gleycher weiſs legest.* Wir heben zunächst den Schlusssatz hervor, da aus demselben deutlich hervorgeht, wie dem Verfasser das Rechnen

[1]) Unger, S. 37. Durch die grosse Freundlichkeit von Dr. Unger durften wir, ausser den von ihm im Druck veröffentlichten Auszügen, eine von ihm gefertigte Abschrift des ganzen Rechenbuches benutzen. [2]) Im Texte steht *Caconen*, was aber offenbar Druckfehler ist.

auf den Linien mit Rechenpfennigen ein durchaus bekanntes war, wenn er es auch nicht zu lehren beabsichtigte. Solches that ein 1490 bei Lotter in Leipzig gedrucktes Buch, welches den Titel Algorithmus linealis führt[1]), vielleicht das gleiche Werk, welches (S. 217) sich auf Appuleius beruft. Der oben abgedruckte Satz aus dem Bamberger Rechenbuche, dessen Sinn erfordert, dass man ihn abweichend von der Art, wie er gedruckt ist, vielmehr so lese: *magst auch sollichs allen nach den rechnungen der ciffern der Tolleten, auch der Linien machen,* enthält das Wort Tollet, welches uns hier zum ersten Male begegnet. Die grösste Wahrscheinlichkeit besitzt die Erklärung, welche das Wort Tollet aus dem italienischen tavoletta = kleine Tafel herleitet und sich darauf beruft, dass dazu eine im Auslande etwa vollzogene Verketzerung nicht anzunehmen sei, dass vielmehr im venetianischen Dialekte tavola in *tola*, tavoletta in *toleta* übergegangen sei[2]). Es wäre demnach eine vermuthlich bei venetianer Kaufleuten übliche Methode gewesen, welcher wir hier auf süddeutschem Boden begegnen, eine Annahme, die bei dem regen Verkehr, der zwischen Venedig und Nürnberg stattfand, nichts Auffallendes hat. Einige Bestätigung bieten sogar die in dem Register enthaltenen Beziehungen auf *welsche, teutsche und andern Landen* und auf *kauffschlagen oder kauffmanschatz.* Die Tolletrechnung selbst wird in dem Bamberger Rechenbuche wirklich gelehrt, wie wir sogleich bei der Inhaltsangabe sehen werden. Dieser Inhalt, über den wir, weil es um das erste deutsche gedruckte Rechenbuch sich handelt, genaueren Bericht geben zu sollen meinen[3]), gliedert sich in 21 Kapitel, und zwar betreffen diese:

Kapitel 1. Das Numeriren.

Kapitel 2. Das Addiren unbenannter Zahlen nebst Anwendung der Siebenerprobe.

Kapitel 3. a. Das Subtrahiren unbenannter Zahlen; im Falle einer zu grossen Subtrahendenziffer wird deren dekadische Ergänzung zur Minuendenziffer addirt, warauf die nächste Subtrahendenziffer um 1 erhöht wird. b. Das Addiren und Subtrahiren mehrsortiger Zahlen. c. Die Einmaleinstafel[4]).

Kapitel 4. Das Multipliciren unbenannter Zahlen nach fünf Methoden, deren Verschiedenheit sich auf die Beschaffenheit der

[1]) Unger, S. VIII. [2]) Günther, Unterr. Mittela. S. 322—323 mit Berufung auf H. E. Gelcich, *Sull' origine della Toleta dei Veneziani* in der *Rivista della marina mercantile* (Triest 1884, pag. 227). [3]) Wesentlich nach Unger, S. 39—40 und der erwähnten Vergleichung des Textes. [4]) Wenn Unger, S. 39 von der pythagoräischen Einmaleinstafel spricht, so ist dieser Name im Bamberger Rechenbuche selbst nicht genannt.

Factoren gründet. a. Beide Factoren bestehen aus je einer bedeutlichen Ziffer mit Nullen. b. Der eine Factor ist einstellig, der andere mehrstellig. c. Beide Factoren liegen zwischen 10 und 20; das Verfahren folgt der Formel $(10 + a) \cdot (10 + b) = ab + 10(a + b) + 100$. d. Beide Factoren bestehen aus je zwei bedeutlichen Ziffern und werden übers Kreuz multiplicirt. e. Zwei vielstellige Factoren multipliciren einander nach der gewöhnlichen Einrückungsmethode der Theilproducte, wobei der Multiplicator längs einer schrägen Linie geschrieben jede seiner Ziffern neben dem zu ihr gehörigen Theilproducte erscheinen lässt. Die Multiplication 705081 mal 640180 sieht z. B. so aus:

$$\begin{array}{r}
640180 \\
\hline
640180/1 \\
5121440/8 \\
000000/0 \\
3200900/5 \\
000000/0 \\
4481260/7 \\
\hline
451378754580
\end{array}$$

Genannt wird diese Multiplication *auf dem Schachir* und erinnert durch den Namen an die schachbrettartigen Verfahren der Inder und Araber (Bd. I, S. 571, 739, 764).

Kapitel 5. a. Das Dividiren unbenannter Zahlen, wobei Unterabtheilungen je nach der Grösse des Divisors gebildet sind. b. Die Progressionen, und zwar sind Summenformeln in Worten gegeben, welche für die arithmetische Progression der Regel

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = (1 + n)\frac{n}{2},$$

für die geometrische Progression der Regel

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} + q^{n-1}$$

entsprechen, welcher letzteren wir (S. 207) bei Beldomandi begegnet sind.

Kapitel 6. Die Multiplication von Brüchen. Die Brüche selbst, welche hier zuerst auftreten, sind ohne Trennung des Zählers von dem unter ihm befindlichen Nenner durch einen Bruchstrich geschrieben. Dagegen sind die Ziffern nur halb so hoch als bei ganzen Zahlen, wodurch eine Verwechslung verhindert ist. a. Bruch mal Bruch. b. Bruch mal ganze Zahl. c. Gemischte mal gemischte Zahl.

Kapitel 7. Das Addiren der Brüche $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$. Vom Aufsuchen eines etwa kleineren Gesammtnenners ist keine Rede, dagegen kommt nachträgliche Kürzung vor, z. B. $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{82}{48}=1\frac{17}{24}$.

Kapitel 8. Das Subtrahiren der Brüche ist dem Addiren derselben nachgebildet.

Kapitel 9. a. Das Dividiren eines Bruches durch eine ganze Zahl. b. Das Dividiren eines Bruches durch einen Bruch nach der Regel $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$. Verdoppelung und Halbirung von Brüchen werden als Sonderfälle ihrer Vervielfachung, beziehungsweise Theilung nachträglich behandelt.

Kapitel 10. *„Die gulden Regel"*. Diesen Namen führt von nun an sehr häufig die Regeldetri, *die so kospar und nucz ist denn alle ander regel zu gliechen weys als golt vbertrifft alle and metall.* Es sind nicht weniger als 6 Unterfälle unterschieden. a. Das 1. oder 3. Glied ist die Einheit. b. Kein Glied ist gleich 1. c. In einem Gliede steht ein Bruch. d. In zwei Gliedern stehen Brüche. e. Alle drei Glieder sind Brüche. f. Anwendung der Regeldetri in Waareneinkaufsrechnungen. Was wegen Verpackung nicht als Waarengewicht mitzurechnen ist und später Tara genannt wurde, heisst hier einfach *das Minus* und wird subtrahirt.

Kapitel 11. *„Vom Wechsel"*, d. h. Umrechnungen von Geldsorten nach der Veränderung unterworfenen Werthverhältnissen. Der Zuschlag von einer Sorte zur anderen heisst *auffwechsel.* Z. B. *Wieviel Ducaten sind* 1578 *Reichsfl. wenn man auffgibt* $25\frac{3}{4}$ *auf* 100 *Duc. Secz also* 125 *fl* $\frac{3}{4}$ *geben* 100 *Duc. was geben* 1578 *fl.*

Kapitel 12. Waarenrechnung mit Gewinn- oder Verlustermittelung.

Kapitel 13. *„Von geselschafft"*. a. Verschiedene Einlagen der Gesellschafter auf gleiche Zeit. b. Verschiedene Einlagen auf verschiedene Zeiten. c. Angabe der Einlagen nach Theilen, z. B. A hat 2 Theile, B hat 3 Theile u. s. w. d. Gegebene Bruchtheile z. B. A hat $\frac{1}{3}$, B hat $\frac{1}{4}$, C hat $\frac{2}{5}$ zu fordern, wo es nicht darauf ankommt, ob $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\lesseqgtr 1$. e. Proportionirte Theilzahlen z. B. $A:B=3:1$, $B:C=4:1$. f. Gewinnberechnung, wenn die Einlagen während der Dauer der Gesellschaft durch Vermehrung oder Verminderung sich ändern.

Kapitel 14. Tolletrechnung[1]). Ein deutscher Schriftsteller des

[1]) Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplementheft S. 98—100. — Unger, S. 94—95.

folgenden Zeitabschnittes, Peter Apianus, hat 1532 die Tolletrechnung durch die Worte erklärt: „Leret durch die Rechenpfenning ein Metall aus dem anderen ziehen", und darnach war es ein Verfahren, mittels dessen das Feingold aus einem goldhaltigen Silber berechnet zu werden pflegte. Es „soll uff einen Tisch die form und gestalt der Tolleten auffgezeychnet werden wie hernach volgt", und da diese Form darin besteht, dass drei kolumnenartige gegen den Rechner senkrechte Räume hergestellt werden, welche durch Querlinien in viereckige Felder getheilt werden, und welche den Namen *cambi* führen, so ist damit bestätigt, was weiter oben über das Wort Tollet vermuthungsweise mitgetheilt wurde, denn erstens ist wirklich eine Tafelform gebildet, und zweitens hängt cambi unzweifelhaft mit dem italienischen cambiare = wechseln, tauschen zusammen. Die Felder der Cambi sind geräumig genug, um in der Mitte eine Bezeichnung zu führen und rechts wie links von derselben Rechenpfennige niederlegen zu lassen, rechts solche, die den Werth einer jeweiligen Einheit besitzen, links solche, die je 5 Einheiten bedeuten. Die für die drei Cambi gleichen Bezeichnungen sind der Figur zu entnehmen:

M	M	M
C	C	C
X	X	X
M	M	M
X	X	X
lot	lot	lot
halblot	halblot	halblot
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$
$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$
$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$

Die Bedeutung der Felderbezeichnung von oben nach unten ist 1000 Mark, 100 Mark, 10 Mark, Mark (oder 16 Lot), dann 10 Lot, einfache Lot und durch fortgesetzte Halbirung gewonnene Unterabtheilungen des Lot, nämlich Halblot, Viertellot bis zu $\frac{1}{256}$ lot. In das erste Cambium ist durch Rechenpfennige das *ganz zerfelt Stuck* anzugeben. Z. B. *einer kaufft ein Stuck Sylber wigt marck* 82 *lott* $14\frac{3}{4}\,\frac{3}{16}$. Hier war in die 10-Markabtheilung die Zahl 8 einzulegen, in die Mark 2, in die 10-Lot 1, in die Lot 4 und dann jeweils 1 in die Abtheilungen halblot, $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$. Der Feingehalt richtet sich nach der vorgenommenen Probe *und halt die Marck an der Prob* 2 *lot* $\frac{1}{4}\,\frac{3}{16}$ *Goldt.* Nun beginnt der Rechner mit dem Haupttheile des Stückes, d. h. mit 82 Mark, und legt die Einzelergebnisse in das dritte Cambium. Die 82 Mark liefern 82 mal 2 Lot oder 164 Lot, 82 Viertellot oder 20 Lot und 1 Halblot, 82 Achtellot oder 10 Lot und 1 Viertellot, 82 Sechzehntellot oder 5 Lot und 1 Achtellot. Nach dieser ersten Rechnung kämen die 14 Lot des Stückes an die Reihe. Von ihnen betrachtet der Rechner zuerst 8 Lot, die als $\frac{1}{2}$ Mark die Hälfte von 2 Lot $\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}$, d. h. 1 Lot $\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{32}$ Feingehalt liefern u. s. w. Das Bamberger Rechenbuch sagt selbst, dass die Regeldetri eine weit kürzere Methode sei[1]), und man wird dem beistimmen. Aber gleichwohl ist der Grundgedanke der vollzogenen Zerlegungen von solchem Vortheile für die wirkliche Ausführung, dass er eine Lebensfähigkeit bewies, die nach Jahrtausenden zu bemessen ist. Unzweifelhaft wurzelnd in der Zerlegung eines Bruches in eine Summe von Stammbrüchen, wie sie von Aegypten ausging, hat das Verfahren, freilich unter Abstreifung der Rechenpfennige und unter Annahme neuer Namen von Italien aus über das ganze handeltreibende Europa sich verbreitet und wird uns bald wieder begegnen. Fahren wir zunächst fort mit der Inhaltsangabe des Bamberger Rechenbuchs, so treffen wir auf

Kapitel 15. *Stich*, d. h. Waarentausch.

Kapitel 16. *Goltrechnung*, eine Aufgabe, welche der im 14. Kapitel behandelten nahe verwandt ist. Das Rauhgewicht des eingekauften Metalls ist in Mark, Lot und Quint gegeben, dazu der Feingehalt in Karat und Gran nebst dem Preise für ein Karat Feingold, und daraus soll der zu zahlende Preis ermittelt werden. Anschliessend ist auch die Aufgabe *Vom wandern* behandelt. *Es seyn zwen gesellen die gend gen Rom. Eyner get alle tag 6 meyl der ander geth an dem ersten tage 1 meyl an dem andern zwun und alle tag eyner meyl mer dan vor. Nu wildu wissen in wiviel tagen eyner als vil hat gangen als der ander. So nim die zal zwir die der gleych geht. Der wirdet 12 und dar von thu die meyl die der an dem ersten tag ging der ungleych get. Also beleybt dem noch 11 meyl so kummen sie gleich gangen an dem 11 tag.* Der Verfasser wusste demnach, dass symmetrisch liegende Glieder der arithmetischen Progression gleiche Summen haben, welche jedesmal dem doppelten Durchschnittswerthe gleichkommen. Nimmt er also diesen doppelt und zieht das erste Reihenglied ab, so muss als Rest das letzte bleiben, welches in der natürlichen Zahlenreihe zugleich die Gliederzahl darstellt.

[1]) Unger, S. 95.

Kapitel 17. *Von rechnüg vb' lant genät*, das sind Preisberechnungen mittels einfacher Regeldetri.

Kapitel 18. Zurückführen von Brüchen von Geldsorten auf ganze Zahlen kleinerer Münzeinheiten.

Kapitel 19, 20, 21 enthalten Tabellen, mit deren Hilfe die bei Gold- und Silberrechnungen geforderten Multiplicationen umgangen, beziehungsweise durch Addition von ein für alle mal vorberechneten Ergebnissen ersetzt werden. Das sind jedenfalls die Canones (S. 221), welche das Register anmeldet, und welche für das praktische kaufmännische Leben ganz und gar nicht der Wichtigkeit entbehrten zu einer Zeit, in welcher die Münzmannigfaltigkeit und Münzunsicherheit es geradezu unumgänglich machten, als letztes Vergleichungsmittel die Entmünzung, das Umschmelzen in Barren, vorzunehmen, und deren Werth aus der Menge des in ihnen enthaltenen Feinmetalls, bald Gold bald Silber, zu entnehmen.

So wird auch durch das Vorhandensein dieser Tafeln das Bamberger Rechenbuch wieder als das gekennzeichnet, als was wir es wiederholt genannt haben, als ein Buch für Kaufleute und in von Italien aus beeinflussten Kaufmannskreisen entstanden. Genau zu dem gleichen Ergebnisse wären wir gelangt, wenn wir das Bamberger Rechenbuch auf die Merkmale geprüft hätten, welche von uns wiederholt angerufen wurden, wo es um Einreihung eines Werkes in eine von den grossen, scharf getrennten Klassen von Rechenbüchern sich handelte. Verdoppeln und Halbiren als besondere Rechnungsarten ausgezeichnet oder als solche ganz unbekannt, das war das untrügliche Zeichen, ob wir die Schule des Jordanus, ob die des Leonardo zu erkennen haben. Das Bamberger Rechenbuch weiss von jenen Operationen als Sonderfällen, weiss nichts von ihnen als Rechnungsarten, also ist es auf dem Boden des südlichen Deutschlands ein Ausfluss italienischer Lehren.

54. Kapitel.

Johannes Widmann und die Anfänge einer deutschen Algebra.

Vom Bamberger Rechenbuche gelangen wir zu einem anderen, welches sechs Jahre später in Leipzig gedruckt wurde und seine Abhängigkeit von jenem dadurch erweist, dass viele Stellen wörtlich entlehnt sind[1]). Genannt ist die Quelle aber nicht, sondern als benutzt werden nur angegeben[2]): Johannes von Sacrobosco für das eigentliche Rechnen, Euklid, Campanus, Boethius, Jordanus für Proportionen, endlich Julius Frontinus für Feldmesserisches.

Diese genannten Quellen neben jener nicht genannten, aber nachweislich benutzten, geben dem Werke ein besonderes Interesse. Sie lassen erwarten, dass von den beiden am Schlusse des vorigen Kapitels genannten Schulen ein sich mischender Einfluss vorhanden sein müsse, der sich nachträglich werde erkennen lassen. Sie lassen vermuthen, dass der Verfasser zu den eigentlich gelehrten Kreisen gehört habe, weil er sich nur auf solche Vorgänger beruft, deren Namen in solchen Kreisen einen vorzugsweise guten Klang hatten. Alles dieses bestätigt sich bei genauerem Berichte.

Johannes Widmann von Eger[3]) wurde 1480 im Wintersemester in die Matrikelliste der Universität Leipzig eingetragen und zwar als pauper, d. h. mit einem Armuthszeugnisse. Andere Universitätsacten theilen mit, dass Widmann 1482 Baccalaureus, 1485 Magister unter Erlassung der Kosten wurde. Von da an lehrte er muthmasslich an der gleichen Hochschule, welcher er seine eigene Ausbildung verdankte, denn wenn auch nicht nachgewiesen werden kann, dass Widmann eine leipziger Professur inne hatte, so hat sich dafür der Wortlaut von Vorlesungsanzeigen desselben erhalten[4]). Geburts- und Todesjahr Widmann's kennen wir nicht. Das Werk, welches seinen Namen berühmt gemacht hat, heisst Behende und

---

[1]) Unger, S. 41. [2]) Drobisch, *De Joannis Widmanni Egerani compendio arithmeticae mercatorum* (1840) pag. 21. [3]) Das Verdienst, Joh. Widmann für die Geschichte der Mathematik entdeckt zu haben, gehört Drobisch an. Vergl. die in Anmerkung 2 genannte Programmschrift zur Säcularfeier der Erfindung der Buchdruckerkunst. Wichtige Untersuchungen stellte später Fürst Boncompagni an in *Bulletino Boncompagni* IX, 188—210 und Treutlein in der Abhandlung: Die deutsche Coss, Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft, insbesondere S. 62 flgg., 110 flgg., 118 flgg. Zusammenstellungen bei Gerhardt, Math. Deutschl. S. 30—36, Günther, Unterricht Mittela. S. 304 flgg., Unger S. 40 flgg. [4]) Wappler, Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. Zwickauer Gymnasialprogramm (1887) S. 10.

hubsche Rechnung auf allen kauffmannschafft gedruckt in der Furstlichen Stath Leipczick durch Conradum Kacheloffen im 1489 Jare, und die Vorrede beginnt mit den Worten: *Johannes widmann von Eger Meyster in den freyen kunsten zu Leyptzick entbeut Meyster Sigmunden Smidmule beyerischer nacion heyle und unvordrossen willig dienste*, und in dieser Persönlichkeit ist ein Sigmund Altmann aus Schmidtmühlen in der Oberpfalz am Einflusse der Lauterach in die Vils erkannt worden[1]). Ausser der Ausgabe von 1489 sind noch solche von 1508, 1519, 1526 bekannt, die in Pforzheim, Hagenau, Augsburg gedruckt die weite Verbreitung des Buches erkennen lassen.

Es zerfällt in drei Theile. 1. Von kunst und art der zal an yr selbst, 2. von der ordnung der zal, 3. von der art des messen die da geometria genannt ist.

Die erste Abtheilung lehrt das eigentliche Rechnen an ganzen Zahlen und Brüchen. Halbiren und Verdoppeln erscheinen wieder als besondere Rechnungsarten. Beim Subtrahiren wird wie im Bamberger Rechenbuche verfahren (S. 222), d. h. nach italienisch kaufmännischer Art. Eine Einmaleinstafel ist in zweierlei Gestalt aufgezeichnet, als Dreieck und als Quadrat. Wenn wir die letztere Gestalt von Beldomandi (S. 208) her kennen, so sagt Widmann über die erstere: *dz erst ist eyn tafel gformirt vf den triangel gezogen vfs hebreischer zungen oder judscher.* Welchen jüdischen Schriftsteller er aber meint ist nicht gesagt. Keinenfalls ist an Elias Misrachi zu denken[2]), dessen Buch der Zahl, Sefer-Hamispar, erst 1534 im Drucke erschien, wie wir im 60. Kapitel sehen werden. Multiplication und Division erinnern gleichfalls an das Bamberger Rechenbuch. Die Neunerprobe wird gelehrt und neben ihr auch die Siebenerprobe. Beim Wurzelausziehen muss der ganzzahlige Theil einer irrationalen Zahl genügen, Näherung mittels Brüchen ist nicht gelehrt.

Die zweite Abtheilung bringt zunächst die Lehre von den Proportionen, und da, wie wir schon erwähnten, auch Jordanus als Quelle für diesen Abschnitt ausdrücklich genannt ist, so bedarf es keiner ausführlicheren Schilderung, was hier gelehrt wird. Auffallend und geschichtlich wichtig ist nur Eines. Wo das Zusammensetzen von Verhältnissen gelehrt ist, beruft Widmann sich neben und vor Jordanus auf einen römischen Schriftsteller, dessen Namen wir hier

---

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 304 Note 3. [2]) Drobisch, l. c. pag. 22 und die Arithmetik des Elia Misrachi von Gustav Wertheim (Programm der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt am Main 1893; II. Auflage, Braunschweig 1896).

am wenigsten erwarten, auf Julius Frontinus[1]). Welches Werk dieses Schriftstellers mag hier gemeint sein? Den Proportionen folgt die Regeldetri, *die gulden Regel*, deren Name wie in dem Bamberger Rechenbuche damit gerechtfertigt ist, dass sie alle Regeln übertreffe gleichwie das Gold alle Metalle, aber Widmann fügt noch ein weiteres eigenthümliches Lob bei: man benutze sie *gleycher weiſs alſs eyn Hammer in eyner schmit zu vyl hubschern Dingen gebraucht wirt dan er an ym selbst ist.* Es folgen eine Menge einzelner Aufgaben verschiedensten Namens, auf welche noch zurückgekommen werden soll. Die Zeichen + und — erscheinen und werden nicht einmal als neu eingeführt vorgestellt. Es heisst von ihnen nur „was — ist das ist minus und das + das ist mer“. Wir müssen aus mehr als einem Grunde mindestens an dem Wortlaute eines, freilich eigens ausgesuchten Beispiels die Anwendung jener Zeichen bei Widmann kennen lernen. *Eyner hat kaufft* 6 *Eyer* — 2 ₰ *pro* 4 ₰ + 1 *ey. Nu ist die frag wie kupt ein ey.* Die Regel dafür lautet so: *Addir die geminderte zal der ₰ zu der furgelegten zal der ₰ Und subtrahir die zal des dingeſs von der andern zal yrſs gleichen Unnd diuidir die vberige zal der ₰ mit der vbrige zal der gekaufften war. vnd der selbige teylung quocient bericht die frag.* Es wäre schwierig, eine unpassendere Aufgabe zu ersinnen als diese, in welcher die gekaufte Waare gemindertes (also negatives) Geld einschliesst und in dem Preise selbst Waare vorkommt; aber es wäre schwierig, eine geeignetere Aufgabe zu ersinnen, wenn Widmann nichts beabsichtigte, als den Beweis zu führen, wie tief er in den Sinn der beiden Zeichen plus und minus eingedrungen war, wie frei er mit ihnen schaltete.

Die Frage nach dem Ursprunge der beiden Zeichen + und — ist oft gestellt, verschieden beantwortet worden. Widmann, der, soweit man bisher weiss, die Zeichen zuerst im Drucke gebrauchte, sagt nichts von ihrer Herkunft. Ein einziger Italiener, bei welchem sie, wie wir später sehen werden, in einer auch kaum viel älteren Handschrift vorkommen, ist eben so schweigsam. Spätere Schriftsteller geben wieder keine Auskunft. Man ist also ausschliesslich auf Vermuthungen hingewiesen, von welchen uns persönlich kaum eine einzige genügt, wenn wir gleich für Pflicht halten, über einige solche Vermuthungen zu berichten. Gewisse Waaren, meinen die Einen, seien in Kisten verkauft worden, deren Gewicht, wenn sie angefüllt

[1]) vnd alſso magstu proporcionem dupliren, tripliren vnd quadrupliren, alſs dan klerlichen auſsdrucken Julius frontinus Unnd auch Jordanus yn den sechysten beschliſs seynes rechenbuchs.

waren, etwa 3 oder 4 Centner betrug. Genau stimmte dieses Soll an Gewicht kaum jemals mit dem wirklichen Gewichte, wie es beim Abwägen der vollen Kiste gefunden wurde. Zeigte sich so das wirkliche Gewicht etwa um 5 Pfund niedriger oder höher als die erwarteten 4 Centner, so habe man das Gewicht mit Kreide auf die Kiste gezeichnet, das eine Mal als 4 C — 5 P, das andere Mal als 4 C + 5 P. Weil nämlich der Fall, dass die Kiste leichter war, häufiger eintrat, sei bei ihm das einfachste Beziehungszeichen gewählt worden, ein kleiner wagrechter Strich, das Pluskreuz sei dann dadurch entstanden, dass man über dem wagrechten Striche ein kleines Unterscheidungsmerkmal anbringen wollte. Nun ist ja richtig, dass im Bamberger Rechenbuche (S. 224) das Bruttogewicht zum Nettogewichte gemacht wird, indem man die Verpackung als *„das Minus“* abzieht, aber von einem Zeichen dieses Minus, dem dort ein Plus nicht gegenübersteht, noch gegenüberstehen kann, ist keine Rede. Wenn vollends behauptet wird, + und — seien überhaupt zuerst nur Abkürzungen, keine Operationszeichen gewesen und hätten diese Bedeutung erst sehr allmälig angenommen, so wird man sich zur Bestätigung dieser Aussage nicht auf Widmann berufen dürfen; dafür giebt der Wortlaut der Aufgabe Zeugniss, den wir oben abgedruckt haben, und der das deutliche Bewusstsein vorzunehmender Rechnungsoperationen, welche durch + und — ausgedrückt sind, an den Tag legt. Konnten wir diesem ersten Erklärungsversuche der beiden Zeichen nicht beipflichten, so scheint uns ein zweiter nicht vorzuziehen. Dieser leitet den Minusstrich aus dem Punkte ab, welchen die Inder über die negative Zahl setzten (Bd. I, S. 580) und lässt dann das Pluszeichen durch ein hinzutretendes Unterscheidungsstrichelchen entstehen. Von einer dritten Ableitung soll die Rede sein, wenn wir mit den italienischen Schriftstellern unseres Abschnittes es zu thun haben. Sagten wir oben, Widmann biete kein Zeugniss dafür, dass + und — ursprünglich Abkürzungen gewesen seien, so stehen andere Zeugnisse dafür zu Gebote. In nicht-mathematischen Handschriften vom Anfange des XIV., in einer mathematischen Handschrift vom Anfange des XV. Jahrhunderts findet sich das Wort *et* durch ein t, dessen senkrechter Strich nach links oben gekrümmt war, dargestellt, etwa so ꝉ. Blieb das Häkchen oben weg, so war das einfache stehende Kreuz vorhanden[1]). Das Minuszeichen ist vielleicht dem griechischen ὀβελός ver-

[1]) Le Paige, *Sur l'origine de certains signes d'opérations (Mémoire lu à la séance de la première lection de la société scientifique de Bruxelles le 28 Janvier 1892.* — Wilh. Schum, *Exempla codicum Amplonianorum Erfurtensium saeculi IX—XIV* (Berlin 1882), insbesondere Tafel XXXVI (vom Anfange des XIV. Jahrhunderts).

wandt[1]), einem Horizontalstrichelchen, dessen alexandrinische Grammatiker sich bedienten, um das Wegfallen des Verses, dem eben der Obelos vorgezeichnet war, anzudeuten. Von den Alexandrinern ging das Zeichen zu den Römern über. Sueton, später Isidorus, haben es beschrieben.

Wir haben der zahlreichen Namen gedacht, die Widmann als Ueberschrift von Aufgaben gebraucht, und die zugleich den Auflösungsregeln ihren Namen geben, mögen diese auch oft nur in beschränktester Weise als besondere Regeln gelten, beziehungsweise nur ein Verfahren für viele Beispiele vorhanden sein, welches nur bald so, bald so heisst, je nach dem Wortlaute der jedesmaligen Aufgabe. Das ist indische Uebung (Bd. I, S. 577), aber auch italienische, wie wir an einzelnen Beispielen bei Leonardo von Pisa gesehen haben, wie wir an solchen in beliebiger Anzahl hätten hervorheben können, wenn wir noch weitschweifiger in der Berichterstattung über seinen Abacus hätten sein dürfen. Gab es auch arabische Vermittlungsschriften, welche mit dem gleichen Namenreichthum prangten? Wir dürfen es vermuthen, wenn uns auch keine bekannt sind. Oder sollten wir auf byzantinischem Boden diese Vermittlung zu suchen haben? Wir streifen nur diese zur Zeit nicht spruchreife Frage. Genug, am Ende des XV. Jahrhunderts waren die mit Namen belegten sogenannten Regeln aus Italien oder über Italien nach Deutschland gedrungen und haben in Widmann's Buche einen breiten Platz sich angeeignet.

Da findet sich die Regula pulchra d. i. diejenige, welche wir oben bei der Eier- und Pfennigaufgabe wörtlich mitgetheilt haben. Da giebt es eine Regel für die Aufgabe vom Löwen, vom Hunde und vom Wolfe, welche gemeinschaftlich ein Schaf verzehren, wozu der Löwe allein 1 Stunde, der Wolf allein 4 Stunden, der Hund allein 6 Stunden brauchen, während gefragt wird, in welcher Zeit sie zusammen fertig werden. Man solle 1 mal 4 mal 6 zu 24 multipliciren, $\frac{1}{1}$ mal 24, $\frac{1}{4}$ mal 24 und $\frac{1}{6}$ mal 24 zu 34 zusammenaddiren und jene 24 durch diese 34 dividiren: $\frac{24}{34}$ Stunden *macht 42 minuten* $\frac{6}{17}$ *und ist die Zeyt.* Wir erwähnen ferner eine Regula inventionis, fusti (Bruttorechnung), Ligar, legis, augmenti et decrementi, sententiarum (unbestimmte Aufgaben, die mehrere Lösungen

[1]) So die Meinung von H. Zangemeister. Vergl. C. Suetoni *Tranquilli praeter Caesarum libros Reliquiae* (ed. Aug. Reifferscheid. Leipzig 1860) pag. 137—138.

zulassen), bona, plurima u. s. w. Die Regula pagamenti verdient, dass wir bei ihr etwas verweilen.

Die Aufgabe lautet wie folgt: *Eyner gent zu wyen yn eyn wechſelpanck und hat 30 ₰ Nurmberger alſso sprechen zu dem wechſsler liber wechſsel mir die 30 ₰ vnd gieb mir wiener dafür als vil sy dan wert seyn also weiſs der wechſsler nicht wie vil er ym wiener ſsol geben vnd begert der muncz underrichtung. Also untterweyst yenner de wechſsler vnd spricht 7 wyener gelten 9 linczer and 8 linczer gelten 11 passawer vnd 12 passawer gelten 13 vilſshofer vnd 15 vilſshofer gelten 10 regensperger vnd 8 regensperger gelten 18 neumercker und 5 neumercker gelten 4 nurmberger wie viel kummen wiener umb 30 nurmbr. Wiltu dz wissen vnd alles des gleichen. Secz die Figur gleich wie die do stet*

7 9 12 13 8 18 30
╲ × × × × ×
8 11 15 10 5 4

Un multiplicir in kreucz durchauſs auf 2 teyl vnd dividir.

Darnach kommt $\frac{7 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 30}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 18 \cdot 4} = 13\frac{13}{429}$ mittels des genau gleichen Ansatzes, den wir (S. 14 flgg.) bei Leonardo von Pisa aus dem Satze des Menelaos haben entstehen sehen, indem die Anzahl der zu vereinigenden Verhältnisse sich beliebig vermehren durfte. Wie der Text der Aufgabe auf kaufmännische Beziehungen hinweist, ist uns die Auflösung ein sicheres Kennzeichen dafür, dass es italienische Kaufleute waren, von welchen Widmann hier unmittelbar oder mittelbar gelernt hat, denn das Bamberger Rechenbuch war, wie unser Auszug desselben darthut, an dieser Stelle unmöglich der Ort, woher Widmann den Kettensatz bezog.

Widmann lehrt mitunter einer und derselben Gattung von Aufgaben auf zwei Arten beikommen, ohne dass er auf die Uebereinstimmung zwischen den Aufgaben selbst irgend hinweist. Es ist dieses am deutlichsten bei unreinen quadratischen Gleichungen bemerkt worden. *Eyner leycht dem Andern 25 fl. 2 Jar umb gewin. Nu wen die 2 iar vergangen seyn ſso giebt yenner dem wider seyn Hauptsum vnd fur gewin vnd gewinſs gwin giebt er ym 24 fl. Nu ist die frag. Wie viel haben die 25 fl. gewunnen in dem ersten jar.* Heisst x jener Jahreszins, so ist $\frac{25+x}{25}$ mal x der Jahreszins des zweiten Jahres, und es muss sein $x + \frac{(25+x)x}{25} = 24$, $x^2 + 50x = 600$, $x = \sqrt{25 \cdot 24 + 25^2} - 25$. Widmann bildet die Gleichung nicht, sondern giebt die Regula lucri, unter lucrum = Gewinn hier Zins verstehend. *Multiplicir die hauptsum yn den gewin darnach* *multiplicir dy hauptsum in sich selbst quadrate Und addir das product zu dem ersten product Und die wurtzel der ganzen sum so du davon subtrahirest dy hauptsum bericht den gewin der hauptsum Und Ist Recht.* Das hindert ihn aber keineswegs, ein anderes Mal für eine Aufgabe, welche wieder die Gleichungsform $x^2 + ax = b$ entstehen lässt, die Regula excessus in Anspruch zu nehmen. *Also soltu procedirn in dieser Regl· Multiplicir der vbertretung das halbe teyl in sich selbst vnd das product addir zu der Hauptsum. Darnach nym radicem quadratam des selbige aggregates vnd davon subtrahir das halbe teyl der vntterscheyd oder vbertretung vnd das vberig ist die kleiner zal. zu welicher so du addirest die vbertretung erwechst auch die grofser.*

Hat Widmann wirklich selbst nicht bemerkt, dass er so zwei Mal unter zwei verschiedenen Namen das gleiche Verfahren lehrte? Man sollte es für undenkbar halten, insbesondere da er gewusst hat, dass es die Regel Algobre oder Cosse genannt gebe, da er ferner von der Regel des doppelten falschen Ansatzes Gebrauch zu machen lehrte, indem er seine Anweisung dazu mit den Worten eröffnete: *Nu soltu wissen das Regula falsi ist eyn Regel durch welche man aller Regel (hint an gesaczt Regulam Cosse) machen mag.* Das Wissen Widmann's wird uns noch bestätigt durch die Thatsache, dass er Vorlesungen über Algebra gehalten hat. Also trotz bessern Wissens scheint er der Neigung der Zeit, sich in recht vielen Regeln zu ergehen und durch Namenreichthum die Gedankenarmuth zu verhüllen, sich gefügt zu haben. Wir kommen auf die Algebra zurück, wollen aber vorher den Bericht über das Widmann'sche Buch zu Ende führen, dessen letzte Abtheilung noch unserer Besprechung harrt.

Die dritte Abtheilung handelt von Geometrie und beruft sich, wie schon gesagt worden ist, auf Julius Frontinus. Wir haben wiederholt geometrische Lehren auftreten sehen, wenn auch deren Umfang nicht an den der Schriften über die Rechenkunst heranreicht. Wir haben gesehen, dass es wesentlich um griechisch-arabische Geometrie dabei sich handelte, dass Euklidübersetzungen und Erläuterungen dazu den Grundstock geometrischen Wissens lieferten, neben welchem Einiges über Kreisquadratur in Abhängigkeit von Archimed, daneben Trigonometrisches, in einem Falle auch etwas Feldmessung geübt wurde. Eine Abhängigkeit von römischer Feldmesskunst ist uns seit dem Anfange des XIII. Jahrhunderts nicht wieder begegnet. Bei der gegenwärtig immer noch grossen Lückenhaftigkeit unseres Wissens ist es gewagt, allgemeine Theorien aufzustellen. Neu nutzbar gemachte Handschriften können

die schönsten Begründungen über den Haufen werfen, wenn auch eine deutsche Geometrie von 1477 in der Münchner Bibliothek[1]) sich nur als Uebersetzung der Schrift des Robertus Anglicus herausgestellt hat; aber es will scheinen, als habe man in den etwa zweiundeinhalb Jahrhunderten von 1200 bis nach 1450 so unbedingt unter dem Einflusse griechisch-arabisch-lateinischer Geometrie gestanden, dass man anderes Wissen nicht aufsuchte. Die Zeit des beginnenden Humanismus brachte Aenderung. Wenn Georg von Peurbach in Wien Vorlesungen über lateinische Dichter hielt (S. 180), so musste das erwachte Bewusstsein, dass römische Schriftsteller, gleichwie die griechischen, Dinge hinterlassen hatten, die es verdienten gelesen zu werden, und die vermöge der erhaltenen Kenntniss der Sprache auch verhältnissmässig leicht zu lesen waren, eine Wissbegier erregen, die zur Neugier anwuchs. Jetzt mussten die agrimensorischen Handschriften, wo sich etwa solche vorfinden mochten, gesucht und studirt werden, jetzt musste bei der verhältnissmässig viel geringeren Beschäftigung mit Geometrie als mit den rechnerischen Theilen der Mathematik prüfungslose Aufnahme finden, was bei jenen römischen Feldmessern sich vorfand, mochte es auch Widersprüche gegen aus griechisch-arabischen Quellen Bekanntes darbieten. Gewissenhaft vereinigte man beides, ohne die Widersprüche auch nur zu bemerken.

Wir haben uns die hier entwickelte Meinung zum nicht geringen Theile an dem Widmann'schen Buche gebildet, kein Wunder, wenn es dieselbe lediglich bestätigt. Der Name *Helmuaym* für den Rhombus, *Helmuaripha* für das Trapez lassen sofort den Leser der Euklidausgabe des Campanus erkennen, für das Meiste aber, was im geometrischen Abschnitte des Widmann'schen Buches sich der Aufmerksamkeit aufdrängt, ist die römische Quelle verantwortlich zu machen.

Da findet sich die Ausrechnung der Fläche des gleichseitigen Dreiecks als Dreieckszahl, die sonstiger Vielecke als Vieleckszahl. Es findet sich die Fläche des Vierecks als Product der halben Summen einander gegenüberliegender Seiten. Es findet sich aber auch der Durchmesser des Innenkreises eines rechtwinkligen Dreiecks als Unterschied der Kathetensumme und der Hypotenuse, die heronische Formel für die Dreiecksfläche aus den drei Seiten geprüft an dem Dreiecke von den Seiten 13, 14, 15. Es finden sich die Abschnitte, welche die Höhe eines Dreiecks auf der Grundlinie bildet. Es findet sich ausserdem eine Berechnung des Halbmessers des Umkreises des

[1]) *Cod. German.* Nr. 328 Blatt 62—73. Auf diese Handschrift hat schon Max. Curtze Zeitschr. Math. Phys. XX, Histor.-liter. Abthlg. S. 58 aufmerksam gemacht und sie später näher untersucht.

Dreiecks mittels jener Abschnitte und der Höhe, welche darauf hinauskommt, dass wenn h die Höhe, b die Grundlinie, k deren kleineren Abschnitt bedeutet,

$$r = \sqrt{\left(\left[\frac{h^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2 - \frac{b^2}{4}}{2h}\right)^2 + \frac{b^2}{4}\right]}$$

sein muss. Diese Formel kennen wir bei keinem einzigen anderen Schriftsteller! Entweder war sie in dem Werke des Frontinus enthalten, welches, nachdem Widmann es benutzt hatte, spurlos verloren gegangen ist, oder sie war Eigenthum Widmann's, was man nicht als ein Ding der Unmöglichkeit betrachten darf, nachdem es gelungen ist[1]), die Formel genau in der von Widmann benutzten Gestalt so abzuleiten, dass nur einfachste Vorkenntnisse vorausgesetzt werden.

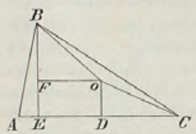
Fig. 37.

Sei (Fig. 37) $AC = b$, $AD = \frac{b}{2}$, $AE = k$, $BE = h$, $OC = OB = r$. Aus $\triangle OCD$ ergiebt sich sofort $r = \sqrt{OD^2 + \frac{b^2}{4}}$, mithin ist nur noch OD zu finden, welches kürzer s heissen mag. Neben $r^2 - s^2 = \frac{b^2}{4}$ ist aber noch eine Gleichung bekannt. $FE = OD = s$, $BF = h - s$, $OF = DE = \frac{b}{2} - k$, mithin im $\triangle BFO$ auch

$$r^2 = (h - s)^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2$$

beziehungsweise $r^2 - s^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2 - 2hs$ und durch Gleichsetzung der beiden Werthe für $r^2 - s^2$ endlich

$$s = \frac{h^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2 - \frac{b^2}{4}}{2h},$$

was zu finden war.

Gleichfalls neu, mithin den Zweifel anregend, ob Römisches oder von Widmann Beigefügtes vorliege, sind die Aufgaben, die Seiten eines Quadrates und eines gleichseitigen Dreiecks aufzufinden, welche beide in einen Halbkreis eingezeichnet sind. Was die geometrischen Kunstausdrücke betrifft, so ist immerhin bemerkenswerth, dass das römische *coraustus* (Bd. I, S. 516) bei Widmann nicht vorkommt[2]). *Punctus ist ein klein Ding, das nit zu theilen ist. — Angulus ist ein*

[1]) Die Herleitung rührt von H. Ad. Lorsch, einem früheren Zuhörer unserer Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, her. [2]) Drobisch, l. c. pag. 30 Note **.

Winkel der da gemacht ist von zweien Linien. Man unterscheidet *gescherffte* (spitze) und *weyte* (stumpfe) Winkel. *Das centrum das ist die zall die do ist von centruz biſs in winckel* u. s. w. Das sind einige von den vorkommenden Erklärungen. Das wichtigste geschichtliche Ergebniss der dritten Abtheilung wird unbedingt darin bestehen, dass sie so gut wie ausser Zweifel setzt, dass das feldmesserische Werk des Frontinus, welches im XII. und XIII. Jahrhunderte benutzt wurde (Bd. I, S. 512—513), auch am Ende des XV. Jahrhunderts noch vorhanden gewesen sein muss, um von Widmann als Quelle genannt werden zu können.

Ungefähr um die Zeit Widmann's ist ferner das Vorhandensein des ersten Visierbüchleins nachweisbar, gedruckt 1487 unter dem Titel[1]) *ein Fisierbüchlein auf allerhand Eich* verfasst von Hanns Briefmaler aus Nürnberg, der 1487 seinen Wohnsitz und eine Druckerwerkstätte nach Bamberg, noch später nach Erfurt verlegte. Als Namen des Verfassers wird neben Briefmaler auch Hanns Buchdrucker und Hanns Sporer angegeben, welche demnach alle drei die gleiche Persönlichkeit bezeichnen. Visierkunst heisst von dieser Zeit an die Lösung der Aufgabe, den Rauminhalt eines Fasses zu finden, welches entweder ganz oder theilweise mit Flüssigkeit angefüllt ist. Man bediente sich dazu der Visierruthe, welche durch das Spundloch des Fasses eingeführt wurde und die Tiefe zu messen gestattete, bei welcher der Flüssigkeitsspiegel sich befand, worauf man nach erfahrungsmässig hergestellten, oder aus einfachsten Annahmen über die als Cylinder betrachtete Fassgestalt abgeleiteten Regeln den Inhalt bestimmte.

Vielleicht gehören der gleichen Zeit Schriften an, welche sich in Münchner Handschriften des XV. Jahrhunderts erhalten haben: der Liber theoreumacie in Cod. lat. Mon. 14684 und die Geometria arithmeticalis in Cod. lat. Mon. 14783, welche letztere allerdings nur in einer Ineinanderschiebung des erstgenannten Buches und der Gerbert'schen Geometrie besteht[2]). Der Liber theoreumacie[3]) lässt auf einen kurz gefassten Algorismus geometrische Lehren folgen: Theilung einer Strecke nach vorgeschriebenem Verhältnisse, gleichseitiges Dreieck, Peripheriewinkel im Halbkreise, Bestimmung eines verloren gegangenen Kreismittelpunktes, Berechnung des Rechtecks und des Kreisinhaltes, Kubatur der Kugel, Fassberechnung, einfache stereometrische Formen. An diese geometrische Abtheilung schliesst sich Weniges über Musik und Astronomie.

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 329. [2]) Curtze brieflich. [3]) Günther, Unterricht Mittela. S. 128—129.

Wir haben (S. 234) auch zugesagt, auf das algebraische Wissen zurückzukommen, welches, wenn auch im geringen Maasse, in Widmann's Rechenbuche sich verrieth. Wie stand es in Deutschland um diesen Wissenszweig? Zwei Quellen waren ja auch hier, genau so wie bei der Rechenkunst, vorhanden, aus welchen die Kenntniss der Gleichungen und ihrer Auflösung nach Deutschland abfliessen konnten. Die Schrift des Jordanus De numeris datis ist heute noch in deutschen Handschriftensammlungen vorhanden; sie hat gewiss nie gänzlich aufgehört gelesen zu werden, so selten sie auch verstanden worden sein mag. Am Ersten dürfte das noch innerhalb des Dominicanerordens der Fall gewesen sein, wo es gewiss nahe lag, die Erinnerung an eines der berühmtesten Mitglieder wach zu erhalten, und so ist es gewiss kein Zufall, wenn schon vor 1471 ein Bruder Aquinus oder Aquinas vom Predigerorden genannt wird[1]), der in Deutschland reiste und bald da bald dort für Geld lehrte, wie man Gleichungen auflöse. Dieser Mönch wird bald als Däne (Dacus), bald als Schwabe bezeichnet. Er lebte 1489 in Bayern. Ein damals dorthin an Aquinus gerichteter Brief aus Mailand ist noch vorhanden. Der Inhalt verräth dieses Schreiben als eines unter zahlreichen, in welchen die Briefsteller sich gegenseitig mathematische Aufgaben vorlegten. In dem erhaltenen Briefe sollen die Aufgaben ausschliesslich der Geometrie angehören. Noch aus dem Jahre 1494 wird in einer Ordensquelle über Bruder Aquinus berichtet, dass er damals bei Otto von Bayern gelebt habe und sich durch Geist und feine Bildung sowie durch Wissenschaftlichkeit auszeichnete. Dass aber, um zu der anderen Quelle überzugehen, der italienische Kaufmann das algebraische Erbtheil des Leonardo bewahrte, wissen wir nicht minder. Dass durch ihn Theile davon nach Deutschland, nach Frankreich, nach England, überallhin wo italienische Handelsniederlassungen waren, oder von wo man regelmässig um des Handels willen nach Italien zog, gelangen konnten, das steht nicht minder ausser allem Zweifel. Es fragt sich nur, wann und von welcher Seite her das Wissen einiger Wenigen sich zu verallgemeinern begann, und ob man im Stande ist, eine oder die andere Persönlichkeit zu nennen, welcher hier hervorragende Verdienste zukommen.

Die älteste Spur deutscher Algebra aus dem Jahre 1461 ist in einer münchener Handschrift enthalten. Es ist ein Sammelband[2]), welcher theils in lateinischer, theils in deutscher Sprache die

[1]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 48 Note 1. [2]) Die münchner Handschrift Nr. 14908 aus St. Emmeran ist durch Gerhardt in den Monatsberichten der Berliner Akademie 1870 S. 141—143 beschrieben. C. J. Gerhardt hat

Summe des damals in Deutschland vorhandenen mathematischen Wissens enthält. Der Algorismus proportionum des Oresme fehlt darin so wenig als die Geometrie des Bradwardinus. Die geometrischen Schriften des Nicolaus Cusanus sind mit der Geometria practica cum figuris des Dominicus de Clavasio vereinigt. In lateinischer Sprache ist eine, wie es scheint, vollständige Bruchrechnung (Addition, Subtraction, Verdoppelung, Halbirung, Multiplication, Division, Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln) gelehrt. Wir dürfen wohl, ohne Zweifel zu begegnen, annehmen, diese Schriften insgesammt stammen aus eigentlichen Gelehrtenkreisen. Nun kommt aber die höchst auffallende Erscheinung, dass zwischen jene Schriften hinein Abhandlungen in deutscher Sprache fallen, wenn auch selbst wieder lateinisch untermischt. Der Schreiber, vielleicht der Verfasser der Abhandlungen nennt sich Frater Fridericus Ordinis S. Benedicti professus Monasterii St. Emmerani Ratisponensis, und die Jahreszahlen, durch welche er die Vollendung einzelner Abschnitte bezeugt, reichen von 1455 bis 1464. Der Inhalt stimmt einigermassen mit Widmann's Rechenbuche überein. Arithmetisches von graden und ungraden sowie von vollkommenen Zahlen macht den Anfang. Daran schliessen sich Progressionen, die Regula falsi, eine Menge einzelbenannter Regeln, wie die aurea Regula vel de tre mit theils deutschen, theils lateinischen Beispielen, die Regula ligar, die Conversa regula de tre, De societatibus aenigmata u. s. w.

In diesem Zusammenhange erscheint das vorerwähnte deutsche Stück Algebra mit der Jahreszahl 1461, welches im Abdrucke 33 Zeilen lang ist. Der Anfang lautet: *Machmet in dem puech algebra und almalcobula hat gepruchet diese Wort census, radix, numerus. Census ist ain yede zal die in sich selb multiplicirt wirt, das ist numerus quadratus. Radix ist die wurtz der zal oder des zins. Numerus ist ain zal für sich selb gemercket, nit alz sie ain zins oder ain wurtz ist.* Diese ersten Sätze zeigen deutlich, dass ein Auszug aus der Algebra des Alchwarizmî vorliegt, und die sechs Gleichungsformen, welche dann nachfolgend beschrieben sind, das Zahlenbeispiel

$$x^2 + 10x = 39$$

(Bd. I, S. 676—678) bestätigen den Ursprung. Eines leider lässt sich

überhaupt sehr erfolgreiche Forschungen über die Verbreitung der Algebra in Deutschland angestellt. Berl. Monatsber. Akad. 1867, S. 38 flgg. und 1870 S. 141 flgg. Kaum minder wichtig ist Wappler, Zur Geschichte der deutschen Algebra im XV. Jahrhundert (Zwickauer Gymnasialprogramm von 1887). Abschliessend ist die Abhandlung: Curtze, Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im XV. Jahrhunderte. Zeitschr. Math. Phys. XL, Supplementheft S. 31—74.

dem Bruchstücke nicht entnehmen, was grade das Wichtigste wäre: auf welche Weise der Verfasser selbst zu seinem Wissen kam. Hat er nur ein arabisches Original vor sich gehabt? Schwerlich; denn wie hätte er sonst genau zu den gleichen Wortformen census, radix, numerus kommen wollen, welche von nichtdeutschen Bearbeitern gebraucht wurden. Hat er eine lateinische Uebersetzung, etwa die des Gerhard von Cremona (Bd. I, S. 854) benutzt, oder hat er unmittelbar oder mittelbar Leonardo's Abacus gekannt, welchem er (S. 34) genau das Gleiche entnehmen konnte? Darauf kommt es uns an Auskunft zu erhalten, und darauf bleibt die münchner Handschrift die Antwort schuldig. Aber nicht genug der Räthsel! Nur vier Seiten weiter folgt, aber nicht von Frater Fridericus geschrieben, *Regule delacose secundum 6 capitula*, Algebraisches von unzweifelhaft italienischem Ursprunge, wie die vorkommenden Kunstausdrücke numerus, cosa, censo, cubo, censo di censo, cubo di cubo beweisen, deren beide erste deutsch durch zal und ding übersetzt sind. Entsprechend der Verbindung das Ding heisst die Unbekannte manchmal auch das cosa. *Censo di censo* ist die 4., *cubo di cubo* die 6. Potenz der Unbekannten, deren Exponent $6 = 3 + 3$ durch Addition der beiden in ihrer Wortbezeichnung vorkommenden Bestandtheile gebildet ist. Von dem anonymen Schreiber oder Verfasser der Regule delacose sind in dem Sammelbande auch zwei Abhandlungen über den doppelten falschen Ansatz vorhanden. In einem Beispiele zu der Algebra des Frater Fridericus, welches auf $43x + 41 = 39y + 33 = 35z + 25 = 31u + 17$ hinausläuft, ist die Regel Ta yen angewandt[1]).

Eine wiener Handschrift[2]) besitzt die Ueberschrift Regule Cose vel Algobre und weist durch den ersteren Namen nach Italien hinüber. Es ist nur bedauerlich, dass auch dieser Handschrift, weil erst dem XVI. Jahrhunderte entstammend, eine Beweiskraft nicht innewohnt, und so dürfte die Widmann'sche Stelle von der *Regel Algebre oder Cosse* (S. 234) die älteste sein, welche als Zeugniss dafür betrachtet werden kann, dass der Verfasser wusste, dass in Italien, wohin allein das Wort Cosse verweisen kann, die Kunst der Algebra in Uebung war.

---

[1]) Curtze l. c. S. 64—66 in den Fussnoten. [2]) Die Handschrift findet sich in einem Bande Nr. 5277 und ist von Gerhardt Berl. Monatsber. Akad. 1867 S. 46 und 1870 S. 143 dem XV. Jahrhundert zugeschrieben. In dem 1870 gedruckten Kataloge der Wiener Handschriften ist sie dagegen für das XVI. Jahrhundert in Anspruch genommen, und Wappler hat (l. c. S. 3 Note 2) dieses bestätigt.

Widmann selbst benutzte, wie nachgewiesen worden ist[1]), einen Band Handschriften, welcher auf den heutigen Tag in der Dresdener Bibliothek vorhanden ist, und in welchem verschiedene algebraische Abhandlungen vereinigt sind. Eine derselben ist deutsch und beginnt mit den Worten[2]): *Meysterliche kunst, dafs ist meysterlich zu wissen rechnung zu machen von Den meysteren, Dy do gezogen sind aus Czebreyen.* Was ist unter diesen Worten zu verstehen? Jedenfalls scheint die Meinung dahin zu gehen, die Quelle der algebraischen Lehren sei *Czebreyn*, aber was bedeutet dieser Ausdruck? Ist es der Name eines vermutheten Erfinders, oder der eines Werkes? Sollte etwa der Doppelname der Algebra „Aldschebr walmukâbala" (Bd. I, S. 676) durch den ersten allein ersetzt sein, der dafür die Dualform annahm, was arabischem Sprachgebrauche ganz angemessen ist[3]), so dass alsdann unter Verlust des Artikels dschebrain zu Czebreyn wurde?

So zweifelhaft die Erklärung der ersten Worte ist, so unzweifelhaft ist die Bedeutung des sich daran Anschliessenden. *Denn synt 6 capitell geformet, aufs den 6 capitelen dy 24 capittell, mag man machen alle gemeyen rechnung, sint durch eyn capittell zu machen gewifslich.* D. h. man hat 6 Fälle, beziehungsweise 6 Gleichungsformen zu unterscheiden, welche sich zu 24 Formen erweitern lassen, und in eine dieser Formen, der 6 ursprünglichen oder der 18 hinzutretenden, passt jede auflösbare Gleichung. Die 24 Kapitel oder Fälle, welche von nun an geraume Zeit in allen algebraischen Schriften erscheinen, zerfallen somit von selbst in 2 Gruppen von 6 und 18 und in der Handschrift sind es folgende, wenn wir sie in die heute übliche Form kleiden.

I.

1. $ax = b$	2. $ax^2 = b$
3. $ax^2 = bx$	4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$	6. $ax^2 = bx + c.$

II.

1. $ax^4 = bx^3$	2. $ax^4 = bx^2$
3. $ax^4 = bx$	4. $ax^4 = b$
5. $ax^3 = bx^2$	6. $ax^3 = bx$

---

[1]) Wappler l. c. S. 9—10. Der Handschriftenband Widmann's ist in der Dresdener Bibliothek mit C 80 bezeichnet. [2]) Wappler l. c. S. 4. Wir haben beim Abdrucke die Rechtschreibung unverändert gelassen, aber zur Erleichterung des Verständnisses Satzzeichen eingeschoben. [3]) So die Meinung unseres verehrten, der Wissenschaft allzufrüh entrissenen Freundes H. Thorbecke.

7. $ax^3 = b$ 8. $ax^3 + bx^2 = cx$
9. $ax^3 = bx^2 + cx$ 10. $ax^3 + cx = bx^2$
11. $ax^4 = bx^3 + cx^2$ 12. $ax^4 + bx^3 = cx^2$
13. $ax^4 + cx^2 = bx^3$ 14. $ax^2 = b\sqrt{x^2}$
15. $ax^2 = \sqrt{bx}$ 16. $ax^4 + bx^2 = c$
17. $ax^4 + c = bx^2$ 18. $ax^4 = bx^2 + c.$

Wir erkennen darin Folgendes: Man war im Stande Gleichungen 1. und 2. Grades unbedingt aufzulösen, Gleichungen 3. und 4. Grades, sofern sie reine Gleichungen waren, oder durch Divisionen auf quadratische Gleichungen sich zurückführen liessen, oder endlich diese Zurückführung dadurch gestatteten, dass man das Quadrat der Unbekannten als neue Unbekannte betrachtete.

Es versteht sich von selbst, dass die 24 Gleichungsformen durch Worte dargestellt werden, in welchen gewisse Kunstausdrücke eine wesentliche Rolle spielen: zall, dingk, zensi, chubi, wurzell von der wurzell bedeuten der Reihe nach die Gleichungsconstante und die 1., 2., 3., 4. Potenz der Unbekannten. Nachträglich sind dann für diese fünf Ausdrücke ebensoviele Zeichen eingeführt:

𝒩, ϑ, ʒ, chu, 𝓇 von 𝓇.

Die Multiplications- und Divisionsregeln für diese Grössen sind gelehrt, in welchen das Vervielfältigungswort „mal" regelmässig stund heisst. Ein Additionszeichen kommt nicht vor; statt dessen ist immer vnnd gesagt. Dagegen erscheint der Subtractionsstrich mit der Aussprache minner. Die Bedeutung des höchst überraschenden „wurzell von der wurzell", wo man etwa zensizensi erwarten sollte, ist durch die Multiplications- und Divisionsregeln sicher gestellt.

Einige wenige Beispiele mögen diese Angaben bestätigen: „4 ϑ minner 5 𝒩 stund 2 ϑ minner 3 𝒩 so sprich 4 ϑ stund 2 ϑ macht 8 ʒ. Nu mach 3 𝒩 stund 4 ϑ daz ist 12 ϑ minner und mach 5 𝒩 stund 2 ϑ daz ist 10 ϑ minner also macht es alz sammet 8 ʒ und 15 𝒩 minner 22 ϑ". Ferner „ϑ stund chu macht 𝓇 von 𝓇" sowie „teyl mir 𝓇 von 𝓇 durch ʒ so kumpt ʒ".

Was den Ursprung der Zeichen betrifft, so sind die Anfangslaute der Wörter Dingk, Zensi, Chubi unverkennbar, wozu es keinerlei Gegensatz bildet, dass das hier Dingk ausgesprochene Zeichen in anderen Handschriften als regelmässige Abkürzung von Denarius auftritt. Dagegen erscheint das Zeichen für Zall und das für Wurzell von der wurzell räthselhaft. Soll das erste ein *r* sein? das würde aber als Anfangsbuchstabe von res weit eher für die Unbekannte, als für die Gleichungsconstante passen. Und nun vollends das letzte

Zeichen der Verdoppelung des ersten ähnelnd, aber doch von ihm unterscheidbar, soll es auch mit *r* als Anfangsbuchstabe von radix in Verbindung zu setzen sein? Wir wissen nicht Bescheid darüber. Nur soviel geht aus einer Aufgabe hervor, dass das einfach geschriebene 𝓇 die Bedeutung Quadratwurzel besitzt. Die Unbekannte soll nämlich daraus gefunden werden, dass $\frac{2}{3}$ derselben mal $\frac{3}{4}$ derselben oder $\frac{1}{2}$ ihres Quadrates 20 betrage. Das Quadrat ist demnach 40, und „𝓇 von 40" ist die Unbekannte.

Wie wenig Sicherheit übrigens in der Zeit, als die Handschrift entstand, noch in der Benutzung der Zeichen obwaltete, mag daraus entnommen werden, dass der gleiche Sammelband eine andere lateinische Schrift enthält, welche wesentlich andere Zeichen benutzt, während der übrige Inhalt sich nur durch grössere Ausführlichkeit von dem der deutschen Algebra unterscheidet[1]).

ø, 𝓇, ʒ, ¢, ʒʒ

sind in dieser lateinischen Algebra die Vertreter der oben angeführten Zeichen. Das Zeichen der Unbekannten und ihrer 3. Potenz mag sich als d und c deuten lassen, das für die 2. und 4. Potenz der Unbekannten ist unzweifelhaft ein einmaliges und doppeltes z; aber das Zeichen für die Constante macht wieder Schwierigkeit. Sollte die durchstrichene Null andeuten wollen, es sei ein Zeichen keiner Unbekannten? Ausserdem sind in der lateinischen Algebra Zeichen für Wurzelausziehung[2]) hinzugekommen, und zwar Pünktchen, welche dem Radicanden vorgesetzt werden. Ein Pünktchen bedeutet die Quadratwurzel, zwei die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel, drei die Kubikwurzel, vier die Kubikwurzel aus der Kubikwurzel in offenbar ziemlich wenig folgerichtiger Anwendung. Man hat den Versuch gemacht[3]) für diese Wurzelausziehungspünktchen einen arabischen Ursprung wahrscheinlich zu machen. Wir wissen, dass bei Westarabern, insbesondere bei einem annähernden Zeitgenossen der Schriftsteller, die uns hier beschäftigen, bei Alḳalṣâdî (Bd. I, S. 765—766) gleichfalls ein Quadratwurzelzeichen vorkam, nämlich der über dem Radicanden stehende Buchstabe dschim (Anfang von Dschidr = Wurzel). Bei der praktischen Ausziehung der Quadratwurzel benutzte alsdann Alḳalṣâdî Pünktchen, die jeweils über die grade in Betracht kommende Radicandenstelle gesetzt wurden, mithin viele Pünktchen nach einander bei derselben Quadratwurzelausziehung[4]). Es erscheint

[1]) Wappler l. c. S. 11—30. [2]) Ebenda S. 13 Note 1. [3]) Gerhardt in den Berl. Monatsber. Akad. 1870, 150—151. [4]) Woepke, *Traduction du traité d'arithmétique d'Abul Hasan Ali ben Mohammed Alcalsadi* in den *Atti dell' Accademia pontificia de' nuovi Lincei* XII, 400—402.

mindestens sehr gewagt aus diesen Hilfspünktchen über dem Radicanden die als Wurzelzeichen dienenden Pünktchen vor dem Radicanden ableiten zu wollen, deren Anzahl nicht von der Ziffernzahl des Radicanden, sondern von dem Wurzelexponenten abhängt. Eine uns befriedigende Vermuthung an die Stelle der zurückgewiesenen zu setzen, sind wir nicht im Stande, sondern müssen uns begnügen, wie leider nur zu oft, auf die Möglichkeit zu vertrösten, dass neue Entdeckungen diese Lücke einmal ausfüllen können.

Der Verfasser dieser lateinischen Algebra muss eine in mancher Beziehung vorzügliche Vorlage besessen haben. Er behandelt wenigstens Alles von einem viel höheren Standpunkte aus und zeigt gleich zu Anfang, wie und wann Gleichungen höherer Grade sich auf solche niedrigeren Grades zurückführen und auflösen lassen. Die einzelnen Potenzen der Unbekannten nennt er Zeichen, *signa*, jedenfalls im Gedanken an die statt derselben zu schreibenden Zeichen. Diese bekannten signa sollen nun von ø beginnend der Reihe nach hingeschrieben werden. Man könnte fast an die nullte Potenz der Unbekannten bei dieser Vorschrift denken, wenn unsere oben ausgesprochene Vermuthung über die mögliche Entstehung des Zeichens ø richtig sein sollte. Hat man die Zeichenreihe hergestellt, so ordnet man die Glieder einer vorgelegten Gleichung ebenfalls dem Range nach und setzt ihre Zeichen über die erwähnte Zeichenreihe, das niederste über ø, das andere, beziehungsweise die anderen, wenn die Gleichung dreigliedrig ist, über die folgenden in Entfernungen, die mit denen der hingeschriebenen Zeichen übereinstimmen. Benutzen wir zur leichteren Uebersicht die heutigen Zeichen, so verlangt der Verfasser Folgendes. Es soll die Grundreihe

$$x^0,\quad x^1,\quad x^2,\quad x^3\ldots$$

hingeschrieben werden. In der vorgelegten Gleichung kommen $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma$ vor, wo $\alpha<\beta<\gamma$ und $\beta-\alpha=m$, $\gamma-\alpha=n$ ist. Dann ist x^α über x^0, x^β über x^m, x^γ über x^n zu schreiben, beziehungsweise innerhalb der Gleichung durch das „Zeichen“, über welchem es sich befindet, zu ersetzen, so ist die frühere Gleichung vom Grade γ auf eine solche vom Grade n zurückgeführt, indem eine vielleicht nicht ganz vollbewusst vorgenommene Division durch x^α erfolgte. Dass die Gliederzahl dabei auf 2 oder 3, der Grad der höchstvorkommenden Potenz in den Beispielen auf 4 beschränkt ist, müssen wir mit in den Kauf nehmen. Erstere Beschränkung war zuverlässig eine beabsichtigte. Man konnte nur mit 2- und 3-gliedrigen Gleichungen umgehen. Ob die zweite Beschränkung nur in dem Mangel an passenden Zeichen begründet war, oder ob wirklich der Potenzbegriff

der Zeit mit x^4 zu Ende war, lassen wir dahingestellt. Uns persönlich scheint die erstere Annahme die richtigere, und wir finden eine Bestätigung dafür in der nun nachfolgenden Regel[1]) von ganz allgemeiner Fassung: Bei dreigliedrigen Gleichungen muss das mittlere Glied gleich weit von den beiden äussersten entfernt sein, sonst fällt die Aufgabe nicht unter die der Algebra. Das heisst doch nur, es müsse $\gamma-\beta=\beta-\alpha$ sein, oder die Gleichung müsse sich, um der Auflösung fähig zu sein, auf die Glieder x^0, x^n, x^{2n} zurückführen lassen, ohne dass von der Beschränkung auf $n=1$ und $n=2$ die Rede wäre. Das Wort ἀπόρισμα, welches wir mit Aufgabe wiedergegeben haben, heisst genauer Schwierigkeit; bei Aristoteles findet es sich meist in der Form ἀπόρημα.

Hierauf wird noch in 7 Regeln genauer ausgesprochen, was erst allgemein vorausgeschickt war. Sind, sagt die erste Regel[2]), nächstbenachbarte Zeichen einander gleich, so theile das niedrigere durch das höhere, und die Sache ist gefunden. Das bedeutet: aus $ax^\alpha=bx^{\alpha+1}$ finde man $\frac{a}{b}=x$. Wir erwähnen weiter, dass in der fünften Regel von einem Sprunge, *saltus*, der Zeichen die Rede ist, wo die Glieder von der Form x^α, $x^{\alpha+\beta}$, $x^{\alpha+2\beta}$ sind. In Formelgestalt heissen sämmtliche 7 Regeln folgendermassen:

I. $ax^\alpha=bx^{\alpha+1}$	giebt	$x=\frac{a}{b}$
II. $ax^\alpha=bx^{\alpha+2}$	-	$x=\sqrt{\frac{a}{b}}$
III. $ax^\alpha=bx^{\alpha+3}$	-	$x=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$
IV. $ax^\alpha=bx^{\alpha+4}$	-	$x=\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$
V. $ax^\alpha=bx^{\alpha+\beta}+cx^{\alpha+2\beta}$	-	$x^\beta=\sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2+\frac{a}{c}}-\frac{b}{2c}$
VI. $bx^{\alpha+\beta}=ax^\alpha+cx^{\alpha+2\beta}$	-	$x^\beta=\sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2-\frac{a}{c}}+\frac{b}{2c}$
VII. $cx^{\alpha+2\beta}=ax^\alpha+bx^{\alpha+\beta}$	-	$x^\beta=\sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2+\frac{a}{c}}+\frac{b}{2c}$.

Allerdings haben wir dabei die Regeln V., VI., VII. so gefasst, wie sie lauten müssten, nicht wie sie in der Handschrift lauten, wo zwar der mit einem Wurzelzeichen versehene Theil der Auflösung sinnentsprechend beschrieben ist, das Glied ohne Wurzelzeichen da-

[1]) *Notandum eciam, quod in equacione trium signorum semper medium debet elongari equaliter ab extremis; quod si sic non fuerit, non intrat apporismata algobre.* [2]) *Quando signa sibi invicem proxima adequantur sibi invicem tunc dividatur signum minus per signum maius et patebit valor rei.*

gegen in keinem der drei Fälle irgend erwähnt ist. Sämmtliche Zahlenbeispiele lassen einigermassen Zweifel zu, ob der Verfasser sich nur undeutlich, ob er sich irrig ausgedrückt hat. Auch letzteres dürfen wir einem Manne zutrauen, der später, wo er die 24 Gleichungsformen mittheilt[1]), bei der 5. Form (welche der VI. Regel entspricht) die Möglichkeit die Wurzelgrösse additiv oder subtractiv zu nehmen dahin missversteht, dass unter dem Wurzelzeichen $\frac{a}{c}$ zugezählt werden müsse, wenn es nicht abgezogen werden könne, und überdies die Wurzelgrösse selbst nur subtractiv benutzt, also von zwei möglichen Lösungen überhaupt nichts zu wissen scheint. Oder sollte in diesem Unsinne selbst wieder eine Abhängigkeit von einem Vorgänger zu erkennen sein? Der Herausgeber des Abdruckes, der unserer Darstellung zu Grunde liegt, hat in der Dresdner Bibliothek eine andere Handschrift aus dem XV. Jahrhunderte entdeckt, welche sich selbst als Uebersetzung der Algebra des Alchwarizmî bezeichnet, und welche in buchstäblicher Uebereinstimmung die gleichen Verkehrtheiten enthält. Wir kehren zu dem Handschriftenbande, der einst Johannes Widmann angehörte, zurück. Wir sagten, die lateinische Algebra, von der zuletzt die Rede war, enthalte die 24 Gleichungsformen. Sie stimmen mit denjenigen der deutsch geschriebenen Algebra dem Inhalte nach und in der ersten Gruppe auch der Reihenfolge nach überein. Die Formen der zweiten Gruppe dagegen erscheinen in der eigentlich weit folgerichtigeren Anordnung 5. 6. 7. 8. 10. 9. 1. 2. 3. 12. 13. 11. 15. 14. 4. 16. 17. 18. Der Angabe der sämmtlichen 24 Gleichungsformen folgen unter der Ueberschrift *Compendium de ʒ et re*, welche den Ausdruck res als Name der Unbekannten sichert, Zahlenbeispiele zu 16 von den Gleichungsformen, in welchen es an Rechenfehlern nicht mangelt. Aber auch damit ist das Werk noch nicht zu Ende, es kommt vielmehr noch die Hauptsache, wenigstens das was den meisten Raum einnimmt[2]), die in 24 Kapitel eingetheilten Textaufgaben zu den 24 Gleichungsformen, die sogenannten *Aporismata*, wie sie mit einem uns schon bekannt gewordenen Kunstausdrucke heissen. Wir entnehmen ihnen drei geschichtlich bemerkenswerthe Dinge.

Erstens wird von dem 1. Beispiele des 5. Kapitels gesagt, es sei gebildet *iuxta 29 proposicionem dati*[3]). Das ist aber nichts anderes als die 29. Aufgabe von der Schrift De numeris datis des Jordanus, welche, was wir bisher noch zu sagen vermieden haben,

---

[1]) Wappler l. c. S. 13—15. [2]) Ebenda S. 16—30. [3]) Ebenda S. 23 und in Note 2 der gleichen Seite die Beziehung zu Jordanus.

gleichfalls in dem betreffenden Sammelbande und zwar vor der lateinischen Algebra enthalten ist. Von unserem unbekannten Algebraiker können wir mit Bezug hierauf das Gleiche aussprechen, was in noch verstärktem Maasse von Widmann gilt. Er gehörte zu den gelehrten Kreisen, er hat Jordanus studirt, wenn auch zuverlässig nicht diesen Schriftsteller allein, da aus ihm nicht der ganze Inhalt des Werkes zu rechtfertigen, beziehungsweise bis zur Quelle zurückzuverfolgen ist.

Zweitens ist am Schlusse desselben 5. Kapitels ein Zusatz[1]) beigefügt, in den Beispielen dieser Form sei die Wurzelgrösse zu addiren, wenn man sie nicht abziehen könne. Was also in der Darstellung der Regel für die 5. Gleichungsform dem Verfasser, wie wir oben sahen, noch nicht bekannt schien, das ist ihm jetzt in der Aufgabensammlung klar geworden.

Drittens ist am Schlusse des 6. Kapitels, also da, wo die erste Gruppe der Gleichungsformen abschliesst (die ursprünglichen Formen könnte man sie im Gegensatze zu den 18 abgeleiteten Formen der zweiten Gruppe nennen) bemerkt[2]), man könne Alles, was mit ꝟ ausgeführt werde, auch ohne dasselbe machen und habe es, allerdings mit Hilfe von vielerlei Mitteln und Schlussfolgerungen, multis mediis et conclusionibus, ohne diese Gleichungsformen gemacht, bevor die Algebra erfunden war. Eine dieser früheren Methoden wird sodann besonders hervorgehoben als *Aporisma conversum*. Sie sei, wie in der Geometrie ausgesprochen sei, die Erfindung des Ysac Sohn Salomonis. Die Beschreibung der Methode stimmt genau zu dem Umkehrungsverfahren (Bd. I, S. 689), welches ein Abraham, in welchem Abraham ibn Esra vermuthet wird, unter dem Namen *regula sermonis* gelehrt hat. Wer dieser Isaak Sohn Salomo's sei, wird sich schwerlich ermitteln lassen, da die Bezeichnung auf allzuviele Persönlichkeiten passen kann. Schon so weit unsere Hilfsmittel reichen, sind wir auf zwei Persönlichkeiten gestossen, welche beide berechtigt waren, sich so zu nennen, beide Juden, beide Gelehrte, welche auch mit Mathematik sich beschäftigten: Isaak ben Salomo Israeli[3]) aus Kairwan, einem im Mittelalter berühmten Handelsplatze, heute dem ärmlichen Städtchen Kairavan in Tunis[4]), von der Mitte des X. bis zur Mitte des XI. Jahrhunderts, und ein Castilianer Isaak ben Salomo ben Zadik Ibn Alchadib[5]), als dessen Blüthezeit 1370 bis 1380 angegeben ist.

---

[1]) Wappler l. c. S. 26: *Nota quinta regula habet pro ceteris hoc privilegium, quando radix subtrahi non potest, debet ipsa addi.* [2]) Ebenda S. 27. [3]) Jost, Geschichte des Judenthums II, 397. [4]) S. Günther in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung vom 25. Januar 1892. [5]) Steinschneider in seinem Artikel „Jüdische

Ausser diesen Bemerkungen, zu welchen einzelne bestimmte Stellen uns Veranlassung geben, muss noch eine etwas allgemeinere beigefügt werden. Am Rande der lateinischen Algebra sind von einer anderen Hand als der des Schreibers des Textes weitere Aufgaben in lateinischer Sprache in nicht unbeträchtlicher Zahl hingeschrieben. Wir werden später an diese Aufgaben zu erinnern haben und wollen sie dann kurzweg die Randaufgaben der Dresdner Algebra nennen.

Wir haben (S. 234) die Thatsache erwähnt, dass Johannes Widmann in Leipzig Vorlesungen über Algebra hielt [1]). Gleich auf dem ersten Vorsetzblatte des Dresdner Handschriftenbandes, der in Widmann's Besitz war, sind zwei Vorlesungsanzeigen desselben niedergeschrieben. Die erste bezieht sich auf das Linienrechnen. Diese Kunst sei durch Appuleius, den in jeder Lehre hocherfahrenen Mann überliefert. Zuerst habe man auf den Sand zwischen die Linien Pünktchen gemacht, dann habe man sich kleiner Steine (calculi) bedient, woraus der Name des Calcüls entstanden sei, später sei man zu Rechenpfennigen von Metall (proiectilia erea) übergegangen. Dieser Theil der Wissenschaft sei um so höher gehalten worden, weil er leichter sei und jedem Geiste angemessen, so dass auch die, welche keine Gelehrsamkeit (litteratura) besitzen, nicht wenig tüchtig darin werden können, dann auch weil er deutlicher ist und mehr zu den Sinnen spricht. Magister Jo. W. de Eg. wird heute um 4 Uhr einige sogen. Kaufmannsregeln angewandt auf die Linien mit Rechenpfennigen einzuüben beginnen (regulas quasdam Mercatorum dictas ad lineas cum proiectilibus applicatis resumere incipiet). Das Wort resumere in dieser Anzeige, welches wir mit „einüben“ verdeutscht haben, gehört dem Sprachgebrauche der deutschen Universitäten des XV. Jahrhunderts an. Eigentlich ist es ein rhetorischer Kunstausdruck ebenso wie resumptio, und die entsprechenden griechischen Kunstausdrücke sind *ἐπαναλαμβάνειν*, *ἐπανάληψις*, italienisch riassumere. Die Meinung ist die, dass ein und dasselbe Wort zur Verstärkung des Sinnes wiederholt werde. Später hat man die Wiederholung im Allgemeinen und damit die Einübung durch resumere bezeichnet [2]). Die zweite Anzeige beginnt mit einem Lobe der Arithmetik, in welches die Namen des Pythagoras und des Boethius eingeflochten sind. M. J. W. de eg.

Literatur in Ersch und Gruber's Allg. Encyklopädie der Wissenschaften und Künste, Section 2, Bd. 27, S. 439, Spalte 1, Z. 5.

[1]) Wappler l. c. S. 9—10 hat diese Thatsache mit ihren Belegstücken zuerst mitgetheilt. [2]) Diese Auseinandersetzung verdanken wir H. Zangemeister, welcher sich dafür auf J. Ch. Th. Ernesti, *Lexicon rhetoricum* pag. 321 und H. Sauppe, *Opuscula critica* pag. 163 stützt.

wird heute um 2 Uhr nach der Disputation der Baccalaureen anfangen, ein kleines kurzgefasstes und sehr nützliches Buch, welches wohl die Grundlagen dieser ganzen Kunst umfasst, einzuüben.

Es liegt auf der Hand, dass diese beiden Vorlesungen den beiden Rechnungsweisen der Zeit gewidmet waren, die erste dem Rechnen auf den Linien, die zweite dem Ziffernrechnen, für welches ein bestimmter Name, der es von jenem anderen unterscheide, noch nicht vorkommt, aber bald entstehen wird. Das Büchelchen, welches der zweiten Vorlesung zu Grunde lag, kann kaum ein anderes gewesen sein, als Widmann's „Behende und hubsche Rechnung auff allen kauffmannschafft“, denn darüber, wer Magister Jo. W. de Eg. gewesen sein muss, ist doch ein Zweifel nicht möglich. Beschäftigung mit einem bestimmten Fache, gelehrter Titel, Vorname, Anfangsbuchstaben des Familiennamens und des Heimathsortes in tadelloser Uebereinstimmung müssen als unwiderlegliche Beweise der Uebereinstimmung der Persönlichkeiten gelten. Wer aber sollte das Vorsetzblatt eines Handschriftenbandes benutzt haben, um die Anzeige zweier Vorlesungen darauf niederzuschreiben als der Ankündiger selbst, der vielleicht wiederholt in aufeinander folgenden Jahren von jenen Ankündigungen öffentlichen Gebrauch zu machen wünschte? So dienen die Anzeigen selbst als Beleg dafür, dass jener Handschriftenband sich im Besitze Widmann's befand.

Und nun findet sich eine dritte Vorlesungsanzeige von derselben Hand geschrieben auf der Rückseite des 349. Blattes des Bandes unmittelbar vor der lateinischen Algebra. Mit Arithmetik allein sei es nicht gethan. Schwierigeren Aufgaben komme man nur mit jenen Methoden bei, welche ein Algobre von hellstem und nahezu göttlichem Geiste uns in wenigen Aporismen, um seines Wortes mich zu bedienen, überliefert hat [1]). Heute um 2 Uhr wird Magister Jo. W. de Eg. nach der Predigt und nach der Disputation der Baccalaureen mit den Zuhörern Vereinbarungen über Stunde und Ort treffen, um die Aporismata et Regulas Algobre einzuüben. Dieser dritten Anzeige dürfen wir die Bestätigung dessen entnehmen, was wir aus den beiden früheren folgerten, und wofür wir uns auch darauf berufen könnten [2]), dass zwei Aufgaben der lateinischen Algebra in Widmann's Rechenbuch Aufnahme gefunden haben. Aber wir entnehmen ihr noch weitere Dinge, welche hervorzuheben sind.

Wir sehen hier einmal die erste nachgewiesene Anzeige einer

[1]) *quas praeclarissimi quondam ac prope divini ingenij Algobre paucis admodum Aporismatibus, ut suo vocabulo utar, nobis tradidit.* [2]) Wappler l. c. S. 22, Note 1.

algebraischen Vorlesung an einer Universität. Wir sehen eine andere Fassung als bei den offenbar eingebürgerten Vorlesungen über das Rechnen. Ort und Stunde sollen erst vereinbart werden! Auch heute noch kann man ähnlichen Wortlaut mitunter auf Ankündigungen an den schwarzen Brettern unserer deutschen Hochschulen finden. Sie bedeuten etwa so viel als: der Unterzeichnete möchte über den betreffenden Gegenstand lesen, vorausgesetzt, dass sich Zuhörer dazu melden. Wir werden nicht irre gehen, wenn wir im XV. Jahrhunderte der Klausel denselben Sinn beilegen. Es war eine ungewohnte, eine neue Vorlesung. Sie kam zu Stande. In dem Codex 1470 der Leipziger Universitätsbibliothek wird berichtet, im Sommer 1486 habe Johann von Eger (und das kann doch nur Widmann sein) in seiner Behausung Algebra vorgetragen[1]). Als weitere Bestätigung dürfen wir es ansehen, dass Widmann der lateinischen Algebra, die er augenscheinlich der Vorlesung zu Grunde legte, an einer Stelle einige Aufgaben zufügte[2]).

Und das Andere, was wir hervorzuheben haben, besteht darin, dass für Widmann Algobre ein Mann, der Erfinder der Kunst war. Ob er ihn auch Geber nennen zu dürfen glaubte, wie jener Canacci im XV. Jahrhunderte (S. 165), ob damit wieder der Name Czebreyn der deutschen Algebra des Dresdner Bandes (S. 241) sich deckt? Möglich ist so ziemlich Alles, was au Namensverketzerungen nur erdacht werden kann.

Wir müssen aus dem weitläufiger Auseinandergesetzten die Ergebnisse kurz zusammenstellen. Sie gehen dahin, dass Widmann algebraischer Schriften sich bediente, welche nach wesentlichen Merkmalen in gelehrten Kreisen entstanden sein müssen, und welche mittelbar, stellenweise unmittelbar auf Jordanus zurückweisen. Andrerseits war es Widmann auch bekannt, dass die algebraische Kunst Regula cosse (S. 234) hiess. Er hat überdies, wovon wir bisher geschwiegen haben, in seinem Rechenbuche ziemlich viele Aufgaben, welche auch in Leonardo's Abacus vorkommen[3]), sei es, dass die Uebereinstimmung sich auf Text und Zahlen beziehe, sei es, dass bei gleichem Texte andere Zahlen gewählt sind. Wir können daraus keine anderen Folgerungen ziehen, als die, dass Algebra gelehrten Ursprunges in der Mitte des XV. Jahrhunderts in Deutschland bekannt war, dass mit ihr Algebra italienisch-kaufmännischen Ursprunges gegen Ende des Jahrhunderts sich vereinigt hatte, dass von Schrift-

[1]) Curtze brieflich. [2]) Wappler l. c. S. 21, Note 1. [3]) Treutlein, Die deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft, S. 119, Anmerkung.

stellern, deren Namen wir kennen, Johannes Widmann der erste war, bei welchem jene Vereinigung sich nachweisen lässt, wie er auch der erste war, der algebraische Vorlesungen an einer Universität, und zwar in Leipzig, anzukündigen wagte.

55. Kapitel.

Deutsche Universitäten. Regiomontanus.

Wie stand es, können wir, anknüpfend an die letzten Worte des soeben beendigten Kapitels, hier gelegentlich fragen, um die Mathematik der deutschen Universitäten in der Zeit, welche uns gegenwärtig beschäftigt?

Leipzig[1]) haben wir bereits wegen der dort stattgefundenen Ankündigung einer Vorlesung über Algebra genannt. Im Uebrigen beschränkte sich die Auswahl der Vorlesungen, die gehalten werden mussten, auf Euklid, Arithmetik, Musik nach De Muris, Perspective d. h. Optik und zwei astronomische Fächer. Dem Euklid waren allerdings 20 bis 30 Wochen, der Perspective 12 bis 14 Wochen gewidmet, während die Vorlesung über Arithmetik in 4 bis 7 Wochen vollendet sein musste.

Aus Erfurt ist uns bekannt, dass dort der Kreis der Vorlesungen, welche den Artisten geboten wurden, ein umfassender war. Volle 38 verschiedene Gegenstände wurden vorgetragen[2]), also fast doppelt so viele als in Wien, wo es nur 21 solcher Vorlesungen gab; aber wie viel Mathematisches sich darunter befand, wissen wir nicht. Es könnte recht viel gewesen sein, wenn es gestattet ist, aus der Persönlichkeit eines Lehrers einen Schluss zu ziehen, des Magisters Christian Roder[3]) aus Hamburg, der 1463 Decan der Erfurter Artistenfacultät war, und unter welchem 80 Magister ihre Prüfung bestanden, denn dieser Gelehrte erfreute sich unter den ersten Fachmännern des glänzendsten Rufes. Christianus Rueder de Hamborch, der im Wintersemester 1471 auf 1472 Rector in Erfurt war[4]), dürfte die gleiche Persönlichkeit bezeichnen.

Basel[5]), Universität seit 1459, erkannte im Jahre 1465 nur

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 215. [2]) Ebenda S. 213. [3]) Doppelmayr, Historische Nachrichten von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern (1730), S. 6, Note hh. Dieses Werk citiren wir künftig schlechtweg als Doppelmayr. [4]) Weissenborn, Acten der Erfurter Universität I, 345 (Geschichtsquellen der Provinz Sachsen und der angrenzenden Gebiete Bd. VIII). [5]) Günther, Unterricht Mittela. S. 216.

Euklid und Sacrobosco als die Schriftsteller an, welche erklärt werden müssen; 1492 ist die Sache wenigstens insofern besser geworden, als die Vorlesungszeit über Sacrobosco von 6 Wochen auf 12 Wochen sich erhöht hat.

Ingolstadt[1]) war 1472 nach dem Wiener Vorbilde eingerichtet worden, aber ihm keineswegs ähnlich geblieben. Während zu Anfang die Baccalaureatsprüfung die sechs ersten Bücher des Euklid, den Algorismus, die Sphaera voraussetzte, während die Magisterprüfung auch noch Planetentheorie erforderte, während Latitudines, Perspective, Optik doch noch in den Satzungen vorkommen, wenn auch nur um sie als nicht verbindliche Lehrgegenstände zu erklären, gehen die Forderungen bald so weit zurück, dass nur 2 Wochen dem Algorismus, 2 Wochen dem ersten Buche Euklids, 6 Wochen der Sphaera gewidmet werden müssen.

In dem 1477 gegründeten Tübingen[2]) lag die Sache durch die Persönlichkeit eines Lehrers etwas besser. Dort wirkte Paul Scriptoris, der als Erklärer des Duns Scotus seine akademische Thätigkeit begann, aber um 1494 auch über zwei mathematische Schriftsteller las, über Euklid und über Ptolemäus; der letzteren Vorlesung, einer Neuheit in Tübingen und auch einer Neuheit für Leute, die von vielen anderen Universitäten nach Tübingen kamen, sollen deshalb auch fast sämmtliche übrige Professoren beigewohnt haben.

Krakau[3]) muss in dieser Aufzählung deutscher Universitäten auch genannt werden. Das „Krokaw" des XV. Jahrhunderts ist wenig mit dem heutigen Krakau zu vergleichen. Hatten auch ursprünglich Polen die Stadt gegründet, so waren doch seit dem XII. und XIII. Jahrhunderte deutsche Ansiedler hingezogen worden, welche mit deutscher Sprache, mit deutschem d. h. in diesem Falle mit Breslau-Magdeburgischem Rechte eine eigene Gemeinschaft bildeten. In deutschen Händen befand sich der ganze Grosshandel, und nur so ist eine Zugehörigkeit Krakaus zum Hansabunde zu verstehen. Ein Sprosse einer in Krakau angesiedelten deutschen Grosshandelsfamilie hat in der Geschichte der Astronomie eine umwälzende Rolle gespielt. Die städtischen Urkunden, soweit sie nicht in lateinischer Sprache abgefasst sind, sind bis in's XVI. Jahrhundert hinein ausschliesslich deutsch, obwohl die polnische Sprache als Schriftsprache vorhanden war und polnische Gerichtsacten insbesondere aus dem Jahre 1400 nachzuweisen sind. In dieser Stadt Krakau hatte 1364 König Kasimir der Grosse von Polen so ziemlich nach dem Vorbilde von Prag eine

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 216—217. [2]) Ebenda S. 218. [3]) Prowe, Nicolaus Coppernicus (1883) *passim*. — Günther, Unterricht Mittela. S. 229—230.

Universität gegründet, welche bald in Flor kam und insbesondere, ebenso wie Leipzig, einen grossen Nutzen daraus zog, dass Prag in Folge kleinlicher Nörgeleien gegen Fremde wie auch durch die Hussitenstreitigkeiten mehr und mehr auf den Rang einer Landesschule herabsank. Auch in Krakau galt ähnlich wie einst in Wien die Verlosung der Vorlesungen unter den Lehrern der Universität, aber daneben waren frühzeitig einzelne bestimmte Lehrstühle gegründet, so ein Lehrstuhl der Astronomie, welchen zuerst Johannes Stobner aus Krakau innehatte, der 1379 in Prag das Baccalaureat erworben hatte. Satzungen von 1449 geben Auskunft darüber, welcherlei Vorlesungen der Professor der Astronomie zu Krakau zu halten verpflichtet war: Euklid, Perspective, Arithmetik, Algorismus minutiarum, Musik und astronomische Gegenstände werden genannt, unter letzteren seit 1475 auch eine Vorlesung über Schriften eines Gelehrten, mit welchem wir uns im Verlaufe dieses Kapitels sehr eingehend zu beschäftigen haben werden, des Regiomontanus. Ein weiterer Lehrstuhl wurde 1450 gegründet für Astrologie. Sein erster Inhaber war Martin Król de Premislia. Der weitesten Berühmtheit erfreute sich am Ende des XV. Jahrhunderts Albert Blar von Brudzewo, gewöhnlich Brudzewski genannt. Im Jahre 1445 geboren, gehört er mit seiner ganzen gelehrten Laufbahn der Universität Krakau an. An ihr wurde er 1470 Baccalaureus, 1474 Magister. An ihr stieg er in der Artistenfacultät zu immer höherem Range, bis er 1485 Decan dieser Facultät wurde. Gleich vielen anderen Gelehrten hat Brudzewski die Zeit, während welcher er der niedersten Facultät bereits als geachteter, von nah und fern gesuchter Lehrer angehörte, dazu benutzt, sich einer höheren Facultät noch als Schüler anzuschliessen. So wurde er 1490 Baccalaureus der Theologie, eine Würde, welche ihm das Recht verlieh, auch theologische Vorlesungen zu halten, von welchem er aber nicht Gebrauch gemacht zu haben scheint. Er wurde der Universität untreu und trat 1494 als Secretär in die Dienste des Fürsten Alexander von Littauen. Als solcher starb er 1497 in Wilna. Von 1484 bis 1489 sind aus den erhaltenen Vorlesungsverzeichnissen der Universität Krakau die mathematischen Lehrgegenstände bekannt, welche Brudzewski vortrug. Arithmetik ist die erste, Perspective die letzte dieser Vorlesungen, die übrigen gehören der Astronomie, nicht der reinen Mathematik an. Als Brudzewski die Mathematik als öffentlichen Lehrgegenstand aufgab und sich nach übereinstimmenden Ueberlieferungen damit begnügte, befähigten Schülern besondere Vorlesungen zu halten, von denen die Verzeichnisse nichts wissen, da war unsere Wissenschaft durch nicht weniger als 16 Lehrer vertreten, die allein in den Jahren 1491 bis 1495 mathematische und astronomische Gegenstände vortrugen. Allerdings waren es ausnahmslos die uns mehr als zur Genüge bekannten elementaren Dinge: Euklid, Arithmetik, Musik, Optik u. s. w. Von Latitudines z. B. ist keine Rede, von Algebra ebensowenig. Wir möchten aber aus diesem Schweigen der Vorlesungsverzeichnisse keinen allzu zuversichtlichen Schluss dahin ziehen, solche höhere Gegenstände seien nie gelehrt worden. Grade was ein glücklicher Zufall uns über die Lehrthätigkeit Widmann's in Leipzig aufbewahrt hat, könnte der Vermuthung Bahn brechen, auch anderwärts sei die Lehrthätigkeit mitunter über die breitgetretenen Wege des Alltäglichen hinausgegangen, freilich ohne dass die Vorlesungsverzeichnisse von solchen Ausnahmen berichten könnten.

Wien hatte uns als mathematische Musteruniversität gegolten. Was war aus ihr geworden? Wir haben (S. 176) in Johann von Gemunden einen Lehrer dort auftreten sehen, der als Professor der Mathematik gelten durfte, ohne dass es einen solchen gab. Mit seinem Tode hörte dieses Verhältniss — man wäre versucht, es das naturgemässe Herausbilden eines Fachlehrerthums durch Zuchtwahl zu nennen — wieder auf. Vielleicht 50 Lehrer[1]) von mathematischen Dingen sind in der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts in Wien aufgetreten, deren Namen vergessen sind. Georg von Peurbach (S. 180) widmete seine Lehrthätigkeit vorzugsweise humanistischen Gegenständen, und der Mann, welchem wir uns jetzt zuzuwenden haben, der ganz dazu angethan war, ein neues Zeitalter der Mathematik in Wien zu eröffnen, gehörte der Universität nur ganz kurze Zeit an. Es war Regiomontanus.

Johannes Müller[2]) ist als Sohn eines Müllers am 6. Juni 1436 in dem Städtchen Königsberg bei Hassfurt (Herzogthum Coburg) oder in dem unweit davon gelegenen Dörfchen Unfind geboren. Den Namen Regiomontanus gab man ihm von dieser Heimath. Er selbst nannte sich Joannes de Monte Regio, Johannes Germanus, Johannes Francus, Kunisperger u. s. w. Schon im Alter von 12 Jahren bezog er die Universität Leipzig, und zwei oder drei Jahre später erschien er in Wien bei Georg von Peurbach mit der auf keinerlei

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 249. [2]) Ueber das Leben Regiomontanus ist eine grosse Zahl von längeren und kürzeren guten Schriften vorhanden. Gassendi, *Tychonis Brahei vita, accessit Nicolai Copernici, Georgii Purbachii et Ioannis Regiomontani astronomorum celebrium vita* (1555). — Doppelmayr, S. 1—23. — M. A. Stern, *Ioannes de Monteregio* in Ersch und Gruber's Encyklopädie, II. Section, 22. Theil, S. 205—213. — Die letzte Zusammenstellung von S. Günther in der Allgem. deutschen Biographie XXII, 564—581 unter Müller, Johannes.

Empfehlung sich stützenden Bitte, ihn als Schüler annehmen zu wollen. Mag das den Männern, die damals in Leipzig Mathematik lehrten, kein so glänzendes Zeugniss ausstellen, als unsere Leser es etwa erwarten zu dürfen glauben, so ist nicht zu vergessen, dass wir durch den Gang unserer Berichterstattung innerhalb dieses unseres XII. Abschnittes gegen die genaue Zeitfolge uns verstiessen. Die verschiedenen Druckschriften und auch Handschriften aus der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts, von denen im 54. Kapitel die Rede war, sind sämmtlich nach, zum Theil recht lange nach der Abreise Regiomontans von Leipzig entstanden, und wenn wir sie vorwegnahmen, so war der Grund, wie wir jetzt sagen wollen, ein doppelter. Der eine Grund liegt in dem durchaus elementaren Standpunkte, welchen jene Schriften festhalten, die überdies herzlich wenig enthalten, was nicht nachweislich von Anderen anderwärts längst gelehrt worden war. Der andere Grund aber ist, dass bei dieser unserer Anordnung deutlicher hervortritt, in wie gewaltiger Riesengrösse Regiomontanus aus seiner Zeit hervorragt, mag man ihn mit denen vergleichen, die unmittelbar vor ihm, oder mit denen, die unmittelbar nach ihm wirkten.

Genug, Peurbach nahm den kaum dem Kindesalter entwachsenen Schüler an und behielt ihn in seiner nächsten Umgebung so lange er lebte. Wegen zu grosser Jugend soll Regiomontanus nicht vor 1457 zum Magister ernannt worden sein, während er früher schon mit Vorlesungen betraut war, und darin liegt wohl die Veranlassung dafür, dass ein naher Freund seines Lehrers schon 1452 von ihm als Magister Johannes schrieb, noch bevor er diesen Titel führen durfte[1]). So hatte ihn Peurbach sich frühzeitig in jeder Beziehung zum Gehilfen herangebildet, und so setzte er ihn später zum Erben seiner Arbeiten ein. Schon zweimal (S. 185 und 210) hatten wir Gelegenheit von der Almagest-Uebersetzung zu reden, welche Peurbach, vom Cardinal Bessarion angeeifert, sich als wichtige Aufgabe gesetzt hatte. Die letzten Worte des sterbenden Peurbach an Regiomontanus sind von diesem der Nachwelt überliefert worden[2]). In rührend schöner Weise mahnt er ihn an jene Uebersetzung. Er hinterlasse ihm als heiliges Vermächtniss das Werk zu vollenden, und so Bessarion's Wünschen Genüge zu leisten.

Regiomontan trat die Erbschaft an. Das erste Ziel, welches er anstreben musste, war, sich die griechische Sprache vollständig zu eigen zu machen, und zu diesem Zwecke begab er sich wahrscheinlich noch 1461 nach Rom, wohin Bessarion ihn schon früher, aller-

[1]) Czerny im Archiv für österreichische Geschichte LXXII, 288, Note 3.
[2]) Doppelmayr, S. 2 Note h.

dings als vermuthlichen Begleiter Peurbach's eingeladen hatte. Dem Studium der griechischen Sprache widmete sich der junge Deutsche anfangs unter Leitung von Georg von Trapezunt, später selbständig, indem er theils als Mittel zur Aneignung der Sprache, theils als Selbstzweck eine grosse Menge älterer griechischer Handschriften, die in Rom vorhanden waren, abschrieb. Es waren meistens Mathematiker, welche abgeschrieben wurden, aber auch Bücher anderen Inhaltes, z. B. ein griechisches neues Testament. Eine Abschrift des Almagestes zu machen war unnöthig, da eine von Bessarion selbst angefertigte zu Uebersetzungszwecken zur Verfügung stand. Bessarion, der fortwährend vom Papste zu wichtigen kirchlich-diplomatischen Geschäften in Anspruch genommen wurde, musste etwa im Mai 1463 Rom verlassen, um nach Griechenland zu reisen. Regiomontan begleitete ihn bis Venedig. Dann wechselte sein Aufenthalt, wie er vorher gewechselt hatte. Wir kennen eine ganze Reihe von Städten, in welchen Regiomontanus sich aufgehalten hat: Rom zu wiederholten Malen, Viterbo, Ferrara, Padua, Venedig, aber die Reihenfolge, in welcher der Wohnungswechsel stattfand, ist nicht vollständig gesichert. Von Regiomontanus Aufenthalt in Viterbo kennen wir einige astronomische Beobachtungen vom Sommer und Herbst 1462. In Ferrara verkehrte er mit dem Astronomen Bianchini, aber auch mit den der dortigen Universität zur Zierde gereichenden Humanisten Theodor von Gaza und Guarini. Unter Theodor von Gaza's Anleitung brachte er es dahin, griechische Verse machen zu können, und in Ferrara war es auch, dass er die Textreinigung des Almagestes vollzog, ohne welche an eine richtige Uebersetzung nicht zu denken war. Ob er in Ferrara auch mathematische Vorträge in griechischer Sprache gehalten hat, wie ein Bericht meldet[1]), sei dahingestellt. Das Auffallendste daran wäre, dass für eine solche Vorlesung sich Zuhörer gefunden hätten. Von Ferrara scheint Regiomontan sich nach Venedig begeben zu haben, von wo er vielleicht im März und April 1464 einen Abstecher nach Padua machte. Jedenfalls sind Briefe aus Venedig vom 27. Juli 1463, Februar, 27. Juni und 6. Juli 1464 vorhanden, sowie eine Mondfinsternissbeobachtung in Padua vom 2. April 1464. In Padua hielt Regiomontan lateinische Vorträge über den arabischen Astronomen Alfraganus und begann dieselbe mit einer Einleitung, welche als erste abendländische Leistung auf dem Gebiete der Geschichte der Mathematik unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen wird. Eine noch weit umfassendere Thätigkeit übte Regiomontanus in Venedig aus. Dort

[1]) Doppelmayr S. 4.

wurde das in Rom begonnene Werk De triangulis omnimodis vollendet, dort entstand eine Streitschrift gegen Cusanus. In Venedig beabsichtigte Regiomontan die Rückkehr seines Gönners Bessarion aus Griechenland abzuwarten, aber sie verzögerte sich weit über alles Erwarten, und so kehrte Regiomontan nach Rom zurück, wo er jedenfalls am 6. October 1464 wieder beobachtet hat. In die Zeit dieses zweiten römischen Aufenthaltes fällt eine Niederschrift einer Kritik der Arbeiten Georgs von Trapezunt über Ptolemäus und Theon. *Impudentissime atque perversissime blatorator* — unverschämtestes und verkehrtestes Plappermaul — ist die Anrede, mit welcher jene Kritik schliesst, indem Regiomontan sich persönlich an seinen Gegner wendet. Solche Ausdrücke liefen zwar der an Höflichkeit zwischen wissenschaftlichen Gegnern nicht gewöhnten Sitte der Zeit keineswegs zuwider, bargen aber bei der anderweitigen Sitte, es bei Worten nicht bewenden zu lassen, sondern Dolch oder Gift entscheiden zu lassen, wer der Unterliegende sei, manche Gefahr in sich. Regiomontan mag sich dem nicht verschlossen haben, was ihm bei längerem Aufenthalte in Rom bei überdies fortdauernder Abwesenheit seines Beschützers Bessarion drohte, und so verliess er 1468 den gefährlichen Boden. Er kehrte nach Wien zurück, und wie er schon als Baccalaureus, in Vertretung Peurbach's als junger Magister ebendort 1458 über Perspective, 1460 über Euklid gelesen hatte, begann er neuerdings eine Lehrthätigkeit auszuüben, wenn auch nicht als Inhaber einer mathematischen Professur, die es auch jetzt in Wien noch nicht gab[1]). Vor Jahresfrist erfolgte ein neuer Wohnungswechsel. Der Ungarkönig Mathias Corvinus berief Regiomontan mit dem sehr stattlichen Jahresgehalte von 200 Goldgulden nach Ofen zur Ordnung und Beaufsichtigung einer unter Aufwendung reicher Mittel angelegten Büchersammlung. Ofen wurde der Entstehungsort eines abermaligen neuen Werkes von Regiomontanus, der *Tabulae Directionum*. Sei es dass Regiomontanus jetzt mehr und mehr das Bedürfniss empfand, einmal eine Zeit lang ausschliesslich den eigenen Studien zu leben, sei es dass Kriegshändel des Königs Mathias eine Aenderung des Aufenthaltes wünschenswerth machten, im Sommer 1471 ist Regiomontan weit von Ofen entfernt in der Reichsstadt Nürnberg, deren Rath ihm sodann durch Beschluss vom 29. November jenes Jahres die Erlaubniss zu längerem Verweilen gewährte. Ob mit jener Erlaubniss ein bestimmter Auftrag zu öffentlichen Lehrvorträgen verbunden war, wie es von einer Seite berichtet wird, steht actenmässig noch nicht fest. Regiomontan's Hauptab-

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 242 gegen Doppelmayr S. 5.

sicht war, gute zum Theil neu erfundene oder verbesserte Vorrichtungen zur Durchforschung des Himmels zu beschaffen, sie im Verein mit Gelehrten jeder Herkunft anzuwenden. Beides erhoffte Regiomontan von dem Gewerbfleiss und dem unermesslichen Fremdenverkehr der ersten Handelsstadt in Süddeutschland, und grade darum hatte er sie, gleichsam den Mittelpunkt von Europa, zur ewigen Wohnstätte sich auserlesen[1]). Aber die Ziele steckten sich bald noch weiter. In Nürnberg waren Druckerwerkstätten entstanden. Ihre Thätigkeit sollte in den Dienst der mathematischen und astronomischen Wissenschaft gestellt werden, wie man es auch in Italien soeben zu thun begann. Ein reicher Nürnberger, Bernhard Walther, trat zu Regiomontan in freundschaftlichste Beziehungen und richtete für ihn drei Räumlichkeiten her, eine Sternwarte, eine Werkstätte zur Anfertigung von Beobachtungsvorrichtungen, eine Druckerei. Schon war der Plan entworfen, welche Werke grosser Mathematiker vervielfältigt werden sollten, schon erschienen zwischen 1471 und 1475 unter Regiomontan's Leitung die nachgelassenen Planetentheorieen seines geliebten Lehrers Peurbach[2]), die Astronomica des Manilius, ein Verzeichniss der zum Drucke bestimmten Schriften[3]), ein Tabellenwerk Regiomontan's selbst, da war es mit der auserlesenen ewigen Wohnstätte schon wieder zu Ende. Papst Sixtus IV. stellte die niemals als erledigt erachtete Aufgabe der Kalenderverbesserung auf die Tagesordnung. Regiomontanus sollte die Aufgabe lösen, und ihn um so geneigter zu machen, den päpstlichen Wunsch zu erfüllen, verband Sixtus IV. mit der Berufung nach Rom die Ernennung zum Bischof von Regensburg. Einer in solche Form sich kleidenden Aufforderung war nicht zu widerstehen. Im Herbste 1475 reiste Regiomontan nach Italien, um nicht wiederzukehren. Der 6. Juni 1476 war sein Todestag. Er starb in Rom und wurde im Pantheon bestattet. Als Todesursache wird die Pest angegeben, eine dunkle Sage spricht von Gift und nennt die Söhne Georgs von Trapezunt als die Schuldigen[4]). Wir haben der Erzählung der Lebensgeschichte Regiomontan's eine unverhältnissmässige Länge gegeben. Wir haben es desshalb gethan, um die Unstetigkeit seines fast heimathslosen Umherwanderns der Grösse seiner Leistungen als Hintergrund dienen zu lassen, und um ermessen zu können, was die Wissen-

[1]) *Eam enim mihi delegi domum perpetuam* schrieb Regiomontanus unter dem 4. Juli 1471. [2]) *Theoricae planetarum novae s. l. et a.* [3]) Ein Abdruck nach dem Original bei Ch. G. Schwarz, *De origine typographie* Pars. III, p. 54. [4]) Diese Todesursache nannte schon Melanchthon in einer 1549 gehaltenen Lobrede auf Regiomontanus. *Fama est venenum ei datum esse a Trapezontii filiis.* Vergl. *Corpus Reformatorum* Vol. XI, p. 825 (1843).

schaft an dem bei seinem Tode erst 40jährigen Gelehrten verloren hat, der nebenbei auch sogar als Dichter gekrönt war, wenn der als Cod. 367 G. 27 bezeichneten Handschrift des Klosters Melk Glaube geschenkt werden darf, in welcher eine Ueberschrift: Compositio quadrantis Reverend. Mgr. Johannis de Kunisperg, astronomi et poete laureati[1]) lautet.

Wir müssen nun seine einzelnen mathematischen Leistungen besprechen, wie sie theils in besonderen Schriften, theils in Briefen von seiner Hand sich erhalten haben. Wir beginnen mit der Angabe der wichtigsten Druckveröffentlichungen, welche Regiomontanus, wie wir sagten, selbst vorbereitete. Das Meiste davon wird er handschriftlich sich erworben und geistig sich angeeignet haben, als er 1461 bis 1462 zuerst in Rom war. Es bildet also den wissenschaftlichen Grundstock, welchen Regiomontanus besass, und den zu kennen auch für uns nothwendig ist, wenn wir darüber uns klar werden wollen, wie viel eigne Zuthat in den verschiedenen nachher zu besprechenden Werken enthalten ist[2]). Die Cosmographie, der Almagest und das Quadripartitum des Ptolemäus stehen an der Spitze. Die Erläuterungen Theons von Alexandria zum Almagest fehlen nicht. Euklid's Elemente mit dem Anaphorikos des Hypsikles waren zum Drucke bestimmt, zwar nach der Ausgabe des Campanus, aber frei von den Fehlern, die dieser verschuldet hatte. Eine verbesserte Uebersetzung des Archimed unter Zugrundelegung der von Jacob von Cremona ausgeführten war vorgesehen, ebenso die Kegelschnitte des Apollonius, die Sphärik des Menelaus, die Sphärik des Theodosius. Der Cylinderschnitt des Serenus und die mechanischen Probleme des Aristoteles standen gleichfalls auf der Liste. Von diesen allen sollten wohlverstanden keine griechischen Textausgaben, sondern lateinische Uebersetzungen gedruckt werden, welche Regiomontanus, wenn auch unter Benutzung schon vorhandener Uebersetzungen, neu zu schaffen gesonnen war, vielleicht zum Theile schon angefertigt hatte. Dazu kam der beabsichtigte Druck einiger in lateinischer Sprache geschriebenen Werke, der Arithmetik des Jordanus, dessen arithmetischer Data (die Schrift De numeris datis wird damit gemeint sein?) und des Quadripartitum (vermuthlich des so betitelten Werkes von De Muris). Durch andere Quellen können wir die Liste noch um zwei Werke vergrössern, welche Regiomontan genau kannte, vielleicht im Drucke herausgeben wollte: den Algorithmus demonstratus hat er in

[1]) Curtze, brieflich. [2]) H. Petz, Urkundliche Nachrichten über den literarischen Nachlass Regiomontan's und B. Walther's in den Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg VII, 237—262 (1888).

Wien sich abgeschrieben, und seine noch manches Andere, z. B. die bei Jordanus vorhandene allgemeine indische Regel zur Auffindung der Seite des regelmässigen Sehnenvielecks (S. 83) enthaltende Handschrift befindet sich in Wien[1]). Er hat den Diophant in Venedig entdeckt. Das Programm der beabsichtigten Druckgebungen wäre aber auch jetzt noch nicht vollständig, wenn wir nicht einige von den eigenen Schriften Regiomontan's nennten, die gleichfalls der Presse übergeben werden sollten. Die fünf Bücher über Dreiecke, Erläuterungen zu den von Eutokius nicht mit solchen versehenen Büchern des Archimed, geometrische Aufgaben jeder Art, astronomische Aufgaben mit Beziehungen zum Almagest, Gedanken über die Neuordnung des Kirchenkalenders, so lauten die Aufschriften selbständiger Werke, zu welchen noch eine ganze Anzahl von Streitschriften kam. Gegen Georg von Trapezunt sollte Theon von Alexandria in Schutz genommen, gegen Nicolaus von Cusa das Unzutreffende seiner Quadraturversuche nachgewiesen werden. Längst verstorbene Schriftsteller blieben aber auch nicht mit Angriffen verschont, wenn wir als Beispiel nur etwa eine Schrift gegen Campanus nennen wollen, in welcher beabsichtigt war nachzuweisen, wie nothwendig es sei, dessen persönliche Meinungsäusserungen aus der Euklidausgabe zu entfernen.

Besässen wir von Regiomontanus nichts als diese Verzeichnisse fremder und eigener zum Drucke mehr oder weniger vorbereiteter Werke, so würden sie genügen, uns mit Staunen über den Umfang der Gelehrsamkeit und über die Vielseitigkeit des Wissens des seltenen Mannes zu erfüllen, der die Vollendung des 40. Lebensjahres grade erreichte. In Bezug auf einige der genannten Schriften geht unser Wissen leider über die Kenntniss der Titel nicht hinaus. Sicherlich ist es tief zu beklagen, dass von den geometrischen Aufgaben, von der Arbeit über Kalenderverbesserung, von den Erläuterungen zu Archimed nichts sich erhalten zu haben scheint.

Von den Schriften, welche nach und nach im Drucke veröffentlicht worden sind, müssen wir wohl zuerst die Einleitungsrede zu den in Padua gehaltenen Vorträgen über Alfraganus[2])

[1]) M. Curtze, Die Quadratwurzelformel des Heron bei den Arabern und bei Regiomontan und damit Zusammenhängendes. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Hist.-liter. Abthlg. S. 145 bis 152. [2]) Der Titel des seltenen 1537 in Nürnberg gedruckten Bandes, der diese Rede enthält, lautet: *Continentur in hoc libro. Rudimenta astronomica Alfragani. Item Albategnius astronomus peritissimus de motu stellarum, ex observationibus tum propriis, tum Ptolemaei, omnia cum demonstrationibus Geometricis et Additionibus Ioannis de Regiomonte. Item oratio introductoria in omnes scientias Mathematicas Joannis de Regiomonte, Patavii habita, cum Alfraganum publice praelegeret. Eiusdem utilissima introductio in elementa Euclidis. Item Epistola Philippi Melanthonis nuncupatoria, ad Senatum Norimbergensem.* Ausserdem ist die Rede aber auch irrthümlich in Melanchthon's Werken abgedruckt worden. *Corpus Reformatorum* (ed. C. G. Bretschneider) XI, 531—544 (1843).

besprechen. Ihre Wichtigkeit liegt insbesondere darin, dass sie auf das mathematische Wissen Regiomontan's und die damals verbreiteten geschichtlichen Meinungen ein helles Licht wirft. Seit zwei Jahren und mehr, so beginnt Regiomontanus, habe er keine Vorlesung gehalten, der ihm gegenwärtig gewordenen Aufforderung könne er trotz gerechten Bangens nicht widerstehen. Um die Zuhörer zu dem eigentlichen Gegenstande, der Erörterung der Lehren des Alfraganus, vorzubereiten, wolle er einen raschen Blick über die Gesammtwissenschaft der Mathematik werfen. Sie sei die Wissenschaft von den Grössen und zerfalle in zwei Theile, Geometrie und Arithmetik, je nachdem die behandelte Grösse eine stetige oder eine Zahlengrösse sei. Die Geometrie entstand in Aegypten, hervorgerufen durch die Nothwendigkeit, die bei den regelmässigen Nilüberschwemmungen sich verwischenden Ackergrenzen wieder herzustellen. Viele haben ihre Lehren niedergeschrieben. Euklid von Megara sammelte dieselben und vereinigte in 13 Büchern, was er da und dort auflas[1]). Hypsikles fügte zwei Bücher bei. Boethius übersetzte alle 15 Bücher ins Lateinische, gab aber den Text nicht, wie er im Griechischen vorliegt[2]). Später haben Atelhard und Alfred und endlich Campanus die 15 Bücher unter dem einen Namen Euklid's neu bearbeitet, die Ersten elegant und sehr kurz, der Letzte mit grosser Klarheit. Nun folgen Apollonius mit seinen noch nicht übersetzten Kegelschnitten und Archimed, dessen Schriften unter Papst Nicolaus V. durch Jacob von Cremona übersetzt wurden. In dessen Schrift über Spirallinien ist versucht die Kreislinie als gerade Linie darzustellen, um die Quadratur des Kreises zu erhalten, womit viele alte Gelehrte sich beschäftigten, ohne dass bis zu Aristoteles etwas erreicht worden sei, und in unserer Zeit warten einige hochberühmte Männer auf diesen Ruhm[3]). Archimed hat auch selbst eine Kreismessung u. s. w. verfasst. Apollonius wird, wenn er erst einmal aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt ist, die allgemeine Bewunderung erregen. Um nicht ins Unermessliche zu schweifen, wolle er nur Eutokius, den Erklärer des Archimed, Theodosius, Menelaus als Schriftsteller über Sphärik nennen, sehr viele andere Geometer, die in verschiedenen Sprachen schrieben, verschweigen. Nun zur Arithmetik. Wo dieselbe entstanden, sei

[1]) *coepit in tredecim libros, quos juste vocavit Elementa, quod ex eis omnes disciplinae pendeant, conclusiones passim lectas conscribere.* [2]) *quamvis commentum non, ut in Graeco jacet, expresserit.* [3]) *cuius rei gloriam nonnulli nostra tempestate viri clarissimi praestolantur.*

kaum zu sagen, Pythagoras habe zwar durch sein Wissen von den Zahlen Unsterblichkeit erlangt, nachdem er dasselbe von Aegyptern und Arabern sich erwarb, aber würdigere Grundlagen schuf Euklid in seinem 7., 8., 9. Buche, aus welchen Jordanus zehn Bücher Elemente entnahm. Von da an verfasste derselbe auch drei sehr schöne Bücher De numeris datis. Diophant's 13 ungemein feine Bücher hat bisher noch Niemand aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt. In ihnen ist die Blüthe der ganzen Arithmetik verborgen, nämlich die ars rei et census, welche man heute mit arabischem Namen Algebra nennt[1]). Als einen in diesen Dingen gelehrten Mann unter den lateinischen Völkern finde ich Bianchini. Bei uns hat man das Quadripartitum numerorum, ein ausgezeichnetes Buch, den Algorithmus demonstratus und die Arithmetik des Boethius, die aus Nikomachus geschöpft ist. Barlaam hat in sechs Büchern die Rechenkunst griechisch dargestellt. Hierauf geht Regiomontan zur Geschichte der Astronomie über. Wir dürfen rasch darüber hinweggehen und führen nur an, dass ein *gewisser Plato von Tivoli* den Albategnius, ein *gewisser Gerard von Cremona* den Spanier Gebar übersetzt habe, Ausdrucksweisen, welche in uns Zweifel rege machen könnten, ob Regiomontan diese Uebersetzungen wohl genauer gekannt habe, wenn sich nicht, wie wir weiter unten sehen werden, die Bekanntschaft mit der zweitgenannten Uebersetzung beweisen liesse. Noch kürzer berühren wir, dass Regiomontan auch sonstiger Zweige der angewandten Mathematik gedenkt, dass er mit wohlthuender Wärme das Lob seines Lehrers und Freundes Peurbach verkündet, dass er nach dem geschichtlichen Ueberblicke auch noch in den üblichen Redensarten über den mannigfachen Nutzen der Mathematik sich ergeht.

Aus dem, was hier etwas weitläufiger aus dem geschichtlichen Theile ausgezogen ist, wird man die schon althergebrachte Verwechslung des Mathematikers Euklid mit Euklid von Megara kaum hervorzuheben haben. Scheint doch Regiomontan von Euklid's Persönlichkeit eine sehr geringe Kenntniss gehabt zu haben. Jener Druck von 1537, in welchem die geschichtliche Einleitung zur Alfraganvorlesung veröffentlicht ist, enthält auch eine Introductio in elementa Euclidis von Regiomontanus. Sie sollte wahrscheinlich die Einleitung zu der beabsichtigten Euklidausgabe bilden, und die in Nürnberg noch vorhandene Originalhandschrift steht auf den ersten Seiten der

[1]) *Diophanti autem tredecim libros subtilissimos nemo usque hac ex Graecis Latinos fecit, in quibus flos ipse totius Arithmeticae latet, ars videlicet rei et census quam hodie vocant Algebram arabico nomine.*

durch Regiomontan abgeschriebenen Euklidübersetzung des Atelhard[1]). Darin findet sich die Ungeheuerlichkeit, die Geometrie sei von Euklid arabisch verfasst, von Atelhard ins Lateinische übersetzt worden![2]) So vorsichtig uns dergleichen allen Aussagen gegenüber machen muss, die mit Euklid zusammenhängen, können wir doch nicht umhin, bei dem Berichte der paduaner Rede von einer Alfred'schen Euklidbearbeitung zu verweilen. Ist damit eine Uebersetzung gemeint, die zur Zeit König Alfred des Grossen von England, mithin in der zweiten Hälfte des IX. Jahrhunderts entstanden sei? Steht damit in halbem Einklange jener englische Bericht von einer Euklidübersetzung zur Zeit Königs Athelstane (S. 102), der als zweiter Nachfolger Alfreds 924—941 regierte? Wir können nur die Frage anregen, nicht beantworten.

Die Bedeutung der griechischen Mathematiker schildert Regiomontan so überzeugt, dass man annehmen darf, er habe, als er die Rede in Padua hielt, dieselben genau gekannt. Für Euklid, für Archimed und Apollonius, für Hypsikles, Menelaus, Theodosius, Eutokius steht dem auch gewiss kein Zweifel gegenüber. Aber wie verhält es sich mit den 13 Büchern des Diophant? Regiomontan kennt ihre Zahl, hat er aber wirklich 13 Bücher selbst gekannt? Sein Briefwechsel giebt uns darauf Antwort und gestattet zugleich eine angenäherte Zeitbestimmung jener Vorlesung in Padua, welche mit anderen Zeitbestimmungsgründen im Einklange steht. Regiomontan sagt am Anfange der Rede, er habe seit zwei Jahren und mehr keine Vorlesung gehalten. Seine erste wiener Lehrthätigkeit endete 1461, die Rede in Padua muss demnach etwa in den ersten Monaten von 1464 gehalten worden sein. Nun besitzen wir einen Brief[3]), welchen Regiomontanus aus Venedig an Bianchini schrieb. Der Brief ist nicht datirt, aber er ist die Antwort auf einen Brief Bianchini's vom 5. Februar 1464, der als am 11. dieses Monats Februar, undecima huius mensis Februarii, in Venedig angekommen bezeichnet wird. Regiomontan's Brief ist also auch aus dem Monate Februar 1464. Hier erzählt Regiomontan dem Freunde im Vertrauen, er habe jetzt in Venedig den griechischen, noch nicht ins Lateinische übersetzten Arithmetiker Diophant gefunden. Derselbe verspreche in der Vorrede 13 Bücher, aber die aufgefundene Handschrift enthalte deren

[1]) M. Curtze im Literarischen Centralblatt vom 30. Juli 1892, S. 1092.
[2]) Kästner II, 507: *Incipit ars Geometriae continens 364 propositiones ab Euclide in Arabico compositae et ab Atelhardo Gothico in latinum assumpta* In der Originalhandschrift steht nicht *Gothico* sondern *Goth.* [3]) Christ. Theoph. De Murr, *Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et universitatis Altdorfinae*, Pars I, p. 135 (1786).

nur sechs. Würde ein vollständiges Exemplar sich auftreiben lassen, so wollte er wegen dessen Schönheit und Schwierigkeit eine Uebersetzung besorgen, so viel Griechisch, als dieses erfordere, habe er im Hause Bessarion's gelernt. Doch fragt er auch Bianchini's Rath, ob dieser meine, man solle schon die sechs Bücher übersetzen, damit die lateinische Literatur dieses neuen überaus werthvollen Geschenkes nicht entbehre. Von späterer Auffindung einer ergänzenden Handschrift ist nirgend die Rede, wie wir ja auch wissen (Bd. I, S. 437), dass auch im XIII. Jahrhunderte schon nicht mehr als sechs Bücher aufzutreiben waren. Die paduaner Rede berichtet offenbar mit gleicher Begeisterung wie der Brief an Bianchini von dem gleichen Funde, und nehmen wir an, Rede und Brief seien annähernd gleichzeitig, die Rede natürlich etwas später, so kommen wir wieder dazu, sie (S. 256) in den Monat März oder April 1464 zu verlegen.

Damals war ein anderes Werk Regiomontan's schon sehr weit gediehen. Wir haben zwei Briefe Bianchini's vom 21. November 1463 und vom 5. Februar 1464. Zwischen diese fällt ein Brief Regiomontan's, der wieder kein Datum trägt, aber durch seine Stellung zwischen jenen Briefen hinlänglich bestimmt ist. Er muss um Neujahr 1464 geschrieben sein. Damals sagte Regiomontan, er werde Bianchini nächstens die Bücher von den Dreiecken schicken, welche er geschrieben, aber gegenwärtig nicht bei sich habe; er lasse sie aus Rom kommen[1]). Offenbar handelt es sich hier um die hochbedeutende Schrift De triangulis omnimodis libri quinque, welche 1533 im Drucke herauskam. Wenn auch Griechen und Araber, um nur die Völker zu nennen, deren Leistungen Regiomontan bekannt werden konnten, der Trigonometrie zu einer hervorragenden Entwickelung verholfen hatten, wenn auch die Sehnentafeln der Einen, die Sinustafeln und Schatten der Anderen ein rechnendes Verfahren in geometrischen Aufgaben mit Einbeziehung von Winkelgrössen ermöglicht hatten, darüber war doch noch Niemand hinausgegangen. Die Trigonometrie anders behandeln zu sollen als in Gestalt einer Einleitung zur Astronomie war noch Niemand eingefallen, und diesen grossartigen Fortschritt von einem einleitenden Kapitel zum selbständigen Wissenschaftstheil vollzog Regiomontan. Den Gedanken freilich führt er in der von ihm verfassten Vorrede pietätsvoll auf den geliebten Lehrer zurück. Peurbach habe bereits beschlossen eine Kunst der Dreiecke, *triangulorum artem*, zu schreiben, welche in den ersten sechs Büchern des Almagest als Bedürfniss sich erweise. Der Tod hatte die Ausführung dieses Vorhabens verhindert. Weniger genau berichtete Regio-

[1]) Murr, l. c. p. 90—91.

montan über andere Vorarbeiten. Wir haben (S. 262) gesagt, er habe die Uebersetzung des Dschâbir ibn Aflah durch Gerhard von Cremona gekannt. Genaue Vergleichung mit den Büchern De triangulis hat dieses sichergestellt[1]), aber genannt ist diese Quelle nirgend. Freilich war Regiomontan's Arbeit erst bis zur Niederschrift einer Vorrede und dem Druckfertigmachen des ersten Buches gediehen, als auch er starb. An die vier weiteren Bücher hatte er die letzte Hand noch zu legen. Man sieht das daran, dass in den vier späteren Büchern in Regiomontan's Handschrift die Nummern der Sätze fehlen, auf welche rückbeziehend die Beweise gegründet sind. Man hätte auch die Ungleichmässigkeit der Bezeichnung als Zeichen der Unfertigkeit erwähnen können. Im ersten Buche heissen die Dreiecke, von denen gehandelt ist, immer abc, in den Folgebüchern meistens abg, während das fünfte Buch zu der lateinischen Buchstabenfolge abc zurückkehrt. Auch in diesem Zustande war die Veröffentlichung der nachgelassenen Handschrift eine Nothwendigkeit, welcher aber der erste Besitzer sich nicht fügte. Walther war von Regiomontan, als er die zweite und letzte Römerreise antrat, die Aufbewahrung seiner Handschriften u. s. w. anvertraut worden, und als nun der Freund in der Ferne starb, nahm Walther es nur zu genau mit dem Worte der Aufbewahrung. Er hielt Alles, was er von Regiomontan's Hand besass, ängstlich verschlossen, ohne es nur Jemand sehen zu lassen. Walther selbst starb 1504 im Alter von 74 Jahren, und nun hätte die Sorglosigkeit der Erben leicht die gleiche Folge haben können wie die übertriebene Sorgfalt Walther's selbst, dass die werthvollen Handschriften nutzlos geblieben wären. Sie wurden da und dorthin zerstreut, Manches scheint dabei zu Grunde gegangen zu sein. Die fünf Bücher über Dreiecke kaufte Willibald Pirckheimer, von welchem später noch die Rede sein wird, und er übergab sie einem gleichfalls später noch zu nennenden Johannes Schöner zur Herausgabe, die 1533 erfolgte.

Das I. Buch mit 57 Sätzen ist zunächst nur einleitender Natur. Das Quadrat einer gegebenen Seite ist bekannt. Die Seite eines gegebenen Quadrates ist bekannt. Die Summe gegebener Grössen ist bekannt. Der Unterschied gegebener Grössen ist bekannt. Zwei gegebene Grössen stehen in dem Verhältnisse ihrer Maasszahlen u. s. w., u. s. w. Der 19. dieser einleitenden Sätze behauptet, dass die Kenntniss dreier von vier in Proportion stehenden Grössen genüge, damit auch die

[1]) Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan von A. von Braunmühl (Abhandlungen der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Bd. 71 Nr 2. Halle 1897).

vierte bekannt sei. Alle diese Sätze, so einfach sie sind, werden in euklidischer Art bewiesen, wobei jedesmal die Grössen durch ihre Maasszahlen ersetzt sind. Euklid freilich unterliess es in einem solchen Falle nie eine Vorfrage zu stellen, zu untersuchen, ob gegebenen Grössen gegebene Zahlen wirklich entsprechen, ob Rationales vorliege oder nicht. Bei Regiomontanus ist nichts dergleichen zu finden. Nicht als ob er in ungründlicher Weise an der Unterscheidung zwischen Rationalem und Irrationalem vorüberginge, er macht vielmehr, möchte man sagen, diese Unterscheidung dadurch entbehrlich, dass er den Begriff des Bekanntseins anders fasst[1]). Bekannt will er mit einem und demselben Worte jede Grösse genannt wissen, die entweder genau bekannt, oder einer gegebenen Grösse beinahe gleich ist. Der 20. Satz eröffnet die eigentliche Trigonometrie. An der beigefügten Figur (Fig. 38) wird erörtert, dass um den Eckpunkt a des bei c rechtwinkligen Dreiecks abc mit der Hypotenuse ab, als der grössten Dreiecksseite, als Halbmesser ein Kreis beschrieben und ac bis zum Durchschnitte e mit der Kreislinie verlängert werden solle, dann sei bc der Sinus des Bogens be, und die dritte Dreiecksseite ac sei gleich dem Sinus des Complementes[2]) des Bogens be. Regiomontan wendet sich aber von diesen Definitionen gleich wieder ab zu den Dreiecksstücken, deren Kenntniss zu erlangen ist, ohne die eben eingeführten Längen weiter zu benutzen. Im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke seien beide Winkel gleich. In demjenigen rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypotenuse doppelt so lang als eine Kathete ist, sei der von diesen beiden Linien gebildete spitze Winkel doppelt so gross als der andere. Der dritte Dreieckswinkel ergebe sich aus den beiden anderen. Die dritte Seite eines rechtwinkligen Dreiecks sei durch die beiden anderen gegeben. Der 28. Satz führt zu dem Sinus zurück, indem er ausspricht, die Winkel (Fig. 39) eines bei c rechtwinkligen Dreiecks seien bekannt, wenn das Verhältniss zweier Seiten des Dreiecks bekannt sei. So sei z. B. $ab : ac = 9 : 7$. Nun sei der Halbmesser, welchen Regiomontan sinus rectus totus nennt, 60000 [Peurbach nahm ihn (S. 185) in der Länge von 600000 an], der Sinus

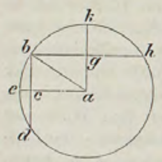

Fig. 38.

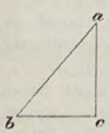

Fig. 39.

[1]) *Quantitatem igitur omnem quae aut nota praecise fuerit aut notae quantitati ferme aequalis univoce notam appellabimus* heisst es bei dem Satze, dass die Seite eines gegebenen Quadrates bekannt sei, der die Ausziehung einer Quadratwurzel einschliesst. [2]) *aequale est sinui recto complementi arcus be.*

des $\sphericalangle abc$ ist also $\frac{7 \cdot 60000}{9}$ oder ungefähr (fere) 46667, und diesem Sinus entspricht ungefähr der Winkel von $51^0\,3'$. Ist ferner

$$ac : cb = 12 : 5,$$

so folgt wegen $12^2 + 5^2 = 13^2$, dass $ab : ac = 13 : 12$, und damit ist wie vorher der Weg zur Kenntniss des Winkels abc eröffnet[1]). Umkehrungen dieser Aufgaben am rechtwinkligen Dreiecke folgen, und dann kehrt die Darstellung wieder zu nicht trigonometrischen Betrachtungen zurück. Die Lage der Höhe eines Dreiecks wird besprochen und dabei des gemeinsamen Durchschnittes der drei Höhen erwähnt, welchen Regiomontan anderwärts bewiesen habe[2]). Der Satz selbst war übrigens schon Proklus bekannt[3]). Im 43. Satze führen die beiden Abschnitte, welche die Höhe auf der Grundlinie hervorbringt, den Namen *casus*, welcher uns bei Leonardo von Pisa (S. 37) und bei Jordanus (S. 83) schon auffiel. Im 51. Satze ist der zweideutige Fall besprochen, dass zwei Dreiecksseiten und ein spitzer der einen Seite gegenüberliegender Winkel gegeben seien, der aber vollständig bestimmt werde, sobald man erfahre, ob die vom Schnittpunkte der gegebenen Seiten auf die dritte gefällte Senkrechte diese selbst oder ihre Verlängerung treffe.

Das II. Buch von 33 Sätzen beginnt mit dem Satze von der Proportionalität zweier Dreiecksseiten zu den Sinussen der gegenüberliegenden Winkel[4]). Er soll (Fig. 40) am Dreiecke abg bewiesen werden, und zwar dass $ab : ag = \sin g : \sin b$. Ist $b = 90^0$, so bedarf der Satz ebensowenig eines weiteren Beweises, als wenn $b = g$. Sei also $b > g$, mithin von den gegenüberliegenden Seiten $ag > ab$. Aus b wird mit $bd = ag$ als Halbmesser ein Kreisbogen beschrieben, ebenso aus g mit dem gleichen Halbmesser. So zeigt sich $dh = \sin b$, $ak = \sin g$, ferner

$$ak : dh = ba : bd,$$

womit der Satz bewiesen ist. Aus ihm ergeben sich die Auflösungen mannigfaltiger Aufgaben. Z. B. ein Dreieck zu finden, wenn folgende drei Stücke bekannt sind: zwei Winkel und die Summe der ihnen gegenüberliegenden Seiten (II, 2); zwei Winkel und der Umfang des

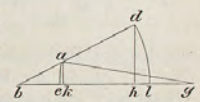

Fig. 40.

[1]) *unde ut prius angulo abc cognoscendo via parata est.* [2]) *Tres autem perpendiculares illae in eodem puncto se intersecabunt, quod alio in loco demonstratum tradidimus.* [3]) Proklos Commentar zu Euklid (ed. Friedlein) p. 72, Z. 17—19. [4]) *In omni triangulo rectilineo proportio lateris ad latus est tanquam sinus recti anguli alterum eorum respicientis ad sinum rectum anguli reliquum latus respicientis.*

Dreiecks (II, 7); das gegenseitige Verhältniss der drei Seiten und die Länge einer Höhe (II, 8); das gegenseitige Verhältniss der drei Seiten und der Flächeninhalt (II, 10). Wir erwähnen noch den Fall II, 15, in welchem die Grundlinie, die Summe der beiden anderen Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind. Man halbirt (Fig. 41) den Winkel bei a durch ad, so muss sein

$$bd : dg = ab : ag$$

oder $ab : bd = ag : dg$, also auch

$$(ab + ag) : (bd + dg) = ab : bd = \sin adb : \sin \frac{bag}{2}.$$

Hier ist $ab + ag$ die gegebene Seitensumme, $bd + dg$ die Grundlinie, der Winkel $\frac{bag}{2}$ gleichfalls gegeben; mithin ist auch der Winkel adb und mit ihm der abg sowie agb gegeben, und der Fall des Satzes II, 2 ist wieder hergestellt. Eine weitere Aufgabe II, 24 sucht

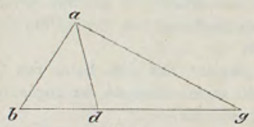

Fig. 41.

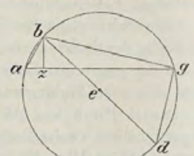

Fig. 42.

aus den drei Dreiecksseiten den Durchmesser des Umkreises. Seien (Fig. 42) ab, bg die beiden kleinsten Dreiecksseiten, so sind die Winkel bei g und a spitz, und die Senkrechte bz trifft die ag zwischen ihren beiden Endpunkten. Das Dreieck abz ist alsdann winkelgleich mit dem dbg und $bz : ba = bg : bd$. Die Höhe bz mit Hilfe der drei Dreiecksseiten zu finden, ist schon in I, 46 gelehrt, somit sind in der eben angeschriebenen Proportion bz, ba, bg gegeben und dadurch bd bekannt. Der Satz II, 5 ist durch einen (in der Druckausgabe allerdings durch einen Fehler entstellten) Vorschlag bemerkenswerth, welchen Regiomontan macht, indem er ihn freilich selbst zur praktischen Anwendung nicht empfiehlt[1]). Sind in einem Dreiecke die beiden Seiten ab, ag (im Drucke steht irrthümlich bg) und der von ihnen eingeschlossene Winkel bag gegeben, so ist damit zugleich auch die Summe der beiden anderen Winkel $abg + agb$ und das Verhältniss ihrer Sinus gegeben $\sin abg : \sin agb = ag : ab$. Dann bleibe aus den letzteren beiden Angaben die Winkel einzeln

[1]) *Non tamen per hanc viam operandum suadeo.*

zu finden, und das sei im III. Buche gezeigt. Vermuthlich ist diese letztere Verweisung selbst wieder ein Druckfehler, da der betreffende Satz, wie wir weiter unten sehen werden, als IV, 23 sich vorfindet. Zwei Aufgaben des zweiten Buches II, 12 und II, 23 haben regelmässig die Aufmerksamkeit der Leser dadurch gefesselt, dass sie algebraisch behandelt sind. In II, 12 ist eine Seite und die zu ihr gehörende Höhe gegeben. Ausserdem ist gegeben das Verhältniss der beiden anderen Seiten, die dann einzeln gesucht werden. Die Schlüsse Regiomontan's sind folgende, wobei wir nur die Wörter res, census durch x, x^2 ersetzen[1]). Es sei (Fig. 43) $ab : ag = 3 : 5$, also $ab < ag$, so liegt d näher bei b als bei g und man mache $de = bd$. Man wählt eg als doppelte Unbekannte $= 2x$, $be = bg - 2x = 20 - 2x$ in dem vorliegenden Falle, wo $bg = 20$. Daher ist $bd = 10 - x$ und dessen Quadrat $= 100 + x^2 - 20x$. Bei $ad = 5$ wird $ad^2 = 25$, mithin

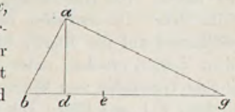

Fig. 43.

$$ab^2 = bd^2 + ad^2 = x^2 + 125 - 20x.$$

Ebenso ist

$$dg = de + eg = 10 - x + 2x = 10 + x,$$

$$dg^2 = x^2 + 20x + 100, \quad ag^2 = dg^2 + ad^2 = x^2 + 125 + 20x,$$

mithin $\quad (x^2 + 125 - 20x) : (x^2 + 125 + 20x) = 9 : 25,$

woraus $\quad 16x^2 + 2000 = 680x$

und was noch erübrigt, darüber werden die Vorschriften der Kunst belehren[2]). Die andere Aufgabe II, 23 nimmt als gegeben an den Unterschied zweier Seiten $= 3$, die von ihrem Durchschnittspunkte aus gefällte Höhe $= 10$ und den Unterschied der Abschnitte der Grundlinie $= 12$. Weil (Fig. 44) $eg = 12$ das vierfache von $gh = 3$ ist, muss die Summe $ab + ag$ das vierfache von bg sein. Regiomontan begründet diese Behauptung nicht, von ihrer Richtigkeit kann man sich, wie folgt, überzeugen. Es ist

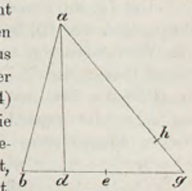

Fig. 44.

$$ad^2 = ab^2 - bd^2 = ag^2 - dg^2 = (ah + hg)^2 - (de + eg)^2$$
$$= (ab + hg)^2 - (bd + eg)^2.$$

Daraus folgt $\quad 2ab \cdot hg + hg^2 = 2bd \cdot eg + eg^2$

[1]) *Hoc problema geometrico more absolvere non licuit hactenus, sed per artem rei et census id efficere conabimur.* [2]) *quod restat praecepta artis edocebunt.*

oder $(2ab + hg) : (2bd + eg) = eg : hg$.

beziehungsweise $(ab + ag) : bg = eg : hg$.

Heisst nun die Grundlinie x, so ist also $ab + ag = 4x$. Weiter ist $bd = \frac{x}{2} - 6$, $ab = 2x - \frac{3}{2}$, folglich geht $ab^2 = bd^2 + ad^2$ über in $\left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2} - 6\right)^2 + 100$, d. h.

$$4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = \frac{x^2}{4} - 6x + 36 + 100$$

oder ein Vielfaches von x^2 gleich einer Zahl[1]).

Das III. Buch von 56 Sätzen führt den Verfasser zur Geometrie der Kugel. Von Ausrechnungen von Winkeln oder Seiten ist dabei keine Rede. Da erscheinen Sätze über Grösstekreise und deren Parallelkreise auf der Kugel, über die *Pole* solcher Kreise, die zwar nicht definirt werden, unter welchen jedoch nur sphärische Mittelpunkte verstanden sein können. Da heisst es III, 35, dass bei sphärischen, d. h. aus Bögen von Grösstenkreisen derselben Kugel gebildeten Dreiecken Gleichheit aller Seiten (*latera*) auch die Gleichheit der einander entsprechenden Winkel nach sich ziehe, ferner III, 36, dass die Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels von der Uebereinstimmung der beiden sphärischen Dreiecke auch in den übrigen Stücken begleitet sei. Da lehrt III, 39 den Satz, dass die drei Seiten eines Dreiecks zusammen kleiner als ein Grösstenkreis und III, 49, dass die drei Winkel zusammen grösser als zwei Rechte sein müssen. Als Muster für dieses Buch scheint unmittelbar oder mittelbar die Sphärik des Menelaus (Bd. I, S. 386) gedient zu haben.

Das IV. Buch von 34 Sätzen setzt in den 14 ersten Sätzen den Gegenstand des III. Buches fort. In IV, 15 kommt zuerst wieder das Wort Sinus vor, und IV, 16 spricht für das rechtwinklige sphärische Dreieck den in IV, 17 auf alle sphärischen Dreiecke überhaupt ausgedehnten Satz von der Proportionalität der Sinusse von Seiten zu denen der gegenüberliegenden Winkel aus. Nun kommen die beiden übrigen Sätze der sphärischen Trigonometrie für das rechtwinklige Dreieck. Um sie kürzer schreiben zu können, mögen (Fig. 45) c die Hypotenuse, a, b die Katheten, C, A, B die gegenüberliegenden Winkel ($C = 90^0$) bedeuten, so ist IV, 18 der Satz $\sin A \cdot \cos b = \cos B$ und IV, 19 der Satz $\cos c = \cos a \cdot \cos b$. In IV, 21, 22, 23 sind Sätze eingeschaltet, welche wieder der Ebene angehören, und auf deren letzten in II, 5 hingewiesen worden war, welche aber Regiomontan

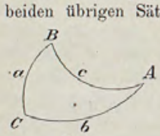

Fig. 45.

[1]) *habebimus census aliquot aequales numero.*

offenbar in vollbewusster Absicht bis zum IV. Buche aufsparte, weil sie hier ihre wichtigste Anwendung finden sollten. Es sind die Sätze, welche aussprechen, zwei Bögen seien einzeln bekannt, wenn das Verhältniss ihrer Sinus und ausserdem ihre Summe, beziehungsweise ihre Differenz gegeben, die Summe überdies kleiner als der Halbkreis sei, eine Bedingung, von welcher IV, 23 wieder Abstand nimmt. Sind (Fig. 46) ag und gb die beiden Bögen, deren Summe ab gegeben ist, und ist $ae = \sin ag$, $bh = \sin gb$, also $ae : bh = r : s$ gegeben[1]), so ist entweder $r = s$ und dann auch arc. $ag = gb = \frac{1}{2} ab$ oder die Zahlen r, s sind ungleich, etwa $r > s$. Wegen $\triangle aed \backsim bhd$ ist $ae : bh = ad : bd = r : s$ und $(ad + bd) : bd = (r + s) : s$, $bd = \frac{s}{r+s} ab$, folglich bekannt durch eine Sehnen- oder Sinustafel, in welcher man die zum Bogen ab zugehörige Sehne ab aufsuchen kann. Ist bd und $bk = \frac{1}{2} ab$ bekannt, so kennt man auch dk. Würde man die Rechnung ausführen, welche Regiomontan nur anzudeuten sich begnügt, so käme

$$dk = \frac{r - s}{r + s} \cdot \sin\left(\text{arc.} \frac{ag + bg}{2}\right).$$

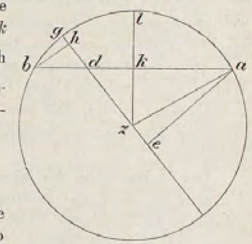

Fig. 46.

Ferner ist im rechtwinkligen Dreiecke zak sowohl za als ak bekannt, also auch zk. Im rechtwinkligen Dreiecke zkd kennt man jetzt zk und dk d. h. zwei Seiten, somit auch den Winkel dzk oder arc. gl, und arc. la ist die Hälfte von arc. ab, mithin ist arc. ag und arc. bg = arc. ab — arc. ag gefunden. Durch Anwendung dieser drei Sätze IV, 21, 22, 23, an welche noch einige Folgerungen sich anschliessen, kommt Regiomontan zu den beiden merkwürdigsten Sätzen IV, 33 und 34 seines ganzen Werkes, aus den drei Winkeln des sphärischen Dreiecks könne man die drei Seiten, aus den drei Seiten die drei Winkel erhalten. Es braucht wohl kaum gesagt zu werden, dass eine Ableitung einer geschmeidigen Formel nicht von Regiomontan erwartet werden darf. Ihm genügt es zu zeigen, dass Rechnung zum Ziele führt, gleichwie in dem Hilfssatze IV, 23, über den wir berichtet haben, sein Bestreben auch nicht weiter ging. Aber auch in dieser Einschränkung des Erreichten, des zu erreichen Versuchten ist der Satz IV, 33 ein unbedingt neuer, und dessen ganze Bedeutung tritt bei der Erwägung

[1]) *ut sit proportio sinus ae ad sinum bh sicut r ad s.*

hervor, wie schwer es einem in ebener Geometrie geschulten Geiste werden musste, sich in den Gedanken zu finden, es könnten drei Winkel zur Bestimmung eines Dreiecks ausreichen. Regiomontan's Satz IV, 33 ist sein unbestrittenes Eigenthum. Der Satz IV, 34 tritt zwar schon bei Albattânî auf (Bd. I, S. 694), doch ist aller Grund anzunehmen, Regiomontan habe bei Bearbeitung seiner Bücher von den Dreiecken die Schriften jenes arabischen Astronomen auch in der Uebersetzung durch Plato von Tivoli nicht gekannt, oder erst seit sehr kurzer Zeit gekannt. Dieser Annahme widerspricht nicht die Art und Weise, in der er in Padua von einem gewissen Plato von Tivoli (S. 262) als Uebersetzer sprach; ihr widerspricht nicht die Anwendung des Wortes Sinus, welches aus jener Uebersetzung in allgemeine Benutzung längst eingedrungen war, und unterstützt wird sie durch den Umstand, dass er sonst in jener Uebersetzung doch wohl auch auf die Cotangenten aufmerksam geworden wäre, die ihm bei Fertigstellung des ersten Buches der Trianguli noch fremd waren. Wir können diesen Schluss aus I, 27 ziehen, wo die Herleitung der Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks aus den beiden Katheten auf dem Umwege erfolgt, dass zuvor mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes die Hypotenuse ermittelt wird, anders könne man den Winkel nicht finden[1]).

Das V. Buch ist das kürzeste und schliesst nur 15 Sätze und Aufgaben in sich, die meistens der sphärischen Trigonometrie angehören. Es sind zum Theil zum zweiten Male auftretende Aufgaben, wie z. B. IV, 34 als V, 3 und als V, 4 sich wiederholt, nur mit anderen Auflösungsmethoden, bei welchen der Sinus versus eine Rolle spielt. Das Wort ist uns bei Leonardo von Pisa (S. 38) begegnet. Seine Bedeutung ist der Unterschied zwischen dem Sinus totus und dem Sinus des Complementwinkels: $\sin \text{vers.}\, \alpha = 1 - \cos \alpha$. Der Sinus versus tritt schon in V, 2 auf, wo er Bestandttheil einer ausserordentlich verwickelten Proportion ist, welche in neuerer Bezeichnung immerhin etwas übersichtlicher als in dem schleppenden Wortlaute Regiomontan's

$$\sin \text{vers.}\, C : (\sin \text{vers.}\, c - \sin \text{vers.}\, (a - b)) = \text{sinus totus} : \sin a \cdot \sin b$$

aussieht. Erst im XV. Abschnitte werden wir einen Schriftsteller kennen lernen, der die Bedeutung dieses ohne grössere Schwierigkeit in $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$ umzuwandelnden Satzes zu würdigen wusste. Wir erwähnen weiter den Satz V, 7, dass in einem sphärischen Dreiecke, dessen einer Winkel halbirt ist, die Sinusse der durch die Winkelhalbirende auf der Grundlinie hervor-

[1]) *nam absque eo propositum attingendi non erit potestas.*

gebrachten Abschnitte sich wie die Sinusse der anliegenden Seiten verhalten. Endlich ist etwa über die Winkelbezeichnung zu bemerken, dass dieselbe in den einzelnen Büchern wechselt. In den drei ersten Büchern sind Grade und Minuten als Worte ausgesprochen, z. B. gradus 36 et minuta 52 in II, 27. Im IV. Buche bezeichnet ein Horizontalstrich über der Zahl die Grade, neben welchen durch ein Pünktchen getrennt, aber sonst nicht ausgezeichnet die Minuten erscheinen, etwa $\overline{36}$. 52. Beispiele sind häufig IV, 21, 22, 25, 26, 27, 34. Im V. Buche kommen Zahlenbeispiele überhaupt nicht vor.

Zur Bestimmung des Zeitpunktes, zu welchem die fünf Bücher von den Dreiecken wenigstens in erster Bearbeitung vollendet gewesen sein müssen, diente uns (S. 264) ein um Neujahr 1464 von Regiomontan an Bianchini gerichteter Brief. In dem gleichen Briefe ist auch von einer anderen Arbeit die Rede, welche Regiomontan damals beschäftigte[1]). Es war ein Tabellenwerk, welches unter dem Namen Tabula primi mobilis im Jahre 1514 bei den berühmten wiener Buchdruckern, den Gebrüdern Alantsee, vereinigt mit anderen Tafeln im Drucke erschien. Regiomontan selbst nennt sie eine Tafel doppelten Einganges — *usus tabulae est intrare cum duobus numeris* — und vielleicht dürfte dieses die erste Anwendung der später landläufig gewordenen Ausdrucksweise sein. Bedeutet wieder (wie S. 270) C den rechten Winkel eines sphärischen rechtwinkligen Dreiecks, c die gegenüberliegende Hypotenuse, a, b die beiden Katheten und A, B die ihnen gegenüberliegenden Winkel, so ist $\sin a = \sin c \cdot \sin A$. Die c wachsen von Grad zu Grad und je eine solche Grössenbestimmung eines c steht unter dem Namen numerus transversalis oben auf einer Folioseite. Den zweiten Eingang in die Tabellen gestatten die gleichfalls um ganze Grade sich verändernden Winkel A. Sie heissen numeri laterales, weil sie an der Seite der Tafel auftreten. Daneben findet sich alsdann die gegenüberliegende Kathete a ausgerechnet in Graden, Minuten und Secunden. Ihr Name ist der der numeri areales. Die Anwendbarkeit der Tafel wäre bei den grossen Zwischenräumen, in welchen die in der Tafel unmittelbar stehenden Eingangsgrössen von einander abstehen, eine sehr beschränkte, wenn Regiomontan nicht Sorge dafür getragen hätte, dass Proportionaltheile berechnet werden können. Das geschieht, wie folgt. Ist $c = 67^0$, $A = 75^0$, so ist

[1]) Murr, *Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et universitatis Altdorfinae.* Pars I, pag. 85 und 94—98. Vergleiche insbesondere Pfleiderer S. 130 Note c und die Beschreibung der *Tabula primi mobilis* bei Kästner, II, 526—535.

$a = 62^0\,45'\,55''$ angegeben. Ist wieder bei $c = 67^0$, $A = 76^0$, so ist $a = 63^0\,16'\,24''$ angegeben, um $30'\,29''$ grösser als vorher, und diese differentia descendens oder subiectitia steht unter dem obigen a. Wäre A weiter 75^0 geblieben, aber c zu 68^0 angewachsen, so ist tafelmässig $a = 63^0\,35'\,4''$ angegeben, d. h. $49'\,9''$ mehr als vorher, und diese differentia lateralis ist nun seitlich von dem numerus arealis abgedruckt, so dass also ein kleines Theilchen des mit der Transversalzahl 67^0 überschriebenen Blattes folgendermassen aussieht:

laterales	areales	diff. lateralis
75	62. 45. 55	
	30. 29	49. 9
76	63. 16. 24	
	28. 54	50. 15

In dem wiederholt genannten Briefe von der Jahreswende 1463 auf 1464 sind 40 Aufgaben der praktischen Astronomie gestellt, die alle mittels der Tafel, wenn sie fertig sei, eine leichte Lösung finden würden. Von den 40 Aufgaben sind 36, vermehrt um 27 andere, also insgesammt 63 Aufgaben der Druckausgabe der Tabula primi mobilis als Einleitung vorausgeschickt. Schon aus dieser nicht unwesentlichen Aenderung kann man schliessen, dass die Tabula primi mobilis zu Anfang 1464 noch nicht vollständig druckreif war. Das Gleiche folgt mit noch grösserer Bestimmtheit aus der 43., 44. und 60. Aufgabe der gedruckten Einleitung, in welchen der Name eines anderen Tafelwerkes vorkommt, an welches Regiomontan 1464 noch nicht dachte.

Wir meinen die Tabula directionum. Nach einer Angabe des Geschichtsschreiber Thuanus soll Regiomontan 1475 in Nürnberg, bevor er seine zweite Römerreise antrat, die Drucklegung besorgt haben[1]). Diese Ausgabe, die allerdings nirgend genauer beschrieben ist und darum vielfach angezweifelt wird, soll die Ueberschrift geführt haben: *Ludus Pannoniensis quem alias vocare libuit tabulas directionum*, welche zu erkennen gäbe, dass sie in Ungarn berechnet wurde. Eine zweite durchaus gesicherte Druckausgabe fertigte Erhardt Ratdolt 1490 in Augsburg. Ihr Titel lautet nur *Opus tabularum directionum profectionumque*, und die Zeit der Berechnung wird mit den Worten *Anno Dei 1467 explicit feliciter* angegeben. Im Jahre 1467 war aber Regiomontan noch nicht in Ungarn. Der Widerspruch

[1]) Doppelmayr S. 10 Note p.

ist nicht anders zu beseitigen, als indem man annimmt, die Tafeln seien zwar 1467 in Rom berechnet, aber erst einige Jahre später in Ungarn zum Drucke bestimmt worden. Ihre wesentlich astrologische Bestimmung würde uns gestatten schweigend an der Tabula directionum vorüberzugehen, fesselte nicht eine bestimmte Abtheilung derselben, die Tabula foecunda, in hohem Grade unsere Aufmerksamkeit. Sie bietet uns von Grad zu Grad die trigonometrischen Tangenten der Winkel. Wir haben (S. 185) gesehen, dass Peurbach sich eine Art von Arcustangenstafel anlegte, ferner (S. 272) dass Regiomontan, trotz dieses freilich nur bedingten Vorganges seines Lehrers und trotz des sicheren Vorganges Albattânî, bei Niederschrift der fünf Bücher von den Dreiecken eine Tangentenanwendung noch nicht kannte. Jetzt war dieser Fortschritt erfolgt, war zugleich ein weiterer Fortschritt eingetreten, der nicht sowohl der Trigonometrie als dem Zahlenrechnen angehört. Die Tangenten, welche aber diesen Namen noch nicht führen, sondern einfach numeri heissen[1]), sind als ganzzahlige Längen berechnet, welche naturgemäss nach einer zum voraus angenommenen Länge des Kreishalbmessers sich bemessen. Die Tangente von 45^0 muss als dem Halbmesser gleich jene Zahl uns erkennen lassen, und bei ihr findet sich[2]) die Zahl 100000. Zum ersten Male ist also hier reine Decimaltheilung eingetreten, während Peurbach (S. 182) den Halbmesser zu 600000, Regiomontan selbst (S. 266) ihn zu 60000 annahm, und darin noch eine Vermengung der alten Theilung nach Sechzigsteln mit der dem Stellungswerthe der Ziffern entsprechenden Zehntheilung benutzte. Regiomontan ist sich — und das stellen wir fast noch höher als den Fortschritt selbst — klar bewusst gewesen, dass er einen solchen vollzog. In der 10. der Tabula directionum vorausgeschickten Aufgabe heisst es ausdrücklich[3]), die Rechnung werde leichter, wenn man den Sinus totus zu 100000 wähle.

Noch grössere Genauigkeit suchte Regiomontanus in zwei Sinustafeln zu erreichen, welche er ursprünglich den Büchern über die Dreiecke als Anhang beizufügen gedachte[4]). Bei der spätern Herausgabe durch Schöner 1533 unterblieb dieses aber. Statt der Tafeln wurde ein ganz anderer Anhang gedruckt, von welchem wir gleich zu reden haben, und die Tafeln erschienen erst 1541, wenn auch durch denselben Herausgeber Johannes Schöner und in derselben nürnberger

[1]) Kästner, I, 559 bei Gelegenheit einer Beschreibung einer Druckausgabe der *Tabula directionum* von 1606. [2]) Ebenda I, 557. [3]) Pfleiderer S. 29: *Facilius tamen idem efficies si tabula tua maximum sinum habeat 100000.* [4]) In der Vorrede zu *De triangulis* heisst es: *Ad hacc demum accedit Tabulae sinum non minus utilis quam nova compilatio.*

Druckerei bei Johann Petreius (oder Hans Peterlein) zum Drucke befördert[1]) wie die Bücher De triangulis. Diese Sinustafeln gehen in den Winkeln von Minute zu Minute und nehmen den Halbmesser in der einen Tafel zu 6000000, in der anderen zu 10000000, auch hier also mit bewusster, aber wahrscheinlich späterer Neuerung, denn in Regiomontan's Compositio tabularum sinuum, dem Vorberichte zu den Tafeln, ist von der Tafel decimalen Halbmessers gar nicht die Rede. Was die Tafel für den Halbmesser 6000000 betrifft, so sagt Regiomontan ausdrücklich, er habe einige der Sinusse sogar auf den Halbmesser 600000000 berechnet, aber die Tafeln im Ganzen bei dem Maassstabe 6000000 belassen. Ein Halbmesser von 6000000, sagt er überdies, genüge um in den Winkeln eine Genauigkeit von Secunden zu erzielen, während man mit dem Halbmesser 60000 auskomme, falls man es bei Winkelminuten bewenden lasse.

Johannes Schöner, sagten wir soeben, habe den Büchern De Triangulis statt der grossen Sinustafeln einen anderen Anhang beigefügt. Es ist die Streitschrift gegen die Kreisquadraturen von Cusanus. Sie besteht aus verschiedenen Rechnungen, welche mit Ort und Tagesangabe versehen sind, wo und wann Regiomontan sie anstellte, und welche dadurch sichern, dass dieser vom 26. Juni bis zum 9. Juli 1464 in Venedig sich aufhielt (S. 257), in angestrengtester Thätigkeit mit verschiedenen Arbeiten wechselnd. Damals also, einen Monat etwa vor dem Tode des Cardinals, studirte Regiomontan dessen Schriften, welche Peurbach bereits, zuerst vertrauend, dann mit wachsendem Misstrauen gelesen hatte[2]). Regiomontan schlug dabei denjenigen Weg ein, der immer einzuschlagen ist, wenn eine sogenannte Kreisquadratur auch nur auf ihre angenäherte Richtigkeit geprüft werden will. Er ging aus von der durch Archimed in strengster Weise begründeten fortlaufenden Ungleichung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ und suchte alsdann den aus den vorgeschlagenen Constructionen sich ergebenden Werth der Verhältnisszahl des Kreisumfangs zum Durchmesser mittels Rechnung zu bestimmen. Sobald dieser Werth ausserhalb der archimedischen Grenzen liegt, und das war bei allen Versuchen

[1]) Kästner, I, 540 flgg.: *Tractatus Georgii Purbachii super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis, idem compositio tabularum sinuum per Joannem de Regiomonte. Adiectae sunt Tabulae sinuum duplices per eundem Regiomontanum.* [2]) *De triangulis* etc. (1533) Anhang pag. 51: *Georgius ille doctissimus Mathematicorum praeceptor olim meus quandam curvi rectificationem brevem admodum mihi obiecit ac factu expeditissimam, cui principio quidem plurimum fidei habuit autoritate inventoris persuadente, ubi vero pro acumine ingenii sui inventum huiusmodi examinare coepit, nam demonstrationem nusquam comperit, longe aliter quam ratus erat accidere didicit.*

von Cusanus der Fall, muss die Construction falsch sein. Der Ton der Streitschrift ist ein ungemein milder, und das Schärfste, was in dem einleitenden Gespräche zwischen einem Aristophilus und einem Critias vorkommt, ist die nicht einmal gradezu als Vorwurf auftretende Behauptung, Cusanus habe sich eines philosophischen, aber keines mathematischen Beweises bedient[1]). Das sticht sehr gegen andere Streitschriften Regiomontan's ab, am vortheilhaftesten gegen die, mit welcher er Georg von Trapezunt (S. 257) bedachte.

Die übrigen im Drucke erschienenen Werke Regiomontan's dürfen wir übergehen, weil wir die Geschichte der Astronomie grundsätzlich ausser Acht zu lassen fortfahren. Dagegen haben wir uns noch mit Zusätzen zu einer Euklidhandschrift, die einst Regiomontan's Eigenthum war, dann auch mit seinem Briefwechsel zu beschäftigen. Die genannte Handschrift enthält die Atelhard'sche Euklidübersetzung und ist entweder ganz oder jedenfalls zum Theile von Regiomontan geschrieben. Man hat dieses aus der Uebereinstimmung der Schriftzüge des Textes, einiger wichtigen Anmerkungen und einer Vorrede, die sich selbst als *Elementa Euclidis, praefatio. Joh. de Regiomonte αὐτοῦ* bezeichnet, erkannt[2]). Das Manuscript selbst befindet sich auf der Stadtbibliothek zu Nürnberg[3]). Zu dem 32. Satze des I. Buches, mithin an der genau gleichen Stelle, zu welcher einst Campanus (S. 104) die Winkelsumme des Sternfünfecks herleitete, hat auch Regiomontan eine Anmerkung von ziemlichem Umfange. Sie beginnt mit dem Satze, jedes Vieleck besitze als Winkelsumme so viel mal zwei Rechte, als seine Rangordnung unter den möglichen Vielecken sei. Es sei nämlich das Dreieck das erste Vieleck, das Viereck das zweite, das Fünfeck das dritte u. s. w., kurzum die um 2 verringerte Anzahl der Ecken bestimme die Rangordnung[4]). In ebensoviele Dreiecke lasse sich das vorgelegte Vieleck von einem Eckpunkte aus zerlegen, und da die Winkel eines jeden dieser Dreiecke zwei Rechte betragen, so folge der ausgesprochene Satz. Dessen Beweis könne übrigens auch so geführt werden, dass man von einem Innenpunkte des Vielecks nach allen Endpunkten Linien ziehe, welche genau so viele Dreiecke hervorbringen, als das Vieleck Seiten besitze, und deren Winkelsumme müsse dann um die vier Rechte verkleinert werden, welche die Winkel um jenen Innenpunkt betragen. Daraus folgt als weiterer

[1]) *De Triangulis* etc. (1533) Anhang pag. 25: *Critias. Potere recordari quo demonstrationis genere usus fuerit ille philosophus, mathematico videlicet, an alio quopiam? Aristophilus: Mathematicum haud videtur.* [2]) S. Günther im *Bulletino Boncompagni* VI, 332—338 und Unterricht Mittela. S. 247 Note 1. [3]) Die Signatur der Handschrift ist VI, 13. [4]) *breviter quotus est numerus angulorum, inde demto binario, tota ipsa est a prima.*

Satz, dass wenn (Fig. 47) sämmtliche Vielecksseiten nach einer Richtung hin verlängert werden, die entstehenden Aussenwinkel auch vier Rechte betragen müssen, als Unterschied beim Abziehen der Summen der Vieleckswinkel von doppelt soviel Rechten als Ecken vorhanden sind. Nun schliesst sich der Satz von der Winkelsumme des Sternfünfecks an, welcher in gleicher Weise wie von Campanus bewiesen wird. Nur darin findet sich ein Unterschied, dass Regiomontan das Sternfünfeck als ein solches beschreibt, in welchem jede Seite zwei von den übrigen schneide[1]), eine Beschreibung, welche auch von der durch Bradwardinus gebrauchten (S. 115) im Wortlaute abweicht. Diese Abweichungen erscheinen uns um so bewusster, je sicherer bei Regiomontan's hoher Gelehrsamkeit anzunehmen ist, dass er mit den Leistungen von Campanus und Bradwardinus, seinen Vorgängern in der Lehre von den Sternvielecken, bekannt gewesen sein muss. Die Winkelsumme jedes derartigen Vielecks, in welchem jede Seite zwei von den übrigen schneidet, ist um acht Rechte kleiner als ihre doppelte Eckenzahl. Diese Sternvieleckswinkel gehören nämlich (Fig. 48) eben so vielen kleinen Dreieckchen an als es Seiten, beziehungsweise Ecken gab, und von deren doppelter Anzahl (als Summe sämmtlicher Dreieckswinkelchen in Rechten ausgedrückt) ist die Summe der Winkel an der jedesmaligen Grundlinie abzuziehen. Letztere aber ist, vermöge zweimaliger Anwendung des früheren Satzes von den Vieleckaussenwinkeln, stets acht Rechte. Lässt man weitere Sternvielecke so entstehen, dass jede Seite vier andere schneide, oder dass jede Seite sechs andere schneide, so ist die Winkelsumme in Rechten dahin zu bemessen, dass von der doppelten Eckenzahl das eine Mal 12, das andere Mal 20 abgezogen werden müssen. Hier ist offenbar ein Irrthum, da im letzteren Falle nur 16 abzuziehen sind, im Allgemeinen das Vierfache der von jeder Seite des Sternvielecks geschnittenen anderen Seiten. Zum Beweise wird einfach auf das Vorhergegangene verwiesen[2]). Regiomontan meint offenbar die Sache folgendermassen,

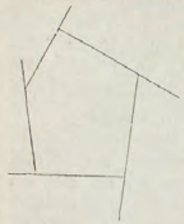

Fig. 47.

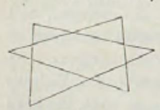

Fig. 48.

[1]) *Penthagonus cuius unumquodque latus duos secat ex reliquis.* Die Schreibart *penthagonus* mit th kann bei einem so guten Hellenisten, als Regiomontan es war, Wunder nehmen, ist aber in der ganzen Anmerkung streng festgehalten.
[2]) *Hae omnes et similes ex praemissis ostenduntur.*

wobei wir uns zur Abkürzung der Benennung Sternvielecke verschiedener Ordnung bedienen, die wir früher (S. 115) benutzt haben. Im gewöhnlichen n-eck ist die Winkelsumme (immer in Rechten ausgedrückt) $2n - 4$, also die Summe der Aussenwinkel nach einer Richtung $2n - (2n - 4) = 4$. Im Sternvieleck erster Ordnung ist desshalb die Winkelsumme $2n - 2 \cdot 4 = 2n - 8$, also die Summe der Aussenwinkel nach einer Richtung $2n - (2n - 8) = 8$. Beim Uebergange zum Sternvielecke zweiter Ordnung erscheinen (Fig. 49), wie aus der Zeichnung zu erkennen ist (welche übrigens ebensowenig wie Fig. 50 in der Originalhandschrift gezeichnet vorkommt), nicht neun kleine Dreieckchen, sondern Viereckchen in der Anzahl der Ecken, also mit der Winkelsumme $4n$. Von ihr ist abzuziehen zweimal die Summe von Aussenwinkeln von Sternvielecken erster Ordnung und einmal die Summe der ursprünglichen Vieleckswinkel oder $8 + 8 + (2n - 4) = 2n + 12$, und es bleibt $4n - (2n + 12) = 2n - 12$. Die neuen Aussenwinkel nach einer Richtung haben die Winkelsumme $2n - (2n - 12) = 12$. Beim Uebergange zum Sternvielecke dritter Ordnung, sofern er ausführbar ist, und Regiomontan weiss, dass solches erstmalig beim Neunecke (Fig. 50) der Fall ist, erscheinen neue Viereckchen. Von ihrer Winkelsumme $4n$ ist abzuziehen $12 + 12 + (2n - 8) = 2n + 16$ als zweimalige Summe von Aussenwinkeln von Sternvielecken zweiter Ordnung und einmaliger Summe von Winkeln von einem Sternvielecke erster Ordnung. Es bleibt folglich $4n - (2n + 16) = 2n - 16$. Die letzteren Beweisführungen sind weder bequem auszusprechen, noch sind deren Figuren leicht zu zeichnen, und so kann man schon von dieser Rücksicht aus begreifen, warum Regiomontan darüber wegeilte. Er verstand seine kurze Andeutung, und kam er dazu den Euklid (S. 259) im Drucke herauszugeben, wozu wir jedenfalls in dieser mit Anmerkungen versehenen nürnberger Handschrift eine Vorarbeit zu sehen haben, so war es noch immer Zeit, sich ausführlicher und deutlicher auszudrücken. Einen weiteren Zusatz hatte Regiomontan

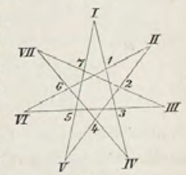

Fig. 49.

Fig. 50.

zu dem euklidischen Satze III, 30 gemacht[1]) d. h. zu dem Satze, dass der Winkel im Halbkreise ein Rechter sei. Man könne, sagt Regiomontan, auf diesen Satz gestützt eine Senkrechte auf eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derselben errichten (Fig. 51). Von einem beliebigen Punkte b ausserhalb der Geraden als Mittelpunkt und mit der Entfernung dieses Mittelpunktes b von dem Punkte a, in welchem die Senkrechte gewünscht wird, als Halbmesser beschreibt man einen Kreis, der die gegebene Gerade ausser in a noch in einem zweiten Punkte d schneidet. Letzteren verbindet man mit dem Kreismittelpunkte und verlängert diese Verbindungslinie bis zum abermaligen Durchschnitte mit dem Kreise in e, alsdann ist ea die gewünschte Senkrechte.

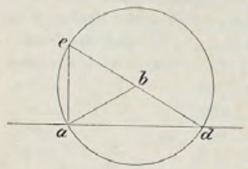

Fig. 51.

Wir wenden uns schliesslich zu dem im Drucke veröffentlichten **Briefwechsel**[2]). Es sind im Ganzen sechs Briefe Regiomontan's, wovon drei an **Bianchini**, zwei an **Jacob von Speier**, einer an Magister **Christian Roder** von Hamburg gerichtet. Der Letztgenannte ist uns bekannt als Professor der Universität Erfurt (S. 251). Bianchini gehört der Geschichte der Astronomie an. Wir haben nur zu berichten, dass er hochbetagt in Ferrara lebte, dass er schon mit Peurbach bei dessen italienischer Reise in freundschaftlicher Verbindung stand, und dass ganz ähnliche Beziehungen zu Regiomontan sich bei des letzteren früher (S. 256) erwähntem Aufenthalte in Ferrara von selbst ergaben. Jacob von Speier endlich war ein deutscher Astronom oder Astrolog, der im Dienste des Grafen Friedrich von Urbino stand. Mit Regiomontan's Briefen sind auch zwei Antwortschreiben des Bianchini, eines des Jacob von Speier veröffentlicht, zusammen also neun Briefe. Wir beabsichtigen keineswegs diese Briefe, so merkwürdigen Inhaltes sie sind, ausführlich zu besprechen. Nur einiges Geometrische, Einiges aus der Lehre von den bestimmten und unbestimmten Gleichungen heben wir noch hervor, während Einzelnes schon früher, wo gerade die Gelegenheit es mit sich brachte, beigezogen werden musste.

[1]) Die Kenntniss dieses Zusatzes verdanken wir freundlicher Privatmittheilung von H. **Max. Curtze** vom 1. März 1889. [2]) Die Briefe sind gedruckt in **Christ. Theoph. de Murr**, *Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et universitatis Altdorfinae.* Pars I (1786) S. 74—205.

Ganz eigenthümlich ist das **Verhalten Regiomontan's in seinen Briefen Campanus gegenüber**. Wenn zwischen einem Lebenden und einem mehr als anderthalb Jahrhunderte früher Verstorbenen eine Feindschaft vorhanden sein könnte, müsste man geradezu an eine solche denken. Wir wissen, dass unter den von Regiomontan geplanten Arbeiten eine Euklidausgabe sich befand unter Zugrundelegung der von Campanus herrührenden, aber frei von den durch diesen verschuldeten Fehlern[1]). Er kannte also zuverlässig die Uebersetzung, welcher er Fehler vorwarf, und in dem Briefe vom 4. Juli 1471, den er aus Nürnberg an Christian Roder schrieb, hebt er in den heftigsten Worten einen Fehler des Campanus hervor, dessen Bemerkungen zu den Definitionen des V. Buches (S. 105), gleich als wenn dieser des Fehlers sich schuldig gemacht hätte, den er umgekehrt Euklid vorwarf, Dinge durch sich selbst zu erklären[2]). Soll man vermuthen, Regiomontan habe nur die Fehler des Campanus bemerkt, aber dessen am Schlusse des IV. Buches vorgeschlagene Winkeldreitheilung übersehen, oder soll man annehmen, Regiomontan habe jene Dreitheilung nirgend gefunden (S. 105) und sei unabhängig von Campanus genau auf die gleiche Winkeldreitheilung verfallen? Zu einer dieser Annahmen oder zu der einer wenig redlichen Gehässigkeit gegen Campanus wird man gedrängt, wenn man die 1464 mit Bianchini gewechselten Briefe durchliest. Was diese Briefe, was mathematische Briefwechsel überhaupt so wichtig macht, das ist eine Fülle von Aufgaben der allerverschiedensten Natur, welche die Briefsteller einander vorzulegen lieben, das sind die Auflösungsversuche, welche in den Antwortschreiben sich vorfinden. So stellte Bianchini unter dem 5. Februar 1464 die Aufgabe[3]), aus der Sehne des Centriwinkels von 60^0 die des Centriwinkels von 20^0 zu finden, Regiomontan antwortet darauf ebenfalls im Februar 1464, es gebe verschiedene Verfahren, die Winkeldreitheilung auszuführen, eine davon sei folgende[4]), und nun erklärt er eben die Construction, welche Campanus am erwähnten Orte lehrt, ohne dessen Namen auch nur zu nennen.

Eine Aufgabe, welche in der Geschichte der Mathematik eine gewisse Rolle zu spielen bestimmt war, stellte Regiomontan in dem Briefe, welchen er um Neujahr 1464 an Bianchini richtete[5]): Den

[1]) **Doppelmayr**, S. 13. Der beabsichtigte Titel war: *Euclidis Elementa cum Anaphoricis Hypsiclis editione Campani, evulsis tamen plerisque mendis, quae proprio etiam indicabuntur commentariolo.* [2]) **Murr** l. c. pag. 191—192: *Pudet profecto recensere labores Campani, quibus frustra stabilire tentat principia quinti elementarum etc.* [3]) Ebenda pag. 105, Nr. 7. [4]) Ebenda pag. 138: *Iubetur septimo angulum qui est tertia pars duorum rectorum dividi in tres aequales; sunt certi modi id faciendi quorum unum adduco.* [5]) Ebenda pag. 98—99.

Inhalt des Sehnenvierecks im Kreise vom Durchmesser 60 zu finden, dessen Seiten sich wie die Zahlen 4, 7, 13, 17 verhalten. Bianchini hielt die Aufgabe für unlösbar[1]), worauf Regiomontan in dem mehrerwähnten Februarbriefe 1464 näher auf den Gegenstand einging, der allerdings seine Schwierigkeiten habe[2]). Die vier Strecken, aus denen ein Sehnenviereck gebildet werden soll, und die etwa a, b, c, d heissen, wovon a am kleinsten sein soll, müssen dem Gesetze gehorchen, dass je drei zusammen grösser als die vierte seien. In den Kreis mit dem Durchmesser a kann freilich das Sehnenviereck nicht eingezeichnet werden, ebensowenig in den Kreis mit dem Durchmesser $a+b+c+d$, weil ersterer zu klein, letzterer zu gross ist; folglich muss es einen Zwischenkreis geben, der die Einzeichnung zulässt. Es ist beiläufig bemerkt ersichtlich, dass diese Schlussfolgerung derjenigen des Campanus wie des Cusanus nachgebildet ist, in welcher der stetige Uebergang von einem Kleineren zu einem Grösseren vorgenommen wird. Ist das Sehnenviereck einmal gebildet, so muss die Summe zweier gegenüberstehender Winkel zwei Rechte betragen. Man kann dann immer dessen Diagonalen berechnen, weil, meint Regiomontan, deren Product sowohl als deren Quotient gegeben ist. Das Product ist allerdings nach dem ptolemäischen Lehrsatze gegeben, aber über die Möglichkeit den Quotienten zu finden, geht Regiomontan sehr flüchtig hinweg. Er begnügt sich, ähnlich wie er es in seinen Büchern vom Dreiecke that, mit der Behauptung, dieses oder jenes Verhältniss sei gegeben, ohne es wirklich aufzustellen, und in einem Briefe vollends mag er es für noch weniger nothwendig gehalten haben, eine leicht verständliche Ableitung einer Formel zu geben. Regiomontan liess übrigens die Lehre vom Sehnenviereck nicht mehr aus den Augen. Unter den Aufgaben, welche er am 4. Juli 1471 an Magister Roder einschickte, ist auch die enthalten[3]), Fläche und Schwerpunkt des in den Kreis von 100 Fuss Durchmesser eingezeichneten Sehnenvierecks zu suchen, dessen Seiten sich wie die Zahlen 4, 7, 13, 19 verhalten. Man bemerkt sofort, dass gegen die ältere Fassung nur zwei Zahlen sich geändert haben und die Forderung des Schwerpunktes hinzugetreten ist. Auch diese letztere neue Forderung stellt einen wesentlichen Fortschritt dar. Schwerpunktsbestimmungen gehören bald zu ernsthaft betriebenen Forschungsgegenständen.

In dem gleichen Briefe an Bianchini verfiel übrigens Regiomontan in einen ganz unbegreiflichen Fehler. Er, der gegen Cusanus so richtig hervorhob, das Kennzeichen eines annehmbaren Werthes des

[1]) Murr l. c. pag. 101. [2]) Ebenda pag. 119—126. [3]) Ebenda pag. 197, Nr. 3.

Verhältnisses des Kreisumfanges zum Durchmesser bestehe darin, dass er zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ oder zwischen $\frac{1562}{497}$ und $\frac{1561}{497}$ liege, benutzt den Werth $\frac{1554}{497}$ und schreibt ihm noch obendrein die geforderte Eigenschaft zu[1]).

Wir reden nur noch von einer wesentlich geometrischen Aufgabe aus dem Briefe an Roder: Eine 10 Fuss lange Stange ist senkrecht aufgehängt, so dass ihr unteres Ende noch 4 Fuss vom Boden absteht. Man sucht den Punkt auf dem Boden, von welchem aus die Stange am längsten, d. h. unter grösstem Sehwinkel erscheint, beziehungsweise, da es unendlich viele solcher Punkte giebt, die alle auf einer Kreislinie liegen, sucht man den Abstand derselben vom unteren Ende der aufgehängten Stange[2]). Diese Aufgabe ist die erste Maximalaufgabe, welche seit Apollonius und Zenodorus bekannt geworden ist, und es dürfte von Wichtigkeit erscheinen, zu versuchen, ob nicht ein Weg gefunden werden könnte, der zur Lösung führt und Regiomontan zugänglich war. Ein solcher Weg ist folgender[3]): Man denke sich (Figur 52) den gesuchten Punkt K auf CD bereits gefunden, welcher $\sphericalangle AKB$ zum grösstmöglichen macht und lege durch die drei Punkte A, B, K einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten EG von AB liegt. Dieser Kreis muss CD in K berühren. Hätte er nämlich einen zweiten Punkt L mit CD gemein, und läge auf CD ein dritter Punkt M zwischen K und L, so wäre $\sphericalangle AMB > AKB$ als Winkel, dessen Spitze innerhalb des Kreises liegt, während er auf demselben Bogen aufsteht wie der Peripheriewinkel AKB. Diese Schlussfolgerung scheint Regiomontan so angemessen, dass wir kaum zweifeln, sein Gedankengang sei damit richtig errathen. Auch wie er die Aufgabe praktisch gelöst haben kann, ist leicht zu errathen. Der Mittelpunkt F des gesuchten Kreises muss, sagten wir, auf EG liegen, und gleich weit, fügen wir hinzu, von A, B und K entfernt sein. Dabei ist $CEFK$ ein Rechteck, also $FK=CE$. Man hat daher nur mit CE im Halbmesser

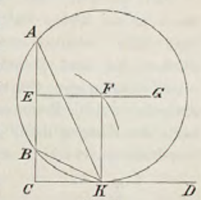

Fig. 52.

[1]) Murr l. c. pag. 137—138: *Usus sum proportione circumferentie ad diametrum sicut* 1554 *ad* 497. *hec enim est minor tripla sesquiseptima, maior autem tripla superpartiente decem septuagesimas primas non tamen hec est vera proportio sed veritati propinqua satis.* [2]) Ebenda pag. 201 oben. [3]) Ad. Lorsch, Ueber eine Maximalaufgabe. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, Hist.-litter. Abthlg. S. 120.

von B als Mittelpunkt aus einen Kreisbogen zu schlagen, welcher EG in F schneiden muss. Von diesem Punkte F aus als Mittelpunkt beschreibt man dann mit der eben benutzten Zirkelweite den Kreis ABK und hat damit K gewonnen. Den Abstand BK endlich liefert einmalige Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Fast noch auffallender sind die algebraischen Aufgaben, welche überall den geometrischen zugesellt sind, und welche Bianchini die Worte in die Feder gaben[1]), dass Regiomontan in den Regeln der Algebra hoch gelehrt sei, während er selbst nur in seiner Jugend, während er in kaufmännischen Rechenübungen sich abackerte, einiges zu seinem Vergnügen getrieben habe; beiläufig wieder ein neues Zeugniss, wenn wir dessen bedürften, dafür, dass in Italien die Algebra kaufmännische Uebung war. Regiomontan wechselt zwischen bestimmten und unbestimmten Aufgaben. Kenntniss der ersteren, wenn auch muthmasslich in beschränkterem Maasse, als er sie später besass, brachte Regiomontan gewiss schon aus Deutschland mit. Dass in Deutschland ein Bruder Aquinas in der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts sich mit Gleichungen viel beschäftigte, haben wir (S. 238) gesehen. Mit ihm verkehrte auch Regiomontan[2]), und zwar bevor er bei König Mathias in Ungarn war, also muthmasslich noch weit früher, nämlich vor der ersten italienischen Reise. In Italien dürften ihm dann Aufgaben zu Gesicht gekommen sein, die zu kubischen Gleichungen führten (S. 160). Zu eben solchen führt eine Aufgabe, welche Regiomontan Bianchini zu lösen vorschlägt[3]), wenn auch die Fassung dafür zu sprechen scheint, dass Regiomontan hier von Bianchini forderte, was er selbst zu leisten nicht im Stande war.

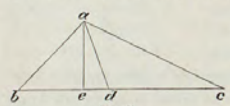

Fig. 53.

In einem Dreiecke abc (Fig. 53), dessen Seiten $ab = 18$, $ac = 25$, $bc = 29$ sind, zog ich, sagte er, von a zur Basis eine ad, so dass das Quadrat von db mit dem Producte von da in ab das Quadrat von ab gab. Wie gross ist bd? Sei $ad = y$, $bd = x$, so ist die Bedingung der Aufgabe $x^2 + 18y = 18^2$. Es sei nun die Senkrechte ae gezogen und $be = z$, so ist

$$ae^2 = ab^2 - be^2 = ac^2 - ce^2, \text{ d. h. } 18^2 - z^2 = 25^2 - (29 - z)^2,$$

$$z = \frac{18^2 + 29^2 - 25^2}{58} = \frac{270}{29},\; ae^2 = 18^2 - \left(\frac{270}{29}\right)^2,$$

[1]) Murr l. c. pag. 105—106: *Et haec volo sufficiant quantum ad regulas algebre de quibus comprehendo vos doctissimum esse, ego quidem in iuventute dum operationes mercantiarum exararem aliquantulum in hoc me delectavi.* [2]) Ebenda pag. 186. [3]) Ebenda pag. 144, Nr. 17. Am Schlusse der Aufgabe die Worte: *Si dabitis lineam bd dabo cordam unius gradus.*

$$de^2 = (bd - be)^2 = (x - z)^2 = x^2 - \frac{540}{29}x + \left(\frac{270}{29}\right)^2,$$

$$ad^2 = ae^2 + de^2,$$

d. h.

$$y^2 = 18^2 - \left(\frac{270}{29}\right)^2 + x^2 - \frac{540}{29}x + \left(\frac{270}{29}\right)^2 = x^2 - \frac{540}{29}x + 18^2.$$

Nach der Bedingung der Aufgabe ist $y = 18 - \frac{x^2}{18}$, $y^2 = 18^2 - 2x^2 + \frac{x^4}{324}$, also schliesslich durch Gleichsetzung der beiden Werthe von y^2 und Weglassung von 18^2 auf beiden Seiten, sowie durch Einrichtung in eine Form, bei welcher auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nur Positives erscheint,

$$\frac{x^4}{324} + \frac{540}{29}x = 3x^2.$$

Division durch x liefert endlich die kubische Gleichung:

$$\frac{x^3}{324} + \frac{540}{29} = 3x.$$

Ist denn, könnte man hier fragen, Regiomontan in der Lage gewesen eine solche Ableitung vorzunehmen, welche in seinem Briefe ebensowenig vorkommt, als die Schlussgleichung, zu welcher wir ihn gelangen liessen? Die Frage ist entschieden zu bejahen. Den Abschnitt be, casus, wie Regiomontan (S. 267) ihn nannte, mit ihm zugleich die Höhe ae zu berechnen, war eine geradezu einfache Aufgabe für den Verfasser der Bücher De triangulis omnimodis, und was dann noch übrig blieb, war eine einmalige Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes auf das Dreieck ade in Verbindung mit dem Wortlaute der Aufgabe. Zweifelhaft könnte nur Eines erscheinen: ob Regiomontan die Division durch x vollzog und so die Gleichung 4. Grades auf eine solche 3. Grades zurückführte. Aber gerade diesen Zweifel lösen uns die Zusatzworte Regiomontan's: Gebt Ihr mir die Linie bd, so gebe ich Euch die Sehne, welche zu dem Bogen von 1^0 gehört. Der Zusammenhang zwischen der Sehne von 3^0, welche unter Anwendung von Quadratwurzelausziehungen gefunden werden kann, mit der von 1^0 liegt in der Gleichung:

$$(\text{chorda } 1^0)^3 + \text{chorda } 3^0 = 3 \text{ chorda } 1^0.$$

Die Worte Regiomontan's geben uns mithin dreierlei zu erkennen: Erstlich, dass er wusste, dass die Ermittelung von chorda 3^0 mit Hilfe von quadratischen Gleichungen möglich war, dass aber dann eine kubische Gleichung gelöst werden musste, um chorda 1^0 zu finden. Zweitens, dass die Lösung dieser Aufgabe seine Kräfte überstieg. Drittens, dass er das Eingeständniss seines Nichtkönnens in die geheimnissvollere Maske kleidete, dass er eine andere kubische Gleichung gleicher Form zur Auflösung aufgab. Die gleichen Mittel, so verstehen wir jetzt seine Schlussworte, welche gestatten, die eben ausgesprochene Aufgabe durch Rechnung zu beantworten, führen auch zur rechnenden Dreitheilung des Winkels.

Wir sprachen von unbestimmten Aufgaben, welche Regiomontanus zu stellen liebte. Wir machen deren 10 namhaft, die wir etwas übersichtlicher ordnen, als sie in Regiomontan's Briefen erscheinen[1]), und die wir zudem in der heute üblichen Schreibweise mittheilen:

1. $x + y + z = 240.$ $\quad 97x + 56y + 3z = 16047.$
2. $17x + 15 = 13y + 11 = 10z + 3.$
3. $23x + 12 = 17y + 7 = 10z + 3.$
4. $x + y + z = 116.$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 4624.$
5. Drei in harmonischer Progression stehende Zahlen zu finden, deren kleinste > 500000 ist.
6. Drei Quadratzahlen zu finden, welche in harmonischer Progression stehen.
7. Drei Quadratzahlen zu finden, welche in arithmetischer Progression stehen und deren kleinste > 20000 ist.
8. Drei Quadratzahlen zu finden, welche in arithmetischer Progression stehen, und deren ganzzahlige Wurzeln die Summe 214 besitzen.
9. Vier Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist.
10. Zwanzig Quadratzahlen zu finden, deren Summe eine Quadratzahl und > 300000 ist.

Diese Aufgaben beziehen sich auf theilweise ziemlich schwierige Gegenstände, welche auch einem heutigen Zahlentheoretiker Kopfbrechen zu veranlassen im Stande sind, so dass ebensowohl die Frage berechtigt erscheint, wodurch Regiomontan veranlasst wurde, gerade solche Aufgaben zu stellen, wie auch die andere Frage, ob er selbst die zugehörigen Auflösungen besessen haben mag?

In ersterer Beziehung darf gewiss darauf hingewiesen werden, dass Regiomontan so glücklich war (S. 263), eine Handschrift der Diophantischen Arithmetik zu entdecken, und dass er den unschätzbaren Werth des Aufgefundenen alsbald erkannte[2]). Aber fragen wir

[1]) Die Aufgaben finden sich folgendermassen vertheilt: Murr l. c. pag. 99 steht Aufgabe 2; ebenda pag. 144—145 Aufgabe 1, 4, 8; ebenda pag. 159—160 Aufgabe 3, 9, 6; ebenda pag. 201 Aufgabe 5, 7, 10. [2]) Ebenda pag. 135—136.

weiter, könnte solches selbst einem Regiomontan zugetraut werden, wäre er im Stande gewesen, das Werk sofort als in Wahrheit wunderschön und von grosser Schwierigkeit zu bezeichnen, wenn er ganz unvorbereitet an den ihm ganz neuen Gegenstand herangetreten wäre? Ist nicht weit eher anzunehmen, Regiomontan sei mit Aehnlichem schon vertraut gewesen, er sei in Deutschland in der dort bekannten Regel Ta yen (S. 240) geübt gewesen, er sei dann in Italien noch näher der Zahlentheorie zugeführt worden durch Umgang mit dortigen Gelehrten, welche den Lieblingsforschungen Leonardo's von Pisa nie ganz untreu geworden waren? Erinnert doch schon die 7. wie die 8. der obigen Aufgaben noch deutlicher an die Untersuchungen Leonardo's als an die des Diophant. Und auch eine weitere Berechtigung zu unserer Annahme glauben wir in der Thatsache zu finden, dass nicht bloss die 10 Fragen des Regiomontan, dass auch drei richtige Antworten erhalten sind. Bianchini weiss[1]), dass 2. durch 1103 auch durch 3313 und durch viele andere Zahlen erfüllt wird. Jacob von Speyer nennt[2]) als Auflösung von 1. die drei Werthe 114, 87, 39, als Auflösung von 9. die beiden Summen

$$1 + 4 + 16 + 100 = 121 \quad \text{und} \quad 4 + 16 + 49 + 100 = 169.$$

Und wenn auch Bianchini durch die nachfolgenden Worte, er wolle sich die Mühe nicht geben, weitere Lösungen zu suchen, zu erkennen giebt, dass er die allgemeine Auflösung $2210n + 1103$ nicht besass, so ist doch keineswegs anzunehmen, dass solche Fragen durch blosses Herumtasten ihre Beantwortung finden konnten, ohne dass den Bearbeitern jemals vorher ähnliche Gegenstände vorgelegen hätten.

Die zweite von uns aufgeworfene Frage können wir nur dahin beantworten, dass Regiomontam mindestens glaubte, zu seinen Aufgaben auch entsprechende Lösungen zu besitzen, mochten sie nun richtig sein oder nicht. Antwortet er doch z. B. dem Jacob von Speier[3]) bezüglich dessen Auflösungen von 9.: „Du giebst 4 Quadratzahlen von der Art, wie ich sie verlangte. Es möchte aber schwer halten, zehn solcher Gruppen von Quadratzahlen aufzufinden, ich meine 40 unter einander verschiedene Quadratzahlen, die vierweise vereinigt wieder ein Quadrat geben, wenn man nicht die Uebung eines Kunstgriffes diese zu beschaffen besitzt, und diesen Kunstgriff gerade verlangte ich.“ Es fällt schwer, sich der Meinung zu verschliessen, dass Regiomontan, während er so schrieb, sich im Besitze eines derartigen Kunstgriffes fühlte; es fällt bei der Art, wie er von dem Kunstgriffe spricht, fast noch schwerer anzunehmen, derselbe habe nur darin bestanden, aus einer bekannten Auflösung

[1]) Murr l. c. pag. 103. [2]) Ebenda pag. 167—168. [3]) Ebenda pag. 175.

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = k^2$ beliebig viele andere durch Vervielfachung mit irgend einem n^2 abzuleiten, wenn wir uns auch versucht fühlen, bei den Aufgaben 7. und 10. an derartige Vervielfachungen zu denken.

Als wir von Regiomontan's wissenschaftlichen Leistungen zu reden uns anschickten, sagten wir zum voraus, die Unstetigkeit seines Lebens bilde den Hintergrund, von welchem die Grösse seiner Leistungen sich abhebe. Wir liessen damit ahnen, es sei ein grosser Verlust gewesen, den die Wissenschaft durch den Tod des erst 40jährigen Mannes erlitt. Wir dürfen nicht von Regiomontan Abschied nehmen, ohne das damals Vorausgesandte zu wiederholen. Wir haben in Regiomontanus einen Mathematiker allerersten Ranges kennen gelernt, ebenbürtig einem Leonardo von Pisa, einem Jordanus Nemorarius, einem Oresme, um nur die drei Namen zu nennen, die bisher den besten Klang hatten von allen in diesem Bande zur Rede gekommenen. Erster abendländischer Bearbeiter einer wirklichen Trigonometrie hat er ihr eine Vollendung gegeben, welche bis in das XVIII. Jahrhundert hinein nur Ergänzungen, aber keine veränderte Behandlungsweise zuliess. Scharfsinniger Geometer, geübter Algebraiker, geistreicher Zahlentheoretiker hat er auf allen diesen Gebieten gezeigt, dass er auf der vollen Höhe der Zeit stand, und wäre es ihm beschieden gewesen, mehr als in kurzen Andeutungen sich zu ergehen, hätte er Musse gefunden, wie er es hoffte, sich eingehend mit anderen und anderen Theilen der Mathematik zu beschäftigen, so ist nicht zu ermessen, wie gewaltige Neuerungen er gewagt hätte. Ist doch der Regiomontan, den wir zu schildern hatten, selbst nur ein Bruchstück, wenn wir so sagen dürfen, des ganzen Regiomontan, während die Geschichtsschreiber der theoretischen und der praktischen Sternkunde sich mit andern grossen Leistungen des so früh Verstorbenen abfinden müssen.

Ohne in ihr Bereich überzugreifen, sei hier eine Vorrichtung kurz erwähnt, die zu irdisch messenden Zwecken nicht minder anwendbar, als sie sich bei Sternbeobachtungen als einfaches Messwerkzeug bewährte, lange Zeit hindurch fälschlich für eine Erfindung Regiomontan's galt. Wir meinen den Jacobsstab[1]). Nicht als ob Regiomontan's Name gar nicht mit dem Jacobsstab in Verbindung zu

[1]) Günther in der *Bibliotheca mathematica* 1885, S. 137—140 und 1890, S. 73—80. Ebenderselbe, Unterricht Mittela. S. 247, Note 3. Ebenderselbe, Martin Behaim (Bayrische Bibliothek Band XIII, Bamberg 1890), S. 22 flgg. — M. Steinschneider in der *Bibliotheca mathematica* 1889, S. 36—37 und 1890, S. 107. — A. Breusing, Die nautischen Instrumente bis zur Erfindung des Spiegelsextanten (1890), S. 36 flgg.

setzen wäre, aber es handelt sich bei ihm um eine wesentlich astronomische Abart. Die einfachste Gestalt des Jacobsstabes ist die (Figur 54) eines senkrechten Querstabes von unveränderlicher Länge, der auf einem in viele gleiche Theile getheilten Längsstabe verschiebbar ist und daran verschoben wird, bis das am Ende des Längsstabes befindliche Auge des Beobachters an dem oberen Ende des Querstabes vorbei einen Höhepunkt einvisirt; ein kleines Bleiloth am unteren Ende des Querstabes regelt die senkrechte Stellung. So kann der Höhenwinkel des einvisirten Punktes leicht bestimmt werden. Die Vorrichtung hiess baculus, genauer baculus geometricus, auch baculus Jacobi, wie man vermuthet von dem gesprenkelten Aussehen des eingetheilten Längsstabes, der ihn jenen Stäben vergleichbar macht, welcher nach biblischer Sage sich Jacob einst zu ganz anderen Zwecken[1]) bediente. Diesen geometrischen Stab hat schon Levi ben Gerson (S. 112), dessen Todesjahr auf 1344 bestimmt worden ist, beschrieben und hat dabei einen verjüngten Maassstab eingerichtet, der ihm gestattete, an seinem Stabe einzelne Winkelminuten abzulesen[2]). Der hebräische Name seiner Abhandlung entspricht dem in einer wiener Uebersetzung[3]) enthaltenen Titel *secretorum revelator*. Der Name des Instrumentes ist baculus Jacobi. Der gleiche Name findet sich in einem Münchener Codex[4]), welchen ein gewisser Theodorich Ruffi 1445—1450 niederschrieb. Regiomontan bediente sich zur Messung des scheinbaren Durchmessers von Kometen eines ähnlichen aber immerhin verschieden gehandhabten Jacobsstabes. Er visirte längs dem Längsstabe auf den Mittelpunkt des Sternes und verschob den Querstab, bis derselbe in ganzer Länge den Stern genau verdeckte. Darum hiess der Stab auch baculus astronomicus und kommt hier eben so wenig genauer in Betracht, als die nautische Bedeutung der bei den Schiffern unter dem Namen Gradstock in Uebung gekommenen Vorrichtung, welche Regiomontan's Schüler Martin Behaim den Portugiesen bekannt machte.

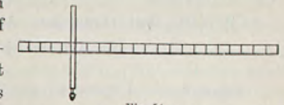
Fig. 54.

[1]) Genesis Kap. 30, Vers 37 flgg. [2]) Curtze brieflich. [3]) Lateinische Handschrift 5072. [4]) Cod. lat. 11067.