VORLESUNGEN

ÜBER

# GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

**MORITZ CANTOR.**

ZWEITER BAND.

VON 1200—1668.

MIT 190 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

## Vorwort.

Leser meiner im Druck erschienenen Schriften sind es schon gewohnt, dass ich das Vorwort dazu zu verwenden pflege, noch nachträglich diese oder jene Aenderung vorzunehmen, zu welcher mir die Anregung erst während des Druckes des betreffenden Bandes wurde. Indem ich mich anschicke, abermals in solcher Weise zu verfahren, komme ich zugleich der angenehmen Pflicht nach, über die Quelle zu berichten, welche mir nicht wenige dieser Aenderungen zuführte. Während die Druckbogen der zweiten Hälfte dieses Bandes zwischen Leipzig und Heidelberg hin- und herliefen, durfte ich am 23. August 1899 die Feier der Vollendung meines siebzigsten Lebensjahres begehen, und zwei bewährte Freunde und Arbeitsgenossen, Professor Max Curtze und Professor Dr. Siegmund Günther, mit welchen ich seit 1863, beziehungsweise 1866, in immer enger werdender Verbindung stand und stehe, liessen es sich nicht nehmen, mich durch das Erscheinen einer Festschrift, an deren Herstellung 32 Schriftsteller auf dem uns gemeinsamen Gebiete der Geschichte der Mathematik und Physik sich beteiligten, auf's Freudigste zu überraschen. Es ist mir Bedürfniss, allen diesen Mitarbeitern öffentlich meinen wärmsten Dank auszusprechen und in diesen Dank auch die Teubnersche Verlagshandlung einzuschliessen, welche in der Ausstattung des Bandes noch zu überbieten wusste, was sie sonst in dieser Richtung leistet. Wie viel ich aus dieser Festschrift lernen durfte, wird theilweise noch in diesem Vorworte sich zeigen, denn sie ist es, von der ich oben als der Quelle so mancher Aenderungen, so mancher Verbesserungen sprach. Für andere Richtigstellungen bin ich brieflichen oder gedruckten Mittheilungen zu Danke verpflichtet, die sich an das Erscheinen der ersten Hälfte dieses Bandes knüpften.

S. 12 und S. 264. Wenn es auch richtig ist, dass Leonardo von Pisa der erste abendländische Schriftsteller war, welcher über die Zerfällung eines Bruches in eine Summe von Stammbrüchen sich ausliess, dass Regiomontan wiederum im Abendlande zuerst eine selbständige Trigonometrie verfasste, so durfte doch diese Beschränkung auf das Abendland nicht verschwiegen werden, nachdem Bd. I(2), 470 und 735 von dem Rechenbuche von Achmim und von Naṣir Ed-dîn das Gleiche berichtet ist.

S. 49. Neben den Wörtern *radix* und *res* kommt bei Leonardo von Pisa noch ein drittes Wort für die Unbekannte vor: *causa* (z. B. Leonardo Pisano II, 236 lin. 18). Diese wichtige Bemerkung hat H. Eneström in seinem Berichte über die erste Abtheilung dieser 2. Auflage des II. Bandes meiner Vorlesungen Gesch. Math. (Bibliotheca mathematica 1899, p. 49—57) gemacht. Ihre ganze Tragweite leuchtet ein, sobald man die Lautverwandtschaft zwischen *causa* und dem später in Übung gekommenen *cosa* in Erwägung zieht.

S. 72. Zum IV. Buche *De numeris datis* des Jordanus Nemorarius ist auf den Aufsatz: R. Daublensky von Sterneck, Zur Vervollständigung der Ausgaben der Schrift des Jordanus Nemorarius etc. (Monatshefte für Mathematik und Physik 1896. VII, 165—179) hinzuweisen.

S. 87—88 und S. 379. H. Eneström macht darauf aufmerksam, dass die Bestimmung des Todesjahres des Sacrobosco auf 1256 neuerdings erhobenen Zweifeln gegenüber nicht mehr festgehalten werden kann; ferner dass Sacrobosco wenn auch im Allgemeinen seine Quellen verschweigend doch einmal, und zwar bei der Ausziehung der Quadratwurzel, sich auf die Arithmetik des Boethius bezieht; endlich dass das von Clichtovaeus herausgegebene *Opusculum de praxi numerorum* thatsächlich mit Sacrobosco's Tractatus de arte numerandi übereinstimmt.

S. 112. Zu Levi ben Gerson ist zu vergleichen Curtze, Die Abhandlung des Levi ben Gerson über Trigonometrie und den Jacobstab (Bibliotheca mathematica 1898, p. 97—112). Die der Abhandlung vorangehende *Epistola auctoris* scheint zu beweisen, dass Levi, als Petrus von Alexandrien seine Abhandlung aus dem Hebräischen ins Lateinische übersetzte, zum Christenthum übergetreten war. Unter vielen der Beachtung würdigen Stellen erwähne ich den Sinussatz der ebenen Trigonometrie mit einem sehr eigenartigen Beweise (l. c. S. 105 und 107).

S. 123. Da Johannes de Muris schon 1321 als Schriftsteller auftrat, so muss das Poggendorff entnommene Geburtsjahr 1310 unrichtig sein. In Verbindung mit dieser Bemerkung berichtige ich zugleich zwei Druckfehler: S. 254, Note 2, ist 1654 und nicht 1555 das Druckjahr von Gassendi's Schrift; S. 345 Note 3 ist Schwenter anstatt Schmenter zu lesen.

S. 215. Jahreszahlen auf Münzen in Stellungszahlen treten früh in der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts, nicht erst gegen das Ende



auf. H. G. Wertheim hat (Bibliotheca mathematica 1898, pag. 120) auf eine solche Münze von 1458 hingewiesen.

S. 230 und S. 296. Libri's Behauptung des Vorkommens der Zeichen + und — bei Lionardo da Vinci ist, laut einer Bemerkung des H. Eneström, durch Govi als unrichtig widerlegt worden. H. Eneström gibt ferner an, eine von Lionardo da Vinci herrührende Handschrift *Il codice di Leonardo da Vinci nella biblioteca del Principe Trivulzio in Milano* sei 1891 durch Luca Beltrami und Angelo Della Croce in Mailand dem Drucke übergeben worden.

S. 235. H. Curtze hat die in der Münchner Bibliothek befindliche deutsche Uebersetzung des Robertus Anglicus von 1477 nunmehr (Festschrift S. 43—63) zum vollständigen Abdrucke gebracht, wofür man ihm bei der geringen Zahl ähnlicher deutscher Schriften aus der genannten Zeit nur dankbar sein kann. Die deutsche Uebertragung der Kunstausdrücke, wie *hofstat* für area, *begrifflichkeit* für capacitas, *zwiestand* für distantia u. s. w., dürfte auch den Sprachforscher zu fesseln im Stande sein.

S. 248. In der Dresdner Handschrift C 80, welche einst in dem Besitze des Johannes Widmann war, und welche später von Adam Riese benutzt worden ist, finden sich die sogenannten Randaufgaben der Dresdner Algebra. Während man sich früher mit der Angabe begnügen musste, sie seien von einer anderen Hand als der des Schreibers des Textes hinzugefügt, ist H. Wappler (Festschrift S. 539—554) bei erneuter Prüfung der Handschrift zu weiteren Ergebnissen gelangt. Er hat erkannt, dass die in ihr enthaltene deutsche Algebra die früher unverstanden gebliebene Datirung von Ostern 1481 trägt. Er hat ferner erkannt, dass die Randaufgaben von der Hand des Johannes Widmann herrühren und hat daraus Veranlassung genommen, eine ganze Anzahl derselben zum Abdrucke zu bringen. Widmann zeigt sich hier als ganz gewandt in einer Kunst, auf welche man in der Kindheit der Algebra grosses Gewicht gelegt zu haben scheint, nämlich in der Kunst, die Unbekannte einer Textaufgabe so auszuwählen, dass man mit ihr allein den Gleichungsansatz zu Stande zu bringen vermag, ohne Symbole für weitere Unbekannte nöthig zu haben.

S. 349. Das Wort *anteriorer*, welches bei Chuquet das allmälige Verschieben des Divisors nach rechts bedeutet, ist viel älteren Ursprunges. H. Eneström hat *anteriorare* und *anterioratio* bei Sacrobosco nachgewiesen.

S. 351. Pappus hat in seinem VII. Buche als 8. Lemma zu dem Verhältnissschnitte des Apollonius (ed. Hultsch II, 688 und 690) den genau gleichen Satz, dass $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$ stets zwischen $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ liege, ausgesprochen, auf welchen Chuquet's Regel der mittleren Zahlen gegründet ist. Indem ich auf diese wenig bekannte Thatsache hinweise, bemerke ich jedoch, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Chuquet den damals nur in griechischer Sprache handschriftlich vorhandenen Pappus gelesen haben sollte, eine ausserordentlich geringe ist, und dass ferner Pappus keinerlei Anwendung von seinem Satze gemacht hat.

S. 420. Johann Böschenstein hat nach Angabe von H. Felix Müller (Festschrift S. 308 Note 23) seine Regeln, ähnlich wie Georg Reichelstain es that, in deutsche Verse zu kleiden geliebt. Er war auch als Wiedererwecker der hebräischen Sprache in Deutschland bekannt. Nach H. Steinschneider (Festschrift S. 474—475) hielt es Böschenstein eben darum für nothwendig, Verwahrung dagegen einzulegen, als ob er von jüdischen Eltern abstamme, was aber deshalb doch nicht unmöglich erscheine.

S. 429. Ich hege nicht den leisesten Zweifel an der Richtigkeit der Herleitung der Wortverbindung *regula cecis* von *Zeche*. Gleichwohl möge der Vollständigkeit wegen mit H. Eneström auf Bibliotheca mathematica 1896 pag. 96 und 120, 1897 pag. 32 hingewiesen werden, wo von einer durch den dänischen Mathematiker J. W. Lauremberg 1643 mitgetheilten Herleitung aus dem Arabischen, richtiger aus dem Türkischen, von *sikkir* = der Trinker die Rede ist.

S. 438. Bezüglich des Standpunktes, welchen Stifel dem Irrationalen gegenüber einnahm, hat H. Pringsheim (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften I, 51) unter Berufung auf die Stelle der Arithmetica integra fol. 103 verso lin. 3 v. u. [*Item licet infiniti numeri fracti cadant inter quoslibet duos numeros immediatos, quemadmodum etiam infiniti numeri irrationales cadunt inter duos numeros integros immediatos. Ex ordinibus tamen utrorumque facile est videre, ut nullus eorum ex suo ordine in alterum possit transmigrare*] hervorgehoben, dass Stifel sich bereits den heutigen Ansichten insoweit näherte, als er anerkannte, dass jeder irrationalen Zahl gerade so gut wie jeder rationalen ein eindeutig bestimmter Platz in der geordneten Zahlenreihe zukomme.

S. 441 und S. 445. H. Eneström hat darauf hingewiesen, dass Stifel neben den Bezeichnungen der Unbekannten einer Gleichung und ihrer Potenzen, deren er sich in der Arithmetica integra bediente, in der Ausgabe der Rudolff'schen Coss von 1553 noch eine andere vorschlug und auch anwandte, welche den später benutzten Bezeichnungen sehr nahe verwandt ist. Fol. 61 verso der genannten Aus-



gabe ist nämlich gesagt: Es mag aber die Cossische progreß auch also verzeychnet werden.

0 1 2 3 4
1 . 1A . 1AA . 1AAA . 1AAAA

Und so fort ahn on ende. Eine Anwendung dieser Zeichen steht aber auf Fol. 465 verso in dem 13. Exemplum.

S. 449. Die Behauptung, es sei mit der deutschen Algebra nach Michael Stifel ziemlich rasch abwärts gegangen, bedarf einer Verbesserung, seit H. Staigmüller (Festschrift S. 431—469) die Verdienste des Tübinger Professors Johannes Scheubel in ein deutlicheres Licht gerückt hat. Ich habe (S. 550) dessen deutsche Bearbeitung des 7., 8. und 9. Buches der Euklidischen Elemente von 1558 beiläufig genannt. Schon vorher, und zwar 1550, hat Scheubel bei dem bekannten Basler Drucker Hervagius die sechs ersten Bücher des Euklid lateinisch herausgegeben und ihnen Regeln der Algebra vorausgeschickt. Die Euklidausgabe ist durch zwei Eigenthümlichkeiten besonders gekennzeichnet. Erstlich sind alle Buchstaben streng vermieden, und statt ihrer ist eine Beschreibung der betreffenden Punkte oder Linien angewandt, z. B. die Spitze des rechten Winkels, die Senkrechte aus der Spitze des rechten Winkels auf die gegenüberliegende Dreiecksseite und dergl. Euklid, sagt Scheubel, mache es im Wortlaute seiner Lehrsätze ebenso, und die Beweise sollten nichts einführen, was die Lehrsätze vermeiden. Zweitens gibt Scheubel, wo immer Dreiecksflächen in den Sätzen auftreten, Zahlenbeispiele, welche mit Hilfe der Heronischen Flächenformel $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ausgerechnet die Wahrheit des Satzes bestätigen müssen; an einen Beweis der Heronischen Formel selbst ist natürlich nicht gedacht. Die vorausgeschickte *Brevis regularum algebrae descriptio* ist durch Kürze der Darstellung wie durch reichen Inhalt ausgezeichnet. Indem ich der Hauptsache nach auf H. Staigmüller's Abhandlung verweise, betone ich nur, was auch zu S. 248 von Johannes Widmann lobend erwähnt wurde, die Geschicklichkeit mit einer Unbekannten auszukommen, wo die Natur der Aufgabe deren mehrere zu verlangen scheint. Scheubel lehrt ferner eine allgemeine Näherungsformel für die Auffindung irrationaler Wurzelwerthe höheren Grades kennen. In Buchstaben kommt sie darauf hinaus, dass, wenn $a^n < a^n + b < (a+1)^n$ ist, man näherungsweise zu schreiben hat:

$$\sqrt[n]{a^n + b} \sim a + \frac{b}{\binom{n}{1}a^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a + 1}.$$

Nachdem H. Staigmüller's Abhandlung gedruckt war, hat H. Curtze in der Tübinger Bibliothek die Originalhandschrift von Scheubel's lateinischer Uebersetzung der sechs ersten Bücher Euklid's aber ohne die im Druck von 1550 vorausgehende Algebra aufgefunden.

S. 459. Auch andere Schriftsteller vor wie nach Dürer haben den Versuch gemacht, die Kunstausdrücke der Mathematik zu verdeutschen. H. Felix Müller (Festschrift S. 303—333) hat eine grosse Anzahl solcher Uebersetzungsproben mit Quellenangabe vereinigt. Es ist lehrreich zu bemerken, wie wenige derselben Bürgerrecht errungen haben.

S. 548. Nach einer mir brieflich durch H. Hultsch mitgetheilten Berichtigung kann Joachim Camerarius in den Jahren 1557 und 1569 nicht als Nürnberger Humanist bezeichnet werden. In Nürnberg war Camerarius nur 1526—1535, dann in Tübingen, von wo aus er 1538 den Commentar des Theon von Alexandria zum Almagest herausgab, dessen Handschrift dem Nachlasse des Regiomontan entstammte. Seit 1541 wirkte Camerarius in Leipzig. Vgl. Bursian, Geschichte der classischen Philologie in Deutschland I, 185.

S. 572 flgg. Ueber die Schriften Stevin's hat mir H. Gravelaar höchst werthvolle Bemerkungen zugehen lassen. Die *Hypomnemata mathematica* (S. 572) sind die buchstäbliche Uebersetzung der in holländischer Sprache verfassten *Wisconstige Gedachtenissen* und erschienen in 5 Abschnitten, von welchen die 4 ersten als *Mémoires mathématiques du Prince Maurice de Nassau* in die Girard'sche Ausgabe von Stevin's Werken (1634) übergingen. Kästner's Beschreibung der Hypomnemata ist fehlerhaft. Die Schriften des 2. Abschnittes der Hypnomnemata sind ebensowenig wie die übrigen Theile ursprünglich in lateinischer Sprache verfasst, wonach Note 3 S. 620 zu berichtigen ist. Die *Problemata geometrica* (S. 573), gedruckt 1583 in Antwerpen, sind in der Leidner Bibliothek vorhanden. Ihr Inhalt ist grösstentheils in die späteren Bücher *De la practique de géométrie* hineinverarbeitet.

S. 583. H. Hunrath hat neuerdings (Festschrift S. 217—240) eine viel genauere Beschreibung als seiner Zeit in Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII von Vieta's *Canon mathematicus* (1579) geliefert. Ein Exemplar findet sich ebenso wie Vieta's *Universalium inspectionum ad Canonem mathematicum liber singularis* (1579) in der Landesbibliothek zu Cassel. Unter zahlreichen Näherungswerthen, welche dort angegeben sind, sei nur einer erwähnt, dem ich mich nicht erinnern kann anderwärts begegnet zu sein: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[4]{2} + \frac{1}{20}\sqrt{2}$.

S. 599. Brieflicher Mittheilung von H. Hunrath, der in der Lage war, die durch Snellius besorgte Ausgabe von L. van Ceulen, *De circulo et adscriptis liber* (1619) einzusehen, entnehme ich, dass die von mir den *Bouwstoffen* entnommenen Angaben irrig sind. In den Rechnungen van Ceulen's sind erst die Sehnen- und Tangentenvielecke mit $3 \cdot 2^{31}$ Ecken verwerthet, dann die mit $15 \cdot 2^{31}$ Ecken, und aus letzteren ist $\pi$ auf 20 Decimalstellen gefunden.



S. 600. Ueber eine nur 12 Blätter starke Abhandlung des Rhäticus aus dem Jahre 1551: *Canon doctrinae triangulorum* hat H. Hunrath (Festschrift S. 203—205) kurz berichtet.

S. 642. Das Räthsel, wer der „Lehrer“ Ylem war, ist in Folge einer neuen Untersuchung der Göttinger Handschrift durch H. Curtze im August 1899 gelöst. Die Handschrift beginnt nämlich mit der lateinischen Uebersetzung der Lehrsätze des II. Buches Euklid's, giebt für jeden derselben deutliche Erläuterungen und Beweise und fährt dann fort: nachdem jetzt die Sätze des Ylem, des *Praeceptoris Algebrae*, beendigt seien, beginne das Buch Algebrae selbst. Darnach kann kein Zweifel sein, dass der Verfasser des arabischen Urtextes, auf welchen die Handschrift jedenfalls zurückgeht, Ylem für den Namen Euklid's hielt und ferner dass er einsah, dass man das II. Buch der Elemente als Algebra auffassen kann. Wieso aber Euklid zu Ylem geworden ist, dürfte leicht zu begreifen sein, wenn man an die fast regelmässige griechische Bezeichnung als στοιχειωτής denkt, wovon Lehrer eine ganz erträgliche Uebersetzung ist. Was andere abendländische Leser aus Ylem machten, zeigt eine gleichfalls von H. Curtze im August 1899 in der Landesbibliothek zu Cassel aufgefundene Handschrift. Ihr zufolge wäre Euklides der Titel eines Buches gewesen, dessen Verfasser den Namen Elias führte. Dass aber Elias sehr leicht aus Ylem entstanden sein kann, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

S. 698. H. Caverni hat im IV. Bande seiner *Storia del metodo esperimentale in Italia* die Behauptung zu begründen gesucht, die Erkenntniss der Parabel als Wurflinie rühre nicht von Galilei, sondern von Cavalieri her, der die Entdeckung 1632 in seinem *Specchio ustorio* veröffentlichte. Demgegenüber hat H. Wohlwill (Festschrift S. 579—624) erwiesen, dass, wenn auch Cavalieri's Veröffentlichung durch den Druck die erste war, die durch sie bekannt gemachte wissenschaftliche Thatsache nichtsdestoweniger von Galilei herrührt, der sie muthmasslich schon vor 1610 besass, und durch welchen sie, sei es unmittelbar, sei es wahrscheinlicher mittelbar, Cavalieri bekannt wurde.

S. 712. Einen genauen Bericht über *Melchioris Jostelii Logistica Prosthaphaeresis Astronomica* hat H. von Braunmühl (Festschrift S. 17—29) nach einer Handschrift der Wiener Bibliothek veröffentlicht. Inzwischen hat H. Curtze die Originalhandschrift des Melchior Jöstel selbst in der Dresdener Bibliothek aufgefunden.

S. 777. Wenn auch die Geschichte der von Fermat gestellten Aufgabe, die Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$, wo $a$ eine nichtquadratische Zahl bedeutet, ganzzahlig zu lösen, im Texte richtig skizzirt ist, so wäre es doch wohl wünschenswerth gewesen, auf den literarischen Streit, der sich über diese Aufgabe erhob, und dessen Acten Wallis in dem sogenannten *Commercium epistolicum* von 1758 veröffentlicht hat, näher einzugehen, weil er auf die Art und Weise, in welcher Wallis einen Streit führte, ein helles Licht wirft, dessen Wiederschein vielleicht auch andere etwas dunkle Stellen der literarischen Thätigkeit des gleichen Verfassers, z. B. die geschichtlich sein sollenden Erörterungen seiner Algebra, von denen ich im III. Bande (Kapitel 82) handle, zu beleuchten vermag. H. Wertheim hat (Festschrift S. 557 bis 576) diese Lücke vortrefflich ausgefüllt. Wallis erscheint neben seinem Landsmanne Brouncker als der erheblich untergeordnete Geist, der bald die Aufgaben, zu deren Lösung er nicht im Stande ist, zu missachten vorgiebt, bald die Auflösungen Brouncker's so veröffentlicht, dass man zunächst Wallis einen grösseren Anteil daran zuzuschreiben geneigt ist, als ihm zukam. Auch Frénicle's Methoden, so empirisch sie waren, treten nunmehr mit den durch dieselben erzielten Erfolgen schärfer hervor.

S. 815. In der Behandlung der sogenannten Descartes'schen Ovalen tritt ein Bipolarcoordinatensystem zu Tage, dessen Erfindung man mit H. P. Tannery (Festschrift S. 510 letztes Alinea) weit sicherer als die des rechtwinkligen Coordinatensystems für Descartes in Anspruch zu nehmen hat. In dem gleichen Aufsatze (Festschrift S. 503—513) handelt H. Tannery von im Jahre 1701 gedruckten Auszügen aus Descartes'schen Aufzeichnungen, welchen kein zu grosser mathematischer Werth anhaftet.

Dieses sind die Berichtigungen und Ergänzungen, welche mir während des Druckes des Bandes bekannt geworden sind, und welche ich ihm auf seinen Weg in die Oeffentlichkeit noch mitzugeben wünsche.

Heidelberg im November 1899.

**Moritz Cantor.**

# Inhaltsverzeichniss.

# IX. Die Zeit von 1200—1300.

## 41. Kapitel.

### Leonardo von Pisa und sein Liber Abaci.

Leonardo der Pisaner und Jordanus Nemorarius! Mit diesen beiden Namen einen neuen Zeitabschnitt in der Geschichte unserer Wissenschaft ankündigend schloss der I. Band. Die gleichen Namen müssen uns jetzt die Ueberschriften der ersten Kapitel dieses II. Bandes liefern. Wir beginnen mit Leonardo von Pisa.

Seine Vaterstadt, an der Mündung des Arno gelegen, bildete mit Genua und Venedig die unter sich feindliche Dreizahl der mächtigsten Handelsstädte Italiens um das Jahr 1200. Mit dieser Bezeichnung ist der Kern der politischen Zustände der Appeninenhalbinsel enthüllt. Innere Zwistigkeiten, grossartige Handelsbeziehungen, das sind die Brennpunkte mittelalterlichen Staats- und Städtelebens in Italien. Die Bevölkerung war zusammengewürfelt aus den verschiedenen Stämmen, welche theils nebeneinander theils nacheinander die Herren des Landes gewesen waren. Altrömische, griechische, gothische, longobardische, fränkische Elemente waren in dem Völkerbrei aufgegangen, liessen aber gleichwohl an einzelnen Orten sich noch deutlich auseinanderhalten[1]). Araber waren (Bd. I, S. 664) durch mehrere Jahrhunderte im Besitze von Sicilien gewesen und nur theilweise am Ende des XI. Jahrhunderts durch Normannen verdrängt worden. Bis in's XII. Jahrhundert hinein reichen die Spuren von mehr als nur vereinzelten Bekennern des Islams auch auf dem italienischen Festlande. Weiss doch noch 1114 Donizo, der Verfasser einer Lebensgeschichte der Gräfin Mathilde von Toscana, von den vielen Heiden, Türken, Libyern, Parthern und schwarzen Chaldäern zu erzählen, die in Pisa ihr Wesen trieben[2]). Stammesgegensätze mögen demnach vielfach den Grund, wenn nicht den Anlass zu blutigen Fehden der einzelnen Städte gegeben haben. Verschärft wurden sie durch politischen und kirchlichen Zwiespalt. Wo Päpste

---

[1]) Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie I, 156 Note 1. Wir citiren dieses Werk künftig kurzweg als Libri. [2]) Monum. German. S. S. XII, 379.

und Gegenpäpste bald mit den Kaisern aus dem Hause der Staufen in offenem Kriege lebten, bald sie krönten, bald mit kaiserlichen Heeren in Rom einzogen, bald wieder vor diesen Heeren flohen; wo Städtebünde sich einigten und lösten; wo Verträge, kaum geschlossen, wieder gebrochen wurden: da hält es schwer zu sagen, was an diesen Erscheinungen als Folge, was als Ursache zu betrachten sei. So viel ist übrigens sicher, dass die kriegerische Kraft insbesondere der drei obengenannten Hafenstädte sich nicht bloss in gegenseitiger Bekämpfung in der Heimath aufrieb, sondern auch in fruchtbaren Handelsunternehmungen sich äusserte. Wir wissen (Bd. I, S. 850—851), von welch bedeutendem Einflusse die Kreuzzüge auf die Handelsbeziehungen des italienischen Kaufmannsstandes gewesen sind. Anwohner eines im Verhältniss zur Grösse des Landes unmässig langen Küstengebietes, vieljährige Nachbarn von arabischen Bewohnern Siciliens, mit denen sie Tauschverkehr zu treiben kaum jemals unterbrochen hatten, waren Italiens Kaufleute wie von der Natur darauf hingewiesen, den Handel mit den reichen Gegenden Vorderasiens wie nicht minder des nördlichen Afrikas zu vermitteln, mochten diese Gegenden als Kreuzzugsstaaten dem christlichen Glauben erworben sein, oder nach wie vor dem Islam huldigen. Venedig, Genua, Pisa waren, wie oben angedeutet, die drei Städte, welche wetteifernd um den ersten Rang des Handels und der Colonisation stritten, da und dort, häufig an gleichem Orte nebeneinander, Ansiedelungen gründend, welche nicht selten in Streitigkeiten, die zu blutigen Kämpfen führten, ihre Eifersucht bethätigten. Von Pisa's Ansiedelungen müssen wir besonders eine hervorheben[1]). Von Bugia als dem westlichsten Punkte bis Sfax finden wir um das Jahr 1200 pisanische Factoreien, grossartige Waarenhäuser verbunden mit ganze Stadttheile bildenden Wohnräumen für die ankommenden Schiffsleute wie für ansässig gewordene Beamte. Aehnliche Besitzungen der Pisaner sind in Alexandria, ähnliche an der vorderasiatischen Küste, besonders in Tyrus, ähnliche in Constantinopel vorhanden. Die Absicht bei den von den Herren des Landes nicht ungern gesehenen Niederlassungen gipfelte darin, dass die Ersten am Platze sich bestrebten, Zollvergünstigungen bei der Einfuhr und Ausfuhr von Waaren wo möglich für sich allein zu erlangen. Deren Mitgewährung an andere Handelsstädte z. B. an Genua oder Venedig nährte und stachelte die aus dem Mutterlande schon mitgebrachte Eifersucht. Es handelte sich mithin um ganz wichtige

[1]) Vergl. W. Heyd, Die mittelalterlichen Handelscolonien der Italiener in Nordafrika von Tripolis bis Marocco in der Zeitschr. f. d. gesammte Staatswissensch. XX, 617—660 (Tübingen 1864) und desselben Verfassers zweibändiges Werk: W. Heyd, Geschichte des Levantehandels im Mittelalter (Stuttgart 1879).



Dinge, welche die Beamten, die Zollaufseher und Schreiber einer solchen Niederlassung, zu besorgen hatten, um die Fürsorge dafür, dass die zugesicherten Vergünstigungen auch eingehalten wurden, dass den Kaufleuten aus ihrer Heimath keine höhere Zollgebühr abgefordert wurde, als sie vertragsmässig zu zahlen verpflichtet waren; es handelte sich unter Umständen um den Abschluss neuer Verträge. Die Stellung der Beamten, mochten sie auch nur Schreiber heissen, ist demnach keineswegs eine untergeordnete gewesen.

Von einem pisaner Schreiber wissen wir, der am Ende des XII. Jahrhunderts in Bugia lebte. Seinen Namen kennen wir nicht, wohl aber einen spöttischen Beinamen, den er führte, Bonaccio (der Gute), und welcher sich in der Ueberschrift eines von seinem Sohne Leonardo verfassten Werkes erhalten hat:[1]) Incipit liber Abaci Compositus a leonardo filio Bonacij Pisano. In Anno M°CC°II°. Er liess diesen Sohn Leonardo aus der Heimath kommen, um ihn bei einem Rechenmeister unterrichten zu lassen. Er sollte verschiedene Tage — per aliquot dies — dem Studium des Abacus widmen. Er wurde in die Kunst mit Hilfe der neun Zahlzeichen der Inder eingeführt, fand an der Wissenschaft Vergnügen, lernte auf Handelsreisen, die er später nach Aegypten, Syrien, Griechenland, Sicilien und der Provence unternahm, Alles kennen, was an jene Rechnungsverfahren sich anschloss. Aber dies Alles, sagt Leonardo, und der Algorismus und die Bögen des Pictagoras schienen mir nur ebensoviele Irrthümer verglichen mit der Methode der Inder[2]). Er habe desshalb eben die Methode der Inder enger umfasst, habe Eigenes hinzugefügt, Manches von den Feinheiten der geometrischen Kunst des Euclid beigesetzt und so das Werk geschaffen, welches er jetzt in 15 Abschnitten veröffentliche, damit das Geschlecht der Lateiner hinfort nicht mehr unwissend in diesen Dingen befunden werde.

In der That scheint das umfangreiche Werk — der vorhandene Abdruck erfüllt 459 Seiten — den Erfolg gehabt zu haben, welchen Leonardo sich von ihm versprach. Noch Jahrhunderte hindurch ist die Nachwirkung dieses merkwürdigen Buches unmittelbar zu erweisen. Die von Leonardo gebrauchten Beispiele sind von zähester Lebenskraft und haben, theilweise selbst aus grauester Vergangenheit stammend, weitere Zeiträume durchlebt, als die stolzesten Bauten des Alterthums.

[1]) Vergl. *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo pubblicati da Bald. Boncompagni* (Rom 1857—62) I, 1. Wir citiren immer Leon. Pisano mit nachfolgender Angabe von Band und Seitenzahl. Leonardo's Bildungsgang ist I, 1 Z. 16 v. u. beschrieben. [2]) *Sed hoc totum et algorismum atque arcus pictagore quasi errorem computavi respectu modi indorum.* Leon. Pisano I, 1 Z. 9 v. u.

Ueber den augenblicklichen Erfolg von Leonardo's liber Abaci — Abacus werden wir das Buch hinfort nennen — könnte der Umstand zweifelhaft machen, dass dem Verfasser so wenig als seinem Vater ein spöttischer Beiname erspart blieb. Bigollo, Tölpel, nennt sich Leonardo in Ueberschriften[1]) mit demselben Gleichmuthe, mit welchem er sich zu anderen Malen oder auch gleichzeitig Filius Bonacij nennt, woraus spätere Zusammenziehung den Namen Fibonaci gebildet hat, unter welchem Leonardo fast am häufigsten bekannt ist. Muthmasslich waren aber diese Spottnamen doch nur im Munde der kenntnisslosen Menge entstanden und ebendesshalb von Leonardo selbst in stolzem Gegenspotte angenommen worden. Ganz anders wurde der Abacus, wurde dessen Verfasser in den Kreisen der gebildeten Minderheit betrachtet und geachtet. Wir gehen schwerlich irre, wenn wir annehmen, dieses Werk sei es gewesen, welches Leonardo den Zutritt zum kaiserlichen Palaste eröffnete. Jedenfalls stand Leonardo in Hofkreisen mitten inne, als er die zweite Bearbeitung des Abacus veranstaltete, welche allein auf uns gekommen ist, und von welcher somit eigentlich gilt, was wir bisher angeführt haben.

Man könnte zunächst das Datum 1202 auf diese zweite Ausgabe beziehen, an deren Spitze es sich befindet, doch ist die Unmöglichkeit davon leicht zu erweisen. Die zweite Ausgabe beginnt nämlich mit einem Widmungsschreiben an Meister Michael aus Schottland, in welchem mitgetheilt ist[2]), es sei schon lange her, dass das Werk vom Abacus verfasst sei, und inzwischen habe Leonardo auch eine Schrift über die Praxis der Geometrie verfasst. Von dieser letzteren haben wir im folgenden Kapitel zu reden und werden sehen, dass sie von 1220 datirt ist. Jedenfalls nach 1220 muss also auch die zweite Ausgabe des Abacus gesetzt werden, allerdings „lange Zeit" nämlich, wie sich zeigen wird, wohl 26 Jahre später als die erste Ausgabe. Auf ebendenselben Zeitpunkt verweist aber auch die Persönlichkeit des Meister Michael aus Schottland[3]). Michael Scotus, der Hofastrolog Kaiser Friedrich II., der offenbar gemeint ist, wurde um 1190 in der schottischen Stadt Balwearie geboren, konnte also 1202 unmöglich als grosser Gelehrter, summe philosophe,

[1]) Leon. Pisano II, 227: *Incipit flos Leonardi bigolli pisani* und nach Libri II, 21 Note heisst es in einem Pariser Codex eines anderen Werkes Leonardo's: *Incipit pratica geometrie composita a leonardo Bigollosio fillio Bonacij pisano.* [2]) *Scripsistis mihi domine mi magister Michael Scotte, summe philosophe, ut librum de numero, quemdudum composui, vobis transscriberem . . . Verum in alio libro, quem de practica Geometrie composui . . .* [3]) *Nouvelle Biographie universelle* XXXV, 363 (Paris 1861).



in einem Widmungsschreiben angeredet werden. Er bereiste nach einem Studienaufenthalte in Paris auch noch Spanien, wo er 1217 in Toledo verweilte und mit Astronomie sich beschäftigte. Erst nach dieser Zeit kam er zu Kaiser Friedrich und mit diesem nach Italien. Es ist mindestens als wahrscheinlich, wenn nicht als gewiss zu betrachten, dass Michael Scotus einer der Gelehrten war, die Friedrich II. damit betraute, in Bologna Uebersetzungen aus dem Arabischen nach neu aufgefundenen griechischen Urtexten zu verbessern. So entstanden gereinigtere lateinische Ausgaben einiger aristotelischer Schriften, so eine Ausgabe des Almagest, welche im Laufe der Jahrhunderte in die Wolfenbüttler Bibliothek gelangte[1]). Der Tod des Kaisers im December 1250 gab den Anlass zur Entfernung seines Astrologen, der nun nach England an den Hof Eduard I. übersiedelte. Somit ist die Entstehungszeit der zweiten Ausgabe von Leonardo's Abacus innerhalb der Grenzjahre 1220 und 1250 zu suchen und es ist kein Grund vorhanden, an der Richtigkeit einer Notiz zu zweifeln[2]), welche die zweite Ausgabe in bestimmter Weise an das Jahr 1228 knüpft.

Die 15 Abschnitte, in welche das Werk zerfällt, führen folgende Ueberschriften[3]):

1. Von der Kenntniss der neun Zahlzeichen der Inder und wie mittels derselben jede Zahl anzuschreiben sei; ferner welche Zahlen und wie sie durch die Hände behalten werden können, sowie die Einführungen des Abacus (pag. 2—6).
2. Vom Vervielfachen ganzer Zahlen (pag. 7—18).
3. Vom Zusammenzählen ganzer Zahlen (p. 18—22).
4. Von dem Abziehen kleinerer Zahlen von grösseren (pag. 22—23).
5. Von dem Theilen ganzer Zahlen (pag. 23—47).
6. Vom Vervielfachen ganzer Zahlen mit Brüchen (pag. 47—63).
7. Vom Zusammenzählen, Abziehen und Theilen der Zahlen

[1]) Monatl. Correspond. z. Beförderung der Erd- und Himmelskunde, herausgegeben von F. v. Zach XXVII, 192—193 (Gotha 1813). [2]) Libri II, 24 Note 2: *Incipit liber Abaci a Leonardo filio Bonacci compositus anno 1202 et correctus ab eodem anno 1228.* Die gleichen Worte wurden von L. Gegenbauer, auf dessen briefliche Mittheilung ich mich stütze, in folgenden drei Handschriften des XIII. S. gefunden: a. Codex der Ambrosianischen Bibliothek in Mailand mit der Signatur J 92 p. sup. b. Codex der Bibliotheca pubblica in Siena mit der Signatur L. IV. 20. c. Codex der Vaticanischen Bibliothek in Rom mit der Signatur Palat. 1343. Die zuerst genannte Handschrift a. scheint sich durch zahlreiche Noten und Randglossen auszuzeichnen. [3]) Die Titel sind als Schluss der Einleitung I, 2 der Druckausgabe vereinigt, stehen dann aber auch als besondere Ueberschriften am Anfange der einzelnen Abschnitte.

mit Brüchen und von der Zerlegung vielfacher Theile in einzelne (pag. 63—83).

8. Von der Auffindung der Preise der Waaren nach der längeren Weise (pag. 83—118).

9. Von dem Umtausche der Waaren und ähnlichen Dingen (pag. 118—135).

10. Von der Genossenschaft unter Gesellschaftern (pag. 135—143).

11. Von der Mischung der Münzen (pag. 143—166).

12. Von den Auflösungen vieler Aufgaben, die wir als mannigfache[1]) bezeichnen (pag. 166—318).

13. Von der Regel Elchatayn und wie durch dieselbe fast alle mannigfache Aufgaben des Abacus gelöst werden (pag. 318—352).

14. Von der Auffindung der Quadrat- und Kubikwurzeln und von deren gegenseitiger Vervielfachung, Theilung und Abziehung, sowie von der Behandlung der mit ganzen Zahlen verbundenen Wurzelgrössen[2]) und ihren Wurzeln (pag. 352—387).

15. Von den Regeln, die zur Geometrie gehören und von den Aufgaben der Aljebra und Almuchabala (pag. 387—459).

Es wird nun nothwendig sein, den Inhalt der einzelnen Abschnitte übersichtlich zu besprechen und Einzelheiten hervorzuheben, soweit dieselben wichtig erscheinen.

Im ersten Abschnitte sind die als von den Indern herrührend erklärten, aber nach arabischem Vorbilde von der rechtsstehenden 1 nach der zu äusserst links befindlichen 9 geordneten Zahlzeichen, sowie die Null, welche von den Arabern *zephirum* genannt worden sei, abgebildet. Beim Zahlenschreiben soll man die Hunderter, Hunderttausender, Hundertmillionen u. s. w. oben, die Tausender, Millionen, Tausendmillionen u. s. w. unten accentuiren. Das Darstellen der Zahlen mittels Fingerbeugungen beginnt an der linken Hand, um sich an der rechten fortzusetzen. Die Gelenke der Finger spielen bei solchen Beugungen eine Rolle. Einmal ist das Daumengelenk als *nodus* bezeichnet[3]), während das Wort *articulus* nicht vorkommt. Die Einführungen, introductiones in ac ditione et multiplichatione numerorum[4]), sind nichts Anderes als eine Einsundeins- und eine Einmaleinstabelle.

Der zweite Abschnitt lehrt auf einer weissen Tafel, auf

[1]) *erraticus* = umherschweifend oder zerstreut heissen diese Aufgaben in der Zusammenstellung auf I, 2. Am Anfange des 12. Abschnittes selbst I, 166 steht dagegen *Capitulum duodecimum de quaestionibus abbaci.* [2]) *De tractatu binomiorum et recisorum.* [3]) Leon. Pisano I, 5 Z. 14. Das gleiche Wort *nodus* ist auch I, 305 mehrfach benutzt, wo von einem an einem Fingergelenke befindlichen Ringe die Rede ist. [4]) Ebenda pag. 6.



welcher die Zeichen leicht weggewischt werden können[1]), diejenige Multiplication ausführen, welche die Inder (Bd. I, S. 571) unter dem Namen der *blitzbildenden* übten, und geht dabei so weit, zwei achtziffrige Zahlen mit einander vervielfachen zu lassen. Zur Prüfung des Ergebnisses dient die vorher bewiesene Neunerprobe[2]). Das Product heisst regelmässig *summa multiplicationis*[3]).

Der dritte Abschnitt wendet die Addition auf die *schachbrettartige* Multiplication (Bd. I, S. 571) an. Die Neunerprobe wird neuerdings und zwar mittels durch Buchstaben angedeuteter aber nicht gezeichneter Linien bewiesen[4]). Wir lassen die nur an wenigen Stellen wegen vom Sinne gebotener kleiner Aenderungen nicht ganz wortgetreue Uebersetzung des Beweises folgen: „Um zu zeigen, woher diese Probe stammt, seien zwei Zahlen *.a.b.*[5]) und *.b.g.* gegeben, welche wir addiren wollen, und es sei also *.a.g.* die aus ihnen vereinigte Zahl. Nun sage ich, dass aus der Vereinigung des Gewichtes (*pensa*) der Zahl *.a.b.* mit dem Gewichte der Zahl *.b.g.* das Gewicht von *.a.g.* entsteht. Erstlich sei jede der Zahlen *.a.b.* und *.b.g.* durch 9 theilbar, 9 also Gemeintheiler von *.a.b.* und *.b.g.* Folglich ist auch die vereinigte Zahl *.a.g.* durch 9 theilbar, und Null ist ihr Gewicht, wie es aus der Addition der Probezahlen (*probe*) oder aus der Prüfung der Zahlen *.a.b.* und *.b.g.* erhalten wird. Ferner sei eine der beiden Zahlen durch 9 theilbar, die andere nicht, und es sei die Zahl *.a.b.*, die durch 9 theilbar ist, und bei der Theilung von *.b.g.* durch 9 bleibe *.d.g.* übrig. Die Zahlen *.d.b.* und *.b.a.* sind demnach durch 9 theilbar und ebenso auch ihre Summe *.d.a.* Weil nun die Zahl *.a.g.* über *.a.d.* um *.g.d.* überschiesst und *.a.d.* durch 9 theilbar ist, so bleibt aus der ganzen *.a.g.* die durch 9 untheilbare *.d.g.* übrig, welche aus der Addition der Probezahl von *.a.b.* — nämlich Null — mit der Probezahl von *.b.g.* — nämlich *.d.g.* — entsteht. Endlich sei keine der Zahlen *.a.b.* und *.b.g.* durch 9 theilbar, vielmehr bleiben aus *.a.b.* die

[1]) Leon. Pisano I, 7: *in tabula dealbata in qua littere leviter deleantur.* [2]) Ebenda pag. 8. [3]) Ebenda pag. 12 und häufiger. [4]) Ebenda pag. 20 Z. 9—28. [5]) Man beachte die regelmässig wiederkehrende Anwendung von drei Pünktchen vor, zwischen und hinter den die Strecke bezeichnenden Buchstaben, sowie auch die dem arabischen oder dem griechischen Alphabete nachgebildete Buchstabenfolge. Jene vielen Punkte finden sich überall in mittelalterlichen Handschriften und stammen daher, dass sonst die Zahl *.a.b.* von dem Worte *ab* nicht zu unterscheiden gewesen wäre. Wir verdanken diese Bemerkung wie zahlreiche andere den brieflichen Mittheilungen von Max Curtze. Wir berufen uns künftig auf diese Mittheilungen mit den Worten: Curtze brieflich. Der Bequemlichkeit wegen lassen wir die Pünktchen, ausser an dieser Stelle, künftig überall weg.

*.a.e.* und aus *.b.g.* die *.d.g.* übrig. Die Restzahlen, d. h. *.e.b.* und *.b.d.* sind durch 9 theilbar, und theilbar ist auch die ganze *.e.d.* als aus irgend einer Menge von Neunern zusammengesetzt. Es bleiben also aus der ganzen Zahl *.a.g.* die untheilbaren Zahlen *.a.e.* und *.d.g.* übrig, welche eben die Probezahlen von *.a.b.* und *.b.g.* waren, und aus deren Vereinigung das Gewicht der Zahl *.a.g.* entsteht, wie zu zeigen war.“ Zum Schlusse des Abschnittes erscheint die Addition benannter Zahlen.

Der vierte Abschnitt handelt kurz von dem Abziehen, welches immer *extrahere* heisst. Ein Wort wie subtrahere kommt nicht vor. Ist eine Ziffer des Subtrahendus von höherem Werthe als die entsprechende Ziffer des Minuendus, so wird, ähnlich wie bei einigen aus indischen und arabischen Quellen schöpfenden anderen Schriftstellern (Bd. I, S. 570 und 763), zu dem Minuendus eine X des betreffenden Ranges geborgt, welche dann auch dem Subtrahenden als Einheit der nächsthöheren Ordnung zugesetzt wird.

Der fünfte Abschnitt geht zur Division über. Wiewohl eigentlich nur von der Division ganzer Zahlen in diesem Abschnitte die Rede sein soll, ist doch das Schreiben von Brüchen, und zwar ganz nach arabischem Muster gelehrt. Arabisch ist das Auftreten der Brüche links von den ganzen Zahlen, z. B. $\frac{1}{2}182$ für unser $182\frac{1}{2}$, während allerdings die ganzen Zahlen dennoch vor den Brüchen ausgesprochen werden[1]). Arabisch sind (Bd. I, S. 764—765) die aufsteigenden Kettenbrüche[2]) z. B. $\frac{1\ \ 5\ \ 7}{2\ \ 6\ \ 10}$ in der Bedeutung von $\frac{7}{10}+\frac{5}{6\cdot 10}+\frac{1}{2\,.\,6\,.\,10}$. Der Quotient einer Division heisst *summa divisionis*[3]). Unter *differentia* ist, wie bei Johannes von Sevilla (Bd. I, S. 753) die Rangordnung einer Ziffer verstanden[4]). Primzahlen, welche Leonardo *numeros sine regulis* nennt, sollen bei den Griechen *coris canon*, bei den Arabern *hasam* heissen[5]). Ganz richtig ist diese sprachliche Doppelbemerkung nicht. Das Wort χωρίς, ausgesondert, wird zwar von Nikomachos gebraucht, aber nicht für Primzahl, und das arabische asamm, stumm, bedeutet wieder keine Primzahl, sondern eine Zahl, welche gegen die neun ersten Zahlen theilerfremd und keine Quadratzahl ist[6]). Eine kleine Randtabelle[7])

[1]) Leon. Pisano I, 27: *Nam rupti vel fracti semper ponendi sunt post integra, quamvis prius integra quam rupti pronuntiari debeant.* [2]) Ebenda pag. 24. [3]) Ebenda pag. 27. [4]) Ebenda pag. 31, Z. 24: *secundum differentiam ipsorum.* [5]) Ebenda pag. 30. [6]) *Kafî fîl Hisâb* des *Alkarkhî* (ed. Hochheim) S. 11, Anmerkung 4 und Beha-eddin (ed. Nesselmann) S. 4. [7]) Leon. Pisano I, 31.



enthält die 21 Primzahlen von 11 bis 97, während auch die Factorenzerlegung der zusammengesetzten Zahlen von 12 bis 100 in einer Tabelle[1]) zu finden ist. Die Zerlegung höherer Zahlen in Factoren wird gleichfalls gelehrt, wobei auf die Merkmale der Theilbarkeit durch 2, durch 5, durch 9, beziehungsweise durch 3 aus der Endziffer und dem Gewichte der Zahl Bezug genommen ist. Theilbarkeit durch 7, 11, 13 u. s. w. wird durch Probiren untersucht, welches fortzusetzen ist, bis man zu der Quadratwurzel der betreffenden Zahl gelangt[2]). Als Sicherung der richtigen Zerlegung wird die Siebenerprobe empfohlen, welche neben der Elferprobe[3]) und neben der am häufigsten zur Verwendung kommenden Neunerprobe dem nicht unbekannt sein konnte, welcher an der Nordküste Afrikas das Rechnen erlernt hatte (Bd. I, S. 759). Dem eigentlichen Dividiren ist verhältnissmässig geringe Aufmerksamkeit gewidmet. Die Theilung wird meist durch die einzelnen Factoren des Divisors nach einander vollzogen, wodurch die Annehmlichkeit sich ergiebt, dass der gebrochene Theil des Quotienten sofort in der beliebten Gestalt eines aufsteigenden Kettenbruches erhalten wird. Beim Anschreiben der Divisionsbeispiele wird der Divisor unter den Dividend gesetzt, und unter den Divisor wieder der Quotient, so dass die Einer dieser drei Zahlen sich untereinander befinden. Die Hilfszahlen der bei dem allmäligen Abziehen der Theilproducte des Divisors in dem Quotienten vom Dividenden verbleibenden Reste kommen über den Dividenden zu stehen.

Der sechste Abschnitt lehrt gemischte Zahlen mit einander zu vervielfachen. Sie werden zu Brüchen eingerichtet; deren Zähler werden sodann mit einander vervielfacht, und hierauf folgt die Theilung durch die einzelnen Nenner, welche nacheinander vollzogen wird, wie man es im vorigen Abschnitte bei der Division durch einen aus mehreren Factoren zusammengesetzten Divisor machte. Auch hier wird nicht versäumt, abseits von der eigentlichen Aufgabe auf manche Dinge hinzuweisen. Bei gemeintheiligen Zahlen, *numeri communicantes*, wird die Aufsuchung des grössten Gemeintheilers nach Euklid, wie ausdrücklich hervorgehoben ist[4]), gelehrt. Andererseits ist auch von dem kleinsten Gemeinvielfachen gegebener Zahlen die Rede[5]). Dasselbe dient zur Vereinigung von Brüchen, welche nicht mit in Einem laufenden Bruchstrichen, vielmehr cum separatis virgulis[6]), gesondert von einander auftreten, wie z. B. $\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}$ sich zu $\frac{47}{60}$ vereinigen. Bruchbrüche von der Art, wie die Araber (Bd. I, S. 765) sie gebrauchten,

[1]) Leon. Pisano I, 37. [2]) Ebenda pag. 38. [3]) Ebenda pag. 39 die Siebenerprobe und pag. 45 die Elferprobe. [4]) Ebenda pag. 51 Z. 4 v. u.: *ut in Euclide apertis demonstrationibus declaratur.* [5]) Ebenda pag. 57. [6]) Ebenda pag. 52 Z. 11 v. u.

sind gleichfalls vorhanden[1]) und zwar von doppelter Gattung. Unter $0\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}22$ wird verstanden 22 nebst dem Producte aus $\frac{6}{7}$ in $\frac{8}{9}$ in $\frac{9}{10}$, während dagegen $\frac{2\ 5\ 4}{3\ 8\ 9}0\ 11$ die viel zusammengesetztere Bedeutung hat $11 + \frac{4}{9} + \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9} + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}$. Eine in diesem Abschnitte enthaltene kleine Tabelle[2]) lehrt die Addition von Brüchen mit den Nennern 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Der siebente Abschnitt setzt die Rechnung mit aus ganzen Zahlen und Brüchen gemischten Zahlen fort. Der Grundgedanke der an mannigfaltigen Beispielen geübten Methoden besteht darin, dass zu Anfang die Zahlen, mit denen gerechnet werden soll, zu gleichnamigen Brüchen erweitert werden, sodass die Addition und Subtraction, aber auch die Division wesentlich nur mittels der Zähler zu vollziehen bleibt. Ein Beispiel der Division ist[3])

$$\left(523\frac{1}{10}\frac{7}{9}\right):\left(17\frac{1}{6}\frac{2}{5}\right) = \frac{47149}{90}:\frac{1581}{90} = \frac{47149}{1581}.$$

Der letzte Theil dieses Abschnittes, der der Aufgabe gegebene Brüche in eine Summe von Stammbrüchen zu zerlegen[4]) gewidmet ist, hat für den Geschichtsforscher eine grosse Bedeutung. Solcher Zerlegungen bedienten sich bereits die Aegypter (Bd. I, S. 25 flgg.). Alle unmittelbaren wie mittelbaren Schüler derselben folgten ihrem Beispiele. Eine Andeutung darüber, wie jene Zerlegung zu erhalten sei, ist kaum jemals vorhanden. Leonardo ist von den uns bekannt gewordenen Schriftstellern der erste, er ist auch der Einzige, der die Zerlegung selbst als Aufgabe behandelt und sich nicht damit begnügt, nur von der gleichviel wie ausgeführten Zerlegung Gebrauch zu machen. Ist Leonardo hier einziger Originalschriftsteller, oder müssen wir sagen, er sei für uns der Einzige, der theilweise oder ganz und gar Uraltes uns aufbewahrt hat? Volle Gewissheit ist für keinen der beiden Wechselfälle zu beanspruchen, doch scheint die Annahme von der hier vorhandenen Erhaltung älteren Stoffes aus mehr als nur einem Grunde gerechtfertigt. Gerechtfertigt ist sie dadurch, dass Leonardi vielfach auch anderwärts nachweislich alte Stoffe behandelt hat, ohne gerade immer seine Quellen zu nennen, gerechtfertigt ferner dadurch, dass Leonardo sich nicht auf ein Verfahren beschränkt, sondern mehrfache Regeln giebt, während die Unterscheidung von Einzelfällen recht eigentlich als Kennzeichen alterthümlichen Ursprunges gelten darf. Eine Tabelle[5])

---

[1]) Leon. Pisano I, pag. 61. [2]) Ebenda pag. 54—55. [3]) Ebenda pag. 75. [4]) Ebenda pag. 77—83. [5]) Ebenda pag. 79.



enthält die Zerlegung derjenigen Brüche, deren Nenner 6, 8, 12, 20, 24, 60, 100 heissen. Regeln, welche sodann folgen, lassen aus ihrem Wortlaute leicht in Formeln sich umsetzen, welche dem heutigen Auge übersichtlicher so lauten:

$$\frac{a}{na-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(na-1)}$$

$$\frac{a+1}{na-1} = \frac{1}{na-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(na-1)}$$

$$\frac{2a+3}{(2n+1)(2a+1)-1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)a+n} + \frac{1}{(2n+1)[(2n+1)(2a+1)-1]}.$$

Eine weitere Regel zur Zerlegung von $\frac{a}{b}$ ist folgende: Es sei $b > a$ und zwar $ma < b < (m+1)a$, so ist $\frac{1}{m} > \frac{a}{b} > \frac{1}{m+1}$. Mithin kann als Anfang der Zerlegung $\frac{a}{b} = \frac{1}{m+1} + \frac{a(m+1)-b}{b(m+1)}$ gesetzt werden, und die Zerlegung des Restgliedes erfolgt durch, wenn es sein muss, wiederholte Anwendung der Regel. Es ist leicht ersichtlich, dass diese Regel ebenso wie die erste unserer Gleichungsformeln zu der ägyptischen Formel $\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}\cdot p}$ ($p$ ungrad gedacht) verhelfen konnte. Eine letzte Zerlegungsmethode von $\frac{a}{b}$, praktisch vielleicht die beste, besteht darin, dass man innerhalb der Grenzen $\frac{b}{2}$ und $2b$ eine Zahl $c$ sucht, welche recht viele Divisoren besitze. Als Beispiele solcher vortheilhaft zu wählenden Zahlen nennt Leonardo 12, 24, 36, 48, 60. Mit diesem $c$ wird zunächst der Bruch $\frac{a}{b}$ erweitert zu $\frac{ac}{bc}$. Weil $a \geqq 2$, $c > \frac{b}{2}$, muss $ac > b$ sein. Bei der Kürzung der neuen Bruchform in $\frac{ac:b}{c}$ erscheint also im Zähler jedenfalls ein ganzzahliger Theil $e \geqq 1$ d. h. es wird $\frac{a}{b} = \frac{e}{c} + \frac{ac-be}{bc}$, wo $\frac{e}{c}$ vermöge der genannten Eigenschaft des eigens desshalb gewählten $c$ und unter Anwendung der früheren Zerlegungstabelle sich leicht als Summe von Stammbrüchen darstellt und das Gleiche meist auch für $\frac{ac-be}{bc}$ gilt.

Im achten Abschnitte wird der einfache Dreisatz gelehrt. Gegeben ist der Preis der Waare mit Hilfe von zwei Zahlen, deren erste eine feste Menge der Waare, die zweite den im Allgemeinen wechselnden Geldwerth dieser Menge nennt. Die beiden Zahlen werden an das obere Ende der Tafel geschrieben, und zwar die erste

Zahl rechts, die zweite links. Ferner ist jedesmal noch eine dritte Zahl gegeben, welche aber verschiedener Natur sein kann, entweder eine Waarenmenge oder eine Geldsumme. Diese dritte Zahl wird unter die ihr gleichnamige der beiden ersten geschrieben. Die gesuchte vierte Zahl mit der Bedeutung der für die bekannte Waarenmenge zu erlegenden Geldsumme, oder der für die bekannte Geldsumme zu beziehenden Waarenmenge wird gefunden, indem die dritte Zahl mit der ihr schräg gegenüberstehenden oberen Zahl, mit welcher sie durch eine geneigte Gerade in Verbindung gesetzt ist, multiplicirt und das Product durch die andere obere Zahl dividirt wird. Heisst es z. B. 100 Rotuli (ein pisaner Gewicht) kosten 40 Lire, was kosten 5 Rotuli? so sieht der Ansatz folgendermassen aus:

40 L. 100 R.

5 R.

Fragt man dagegen unter denselben Vorbedingungen nach der Anzahl der für 2 Lire zu erwerbenden Rotuli, so muss man ansetzen:

40 L. 100 R.

2 L.

und das Ergebniss ist $\frac{40 \cdot 5}{100} = 2$ L., beziehungsweise $\frac{100 \cdot 2}{40} = 5$ R. Warum diese Art von Rechnungen, welche an zahlreichen Beispielen mit verschiedenartigen Gewichtsmengen, Längen, Geldsorten u. s. w. gelehrt wird, den Namen des Verfahrens nach der längeren oder grösseren Weise, *ad majorem guisam* führt, ist im Texte nirgend angegeben. Die ziemlich nahe liegende Vermuthung, es sei damit gemeint, dass der grösseren Fragezahl immer die grössere Antwort entspreche, es sei also die directe Proportion gemeint, ist kaum zulässig, weil sonst im nächsten Abschnitte, wo indirecte Proportionen vorkommen, irgend ein Hinweis auf jene hier nicht mehr zutreffende Benennung, vielleicht *ad minorem guisam*, zu erwarten wäre. Nun ist allerdings letzterer Ausdruck an sich Leonardo nicht fremd. Im 11. Abschnitte[1]) wird ein Buch *minoris guise* erwähnt, welches Leonardo geschrieben haben will, aber von einer indirecten Proportion scheint darin nicht die Rede gewesen zu sein. Somit ist eine andere Deutung beider einander gegenüberstehender Ausdrücke nothwendig, und vielleicht gehen wir, wie im 102. Kapitel begründet werden wird,

[1]) Leon. Pisano I, 154 Z. 1: *Est enim alius modus consolandi quem in libro minoris guise docuimus.*



nicht irre, wenn wir als das längere Verfahren die gewöhnliche Bruchrechnung erklären, als das kürzere diejenige Bruchrechnung, welche einen Bruch als Summe von Stammbrüchen in die Rechnung einbezieht.

Auch im neunten Abschnitte kommt ein eigenthümlicher Kunstausdruck vor. Es handelt sich um den Tausch von Waaren unter einander gemäss gegebener Preise. Es sollen z. B. 20 Ellen Tuch 3 pisaner Lire kosten und 42 Rotuli Baumwolle 5 Lire; wie viele Rotuli Baumwolle kann man um 50 Ellen Tuch erhalten? Da sollen nun die fünf gegebenen Zahlen in folgender Weise angeschrieben werden: In einer ersten Zeile kommen von rechts nach links 20 Ellen nebst ihrem Preise 3 Lire zu stehen; unter den Lire die entsprechende zweite Preisangabe 5 Lire und links davon die dafür zu erhaltende Waarenmenge von 42 Rotuli; endlich setzt man die zu vertauschenden 50 Ellen unter die frühere Ellenzahl 20. Wenn, heisst es nun[1]), die fünf Zahlen angeschrieben sind, so vervielfacht man die links allein in der unteren Reihe stehende Zahl mit der ihr nach rechts oben, dann mit der dieser nach rechts unten gegenüberstehenden Zahl. (Die Multiplication wird dabei durch Verbindungsstriche geleitet.) Das Product wird durch die beiden anderen Zahlen dividirt, um die gesuchte Zahl zu erhalten. Das Beispiel sieht also folgendermassen aus:

3 Lire 20 Ellen

42 Rotuli 5 Lire 50 Ellen

und die Rechnung lautet $\frac{42 \cdot 3 \cdot 50}{5 \cdot 20} = 63$. Die Verbindungsstriche zwischen den miteinander zu vervielfachenden Zahlen lassen das Bild einer Kette entstehen und erinnern so an den von diesem Bilde seinen Namen entlehnenden Kettensatz[2]), welcher in Lehrbüchern des kaufmännischen Rechnens eine bevorzugte Stellung einzunehmen pflegt. Der Name, welchen der Satz bei Leonardo führt, hat durch eigenthümlichen Zufall einen mit dem Worte „Kette" ähnlichen Klang. Es sei, sagt unser Schriftsteller[3]), die *figura cata* — an anderer Stelle

[1]) Leon. Pisano I, 118: *Et descriptis itaque ipsis quinque numeris tunc ultimum eorum per numerum pretii oppositum multiplica, et quot inde provenerit in alium numerum eidem pretio oppositum ducere studeas, quorum numerorum summam per reliquos duos numeros divide, et habebis optatum.* [2]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 91—98 (Kettenregel) und V, 728—766 insbesondere Nr. 45, S. 747 (Verhältniss). [3]) Leon. Pisano I, 119: *Est enim hec talis propositio proportionum ex que ostenditur in figura cata, scilicet sectoris per quam Tholomeus docuit in almagesti reperire demonstrationem circulorum a cir-*

erscheint die Schreibform chata[1]) — deren Ptolemäus im Almagest und Ahmed, der Sohn, in dem Buche über die Verhältnisse sich bediente, wo er 18 Combinationen behandelte; Ptolemäus habe des Schnittes (sectoris) sich bedient, um vom rechten Winkel aus für alle Winkel Beweise zu finden. Diese schwierige Stelle bedarf einiger Erläuterungen. Ahmed, der Sohn[2]), ist unzweifelhaft Ahmed, Sohn des Jusuf, der am Anfang des X. Jahrhunderts als Schriftsteller auf mathematischem und astronomischem Gebiete thätig war. Was dessen 18 Combinationen waren, werden wir gleich sehen. Die Anführung des ptolemäischen Almagestes weist auf die dort vielfach in Anwendung tretende Regel von den 6 Grössen (Bd. I, S. 386 und 392), die zwei Grössen im zusammengesetzten Verhältnisse von zwei Paar anderen Grössen stehen lässt. Sie stammt aus dem Satze des Menelaos, bei welchem die drei Seiten eines Dreiecks durch eine Transversale geschnitten werden, so dass sechs Abschnitte der Seiten entstehen. Mittels jenes Satzes hat Ptolemäus das rechtwinklige Dreieck und von ihm aus die übrigen Dreiecke behandelt. Die Schneidende, sector, heisst aber in arabischer Uebersetzung des Wortes al-kaṭṭâ. So hiess desshalb bei den Arabern der Satz des Menelaos selbst, und mit dem arabischen Namen wiederum stimmt die figura cata überein[3]), welche den Wortlaut getreu wiedergiebt. Leonardo giebt mehrfache Aufgaben, bei welchen ein Fünfsatz, d. h. die Anwendung von fünf gegebenen Zahlen zur Auffindung der sechsten unbekannten Zahl, vorkommt. Darunter sind auch Aufgaben mit sogenannten indirecten Verhältnissen. Da heisst eine Aufgabe die von den Pferden, welche in gegebenen Tagen Gerste fressen[4]), und verlangt zu wissen, wie viele Tage 10 Pferde mit 16 Sechstern Gerste gefüttert werden können, wenn 5 Pferde in 9 Tagen 6 Sechster fressen. Der Ansatz findet hier in der Form statt:

9 Tage     6 Gerste     5 Pferde

16 Gerste     10 Pferde

die Ausrechnung nach der aus den Verbindungsstrichen abzulesenden

*culo recto, et multa alia; et Ametus filius ponat decem et octo combinationes ex ea in libro, quem de proportionibus composuit.*

[1]) Leon. Pisano I, 132 Z. 23: *figura chata.* [2]) Steinschneider, Iusuf ben Ibrahim und Ahmed ben Iusuf in Eneström's Biblioth. mathem. 1888 pag. 49—52 und 111—117. [3]) Die richtige Erklärung von *figura cata* gab, wenn auch ohne auf den wörtlichen Sinn des Ausdruckes hinzuweisen, schon Costard im XVIII. Jahrhundert. Vergl. Zeitschr. Math. Phys. XXX, Hist.-literar. Abthlg. 127. [4]) Leon. Pisano I, 132—135.



Vorschrift $\frac{9 \cdot 16 \cdot 5}{6 \cdot 10} = 12$. Ausser an den bestimmten Zahlen führt Leonardo die Aufgabe auch an einfachen Buchstaben durch[1]), indem er die beiden Behauptungen einander zuordnet: $a$ Pferde fressen $b$ Gerste in $c$ Tagen, $d$ Pferde fressen $e$ Gerste in $f$ Tagen, alsdann ist ein erstes Product $.a.e.c.$ einem zweiten Producte $.d.b.f.$ gleich[2]) oder mit anderen Worten: jede Zahl des ersten Productes steht zu irgend einer Zahl des zweiten Productes in einem aus zwei Verhältnissen zusammengesetzten Verhältnisse. Beispielsweise ist

$$c : f = db : ac.$$

Leonardo schreibt allerdings diese Proportion nicht in Zeichen an, aber er kleidet sie in nicht misszuverstehende Worte: die Zusammensetzung (compositio) des Verhältnisses einer ersten Zahl $c$ zu einer zweiten Zahl $f$ sei gebildet aus den vier übrigen Zahlen, von welchen $db$ erstes Glied (antecedentes), $ac$ zweites Glied (consequentes) seien, und zwar könne die Zusammensetzung $db : ac$ eine doppelte sein, gebildet aus $d : a$ und $b : c$ oder aus $d : c$ und $b : a$. Da nun $c$ als erstes Glied nicht blos $f$, sondern auch $d$ oder $b$ als zweites haben könne und dann wieder je zwei Auffassungen des zusammengesetzten Verhältnisses sich ergeben, so seien im Ganzen $3 \cdot 2 = 6$ Proportionen vorhanden, welche mit $c$ anfangen. Ebensoviele können mit $a$, ebensoviele mit $c$ beginnen. Es erscheinen also $3 \cdot 6 = 18$ Combinationen. Es kann kein Zweifel obwalten, dass dieses dieselben 18 Combinationen sind, welche Ahmed kennen lehrte[3]), sowie auch die hier deutlich ausgesprochene Zusammensetzung der Verhältnisse zur Bestätigung dient, dass die regula cata wirklich von der regula sex quantitatum abstammt, wozu eine weitere Bestätigung in einer anderen Schrift Leonardo's sich finden wird. Wir sagen mit vollbewusster Betonung des Ausdruckes, die regula cata stamme von der regula sex quantitatum ab und nicht sie sei mit dieser ein und dasselbe, weil die regula cata beim Fünfsatze nicht stehen geblieben ist. Folgende Aufgabe Leonardo's bringt nicht weniger als neun Angaben in Rechnung[4]): Imperiale 12 valent pisaninos 31 et soldus Januinorum valet pisaninos 23 et soldus turnensium valet Januinos 13 et soldus Barcellonensium valet turnenses 11; quaeritur de imperialibus 15 quot barcellonenses valeant. D. h. 12 Imperialen = 31 Pisaniner, 12 Januiner = 23 Pisaniner, 12 Turnenser = 13 Januiner, 12 Barcellonenser = 11 Tur-

[1]) Leon. Pisano I, 132 Z. 23 bis pag. 133 Z. 7 v. u. [2]) *sit numerus .a.e.c. quaedam coniunctio quae vocetur prima, numeri vero .d.b.f. sit coniunctio secunda.* [3]) Cantor, Ahmed und sein Buch über die Proportionen in Eneström's Biblioth. mathem. 1888 pag. 7—9. [4]) Leon. Pisano I, 126 Z. 2 v. u. bis 127 Z. 8 v. u.

nenser; wie viele Barcellonenser betragen 15 Imperialen? Man könne, sagt Leonardo, die Rechnung in vulgärer Art (secundum vulgarem modum) allmälig vollziehen. Die 15 Imperialen betragen $38\frac{3}{4}$ Pisaniner; diese betragen $20\frac{5}{23}$ Januiner; diese wiederum werden zu $18\frac{198}{299}$ Turnensern; diese endlich gelten so viel wie $20\frac{1180}{3289}$ Barcellonenser. Nach der Kunst aber (sed secundum artem) verfertige man folgenden einzigen Ansatz:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Barcellon. | Turn. | Januin. | Pisan. | Imper. |
| | 12 | 13 | 31 | 12 |
| 12 | 11 | 12 | 23 | 15 |
| Barcellon. | Turn. | Januin. | Pisan. | Imper. |

dessen Entstehung so zu denken ist. Man beginnt mit Anschreibung der Benennungen in der Reihenfolge, wie die Aufgabe sie mit sich bringt. Man schreibt dann abwechselnd in die obere und untere Zeile zu den schon vorgezeichneten Benennungen die gegebenen Münzvergleichungen: 12 Imper. = 31 Pisan., 23 Pisan. = 12 Januin., 13 Januin. = 12 Turn., 11 Turn. = 12 Barcellon. Endlich füllt man mit der Fragezahl 15 Imper. die rechts unten leergebliebene Stelle aus und beginnt von ihr die im Zickzack auf und ab verlaufenden Multiplicationsstriche. Das Product der so verbundenen Zahlen $15 \cdot 31 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$ ist durch das Product $12 \cdot 23 \cdot 13 \cdot 11$ der übrigen Zahlen zu dividiren. Die Rechnung giebt dann, wie vorher, $20\frac{1180}{3289}$ oder nach Leonardo's Schreibweise mit links an die ganze Zahl sich anfügendem aufsteigenden Kettenbruche $\frac{3\ \ 3\ \ 8}{11\ 13\ 23}20$ d. h. $20 + \cfrac{8 + \cfrac{3 + \frac{3}{11}}{13}}{23}$.

Der zehnte Abschnitt lehrt Gesellschaftsrechnungen einfachster Art in der von Alters her bekannten Weise durchführen. Die Einlage sämmtlicher Gesellschafter wird addirt, und ihre Summe muss zu einer Einzeleinlage in dem gleichen Verhältnisse stehen, wie der Gesammtgewinn zu dem Gewinne des Einzelnen.

Der elfte Abschnitt von der Mischung der Münzen schliesst sich an die vorhergehenden Abschnitte nicht bloss dem Inhalte nach eng an, sondern bis zu einem gewissen Grade auch der Form nach, indem dem Leser durch Angabe eines machinalen Verfahrens, durch eine genaue Vorschrift, wohin die in Rechnung tretenden Zahlen



geschrieben werden sollen und wie sie dann zu behandeln seien, die eigene Denkthätigkeit nach Möglichkeit erspart wird. Diese Vorschriften übergehend bemerken wir nur, dass die als zur Münzmischung gehörend bezeichneten Aufgaben in zwei Gruppen zerfallen. Bald soll der Feingehalt von Legirungen aus Feingehalt und Gewicht der zur Legirung verwandten Mischmetalle bestimmt werden, bald wird gefragt, in welchem Gswichtsverhältnisse die gegebenen Mischmetalle, welche selbst schon Legirungen bekannter Zusammensetzung sind, vereinigt werden sollen, um eine neue Legirung von vorgeschriebenem Feingehalte hervorzubringen. Zu dieser letzten Gattung von Aufgaben wird, für den ersten Augenblick überraschend, auch diejenige von dem Manne gezählt, der 30 Vögel verschiedener Gattung um 30 Geldstücke kauft[1]), und doch ist diese Anreihung gerechtfertigt, denn wenn die Bedingungen der Aufgabe dahin lauten, ein Rebhuhn koste 3, eine Taube 2, zwei Sperlinge 1 Geldstück und für 30 Geldstücke sollen 30 Vögel erstanden werden, so kommt dieses darauf hinaus, es solle durchschnittlich jeder Vogel 1 Geldstück kosten, also gewissermassen die Feinheit 1 besitzen, und diese Mischung solle mit Hilfe von Mischmetallen von der Feinheit 3, 2, $\frac{1}{2}$ in ganzzahligen Verhältnisszahlen beschafft werden. Soll aus dem Metall von der Feinheit 3 und dem von der Feinheit $\frac{1}{2}$ die Feinheit 1 hergestellt werden, so muss im Verhältnisse von $1:4$ gemischt werden; soll aus dem Metall von der Feinheit 2 und dem von der Feinheit $\frac{1}{2}$ die Feinheit 1 hergestellt werden, so ist die Mischung im Verhältnisse $1:2$ zu vollziehen. Durch die erste Legirung werden 5, durch die zweite 3 Stück geliefert, deren man 30 braucht. Dreimal 5 und fünfmal 3 geben nun 30, also sind 3 Rebhühner mit 12 Sperlingen und 5 Tauben mit 10 Sperlingen zu erstehen, im Ganzen 3 Rebhühner, 5 Tauben, 22 Sperlinge.

Der zwölfte Abschnitt nimmt für sich 152 Seiten, nahezu ein Drittel des ganzen Werkes in Anspruch. In ihm dürfen wir daher die Abtheilung erkennen, auf welche Leonardo selbst wohl das grösste Gewicht gelegt hat. Sie enthält Aufgaben mannigfacher Art, von welchen wir einige um ihrer selbst willen, andere wegen der bei ihrer Auflösung in Anwendung tretenden Verfahrungsweisen namhaft machen müssen. Der Abschnitt beginnt mit arithmetischen Reihen erster und zweiter Ordnung[2]) mit den in Worten aus-

1) Leon. Pisano I, 165: *De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis triginta.* 2) Ebenda pag. 166—168.

gesprochenen Summenformeln $a+(a+d)+\cdots+(a+(n-1)d)$ $=(a+(a+(n-1)d))\frac{n}{2}$ und $a^2+(2a)^2+\cdots+(na)^2=\frac{na(na+a)(na+(na+a))}{6a}$ nebst verschiedenen Einzelfällen derselben. Die Summirung der Quadratzeilen sei, sagt Leonardo ausdrücklich bei diesem Anlasse[1], in dem von ihm verfassten Liber quadratorum bewiesen, und damit ist ein Zeitpunkt bezeugt, zu welchem jene Abhandlung, welche uns im folgenden Kapitel beschäftigen wird, der Oeffentlichkeit bereits übergeben war. Die Summenformel der geometrischen Reihe ist erst an einer späteren Stelle[2] in Verbindung mit der bekannten Schachbrettaufgabe (Bd. I, S. 713) angegeben. Im Anschluss an die arithmetischen Reihen ist nur gezeigt[3], dass das Product des ersten und des letzten, des zweiten und des vorletzten Gliedes u. s. w., allgemein das Product aus symmetrisch vom Anfang und Ende der Reihe befindlichen Gliedarn constant ist, dass mithin $1\cdot e^{n-1}=e\cdot e^{n-2}=\cdots$. Eine grosse Anzahl von Aufgaben ist nach dem einfachen falschen Ansatze (Bd. I, S. 577) behandelt. Dessen erstes Auftreten findet sich bei den *quaestionibus arborum*, den Baumaufgaben, und dort ist auch eine kurze, deutliche Schilderung des Verfahrens zu finden[4]. Man soll die Höhe eines Baumes berechnen, der mit $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ seiner Höhe, zusammen mit 21 Handbreiten, unter dem Boden steckt. Die durch 3 und 4 theilbare Zahl 12 wird vorläufig als Höhe angesetzt. Dann ist aber $\frac{12}{3}+\frac{12}{4}=7$, während 21 erscheinen sollte. Man hat die Proportion $7:21=12:36$ zu bilden, und die wirkliche Höhe des Baumes beträgt 36 Handbreiten. Eine eigenthümliche Anwendung des falschen Ansatzes lehrt folgende Aufgabe[5] kennen: $\frac{19}{20}$ einer Zahl erweisen sich als die Quadratwurzel eben dieser Zahl (radix eiusdem numeri); wie gross ist dieselbe? Die Antwort lautet $\left(\frac{20}{19}\right)^2=\frac{400}{361}$ und wird folgendermassen gewonnen. Versuchsweise setzt man die durch 20 theilbare Zahl 60 an. Davon $\frac{19}{20}$ sind 57, und das Quadrat von 57 ist 3249 statt 60. Alsdann sei $\frac{60^2}{3249}=\frac{3600}{3249}=\frac{400}{361}$ die richtige

[1] Leon. Pisano I, 168 Z. 8—9: *Probavi enim geometrice quae hic sunt dicta de collectionibus quadratorum in libro quem de quadratis composui.* [2] Ebenda pag. 309: *De duplicatione scacherii.* [3] Ebenda pag. 171. [4] Ebenda pag. 173 Z. 4 v. u.: *Est enim alius modus, quo utimur, videlicet ut ponas pro re ignota aliquem numerum notum ad libitum, qui integraliter dividatur per fractiones quae ponuntur in ipsa quaestione: et secundum positionem illius quaestionis cum ipso posito numero studeas invenire proportionem cadentem in solutione illius quaestionis.* [5] Ebenda pag. 175.



Auflöung, wofür eine geometrische Begründung beigefügt wird (Figur 1). Es sei $ab$ die als Strecke gezeichnete gesuchte Zahl, welche auch als Fläche des Rechtecks $abdt$ auftritt, sofern $bd=a$ die Längeneinheit ist. Ueber $ae$ $\left(=\frac{19}{20}ab\right)$ wird das Quadrat $aekz$ gezeichnet, so muss auch dieses vermöge der Bedingungen der Aufgabe durch die gesuchte Zahl gemessen werden, d. h. $aekz=$ Viereck $abdt$; und wird auf beiden Seiten das gemeinschaftliche Stück $aeit$ weggelassen, so bleibt noch $tikz=ebdi$ oder $ti\times ik=ei\times id$, beziehungsweise $ti:id=ei:ik$. Aus dieser Proportion folgt weiter $ti:(ti+id)=ei:(ei+ik)$ oder $ti:td=ei:ek$ oder $ae:ab=1:ek$. Da aber $ae:ab=19:20$ bekannt ist, so hat man jetzt $ek=\frac{20}{19}$ und dessen Quadrat $=\frac{400}{361}$. Leonardo setzt einen Zweifelspunkt in diesem Beweise voraus, ob nämlich das über $ae$ beschriebene Quadrat und das Rechteck $abdt$ in Wirklichkeit so gegenseitig über einander hinausreichen werden, wie die Figur es darstellt. Er wirft desshalb selbst diesen Einwand auf, widerlegt ihn aber sogleich[1]. Weil $ab$ grösser sei als $ae$, müsse $ek$ grösser sein als die Einheit, d. h. grösser als $ei$. Mit Hilfe des falschen Ansatzes wird des weiteren eine gegebene Zahl, etwa 10, als Summe von 3, von 4, von 5 in stetiger Proportion stehenden Theilen dargestellt[2]. Sollen etwa 4 Theile auftreten, so werden ebensoviele in stetiger Proportion stehende Zahlen z. B. 1, 2, 4, 8 versuchsweise angesetzt. Deren Summe ist nicht 10, sondern 15. Aber $10=\frac{2}{3}\cdot 15$, also hat man $\frac{2}{3}$ einer jeden der gewählten Zahlen zu nehmen und findet $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}$, womit die Aufgabe gelöst ist, und so wie diese Auflösung giebt es noch unendlich viele, sämmtlich von einander verschieden[3]. Bei manchen Aufgaben bedarf es erst vorbereitender Ueberlegungen, bevor der falsche Ansatz zur Anwendung gelangen kann. Dahin gehört beispielsweise eine Aufgabe, welche einst ein Magister in Constantinopel Leonardo vorlegte[4], und welche dann für diesen den Ausgangspunkt vieler anderer möglichen und unmöglichen Aufgaben bildet. Ein Mann A verlangt von einem anderen

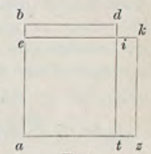


Fig. 1.

[1] *Manifestum est quod numerus ae maior est unitate; cum maior sit numerus ab numero ae: quare maior est at unitate ae.* [2] Leon. Pisano I, 181—182. [3] *Hanc enim divisionem in infinitas variasque partes possumus invenire.* [4] Leon. Pisano I, 190—191.

Manne B, wie wir zur Abkürzung sagen wollen, während Leonardo fortwährend von dem Ersten und dem Zweiten spricht, die Summe von 7 Denaren, dann habe er fünfmal so viel als jener; giebt dagegen A dem B nur 5 Denare, so hat B damit siebenmal so viel als A. (Figur 2.) Es sei $ag$ der ursprüngliche Besitzstand des A, $gb$ der des B, $ab$ ihr Gesammtbesitz. Stellt nun $gd$ die 7 dar, welche B dem A giebt, so hat in Folge dessen A mit $ad$ das Fünffache des dem B verbleibenden $db$, oder $db$ ist $\frac{1}{6}$ der Summe. Ist andrerseits $eg$ das Bild der 5, welche A dem B giebt, so dass darnach B mit $eb$ das Siebenfache des dem A verbleibenden $ae$ besitzt, so muss $ae = \frac{1}{8}$ der Summe sein. Darnach beträgt $db + ae = \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ der Summe, welche von der ganzen Summe abgezogen $eg + gd = 5 + 7 = 12$ übrig lassen. Damit sind aber die Bedingungen ausgesprochen, denen zu genügen ein falscher Ansatz gemacht werden kann. Als Summe wird die durch 6 und durch 8 theilbare 24 angesetzt; $\frac{24}{6} + \frac{24}{8} = 7$ davon abgezogen lassen 17 und nicht 12 übrig. Die Summe ist mithin $\frac{12}{17}$ von 24, und in gleichem Verhältnisse mindern sich die Zahlen 4 und 3 herab, welche für $db$ und $ae$ angenommen worden waren. Es wird in Wirklichkeit $db = \frac{12}{17} \times 4 = 2\frac{14}{17}$ und $ae = \frac{12}{17} \times 3 = 2\frac{2}{17}$. A besass zu Anfang $2\frac{2}{17} + 5 = 7\frac{2}{17}$ und B besass $2\frac{14}{17} + 7 = 9\frac{14}{17}$. Ebendieselbe Aufgabe löst die Regula recta, deren die Araber sich bedienen[1]). Leonardo versteht darunter Gleichungen ersten Grades, in welchen die Unbekannte durch das Wort res, die Sache, bezeichnet wird. Der Besitzstand des B, sagt er, sei res nebst 7 Denaren, welche er dem A geben soll, der alsdann 5 res, vorher also 5 res weniger 7 Denare besitzt. Nachdem A dem B dagegen 5 Denare gegeben, besitzt B res und 12 Denare und damit siebenmal so viel als A mit seinem 5 res weniger 12 Denare. Es ist in Zeichen, welche Leonardo noch fremd waren, res + 12 = 7 (5 res — 12) = 35 res — 84, 34 res = 96, res $= \frac{96}{34} = 2\frac{14}{17}$, und daraus findet sich leicht der Besitz von B wie der von A. Auch eine Regula versa kennt Leonardo an anderer Stelle[2]). Es ist ebenfalls eine Auflösung mittels Gleichungen, welche aber den Ansatz von der Schlussbedingung der Aufgabe aus, statt

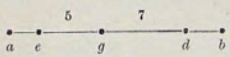


Fig. 2.

[1]) Leon. Pisano I, 191: *Regula quaedam, quae recta dicitur, qua arabes utuntur.* [2]) Ebenda pag. 203 Z. 3 v. u.



von deren Anfang herleitet und dadurch bis zu einem gewissen Grade der sogenannten Umkehrung der Inder (Bd. I, S. 577) ähnelt. Das erste Verfahren Leonardo's, über welches wir oben im Anschlusse an die Figur, deren er sich zur Erläuterung bediente, berichtet haben, und welches dadurch sich kennzeichnet, dass es die Summe der Besitzstände als Durchgangspunkt für die Auflösung der Aufgabe benutzt, findet unter dem Namen der Regula hominum auch bei mehr als zwei Personen Anwendung[1]). A verlangt von B und C zusammen 7, um fünfmal so viel als sie zu haben; B verlangt von A und C zusammen 9, um sechsmal so viel als sie zu haben; C verlangt von A und B zusammen 11, um siebenmal so viel als sie zu haben. Mithin besass A anfangs $\frac{5}{6}$ Summe weniger 7, B besass $\frac{6}{7}$ Summe weniger 9, C besass $\frac{7}{8}$ Summe weniger 11, und die Summe war so viel als $\frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{7}{8}$ Summe weniger 7, 9 und 11; d. h. 27 ist der Ueberschuss von $\frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{7}{8}$ Summe über die Summe oder $\frac{263}{168}$ der Summe und die Summe selbst $\frac{168 \cdot 27}{263}$. A besass $\frac{5}{6}$ der Summe weniger 7 oder $7\frac{98}{263}$. Ganz ähnlich berechnet man $5\frac{206}{263}$ für B und $4\frac{24}{263}$ für C. Aber nicht unbedingt jede beliebige Angabe führt zu Auflösungen. Es giebt auch *quaestiones insolubiles*, welche Widersprüche enthalten[2]), so z. B. wenn die Bedingungen, unter welchen die Regula hominum auf vier Personen mit den Besitzständen $A, B, C, D$ von der Gesammtsumme $S$ angewandt werden soll, in den Gleichungen $C + D = \frac{S}{4} + 7$, $D + A = \frac{S}{5} + 8$, $A + B = \frac{S}{6} + 9$, $B + C = \frac{S}{7} + 11$ ausgesprochen sind. Die erste und dritte Bedingung vereinigt liefern $S = \frac{5}{12} S + 16$, die zweite und vierte dagegen $S = \frac{12}{35} S + 19$, und diese beiden Folgerungen lassen sich nicht mit einander vereinigen. Nächst diesen und ähnlichen bestimmten Aufgaben enthält der zwölfte Abschnitt auch unbestimmte Aufgaben des ersten Grades, welche Leonardo nach Methoden löst, in deren Darlegung er so weit geht, dass nicht daran zu zweifeln ist, dass ihm selbst die Richtigkeit des Verfahrens mehr als nur auf das Ansehen der Persönlichkeiten hin, welche ihm die Aufgaben einst mittheilten, einleuchtend gewesen sein muss. So rührt z. B. folgende Aufgabe[3]) von dem sehr er-

[1]) Leon. Pisano I, 198: *Quaestio consimilis inter tres homines.* [2]) Ebenda pag. 201, 227, 251. [3]) Ebenda pag. 249: *Quaestio nobis proposita a peritissimo magistro Musco Constantinopolitano in Constantinopoli.*

fahrenen Magister Muscus von Constantinopel her. Fünf Personen — sie mögen A, B, C, D, E heissen — wollen in Gemeinschaft mit einander ein Schiff kaufen. Jeder Einzelne wäre dazu im Stande, wenn ihm die übrigen vier einen Theil ihres Geldes gäben, und zwar braucht dazu A $\frac{13}{15}$, B $\frac{401}{480}$, C $\frac{799}{957}$, D $\frac{341}{420}$, E $\frac{326}{405}$ des Geldes der Anderen. Der Preis des Schiffes und der Besitz eines jeden Einzelnen ist zu berechnen. Leonardo schreibt in eine erste Zeile die gegebenen fünf Brüche und darunter in eine zweite Zeile fünf andere, welche bei unveränderten Zählern ihre Nenner dadurch bilden, dass sie eben diese Zähler von den früheren Nennern abziehen. Die beiden Zeilen sind demnach:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{13}{15} & \frac{401}{480} & \frac{799}{957} & \frac{341}{420} & \frac{326}{405} \\[4pt] \frac{13}{2} & \frac{401}{79} & \frac{799}{158} & \frac{341}{79} & \frac{326}{79}. \end{array}$$

Als kleinstes Gemeinvielfaches der zweiten Nenner erkennt er 158, und mit dieser Zahl vervielfacht er die Nenner der ersten Bruchreihe und theilt jedes Product durch den darunter befindlichen Nenner der zweiten Bruchreihe. So wird eine neue Zeile von fünf Zahlen gewonnen:

$$1185 \qquad 960 \qquad 957 \qquad 840 \qquad 810$$

mit der Summe 4752. Der Quotient dieser Zahl durch die um 1 verminderte Personenzahl, also durch 4, giebt ihm 1188 als Summe dessen, was ursprünglich Alle zusammen an Geld besassen, und diese Summe um 158 vermindert giebt 1030 als Preis des Schiffes. Der Besitzstand eines jeden Einzelnen findet sich dann, indem von 1030 das 158fache der Brüche der zweiten Zeile abgezogen wird.

$$A = 1030 - \frac{158 \cdot 13}{2} = 3, \qquad B = 1030 - \frac{158 \cdot 401}{79} = 228,$$
$$C = 1030 - \frac{158 \cdot 799}{158} = 231, \qquad D = 1030 - \frac{158 \cdot 341}{79} = 348,$$
$$E = 1030 - \frac{158 \cdot 326}{79} = 378.$$

Prüfen wir nun einmal dieses so eigenartige Verfahren, dessen Einrichtung Leonardo sich selbst zuschreibt[1]), an Buchstabengrössen. Es sollen $i$ Personen die Einzelsummen $x_1, x_2 \ldots x_i$ besitzen, welche zusammen $s$ ausmachen. Der Preis $p$ des Schiffes besteht aus $x_h$ und dem $\frac{m_h}{n_h}$ Theil dessen, was die Anderen besitzen, während der

[1]) Leon. Pisano I, 249: *Quam questionem ita ad suprascriptam regulam reducere studui.*



Stellenzeiger $h$ alle Werthe von 1 bis $i$ durchläuft. Als Gleichung geschrieben ist demnach $p = x_h + \frac{m_h}{n_h}(s - x_h)$ und daraus folgt bei leichter Umformung

$$x_h = s + (p - s)\frac{n_h}{n_h - m_h}.$$

Bildet man sämmtliche $i$ Gleichungen dieser Form, welche aus den verschiedenen möglichen Annahmen für $h$ folgen und addirt dieselben unter Berücksichtigung von $x_1 + x_2 + \cdots + x_i = s$, so entsteht $s = is + (p - s)\sum \frac{n_h}{n_h - m_h}$ und daraus

$$(i - 1)s = (s - p)\sum \frac{n_h}{n_h - m_h}.$$

Da die Aufgabe sich somit als unbestimmt erweist, weil zwischen den beiden Unbekannten $s$ und $p$ nur eine Gleichung vorhanden ist, so steht eine willkürliche Annahme frei. Leonardo trifft sie dahin, dass er $s - p$ als das kleinste Gemeinvielfache der Zahlen $n_h - m_h$ wählt, sofern diese Wahl gestattet, die rechts vom Gleichheitszeichen auftretende Summe noch durch $i - 1$ zu dividiren. Der Quotient der letzteren Division ist $s$, und zugleich damit kennt man auch $p = s - (s - p)$. Endlich findet sich jedes $x_h = s - (s - p)\frac{n_h}{n_h - m_h}$.

Man müsste geradezu jede Aufgabe der Besprechung unterziehen, wenn man alles Bemerkenswerthe erörtern wollte. Wir gehorchen nur der Nothwendigkeit, indem wir uns beschränken und nur drei Aufgaben dieses Abschnittes noch hervorheben.

Es soll eine durch 7 theilbare Zahl gefunden werden, welche durch 2, 3, 4, 5, 6 getheilt jeweils den Rest 1 übrig lässt[1]). Das Product $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ ist durch 2, 3, 4, 5, 6 theilbar und lässt bei Theilung durch 7 den Rest 4. Versuche lehren die Zahl 5 kennen, welche mit 60 zu 300 vervielfacht die Theilbarkeit durch 2, 3, 4, 5, 6 unverändert lässt, während Theilung durch 7 jetzt den Rest 6 liefert. Die um eine Einheit grössere 301 löst daher die gestellte Aufgabe, und weitere Auflösungen finden sich durch Hinzufügung ganzer Vielfachen von $7 \cdot 60 = 420$.

Als Kaninchenaufgabe[2]) bezeichnen wir die Frage, wie viele Paar Kaninchen im Laufe eines Jahres aus einem Paare entstehen. Die betreffende Zahl soll aus der Angabe erhalten werden, dass jedes Paar allmonatlich ein neues Paar zeugt, welches selbst vom zweiten

[1]) Leon. Pisano I, 281 Z. 3 v. u. — pag. 282 Z. 13. [2]) Ebenda pag. 283—284.

Monate an zeugungsfähig wird, während Todesfälle nicht vorkommen. Am Schlusse des 1. Monats ist das erste Paar und das von ihm erzeugte Paar vorhanden, im Ganzen zwei Paare. Am Schlusse des 2. Monats ist ein drittes Paar hinzugetreten, Junge des ersten Paares. Am Schlusse des 3. Monats sind es $3+2=5$ Paar, weil ausser dem ersten Paare jetzt auch das im ersten Monat geborene zeugungsfähig wurde, und nun findet die Vermehrung in steigendem Maasse statt. Am Schlusse des 4. Monats zählt man $5+3=8$, am Schlusse des 5. Monats $8+5=13$ Paar, u. s. w. Es ensteht mithin die am Rande beigefügte Zahlenreihe 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 233, 377. Diese Zahlen befolgen das Gesetz $u_{r+1}=u_r+u_{r-1}$ und bilden die erste recurrirende Reihe, welche in einem mathematischen Werke bekannt geworden ist.

Im höchsten Grade überraschend tritt die Aufgabe[1]) zum Vorschein, welche bei den Chinesen mittels der Regel Ta yen ihre Lösung fand (Bd. I S. 643—644). Es sind genau die gleichen Zahlen, ist genau das gleiche Verfahren. Ein Beweis wird nicht versucht. Das dürften doch genügende Anhaltpunkte dafür sein, dass hier nicht an zufällige Uebereinstimmung zweier Erfinder, sondern nur an die Mittheilung von Ueberliefertem zu denken ist. Wenn wir im vorigen Bande, wo die Regel Ta yen unsere Aufmerksamkeit zum ersten Male fesselte, auf deren räthselhaftes Auftreten bei einem Byzantiner um das Jahr 1400 hinweisen mussten, so ist jetzt ihr europäisches Vorkommen um weitere zwei Jahrhunderte zurückgetreten, ohne dadurch begreiflicher zu werden.

Geschichtlich höchst merkwürdig ist die Aufgabe von den 7 alten Weibern[2]). Dieselben gehen nach Rom. Jede hat 7 Maulesel; jeder Maulesel trägt 7 Säcke; jeder Sack enthält 7 Brode; bei jedem Brod sind 7 Messer; jedes Messer steckt in 7 Scheiden. Was ist die Gesammtzahl alles Genannten? $7+49+343+2401+16807+117649=137256$. Aber, fügt Leonardo dieser ersten Auflösung hinzu, man kann die Rechnung auch anders vollziehen. Man geht von einer alten Frau aus. Die fünf nothwendigen Vervielfachungen mit 7 vollzieht man unter jedesmaliger Hinzufügung einer neuen Einheit, also $7\cdot 1+1=8$, $7\cdot 8+1=57$, $7\cdot 57+1=400$, $7\cdot 400+1=2801$, $7\cdot 2801+1=19608$ und endlich $7\cdot 19608=137256$ wie vorher, indem thatsächlich nicht 1, sondern 7 alte Frauen vorhanden waren. Das ist genau die Rechnung, welche,

[1]) Leon. Pisano I, 304 Z. 6—29. Die hochinteressante Stelle ist zuerst von Curtze bemerkt worden, der Zeitschr. Math. Phys. XLI Histor.-liter. Abthlg. S. 81—82 auf sie hinwies. [2]) Ebenda pag. 311 Z. 5 v. u. — 312 Z. 7.



wenn auch mit anderem Wortlaute der Aufgabe verbunden und bei $7\cdot 2801=19607$ stehen bleibend, bei dem Aegypter Ahmes (Bd. I, S. 42) vorkam. Also nicht allein die Aufgabe der Summirung der aus den Potenzen der Zahl 7 gebildeten geometrischen Reihe hat sich drei Jahrtausende erhalten, auch die Rechnungsweisen erkennen wir wieder, die erste sowohl als die zweite, namentlich der letztere Umstand auffallend genug bei einem Schriftsteller, der nur wenige Seiten früher[1]) die Formel für die Summe der mit stets verdoppelten Zahlen versehenen Schachbrettfelder anzuwenden wusste.

Der dreizehnte Abschnitt ist der Regel des doppelten falschen Ansatzes gewidmet, welche Leonardo, wie der Name *Regula elchatayn* verräth, von Arabern erlernt hat (Bd. I, 689). Ein Beispiel ist folgendes[2]): 100 Rotuli kosten 13 libras zu 20 solidi zu 12 denarii, was kostet 1 Rotulus? Eine erste Annahme setzt 3 solidi für den Rotulus, für 100 also 300 solidi = 15 librae oder 2 zu viel. Eine zweite Annahme setzt 2 solidi für den Rotulus, für 100 also 200 solidi = 10 librae oder 3 zu wenig. Die beiden Fehler addirt, zeigen durch $2+3=5$ eine Abnahme des Gesammtpreises um 5 librae, während der Preis eines Rotulus um 1 solidus = 12 denarii abnahm. Nun sollte aber der Gesammtpreis nur um 2 librae abnehmen, man muss also 12 mit 2 multipliciren und durch 5 dividiren, um $4\frac{4}{5}$ denarios zu erhalten, welche, von 3 solidis abgezogen, den richtigen Preis 2 solidi $7\frac{1}{5}$ denarii kennen lehren. Leonardo erläutert die Rechnung an einem Diagramme:

Additum ex 13 multiplicationibus

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | 9 |
| soldi | | soldi |
| 2 | | 3 |
| minus | | plus |
| 3 | | 2 |
| | 5 | |
| | additum ex erroribus | |

und dieses Diagrammes wegen haben wir überhaupt das Beispiel näher erörtert. Auf ihm finden sich nämlich, wie man sieht, die beiden Wörter plus und minus. Bei Additionen gebraucht Leonardo allerdings niemals *plus*, sondern ausschliesslich *et*. Linien-

[1]) Leon. Pisano I, 309: *De duplicatione scacherii.* [2]) Ebenda pag. 319.

grössen (Figur 3) dienen zur Erläuterung des Verfahrens[1]). Sei $ab$ die wahre Länge der unbekannten Zahl. Setzt man irgend ein $ag$ statt ihrer, so kommt eine Zahl als Endergebniss, welche um $ez$ kleiner ist als die, welche herauskommen soll. Setzt man eine zweite angenommene Zahl $ad$ statt der Unbekannten, so erscheint wieder ein fehlerhaftes Ergebniss, welches um $iz$ zu klein ist. Nun kennt man sowohl die Differenz $gd$ der beiden Annahmen, als die $ei$ der beiden Fehler und ist im Stande, den Ueberschuss $db$, um welchen die unbekannte Zahl die zweite Annahme $ad$ übertrifft, aus der Proportion $ei : iz = gd : db$ zu berechnen[2]). Hat man nämlich $\alpha x = b$ und $\alpha n_1 = b - e_1$, $\alpha n_2 = b - e_2$, so berechnet sich (wie aus der angeführteu Stelle unseres I. Bandes entnommen werden mag) $x = \frac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2}$. In der Figur entspricht $ag = n_1$, $ad = n_2$, $ez = e_1$, $iz = e_2$, $ei = e_1 - e_2$, $gd = n_2 - n_1$, $db = x - n_2$. Die obige Proportion geht also über in $(e_1 - e_2) : e_2 = (n_2 - n_1) : (x - n_2)$, und daraus folgt

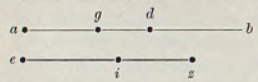


Fig. 3.

$$x = n_2 + \frac{e_2 (n_2 - n_1)}{e_1 - e_2} = \frac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2}.$$

Leonardo führt auch die in letzterer Gleichung sich darstellende Vorschrift ausdrücklich aus[3]): man solle den ersten Fehler mit dem zweiten Ansatze, den zweiten Fehler mit dem ersten Ansatze multipliciren, letzteres Product vom ersteren abziehen und die Differenz durch die Differenz der Fehler dividiren. Wieder an einer Figur wird der Fall des doppelten falschen Ansatzes erörtert, in welchem beide Annahmen zu gross gewählt wurden, mithin $\alpha n_1 = b + e_1$, $\alpha n_2 = b + e_2$ beide zu gross ausfielen. Es sei (Figur 4) $ab$ die richtige Länge der Unbekannten, $af$ und $ac$ die erste beziehungsweise zweite Annahme, denen $gi$ und $gk$ als erster und zweiter Fehler gegenübersteht, oder es sei $af = n_1$, $ac = n_2$, $gi = e_1$, $gk = e_2$, $ki = e_1 - e_2$, $cf = n_1 - n_2$, $bc = n_2 - x$. Dann soll die Proportion stattfinden[4]) $ik : kg = cf : cb$. Anders geschrieben heisst sie $(e_1 - e_2) : e_2 = (n_1 - n_2) : (n_2 - x)$

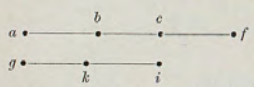


Fig. 4.

[1]) Leon. Pisano I, 320—322. [2]) In der Druckausgabe pag. 320 Z. 21 schliesst die Proportion irriger Weise mit $ab$ statt mit $db$, doch dürfte hier ein Fehler irgend eines Abschreibers und nicht Leonardo's vorliegen. [3]) Leon. Pisano, I, 320 Z. 25—29. [4]) Ebenda pag. 321 Z. 3.



und aus ihr folgt $x = n_2 - \frac{e_2 (n_1 - n_2)}{e_1 - e_2} = \frac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2}$, welches wiederum vollständig richtig ist und durch die Vorschrift[1]) bestätigt wird, man solle von dem Producte des ersten Fehlers in dem zweiten Ansatz das Product des zweiten Fehlers in dem ersten Ansatz abziehen und die Differenz durch den Unterschied der Fehler theilen. Endlich versinnlicht ein drittes Linienpaar den noch allein übrigen Fall, dass (Figur 5) eine Annahme $ag$ zu klein, die andere $ad$ zu gross war, und dass dem entsprechend zuerst ein Mangel $ez$, dann ein Ueberschuss $zi$ auftrat. Hier ist die Proportion zu bilden[2]) $gd : bg = ei : ez$ oder in den anderen wiederholt von uns benutzten Buchstaben $(n_2 - n_1) : (x - n_1) = (e_1 + e_2) : e_1$, woraus die richtige Folgerung zu ziehen ist $x = n_1 + \frac{e_1 (n_2 - n_1)}{e_1 + e_2} = \frac{e_1 n_2 + e_2 n_1}{e_1 + e_2}$.

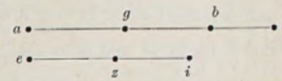


Fig. 5.

So hat Leonardo die Regel des doppelten falschen Ansatzes genau erörtert und sämmtliche Möglichkeiten derselben erschöpft. Darauf werden mannigfache Aufgaben behandelt, welche bereits im vorhergehenden Abschnitte zur Uebung der dortigen Regeln dienten[3]); nächst diesen aber auch andere neue Aufgaben[4]). Wir wollen nur des ersten Beispieles der letzteren Art gedenken. $A$ und $B$ bezeichnen uns, wie schon öfter, zwei Personen und zugleich deren Vermögen. Man besitze darüber die beiden Angaben $A + \frac{1}{3} B = 14$, $B + \frac{1}{4} A = 17$. Eine erste Annahme $A = n_1 = 4$ giebt $4 + \frac{1}{3} B = 14$, $B = 30$, $B + \frac{1}{4} A = 30 + 1 = 31$, während 17 kommen sollten, das ist ein Ueberschuss $e_1 = 31 - 17 = 14$. Die zweite Annahme $A = n_2 = 8$ giebt $8 + \frac{1}{3} B = 14$, $B = 18$, $B + \frac{1}{4} A = 18 + 2 = 20$, während wieder 17 kommen sollten, das ist abermals ein Ueberschuss $e_2 = 20 - 17 = 3$. Da Leonardo für den ersten Fall, welcher bei zweimaligem Ueberschiessen hier zutrifft, die Proportion $(e_1 - e_2) : e_2 = (n_2 - n_1) : (A - n)$ angegeben hat, so wäre es vollkommen genügend, wenn er nur die Zahlenwerthe einsetzend $(14 - 3) : 3 = (8 - 4) : (A - 8)$ oder $11 : 3 = 4 : (A - 8)$ hätte rechnen lassen. Aber es ist, als wenn er schon Ueberdruss empfunden hätte, seinen Lesern durch gewohnheitsmässige Uebung eines und desselben Verfahrens das

[1]) Leon. Pisano I, 321 Z. 7—11. [2]) Ebenda pag. 321 Z. 16 v. u. [3]) Ebenda pag. 322—336. [4]) Ebenda pag. 336—352.

Denken zu ersparen. Nach Angabe der beiden Fehler 14 und 3, welche die Annahmen 4 und 8 zur Folge haben, fährt er nämlich das weitere Verfahren begründend, also fort[1]): Für 4 Einheiten, welche wir dem Ersten $A$ mehr geben (8 anstatt 4), näherte sich die zweite Zahl $B$ um 11 der Wahrheit (3 anstatt 14), und es ist nur noch eine Annäherung an dieselbe um 3 erforderlich. Mithin ist 3 mal 4 getheilt durch 11 dem $A$ noch beizufügen, das beträgt $1\frac{1}{11}$. Von $9\frac{1}{11}$ bis zu 14 sind es aber $4\frac{10}{11}$, und das ist ein Drittel des Vermögens des $B$, welches mithin $14\frac{8}{11}$ beträgt.

Der vierzehnte Abschnitt führt zu den Wurzelgrössen. Bei der Quadratwurzelausziehung ist namentlich auf solche Zahlen Rücksicht genommen, welche keine vollständigen Quadrate sind, bei denen folglich nur eine Annäherung an das wahre Ergebniss vorgenommen werden kann. Jede Annäherung vollzieht sich der Natur der Sache nach in einzelnen Schritten, deren jeder dem gewünschten Ziele näher bringen soll. Als erste Annäherung zu einer Quadratwurzel $\sqrt{A}$ wählt Leonardo den ganzzahligen Theil derselben, welcher $a$ heissen mag, und durch welchen die fortlaufende Ungleichung befriedigt wird $a^2 < A < (a+1)^2$. Bedienen wir uns, wie es nicht selten geschieht, des Aehnlichkeitszeichens um annähernde Gleichheit zu bezeichnen, so ist also zuerst $\sqrt{A} \sim a$. Die zweite Annäherung ist $\sqrt{A} \sim a + \frac{A-a^2}{2a}$, mit welcher die Rechnung einigemale abschliesst. Eine dritte Annäherung, über welche Leonardo nie hinausgeht, wie auch die Araber eine dritte Annäherung stets als letzte betrachteten (Bd. I, S. 765), ist:

$$\sqrt{A} \sim a + \frac{A-a^2}{2a} - \left(\frac{A-a^2}{2a}\right)^2 : 2\left(a + \frac{A-a^2}{2a}\right)$$

oder

$$a + \frac{A-a^2}{2a} - \frac{(A-a^2)^2}{4a(A+a^2)} \text{ oder } a + \frac{(A-a^2)(A+3a^2)}{4a(A+a^2)}.$$

Von diesen letzten Umformungen ist freilich bei Leonardo um so weniger eine Spur zu bemerken, als er die ganze Rechnung nur an bestimmten Zahlenbeispielen durchführt. Ein solches Beispiel[2]) ist $\sqrt{927435} \sim 963 + \frac{11}{321} - \left(\frac{11}{321}\right)^2 : \left(2\left(963 + \frac{11}{321}\right)\right)$. Ein anderes Mittel zur Auffindung einer näherungsweise richtigen Quadratwurzel dürfte ebenfalls auf arabischen Einfluss zurückzuführen sein (Bd. I, S. 752). Leonardo vervielfacht die Zahl, deren Quadratwurzel ermittelt werden soll, mit einer aus Eins und einer geraden Anzahl von Nullen be-

[1]) Leon. Pisano I, 337, Z. 4. [2]) Ebenda pag. 355.



stehenden Zahl. Alsdann genügt eine einzige Bruchannäherung in der neuen Quadratwurzel, um dem genauen Werthe schon recht nahe zu kommen, weil doch noch durch einen Divisor zu theilen ist, durch Eins mit halb so vielen Nullen, als vorher bei der Multiplication auftraten. $\sqrt{7234} = \frac{1}{100}\sqrt{72340000} \sim \frac{1}{100} \cdot 8505\frac{1}{4} \sim 85\frac{1}{20}\frac{1}{400}$. An die Quadratwurzelausziehungen schliessen sich Betrachtungen über Irrationalzahlen, welche ziemlich genau den Gang von Euklid's X. Buche der Elemente verfolgen. Vielleicht sollten wir betonen, dass bei dieser Gelegenheit[1]) die einfachen Buchstaben $a$, $b$, $g$, $d$, $e$ als Vertreter von Zahlen auftreten, während eben so wenig Mangel an Beweisen mittels Linien oder mittels Figuren ist, deren Endpunkte durch $a$, $b$, $c$, $d$, $e$. $f$, $g$, $h$, $i$ bezeichnet sind[2]). Mittels einer solchen wird z. B. nachgewiesen, wie Zahlen von der Art wie $6 - \sqrt{20}$ und $3 - \sqrt{5}$ mit einander zu vervielfachen sind. Dabei ist (Figur 6) $ad = 6$, $de = \sqrt{20}$, $ab = 3$, $bf = \sqrt{5}$, es handelt sich also um die Entstehung des Rechteckchens $acif$. — Nach den Quadratwurzeln wendet sich Leonardo zu Kubikwurzeln. Der Würfel einer aus zwei Theilen bestehenden Strecke setzt sich, sagt er, zusammen aus den Würfeln der einzelnen Theile und dem dreifachen Producte des Quadrates je einen Theils in den anderen Theil. Als ich über diese Definition, fährt er fort[3]), lange nachgedacht hatte, *erfand* ich die Methode der Wurzelausziehung, welche ich weiter unten auseinandersetzen will. Leonardo schreibt sich ungemein selten irgend etwas eigenthümlich zu. Es ist wohl also unzweifelhaft, dass wir hier seinen Worten Glauben zu schenken haben, dass wir annehmen müssen, solche arabische Schriften, aus welchen er (Bd. I, S. 718 und 732) Kubikwurzelausziehungen hätte erlernen können, seien ihm unbekannt geblieben. Um so zuverlässiger müssen wir auch ein Näherungsverfahren zur Auffindung irrationaler Kubikwurzeln als Leonardo's Eigenthum anerkennen, welches folgendermassen sich darstellt[4]). Man will $\sqrt[3]{A}$ suchen. Eine erste Annäherung besteht wieder in dem ganzzahligen Werthe $a$, der ähnlich wie bei der Quadratwurzelausziehung die fort-

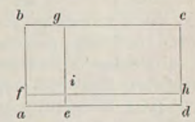


Fig. 6.

[1]) Leon. Pisano I, 360. [2]) Ebenda pag. 370. Man bemerke den sprachlichen Unterschied zwischen den beiden hier angegebenen Buchstabenfolgen, die erste griechisch-arabisch, die zweite lateinisch. [3]) Ebenda pag. 378 Z. 6 v. u.: *Et cum super hanc diffinitionem diucius cogitarem, inveni hunc modum reperiendi radices, secundum quod inferius explicabo.* [4]) Ebenda pag. 380—381.

laufende Ungleichung $a^3 < A < (a+1)^3$ erfüllt. Diese Ungleichung lässt sich auch $0 < A - a^3 < 3a(a+1)+1$ schreiben, oder die Zahl $a$ ist richtig gewählt, wenn der Rest $A - a^3 < 3a(a+1)+1$ ist, denn die Vermehrung des Kubus besteht aus $3a(a+1)+1$, sofern eine Vermehrung der Kubikwurzel $a$ um die Einheit stattfindet. Nimmt man bei kleiner Vermehrung eine Proportionalität zwischen den Veränderungen der Wurzel und des Radicanden an, so muss, wenn der Radicand um 1 wächst, die Wurzel um $\frac{1}{3a(a+1)+1}$ wachsen. Der Zunahme des Radicanden um $A - a^3$ entspricht also, immer unter der gleichen Annahme der verhältnissmässigen Aenderungen, eine Zunahme der Wurzel um $\frac{A-a^3}{3a(a+1)+1}$ oder in zweiter Annäherung ist $\sqrt[3]{A} \sim a + \frac{A-a^3}{3a(a+1)+1}$. Beispielsweise setzt Leonardo

$$\sqrt[3]{900} \sim 9 + \frac{900-729}{271},$$

wofür man $9\frac{2}{3}$ schreiben dürfe. Ferner $\sqrt[3]{2345} \sim 13 + \frac{2345-2197}{547}$, wofür man $13\frac{1}{4}$ schreiben dürfe, weil 148 wenig mehr als ein Viertel von 547 sei. War auch nach unserer bereits ausgesprochenen Ueberzeugung Leonardo der selbständige Erfinder dieses Verfahrens, so ist damit keineswegs ausgeschlossen, dass ihm auf seinem Erfinderwege ein Vorbild vorschwebte, geeignet die Richtung etwa anzudeuten, nach welcher er sich bewegen musste. Diese Annahme führt aber rückwärts dazu, dass wir von Leonardo's Kubikwurzelausziehung aus die Quadratwurzelausziehung des Alkarchî (Bd. I, S. 722) verstehen lernen. Wenn das Quadrat $a^2$ bis zum Quadrate der nächsten ganzen Zahl um $2a+1$ zunimmt, und wenn Verhältnissmässigkeit zwischen den kleinen Veränderungen der Wurzel und ihrer Quadratzahl angenommen werden darf, so entspricht der Veränderung der Zahl um $A - a^2$ eine Veränderung der Wurzel um $\frac{A-a^2}{2a+1}$, oder es ist $\sqrt{A} \sim a + \frac{A-a^2}{2a+1}$, wie Alkarchî es vorschreibt. Dass Leonardo bei Ausziehung der Quadratwurzel eben dieses Verfahren nicht lehrt, kann uns in unserer Meinung nicht beirren. Bei der Quadratwurzel ging er über die zweite Annäherung zu einer dritten hinaus, welche ihm ein besseres Ergebniss versprach. Bei der Kubikwurzel liess er sich gern an der einen Bruchannäherung genügen.

Endlich der fünfzehnte Abschnitt vereinigt wieder recht Ungleichartiges in ungleichartiger Folge. Aufgaben über in stetigem Verhältnisse stehende Zahlen, Aufgaben geometrischer Einkleidung, Aufgaben der „Algebra und Almuchabala" wechseln ziemlich bunt.



Bei der zuerst genannten Gattung von Aufgaben sind die Zahlengrössen regelmässig durch Strecken versinnlicht, welche bald zwei Buchstaben, bald nur einen als Bezeichnung führen. Im letzteren Falle bedeutet die einfache Nebeneinanderstellung zweier Buchstaben deren Summe[1]). Die in geometrischer Einkleidung auftretenden Aufgaben sind meistens solche, deren Auflösung von einer Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes abhängt. Einmal handelt es sich z. B. um die Lage eines Brunnens, der gleich weit von den Spitzen zweier Thürme entfernt sein soll[2]). Gegeben ist die Entfernung der Thürme von einander und deren beiderseitige Höhen. Man verbindet die beiden Thurmspitzen geradlinig und errichtet auf dieser Verbindungslinie in ihrer Mitte eine Senkrechte, so trifft letztere bei gehöriger Verlängerung in den Brunnen ein. Der Brunnen liegt für Jemand, der in der Grundebene sich befindet, dem höheren Thurme näher als dem niedrigeren, kann bis zum Fusse des höheren Thurmes vorrücken und sogar jenseits desselben zu suchen sein. Nach dieser Aufgabe treten unvermittelt wieder solche auf, bei welchen Zahlen in stetiger Proportion wachsen. Es sind Gewinnrechnungen[3]), bei denen ein Kaufmann von Ort zu Ort reist und sein Kapital an jedem Orte in gleichem Verhältnisse vermehrt. Dann wird[4]) die Auflösung der unbestimmten Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ in rationalen Zahlen verlangt, woran neuerdings geometrische Aufgaben[5]) sich anschliessen. Jene unbestimmte Gleichung hat auch Diophant (Bd. I, S. 450) sich vorgelegt, aber die Behandlungsweise ist eine wesentlich andere als bei Leonardo, wenn auch die letzten Gründe der beiden Verfahren die gleichen sind. Leonardo geht von irgend einem pythagoräischen Zahlendreiecke aus, welches $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ bedingt. Daraus folgt $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = 1$ und daraus $\left(\frac{\alpha a}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\beta a}{\gamma}\right)^2 = a^2$. Aehnlicherweise werden auch verwandte Aufgaben behandelt, und zugleich ist wieder auf das *Libellum de quadratis* verwiesen[6]). Den Abschnitt und mit ihm das ganze Werk beschliessen erwähntermassen Aufgaben aus der Algebra und Almuchabala[7]). Gleich zu Anfang giebt eine Randnote *Maumeht* zu erkennen, dass es die Algebra des Alchwarizmî ist, die wir hier zu erwarten haben. Wirklich finden wir die sechs

---

[1]) Leon. Pisano I, 395 Z. 32—33: *quia est sicut a ad b ita g ad d, erit ergo ut ab ad b ita gd ad d.* Vergleiche damit auch pag. 397 Z. 8—9 *sit summa quadratorum ab* 225, womit gemeint ist $a^2 + b^2 = 225$. [2]) Ebenda pag. 398—399. [3]) Ebenda pag. 399—401. [4]) Ebenda pag. 401—403. [5]) Ebenda pag. 403—406. [6]) Ebenda pag. 403: *Nam unde hec inventiones precedunt geometrice demonstrata sunt in libello, quem de quadratis composui.* [7]) Ebenda pag. 406—459.

Gleichungsformen $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $bx + c = ax^2$, $ax^2 + c = bx$, deren drei letzte mittels Division durch $a$ zur Auflösung zubereitet werden. Wir finden die gleichen geometrischen Nachweisungen der Richtigkeit der Auflösung wie bei Alchwarizmî (Bd. I, S. 678). Wir finden das Zahlenbeispiel $x^2 + 10x = 39$ nebst anderen und daneben eine zweite Gruppe von Beispielen, welche auf Alkarchî zurückweisen[1]). Wir finden die Bemerkung[2]), dass der Form $ax^2 + c = bx$ regelmässig zwei Wurzelwerthe Genüge leisten. Leonardo geht dann noch in vielfältigen Aufgaben über seine Vorlagen hinaus. Die gestellten Fragen führen stets zu Gleichungen von einer der sechs Formen, sofern auch Wurzel- und Potenzgrössen als Vertreterinnen der Unbekannten zugelassen werden, aber Leonardo legt in der Fragestellung eine Gewandtheit an den Tag, welche auch dem heutigen Leser Staunen erregen mag. Die Kunstausdrücke, deren er sich bedient, sind *census* für das Quadrat der Unbekannten, *radix* (nicht *res* wie im 12. Abschnitte vergl. S. 22) für die Unbekannte selbst, *numerus* für die Gleichungsconstante.

Wir sind in der Schilderung des Liber Abaci fast unerträglich ausführlich geworden, während es eine Zeit gab, in welcher man kaum etwas Anderes von demselben rühmte, als dass dort fast zuerst die modernen Zahlzeichen mit der Null und dem Stellungswerthe durchgängige Verwendung fanden und mit dem Buche sich in weiteren und weiteren Kreisen einbürgerten. Die Entschuldigung der Breite, mit welcher wir berichtet haben, liegt in eben dem, was wir berichten durften, liegt in dem zahlreich Merkwürdigen, an welchem wir schweigend vorübergingen. Welch ein Werk! Wir kennen eine ziemliche Anzahl von Vorgängern desselben in den verschiedensten Sprachen, aber wo ist nur entfernt dessen Gleichen? Wir wissen kaum, was wir mehr bewundern sollen: die Möglichkeit, dass ein solches Werk am Anfange des XIII. Jahrhunderts geschrieben werden konnte oder die Verständnissfähigkeit dafür an dem Kaiserhofe.

Wohl hätten wir an unseren Bericht noch diese und jene Frage anzuknüpfen. Wir unterdrücken sie bis auf eine, welche wir mehr stellen als beantworten. Wir erwähnten (S. 5), Leonardo erzähle, er habe in Allem, was er auf seinen Reisen gelernt, den Algorismus und die Bögen des Pictagoras mit inbegriffen, nur Stümperwerk — quasi errorem — gefunden verglichen mit der Methode der Inder. Was verstand er unter dieser Methode? Man hat diese Frage viel-

[1]) Wöpcke hat in seinem *Extrait du Fakhrî* (Paris 1853) pag. 29 die Aufgaben zusammengestellt welche Leonardo aus Alchwarizmî und pag. 25—28 diejenigen, welche er aus Alkarchî geschöpft zu haben scheint. [2]) Leon. Pisano I, 409.



fach aufgeworfen, mancherlei Antworten darauf gegeben. Dass das Rechnen mit Stellungswerth nicht gemeint sein kann, verbürgt der Gegensatz gegen Algorismus. Wir schliessen uns der Vermuthung an, Leonardo habe unter der Methode der Inder die Methode des falschen Ansatzes verstanden, welche ja auch in einem wahrscheinlich aus dem Arabischen übersetzten Schriftstück (Bd. I, S. 688) als indischen Ursprunges bezeichnet wird, und welche in dem 12. Abschnitte des Liber Abaci mit einer unverkennbaren Vorliebe und Ausführlichkeit behandelt ist.

## 42. Kapitel.

### Die übrigen Schriften des Leonardo von Pisa.

So bedeutend nach allen Richtungen der Liber Abaci war, so bildete er doch nicht die bedeutendste schriftstellerische Leistung seines Verfassers. Wir müssen jene anderen mit der ersten Ausgabe des Abacus verglichen späteren Schriften Leonardo's nun kennen lernen.

Im Jahre 1220 widmete er[1]) die Practica geometriae einem Magister Dominicus, der die Ausarbeitung einer solchen von ihm gewünscht hatte. Die Vermuthung[2]), Magister Dominicus sei jener Astrologe gewesen, der bei einem Fach- und Zeitgenossen Guido Bonatti unter dem Namen Dominicus Hispanus Erwähnung findet, ist von so hoher Wahrscheinlichkeit, dass man kaum nach einer anderen wird suchen wollen. Dass Leonardo auf Anregung dieses Freundes das neue Werk verfasste, ist wohl mehr als nur stylistische Wendung. Leonardo's Erstlingswerk war erschienen. Bei vollendeter mathematischer Klarheit und Strenge war es abschreckend schwierig. Andrerseits behandelte es Gegenstände, welche der Kaufmann mitten im Verkehre des Lebens brauchen konnte, mitunter brauchen musste. Zwei Gattungen der Leser werden wir uns demnach zu denken haben: solche die um des Inhaltes willen die Form mit in den Kauf nahmen, solche die an der Form selbst Gefallen fanden. Persönlichkeiten der letzteren Art wies der Kaiserhof auf. Sie waren vorbereitet zu mathematischem Denken durch die seit

[1]) Leon. Pisano II, 1—224: *Incipit pratica geometriae composita a Leonardo pisano de filijs bonaccij anno M°CC°XX°. Rogasti amice Dominice et reverende magister, ut tibi librum in pratica geometriae conscriberem.* [2]) Bald. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano etc.* (*Roma* 1854) pag. 98 in der Note.

knapp fünfzig Jahren vorhandenen Uebersetzungen aus dem Arabischen eines Plato von Tivoli, eines Gerhard von Cremona, vielleicht Anderer, die wir nur nicht mehr kennen. Die Astrologie, vom Kaiser selbst geschätzt, trug auch dazu bei Neigungen zu wecken, welche seit Jahrhunderten in einem Todesschlafe gefangen lagen. Nun war der Spanier Dominicus ein Astrolog. Man kann sich ganz gut vorstellen, er habe gewünscht auch in geometrischen Dingen Unterweisung durch Leonardo zu erhalten, durch ihn, der in Rechenkunst und Algebra als vortrefflicher Lehrer sich bewährt hatte, und auf seinen Wunsch sei die Praxis der Geometrie entstanden, ein Werk, welches trotz seines Namens für die Praxis des Lebens nur wenig bot, kaum einigen wenigen Feldmessern Dienste leisten konnte. Der Feldmesser selbst verlangte nicht die geometrischen Beweisführungen, nach antikem Muster erfunden, wenn nicht geradezu alten Schriftstellern entnommen. Waren doch in den für Feldmesser im Alterthum zusammengestellten Schriften meist nur Regeln gegeben, wie man zu verfahren habe; warum man so verfahre, blieb unerörtert, wenn auch einzelnen feldmesserischen Schriftstellern nicht unbekannt.

Leonardo's Praxis der Geometrie erhebt sich durch die Beweisführungen, welche sie enthält, über ihre Vorbilder aus alter Zeit. Sie bleibt ihnen sehr nahe in der bunten Abwechslung zwischen metrologischen, arithmetischen, geometrischen und stereometrischen Lehren. Die Figuren sind mit Buchstaben versehen und hier tritt fortwährend der Gegensatz zu Tage, auf welchen wir (S. 31 Anmerk. 2) schon hingewiesen haben. Die Buchstaben folgen theils der Anordnung des lateinischen, theils und zwar in ihrer grossen Mehrheit der des griechisch-arabischen Alphabetes. Möglich, dass dadurch eine Unterscheidung zwischen selbsterfundenen und einfach übernommenen Beweisen zu gewinnen ist, möglich auch dass Leonardo die Sitte seiner arabischen Lehrmeister sich so sehr angeeignet hatte, dass sie ihm auch da zur zweiten Natur geworden war, wo er selbständiger arbeitete. In diesem Falle müsste man Gründen nachspüren, welche wenigstens seltene Abweichungen von der Gewohnheit hervorbrachten. Leonardo beginnt mit Definitionen. Maasstabellen folgen und auf diese Rechnungsvorschriften an benannten, theilweise auch an unbenannten Zahlen. Dann erst kommt eigentlich Geometrisches, aber auch wieder mit Arithmetischem untermischt. Wir heben nun Einzelheiten aus verschiedenen Gebieten hervor.

Der pythagoräische Lehrsatz[1]) ist durch Fällung einer Senkrechten von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse und

[1]) Leon. Pisano II, 32.



durch Beachtung der Aehnlichkeit der entstehenden Dreiecke bewiesen. — Ein eigenthümlich auftretendes Wort *casus* bedeutet den Abschnitt, der durch die von der Spitze eines Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Senkrechte auf der Grundlinie hervorgebracht wird. Der Einfallspunkt dieser Senkrechten, an den man zu denken geneigt sein könnte, kann nicht gemeint sein, da einmal von *maior casus* und von *minor casus* im Gegensatze zu einander die Rede ist[1]). — Die Ausmessung des Dreiecks als Rechteck aus der Grundlinie und der halben Höhe[2]) ist an der gleichen Figur gezeigt, deren später Ganeça in Indien (Bd. I, S. 614) sich bediente. — Die heronische Dreiecksformel ist mit einem Beweise[3]) versehen, welcher dem als heronisch überlieferten ähnelt, ohne ihm völlig gleich zu sein. — Es giebt sechserlei Vierecke[4]), nämlich die fünf euklidischen Arten und ausserdem — als fünftes in der Aufzählung zwischen das Rhomboid und das unregelmässige Viereck eingeschaltet — das Paralleltrapez, *quae habet capita abscissa*, und von diesem letzteren giebt es wieder vier Unterarten[5]), je nachdem das Paralleltrapez gleichschenklig, rechtwinklig, an beiden Seiten der Basis spitzwinklig ohne Gleichschenkligkeit, oder an einer Seite der Basis spitzwinklig, an der anderen stumpfwinklig ist. Hier erscheinen also euklidische und heronische Erinnerungen gemengt, letztere in vermuthlich reinerer Gestalt als die griechische Ueberlieferung uns aufbewahrte. Ausserdem ist auch[6]) von der *figura barbata* die Rede d. h. von dem (Fig. 7) Vierecke mit einspringendem Winkel, das *κοιλογώνιον* (Bd. I, S. 341) des Zenodorus. — Das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser ist in der Form[7]) $\frac{1440}{458\frac{1}{5}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{4}{9}}$ angegeben. Das arithmetische Mittel von $\frac{4}{9}$ und $\frac{1}{5}$ ist $\frac{29}{90}$ oder beinahe $\frac{1}{3}$. Leonardo von Pisa sagt $\frac{1440}{458\frac{1}{3}}$ sei *in medio* zwischen den genannten Grenzen und formt weiter um zu $\pi = \frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{4320}{1375} = \frac{864}{275}$ d. h. er setzt $\pi = \frac{34,56}{11} = 3,141818\ldots$

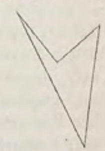


Fig. 7.

— Die Theilung von Figuren[8]) ist augenscheinlich einer arabischen Bearbeitung von Euklid's gleichnamigem im Urtexte uns verlorenem Buche nachgebildet. — Trigonometrische Betrachtungen lehnen sich an Ptolemäus an. Insbesondere ist diesem Schriftsteller der Beweis

[1]) Leon. Pisano II, 35 lin. 21 und 22. [2]) Ebenda pag. 35. [3]) Ebenda pag. 40. [4]) Ebenda pag. 56. [5]) Ebenda pag. 78. [6]) Ebenda pag. 83. [7]) Ebenda pag. 90. Vergl. Hultsch in Zeitschr. Math. Phys. XXXIX Histor.-liter. Abtlg. S. 170 und Weissenborn, Die Berechnung des Kreisumfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano (Berlin 1894) S. 30 flg. [8]) Leon. Pisano II, 110—148.

des Satzes[1]) entnommen, dass Bögen in grösserem Verhältnisse stehen als die zugehörigen Sehnen. Der Kunstausdruck *sinus versus arcus*[2]) hat wohl von Plato von Tivoli her Eingang gefunden.

In der praktischen Feldmesskunst sind einige Kunstgriffe gelehrt, welche wohl von Alters her in Uebung waren. Einzelnes[3]) zeigt eine fast wörtliche Uebereinstimmung mit erhaltenen Bruchstücken des Frontinus (Bd. I, S. 513). Anderes[4]) erinnert täuschend an Gerbert. Höhenmessungen mittels eines massiven hölzernen Dreiecks und mittels eines Quadranten werden gelehrt und durch gute Zeichnungen erläutert. Der Quadrant (Fig. 8) besteht, wie sein Name es ausdrückt, aus dem vierten Theile eines Kreises, dessen Bogen in 16 gleiche Theile getheilt ist, während eine vom Kreismittelpunkte ausgehende Gerade den dort durch die beiden den Quadranten begrenzenden Halbmesser gebildeten rechten Winkel halbirt. Von dem Durchschnittspunkte dieser Geraden mit dem Quadrantenbogen gehen den genannten Halbmessern parallel wieder zwei feste in je 10 gleiche Theile getheilte Gerade aus. Visirt man längs dem einen Grenzhalbmesser nach einem entfernten Höhen- oder Tiefpunkte, so schneidet ein vom Mittelpunkte herabgelassener Bleisenkel den getheilten Bogen und eine der getheilten Geraden. Auf jenem liest man die Grösse des eingestellten Winkels, auf dieser dessen Tangente, beziehungsweise dessen Cotangente ab. Eine Senkrechte von einem Punkte auf eine gegebene Gerade auf dem Felde wird folgendermassen gefällt[5]). Der Feldmesser stellt sich in dem Punkte auf, von welchem die Senkrechte ausgehen soll, befestigt daselbst ein Seil und begiebt sich mit dem anderen Seilende nach jener Geraden hin, wo dem Augenmaasse nach die Senkrechte ungefähr eintreffen wird. Das Seil wird jetzt gespannt, so dass es über die Grundlinie etwas hinausreicht, dann aber werden die zwei Punkte der Grundlinie bemerkt, in welche die ganze Seillänge genau eintrifft. In der Mitte zwischen beiden ist der richtige Höhenpunkt. Als eine beim Feldmessen nothwendige Vorrichtung wird auch noch das Archipendulum genannt[6]), ein massives gleichschenkliges Dreieck mit einem an der Spitze befestigten Faden, an welchem ein Bleistück hängt (filum cum plumbo).

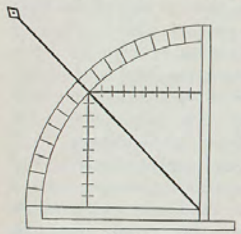


Fig. 8.

[1]) Leon. Pisano II, 97. [2]) Ebenda pag. 94. [3]) Ebenda pag. 107. [4]) Ebenda pag. 202—206. Vergl. Agrimensoren S. 180—181. [5]) Leon. Pisano II, 43. [6]) Ebenda pag. 108.



In der stereometrischen Abtheilung finden wir[1]) einen Auszug aus dem XI., XII., XIII. Buche des Euklid und aus jenem Buche des Hypsikles, welches unter dem Namen eines XIV. Buches des Euklid mitgeführt wurde. Die Aufgaben sind abgesondert und den Lehrsätzen nachgeschickt, auch sonstige muthmasslich selbständige Abänderungen in der Reihenfolge der beweislos ausgesprochenen Sätze sind wahrnehmbar. Es ist nicht unmöglich, dass Leonardo sich einer Uebersetzung des Gerhard von Cremona bedient hat[2]). Von Sätzen, welche bei Euklid sich noch nicht finden, erwähnen wir nur den von der Gleichheit des Quadrates der Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedon mit der Summe der Quadrate dreier in einem Eckpunkte aneinanderstossenden Seiten[3]). Als bei griechischen Geometern noch nicht bewiesen hätten wir vielleicht schon oben des planimetrischen Satzes von dem gemeinsamen Durchschnitte der drei Mittellinien eines Dreiecks[4]) gedenken sollen. Allerdings wusste Archimed, dass das Dreieck nur einen Schwerpunkt besitze, und dass er als Durchschnittspunkt irgend zweier Mittellinien gefunden werde. Aber damit war doch kein eigentlich geometrischer Beweis geliefert, und ein solcher ist der Leonardo's (Figur 9). Die Mittellinie $bz$ wird verlängert, bis sie in $i$ eine durch $a$ gezogene Parallele zu $bg$ schneidet Nun ist $\triangle aiz \backsim gbz$, und wegen $az = gz$ findet nicht bloss Aehnlichkeit sondern Congruenz statt, d. h. es ist $ai = gb = 2eb$. Ausserdem ist $\triangle aid \backsim ebd$, folglich wegen $ai = 2eb$ auch $ad = 2ed$, der Schnittpunkt einer Mittellinie durch eine andere theilt die erstere im Verhältnisse von $2:1$, kann also nur einer sein, welche Mittellinie man auch als Schneidende wähle.

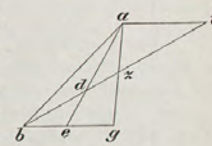



Fig. 9.

Auch Arithmetisches und Algebraisches ist zu berichten. Das Wort *figura cata* tritt auf[5]), unsere frühere Erläuterung dieses Ausdruckes durchaus bestätigend. Es begegnet uns die Behauptung[6]), jede Gleichung $x^2 + c = bx$ habe zwei Wurzelwerthe, wobei allerdings ebensowenig wie im 15. Abschnitte des Abacus (S. 34) der Möglichkeit gedacht ist, es könnte auch einmal $\frac{b^2}{4} \leqq c$ sein. Quadratwurzelausziehungen aus benannten Flächenzahlen[7]), Kubikwurzelausziehungen aus unbenannten Zahlen[8]) werden vorgenommen, welche mit dem

[1]) Leon. Pisano II, 159—162. [2]) Curtze brieflich. [3]) Leon. Pisano II, 163. [4]) Ebenda pag. 112—113. [5]) Ebenda pag. 52 und 54. [6]) Ebenda pag. 60. [7]) Ebenda pag. 23. Vergl. hierzu Hunrath, Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche (Kiel 1884), S. 30 flgg [8]) Leon. Pisano II, 148—153. Hunrath l. c. S. 35—36.

Verfahren im Abacus (S. 32) übereinstimmen. Endlich und gewiss am unerwartetsten in einem praktisch-geometrischen Werke stossen wir auf eine zahlentheoretische Aufgabe. Es soll[1]) eine Quadratzahl gefunden werden, welche um 5 vermehrt wieder eine Quadratzahl gebe. Leonardo löst die Aufgabe nach zwei Verfahren, welche er zwar nur an den bestimmten Zahlenwerthen ausübt, welche aber leicht verallgemeinert zur Darstellung sich eignen. Soll $x^2 + u$ neuerdings Quadratzahl sein, so wählt man erstens eine Quadratzahl $a^2 < u$ und setzt dann $(x+a)^2 = x^2 + u$, worauf sogleich $x = \frac{u - a^2}{2a}$ gefunden ist. Die zweite Methode unterscheidet zwei Fälle, den eines ungraden und eines graden $u$. Bei ungradem $u = 2n + 1$ ist augenscheinlich $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ und $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$. Die gewünschte Quadratzahl, welche um $u = 2n + 1$ vergrössert eine neue Quadratzahl giebt, ist also $n^2 = \left(\frac{u-1}{2}\right)^2$. Bei durch 4 theilbarem $u = 4n = (2n-1) + (2n+1)$ ist $1 + 3 + \cdots + (2n-3) = (n-1)^2$, $1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$. Die gewünschte Quadratzahl ist also $(n-1)^2 = \left(\frac{u-4}{4}\right)^2$. Es fehlt noch die Möglichkeit des durch 2, aber nicht durch 4 theilbaren $u$. Nun sei gefunden $x^2 + uv^2 = y^2$. Daraus folgt $\left(\frac{x}{v}\right)^2 + u = \left(\frac{y}{v}\right)^2$. Bei $v = 2$ sagt uns diese Erwägung, man solle zuerst $\left(\frac{4u-4}{4}\right)^2 + 4u = (u+1)^2$ setzen, um sodann $\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + u = \left(\frac{u+1}{2}\right)^2$ zu folgern, allerdings keine ganzzahlige Auflösung, welche aber unter der gemachten Voraussetzung gar nicht möglich ist.

So der Inhalt jenes zweiten Werkes Leonardo's. Hatte das erste schon, wie wir annahmen, seine Bekanntschaft mit Persönlichkeiten des kaiserlichen Hofstaates vermittelt, so dürfte auf das zweite hin die Neugier des Kaisers selbst rege gemacht worden sein, der den merkwürdigen Mann, den Wiedererwecker alter Wissenschaft und Erfinder neuer Sätze, kennen lernen wollte. Jedenfalls erfolgte die Vorstellung Leonardo's, die wir in doppeltem Sinne als Vorstellung bezeichnen dürfen, da Leonardo nicht bloss dem Kaiser zugeführt wurde, sondern in dessen Gegenwart Aufgaben löste, welche man ihm zu diesem Zwecke vorlegte. Wann, wo fand dieses Ereigniss statt? Nach der Vorstellung entstanden zwei Schriften, welche uns scheinbar beide Fragen unzweideutig beantworten. Liber quadratorum und Flos verfolgen beide den Zweck, die Methoden zu schildern, nach welchen Leonardo die ihm gestellten Aufgaben löste, und sie nennen den Ort, wo Leonardo bei Hofe erschien. Der Liber quadratorum ist wiederholt in der zweiten Ausgabe des Abacus genannt, mithin vor

[1]) Leon. Pisano II, 216—218.



1228 verfasst, wenn dieses das Jahr ist, in welchem die zweite Ausgabe des Abacus erfolgte. Damit steht in vortrefflicher Uebereinstimmung, dass als Entstehungsjahr des Liber quadratorum 1225 angegeben ist[1]). Die Vorstellung dürfte daher in eben diesem Jahre oder wenigstens nicht allzulange früher, etwa 1224, stattgefunden haben. Nun aber der Ort der Vorstellung! Im Liber quadratorum heisst es gleich nach der Ueberschrift in Worten, welche an seine Hoheit den glorreichen Fürsten F., also offenbar an Kaiser Friedrich gerichtet sind, Meister Dominicus — worunter offenbar wieder jener Spanier gemeint ist, welchem die Praxis der Geometrie zugeeignet ist — habe Leonardo vorgestellt, und zwar *cum me pisis duceret praesentandum*. Damals sei Magister Johannes von Palermo zugegen gewesen, der ihm Fragen vorgelegt habe. Die hier in lateinischer Sprache angeführten Worte können entweder bedeuten, Dominicus habe Leonardo aus Pisa hingeführt oder er habe ihn in Pisa hingeführt, um vorgestellt zu werden. Hier ist nur die letztere Uebersetzung zulässig, denn im Flos findet sie ausdrückliche Bestätigung[2]). In Gegenwart Eurer Majestät, glorreicher Fürst Friedrich, hat Euer Philosoph, Magister Johannes von Palermo sich in Pisa ausführlich über die Eigenschaften der Zahlen besprochen und mir dabei zwei Aufgaben gestellt. So erzählt Leonardo im Flos, und womöglich noch bestimmter klingt eine zweite Stelle derselben Abhandlung: Diese Frage hat mir, mein Kaiser und Herr, in Eurem Palaste in Pisa in Gegenwart Eurer Majestät Magister Johannes von Palermo vorgelegt. Wir wiederholen also unsern Ausspruch, es sei scheinbar unzweideutig festgestellt, dass Leonardo spätestens 1225, vielleicht schon 1224 in Pisa dem Kaiser persönlich bekannt wurde. Aber warum wiederholen wir abermals das Wort scheinbar? Weil die mit grosser Sorgfalt gesammelten Regesten Kaiser Friedrich II. zu erkennen geben, dass dieser vor Juli 1226 überhaupt nicht in Pisa war, und damals auch nur flüchtig, dann erst wieder Ende December 1239, August 1244, Mai 1245, April 1247, Mai 1249[3]). Zwischen diesen festgestellten Daten und einer schon vor 1225 vorgekommenen öffentlichen wissenschaftlichen Vorstellung in Gegenwart Friedrichs im Kaiserpalaste zu Pisa ist ein so klaffender Zwiespalt, dass wir ihn nicht zu überbrücken vermögen.

Magister Johannes von Palermo, magister Johannes panormitanus, der Philosoph des Kaisers, dürfte wohl derselbe Hofmann

[1]) Leon. Pisano II, 253: *Incipit liber quadratorum compositus a Leonardo Pisano. Anni M.CC.XXV.* [2]) Ebenda pag. 227 und pag. 234. [3]) Wir verdanken diese Angaben Hrn. Eduard Winkelmann, welcher uns deren Benutzung gütigst gestattete.

sein, welcher als Notar und Getreuer des Kaisers bezeichnet[1]) im Mai 1221 zu Catane eine Urkunde Friedrich's zu Gunsten eines Klosters bei Messina ausfertigte, und welcher auch 1240 noch vom Kaiser in wichtigeren Angelegenheiten beschäftigt wurde[2]). Die Aufgaben, welche er Leonardo stellte, bezeugen, dass er auch als tüchtiger Mathematiker betrachtet werden muss, wenn er es wirklich war, der jene Aufgaben ersann, wenn er nicht etwa ein Freund Leonardo's war, der durch ihn selbst bis zu einem gewissen Grade wenigstens angewiesen worden war, welcherlei Fragen ihm zur schleunigen Beantwortung erwünscht seien. Jedenfalls hält es nicht schwer, den Keim der Aufgaben bei der Pisaer Vorstellung in Leonardo's Schriften ausfindig zu machen.

Die erste Aufgabe ging dahin, eine Quadratzahl zu finden, welche um 5 vermehrt und vermindert neue Quadratzahlen liefere, und Leonardo löste diese mit $\left(3\frac{5}{12}\right)^2 = 11\frac{97}{144}$. Es ist auch wirklich $11\frac{97}{144} + 5 = 16\frac{97}{144} = \left(4\frac{1}{12}\right)^2$ und $11\frac{97}{144} - 5 = 6\frac{97}{144} = \left(2\frac{7}{12}\right)^2$. Wie sollten wir uns hier nicht an jene Aufgabe aus der Praxis der Geometrie erinnert fühlen, welche verlangte eine Quadratzahl zu finden, die um 5 vermehrt abermals eine Quadratzahl liefere? Neu war nur die zusätzliche Bedingung, dass auch die Verminderung um 5 eine Quadratzahl hervorbringen müsse. Und auch sie war keineswegs neu, und ein Schüler arabischer Zahlentheoretiker war in der Lage, die Aufgabe ebensowohl als ihre Auflösung zu kennen. Diophant hatte gelehrt: In jedem rechtwinkligen Dreiecke bleibt das Quadrat der Hypotenuse auch dann noch ein Quadrat, wenn man das doppelte Product der Katheten davon abzieht oder dazu addirt. Araber beschäftigten sich (Bd. I, S. 708—711) weitläufiger mit dem Gegenstande und gelangten, indem sie von rationalen rechtwinkligen Dreiecken ausgingen, zu den nur ganze Zahlen enthaltenden Endgleichungen $(a^2+b^2)^2 \pm 4ab(a^2-b^2) = (a^2-b^2 \pm 2ab)^2$. Allein wenn wir auch die Voraussetzung, Leonardo habe diese Ergebnisse gekannt, für berechtigt halten, so sind wir doch weit entfernt, ihm dadurch den Makel anheften zu wollen, als habe er nur wiederholt, was Andere vor ihm leisteten. Leonardo ging seine eigenen Wege, welche von denen Diophant's, von denen der Araber verschieden waren, welche er dagegen schon in der Praxis der Geometrie bei der unvollständigeren Aufgabe eingeschlagen hatte (S. 40). Seinen Aus-

[1]) Huillard-Bréholles, *Historia diplomatica Friderici II imper.* II, 185: *per manus Ioannis de Panormo notarii et fidelis nostri.* [2]) Ebenda V, 726, 727, 745, 928.



gangspunkt bildet der Satz von der Entstehung jeder Quadratzahl $n^2$ als Summe der $n$ ersten ungraden Zahlen $1+3+5+\cdots+(2n-1)$. Eine Folge desselben ist der weitere Satz[1]), dass, wenn zwei aufeinander folgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zusammen eine Quadratzahl bilden, das Quadrat der grösseren Zahl jedesmal Summe zweier Quadratzahlen sei. Moderne Bezeichnung gestattet leicht die Richtigkeit des Satzes einzusehen. Es ist immer

$$(a+1)^2 = a^2 + \left(\sqrt{a+(a+1)}\right)^2,$$

und damit auch das zweite Quadrat rechts vom Gleichheitszeichen eine rationale Wurzel besitze, ist hinreichend und nothwendig, dass $a$ und $a+1$ eine quadratische Summe besitzen. Durch seinen Satz ist Leonardo in den Stand gesetzt, beliebig viele ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke herzustellen, und zwar in einer ihm eigenthümlichen Weise. Aber das gleiche $c^2$, welches der Gleichung $a^2+b^2=c^2$ genügt, kann auch als Summe gebrochener Quadrate dargestellt werden[2]). Es sei bekannt $d^2+e^2=f^2$, so folgt leicht $\frac{d^2}{f^2}+\frac{e^2}{f^2}=1$, $\left(\frac{cd}{f}\right)^2+\left(\frac{ce}{f}\right)^2=c^2$. Nun folgt weiter der Satz[3]), dass $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ auf zwei verschiedene Arten als Summe zweier Quadrate dargestellt werden könne, vorausgesetzt, dass die Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$ keine Proportion bilden, d. h. dass weder $a:b=c:d$ noch $a:b=d:c$. Auch das war nicht neu. Diophant hatte eine ganz ähnliche Behauptung ausgesprochen (Bd. I, S. 451), aber die hinzutretende Bedingung ist von Leonardo beigefügt, und sie giebt uns, falls wir sie dahin aussprechen, es dürfe weder $ad=bc$ noch $ac=bd$ sein, die Gewähr, dass Leonardo die Zerlegungen

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = (ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

genau studirt hatte. Wie Leonardo in den bereits von uns genannten Sätzen über seine Vorgänger sich erhob, so auch im weiteren Verlauf des Liber quadratorum. Archimed hat die Summe der mit 1 beginnenden Quadratzahlen gebildet (Bd. I, S. 298). Andere sind ihm gefolgt. Leonardo summirt in ungemein geistreicher Weise die ungraden sowie die graden Quadratzahlen, jedes für sich[4]). Er bedient sich dabei der Identität $r(r+2)(2r+2)=(r-2)r(2r-2)+12r^2$. Nimmt in ihr $r$ alle ungraden von $r=3$ beginnenden Werthe der Reihe nach an, nachdem man schon vorher die von selbst einleuchtende Identität $1\cdot3\cdot4=12\cdot1^2$ anschrieb, und setzt Alles untereinander, so entsteht:

[1]) Leon. Pisano II, 254. [2]) Ebenda pag. 256. [3]) Ebenda pag. 257 flg. [4]) Ebenda pag. 263 flg.

$$\begin{aligned}
1\cdot 3\cdot\ \ 4 &= \qquad\qquad\qquad 12\cdot 1^2,\\
3\cdot 5\cdot\ \ 8 &= 1\cdot 3\cdot 4 + 12\cdot 3^2,\\
5\cdot 7\cdot 12 &= 3\cdot 5\cdot 8 + 12\cdot 5^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
r(r+2)(2r+2) &= (r-2)r(2r-2) + 12\cdot r^2.
\end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen, indem man die Glieder streicht, welche links und rechts in gleicher Weise erscheinen, so bleibt zuletzt nur $r(r+2)(2r+2) = 12(1^2+3^2+5^2+\cdots+r^2)$ übrig. Es ist leicht ersichtlich, wie man auch statt $r$ sämmtliche gerade Zahlen einsetzen kann. Dadurch entsteht:

$$\begin{aligned}
2\cdot 4\cdot\ \ 6 &= \qquad\qquad\qquad 12\cdot 2^2,\\
4\cdot 6\cdot 10 &= 2\cdot 4\cdot\ \ 6 + 12\cdot 4^2,\\
6\cdot 8\cdot 14 &= 4\cdot 6\cdot 10 + 12\cdot 6^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r(r+2)(2r+2) &= (r-2)r(2r-2) + 12\cdot r^2
\end{aligned}$$

mit der Summe $r(r+2)(2r+2) = 12(2^2+4^2+6^2+\cdots+r^2)$. Weitergehend erörtert Leonardo eine aus zwei ganzen Zahlen $a$, $b$ gebildete Zahl[1]), welche, jenachdem die Summe $a+b$ grad oder ungrad ist, entweder $ab(a+b)(a-b)$ oder $4ab(a+b)(a-b)$ heisst. Im einen wie im anderen Falle ist, wie Leonardo streng nachweist, die Zahl durch 24 theilbar. Das ist die Zahl, deren, wie wir oben in Erinnerung brachten, die Araber sich bei der Aufgabe drei eine arithmetische Progression bildende Quadratzahlen zu finden bedienten, nur dass Leonardo wieder weiter ging. Von ihm stammt jener Theilbarkeitssatz, der mit der Hauptaufgabe in keinerlei Verbindung steht, dafür aber an sich von zahlentheoretischem Interesse ist. Jetzt kommt auch Leonardo zur eigentlichen Hauptaufgabe[2]). Jede der drei in arithmetischer Progression stehenden Quadratzahlen $x_1^2$, $x_2^2$, $x_3^2$ (wobei $x_1 < x_2 < x_3$ angenommen ist) entstand als Summe aufeinanderfolgender, mit der 1 beginnender ungrader Zahlen. Es muss also $x_2^2$ aus den gleichen Ungraden wie $x_1^2$ bestehen, nur um einige vermehrt, ebenso auch aus den gleichen Ungraden wie $x_3^2$, nur um einige verringert. Mit anderen Worten, die unter sich gleichen Unterschiede $x_2^2 - x_1^2 = x_3^2 - x_2^2$ sind gebildet, die erste durch einige ungrade Zahlen unterhalb $2x_2 - 1$ mit dieser abschliessend, die zweite durch einige ungrade Zahlen oberhalb $2x_2 + 1$ mit dieser

[1]) Leon. Pisano II, 264. [2]) Vergl. namentlich über diese Aufgabe einen commentirenden Aufsatz von Ang. Genocchi in den von Tortolini herausgegebenen *Annali di scienze matematiche e fisiche* (Rom 1855) VI, 273—320.



beginnend, wobei, wegen des fortwährenden Zunehmens der ungraden Zahlen, die Anzahl derer, welche die Summe in der Form $x_2^2 - x_1^2$ lieferte, höher ist als die Anzahl derer, welche $x_3^2 - x_2^2$ hervorbringen, z. B. $25 - 1 = 3 + 5 + 7 + 9$, $49 - 25 = 11 + 13$. Der Unterschied selbst ist eine durch 24 theilbare Zahl von der oben erwähnten Natur und heisst ein Congruum[1]), die Quadrate $x_1^2$ und $x_2^2$ heissen congruentes[2]) und Leonardo zeigt nun, wie ein Congruum zu finden sei. Er zeigt auch, dass ein mit einer Quadratzahl vervielfachtes Congruum die Eigenschaft ein Congruum zu sein beibehalte, und dieser Satz bietet die Handhabe zur Lösung der Aufgabe, bei gegebener Differenz die drei Quadrate zu finden, falls die Differenz nicht durch 24 theilbar, also sicherlich kein ganzzahliges Congruum ist. So war es in dem von Johann von Palermo aufgegebenen Beispiele mit der Differenz 5. Leonardo sucht zuerst ein ganzzahliges Congruum von der Form $5y^2$ und findet es als

$$720 = 5\cdot 12^2 = 4\cdot 5\cdot 4\,(5+4)(5-4),$$

d. h. bei $a = 5$, $b = 4$. Diese Werthe geben $-a^2 + 2ab + b^2 = 31$, $a^2 + b^2 = 41$, $a^2 + 2ab - b^2 = 49$ und $31^2 + 720 = 41^2$, $41^2 + 720 = 49^2$. Endlich ist also nur noch durch $12^2$ Alles zu dividiren, um zu den Gleichungen $\left(\frac{31}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{41}{12}\right)^2$, $\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2$ zu gelangen, welche die gestellte Aufgabe erfüllen. Bei den vorbereitenden Untersuchungen war Leonardo genöthigt, den Zahlenwerth des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ zu berücksichtigen, und er hatte die Fälle unterschieden, wo $\frac{a}{b} \gtrless \frac{a+b}{a-b}$ war. Nunmehr beweist er die Unmöglichkeit von $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a-b}$. Aus dieser Unmöglichkeit folgt nun freilich, dass $ab(a+b)(a-b)$ nicht $= [b(a+b)]^2$ und $4ab(a+b)(a-b)$ nicht $= [2b(a+b)]^2$ sein kann. Leonardo geht aber weiter und schliesst, es könne überhaupt keine Quadratzahl ein Congruum sein[3]). Hier scheint eine Lücke in dem sonst vollkommen strengen Gedankengange vorhanden, ohne welche man für Leonardo ein unbestimmtes Erstlingsrecht für die Erfindung des Satzes beanspruchen müsste, dass zwei Biquadrate kein Biquadrat zur Summe haben können. Aus $x_2^2 - c = x_1^2$ und $x_2^2 + c = x_3^2$ folgt nämlich $x_2^4 - c^2 = (x_1x_3)^2$ und $x_2^4 = c^2 + (x_1x_3)^2$. Kann also $c$ kein Quadrat $y^2$ sein, so ist unmöglich $x_2^4 = y^4 + (x_1x_3)^2$, also eben so unmöglich der Einzelfall,

[1]) Leon. Pisano II, 266: *qui vocetur congruum.* [2]) Ebenda pag. 270: *quadrati congruentes facto congruo.* [3]) Ebenda pag. 272: *nullus quadratus numerus potest esse congruum.*

der bei $x_1 x_3 = z^2$ entstehen würde, d. h. unmöglich $x_2^4 = y^4 + z^4$. Immerhin würde Leonardo, wie wir absichtlich sagten, nur ein unbestimmtes Recht auf diese Entdeckung haben, indem er die hier gezogenen Folgerungen in keiner Weise andeutet. Leonardo schliesst noch andere verwickelte Aufgaben aus dem Gebiete der unbestimmten Analytik zweiten Grades an, deren eine, wie er mittheilt, ihm vom Magister Theodorus, dem Philosophen des Kaisers, gestellt wurde[1]). Sie würde in Zeichen geschrieben darauf hinauskommen, drei Zahlen $x$, $y$, $z$ zu finden, welche jede einzelne der drei Summen $x + y + z + x^2$, $x + y + z + x^2 + y^2$, $x + y + z + x^2 + y^2 + z^2$ zu einer Quadratzahl machen, was durch $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{48}{5}$, $z = \frac{144}{5}$ erfüllt wird, indem alsdann jene Summen zu $\left(\frac{36}{5}\right)^2$, zu $(12)^2$ und zu $\left(\frac{156}{5}\right)^2$ werden.

Wir kommen zu einer zweiten Aufgabe, welche Johannes von Palermo unserem Leonardo in Gegenwart des Kaisers vorlegte, und von welcher in der Flos überschriebenen Abhandlung[2]) die Rede ist. Auch diese Abhandlung ist, gleich den anderen Schriften Leonardo's, ein Zeichen der genauen Beziehungen des Verfassers zum kaiserlichen Hofe. Sie ist einem Cardinal R., Diaconus der heiligen Maria in Cosmedin gewidmet, das ist, wie aus der beigefügten näheren Bezeichnung zu ermitteln gelang[3]), Cardinal Raniero Capocci von Viterbo. Den Titel *Flos* erläutert Leonardo selbst in der Widmung mit Berufung theils auf die blumenreiche Beredsamkeit des Gönners, dem die Abhandlung zugeeignet ist, theils auf die blühende Art, in welcher schwierige Aufgaben bewältigt werden, die selbst wieder den Keim zu Neuem in sich tragen. Die Hauptaufgabe ist die durch Johannes von Palermo verlangte Auflösung der kubischen Gleichung[4]):

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Aus den Seiten 10 und $x$ wird ein Rechteck gebildet. Dann wird unter Benutzung der gleichen Höhe 10 ein zweites Rechteck $x^3$, ein drittes $2x^2$ angesetzt, mit anderen Worten, es wird die Folgerung $10\left[x + \frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{5}\right] = 20$ und daraus weiter $x + \frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{5} = 2$ gezogen. Daher muss $x < 2$ sein, und wenn $x$ ganzzahlig sein sollte, müsste es den Werth 1 besitzen. Aber $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 13 < 20$, folg-

[1]) Leon. Pisano II, 279. Genocchi l. c. pag. 357 flgg. [2]) Ebenda pag. 227—247. [3]) Bald. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano* pag. 17—19. [4]) Leon. Pisano II, 227: *ut inveniretur cubus numerus qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent viginti.*



lich ist $x$ nicht ganzzahlig. Ebensowenig ist $x$ eine rationale gebrochene Zahl. Denn es kann unmöglich $x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10}$ zur ganzen Zahl 2 werden, wenn $x$ bereits eine ganze Zahl im Nenner führt, $x^2$ dem Nenner einen zweiten, $x^3$ noch überdies ihm einen dritten Factor zuführt. Auch eine Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl kann $x$ nicht sein. Die gegebene Gleichung lässt nämlich die Umformung in $x = \frac{20 - 2x^2}{10 + x^2}$ zu, und damit wäre unter der gemachten Annahme die Gleichheit von Rationalem und Irrationalem ausgesprochen. Nach diesen einfacheren Annahmen, die leicht beseitigt wurden, geht Leonardo zu verwickelteren quadratischen Irrationalitäten über, dergleichen Euklid im X. Buche seiner Elemente ausführlich behandelt hat, und zeigt, dass auch sie die Gleichung nicht erfüllen, vielmehr Widersprüche hervorrufen[1]). Zuletzt giebt Leonardo einen Näherungswerth $x = 1^0\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 40^{VI}$, wobei die Anwendung von Sexagesimalbrüchen weiter fortgeführt erscheint, als es sonst irgendwo der Fall sein dürfte[2]). Man hat mit Hilfe der neuesten und genauesten Auflösungsmethoden die Gleichung behandelt[3]) und den Wurzelwerth gleichfalls in Sexagesimalbrüchen als

$$x = 1^0\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 38{,}5^{VI}$$

gefunden, mithin nur um $1\frac{1}{2}^{VI} = \frac{1}{31\,104\,000\,000}$ weniger als Leonardo's Werth! Eine so ausserordentlich genaue Rechnungsfähigkeit darf das höchste Erstaunen hervorrufen, und mit demselben das tiefste Bedauern darüber, dass Leonardo nar den Werth giebt, ohne zu verrathen, wie er ihn erhielt. Mag es ja die grösste Wahrscheinlichkeit für sich haben, dass Leonardo's Kubikwurzelausziehungen für Johann von Palermo die Veranlassung boten, die Auflösung einer kubischen Gleichung von ihm zu verlangen, auf dem Wege zur Ermittlung von Leonardo's Verfahren sind wir dadurch keinen Schritt weiter, und Versuche, welche gemacht wurden, über diese schwierige Frage Licht zu verbreiten[4]), muss man leider als ganz erfolglos bezeichnen. Von dem einen Versuche werden wir zu reden haben, wenn wir mit Cardano uns beschäftigen werden. Der andere sucht nun gar einen Zusammenhang zwischen dem Verfahren Leonardo's und dem des Al-Kâschî (Bd. I, 736—737) im XV. Jahrhunderte,

[1]) Eine algebraische Wiederherstellung der bei Leonardo der Form nach geometrisch geführten Untersuchung von Wöpcke in Liouville's *Journal des mathématiques* (1854) XIX, 401—406. [2]) Leon. Pisano II, 234. [3]) Wöpcke l. c. [4]) Genocchi l. c. pag. 165—168 und Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter S. 293.

während letzteres nur dann anwendbar ist, wenn die Gleichung die Gestalt $x^3 + Q = Px$ mit gegen $Q$ sehr grossem $P$ besitzt, also auf $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ in keiner Weise passt. Ein dritter Versuch[1]) geht von der Voraussetzung aus, Leonardo sei im Stande gewesen, die Umwandlung der Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ in $\left(x + \frac{2}{3}\right)^3 + 8\frac{2}{3}x = 20\frac{8}{27}$ und weiter in $y^3 + 8\frac{2}{3}y = 26\frac{2}{27}$ oder unter Anwendung von Sexagesimalbrüchen in $y^3 + 8^0\,40'\,y = 26^0\,4'\,26''\,40'''$ vorzunehmen. Da $1^0 < x < 2^0$ oder $1^0\,40' < y < 2^0\,40'$ bekannt war, habe Leonardo versuchsweise $y_0 = 2^0$ gesetzt. Er erhielt $y_0^3 + 8^0\,40'y_0 = 25^0\,20'$ mit einem Fehler $f_0 = 44'\,26''\,40'''$. Nahm er als zweiten Näherungswert $y_1 = y_0 + k$ an, d. h. setzte er $y_1^3 + 8^0\,40'y_1 = 26^0\,4'\,26''\,40'''$ und zog davon $y_0^3 + 8^0\,40\;y_0 = 25^0\,20'$ ab, so gelangte er zu $3ky_0^2 + 3k^2y_0 + k^3 + 8^0\,40'k = f_0$. Links war aber das erste Glied $3ky_0^2$ überwiegend und gab mit dem vierten allein berücksichtigt $k = \frac{f_0}{3y_0^2 + 8^0\,40'} = \frac{44'\,26''\,40'''}{20^0\,40'} \sim 2'$ nebst $y_1 = 2^0\,2'$. Nun sei $y_1$ in die Gleichung eingesetzt worden u. s. w. Wenn noch einige Vermuthungen zu Hilfe gezogen werden entsteht $y_4 = 2^0\,2'\,7''\,42''\,33^{IV}\,4^{V}\,40^{VI}$ und daraus der von Leonardo angegebene Werth von $x$.

Wieder eine Aufgabe, welche Johann von Palermo im kaiserlichen Palaste in Pisa in Gegenwart Friedrichs II. Leonardo stellte, und zu welcher der Anlass in irgend anderen Textaufgaben gefunden werden mag, die in Leonardo's früheren Schriften durch Gleichungen gelöst wurden, ist die von den drei Männern, welche eine Geldsumme gemeinschaftlich besitzen[2]). Die drei Männer haben an die gemeinschaftliche Summe ein Eigenthumsrecht von $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. Sie greifen jeder auf's Gerathewohl zu, legen dann der Erste $\frac{1}{2}$, der Zweite $\frac{1}{3}$, der Dritte $\frac{1}{6}$ des Ergriffenen wieder hin und theilen das so Zusammengelegte zu gleichen Theilen, wodurch jeder erhält, was ihm gebührt. Wie gross war die Summe, und wieviel hatte jeder zunächst genommen? Der dritte Theil der beim zweiten Zusammenlegen entstandenen Geldsumme heisse $x$ (bei Leonardo *res*), die ganze ursprüngliche Summe $s$ (bei Leonardo *tota comunis pecunia*). Da Jeder

[1]) J. P. Gram, Essai sur la restitution du calcul de Léonard de Pise sur l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ in dem *Bulletin de l'Académie royale des sciences et des lettres de Danemark*, vorgelegt am 13. Januar 1893 im Anschluss an eine Mittheilung gleichen Datums und ähnlicher Ueberschrift von H. G. Zeuthen. [2]) Leon. Pisano II, 234: *De tribus hominibus pecuniam comunem habentibus.*



durch $x$ sich zu seinem Guthaben $\frac{s}{2}, \frac{s}{3}, \frac{s}{6}$ ergänzt, so hatten die drei Männer vorher $\frac{s}{2} - x,\ \frac{s}{3} - x,\ \frac{s}{6} - x$. Diese Summen waren entstanden, indem die gleichen Männer $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ des zufällig Ergriffenen abgegeben, mithin $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ desselben zurückbehalten hatten. Sie ergriffen folglich $2\left(\frac{s}{2} - x\right) = s - 2x$, $\frac{3}{2}\left(\frac{s}{3} - x\right) = \frac{s - 3x}{2}$, $\frac{6}{5}\left(\frac{s}{6} - x\right) = \frac{s - 6x}{5}$ und da sie zusammen $s$ an sich genommen hatten, so war $s = s - 2x + \frac{s - 3x}{2} + \frac{s - 6x}{5}$ oder $7s = 47x$. Dieser Bedingung genügt $s = 47$, $x = 7$, und als die von den Männern ergriffenen Summen erscheinen 33, 13, 1. Die Aufgabe ist nicht grade schwierig, aber die geschickte Auswahl der Unbekannten, welcher die Einfachheit der Auflösung zu verdanken ist, macht einen sehr angenehmen Eindruck.

Wie wir es aus dem Abacus gewöhnt sind, begnügt Leonardo sich selten oder nie mit einer einzigen Aufgabe einer gewissen Gattung, sondern er wählt andere und andere Spielarten, welche je zu neuen mitunter wichtigen Bemerkungen Anlass geben. So auch hier; wir verweilen jedoch nur bei zwei Sonderfällen, in welchen die eine Unbekannte einen negativen Werth annimmt[1]). Diese Aufgabe, sagt Leonardo bei der ersten, ist unlöslich, es sei denn, dass man zugebe, dass der Antheil des einen Mannes eine Schuld sei[2]), und nur wenig verschieden ist seine Aeusserung bei der zweiten Aufgabe, bei welcher er überdies andere Zahlenwerthe der vorkommenden Angaben bestimmt, deren Wahl lauter positive Wurzeln ergeben. Woher stammt Leonardo's Wissen von der Möglichkeit negativer Gleichungswurzeln? Da er selbst darüber schweigt, so ist man auf Vermuthungen angewiesen, wovon zwei, soviel wir sehen, zur Verfügung sind. Es wäre möglich, dass Leonardo auf seinen Reisen irgend einmal indischem Wissen begegnet wäre, indem ja die Inder (Bd. I, S. 580) negative Zahlen Schulden nannten. Es wäre auch möglich, dass Leonardo's bürgerlicher Beruf ihn selbständig zu dieser Auffassung leitete, die in der That für Jeden, der mit kaufmännischer Buchführung zu thun hatte, sehr nahe lag, während die Buchführung in Italien, in Südfrankreich, vielleicht auch in Spanien[3]) früh bekannt gewesen zu sein scheint.

[1]) Leon. Pisano II, 238: *De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta questio notabilis* und pag. 242: *De quatuor hominibus bizantios habentibus.* [2]) *Hanc quidem questionem insolubilem esse monstrabo, nisi concedatur primum hominum habere debitum.* [3]) Kheil, Valentin Mennher und Antich Rocha (Prag 1898), S. 46—48.

Ausser dem Liber quadratorum und dem Flos hat sich auch ein Brief an Meister Theodor[1]) erhalten, offenbar an die gleiche Persönlichkeit gerichtet, welche eine im Liber quadratorum erhaltene Aufgabe gestellt hat (S. 46), und den der Verfasser einer Chronik jener Zeit, der im Jahre 1200 in Padua geborene Rolandino, als Astrologen bezeichnet[2]). Der Brief behandelt in dem Zustande, in welchem er auf uns gekommen ist, Aufgaben sehr verschiedener Natur. Vielleicht müssen wir der Meinung[3]) uns anschliessen, hier sei einige Unordnung dadurch entstanden, dass Cardinal Raniero Capocci alle drei kleineren Schriften des Leonardo oder gar noch mehrere, besass, die auf einzelne Blattlagen geschrieben irgend einmal irgend wie durcheinander geriethen, worauf ein unvorsichtiger Abschreiber Alles copierte, wie es nun einmal lag. Sei dem nun wie da wolle, jedenfalls finden wir als erste Aufgabe die vom Vögelkaufe[4]). Es sollen für 30 Geldstücke 30 Vögel gekauft werden; es sollen dabei für ein Geldstück 3 Spatzen oder 2 wilde Tauben erhältlich sein, während eine zahme Taube 2 Geldstücke kostet. Leonardo nimmt an, man habe zuerst nur von den billigsten Vögeln eingekauft, mithin 30 Spatzen für 10 Geldstücke, und beabsichtigt nun Vertauschungen von Spatzen gegen Vögel der beiden anderen Arten unter Zahlung eines Aufgeldes von 20 Geldstücken vorzunehmen. Umtausch eines Spatzes gegen eine wilde Taube verlangt $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, gegen eine zahme Taube dagegen $2 - \frac{1}{3} = \frac{10}{6}$ Aufgeld, während die zur Verfügung stehende Summe $20 = \frac{120}{6}$ beträgt. Die Aufgabe hat sich mithin jetzt so weit verschoben, dass es auf die Zerlegung von 120 in die Summe der Producte von 10 in eine Unbekannte und von 1 in eine zweite Unbekannte ankommt, während die Summe der beiden Unbekannten unterhalb 30 liegen muss, da doch auch Spatzen noch vorhanden bleiben sollen. Es wird also verlangt $y + 10z = 120$ unter der weiteren Bedingung $y + z < 30$. Durch Subtraction der Ungleichung von der Gleichung folgt $9z > 90$, $z > 10$. Setzt man $z = 11$ in die Gleichung ein, so zeigt sich $y = 10$, während $z = 12$ bereits $y = 0$ zur Folge hat, also schon gegen die stillschweigende Annahme, es sollten Vögel von allen drei Gattungen gekauft werden, verstösst. Die einzige statthafte Möglichkeit ist daher die des An-

[1]) Leon. Pisano II, 247—252: *Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum phylosophum domini Imperatoris.* [2]) Bald. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano* pag. 64 sqq. [3]) Genocchi l. c. pag. 233. [4]) Leon. Pisano II, 247: *De avibus emendis secundum proportionem datam.*



kaufes von 11 zahmen, 10 wilden Tauben und 9 Spatzen. Nicht der Umstand, dass die Aufgabe gelöst erscheint, sondern das vollbewusste methodische Verfahren zieht unsere Aufmerksamkeit auf sich. Er habe das Verfahren, sagt er[1]), als ein solches erfunden, welches zur Auflösung jeder beliebigen Mischungsaufgabe ausreiche, und er stelle dessen nähere Auseinandersetzung zu beliebiger Verfügung. So weit hatte er die Sache noch nicht geführt, als er (S. 19) im 11. Abschnitte des Abacus eine ganz ähnliche Aufgabe behandelte, wenn auch der Zusammenhang mit Mischungsaufgaben ihm damals schon vorschwebte. Leonardo hielt eben eine einmal begonnene Untersuchung mit Zähigkeit fest und suchte ihr immer neue Seiten abzugewinnen. Diesen Eindruck bekommen wir auch von einer im Wortlaute des Briefes sich nun anschliessenden geometrischen Aufgabe[2]). Bei unserem Berichte über die Praxis der Geometrie sind wir schweigend an einigen Aufgaben vorübergegangen, welche algebraisch behandelt wurden, nämlich durch Zurückführung auf eine quadratische Gleichung, deren Wurzel die Länge einer gesuchten Strecke maass. Wir beabsichtigen auch jetzt nicht, das dort Vermiedene ausführlich nachzuholen. Wir nennen nur zwei jener Aufgaben unter Beigabe erläuternder Figuren. Es soll (Fig. 10) in ein Quadrat und unter Benutzung einer Ecke desselben ein gleichseitiges Fünfeck eingezeichnet werden[3]). Es soll (Fig. 11) in ein gleichseitiges Dreieck unter Mitbenutzung eines Stückes der Grundlinie als Seite der neuen Figur ein Quadrat eingezeichnet werden[4]). Denkt man sich in diesem Quadrate die desshalb in der Figur nur punktirte Scheitellinie ausgelöscht, so hat man abermals ein gleichseitiges Fünfeck, diesmal mit zwei rechten Winkeln vor sich.

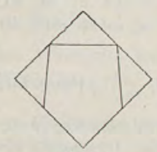


Fig. 10

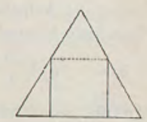


Fig. 11

Wieder um ein gleichseitiges Fünfeck handelt es sich an der angeführten Stelle des Briefes an Magister Theodorus. Es soll (Fig. 12) in einem gleichschenkligen Dreieck unter Mitbenutzung

[1]) Leon. Pisano II, 247: *praesentem modum inveni, per quem non solum similes questiones solvuntur, verum et omnes diversitates consolaminum monetarum* und pag. 249: *et sic possumus in similibus etiam et in consolamine monetarum, et bizantiorum operari; quod quandocumque vel placuerit dominationi vestrae liquidius declarabo.* [2]) Ebenda pag. 249: *De compositione pentagonj equilateri in triangulum equicrurium datum.* [3]) Ebenda pag. 214. [4]) Ebenda pag. 223.

der aus den Schenkeln des Dreiecks gebildeten Ecke desselben und eines Stückes von dessen Grundlinie hergestellt werden. Es ist $ab = ac = 10$, $bc = 12$, folglich die Höhe $ah = 8$. Nun sei $x$ die gesuchte Fünfecksseite

$$ad = de = ef = fg = ga,$$

so ist $db = 10 - x$ und wegen $ad : db = ah : di$ ist

$$di = \frac{(10-x)8}{10} = 8 - \frac{4}{5}x.$$

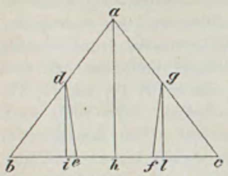



Fig. 12.

Andrerseits ist $ab : ad = hb : hi$, also $hi = \frac{6x}{10}$. Weil ferner $he = \frac{x}{2}$, so ist $ie = \frac{6x}{10} - \frac{x}{2} = \frac{x}{10}$. Endlich war $de = x$. Man kennt also die drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks $dei$ und kann zwischen ihnen die Gleichung des pythagoräischen Lehrsatzes ansetzen:

$$de^2 = ie^2 + di^2 \quad \text{oder} \quad x^2 = \frac{x^2}{100} + 64 - \frac{64}{5}x + \frac{16}{25}x^2,$$

welche sich in $\frac{7}{20}x^2 + \frac{64}{5}x = 64$ umwandelt, et sic reducta est questio ad unam ex regulis algebrae, und so ist die Aufgabe auf eine der algebraischen Gleichungsformen zurückgeführt. Leonardo rechnet nun den Werth von $x$ unter Benutzung von Sexagesimalbrüchen aus und findet für denselben $x = 4^0\,27'\,24''\,40'''\,50^{IV}$. Die allgemeine Auflösung der Aufgabe ist, sofern jeder der gleichen Schenkel $a$ und die Grundlinie $b$ heisst.

$$x = -\frac{4a^2 - b^2}{2b - a} + \frac{1}{2b-a}\sqrt{(a+b)(2a+b)(2a-b)(3a-b)}.$$

An die geometrisch-algebraische Aufgabe schliesst sich unter der Ueberschrift[1]): *Andere Art ähnliche Fragen zu beantworten* eine Aufgabe an, welche die Auflösung von fünf Gleichungen ersten Grades mit fünf Unbekannten verlangt, welche also unbedingt voraussetzt, dass vor ihr Aehnliches, jedenfalls aber nicht eine quadratische Gleichung stand, und daraus ist eben die obenerwähnte Folgerung von einer irgendwie entstandenen Durcheinanderwerfung von Blättern oder auch von einer jetzt nicht mehr auszufüllenden Lücke gezogen worden.

Wir haben am Schlusse des vorhergehenden Kapitels, nachdem wir über Leonardo's Abacus berichtet hatten, geglaubt unserer Be-

[1]) Leon. Pisano II, 250: *Modus alius solvendi similes questiones.*



wunderung Ausdruck geben zu dürfen. Fast möchten wir gegenwärtig bereuen, dass wir es thaten, denn mit welchen Worten sollen wir Leonardo jetzt rühmen, nachdem wir die Schriften kennen gelernt haben, welche ganz gewiss ihrem wesentlichen Inhalte nach als sein geistiges Eigenthum zu betrachten sind, mag er im Abacus, mag er in der Praxis der Geometrie noch so viel von Vorgängern entlehnt haben. Jetzt steht das zu fällende Urtheil unzweifelhaft fest. Leonardo war ein gewandter Rechner, ein feiner Geometer, ein geistreicher Algebraiker, wie es vor ihm nur Vereinzelte gab; er wusste die Algebra auf geometrische Fragen anzuwenden, wie kaum Abû'l Dschûd (Bd. I. S. 715) es verstand; er war endlich ein geradezu schöpferischer Zahlentheoretiker.

Ein glänzendes Meteor taucht er auf, wie ein Meteor verschwindet er! Wir haben allen Grund anzunehmen, die Abacusausarbeitung von 1202 habe die Erscheinung, die zweite Bearbeitung von 1228 das Verschwinden begleitet. Wir dürfen nicht vergessen, dass Friedrich II. grade 1228 seinen Kreuzzug antrat, dass in seiner Abwesenheit Bürgerkrieg in Italien wüthete, welcher auch nach Friedrichs Rückkehr bald da bald dort in neuen Flammen aufloderte. Schon möglich dass Leonardo, in der stets ghibellinischen Stadt Pisa geboren und selbst Ghibelline aus Neigung, in diesen Kämpfen unterging, falls er nicht den Kaiser in das heilige Land begleitete und dort umkam.

## 43. Kapitel.

### Jordanus Nemorarius. Seine Arithmetica und der Algorithmus demonstratus.

Leonardo von Pisa war uns als eine der beiden Persönlichkeiten angekündigt, welche die Marksteine eines neuen Zeitalters für die mathematischen Wissenschaften bilden. Jordanus Nemorarius ist die andere. Auch er war ein aus seiner Zeit weit hervorragender Geist, aber dennoch unterbricht er weniger als Leonardo die Stetigkeit der mittelalterlichen Culturentwicklung.

Diese Entwicklung knüpfte sich der Regel nach an bestimmte Schulanstalten, zumeist an Klosterschulen, aus welchen da und dort Universitäten herauswuchsen[1]). Die Lehrer waren dementsprechend

[1]) Als Quellen dienten H. Denifle, Die Universitäten des Mittelalters bis 1400 Bd. I (1885). — G. Kaufmann, Die Geschichte der deutschen Universitäten Bd. I (1888). — S. Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525 (1887, III. Bd. der *Monumenta*

ihrer Mehrzahl nach Ordensgeistliche, oder doch wenigstens Theologen, wenn auch an dem Vorhandensein einzelner, und darunter hochberühmter Laien nicht zu zweifeln ist. Abälard z. B., dessen Ehe mit Heloise feststehende Thatsache ist, kann, wie durch den Vollzug dieser Ehe bewiesen ist, unmöglich Kleriker gewesen sein. Aber selbst da, wo der Lehrer der Kirche nicht angehörte, bildete das Studium der Theologie den Gipfelpunkt der Studien überhaupt. Oberstes Ziel alles wissenschaftlichen Strebens war es, die Vollendung des Glaubens zu erreichen, die Umsetzung desselben in Erkenntniss. Als Mittel dazu galt ein folgerichtiges Schliessen, und dieses wieder sich anzueignen gab es nach mittelalterlicher Meinung kein vollkommneres Lehrbuch als die Schriften des Aristoteles. So entstand die Scholastik, wesentlich eine Kunst der Behandlung strittiger Fragen, auf deren praktische Bedeutung es ebensowenig ankam, als auf die thatsächliche Wahrheit oder Unwahrheit der aus den Schlüssen gezogenen Folgerungen, sofern nur die Schlüsse selbst keinen Anfechtungen aus dialektischen Gründen unterworfen waren.

Wir haben gesagt, die Universitäten seien der Regel nach aus Klosterschulen und ähnlichen von Geistlichen geleiteten Anstalten herausgewachsen, aber das war nicht ihre einzige Entstehungsweise. Eine andere war die, dass Berufslehrer sich irgendwo niederliessen, und dass um sie Schüler sich schaarten. Mit einiger Vorliebe mochten zu solchen Niederlassungen Orte gewählt werden, wo auch Schulen bereits bestanden, denn eine solche Nebenanstalt konnte damals dem neu auftretenden Lehrer nur Erleichterung, nicht Schwierigkeiten bereiten. Am Ende des XII. Jahrhunderts herrschte unbedingte Lehrfreiheit in dem Sinne, dass Jeder ohne irgend vorhergegangene Prüfung zum Lehren zugelassen werden musste. Kaum dass es möglich war, einen einmal in Thätigkeit befindlichen Lehrer auf Grund einer ihm erst zu beweisenden Unfähigkeit zu entfernen.

Wieder eine andere Entstehungsweise von Universitäten war die der eigentlichen Gründung. Gründer konnte der Papst sein, oder eine städtische Gemeinschaft, oder ein Fürst. So hat Friedrich II. 1224 eine Universität in Neapel gegründet[1]). Eine Frage, welche weiter oben schon hätte gestellt werden können, wenn wir nicht absichtlich deren Erörterung auf diesen Zusammenhang hätten aufsparen wollen, geht dahin, ob Leonardo von Pisa dieser in Neapel

*Germaniae Paedagogica*). — H. Suter, Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters (Programm der Kantonsschule in Zürich 1887, zugleich als Festschrift zur 39. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner).

[1]) Ed. Winkelmann, Ueber die ersten Staatsuniversitäten (Heidelberger Prorectoratsrede vom 22. November 1880).



errichteten Hochschule als Lehrer angehörte? In den Gewohnheiten späterer Zeit befangen ist man geneigt, wiewohl ausdrückliche Berichte fehlen, die Frage einfach zu bejahen. War es nicht selbstverständlich, dass Friedrich einen Lehrer sich nicht entgehen liess, der seiner Gründung zur höchsten Zierde gereichen musste? So denkt man heute, so dachte man nicht in der Zeit der alles beherrschenden Scholastik. Dem Universitätsstudium muss und musste immer eine gewisse Vorbereitung vorausgehen. Heute wird sie durch das Gymnasium vermittelt, damals war die Artistenfacultät, die unterste Facultät einer jeden Universität, mit dieser Aufgabe betraut, und sie vereinigte daher alle Schüler in sich, welche, nachdem sie durch die Artistenfacultät sich hindurchgearbeitet hatten, anderen und anderen Richtungen folgten. Jene vorbereitenden Kenntnisse waren die des Trivium: Grammatik, Rhetorik, Dialektik. Das Quadrivium dagegen, Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie, wurde mit Ausnahme allenfalls der Musik, soweit sie dem Kirchengesang sich dienstbar erwies, aller Orten vernachlässigt. Wir werden gleich nachher sehen, wie selbst in Paris, am damaligen leitenden Hochsitze der Wissenschaft, diese Vernachlässigung sich actenmässig erweisen lässt. Nicht anders war es in Neapel. Das Schweigen der Berichte über eine Anstellung Leonardo's von Pisa ist also schwerlich anders zu verstehen, als dass Leonardo einer Anstalt nicht angehörte, an welcher für ihn kein Platz war. Was wir über Leonardo's meteorartiges Erscheinen und Verschwinden sagten, ist auch darin wahr, dass selbst für Italien eine Nachwirkung Leonardo's sich nicht eher als mehr als 200 Jahre nach seinem Tode mit Deutlichkeit erkennen lässt.

Wenn einzelne Gelehrte bald da bald dort nach eigener Willkür, oder berufen von Behörden, mitunter berufen von Studirenden sich niederliessen, so wissen wir auch von gemeinsamen Niederlassungen vollzogen von Angehörigen geistlicher Orden. Zwei Orden insbesondere sind hier zu nennen: die Dominikaner und die Franciskaner. Anstalten beider Mönchsorden waren in Deutschland vor Entstehung der Universitäten vorhanden. Köln, Regensburg, Magdeburg, Leipzig waren Sitze derselben. In Paris finden wir Dominikaner kurz nach der 1216 erfolgten Gründung des Ordens. Vollständig festen Fuss fassten sie, aber auch ihre Nebenbuler, die Franciskaner, in Paris, seitdem im Mai 1229 in Folge eines an Fastnacht entstandenen Streites die Universität zeitweilig geschlossen wurde. Es ist uns nicht unwahrscheinlich, dass bei den pariser Dominikanern oder Prädicatoren, wie der Orden eigentlich hiess, der Predigt und Lehre — *praedicationem et doctrinam* — als das Feld seiner Wirksamkeit bezeichnete, diejenigen Wissensgebiete gepflegt wurden, welche die Universität in den zweiten Rang zurückstiess. Satzungen der pariser Universität aus dem Jahre 1215 schreiben ausdrücklich vor[1]), dass die Professoren die Bücher des Aristoteles über die ältere wie über die jüngere Dialektik in den Schulstunden ordentlich und nicht bloss cursorisch lesen sollten. Ordentlich sollten sie auch lesen die beiden Bücher des Priscian oder wenigstens eines derselben. An Feier- und Ferientagen (in festivis diebus) solle nicht gelesen werden, höchstens philosophische Schriften, Reden, Schriften über das Quadrivium, über Barbarismen, über Ethik, wenn man Lust dazu hat, und das vierte Buch der Topik. Die Bücher des Aristoteles über Metaphysik und Naturwissenschaften aber dürfen gar nicht gelesen werden. Das hier ausgesprochene Verbot einiger Schriften des Aristoteles ist nur erneuert aus einem Erlasse von 1210 und eine abermalige Bestätigung erfolgte 1231 für Paris. An anderen Orten war man duldsamer. In Toulouse war es seit 1233 gestattet öffentlich anzukündigen, dass auch die in Paris untersagten Bücher des Aristoteles gelesen werden würden. In Paris selbst aber traten 1254 die ehemals verbotenen Schriften in den Rahmen des regelmässigen Studienplanes ein[2]). Auch in diesem letzteren erweiterten Studienplane, der uns nebst der Stundenzahl, welche auf jede ordentliche Vorlesung zu verwenden ist, genau erhalten ist[3]), ist von Vorlesungen über Gegenstände des Quadrivium keine Rede. Sie waren nicht verboten, sie waren aber ebensowenig geboten. Sie konnten nach wie vor in der Ferienzeit der Universität Behandlung finden, als Lehrgegenstände untergeordneter Bedeutung. Damit stimmt vollständig die Klage Roger Bacon's aus der Mitte des XIII. Jahrhunderts überein[4]), die pariser Universität kümmere sich nicht um fünf Wissenszweige, welche doch vortrefflich und der Gottesgelehrsamkeit nahe verwandt seien, um fremde Sprachen, Mathematik, Perspective, Moralwissenschaft und Alchymie. Und trotzdem ist es eine Thatsache, dass von mathematischen Studien in Paris seit der Mitte des XII. Jahrhunderts wiederholt die Rede ist, dass z. B. in jener Zeit Johannes von Salisbury als seine Lehrer in Paris in Gegenständen des Quadriviums[5]) einen sonst unbekannten Hardeivinus Teutonicus und ferner Richardus Episcopus nennt, welcher letztere 1182 wahrscheinlich als Archidiacon in Constanz starb. Es ist eine Thatsache, dass in der Grabschrift des 1199 in

[1]) Suter, Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters S. 24 mit Berufung auf Bulaeus, *Historia Universitatis Parisiensis* III, 82. [2]) G. Kaufmann, Geschichte der deutschen Universitäten I, 94—95. [3]) Bulaeus, l. c. III, 280. [4]) *Opus minus* des Bacon, erwähnt bei Suter l. c. S. 18. [5]) Suter l. c. S. 18: *inaudita quaedam ad quadrivium pertinentia.*



Paris verstorbenen Hugo Physicus ausdrücklich des von ihm im Quadrivium ertheilten Unterrichts[1]) gedacht ist. Damit ist also festgestellt, dass wenn nicht in ordentlicher, doch in ausserordentlicher Weise dafür gesorgt war, dass das immerhin vorhandene Bedürfniss nach Anleitung in den Fächern, welche damals die Mathematik ausmachten, Befriedigung fand.

Sollten dazu immer und ausschliesslich Ferienstunden gedient haben? Sollte nicht, was die Universität verschmähte, um so eifriger von den wettbewerbenden Anstalten geboten worden sein, vorausgesetzt, dass sich die richtigen Persönlichkeiten zur Ertheilung solchen Unterrichtes in diesen Anstalten fanden? Das war aber im ersten Viertel des XIII. Jahrhunderts bei den Dominikanern in Paris der Fall.

Domingo de Guzman, ein 1170 geborener Altcastilianer von hoher wissenschaftlicher Bildung, war Gründer des Ordens gewesen, der nach seinem Plane vornehmlich als Gegengewicht gegen die Ketzerei der Albigenser und verwandter Richtungen dienen sollte, welchen nichts mehr Vorschub leistete als der Mangel an Volksunterricht. Ueber den streng monarchisch gegliederten, in acht Provinzen eingetheilten Orden herrschte ein General mit durch päpstliche Bestätigung seiner Rechte fast unumschränkter Gewalt. Als Domingo, der erste General, 1221 zu Bologna starb, waren schon 60 Klöster seiner Regel unterthan. Es galt seine Ersetzung, und zum Nachfolger des Spaniers wählte man einen Deutschen. Jordanus von Sachsen[2]) war dem Orden erst 1220 in Paris beigetreten. Er gehörte nach einer Ueberlieferung dem Geschlechte der Grafen von Eberstein, nach einer anderen der Familie von Dach an. Er war nach einem Berichte in Borrentrick (gegenwärtig Borgentreich) bei Warburg im Paderbornschen geboren, einem Orte, der einstmals zur Diöcese Mainz gehörte; nach einem anderen Berichte stammt Jordanus aus der Herrschaft Dassel aus der Hildesheimer Diöcese. Wird der Geburtsort Borrentrick für den richtigen gehalten, so stand Jordanus' Wiege in den Wäldern des Eggegebirges, und daher rührt dann wohl der Beiname Jordanus Nemorarius, welcher neben Jordanus Saxo in Gebrauch war. Allerdings gebrauchten kirchliche

[1]) Suter l. c. S. 20 Note 5: *Quadrivium docuit.* [2]) Allgemeine deutsche Biographie XIV, 501—503. — *Iordani Nemorarii de triangulis libri quatuor*, herausgegeben von Max Curtze als VI. Heft der Mittheilungen des Copernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn (1887). Einleitung S. IV—V ein Brief von Denifle, der sich dagegen erklärt, in Jordanus Saxo und Jordanus Nemorarius dieselbe Persönlichkeit zu erkennen. — Die Papsturkunden Westfalens bis zum Jahre 1378 bearbeitet von Dr. Heinrich Finke (1888), Einleitung S. XXXII—XXXIII.

Quellen ausschliesslich den Namen Jordanus Saxo; weder im Generalarchiv des Ordens noch in den Briefen des Jordanus kommt jemals *Nemorarius* vor, welcher Beiname nur in Ueberschriften wissenschaftlicher Werke angetroffen wird. Aus diesem Grunde war es auch lange unbekannt und wird es noch heute von schätzbarer Seite in Abrede gestellt, dass beide Persönlichkeiten nur eine und dieselbe seien. Uns scheint ein schwerwiegender Beweisgrund dafür eine Stelle[1]) in der Chronik eines englischen Schriftstellers des XIV. Jahrhunderts, Nicolaus Trivet, welche von dem 1222 in Paris zum Ordensgenerale gewählten Jordanus deutlich aussagt, er habe in Paris eines grossen Namens in den weltlichen Wissenschaften, insbesondere in der Mathematik, sich erfreut und habe zwei äusserst nützliche Bücher geschrieben, das eine *De Ponderi*, das andere *De lineis datis*, und grade solche Ueberschriften kommen in Verbindung mit dem Verfassernamen Jordanus Nemorarius vor. Eine weitere Bestätigung giebt uns der Dominikaner Jacob von Soest[2]), der um 1420 eine Chronik seines Ordens verfasste und darin an zwei Stellen von dem Ordensgenerale Jordanus berichtet, er habe neben anderen Werken *geometricalia delicata* geschrieben. Die Thätigkeit des Ordens war, während Jordanus demselben vorstand, eine ganz gewaltige. Vier neue Provinzen, Dänemark, Polen, Griechenland, Palästina, wurden ihm eröffnet, an 60 neue Klöster gegründet. Die Beredsamkeit des Generals, die sich namentlich in den abwechselnd in Paris und in Bologna gehaltenen Fastenpredigten, aber auch in Predigten vor den Studirenden in Padua bewährte[3]), gewann über 1000 neue Mitglieder. In den Jahren 1228 und 1230 wurden dem Orden zwei Lehrkanzeln in Paris übertragen, um die sich allerdings ein fast 40 Jahre dauernder Streit erhob, die aber schliesslich dem Orden verblieben. Jordanus starb am 13. Februar 1237 auf der Rückreise aus dem heiligen Lande. Wir haben seiner Ordensthätigkeit genauer gedacht, weil dadurch die Bedeutsamkeit der ganzen Persönlichkeit — wenn deren nach der Annahme, welcher wir uns anschliessen, nur eine ist — um so deutlicher hervortritt. Man wird aus dieser Thätigkeit auch den Schluss ziehen dürfen, dass sie für wissenschaftliche Arbeiten wenig Raum liess, dass daher die mathematischen Schriften wohl schon vor 1222 entstanden sein werden und dem Verfasser den von Trivet gerühmten grossen Namen verschafft hatten. Ob er, wie wir oben leise andeuteten, vielleicht auch

[1]) Der Entdecker dieser Stelle war Fürst Bald. Boncompagni in Rom. [2]) Ueber Jacob von Soest vergl. Allgemeine deutsche Biographie XIII, 556; die hier wichtigen Stellen seiner Chronik sind bei Finke l. c. mitgetheilt. [3]) Denifle, Die Universitäten des Mittelalters bis 1400. I, 282.



in Paris gelehrt hat, ja sogar ob Nemorarius und Saxo eine, ob zwei Personen waren, ist für die Würdigung der Schriften, zu welcher wir uns wenden müssen, ganz gleichgiltig. Nur die eine Bemerkung möchten wir hinzufügen, dass einer Lehrthätigkeit, wie wir sie vermuthen, nicht im Wege steht, dass es in den Satzungen des Dominikanerordens von 1228 heisst[1]): „Die Ordensmitglieder sollen in den Büchern heidnischer Philosophen nicht studiren . . .; sie sollen auch die sogenannten freien Künste nicht erlernen, es sei denn, dass für einzelne Persönlichkeiten besondere Erlaubniss ertheilt worden sei.“ Wenn für irgend Einen eine solche Erlaubniss je ertheilt wurde, so muss es für Jordanus gewesen sein, abgesehen davon dass die Zeit, in welcher dieser lernte und auch die, in welcher er vielleicht selbst lehrte, um Jahre früher lag als jene Satzungen. Davon aber vollends, dass wer ausnahmsweise Mathematik zu erlernen die Erlaubniss erhielt, sie nicht weiter lehren dürfe, ist in den Satzungen gar nicht die Rede.

Zur Frage, ob Jordanus Nemorarius und Jordanus Saxo eine Persönlichkeit darstellen oder nicht, müssen wir auch einer gewissen Handschrift gedenken. Sie befindet sich zur Zeit in der Bibliothek des verstorbenen Lord Thomas Philipps in Cheltenham und führt dort die Nr. 16345. H. Schenkl[2]) beschreibt sie unter dieser Nummer als 4° m. S. XII (1170) und bezeichnet den Inhalt als Mathematici veteres. In dem Sammelbande, der mit der Astronomie des Alfraganus in der Uebersetzung des Johannes Hispaniensis abschliesst, befindet sich auch: *Jordani (Magistri), De Algorismo cum commento.* Wäre hier Jordanus Nemorarius gemeint, und wäre der ganze Band 1170 geschrieben, so müsste der Verfasser des Algorismus spätestens 1150 geboren sein und wäre im Todesjahre 1237 des Jordanus Saxo mindestens 87 Jahre alt gewesen, was mit einer Orientreise kaum in Einklang zu bringen ist. Jener Band wird aber auch von seinem Beschreiber als Libri 665 bezeichnet und ist unter dieser Nummer in dem Libri'schen Kataloge[3]) enthalten. Dort heisst es ausdrücklich, nur Alfraganus trage die Jahreszahl 1170, die früheren Bestandtheile des Bandes, und insbesondere der Algorismus des Jordanus, könnten sehr wohl später als Alfraganus niedergeschrieben sein. Damit wird die obige Schlussfolgerung auf das Geburtsjahr des Jordanus hinfällig. Ueberdies sind die Anfangsworte des Algorismus des Magister Jordanus von Libri erwähnt: *Numerorum sunt IX, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*

[1]) Denifle, Die Universitäten des Mittelalters bis 1400. I, 719 Note 179. [2]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Historisch-philologische Classe (1893) XXVII, 55. [3]) Catalogue of the extraordinary collection of splendid manuscripts formed by M. Guglielmo Libri. London 1859. Nr. 665 pag. 145—148.

*et est prima unitatis*, und so beginnt weder die Arithmetik, noch der Algorithmus demonstratus des Jordanus Nemorarius, von welchem sogleich die Rede sein wird.

Ob unter den Schriften des Jordanus Nemorarius auch eine Optik war, ist mehr als nur zweifelhaft. Beschrieben ist sie niemals worden, nur der Titel De speculis, welchen eine Handschrift in der Bodleyanischen Bibliothek zu Oxford führen soll[1]), unterstützt die Annahme, während aus einer Amplonianischen Handschrift in Erfurt hervorgeht[2]), dass die sogenannte Optik des Jordanus nichts anderes als die Katoptrik des Euklid ist.

Eine astronomische Schrift Planisphaerium ist wiederholt im Drucke erschienen[3]). In ihr soll zum ersten Male in aller Strenge bewiesen sein, dass Kugelkreise sich wieder als Kreise auf einer Tangentialebene einer Kugel projiciren, sofern der Berührungspunkt der Projectionsebene und das Auge die entgegengesetzten Endpunkte eines und desselben Kugeldurchmessers sind.

Ferner ist ein Bruchstück einer ursprünglich aus vier Büchern bestehenden Mechanik unter dem Titel De ponderibus in 13 Lehrsätzen im Drucke erschienen[4]), allerdings, wie es scheint, mit ergänzenden Zusätzen des Herausgebers, der die kurzen gedrungenen Beweise des Jordanus, wie sie in einer thorner Handschrift[5]) erhalten sind, erweitern, beziehungsweise verwässern zu müssen glaubte.

Nannten wir diese Schriften nur im Vorübergehen, so müssen wir bei einer Arithmetik etwas verweilen, welche schon seit dem Ende des XV. Jahrhunderts im Drucke bekannt ist[6]). In 10 Büchern werden folgende Hauptgegenstände behandelt: 1. Allgemeine Zahleneigenschaften. 2. Von den Verhältnissen. 3. Von Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen. 4. Von Zahlen, die in stetigem Verhältnisse zu einander stehen. 5. Von den zusammengesetzten Verhältnissen. 6. Von Quadratzahlen, Kubikzahlen und einander ähnlichen

---

[1]) Heilbronner, *Historia matheseos universae* (1742) S. 604. § 263 Nr. 14. — Chasles, *Aperçu hist.* 517 (deutsch 605). — Curtze im VI. Heft der Mittheilungen Coppern.-Vereins zu Thorn. Einleitung S. XI. [2]) Curtze brieflich. [3]) Chasles, *Aperçu hist.* 516 (deutsch 603—604) giebt Drucke von 1507, 1536, 1558 an. — Weidler, *Historia Astronomiae* (1741) pag. 276: *Iordanus Nemorarius demonstrationem astrolabii et planisphaerii lucubratus est editum Basileae cum Theonis commentariis in Aratum.* [4]) *Liber Iordani Nemorarii viri clarissimi de ponderibus propositiones XIII etc.* (1533), herausgegeben durch Peter Apianus. Vergl. Curtze im Supplementheft zu Zeitschr. Math. Phys. XIII (1868) S. 91—92. [5]) Die Handschrift R. 4°. 2 *Problematum Euclidis explicatio* der königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn. [6]) Die beiden Ausgaben von 1496 und von 1514 besorgte Faber Stapulensis (*Lefèvre d'Étaples*) in Paris. Er veränderte den Text des Jordanus nicht, fügte aber neue Sätze mit eigenen Beweisen hinzu.



Zahlen. 7. Von graden und ungraden, vollkommenen, überschiessenden und mangelhaften Zahlen. 8. Von den vieleckigen und körperlichen Zahlen. 9. Von Gleichheit und Ungleichheit, vielfachen und anderen Verhältnissen unterworfenen Zahlen. 10. Vom arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel.

Keinem Kenner des griechischen Musterwerkes des Nikomachus wie der lateinischen Nachbildung des Boethius kann es entgehen, dass Jordanus nach der älteren Vorlage, und zwar nach der lateinischen gearbeitet hat, aber er hat doch gearbeitet. Weder die Reihenfolge, noch die Ausdrucksweise der einzelnen Sätze ist genau und unverändert beibehalten. Um nur zwei Beispiele hervorzuheben machen wir auf Folgendes aufmerksam. Boethius hat für Grundsätze den Namen Communes conceptiones entsprechend dem griechischen *κοιναὶ ἔννοιαι*. Jordanus hat ein dem griechischen *ἀξιώματα* nachgebildetes Wort Dignitates[1]), das gleiche Wort, welches in einer gleichfalls dem XIII. Jahrhunderte entstammenden lateinischen Uebersetzung des Alfarabi im gleichen Sinne gebraucht ist[2]). Boethius nennt die überschiessenden Zahlen numeros superfluos, Jordanus nennt sie abundantes, und sein Beispiel ist später massgebend geblieben. Numeri perfecti und deminuti sind Kunstausdrücke, in denen Beide übereinstimmen. Jordanus nennt mitunter, wenn auch nicht grade häufig, Boethius oder, wie er lieber sagt, den göttlichen Severinus als seinen Gewährsmann, noch seltener Euklid und Aristoteles. Irgend einem arabischen Namen sind wir nicht begegnet. Die wesentlichste Eigenthümlichkeit, die das Werk des Jordanus gradezu zu einem bahnbrechenden stempelt, ist die fortwährende Benutzung allgemeiner Buchstaben statt besonderer bestimmter Zahlen[3]). Wir haben Buchstaben statt der einzelnen Potenzen der Unbekannten bei Diophant, bei Arabern auftreten sehen. Wir waren in der Lage bei Aristoteles, bei Pappus auf Buchstaben hinzuweisen, die einen beliebigen Werth darstellten. Wir vermochten (S. 17) auch bei Leonardo ein vereinzeltes Vorkommen solcher Buchstabenanwendung nachzuweisen, aber es waren eben nur vereinzelte Vorkommen, während Jordanus diese Anwendung so sehr in Gewohnheit hat, dass fast nirgend neben den Buchstaben bestimmte Zahlen als Beispiele

---

[1]) Bei Ducange ist zwar *Dignitatio* = *ἀξίωμα* angegeben, aber nicht *Dignitas*. [2]) Prantl, Geschichte der Logik im Abendlande II, 316. [3]) Vergl. Max Curtze in der Einleitung zu seiner Ausgabe des *Tractatus de numeris datis* in der Zeitschr. Math. Phys. (1891) XXXVI Histor.-liter. Abtlg. S. 1—3 ähnliche Gedanken wie die unsrigen, in deren Aeusserung unser verehrter Freund uns in selbständiger Weise zuvorgekommen ist, eine Uebereinstimmung, welche wohl zu Gunsten der Richtigkeit dieser Gedanken gedeutet werden mag.

anders als am Rande mitgeführt werden und niemals Zahlen ohne Buchstaben auftreten. Wir würden desshalb keinen Anstand nehmen, Jordanus den unmittelbaren Vater der späteren Buchstabenrechnung zu nennen, wenn nicht ein zweifacher Unterschied, ein Zuwenig und ein Zuviel, dazu aufforderten anzuerkennen, dass es auch nach Jordanus noch erfinderischen Geistes bedurfte, um die Buchstabenrechnung der Wissenschaft als brauchbares Mittel an die Hand zu geben. Was Jordanus noch fehlte waren Symbole, die neben und mit den Buchstaben zur Anwendung gekommen wären. Er besass kein Gleichheitszeichen, kein Zeichen der Subtraction, der Multiplication, der Division. Einzig die Addition vermochte er ohne zwischengeschriebenes Wort anzudeuten, da für ihn die unmittelbare Aufeinanderfolge von Buchstaben z. B. $abc$ als Ergebniss der Addition der durch diese Buchstaben dargestellten Zahlengrössen aufgefasst werden muss[1]. Aber dieser Mangel haftete noch Jahrhunderte lang den Versuchen einer allgemeinen Rechenkunst an. Weit empfindlicher ist für den heutigen Leser der Arithmetik des Jordanus das, was wir das Zuviel der Buchstabenanwendung bei ihm genannt haben. Die heutige Buchstabenrechnung vereinigt zwei Vorzüge: Allgemeinheit und Durchsichtigkeit. Wenn etwa $3+4=7$, $7\times 5=35$, $35+5=40$, $40:4=10$, $10-3=7$ gerechnet wird, so ist eine ganz bestimmte Zahl 7 der Endpunkt dieser aus fünf Einzelrechnungen zusammengesetzten Gedankenfolge, und man weiss in der 7 die Bildung dieser Zahl nicht mehr zu erkennen. Wenn dagegen die Operationen so lauten $a+(a+1)=2a+1$, $(2a+1)(a+2)=2a^2+5a+2$, $(2a^2+5a+2)+(a+2)=2a^2+6a+4$, $(2a^2+6a+4):(a+1)=2a+4$, $(2a+4)-a=a+4$, so bleibt nicht nur Alles richtig, wenn auch für $a$ eine andere Zahl als 3 eingesetzt wird, sondern es ist auch $a+4$ als Endergebniss zu jenem unbestimmt gelassenen $a$ in deutlich erkennbarer Beziehung. Das aber hört auf, sobald in den Einzeloperationen immer neue und neue Buchstabenbezeichnungen eingeführt werden müssen; eine Nothwendigkeit allerdings, die aus den mangelnden Operationszeichen rettungslos sich ergiebt, die aber darum nicht weniger verdunkelnd, also schädlich einwirkt. Lassen wir den 12. Satz des VI. Buches uns als Beispiel dienen[2]: Drei Quadrate zu finden, deren in fortlaufender Reihe gebildete Unterschiede gleich seien, eine Aufgabe also, welche weniger schwierig ist als die Leonardo's von Pisa, welcher die Differenz zum voraus als

[1]) Bei Leonardo von Pisa hatte eine solche Buchstabenfolge (S. 17) multiplicative Bedeutung. [2]) *Quadratos tres investigare, quorum continue sumptorum differentia sint aequales.* Am Rande sind neben anderen Zahlen auch 1, 25, 49 angegeben.



gegeben annahm, welche aber doch dem gleichen zahlentheoretischen Gedankenkreise angehört. Die Lösung des Jordanus ist folgende. Es sei $b$ eine ganz beliebige, $c$ eine grade Zahl. Dann sei ferner $b+c=a$, $a+b=d$, $ca=h$, $cb=k$, $ad=e$, $bd=f$. Man zerlege $e$ in drei ungleiche Theile $e=l+m+g$. Setzt man $g=f$, so darf man $l=h$, $m=k$ setzen. Wird endlich $\frac{l+g}{2}=v$, $g-v=r$, $e-v=q$ gesetzt, so sind $r^2$, $v^2$, $q^2$ die gesuchten Quadrate. Wer kann heute noch dieser Rechnung folgen, ohne sie in andere den Gang der Operationen erkennbar machende Buchstabenverbindungen umzusetzen, bis das Schlussergebniss $r=b^2-\frac{c^2}{2}$, $v=b^2+bc+\frac{c^2}{2}$, $q=b^2+2bc+\frac{c^2}{2}$ nach erfolgter Quadrirung die Richtigkeit der Auflösung erkennen lässt einschliesslich der Nothwendigkeit für $c$ eine grade Zahl zu wählen, wenn man ganzzahlige Quadrate wünscht? Nicht ohne Interesse dürfte es sein, dass an die genannte Aufgabe die weitere sich anschliesst, eine Quadratzahl zu finden, welche zu einer gegebenen Quadratzahl addirt wieder eine Quadratzahl liefere, also mit anderen Worten ein pythagoräisches Dreieck zu bilden, dessen eine Kathete gegeben ist. Wir finden das Interesse nämlich darin, dass hier die Reihenfolge der Aufgaben die umgekehrte ist wie bei Diophant, bei den Arabern, bei Leonardo von Pisa. Sie alle nahmen in mehr oder weniger ausgesprochener Weise das pythagoräische Dreieck zum Ausgangspunkte, um zu einer arithmetischen Progression von Quadratzahlen zu gelangen. Jordanus ist der Einzige, der den entgegengesetzten Weg einschlug.

Genau denselben Charakter wie die Arithmetik trägt eine Schrift, welche unter Anderen in einer Basler Sammelhandschrift[1]) aus der Mitte des XIV. Jahrhunderts neben anderen Schriften des Jordanus sich erhalten hat, und welche desshalb mit an Gewissheit streifender Wahrscheinlichkeit dem Jordanus zugewiesen worden ist[2]). Wir meinen den 1534 bei dem bekannten Drucker Petrejus in Nürnberg erschienenen Algorithmus demonstratus. Der Herausgeber Johannes Schöner berichtet in der Vorrede[3]), ihm stehe ein aus

[1]) Die oftgenannte Handschrift F II, 33 der Basler Stadtbibliothek. [2]) Jordanus als Verfasser erkannt zu haben ist das Verdienst von H. P. Treutlein. Vergl. Zeitschr. Math. Phys. (1879) XXIV Supplementheft S. 132. [3]) Vorrede pag. 4: *Incidi nuper in libellum . . . exaratum max. et doctiss. viri Regimontani divina manu, quem in Vienensi quapiam bibliotheca audio asservari hoc titulo: Algorithmus demonstratus incerti autoris, unde suspicor hoc exemplum fuisse descriptum.* Der Algorithmus demonstratus selbst besteht aus 57 nicht mit Seitenzahlen versehenen Druckseiten. Unsere Seitenangaben im Folgenden beruhen auf eigener Zählung, wobei die 4 Seiten Vorrede nicht mitgezählt wurden.

der Feder des **Regiomontanus** geflossener Text zur Verfügung, welchen dieser wahrscheinlich aus einer in Wien befindlichen Handschrift abgeschrieben habe. Diese unzweifelhaft richtige Angabe hat aber nicht zu verhindern vermocht, dass man die längste Zeit nur daran sich hielt, dass das dem Drucker zu Grunde liegende Manuscript von Regiomontanus geschrieben war, und dass man ihn, den Schreiber, auch für den Verfasser hielt, jedenfalls ein glänzendes Zeugniss für die Schrift selbst, wie wir im Verlaufe dieses Bandes erkennen werden. Vereinigen wir die Thatsache, dass Regiomontanus den Algorithmus demonstratus abschrieb, mit der anderen nicht minder verbürgten, dass er eine von ihm sehr geschätzte andere Schrift des Jordanus, welche uns im folgenden Kapitel genau bekannt werden wird, herauszugeben beabsichtigte[1]), so kann man vielleicht darin eine Unterstützung der hier festgehaltenen Ansicht von dem Ursprunge des Algorithmus demonstratus finden. Eine unmittelbare Bestätigung des Jordanus als Verfasser wird uns endlich im 69. Kapitel begegnen, wenn wir in unserer Geschichte an den Schluss des XVI. Jahrhunderts gelangt sein werden. Jordanus also setzt seinen Lesern zunächst das dekadische Zahlensystem mit seinen zehn Zeichen auseinander, wobei die Null *cifra* oder Kreis (*circulus*) oder Zeichen für Nichts (*figura nihili*) genannt wird. Er unterscheidet nicht bloss im mittelalterlicher Weise Fingerzahlen (*digiti*) von Gelenkzahlen (*articuli*), sondern auch Gelenkzahlen verschiedener Ordnung, wir würden heute sagen neben den Zehnern die Hunderter, Tausender u. s. w.[2]). Die Zahlen werden dann addirt, von einander subtrahirt. Wo bei der Subtraction das Borgen einer Einheit höheren Ranges nöthig fällt, wird die nächste Ziffer des Minuendus um dieselbe verkleinert[3]). Als besonders behandelte Aufgaben folgen die **Verdoppelung** und die **Halbirung** einer Zahl[4]). Bei der Multiplication ist als erste Regel ausgesprochen, dass das Product $f$ zweier Fingerzahlen $a$ und $b$ entstehe, wenn man von $g$ als dem 10fachen von $a$ die Zahl $d$ abziehe, welche als $c$-faches von $a$ gebildet ist, während $c$ selbst den Ueberschuss der 10 über $b$ bedeutet[5]). Man wird darin die complementäre Regel $a \cdot b = 10a - (10 - b) \cdot a$ erkennen, welche zwar mit den ähnlichen Regeln, die im I. Bande wiederholt zur Sprache kamen, nicht genau übereinstimmt, ihnen aber begrifflich sehr nahe steht. Weitere Regeln über Multiplication von Fingerzahlen mit Gelenkzahlen, von Gelenkzahlen unter einander schliessen sich an, bis zu-

[1]) Treutlein l. c. S. 127 Note und S. 128. [2]) *Algor. demonst.* pag. 4. [3]) Ebenda pag. 6. [4]) Ebenda pag. 7: *Quomodo duplatio numeri facienda sit docere. Datum numerum, si fieri potest, dimidiare sit intentio.* [5]) Ebenda pag. 8.



letzt erklärt wird[1]), man könne unmöglich alle Fälle in Kürze erschöpfen, ein vorsichtiger Rechner werde aber nach Art der gegebenen Muster jedes andere Beispiel bilden können. Die Division wird durch mancherlei Vorübungen eingeleitet, zuletzt in der Form gelehrt[2]), welche künftig immer durch den Namen **Ueberwärtsdividiren**[3]) bezeichnet werden soll. Der Divisor steht bei diesem Verfahren unter dem Dividenden und über diesem kommt der Quotient zu stehen, während der Dividend selbst durch Abziehen der Theilproducte fortwährend verändert wird. Die Anordnung ist also verschieden von derjenigen, welche Leonardo von Pisa (S. 11) gelehrt hat. Multiplication und Division, heisst es im Anschlusse an die Regel, dienen sich gegenseitig als Probe[4]), dagegen ist von einer Neunerprobe oder dergleichen nirgend die Rede. Es folgt die Bildung der Quadratzahlen[5]) nach der Regel

$$(a+b+c+\cdots)^2 = a^2+b^2+c^2+\cdots+2ab+2ac+\cdots+2bc+\cdots$$

und unter Hervorhebung des Satzes, dass das Quadrat höchstens aus doppelt so viel Ziffern als die einfache Zahl bestehen könne, dann die Ausziehung der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen[6]), sei es dass dieselbe genau möglich sei oder auch nicht. Im letzteren Falle wird freilich die Genauigkeit nicht über die ganzzahlige Annäherung hinausgetrieben. Einigermassen überraschend kommt unmittelbar nach der Quadratwurzelausziehung der Satz von der Vertauschbarkeit der Factoren[7]) $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b$, nach diesem die Bildung von Kubikzahlen mit höchstens dreifacher Ziffernzahl von der der einfachen Zahl[8]) und die Ausziehung der Kubikwurzel[9]) in gleicher Annäherungsbeschränkung wie weiter oben die der Quadratwurzel.

Auf $25\frac{1}{2}$ Seiten ist sonach das Rechnen mit ganzen Zahlen erledigt und Jordanus geht zum Bruchrechnen über. Sexagesimalbrüche (minutiae philosophicae oder auch phisicae) werden von gewöhnlichen Brüchen (minutiae vulgares) unterschieden[10]). Gewöhnliche Brüche werden so geschrieben, dass ohne trennenden Bruchstrich der Zähler (numerans) über dem Nenner (denominans) steht, z. B. $\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}$. Wo dagegen im fortlaufenden Texte allgemeine Buchstaben gebraucht sind, stehen dieselben einfach neben einander, also $ab$ für $\frac{a}{b}$. Bei

[1]) *Algor. demonstr.* pag. 12. [2]) Ebenda pag. 18. [3]) Wir lehnen uns in der Anwendung dieses Wortes an Unger, Die Methoden der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart (1888) S. 78, § 46 und häufiger. Wir citiren dieses Werk künftig als Unger. [4]) *Algor. demonstr.* pag. 18: *Mutuo se probant multiplicandi et dividendi operationes.* [5]) Ebenda pag 19. [6]) Ebenda pag. 20—22. [7]) Ebenda pag. 22. [8]) Ebenda pag. 23—24. [9]) Ebenda pag. 25. [10]) Ebenda pag. 27.

Sexagesimalbrüchen wird der Nenner nie geschrieben, weil es gewiss ist, dass 60 die Benennung liefert. Man muss bei ihrer Anschreibung (in earum figuratione) auf die Stelle achten. Die erste Stelle ist die der Ganzen, die zweite die der Minuten, die dritte die der Sekunden u. s. w. Die Aufgabe, zwei Brüche auf gemeinsamen Nenner zu bringen[1]), führt wieder zum Addiren und Subtrahiren, zum Verdoppeln und Halbiren der Brüche. Brüche multiplicirt man durch Vervielfachung von Zähler mit Zähler und von Nenner mit Nenner. Die Multiplication von Sexagesimalbrüchen ist mit Rücksicht auf die Benennung des Productes etwas weitläufiger behandelt. Die Ableitung der Divisionsregel[2]) gewöhnlicher Brüche verdient hervorgehoben zu werden. Entsprechend der Multiplicationsregel wäre die einfachste Regel die, man solle Zähler durch Zähler, Nenner durch Nenner dividiren. Da das aber nicht immer ohne Weiteres angeht, so soll man den Dividenden zuerst erweitern, indem man ihn im Zähler und Nenner mit Zähler und Nenner des Divisors vervielfacht. Also

$$\frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{cab}{dab} : \frac{a}{b} = \frac{cab:a}{dab:b} = \frac{cb}{da}.$$

Dabei kommt auch das Kürzen von Brüchen in Betracht, welches z. B. so ausgeführt wird[3]), dass man den Bruch vorher durch eine solche Zahl erweitert, welche sodann das Kürzen durch den früheren Nenner gestattet: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} = \frac{ad:b}{d}$. Das Dividiren von Sexagesimalbrüchen wird besonders gelehrt[4]). Beim Wurzelausziehen aus Brüchen, sei es Quadrat- oder Kubikwurzelausziehung, wird von der bei Jordanus besonders beliebten Erweiterung Gebrauch gemacht[5]), d. h. die Wurzelausziehung aus dem Nenner wird so ermöglicht und dann die Wurzelausziehung aus dem Zähler bis zu dem Grade von Genauigkeit durchgeführt, den man früher beim Rechnen mit ganzen Zahlen kennen gelernt hatte. Dass auf das Wurzelausziehen aus Sexagesimalbrüchen ausführlicher eingegangen wird, ist selbstverständlich. Für künftige Rückbeziehung bemerken wir, dass im ganzen Algorithmus demonstratus die Sexagesimalbrüche stets nur die Rolle einer besonderen Gattung von Brüchen, von fortlaufend kleiner werdenden Unterabtheilnngen einer Einheit spielen; von der Theilung des Kreises nach Graden u. s. w. ist keine Rede. *Algorithmi demonstrati finis* heisst es auf der 54. Seite, aber ein Anhang über Proportionen füllt noch weitere drei Seiten. Er handelt zuerst von dem arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel zweier

[1]) *Algor. demonstr.* pag. 28—29. [2]) Ebenda pag. 33flg. [3]) Ebenda pag. 38. [4]) Ebenda pag. 39: *Modum philosophice dividendi pertractare.* [5]) Ebenda pag. 43.



Zahlen, dann von den 18 Veränderungen, welche vorgenommen werden können, wenn, wie es in einem Satze des ptolemäischen Almagestes der Fall sei, von sechs Grössen zwei sich verhalten wie die vier anderen im zusammengesetzten Verhältnisse[1]). Es sind, wie sofort einleuchtet, die 18 Combinationen der Regula katta (S. 16), welche hier einzeln auseinandergesetzt sind. Von dem Ahmed Sohn des Josephus ist dabei ebensowenig die Rede, als irgend einmal im Algorithmus demonstratus sei es ein bestimmter Araber, sei es Araber im Allgemeinen Erwähnung finden. Wir kommen auf die geschichtlich sehr bedeutsame Ursprungsfrage noch zurück, wenn wir erst alle Schriften des Jordanus kennen gelernt haben.

## 44. Kapitel.

### Jordanus Nemorarius: De numeris datis. De triangulis.

Die dem Inhalte nach der Arithmetik und dem Algorithmus demonstratus nächststehende Schrift führt den Namen De numeris datis, in manchen Handschriften wohl auch De lineis datis[2]). Sie war es, mit welcher, wie im vorigen Kapitel erwähnt worden ist, in der Mitte des XV. Jahrhunderts Regiomontanus, mit welcher aber auch ein starkes Jahrhundert später Maurolycus von Messina bekannt geworden ist. Beide Gelehrte, deren Urtheilsfähigkeit sehr hoch zu stellen ist, beabsichtigten die Herausgabe des Werkes[3]), die wohl nur deshalb unterblieb, weil ähnliche Absichten für allzuviele Werke des Alterthums und des Mittelalters daneben bestanden, als dass die Arbeitskraft zweier Männer zur Ausführung hätte ausreichen können. Die Schrift von den gegebenen Zahlen ist

[1]) *Ex quadam demonstratione Ptolemaei in Almagesti, positis sex quantitatibus quibuscunque, ubi proportio duarum ex quatuor constat reliquarum proportionibus, sumi possunt coniugationes utiles et modi communes ex uno eorum provenientes, et sunt omnes 18.* [2]) Chasles, *Aperçu hist.* kennt diese Schrift noch nicht; dagegen hat Chasles sich 1841 eingehender mit ihr beschäftigt. Compt. Rend. XIII, 506 und 520. H. Treutlein hat den Text aus der Basler Handschrift F II, 33 in der Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft S. 135—166 unter Vorausschickung einer Einleitung S. 127—135 zum Abdrucke gebracht. Eine gereinigte Ausgabe veranstaltete H. Max Curtze unter Benutzung der Dresdner Handschrift C 80 in der Zeitschr. Math. Phys. (1891) XXXVI Histor.-liter. Abthlg. S. 1—23, 41—63, 81—95, 121—138. Eine werthvolle Einleitung zu dieser neuesten Ausgabe ist auf S. 1—5 zu finden. Wir citiren ausschliesslich die neueste Ausgabe als Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. mit nachfolgender Seitenzahl. [3]) Treutlein in Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft S. 127—128.

in vier Bücher eingetheilt, von welchem das erste 29, das zweite 28, das dritte 23, das vierte 35 Aufgaben behandelt.

Dem 1. Buche könnte als Ueberschrift dienen: Wenn zwei quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben sind, so sind die Unbekannten selbst gegeben. Es sind zu dem Ende die verschiedensten Einzelfälle behandelt. Bald ist Summe und Product der Unbekannten gegeben, bald Summe und Quadratsumme; dann ist wieder Differenz und Product gegeben, Differenz und Quadratsumme, Summe der einfachen Unbekannten und ihre Quadratsumme vermehrt um das Product von Summe und Differenz u. s. w. Zwei Aufgaben unterbrechen, die eine wirklich, die andere scheinbar, die Gleichförmigkeit des Inhaltes. Die 2. Aufgabe[1]) lehrt beliebig viele (quotlibet) Theile einer gegebenen Summe kennen, wenn die Differenzen je zweier aufeinander folgender Theile gegeben werden. Ist $a$ die Summe und sind $b, c, d, e$ die beispielsweise angenommenen vier Theile, deren Unterschiede Jordanus $b-e=f$, $c-e=g$, $d-e=h$ nennt, indem $e$ die kleinste unter den gesuchten Zahlen sein soll, so ist $b+c+d=f+g+h+3e$, also auch $a(=b+c+d+e)$ $=f+g+h+4e$, $e=\frac{a-f-g-h}{4}$, und nun sind auch die Zahlen $b=e+f$, $c=e+g$, $d=e+h$ bekannt. Hier ist von quadratischen Gleichungen nicht die Rede. Die die Auffindung von $n$ Unbekannten aus ebensovielen Gleichungen ersten Grades bezweckende Aufgabe erinnert, wie sehr richtig bemerkt worden ist[2]), an das Epanthem des Thymaridas, beziehungsweise an verwandte indische Aufgaben (Bd. I, S. 148 und 584). Die 7. Aufgabe[3]) frägt nach einer Zahl, deren Product in die aus ihr selbst und einer bekannten Zahl gebildete Summe gegeben ist. Hier scheint nur $a(a+b)=d$ aufzulösen, wenn wir der gleichen Buchstaben wie Jordanus uns bedienen wollen, also die einzige Unbekannte $a$ aus der quadratischen Gleichung $a^2+ba=d$ zu suchen. Jordanus bemerkt aber, es sei $b$ der Unterschied von $a+b$ und $a$; ihm ist folglich jetzt Unterschied $b$ und Product $d$ zweier Unbekannten bekannt und damit die Aufgabe auf einen Fall quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten zurückgeführt. Er verfährt dann, wie folgt: Nach einander wird $4a(a+b)=4d$, $b^2=b^2$ gebildet, und beide Gleichungen addirt man und findet $(2a+b)^2=4d+b^2$. Folglich ist $a=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4d+b^2}-b\right)$. Auch hier ist die werthvolle Bemerkung gemacht worden[4]), die Vervielfältigung von $a(a+b)=d$ mit 4 erinnere an das Verfahren orien-

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. S. 6—7. [2]) Ebenda S. 3—4. [3]) Ebenda S. 9. [4]) Ebenda S. 4.



talischer Mathematiker. In der That wussten Inder so eine Bruchrechnung zu vermeiden, wenn der Coefficient der ersten Potenz der Unbekannten in einer quadratischen Gleichung ungrad war (Bd. I, S. 585). Von den übrigen Aufgaben des 1. Buches nennen wir die 19., in welcher zwei Zahlen aus ihrer Summe und ihrem Quotienten ermittelt werden sollen[1]). Jordanus nennt die beiden Zahlen $a$ und $b$. Man kennt $\frac{a}{b}=c$, also auch $c+1=d=\frac{a+b}{b}$. Daraus folgt, dass $b\cdot d$ die gegebene Summe, $b$ der Quotient der gegebenen Summe durch $d$ sein muss; wie man dann $a$ finde, hält Jordanus offenbar für so ersichtlich, dass er gar nicht davon redet. Die 29. und letzte Aufgabe[2]) des 1. Buches ist dadurch bemerkenswerth, dass in ihr eine irrationale Quadratwurzel $\sqrt{500}$ mit dem Näherungswerthe $22\frac{1}{3}$ auftritt, ohne dass gesagt wäre, wie derselbe erhalten wurde (cujus extrahatur radix ad proximum et erit XXII et tercia). Möglicherweise rechnete Jordanus $\sqrt{500}=\frac{1}{3}\sqrt{4500}\sim\frac{67}{3}=22\frac{1}{3}$. An anderen Stellen des 1. Buches sind irrationale Lösungen einfach nicht in Betracht gezogen[3]). An zwei Stellen, nämlich in der 5. und in der 8. Aufgabe[4]), verweist Jordanus auf Sätze des ersten Buches seiner Arithmetik, welche er zuerst Arismetica Iordani, dann Arismetica schlechtweg nennt.

Das 2. Buch beginnt mit der Bemerkung, dass wenn aus einer Proportion von vier Zahlen drei derselben gegeben würden, auch die vierte gegeben sei und wendet dann Umwandlungen von Proportionen, wie sie den Griechen vielfach dienten und ihnen die eigentliche Algebra ersetzen mussten, wie aber auch Jordanus im zweiten Buche seiner Arithmetik sie lehrte, zur Auflösung von bestimmten Aufgaben ersten Grades bald mit zwei, bald mit mehreren Unbekannten an. Wählen wir die 20. Aufgabe[5]) einmal heraus. Drei Unbekannte $a, b, c$ stehen in Verhältnissen zu einander und zu bekannten Zahlen, welche in den Gleichungen

$$a+6=1\tfrac{2}{3}b$$

$$b+4=2c$$

$$c+2=\tfrac{5}{7}a$$

ausgedrückt sind. Nun ist $1\frac{2}{3}$ mal 4 gleich $6\frac{2}{3}$, also

$$a+6+6\tfrac{2}{3}=1\tfrac{2}{3}(b+4)=1\tfrac{2}{3}(2c)=3\tfrac{1}{3}c.$$

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. S. 16—17. [2]) Ebenda S. 22—23. [3]) Ebenda S. 4 und 15. [4]) Ebenda S. 4, 8 und 10. [5]) Ebenda S. 51—52.

Ferner ist $3\frac{1}{3}$ mal 2 gleich $6\frac{2}{3}$, also

$$a + 6 + 6\tfrac{2}{3} + 6\tfrac{2}{3} = 3\tfrac{1}{3}\,(c+2) = 3\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{5}{7}\,a\right)$$

oder

$$a + 19\tfrac{1}{3} = \left(2 + \tfrac{2}{7} + \tfrac{2}{21}\right)a, \quad 19\tfrac{1}{3} = \left(1 + \tfrac{2}{7} + \tfrac{2}{21}\right)a$$

und $a = 14$, worauf $b = 12$, $c = 8$ folgen. Ganz eigenthümlich ist dabei das Auftreten der an die alten Stammbrüche erinnernden Vereinigung von $2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{21}$. Statt ihrer würde in alten Zeiten unfehlbar $2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{21}$ geschrieben worden sein. Jordanus aber stand dem Grundgedanken der Zerlegung in Stammbrüche wohl einigermassen fremd gegenüber, wie aus seiner Benutzung gewöhnlicher Bruchformen (z. B. in der dritten Gleichung dieser Aufgabe $\frac{5}{7}$ und nicht $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21}$) hervorgeht, und dürfte hier so gerechnet haben: Um $3\frac{1}{3}$ mal $\frac{5}{7}$ zu bilden, nimmt man zunächst $3 \cdot \frac{5}{7} = 2 + \frac{1}{7}$, dann $\frac{1}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{21}$, also $3\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = 2 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = 2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{21}$. In diesem 2. Buche werden wiederholte Anwendungen von der Regel des einfachen falschen Ansatzes[1]) gemacht. Sie gestaltet sich am bequemsten in der 2. Aufgabe, wo man die Zahl sucht, deren $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{60}$ zusammen $26\frac{2}{3}$ geben sollen. Wäre 60 die Zahl, so käme $\frac{60}{4} + \frac{60}{60} = 16$, folglich ist 60 mit $26\frac{2}{3}$ zu vervielfachen und das Product 1600 durch 16 zu dividiren, wodurch 100 erscheint. Weit verwickelter ist die Anwendung des falschen Ansatzes in der 27. und 28. Aufgabe, wobei namentlich auch der Hinweis darauf, dass Jordanus erklärt[2]), er bediene sich einer arabischen Methode, nicht unterbleiben darf.

Wir gehen zu dem 3. Buche über. Es handelt im Ganzen auch von Proportionen und daraus gebildeten Aufgaben mit mehreren Unbekannten, aber es unterscheidet sich vom 2. Buche dadurch, dass hier fast fortwährend Quadratwurzelausziehungen nöthig fallen, die

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. S. 41—42 und 61—63. [2]) *Opus autem Arabum in partibus tantum consistit estque huiusmodi* heisst es in 27. und dann in 28. (in welcher es sich um eine zweite Auflösung von 26. handelt) *et hoc manifeste docet in opere partium quo utuntur Arabes.*



dort nie vorkommen. Im 3. Buche selbst kann man füglich zwei Abschnitte unterscheiden. Die Aufgaben 1 bis 13 handeln von stetigen geometrischen Proportionen mit nur drei von einander verschiedenen Zahlen, die Aufgaben 14 bis 21 von nicht stetigen Proportionen mit vier von einander verschiedenen Zahlen. Die 22. und 23. Aufgabe schliessen sich leichter der ersten als der zweiten hier hervorgehobenen Gruppe an, und schienen nicht alle Handschriften die gleiche Anordnung aufzuweisen, so wäre man versucht anzunehmen, es sei hier etwas in Unordnung gerathen, und die 22. und 23. Aufgabe hätten ursprünglich hinter der 13. und vor der 14. gestanden. Auch hier wollen wir einige Beispiele mittheilen. Die 9. Aufgabe[1]) spricht aus, man kenne die Glieder $a$, $b$, $c$ einer stetigen geometrischen Proportion $a:b = b:c$, sofern das 4. Glied und die Summe der 3 ersten gegeben sind. Man kennt nämlich mit $c$ auch $c^2 = d$. Sei ferner $ca = b^2 = e$, so ist $c(a + b + b) = e + f + g$, indem $f + g$ statt $2bc$ gesetzt ist. Wird $ca$ durch $b^2$ ersetzt und $c^2 = d$ hinzugefügt, so ist $b^2 + 2bc + c^2 = d + e + f + g$ bekannt, da ja $e + f + g$ das $c$-fache der Summe der 3 ersten Glieder ist. Endlich ist $b = \sqrt{d + e + f + g} - c$ und $a = (a + b + b) - 2b$. Die Aufgaben 12 und 13 gehören zusammen[2]). Von den Gliedern $a$, $b$, $c$ einer stetigen geometrischen Proportion $a:b = b:c$ ist die Summe $a + c$ der beiden äusseren Glieder und $b + c$ beziehungsweise $a + b$ gegeben, wobei angenommen wird, es sei $a > b > c$. Die erstere Aufgabe hat nur eine, die zweite zwei Auflösungen. Aus $a + c = 34$, $b + c = 24$ folgt $a = 25$, $b = 15$, $c = 9$; aus $a + c = 25$, $a + b = 28$ folgt dagegen ebensowohl $a = 24\frac{1}{2}$, $b = 3\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$ als auch $a = 16$, $b = 12$, $c = 9$. Natürlich ist der Grund in dem Vorhandensein von nur einer, beziehungsweise von zwei positiven Wurzeln einer quadratischen Gleichung zu finden. In der 19. Aufgabe[3]) soll die viergliedrige Proportion $a:b = c:d$ ermittelt werden, während $a + d$, $b + c$ und $\frac{a}{c}$ gegeben sind. Da aus der Proportion die Folgerung $\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$ sich ergiebt und $(a + d) + (b + c) = (a + b) + (c + d)$ ist, so kennt man Summe und Quotient von $a + b$ und $c + d$, mithin beide Grössen selbst. Dann kennt man weiter $(a + b) - (a + d) = b - d$ und $(a + d) - (c + d) = a - c$, also auch $\frac{a-c}{b-d}$. Aus der anfänglichen Proportion weiss man aber $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$ und

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. S. 85. [2]) Ebenda S. 87—88. [3]) Ebenda S. 92.

wegen $(a+d)+(b+c)=(a+c)+(b+d)$ kennt man jetzt auch Summe und Quotient von $a+c$ und $b+d$ und damit beide Grössen selbst. So hat man allmälig $a-c$ und $a+c$, also durch sie $a$ und $c$ sich verschafft, welche von $a+d$, beziehungsweise von $b+c$ abgezogen $d$ und $b$ liefern.

Das 4. Buch endlich verlässt die Proportionen wieder, wenn auch von dem Verhältnisse zweier Zahlen zu einander und von Vereinigungen solcher Verhältnisse noch die Rede ist. Ein Hauptinteresse liegt für uns in zwei Gruppen von je drei Aufgaben. Die Aufgaben 8, 9, 10 behandeln die drei Fälle der quadratischen Gleichung[1]: $x^2+bx=c$, $x^2+c=bx$, $bx+c=x^2$ mit zwei Auflösungen des mittleren Falles, während der erste und dritte je nur eine Auflösuug besitzt. Dass im mittleren Falle eine Ausnahme von der Regel stattfinden kann, indem bei $c>\frac{b^2}{4}$ gar keine positive Auflösung erscheint, wusste Jordanus offenbar nicht, da man sonst nicht zu erklären vermöchte, warum er nicht darauf aufmerksam gemacht hat, was Alchwarizmî z. B. nicht versäumte (Bd. I, S. 677). Die zweite Gruppe[2], die Aufgaben 11, 12, 13 umfassend, unterscheidet sich von der ersten nur dadurch, dass das quadratische Glied noch einen Coefficienten besitzt, durch welchen die Gleichung dividirt wird, um sie auf die frühere Form zu bringen. Die Kunstausdrücke, deren Jordanus sich dabei bediente, mögen aus der 11. Aufgabe erkannt werden: Si numerus ad quadratum datus (d. h. $ax^2$) cum addicione numeri ad radicem ipsius dati (d. h. $+bx$) fecerit numerum datum ($c$) et quadratum et radicem datos esse consequetur. Die 8. Aufgabe ist genau die gleiche, welche als 7. Aufgabe des 1. Buches oben zur Besprechung kam. Jordanus hat sie an beiden Stellen eben ganz verschiedenartig behandelt. Eine weitere Uebereinstimmung zwischen Aufgaben des 4. und des 1. Buches findet bei der 15. bis 26. Aufgabe[3] statt. Sie sind sämmtlich quadratische Aufgaben mit zwei Unbekannten. Einzelne derselben unterscheiden sich von solchen des 1. Buches nur darin, dass dort eine bestimmte, hier eine beliebige Einheit der Aufgabe zu Grunde liegt; so kommt die 4. Aufgabe des 1. Buches auf $x+y=a$, $x^2+y^2=b$, die 15. des 4. Buches auf $x+y=az$, $x^2+y^2=bz^2$ heraus[4]. Die Aufgaben 27 bis 34 kehren wieder zu quadratischen Gleichungen mit nur einer Unbekannten[5] zurück, und die 35. und letzte Aufgabe ist eine rein cubische[6]: Die Hälfte des Quadrates einer Zahl $\left(\frac{x^2}{2}\right)$ mit sich selbst

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. S. 124—126. [2]) Ebenda S. 126—128. [3]) Ebenda S. 128—134. [4]) Ebenda S. 8 und 128. [5]) Ebenda S. 134—138. [6]) Ebenda S. 138.



vervielfacht $\left(\text{also } \frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^4}{4}\right)$ soll 54mal die Zahl $(54x)$ geben. Jordanus folgert $x^3=4\cdot 54=216$, dessen Kubikwurzel (cuius latus cubicum) 6 die gesuchte Zahl ist.

Haben wir in Jordanus als Verfasser einer Arithmetik, eines Rechenlehrbuchs, einer Algebra den nicht unberechtigten Nebenbuhler Leonardo's von Pisa kennen gelernt, so wird ein geometrisches Werk des gleichen Verfassers die Meinung von seiner Befähigung auch auf diesem Gebiete zu einer sehr achtungsvollen machen müssen. Das Werk De triangulis[1]) ist es, welches wir meinen, und von welchem wir einen Auszug folgen lassen. Es zerfällt in vier Bücher. Die beiden ersten von 13 und 19 Sätzen handeln von gradlinigen Figuren, die beiden letzten von 12 und 28 Sätzen von Kreisen mit Inbegriff solcher gradlinigen Figuren, die zum Kreise in enger Beziehung stehen.

An der Spitze des 1. Buches finden sich gewisse Begriffsbestimmungen, welche durchweg den Stempel der Scholastik tragen. Von einem Griechen oder von einem Araber können sie daher nicht entlehnt sein. Sie bilden entweder das geistige Eigenthum von Jordanus selbst, oder wenn nicht von ihm, jedenfalls eines Zeitgenossen. Da lesen wir gleich zuerst: Stetigkeit ist Nichtunterscheidbarkeit von Grenzstellen verbunden mit der Möglichkeit abzugrenzen. Der Punkt ist Festlegung der einfachen Stetigkeit[2]). Da heisst es, ein Winkel entstehe durch das Zusammentreffen zweier stetiger Gebilde an einem Endpunkte ihrer Stetigkeit[3]). Da wird eine Figur durch eine oder mehrere Curven, durch zwei oder mehrere Curven und Gerade, durch drei oder mehrere Gerade gebildet[4]), lauter Erklärungen, die von den euklidischen sowohl als von den als heronisch überlieferten in wesentlichen Punkten abweichen und auch bei Proklos nicht wörtlich übereinstimmend nachgewiesen werden können. Der an die Einleitung

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 517 (deutsch 604) nennt das Werk *De triangulis* nur im Vorübergehen. Eine Ausgabe mit vorzüglicher Einleitung hat H. Max Curtze im VI. Hefte der Mittheilungen des Coppernicusvereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn (1887) veranstaltet. Wir citiren dieselbe als Jordanus, Trianguli mit folgender Seitenzahl. Ein guter Auszug auf Grundlage der Aushängebogen der damals noch nicht der Oeffentlichkeit übergebenen Ausgabe bei S. Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter S. 159—162. Dieses Werk citiren wir als Günther, Unterricht Mittela. [2]) *Continuitas est indiscrecio terminorum cum terminandi potencia. Punctus (sic!) est fixio simplicis continuitatis.* [3]) *Angulus autem est continuarum in continuitatis termine conveniencium.* [4]) *Superficiei igitur figura accidit ex terminorum qualitate, quia alia curvis, alia curvis et rectis, alia tantum rectis terminis continetur. Et curvis quidem uno vel pluribus, rectis autem et curvis duobus vel pluribus, rectis vero tribus vel amplioribus.*

anschliessende 1. Satz[1]) giebt die Beziehung einer Mittellinie eines Dreiecks zu dem Winkel an, aus dessen Spitze sie gezogen ist. Der Winkel sei nämlich ein rechter, ein spitzer oder ein stumpfer, je nachdem die Mittellinie gleich der halben Gegenseite ist, die sie halbirt, oder grösser oder kleiner als diese halbe Seite. Wir übersetzen wörtlich den Beweis, um an ihm ein Musterstück des Ganzen zu haben: „Ist die Linie gleich der Hälfte der Basis, so werden vermöge zweimaliger Anwendung von Euklid I, 4 die beiden Winkel an der Basis zusammen dem dritten gleich sein; wegen I, 32 ist also dieser ein rechter. Ist die Linie grösser, so werden wegen I, 18 jene Winkel an der Basis grösser als der dritte, dieser also spitz. Ist die Linie kleiner, so sind auch die Winkel kleiner als der dritte, dieser also wegen I, 32 stumpf.“ Von den hier angeführten euklidischen Sätzen besagt I, 32, dass die Winkelsumme des Dreiecks zwei Rechte betrage und I, 18, dass der grösseren Dreiecksseite der grössere Winkel gegenüberstehe. Der dritte noch benutzte euklidische Satz von der Gleichheit der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks ist in den durch Theon's von Alexandria Ausgabe uns überlieferten euklidischen Elementen nicht I, 4 sondern I, 5, und ähnliche Abweichungen könnten zahlreich nachgewiesen werden, worauf in anderem Zusammenhange im nächsten Kapitel zurückzukommen sein wird. Auch einen Satz, bei welchem der Beweis an einer mit Buchstaben versehenen Figur geführt wird, wollen wir aus diesem 1. Buche etwas genauer mittheilen, den 7. Satz[2]).

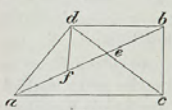


Fig. 13.

Zwischen (Figur 13) den Parallelen $ac$ und $bd$ werden über $ac$ die beiden Dreiecke $abc$, $adc$ gezeichnet, deren Seiten $ab$, $cd$ sich durchschneiden; ist alsdann $ab > cd$, so ist $\sphericalangle\, adc > abc$. Wird von den beiden flächengleichen Dreiecken $abc$, $adc$ das gemeinschaftliche Stück $ace$ abgezogen, so bleibt $\triangle\, bce = ade$, und die Schenkel der den gleichen Dreiecken angehörenden Scheitelwinkel bei $e$ müssen nach Euklid VI, 14 (in der Theon'schen Ausgabe VI, 15) in dem Verhältnisse stehen $ae : ce = eb : ed$. Daraus folgt $ae : ce = (ae + eb) : (ce + ed) = ab : cd$. Nun ist voraussetzungsmässig $ab > cd$, also auch $ae > ec$, und wenn der Punkt $f$ auf $ae$ so gelegen ist, dass $ae : ce = ce : ef$, so muss

[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 3—4: *In omni triangulo si ab opposito angulo ad medium basis ducta linea dimidio eiusdem equalis fuerit, erit ille angulus rectus; quod si maior acutus: si vero minor obtusus.* [2]) Ebenda S. 6: *Si super eandem basim inter lineas equidistantes due trianguli statuantur, cuius latus laterum sese secancium maius fuerit, eius angulus superior minor erit.*



$ef < ce < ae$ sein, d. h. $f$ fällt auf der Richtung $ea$ zwischen $e$ und $a$. Nun zieht man $df$. Es war

$$ae : ce = eb : ed$$
$$ae : ce = ce : ef.$$

Folglich ist
$$eb : ed = ec : ef$$

und wegen $\sphericalangle\, def = bec$ ist $\triangle\, def \sim bec$, also auch $\sphericalangle\, edf = ebc$. Aber $\sphericalangle\, edf$ ist bewiesenermassen nur ein Theil von $\sphericalangle\, eda$, also $\sphericalangle\, eda > ebc$. In den übrigen Sätzen des 1. Buches, welche meistens auch mit der relativen Grösse von Winkeln und Seiten in von einander unterschiedenen Dreiecken in ganz eigenartiger Weise handeln, ist von dem eben erläuterten 7. Satze mehrfach Gebrauch gemacht. Es sind meistens Sätze, die nirgend sonst angetroffen werden, so dass es ganz sonderbar anmuthet, zwischen ihnen so Landläufiges wie den 11. und den 13. Satz[1]) zu finden, dass die Flächen von Dreiecken auf gleicher Grundlinie wie die Höhen sich verhalten und die Grundlinien flächengleicher Dreiecke umgekehrt wie die Höhen.

Das 2. Buch wird durch Theilungsaufgaben gebildet. In den sieben ersten Sätzen handelt es sich um die Theilung von Strecken, in den zwölf folgenden um Theilung von gradlinigen Figuren. In diesem ganzen Buche ist gleichwie im ersten vielfach auf Euklid's Elemente verwiesen, daneben auch auf die Arithmetik des Jordanus, welche schlechtweg die Arithmetik genannt wird. Von der euklidischen Schrift über die Figurentheilung ist trotz der grossen Aehnlichkeit der behandelten Aufgaben, die allerdings nicht bis zu voller Uebereinstimmung sich erhebt, keine Rede. Ob wir daraus auf mangelnde Bekanntschaft mit jener Schrift zu schliessen haben? Vielleicht gestattet grade dieses 2. Buch des Jordanus in Verbindung mit ähnlichen aber wieder nicht bis zur Deckung übereinstimmenden Aufgaben bei Leonardo von Pisa (S. 37) den Rückschluss, es sei, angeregt durch arabische Bearbeitungen, wenn nicht Uebersetzungen der euklidischen περὶ διαιρέσεων (Bd. I. S. 272), zur wissenschaftlichen Modesache der bedeutenderen Geometer geworden, sich mit Theilungsaufgaben zu beschäftigen. Die 18. (vorletzte) Aufgabe des 2. Buches ist der Auffindung des Schwerpunktes des Dreiecks gewidmet. Wir erinnern uns des Beweises, durch welchen Leonardo von Pisa (S. 39) die Gemeinschaft des Durchschnittspunktes der Mittellinien des Dreiecks feststellte. Bei Jordanus ist der Wortlaut der Aufgabe[2]), wie der Gang des Beweises ein ganz anderer. Es soll der Punkt im Innern

[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 8 und 9. [2]) Ebenda S. 18: *Infra datum triangulum a puncto uno signato tres lineas ad angulos tres, que triangulum per equalia dividunt, protrahere.*

eines Dreiecks gefunden werden, dessen Verbindungsgerade mit den Eckpunkten das Dreieck in drei gleiche Theile zerlegen (Figur 14).

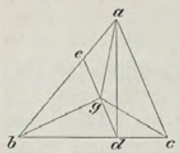



Fig. 14.

Man mache $cd = \frac{cb}{3}$, ziehe $de \parallel ca$ und halbire $de$ in $g$, so ist dieses der gesuchte Punkt. Es ist nämlich

$$\triangle adc = \frac{abc}{3},$$

$$\triangle agc = adc \quad \text{und} \quad \triangle agb = bgc.$$

Die letztere Behauptung spricht Jordanus nur kurz aus, ohne sie zu beweisen; er traut also seinen Lesern zu, sie würden etwa $\triangle age = cgd$ und $\triangle egb = dgb$ einsehen und beide Gleichungen addiren. Auch den letzten 19. Satz[1]) wollen wir erwähnen. Ein Viereck $abcd$ soll von dem Eckpunkte $b$ aus durch eine Gerade halbirt werden. Halbiren die in $g$ sich schneidenden Diagonalen $bd$, $ac$ des Vierecks sich gegenseitig, so halbirt jede derselben das Viereck, wie aus dem Satze Euklid I, 38 (dass Dreiecke von gleichen Grundlinien zwischen Parallelen flächengleich sind) hervorgeht. Die Aufgabe ist also in diesem Falle schon gelöst. Nun sei aber (Figur 15)

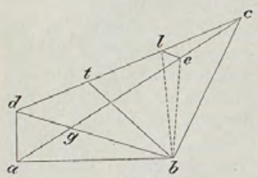



Fig. 15.

$$cg > ag,$$

so kann man $ce = ag$ abschneiden. Von $e$ aus zieht man $el \parallel bd$ und halbirt $ld$ in $t$, so löst $bt$ die Aufgabe. Es verhält sich nämlich $\triangle dbc : lbc = dc : lc$ und $dc : lc = gc : ec$, endlich

$$ec = ag, \text{ also}$$

$$\triangle dbc : lbc = gc : ag.$$

Ferner:

$$\triangle dbc : dba = gc : ag,$$

wie sich ergiebt, wenn man

$$\triangle dbc = dcg + bcg \quad \text{und} \quad \triangle dba = dag + bag$$

berücksichtigt. Aus den beiden Proportionen folgt aber $\triangle dba = lbc$ und addirt man zu dieser Gleichung die augenscheinlich richtige $\triangle dbt = lbt$, so zeigt sich die Halbirung des Vierecks $abcd$ mittels $bt$.

Wir kommen zu dem 3. Buche, welches, wie wir oben ankündigten, vom Kreise handelt, und zwar fast fortwährend Verhältnisse von Kreisbögen untereinander mit solchen von geradlinigen Strecken in Beziehung setzt. Das Grössersein des einen Verhältnisses als das andere ist meistens Zielpunkt der Untersuchung, wie es bei dem bekannten Satze des Ptolemäus über Bogenquotiente und Sehnenquotiente (Bd. I, S. 390) der Fall ist, der in der That auch hier als 4. Satz[1]) auftritt. Ptolemäus freilich ist dabei nicht genannt, sondern im Laufe des Beweises nur der Satz Euklid XII, 2 (dass Kreisflächen im quadratischen Verhältnisse der Durchmesser stehen) und ein Proportionensatz aus dem V. Buche desselben Verfassers, sowie zwei Bücher[2]), welche die Titel führen: über gekrümmte Oberflächen und über ähnliche Bögen. Man hat die Bemerkung gemacht, in den Büchern De triangulis berufe sich Jordanus ausser auf Euklid's Elemente ausschliesslich auf Werke seiner eigenen Feder[3]). Darnach müssten die genannten beiden Bücher, von welchen das über ähnliche Bögen im Anschlusse an die De triangulis im Drucke herausgegeben ist[4]), von Jordanus verfasst sein. Demgegenüber dürfte indessen doch in Erwägung zu ziehen sein, dass die bekannte Basler Handschrift, von der wir bei Gelegenheit des Algorithmus demonstratus (S. 63) gesprochen haben, ein Buch enthält: *Archimenidis de curvis superficiebus*[5]), von dem wir dahingestellt sein lassen, ob es wirklich in letzter Linie auf Archimed zurückführt, oder ob die Ueberschrift so zu verstehen ist, dass eine Neubearbeitung archimedischer Sätze vorliege. Es dürfte ferner daran zu erinnern sein, dass Ahmed der Sohn Josephs ein Buch schrieb, welches Gerhard von Cremona als *liber de similibus arcubus*[6]) übersetzte. Wir bemerken zu dem 4. Satze überdies, dass die an der Figur angebrachten Buchstaben ganz andere sind als die, deren Leonardo (S. 38) sich beim Beweise bediente. Nur Eines wollen wir aus dem 3. Buche noch erwähnen, nämlich, dass am Schlusse des Beweises des letzten 12. Satzes[7]) der Begriff und Name des *angulus contingencie* auftritt als des Winkels, welchen die Berührungslinie, *contingens*, mit dem Kreisbogen, *arcus*, bildet. Es ist derselbe Winkel, mit welchem (Bd. I, S. 250) Euklid III, 16 sich beschäftigt hat, wo bewiesen ist, dass er kleiner sei als irgend ein geradliniger spitzer Winkel.

Das 4. Buch fesselt noch heute die Aufmerksamkeit des Lesers in einem Maasse, dass wir fast Satz für Satz dasselbe auszuschreiben

[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 18—19: *Ab angulo quadranguli assignati lineam rectam educere, que totam quadranguli superficiem per duo equalia parciatur.*



[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 21. [2]) *ut ostensum est in libro de curvis superficiebus* und etwas später *ut habetur in libro de similibus arcubus.* [3]) Ebenda S. XII der Einleitung. [4]) Ebenda S. 48—50. [5]) *Archimedis Opera* ed. Heiberg vol. III. *Prolegomena* pag. LXXXVII—LXXXIX. [6]) Steinschneider in Eneström's *Bibliotheca mathematica* 1888 S. 114. [7]) Jordanus, *Trianguli* S. 28.

uns versucht fühlen. Der erste Satz spricht aus, dass die Mittelpunkte des Innen- und des Umkreises eines solche Kreise besitzenden unregelmässigen Vielecks nicht zusammenfallen können. Der 2. Satz behauptet, dass von Sehnendreiecken desselben Kreises auf der gleichen Grundlinie das gleichschenklige die grösste Fläche besitze. Der 4. Satz giebt an, dass Sehnenparallelogramme lauter gleiche Winkel, der 6., dass Tangentenparallelogramme lauter gleiche Seiten besitzen. Ersterer Satz beruht auf dem aus Euklid bekannten Satze, dass je zwei gegenüberliegende Winkel eines Sehnenvierecks sich zu zwei Rechten ergänzen, letzterer auf dem von der gleichen Summe je zwei gegenüberliegender Seiten eines Tangentenvierecks. Da aber dieser Satz bei Euklid nicht ausdrücklich ausgesprochen ist, so hat Jordanus ihn als 5. Satz zwischengeschoben. Der 8. Satz[1]) und die ihm folgenden stellen eine zusammenhängende Lehre von den gegenseitigen Beziehungen zwischen regelmässigen Sehnen- und Tangentenvielecken her. Um dieselbe übersichtlicher aussprechen zu können, wollen wir Flächeninhalt und Umfang eines regelmässigen Sehnen-$n$-ecks durch $i_n$ und $u_n$, die entsprechenden Grössen für das regelmässige Tangenten-$n$-eck des gleichen Kreises durch $I_n$ und $U_n$ bezeichnen. Im 8., 9., 11. Satze beweist alsdann Jordanus die Proportionen:

$$i_n : i_{2n} = i_{2n} : I_n,$$

$$i_n : i_m > u_n : u_m, \text{ sofern } n > m,$$

$$I_n : I_m = U_n : U_m \text{ und } I_m > I_n, \text{ sofern } n > m.$$

Der Beweis des 8. Satzes wird unter der Annahme $n = 3$ geometrisch geführt (Figur 16). Das Tangentendreieck liegt so, dass es die Spitzen des Sehnendreiecks (z. B. $d$ und $f$) zu Berührungspunkten hat, worauf eine stetige Proportion zwischen Abschnitten der Verbindungsgeraden vom Kreismittelpunkte zu einem Eckpunkte des Tangentendreiecks sich leicht ergiebt. Es ist z. B.

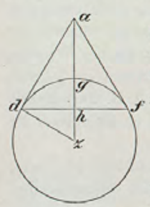


Fig. 16.

$$dh^2 = hz \cdot ha, \quad hz^2 = hz \cdot hz,$$

$$dh^2 + hz^2 = hz(ha + hz) = hz \cdot az.$$

Zugleich ist auch $dh^2 + hz^2 = dz^2 = gz^2$, mithin $hz : gz = gz : az$. Diese Abschnitte als Grundlinien von Dreiecken benutzt, deren gemeinsame Spitze

[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 31: *Inter quaslibet duas figuras poligonias equilateras et similes, et quarum una in circulo inscripta, alia circumscripta fuerit, proporcionalis consistit, que duplo plurium laterum existens infra eundem circulum inscribitur.*



im Eckpunkte $d$ des Sehnendreiecks liegt, übertragen jene Proportion einfach auf die Flächen der eben gekennzeichneten Dreiecke:

$$\triangle dhz : \triangle dgz = \triangle dgz : \triangle daz,$$

also auch auf Gleichvielfache derselben, und damit ist der Satz bewiesen, dass $i_n : i_{2n} = i_{2n} : I_n$. Wiewohl Jordanus eigentlich $n = 3$ vorausgesetzt hat, kommt also diese Voraussetzung in der Beweisführung nirgend vor, und Jordanus kann getrost fortfahren[1]), ähnliche Schlüsse könne man ziehen, sofern Vielecke von viel mehr Seiten vorliegen. Auffallend genug, dass Jordanus sich dadurch doch nicht befriedigt zu fühlen schien. Er behandelt vielmehr im 15. Satze noch einmal besonders den Fall $n = 4$, ohne dabei des vorhergegangenen allgemeinen 8. Satzes nur zu gedenken. Im 16. Satze wendet sich Jordanus der Quadratur des Kreises[2]) zu. Dem Kreise $a$ lässt Jordanus ein Quadrat $de$ umschreiben und sucht eine Fläche $c$, welche der Proportion $c : a = a : de$ genüge. Ist nun das gefundene $c$ wieder ein Kreis, so werde diesem ein Quadrat $hk$ umschrieben, und da sich Kreise wie ihre umschriebenen Quadrate verhalten, so wird auch stattfinden $c : a = hk : de$. Eine Vergleichung beider aufgestellter Proportionen lässt alsdann $a = hk$ erkennen. Ist dagegen $c$ kein Kreis, sondern eine gradlinig begrenzte Figur, so kann dieselbe immer in ein Quadrat $ry$ umgewandelt, ausserdem ein Quadrat $mn$ als geometrisches Mittel zwischen den Quadraten $ry$ und $de$ gefunden werden, und auch dann ist die Aufgabe gelöst, weil $a = mn$. Offenbar ist also der Beweis dialektisch geführt, dass es ein dem Kreise $a$ flächengleiches Quadrat geben müsse, wenn die Voraussetzung wahr ist, die Figur $c$ könne nur entweder ein Kreis oder eine gradlinig begrenzte Figur sein; wie man, selbst wenn man jene Voraussetzung zugeben müsste, $c$ zu finden habe, damit beschäftigt sich Jordanus nicht.

Nehmen wir von dieser echt scholastischen Untersuchung Anlass, hier die Frage zu streifen, ob Jordanus ganz unabhängig gearbeitet hat, oder ob irgend eine fremde Vorlage sich nachweisen lässt, an welche er in seinem Werke De triangulis mehr oder weniger eng sich angeschlossen haben mag. Man hat darauf hingewiesen[3]), dass entfernt Aehnliches bei dem Byzantiner Psellus vorkomme. Aber wenn auch Psellus einen unbestreitbar mächtigen Einfluss auf das Studium der Logik im Abendlande ausgeübt hat, so ist doch die weit höhere geometrische Begabung des Jordanus gewiss nicht bei

[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 32: *ex eis argues si proposite fuerint figure poligonie multo plurium laterum.* [2]) Ebenda S. 36: *Proposito circulo equale quadratum constituere.* [3]) Günther, Unterricht Mittela. S. 161, Note 2.

einem Psellus in die Schule gegangen. Viel leichter könnten wir mit der am gleichen Orte ausgesprochenen Vermuthung uns befreunden, es sei bei Psellus und Jordanus hier der Einfluss eines Dritten, eines Schriftstellers der griechisch-arabischen Schule etwa, wahrnehmbar, den Jordanus besser verstanden hat, als es Psellus möglich war. Immerhin schweben solche Meinungen ziemlich haltlos in der Luft. Nur zwei verneinende Behauptungen können wir mit Sicherheit aussprechen. Des Jordanus 16. Satz im 4. Buche De triangulis stammt nicht aus der Kreisquadratur des Franco von Lüttich (Bd. I, S. 822), er stammt auch nicht aus dem Buche der drei Brüder (Bd. I, S. 690). Beide Schriften sind gegenwärtig herausgegeben[1]). Auch in der durch Gerhard von Cremona in's Lateinische übersetzten arabischen Schrift findet sich reiches Material zur Kreisquadratur, aber nicht jener 16. Satz des Jordanus. Andere Sätze aus dem Buche der drei Brüder dagegen zeigen mit solchen aus dem 4. Buche De triangulis eine merkwürdige Aehnlichkeit. Der 18. Satz der Araber hat es mit der Dreitheilung des Winkels, ihr 16. Satz mit der Würfelverdoppelung zu thun. Dieselben Fragen beschäftigen Jordanus im 20., im 22. Satze seines 4. Buches. Die Uebereinstimmung im Wortlaute sowie in den Buchstaben der Figuren ist eine so vollständige, dass man herüber und hinüber zweifelhafte Lesarten dadurch festzustellen befähigt war. Da sollte man doch für unzweifelhaft halten, dass Jordanus sich jener Uebersetzung des Liber trium fratrum von Gerhard von Cremona bediente! Und dennoch tragen wir die grössten Bedenken solches anzunehmen. Sie beruhen auf Folgendem: In den neun letzten Sätzen des 4. Buches, von dem 20. bis zum 28. Satze, sind bei Jordanus alle Figuren mit Buchstaben griechisch-arabischer Reihenfolge bezeichnet, während vorher ausschliesslich die lateinische Reihenfolge der Buchstaben zu erkennen ist. Von dem Satze an, wo $abg$ an die Stelle von $abc$ treten, müssen wir wohl an den Einfluss eines Musterwerkes, und dann mit grosser Wahrscheinlichkeit an den eines einzigen denken, und doch ist nur in Satz 20 und 22, wie bemerkt, eine Uebereinstimmung mit dem Buche der drei Brüder, ist schon in Satz 22 ein wesentlicher Unterschied neben der Aehnlichkeit zwischen Jordanus und der Gerhard'schen Uebersetzung wahrnehmbar, sind die Sätze 21 und 23 bis 28 bei den drei Brüdern gar nicht vorhanden. Da drängt sich doch die Vermuthung auf, dem Jordanus werde nicht das Buch der drei

[1]) Die Schrift des Franco gab Winterberg in der Zeitschr. Math. Phys. (1882) XXVII, Supplementheft S. 137—190 heraus, den *Liber trium fratrum* sodann (1885) Max Curtze im XLIX. Bande der *Nova Acta* der Kais. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher.



Brüder vorgelegen haben, sondern eine Arbeit, welche selbst ihren Stoff theilweise dem Buche der drei Brüder entlehnt hatte. Ist etwa an Tâbit ibn Kurra zu denken, den Schüler von Muhammed, den ältesten unter den drei Brüdern?[1]) Solche Fragen sind leichter aufgeworfen als beantwortet, und sie würden zu ihrer befriedigenden Beantwortung jedenfalls voraussetzen, dass mehr arabische Mathematiker in Uebersetzungen vorhanden wären, als es der Fall ist. Der 16. Satz des Jordanus aber, von welchem wir den Ausgangspunkt zu dieser Einschaltung nahmen, bleibt von dem Ergebnisse, wie es ausfallen möge, unberührt, da er noch nicht zu der besonders kenntlich gemachten Gruppe von neun Sätzen gehört.

Wir haben bei einigen Sätzen dieser Gruppe noch zu verweilen. Der 20. Satz, sagten wir, habe es mit der Dreitheilung eines spitzen Winkels zu thun (Figur 17). Um $b$, den Scheitelpunkt des spitzen Winkels $abg$, als Mittelpunkt wird der Kreis $dzm$ beschrieben, $db$ bis $l$ verlängert, $bz$ senkrecht zu $dl$ gezogen und $ze$ gegen $h$ verlängert, worauf $zq = bd$ abgeschnitten wird. Die Gerade $zeh$ wird nun in gleitende und zugleich drehende Bewegung gesetzt, während welcher sie fortwährend durch $e$ hindurchgeht und $z$ auf der Kreisperipherie hinläuft. Diese Bewegung lässt man andauern, bis $q$ auf der früheren Geraden $bz$, etwa in $s$, ankommt, d. h. bis auf $est$ der Theil $st = qz = bd$ ist. Dann ist

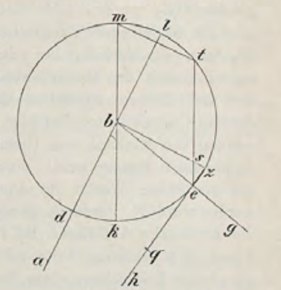


Fig. 17.

$$\text{arc.}\, tl = \frac{1}{3}\, \text{arc.}\, de.$$

Man ziehe $mbk \parallel te$ und $mt$. Weil $ts$ parallel und gleich $mb$, muss auch $mt$ parallel und gleich $bs$ sein. Nun war $bsz$ senkrecht zu $dl$ gezogen, also ist auch $mt$ senkrecht zu $dl$, und daher halbirt $dl$ sowohl die Sehne $mt$ als den von ihr bespannten Bogen $mt$. Ferner sind $\sphericalangle\, mbl$ und $dbk$ Scheitelwinkel am Kreismittelpunkte, also

$$\text{arc.}\, dk = \text{arc.}\, ml = \frac{1}{2}\, \text{arc.}\, mt = \frac{1}{2}\, \text{arc.}\, ke = \frac{1}{3}\, \text{arc.}\, de.$$

Ist der zu drittheilende Winkel stumpf, so wird seine Hälfte spitz, also diese nach der vorgeschriebenen Regel behandelt werden können.

[1]) Einer nicht wesentlich verschiedenen Meinung scheint Max Curtze zu huldigen, vergl. dessen *Reliquiae Copernicanae* (1875) S. 26 oder Zeitschr. Math. Phys. XIX, 451.

Diese Darstellung (eine nahezu wörtliche Uebersetzung) lässt erkennen, dass hier von **Bewegungsgeometrie** Gebrauch gemacht ist, wie ein arabischer Schriftsteller in der zweiten Hälfte des X. Jahrhunderts, **Assidschzî** (Bd. I, S. 706) es nannte, wenn ein als Maassstab eingetheiltes Lineal so um einen Punkt in gleitende Drehung versetzt wird, bis gewisse Längen auf einer Richtung von einer gegebenen Begrenzung an ablesbar werden[1]). Würde man den geometrischen Ort des Punktes $q$ vollständig zeichnen, so bekäme man eine **Kreisconchoide**, welche durch ihren Durchschnitt mit $bz$ den Punkt $s$ bestimmen liesse, und welche auch das 8. Lemma des Archimed (Bd. I, S. 284) zu einer Winkeldreitheilungsmethode verwerthen würde, die im Grundgedanken mit der soeben erörterten nahe verwandt ist. Wäre es wohl allzugewagt, aus den Bemerkungen von Assidschzî, aus dem Buche der drei Brüder, aus Jordanus den Schluss zu ziehen, die Griechen hätten die Curve der Kreisconchoide wirklich gekannt?[2])

Der 22. Satz beschäftigt sich, wie wir erwähnt haben, gleich dem 16. Satze der drei Brüder mit der Würfelverdoppelung und zwar zunächst nach der Methode des Archytas (Bd. I, S. 215—217). Bei den drei Brüdern ist Mileus, d. h. Menelaus als Erfinder genannt, Jordanus nennt keinen Erfinder. Dagegen stimmt er mit der Uebersetzung des Gerhard von Cremona darin überein, dass er die Umdrehungsaxe *meguar* nennt, eine nicht einmal sehr schlechte Lesung des arabischen Wortes für Axe, welches heute miḥwar geschrieben werden würde[3]). Jordanus giebt sodann eine zweite Auflösung, welche die heronische Auflösung (Bd. I, S. 350) mit Einschluss der bei der Figur in Anwendung kommenden Buchstaben genau wiedergiebt und als einzige Abweichung einen Kreis zeichnen lässt, den die heronische Figur nicht aufweist. Auch das Buch der drei Brüder knüpft eine zweite Auflösung an, aber es ist die Plato's[4]) (Bd. I, S. 214), und in diesen zweiten Auflösungen ist der neben sonstiger Uebereinstimmung vorhandene wesentliche Unterschied zwischen dem Liber trium fratrum und Jordanus zu finden, den wir oben schon betonten.

Der zwischen Winkeldreitheilung und Würfelverdoppelung eingeschaltete Satz 21 verlangt[5]) in einem gegebenen Dreiecke den

[1]) Wöpcke, *L'algèbre d'Omar Alkayyâmî* pag. 120. [2]) Max Curtze, welcher in den *Reliquiae Copernicanae* l. c. zuerst diese Frage aufwarf, ist geneigt, die Kenntniss der Kreisconchoide den Griechen zuzusprechen. [3]) Vergl. das grosse Wörterbuch von Freytag IV, 157. [4]) *Liber trium fratrum*. Erläuterung zu XVII, S. 61. [5]) Jordanus, *Trianguli*, S. 39: *In omni triangulo noto est punctum invenire, quo continuato cum angulis trianguli dividetur triangulus per tres proporciones notas.*



Punkt zu finden, dessen Verbindungsgerade mit den Ecken das Dreieck nach gegebenem Verhältnisse theilen. Die Aufgabe ist die Verallgemeinerung der 18. des 2. Buches, welche wir (S. 76) besprochen haben. Aber Jordanus erinnert an jene mit keinem Worte und bedient sich einer durchaus anderen Reihenfolge der Buchstaben, wogegen der der Auflösung zu Grunde liegende Gedanke sich nicht geändert hat (Figur 18). Die Grundlinie $ag$ wird nach dem gegebenem Verhältnisse in $d$ und $e$ getheilt. Dann werden von diesen Theilungspunkten aus Parallele zu der jeweils nächsten Dreiecksseite gezogen, deren Durchschnittspunkt $t$ der gesuchte Punkt ist. Bei dem 23. Satze, welcher ein regelmässiges Sehnensiebeneck fordert[1]), verweilen wir nur einen Augenblick, um zu berichten, dass die Regel: die Hälfte der Dreiecksseite gebe die Siebenecksseite, welche Abû'l Wafâ lehrte (Bd. I, S. 702) hier als **indische Regel**[2]) vorgetragen wird. Aber Jordanus sagt uns auch, die indische Regel gehe weiter und liefere allgemein die Seite $s_n$ des regelmässigen Sehnenvielecks von $n$ Seiten in dem Kreise vom Halbmesser $r$. In eine Formel umgesetzt lautet die Vorschrift $s_n{}^2 = \frac{18r^2}{\frac{(n-1)n}{2}+3}$. Daraus entsteht, was bei Jordanus allerdings nicht gesagt ist,

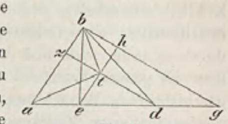


Fig. 18.

$$s_n = \frac{6r}{\sqrt{(n-1)n+6}}.$$

Sonderfälle sind: $s_3 = r\sqrt{3}$, $s_4 = r\sqrt{2}$, $s_6 = r$, $s_7 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, wovon die drei ersten genau richtig sind, der vierte den Werth des Abû'l Wafâ darstellt. Im 25. Satze kommt wie bei Leonardo von Pisa (S. 37) das Wort *casus*[3]) vor für den Abschnitt, welchen im Dreiecke die Senkrechte von einem Eckpunkte auf die Gegenseite auf dieser hervorbringt.

Wir glauben nicht einer Uebertreibung uns schuldig zu machen, wenn wir den Verfasser der vier Bücher von den Dreiecken unter die hervorragenden Geometer zählen. Mag Vieles, mögen insbesondere die oftgenannten neun letzten Sätze des 4. Buches offenkundig ausländischen Ursprunges sein, Jordanus hat sie doch verstanden, hat

[1]) Jordanus, *Trianguli*, S. 42: *Circulo proposito eptagonum equilaterum et equiangulum inscribere.* [2]) Ebenda S. 43—44: *Hec est questio Indorum . . . et scias, quod ipsi ponunt latus eptagoni cadentis in circulo per equalitatem medietatis lateris trianguli cadentis in illo.* [3]) Ebenda S. 45.

es berechtigt gefunden, sie in sein Werk aufzunehmen. Auch für die vorhergehenden Bücher und die 19 ersten Sätze des 4. Buches mag Jordanus vielleicht nicht als ganz unabhängiger Erfinder dastehen, aber was wir ihm unter allen Umständen zu gut rechnen müssen, das sind manche Beweisführungen, das sind mindestens die in denselben von Schritt zu Schritt enthaltenen Verweisungen auf Euklid. So erhalten wir das Bild eines durchaus gewissenhaften Schriftstellers, eines Gelehrten, der den seiner Zeit zugänglichen Stoff durchaus beherrschte und denselben zu verwenden wusste. Insbesondere die genaue Kenntniss der euklidischen Elemente muss in einer geschichtlichen Betrachtung stark hervorgehoben werden. Man darf gewiss für einen Zeitraum, der bis tief ins XVI. Jahrhundert sich erstreckt, den Satz aussprechen: je mehr wissenschaftlicher Sinn einer Zeit oder einer einzelnen Persönlichkeit innewohnte, um so gründlicher wurde Euklid studirt.

Als wir vorher die schriftstellerische Thätigkeit des Jordanus in den nicht geometrischen Theilen der Mathematik schilderten, haben wir (S. 67) am Schlusse des 43. Kapitels zugesagt, auf die Ursprungsfrage zurückkommen zu wollen. Wir wenden uns zur Erfüllung dieser Zusage, so weit sie uns möglich ist, und zu gleicher Zeit greifen wir auf die Schriften des Leonardo von Pisa zu ähnlichem Zwecke zurück. Haben doch die beiden Männer sich den Ruhm verdient, an die Spitze eines neuen Zeitraumes — wir dürfen vielleicht sagen eines neuen Zeitalters — gestellt werden zu müssen, und sind doch Beide, wie ihre Schriften mit Ausschluss jeden Zweifels darthun, in arabischer Schulung zu Mathematikern geworden, gleichviel ob sie selbst der arabischen Sprache mächtig waren, oder ob sie Arabisches, beziehungsweise Griechisch-arabisches, aus lateinischen Uebersetzungen kennen lernten. Für Leonardo geht man kaum irre, wenn man annimmt, er habe in Bugia, er habe später in der Levante genügende Kenntnisse in der arabischen Sprache gesammelt, um Uebersetzungen entbehren zu können. Eine gleiche Annahme auch für Jordanus zu machen, fehlt es an einer gesicherten Grundlage. Bei der hervorgehobenen Grundähnlichkeit sind nun einzelne schroffe Gegensätze zwischen Jordanus und Leonardo um so auffallender. Wir wollen sie, die zumeist den rechnenden Abschnitten angehören, hervortreten lassen.

Jordanus führt Verdoppelung und Halbirung als besondere Rechnungsarten an, Leonardo kennt sie nicht als solche. Leonardo lehrt die Neunerprobe, für Jordanus ist sie nicht vorhanden. Jordanus besitzt eine Art complementärer Multiplication (ob freilich aus arabischer Quelle bezweifeln wir), bei Leonardo nichts Aehnliches. Leo-



nardo gebraucht für das Quadrat der unbekannten Grösse das Wort *census*, bei Jordanus ist es nicht zu finden, sondern nur *quadratus*. Fast am Auffallendsten ist der Gegensatz beider Schriftsteller, wo es sich um die Ausziehung von Kubikwurzeln handelt. Jordanus lehrt dieselbe, soweit sie ganzzahlig möglich ist, genau in der gleichen unbefangenen Weise wie vorher die Quadratwurzel, Leonardo rühmt sich der Erfindung der Kubikwurzelausziehung und lehrt dabei eine Näherungsmethode, welche es gestattet, den rohesten ganzzahligen Annäherungen noch Brüche beizufügen.

Wie in aller Welt sind diese Verschiedenheiten bei Männern, deren Lehrjahre gewiss nicht weit auseinander lagen, die beide, wie wir oben sagten, in arabischer Schulung zu Mathematikern geworden sind, zu deuten? Wir glauben einem Erklärungsgrunde auf die Spur gekommen zu sein, ob dem richtigen müssen wir dahingestellt sein lassen. Er hat jedenfalls ein Verdienst, nämlich das, der einzige zu sein, der bisher aufzustellen versucht wurde.

Wir haben (S. 34) einige algebraische Aufgaben Leonardo's als Alkarchî nachgebildet nennen dürfen. Den gleichen Lehrer erkennen wir in allen jenen Dingen, die wir hier als für Leonardo besonders kennzeichnend fanden. Die Kubikwurzel insbesondere hat Alkarchî nicht ausgezogen, aber dafür hat er eine näherungsweise Ausziehung der Quadratwurzel, an welche zu erinnern wir gerade damals für angezeigt hielten, als wir Leonardo's Kubikwurzelausziehung schilderten. Und nun Jordanus. Wir könnten sagen, er hat Alkarchî's Schriften nicht gekannt, aber wir gehen um einen Schritt weiter. Wir vermuthen seine Abhängigkeit von Alnasawî. Diese erklärt nämlich Alles, was wir von Jordanus aussprachen mit Ausnahme der complementären Multiplication, welche er von irgend einem Klostergeistlichen gelernt haben kann, dagegen mit Einschluss der Kubikwurzelausziehung, welche bei Alnasawî vorkommt.

Wunderbarer Zufall! Im fernen Oriente ruft (Bd. I, S. 720—721) vielleicht religiöser und politischer Gegensatz zwei einander feindliche wissenschaftliche Schulen ins Leben. Ein Werk aus der Schule des Alkarchî fällt in die Hand eines geistvollen Kaufmannes, ein anderes aus der Schule des Alnasawî — denn wir behaupten keineswegs, es seien die Werke der Begründer jener Schulen selbst gewesen, die nothwendig bei Leonardo, bei Jordanus dem Unterrichte zu Grunde lagen — fällt in die Hand eines hochbegabten Mönches, und im christlichen Abendlande spiegelt sich ein Gegensatz wieder, der hier auch nicht den Schein einer Berechtigung besitzt! Jetzt aber handelt es sich darum, wie die Weiterentwickelung vorgehen soll, ob für die nächsten Jahrhunderte in Europa Alkarchî, ob Alnasawî sich siegreich erweist, oder wenn unser Erklärungsversuch des nicht wegzuleugnenden Gegensatzes keinen Beifall finden sollte, wer der Lehrmeister bleibt, Leonardo oder Jordanus?

Haben wir aber erst des Wortes Zufall uns bedient, so ist jetzt aus inneren Gründen die Antwort herzuleiten, welche die zuletzt aufgeworfene Frage zu erhalten hat. Leonardo von Pisa war freilich nach unserer persönlichen Schätzung der bedeutendere Mathematiker von den beiden, zwischen welchen die Wahl stand. Er war ein Kaufmann unter tausenden. Jordanus Nemorarius war ein Ordensgeistlicher wie vielleicht sehr viele, wenngleich an besonderer mathematischer Begabung denselben überlegen, und das musste den Ausschlag geben. War die Wissenschaft und ihre Lehre noch fortwährend Eigenthum der Geistlichkeit, gipfelte, wie wir (S. 54) in kurzem Abrisse anzudeuten uns begnügen mussten, alles Wissen in der Gottesgelehrsamkeit, so musste der gelehrte Mönch einen ganz anderen Einfluss ausüben als der ebenso gelehrte Kaufmann. Und wenn nun gar der Mönch dem Orden angehörte, der, wie wir gleichfalls (S. 55) gesagt haben, in Predigt und Lehre seine Aufgabe fand, wenn er an der Spitze dieses Ordens stand, wenn er zur Ausbreitung des Ordens in grossartiger Weise beitrug, kann es da noch zweifelhaft erscheinen, wer im Wettstreite siegen musste, wenn überhaupt von einem solchen die Rede sein kann? Und nun greifen wir auf eine andere für Manchen noch strittige Frage zurück: wenn Alles so verlief, wie wir hier in Kürze es angedeutet haben, ist dadurch nicht ein bisher unbeachtet gebliebener Grund für die Behauptung gefunden, Jordanus Nemorarius und Jordanus Saxo seien eine Person?

Lassen wir an einem Belege statt an hunderten zum voraus wenigstens die Wahrscheinlichkeit unserer Erörterungen zu Tage treten. Handschriften des Leonardo von Pisa haben sich bis auf den heutigen Tag nur in Italien erhalten, oder wohin sie in den letzten Jahrhunderten von Italienern allenfalls verschleppt worden sind. Handschriften des Jordanus Nemorarius sind in Basel, in Cambridge, in Dresden, in Erfurt, in Mailand, in München, in Oxford, in Paris, in Rom, in Thorn, in Venedig, in Wien vorhanden. Wir haben absichtlich die alphabetische Reihenfolge der Städte gewählt, welche in Kreuz- und Querzügen über ganz Europa hin und her führt.



## 45. Kapitel.

### Johannes de Sacrobosco, Johannes Campanus und andere Mathematiker des XIII. Jahrhunderts.

Was wir aus inneren Gründen als unausbleiblich erkannten, stellt sich als thatsächlich vorhanden dar, sobald wir an die Persönlichkeiten näher herantreten, welche die Geschichte der Mathematik nächst den beiden Männern, welchen unsere seitherigen Betrachtungen gewidmet waren, im XIII. Jahrhundert zu nennen hat.

Gehen wir von Paris aus als dem Sitze derjenigen Schule, welche während der ganzen Zeit der Scholastik die leitende Rolle führte, so treffen wir dort auf Johannes de Sacrobosco[1]). Der Name kommt noch in mehrfachen Formen vor als Sacrobusto, Sacrobuschus oder englisch als John of Holywood, beziehungsweise Holybush. Als sein Geburtsort wird meistens Holywood (jetzt Halifax) in Yorkshire angenommen. Andere halten Holywood bei Dublin für die Heimath des Gelehrten, noch Andere lassen ihn in Nithsdale in Schottland geboren sein. Jedenfalls studirte Sacrobosco, wie wir mit zwar unrichtiger, aber häufiger alleiniger Benutzung des Heimathsnamens sagen wollen, in Oxford und lehrte später Astronomie und Mathematik in Paris. Dort starb er im Jahre 1256, wie aus seiner Grabschrift hervorgeht[2]). Die Geschichte der Astronomie[3]) nennt mit Fug und Recht sein Werk über die Weltkugel, De sphaera mundi, ein gutes Buch für eine schlechte Zeit und begründet dieses Urtheil mit dem Hinweise auf den Beifall, welchen volle drei Jahrhunderte dem ganz unselbständigen Werke, einem Auszuge aus dem Almagest und einigen arabischen Astronomien, spendeten, indem sie es dem Universitätsunterrichte zu Grunde legten und der Abfassung von umfangreichen Erläuterungen für würdig hielten. Eine nicht viel andere Rolle spielt Sacrobosco's Lehrbuch der Rechenkunst[4]),

---

[1]) Poggendorff, Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften I, 1196—1197. Wir citiren dieses oft benutzte vortreffliche Nachschlagewerk künftig kurzweg als Poggendorff. — *Nouvelle Biographie universelle* XXVI, 556. [2]) Vossius, *De scientiis mathematicis* (1650) pag. 179 giebt die ganze Grabschrift. Kästner, Geschichte der Mathematik (1796—1800) II, 310 giebt allerdings auffallender Weise eine ganz andere Grabschrift an, aber in dem Todesjahre 1256 stimmen beide überein. Diese Werke citiren wir künftig kurzweg als Vossius und als Kästner. [3]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie (1877) S. 210 Note 2. [4]) Der *Tractatus de arte numerandi* ist zuletzt unter diesem Titel von J. O. Halliwell in den *Rara Mathe-*

*tractatus de arte numerandi.* Es ist eine Sammlung von Regeln ohne den geringsten Beweis, ohne Zahlenbeispiel, ohne Erwähnung einer Quelle, aus welcher der Verfasser schöpfte. Aber in dieser Nüchternheit, in dieser Kürze eignete es sich vortrefflich dazu, den Grundriss zu einem die zahlreichen Lücken mündlich ergänzenden Unterrichte zu bilden, und wurde es Jahrhunderte lang in solcher Weise benutzt. Ob darum die eben bezeichneten Lücken wirklich ausgefüllt wurden? Mitunter geschah es, aber die grosse Menge der Lernenden wie nicht minder der Lehrenden begnügte sich doch wohl gerne mit dem Handwerk des Rechnens, ohne auf die Wissenschaftlichkeit des Algorithmus demonstratus Ansprüche zu erheben; was wir am Ende des vorigen Kapitels von der dauernden Einwirkung des Jordanus sagten, was wir in bestimmterer Weise von seinem Algorithmus demonstratus hätten sagen können, beschränkt sich zunächst ausdrücklich auf das Rechenhandwerk. Sacrobosco's Rechenbuch, über welches wir kurz berichten wollen, lässt das Wort Algorismus von einem Philosophen Algus abstammen. Es benutzt in bekannter Weise die Wörter *digitus* und *articulus.* Es erkennt Halbiren und Verdoppeln als besondere Rechnungsarten an. Man kann fragen, wesshalb diese beiden Operationen jetzt in der entgegengesetzten Reihenfolge auftreten, als die war, in welcher Jordanus (S. 64) sie lehrte? Sacrobosco selbst sowie ein gleich nachher zu erwähnender Commentator geben keinerlei Auskunft darüber, aber merkwürdig genug hat das alte in der Wissenschaft längst abhanden gekommene Verfahren sich praktisch erhalten, und aus ihm sind Schlüsse gezogen worden[1]). In reindeutschen Ortschaften Böhmens wird in der Volksschule die Multiplication $2n$ mal $k$ heute noch so gelehrt, dass $2n$ halbirt, $k$ verdoppelt und $2k$ alsdann $n$ mal unter einander geschrieben wird, worauf die Addition dieser Posten erfolgt. Ist $2n+1$ mal $k$ zu rechnen, so schreibt man $n$ mal $2k$, darunter $k$ und addirt. Das Beispiel 5 mal 36 sieht so aus:

$$\begin{array}{r} 72 \\ 72 \\ 36 \\ \hline 180 \end{array}$$

Hier tritt das Halbiren begrifflich vor dem Verdoppeln auf, und deshalb könnte es als Operation den Vorrang erhalten haben. Das

*matica* (1839) abgedruckt. Aeltere Drucke als *Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant* vielleicht veranstaltet durch Jod. Clichtoveus (Paris 1510) und als *Algorismus domini Joannis de Sacro Bosco* (Venedig 1523). Ueber die bezüglich der durch Clichtoveus veranstalteten Ausgabe obwaltenden Zweifel vergl. Eneström in der Bibliotheca Mathematica 1894 pag. 63—64.

[1]) Briefliche Mittheilungen von F. J. Studnička.



soeben geschilderte Verfahren hat sich auch bei russischen Bauern erhalten[1]). Sacrobosco's Rechenbuch lehrt ferner die Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln. Neu, und nunmehr für Jahrhunderte eingeführt, erscheint der Begriff der Progressio zwischen Division und Wurzelausziehung, so dass im Ganzen neun Rechnungsarten erscheinen: Numeratio, Additio, Subtractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Progressio, Extractio. Unter Progressio ist aber nicht etwa die Lehre von den Progressionen im Allgemeinen, oder auch nur von den arithmetischen Progressionen in ihrer Vollständigkeit verstanden, sondern die Summirung der natürlichen Zahlenreihe, der Reihe der graden Zahlen und der der ungraden Zahlen, also die Summen $1+2+3+\cdots+n$, $2+4+\cdots+2n$, $1+3+\cdots+(2n-1)$. Von Einzelheiten bemerken wir die Vorschrift, beim Anschreiben der Zahlen, welches von dem Stellungswerthe der neun Zeichen und von der Null unter dem Namen teca, oder circulus, oder cifra, oder figura nihili Gebrauch macht, je die dritte Stelle durch ein Pünktchen zu bezeichnen, damit man wisse, wie viele Tausender vorhanden sind[2]). Dann ist vor Allem zu beachten, dass nur ganze Zahlen berücksichtigt sind. Brüche werden nie genannt. Es scheint aber, dass man frühzeitig begann, die Lehre von dem Bruchrechnen von der vom Rechnen mit ganzen Zahlen abzutrennen und in besonderen Abhandlungen zu erörtern. Wurde doch im XIV. Jahrhundert der Algorithmus demonstratus selbst in der Basler Handschrift auseinandergerissen, so dass die zweite Abtheilung, das Bruchrechnen, der ersten, dem Rechnen mit ganzen Zahlen, vorangeht, durch eine kleine Abhandlung über Proportionen von ihr getrennt. Addition und Subtraction fangen nach Sacrobosco's Vorschriften rechts bei der niedersten Stelle an. Aber auch die Halbirung beginnt ebenda, was unserer Gewohnheit widerspricht und nur dadurch als thunlich sich erweist, dass alle Rechnungsarten überwärts erfolgen und fortwährende Veränderungen der entstehenden Zahlen als selbstverständlich erachtet werden. Aus dem gleichen Grunde kann die Verdoppelung und Multiplication ebenso wie die Division und Wurzelausziehung links bei der höchsten Stelle beginnen. Im Algorithmus demonstratus, wo Alles an Buchstaben erörtert wird, fehlt jede Vorschrift darüber. Sacrobosco giebt seine Regel bei Gelegenheit der Verdoppelung in den Versen[3])

[1]) Plakhovo in der *Mathesis* XVII, 86—87 (Gand 1897). [2]) *Item sciendum est quod super quamlibet figuram loco millenarii positam componenter possunt poni quidam punctus ad denotandum quod tot millenarios debet ultima figura representare quot fuerunt puncta pertransita.* [3]) *Rara Mathematica* pag. 11.

*Subtrahis aut addis a dextris vel mediabis;*
*A leva dupla, divide multiplicaque,*
*Extrahe radicem semper sub parte sinistra.*
Abziehen sollst Du und beifügen rechts, sowie auch halbiren;
Links verdopple und theile, und ebendort multiplicire;
Wurzelziehung erfolge stets von der Linken beginnend.

Genau die gleichen Zeilen finden sich[1]) in einem Rechenbuche in Versen, welches die Ueberschrift Carmen de algorismo führt. Soll man daraus die Folgerung ziehen, Sacrobosco sei auch der Verfasser dieser Dichtung gewesen, oder soll man umgekehrt annehmen, das von einem Anderen verfasste Gedicht sei schon bekannt und mehrfach in Gebrauch gewesen, als Sacrobosco sein Lehrbuch schrieb? Beide Schlüsse sind gezogen worden. Die an einen anderen Schriftsteller glauben, nennen als solchen den mit Sacrobosco etwa gleichzeitigen Alexander de Villa Dei oder de Villedieu, einen Minoritenmönch aus Dole, dem man allerdings ähnliche poetische Neigungen nachrühmt. Er schrieb eine Doctrinale puerorum (lateinische Grammatik) in Versen und brachte das ganze alte und neue Testament in 212 Verszeilen.

Wir haben (S. 88) einen der Commentare zu Sacrobosco's Rechenbuch besonders erwähnt. Der Verfasser ist Petrus Philomeni de Dacia[2]), und der Commentar ist am letzten Juli 1291 vollendet worden. Petrus von Dacien war, wie sein Name zu erkennen giebt, ein Däne und gehörte dem Dominikanerorden an, welcher schon im Mai 1228 so weit nach Norden vorgedrungen war, dass es eine Dominikanerprovinz Dacien gab. Nehmen wir dazu, dass gleichfalls am Anfange des XIII. Jahrhunderts schon eine dänische Fürstentochter, die unglückliche Ingeborg, als Gemahlin Philipp August's von Frankreich die Beziehungen zwischen beiden Ländern vermehren half, so erscheint es weniger auffallend, einen Schriftsteller dänischer Nation am Ende des Jahrhunderts in Paris zu finden. Ein Petrus von Dacien soll sogar, nach den Einen 1326, nach Anderen 1337, Rector der pariser Universität gewesen sein, doch dürfte dieser entweder Petrus Strangonis de Dacia oder Petrus dictus Winter de Dacia heissend von Petrus Philomeni unterschieden werden müssen. Eine Osterrechnung auf das Jahr 1300 kann aber von unserem Petrus herrühren[3]), und ihm dürfen wir sicher auch eine

[1]) *Rara Mathematica* pag. 74—75. [2]) Günther, Unterricht Mittela. S. 167 Note 2. — Suter, Math. Univ. S. 43. — Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius (ed. M. Curtze, Kopenhagen 1897). [3]) Vossius pag. 397. Anno MCCC Petrus de Dacia librum contexuit de calculo seu computo.



*Tabula magistri Petri Philomene de Dacia ad inveniendum propositionem cujusvis numeri*[1]) in einer Vaticanhandschrift zuweisen, in welcher sämmtliche Producte von 1 mal 1 bis zu 49 mal 49 in Zahlen des Sexagesimalsystems ausgedrückt sind. Der Commentar von Sacrobosco's Rechenbuch ist vorzüglich, und wer ihn zu benutzen verstand, musste sich eine für die damalige Zeit achtunggebietende Summe von Kenntnissen erwerben. Zu jeder einzelnen Regel sind lehrreiche Beispiele gegeben, ausserdem aber stossen wir auch auf theoretisch Interessantes. Wir heben nur die arithmetischen Progressionen hervor. Petrus von Dacien betrachtet solche mit beliebigen ganzzahligen Gliedern. Die Summe wird bei grader Gliederanzahl gefunden, indem die halbe Gliederzahl mit der Summe des ersten und des letzten Gliedes vervielfacht wird. Bei ungrader Gliederzahl vervielfacht man diese mit der halben Summe des ersten und des letzten Gliedes. Gliederzahl oder Summe des ersten und letzten Gliedes oder beides muss immer grade sein[2]). Wir erwähnen ferner, dass bei Erörterung von Quadrat- und Kubikzahlen das Wort *fluere*, fliessen, gebraucht wird[3]), um eine ununterbrochene Bewegung zu bezeichnen. Eine Linie bildet fliessend eine Fläche, eine Fläche fliessend einen Körper. Das ist die früheste bisher bekannte Anwendung dieses bildlichen Ausdruckes. Sacrobosco hat der Null den Namen *teca*, *circulus*, *cyfra* beigelegt. Petrus von Dacien berichtet[4]), *teca* sei ein rundes Eisen, mittels dessen man Dieben ein Brandmal auf die Stirne oder auf die Wange aufgedrückt habe. Sehr glaubwürdig erscheint diese Herleitung freilich nicht, da ausser bei Petrus von Dacien und bei anderen von ihm abhängigen Commentatoren des Sacrobosco ein Wort *teca* für *cautherium* (das ist Brenneisen) nirgend vorkommt, viel wahrscheinlicher ist teca entstellt von *theta* wegen der Aehnlichkeit zwischen $\Theta$ und 0.

Etwa 20 Jahre nach Sacrobosco's Tode dürften ein Rechenbuch und eine Geometrie von unbekanntem Verfasser entstanden sein, deren wesentlichster Vorzug darin besteht, dass es die ersten derartigen Schriften in französischer Sprache sind, welche sich erhalten haben[5]). In dem sehr kurzen Traité d'algorisme findet sich die eben besprochene Vorschrift, wann man rechts, wann man links mit dem Rechnen beginnen müsse, in die Worte gekleidet: *Se tu*

[1]) Eneström in der Biblioth. math. 1890 pag. 32. [2]) Petri Philomeni de Dacia Commentarius pag. 68. [3]) Ebenda pag. 72 lin. 8 und 11. [4]) Ebenda pag. 26. [5]) Ch. Henry, *Sur les deux plus anciens traités français d'Algorisme et de Géométrie* im *Bulletino Boncompagni* XV, 49—52. Dann folgt der Abdruck der Abhandlungen selbst und zwar *Traité d'algorisme* pag. 53—55 und *Traité de géométrie* pag. 55—70.

*assembles ou abas ou dimidies tu commenceras a destre se tu dobbles ou multeplies ou devises tu commenceras a senestre.* Wurzelausziehung nennt der Verfasser hier nicht, lehrt aber auffallenderweise bei Uebergehung der Quadratwurzel am Schlusse die Ausziehung der Kubikwurzel. Diese Lücke dürfte wie die übermässige Kürze des Ganzen die Frage anregen, ob von einem Ganzen gesprochen werden darf, ob die erhaltene Handschrift uns nicht etwa nur unzusammenhängende Bruchstücke aus einem verlorenen umfang- und inhaltsreicheren Ganzen bietet.

Einen weit vollständigeren Eindruck macht der Traité de géométrie. Die Geometrie handle, heisst es einleitungsmässig[1]), erstens von Messungen in der Ebene (le mesure des planetes), zweitens von Messungen der Höhe, der Tiefe und des Körperinhaltes (le mesure des hauteches et des profondeces et des crasses mesures), drittens von geometrischen und astronomischen Bruchtheilen (a trouer les minuces de gyometrie et dastronomie). Das gleichseitige Dreieck wird durch Zeichnung der Höhe (linel oder lunax) in zwei Hälften getheilt und dann Höhe und halbe Grundlinie vervielfacht; die Höhe findet man, indem $\frac{1}{7}$ der Grundlinie von dieser abgezogen wird[2]), eine Regel, welche seit dem Briefe Gerbert's an Adelbold (Bd. I, S. 816) bekannt war. Andere Dreiecke, deren Figuren uns dadurch eine kleine Ueberraschung bereiten, dass sie, ähnlich wie es in Aegypten (Bd. I, S. 55) Sitte war, die Spitze links, die Grundlinie in verticaler Lage rechts zeigen, sollen auch immer durch Vervielfachung der Höhe mit der halben Grundlinie gemessen werden. Die Rechnungen freilich stimmen mit den Zahlenangaben nur sehr dürftig überein. Beim Fünfeck[3]) ist in die Figur des nach aussen convexen Fünfecks die des Sternfünfecks mit den gleichen Eckpunkten eingezeichnet, was recht bemerkenswerth erscheint. Die Kreisperipherie (la circonference del compas) ist $3\frac{1}{7}$ mal der Durchmesser. Bei der Inhaltsberechnung ist wieder vielfach unrichtig gerechnet. Was der Verfasser orneure du cercle nennt, findet sich durch Vervielfachung des Durchmessers mit sich selbst und mit 22, worauf durch 7 getheilt wird; es sei das Vierfache des Kreisinhaltes. Das stimmt rechnungsmässig zur Kugeloberfläche und in der That hiess diese inauratura, woraus leicht orneure entstehen konnte. Die Grundbedeutung von inauratura ist die, dass ihre Grösse Antwort auf die

[1]) Ch. Henry, *Sur les deux plus anciens traités français d'Algorisme et de Géométrie* im *Bulletino Boncompagni* XV, 55. [2]) Ebenda pag. 56. [3]) Ebenda pag. 58.



Frage gab, wie viel Edelmetall man brauche, um eine Kugel zu vergolden[1]). Soll der Kreis vom Durchmesser 7 in ein Quadrat verwandelt werden[2]), so ist dessen Seite $6\frac{1}{5}$ d. h. also $\sqrt{38\frac{1}{2}} \sim 6\frac{1}{5}$, vielleicht erhalten mittels $\sqrt{38\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}\sqrt{3850} \sim \frac{62}{10} = 6\frac{1}{5}$. Der Verfasser wusste demnach mit Brüchen zu rechnen und setzte das Gleiche von seinen Lesern voraus, wodurch vielleicht Bestätigung findet, was wir (S. 89) über die Möglichkeit besonderer Vorschriften zum Bruchrechnen geäussert haben. Wir verweilen nicht bei dem Innenkreise eines Dreiecks, von welchem gleichfalls die Rede ist[3]), nicht bei der zweiten Abtheilung, d. h. bei den Körperinhalten, da es kaum möglich ist, dem offenbar vielfach irrigen Texte ein volles Verständniss abzugewinnen. Die Vergleichung desselben mit den Körpermessungen bei Heron von Alexandria dürfte wahrscheinlich eine lohnende Untersuchung sein. In der dritten Abtheilung[4]) handelt es sich ausschliesslich um Rechnungen und zwar um Multiplicationen, unter welchen sich die Quadraterhebungen der Zahlen 11 bis 20 hervorheben lassen. Nur $13^2 = 169$ und $14^2 = 196$ ist vermuthlich beim Abschreiben vermengt worden, so dass 13 mal 13 von dem Ergebniss 196 begleitet ist. Von einigem Interesse sprachlicher wie arithmetischer Natur ist das vielfache Vorkommen des Vigesimalsystems[5]). Die Zahl 60 ist freilich LX geschrieben, dann aber folgt $\overset{\text{XX}}{\text{IIII}} = 80$, $\overset{\text{XX}}{\text{VI}} = 120$, $\overset{\text{XX}}{\text{VII}} = 140$, $\overset{\text{XX}}{\text{XI}} = 220$, und wollte man über die Lesung zweifelhaft sein, so schliessen Angaben wie XVIII fois XVIII sont XVI vins et IIII jede Möglichkeit eines Irrthums aus. Von den Zahlzeichen des Algorismus ist nirgend Gebrauch gemacht.

Bleiben wir noch immer in Frankreich, so haben wir Vincent de Beauvais oder mit lateinischem Namen Vincentius Bellovacensis zu nennen. Noch im XII. Jahrhundert geboren starb er 1265. Er war Mitglied des Dominikanerordens. König Ludwig der Heilige entzog ihn dem Kloster, um ihn persönlich um sich zu haben, und für den Unterricht der königlichen Söhne verfasste der allseitig gelehrte Mönch ein encyklopädisches Werk in 10 ungeheuren Bänden. Eine der Abtheilungen, in welche das erschreckend grosse Werk zerfällt, heisst Speculum doctrinale[6]), und dessen 17. Buch

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XL, Supplementheft S. 141. Bemerkung von E. v. Wölfflin. [2]) Ch. Henry, *Sur les deux plus anciens traités français d'Algorisme et de Géométrie* im *Bulletino Boncompagni* XV, 59. [3]) *se tu fais 1 comas dedens le triangle si grant ke tu pues.* [4]) Sie beginnt ebenda pag. 64 Z. 3 v. u. [5]) Ebenda pag. 67. [6]) Eine Druckausgabe ist von 1473, eine spätere von 1624. Wir bedienten uns der älteren Ausgabe.

ist der Mathematik gewidmet[1]). Man sollte zum voraus der Meinung sein, der Ordensgenosse und fast Zeitgenosse eines Jordanus müsse tief in die Mathematik eingedrungen sein, müsse dem entsprechend in seinem grossartig angelegten Sammelwerke voll in die Fusstapfen jenes Gelehrten eingetreten sein. Man würde mit dieser Meinung sich täuschen. Das mathematische Buch entspricht vollständig dem Urtheile, welches ein gründlicher Kenner[2]) des XIII. Jahrhunderts über das ganze Werk ausgesprochen hat: es habe entstehen können, weil das Wissen der Zeit encyklopädisch war, umfassend und oberflächlich. Liber XVII De mathematica et eius speciebus beginnt mit dialektischen Haarspaltereien, wie z. B. dass die Arithmetik an der Spitze der Mathematik zu stehen habe, weil ohne Zahl keine Figur gemessen werden könne, während die Zahlen 3, 4 bleiben, auch wenn kein Dreieck oder Viereck vorhanden sei. Wer mit der Arithmetik des Boethius bekannt ist, erinnert sich augenblicklich dieser Sätze[3]). Andere Stellen weisen auf Isidorus hin, wie z. B. der Satz (Bd. I, S. 774): Nimm die Zahl aus allen Dingen weg, und Alles geht zu Grunde. Boethius und Isidorus werden auch dem entsprechend von Vincentius häufig als seine Gewährsmänner genannt. Das 9. Kapitel ist dem Computus[4]) und dem Algorismus gewidmet. Im weiteren Sinne des Wortes sei Computus jegliche Rechnung, genauer genommen nenne man so die Wissenschaft von der Zeit gemäss der Bewegungen von Sonne und Mond[5]). Damit ist freilich die Aufgabe des Computus erst gestellt, noch nicht gelöst, aber Vincentius begnügt sich damit, und seine Leser müssen die gleiche Enthaltsamkeit üben. Im gleichen Kapitel geht Vincentius zu der scientia algorismi über. Er erklärt Fingerzahlen, Gelenkzahlen, zusammengesetzte Zahlen. Eine Gelenkzahl sei irgend ein Zehnfaches[6]). Zum Anschreiben der Zahlen dienen neun Zahlzeichen. Diese sehen so aus, und nun folgt in der Druckausgabe ein leerer Raum! Man war offenbar in der Zeit der Incunabeln nicht im Stande, die Zeichen der dem Drucke zu Grunde liegenden Handschrift nachzubilden. Ein Ringelchen konnte man herstellen, und so fährt der Druck fort: O que cifra apellatur nihilque representat. Dann werden die sechs Rechnungsarten: Addition,

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* beruft sich fortwährend auf das 16. Buch. Dieser Gegensatz beruht darauf, dass in der älteren Ausgabe als I. Buch gezählt ist, was in den späteren Drucken *Prologus* heisst. [2]) Kaufmann, Geschichte der deutschen Universitäten I, 67. [3]) Boethius (ed. Friedlein) pag. 10—11. [4]) In der Druckausgabe von 1473 heisst es fortwährend *compotus* neben dem Zeitworte *computare*. [5]) *Proprie vero compotus dicitur scientia temporum distinctiva secundum motum solis et lunae tantum.* [6]) *Articulus est numerus decuplus ad aliquem.*



Subtraction, Verdoppelung, Halbirung, Multiplication, Division genannt, für welche geeignete Regeln im Algorismus gegeben seien; diese und viele andere Eintheilungen und Verhältnisse der Zahlen, von welchen bei Isidorus und Boethius die Rede sei, übergehe der Verfasser gegenwärtig der Kürze halber[1]). Den so stillschweigend auf einen zukünftigen Augenblick ausgestellten Wechsel hat Vincentius freilich unseres Wissens nie eingelöst. Die Musik folgt nun und auf diese mit Kapitel 36 die Geometrie. Sie besteht aus drei Abtheilungen, aus Ebenenmessung, Höhenmessung, Weltmessung. Eine entfernte Verwandtschaft mit der Eintheilung der französisch geschriebenen Geometrie wird man hier vielleicht erkennen dürfen, aber inhaltlich geht Vincentius nicht entfernt so weit wie jene. Einige Definitionen, eine Reihe von Grundsätzen, das ist nahezu die ganze Weisheit, und mit Rücksicht auf die Grundsätze bemerkt er in einer Glosse[2]) des 40. Kapitels — wenn anders diese Glosse nicht selbst abgeschrieben ist — Euklid habe viel Grundsätze übergangen. Im 41. Kapitel sind die beiden Grundrichtungen der römischen Feldmessung, cardo und decumanus (Bd. I, S. 498) erörtert, dann kommt die Astronomie zur Behandlung. Wir fürchten nicht es als Untreue gegen unsere Vermeidung dessen, was in die Geschichte der Astronomie gehört, beurtheilt zu sehen, wenn wir beiläufig erwähnen, dass das 46. Kapitel einen ganz ähnlichen Unterschied zwischen Astronomie und Astrologie macht, wie man es heute gewöhnt ist.

Auf französischem Boden, wahrscheinlich in Montpellier, wirkte 1271 Robertus Anglicus[3]) als Professor. Ob ihn der Name Anglicus als Engländer von Geburt bezeichnen soll, ob er nur einer früher englischen schon längere Zeit in Südfrankreich ansässigen Familie angehörte, lässt sich nicht mit Sicherheit bestimmen, wenn auch Manches für die letztere Annahme spricht. Jedenfalls hat Robertus Anglicus in Montepessulano (d. h. in Montpellier) eine Abhandlung über den Quadranten und dessen astronomische sowie feldmesserische Benutzung verfasst, welche in zahlreichen Abschriften aus zum Theil verhältnissmässig später Zeit sich an weit von einander entfernten Orten erhalten hat. Die Abhandlung ist

[1]) *De quibus singulis proprie regule date sunt in algorismo. quas et plures alias numeri divisiones et proportiones de quibus in ysidoro et boetio ad presens brevitatis causa praetermitto.* [2]) *Glosa. Nota quod multas communes scientias preter misit Euclides.* [3]) *Le traité du Quadrant de Maitre Robert Anglès* (Montpellier, XIII. Siècle). texte latin et ancienne traduction grecque publiés par M. Paul Tannery (Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque nationale etc. T. XXXV, 2e Partie pag. 560—640. Paris 1897).

sogar in's Griechische übersetzt worden, und eine Abschrift dieser Uebersetzung stammt etwa aus dem Jahre 1500. Der Quadrant ist im Wesentlichen die gleiche Vorrichtung, deren sich Leonardo von Pisa (S. 38) bediente. Der Kreisrand ist aber nicht in 16 Theile, sondern in 90 Grade eingetheilt. Das vorkommende Wort umbra lässt auf unmittelbare oder mittelbare Benutzung arabischer Quellen schliessen.

Der Dominikanerorden hat im XIII. Jahrhunderte noch manches hochbedeutenden Schriftstellers sich zu rühmen. Albertus Magnus (1193—1280), Thomas von Aquino (1225—1274) haben ihm angehört. Die Geschichte der beschreibenden Naturwissenschaften sowie der Physik müssen bei ihnen verweilen, der Mathematiker nennt sie mit Bedauern seiner Wissenschaft fremd.

Etwas mehr, wenn auch nicht sonderlich Günstiges haben wir von dem berühmten Franciskaner Roger Baco (1214—1294) zu berichten. Die Physik, die Chemie nennen seinen Namen unter den bedeutendsten. Er soll auch in einer handschriftlich in Oxford noch vorhandenen Schrift eine Kalenderreform[1]) vorgeschlagen und damit den Anstoss zu einer Bewegung gegeben haben, welche erst nach Jahrhunderten zur Ruhe kam. Aber nun die Mathematik! Freilich wenn man ihn hört liegt dort erst recht seine Stärke. Ich habe, sagt er im 20. Kapitel seines *Opus tertium*[2]), die Gewissheit, innerhalb einer Woche Jeden, der Aufmerksamkeit und Vertrauen besitzt, mit der ganzen Gewalt der Geometrie bekannt zu machen, und zwar mehr als die Mathematiker in zehn Jahren lernen. Und ebenso verhält es sich mit den Zahlen in einer anderen Woche. Denn sehr selten finden sich überhaupt Lehrer der Mathematik und diese haben eine sehr schlechte Unterweisungsart und lehren unendlich vieles Ueberflüssige. Desshalb verachtet man auch fast allgemein die Mathematik. Diesen theils stolzen, theils hämischen Worten dürfen wir Eines entnehmen, dass es damals in der öffentlichen Meinung auch gelehrter Männer schlecht um die Mathematik und ihren Unterricht stand. Bestätigung giebt noch eine andere Stelle[3]): den Knaben würden mit Ruthenschlägen die vier ersten Sätze der euklidischen Elemente beigebracht und schon der fünfte Satz heisse ihnen *Elefuga*, das sei Flucht der Unglücklichen. Wenn es wirklich so aussah, wenn wenigstens dort, wo Baco Gelegenheit hatte, Lehrer und Lernende zu beobachten, der Satz von der Gleichheit der Winkel an

[1]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 328—329. — Cantor, Zeit und Zeitrechnung in den Neuen Heidelberger Jahrbüchern II, 202. [2]) Fr. Rogeri Bacon *Opera quaedam hactenus inedita* (edidit J. S. Brewer 1859) I, 66. [3]) Ebenda pag. 21.



der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks so furchtbar erschien, dann begreift man Baco's Hohn. Ob seine Ruhmredigkeit eben so festen Boden unter sich hatte, darüber müssen wir seine Schriften fragen, und die Antwort, welche sie uns geben, klingt nicht sehr befriedigend. Im 40. Kapitel des Opus tertium[1]) ergeht sich Baco in stereometrischen Faseleien, welche ihm kein glänzendes Zeugniss ausstellen. Es handelt sich um die lückenlose Ausfüllung des Raumes. Der Raum ist lückenlos erfüllt, wenn 8 Würfel an einer Ecke zusammenstossen. Jede Würfelecke wird durch 3 ebene Winkel im Gesammtbetrag von 3 Rechten gebildet, also treten bei dem erwähnten Eckpunkte 8 mal 3 Rechte oder 24 Rechte zusammen, und nun bildet Baco sich ein, es trete stets eine lückenlose Raumerfüllung ein, wo die Summe sämmtlicher ebenen Winkel bei dem Zusammensetzungspunkte 24 Rechte betrage. Im Tetraeder sind an jeder Ecke 3 Winkel von je $60^0$, zusammen 2 Rechte, also erfüllen 12 an einer Ecke zusammenstossende Tetraeder den Raum. Im Oktaeder betragen die 4 Winkel von je $60^0$ an jeder Ecke $\frac{8}{3}$ Rechte, also erfüllen 9 an einer Ecke zusammenstossende Oktaeder den Raum. Im 39. Kapitel des Opus tertium[2]) hatte Baco vorher über stetige Raumgrössen gesprochen und die Unmöglichkeit betont, solche aus einzelnen Punktelementen herzustellen. Einen schlagenden Beweis dafür habe er erfunden. Wäre die Ebene durch solche Punkte gebildet, so würde (Figur 19) die Diagonale eines Quadrates der Seite desselben gleich sein, weil auf beiden gleich viele Punkte liegen, und das sei geometrisch unmöglich. Hierin liegt wenigstens keine mathematische Unrichtigkeit. Ein etwas höheres mathematisches Wissen verrathen Baco's optische Leistungen[3]). So, wenn er die Lage des Brennpunktes am Hohlspiegel bestimmt, wenn er von der Anfertigung parabolischer Spiegel redet, wenn er von der Perspective handelt.

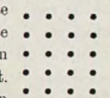


Fig. 19.

Die Perspective, dem Abendlande durch Uebersetzungen der Optik des Ibn Alhaitam (Bd. I, S. 744) bekannt geworden, bildet nunmehr einen regelmässig wiederkehrenden Gegenstand schriftstellerischer Thätigkeit, den wir, ohne ihm eingehende Würdigung angedeihen zu

[1]) Fr. Rogeri Bacon *Opera quaedam hactenus inedita* (edidit J. S. Brewer 1859) I, 137. Auf diese Stelle hat K. Lasswitz, Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton I, 203 aufmerksam gemacht. [2]) Ebenda pag. 132. Vergl. Lasswitz l. c. I, 194 aber auch I, 149, wo der Beweis Baco's bereits bei den arabischen Mutakallimun nachgewiesen ist. [3]) Heller, Geschichte der Physik (1882) I, 201—202.

lassen, immerhin kurz erwähnen dürfen. So schrieb über Perspective der Ordensgenosse Baco's Johannes Peckham[1]), lateinisch Pisanus aus Sussex (um 1240—1292), Bischof von Canterbury. Ein Schüler Baco's war Johannes von London[2]). Baco führte ihn dem Franciskanerorden zu und nahm ihn mit sich nach Paris, wo er als Philosoph sich auszeichnete. Später vermittelte Johannes als Bote Baco's dessen Briefwechsel mit dem Papste, der ihn in Rom behalten zu haben scheint. Ein Brief des Johannes von London über astronomische Fragen hat sich in der Pariser Bibliothek erhalten. Johannes von London ist es auch, welchen Baco im 11. Kapitel seines Opus tertium als einen der beiden vollkommenen Mathematiker seiner Zeit bezeichnet[3]). Der andere ist ihm Petrus de Mahar-curia aus der Picardie, d. h. also Pierre de Maricourt, der in der Geschichte des Magnetismus eine hervorragende Rolle gespielt hat, gut auch noch Magister Campanus von Novaria (sic). Ueber Campanus reden wir noch in diesem Kapitel. Peckham's Perspektive wurde in den folgenden Jahrhunderten gradezu akademischer Leitfaden für die betreffende Universitätsvorlesung. Zu Baco's Zeiten wurde in Paris noch nicht über Perspektive gelesen, dagegen zweimal in Oxford[4]).

Die Geschichte der Perspective gestattet uns auch Witelo[5]) zu nennen, den Sohn eines Thüringers und einer Polin, der auf polnischem Boden geboren in einer Prämonstratenserabtei im Hennegau unweit von Valenciennes lebte. Durch Verketzerung nahm sein in Thüringen im XIII. Jahrhundert häufig vorkommender Name die lateinische Form Vitellio an, welche den Druckausgaben seiner Perspective vorgesetzt ist. Gewidmet ist das Werk dem Bruder Wilhelm von Moerbecke, der uns gleich weiter beschäftigen wird. Von dem Inhalte des Werkes, dessen erstes Buch übrigens eine ganz nette Geometrie sein soll[6]), haben wir hier nicht weiter zu reden, als dass wir die Schriftsteller nennen, welche Witelo erwähnt[7]). Er beruft sich ausser auf Ibn Alhaitam auf lauter griechische Mathematiker: Euklid, Ptolemäus, Apollonius, Theodosius, Menelaus, Theon,

[1]) Die Lebenszeit geben wir nach Poggendorff II, 385. Ueber Peckham's Perspective vergl. Kästner II, 264—274. [2]) Baco, *Opera inedita* (ed. Brewer) I, Biographische Einleitung pag. XC Note 1. Fontès in den Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-lettres de Toulouse. Année 1897 und ebenda 1898. [3]) Baco, *Opera inedita* (ed. Brewer) I, 34—35. [4]) Ebenda pag. 37. [5]) Ueber Name und Persönlichkeit vergl. Max. Curtze in *Bullet. Boncompagni* IV, 49 und 78. Zebrawski ebenda XII, 315 und Curtze's letzte Erwiderung in Grunert's Archiv LXIV, 432. [6]) Curtze brieflich. [7]) Poudra, *Histoire de la perspective* (1864) pag. 34.



Pappus, Proklus. Es möchte sich lohnen, eine Untersuchung darüber anzustellen, ob Witelo seinem arabischen Vorgänger auch in diesen Namensnennungen einfach folgt, oder ob er selbst jene Schriftsteller gelesen, und wenn er sie gelesen haben sollte, ob in der griechischen Ursprache oder in einer lateinischen Uebersetzung, welche dann vermuthlich den Umweg einer vorhergegangenen arabischen Uebersetzung als Text benutzte.

Die griechische Sprache muss man der Zeit, von welcher wir reden, keineswegs für unzugänglich halten. Baco sagt im 6. Kapitel seines Compendium studii philosophiae[1]): „Das Griechische hat sehr bedeutende Uebereinstimmungen mit dem Lateinischen, und es giebt Viele in England und Frankreich, welche hinlängliches Wissen hierin besitzen. Auch wäre es nicht zu viel, um solchen Nutzens wegen nach Italien zu gehen, wo Geistlichkeit und Volk an vielen Orten die reinen Griechen sind.“ Die Sprache war also im Besitze der Gelehrten des XIII. Jahrhunderts, nur an den Werken, welche man hätte lesen können, fehlte es meistens. Solche waren noch in Italien aufzufinden, sofern man es nicht wagte, bis nach dem byzantinischen Reiche den Spuren zu folgen. Unter den Männern, welche vielleicht in Griechenland selbst, vielleicht in Italien griechische Mathematiker aufzustöbern wussten, nennen wir den Dominikaner Wilhelm von Moerbecke[2]). In Ostflandern in der Nähe des Klosters, dem Witelo angehörte, geboren, machte er Reisen wahrscheinlich auch in Griechenland. Im Jahre 1268 war er bei Papst Clemens IV. in Viterbo, und dort übte er seine Uebersetzungskunst aus. Seit 1278 Erzbischof von Korinth hielt er sich 1280 und 1281 persönlich an dem Sitze des Erzbisthums auf. Sein Tod dürfte nicht lange nach 1281 fallen. Unter den zahlreichen, durch Wilhelm von Moerbecke, wie man sagt, auf Anheissen des Thomas von Aquino übersetzten Schriften nennen wir nur zwei: Die Katoptrik Herons von Alexandria[3]), welche er allerdings für ein Werk des Ptolemäus hielt, und die Schriften des Archimed, insbesondere dessen Abhandlung über auf dem Wasser schwimmende Gegenstände[4]), deren griechische Urschrift seit jener Zeit spurlos zu Grunde gegangen ist.

Aehnliche Neigung und Fähigkeit, wie Wilhelm von Moerbecke sie besass, ausländische Mathematik dem Abendlande zugänglich zu machen, können wir noch anderen Persönlichkeiten nachrühmen.

[1]) Baco, *Opera inedita* (ed. Brewer) I, 434. [2]) Allgemeine deutsche Biographie XXIV, 215. [3]) Val. Rose, *Anecdota Graeca et Graecolatina.* Heft II, (1870) S. 293—294. [4]) Val. Rose in der Deutschen Literaturzeitung 1884, S. 210. — Heiberg, Neue Studien zu Archimedes in Zeitschr. Math. Phys. XXXIV (1889), Supplementheft.

Ein Engländer Atelhart von Bath (Bd. I, S. 851) hatte mit Reisen in den Orient am Anfange des XII. Jahrhunderts den Reigen eröffnet. Ihm wollte um die Wende des XII. zum XIII. Jahrhundert Daniel von Morley[1]) folgen, der noch 1180 in Oxford studirte, dann nach Paris sich begab, um von dort nach Arabien aufzubrechen. Als er aber in Erfahrung brachte, Toledo sei der Sitz einer mathematischen Schule, wandte er seine Reise dorthin und kehrte mit reichem Wissen in die Heimath zurück, hier als Lehrer sein Leben beschliessend. Johannes von Basyngstoke[2]) studirte am Anfange des XIII. Jahrhunderts gleichfalls in Oxford. Auf seinen Reisen kam er um 1240 nach Athen, wo er geraume Zeit verweilte und den Unterricht der gelehrten Tochter des dortigen Erzbischofs genoss. Von ihr erlernte er das Griechische. Nach England zurückgekehrt übersetzte er Verschiedenes aus dem Griechischen. Er starb 1252. Der Chronist Mathaeus von Paris erzählt in seiner Geschichte Englands zu dem Jahre 1252 von diesem allgemeine Betrübniss erzeugenden Todesfall und bemerkt dabei, der Verstorbene habe aus Athen die Kenntniss der griechischen Zahlzeichen mitgebracht, welche zugleich auch Zeichen für Buchstaben sind[3]). Man wird nicht irre gehen, hierin die gewöhnliche griechische Benutzung ihrer sämmtlichen Buchstaben mit Zahlenwerth[4]) zu erkennen. In Italien hat jedenfalls im XIII. Jahrhundert Guglielmo de Lunis[5]) eine Algebra aus dem Arabischen in das Lateinische übersetzt.

Wesentlich ausführlicher als mit diesen Uebersetzern müssen wir mit Johannes Campanus von Novarra uns beschäftigen. Bestimmt das ihm von Roger Baco ertheilte Lob (S. 98) schon seine Lebenszeit, so ist eine weitere Bestätigung dadurch gegeben, dass Campanus Kaplan des Papstes Urban IV. war[6]), welcher 1261—1281

[1]) Suter, Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters S. 21. Wir citiren die sehr gehaltvolle Schrift künftig als Suter, Math. Univ. [2]) Ebenda S. 33—34. [3]) *per quas figuras etiam literae representantur.* [4]) Auch der bei Math. Paris. sich noch anschliessende Satz: *De quibus figuris hoc maxime admirandum quod unica figura quilibet numerus representatur quod non est in Latino vel in Algorismo* stimmt ganz gut mit dieser gewöhnlichen Erklärung, der gegenüber eine abweichende Meinung (Zeitschr. Math. Phys. XXX, Hist.-liter. Abthlg. S. 126) irrig erscheint. [5]) Libri II, 45. H. Gino Loria hat die Algebra im Codex 216 der Florentiner Nationalbibliothek neuerdings untersucht und sich überzeugt, dass sie in lateinischer und nicht, wie Libri behauptet, in italienischer Sprache geschrieben ist. Andererseits ist freilich Libri's Behauptung gestützt auf die Aussage Canacci's, der dem XIV. Jahrhunderte, und Ghaligai's, der dem Anfange des XVI. Jahrhunderts angehörte, sodass man fragen möchte, ob es nicht zwei Bearbeitungen gab, eine lateinische und eine italienische? [6]) Tiraboschi, *Storia della letteratura italiana* IV, 154—160.



regierte. Später scheint er Kanonikus in Paris gewesen zu sein, und daher stammt vermuthlich die in älteren Werken vertretene irrige Ansicht[1]), als habe es zwei Schriftsteller gegeben, welche beide den Namen Campanus führten. Verschiedene Schriften werden als von Campanus herrührend genannt. Er beschäftigte sich mit der Mangelhaftigkeit der Kirchenrechnung[2]). Ferner geht auf seinen Namen eine Abhandlung über die Quadratur des Kreises, welche aber von Gelehrten[3]), denen eine Druckausgabe aus dem Jahre 1503 vorlag, als eine so schwache Leistung bezeichnet wird, dass man Bedenken tragen müsse, sie Campanus zuzuschreiben. Andrerseits nennt Albert von Sachsen[4]) nur 100 Jahre nach Campanus ausdrücklich diesen als den Verfasser, und so muss doch einen Augenblick dabei verweilt werden. Eine Linie, welche $3\frac{1}{7}$ mal die Länge des Durchmessers habe, heisst es, sei gleich der Kreisperipherie. Ebendieselbe ist der Umfang eines Quadrates, dessen Seite somit der siebente Theil von $5\frac{1}{2}$ Durchmessern ist, und dieses Quadrat wird als das gesuchte bezeichnet. Es wäre immerhin denkbar, Campanus habe bei dieser Darstellung nicht an Flächengleichheit gedacht, das Wort Quadratura circuli bedeute ihm vielmehr, allerdings abweichend von dem Sinne des Wortes bei Franco von Lüttich, nur das Zusammenbiegen der Kreisperipherie zu einem umfanggleichen Quadrate. Das hervorragendste Verdienst des Campanus ist jedenfalls die von ihm veranstaltete Ausgabe der euklidischen Elemente mit Einschluss der beiden Bücher, welche fälschlich als 14. und 15. Buch der Elemente benannt werden (Bd. I, S. 342). Wir haben die wichtige Frage nach den lateinischen Euklidübersetzungen, deren das Mittelalter sich bediente (S. 74), im Vorübergehen gestreift. Auch gegenwärtig wagen wir nicht, sie endgültig zu beantworten, da sie zu den Fragen gehört, welche noch heftigem Widerstreit der Meinungen begegnen[5]). Vielleicht liegt die Sache so: lateinische Uebersetzungen des griechischen Euklidtextes gab es sehr frühzeitig. Ein Fragment einer solchen hat sich erhalten (Bd. I, S. 526), über eine durch Boethius

[1]) Vossius pag. 178 und 449. [2]) Neue Heidelberger Jahrbücher II, 201. [3]) Chasles, *Aperçu hist.* 515 (deutsch 602). [4]) Vergl. Suter in der Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Hist.-liter. Abthlg. S. 90 und 95. [5]) Als Vertreter der verschiedenen Ansichten vergl. H. Weissenborn in der Zeitschr. Math. Phys. XXV, Supplementheft S. 143—166 und dessen Monographie: Die Uebersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti (1882). Max Curtze in der Philologischen Rundschau (1881) I, S. 943—950 und in dem Jahresbericht über die Fortschritte der classischen Alterthumswissenschaft XL (1884 III) S. 19—22. Heiberg in der Zeitschr. Math. Phys. XXXV, Hist.-liter. Abthlg. S. 48—58 und 81—86.

angefertigte Euklidübersetzung wird jedenfalls ausdrücklich berichtet (Bd. I, S. 535), um die hier müssige Frage, ob sie sich erhalten hat, zu übergehen. Auch aus dem Arabischen stammende lateinische Euklidübersetzungen hat es unzweifelhaft sehr früh gegeben. Eine Münchner Handschrift aus dem XI. Jahrhunderte, also vor Atelhart von Bath entstanden, kann als Beweis dienen, da in ihr Spuren arabischer Zwischenarbeit neben solchen des griechischen Urtextes nachgewiesen worden sind. Vielleicht schon damals haben zwei wesentliche geschichtliche Irrthümer sich eingeschlichen. Der eine, durch den lateinischen Geschichtsschreiber Valerius Maximus veranlasst (Bd. I, S. 247), verwechselt den Mathematiker Euklid mit dem „sokratischen Philosophen“, um die Redeweise einer pariser Handschrift zu gebrauchen, d. h. mit Euklid von Megara. Der andere gleichfalls vermuthlich ältere Irrthum (Bd. I, S. 542) hält Euklid nur für den Verfasser der Definitionen, der Axiome, der Lehrsätze und nimmt für die Beweise einen anderen Urheber an: Theon von Alexandria. Als nun Atelhart von Bath seine Euklidübersetzung anfertigte (Bd. I, S. 670), dürfte ihm ausser einem arabischen Texte auch schon eine lateinische Bearbeitung, ganz oder in Bruchstücken, zur Hand gewesen sein, eine Annahme, welche durch einen Vers[1]) eines englischen Dichters unbekannten Zeitalters unterstützt wird. Jener Dichter erzählt nämlich, die Geometrie sei durch Euklid in Aegypten erlernt worden und

Thys craft com ynto England, as y ghow say,
Yn tyme of good kyng Adelstones day.

Die Einführung in England rückt dadurch in die fast sagenmässige Zeit des beginnenden X. Jahrhunderts hinauf. Hat aber Atelhart auf einen Vorgänger sich stützen dürfen, so wird das Gleiche für Campanus wahr sein, und die grosse Uebereinstimmung des Textes der Lehrsätze bei Atelhart und bei Campanus legt die Vermuthung nahe, es sei die gleiche lateinische Vorarbeit gewesen, deren beide sich bedienten. Zwar könnte diese Uebereinstimmung ungezwungen dahin gedeutet werden, Campanus habe den Atelhart'schen Euklid vor sich gehabt, wie man wahrscheinlich zu machen wusste, dass es der Atelhart'sche Euklid war, dessen Jordanus Nemorarius sich bediente[2]), doch lässt sich diese zunächst sich bietende Erklärung kaum aufrecht halten. Die Beweisführungen von Atelhart und Campanus unterscheiden sich nämlich mehr von einander, als man mit einer Benutzung der ersteren durch den letzteren in Einklang bringen

[1]) M. S. Bib. Reg. Mus. Brit. 17. A. 1. f. 2ᵇ—3 abgedruckt in Halliwell, *Rara Mathematica* pag. 56 Note. [2]) Jordanus, *Trianguli* S. XII der Curtzeschen Einleitung.



kann. Erstens ist ein Unterschied der Anordnung vorhanden: Atelhart's Bearbeitung lässt regelmässig die Beweise den Lehrsätzen, zu welchen sie gehören, vorausgehen, Campanus hält die richtige Reihenfolge ein. Zweitens, und dieses dürfte noch schwerer ins Gewicht fallen, sind Atelhart's Beweise knapp und gedrungen, die des Campanus ausführlich und deutlicher. Nunmehr sind wir aber erst bei dem schwierigsten Theile der ganzen Frage angelangt: Sind die so verschiedenen Beweise Uebersetzungen aus arabischen Euklidausgaben, welche bereits die gleichen Verschiedenheiten aufwiesen, oder gehören die zwei Fassungen wenigstens bis zu einem gewissen Grade den beiden Uebersetzern an? Sind Zusätze, welche da und dort sich finden, gleichfalls fremden Ursprungs? Ein bei Atelhart wie bei Campanus vorhandener Nachtrag zu den Axiomen, in welchem mit den gleichen Worten, welche als Glosse bei Vincent von Beauvais vorkommen (S. 95), Euklid vorgeworfen wird, er habe nicht alle Grundsätze namhaft gemacht, wird bei dem Versuche, auch auf diese Fragen Antwort zu ertheilen, nicht unbeachtet bleiben dürfen. Wir wagen es nicht anders als mit der Bezeichnung ganz persönlichen Dafürhaltens unsere Ansicht dahin auszusprechen, dass wir im arabischen Grundtexte die Quelle jener Zusätze vermuthen, ebenso wie die Namen *elmuain* und *elmuharifa*, deren Atelhart, deren auch Campanus sich bedient, um den Rhombus und das unregelmässige Viereck zu bezeichnen, ganz gewiss arabisch sind.

Fällt damit jeder Anspruch des Campanus, den Platz in der Geschichte der Mathematik, den er Jahrhunderte lang behauptet hat, auch fernerhin zu behaupten? Wir glauben nicht. Die Schilderung der einzelnen Persönlichkeiten des XIII. Jahrhunderts, welche uns in diesem Abschnitte beschäftigte, hat den niederen Stand damaligen geometrischen Wissens dadurch genügend gekennzeichnet, dass Geometrisches von so Wenigen zu erzählen war. Und Campanus hat sich doch die Aufgabe gestellt, den Meister der Geometrie seinen Zeitgenossen näher zu bringen. Er hat diese Aufgabe, wenn nicht für die Zeitgenossen, jedenfalls für spätere Jahrhunderte erfüllt und damit ein grosses Verdienst sich erworben. Einige Stellen in der Euklidausgabe des Campanus haben durch den Einfluss, welchen sie auf spätere Zeiten zu üben vermochten, geschichtliche Bedeutung, und wir erwähnen sie ihrer Reihenfolge nach ohne weitere Berücksichtigung des eigentlichen Ursprunges dieser Stellen.

Der euklidische Satz I, 32 misst die Summe der Dreieckswinkel. Im Anschlusse daran lehrt Campanus die Winkelsumme des Sternfünfecks kennen (Figur 20). Im Dreiecke $bhk$ sagt er, sei $\sphericalangle fba = h + k$ als Aussenwinkel. Ebenso zeige das Dreieck $agi$, dass

$\sphericalangle fab = g + i$. Endlich im Dreiecke $abf$ ist $\sphericalangle fba + fab + f = h + k + g + i + f = 2R$.

Der Satz III, 16 sagt aus, der Winkel zwischen Kreisbogen und Berührungslinie sei kleiner als irgend ein gradliniger spitzer Winkel. Das ist der Contingenzwinkel, wie Jordanus (S. 77) ihn nannte. Der Satz X, 1 behauptet, dass von zwei Grössen die grössere durch fortgesetztes Wegnehmen von mehr als der Hälfte schliesslich kleiner werde als die kleinere. Campanus stellt die beiden Behauptungen in Gegensatz zu einander und findet die Lösung des Gegensatzes darin, dass der Satz X, 1 nur von Grössen gleicher Art Geltung habe, womit zugleich ausgesprochen ist, der Contingenzwinkel sei nicht gleicher Art mit einem gradlinigen Winkel. Ausser dieser gewiss richtigen Bemerkung folgert aber Campanus noch weiter das Unzutreffende eines Satzes, der, seit Bryson ihn gemäss des aristotelischen Berichtes (Bd. I, S. 190) bei seiner Kreisquadratur anwandte, als unumstösslich wahr galt, und den, was das Auffallendste ist, Campanus selbst am Anfange seiner Euklidausgabe mit den Worten ausspricht: *quanta est aliqua quantitas ad quamlibet aliam eiusdem generis, tantam esse quamlibet tertiam ad aliquam quartam eiusdem generis in quantitatibus continuis*, wo das Schwergewicht auf die Worte in quantitatibus continuis fällt. Bei der stetigen Grösse muss ein Viertes sich finden lassen, zu welchem ein Drittes in dem Verhältnisse steht, wie ein Erstes zu einem Zweiten. Das ist aber nur dem Ausdrucke, nicht dem Sinne nach verschieden von dem Satze, dass beim stetigen Uebergange von einem Kleineren zu einem Grösseren unbedingt ein Zwischenzustand eintreten müsse, der irgend einem zwischen dem Kleineren und dem Grösseren Liegenden genau gleich sei, und dieses Satzes Unwahrheit behauptet Campanus an dieser zweiten Stelle der Euklidausgabe (Fig. 21). Der Winkel, welchen der Kreis mit dem Durchmesser $ac$ bilde, sei grösser als der Winkel $dac$, kleiner als $fac$, und doch finde sich kein ihm gleicher Winkel, wenn der Schenkel $ad$ um den Drehungspunkt $a$ gegen die Lage $af$ hinbewegt werde.

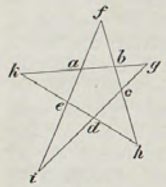


Fig. 20.

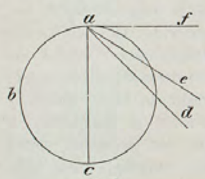


Fig. 21.

Am Schlusse des IV. Buches lehrt Campanus die Dreitheilung



des Winkels[1]). Es ist genau das gleiche Verfahren, welches wir (S. 81) als 20. Satz im 4. Buche De triangulis kennen gelernt haben, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Buchstaben an den Figuren des Campanus stets in lateinischer Reihenfolge gewählt sind, während sie bei Jordanus, wie wir uns erinnern, nach griechisch-arabischem Brauche aufeinander folgten. Merkwürdigerweise fehlt die Winkeldreitheilung in den Handschriften der Euklidausgabe des Campanus[2]).

Die 5. Definition des V. Buches[3]) (Bd. I, S. 263) machte Schwierigkeiten, welche in der verkehrten Uebersetzung wurzelten. Campanus konnte diese, mochte sie von einem Anderen herrühren oder von ihm selbst, nicht gut anders als in dem Sinne verstehen, dass Euklid gesagt hätte, damit Grössen in stetiger Proportion stehen, müssten alle Vielfache derselben gleichfalls in stetiger Proportion stehen, was doch nur eine Definition durch sich selbst, ein Zirkel im Erklären sei. Wir wiederholen, es war Uebersetzungssünde, nicht Unverständniss, welche hier sich rächte, und welche eine stetige Proportion einführte, wo es nur um eine aus irgend vier Grössen bestehende sich handelte.

Zu IX, 16 hat Campanus 13 Zusätze ausgesprochen, deren letzter die Unmöglichkeit behauptet, irgend eine Zahl so zu theilen, dass das Product des Ganzen in den kleineren Theil dem Quadrate des grösseren Theiles gleich werde. Der Gang des Beweises ist in algebraischer Bezeichnung folgender[4]). Sei $(x_1 + x_2) : x_1 = x_1 : x_2$, so folgt $x_1 : x_2 = x_2 : (x_1 - x_2)$ oder wenn $x_1 - x_2 = x_3$ d. h. $x_1 = x_2 + x_3$ gesetzt wird, was wegen $x_1 > x_2$ geschehen darf, auch $(x_2 + x_3) : x_2 = x_2 : x_3$ und damit ist zugleich $x_2 > x_3$ erwiesen. Fortsetzung des gleichen Verfahrens führt zu $(x_3 + x_4) : x_3 = x_3 : x_4$ mit $x_4 = x_2 - x_3 < x_3$ u. s. w. ins Unendliche. Weil aber, wie Euklid in VII, 31 es ausdrücklich ausgesprochen hat, nicht unendlich viele immer kleiner werdende Zahlen möglich sind, so ist gleich

[1]) Ein wortgetreuer Abdruck der ganzen Stelle findet sich in Kästner's Geometrischen Abhandlungen I. Sammlung (1790), S. 235—240. Ferner auch in Curtze's *Reliquiae Copernicanae*, Zeitschr. Math. Phys. XIX, S. 81. [2]) Curtze brieflich. [3]) Kästner, I, 297—298 giebt den Worlaut dieser Uebersetzung als: *Quantitates quae dicuntur continuam habere proportionalitatem, sunt, quarum aeque multiplicia aut aequa sunt, aut aeque sibi sine interruptione addunt aut minunt*. Was Kästner dabei von dem mit simul zu übersetzenden ἅμα sagt, ist irrig. Das griechische Wort heisst gar nicht ἅμα, sondern ἰσάχις und ist ganz richtig mit aeque wiedergegeben. Der Uebersetzungsfehler steckt in den Worten ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, wo von einer *continua proportionalitas* nicht die Rede ist. [4]) Genocchi in den *Annali di scienze matematiche e fisiche* von Tortolini VI, 307—308.

die erste Annahme falsch, die Irrationalität des goldenen Schnittes somit festgestellt.

So sind wir am Ende des XIII. Jahrhunderts angelangt, ein Abschnitt durch die Zeitrechnung, kein solcher durch innere Gründe. Wir müssen gleichwohl der Uebersichtlichkeit das Opfer bringen, ein Ende eintreten zu lassen, wo kein Schluss ist, und uns zunächst von Jahrhundert zu Jahrhundert, dann in kürzeren Abschnitten den Abgrenzungen zufälliger Zeiteintheilung fügen. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieses neunten Abschnittes überhaupt, des ersten des II. Bandes, ist leicht veranstaltet. Haben wir doch das XIII. Jahrhundert als ein solches kennen gelernt, in welchem zwei wirklich hervorragende Mathematiker, ein Laie und ein Geistlicher, zu Beginne des Jahrhunderts auftreten. Sie leisten auf allen Gebieten der Mathematik Gewaltiges, zu Gewaltiges, als dass die Zeitgenossen mitkommen, oder gar über sie hinaus den Weg fortsetzen konnten. Kein Dritter findet sich im XIII. Jahrhunderte, der neben Leonardo von Pisa und neben Jordanus Nemorarius gestellt werden dürfte, ja vielleicht kein Dritter, der in sich aufzunehmen suchte, was Jene in Rechenkunst und Zahlentheorie, in Algebra und Geometrie hervorgebracht haben. Die handwerksmässige Rechenkunst, wie sie aus dem geistvollen Algorithmus demonstratus unter Verflüchtigung allen Geistes als Niederschlag zurückblieb, wurde von Ordensbrüdern geübt und weiter verbreitet. So kam wohl allmälig die Kenntniss der Zahlzeichen und ihres Stellungswerthes in die grosse Menge. In den Handschriften des Lehrgedichtes der Wälsche Gast, deren älteste auf die zweite Hälfte des XIII. Jahrhunderts zurückgeht und, wie man annimmt, nicht in Klosterkreisen entstand[1]), erscheint auf einem Bildchen die Arithmetik, welche solche Zahlzeichen vor sich hat. Neben den eigentlichen Schriftstellern, wenn man so sagen darf, erscheinen einzelne Uebersetzer, Campanus wohl der mathematisch begabteste unter ihnen, welche neuen Lehrstoff der alten Wissenschaft entnahmen. Wird auch dieser zunächst nur als Ballast mitgeführt werden? Diese Frage hat das XIV. Jahrhundert zu beantworten.

[1]) A. von Oechelhäuser, Der Bilderkreis zum Wälschen Gaste von Thomasin von Zerclaere (1890), S. 79. Die Abbildung selbst in photographischer Nachbildung auf Tafel VI. Erörterungen dazu auf S. 64.

# X. Die Zeit von 1300—1400.

## 46. Kapitel.

### Englische Mathematiker.

Die Frage, mit welcher der vorige Abschnitt schloss, vollständig zu bejahen ist für den Geschichtsschreiber insofern nicht ohne Gefahr, als neue Entdeckungen einem solchen Ausspruche leicht seine Grundlage rauben könnten. Das XIV. Jahrhundert ist in mehr als nur einer Beziehung dem XIII. vergleichbar. Vor Allem ist der äussere Umstand hervorzuheben, dass, als Montucla[1]) am Ende des XVIII. Jahrhunderts sein Meisterwerk der Geschichte der Mathematik schuf, dem man heute noch keinen weiteren Fehler vorwerfen kann, als dass es nicht mehr und nicht Anderes enthielt als damals den Gelehrtesten bekannt war, dass, sagen wir, in jener Zeit das XIII. und XIV. Jahrhundert für den Mathematiker etwa so aussah, wie eine Landkarte des Innern von Afrika, gedruckt während Montucla die Presse beschäftigte. Eine weisse Fläche bot sich dem Beobachter, unterbrochen hier und da durch einen Namen, dem meistens ein vorsichtiges Fragezeichen beigefügt war, oder doch beigefügt hätte sein sollen. Das hat sich wesentlich geändert. Wie in der mathematischen Entwicklung des XIII. Jahrhunderts treten auch in der des XIV. Jahrhunderts bestimmte gesicherte Höhepunkte deutlich hervor. Auch der Charakter ihrer Umgebung ist so weit bekannt, dass man dieselbe, ohne ungerecht zu sein, eine Tiefebene wird nennen dürfen. Aber davon ist die Gegenwart doch weit entfernt, dass sie genau alle Verbindungsstrassen von einem zum anderen Punkte nachzuweisen im Stande wäre, dass sie sicher wäre, nicht an ganz Wesentlichem, aber noch nicht bekannt gewordenem, vorbeigeirrt zu sein. Der Verfasser dieser Vorlesungen ist durchdrungen von dem Gefühle der Lückenhaftigkeit des vorigen wie dieses Abschnittes. Er hofft auf's Höchste, ein künftiger Geschichtsschreiber möge ihm keinen anderen Vorwurf

---

[1]) Montucla, *Histoire des Mathématiques.* II$^e$. édition. Paris 1799—1802. Die beiden ersten Bände sind von Montucla selbst bearbeitet, der dritte und vierte nach Montucla's Tode (18. December 1799) von Lalande. Wir citiren das in diesem Bande mehrfach benutzte Werk kurzweg als Montucla.

zu machen haben, als den wir heute gegen Montucla erheben müssen. Unter solchen Voraussetzungen ist jedem Ausspruche ein grosses „vielleicht“ hinzuzudenken, und nur innerhalb dieser selbstgezogenen Grenzen glauben wir eine wissenschaftliche Aehnlichkeit des XIV. mit dem XIII. Jahrhunderte behaupten zu dürfen.

Dem XIV. Jahrhunderte gebrach es so wenig als dem XIII. an erhaltender Thätigkeit. Uebersetzungen mathematischer Werke aus dem Griechischen, aus dem Arabischen sind wir zwar nicht im Stande mit besonderen bekannten Namen zu belegen, aber das Vorhandensein hochwichtiger mathematischer Handschriften aus dem XIV. Jahrhunderte in fast allen bedeutenderen Bibliotheken ist Zeugniss von der Wahrheit unserer Behauptung. Die Uebersetzung des Buches der drei Brüder in Basel[1]) ist mit grösster Wahrscheinlichkeit von Gerhard von Cremona angefertigt. In dem vorhandenen Verzeichnisse der von ihm herrührenden Uebersetzungen ist das Buch der drei Brüder erwähnt. Dort findet sich auch die Bemerkung, Gerhard habe in seinen Uebersetzungen sich nie genannt[2]). Ist aber die Uebersetzung anderer in dem gleichen Sammelbande befindlicher Schriften erst im XIV. Jahrhunderte angefertigt? Sind sie bereits Abschriften der Ergebnisse früherer Uebersetzungsarbeit? Sehen wir in ihnen wie in den gleichzeitigen Abschriften von Werken des Jordanus, von Euklidübersetzungen des Atelhart und des Campanus den Fleiss emsiger Mönche, der Werthvolles aus alter wie aus für damals jüngerer Zeit aufzubewahren half? Wir wissen es nicht. Jedenfalls aber zeigt das Vorhandensein solcher Handschriften so viel Interesse für die Erhaltung mathematischer Werke, sei es bei dem abschreibenden Mönche selbst, sei es bei dem Vorsteher des Klosters, der solche Abschriften zu fertigen befahl, dass wir nicht schweigend an der Thatsache vorübergehen durften.

Wir wollen nun versuchen, die Mathematiker des XIV. Jahrhunderts in ihrem Heimathslande nach gebildete Gruppen zu ordnen und beginnen mit England.

Das Rechnen mit Zahlzeichen, denen Stellungswerth beigelegt ist, machte in diesem Jahrhunderte offenbar Fortschritte. Ausser einem die Numeration klar darlegenden Schriftstücke in englischer Sprache[3]) hat auch eine Rechentafel für Kaufleute[4]) sich erhalten, deren Text, so gering er ist, ebenfalls der englischen Sprache angehört, während die Zeichen von der eben erwähnten Art sind.

Wichtiger ist was wir über bestimmte Schriftsteller auszusagen

[1]) Wir reden von der berühmten Handschrift F II, 33. [2]) Curtze brieflich. [3]) Halliwell, *Rara Mathematica* pag. 29—31. [4]) Ebenda pag. 72.



haben. Richard von Wallingford[1]), welcher etwa um 1326 die freien Künste und Philosophie in Oxford lehrte, ist uns nur durch die Titel einiger Abhandlungen bekannt, welche jedoch, in englischen Bibliotheken handschriftlich erhalten, wohl verdienten einmal von einem Fachmanne durchgesehen zu werden. Titel wie: De sinibus demonstrativis, De chorda et arcu, De chorda et versa deuten darauf hin, dass dem Verfasser, der solche Ueberschriften wählte, arabische Trigonometrie und darunter jedenfalls neben anderen Quellen, die damit nicht geleugnet sein sollen, Albategnius in der Uebersetzung Plato's von Tivoli (Bd. I, S. 693), wo erstmalig das Wort Sinus vorkam, bekannt gewesen sein muss. Eine Abhandlung, welche sich in zahlreichen Abschriften erhalten hat, ist einer Art von Zeitmesser gewidmet, der von seiner Brauchbarkeit den Namen *Instrumentum Albyon* (d. h. all by one = Alles durch Eines) empfing[2]).

In das Gebiet der Trigonometrie gehört weiter eine Schrift von Johannes Maudith[3]), welcher um 1340 in Oxford lehrte. Auch ihr Titel: De chorda recta et umbra fordert eine Untersuchung nur um so dringender heraus, als umbra, die Tangente der heutigen Trigonometrie, eine den Arabern besonders eigenthümliche Winkelfunction war.

Und wieder dasselbe Ergebniss erhalten wir aus einer vereinzelt bekannt gewordenen Stelle der Perspective von Bradwardinus[4]). In einer Handschrift des Vatican ist nämlich die Absicht Bradwardin's Perspective mitzutheilen von einem Abschreiber gehegt, aber mit der Begründung aufgegeben worden, dieselbe enthalte, abgesehen von vier Sätzen, ausschliesslich das, was in der allgemeinen (in communi perspectiva) d. h. in der Peckham'schen Perspective sich vorfinde; darum werden nur die erwähnten vier Sätze berichtet. In diesen kommen aber die Wörter umbra recta und umbra versa wiederholt vor, welche bekanntlich unserer Cotangente und Tangente entsprechen, und von ihnen wird im dritten Satze[5]) ausgesagt, dass sie die Längeneinheit als mittlere geometrische Proportionale besitzen.

Simon Bredon oder Biridanus[6]) von Winchecombe gehört, wiewohl eigentlich Mediciner, auch durch einige mathematische und astronomische Abhandlungen hierher. Er verfasste sie um 1380 unter König Richard II. So wird von ihm namentlich eine Sehnentafel erwähnt, deren Anfangsworte lauten sollen Arcus, sinus rectus, sinus versus. Englische Gelehrte werden in erster Linie Veranlassung

[1]) Montucla, I, 529. — Suter, Math. Univ. S. 45—46. [2]) Curtze brieflich. [3]) Suter, Math. Univ. S. 46. [4]) Max Curtze in den *Reliquiae Copernicanae*, Zeitschr. Math. Phys. XX, 224. [5]) *Inter umbras et umbrosum testis est proportio, quod ipsa res semper est medio loco proportionalis inter umbram suam, rectam scilicet et versam.* [6]) Suter, Math. Univ. S. 46.

haben, diesen und den weiter oben genannten insgesammt ungedruckten Abhandlungen diejenige Beachtung zu verschaffen, welche sie zu verdienen scheinen und ihrer Heimath den Ruhm zu sichern, von den ersten europäischen Schriftstellern über Trigonometrie erzeugt zu haben. Die allerersten waren sie indessen doch nicht. Das war ein Anonymus, der bereits dem Ende des XIII. Jahrhundert angehörte, dann der in Avignon lebende spanische Jude Levi ben Gerson mit einer Abhandlung von 1321, endlich ein weiterer Anonymus mit einer Schrift: De tribus notis[1]).

Eine Abhandlung von hohem Interesse ist dem Drucke übergeben[2]). Sie ist in englischer Sprache verfasst und in einer Handschrift des XIV. Jahrhunderts erhalten, und aus diesem letzteren Umstande leiten wir das Recht ab, sie hier zu besprechen, wenn ihre eigentliche Entstehungszeit uns gleich unbekannt ist. Der Inhalt ist feldmesserisch, wie schon die Ueberschrift besagt: *Nowe sues here a Tretis of Geometri wherby you may knowe the heghte, depnes, and the brede of mostwhat erthely thynges* und stellt eine Uebersetzung einer unter dem Titel Ars metrica gehenden Bearbeitung des zweiten Theiles der Schrift des Robertus Anglicus über den Quadranten dar[3]). Geometrie, sagt der der griechischen Sprache etwas mächtige Verfasser, ist zusammengesetzt aus geos, die Erde und metros, das Maass. Zum Höhenmessen, welches am Ausführlichsten behandelt ist, werden verschiedene Verfahren gelehrt. Die Schattenmessung[4]), wie sie seit Thales in Uebung war (Bd. I, S. 128), eine Messung mit Hilfe eines Spiegels[5]), eine Messung mit Hilfe des Quadranten und des Quadrates[6]) sind auseinandergesetzt, aber leider nicht durch Zeichnungen erklärt. Ergänzt man sich solche für den Quadranten (Figur 22) und für das genauer beschriebene Quadrat (Figur 23), so mag man die

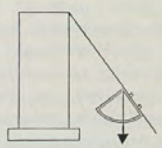


Fig. 22.

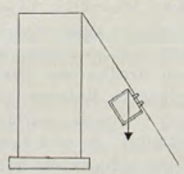


Fig. 23.

Benutzung auch dieser letzteren Vorrichtung leichter zum Verständniss bringen. Das Quadrat ist aus vier gleichen je in 12 Theile

[1]) Curtze brieflich. [2]) Halliwell, *Rara Mathematica* pag. 56—71. [3]) Curtze brieflich. [4]) Halliwell, *Rara Mathematica* pag. 62. [5]) Ebenda pag. 66. [6]) Ebenda pag. 58—59.



eingetheilten Stäben zusammengesetzt. In dem einen Eckpunkte ist ein Senkel aufgehängt, und die eine Seite ist ein Diopterlineal, durch welches man nach dem zu bestimmenden Höhepunkt hinsieht. Man hat dann nur zu bemerken, welcher Punkt der eingetheilten Quadratseiten von dem Senkel eingeschnitten wird, um die Höhe mittels Proportionen zu finden. Die betreffenden Eintheilungen der das Quadrat bildenden Stäbe heissen wieder *umbre*.

Und nun kehren wir zu dem hervorragendsten Vertreter der Mathematik in England im XIV. Jahrhunderte zurück, dessen Namen wir schon im Vorbeigehen genannt haben. Thomas de Bradwardina[1]), eigentlich Bredwardin, aber gewöhnlich Bradwardinus genannt, ist geboren zu Hartfield bei Chichester. Als sein Geburtsjahr wird mitunter 1290 angegeben, jedenfalls fällt es noch in das XIII. Jahrhundert. Er war Ordensgeistlicher, muthmasslich Franciskaner. Sicherheit über seine Lebensverhältnisse beginnt mit dem Jahre 1325, in welchem er Proctor, d. h. Procurator, der Universität Oxford wurde. Dort las er im Collegium Mertonense über Theologie, Philosophie und Mathematik mit solchem Erfolge, dass man ihm den Beinamen Doctor profundus beilegte. Solche ehrende Beinamen waren übrigens damals an der Tagesordnung. Roger Baco wurde Doctor mirabilis, Thomas von Aquino bald Doctor angelicus, bald Doctor universalis genannt; Duns Scotus hiess Doctor subtilis, Raimundus Lullus Doctor illuminatus, Wilhelm von Occam Doctor invincibilis oder Doctor singularis, Henricus Gandavensis Doctor solemnis, Johann Baconthorp Doctor resolutus, um nur einige der bekanntesten Namen aufzuzählen. Später wurde Bradwardinus Kanzler der St. Paulskirche in London, und Johann Stratford, Erzbischof von Canterbury, empfahl ihn dem Könige Eduard III. als Beichtvater. In dieser Stellung erwarb er sich die Gunst des Königs, welchen er auf seinen Kriegszügen in Frankreich begleitete, in so hohem Maasse, dass, als 1348 nach Stratford's Tode das Kapitel Bradwardinus zum Erzbischof von Canterbury erwählte, der König ihn nicht entliess. Ein an seiner Stelle neu Gewählter starb aber noch vor der Weihe, das Kapitel einigte sich abermals auf Bradwardinus, und nun gab der König nach. Die Weihe fand am 19. Juli 1349 in Avignon statt. Wenige Wochen nachher wurde

[1]) *Encyclopaedia Britannica* (1875), IV, 199. — Poggendorff I, 272. — Chasles, *Aperçu hist.* p. 480 und 521—523 (deutsch 550 und 611—614). Sehr viel mehr bei Max Curtze: Ueber die Handschrift R. 4°. 2 der Königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn. Insbesondere das Biographische entnehmen wir fast wörtlich dieser im Supplementheft der Zeitschr. Math. Phys. XIII abgedruckten Abhandlung.

Bradwardinus in Lambeth von einer pestartigen Krankheit befallen und starb am 26. August. Die mathematischen Schriften, welche früh (seit 1495) im Drucke bekannt geworden sind, vorher natürlich abschriftlich umliefen, führen die Titel: Arithmetica speculativa, De proportionibus velocitatum, Geometria speculativa, Tractatus de quadratura circuli editus a quodam archiepiscopo ordinis fratrum minorum. Diese Quadratur ist dieselbe Schrift, von welcher wir (S. 101) unter Campanus gesprochen haben, und kann unmöglich von Bradwardinus herstammen. Die Drucke der drei anderen vermuthlich echten Schriften sind von grosser Seltenheit. Es wäre wünschenswerth, wenn die Schrift von den Proportionen — oder sind es gar deren zwei? — einmal genau untersucht würde, wie weit sie eine Abhängigkeit von Jordanus (S. 66), wie weit sie eine solche von Ahmed Sohn des Josephus vermuthen lassen kann. Wir können nur über die Geometria speculativa nach Auszügen berichten, welche deren wissenschaftliche Bedeutung erkennen lassen. Wenn zwei Handschriften, die eine von 1365, die andere von 1414 datirt, beide gegenwärtig in Rom, Bradwardin's Geometrie dem Petrus von Dacien zuschreiben[1]), so beruht das wohl auf Irrthum. Die Geometrie besteht aus vier Abschnitten, von denen jeder mit Voraussetzungen, Erklärungen, Forderungen beginnt, an welche die eigentlichen Untersuchungen sich anschliessen.

Im 1. Abschnitte beschäftigt sich Bradwardinus mit den *figuris angulorum egredientibus.* Sternvielecke, denn diese sind unter jenem Namen verstanden, waren ja seit der Zeit der Pythagoräer bekannt. Das Sternfünfeck insbesondere (Bd. I, S. 166) war mehrfach der Aufmerksamkeit empfohlen. Wir haben seine Gestalt ausser im grauen Alterthum in jener französisch geschriebenen Geometrie (S. 92) auftreten, seine Winkelsumme im Euklide des Campanus (S. 104) bestimmen sehen. Auch die Gestalt eines anderweitigen Sternvielecks lässt sich in benachbarter Zeit nachweisen. Raimundus Lullus, dessen schriftstellerische Thätigkeit zwischen 1285 und 1315 fällt, muss in einer Geschichte der Mathematik immerhin genannt werden. Er hat eine eigene Schrift über die Quadratur des Kreises und eine Geometrie verfasst, welche in dem Uebermaasse religiösen Beiwerkes unverständlich sind. Ebenderselbe hat in seiner Ars magna, einem Gemenge von Logik, kabbalistischer und eigener Tollheit, unter welches, man weiss nicht wie, einige Körner gesunden Menschenverstandes gerathen sind, den Umfang eines Kreises in 9 Theile ge-

[1]) *Biblioth. math.* von G. Eneström 1885, pag. 94 und 196.



theilt[1]) und von jedem Theilungspunkte Verbindungsgerade nach allen übrigen gezogen. So entsteht, ob ihm bewusst oder nicht müssen wir in Frage lassen, ein Sternneuneck. Als Frage werfen wir ferner auf, ob in hebräischen kabbalistischen Schriften noch andere Sternvielecke gefunden werden mögen? Keinesfalls sind es wissenschaftliche Untersuchungen über Sternvielecke, welche uns irgendwo ausser bei Campanus gegenübertreten, und nun behandelt Bradwardinus mit ausdrücklicher Betonung der Neuheit des Gegenstandes, den nur Campanus beiläufig gestreift habe, die allgemeine Figur ähnlichen Charakters. Je mehr wir auch auf unserem Wissensgebiete die Wahrheit der Aussprüche anerkennen, dass auf Jahrhunderte hin eine gänzliche Abhängigkeit von der äusserlichen Stoffzufuhr den eigentlichen Grundton des Mittelalters bildete[2]), und dass dessen alleiniges geistiges Motiv in der Macht der Ueberlieferung zu suchen ist[3]), um so stärker treten die wenigen Persönlichkeiten hervor, denen gegenüber jene Regel versagt. Dass aber Bradwardinus zu ihnen gehörte, mögen folgende Sätze beweisen: Ein Vieleck mit ausspringenden Winkeln (egrediens) wird erzeugt, indem man die Seiten eines gewöhnlichen, nach aussen convexen Vielecks bis zum erneuten Durchschnitte verlängert. Vollzieht man das Gleiche bei dem entstandenen Sternvielecke erster Ordnung, so entsteht ein Sternvieleck zweiter Ordnung, aus welchem immer durch das gleiche Verfahren ein Sternvieleck dritter Ordnung hervorgeht. Das Sternfünfeck ist das erste Sternvieleck erster Ordnung und hat die Winkelsumme $2R$. Bei wachsender Zahl der Ecken wächst die Winkelsumme immer um $2R$ für jedes neue Eck, wie es bei den convexen Vielecken auch der Fall ist. Im Sternvieleck erster Ordnung mit $6, 7, 8, \ldots n$ Eckpunkten ist also die Winkelsumme $4R$, $6R$, $8R, \ldots (2n-8)R$. Die allgemeine Formel spricht Bradwardinus allerdings nicht aus, aber sie ist doch in seiner Regel des gleichmässigen Anwachsens um je $2R$ enthalten. Aus dem convexen Dreieck und Viereck entsteht kein Sternvieleck, sondern erst aus dem Fünfeck. Aus dem Sternvieleck erster Ordnung mit 5 oder 6 Ecken entsteht kein Sternvieleck zweiter Ordnung, sondern erst aus dem mit 7 Ecken. So hat man den Satz, dass das erste Sternvieleck irgend einer Ordnung durch Verlängerung der Seiten des dritten Sternvielecks nächstniedrigerer Ordnung gebildet wird. Von den Winkeln der Sternvielecke höherer Ordnung zu reden, meint Bradwardinus, würde zu weit führen; er wolle einen Satz aussprechen, an dessen Richtigkeit er glaube, ohne sie mit aller

[1]) Prantl, Geschichte der Logik im Abendlande III, 158. Künftig citiren wir Prantl, Gesch. Log. [2]) Ebenda III, 2. [3]) Ebenda III, 9.

Bestimmtheit behaupten zu wollen: die Summe der Winkel in dem ersten Vielecke jeder Ordnung sei $2R$, und sie nehme mit jedem neuen Eckpunkte um $2R$ zu[1]). Irgend welche Beweise scheint Bradwardinus nicht geführt zu haben, an den Rand sind aber Sternvielecke der drei ersten Ordnungen gezeichnet, solche der ersten Ordnung mit 5, 6, 7, 8 Ecken, solche der zweiten Ordnung mit 7, 8, 9 Ecken, solche der dritten Ordnung mit 9, 10, 12 Ecken.

Der 2. Abschnitt enthält unter Anderem die Lehre von den isoperimetrischen Figuren. In vier Sätzen wird gezeigt: 1. dass unter miteinander verglichenen, isoperimetrischen Figuren diejenige die flächengrösste ist, welche die grösste Eckenzahl besitzt; 2. dass bei gleicher Eckenzahl die Gleichheit aller Winkel den Ausschlag giebt; 3. dass unter der Voraussetzung gleicher Eckenzahl und unter sich gleicher Winkel das regelmässige Vieleck, welches auch unter sich gleiche Seiten besitzt, die grösste Fläche einschliesst; 4. dass der Kreis endlich die flächengrösste unter allen ebenen isoperimetrischen Figuren ist, wie auch der Kugel die räumlich entsprechende Eigenschaft unter den Körpern zukommt. Für diese Sätze giebt Bradwardinus einen Ursprung nicht an, beansprucht sie aber ebensowenig als sein Eigenthum. Es kann kaum einem Zweifel unterworfen sein, dass er sie dem Buche des Zenodorus (Bd. I, S. 341) entnahm, welches jedenfalls in's Arabische und aus letzterer Sprache in's Lateinische übersetzt dem XIV. Jahrhunderte wohl bekannt war. Zeugniss dafür ist eine noch vorhandene Niederschrift einer solchen Uebersetzung aus der erwähnten Zeit, welche die Mittelbarkeit ihres Ursprunges durch Benutzung der Namensform Archimenides statt Archimedes (Bd. I, S. 663) an den Tag legt. Ein gewisser Frater Fridericus, welcher in der Mitte des XV. Jahrhunderts lebte, und dem wir im 54. Kapitel begegnen werden, hat übrigens Bradwardin's Quellen sehr gut erkannt, indem er sagte, dieser habe aus den Büchern des Euklid, des Campanus, des Archimed, des Theodosius, des Jordanus und aus den Büchern über die isoperimetrischen Gebilde geschöpft[2]).

Der 3. Abschnitt beschäftigt sich der Hauptsache nach mit der Lehre von den Verhältnissen. Die Proportion einer Grösse zu einer andern wird benannt nach der Art, wie die erste zur zweiten sich verhalte[3]). Stehen verschiedene Grössen in fortlaufender stetiger Proportion, so ist die Proportion der äussersten Glieder aus denen aller

[1]) Dass in der That die Winkelsumme des $k$-Sternvielecks $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit $2n+k+2$ Ecken durch $2kR$ sich darstellt, hat Poinsot im *Journal de l'École polytechnique* Tome IV (cahier 10) bewiesen. [2]) Curtze brieflich. [3]) *Quanta est aliqua quantitas ad aliam tanta denominatur proportio eius ad ipsam.*



dazwischenliegenden zusammengesetzt. Proportionen gleicher Benennung sind einander gleich[1]). Grössen sind gleich, wenn sie zu einer Vergleichsgrösse in gleichem Verhältnisse stehen; Grössen sind aber auch dann gleich, wenn Gleichvielfache von ihnen unter einander gleich sind[2]). Diese beiden Regeln, fügt Bradwardinus sogleich hinzu, lassen widersprechende Folgerungen ziehen. Der ersteren gemäss sind alle unendlichen Grössen gleich, der zweiten gemäss kann dieses nicht der Fall sein. Verhältnissmässigkeit und Messbarkeit sind nicht an einander gebunden, jede Grösse steht zu jeder anderen in einem Verhältnisse, hat aber nicht mit jeder ein gemeinsames Maass[3]). Haben zwei Grössen ein gemeinsames Maass, sind sie *communicantes*, so verhalten sie sich zu einander wie zwei Zahlen, wobei Zahl jedenfalls als ganze Zahl gemeint ist. Findet kein derartiges Verhältniss statt, so haben die Grössen kein gemeinsames Maass, sind *incommunicantes*. Diagonale und Quadratseite stehen in irrationalem[4]) Verhältnisse, weil jede Diagonale zur Seite ihres Quadrates eines gemeinsamen Maasses entbehrt. In diesen letzteren Regeln ist der wechselnde Gebrauch der Wörter commensurabilis und communicans, irrationalis und assimetrus bemerkenswerth. Die einen gehören schon dem uns bereits bekannten Sprachschatze an. Boethius sagt commensurabilis, Leonardo von Pisa communicans (S. 11); ob die Wörter assimetrus und namentlich irrationalis schon vor Bradwardinus in mathematischem Zusammenhange irgendwo vorkommen, ausser in Gerhard's von Cremona Uebersetzung[5]) des arabischen Commentars des An-Nairîzî zum X. Buche des Euklid? Jedenfalls sieht man, dass eine Kunstsprache in ihrer Bildung begriffen, wenngleich noch nicht ganz fertig war. Der Kreis, sagt Bradwardinus in demselben 3. Abschnitte, ist einem Rechtecke flächengleich, dessen Seiten die halbe Peripherie und der halbe Durchmesser des Kreises sind. Bradwardinus beruft sich dafür, wie auch für das Verhältniss 22 : 7 der Kreisperipherie zum Durchmesser, auf das Buch über Kreisquadratur des Archimenides. Ihm ist also auch die arabische Ueberlieferung des Namens Archimedes und eine Uebersetzung von dessen Kreismessung bekannt gewesen.

Der 4. Abschnitt endlich geht von der Ebene zum Raume über, handelt von Oertern, von körperlichen Winkeln, von den fünf

[1]) *Proportiones sunt equales quorum denominationes equales.* [2]) *Quantitates sunt equales que ad unam quantitatem conporate* (sic!) *proportionem habent equalem. Quantitates quarum equimultiplices sunt equales ipse inter se sunt equales.* [3]) *Omnis quantitas omni quantitati proportionalis, sed non omnis omni commensurabilis.* [4]) *Dyametri quadrati ad latus eiusdem est proportio irrationalis quia omnis dyameter coste sui quadrati assimetrus.* [5]) Curtze brieflich.

regelmässigen Körpern, von der Kugel und von Kreisen auf deren Oberfläche, wobei für die letzteren Sätze die Sphärik des Theodosius als Quelle angerufen wird, eine Schrift, welche vielleicht auch schon Witelo (S. 98) vorgelegen hat.

Ausser den im Drucke längst herausgegebenen Werken des Bradwardinus hat sich noch eines handschriftlich ganz oder wahrscheinlicher theilweise erhalten, aus welchem werthvolle Auszüge bekannt geworden sind[1]), der Tractatus de continuo. Diese Abhandlung steht in ihrem Zwecke wie in ihrem Inhalte nicht vereinzelt da. Sie richtet sich als besondere Schrift gegen diejenige atomistische Weltanschauung, welche in der Scholastik überhaupt vorhanden war, und welche auf der Zusammensetzung der stetigen Grösse aus unstetigen Bestandtheilen beruhte[2]). Roger Baco hatte sich (S. 97) in einem Kapitel seines Opus tertium mit der Widerlegung dieser Ansicht durch mathematische Gegengründe beschäftigt. Andere Scholastiker gingen gleichfalls gelegentlich auf die Streitfrage ein, welche schon seit Aristoteles und länger (Bd. I, S. 191) die Geister anregte und aufregte. Bradwardinus gehörte unbedingt zu den Männern, deren Gedankenfolge eine vorzugsweise mathematische genannt zu werden verdient, und wenn sein Tractatus de continuo einem Grenzgebiete angehörte, wenn die Geschichte der Mathematik, die der Physik, die der Philosophie verpflichtet sind, der Auffindung dieser merkwürdigen Schrift Rechnung zu tragen, und bald diese, bald jene ihrer Sätze zur Sprache zu bringen, so ist die Geschichte der Mathematik dabei in der günstigen Lage loben zu dürfen, worüber sie zu berichten hat. Zu den Vorgängern des Bradwardinus in den erwähnten Untersuchungen gehörte ja auch bis zu einem gewissen Grade Jordanus Nemorarius. Er gab an der Spitze seiner Bücher De triangulis (S. 73) Begriffsbestimmungen, welche, so scholastisch abstossend sie waren, immerhin zeigten, dass der Verfasser manchem verborgen liegenden mathematischen Gedanken nachzugraben für lohnend erachtete, und dass er auch auf der richtigen Spur war, wo das Vertiefen ansetzen müsse. Aehnliches müssen wir von Bradwardinus rühmen. Der Wortlaut beider Schriftsteller, des Jordanus und des Bradwardinus, ist freilich ein ganz verschiedener und nur die eine Aehnlichkeit glauben wir bemerklich machen zu sollen, dass der Punkt bei Beiden punctus, nicht, wie es sonst allgemeiner Gebrauch war, punctum heisst. Bei Bradwardinus ist das Stetige ein Quantum, dessen Theile unter ein-

[1]) Vergl. Max. Curtze in der schon angeführten Abhandlung über die Thorner Handschrift R. 4°. 2 Zeitschr. Math. Phys. XIII, Supplementheft. [2]) K. Lasswitz, Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton I, 197 bis 199.



ander verbunden sind[1]), ein offenbar dem aristotelischen συνεχές nachgebildeter Ausdruck. Es giebt zweierlei Stetigkeiten, bleibende und aufeinander folgende. Das bleibende Stetige, *continuum permanens* (Körper, Flächen, Linien) ist ein solches, dessen einzelne Theile zugleich bleiben, das aufeinander folgende Stetige, *continuum successivum* (Zeit, Bewegung) ist ein solches, unter dessen Theilen frühere und spätere sich unterscheiden lassen. Bei der näheren Erörterung des bleibend Stetigen tritt der Begriff der Untheilbarkeit hervor und des Punktes, der die Untheilbarkeit an einen bestimmten Ort bindet[2]). Die Zeit ist dasjenige aufeinanderfolgende Stetige, welches die Aufeinanderfolge misst. Ihr Untheilbares ist der Augenblick[3]). Die Bewegung ist das aufeinanderfolgende Stetige, welches in der Zeit gemessen wird. Im weiteren Verlaufe der Erklärungen kommt das Anfangen und das Aufhören zur Rede. Daran schliesst sich von selbst der Begriff des Unendlichen, dem drei ganze Seiten gewidmet sind. Bradwardinus hatte demnach das volle Bewusstsein von der Wichtigkeit und zugleich von der ganz ungeheuren Schwierigkeit dieses Begriffes. Er unterscheidet zwei Unendlichkeiten, die kathetische und die synkathetische[4]). Kathetisch oder einfach unendlich ist eine Grösse, die kein Ende hat. Synkathetisch unendlich ist eine Grösse, der gegenüber es eine endliche Grösse giebt und ein anderes grösseres Endliche, und wieder Eines grösser als jenes Grössere, und so ohne dass ein Letztes sich fände, welches den Abschluss bildete; auch dieses ist immer eine Grösse, aber nicht wenn es mit Grösserem verglichen wird. Man erkennt leicht, dass das kathetisch Unendliche Bradwardinus' das Ueberendliche oder Transfinite unserer neueren Philosophen ist, dem von Anfang an das Merkmal der Begrenztheit, welches den endlichen Grössen zukommt, fehlt, während das synkathetisch Unendliche mit dem Endlosen oder Infiniten übereinstimmt, welches aus der endlichen Grösse durch unbegrenztes Wachsen hervorgeht[5]). Wie das Unendliche und das Untheilbare in Bradwardin's Geiste in Wechselbeziehung traten, zeigt die Fortsetzung des Tractates. Jede Wissenschaft, heisst es[6]), sei wahr, in welcher nicht die Voraussetzung ge-

[1]) *Continuum est quantum cujus partes ad invicem copulantur.* [2]) *Indivisibile est quod nunquam dividi potest. Punctus est indivisibile situatum.* [3]) *Instans est certus athomus* (sic!) *temporis.* [4]) *Infinitum cathetice et simpliciter est quantum sine fine. Infinitum sinkathetice est secundum quid est quantum finitum et finitum maius isto et finitum maius isto maiori et sic sine fine ultimo terminante, et hoc est quantum et non tamen contra maius.* [5]) Wilh. Wundt, Logik II, 128 (1883). [6]) *Omnes scientias veras esse, ubi non supponitur continuum ex indivisibilibus componi.*

macht werde, Stetiges setze sich aus Untheilbarem zusammen. Kein Untheilbares ist grösser als ein anderes[1]). In der gleichen untheilbaren Lage können nicht viele Untheilbare ihren Ort besitzen, so lautet der Satz, in welchen Brandwardinus den Begriff der Undurchdringlichkeit kleidet. Das Stetige setzt sich nicht aus einer endlichen Anzahl von Untheilbaren zusammen; es setzt sich ebensowenig aus einer unendlichen Anzahl von solchen zusammen, es hat nur unendlich viele Untheilbare in sich[2]). Jede gerade Linie z. B. hat unendlich viele Linien in sich, die als ihre Theile aufgefasst werden können. Jede Oberfläche hat unendlich viele Oberflächen in sich und unendlich viele Linien und ähnlicherweise unendlich viele Punkte. Jedes Stetige ist zusammengesetzt aus unendlich vielen Stetigen derselben Art und hat unendlich viele eigene Atome[3]). Aus unendlich vielen Untheilbaren lässt kein Stetiges sich ergänzen oder zusammensetzen[4]).

Wir haben diese wenigen Sätze ziemlich zusammenhanglos dem uns vorliegenden weit umfangreicheren Auszuge bald da, bald dort entnommen. Auch die Wörter Contingenzwinkel und Form[5]) kommen dort vor. Wir fügen hinzu, dass Bradwardinus, wie es dem Zwecke seiner Auseinandersetzung entsprach, es auch an Bemängelung fremder Ansichten nicht fehlen lässt. Ein Waltherus modernus und ein Henricus modernus sind besondere Zielpunkte seiner Angriffe, die regelmässig nach der Methode der Zurückführung auf Widersinniges und Sichwidersprechendes erfolgen. Ob der moderne Walther ein Walterus Evesham war, der 1316 astronomische Beobachtungen machte[6]), ob nicht eher Walter Burleigh, welcher 1337 starb, und welcher über Formen schrieb[7]) — ein Gegenstand damaliger Forschung, von dem wir gleich zu reden haben — sei dahingestellt. Der moderne Heinrich ist mit grosser Wahrscheinlichkeit kein Anderer als Henricus Goethaels von Gent oder Gandavensis[8]), welcher 1217 bis 1293 gelebt hat und als Lehrer der Philosophie in Paris sich den Beinamen des Doctor solemnis (S. 113) erwarb.

Der Begriff der Form gehört in seiner ausführlichen Erörterung der Geschichte der Logik an, genauer gesprochen der Geschichte jener Streitigkeiten, in welchen so viele Geisteskraft unfruchtbar ver-

[1]) *Nullum indivisibile maius alio esse.* [2]) *Omnia continua habere athoma infinita, sed ex athomis non componi.* [3]) *Omne continuum componitur ex infinitis continuis eiusdem speciei et habet athoma propria infinita.* [4]) *Nullum continuum ex indivisibilibus infinitis integrari vel componi.* [5]) Max. Curtze l. c. S. 92 Z. 4 v. u. [6]) Ebenda S. 88 in der Note **. [7]) Prantl, Gesch. Log. III, 297. [8]) Prantl, Gesch. Log. III, 190 flgg. und Quételet, *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (1864) pag. 46 flgg. Letzteres Werk citiren wir künftig als Quételet kurzweg.

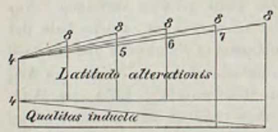


braucht wurde, die als Streit zweier Gelehrtenschulen ihren Anfang nahmen, und, weil Thomas von Aquino und Duns Scotus, welche jene Schulen gegründet hatten, den beiden auf einander eifersüchtigen Orden der Dominikaner und Franciskaner angehörten, in einen Streit der beiden Orden selbst ausarteten. Es war ein Beispiel, wie solche im Laufe der Geschichte menschlicher Geistesentwicklung wiederholt vorgekommen sind, dass wissenschaftliche Meinungsverschiedenheiten mit zufällig vorhandenen politischen und religiösen Gegensätzen sich verquickend zu einer heftigen den Streitpunkt selbst überdauernden Fehde geworden sind. Duns Scotus[1]), der 1308 verstorbene Franciskaner, hatte *forma* diejenige Denkweise genannt, welche das Vorhandensein des gedachten Gegenstandes voraussetzt, so dass dessen Sinneswahrnehmung möglich wird. Die Sinneswahrnehmung ist eine wechselnde, und wechselnd sind die Formen. Eine zeitliche Reihenfolge findet in ihnen statt, so dass die frühere Form auf die spätere wirkt, und ganz besonders die Gradabstufung der Formen, die bald zu grösserer Vollkommenheit sich erheben, bald zu allmählicher Unvollkommenheit herabsinken, ist der Beachtung würdig. Sie äussert sich vorzugsweise bei den Formen der Natur: Kälte und Wärme sind ein oft und gern gebrauchtes Beispiel. Dort heisst die Steigerung und der Nachlass der Formen, deren Vielheit Glaubenssatz ist, *intensio et remissio formarum*. Mit dem zuletzt Ausgesprochenen, d. h. mit einem Gradunterschiede, der im Formenbegriffe hervortrete, ist nun auch die gegnerische Schule einverstanden, aber die Form selbst sei eine einzige, und gerade das Beispiel des Warmen und Kalten diene als Beweis. So der Chronist Aegidius Romanus[2]), † 1316. Wir dürfen den Verlauf des Streites nicht genauer verfolgen. Nur einzelne Namen solcher Schriftsteller seien genannt, welche bald der einen, bald der anderen Richtung huldigend in Frankreich und England über die intensio et remissio formarum schrieben: ein Antonius Andreas[3]) † 1320, ein Armand von Beauvoir[4]) † 1334, ein Walter Burleigh[5]) † 1337, den wir oben erwähnt haben, ein Petrus Aureolus[6]) † nicht vor 1345, ein Wilhelm Occam[7]) † 1347, ein Johann Baconthorp[8]) † 1346. Der zuletzt Angeführte hat in Oxford und Paris Philosophie und Theologie studiert, hat in Paris mit einer Entschiedenheit, die in dem Beinamen des Doctor resolutus (S. 113) sich geltend machte, seine Lehrmeinungen verfochten, sowohl über die eine nur gradweise verschiedene Form, als auch auf einem anderen nicht weniger dornenvollen Gebiete. Glaubte er doch weder

[1]) Prantl, Gesch. Log. III, 202 und 222. [2]) Ebenda III, 263. [3]) Ebenda III, 281. [4]) Ebenda III, 309. [5]) Ebenda III, 297. [6]) Ebenda III, 327. [7]) Ebenda III, 361. [8]) Ebenda III, 318 und Suter, Math. Univ. S. 49.

an Sterndeutung noch an Zauberei und schrieb gegen beide. Nach England zurückgekehrt wurde er Provinzial des Karmeliterordens.

Unter den Schriftstellern, welche über das Wachsen und Abnehmen der Formen sich äusserten, hätte vielleicht schon im 45. Kapiel Roger Baco genannt werden müssen, für welchen eine Handschrift eine derartige Abhandlung in Anspruch zu nehmen scheint[1]). Wir müssen Gelehrten, denen die Geschichte der Logik als Forschungsgebiet angehört, die Beantwortung der Frage überlassen, ob so weit zurück schon von Formen die Rede gewesen sein kann; uns will es mehr als zweifelhaft erscheinen, und so neigen wir eher der Meinung zu[2]), es sei hier eine falsche Benennung vorhanden, und der eigentliche Verfasser der Schrift über die Linie der Zu- und Abnahme der Formen sei nicht Roger Baco, sondern Roger oder Johann oder Richard Suicet oder Suisset oder Swinshed[3]) gewesen. Er soll den Namen Swnished von einem Cisterzienserkloster Vinshed auf der Insel Holy Island an der Küste von Northumberland geführt haben, wohin er sich im Alter zurückzog. Dem Orden selbst gehörte er seit 1350 an. Sein 1520 in Venedig gedrucktes, aber schon nach einem Jahrhunderte kaum in den berühmtesten Büchersammlungen aufzufindendes Hauptwerk führt den Titel *Calculator*, woraus Manche einen Beinamen des Verfassers gemacht haben. Vom Rechnen ist trotz des Titels keine Rede. Dagegen heisst die Ueberschrift gleich des 1. Kapitels: De intensione et remissione, woraus ein Schluss auf den allgemeinen Inhalt sich ziehen lässt. Im 2. Kapitel De difformibus, ein Wort, dessen Bedeutung uns bald klar sein wird, befinden sich zwei Zeichnungen (Figur 24 und 25), die wir allerdings nicht




A *medium non qualificativum.*
Fig. 24.


B *medium qualificativum.*
Fig. 25.

[1]) Suter, Math. Univ. S. 49 Note 1 sagt hierüber: der *Catalogus libr. mspt. Angl. et Hib.* (2. Th. pag. 55) enthält unter den Mss. des Colleg. Corp. Christ. ein solches mit Nro. 254 Vol. I, 8, betitelt *Rogerus Bacon, De linea intentionis et remissionis.* Der Katalog von Coxe hat *Tractatus Rogeri Baconi de graduatione rerum compositarum sive de linea* etc. [2]) Suter l. c. hat diese Meinung ausgesprochen. [3]) Vossius pag. 78. — Kästner I, 50—52. — Brucker, *Historia critica philosophiae* (1743) III, 849—853. — Suter, Math. Univ. S. 47. Von den drei im Textegenannten Vornamen, die sämmtlich vorkommen, scheint Richard der richtige zu sein.



vollständig verstehen, welche aber immerhin nur die Deutung zulassen dürften, dass gewisse Veränderungen durch *Latitudines* versinnlicht werden sollen. Was aber unter dem Worte latitudo seit dem XIV. Jahrhunderte verstanden wurde, wird uns gleichfalls demnächst begegnen.

## 47. Kapitel.

### Französische Mathematiker.

Wir gehen nach Frankreich über. Paris war im XIV. Jahrhunderte, was es vorher im XIII. gewesen war, die geistige Hauptstadt der wissenschaftlich gebildeten Welt. Die Zeit nahte, in welcher dieses Uebergewicht ein Ende nehmen sollte, aber sie war noch nicht da, und wenn wir in unserer doppelt angeordneten, nach Ländern und Jahren sich gliedernden Uebersicht mit England statt mit dem Lande, zu welchem Paris gehört, den Anfang gemacht haben, so war diese Abweichung von der eigentlich richtigeren umgekehrten Reihenfolge uns durch einen einzigen Umstand empfohlen: Bradwardinus erscheint nämlich der Zeit nach früher, als der einzige Franzose, welcher in mathematischem Range neben ihn zu treten hat, als Oresme.

Nicht als ob Paris, und Paris war Frankreich[1]), gar keinen anderen Mathematiker des XIV. Jahrhunderts als nur Oresme zu nennen hätte; aber wie in England unsere Betrachtung den einen Bradwardinus als Mittelpunkt anerkannte, ganz ähnlich wird sein französischer Nebenbuhler der hervorragende Vertreter seines Vaterlandes sein.

Am Anfange des Jahrhunderts begegnet uns Johannes de Muris[2]) mit seinem heimathlichen Namen Jean de Meurs, geboren etwa 1310 in der Normandie, gestorben nach 1360. Er war ein sehr fleissiger Schriftsteller, dem die verschiedensten Wissensgebiete, welche damals zur Mathematik mit eingerechnet wurden, zum Danke verpflichtet sind. Er schrieb eine Arithmetik nach Art der gleichbenannten Schrift des Boethius, wie wir vermuthen dürfen, für solche,

[1]) Darin macht uns nicht irre, dass nach einer Handschrift der Bodley. Bibl. Toulouse als vorwiegend mathematische Universität gerühmt wird. Wie Suter, Math. Univ. S. 36 bei Anführung jener Handschrift mit Recht bemerkt, ist von mathematischen Leistungen in Toulouse nicht das Mindeste bekannt. [2]) Poggendorff II, 132. — Suter, Math. Univ. S. 43. — Alfr. Nagl, Das Quadripartitum des Joannis de Muris und das praktische Rechnen im XIV. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Supplementheft S. 135—146.

denen die Arithmetik des Jordanus zu schwer war, und die Bearbeitung des Johannes von Muris, welche auch 1515 im Drucke erschien, blieb Jahrhunderte lang ein vielgebrauchtes Schulbuch[1]). In der Musik vervollkommete er die Noten, indem er die Stufenzeichen mit Zeitzeichen versah[2]); die Abhandlung *Speculum musicae* stammt aus dem Jahre 1321. Von einem theils in Versen, theils in Prosa geschriebenen Werke: *Quadripartitum rimatum* sind mehrere Handschriften erhalten, darunter eine aus dem XIV. Jahrhundert selbst, also der Lebenszeit des Verfassers sehr nahestehend. Aus dieser in Wien befindlichen Handschrift sind zwei Kapitel, das 11. und 14. des II. Buches, im Drucke veröffentlicht[3]). Darnach scheint das Quadripartitum unter Anderem auch das Rechnen mit ganzen Zahlen gelehrt zu haben, wobei die Unterstützung des Rechners durch ein Rechenbrett an Zeiten erinnert, welche damals doch schon recht weit zurück lagen. Beim Multipliciren soll beachtet werden, in welchen Kolumnen, etwa der $k_1^{\text{ten}}$ und $k_2^{\text{ten}}$, die beiden Factoren sich befinden. Die Einer des Productes kommen dann in die $k_1 + k_2 - 1^{\text{te}}$ Kolumne. Aber ausser der Stelle ist auch die eigentliche Ziffer zu beachten nebst ihrer Veränderung bei Vereinigung der einzelnen Theilproducte, und dazu dient eben das Rechenbrett (tabula numerorum quam abacus adinvenit) die Erfindung von Abacus[4]), aus welchem Worte hier ein Personennamen geworden ist, wie es anderwärts mit Algebra (Bd. I, S. 672) ungefähr um die gleiche Zeit geschah. Das Rechenbrett besteht bis aus 27 Kolumnen (Bd. I, S. 837), doch begnügte Johannes de Muris sich damit, neun solcher Kolumnen zu benutzen, welche er oben durch einen kleinen Bogen, arcus, abschliesst. Er schreibt dabei in die Bogen, rechts anfangend und nach links fortschreitend, die Zahlen 1 bis 9 und unter jeden Bogen von oben nach unten fortschreitend die Zahlen 1 bis 9, welche folglich in jeder Kolumne schon geschrieben vorhanden sind. Wird nun beispielsweise 365 mit 24 vervielfacht[5]), um zu erfahren, wie viele Stunden in einem Jahre enthalten sind, so soll man so verfahren. 2 mal 3 sind 6 und zwar in der $2 + 3 - 1 = 4^{\text{ten}}$ Kolumne. Man nimmt einen Rechenstein (calculus) und bedeckt damit die 6 der 4. Kolumne. 2 mal 6 sind 12. Man bedeckt die 2 der 3. Kolumne mit einem neuen Rechenstein, hebt den über der 6 der 4. Kolumne auf, weil sie mit 1 zu vereinigen ist, und bedeckt die 7. 2 mal 5 sind 10. Man hebt den Rechenstein über der 2 der 3. Kolumne auf und bedeckt dafür die 3 der

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 183, Note 1. [2]) Poggendorff l. c. [3]) Nagl l. c. hat die Veröffentlichung unter Vorausschickung einer kurzen Einleitung besorgt. [4]) Ebenda S. 140 und 144. [5]) Ebenda S. 145.



gleichen Kolumne, weil eine 1 dort hinzukam. So liegen jetzt die beiden Rechensteine der Art, dass sie 7300 bedeuten. Nun wird die Darstellung kürzer[1]). Man soll mit der zweiten und letzten Stelle des Multiplicators 4 — denn mehr Stellen sind eben nicht vorhanden — den ganzen Multiplicandus der Reihe nach vervielfachen. Zuletzt werde 8760 erscheinen, wenn man sich die Rechensteine ansehe, welche über den Zahlzeichen liegen[2]). Im Folgenden wird alsdann eine kurze Anweisung gegeben, wie man 8760 durch 24 dividiren solle. Auch hier zerfällt das Verfahren in zwei Theile; man frägt nach der Kolumne, in welcher die Quotientenziffer zu erscheinen hat und nach der Quotientenziffer selbst; beim Abziehen der Theilproducte bedient man sich wieder der zu verschiebenden Rechensteine. Der Gegensatz gegen die ältere Benutzung von mit Zahlzeichen versehenen Rechensteinen, während jetzt die Zahlzeichen in jeder Kolumne vorräthig erscheinen und die Steine selbst ohne Bezeichnung sind, ist sehr bemerkenswerth. In der Frage der nothwendigen Verbesserung des Kalenders ist Johannes de Muris als einer der Ersten, und wenn die Angabe von Baco's Vorgang auf diesem Gebiete (S. 96) unzuverlässig sein sollte, als der Erste überhaupt zu nennen, der 1337 mit bestimmten Vorschlägen hervortrat[3]), die dahin gipfelten, man solle, um den wirklichen und den kalendermässigen Frühlingsanfang in Uebereinstimmung zu bringen, etwa 40 Jahre lang die Schalttage ausfallen lassen.

Hierbei sei gelegentlich bemerkt, dass für Johann von Muris gleich wie für die Uebrigen, welche die Kalenderverbesserung von nun an dringender und immer dringender verlangten, zunächst kein wissenschaftlicher Grund der bestimmende war. Ob Sommer und Winter in vorauszusehender Frist in kalendermässigem Gegensatze zu den wirklichen Jahreszeiten erscheinen würden, das kümmerte diese Männer viel weniger, als die Sorge, es könne, wenn man aufhöre, darauf zu achten, dass Ostern stets auf die Zeit des Vollmondes falle, irgend einmal auf Charfreitag eine Sonnenfinsterniss eintreten, und es möchte dann die wunderbare Sonnenfinsterniss beim Kreuzestode des Heilandes, von welcher der Evangelist berichtet, für eine natürliche erklärt werden. Auch der Umstand, es könnten durch die Unrichtigkeit des Kalenders die gebotenen Fasttage nicht eingehalten werden, wirkte auf die Gemüther und erklärt eine bis zur Erregung

[1]) *Sicut de ultima figura multiplicantis in omnes multiplicandi iam operatus sum, sic de alia id est prima multiplicantis, cum plures modo non sint, in aliarum singulas operabor.* [2]) *aspectis calculis super numeros situatis.* [3]) Schubring, Zur Erinnerung an die gregorianische Kalenderreform (1883) S. 7, wo auch die Quelle für unsere Darstellung der Gründe der Kalenderreform ist.

sich steigernde Sorge um Abstellung des einmal erkannten Missstandes. Waren es sonach kirchliche Bedenken, die zur Kalenderreform führten, so waren es andere kirchliche Bedenken, die sich dem Verlangen widersetzen liessen. Man fürchtete, es möchten nach getroffener Veränderung die alten Messbücher nicht mehr zu benutzen sein, und es brauchte zwei und ein halb Jahrhunderte, bis diese Furcht durch Aufstellung eines vollständigen für denkbare Zeit ausreichenden Reformplanes beseitigt war.

Hier dürfte die richtige Stelle sein, einen schwedischen Magister Sunon, vielleicht richtiger Sven[1]), zu erwähnen, der ohne der Pariser Universität anzugehören sich 1340 erbot, in seiner Wohnung über die Sphäre zu lesen. Im Anschlusse an diesen aber nennen wir auch gleich einen Norweger des XIV. Jahrhunderts, mag er nun irgend eine Zeit in Paris zugebracht haben oder nicht. Es ist Hauk Erlendssön[2]), geboren um 1264, † 1334, ein richterlicher Beamter, welcher einen Algorismus getreu nach dem Muster des von Johannes von Sacrobosco verfassten zusammengestellt hat, der nur darin eine Abweichung zeigt, dass am Schlusse die neun ersten Quadrat- und Kubikzahlen angegeben sind, sowie platonisch-naturphilosophische Erörterungen über die Beziehungen der vier Elemente zu den Zahlen 8, 12, 18, 27.

Johannes de Lineriis[3]) würden wir bei der trostlosen Menge von Unsicherheiten, die sich an diesen Namen knüpfen, am liebsten gar nicht zur Rede bringen. War er ein Picarde, ein Deutscher, ein Sicilianer? Muss man einen Lehrer Johannes de Liveriis von seinem Schüler Johannes de Lineriis (de Ligneres) unterscheiden? Gehörten beide im XIV. Jahrhunderte dem Pariser Lehrkörper an? Das sind die Hauptfragen, welche bald so, bald so entschieden worden sind[4]). Die meisten Schriften dieses Mannes, oder wahrscheinlicher dieser Männer sind astronomischen Inhaltes, haben also für uns unberücksichtigt zu bleiben. Gedruckt wurde 1483 eine Schrift des Johannes de Liveriis über Brüche[5]). Zahlreiche Handschriften nennen freilich den Verfasser des Algorismus de minutiis Johannes de Lineriis, so dass der Titel des Druckes irrig zu sein scheint. In einer Erfurter Handschrift ist der Verfasser genauer als

---

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 206. [2]) Eneström in seiner *Bibliotheca mathematica* 1885, S. 199. [3]) Libri II, 210 und 528. — Steinschneider im *Bulletino Boncompagni* XII. — Günther, Unterricht Mittela. S. 169—171. — Suter, Math. Univ. S. 42 und 46, Note 6. [4]) M. Steinschneider, der die letzten eigenen Untersuchungen über den sehr verworrenen Gegenstand angestellt hat, entscheidet sich dafür, es seien zwei Persönlichkeiten in eine verschwommen. [5]) *Bulletino Boncompagni* XII, 41 sqq.



Johannes de Lineriis Anbionensis bezeichnet, wodurch die französische Heimath dieses Schriftstellers und seine Verschiedenheit von einem Johannes de Lineriis aus Sicilien gesichert ist[1]). Ausserdem ist eine in Oxford vorhandene Tabula sinus Mag. Joh. de Ligneriis namhaft zu machen, weil sie den bis jetzt einzigen Beleg dafür bildet, dass auch in Paris im XIV. Jahrhunderte die Trigonometrie nicht unbekannt war.

Eine zu Seitenstetten aufbewahrte Handschrift aus dem XIV. Jahrhunderte mit der Bezeichnung Cod. LXXVII enthält einen anonymen Algorismus de minutiis, d. h. also einen Lehrgang der Bruchrechnung, welcher sich durch eine sonst nirgend wahrgenommene Erörterung auszeichnet[2]). Der Verfasser bemerkt nämlich, das Kennzeichnende der Sexagesimalrechnung bestehe nicht in der Zahl 60, sondern in der systematischen Anordnung. Man könne statt 60 auch 10 oder 12 und dergleichen benutzen, und 60 sei der grossen Anzahl seiner Theiler wegen gewählt.

Dominicus de Clavasio[3]), gewöhnlich nach seiner Heimath Dominicus Parisiensis genannt, war in der zweiten Hälfte des XIV. Jahrhunderts Hofastrolog des Königs von Frankreich. Er schrieb eine *Practica Geometriae* in drei Büchern, welche sich in zahlreichen Abschriften erhalten hat. In Erfurt allein sind deren vier, von welchen eine aus dem Jahre 1378. Das I. Buch behandelt Längenmessungen, das II. Flächenberechnungen, das III. Körperinhalte. Dominicus bedient sich in Quadratform gebrachter Messwerkzeuge für Winkel, beziehungsweise deren trigonometrische Tangenten (S. 112). Seine Verfahren sind vielfach die althergebrachten, die Gerbert schon übte (Bd. I, S. 812—814), aber Dominicus begnügt sich nicht mit Vorschriften, sondern fügt Beweise hinzu, in welchen Verweisungen auf Euklid vorkommen. Er weiss, dass der Kreisumfang nur näherungsweise $3\frac{1}{7}$ Durchmesser beträgt (*vel ea circa*), er weiss, dass auch von einer Quadratur des Kreises nur soweit die Rede sein kann, dass kein merklicher Fehler bleibt (*ita quod error sensibilis non relinquatur*). Soll die Fläche eines ungleichseitigen Dreiecks auf dem Felde bestimmt werden, so schlägt Dominicus vor, man solle ein ähnliches Dreieck auf eine Tafel oder eine Wand (*in tabulis suis vel in pariete*) entwerfen, dessen Fläche mit Hilfe einer auf der Zeichnung gemessenen Höhe berechnen und

---

[1]) M. Curtze in Zeitschr. Math. Phys. XL, Histor.-liter. Abtlg. S. 161 Note. [2]) Curtze brieflich. [3]) Curtze brieflich unter beigefügter Hinweisung auf *Bulletino Boncompagni* VII, 350 Note, wo eine Perspective eines Magister de Clavasio genannt ist.

sich dann durch Proportionen helfen. Wie das ähnliche Dreieck herzustellen sei, ob aus den Seitenlängen, oder ob Dominicus gar an eine dem späteren Messtische verwandte Vorrichtung dachte, ist nicht angegeben. Jedenfalls erkennen wir in Dominicus de Clavasio einen für seine Zeit hervorragenden Mathematiker.

Wir gelangen zu Nicole Oresme[1]) (ungefähr 1323—1382). Der Name kommt in sehr verschiedenen Formen vor, z. B. Orem, Horem, Horen; auch für den Vornamen findet man mitunter Jean statt Nicole oder Nicolas. Ob Oresme, wie eine Ortssage berichtet, in dem Dörfchen Allemagne bei Caen, ob in Caen selbst geboren ist, steht nicht fest. Jedenfalls kommt der Name Oresme in Urkunden der Stadt Caen zu sehr verschiedenen Zeiten vor, im XIV. und noch im XVII. Jahrhunderte. Im Jahre 1348 trat Oresme in das Collège de Navarre in Paris ein, dem er bis 1361 angehörte, zuerst als Schüler, dann als Lehrer, zuletzt als Vorsteher. Da die Schüler der Regel nach zwischen dem 20. und 30. Lebensjahre standen, so hat man daraus auf das etwaige Geburtsjahr des Oresme schliessen können. Auch ein Datirungsversuch einiger Schriften ist versucht worden. Nach den Satzungen des Collège de Navarre durfte kein Angehöriger desselben in anderer Sprache als in der lateinischen schreiben, daher müssen französische Schriften des Oresme nach 1361 entstanden sein, während natürlich die umgekehrte Folgerung, alle seine lateinischen Schriften müssten vor 1361 zurückgreifen, nicht gezogen werden darf. In dem genannten Jahre wurde Oresme zum Decan der Kirche zu Rouen ernannt und musste trotz anfänglichen Widerstrebens seinen Wohnsitz dort nehmen. Dort trat er in Beziehung zu Karl V. dem Weisen von Frankreich, der 1337 geboren und seit 1356 Regent, nicht Oresme's Schüler gewesen sein kann, wie man sonst annahm. Auf Veranlassung des Königs übersetzte Oresme mehrere aristotelische Schriften aus den schon vorhandenen lateinischen Uebersetzungen in's Französische. Seine Ausdrucksweise in dieser letzteren Sprache wird sehr gerühmt. Auch sein Latein war vorzüglich, und eine Predigt, welche er am Weihnachtsabend 1363 in Avignon hielt (die

[1]) Max. Curtze hat diesen Mathematiker so gut wie neu entdeckt und ihm drei Abhandlungen gewidmet, welche wir als Curtze, Oresme I, II, III citiren werden. I. Der *Algorismus Proportionum* des Nicolaus Oresme zum ersten Male nach der Handschrift R. 4°. 2 der Gymnas.-Bibliothek zu Thorn herausgegeben (1868). II. Zeitschr. Math. Phys. XIII, Supplementheft S. 92—97. III. Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme (1870). — Ein Commentar des Oresme zu den *Meteorologica* des Aristoteles, welchen H. Suter in der Stiftsbibliothek zu St. Gallen entdeckte und Zeitschr. Math. Phys. XXVII, Hist.-liter. Abthlg. S. 121—125 zum Theil bekannt machte, scheint sehr interessant für die Geschichte der Physik zu sein.



Veranlassung seines Aufenthaltes dort ist unbekannt), und in welcher er schonungslos die Schwächen und Fehler des Papstes und seiner Cardinäle geisselte, wird als nach Form und Inhalt vollendet bezeichnet. Ein zweiter Aufenthalt in Avignon von 1366 ist unwahrscheinlich. Den gleichen Muth wie in der erwähnten Predigt legte Oresme in einer 1374 verfassten Schrift gegen Astrologie und Zeichendeuterei an den Tag, den gleichen in einer vielleicht derselben Zeit entstammenden Schrift gegen die Bettelorden. Am 16. November 1377 wurde Oresme, unterstützt von dem König, zum Bischof von Lisieux gewählt. Als solcher starb er am 11. Juli 1382. Wann der französisch geschriebene Traité de la sphère verfasst ist, lässt sich ausser durch die nothwendige oben begründete Begrenzung auf die Zeit nach 1361 nicht bestimmen. Das in 50 Kapitel zerfallende Werk gehört überdies seinem Inhalte nach nicht hierher, abgesehen davon, dass es wesentlich Neues, was nicht auch schon in dem ähnlich betitelten Werke Sacrobosco's (S. 87) gestanden hätte, kaum gebracht zu haben scheint. Neu war nur die Sprache, diese aber mustergiltig für alle Zukunft, so dass heute noch die französischen Kunstausdrücke der Sternkunde und der Erdbeschreibung fast durchgängig die von Oresme eingeführten sind.

Unter Oresme's mathematischen Schriften nennen wir zuerst den Tractatus de latitudinibus formarum. Ob er vor 1361 geschrieben wurde, während Oresme Lehrer am Collège de Navarre war, ob die noch zu nennenden mathematischen Schriften aus dem gleichen Zeitraume stammen, lassen wir dahingestellt. Sicher ist, dass dieses Werk einen mächtigen Lehreinfluss übte, dass es 1482, 1486, 1505, 1515 im Drucke erschien mit einer Raschheit der Aufeinanderfolge dieser Ausgaben, welche die Häufigkeit der Benutzung verbürgt. Oresme selbst legte offenbar dem Gegenstande nicht geringere Wichtigkeit bei, da er ihn noch einmal, und wie es scheint ausführlicher in einem handschriftlich gebliebenen Tractatus de Uniformitate et difformitate intensionum behandelte[1]). Der Anfang dieses erweiterten Werkes lautet: „Bei Ordnung der Erzeugnisse der Einbildungskraft der Alten oder meiner eigenen über Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit der messbaren Naturerscheinungen begegnete mir einiges Andere, was ich mit hinzuzog.“ Wer sind die Alten, *veteres*, welche Oresme hier unzweideutig als seine Vorgänger bezeichnet? Man hat die Worte auf arabische Schriftsteller

[1]) Curtze, Oresme III, 11—13 besonders S. 12 Z. 6—8: *Cum ymaginacionem veterum vel meam de uniformitate et difformitate intensionum ordinare incepissem occurerunt mihi quaedam alia que huic proposito interieci.*

deuten wollen[1]). Wir können uns dieser Meinung nicht anschliessen, so lange der logische Begriff der *forma* noch nicht bei Arabern nachgewiesen worden ist, wenn wir auch anerkennen, dass Oresme ihm zeitlich so nahe stehende Männer, wie etwa einen Suicet, gewiss nicht als „Alte" bezeichnet haben wird. Wir haben bei unserer Wiedergabe der Anfangsworte einer freieren Uebertragung uns bedienen zu dürfen geglaubt, als da wir (S. 120—121) den Spuren des Formbegriffes nachgingen, aber dass wir dem Sinne treu geblieben sind, ist aus jenen Auseinandersetzungen und nicht weniger aus dem zu erkennen, was bei Oresme an jene Anfangsworte sich anschliesst. Dort heisst es ungefähr[2]), dass das Ausmaass der Erscheinungen (latitudines formarum) vielfältigem Wechsel unterworfen sei, und dass solche Vielfältigkeit nur sehr schwer unterschieden werde, wenn ihre Betrachtung nicht auf die von geometrischen Figuren zurückgeführt sei. Das klingt fast ebenso, als wenn ein Schriftsteller unserer Tage verspricht, den Verlauf gewisser Erscheinungen durch eine Zeichnung zu versinnlichen, und thatsächlich ist es auch das Gleiche. Ausser der latitudo kommt regelmässig eine longitudo vor, welche das vorstellt, was wir heute Abscisse nennen, während die Latitudo unserer Ordinate entspricht. Als Länge wird nämlich die eine Grösse z. B. die Zeit aufgetragen, welche bei den in Frage stehenden Erscheinungen als veränderlich auftritt, und senkrecht zu der Länge als Breite zeichnet man das an jenen Erscheinungen als messbare Menge sich Aeussernde, z. B. die Wärme. Der Unterschied auf einander folgender Breiten heisst *gradus latitudinis.* Wo gar keine Breite vorhanden ist oder, wie man heute sagen würde, wo die Ordinate Null ist, spricht man von *non gradus*, wo sie eine bestimmte Ausdehnung besitzt, von *certus gradus.* Die Erscheinung kann nun entweder als unveränderliche sich zeigen, die latitudo ist *uniformis eiusdem gradus per totum*, bleibt einförmig von der gleichen Ausdehnung über die ganze Länge hin, oder aber die Erscheinung ist eine veränderliche, die latitudo ist *difformis per oppositum*, missförmig durch den Gegensatz. Die *latitudo secundum se totam difformis* zeigt als Verbindung der Endpunkte aller Breiten eine auf- oder abwärts gerichtete krumme oder grade Linie, die *latitudo secundum partem difformis* besitzt als solche Verbindung theilweise eine der Längenlinie parallele Gerade. Die Veränderlichkeit der Breite kann dieselbe als *uniformiter difformis* oder als *difformiter difformis*

[1]) Suter, Math. Univ. S. 48—49. [2]) Curtze, Oresme II, 92: *Quia formarum latitudines multipliciter variantur et multiplicitas difficillime discernitur nisi ad figuras geometricas consideratio referatur etc.*



erscheinen lassen. Im ersten Falle ist der *excessus graduum*, welcher die Veränderlichkeit misst, immer derselbe, im zweiten nicht; im ersteren Falle liegen, würden wir sagen, die Endpunkte der Breiten auf einer geneigten Geraden, im zweiten auf einer eigentlichen Curve. Unter der letzteren Voraussetzung können die excessus graduum, welche also hier ungleich sein müssen, eine arithmetische Progression, die latitudines selbst also eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden. Oresme benennt diese latitudines als *uniformiter difformiter difformes* und giebt als Beispiel 0, 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, wobei allerdings der Anfang mit 0 statt mit 1 als irrig erscheint. Diese Erläuterungen sind wohl geeignet rückwärts einiges Licht auf die Figuren 24 und 25 zu werfen, welche wir (S. 122) Suicet entnahmen. Wir verstehen jetzt ihr Vorkommen in einem Kapitel, welches die Ueberschrift *De difformibus* führt. Noch einen Kunstausdruck Oresme's haben wir zu erörtern, die *figura.* Sie wird gebildet durch zwei latitudines, das Stück longitudo, welches zwischen ihnen sich findet, und die Verbindungslinie der Endpunkte aller latitudines. Diese figura wird zum mindesten zwei Winkel besitzen, wenn sie mit einem non gradus beginnt und mit einem eben solchen aufhört, z. B. wenn sie aus der Längenlinie und einem Kreisbogen besteht, welch letzterer nicht grösser als der Halbkreis sein darf, eine ganz natürliche Einschränkung, ohne welche Curvenpunkte auftreten würden, deren Längen rückwärts vor dem Anfange der Längen sich befinden müssten, während von solchen negativen Abscissen, um wieder den heutigen Ausdruck zu benutzen, keine Rede sein kann.

Oresme hat den ganzen Gegenstand in drei Abschnitten behandelt und dabei die auftretenden Figuren geschildert. Zuletzt er geht er sich in einigen Bemerkungen[1]), auf welche wir besonders aufmerksam machen müssen, wenn wir auch nicht wissen, ob Oresme selbst grosses Gewicht auf sie gelegt hat. Wird die Figur durch einen Kreisabschnitt gebildet, welcher, wie wir sahen, nicht grösser als der Halbkreis sein darf, so wächst in ihr die latitudo vom Anfang bis zur Mitte und nimmt dann wieder bis zum Ende ab. Bei einer solchen Figur ist die Aenderung der Geschwindigkeit des Wachsens und Fallens am obersten Punkte am langsamsten, dagegen ist die grösste Geschwindigkeit der Zunahme, beziehungsweise der Abnahme, am Anfang und am Ende der Figur vorhanden. Das Verhältniss zwischen Form und Form ist dasselbe wie zwischen den entsprechenden Figuren.

Unser nothdürftiger Auszug wird, denken wir, die Tragweite der

[1]) Curtze, Oresme II, 96.

Untersuchungen des Oresme und seiner Vorgänger, gleichviel wer sie waren, und wie viel einem Jeden angehört, erkennen lassen. Wir sehen hier eine curvenmässige Darstellung des Verlaufes von Naturerscheinungen vor uns. Wir sehen die Anwendung von Coordinaten, d. h. von gewissen in allen Fällen gleichmässig benutzten, an sich willkürlichen Linien, welche also keineswegs jenen Hilfslinien zu vergleichen sind, deren die griechischen Geometer des grossen Jahrhunderts, die Archimed und Apollonius, sich bedienten. Wohl haben auch jene gewisse Hilfslinien in einer ganzen Anzahl von Beweisführungen gezogen und dadurch die Beweise gleichmässiger zu machen gewusst, aber es waren Linien, die den Curven, um deren Eigenschaften es sich handelte, schon angehörten, welche zweckmässig auszuwählen eine Entdeckung genannt werden mag, keine Erfindung war. Nur die geographische Länge und Breite kann als Vorbild gedient und die Wahl der Kunstausdrücke beeinflusst haben. Haben wir bis hierher verhüten wollen, dass man das Neue an den latitudines unterschätze, so ist nicht minder vor Ueberschätzung zu warnen. Die Lehre von den latitudines ist keineswegs der Methode der späteren analytischen Geometrie gleich zu achten. Ihr fehlt das Entscheidende jener Methode: neben der begrifflichen Uebereinstimmung zwischen analytischer Formel und geometrischer Form die Möglichkeit von der Einen zur Anderen überzugehen, in welcher Richtung man wolle, und auch nachdem gewisse Zwischenschlüsse nur innerhalb der einen Vorstellungsreihe vorgenommen wurden. Auch die zuletzt oben im Drucke hervorgehobenen Stellen ändern nichts an dieser Beschränkung. Oresme's Augen offenbarte sich die Wahrheit des Satzes, den man 300 Jahre später in die Worte kleidete: an den Höhen- und Tiefpunkten einer Curve sei der Differentialquotient der Ordinate nach der Abscisse Null; dass er ihn bewiesen, nur nach einem Beweise sich umgethan hätte, davon ist keine Spur zu entdecken, und erst mit dem Beweise wurde das scharfsinnige Sehen zum tiefsinnigen Verstehen. So ist uns die Methode Oresme's eine Vorläuferin der analytischen Geometrie. Sie wird den Erfindern derselben, wenn sie ihnen bekannt war, die wesentlichsten Dienste geleistet haben, mindestens eben so wesentliche als das Studium der griechischen Curvenlehre, wenn auch von ganz anderer Seite her, aber eine Erfindung blieb noch immer zu machen.

Eine weitere mathematische Abhandlung[1]) Oresme's, welche 1505 in Venedig zugleich mit dem Tractatus de latitudinibus im Drucke erschien, ist der Tractatus proportionum. Wir können rasch

[1]) Curtze, Oresme III, 4—6.



an ihm vorübergehen, da sein Inhalt ein längeres Verweilen zu beanspruchen nicht angethan ist. Es handelt sich um Addition und Subtraction von Verhältnissen, den bekannten Kunstausdrücken, statt deren richtiger von Multiplication gesprochen worden wäre, da sie $a:b$ mit $c:d$ vereinigend $ac:bd$ hervorbringen und nur darin sich unterscheiden, dass die zu vereinigenden Verhältnisse das eine Mal beide direct oder beide indirect sind, das andere Mal Eines direct und Eines indirect. Dergleichen Ausdrücke hat sich Jordanus im fünften Buche seiner Arithmetik bedient, während der Anhang zum Algorithmus demonstratus (S. 67), wie wir hier bei passenderer Gelegenheit ergänzen wollen, eine andere Redewendung gebraucht und nur von einer Proportion spricht, die aus zwei anderen zusammengesetzt ist[1]). Dann kommen bei Oresme mittlere Proportionalen zur Rede, hierauf Verhältnisse von Verhältnissen, endlich in den drei letzten Kapiteln Verhältnisse von Bewegungen überhaupt und Bewegungen der Himmelskörper, sowie die gegenseitige Messbarkeit solcher Bewegungen.

Ein Werk von ganz anderer wissenschaftlicher Bedeutung ist der Algorismus proportionum[2]). Drei Abschnitte bilden denselben. Der 1. Abschnitt beginnt mit Definitionen, was man unter halbem, doppeltem, anderthalbfachem u. s. w. Verhältnisse verstehe. Die Bedeutung ist die der Quadratwurzel, des Quadrates, der Quadratwurzel aus dem Kubus u. s. w. unter einer bestimmten, wenngleich nirgend ausgesprochenen Voraussetzung, dass nämlich das Vorderglied grösser sei als das Folgeglied. Im entgegengesetzten Falle ist nie von *proportio*, sondern nur von *fractio* die Rede. So ist z. B. $4^3 = 64$, $\sqrt{64} = 8$, also steht 8 zu 4 in anderthalbfachem Verhältnisse. Heute schreibt man $8 = 4^{1\frac{1}{2}}$, Oresme schrieb

$$\boxed{1^p \frac{1}{2}}\ 4 \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{p \cdot 1}{1\,.\,2}}\ 4.$$

Er war somit der Erfinder der Potenzgrössen mit gebrochenen Exponenten und einer Bezeichnung derselben, welche der viel später eingeführten Schreibweise, deren man heute sich bedient, dem Begriffe nach gleichkommt. Ein Verhältniss zweier ganzer Zahlen, die als solche gegeben sind, z. B. $13:9$, wobei die erste Zahl die zweite um $\frac{4}{9}$ übertrifft, ist rational[3]). Irrational ist ein Ver-

[1]) *Si proportio primi ad secundum constituitur ex proportione tertii ad quartum et quinti ad sextum.* [2]) Der erstmalige Abdruck der in zahlreichen Abschriften erhaltenen Abhandlung bei Curtze, Oresme I. [3]) *Et quecunque*

hältniss, bei welchem ein gebrochener Exponent auftritt. Wir haben (S. 117) Bradwardinus im Besitze dieses Wortes gesehen, und wenn es sich auch weder bei Bradwardinus noch bei Oresme um das Erstlingsrecht der mathematischen Benutzung von irrational handelt, so lässt das doppelte Vorkommen eine sehr rasche Verbreitung vermuthen. Neue Regeln lehren nun das Rechnen mit rationalen sowie mit irrationalen Verhältnissen. Addition und Subtraction der Verhältnisse in dem Sinne, wie jene auch im Tractatus proportionum vorkommen, bilden die beiden ersten Regeln. Die dritte Regel[1]) lässt gleich den übrigen sich nur sehr schwer aus ihrem Wortlaute verstehen, während die überall vorhandenen Zahlenbeispiele den wenn auch nicht mühelos zu benutzenden Schlüssel in die Hand geben. Setzt[2]) z. B. die dritte Regel $4^{\frac{2}{3}} = (4^2)^{\frac{1}{3}} = 16^{\frac{1}{3}}$, so ist der Zusatz, genau so müsse man bei anderen Zahlen verfahren, sicherlich mit dem Sinne verbunden

$$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{m}},$$

wozu die Folgerung sich noch beifügt[3]), es sei $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$ und allgemein

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{1}{m}}.$$

Ohne dem Texte weiter genau uns anzuschliessen, begnügen wir uns mit der Angabe der sechs übrigen Regeln in den Zeichen heutiger Buchstabenrechnung:

$$\left(a^m\right)^{\frac{p}{q}} = \left(a^{mp}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{rp}\right)^{\frac{1}{s}} \text{ unter der Voraussetzung } \frac{m}{q} = \frac{r}{s},$$

$$a \cdot b^{\frac{1}{n}} = \left(a^n \cdot b\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a^n}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{p}{mp}},$$

*portio rationalis scribitur per suos terminos sev numeros minimos, sicut dicitur proportio.* 13. *ad.* 9. *que vocatur superpartiens quatuor nonas.*

[1]) *Si proportio irrationalis fuerit partes alicuius rationalis, ipsam possibile est partem notare.* [2]) *Proponatur proportio, que sit due tertie quadruple; et quia duo est numerator, ipsa erit una tertia quadruple duplicate seu sedecuple, et sic de aliis.* [3]) *Due tertie subduple proportionis sunt una tertia duple. Et sic de quibuslibet partibus.*



und unter Anwendung dieses Satzes

$$a^{\frac{1}{e}} \cdot b^{\frac{1}{f}} = \left(a^f\right)^{\frac{1}{ef}} \cdot \left(b^e\right)^{\frac{1}{ef}} = \left(a^f \cdot b^e\right)^{\frac{1}{ef}},$$

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \left(ab\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Das Zahlenbeispiel[1]) zur Regel $a \cdot b^{\frac{1}{n}} = \left(a^n \cdot b\right)^{\frac{1}{n}}$ lautet folgendermassen: $2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} = \left(2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(6\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. Oresme zeigt sich in diesem ganzen Abschnitte einestheils als bewandert in der Arithmetik des Jordanus, auf welche er gleich bei der ersten Regel sich beruft, und der er in der Anwendung von Buchstaben als Vertreter allgemeiner Zahlen nacheifert[2]), er geht aber anderntheils so weit über seinen Vorgänger hinaus, dass ihm selbst erst nach mehreren Jahrhunderten Nachfolger entstehen. Oresme fühlt auch ganz gut das Unzutreffende in der Redewendung Addition und Subtraction von Verhältnissen; er wendet sie nur an, weil er eben einer einmal eingebürgerten Ausdrucksweise, sei sie auch falsch, entgegenzutreten für misslich hält. Er empfindet, dass man eine Multiplication von Verhältnissen zu fordern berechtigt wäre, während er keine Operation sieht, welche dieses Verlangen erfüllte[3]). Verhältnisse, sagt er, kann man nicht miteinander vervielfachen, so wenig als man die Multiplication eines Menschen mit einem Esel vollziehen kann[4]). Der 2. Abschnitt enthält Anwendungen der im 1. Abschnitte gegebenen Regeln. Zuerst ist von dem Verhältnisse von Würfeln die Rede, welches, um in der Sprache Oresme's zu bleiben, als das Anderthalbfache des Verhältnisses der Grundflächen sich berechnet. Ein Würfel $a$ habe eine zweimal so grosse Grundfläche wie der Würfel $b$, eine dreimal so grosse wie der Würfel $c$, dann ist $a$ so viel wie $8^{\frac{1}{2}}$ von $b$, und $b$ ist $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$ von $c$. Das Vorkommen eines Schreib- oder Rechenfehlers, mitels dessen $b$ als $\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$ von $c$ angesetzt wird, kann kaum überraschen, da wir volles Recht haben zu zweifeln, ob der

[1]) *Addatur una tertia duple proportione sesquialtere; continuentur ergo 3 sesquialtere cum dupla et exibit proportio sextupla superpartiens* $\frac{3}{4}$ *que est proportio* 27 *ad* 4. *Et ista proportio sic resultans scribitur sic* $\frac{1}{3} \cdot 6^p \cdot \frac{3}{4}$.
[2]) So bei der 9. Regel: *si tertia pars a addatur tertie parti b exibit tertia pars illius quod fieret ex additione a ad b.* [3]) *Una vero proportio per alteram non multiplicatur nec dividitur nisi inproprie.* [4]) *sicut nec multiplicare hominem per asinum*

Abschreiber überall verstand, fähig war zu verstehen, was er schrieb. Aehnlich wie bei den Würfeln mit gegebenen Grundflächen ist die Verhältnissmässigkeit bei Kugeln mit gegebenen Grösstenkreisen. Eine musikalische Aufgabe ist folgende. Es seien $b$ und $c$ die Seiten zweier Quadrate, $a = c \cdot \sqrt{2}$ die Diagonale des ersten Quadrates. Nach Boethius[1]) geben über $b$ und $c$ gespannte Saiten Töne von einem Halbton Unterschied, wenn $a : b = 256 : 243$ oder

$$c : b = \sqrt{\frac{256^2}{2}} : \sqrt{243^2}$$

d. h. $= \sqrt{32768} : \sqrt{59049}$. Auffallend genug ist, dass das Verhältniss des grösseren zum kleineren Quadrate nicht einfach als das von $59049 : 32768$ bezeichnet wird, sondern als das halbe Verhältniss (d. h. Verhältniss der Quadratwurzeln) aus 3486784401 und 1073741824. Oresme schiebt jetzt plötzlich wieder eine Regel ein. Er nimmt als bekannt an $a : b = c : 1$, ferner $d = e \cdot a$, $f = g \cdot b$, endlich $h$ als Verhältniss zwischen $g$ und $e$ und sucht nun das Verhältniss zwischen $d$ und $f$ zu bestimmen. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden: $e = g$, $e > g$, $g > e$. Im ersten Falle ist $d : f = a : b$ sofort ersichtlich. Im zweiten Falle ist $e : g = h : 1$, ausserdem $a : b = c : 1$ und durch Addition (Vereinigung) der beiden letzteren Proportionen $ae : bg = ch : 1$ d. h. $d : f = ch : 1$. Der dritte Fall $g : e = h : 1$ unterscheidet selbst wieder die drei Unterfälle $c = h$, $c > h$, $h > c$. Ist $c = h$, so ist $a : b = g : e$, $ea = gb$ d. h. $d = f$. Ist $c > h$, so ist $a : b = c : 1$, $g : e = h : 1$ und durch Subtraction der Verhältnisse $ae : bg = c : h$ d. h. $d : f = c : h$. Endlich bei $h > c$ findet die Subtraction der Proportionen im entgegengesetzten Sinne statt, es folgt $bg : ae = h : c$ oder $f : d = h : c$. Dem heutigen Leser wird die Nothwendigkeit der Unterscheidung aller dieser Fälle nur dann einleuchten, wenn er sich stets in Erinnerung hält, dass, wie oben gesagt wurde, ein Verhältniss nur von dem Grösseren zum Kleineren angenommen wird, nie umgekehrt. Anwendungen für diese Auseinandersetzung findet Oresme in Aufgaben, welche eine Subtraction von Verhältnissen bei ihrer Lösung erfordern. Wir übergehen ein Beispiel, welches dem Zahlenkampf genannten Spiele entnommen ist, ohne mehr darüber zu sagen, als dass es immerhin bemerkenswerth erscheint, dass jenes Spiel, über welches ein gewisser Fortolfus um das Jahr 1100 eine Abhandlung schrieb[2]), auch 250 Jahre später noch in Uebung war. Dagegen führen wir die Aufgabe an, das Verhältniss der dreifachen

[1]) Oresme meint, wie Curtze, Oresme II, 75 Note richtig bemerkt hat, die Stelle Boethius: *De institutione musica* I, 17 (ed. Friedlein pag. 204 Z. 8—9).
[2]) R. Peiper in Zeitschr. Math. Phys. XXV, Supplementheft S. 210.



Diagonale eines Quadrates zu dessen vierfacher Seite zu finden. Hier ist, wenn $a$ die Seite, $d$ die Diagonale bedeuten soll, $3d : a = 3\sqrt{2} : 1$ neben $4a : a = 4 : 1$, Subtraction der zweiten Proportion von der ersten giebt $3d : 4a = 3\sqrt{2} : 4 = \sqrt{\frac{9}{8}} : 1$. In den beiden letzten Aufgaben des Abschnittes handelt es sich um die Ermittelung des Verhältnisses zweier Geschwindigkeiten, nämlich derer zweier Punkte, die einmal die Umfänge zweier Kreise von gegebenem Grössenverhältnisse, das andere Mal die Diagonale und die Seite eines Quadrates in gegebenen Zeiten durchlaufen. Der 3. Abschnitt beschäftigt sich mit regelmässigen Sehnen- und Tangentenvielecken desselben Kreises. Derartige Dreiecke und Vierecke, Sechsecke und Achtecke werden ihren Flächen nach in Verhältniss gesetzt. Der letzte Satz dieser Gruppe sagt aus[1]), das Sehnenachteck sei mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Sehnen- und Tangentenvierecke, und eine Handschrift des Algorismus proportionum fügt noch hinzu[2]), was vom Achtecke ausgesagt sei, gelte auch von anderen Figuren. Wir erinnern uns des gleichen Satzes mit der gleichen Ausdehnung bei Jordanus Nemorarius (S. 78). Den Schluss des Ganzen bildet eine kürzere Untersuchung über die sogenannten Aspecten und ihre Verhältnisszahlen, zeigt also Oresme als auch in astronomischen Dingen nicht ganz unerfahren, zeigt zugleich ebenso wie die mechanischen Aufgaben des 2. Abschnittes eine immerhin vorhandene Gedankenverwandtschaft zwischen dem Tractatus proportionum und Theilen des 2. und 3. Abschnittes des Algorismus proportionum, so hoch der letztere über dem ersteren stand. In ihm hat Oresme einen Gipfelpunkt erreicht, der so weit über das Vorherbekannte sich erhob, dass gespannte Erwartung sich äussern darf, nach welcher Richtung der nächste Fortschritt sich vollziehen werde.

## 48. Kapitel.

## Deutsche Mathematiker.

Jetzt grade trat das ein, was wir (S. 123) angekündigt haben. Frankreich wich von der ersten Stelle, welche es wissenschaftlich eingenommen hatte. England, das wir als nächstberechtigten Erben zu betrachten nach den vorhergegangenen Untersuchungen allen

[1]) *Octogonus circulo inscriptus est medium proportionale inter quadratum eidem circulo inscriptum et quadratum eidem circumscriptum.* [2]) Curtze, Oresme I, 11 Note.

Grund haben, trat die Erbschaft nicht an. Deutschland und Italien sind die beiden Länder, in welchen der edle Wettstreit um das Uebergewicht innerhalb der Wissenschaft beginnt. Die Gründe dieser erst im XV. Jahrhundert sich vollziehenden Wandelung liegen bereits im XIV. Jahrhunderte und müssen hier auseinandergesetzt werden.

Zwei grosse geschichtliche Ereignisse sind es vorzugsweise, welche die Verschiebung der geistigen Machtverhältnisse begleiten, wenn nicht hervorrufen. Genannt haben wir beide im Vorübergehen, und zwar in Verbindung mit dem Namen des grössten englischen, des grössten französischen Mathematikers des XIV. Jahrhunderts. Von Bradwardinus berichteten wir (S. 113), dass er 1340 bis 1346 König Eduard III. auf seinen Kriegszügen in Frankreich begleitete, von Oresme (S. 128), dass er 1363 in Avignon eine berühmte Predigt über oder gegen den Papst hielt. Und nun wiederholen wir ausdrücklich, dass wir unter den Ereignissen, welche, so fern sie wissenschaftlichen Bestrebungen zu liegen scheinen, in der Geschichte der Mathematik eine keineswegs unwesentliche Rolle spielen, den englisch-französischen Erbfolgekrieg und den vorübergehenden Aufenthalt der Päpste in Avignon verstehen.

Philipp IV. mit dem Beinamen der Schöne war 1314 gestorben, und der französische Thron vererbte sich auf seinen Sohn. Aber dieser Mannesstamm erlosch 1328, und die Krone ging an die Seitenlinie der Valois über. Eduard III. von England erhob als Schwiegersohn Philipp des Schönen Einsprache und verlangte, entgegen dem in Frankreich geltenden, weibliche Erbfolge ausschliessenden, salischen Gesetze, die französische Krone für sich. Das war der Anfang des langwierigen, auf französischem Boden mit wechselndem Glücke geführten Erbfolgekrieges, der erst 1436 mit dem Einzuge Karls VII. in Paris als beendigt angesehen werden kann. Wogte wildes Kriegestreiben ein Jahrhundert lang in Frankreich, so genoss England keineswegs viel grösseren Friedens, da Kämpfe zwischen England und Schottland in Abwechslung mit den inneren Streitigkeiten, die man unter dem Namen der Kämpfe zwischen der weissen und der rothen Rose kennt, das Land zerfleischten. Schiller's Jungfrau von Orleans, Shakespeare's Königsdramen haben die Kenntniss aller dieser Kämpfe in weite Kreise getragen. Sie bilden die eine Gruppe von Ereignissen, welche wir als dazu angethan erwähnten, den schönen wissenschaftlichen Anlauf zu hemmen, welchen die Geschichte der Mathematik aus England wie aus Frankreich zu verzeichnen hatte.

Und nun die andere Gruppe von Thatsachen folgereicher Natur. Wieder bis zu Philipp dem Schönen müssen wir zurückgreifen, zu dessen Kämpfen mit Papst Bonifacius VIII. Bannfluch und Interdict



erwiesen sich als unwirksam dem Könige sein Land zu entfremden. Bonifacius starb 1303 moralisch besiegt. Sein Nachfolger, Benedict XI., folgte ihm vor Jahresfrist in's Grab, und als nun eine französische Partei unter der hohen Geistlichkeit die Wahl des Bischofs von Bordeaux zum Papste als Clemens V. durchsetzte, verlegte dieser 1305 den Sitz der päpstlichen Gewalt nach Avignon. Nur Franzosen wurden 70 Jahre lang zu Päpsten gewählt. Sie fühlten sich, wie nicht mit Unrecht gesagt worden ist, als französiche Hofbischöfe auf ihrem Sitze zu Avignon. Gregor XI. zog erst 1377 wieder nach Rom, mit endlosem Jubel begrüsst. Sein baldiger Tod brachte Urban VI. die päpstliche Würde, die aber nicht ohne Anfechtung blieb. Ein französischer Gegenpapst, Clemens VII., nahm seinen Sitz in Avignon, und die grosse Kirchenspaltung begann, welcher erst die 1417 auf dem Concile zu Constanz getroffene Wahl des Papstes Martin V. ein vorläufiges Ende setzte. Die Kirchenspaltung hatte, wie nicht anders denkbar, auch den Universitäten sich mitgetheilt, den Stätten, aus welchen die Geistlichkeit hervorging. Bis in die pariser Universität drang der Zwist, und wenn im Grossen und Ganzen die Franzosen auf der Seite des Papstes von Avignon standen, so traten in naturgemässem Gegensatze die nicht französischen, meist deutschen Lehrer und Schüler der pariser Universität auf die Seite des in Rom befindlichen Papstes. Sie kehrten Paris, mehr oder weniger dazu gezwungen, den Rücken, und diese Auswanderung war erleichtert, ermöglicht, vielleicht mit hervorgerufen durch die schon vor der Kirchenspaltung erfolgte Entstehung neuer Universitäten in Deutschland. Prag wurde 1348, Wien 1365, Heidelberg 1386, Köln 1388, Erfurt 1392 zur Universität, gegründet nach dem Muster von Paris und dennoch dessen eifrige Nebenbuhler. Hierhin zog sich freiwillig oder einem Rufe folgend, wer in Paris sich nicht mehr am richtigen Orte fühlte, und Wien vor allen wurde die vorzugsweise mathematische Universität.

Hier dürfte der Ort sein zunächst einzuschalten, was an mathematischem Stoffe die Universität des XIV. Jahrhunderts dem Studirenden bot[1]). In Paris gewährte das Collège de Navarre, dem Oresme seit 1348 angehörte, gemäss seiner Satzungen von 1315 nicht mehr, als dass der leitende Magister verpflichtet war, täglich in einer Stunde über ein logisches, mathematisches oder grammatisches Werk in seiner Behausung zu lesen, je nach dem Wunsche der Mehrzahl

[1]) Quelle ist hierfür das vorzügliche Kapitel „Die Mathematik auf den Universitäten“ in Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter S. 354—359, zu welchem Suter, Math. Univ. weitere wesentliche Ergänzungen hinzufügte.

der Zuhörer[1]). Etwas besser wurde die Mathematik in der 1366 durch Papst Urban V. vorgenommenen Durchsicht der Universitätssatzungen von Paris bedacht[2]). Das Licentiat solle nur ertheilt werden können, wenn der Baccalaureus Vorlesungen über einige mathematische Bücher gehört habe, aliquos libros mathematicos audiverit. Ob freilich mehr als das Gehörthaben, ob auch ein Verstehen jener Vorlesungen gefordert wurde, davon steht in den Satzungen nichts, und ein besonderer Nachweis dürfte, wenn er verlangt worden sein sollte, nicht mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden gewesen sein. Genügte doch noch im XVI. Jahrhundert ein Eid[3]), man habe eine Vorlesung über die sechs ersten Bücher des Euklid gehört, statt der Prüfung.

Aus Prag kennen wir[4]) Satzungen von 1367 und ein Vorlesungsverzeichniss von 1366. In jenen sind gewisse Vorlesungen mit der dazu erforderlichen Zeit und dem gesetzlich dafür zu entrichtenden Honorare vorgeschrieben. Für 1 Groschen wurde während 6 Wochen Sphaera materialis vorgetragen, für 8 Groschen während eines halben Jahres sechs Bücher Euklid — natürlich die sechs ersten Bücher der Elemente. Am billigsten und schnellsten erlernte man Algorismus für 8 Heller in 3 Wochen; am theuersten und längsten war die Vorlesung über den Almagest angesetzt: sie dauerte ein Jahr und kostete 1 Gulden. Einmal wenigstens scheint diese kostspielige Vorlesung gehalten worden zu sein, wenn man den Schluss aus ihrer Ankündigung in dem erwähnten Vorlesungsverzeichnisse neben fünf anderen mathematischen Vorlesungen ziehen darf. Darunter sind die sechs ersten Bücher des Euklid, darunter sonderbarerweise auch Computus cyrometricalis, welcher das Handrechnen, d. h. Kopfrechnen unterstützt durch Zahlendarstellung mittels der Finger lehrte.

Auch für Wien[5]) stehen Satzungen von 1389 und Vorlesungsverzeichnisse aus den neunziger Jahren zur Verfügung. Die Satzungen schreiben neben den von Prag aus uns bekannten Gegenständen noch Vorlesungen über die Proportionen und über die Latitudines formarum vor, während die über den Almagest fehlen. Die Satzungen lassen uns allerdings andrerseits erkennen, dass die beiden neuen Lehrgegenstände nicht so vollkommen eingeübt worden sein werden, wie die Schriften des Oresme es wohl möglich gemacht hätten, wenn auch dessen Latitudines formarum dem Unterrichte zu Grunde lagen;

[1]) Suter, Math. Univ. S. 26. [2]) Hankel l. c. S. 355, wo aber irrigerweise 1336 als Jahreszahl steht. Suter l. c. S. 36. [3]) Kästner I, 260. [4]) Hankel l. c. S. 356. Suter l. c. S. 36—39. [5]) Suter l. c. S. 39—40 und 51.



für 3 Groschen Proportionen, für 2 Groschen Latitudines, das kann nicht sehr viel gewesen sein, wo die fünf ersten Bücher Euklid's 6 Groschen, die Perspectiva communis 5 Groschen kostete! Nichtsdesto weniger war es ein Fortschritt, der Wien als das kennzeichnet, was wir oben andeuteten, als die mathematischste unter den vor 1400 entstandenen Universitäten. Und ein Fortschritt war es ferner, dass verhältnissmässig hohe Anforderungen für die Erwerbung der Grade gestellt waren. Schon das Baccalaureat erforderte, dass vollständig und ohne Trug, complete et sine dolo, nachgewiesen werde die Vorlesung über die Sphäre, die über den Algorismus, die über das erste Buch Euklid's. Für das Licentiat waren erforderlich die fünf ersten Bücher Euklid's, Planetentheorie, Perspective und *irgend ein* Buch, aliquis tractatus, über Latitudines, irgend eines über Musik, irgend eines über Arithmetik. Endlich ist Wien die einzige Universität, deren Satzungen mit Bestimmtheit auch Disputationen über mathematische Dinge anerkennen, während fast nur Philosophisches dem mündlichen Wettstreite unterworfen war. Den satzungsmässigen Anforderungen zu genügen hielt aber nicht allzuschwer, wo die Vorlesungsverzeichnisse eine reiche Auswahl von Lehrern aufzeigten, die zu den einzelnen Unterrichtsgegenständen sich anboten. War doch ein solcher Zudrang von Lehrern, dass am 1. September 1391 die Artistenfacultät beschloss, die Auswahl der Gegenstände, über welche Jeder zu lesen habe, an eine Auslosung zu knüpfen. Da finden wir in dem genannten und in den Folgejahren Vorlesungen über Algorismus de integris und Algorismus de minutiis, über Arismetica, über Proportiones Bradwardini, über Euclides und über Latitudines formarum, über Computus physicus und Theoria planetarum, lauter uns bekannte oder doch leicht verständliche Gegenstände[1]).

Die Zeitfolge der Gründung führt uns nach Heidelberg[2]). Auch hier sind für Erwerbung des Licentiates, dagegen noch nicht für die des Baccalaureates, gewisse mathematische Voraussetzungen. Auch hier freilich gilt wie in Paris ein Eid als hinlänglicher Beweis der Erfüllung jener Voraussetzungen. Wer das Licentiat erwerben will, muss schwören, dass er einige mathematische Bücher ganz, nicht bloss theilweise gehört habe, dass er insbesondere die Vorlesung über die Weltkugel gehört habe, und dass er an Disputationen sich betheiligt habe, wobei die Frage, ob diese Disputationen einem anderen mathematischen Wissensgebiete als dem Tractatus de spera (sic) mundi angehört haben, für uns eine offene ist. Später werden in

[1]) Eine sehr übersichtliche Tabelle bei Günther, Unterricht Mittela. S. 199.
[2]) Suter, Math. Univ. S. 41 unter Anlehnung an Winkelmann, Urkundenbuch der Universität Heidelberg (1886) S. 33, 38, 42.

den Eidschwur auch die Latitudines formarum einbegriffen, natürlich unter der Vorbedingung, dass sie zur Zeit gelesen worden seien, si saltem legerentur.

In Köln verlangten[1]) die Satzungen von 1398 buchstäblich gleichlautend mit den Wiener Vorschriften als Voraussetzung für das Licentiat irgend ein Buch über Proportionen, irgend eines über Latitudines, irgend eines über Musik, irgend eines über Arithmetik, daneben aber nur drei Bücher des Euklid und angewandte Fächer wieder wie in Wien.

Diese kurze Zusammenstellung genügt, um die Wahrheit unserer Behauptung erkennen zu lassen, dass schon am Ende des XIV. Jahrhunderts die deutschen Bildungsstätten mehr als die Frankreichs die Eigenschaften in sich vereinigten, welche Mathematiker zu erziehen unerlässlich sind, dass sie Gelegenheit zum Lernen boten und satzungsmässig darauf hielten, dass von dieser Gelegenheit Gebrauch gemacht wurde. Selbst die Unsitte des Schwures, diese oder jene Vorlesung gehört zu haben, als hinreichenden Nachweises des erlangten Wissens verliert auf deutschem Boden etwas von ihrer Missgestalt, denn der Eid, allgemein aliquos libros mathematicos gehört zu haben, reicht nicht mehr aus; die zu hörenden Schriften sind besonders genannt und erstrecken sich auf alle damals bearbeiteten Gebiete der Mathematik, wenn auch, wie wir oben vermuthungsweise ausgesprochen haben, nicht in ihrer ganzen Ausdehnung.

Eines freilich blieb ungeändert: die Art des Unterrichtes an der Universität[2]). Sie bestand einzig darin, dass Lehrer und Schüler das gleiche Buch, dessen Vervielfältigung man daher frühe angestrebt haben muss, in Händen hatten, dass Ersterer vorlas und im freien Vortrage erläuterte und ergänzte, dass Letztere wenig oder nichts schriftlich aufzeichneten. Irgend ein Befragen der Schüler durch den Lehrer fand nicht statt. Nur die von uns wiederholt erwähnten öffentlichen Disputationen gaben Gelegenheit, einigermassen zu erkennen, wie viel oder wenig einer der Disputirenden in den Vorlesungen gelernt hatte. So war das Verfahren in allen Wissenszweigen, so auch in der Mathematik.

Wir müssen nun die Persönlichkeiten nennen, durch welche die örtliche Verschiebung nach Osten ins Werk gesetzt wurde. Es sind besonders zwei Gelehrte, die, obwohl Deutsche von Geburt, den Anfang ihrer Berühmtheit in Paris erlangten, die also auch dort hätten genannt werden können, wenn nicht genannt werden sollen, und die

[1]) Suter l. c. S. 41. [2]) Günther, Unterricht Mittela. S. 192—197.



als schon allgemein bekannte Männer in die Heimath übersiedelten: Albert von Sachsen, Heinrich von Hessen.

Albertus de Saxonia[1]) war, nach der gebräuchlichsten Angabe, aus Riggensdorf in Sachsen. Er war, wie es scheint, Schüler der eben gegründeten Universität Prag, ging dann nach Paris und wurde hier Magister der freien Künste, später Doctor der Theologie. Seit 1350 lehrte er, ein hervorragender Vertreter der Occam'schen Richtung, aristotelische Philosophie und Mathematik. Da berief ihn 1365 Herzog Rudolf IV. von Oesterreich als Rector an die in der Gründung begriffene Universität Wien, aber schon im folgenden Jahre vertauschte Albert diese Stellung mit der des Bischofs von Halberstadt, und als solcher starb er 1390. Mitglied irgend eines Mönchsordens scheint Albert von Sachsen nicht gewesen zu sein, da bei einer so bedeutenden Persönlichkeit die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Orden sich nahezu immer nachweisen lässt. Widersprechende Angaben wie die drei über Albert vorhandenen, er sei Dominikaner, Franciskaner, Augustiner gewesen, sind meistens alle unrichtig. Seine philosophischen Schriften kümmern uns hier nicht. Ob eine in Venedig handschriftlich erhaltene Abhandlung *De maximo et minimo*[2]) ihnen zuzuzählen, ob sie mathematischen Inhaltes ist, lässt sich nicht entscheiden, so lange sie noch nicht von einem Fachmanne untersucht ist, was jedenfalls sehr wünschenswerth wäre. An mathematischen Schriften des Albert von Sachsen ist ein *Tractatus de latitudinibus formarum* 1505 gedruckt, ein *Liber proportionum* gar in zehn verschiedenen Ausgaben, deren erste auf 1482 zurückgeht[3]). Der Inhalt der ersten Schrift scheint sich dem der gleichnamigen von Oresme, der der zweiten der Schrift Bradwardin's über Proportionen zu nähern. Allgemein zugänglich sind zwei Abhandlungen, welche aus einer Handschrift der berner Stadtbibliothek[4]) in einer mathe-

[1]) Die Hauptquellen sind zwei Abhandlungen von H. Suter, Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Hist.-liter. Abthlg. S. 81—101 und XXXII, Hist.-liter. Abthlg. S. 41—56, in welchen die beiden Tractate über Kreisquadratur und über Irrationalität der Diagonale des Quadrates erstmalig abgedruckt sind. Biographisches in der Allgem. deutsch. Biographie I, 182—183. Dort heisst Alberts Geburtsort: Rickmersdorf. Ein Aufenthalt in Pavia wird nur von Jacoli in *Bullet. Boncompagni* IV, 495 ohne jede Quellenangabe behauptet. Vielleicht ist es ein Druckfehler Pavia statt Parigi, ebenso auch die dortige Angabe, Alberts Blüthezeit sei 1330 gewesen statt 1350. Ueber seine philosophischen Schriften vergl. Prantl, Gesch. Log. IV. [2]) Aschbach, Geschichte der Wiener Universität I, 365. [3]) Bald. Boncompagni im *Bullet. Boncompagni* IV, 498—511. [4]) Codex A. 50 geschrieben am Anfange des XV. Jahrhunderts. Eine Beschreibung der Handschrift von Suter, Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Hist.-liter. Athlg. S. 84—85.

matischen Zeitschrift dem Drucke übergeben wurden. An der Richtigkeit der Annahme, dass hier wirklich in allein erhaltener Niederschrift zwei Abhandlungen Alberts von Sachsen vorhanden seien, ist nicht mehr zu zweifeln, seit stylistische Vergleichung derselben mit philosophischen Schriften des gleichen Verfassers die täuschendste Aehnlichkeit an den Tag gelegt hat[1]). So schreibt z. B. Albert, und fast nur er unter seinen Zeitgenossen, *Est dare* in der Bedeutung von: es giebt oder es muss geben. So ist in philosophischen Schriften die Zusage gegeben über Dinge, wie sie in den beiden Abhandlungen sich vorfinden, später wo möglich sich äussern zu wollen, womit zugleich eine Datirung dieser Abhandlungen als zu den letzten Erzeugnissen von Alberts schriftstellerischer Thätigkeit gehörend gesichert ist.

Die eine Abhandlung[2]) beschäftigt sich mit der Quadratur des Kreises. In echt scholastischer Weise wird zunächst untersucht, ob die gestellte Aufgabe gelöst werden könne, ob nicht. Gründe für und gegen werden aufgezählt. Bei jedem werden mit gleicher Unparteilichkeit Gegengründe gesucht. Es ist ein Hin- und Hertasten zwischen Ja und Nein. Es giebt, sagt der Verfasser, ein jedem Kreise umschriebenes, ein ihm eingeschriebenes Quadrat; jenes ist grösseren, dieses kleineren Inhaltes als der Kreis; gäbe es kein dem Kreise genau gleiches Quadrat, so wäre der Uebergang vom Grösseren zum Kleineren durch alle Mittelwerthe vollzogen, ohne dass man dabei zu einem bestimmten mittleren gelangt wäre[3]). Der Quadratur des Kreises zur Seite steht die Kubatur der Kugel; die Kugel aber kann kubirt werden, wie offenbar wird, wenn wir das Wasser, welches ein kugelförmiges Gefäss füllt, in ein würfelförmiges übergiessen[4]). Nein, heisst es dann, die Quadratur des Kreises ist doch nicht möglich, denn gäbe es eine solche, so müsste es auch eine Circulatur des Quadrates geben[5]) und eine solche ist noch niemals überliefert worden. Ein zweiter Gegengrund wird dem Buche über isoperimetrische Figuren entnommen, worunter offenbar jene im Mittelalter bekannte Nachbildung der Schrift des Zenodorus gemeint ist[6]); gäbe es ein dem Kreise flächengleiches Quadrat und wölbte man

[1]) Suter in Zeitschr. Math. Phys. XXXII, Hist.-liter. Abthlg. S. 41—42. [2]) Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Hist.-liter. Abthlg. S. 87—94. [3]) *Fieret transitus de majore ad minus, sive de extremo ad extremum transeundo per omnia media et tamen nunquam perveniretur ad equale vel ad medium.* [4]) *Sed sphera potest cubicari, ut patet, si aquam replentem vas sphericum infundamus ad vas quadraticum sive cubicum.* [5]) *Si circulus posset quadrari, quadratum posset circulari.* So ist das Wort Circulatur des Quadrates, welches wir Bd. I, S. 546 als Neubildung wagten, schon im XIV. Jahrhunderte in Gebrauch gewesen! [6]) Sie ist z. B. im Basler Codex F 2, 33 enthalten.



dessen Seiten nach aussen, so dass jeder Punkt der neuen Gestaltung gleich weit vom Mittelpunkte entfernt wäre, ohne dass dabei der Umfang eine Aenderung erlitte[1]), so müsste eine Fläche entstehen, die weit grösser wäre, als der ursprüngliche Kreis. Drittens müsste die Hälfte des dem Kreise gleichen Quadrates dem Halbkreise gleich sein, eine Figur mit rechten Winkeln einer Figur mit Winkeln, die keinem gradlinigen Winkel gleich sind, während Figurengleichheit durch Euklid und Campanus aus der Winkelgleichheit bewiesen wird[2]). Viel, meint der spitzfindige Schriftsteller, hängt davon ab, was man Quadriren nennt. Dem Einen ist Quadriren Viertheilung des Kreises durch zwei im Mittelpunkte sich senkrecht schneidende Durchmesser. So Campanus in seiner Theorie und viele andere Doctoren[3]). Zweitens meinen Ungelehrte, man könne den Kreis in eine einem Quadrate einigermassen ähnliche Figur verwandeln, indem man Stücke ringsherum abschneidet und anders anlegt. Die Dritten verstehen unter Kreisquadratur die Auffindung eines Quadrates, welches nicht etwa dem Kreise gleich sei, sondern dessen aneinander gelegte Seiten der zur Geraden ausgespannten Kreisperipherie gleichkommen, und so hat Campanus den Kreis quadrirt[4]). Viertens können wir unter Quadriren des Kreises verstehen ein dem Kreise gleiches Quadrat zu finden, dessen Seiten überdies (cum hoc) der zur Geraden ausgespannten Peripherie gleich kommen[5]). Fünftens können wir den Kreis so zu quadriren wünschen, dass wir ein dem Kreise flächengleiches Quadrat auffinden wollen. Nun werden wieder alle diese Auffassungen der Reihe nach kritisch untersucht. Die erste Kreisquadratur ist möglich, führt aber zu nichts. Die zweite ist unmöglich, denn die abgeschnittenen Stückchen geben, wie man sie auch an einander legen mag, keinen rechten Winkel. Die dritte Art hat Campanus vollzogen, indem er der Aussage vieler Philosophen folgend, die Länge der Kreisperipherie zu $3\frac{1}{7}$ Durchmesser annahm, eine Annahme, welche, wie es an einer späteren Stelle heisst, schwer beweisbar, aber doch beweisbar ist[6]). Für Albert von Sachsen war demnach wie für Campanus, wie für das ganze Mittelalter, $\pi = 3\frac{1}{7}$ kein Näherungswerth,

[1]) *si latera quadrati extendantur equaliter a centro.* [2]) *per equalitatem angulorum Euclides et Campanus probant equalitatem figurarum.* [3]) *Isto modo loquitur Campanus in theorica sua et multi alii doctorum.* Welche Schrift des Campanus gemeint ist, wissen wir nicht. [4]) *et isto modo Campanus quadravit circulum.* Unsere Leser erinnern sich, dass wir uns S. 101 zum voraus auf diese Stelle berufen haben. [5]) Dass wir die sprachlich schwierige Stelle richtig übersetzt haben, folgt aus Alberts späterer eigener Polemik gegen diese vierte Auffassung. S. S. 146 Note 2. [6]) *est demonstrabile ad intellectum quamvis difficile.*

sondern genau richtig[1]). Die vierte Auffassung der Kreisquadratur ist wieder unmöglich, weil unter isoperimetrischen Figuren der Kreis die grösste Fläche einschliesst, also mit einem isoperimetrischen Quadrate nicht flächengleich sein kann[2]). Somit bleibt nur eine Quadratur des Kreises im fünften Sinne des Wortes zu vollziehen, und jetzt wird bewiesen, dass der Kreis genau gleich sei einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen eine Kathete dem Kreishalbmesser, die andere dem Kreisumfange an Länge entspricht. Zum Schlusse erscheinen neuerdings scholastische Haarspaltereien über die am Anfange der Untersuchung gegen die Möglichkeit einer Quadratur erhobenen Einwürfe. Wir erwähnen daraus nur den letzten Satz der Abhandlung: Wenn man sagt, Euklid und Campanus beweisen Figurengleichheiten aus Winkelgleichheiten, so gebe ich das zu, aber daraus folgt nicht, dass aus Ungleichheit von Winkeln Ungleichheit von Figuren zu folgern sei[3]). Wir haben den eigentlichen geometrischen Beweis für die Flächengleichheit des Kreises mit dem erwähnten rechtwinkligen Dreiecke noch nachzutragen. Wäre besagtes Dreieck kleiner als der Kreis, so müsste es einem Sehnenvielecke desselben gleich sein, das selbst in ein rechtwinkliges Dreieck übergeht, dessen eine Kathete kleiner als der Halbmesser, die andere kleiner als die Peripherie wäre, und das widerspricht der Annahme. Wäre dagegen besagtes Dreieck grösser als der Kreis, so müsste es einem Tangentenvielecke desselben gleich sein, das selbst in ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Halbmesser als einer Kathete übergeht, dessen andere Kathete jetzt grösser als die Peripherie wäre, und das widerspricht abermals der Annahme. Folglich müssen Dreieck und Kreis einander genau gleich sein.

Die zweite Abhandlung[4]) ist dem Verhältnisse der Diagonale eines Quadrates zu dessen Seite gewidmet. Albert beginnt auch hier mit Erörterung der irrigen Meinung, als sei die Diagonale doppelt so lang als die Quadratseite, welche mit drei Gründen gestützt zu werden pflege. Erstens sei (Fig. 26) der Weg, den ein Bewegtes von $a$ über $b$ nach $d$ zurücklege, das Doppelte des Weges $bd$; er könne aber durch den Weg $ad$ ersetzt werden, also

[1]) Hierauf hat H. Suter, Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Hist.-liter. Abthlg. S. 94 aufmerksam gemacht. [2]) *(impossibile est) aliquod quadratum esse equale circulo cujus latera simul juncta sint equalia circumferentiae circuli in rectam extense; haec (conclusio) patet ex eo quod figura circularis inter omnes alias est capacissima.* [3]) *Quando dicitur, Euclides et Campanus per equalitatem angulorum probant equilitatem figurarum, bene volo, ex hoc tamen non sequitur, quod inequalitatem angulorum sequeretur inequalitas figurarum.* [4]) Zeitschr. Math. Phys. XXXII, Hist.-liter. Abthlg. S. 43—52.



sei $ad = 2bd$. Zweitens verhalte sich das Quadrat $abdc$ zu seiner Diagonale $ad$ wie das Quadrat $cfdg$ zu seiner Diagonale $cd$; durch Vertauschung der inneren Glieder zeige sich, dass das Quadrat $abdc$ zum Quadrate $cfdg$ in gleichem Verhältnisse stehen müsse wie $ad$ zu $cd$; aber das Quadrat $abdc$ sei das Doppelte von dem Quadrate $cfdg$, mithin auch $ad = 2cd$. Drittens stehe nach dem Satze I, 18 von Euklid[1]) dem grösseren Winkel im Dreiecke die grössere Seite gegenüber; nun sei $\angle acd = 2 \angle adc$, also finde das gleiche Verhältniss bei den gegenüberliegenden Seiten statt, und es sei $ad = 2ac$. Alle Geometer aber missbilligen diese Beweisführungen und das Doppelte der Quadratseite ist die Diagonale nicht. Commensurable Grössen (commensurabilia) stehen immer im Verhältnisse ganzer Zahlen. Wären also Quadratseite und Diagonale commensurabel, so müssten auch sie in solchem Verhältnisse stehen, und zwar entweder im Verhältnisse zweier grader, oder zweier ungrader, oder einer graden und einer ungraden Zahl. Alle diese Annahmen widersprechen aber der Thatsache, dass das Quadrat der Diagonale das Doppelte des Quadrates der Seite sein muss, wie genau nach euklidischem Muster (Bd. I, S. 170) gezeigt wird. Es findet folglich zwischen Seite und Diagonale zwar ein Verhältniss statt, aber kein rationales, sondern ein irrationales (proportio irrationalis). Also auch Albert von Sachsen ist im Besitze dieses Wortes. Im weiteren Verlaufe der Abhandlung wird erläutert, wie wenig ein Schluss von dem Umfange einer Figur auf deren Inhalt gerechtfertigt sei. Man halbire ein Quadrat und setze die beiden so entstehenden Rechtecke an der kürzeren Seite an einander, so vergrössere sich der Umfang bei gleich bleibendem Inhalte. Ebenso könne man mit dem eben erzeugten Rechtecke verfahren u. s. w., so dass es keinen noch so grossen Umfang gebe, den man nicht ohne Veränderung des Inhaltes noch übertreffen könnte. Den kleinsten Umfang eines gegebenen Inhaltes stellt dagegen die Kreislinie dar. Ganz ähnliche Schlüsse werden für Körper gezogen, und zwar nicht bloss für eckige, auch für runde Körper. Um einen ersten runden Körper herum kann man einen zweiten biegen, der gleichen Inhaltes, aber weniger dick ist. Soll die Dicke des Körpers unverändert bleiben, so hindert nichts ihn in zwei Körper von der halben Höhenausdehnung zu zerschneiden und diese beiden der Länge nach an einander setzen

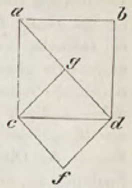


Fig. 26.

[1]) Albert von Sachsen citirt nach der Euklidausgabe des Campanus In den gewöhnlichen Ausgaben (nach Theon) ist der Satz I, 19 bezeichnet.

zu lassen. Setzt man das gleiche Verfahren immer fort, und bedarf es etwa der Hälfte einer Stunde, um die erste Zerschneidung und Vereinigung vorzunehmen, die Hälfte der noch übrigen halben Stunde um die zweite Zerschneidung und Vereinigung zu vollziehen u. s. w., ein Gedanke, den Albert in die lakonischen Worte kleidet, man bedürfe stets einen verhältnissmässigen Theil einer Stunde (pars proportionalis horae), so sind in einer Stunde unendlich viele Körper zu einem einzigen vereinigt, und es giebt überhaupt keine Grenze für die Menge der Körper, die vereinigt werden können, oder für die Grösse der Oberfläche, die ein einfacher Körper durch wiederholte Spaltung zu erhalten im Stande ist. Nur die untere Grenze bleibt, dass nämlich ein gegebener körperlicher Raum als Kugel gedacht die geringste Oberfläche besitzt. Jetzt kommt der Verfasser auf die Incommensurabilität der Seite und der Diagonale eines Quadrates zurück, welche auch gleichmässigen Vielfachen beider Längen anhafte. Seien zwei Kreise $a$ und $b$, die in $d$ sich schneiden, und deren Umfänge wie jene Längen sich verhalten[1]). Dass zu diesem Zwecke genüge, die betreffenden Strecken als Halbmesser der Kreise zu wählen, wird nicht gesagt. Zwei bewegliche Punkte $e$ und $f$ sollen von $d$ aus, $e$ auf $a$ und $f$ auf $b$, in gleichmässiger Bewegung fortrücken, so wird niemals, auch nicht in der Ewigkeit, ein wiederholtes Zusammentreffen von $e$ und $f$ in $d$ stattfinden[2]). Ein zweites Beispiel liefern Sonne und Mond. Sind die Bewegungen beider um ihren Bewegungsmittelpunkt incommensurabel, wie es wahrscheinlich der Fall, oder wovon das Gegentheil wenigstens noch nicht bewiesen sei, und beschreiben in Folge dessen die Mittelpunkte von Sonne und Mond in gleichen Zeiten Bögen, denen unter sich incommensurable Winkel im Mittelpunkte der Erde als Centriwinkel entsprechen, findet ferner in einem Augenblicke genau gradlinige Conjunction oder Opposition der drei Mittelpunkte statt, so war von Ewigkeit an nie eine damit genau übereinstimmende Finsterniss und wird in Ewigkeit nicht wiederkehren. Als wenigstens mittelbare Folge zeigt sich, dass die Urtheile der Astrologen mitunter sehr ungewiss sind[3]). Eine weitere sich anschliessende, aus dem Wesen der Incommensurabilität selbst hervorgehende Bemerkung zeigt die Unmöglichkeit, dass Stetiges aus Untheilbarem in endlicher Anzahl zusammengesetzt sei, weil es sonst keine incommensurable Längen gäbe. Der Schluss kehrt zu den am Anfange ausgesprochenen Scheingründen dafür, dass die Diagonale

[1]) *habeat se circumferentia unius ad circumferentiam alterius sicut dyameter quadrati et costa ejusdem.* [2]) *si ista in eternum moverentur, nunquam amplius in puncto d conjungerentur.* [3]) *Ex quibus sequitur quod judicia astrologorum sunt aliquando valde incerta.*



das Doppelte der Quadratseite sei, zurück und widerlegt sie. Dem scharfsinnigsten Scheinbeweise, den wir der Abhandlung folgend als zweiten auftreten liessen, der aber am Schlusse plötzlich der dritte heisst, weiss Albert von Sachsen nur entgegenzuhalten, man dürfe die Vertauschung von Gliedern einer Proportion nicht vornehmen, wenn es sich nicht um Grössen derselben Art handle[1]). Die Ausführlichkeit, in welcher wir über die beiden Abhandlungen berichtet haben, war vielleicht durch deren mathematische Bedeutung nicht gerechtfertigt, allein es lag uns daran, unseren Lesern recht hervorragende Beispiele davon zu geben, was die Scholastik als würdig eingehender Bekämpfung erachtete, und wie sie ein Schema dialektischen Hin- und Herschwankens zwischen entgegengesetzten Meinungspolen festhielt, welches auszufüllen war.

**Henricus Hassianus**[2]) war die zweite von uns genannte Persönlichkeit. Er wurde 1325 in Langenstein bei Marburg geboren und gehörte wahrscheinlich dem adligen Geschlechte von Langenstein an. Er lehrte schon 1363 in Paris vermuthlich mathematische und astronomische Dinge. Später ging er zur Theologie über. Man nennt ihn als Vater des Gedankens, die Missbräuche, welche damals — von Jedem zugestanden, durch keinen einzelnen Willen zu beseitigen — in der Kirche herrschten, durch ein allgemeines Concilium abschaffen zu lassen[3]). Er war eines der Mitglieder der Sorbonne, welche 1378 durch eine Abordnung an Papst Urban VI. in Rom, an der Heinrich selbst theilgenommen haben dürfte, sich für diesen und gegen Clemens VII. in Avignon entschied. Als fünf Jahre nachher die Anhänger des letzteren in Paris die Oberhand gewannen, ging Heinrich 1383 nach Deutschland zurück, wo er im Kloster Eberbach im Rheingau gastliche Aufnahme fand. Noch in demselben Jahre folgte er einem Rufe an die Universität Wien, um welche er grosse Verdienste sich erwarb. Er erlangte wahrscheinlich die vorher verweigerte päpstliche Genehmigung zur Einrichtung auch einer theologischen Facultät. Er starb in Wien am 11. Februar 1397 und liegt in der dortigen St. Stephanskirche begraben. Eigentlich mathematische Schriften sind von ihm nicht bekannt. Astronomisches soll in dem ersten Buche seines Commentars zur Genesis enthalten sein[4]), auch verfasste er einige astronomische Abhandlungen, darunter die Contra astrologos conjunctionistos de eventibus futurorum, welche schon 1374

[1]) *quod iste modus arguendi a commutata proportionalitate non tenet in illis quae sunt diversarum specierum.* [2]) Allgem. deutsche Biographie XVII, 672—673. — Hartwig, *Henricus de Langenstein dictus de Hassia* (1857). — Aschbach, Geschichte der Wiener Universität I, 366—402. [3]) Theod. Stumpf, Die politischen Ideen des Nicolaus von Cues (1865) S. 6. [4]) Kästner, II, 529.

in Paris geschrieben ist. In der Geschichte der Mathematik muss Heinrich von Langenstein nur um deswillen überhaupt genannt werden, weil ein berühmter Gelehrter des XVI. Jahrhunderts ihm das Verdienst zugeschrieben hat[1]), der Mathematik in Deutschland zu einer bleibenden Stätte verholfen zu haben.

Da nun weder Heinrich von Hessen noch Albert von Sachsen in Wien eine eigene mathematische Lehrthätigkeit ausübten, so ist jedenfalls ihre Bedeutung für jene östliche Verschiebung des geistigen Uebergewichtes, so weit es um mathematische Wissenschaft sich handelt, eine mehr mittelbare gewesen, deren Erfolg sich erst im XV. Jahrhunderte deutlich erkennen liess. Aber ein einzelnes vorhandenes Werk aus dem XIV. Jahrhunderte zeigt, dass schon vor ihnen Einflüsse von Paris aus sich geltend gemacht hatten, welche den deutschen Boden dazu vorbereiteten, wissenschaftlichen Samen aufzunehmen. Wir reden von einer am Ende des Jahrhunderts lateinisch verfassten, aber frühzeitig in deutscher Sprache neu bearbeiteten Geometrie[2]). Conrad von Jungingen[3]) war von 1393 bis 1407 Hochmeister der Deutschordensritter. Kraftvoll im Kriegführen, wenn derselbe aufgedrungen war, neigte er von Natur weit mehr zu friedlichen Bestrebungen und liess sich die Ausmessung der von ihm beherrschten Lande angelegen sein. Lantmesser, auch einfach Messer werden genannt, die mit $1\frac{1}{2}$ Mark wöchentlich für ihre Arbeit gelohnt wurden; Andere verrichteten den Dienst mit der „landtmosse" als Lehendienst. Wir müssen uns diese Landmesser, laycos mensores[4]), als blosse Handwerker vorstellen, welche lediglich in der Ausführung von übungsmässigen Verfahren geschult waren, deren Gründe sie kaum zu begreifen befähigt waren. Um je handwerksmässiger wir sie uns denken, um so nothwendiger war ihnen ein Vorgesetzter, der wirklich die Sache verstand, die er zu leiten hatte[5]), und ein solcher war offenbar der Verfasser der Geometria Culmensis. Dieser Name, welcher vom Herausgeber der Schrift beibehalten wurde und ihr daher auch bleiben mag, findet sich freilich

[1]) Petrus Ramus, *Scholae mathematicae* (1627) pag. 61: *Henricus Hassianus centesimo abhinc et octogesimo fere anno* (circa 1390) *primus mathematicas artes Lutetia Viennam transtulit, unde brevi tempore per universam Germaniam proseminatae mathematicorum tamquam familiae.* [2]) *Geometria Culmensis.* Ein agronomischer Tractat aus der Zeit des Hochmeisters Conrad von Jungingen (1393—1407) herausgegeben von Dr. H. Mendthal (1886). [3]) Allgem. deutsche Biographie XIV, 718—720. [4]) *Geometria Culmensis* S. 15, Z. 4—8: *laycos mensores in arte tum calculatoria quam geometrica inperitos sepius in agrorum mensura contingit oberrare.* [5]) Ebenda S. 47, Z. 7—8: *ideo laycus mensor debet esse minister geometre.*



nur in einer Handschrift[1]) und ist nur dadurch unterstützt, dass Kulmer Maasse[2]) vorkommen. Der Verfasser selbst nennt sich gar nicht, und sein Buch führt im lateinischen Texte die Ueberschrift: Liber magnifici principis Conradi de Jungegen, magistri generali Prusie, geometrie practice usualis manualis, während in der deutschen Bearbeitung, welche vielleicht von dem Verfasser in eigener Person herrührt, weil man kaum annehmen kann, ein Anderer sei so frei mit dem Wortlaute umgegangen, der Titel folgendermassen klingt: „Eyn buch des irluchten vorsten, Heren Conrad von Jungegen, Homeysters czu Prusen der wirkende ortmose myt Hanvbungen, in dem so sal man leren, wy man messen sal eyn yclych ackerlant unde Gevilde". Der Gedanke, der Hochmeister könne wirklich der Verfasser des Buches sein, wird dadurch natürlich sofort erzeugt, aber beim Weiterlesen vollständig vernichtet. Die Einleitung spendet dem Hochmeister so überschwängliches Lob, dass es ausgeschlossen ist, er könne sie selbst geschrieben haben. Auf eigenen Füssen steht übrigens der Verfasser nicht, und damit erklärt sich vielleicht die bescheidene Zurückhaltung seines Namens. Er habe, sagt er, den Stoff zusammengetragen[3]), und er beruft sich oft auf Euklid, einmal — im letzten Abschnitte allerdings — auf einen Dominicus[4]), und es ist geglückt, in diesem Schriftsteller Dominicus de Clavasio (S. 127) zu erkennen. Ihn hat, wie genaue Vergleichung erkennen liess[5]), der Verfasser der Geometria Culmensis ausgiebig benutzt, an manchen Stellen wörtlich ausgeschrieben, während er freilich dadurch über den gewöhnlichen Abschreiber sich erhob, dass er bald Dinge, die dem Landmesser, für welchen er schrieb, unverständlich gewesen wären, wegliess, bald durch erläuternde Zusätze sie ergänzte. Ein wichtiger Zusatz ist vor allen Dingen die Lehre von der Ausziehung der Quadratwurzel, welche nach der Formel $\sqrt{a^2+r} \backsim a + \frac{r}{2a}$ unter der Voraussetzung $r < 2a + 1$ vollzogen wird. Consulo quod nullus sit mensor tum clericum quam laycus, nisi prius in algorissmo tam de integris quam minuciis sciat computare sagt dabei der Verfasser, und noch bestimmter erwähnt er in der deutschen Bearbeitung „czween

[1]) *Geometria Culmensis* S. 10, Z. 13—14. [2]) Ebenda S. 21: *duo pedes faciunt ulnam Colmensem.* [3]) Ebenda S. 16—17: *praesentem librum compilavi.* [4]) Ebenda S. 69: *ut patet per Dominicum in geometria sua* = als sprycht magister Dominicus in syner ortmose unde auch andir meister. [5]) Auf das Tom. III, pars I, Nr. 410 des münchner Handschriftenkatalogs angeführte Werk hat Max. Curtze den Herausgeber der *Geometria Culmensis* aufmerksam gemacht. Dieser hat dann die Vergleichung vorgenommen und im Drucke die dem II. Buche des Dominicus entnommenen Stellen durch Anführungszeichen kenntlich gemacht. *Geometria Culmensis* S. 6—7.

bucheren, dy do heyssen algorismus, der eyne von ganczen, der andir von teilen"[1]). Dieser Ausspruch bestätigt neuerdings, was wir schon verschiedentlich bemerken durften. Wie die zwei Abtheilungen des Algorithmus demonstratus, welche das Rechnen mit ganzen Zahlen und das mit Brüchen lehren, in der Basler Handschrift räumlich getrennt und in verkehrter Reihenfolge vorkommen, wie in Wien an der Universität zwei verschiedene Vorlesungen über beide Algorismen (de integris und de minuciis) gehalten wurden, wie Sacrobosco über ganzzahliges Rechnen, De Lineriis über Bruchrechnen schrieb, so gab es am Ende des XIV. Jahrhunderts in Deutschland zwei Bücher, vielleicht Nachbildungen der beiden zuletzt genannten, aus welchen der gemeine Mann und nicht bloss der Gelehrte das Rechnen mit ganzen Zahlen, das Rechnen mit Brüchen sich aneignen konnte. Jedenfalls sind aus dem Anfange des XV. Jahrhunderts deutsche Uebersetzungen des Rechenbuches des Sacrobosco und eine deutsche Abhandlung über das Bruchrechnen bekannt[2]).

Die Geometria Culmensis zerfällt in fünf Abtheilungen. Die beiden ersten sind der Berechnung des Dreiecks gewidmet, die dritte dem Viereck, die vierte dem Vieleck, die fünfte den ganz oder theilweise krummlinig begrenzten Räumen. Man kann im Allgemeinen sagen, überall sei Falsches mit Geschick vermieden. Wenn z. B. in der 1. Abtheilung das Dreieck durch das halbe Product von Grundlinie und Höhe gemessen wird, wenn im rechtwinkligen Dreiecke die beiden den rechten Winkel bildenden Seiten als Grundlinie und Höhe gelten, so warnt[3]) der Verfasser davor, in nichtrechtwinkligen Dreiecken das halbe Product aneinanderstossender Seiten als Flächenmaass zu benutzen. Die Höhe (kathetus) wird auf dem Felde mit Hilfe eines rechten *winkelmos* (gnomon) oder eines *crueze's* (Winkelkreuz) hergestellt und wirklich gemessen. Sie heisst meistens *Drebom*[4]). In der 2. Abtheilung wird mehr rechnend vorgegangen. Auch wo die drei Seiten des Dreiecks auf dem Felde gemessen wurden, soll man zu Hause ein verkleinertes Bild herstellen. So lehrte Dominicus, so lehrt etwas weitläufiger der Kulmer Schriftsteller[5]). Zwei Stangen sollen durch einen Nagel verbunden werden. Auf ihnen werden die Längen von zwei Dreiecksseiten in verjüngtem Maasse

---

[1]) *Geometria Culmensis* S. 47. [2]) Curtze brieflich. [3]) *Geometria Culmensis* S. 31: *Vidi plures laycos mensores et audivi eorum inpericiam, qui volebant in areis triangularibus indifferenter in omnibus medietatem lateris unius in totale latus alterum multiplicare ut sic aree continencium invenirent, nescientes kathetum invenire.* [4]) Ebenda S. 31: Ueber Drebom = Driboum = triarbor vergl. ebenda S. 8. [5]) Ebenda S. 36—37: *De hiis tribus virgis duas coniunge simul cum clavo* etc.



aufgetragen. Eine dritte Stange, der dritten Dreiecksseite entsprechend, wird beiden, die zu dem Behufe um den verbindenden Nagel drehbar sind, angepasst. Dieses verjüngte Dreieck lässt jedenfalls es zu, dass man die Höhe wirklich ziehe und messe, was auf dem Felde vielleicht nicht möglich war. Bei rechnender Ermittelung der Höhe, d. h. beim gleichschenkligen und beim gleichseitigen Dreiecke[1]), wird der pythagoräische Lehrsatz mit seiner Quadratwurzelausziehung in Anwendung gebracht. Es mag erwähnt sein, dass die alterthümlichen Annäherungswerthe einiger Quadratwurzeln z. B. $\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$ in der Geometria Culmensis ebensowenig vorkommen wie die heronische Dreiecksformel, welche die drei Seiten des Dreiecks in Anwendung bringt. Die 3. Abtheilung geht zum Vierecke über. Hier begegnen uns im lateinischen wie nicht minder im deutschen Wortlaute die arabischen Namen *Elimihahym* und *Elmipharipha* des Rhombus und des unregelmässigen Vierecks[2]), die uns aus den dem Arabischen entstammenden Euklidübersetzungen (S. 103) bekannt sind, deren aber auch Dominicus von Paris sich bediente. Ueberall werden wieder Höhen gezogen, und dadurch neue Figuren auf schon im Verhergehenden behandelte zurückgeführt. So ist unter den unregelmässigen Vierecken zuerst dasjenige besprochen, welches 2, dann dasjenige, welches 1, zuletzt das, welches keinen rechten Winkel besitzt, wobei die Figuren (Figur 27, 28, 29) erkennen lassen, wie wir

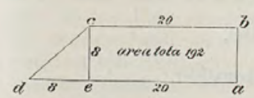


Fig. 27.

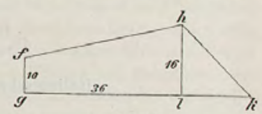


Fig. 28.

jene Zurückführung auf schon Bekanntes meinen. Ebendenselben Figuren mag man entnehmen, dass in der ganzen Geometria Culmensis die Buchstabenfolge ausnahmslos die lateinische ist. Dass in Figur 28 der Buchstabe *i* nicht benutzt ist, muss als Zufall angesehen werden, in anderen Figuren kommt er vor. In der 4. Abtheilung werden Vielecke ausgemessen, und zwar zuerst regelmässige, dann unregelmässige. Durch gerade Linien von einem innerhalb des Vielecks gelegenen Punkte aus nach den Eckpunkten wird das Vieleck in ebensoviele Dreiecke zerlegt als es Seiten

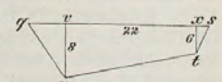


Fig. 29.

---

[1]) *Geometria Culmensis* S. 38 und 42. [2]) Ebenda S. 52.

besitzt, und diese Dreiecke werden sodann gemessen. Als Punkt im Innern des Vielecks wird der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien zweier benachbarter Vieleckswinkel gewählt, der beim regelmässigen Vielecke dessen Mittelpunkt ist. Gelegentlich wird dabei die Halbirung eines Winkels und die Auffindung der Winkelsumme des Vielecks gelehrt[1]). Auch das Vieleck mit einspringenden Winkeln[2]), *campus tortuosus seu extraeminens*, oder wie der deutsche Kunstausdruck lautet, „eyn wanschaffen geuilde“ wird berücksichtigt und durch Zerlegung in Theilfiguren, welche nicht aus- und einspringen („yczunt us darnoch wedir yn“ verlaufen) gemessen. Die 5. Abtheilung stellt die Aufgabe, solche Figuren zu messen, in deren Begrenzung krumme Linien vorkommen. Das Verhältniss des Kreisumfangs zum Durchmesser wird wie gewöhnlich „als weren 22 kegen 7“ angenommen[3]), aber immerhin ist ein wesentlicher Unterschied gegen die Art, wie etwa Albert von Sachsen jene Zahlen auffasst. In der Geometria Culmensis ist, genau anschliessend an Dominicus (S. 127), das Bewusstsein blosser Annäherung deutlich ausgesprochen: das Verhältniss gelte nur so weit, dass kein fühlbarer Irrthum übrig bleibe[4]). So der Hauptinhalt jenes für die Zeit und für den Ort seiner Entstehung sehr bemerkenswerthen Lehrbuches. Sein Verfasser — dahin darf man gewiss das Urtheil zusammenfassen — wusste gute Quellen gut zu benutzen und hat, wenn man die vielfachen Zahlenbeispiele näher ansieht, auch als zuverlässiger Rechner sich bewährt.

## 49. Kapitel.

### Italienische Mathematiker.

Wir wenden uns nach dem letzten Lande, dessen mathematische Erzeugnisse aus dem XIV. Jahrhunderte wir noch zu besprechen haben, nach Italien. Wer sich des geistvollen Kaufmannes erinnert, der am Anfange des XIII. Jahrhunderts in Italien lebte, wer damit unsere Ankündigung (S. 138) verbindet, Italien ringe nunmehr bald mit Deutschland um den ersten mathematischen Preis, wird schon im XIV. Jahrhunderte erwarten Bedeutendes sich vorbereiten zu sehen.

Dass diese Erwartung sich erfüllen könnte, wenn aus den Handschriften bekannt würde, was italienische Schriftsteller damals leisteten, will nicht unbedingt in Abrede gestellt werden. Bei aller Vorsicht,

[1]) *Geometria Culmensis* S. 57 und 60. [2]) Ebenda S. 63—64. [3]) Ebenda S. 67. [4]) Ebenda S. 69: *circuli et quadrati adinvicem nulla est certa proporcio et precise demonstrata, sed in tantum est quod non relinquitur error sensibilis.*



welche unbewiesenen Behauptungen des Geschichtsschreibers der italienischen Mathematik gegenüber geboten ist, nehmen wir als richtig an, was er mittheilt[1]), dass im XIV. Jahrhunderte mehrere hundert Bände mathematischen Inhaltes in Italien verfasst worden seien, und es wäre gewiss wünschenswerth, dass ein Fachmann sich der, wenn auch sicherlich grossen und keineswegs immer lohnenden Mühe unterzöge, an Ort und Stelle die Handschriften zu prüfen und das geschichtlich Wichtige vollständig oder mindestens im Auszuge zu veröffentlichen.

Eine Veröffentlichung[2]), welche stattgefunden hat, erweist sich bei allem Interesse, das ihr innewohnt, als geeignet, das Bild weit eher eines Rückganges als einer fortschreitenden Entwicklung hervorzurufen. *Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam* lautet der Titel einer Niederschrift aus der zweiten Hälfte des XIV. Jahrhunderts, und schon dieser Titel muss unser Staunen erregen und giebt zunächst zu verwunderten Fragen Anlass. Ist das kleine Buch in Italien entstanden, oder nur nach Rom verbracht worden? Ist es eine lateinisch verfasste oder aus dem Arabischen übersetzte Arbeit? Ist sie im XIV. Jahrhunderte verfasst oder damals nur abgeschrieben? Diese drei Fragen stellen sogar, je nachdem sie beantwortet werden, unsere Berechtigung grade hier von jener Schrift zu reden in Zweifel. Die erste Frage wird kaum genügend beantwortet werden können, die zweite aber muss wohl dahin entschieden werden, dass dieses „einleitende Buch des Staubes“ nicht übersetzt ist[3]). Erstens fehlt jede gebetartige Gottesanrufung, ohne welche eine arabische Schrift kaum denkbar ist; zweitens fehlt jede Bezugnahme auf Inder, Pythagoras, jede Vergleichung der Zahlzeichen mit arabischen Buchstaben, wie sie gleichfalls kennzeichnend für die Erzeugnisse arabischer Rechenmeister sind; drittens ist ein Kapitel, wie wir noch sehen werden, den römischen Minutien gewidmet, was bei arabischem Ursprunge gradezu unmöglich wäre. Wie aber dann die dritte Frage zu beantworten sei, scheint uns gleichfalls kaum zweifelhaft. Der Inhalt ist so viel geringer als der von irgend anderen im XIV. Jahrhunderte vorhandenen Schriften, dass wir an eine Abschrift zu glauben uns nicht im Stande fühlen. Ein so schwaches Erzeugniss kann in jedem Jahrhunderte einmal niedergeschrieben werden, und der ungerechte Zufall kann es vor dem Untergange bewahren, aber

[1]) Libri II, 204 und 212 Note. [2]) *Sur un manuscrit du Vatican du XIV$^e$ siècle contenant un traité de calcul emprunté à la méthode Gobâri. Lettre de M. Henri Narducci à M. Aristide Marre* (1883), Sonderabdruck aus dem *Bulletin Darboux.* [3]) Der gleichen Meinung ist H. Narducci: *il s'agit ici d'un travail original écrit et publié en Occident.*

man vervielfältigt es nicht, es sei denn, dass man geschichtliche Forschungen dabei im Auge habe, und das können wir bei einem Abschreiber des XIV. Jahrhunderts einem solchen Schriftchen gegenüber nicht voraussetzen. Die Schrift ist nicht mehr und nicht weniger als ein sieben Blätter füllendes dürftiges Lehrbuch der Rechenkunst. Der Verfasser benutzt die Ziffern mit Stellungswerth, er benutzt zu deren Erläuterung auch die römischen Zahlzeichen. Er kennt Finger- und Gelenkzahlen. Er lehrt Addition und Subtraction, Verdoppelung und Halbirung, Multiplication und Division. Er geht dann zu den Brüchen, deren Multiplication und Division über, zuerst sofern nur Brüche, dann sofern aus ganzen Zahlen und Brüchen gemischte Zahlen vorliegen. Dann kommt die Ausziehung der Quadratwurzel, endlich, wie schon erwähnt, ein Kapitel über die Zerlegung der Einheit in 12 Unzen, der Unze in weitere Duodecimaltheile. Ein solches Lehrbuch aber, in den Rechnungsarten an Jordanus Nemorarius und an Johannes de Sacrobosco erinnernd, mehr als anderthalb Jahrhunderte nach ihnen geschrieben, bildet entschieden einen Rückgang, wo immer sein Verfasser wohnte, einen noch merkwürdigeren Rückgang, wenn wir als Heimath das Land betrachten müssen, in welchem Leonardo von Pisa gelebt hatte.

Für eine geschichtliche Erscheinung nachträglich Gründe zusammenzustellen ist ja nicht immer unmöglich, manchmal auch nicht schwierig. Man könnte sagen: es war ein Rückgang in mathematischer Beziehung eingetreten. Noch war für Italien die Zeit nicht gekommen, auf der von Leonardo von Pisa erreichten Höhe sich wohnlich und bleibend einzurichten, weil die vorzugsweise begabten Geister anderen Bestrebungen zugewandt waren. Giotto 1270—1336, Dante 1265—1321, Petrarca 1304—1374, Bocaccio 1313—1375 drücken dem Jahrhunderte ihren Stempel auf. Eine Kunstschule in's Leben rufen, die italienische Sprache bilden, sie beherrschen in Versen und Prosa, sich versenken in die so gut wie neu entdeckten Schätze römischer und griechischer Dichter, das war es, was den in Italien jetzt schon erwachenden Humanismus kennzeichnete. Naturbeschreibung, selbst ein hoher Gegenstand dichterischer Schilderung, welche ihr die schönsten Bilder entlieh, mochte daneben blühen, für Mathematik erwärmte sich keiner von den genannten Meistern. Nun könnte ja freilich in kaufmännischen Kreisen die Erinnerung an Leonardo von Pisa wach geblieben sein, könnte wenigstens auf dem Felde der Rechenkunst Nacheiferer grossgezogen haben.

Wir werden sehen, dass in der That der italienische Kaufmann Wissenstrieb im Sinne unseres Faches besass, aber einer sehr gedeihlichen Entwickelung, kann man weiter sagen, war der Umstand im



Wege, dass, während Leonardo am Anfange des XIII. Jahrhunderts die Grenze bezeichnete, von der an der unblutige Kampf zwischen Abacisten und Algorithmikern endgiltig als zu Gunsten der letzteren entschieden gelten musste, im letzten Jahre desselben Jahrhunderts ein Rückschritt in die alte Zeit, wenigstens in die alte Zahlenbezeichnung gesetzlich anbefohlen wurde[1]). Ein Verbot aus dem Jahre 1299 hat sich nämlich in Florenz erhalten, wonach es den Kaufleuten untersagt wurde, ihre Bücher mit dem Abbacus zu führen. Es wurde ihnen vielmehr vorgeschrieben, römische Zeichen oder die ausgeschriebenen Zahlwörter zu benutzen. Abbacus heisst hier offenbar, ähnlich wie in dem Werke des Leonardo von Pisa, das was ausserhalb Italiens den Namen Algorithmus führte. Das Florentiner Verbot war sicherlich zu Gunsten grösserer Sicherheit der kaufmännischen Buchführung erlassen, sei es, dass man meinte, römische Zahlzeichen liessen nicht so leicht fälschende Einschiebungen zu, wie die auf dem Stellungswerthe beruhenden Ziffern, sei es, dass man voraussetzte, nicht Jeder würde im Stande sein, letztere lesen zu können, was doch auch nöthig war, wenn die Bücher auf öffentlichen Glauben Anspruch machten; aber mochte die Absicht des Verbotes sein, welche sie wolle, sicherlich musste in Folge desselben das Ziffernrechnen mindestens keine Fortschritte machen.

Solche Bemerkungen also könnte man machen, und vielleicht ist in ihnen mehr als nur ein Körnchen Wahrheit enthalten. Vielleicht aber auch haben wir uns durch eine Missgeburt eines Verfassers, der das Verweilen nicht lohnte, zu ungerechtfertigten Schlüssen verlocken lassen, zu deren Prüfung es nothwendig wäre, dass, wie wir (S. 155) sagten, der Inhalt der zahlreichen Handschriften, welche vorhanden sein sollen, bekannt würde. Eine Handschrift aus Kaufmannskreisen ist bekannt[2]), und sie macht freilich einen ganz anderen Eindruck, als das armselige einleitende Buch des Staubes. Sie ist in italienischer Sprache verfasst, mithin jedenfalls von einem Italiener. Die vorhandene Niederschrift stammt aus dem XIV. Jahrhunderte, einem älteren Ursprunge widerspricht der hochbedeutende Inhalt. Ort und Zeit weisen daher uns an, uns in diesem Kapitel mit dem auszugsweise veröffentlichten Werke zu beschäftigen.

Der Verfasser hat seinen Namen nicht genannt, dagegen äussert

[1]) Darauf hat für Mathematiker zuerst Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter S. 341, Note unter Berufung auf *Archivio storico Appendice* T. III (Florenz 1846) pag. 528 aufmerksam gemacht. Die betreffende Stelle lautet: *si proibisce ai mercatanti di tenere i loro registri in abbaco e si prescrive l'uso delle lettere romane e la completa scrittura del numero.*
[2]) Libri II, 214, Note 1 und III, 302—349.

er sich über die Veranlassung, welche ihn zum Schriftsteller machte. Er sei gebeten worden, Einiges über den Abacus zu schreiben, was für Kaufleute nothwendig sei, und zwar von einer solchen Seite, dass die Bitten ihm Befehle gewesen seien, daher werde er nicht in dünkelhafter Weise, sondern um Gehorsam zu zeigen, sich anstrengen. Auch hier ist das Wort *alcune cose di abaco* keineswegs so aufzufassen, als wäre von einem Rechenbrette die Rede. Nach den im Drucke bekannten Auszügen war es vielmehr ein algebraisches Werk, über welches sich der Verfasser so ausspricht, und auch an die Kaufleute erinnern nur gewisse eingekleidete Gleichungen, welche mit Zinsaufgaben sich beschäftigen, und zwar ausschliesslich mit solchen, bei welchen Zinseszinsen in Anwendung kommen, die damals die allein gebräuchlichen gewesen zu sein scheinen, da immer nur von *merito*, Zins, schlechtweg ohne jeden unterscheidenden Zusatz die Rede ist.

Die gebrauchten Kunstausdrücke sind folgende. Die Constante der Gleichung heisst numero, die Unbekannte cosa und deren höhere Potenzen der Reihe nach quadrato censo (oder quadrato allein, oder auch censo allein), censo cubo (oder cubo allein), censo di censo, censo di cubi, Ausdrücke, welche einer weiteren Erklärung kaum bedürfen, da censo nur die italienische Form von census ist, dessen Gerhard von Cremona (Bd. I, S. 755) wie Leonardo von Pisa (S. 34) sich schon bedienten und höchtens könnte cosa bemerkenswerth erscheinen, die Uebersetzung von res, während Gerhard von Cremona und Leonardo meistens radix sagten, Leonardo allerdings einmal (S. 22) auch res. Eine höhere Potenz der Unbekannten als die fünfte kommt in den Auszügen nicht vor. Die zweite bis fünfte Wurzel heissen radice, radice cubo, radice de radice, radice relata[1]), wo besonders der letztere eigenthümliche Namen zu beachten ist. Der Verfasser gebraucht beim allmählichen Bilden des Ansatzes sowohl additive als subtractive Zahlen, letztere mit meno, weniger, verbunden, aber die schliesslich gebildete Gleichung ist immer so geordnet, dass auf beiden Seiten der Gleichung nur Positives erscheint, wie wir heute sagen würden, und dass der letzte Schritt zur Vorbereitung der Auflösung in der Division durch den Coefficienten der höchsten Potenz der Unbekannten besteht, beides Gewohnheiten der arabischen Algebrakundigen seit Alchwarizmî (Bd. I, S. 682—683). Von der Möglichkeit zweier Auflösungen einer quadratischen Gleichung ist, so viel wir bemerken konnten, nie die Rede. Wie weit der Verfasser in Wurzelausziehungen geübt war, ist nicht

---

[1]) Libri, III, 345 und 346: *radice relata di* 5153632 *e* 22.



zu entscheiden. Wo immer eine nur angenäherte Berechnung irrationaler Wurzelgrössen vorkommen musste, hat er sie vermieden und sich mit der Nennung der Wurzelgrösse begnügt. Auffallen möchte nur, dass einmal[1]) ohne weiteres $\sqrt{10} - \sqrt{4\frac{4}{9}} = \sqrt{1\frac{1}{9}}$ gesetzt ist, dass also die Umwandlungen $\sqrt{10} = 3\sqrt{1\frac{1}{9}}$, $\sqrt{4\frac{4}{9}} = 2\sqrt{1\frac{1}{9}}$ dem Verfasser klar gewesen sein müssen. Dass er $\sqrt[5]{5153632} = 22$[2]) anders als durch die Vollziehung der umgekehrten Rechnung $22^5 = 5153632$ ermittelt haben sollte, ist gewiss nicht anzunehmen. Die Grösse $\sqrt{7\frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{5}{8}}}$ scheint er für gleichbedeutend mit $\sqrt{7\frac{1}{2}} + \sqrt{\sqrt{5\frac{5}{8}}}$ gehalten zu haben[3]), ein Irrthum, der in so früher Zeit, wo wiederholte Wurzelausziehungen zu dem Schwierigsten gehört haben müssen, nicht Grund zur Missachtung bietet, der uns aber immerhin an die Mangelhaftigkeit damaligen Wissens deutlich mahnt. Noch lebhafter klingt diese Mahnung aus der Auflösung vieler unter den gestellten Aufgaben.

Den Dreisatz beherrscht der Verfasser allerdings vollkommen, so wenn er fragt, was aus 100 Lire in zwei Jahren durch Verzinsung werde[4]). Nach einem Jahre wird 1 cosa daraus; im zweiten Jahre muss 100 Lire zu 1 cosa in dem gleichen Verhältnisse stehen wie 1 cosa zu der Fragezahl. Diese findet sich also durch Vervielfachung von 1 cosa mit 1 cosa zu 1 quadrato censo und Division durch 100.

Auch quadratische Gleichungen und solche, die auf quadratische Gleichungen sich zurückführen, löst er tadellos. Unter den letzteren verstehen wir solche, welche in unserer heutigen Schreibart auf Null gebracht $x^3 + ax^2 + bx = 0$ und $x^4 + ax^2 + b = 0$ heissen würden. Aus

$$x^3 = \frac{16}{27}x^2 + \frac{5}{27}x \text{ wird } x = \frac{8}{27} + \sqrt{\frac{199}{729}},$$

aus $x^4 + 20 = 9x^2$ wird $x = \sqrt{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - 20}} = 2$ gefunden[5]), wobei in dem letzteren Falle mit keiner Silbe begründet wird, weshalb bei der erstmaligen Wurzelausziehung die negative Quadratwurzel und

---

[1]) Libri III, 339. [2]) Ebenda S. 346. [3]) Ebenda S. 316, Z. 3. [4]) Ebenda S. 318: *Poni que li rendesse il primo anno* 1 *cosa tra merito e capitale: hora di'* 100 *L da* 1 *cosa, che dara* 1 *cosa? multiplica* 1 *via* 1 *cosa fa* 1 *quadrato censo; partendolo* 100 *ne vene* $\frac{1}{100}$ *di quadrato di censo.* [5]) Ebenda S. 306 und 314.

nicht die positive genommen wurde. Vielleicht war ihm doch bekannt, dass auch die andere Wahl ihm freistand, dass also zwei Gleichungswurzeln hier möglich waren, und er entschied sich für $-\sqrt{\frac{81}{4}-20}$, weil sonst $x=\sqrt{5}$ herausgekommen wäre, während hier, wo es einen rationalen Werth $x=2$ gab, dieser auch gefunden werden sollte.

Bei den genannten Gleichungsformen bleibt der Verfasser bei weitem nicht stehen. Er behandelt vielmehr Gleichungen 3., 4. und 5. Grades nach allgemeinen Regeln, denen leider nur die Begründung fehlt und fehlen muss, da die Regeln, wie man zu erwarten berechtigt war, falsch sind[1]). Wurden schon bei den unreinen quadratischen Gleichungen die drei bekannten Fälle unterschieden, so ist bei den kubischen Gleichungen eine Unterscheidung von noch mehr Fällen nur natürlich. Dass diejenigen Fälle, welche durch Division durch die Unbekannte zur quadratischen Gleichung führen, richtige Lösungen finden, haben wir schon erwähnt. Dass Gleichungen mit nur zwei Gliedern wie $ax^3=bx^2$ oder $ax^3=cx$ oder $ax^3=k$ ebenfalls richtig gelöst werden, ist wieder nicht zu verwundern. Bemerkt sei nur, dass von den zur Auflösung führenden Divisionen durch die Unbekannte nie gesprochen wird. Der Verfasser wird sich dessen ja bewusst gewesen sein, wieso aus $8x^3=3x$ der Werth $x=\sqrt{\frac{3}{8}}$ folgt, aber gesagt hat er es nicht[2]). Bei Gleichungen mit drei und vier Gliedern sind folgende Verfahren eingeschlagen, welche theils aus den ausdrücklich ausgesprochenen Vorschriften, theils aus den Zahlenbeispielen in übereinstimmender Weise hervorgehen. Aus $ax^3=cx+k$ wird $x^3=\frac{c}{a}x+\frac{k}{a}$ gebildet und diese Gleichung als quadratische weiter behandelt:

$$x=\frac{c}{2a}+\sqrt{\left(\frac{c}{2a}\right)^2+\frac{k}{a}}.$$

So $8x^3=5x+16$, welche zu

$$x=\frac{5}{16}+\sqrt{2\frac{25}{256}}$$

[1]) Was Libri II, 213, Note 1 darüber sagt, beruht auf einem fast unbegreiflichen Missverständnisse der Stelle, um die es sich handelt. [2]) Libri III, 305: 8 *cubi sono equali a 3 cose; parti 3 per 8 cubi, ne vene* $\frac{3}{8}$ *e la radice de* $\frac{3}{8}$ *vale la cosa.*



führt[1]). $ax^3=bx^2+k$ giebt zunächst $x^3=\frac{b}{a}x^2+\frac{k}{a}$ und auch diese wird weiter behandelt, als stände links $x^2$, rechts $x$, also

$$x=\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{k}{a}}.$$

So $8x^3=9x^2+12$ mit $x=\frac{9}{16}+\sqrt{1\frac{209}{256}}$[2]). Die viergliedrige Gleichung $ax^3=bx^2+cx+k$ wird so angefasst, als hätte auch die Constante $k$ noch den Factor $x$. Sie führt mithin zu

$$x=\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c+k}{a}},\ \text{z. B. } 8x^3=9x^2+4x+12,$$

$$x=\frac{9}{16}+\sqrt{2\frac{81}{256}}\ {}^{3)}.$$

Wunderlich genug findet später $ax^3+bx^2+cx=k$ die Auflösung $x=\sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3+\frac{k}{a}}-\frac{c}{b}$, welche nur dann richtig ist, wenn $b^2=3ac$, wie es in dem entsprechenden Zahlenbeispiele $x^3+60x^2+1200x=4000$ wirklich der Fall ist[4]), so dass $x=\sqrt[3]{12000}-20$ eine Gleichungswurzel ist.

Ganz ähnlich verhält es sich mit der Gleichung vierten Grades $ax^4+bx^3+cx^2+dx=k$, deren Wurzel $x=\sqrt[4]{\left(\frac{d}{b}\right)^2+\frac{k}{a}}-\sqrt{\frac{d}{b}}$ nur dann als richtig sich erweist, wenn $b^3=16a^2d$ und zugleich $bc=6ad$, wie es in dem entsprechenden Beispiele

$$x^4+80x^3+2400x^2+32000x=96000$$

wirklich der Fall ist[5]), so dass hier

$$x=\sqrt[4]{400^2+96000}-\sqrt{400}=\sqrt[4]{256000}-20$$

die Gleichung erfüllt. Aber auch die Gleichung $ax^4+cx^2+dx=bx^3+k$ wird besprochen[6]), und hier wird als Auflösung

$$x=\sqrt{\left(\frac{b}{4a}\right)^2+\frac{d}{2b}}-\sqrt{\frac{d}{2b}}+\frac{b}{4a}$$

angegeben! Während in dem vorhin beigezogenen Falle das Nichtauftreten des Coefficienten $c$ sich aufdrängte, während doch wenigstens eine vierte Wurzel und sämmtliche übrige bekannte Grössen der Gleichung vorkommen, ist hier sowohl $c$ als $k$ aus dem Wurzelwerthe verschwunden und eine vierte Wurzel ist nicht zu sehen. Die zur Auflösung vorgelegte Gleichung $x^4+28x^2+720x=20x^3+1800$ wird aber gleichwohl durch $x=\sqrt{43}-\sqrt{18}+5$ in Folge glücklicher

[1]) Libri III, 306—307. [2]) Ebenda S. 307—308. [3]) Ebenda S. 308—309. [4]) Ebenda S. 316. [5]) Ebenda S. 318. [6]) Ebenda S. 346.

Coefficientenwahl erfüllt. Bei diesem Beispiele gelingt es, dem Verfasser auf die Spur seines Verfahrens zu kommen. Er sagt zwar, es handle sich um die Auflösung der genannten Gleichung vierten Grades, aber diese entsteht auf folgende Weise. Die Zahl 10 soll in zwei Theile zerlegt werden, deren Product durch ihre Differenz getheilt $\sqrt{18}$ als Quotient geben soll. Verallgemeinern wir die Bedingungen dahin, dass wir 10 durch $\alpha$, 18 durch $\beta$ ersetzen, so lautet also der erste Ansatz $\frac{x(\alpha - x)}{\alpha - 2x} = \sqrt{\beta}$, und wird derselbe quadrirt und die Gleichung geordnet, so erscheint $x^4 + (\alpha^2 - 4\beta)x^2 + 4\alpha\beta x = 2\alpha x^3 + \alpha^2\beta$ genau wie oben. Die Auflösung kann aber auch ohne Quadrirung vollzogen werden. Durch Multiplication mit $\alpha - 2x$ geht sie über in $x^2 + \alpha\sqrt{\beta} = (\alpha + 2\sqrt{\beta})x$ und daraus wird

$$x = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} \text{ und } \alpha - x = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\beta} \mp \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta}.$$

Beide Theile von $\alpha$ fallen aber nur dann positiv aus, wenn von dem Doppelzeichen gegen alle sonstige Uebung älterer Mathematiker das untere gewählt wird; dann sind die beiden Theile $\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta}$ und $\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta}$. Wird wieder rückwärts $\alpha = 10$, $\beta = 18$ eingesetzt, so ist $\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} = 5 - \sqrt{18} + \sqrt{43}$ wie der Verfasser aussagt. Es fällt schwer anzunehmen, die Schlüsse seien so, wie wir sie hier vortrugen, gezogen worden, insbesondere bezüglich des Doppelzeichens. Es fällt noch schwerer unter Abweisung unserer Wiederherstellung einen anderen Weg zu erkennen, den der Verfasser eingeschlagen haben könnte. Jedenfalls hat er, und diese Erkenntniss halten wir für nicht unwichtig, in die Form einer Gleichung vierten Grades verlarvt, was nur einer Gleichung zweiten Grades bedurfte.

Wir erwähnen endlich eine Gleichung fünften Grades[1]) von der Form $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex = k$, als deren Wurzel

$$x = \sqrt[5]{\frac{cd}{ab} + \frac{k}{a}} - \sqrt[3]{\frac{e}{b}}$$

auftritt! In dem Zahlenbeispiele

$$x^5 + 100x^4 + 4000x^3 + 80000x^2 + 800000x = 1953632$$

bringt die Vorschrift allerdings $x = \sqrt[5]{5153632} - \sqrt[3]{8000} = 22 - 20 = 2$ hervor, welcher Wurzelwerth der Gleichung genügt.

[1]) Libri III, 345—346.



Was soll man aus diesen tollen und doch die jedesmaligen Zahlenbeispiele befriedigenden Wurzelwerthen machen? Gewiss ist keine andere Folgerung zu ziehen, als diejenige, welche wir an dem einen Falle einer Gleichung vierten Grades zu erörtern versucht haben. Der Verfasser jener Algebra hat irgend welche zum Theil recht kraus aussehende Wurzelwerthe bald von vornherein angenommen, bald durch Mittel, die er nachträglich zu verbergen wusste, aus den Gleichungen sich verschafft; er hat mit ihrer Hilfe Gleichungen dritten, vierten, fünften Grades gebildet; er hat dann gesucht, die ihm bekannten Wurzeln aus den Coefficienten der ihm gleichfalls bekannten Gleichung herauszurechnen; er hat endlich sich und seine Leser mit der Hoffnung getäuscht, die Kunststückchen, welche er unter saurem Schweisse und nach ungezählten vergeblichen Versuchen herausgeklügelt hatte, würden auch in anderen Zahlenbeispielen ihre Schuldigkeit thun. Er war ein ungemein geübter Rechner. Er litt an der Krankheit der ungenügenden, aber für genügend gehaltenen Induction, welche er nebst den Aufgaben der kubischen und biquadratischen Gleichungen seinen Landsleuten hinterliess. Er war trotz der hervorgehobenen Schwäche nichts weniger als ein unbegabter Mathematiker. Den Beweis für diese unsere letzte Behauptung würden vermuthlich die Kenntnisse des Verfassers auf anderen mathematischen Gebieten als dem der Gleichungen höherer Grade zu liefern vermögen, wenn die Auszüge aus seiner Schrift etwas ausgiebiger in dieser Beziehung wären. Einmal ist ein Schild in Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks auf seinen Flächeninhalt zu prüfen[1]). Ist cosa die Seite, heisst es, dann ist die halbe Summe der drei Seiten $1\frac{1}{2}$ cose, und diese um 1 cosa verringert geben $\frac{1}{2}$ cosa, also müsse das Product gebildet werden aus $1\frac{1}{2}$ cose, $\frac{1}{2}$ cosa, $\frac{1}{2}$ cosa, $\frac{1}{2}$ cosa, und dieses oder $\frac{3}{16}$ de censo de censo gebe das Quadrat des Flächeninhaltes; hier ist augenscheinlich die heronische Dreiecksformel

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}}$$

unter Berücksichtigung von $a = b = c$ in Anwendung gebracht. Ausserdem sollen auch folgende Aufgaben behandelt sein[2]): In einen Kreis, in ein Dreieck, in ein Quadrat eine gegebene Anzahl von Kreisen, von gleichseitigen Dreiecken, von Quadraten einzuzeichnen, so dass die Flächensumme der eingezeichneten Figuren die grösstmögliche sei, und ebenso die Aufgabe, in einen Würfel ein Tetraeder von grösstmöglichem Rauminhalte einzubeschreiben.

[1]) Libri III, 311—312. [2]) Ebenda II, 214 Note.

Von einem Schriftsteller des XIV. Jahrhunderts, von Antonio Biliotti, genannt dall' Abaco aus Florenz, wissen wir nur[1]), dass er 1383 in Bologna lehrte.

Den gleichen Beinamen dall' Abaco führte Paolo Dagomari[2]). Er ist etwa 1281 in Prato geboren, 1374 in Florenz gestorben. Er führte neben dem angegebenen Beinamen auch den als Paolo Astrologo, als Paolo Geometra, als Paolo Arismetra. Nach einer Angabe seien seine Werke nebst erläuternden Zusätzen des Micillus 1532 in Basel im Drucke erschienen, doch ist diese Ausgabe von Niemand je beschrieben worden, wenn sie überhaupt vorhanden war. Er schrieb ein Werk, in welchem die Gleichungen ersten und zweiten Grades und diejenigen kubischen Gleichungen, welche nur aus zwei Gliedern bestehen, behandelt sind[3]). Auch unbestimmte Aufgaben kommen in der für Kaufleute verfassten Schrift vor, z. B. die Aufgabe, eine ganze Zahl von der Eigenschaft zu finden, dass ihr Quadrat mit dem um 36 verminderten Quadrate vervielfacht wieder ein Quadrat werde[4]). Paolo Dagomari hat zuerst unter den Nicht-Arabern, freilich wahrscheinlich nach arabischem Muster einen *Almanach* unter dem Titel *taccuino* veröffentlicht, welcher dieser Gattung von Schriften lange beigeblieben ist. Dem Almanach muss allem Anscheine nach ein arabisches Wort zu Grunde liegen, doch ist dasselbe mit Sicherheit noch nicht erkannt. Taccuino dagegen ist unverkennbar das arabische taqwim, die Tabelle[5]). Am bekanntesten sind die mehrfach gedruckten Regoluzze di Maestro Paolo dall' Abbaco[6]). Es sind 52 sehr kurz gefasste Regeln, welche zu einigen Bemerkungen Anlass geben. Die 1. Regel schreibt vor, man solle die Zahlen zum besseren Ueberblick beim Lesen derselben durch Pünktchen in Gruppen von je drei Ziffern abtheilen. Wir wissen, dass Johannes von Sacrobosco das Gleiche vorschrieb. Das Gleiche wird auch von einem wie Dagomari dem XIV. Jahrhunderte angehörenden Paolo von Pisa[7]) berichtet, der aber eine ziemlich zweifelhafte Persönlichkeit ist und vielleicht mit unserem Paolo sich deckt. In der 11. Regel sind Brüche, *rotti*, erklärt. Man schreibt sie mittels eines Bruchstriches,

[1]) Libri II, 205, Note 1. [2]) Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano* pag. 133, 134, 137, 138, 274—327, 353—397. [3]) Libri II, 527. [4]) Damit $x^2(x^2-36)$ Quadrat sei, muss $x^2-36$ ein solches sein, d. h. $x$ muss die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sein, dessen eine Kathete 6 ist, und ein solches Dreieck ist z. B. 6, 8, 10. Man kann daher $x=10$, $x^2(x^2-36)=6400=80^2$ setzen. [5]) M. Steinschneider in der *Bibliotheca mathematica* von G. Eneström 1888, pag. 13—16. [6]) Libri III, 296—301. — Frizzo, *Le Regoluzze di Maestro Paolo dall' Abbaco* (Verona 1883). [7]) Libri II, 206, Note 5 und 526; III, 295.



*verga*, über welchem der *denominato*, unter welchem der *denominatore* sich findet. Die 12. Regel lehrt die *rotti infilzati* kennen, jene aufsteigenden Kettenbrüche, deren Leonardo von Pisa nach arabischem Vorbilde (S. 10) sich bediente. In der 14., 15., 16. Regel kommt die Multiplication und nach ihr die Addition von Brüchen zur Sprache, das Dividiren durch eine gemischte Zahl erst in der 38. Regel. Dazwischen schieben sich Regeln des Dreisatzes, der Zinsberechnung, die Angabe, dass man den Kreisumfang erhalte, wenn man den Durchmesser mit 22 multiplicire und durch 7 dividire, die Summirung der Reihe der natürlichen Zahlen. Die Regeln 42 bis 45 beziehen sich auf Kalenderanfertigung. Regel 46 lehrt die Subtraction ganzer Zahlen von einander mit Borgen von 10 im Minuenden, wo es nöthig ist, worauf die nächste Subtrahendenstelle um 1 erhöht wird. Regel 47 lässt die Quadratwurzel einer Zahl näherungsweise nach der Formel $\sqrt{A} \backsim a + \frac{A-a^2}{2a}$ berechnen u. s. w. Ordnung kann man, wie diese Auszüge beweisen, den Regeln nicht nachrühmen!

Giovanni Danti von Arezzo[1]) wird als Verfasser eines der Arithmetik des Boethius entnommenen (?) Algorithmus und einer Geometrie nach arabischen Quellen genannt.

Zuchero Bencivenni[2]) übersetzte Mancherlei astronomischen und mathematischen Inhaltes aus dem Arabischen in das Italienische. Bekannter ist freilich sein Name wegen eines grammatischen Verdienstes, da er es gewesen sein soll, der zuerst den Mitlauter v von dem Selbstlauter u unterscheiden lehrte.

Rafaele Canacci aus Florenz[3]) hat gleichfalls in italienischer Sprache über Algebra geschrieben und zwar, wie es scheint im Anschlusse an Guglielmo de Lunis, wenn man an die italienische Algebra dieses von Canacci selbst genannten Vorgängers (S. 100) glauben darf. Diese Schrift soll namentlich geschichtliche Angaben in bemerkenswerther Anzahl enthalten, deren Bekanntmachung zu wünschen wäre, allerdings unter der Voraussetzung, dass sie nicht alle jener Angabe gleichen, die sich von Canacci aus fortgeerbt zu haben scheint (Bd. I, S. 679), als führe die Algebra ihren Namen nach einem gewissen Geber.

Schriftsteller wie Pietro d'Abano, Cecco d'Ascoli, Andalo di Negro, denen eine ausführliche Geschichte der Physik und der Astronomie in Italien gerecht werden müsste, übergehen wir und nennen nur noch Biagio da Parma[4]). Sein eigentlicher Name war Pelacani.

[1]) Libri II, 207. [2]) Ebenda S. 207, Note 4. [3]) Ebenda S. 208. Die Handschrift der Algebra des Canacci gehört der Bibliotheca Palatina in Florenz an. [4]) Ebenda 209. — Gherardi, Einige Materialien zur Geschichte der mathe-

Er trat an den verschiedensten Orten als Lehrer auf, so auch in Paris, wo man, wie erzählt wird, auf ihn den Ausspruch erfand: „Aut diabolus est, aut Blasius Parmensis.“ Seine erste Lehrthätigkeit entwickelte er seit 1374 in Pavia, wo er selbst sich den Doctorgrad erworben hatte. In der Universität Bologna hatte er die Professur der Astrologie, später die der Philosophie in den Jahren 1378—1384 inne. Von Bologna kam er nach Padua bis 1388, wo er wieder in Bologna Astrologie las. Die Jahre 1404, 1406, 1407 gehören wieder Pavia, die Zeit von 1408 bis zum 15. October 1411 neuerdings Padua an. Dann kehrte er in seine Vaterstadt Parma zurück, in welcher er am 23. April 1416 starb. Sein Charakter scheint den häufigen Aufenthaltswechsel verschuldet zu haben; wenigstens wird glaubwürdig berichtet, er sei seiner Stellung in Padua verlustig geworden, weil die Studirenden, entrüstet über seine Rohheit und Habgier, seine Vorlesungen nicht länger besuchten, worauf die Regierung ihn entliess. Er beschäftigte sich unter anderem mit Statik und mit Perspective und schrieb überdies Erläuterungen zu den Latitudines formarum des Oresme. Letztgenannter Commentar ist 1482 in Padua im Drucke erschienen, gehört aber heute zu den kaum auffindbaren Seltenheiten, und doch wären Nachrichten über ihn sehr erwünscht, sowohl wegen der uns bekannten Bedeutsamkeit des erläuterten Werkes, als auch um ein Urtheil zu gewinnen, wie weit die Berühmtheit des Verfassers eine verdiente war.

Wir haben das Ende des XIV. Jahrhunderts erreicht. Ueberblicken wir dasselbe mit nach rückwärts gewandten Augen, so sind es etwa folgende Punkte, die vorzugsweise sich bemerkbar machen. Die beiden Schulen, deren Vorhandensein im XIII. Jahrhunderte wir erkannten, sind noch immer getrennt vorhanden. Die geistliche Schule der Universitäten, an Zahl und Bedeutung der ihr angehörenden Persönlichkeiten überwiegend, bringt in England einen Bradwardinus, in Frankreich einen Dominicus de Clavasio, einen Oresme hervor, schickt Sendboten einer künftigen Grösse nach Deutschland. Die weltliche oder kaufmännische Schule bleibt noch in Italien haften ohne durch diese Einengung des Bodens ganz zu verkümmern. Sie zählt auch Persönlichkeiten von geistiger Bedeutung, wenn auch keineswegs dem Gründer der Schule, Leonardo von Pisa, nur annähernd gleichzustellen.

Ohne Alles, was das XIII. Jahrhundert hinterlassen hatte, voll-

matischen Facultät der alten Universität Bologna (deutsch von Max. Curtze 1871) S. 19. — Favaro, *Galileo Galilei e lo studio di Padova* (1883), I, 112—114. — Suter, Math. Univ. S. 50.



ständig zu beherrschen, ist das XIV. Jahrhundert dennoch in wichtigen Dingen fortgeschritten. Neue mathematische Begriffe kommen zur Entstehung, deren Reife noch Jahrhunderte auf sich warten lassen wird. Bradwardinus legt den Grund zu einer allgemeinen Lehre von den Sternvielecken. In seine philosophisch-mathematischen Untersuchungen spielt schon die Frage des Unendlichgrossen, des Unendlichkleinen hinein, die nicht mehr zur Ruhe kommen soll. Der Contingenzwinkel, schon von Campanus, der auch die Untersuchung der Sternvielecke in Fluss gebracht hatte, der Beachtung würdig erkannt, bietet einen Gegenstand der Forschung wie des Streites. Oresme giebt einer noch ziemlich fernen Zukunft gebrochene Exponenten. Er giebt ihr eine Versinnlichung von Veränderungen, aus welcher neue Wissenschaften entstehen werden. Sind diese Keime den Gelehrten der Universitäten zu verdanken, so sehen wir italienische Kaufleute mit Gleichungen von höherem Grade als dem zweiten sich beschäftigen. Es war ein Schritt nicht über Leonardo von Pisa hinaus, aber neben dem von diesem gebahnten Wege, den sie wagen. Leonardo hatte eine bestimmte kubische Zahlengleichung annähernd gelöst, nachdem er gezeigt hatte, welche Gestalt die Gleichungswurzel nicht haben könne. Jetzt ist von bestimmten Zahlengleichungen als solchen nicht die Rede, die Frage nach der allgemeinen Auflösung der kubischen, der biquadratischen Gleichung drängt sich mächtig in den Vordergrund. Auch diese Frage wird nun nicht mehr zur Ruhe kommen. Versuche, dieselbe zu bewältigen, scheitern und werden noch scheitern. Ungenügende Inductionen führen höchstens zur Neigung, in geheimnissvoller Weise zu verbergen, wie man die der Induction zu Grunde liegende einzelne Gleichung behandelt hatte. Auch diese Neigung wird sich vererben, in Italien vererben, bis wieder in Italien der wiederholt vergebliche Versuch gelingen und die kubische, die biquadratische Gleichung bewältigt sein wird.