VIII. Klostergelehrsamkeit des Mittelalters.

38. Kapitel.

Klostergelehrsamkeit bis zum Ausgange des X. Jahrhunderts.

Wir müssen den Faden wieder anknüpfen da, wo wir ihn abgebrochen haben, um aus Europa hinüberzuschweifen nach dem Osten und die Summe zu ziehen aus dem, was asiatische Völkerschaften im Laufe der Jahrhunderte aus dem mathematischen Wissen zu machen wußten, von welchem ihnen, wie wir in verschiedenen Kapiteln nachzuweisen gesucht haben, wenigstens was die geometrischen Teile und nicht unwesentliche Bruchstücke der algebraischen Teile betrifft, mancherlei von Griechenland aus überkam. Die Araber, das haben wir insbesondere gesehen, mit ihrer frischen Wüstenkraft, sie, die sich, zum Unheile ihres Reiches, zum Heile für die Wissenschaft, in den verschiedensten Zeiträumen mit nicht minder empfänglichen, nicht minder geistig unverbrauchten Elementen vermischten und ihnen sich unterwerfen mußten, waren die treuesten Erben. Sie haben das ihnen anvertraute Gut nicht nur zu bewahren, auch zu vermehren gewußt. Wohin die Araber, solange ihr Reich im Wachsen begriffen war, der Eroberungspfad führte, dahin nahmen sie ihre Wissenschaft mit, Krieger und Lehrer zugleich. Wo die Araber sich eindringenden Herrschern beugten, gaben sie diesen als ersten Tribut ihre Bildung. Wo die Araber aber nicht unterjocht, sondern verdrängt wurden, da nahmen sie auf der Flucht ihre Kenntnisse wieder mit fort, welche rasch sich anzueignen die Sieger noch nicht fähig waren. Das deutlichste Beispiel zeigt uns Spanien, wo mathematische Wissenschaft verkümmerte, nachdem die letzten Araber vom spanischen Boden verdrängt waren.

Jenen mittelasiatischen Steppenvölkern, die dem Dschingizchân und Tamerlan gehorchten, fehlte es an Bildungsfähigkeit keineswegs, und die Möglichkeit war einmal vorhanden, daß Stamm- oder Sittenverwandte derselben verhältnismäßig frühe in Griechenland selbst mit altgriechischer Bildung bekannt geworden wären. Eine andere Möglichkeit war die, daß der fränkische Stamm von griechisch-arabischer Bildung durchdrungen worden wäre. Beide Möglichkeiten haben sich nicht erfüllt. Theodosius der Große wehrte am Schlusse des IV. S.

den Strom der Völkerwanderung von den Balkanländern ab, so daß er erst bei der apenninischen Halbinsel den westlichen Lauf in einen südlichen verwandeln konnte. Die Scharen Attilas, Dschingizchâns Mongolen am nächsten verwandt, blieben gleichfalls nördlich in ihrer Überflutung Europas, die im V. S. kurz aber gefahrdrohend sich ergoß. Und als 732 ein westarabisches Heer die Pyrenäen überschritten hatte und eine Schlacht darüber zu entscheiden hatte, ob Christentum ob Islam siegen sollte, da gelang es Karl Martel bei Poitiers seine Fahnen aufrecht zu erhalten.

Wir haben keineswegs die zwecklose Absicht, Vermutungsgeschichte zu schreiben und darüber in Ausführungen uns zu ergehen, welche Wendung die Entwicklung der Wissenschaften, in erster Linie der Mathematik, genommen hätte, wenn nur eines jener Ereignisse anders ausgefallen wäre, genug, es war so, wie wir sagten. Griechischer Einfluß, unmittelbarer wie durch Araber vermittelter, blieb den in Europa außerhalb Griechenland und Italien angesiedelten Stämmen fremd, wenn wir von Spanien absehen, dessen Ausnahmestellung wir oben einige Worte gewidmet haben. Nur was durch **römische** Zwischenträger eingeführt werden konnte, kam der nordischen Mathematik, um uns dieses wenn auch im einzelnen nicht immer zutreffenden Sammelnamens zu bedienen, zugut. Wir wissen aus den Kapiteln, in welchen wir mit den Römern uns besonders beschäftigten, wie blutwenig das war, wenn auch immerhin mehr, als man lange Zeit meinte. Wir müssen jetzt verfolgen, wie jenes Wenige in fast noch absteigender Reihenfolge da und dort zu erkennen ist, bis seit den Kreuzzügen, also seit dem XII. S., die europäische Wißbegier sich hungrig abwandte von den stets leereren Säcken römisch-klösterlicher Speisekammern, um an den vollen Speichern arabischer Gelehrten sich so zu sättigen, daß die Überladung merklich wird, daß nicht alles verdaut werden konnte.

Vorläufig befinden wir uns noch in der Zeit, welche an unseren römischen Abschnitt sich anschließt, am Ende des VI. S. Damals wurde 570 in Carthagena **Isidorus** geboren[1]). Seine Mutter war die Tochter eines gotischen Königs, eine seiner Schwestern soll den Thron des Königs Levigild geteilt haben. Seine übrigen Geschwister waren sämtlich hohe kirchliche Würdenträger. Bei solchen Verbindungen kann es nicht Wunder nehmen, daß Isidorus schon nach kaum zurückgelegtem 30. Lebensjahre im Jahre 601 Bischof von Sevilla wurde, eine Stellung, die er bis zu seinem Tode 636 bekleidete. Aber Isidorus Hispalensis, wie er von seinem Wohnsitze heißt, recht-

[1]) Math. Beitr. Kulturl. S. 277—279.

fertigte nachträglich die Wahl, die ihn getroffen hatte. Seine Beredsamkeit machte, um das Wort eines Schülers über ihn zu gebrauchen, seine Zuhörer erstarren. Beinamen wie „Zierde der katholischen Kirche“, wie „der hervorragende Gelehrte“ wurden ihm beigelegt, und zweimal 619 und 633 wurde ihm die Ehre zuteil, bei einem Konzil den Vorsitz zu führen. Seine Schriften waren zahlreich, doch haben wir es nur mit einem Werke zu tun, einer Art von Enzyklopädie in 20 Büchern, welche er verfaßte, und in welcher er sich wenn nicht der Form so doch dem Inhalte nach streng an die schon vorhandenen römischen Enzyklopädien eines Martianus Capella, eines Cassiodorius Senator anschloß, welche er von nun an ersetzte, fast verdrängte.

Die Ursprünge, **Origines**, oder auch die Etymologien ist der Titel des Werkes. Isidorus liebt es nämlich, die Erklärung des Sinnes eines Ausdruckes aus dessen sprachlichem Ursprunge zu entnehmen, und so bilden Wortableitungen einen großen Teil des umfassenden Werkes. Gleich zu Anfang ist die Wissenschaft als aus 7 Teilen bestehend angegeben. Es sind dieselben Teile, dieselbe Reihenfolge, welche wir bereits kennen. Es ist das Trivium: Grammatik, Rhetorik, Dialektik und das Quadrivium der mathematischen Wissenschaften: Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie. Die Kapitel 21 bis 24 des I. Buches handeln von den Abkürzungszeichen der Alten, doch würde man fehl gehen, wenn man hier die Apices suchen wollte. Sie sind ebensowenig behandelt wie gewisse musikalische Zeichen, deren die Römer sich doch unzweifelhaft bedienten. Nur im XV. Buche, Kapitel 15 und 16 von den Ackermaßen und von den Reisemärschen und im XVI. Buche, Kapitel 24, 25, 26 von den Gewichten, von den Maßen, von den Zeichen der Gewichte[1]) finden sich Maßvergleichungen und in dem letztgenannten Zeichen von Gewichtsteilen. Es sind das dieselben von den altrömischen sich unterscheidenden Namen und Zeichen, deren auch Victorius sich bedient hatte (S. 531), die auf dem Abacus in der gefälschten Geometrie des Boethius vorkommen, dem man also um dieser besonderen Zeichen wegen nicht ein späteres Datum als die Lebenszeit des Isidorus zuschreiben müßte[2]), sondern nur als die des Victorius, eine Notwendigkeit, welche durch die Lebenszeit des Boethius selbst reichlich erfüllt wäre. Jene vorerwähnten Kapitel des I. Buches der Origines enthalten dagegen Erklärungen von mancherlei grammati-

[1]) Diese 5 Kapitel sind abgedruckt bei **Hultsch**, *Metrologicorum Scriptorum Reliquiae* II, 106–123. Auf pag. 114 lin. 6—12 findet sich eine Ableitung von *siclus* aus dem hebräischen *sicel*. [2]) **Friedlein**, Zahlzeichen und elementares Rechnen usw. S. 59.

schen Zeichen, von Sternchen, von besonderen Anführungszeichen für biblische Stellen und dergleichen mehr. Das III. Buch handelt von den vier mathematischen Wissenschaften, unter welchen, wie Isidorus sagt, die weltlichen Schriftsteller alle mit Recht die Arithmetik vorangestellt haben; denn sie bedürfe zu ihrer Darlegung keiner anderweitigen Vorkenntnisse, wie es bei der Musik, der Geometrie, der Astronomie der Fall sei. Diesem Beispiele folgend schickt auch Isidorus die Arithmetik voraus, deren Ursprung und Übergang zu den Römern er in den vielfach angeführten Worten schildert: „Man hält dafür, daß Pythagoras bei den Griechen die Wissenschaft der Zahl zuerst aufgeschrieben habe, daß sie alsdann von Nikomachus weitläufiger behandelt wurde; den Römern wurde sie durch Appuleius und Boethius bekannt.“ Im 3. Kapitel erklärt Isidorus die lateinischen Zahlennamen in einer Weise, welche dem Leser mitunter als Spott erscheinen müßte, könnte man nicht die feste Überzeugung von dem ernstesten wissenschaftlichen Streben des Isidorus haben. Da soll decem, zehn, von dem griechischen *δεσμεύειν*, zusammenbinden, herkommen, weil die Zehn alle niedrigeren Zahlen erst vereinige. Da stammt centum, hundert, von *κανθός*, das Rad, warum, wird nicht gesagt. Da wird mille, tausend, aus multitudo, die Menge, erklärt. Glücklicherweise wird der undankbare Gegenstand bald wieder verlassen, und die folgenden Kapitel bringen die bekannten Unterscheidungen der Zahlen in gerade und ungerade, in vollkommene und überschießende, in nach gegebenen Verhältnissen proportionale, in lineäre Zahlen, Flächenzahlen und Körperzahlen usw. Die Zahl hat für Isidorus eine solche Würde, daß er einem anderen kirchlichen Schriftsteller folgend in die Worte ausbricht[1]), welche von ihm aus sich durch die verschiedensten Schriftsteller weiter vererbt haben: „Nimm die Zahl aus allen Dingen weg, und alles geht zugrunde. Raube dem Jahrhundert die Rechnung und die Gesamtheit wird von blinder Unwissenheit ergriffen, und nicht kann von den übrigen Tieren unterschieden werden, wer die Verfahren des Kalkuls nicht kennt.“ Wir haben hier *computus* mit *Rechnung* übersetzt. Sollte es nötig sein zu beweisen, daß das Wort diese allgemeine Bedeutung besitzt, so könnten wir auf den Astrologen Julius Firmicus Maternus verweisen, wenn er sagt: Siehst Du, wie die welche die ersten Rechnungsverfahren *(computos)* lernen in langsamer Bewegung ihre Finger biegen[2])?

[1]) Origines Lib. III, cap. 4, § 4: *Tolle numerum rebus omnibus et omnia pereunt. Adime seculo computum et cuncta ignorantia caeca complectitur, nec differri potest a ceteris animalibus qui calculi nescit rationem.* [2]) Firmicus Maternus, Mathesis Liber I, cap. V, § 14 (ed. Sittl, Leipzig 1894, pag. 13

Aber wie hat man denn gerechnet? wird im stillen jeder Leser fragen. Darüber gibt Isidorus keinerlei Auskunft. Nur an einer Stelle sagt er uns, wie uns scheint, wie zu seiner Zeit nicht mehr gerechnet wurde. Im X. Buche, welches nicht weiter in Kapitel abgeteilt bestimmt ist, Wörter zu erklären, welche selbst in ziemlich alphabetischer Ordnung aufeinander folgen, heißt es in der 43. Nummer unter *calculator: a calculis i. e. lapillis minutis, quos antiqui in manu tenentes componebant numerum*, also Rechnen von Rechenpfennigen d. h. kleinen Steinchen, welche die Alten in der Hand zu halten und die Zahlen daraus zusammenzulegen pflegten.

Was in dem III. Buche von Geometrie, Musik und Astronomie vorkommt, ist noch dürftiger als das Arithmetische, auch in dieser Beziehung an die Vorgänger des Isidorus erinnernd. Die große Menge, auch der berühmten Gelehrten, wußte von diesen Teilen der Mathematik wenig mehr als einige Wort- und Sacherklärungen und mußte es dabei bewenden lassen. Auch Isidorus macht hierin keinerlei Ausnahme.

Das war, wie wir schon gesagt haben, das Werk, welches für lange Zeit die eine Hauptquelle des Wissens bildete, aus welcher die Nachkommen schöpften, während die Werke des Martianus Capella, des Cassiodorius Senator in den Hintergrund traten und nur Macrobius und Boethius einer Gunst sich erfreuten, welche dem einen für seine größere Selbständigkeit, dem anderen für seine größere Ausführlichkeit in der Tat gebührte.

Mehr vielleicht als durch seine Schriften machte sich Isidorus durch seine Fürsorge für den Unterricht verdient. Die Regel des heiligen Benedikt von Nursia hatte die Aufnahme von Kindern als Klosterzöglingen vorgesehen und Klosterschulen zum Bedürfnisse gemacht. Isidorus stiftete seit seiner Erhebung zum Bischofe gleichfalls eine Art von Schule, in welcher die notwendigsten Lehrgegenstände eingeübt wurden.

Etwa ein Jahrhundert nach der Geburt von Isidorus von Sevilla erblickte der Mann das Licht der Welt, zu welchem wir uns jetzt zu wenden haben, und der uns nach dem fernsten Norden von Europa führen wird: Beda, genannt der Ehrwürdige, venerabilis[1]). Die Ge-

lin. 30—31) *Vides ut primos discentes computos digitos tarda agitatione deflectant?* Die Mathesis ist, wie Mommsen (Hermes XXIX, 468—472. Berlin 1894) gezeigt hat, zwischen dem 30. Dezember 335 und dem 22. Mai 337 verfaßt.

[1]) Karl Werner, Beda der Ehrwürdige und seine Zeit. Wien 1875. Vgl. daneben auch die Vorreden von Giles zu dem I. und VI. Bande seiner Ausgabe von Bedas Werken: *Venerabilis Bedae opera quae supersunt omnia.* London 1843. 12 Bände 8°.

schichte dieses Mannes und seiner folgereichen Leistungen ist so untrennbar mit der Geschichte der Bekehrung der britischen Inseln verbunden, daß wir notwendig etwas weiter ausholen und bei dieser einen Augenblick verweilen müssen.

Irland war schon in der ersten Hälfte des V. S. von Gallien aus bekehrt worden. Klöster entstanden dort, in welchen, getreu den Überlieferungen des heiligen Benedikt und des Cassiodorius (S. 569), geistliche und weltliche Schriftsteller, lateinische sowohl als griechische, zum Gegenstande des Studiums gemacht wurden. Dazu gehörte besonders das Kloster Bangor, von welchem in der zweiten Hälfte des VI. S. der heilige Kolumban auszog, neue Klöster an verschiedenen Orten gründend, so das Kloster Luxeuil in Burgund, so Bobbio in Oberitalien, wo er selbst 615 starb. Andere irische Mönche zogen dieselbe Heerstraße des Glaubens durch Jahrhunderte hindurch. Die Klöster, welche von Kolumban, von seinen Landsleuten Gallus, Pirmin und anderen in Deutschland, in der Schweiz, in Norditalien eingerichtet worden waren, erhielten so immer frischen Zuzug, und in zierlichen irischen Buchstaben entstanden an den verschiedensten Orten saubere Abschriften des gemischtesten Inhaltes. Die Klöster irischen Ursprungs wetteiferten so in ihren bildungsfreundlichen Bestrebungen mit denen der Benediktiner, da und dort mit ihnen verschmolzen.

Gleichfalls von Irland aus ging ein früher Zug von Missionären hinüber nach der nahe gelegenen größeren Insel, nach Schottland und England. Allerdings war ihr Wirken dort nicht von nachhaltigem Erfolge. Nachdem am Anfange des V. S. bereits Ninian im südlichen Schottland das Christentum verbreitet hatte, wurde es nach der erobernden Einwanderung der Angeln und Sachsen um 450 teils wieder vernichtet, teils in die Gebirge zurückgedrängt. Unter Papst Gregor dem Großen begann von Rom aus 596 der wiederholte Versuch, jene Lande zu bekehren, und bald war Canterbury der Sitz eines Erzbischofs, und der König von Kent nahm den neuen Glauben an. So gab es auf der britischen Hauptinsel zwei Kirchen, die ältere und die jüngere, örtlich voneinander getrennt, in Gewohnheiten und Einrichtungen mehrfach voneinander abweichend, namentlich in einem Punkte, der von Wichtigkeit wurde, so geringfügig der Streitpunkt an sich uns erscheinen mag.

Die südliche, römische Festordnung verlangte, daß die Feier des Osterfestes als des Festes der Auferstehung frühestens am Abend des 14. Nisan, spätestens am Abend des 20. Nisan jüdischer Rechnung beginne. Die nordische, britische Ordnung wollte das Fest zwischen um einen Tag früher gelegenen äußersten Grenzen feiern.

Es kam im Jahre 664 zu einer öffentlichen Disputation über diesen Gegenstand unter dem Vorsitze Königs Oswin, und dieser entschied zugunsten der römischen Auffassung. Es läßt sich denken, daß solche Vorgänge ein reges Interesse für den Gegenstand erwecken mußten, über den man öffentlich gestritten hatte, ein Interesse, das in letzter Linie dem Rechner und seiner Kunst zugute kommen mußte. Der nun geeinigten Kirche festeren Zusammenhalt zu geben schickte Papst Vitalian, nachdem der Bischofssitz in Canterbury 669 erledigt war, zwei neue hochbegabte Männer, Theodor als Bischof, Hadrian als seinen Ratgeber. Theodors persönliche wissenschaftliche Neigungen begegneten sich mit dem eben hervorgehobenen Interesse, sei es, daß wir darin eine Gunst des Zufalles zu erblicken haben, sei es, daß bei seiner Wahl Rücksicht darauf genommen worden war. Er achtete streng darauf, daß für den ihm untergebenen angelsächsischen Klerus neben der heiligen Schrift und den mit dem Studium derselben zusammenhängenden sachlichen und sprachlichen Unterweisungen auch Metrik, Astronomie und kirchliche Festrechnung Gegenstände des klösterlichen Unterrichts wurden. Sprachstudien waren nicht weniger gefördert. Es gab zu Bedas Zeiten, also wenige Jahrzehnte nach Theodors um 690 erfolgtem Tode, Männer in England, welche des Griechischen und Lateinischen eben so gut wie ihrer eigenen Muttersprache kundig waren. Leider waren die griechischen Werke, welche sie lasen, nicht solche, wie wir sie zum Besten der mathematischen Wissenschaften wünschen müßten.

Wie wir früher gesagt haben, alles, auch das Griechische, kam von Rom, und griechische Mathematik war in Originalwerken darunter offenbar gar nicht vertreten. Es war schon verhältnismäßig sehr viel, daß überhaupt eine gewisse Neigung zur Erledigung kirchlich-mathematischer Fragen anders als auf von auswärts eingetroffene Anordnung hin in den damals an der schottisch-englischen Grenze gegründeten Klöstern großgezogen wurde, eine Neigung, die von da aus, wie wir sehen werden, durch Schüler jener Klöster über Frankreich und Deutschland sich fortsetzte, während in den älteren irischen Klöstern z. B. an solche Fragen kaum gedacht wurde.

Um jene Zeit 674 und 682 war es, daß durch Biscop, einen edeln Than, der als Mönch und Abt den Namen Benedikt erhielt, dicht an der Grenze Schottlands, wo Tyne und Were unweit voneinander in das Meer sich ergießen, zwei Klöster erbaut und St. Peter und Paul geweiht wurden. Der Einrichtung der Klöster war durch Biscop, der vielfach Reisen nach Rom machte und stets neue Bücherschätze, Reliquien, Gemälde zur Ausschmückung der Kirche von dort mitbrachte, die Regel des Benediktinerordens zugrunde gelegt. In dieser Gegend ist Beda 672 geboren, in diesen Klöstern wurde er erzogen, hier verbrachte er den Verlauf seines ganzen Lebens in ruhiger Emsigkeit, hier starb er am 26. Mai 735, am Feste Christi Himmelfahrt.

Beda hat als ein Hauptwerk eine Kirchengeschichte hinterlassen, welche bis zum Jahre 731 hinabreicht, und an deren Ende er das Verzeichnis derjenigen Schriften gibt, welche er bis dahin — bis zu seinem 59. Lebensjahre, wie er sagt — verfaßt hat. Dadurch ist einerseits die Zeit seiner Geburt genau bestimmbar geworden[1]), andererseits auch möglich geworden, viele ihm früher wohl beigelegte und unter seine Werke aufgenommene Schriften als unecht wieder zu entfernen, da er unmöglich neben den Pflichten eines Messepriesters, die er zu erfüllen hatte, neben dem Unterrichte der zahlreichen Schüler, welche er heranbildete, in den vier Jahren, um welche er nur die Anfertigung jenes Verzeichnisses überlebte, vieles schriftstellerisch geleistet haben kann. Zwei Werke sind in dem Verzeichnisse als von Beda herrührend anerkannt, die in einem gewissen geistigen Zusammenhange stehen. Das eine, eine physische Weltbeschreibung, führt den Namen De natura rerum, über die Natur der Dinge. Es ist nach Plinius bearbeitet, wie Beda selbst an einzelnen Stellen erklärt. An die Weltkunde schließt sich sodann die Zeitkunde an, der die Abhandlung De temporibus, über die Zeiten, gewidmet ist. Diese Schrift gibt im 14. Kapitel selbst ihr Datum an, sie ist 703 verfaßt.

Eine ausführlichere Bearbeitung führt den Titel: *De temporum ratione*, über Zeitrechnung. Sie ist mindestens 14 Jahre später als die kürzere Fassung vollendet, da sie dem Abte Huaetberct zugeeignet ist, welcher erst 716 in diese Stellung eintrat. In der Vorrede beruft sich Beda ausdrücklich auf die beiden genannten Schriften von der Natur der Dinge und von den Zeiten. Sie seien nach dem Urteile derjenigen, welche sie zu benutzen Gelegenheit hatten, allzugedrängter Schreibweise gewesen, als daß sie den Nutzen hätten stiften können, den er beabsichtigte. Namentlich die Osterrechnung scheine einer weitläufigeren Auseinandersetzung zu bedürfen, und so habe er sich denn entschlossen, ein derartiges Lehrbuch der Zeitrechnung seinen Schülern zu übergeben. Als Quellen, welche Beda dabei benutzte, hat man Macrobius und Isidorus nachweisen können[2]). Für anderes sind uns seine Quellen unbekannt, wo er der älteste Schriftsteller ist, von welchem eine ausführlichere Darstellung des Gegenstandes sich erhalten hat. Wir meinen damit gleich das 1. Kapitel der Zeitrech-

[1]) Werner, Beda S. 81. [2]) Ebenda S. 122 und 125.

nung, von welchem wir schon (S. 527) ankündigend gesprochen haben. Es galt sonst auch wohl für eine selbständige Abhandlung unter dem Titel „Über die Fingerrechnung", bis es auf Grund einiger Handschriften des britischen Museums an diesen seinen rechtmäßigen Platz gebracht wurde. Das gleiche Schicksal teilte das 4. Kapitel, welches für eine Abhandlung „Über die Rechnung mit Unzen" galt[1]). Das erste Kapitel beziehungsweise die ganze Schrift über Zeitrechnung leitet Beda mit den Worten ein: „Wir hielten es für nötig, erst in Kürze die überaus nützliche und stets bereite Geschicklichkeit der Fingerbeugungen zu zeigen, um dadurch eine möglich größte Leichtigkeit des Rechnens zu geben; dann, wenn der Geist des Lesers vorbereitet ist, wollen wir zur Untersuchung und Aufhellung der Reihe der Zeiten mittels Rechnung kommen." Und einige Seiten später heißt es: „Bezüglich der oben bemerkten Rechnung kann auch eine gewisse Fingersprache gebildet werden teils zur Übung des Geistes, teils als Spielerei" Man sieht hier einen scharfen Gegensatz[2]). Die Fingersprache ist, wenn auch Geistesübung mit ihr verbunden ist, nicht mehr und nicht weniger wie Spielerei. Das Fingerrechnen ist eine Notwendigkeit. Man hat gewiß mit Recht mehrfach aus diesen Stellen gefolgert, daß zu Bedas Zeiten ein Fingerrechnen, man würde wohl besser sagen ein Kopfrechnen mit Unterstützung durch die zur besseren Erinnerung an die allmählich sich ergebenden und im Gedächtnisse festzuhaltenden Zahlen vorgenommenen Fingerbeugungen, allgemein in Übung war. Beda lehrt in ausführlicherer Darstellung, wie man von der linken Hand beginnend und zur Rechten fortschreitend die einzelnen Zahlen darstellen solle. Er lehrt es im großen und ganzen in Übereinstimmung mit Nikolaus von Smyrna (S. 514—515), in Einzelheiten von ihm abweichend, so daß eine unmittelbare Abhängigkeit dieses letzteren Schriftstellers von Beda, an und für sich nicht recht wahrscheinlich, nur um so weniger anzunehmen sein dürfte[3]). Allein wenn nun der Schüler so vorbereitet ist, wenn er seinem Gedächtnisse überall, wo er geht und steht, mit den Fingern zu Hilfe kommen kann — denn das ist ja die Bedeutung der *solertia promptissima*, der stets bereiten Geschicklichkeit — wie verfuhr man dann eigentlich?

Wir sind nicht imstande, aus Bedas Schriften diese gewiß

[1]) Beda (ed. Giles) VI, 139—342 das Werk *De temporum ratione*. Dessen Caput 1. *De computo vel loquela digitorum* pag. 141—144 und Caput 4. *De ratione unciarum* pag. 147—149. [2]) Stoy, Zur Geschichte des Rechenunterrichtes I, 38 (Jena 1878) hat wohl zuerst durch Nebeneinanderstellung der beiden Ausdrücke darauf aufmerksam gemacht. [3]) Auch diese Bemerkung hat Stoy l. c. S. 36—37 gemacht.

wichtigste Frage zu beantworten. Beda sagt nicht eine Silbe über die Rechnungsverfahren selbst. Nur zweierlei können wir als Schlußfolgerung ziehen. Erstens, daß Beda bei seinem Schweigen nur an die verhältnismäßig sehr einfachen Rechnungen (hauptsächlich Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen durch 4) dachte, welche bei der kirchlichen Zeit- und Festrechnung vorkamen, und welche in der Tat leicht im Kopfe auszuführen waren. Zweitens können wir ihm unmittelbar entnehmen, daß es eine weitverbreitete Sitte war, die er schilderte. Er sagt nämlich, der heilige Hieronymus müsse schon das Verfahren des Fingerrechnens gekannt haben, da gewisse Anspielungen desselben nicht anders zu verstehen seien. Beda hat demgemäß bei Hieronymus das Fingerrechnen wiedererkannt, mit welchem er vertraut war und seine Schüler vertraut zu machen beabsichtigte. Eine Quelle muß also vor dem Tode des Hieronymus d. h. vor 420 vorhanden und wahrscheinlich in lateinischer Sprache vorhanden gewesen sein. Eine anderer Frage ist die, ob die Lehren sich an eine geschriebene Quelle anknüpften. Uns scheint es fast natürlicher, an eine durch Jahrhunderte sich fortsetzende mündliche Überlieferung der Fingerbeugungen zu glauben, wie das Rechnen unter Anwendung der Finger sich unzweifelhaft nur durch mündliche Lehre fortpflanzte. Diese unsere letztere Behauptung ist in der Natur der Dinge begründet, hat aber außerdem eine wesentliche Unterstützung in der Tatsache, daß wie Beda und Nikolaus von Smyrna so auch jener Araber, der in Versen die Fingerstellungen lehrte (S. 710), über das wirkliche Rechnen keine Silbe verliert.

Ist diese Lücke schon für das Rechnen mit ganzen Zahlen vorhanden, so kann man zum voraus versichert sein, daß ein umfassendes Bruchrechnen erst recht nicht gelehrt wird. In der Tat findet sich in dem 4. Kapitel über die Rechnung mit Unzen kaum mehr als die Einteilung des aus 12 Unzen bestehenden Asses und der Unze selbst, ein Beleg, wenn ein solcher verlangt würde, für den unmittelbar römischen Ursprung des Ganzen. Beda bemerkt, der Begriff als Gewicht habe den Ausgangspunkt gebildet, dann aber sei abgeleitet davon nur der Begriff des Ganzen und seiner Teile übrig geblieben. Wenn man von einem Ganzen sein Sechstel wegnehme, so nenne man den Rest *dextans* usw. Auch die Zeichen für die Brüche fehlen nicht. Solche waren, wie wir wiederholt zu bemerken hatten, seit Jahrhunderten in Gebrauch. Es hat wohl die Bedeutung des einen oder des anderen Bruchnamens sich verändert; es haben neue Namen sich eingeschoben; die Zeichen haben sich abgerundet, sind neuen Namen entsprechend neu hinzugetreten, aber begrifflich Neues tritt uns nicht entgegen.

Die Osterrechnung, der eigentliche Mittelpunkt der Zeitrechnung, gründet sich bei Beda wie bei Cassiodorius, wie bei anderen (S. 573) auf die 19jährige Wiederkehr des Zusammenfallens von Sonnen- und Mondzeiten und stellt, wie wir oben andeuteten, an die Rechenkunst des Schülers, der nur diese Aufgabe zu lösen beabsichtigte, keine übermäßige Anforderung, so daß die Erfüllung der auf einem Ausspruche des heiligen Augustinus beruhenden Vorschrift[1]), es müsse in jedem Mönchs- und Nonnenkloster wenigstens eine Person vorhanden sein, welche es verstehe, die Ordnung der kirchlichen Feste und damit den Kalender für das laufende Jahr festzustellen, nicht gerade schwer war.

Dasselbe Jahr 735, in welchem Beda starb, war das Geburtsjahr Alcuins[2]). Er war ein vornehmer Angelsachse und hieß mit heimatlichem Namen Alh-win, d. h. Freund des Tempels, woraus eben Alcuin entstanden ist. Fast noch häufiger nannte er sich selbst Albinus. Sein Lehrer war Egbert von York, ein naher Freund Bedas, wie aus einem vertrauten Briefe Bedas an ihn über kirchliche Verhältnisse hervorgeht. Egbert legte an der mit einer reichen Bibliothek ausgestatteten Schule seines Bischofssitzes das neue Testament aus, die übrigen Fächer waren seinem Verwandten Aelbehrt anvertraut, zu welchem Alcuin in enge Beziehungen trat. Er begleitete ihn noch als Jüngling auf einer wissenschaftlichen Reise nach Rom, dem Hauptmarkte für die Erwerbung von Handschriften, er wurde sein Nachfolger in der Leitung der Yorker Schule, als Aelbehrt 766 nach Egberts Tode den erzbischöflichen Stuhl bestieg.

Alcuin erzählt uns selbst, worin der Unterricht an der Schule bestand. Die Geheimnisse der heiligen Schrift wurden erläutert. Daneben wurden Grammatik, Rhetorik, Dialektik, Musik und Poesie gelehrt. Auch die exakten Wissenschaften kamen nicht zu kurz. Astronomie und eigentliche Naturgeschichte, die Osterrechnung bildeten besondere Lehrgegenstände, die in gleichem Inhalte uns auch bei Beda begegnet sind, und die von Alcuin mutmaßlich nicht viel anders gelehrt wurden als es bei seinen Vorgängern aufwärts bis zu Isidorus, zu Cassiodorius, zu Victorius der Fall gewesen war.

Er wurde durch die gleichen Werke römischer Gelehrsamkeit unterstützt, welche in der Büchersammlung von York sämtlich vor-

---

[1]) *Histoire littéraire de la France par des réligieux Bénédictins* VI, 70, und Sickel, Die Lunarbuchstaben in den Kalendarien des Mittelalters. Sitzungsber. d. Wiener Akademie. Philosoph.-histor. Klasse XXXVIII, 153 (1875). [2]) Karl Werner, Alcuin und sein Jahrhundert. Paderborn 1876. Kurz, aber übersichtlich ist Dümmlers Artikel „Alkuin“ in der Allgemeinen deutschen Biographie I, 343—348 (1875).

rätig waren. Hat doch Alcuin in dem Gedichte[1]), in welchem er der Unterrichtszweige gedenkt, auch ein Verzeichnis von solchen Schriften gegeben, die in York zu finden waren:

> Finden wirst dort du die Spur der alten Väter der Kirche,
> Finden was für sich der Römer im Erdkreis besessen
> Und was Griechenlands Weisheit lateinischen Völkern gesandt hat.
> Auch was das Volk der Hebräer aus himmlischem Regen getrunken,
> Oder was Afrika hat hellfließenden Lichtes verbreitet.

Natürlich ist bei dem letzten Verse vorwiegend an Augustinus zu denken, bei dem auf Griechenland bezüglichen an ihn selbst den scharfsinnigen Aristoteles — *ipse acer Aristoteles* — welche beide im weiteren Verlaufe ausdrücklich genannt sind. Kaum festzustellen dürfte freilich sein, ob aristotelische Originalschriften, ob, worauf die Bemerkung Griechenlands Weisheit sei den Lateinern zugesandt eher zu deuten scheint, nur die lateinischen Bearbeitungen durch Boethius vorhanden waren. Von römischen Schriftstellern waren nach Alcuins Aussage unter vielen anderen Victorinus, wahrscheinlich der Grammatiker dieses Namens aus dem IV. S., vielleicht aber auch der Schriftsteller, den wir als Victorius kennen gelernt haben, Boethius, Plinius vertreten. Beda wird neben diesen als ebenbürtiger Schriftsteller genannt.

Erzbischof Aelbehrt starb 780, und nun wurde Alcuin nach Rom gesandt, um für dessen Nachfolger die päpstliche Bestätigung einzuholen. Auf dieser Reise traf er in Parma mit Karl dem Großen zusammen, welcher ihn schon vorher sei es persönlich, sei es durch den Ruf der Gelehrsamkeit, der um den Yorker Schulvorsteher sich weiter und weiter verbreitete, kennen gelernt hatte. Karl wünschte ihn bei sich zu haben, um den Stand des Wissens in Deutschland auf eine bessere Stufe zu bringen, und nach Einholung der Erlaubnis seiner Vorgesetzten folgte Alcuin der kaiserlichen Einladung 782. Nach achtjährigem Aufenthalte an dem Kaiserhofe, der übrigens nicht an einem und demselben Orte sich aufhielt, sondern bald da, bald dort seinen Sitz hatte, kehrte Alcuin nach der Heimat zurück, dann wieder zu Karl, der ihn nicht missen wollte, und als Alcuin gebrechlich und von häufigen Krankheiten heimgesucht das beschwerliche Leben eines wandernden Hofstaates nicht länger mitmachen konnte, wurde ihm die ersehnte Zurückgezogenheit in einer Art, wie

[1]) *Poema de Pontificibus et Sanctis ecclesiae Eboracensis* (d. h. von York) in den *Monumenta Alcuiniana* (ed. Wattenbach et Dümmler). Berlin 1873 als VI. Band der *Bibliotheca rerum Germanicarum.* Der Studienplan ist geschildert v. v. 1431 sqq. (S. 124—125), das Bücherverzeichnis v. v. 1534 sqq. (S. 128).

er sich dieselbe keineswegs gedacht hatte. Karl der Große schickte ihn 796 als Abt nach dem Kloster St. Martin in Tours, dessen Mönche einer strengeren Zucht als unter dem gerade verstorbenen Abte in hohem Grade bedürftig waren. Alcuin hat hier eine berühmte Klosterschule gegründet, aus welcher zahlreiche Lehrer hervorgingen, die alsdann in gleichem Sinne, wie sie erzogen und unterrichtet worden waren, an anderen Orten wirkten. Alcuin hat auch die großartige Büchersammlung in Tours ins Leben gerufen. So waren seine letzten Lebensjahre reich erfüllt. Er starb den 19. Mai 804.

Die Bedeutung, welche Alcuin für die Geschichte der Mathematik besitzt, liegt auf zweifachem Gebiete. Sie ist zu suchen in seinen Verdiensten um das Unterrichtswesen und in seiner schriftstellerischen Tätigkeit.

Wir haben Alcuin am Morgen seines Lebens als Lehrer in York wirken sehen. Wir haben von den nachhaltigen Erfolgen andeutungsweise gesprochen, die seine Lehrtätigkeit in Tours am Abende seines Lebens gehabt hat. Lehrer war er auch am Hofe Karls des Großen. War doch der Kaiser selbst, der an Wissenslust es allen zuvortat, kaum des Schreibens kundig, und so der Schule nur dem Alter nach entwachsen. Die Roheit der Zeit brachte das nun einmal mit sich, und ihr müssen wir es auch zuschreiben, wenn wir dem Gelehrtesten der Gelehrten, wenn wir Alcuin selbst fast nichts nachrühmen können als eine Aneignung fremden Stoffes. Der Verkehr Alcuins mit den hochgestellten Schülern und Schülerinnen mußte selbstverständlich ein anderer sein als er in der Klosterschule gebräuchlich war, ein anderer auch als er zwischen denselben Persönlichkeiten und sonstigen Hofbeamten herrschte. Damit größere Zwanglosigkeit gestattet war, legte Alcuin allen Mitgliedern der Schule, den Kaiser und sich selbst nicht ausgenommen, Beinamen bei, die der Bibel oder dem Altertum entnommen waren. Der Kaiser war König David oder König Salomo, Alcuin war Flaccus, die geistreiche Guntrada, Karls Geschwisterkind, war Eulalia genannt usw. Damit aber der mitunter trockene Lehrgegenstand den Schülern nicht zuwider würde, kleidete der Lehrer die an sich ernsthaft gemeinten Fragen nicht selten in das Gewand scherzhafter Rätsel, mitunter sogar dem derben, unfeinen Ton huldigend, welcher am Karolingerhofe zu Hause war. Der von Alcuin auf solche Weise erteilte Unterricht fand begeisterten Anklang. Um so dringender wurde Karls Wunsch ähnlich gebildete Lehrer seinem Volke zu geben. Ein Kapitulare von 789 aus Aachen datiert bestimmt, die Domstifte und Klöster sollen öffentliche Knabenschulen unterhalten, in welchen der Unterricht in den Psalmen, in Noten, im

Gesang, im Computus, in der Grammatik erteilt werden solle[1]). Wir haben absichtlich das Fremdwort Computus hier beibehalten, um es zweifelhaft zu lassen, ob nur der vorzugsweise so genannte *computus*, d. h. die von uns mehrfach besprochene Osterrechnung gemeint sein mag, oder, wie es uns viel wahrscheinlicher däucht, da von einem Lehrgegenstande für irgend welche Knaben, nicht für angehende Mönche die Rede ist, das Rechnen überhaupt. Wenige Jahre später beruft Karl **Theodulf** als Bischof von Mainz (794) aus Italien, ihn an die Spitze einer Domschule zu stellen. Für den Unterricht darf nichts genommen werden, als was von den Eltern freiwillig gegeben wird. Daß die Kinder aber zur Schule geschickt werden, bleibt nicht dem freien Willen der Eltern überlassen. Mit Strafen werden diese zur Erfüllung ihrer Pflicht angehalten. Mit der Volksschule tritt der Schulzwang ins Leben[2]).

Wir haben von Alcuins schriftstellerischer Tätigkeit zu reden und bringen unter diesem Titel Aufgaben zur Sprache, von denen es allerdings nicht sicher ist, ob sie Alcuin angehören. Daß sie ein altes Gepräge tragen, mag schon daraus entnommen werden, daß sie früher in den Druckausgaben nicht bloß von Alcuins, sondern auch von Bedas Werken Aufnahme fanden, während sie diesem letztgenannten wohl unter keinen Umständen angehören[3]). Die Zuweisung an Alcuin beruht auf mehreren Gründen, deren jeder einzeln für sich nicht sonderlich schwerwiegend ist, die jedoch in ihrer Gesamtheit vielleicht genügen, den Ausschlag zu geben. Wir haben erst davon gesprochen, daß Alcuin es liebte, bei seinem Unterrichte eine gefällige, oft scherzhafte Form der Fragestellung oder der Beantwortung zu wählen, letztere Form insbesondere nach griechischem Muster des Atheners Secundus aus dem I. und II. S. n. Chr., von welchem einige Alcuinische Fragen und Antworten ethischer und kosmographischer Art wörtlich entlehnt erscheinen[4]). Die Rätselform ist aber auch die der Aufgaben zur Verstandesschärfung, *propositiones ad acuendos iuvenes*. Man hat ferner darauf aufmerksam gemacht, daß deren Schreibweise überhaupt mit der Alcuins übereinstimme[5]). Man hat weiter auf einen Brief Alcuins an Karl den Großen sich bezogen, in welchem der Briefsteller sagt, er schicke gleichzeitig einige Proben arithmetischen Scharfsinnes zur Erheiterung[6]) und hat vermutet diese Proben seien eben jene Aufgaben, insgesamt oder teilweise. Dem

[1]) Werner, Alcuin S. 35. [2]) Lorenz von Stein, Das Bildungswesen des Mittelalters, II. Auflage, S. 66 (Stuttgart 1883). [3]) Bedae Opera (ed. Giles) Bd. VI. Vorrede S. XIII. [4]) Werner, Alcuin S. 18. [5]) Giles l. c. [6]) *Monumenta Alcuiniana, Epistula* 112, pag. 459: *Misi aliquas figuras Arithmeticae subtilitalis laetitiae causa.*

gegenüber hat man freilich einzuwenden gewußt[1]), unter Proben arithmetischen Scharfsinnes zur Erheiterung habe Alcuin ganz anderes verstanden, nämlich Anwendung zahlentheoretischer Begriffe auf Bibelerklärung, wie sie in einzelnen seiner Briefe und Schriften vorkommen. So habe, nach ihm, Gott, der alles gut schuf, sechs Wesen geschaffen, weil 6 eine vollkommene Zahl sei; 8 aber ist eine mangelhafte Zahl,

$$1 + 2 + 4 = 7 < 8,$$

und „deswegen geht der zweite Ursprung des Menschengeschlechtes von der Zahl 8 aus. Wir lesen nämlich, daß in Noahs Arche acht Seelen gewesen, von welchen das ganze Menschengeschlecht abstammt, um zu zeigen, der zweite Ursprung sei unvollkommener als der erste, welcher nach der Sechszahl geschaffen wurde"[2]). Beispiele solcher Zahlenmystik könnten gehäuft werden. Man könnte an einen Brief Alcuins erinnern, in welchem von den Zahlen 1 bis 10 gesagt wird, welche Beziehungen zu Gegenständen der Heiligen Schrift sie haben[3]). Man könnte bis auf Isidorus zurück[4]) merkwürdige Gedankenverknüpfungen verfolgen, in deren Nachahmung Alcuin die Zahl 153 der Fische, welche Petrus auf einen Zug fing[5]), zu erklären weiß, ausgehend von

$$153 = 3 \cdot 3 \cdot 17 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 17$$

in Verbindung mit $51 = 50 + 1$ usw.[6]). Wir lassen es dahingestellt, ob diese Verweisungen, mögen sie selbst dem, was Alcuin an Karl schickte, einen anderen Inhalt geben können als nach der zuerst ausgesprochenen Vermutung, in Widerspruch stehen zu der Annahme, Alcuin habe die Aufgaben zur Verstandesschärfung zusammengestellt. Wir geben zu bedenken, daß, wer nach der einen Richtung mit Zahlenspielereien, die ihm freilich mehr als das, die ihm heiliger Ernst waren, sich beschäftigte, auch nach der anderen Seite Freude an Zahlenbetrachtungen haben und erregen konnte.

Wir wenden uns zur Erörterung dessen, was die Handschriften zur Entscheidung der Frage, von wem die Aufgaben der Verstandesschärfung herrühren, beizutragen vermögen? Rechenrätsel, welche einander insgesamt ähnlich sehen, finden sich in den allerverschiedensten Handschriften vor[7]). Wohl die älteste solche Handschrift ist

[1]) Hankel S. 310—311. [2]) *Monumenta Alcuiniana, Epist.* 259, pag. 818 bis 821. [3]) Ebenda *Epist.* 260, pag. 821—824. [4]) Isidorus, *De numeris* cap. 27. Auf diese Quelle ist zuerst aufmerksam gemacht bei Werner, Gerbert von Aurillac. Wien 1878, S. 66, Anmerkung 2. [5]) Evangelium Johannes XXI, 11. [6]) Werner, Alcuin S. 153. [7]) Herm. Hagen, Antike und mittelalterliche Rätselpoesie. II. Ausgabe. Bern 1877. S. 29—34.

diejenige, aus welcher die uns hier beschäftigenden Aufgaben zum Abdrucke gelangt sind[1]). Sie gehört, wenn nicht alle Zeichen der Schriftvergleichung trügen, dem Ende des X. oder Anfange des XI. S., in runder Zahl dem Jahre 1000 an, und stammt aus dem Kloster Reichenau, welches auf einer Rheininsel am Ausgange des Bodensees durch den Irländer Pirmin um 725 gegründet worden war und wie wir uns erinnern (S. 577) schon 821 im Besitze einer schönen ordnungsgemäß aufgezeichneten Büchersammlung sich befand. Die Handschrift ist eine Sammelhandschrift und beginnt mit Alcuins Erläuterungen zur Genesis, welche durch den in einer Widmungsformel enthaltenen Namen ihren Verfasser selbst verraten. Die Erläuterungen schließen mitten auf der Vorderseite eines Blattes, und nun folgen ohne irgend welche Raumunterbrechung enge sich anschließend die Aufgaben zur Verstandesschärfung: *incipiunt capitula propositionum ad acuendos iuvenes* von dem gleichen Schreiber auf das Pergament gebracht. Ein Verfasser ist nicht angegeben, aber eben deshalb hat man gefolgert, Alcuin sei es, weil die Unmittelbarkeit des Anschlusses zu dieser Behauptung aufmunterte, welche in den schon angegebenen allgemeinen Betrachtungen Unterstützung fand.

Eines kann mit Bestimmtheit gesagt werden: die Handschrift rührt nicht von dem sachverständigen Sammler der Aufgaben her, möge er Alcuin oder wie immer geheißen haben, sondern von einem Mönche, der als Schreibkünstler geschickter war denn als Rechner, sonst würde er nicht so verhältnismäßig häufige Fehler in den Zahlen sich zuschulden haben kommen lassen, wie sie nur einem Abschreiber, nicht einem, der selbst rechnet, vorkommen können. Auch dieser Umstand dient dazu, die Entstehung der Sammlung in eine Zeit hinaufzurücken, die älter ist als das Jahr 1000, und wir machen darum von der nun einmal durch den Herausgeber[2]) von Alcuins Werken hergestellten Überlieferung Gebrauch, jene Aufgaben, die in einer Geschichte der Mathematik unter allen Umständen besprochen werden müssen, unter Alcuins Namen einzureihen. Sollten spätere Untersuchungen je einen anderen Verfasser an das Licht ziehen, so werden sie den Umstand doch sicherlich nicht zu entkräften imstande sein, daß er vor 1000 gelebt haben muß, daß also die Aufgaben ein Bild klösterlicher Gelehrsamkeit vor diesem Zeitpunkte uns bieten. Glänzend freilich ist das Bild nicht, aber

[1]) Über die Handschrift vgl. Agrimensoren S. 139—143. [2]) Abt Frobenius von St. Emmeran in Regensburg 1777. Sein weltlicher Name war Frobenius Forster. Er lebte 1709—1791. Vgl. Allgemeine deutsche Biographie VII, 163. Die *Propositiones ad acuendos iuvenes* sind abgedruckt in *Alcuini Opera* (ed. Frobenius) II, 440—448.

doch nicht so farblos wie nach den dürftigen Nachrichten, welche wir über das mathematische Wissen eines Isidorus, eines Beda allein zu geben imstande waren, erwartet werden möchte. Vielleicht ist zum Vergleiche darauf hinzuweisen, daß auch in einer Veroneser Handschrift des IX. Jahrhunderts eine poetisch eingekleidete arithmetische Aufgabe gefunden worden ist[1]).

Es sind algebraische und geometrische Aufgaben, welche hier auftreten, daneben solche, die nicht durch Rechnung, sondern mehr durch einen witzigen Einfall gelöst werden können, und überall, wo es möglich ist von einer Geschichte der betreffenden Aufgaben zu reden, d. h. ihr früheres Vorkommen zu bestätigen, sind es immer römische Quellen, auf welche man hinweisen muß. Von diesen Aufgaben seien einige hier erwähnt. Die 6. Aufgabe ist eine von denen mit nicht mathematischer Auflösung. Zwei Männer kauften für 100 solidi Schweine, je 5 Schweine zu 2 solidi. Die Schweine teilten sie, verkauften dann wieder 5 für 2 solidi und machten dabei ein gutes Geschäft, wie ging das zu? Sie hatten die 250 Schweine, welche sie gemeinschaftlich besaßen, in zwei gleiche Herden von je 125 Schweinen geteilt, so daß der eine alle fetteren, der andere alle weniger fetten Schweine vor sich hertrieb. Der erste verkaufte 120 von seiner Herde, indem er 2 für einen solidus gab, der zweite verkaufte gleichfalls 120, indem er 3 für einen solidus gab. Tatsächlich wurden 5 Schweine für 2 solidi hergegeben. Der Erlös des ersten betrug 60, der des zweiten 40 solidi, und damit war die Auslage gedeckt, während den Händlern noch 10 Schweine, je 5 von jeder Wertsorte, übrig blieben. — Die 8. Aufgabe ist eine Brunnenaufgabe, wie sie so häufig seit Heron uns begegneten. — Die 23. und 24. Aufgabe lehren die Fläche eines viereckigen und eines dreieckigen Feldes nach denselben Näherungsregeln messen, deren die gefälschte Geometrie des Boethius (S. 586) und die Vorschrift zur Juchartausmessung (S. 591) sich bedienen: das Viereck gilt als Produkt der halben Summen einander gegenüberliegender Seiten, das Dreieck als Produkt der halben Summe zweier Seiten in die Hälfte der dritten Seite. — An die Juchartausmessung erinnert auch die 25. Aufgabe von dem runden Felde, dessen Fläche gefunden wird, indem der Umfang 400 durch 4 geteilt und der Quotient quadriert, d. h. $\pi = 4$ angenommen wird. — Wir könnten noch recht vielerlei Aufgaben vergleichen und meistens Dinge erkennen, welche den römischen Ursprung wahrscheinlich machen. Nur drei Aufgaben heben wir noch hervor. Die 26. Aufgabe führt die Überschrift De cursu

[1]) E. Dümmler in der Zeitschr. f. deutsch. Altert. XXIII, 261 flg. (1879).

cbnks bc fugb lepprks. Nach Vertauschung von Konsonanten mit ihnen im Alphabete unmittelbar vorhergehenden Vokalen, wie sie (S. 803) auch bei Johannes von Sevilla an gewissen Stellen sich als notwendig erwies, wird daraus De cursu canis ac fuga leporis. Es ist die allbekannte Aufgabe von dem Hunde, welcher dem Hasen nachläuft, während der Hase 150 Fuß voraus ist, dagegen nur 7 Fuß weite Sprünge macht, der Hund aber 9 Fuß weit springt. Zum Zwecke der Auflösung wird 150 halbiert und daraus mit Recht gefolgert, daß der Hund den Hasen in 75 Sprüngen einholen werde. — Die 34. Aufgabe lautet wie folgt: Wenn 100 Scheffel unter ebensoviele Personen verteilt werden, so daß ein Mann 3, eine Frau 2 und ein Kind $\frac{1}{2}$ Scheffel erhält, wieviele Männer, Frauen und Kinder waren es? Die Antwort ist 11 Männer, 15 Frauen, 74 Kinder. Das ist die erste unbestimmte Aufgabe in lateinischer Sprache, die uns vorkommt. Es ist dabei bemerkenswert, daß der Text der Aufgabe die Möglichkeit nicht ganzzahliger Auflösungen ausschließt, daß von den ganzzahligen Auflösungen nur eine angegeben ist, daß die Art wie dieselbe gefunden worden sei, auch nicht einmal angedeutet ist. — Noch interessanter ist die 35. Aufgabe. Ein Sterbender verordnet letztwillig, daß, wenn seine im schwangeren Zustande zurückgelassene Witwe einen Sohn gebäre, der Sohn $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$, die Witwe $\frac{3}{12}$ oder $\frac{1}{4}$ des Vermögens erben solle; gebäre sie aber eine Tochter, so solle diese $\frac{7}{12}$, die Witwe $\frac{5}{12}$ des Vermögens erben. Das ist dem Inhalte, wenn auch nicht den bestimmten Zahlen nach, die in den Pandekten enthaltene Teilungsfrage, deren römische Auflösung wir (S. 562) kennen gelernt haben. Der Sammler der Aufgaben zur Verstandesschärfung hat sich in der von ihm gegebenen Auflösung als einen Mann erwiesen, der in den Sinn letztwilliger Verfügungen einzudringen nicht imstande war, als einen Nachahmer der Römer, der unmöglich selbst Römer gewesen sein kann. Er löst deshalb auch die Aufgabe so verkehrt, als sie überhaupt allenfalls gelöst werden kann. Er sagt: Um Mutter und Sohn zu befriedigen, bedarf es 12 Teile, um Mutter und Tochter zu befriedigen, gleichfalls, zusammen also 24 Teile. Davon erhält in erster Linie der Sohn 9, die Mutter 3, in zweiter Linie die Mutter 5, die Tochter 7, die Teilung vollzieht sich also in dem Verhältnisse, daß die Mutter $\frac{3+5}{24} = \frac{1}{3}$, der Sohn $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, die Tochter $\frac{7}{24}$ der Hinterlassenschaft zu beanspruchen hat. — Wir haben unsere Auswahl mit einer Scherzfrage begonnen, welche durch Rechnung allein

nicht zu lösen ist. Mit der Erwähnung ähnlicher Aufgaben wollen wir schließen, nachdem wir die mathematisch interessanteren durchgesprochen haben. Da dürfte vor allem die 18. Aufgabe unsere meisten Leser wie eine Erinnerung aus der Kinderzeit anheimeln. Es ist die Aufgabe von dem Wolfe, der Ziege und dem Krautkopfe, welche in einem Boote, dessen Fährmann nur einen Reisenden gleichzeitig befördert, über einen Fluß gesetzt werden sollen, so daß niemals Ziege und Krautkopf oder Ziege und Wolf, also niemals zwei Feinde allein auf einem Ufer sich befinden sollen, während der Führer mit dem Boote unterwegs ist[1]). Noch ein zweites Rätsel, welches mit einigen anderen zusammen unter der besonderen Überschrift: „Rätsel zum Lachen" am Schlusse der Handschrift vereinigt ist, hat bis auf den heutigen Tag sich erhalten; es bezieht sich auf die von der Sonne verzehrte Schneeflocke, welche an dem im Winter blattlosen Baum haftete[2]).

So bergen die Aufgaben zur Verstandesschärfung mannigfachen Stoff in sich, der unverwüstliche Lebenskraft in Volkskreisen wie in halbwegs wissenschaftlichen Schulbüchern an den Tag gelegt hat. So befinden sich unter ihnen Aufgaben, welche auch nach rückwärts eine verfolgbare Geschichte besitzen, andere, welche zu immer erneuten Versuchen auffordern, die noch nicht gelungene Rückverfolgung zu vollziehen. Fragen wir uns, welche mathematische Anforderungen die Aufgaben an den, welcher der Lösung sich befleißigte, stellten, so sehen wir, daß er geometrisch nicht mehr zu wissen brauchte, als einige wenige dem praktischen Feldmesser gebräuchliche Formeln, algebraisch nicht mehr als die Behandlung der Gleichungen vom ersten Grade, daß Wurzelausziehungen nicht vorkommen, sondern nur die vier einfachen Rechnungsarten und diese fast ausschließlich an ganzen Zahlen.

Aber wie führte jene Zeit, wie führte Alcuin, wenn wir voraussetzen dürfen, die Sammlung rühre von ihm her, die Rechnungen aus? Wir haben (S. 829—830) bei Beda die gleiche Frage mit dem Zeugnisse des Nichtwissens abgelehnt, wir sind bei Alcuin bis zu einem gewissen Grade in derselben Lage, aber nur bis zu einem gewissen Grade. Zwei Stellen aus Alcuins Schriften führen nämlich zur Vermutung, er habe das Kolumnenrechnen und die Apices gekannt, welche wir bei Gelegenheit der gefälschten Geometrie des Boethius

[1]) Wenn **Hagen** l. c. S. 31 und Anmerkung 22 dieses Rätsel als in den *Annales Stadenses* vorkommend bezeugt, so ist damit für dessen Alter gar nichts gewonnen, da diese Annalen erst um 1240 geschrieben worden sind. [2]) Vgl. **Max Curtze** in einer Rezension unserer Agrimensoren in der Jenaer Literaturzeitung vom 12. Februar 1876.

beschrieben haben. Beide Stellen finden sich in Schriftstücken, welche wir schon angeführt haben, ohne jedoch diese bestimmten Sätze und deren Bedeutung hervortreten zu lassen. Wir haben den Unterrichtsplan, welchen Egbert an der Yorker Domschule einhalten ließ, aus einem Gedichte Alcuins, welches zwischen 780 und 796, wahrscheinlich sogar zwischen 780 und 782 entstand[1]), angegeben. Den 1445. Vers dieses langatmigen Gedichtes haben wir nachholend hier noch anzugeben: Egbert lehrte „diversas numeri species variasque figuras", auseinandergehende Arten der Zahl und deren verschiedene Gestalten. Wir möchten so übersetzen, weil wir entschieden glauben, daß der Genitiv numeri nicht minder zu variasque figuras als zu diversas species gehört, und ist diese Meinung richtig, so kannte nicht bloß Alcuin verschiedene Gestalten der Zahlen, so waren dieselben ein regelmäßiger Unterrichtsgegenstand in York, mutmaßlich wenn nicht zuverlässig auch später in Tours. Was aber konnten jene verschiedenen Gestalten der Zahlen sein? Wir sehen nur zwei Möglichkeiten der Erklärung. Entweder sind die Apices gemeint, wie sie in der gefälschten Geometrie des Boethius beschrieben sind, oder und vielleicht wahrscheinlicher die Dreiecke, Vierecke, Vielecke der Zahlen, die man aus der Arithmetik des gleichen Verfassers kannte. Beide Möglichkeiten sind vorhanden, und eine endgültige Entscheidung wird wesentlich von der Auffindung neuen Materials abhängen.

Die zweite Stelle könnte allerdings die Deutung auf die Apices begünstigen. Wir haben eines Briefes gedacht, in welchem Alcuin von arithmetisch-mystischen Erklärungen zu biblischen Texten Gebrauch macht. In eben diesem Briefe heißt es[2]): „Ebenso sehen wir die Reihenfolge der Zahlen in Gelenken, gleichsam gewissen Einheiten, durch endliche Gestaltungen zum Unendlichen wachsen. Denn die erste Reihenfolge der Zahlen ist von 1 bis zu 10, die zweite von 10 bis zu 100, die dritte von der Hundertzahl bis zur Tausendzahl." Das ist die älteste bestimmt nachweisbare Anwendung des Wortes articulus, Gelenk, für Zahlen, und zwar für Zahlen, welche die Rolle von Einheiten gleichsam spielen, d. h. etwas anders ausgesprochen runde Zahlen sind. Das ist zugleich die Hervorhebung der drei Hauptordnungen, in welche die Zahlen von 1 bis 1000 zerfallen, oder wieder etwas anders ausgesprochen der römischen Triaden. Beide

[1]) Über die Datierung vgl. Wattenbach in den *Monumenta Alcuiniana* S. 80. [2]) *Monumenta Alcuiniana, Epist.* 259, pag. 820. *Item progressionem numerorum articulis, quasi quibusdam unitatibus, ad infinita crescere per quasdam finitas formas videmus. Nam prima progressio numerorum est ab uno usque ad decem. Secunda a decem usque ad centum. Tertia a centenario numero usque ad millenarium.*

Kenntnisse sind dadurch bis vor das Todesjahr Alcuins 804, in welchem allerspätestens jener Brief geschrieben ist, hinaufgerückt, und es entstünde wenigstens die Frage, ob das Wort articulus für älter als die Apices zu halten ist?

Sei dem, wie da wolle, Eines können wir fortfahrend feststellen: eine Stetigkeit der Lehren, welche von dem Kloster St. Martin bei Tours ausgingen und an bestimmte Persönlichkeiten als Träger derselben sich anknüpften. Sehen wir, auf welche Weise dieselben nach Deutschland gelangten. In der Mitte des VIII. S. war in Fulda ein Kloster, begleitet von einer Klosterschule entstanden. Ratgar, der dritte Abt dieses Klosters 802—814 schickte, um die Schule auf die Höhe der Zeit zu bringen, drei junge Mönche nach St. Martin bei Tours, daß sie dort Alcuins Unterricht genössen und so zu vollendeten Lehrern würden. Einer dieser jungen jedenfalls unter den begabtesten Klosterzöglingen ausgesuchten Männer war Hrabanus Maurus[1]), der erste Lehrer Deutschlands, *primus praeceptor Germaniae,* wie er genannt worden ist. Die Verdienste desselben um die deutsche Sprache, welche er zu einem lateinisch-deutschen Bibelglossar anwandte, wie die meisten seiner zahlreichen Schriften liegen weit außerhalb des Bereiches unserer Untersuchungen. Wir würden uns nur mit den Schriften über die sieben freien Künste zu beschäftigen haben, welche er in mindestens ebensovielen Teilen behandelt hat, wenn dieselben uns erhalten wären. Leider ist dieses nicht der Fall. Die Arithmetik, die Musik, die Geometrie sind verloren gegangen. Statt einer eigentlichen Astronomie ist ein in Gesprächsform gehaltener Computus auf uns gekommen[2]), welcher, wie zahlreiche Stellen beweisen[3]), im Jahre 820 verfaßt ist. Dieser Computus ist ziemlich genau nach Bedas chronologischen Arbeiten gebildet und enthält kaum etwas für die Geschichte der Mathematik Wissenswertes, so daß man ihn wohl in negativer Weise verwertet hat, um zu schließen, ein Abacus und dergleichen könnten damals nicht Lehrgegenstände gewesen sein, weil auch gar nicht davon die Rede sei. Wir überlassen es unseren Lesern, wieviel Gewicht sie auf das Nichtvorhandensein einer Beschreibung in einer Schrift legen wollen, welche in innigem Zusammenhange mit anderen Schriften stand, die sämtlich verloren gegangen sind. Zu einer Bemerkung nötigt uns die Unparteilichkeit. In einem Kapitel des Computus des Hrabanus erscheinen in auffallendem Zusammenhange die Wörter

[1]) Werner, Alcuin S. 101—109. Dümmler, Hrabanusstudien in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1898, S. 24 flgg. [2]) Abgedruckt in Baluze, *Miscellanea* I, 1—92. Paris 1678. [3]) Ebenda pag. 43, 51 und häufiger.

digitus und articulus[1]). Sie betreffen nicht, wie man zunächst vermuten könnte, Finger- und Gelenkzahlen, sondern eine eigentümliche Gedächtnishilfe an den Knöcheln der Hand. Von älteren Schriften sind bei Hrabanus genannt: die Arithmetik des Boethius[2]), die Origines des Isidorus[3]), die Osterrechnung des Anatolius[4]). Zwei Jahre, nachdem Hrabanus seinen Computus verfaßt hatte, wurde er zum Abte seines Klosters gewählt und stand ihm 20 Jahre hindurch bis 842 mit wirksamem Eifer vor. Dann zog er sich in ein stilleres Leben zurück, welches er jedoch 847 wieder aufgeben mußte, um Erzbischof von Mainz zu werden. Als solcher starb er 856.

Männer der Fuldaer Schule trugen ihrerseits die Wissenschaft weiter, welche Hrabanus Maurus und seine Genossen aus Tours mitgebracht hatten. Walafried Strabo, 806 in Allemanien geboren, wurde 842 Abt zu Reichenau. Aus den Schriften dieses 849 verstorbenen Mannes und anderen gleichzeitigen Werken ist 1857 durch Pater Martin Marty in Einsiedeln eine Abhandlung „Wie man vor 1000 Jahren lehrte und lernte“ zusammengestellt worden, worin die Stelle vorkommt: „Im Sommer 822 begann ich unter Tattos Leitung das Studium der Arithmetik. Zuerst erklärte er uns die Bücher des Konsuls Manlius Boethius über die verschiedenen Arten und Einteilungen, sowie über die Bedeutung der Zahlen; dann lernten wir das Rechnen mit den Fingern und den Gebrauch des Abacus nach den Büchern, welche Beda und Boethius darüber geschrieben haben.“ Leider stammt diese Erzählung nicht aus einem wirklich vorhandenen Tagebuch, sondern wurde vom Verfasser als seinen persönlichen geschichtlichen Ansichten entsprechend Strabo in den Mund gelegt[5]), so daß man eine Beweiskräftigkeit dieser, wenn auf Angaben aus dem IX. S. gestützten, unwiderlegbaren Erzählung nicht zu behaupten vermag.

Ein anderer Schüler Hrabans war Heiric von Auxerre, der selbst wieder in Remigius von Auxerre[6]) seinen Nachfolger sich heranbildete. Schon vorher hatte Remigius in dem Kloster Ferrières den Unterricht von Servatus Lupus, einem Zöglinge des Klosters St. Martin bei Tours, genossen und so aus doppelter Vermittlung die wissenschaftlichen Anregungen Alcuins in sich aufgenommen. Remigius muß daher, wenn einer, als mittelbarer Schüler Alcuins gelten, und er selbst trat nach 877 an die Spitze einer Schule, deren spätere

1) Abgedruckt in Baluze, *Miscellanea* I, pag. 70—71. *De reditu et computo articulari utrarumque epactarum solis et lunae.* 2) Ebenda pag. 7. 3) Ebenda pag. 8. 4) Ebenda pag. 33. 5) Vgl. einen Brief von P. Marty an H. Suter in Zeitschr. Math. Phys. XXIX. Histor.-literar. Abtlg. 6) Werner, Alcuin S. 110.

große Bedeutung uns nötigt, ihres Stifters zu gedenken. Es war eine Schule zu Paris, und zwar eine Schule, die nur als solche, nicht in Verbindung mit einem Kloster eingerichtet wurde. Aus ihr entwickelte sich später die Pariser Universität. Aber vor seiner Pariser Lehrtätigkeit machte sich Remigius um das Schulwesen einer Stadt verdient, welche uns im nächsten Kapitel von Wichtigkeit sein wird, um das Schulwesen von Rheims, wohin er durch den Erzbischof Fulco berufen worden war. Remigius starb 908.

Führten diese Männer die Lehren und das Lehrverfahren der Schule von St. Martin bei Tours in östlicher und nördlicher Richtung weiter, freilich ohne daß ihre Bemühungen von glänzendem Erfolge begleitet gewesen wären, indem vielmehr von der Mitte des IX. S. an die Zahl derer, welche realen Lehrgegenständen sich zuwandten, mehr und mehr wieder abnahm, zuletzt aus einzelnen Persönlichkeiten nur bestehend, so knüpft sich an einen anderen Zögling derselben Mutteranstalt eine südlich gewandte Fortleitung, an Odo von Cluny[1]). Ein Edelmann, der am Hofe Wilhelms des Starken des Herzogs von Aquitanien lebte, hatte lange kinderlos seine Nachkommenschaft, wenn ihm solche würde, dem Dienste des heiligen Martin zugelobt, und so war über die Bestimmung des jungen Odo schon verfügt, als er um 879 geboren wurde. Im Knabenalter in das Kloster St. Martin aufgenommen, genoß er den Unterricht des Scholastikus, d. i. des Stiftslehrers Odalric. Nicht ganz im Einklang mit seinen Lehrern, welche ihn länger bei weltlichen Lehrgegenständen festhalten wollten als es ihm behagte, verließ er Tours und begab sich zu Remigius nach Paris. Nach einiger Zeit kehrte er nach Tours zurück, wo aber das zügellose Leben, welches unter den dortigen Mönchen eingerissen war, ihn mit Widerwillen erfüllte. Nun zog er sich in die Zisterzienser-Abtei Baume zurück, welche mit verschiedenen anderen Klöstern im engsten Zusammenhange stand, und wurde 927, als der gemeinsame Abt Berno dieser Klöster starb, auf die letztwillige Verordnung des Verstorbenen hin zum Abte von Cluny gewählt. Mit eiserner Strenge führte er dort die Herrschaft, so daß sein Kloster und die damit verbundene Schule bald allgemein als Musteranstalten an Zucht und Ordnung galten, und er selbst bald da bald dorthin gerufen wurde, um gleiche Reformen einzuführen (wie z. B. nach dem am Anfange des X. S. in der Auvergne gegründeten Kloster Aurillac, dessen dritter Abt er war, wie 937 nach dem Mutterkloster des Ordens auf Monte Casino), oder um mannigfache Streitigkeiten zu schlichten. Odo starb 942 oder 943.

1) Math. Beitr. Kulturl. S. 292—302. Werner, Alcuin S. 112—114.

Ein wahrscheinlich dem XII. S. angehörender unter dem Namen des Anonymus von Melk bekannter Schriftsteller, welcher in 117 Kapiteln in überaus trockenem aber dadurch nur um so vertrauenswerterem Tone einzelne Mönche nennt und deren Werke angibt, hat im 75. Kapitel zwei Schriften Odos gerühmt[1]): ein Werk über die Beschäftigungen von höchster Trefflichkeit und ein ziemlich brauchbares Zwiegespräch über die Kunst der Musik. Als Datum jener Schrift gilt 926, also die Zeit, welche der Erwählung Odos zum Abte vorangingi, was die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit der Angabe nur erhöht. Viele mittelalterliche Abhandlungen über Musik haben handschriftlich sich erhalten, nicht gerade wenige davon sind auch gedruckt, und daunter sind mehrere, welche Odo von Cluny als Verfasser beigelegt werden. Eine solche Abhandlung, in verschiedenen Abschriften erhalten, entspricht der von dem Anonymus von Melk gegebenen Beschreibung insofern, als sie allein von allen in Gesprächsform abgefaßt und wirklich „ziemlich brauchbar" ist. Eine Handschrift dieser musikalischen Abhandlung stammt aus dem XIII. S. und gehört der Wiener Bibliothek an.

In demselben Bande, in welchem das Gespräch über Musik zum Abdrucke kam[2]), ist auch eine andere Schrift nach demselben dem XIII. S. entstammenden Wiener Kodex 2503, welcher jenes Gespräch über Musik enthält, veröffentlicht. Diese andere Schrift führt den Titel: „Regeln des Abacus von dem Herrn Oddo" und würde, wenn sie wirklich mit Recht Odo von Cluny beigelegt werden dürfte[3]), von ungemeiner geschichtlicher Bedeutung sein. Leider ist eine Gewißheit dafür so wenig vorhanden, daß die meisten Geschichtsforscher weit mehr der Auffassung sich zuneigen, die Regeln des Abacus seien nicht so gar lange vor Entstehung ihrer Niederschrift aus dem XIII. S. von irgend einem anderen späteren Oddo oder Odo nicht vor dem XI. oder XII. S. zusammengestellt, eine Meinung, für welche man allenfalls auch auf den Umstand sich beziehen könnte, daß Odo von Cluny, wie wir oben sahen, bei seinem eigenen Bildungsgange dem Verweilen bei ähnlichen Dingen sich widerwillig zeigte.

[1]) *Dialogum satis utilem de Musica arte composuit. Scripsit praeterea librum praestantissimum monachisque utilissimum, librum videlicet Occupationum.* Als Randzahl steht daneben 926. [2]) *Scriptores ecclesiastici de musica* herausgegeben durch Abt Martin Gerbert von St. Blasien. St. Blasien 1784. I, 252—264 der Dialog über Musik, ibid. 296—302 *Regulae Domini Oddonis super abacum.* Ambr. Sturm in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge III, 139 (1902). [3]) Th. H. Martin, *Origine de notre système de numération écrite* in der *Revue archéologique* von 1856, S. 33 des Sonderabzuges hat wohl zuerst diese Autorschaft vertreten, eine Ansicht, der wir uns in den Math. Beitr. Kulturl. anschlossen.

Ohne diese Gründe als zwingend anzuerkennen, da man gar oft als Schüler andere Ansichten von dem zu Erlernenden oder zu Vernachlässigenden hat als später als Lehrer, können wir doch ebenso wenig eine unbedingte Widerlegung führen. Wir wollen daher diese Regeln erst im 40. Kapitel unter dem XII. S. näher beschreiben.

Wir wenden uns gegenwärtig zu einer Schrift, welche gesicherterer Entstehung eine Anzahl von Jahren vor 985 geschrieben ist und von Abbo von Fleury herrührt[1]). Abbo ist in Orleans geboren, hat an den uns bekannten Schulen von Paris und Rheims, zuletzt in seiner Vaterstadt Orleans studiert, und trat darauf in das Benediktinerkloster Fleury ein. Nachdem er ihm eine Anzahl von Jahren angehört hatte, trat er eine zweijährige Reise nach England an, und von dort zurückgekehrt wurde er Abt seines Klosters. Als solcher scheint er zu Gewaltmaßregeln, die sein leicht aufbrausender Zorn ihm eingab, geneigt gewesen zu sein, und er starb wirklich eines gewaltsamen Todes auf einer Reise, wie die einen sagen auf Anstiften eines seiner Mönche ermordet, wie die anderen sagen in einem auf dem Wege entstandenen Raufhandel. Sein Todesjahr war 1003 oder 1004. Auch die Angaben über die Reise nach England wechseln von den Jahren 960—962 bis zu den Jahren 985—987. In England hat Abbo grammatische Untersuchungen angestellt, welche er als Quaestiones grammaticales niederschrieb. Unter die grammatischen Untersuchungen gerieten auch Betrachtungen über die geheimnisvolle Bedeutung der einzelnen Zahlen, welche aber Abbo ziemlich kurz abtut, weil er, wie er sagt, ausführlich darüber in einem Büchlein gehandelt habe, welches er einst durch die Bitten seiner Klosterbrüder bezwungen zu dem Rechenbuche des Victorius über Zahl, Maß und Gewicht herausgegeben habe[2]). Da nun ein Kommentar zu dem Rechenknechte des Victorius (S. 531) sich aufgefunden hat, welcher zwar namenlos ist, aber in den ersten Einleitungszeilen genau dieselbe Redewendung von den nötigenden Bitten der Klosterbrüder, dieselbe Inhaltsangabe über Zahl, Maß und Gewichte aufweist, welcher Zahlenmystik bis zum Überdrusse breitschlägt, welcher handschriftlich nicht später als im XI. S. entstanden sein kann, welcher aber auch nicht früher als in karolingischer Zeit verfaßt sein kann, weil darin von dem Grammatiker Virgil von Toulouse und von der erst unter Pipin eingeführten Ein-

[1]) Christ, Ueber das *Argumentum calculandi* des Victorius und dessen Commentar (Sitzungsberichte der k. bair. Akademie der Wissenschaften zu München, 1863, I, 100—152). Über Abbos Persönlichkeit S. 118. [2]) *In libellulo quem precibus fratrum coactus de numero mensura et pondere olim edidi super calculum Victorii.*

teilung des Solidus in 12 Denare die Rede ist, so hat man aus allen diesen scharfsinnig entdeckten Merkmalen die Folgerung gezogen, daß man es nur mit dem Kommentare des Abbo von Fleury zu tun haben könne, von welchem dieser spätestens 987 sagte, daß er ihn einst, olim, also gewiß ziemlich viele Jahre früher verfaßt habe. Man konnte mit einigen Erwartungen an diesen Kommentar eines Mannes herantreten, welchen ein Zeitgenosse, Fulbert von Chartres, den hochberühmten Lehrer des ganzen Frankenlandes genannt hat[1]), und welcher in den einleitenden Worten sich seiner Eigenschaft als Rechenlehrer gewissermaßen rühmt. Seit seiner frühesten Jugend beklage er, daß die Kenntnis der freien Künste schwinde und kaum noch auf wenige sich beschränke, die habsüchtig ihrem Wissen einen Preis stellen. Daraus, nicht aus Stolz noch aus Neid möge man es ableiten, wenn er auf die Gemüter der weniger Unterrichteten durch Rechenunterricht wirke[2]). Abbo nennt an verschiedenen Stellen die älteren Schriftsteller, deren Werke ihm gedient haben. Martianus Capella und Boethius werden des öfteren angeführt, neben ihnen Chalkidius und Macrobius. Er war mit Schriften des Priscian bekannt, in welchen von den Zahlen die Rede ist, mit Isidorus und Beda, wohl auch noch mit anderen Quellen, die uns nicht mehr erhalten sind. Leider sind nur einzelne Stellen des umfassenden Kommentars abgedruckt, und in diesen ist die Ausbeute keineswegs den Erwartungen entsprechend. Man kann allenfalls einen Abschnitt über Zahlenbezeichnung an und mit den Fingern erwähnen, in welchem der sprachliche Ausdruck reiner sei als bei Beda, von welchem überdies einzelne Abweichungen stattfinden; es scheine, daß Abbo hier eine ältere Quelle ausschrieb[3]). Was das Rechnen mit ganzen Zahlen betrifft, so hat Abbo dem Multiplizieren, aber nicht dem Dividieren seine Aufmerksamkeit zugewandt. Er lehrt[4]) an einem gezeichneten Abacus mit senkrechten Kolumnen, daß Zehner mit Zehnern vervielfacht Hunderter geben, deren eigene Gelenkzahlen (*articuli*) dann Tausender sind. Er lehrt tabellarisch geordnete Vielfache von 7, von 59 kennen. Wir erfahren ferner, daß das Hersagen des Einmaleins in Wörtern der Vulgärsprache untermengt mit deutschen Klängen — z. B. cean, wohl für zehn — noch immer in den Schulen stattfand[5]), eine an sich ganz wissenswürdige Bemerkung, welche aber für die Frage, die wir schon wiederholt ge-

[1]) *Summae philosophiae Abbas et omni divina et saeculari auctoritate totius Franciae magister famosissimus.* [2]) Christ l. c. S. 121. [3]) Ebenda S. 125—126. [4]) Vgl. einige Bruchstücke aus Abbos Kommentar, welche von Bubnov, *Gerberti Opera mathematica* (Berlin 1899) pag. 199—204 zum Abdruck gebracht sind. [5]) Christ l. c. S. 108—109.

stellt haben, ohne sie jemals sicher beantworten zu können, für die Frage, wie die Klosterschule jener Zeit mit ganzen Zahlen rechnen lehrte, kaum einen Beitrag zu einer Beantwortung liefert. Das Einmaleins war stets und ist zu einem bequemen Rechnen notwendig, es ist seit den Griechen immer dabei benutzt worden, aber es ist nicht das Rechnen selbst. Es gibt uns nicht einmal Auskunft darüber, wie man Zahlen vervielfachte, deren eine mindestens größer als 10 ist, geschweige denn, daß es von den anderen Rechnungsverfahren uns unterrichte.

Über dieses Rechnen mit ganzen Zahlen erhalten wir erst Auskunft, wenn wir zu einem Schriftsteller uns wenden, der viel besprochen einen geistigen Mittelpunkt seiner Zeit gebildet hat, und der unsere ganze Aufmerksamkeit nunmehr in Anspruch nehmen soll: Gerbert.

39. Kapitel.

Gerbert.

So interessant das Leben Gerberts ist[1]), werden wir uns mit einem nur sehr kurzen Überblicke über dasselbe begnügen müssen, und würden noch kürzer uns fassen, wenn seine Leistungen nicht zum Teil nur dann verständlich wären, wenn man die Kenntnis der Verhältnisse, unter welchen sie entstanden sind, besitzt. Gerbert muß in der ersten Hälfte des X. S. wahrscheinlich von armen Eltern in der Auvergne unweit des Klosters Aurillac geboren sein. Dort wuchs er dann auf, erzogen durch den Scholastikus Raimund, der selbst ein Schüler Odos von Cluny war, und durch den nachmaligen Abt Gerald. Etwa 967 verließ Gerbert das Kloster mit Einwilligung seiner Obern, um den Grafen Borel von Barcelona, den eine politische Reise an dem Kloster vorbeigeführt hatte, in seine Heimat zu begleiten, und dort in der spanischen Mark gewann er sich in Hatto, dem Bischof von Vich, einen väterlichen Freund, bei welchem er weitere Studien machte, sich auch in der Mathematik vielfach mit Nutzen beschäftigte[2]).

[1]) Math. Beitr. Kulturl. Kapitel XXI und XXII, S. 303—329. Olleris, *Oeuvres de Gerbert*, Clermont-Fd. et Paris 1867. XVII—CCV. Karl Werner, Gerbert von Aurillac, die Kirche und Wissenschaft seiner Zeit. Wien 1878. Nicol. Bubnov, *Gerberti Opera mathematica*. Berlin 1899. [2]) Richerus, *Histor.* III, 43 (*Monument. German. Script.* III, 617) . . . *Hattoni episcopo instruendum commisit. Apud quem etiam in mathesi plurimum et efficaciter studuit.*

Das ist alles, was wir über den Unterrichtsgang Gerberts aus dem Munde seines Schülers Richerus wissen, der, so wenig zuverlässig er als Geschichtsschreiber im allgemeinen sich erweist, doch in dieser Beziehung unser Vertrauen verdient, da er seinen Lehrer aufs höchste verehrend lieber zu viel als zu wenig gesagt haben würde, wenn er mehr gewußt hätte. Er hätte uns z. B. nicht verschwiegen, wenn Gerbert sich bei Hatto Kenntnisse in der arabischen Sprache erworben hätte, wenn er die Gefahren nicht scheuend, welche den Christen in den arabischen Städten bedrohten und gerade damals unter den glaubenseifrigsten Emiren unvermeidliche und unübersteigliche Hindernisse bildeten (S. 793), unter die Gelehrten jenes Volkes sich gemischt hätte, um deren Wissen sich anzueignen.

So zerfällt von selbst die Notiz, welche einen Zeitgenossen Gerberts, den Chronisten Adhemar von Chabanois, zum Verfasser hat. Dieser erzählt nämlich: „Gerbert war aus Aquitanien von niederer Geburt. Er war seit seiner Kindheit Mitglied des Klosters des heiligen Geraldus von Aurillac. Er durchwanderte der Weisheit wegen erst Frankreich, dann Cordova. Er wurde dem König Hugo bekannt und mit dem Bistume Rheims beschenkt. Dann lernte Kaiser Otto ihn kennen, worauf er das Bistum Rheims verließ und Erzbischof von Ravenna wurde. Als später Papst Gregor, der Bruder des Kaisers, starb, wurde derselbe Gerbert scheinbar seiner Weisheit wegen vom Kaiser zum römischen Papste erhöht. Da veränderte er seinen Namen und hieß seit der Zeit Sylvester"[1]. In dieser fast mehr als kurzen Lebensgeschichte ist Wahres und Falsches in buntem Wechsel gemengt, und falsch ist offenbar die Durchwanderung von Cordova, welche zu der Frankreichs in Gegensatz gestellt ist. Man hat eine Erklärung dazu darin gefunden[2], daß für Adhemar, der, ähnlich wie es auch bei Richer der Fall ist, in Frankreich erträglich, außerhalb Frankreich ganz und gar nicht Bescheid wußte, Cordova das gesamte Land jenseits der Pyrenäen bezeichnete, die spanische Mark mit eingeschlossen, in welcher Gerbert tatsächlich seinen Aufenthalt nahm, so daß also ein eigentlicher Widerspruch gegen das von Richer uns wahrheitsgetreu Bezeugte nicht vorhanden sei.

Wohl liegt dagegen ein ausdrücklicher Widerspruch gegen die Beschränkung des Aufenthaltes Gerberts auf die spanische Mark in den Worten eines anderen Chronisten: Gerbert habe mit Bestimmtheit den Abacus den Sarazenen geraubt und die Regeln gegeben,

[1]) *Monument. German.* VI, 130. [2]) Büdinger, Ueber Gerberts wissenschaftliche und politische Stellung. Marburg 1851, S. 8.

welche von den schwitzenden Abacisten kaum verstanden werden[1]. Allein dieser Berichterstatter ist aus mancherlei Gründen zu verwerfen. Wilhelm von Malmesbury lebte als englischer Chronist aus der Mitte des XII. S. nach Zeit und Ort in einer Umgebung, in welcher durch die Übersetzungen arabischer Schriftsteller z. B. des Rechenbuchs des Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmi die Vermutung nahe gelegt wurde, ein irgendwie vereinfachtes Rechnen könne nirgend anders als bei den Arabern entstanden sein. Ferner ist seine Glaubwürdigkeit, soweit es um Gerbert sich handelt, eine so geringe als nur irgend möglich. Er verbrämt die Geschichte von dem Raube des Abacus mit den tollsten Zaubermärchen, die deshalb nicht wahrer sind, weil sie später da und dort Glauben fanden[2]. Er verwechselt mitunter sogar Gerbert mit Papst Johann XV. Kurz er ist alles eher als ein zuverlässiger Zeuge, wo er allein und gar in Widerspruch zu den zahlreichsten sonstigen Erwägungen aussagt.

Um 970 begleitete Gerbert den Bischof Hatto und den Grafen Borel nach Rom, wo er durch den Papst Johann XIII. dem deutschen Könige Otto I. vorgestellt wurde, und auf dessen Wunsch ihn als Lehrer irgendwo anzustellen erwiderte, er wisse zu diesem Zwecke in der Mathematik zwar genug, aber nicht in der Dialektik. Um darin sich weiter auszubilden ging nun Gerbert mit Ottos Einwilligung nach Rheims, wo er vermutlich zehn Jahre, von 972 bis 982, verweilte und eine anfangs gemischte Stellung einnahm, welche bald vollständig in die eines Stiftslehrers überging. Zu den Männern, welche ihn damals in der Dialektik, vielleicht auch noch in der Grammatik unterrichteten, welchen er aber dafür schon mathematischen Unterricht erteilte, gehörte nach aller Wahrscheinlichkeit Constantinus, der von einem späteren Aufenthaltsorte den Namen Constantinus von Fleury erhalten hat.

Wir sind wieder durch Richerus in die Lage versetzt, den Lehrplan genau schildern zu können, welchen Gerbert als Scholasticus in Rheims einzuhalten pflegte[3]. Zuerst wurden die Schüler an philosophische Auffassung gewöhnt. Die Hilfsmittel waren griechische Werke in lateinischer Übersetzung, zumeist in der des Konsul Manlius, d. h. des Boethius. Darauf folgte die Rhetorik verbunden mit dem Lesen lateinischer Dichter, und nach ihr eigentlich dialektische Übungen, die unter der Leitung eines besonders dazu angestellten Lehrers stattfanden. Von dieser Abteilung der Unterrichts-

[1]) *Abacum certe a Saracenis rapiens regulas dedit quae a sudantibus abacistis vix intelliguntur.* [2]) Doellinger, Papstfabeln des Mittelalters. München 1863. [3]) Richerus, *Histor.* III, 46—54. Das letzte dieser Kapitel handelt vom Abacus (*Monument. German. Script.* III, 618).

gegenstände unterscheidet Richerus alsdann ganz besonders die mathematischen Fächer, auf welche Gerbert viele Mühe verwandte. Er begann mit der Arithmetik als dem ersten Teile, ließ darauf die Lehre vom Monochorde und die ganze Musik folgen, ein für Frankreich fast ganz neues Kapitel der Wissenschaften, und lehrte alsdann die Astronomie, deren schwer verständlichen Inhalt er durch mancherlei Vorrichtungen zu erläutern wußte. Richerus nennt die wichtigsten astronomischen Apparate, deren Gerbert sich bediente. Sie weisen ebenso wie das beim Unterrichte in der Musik gebrauchte Monochord ausschließlich auf griechisch-römische Quellen hin[1]). Die dem mathematischen Unterricht von Gerbert zugrunde gelegten Bücher nennt Richerus nicht.

Sollen wir daraus den Schluß ziehen, es seien überhaupt Bücher dabei nicht benutzt worden? Es will fast so scheinen. Wenigstens wird sonst einigermaßen unbegreiflich, wie in späterer Zeit jener Constantinus, den wir eben genannt haben, an Gerbert die Bitte um schriftliche Mitteilung des früher Gelehrten richten konnte. Damit ist freilich keineswegs ausgeschlossen, daß Gerbert selbst, als Lehrer, sich an schon vorhandene Schriften anlehnte, Schriften jedenfalls griechisch-römischen Ursprunges gleich den Kenntnissen, welche ihren Inhalt bildeten. Wir müssen annehmen, es sei die Arithmetik des Boethius darunter gewesen, nicht aber die übrigen Schriften des gleichen Verfassers, sondern nur Auszüge und Bearbeitungen derselben von uns freilich nicht näher bekannten Persönlichkeiten. Diese Meinung wird wesentlich unterstützt in ihrem negativen Teile durch den Umstand, daß Gerbert, wie wir noch sehen werden, erst viel später mit der Astronomie und vielleicht mit der Geometrie des Boethius bekannt wurde, in ihrem positiven Teile durch das letzte Kapitel von Richers Erzählung, in welchem von der Geometrie und von dem Rechenunterrichte die Rede ist.

„Bei der Geometrie wurde nicht geringere Mühe auf den Unterricht verwandt. Zur Einleitung in dieselbe ließ Gerbert durch einen Schildmacher einen Abacus, d. h. eine durch ihre Abmessungen geeignete Tafel anfertigen. Die längere Seite war in 27 Teile abgeteilt, und darauf ordnete er Zeichen, 9 an der Zahl, die jede Zahl darstellen konnten. Ihnen ähnlich ließ er 1000 Charaktere von Horn bilden, welche abwechselnd auf den 27 Abteilungen des Abacus die Multiplikation oder Division irgendwelcher Zahlen darstellen sollten, indem mit deren Hilfe die Division oder Multiplikation so kompendiös vonstatten ging, daß sie bei der großen Menge von Beispielen

[1]) Büdinger l. c. S. 38—42.

viel leichter verstanden als durch Worte gezeigt werden konnte. Wer die Kenntnis davon sich vollständig erwerben will, der lese das Buch, welches Gerbert an C. den Grammatiker schrieb. Dort findet er es zur Genüge und darüber hinaus beschrieben.“

Fragen wir uns sogleich, bevor wir weitergehen, ob diese Stelle in Einklang zu bringen wäre mit der Annahme, Wilhelm von Malmesbury hätte mit seiner allein dastehenden Behauptung von dem arabischen Ursprunge des Abacus doch recht. Wir müssen mit entschiedenstem Nein antworten. Das Rechnen als Teil der Geometrie ist nicht arabisch. Kolumnen sind, wenigstens in der zweiten Hälfte des X. S. soweit wir irgend wissen, nicht arabisch. Der Gebrauch von nur neunerlei Zeichen, also ohne die Null, ist nicht arabisch. Das alles stimmt aber vollkommen zur Geometrie des Boethius, wenn dieselbe echt wäre, stimmt also auch vermutlich selbst in der Zugehörigkeit des Rechnens zur Geometrie mit römischen Traditionen, die sich in den Klöstern erhalten hatten, und deren der Fälscher der Geometrie des Boethius sich nachmals bediente, um seiner unzweifelhaft geschickt angelegten Fälschung den Schein der Wahrheit zu verleihen.

Läßt sich doch eine ähnliche Tradition gerade in der Zeit, um welche es sich gegenwärtig handelt, auch an einem ganz anderen Orte nachweisen, wo Gerbert nicht lebte, wohin seine Lehre, die Lehre eines damals noch unbekannten einflußlosen Mönches, so rasch unmöglich gedrungen sein kann. Ein Mönch mit Namen Walther[1]) ist gerade damals in Speier aufgewachsen, von wo er den Beinamen Walther von Speier erhielt. Er schrieb dann dort als Subdiakonus, und zwar im Jahre 983, ein umfangreiches Gedicht über das Leben des heiligen Christoph[2]). Im ersten Gesange schildert er den Studiengang, welchen er selbst durchgemacht hatte. Die Einrichtung desselben geht auf Bischof Baldrich zurück, der 970—987 dem Bistume vorstand und, von St. Gallen dahingekommen, die Unterrichtsweise seines früheren Aufenthaltes mitbrachte. Was also Walther von Speier 983 schildert, ist nichts anderes als die Art und Weise, in welcher vor 970, mithin zu einer Zeit, während welcher Gerbert noch in der spanischen Mark sich aufhielt, in St. Gallen unterrichtet wurde. Von dort gilt also folgendes:

Et postquam planas limabant rite figuras
Intervallorum mensuris et spatiorum
Ordine compositis, cubicas effingere formas
Nituntur, mediumque vident incurrere triplum.

[1]) Wattenbach, Deutschlands Geschichtsquellen im Mittelalter (4. Ausgabe 1877) I, 263. [2]) Abgedruckt in Bernh. Pez, *Thesaurus Anecdot.* II, 3, pag. 29—122. Die für uns wichtige Stelle pag. 42.

Collatum primi distantia colligat una,
Alterius numeros proportio continet aequa,
Respuit haec ambo mediatrix clausa sub imo.
Ordinibus Mathesis gaudebat rite paratis,
Haec missura tibi solatia, clare Boëti.

Inde Abaci metas defert Geometrica miras,
Cumque characteribus iniens certamina lusus
Ocyus oppositum redigens corpus numerorum
In digitos propere disperserat articulosque.

Inde superficies ponens ex ordine plures
Trigona tetragonis coniunxit pentagonisque,
Strenua Pyramidum speciem ductura sub altum.
Tum laterum miras erexit ut ipsa figuras,
Arripiens radium semetretas fecit agrorum,
Quos quodam refluus confudit tempore Nilus!
Tradidit et varias in secto pulvere metas.

Die ganze Stelle bezieht sich, wie wir um jedes Mißverständnis auszuschließen von vornherein bemerken, auf das Zahlenkampf genannte Spiel, welches Boethius im Gefängnisse zu seinem Troste erdacht habe (S. 580). Aber wichtiger als der wesentliche Inhalt der Stelle sind die für den Verfasser nebensächlichen für uns das Hauptaugenmerk bildenden Anspielungen. Wir erlauben uns, die in entsetzlichem Latein verfaßte dem schwülstigen Stile des Martianus Capella augenscheinlich nachgebildete Schilderung zunächst zu übersetzen: „Nachdem sie die ebenen Figuren regelrecht genau auszuführen verstanden mit nach der Ordnung zusammengesetzten Maßen der Zwischenräume und der Strecken, bestreben sie sich kubische Gestaltungen zu bilden, und sie sehen, daß dieselben auf ein dreifaches Mittel hinauslaufen. Eine und dieselbe Entfernung verbindet das, was durch das erste Mittel zusammengebracht ist; gleiches Verhältnis hält die Zahlen des zweiten zusammen; diese beiden Dinge verwirft die Mittlerin, welche unter dem letzten verschlossen ist. An regelrecht bereiteten Ordnungen erfreute sich die Mathematik, Dir, berühmter Boethius, diesen Trost zuschickend. Hierauf bringt die Geometrie die wundersamen Linien des Abacus herbei und mit den Zeichen die Kämpfe des Spieles beginnend hatte sie schnell Ordnung hineinbringend die gegenübergestellten Körper der Zahlen in Finger- und in Gelenkzahlen zerstreut. Hierauf stellte sie mehrere Oberflächen ordnungsmäßig hin, verband Dreiecke mit Vierecken und Fünfecken eifrig die Gestalt der Pyramide zur Spitze zuzuführen. Dann errichtete sie Figuren der Seiten wundersam wie sie selbst, machte den Maßstab ergreifend die regellosen Grenzen der Felder, welche zu einer Zeit zurückströmend der Nil vermengt hat, und sie überlieferte die verschiedenen Linien im Staube gezeichnet."

Wir sehen hier die Kenntnis der drei verschiedenen Mittelgrößen, des arithmetischen, des geometrischen und des harmonischen Mittels, letzteres allerdings nur negativ geschildert als weder gleiche Entfernung noch gleiches Verhältnis zu den äußeren Gliedern aufweisend. Wir hören die seit Herodot unendlich oft wiederholte Erzählung von der Verwischung der Ackergrenzen durch den aus den Ufern getretenen Nil und von der so vermittelten Erfindung der Geometrie. Wir erkennen in der letzten Zeile einen Halbvers des römischen Satirendichters[1]), der sich in dieser Umgebung recht verlassen vorkommen muß. Wir vernehmen, daß die Geometrie den Abacus herbeibringt und die Zahlen in Finger- und Gelenkzahlen zerstreut. Das sind aber gerade dieselben Begriffsobjekte, welche Gerbert vereinigt benutzt hat, und sie weisen mit Notwendigkeit darauf hin, daß damals an verschiedenen Orten die Erinnerung an Lehren, vielleicht ein Werk vorhanden gewesen sein muß, welches in seiner Anordnung an dasjenige mahnt, welches nachmals Geometrie des Boethius hieß, und daß die Quelle, aus welcher diese Erinnerung geschöpft war, eine römische gewesen sein muß. Dabei sehen wir sogar von der Anrufung des Boethius selbst in unserer Stelle ab, wiewohl man in ihr eine gewisse Gedankenbeziehung zu einem Ausspruche der Chronik von Verdun[2]) erkennen möchte. In dieser Chronik ist nämlich Gerbert ein zweiter Boethius genannt, wodurch, wenn nicht die Quelle alles seines Wissens doch jedenfalls so viel gesichert ist, daß die damalige Zeit gewohnt war, Boethius als den allgemeinen Lehrer insbesondere für mathematische Gegenstände zu betrachten.

Damit sind wir wieder zu Gerbert zurückgelangt, dessen Lehrtätigkeit in Rheims, wie wir sagten, bis etwa 982 gedauert hat. Etwa ein Jahr vor dem Ende dieser Zeit, um Weihnachten 980, war Gerbert als Begleiter des Bischofs Adalbero von Rheims in Ravenna am Hofe Otto II., den er gleich seinem Vater für sich einzunehmen wußte. Er zeichnete sich in einer öffentlichen Disputation über philosophisch-mathematische Gegenstände, welche er gegen einen der ersten Dialektiker der Zeit bestand[3]), und aus welcher er wenn nicht als Sieger doch unbesiegt hervorging, indem der Kaiser am späten Abend wegen Ermüdung der Zuhörer den noch andauernden Redekampf unterbrach, rühmlichst aus, und mutmaßlich infolge dieser zum Kaiser angeknüpften Beziehungen wurde Gerbert als Abt an das Kloster Bobbio versetzt, jenes reiche Kloster an der Trebbia, wo der irische Glaubensprediger Columban gestorben ist, wo handschrift-

[1]) Persius Satyr. I, 132: *Nec qui abaco numeros et secto in pulvere metas scit.* [2]) *Monument. German.* VI, 8. [3]) Werner, Gerbert S. 46—55.

liche Schätze aller Art den wissensdurstigen Geist empfingen, wo insbesondere damals der Codex Arcerianus vorhanden war, die Sammlung römischer Feldmesser, von welcher früher (S. 552) die Rede war. Gerbert hat, das werden wir noch nachweisen, diese Sammlung in Bobbio studiert und in Verbindung mit anderen römischen Schriftstellern, deren Persönlichkeit sich nicht genau feststellen läßt, zur Grundlage einer eigenen Geometrie gemacht, welche während des Aufenthaltes in Bobbio entstand.

Dieser Aufenthalt währte allerdings nicht lange. Otto II. starb am 7. Dezember 983. Er allein war Gerberts Freund gewesen, während Papst Johann XIV. geradezu als dessen persönlicher Gegner aufgefaßt werden muß. An diesem letzteren hatte mithin Gerbert nichts weniger als eine Stütze in den Kämpfen, welche er, der aufgedrungene Fremdling, als Abt von Bobbio zu bestehen hatte. Widerspenstigkeit der untergebenen Mönche, Anfeindungen umwohnender Großen, welche Güter des Klosters an sich gerissen hatten, vereinigten sich, Gerbert den dortigen Aufenthalt zu verleiden, und kurz nach dem Tode Otto II. war er wieder in Rheims, in der Umgebung seines dort lebenden Freundes, des Bischofs Adalbero. Seine äußeren Geschicke, welche mit der politischen Geschichte der damaligen Zeit im engsten Zusammenhange stehen und namentlich durch das freundschaftliche Verhältnis, welches Gerbert an die noch lebenden weiblichen Persönlichkeiten der deutschen Kaiserfamilie, an die Mutter Theophania und an die Großmutter Adelheid des jungen Otto III. fesselte, beeinflußt worden sind, sind ungemein wechselnd. Wahrscheinlich im Sommer 983 schrieb Gerbert von Bobbio aus an Adalbero über wissenschaftliche Funde, welche ihm geglückt seien[1]), er möge sich nur Hoffnung machen auf acht Bücher des Boethius über Astronomie und ganz Ausgezeichnetes über Figuren der Geometrie und nicht minder Bewundernswertes, was er allenfalls noch finden werde. Das ist die Stelle, auf welche man sich zu beziehen pflegt, um das Vorhandensein der Geometrie des Boethius in jener Zeit zu begründen (S. 576), um zugleich zu begründen, daß Gerbert dieselbe in der frühen Zeit seines ersten Rheimser Aufenthaltes nicht zur Benutzung gehabt haben kann.

Wahrscheinlich 990 im Lager Hugo Capets, welcher damals Laon belagerte, schrieb Gerbert einen anderen dem Mathematiker nicht uninteressanten Brief an Remigius von Trier[2]). Es ist aller-

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) Epistola 76, pag. 44: *et quae post reperimus speretis: id est VIII volumina Boetii de astrologia praeclarissima quoque figurarum geometriae aliaque non minus admiranda si reperimus.* [2]) Ebenda

dings nur eine im Texte recht sehr verderbte Antwort auf zwei verloren gegangene Anfragen und darum nicht mit aller Bestimmtheit herzustellen. Die wahrscheinlichste Übersetzung lautet: „Das in bezug auf die erste Zahl hast Du richtig verstanden, daß sie sich selbst teilt, weil einmal eins eins ist. Aber deshalb ist nicht jede sich selbst gleiche Zahl als ihr Teiler zu betrachten; z. B. einmal vier ist vier, aber deshalb ist nicht vier der Teiler von vier, sondern vielmehr zwei, denn zwei mal zwei sind vier. Ferner das Zeichen 1, welches unter der Kopfzahl X steht, bedeutet X Einheiten, welche in sechs und vier zerlegt das anderthalbmalige Verhältnis gewähren. Dasselbe ließe sich auch an zwei und drei sehen, deren Unterschied die Einheit ist."

Wieder um einige Jahre später fällt, wahrscheinlich in den Spätsommer 994, ein Brief Otto III. an Gerbert[1]), der inzwischen 991 zum Metropolitan von Rheims gewählt worden war, wozu ihn schon 988 der sterbende Adalbero bezeichnet hatte, der aber seiner unter Widerwärtigkeiten der verschiedensten Art errungenen Stellung nicht froh werden konnte. Gerbert hatte offenbar an Otto geschrieben und ihm Verse zugeschickt, oder gefragt, ob Otto welche zu machen verstehe, denn nur so hat der Schluß von Ottos Brief einen Sinn, worin es ohne jeden Zusammenhang mit vorhergehendem heißt, daß er bisher keine Verse gemacht, wenn er aber diese Kunst mit Erfolg erlernt haben werde, wollte er so viele Verse senden als Frankreich Männer zähle. Für uns hat nur eine frühere Stelle des Briefes Bedeutung, in welcher Otto die dringende Einladung an Gerbert ergehen läßt, persönlich zu kommen, in ihm der Griechen lebendigen Geist zu erwecken und ihm das Buch der Arithmetik zu erklären, damit er, vollkommen durch die Beispiele desselben belehrt, etwas von der Feinheit der Altvorderen verstehe. Mit größter Wahrscheinlichkeit ist als das Buch der Arithmetik, von welchem hier die Rede ist, die Arithmetik des Boethius erkannt worden, und die Tatsache, daß jenes Werk damals am Kaiserhofe vorhanden war, ist durch das Auffinden einer etwa gleichalterigen, zwar lückenhaften aber sehr richtigen Handschrift zur Gewißheit geworden[2]). Otto war 987 der

Epistola 124, pag. 68. Wir geben die Übersetzung aus Math. Beitr. Kulturl. S. 318 nach Friedleins Verbesserungen des lateinischen Textes. Friedleins Übersetzung dagegen [Zeitschr. Math. Phys. X, 248, Anmerkung **] halten wir am Anfange für ganz falsch, während der Schluß nicht nennenswert von dem unsrigen abweicht.

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) Epistola 208, pag. 141—142. Vgl. Werner, Gerbert S. 93. [2]) Der *liber mathematicalis* des heiligen Bernward im Domschatze zu Hildesheim, eine historisch-kritische Untersuchung von H. Düker. Beilage zum Programm des Hildesheimer Gymnasium Josephinum für 1875.

Schüler Bernwards, des Bischofs von Hildesheim. Der Domschatz dieser alten Stadt bewahrt aber unter dem Namen des *liber mathematicalis* des heiligen Bernward eine durch diesen verbesserte wenn nicht gar durchweg mit einer älteren Handschrift verglichene Abschrift der Arithmetik des Boethius, an deren damaligem Vorhandensein demnach nicht der leiseste Zweifel übrig bleibt[1]). Ob Otto bereits durch Bernward mit dem Inhalte des Werkes bekannt gemacht Gerbert noch um die nähere Erläuterung zu bitten beabsichtigte, ob er das Werk nur von Hörensagen oder durch ohne Hilfe unternommene und deshalb fruchtlos gebliebene eigene Durchsicht kannte, das sind Fragen untergeordneten Ranges, auf welche eine Antwort schwerlich gefunden werden möchte. Gerbert nahm die Einladung an und sagte dabei anknüpfend an Ottos eigene Worte: „Wahrlich etwas Göttliches liegt darin, daß ein Mann, Grieche von Geburt, Römer an Herrschermacht, gleichsam aus erbschaftlichem Rechte nach den Schätzen der Griechen- und Römerweisheit sucht“[2]).

Davon, daß auch andere Weisheit möglich sei, daß Araber sich um die Mathematik verdient gemacht hätten, ist hier, wo es so nahe lag, den künftigen Lehren, welche Gerbert dem jungen Fürsten erteilen sollte und wollte, diesen erhöhten Reiz fremdartigen Ursprunges zum voraus zu verleihen, mit keinem Buchstaben die Rede, so wenig wie an irgend einer anderen Stelle der von Gerbert herrührenden Briefe oder Werke. Es ist wahr, Gerbert redet um 984 während seines zweiten Rheimser Aufenthaltes zu zwei verschiedenen Persönlichkeiten[3]), zu Bonafilius dem Bischofe von Girona und zu seinem alten Lehrer dem Abte Gerald von Aurillac, von einer Schrift des weisen Josephus, des Spaniers Josephus über Multiplikation und Division der Zahlen, welche Adalbero zu besitzen wünsche, und welche ersterer oder letzterer zu besorgen gebeten wird, letzterer mit Berufung darauf, daß der Abt Guarnerius ein Exemplar in Aurillac zurückgelassen habe. Man hat in diesem Weisen, in diesem Spanier Iûsuf ibn Hârûn al Kindi vermutet[4]), weil derselbe um 970 in Cordova lebte. Allein von diesem Iûsuf weiß man nicht, daß er sich je mit mathematischen Studien beschäftigt haben sollte, und daß der

[1]) Daß in der zweiten Hälfte des X. S. die Arithmetik des Boethius in Deutschland genau bekannt war, ist durch eine Stelle des Schauspiels Hadrian der Hrotsvitha von Gandersheim gesichert, welche bei Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter (Berlin 1887) S. 83—85 in der Note abgedruckt ist. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) Epistola 209, pag. 142. [3]) Ebenda Epistola 55, pag. 34 und Epistola 63, pag. 38. [4]) Suter in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik X, 79 (1900).

„Spanier Josephus“ ein Araber gewesen sei, ist aus seinem Namen ebensowenig wie aus sonstigen Gründen zu schließen. Die Sprache, in welcher der Betreffende schrieb, war ohne Zweifel nicht die arabische, sondern die lateinische, denn was hätte sonst Adalbero mit dem Buche anfangen können, weshalb hätte Guarnerius es in Aurillac zurücklassen sollen zu einer Zeit, in welcher gewiß Kenntnis der arabischen Sprache in den Klöstern vergeblich gesucht worden wäre? Wenn nicht alles täuscht, so ist hier der Angelpunkt, um welchen weitere Forschungen nach dem weisen Josephus sich werden drehen müssen, nachdem andere Versuche[1]) schlechterdings zu keinem Ergebnisse geführt haben. Man wird Handschriftenkataloge insbesondere von spanischen und südfranzösischen Bibliotheken nach lateinisch geschriebenen Stücken mathematischen Inhaltes eines Josephus durchmustern müssen. Ein solcher Katalog aus dem XVIII. S. gibt z. B. an[2]), der Codex CXV der ehemaligen (jetzt in Paris befindlichen) Bibliothek des Erzbischofs Charles de Montchal von Toulouse enthalte eine vielleicht von Josephus verfaßte Geometrie. Nur freilich ist gerade diese Spur nicht weiter zu verfolgen, wie an Ort und Stelle vorgenommene Untersuchungen bewiesen haben[3]).

Auf ein arabisches Werk ist wahrscheinlich nur ein aus wenigen Zeilen bestehender Brief zu beziehen[4]), welcher dem gleichen Zeitraume wie die beiden ebenerwähnten Briefe angehören dürfte, und in welchem Gerbert von einem gewissen Lupitus von Barcelona, um welchen er selbst sich keinerlei Verdienst erworben habe, vermöge seines hohen Geistes und seiner freundlichen Sitten das von ihm übersetzte Buch über Sternkunde erbittet und sich zu jeglichem Gegendienste bereit erklärt. Jenes Buch kann nicht leicht ein anderes als ein arabisches gewesen sein. Aber auch dieses hat Gerbert wohl nie früher und ebensowenig auf seinen Brief hin zu Gesicht bekommen, wenn man diesen Schluß aus dem Umstande ziehen darf, daß, wie in früherer so in späterer Zeit mit einer einzigen weiter unten zu berührenden Ausnahme, keinerlei Spuren arabischer Sternkunde bei Gerbert erkennbar sind. Dergleichen bedurfte es freilich auch nicht für die Dinge, welche Gerbert vornahm, und welche von trigonometrischen Rechnungen, einem Gegenstande, bei welchem der Gegensatz zwischen griechisch-römischen und arabischen Lehren sich be-

[1]) Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie von Professor Dr. H. Weißenborn, Berlin 1892. [2]) Bern. de Monfaucon, *Bibliotheca bibliothecarum manuscriptarum* I, 902. Wir wurden durch M. Curtze auf diese Angabe aufmerksam gemacht. [3]) Briefliche Mitteilung von Tannery. [4]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) Epistola 60, pag. 36.

sonders gezeigt haben müßte, vollkommen frei waren. Solcher bedurfte er z. B. nicht durchaus bei der Herrichtung einer Sonnenuhr in Magdeburg, welche er zwischen 994 und 995 vollzog, und zu deren Richtigstellung er Beobachtungen des Polarsternes machte[1]).

Das Wanderleben Gerberts hatte mit der Reise nach dem Kaiserhofe keinen Ruhepunkt erreicht. Bald sehen wir ihn nach Frankreich zurückkehren, um auf der Synode zu Mouson sein Recht auf das Bistum Rheims persönlich zu verteidigen, bald finden wir ihn in Ottos Heerlager auf einem Feldzuge gegen slavische Stämme an Elbe und Oder, bald überschreitet er im Gefolge Otto III. die Alpen, um dem wüsten Regimente ein Ende zu machen, welches in Rom herrschte und dem deutschen Könige sowohl Ärgernis bereitete als die erwünschte Gelegenheit zur Einmischung gab. Am 9. Mai 996 starb Papst Johann XV., unter dem Drucke der Nähe des deutschen Heeres wurde Bruno aus dem sächsischen Fürstenhause als Gregor V. zum Papste gewählt, am 21. Mai krönte der neue Papst bereits Otto in Rom zum Kaiser. Gerbert blieb auch nach des Kaisers Abreise in Rom als Ratgeber des noch jugendlichen Papstes. Er erfüllte diese Aufgabe so pflichtgetreu, daß er 998 mit dem Bistume Ravenna belohnt wurde, und im folgenden Jahre erfüllte sich der Schicksalsspruch:

Scandit ab R Gerbertus in R, post Papa viget R,

der ihm in dreifacher Erhebung ein dreifaches *R* verheißen hatte, von Rheims nach Ravenna, von Ravenna nach Rom! Gregor V. starb am 5. Februar, Gerbert feierte am 2. April 999 seine Inthronisation unter dem Namen Sylvester II. Er verwaltete den päpstlichen Stuhl fast genau vier Jahre lang bis zu seinem Tode, der am 12. Mai 1003 erfolgte.

Die letzten sieben Lebensjahre Gerberts, welche er demnach politisch und kirchlich überaus beschäftigt in Italien zubrachte, gaben ihm daneben Gelegenheit zu schriftstellerischer Tätigkeit. Er verfaßte eine freilich nur aus zwölf Hexametern bestehende Inschrift zu einem Denkmale des Boethius, mit welchem Otto III. zu Pavia auf seine Veranlassung das Grab des in den Klosterschulen beliebtesten Schriftstellers schmückte[2]). Er schrieb mutmaßlich um 997 eine Abhandlung über das Dividieren, welche dem Constantinus von Fleury gewidmet ist und als jene Schrift betrachtet wird, von der Richer

[1]) *In Magdaburgh orologium fecit, illud recte constituens considerata per fistulam quadam stella nautarum duce* sagt darüber Thietmars Chronik L. VI, cap. 61. Thietmar † 1019 als Bischof von Merseburg. Vgl. Werner, Gerbert S. 221. [2]) Ebenda S. 328.

spricht, indem er diejenigen, welche die Division und die Multiplikation großer Zahlen erlernen wollen, auf das Buch verweist, welches Gerbert an C. den Grammatiker schrieb. Als Papst sogar fand Gerbert Zeit, einen astronomischen Brief an Constantinus, der inzwischen im Jahre 995 Abt von Mici geworden war, zu schreiben[1]). Als Papst erhielt er einen Brief geometrischen Inhaltes von Adalboldus über die Ausmessung des Kreises und der Kugel[2]), in dessen Schreiber man wohl berechtigt ist, Adelbold von Utrecht zu erkennen, einen Gelehrten, der in vielen Sätteln gerecht, Schriften über Musik[3]), aber auch ein Geschichtswerk hinterlassen hat, welches an Thietmars Chronik sich anlehnt[4]). Vielleicht in die gleiche Zeit fällt ein Schreiben Gerberts an denselben Adalboldus über einen geometrischen Gegenstand, von dem wir noch zu reden haben. Gelegenheit bietet uns die Gesamtbesprechung der mathematischen Schriften Gerberts, zu welcher wir jetzt übergehen, und bei welcher wir erst die geometrischen, dann die arithmetischen Dinge behandeln.

Die Geometrie[5]) Gerberts ist in mehreren lückenhaften, sodann in vollständigem dem XI. S. angehörendem Texte[6]) in der Münchener Handschrift 14836 und auch in einer bis gegen das Ende vollständigen dem Stifte St. Peter in Salzburg angehörenden Handschrift erhalten. Die Entstehungszeit der Salzburger Handschrift dürfte ziemlich genau bestimmbar sein. Im Jahre 1127 wurde das Kloster St. Peter durch einen furchtbaren Brand zerstört. Damals konnten nur wenige Schriftstücke gerettet werden, und Codex a. V. 7, welcher die Gerbertsche Geometrie enthält, befindet sich nicht unter den als geborgen bekannten. Von da an wurde nur um so emsiger an der Wiederbeschaffung einer Bibliothek gearbeitet, und es existierte bereits wieder um 1160 ein Katalog, der sich erhalten hat. In ihm kommt aber vor: Hermannus contracus (*sic!*) super astrolabium, d. i. dasjenige Werk, mit welchem Codex a. V. 7 beginnt. Da nun eine anderweitige Abschrift des gleichen Werkes, die mit jenem Katalogeintrag gemeint sein könnte, in St. Peter nicht vorhanden ist, so glauben wir uns um so berechtigter, eben jenen Codex darunter zu verstehen und anzunehmen, er sei zwischen 1127 und 1160 geschrieben, als alle Zeichen der Schriftvergleichung hiermit in Einklang stehen.

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 479: *Gerbertus Constantino Miciacensi Abbati.* Über Constantinus vgl. Bubnov pag. 6, Note 3. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 471—475. [3]) Werner, Gerbert S. 69. [4]) Ebenda S. 222. [5]) Agrimensoren S. 150 flgg. [6]) Curtze, Die Handschrift Nr. 14836 der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik VII, 75—142 (1895).

Die Glaubwürdigkeit dieser sauberen, unserer Auseinandersetzung zufolge nicht später als höchstens 1150 mithin nicht ganz anderthalb Jahrhunderte nach Gerberts Tode entstandenen Abschrift, welche in ihren Anfangsworten sich selbst als Geometrie des Gerbert benennt, ist mit Rücksicht auf Einzelheiten und insbesondere auf die ungemein verschiedenartigen Gegenstände, welche in ihr zur Rede kommen, angezweifelt worden und auch der Münchener Handschrift hat man kein größeres Vertrauen entgegengebracht. Die Münchener Handschrift trug ursprünglich keinen Verfassernamen. Erst nachträglich, aber immerhin in noch recht früher Zeit[1]) ist der Titel *Geometria Gerberti* dem dem Sammelbande vorausgehenden Inhaltsverzeichnisse eingefügt worden. In der Salzburger Handschrift ist die Überschrift *Incipit Geometria Gerberti* und der Text, jene in roter, dieser in schwarzer Tinte, unzweifelhaft von demselben Schreiber zu Pergament gebracht. Als feststehend ist also zu betrachten, daß in der ersten Hälfte des XII. S. als einheitliches Werk Gerberts galt was schon 100 Jahre früher, wenig mehr als 50 Jahre nach Gerbert, als ein einheitliches Werk vorhanden war. Der Geschichte der Mathematik liegt ganz gewiß mehr an diesem einheitlichen Vorhandensein als daran, ob der Verfasser, der vor 1050 in lateinischer Sprache schrieb, Gerbert hieß oder irgend einen anderen Namen führte. Um nicht an unseres Erachtens ziemlich müßigen Streitfragen zu haften, erklären wir, daß wir Gerbertsche Geometrie nennen, dessen Verfasser möglicherweise einen anderen Namen führte. Es ist nicht zu verkennen, daß kleine Widersprüche, Wiederholungen und dergleichen den Eindruck hervorbringen, es sei einzelnes vom Abschreiber verfehlt worden, der z. B. ein Kapitel, das im Urtexte zuerst an einer Stelle vorkam, dann durch den Verfasser anderswohin gebracht und an der früheren Stelle durchstrichen wurde, zweimal abgeschrieben haben kann. Dagegen sind jene großen Verschiedenheiten behandelter Dinge umgekehrt danach angetan, die Echtheit der Gerbertschen Geometrie vollauf zu beglaubigen. Wir haben (S. 554) uns darüber ausgesprochen, was bei römischen Feldmessern zu finden war. Geometrische Definitionen und einfachste Sätze der Geometrie der Ebene, Maßvergleichungen und feldmesserische Vorschriften, geometrische Rechnungsaufgaben und die Lehre von den figurierten Zahlen, das alles bildete, meistens nachweislich aus Heron übernommen, den Gegenstand ihrer unselbstständigen Schriftstellerei. Genau dasselbe finden wir in Gerberts Geometrie, müssen wir in ihr finden, wenn der Verfasser zu sammeln und durch gleichmäßige Schreibweise zu vereinigen trachtete, was

[1]) Curtze l. c. S. 78 und 79.

ihm aus römischen Quellen sei es in Bobbio durch den Codex Arcerianus, sei es durch andere Quellenschriften, bekannt geworden war. Namentlich für den dritten Teil der Gerbertschen Geometrie ist der Nachweis geführt worden[1]), daß geradezu nichts in demselben steht, was nicht dem Codex Arcerianus entnommen sein kann. Am schlagendsten für die Benutzung des Codex Arcerianus ist wohl das Auftreten jenes Schreibfehlers aus Nipsus (S. 556), wo das Wort hypotenusae hinter podismus ausgefallen ist, im 42. Kapitel der Gerbertschen Geometrie. Aber der Verfasser war kein gewöhnlicher Abschreiber. Er bemerkte, daß hier nicht alles in Ordnung war, und um den Sinn der Stelle zu retten, legte er im 10. Kapitel die Definition nieder, die schräg von oben nach unten, oder von unten nach oben gezogene Linie heiße Hypotenuse oder auch Podismus[2]). Ja er freute sich dieser Definition so sehr, daß er im 12. Kapitel verschiedentlich Podismus sagte, wo Hypotenuse gemeint ist. Es war allerdings ein unfehlbares Mittel, die Richtigkeit einer Nipsusstelle zu wahren, wenn man ihr zuliebe eine neue Worterklärung schmiedete, wenn man, um dieser Eingang zu verschaffen, das neue Wort sofort in Gebrauch nahm.

Wenn sich der Verfasser der Gerbertschen Geometrie hier nicht als hervorragenden Geometer bewährte, so ist dieses ebensowenig der Fall, wenn er im 9. Kapitel den inneren, beziehungsweise den äußeren Winkel für gleichbedeutend mit einem spitzen, beziehungsweise stumpfen Winkel hält. Er faßt den rechten Winkel mit einem wagrechten, einem zu diesem senkrechten Schenkel als ursprünglich gegeben auf. Damit ein spitzer Winkel entstehe, muß der zweite Schenkel, der ihn mit dem wagrechten Schenkel bilden soll, im Innern des rechten Winkels liegen, außerhalb dagegen wenn ein stumpfer Winkel entstehen soll. Das ermangelt ja nicht eines gewissen Scharfsinnes, nur zeugt es dafür, daß wer so schrieb die Euklidischen Elemente nicht kannte, wo im 16. Satze des I. Buches innere und äußere Winkel, d. h. innere und äußere Dreieckswinkel, unzweideutig erklärt sind.

Wir haben die unmittelbare Quelle wenigstens einer großen Abteilung von Gerberts Geometrie im Codex Arcerianus erkannt. Andere Quellen gibt der Verfasser selbst an. Er nennt wenigstens folgende Schriftsteller: Pythagoras im 9. und 11. Kapitel, Platons Timaeus im 13. Kapitel, des Chalkidius Kommentar zu dieser letzteren Schrift im 1. Kapitel, Eratosthenes im 93. Kapitel, den Kommentar

[1]) Agrimensoren S. 229, Anmerkung 304. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (edit. Olleris) pag. 417: *Illa autem quae, obliqua iusum sive susum deducta, hebetis vel acuti anguli effectrix videtur hypotenusa id est obliqua sive podismus nominatur.*

des Boethius zu den Kategorien des Aristoteles im 8. Kapitel und endlich die Arithmetik des Boethius in der Vorrede, im 6. und im 13. Kapitel. Wir können es dahingestellt sein lassen, ob alle diese Zitate des Verfassers eigener Gelehrsamkeit entstammen oder selbst wieder zum Teil abgeschrieben sind, jedenfalls wird man andere Namen, Namen, welche nicht nach Griechenland und Rom verweisen, vergeblich suchen. Der mittlere Teil der Gerbertschen Geometrie, Kapitel 16 bis 40, dem Raume nach ein starkes Vierteil des Werkes, enthält kein Zitat und hat bisher noch nicht zurückgeführt werden können. Es ist die praktische Feldmessung, welche hier gelehrt wird, in Vorschriften Höhen, Tiefen und Entfernungen zu messen[1]).

Da begegnet uns, um nur einiges zu nennen, im Kapitel 16 eine Methode, nach welcher der Beobachter stehend und durch ein unter 45 Grad geneigtes Astrolabium visierend eine Höhe messen soll. Da lehren die Kapitel 21 und 22, teilweise auch 24, Höhenmessungen aus dem Schatten. Im 22. Kapitel ist als einzige (S. 857) angekündigte Verwandtschaft zu Arabischem das auch ausschließlich in der Salzburger Handschrift an dieser Stelle vorkommende Wort *halhidada* zu bemerken, welches zweimal, das zweite Mal in der Form *alhidada*, vorkommt[2]). Wir deuten uns diese einzige Ausnahme als eine von den (S. 860) erwähnten kleinen Abschreibersünden. Das Wort wird in der Vorlage Randbemerkung gewesen und in den Text herüber genommen worden sein, ganz ähnlich wie es in einer Archimedhandschrift mit dem Worte Ellipse ging, dessen Archimed sich zuverlässig nicht bedient haben kann. Daß unsere Erklärung das Richtige zu treffen scheint, geht auch daraus hervor, daß die Münchener Handschrift, welche gerade den feldmesserischen Abschnitt in offenbar viel zweckmäßigerer und klarerer Anordnung besitzt, als man es der Salzburger Handschrift nachrühmen kann, jenes 22. Kapitel überhaupt nicht aufweist[3]).

---

[1]) Agrimensoren S. 162—165. Bubnov l. c. hält diese mittlere und die letzte Abteilung für eingeschoben, während die erste Abteilung seiner Ansicht nach von Gerbert herrühren kann. Tannery (*Une correspondance d'Écolâtres du XI Siècle*) hält die beiden ersten Abteilungen für nicht-Gerbertisch und schreibt die letzte Abteilung Gerbert in dem Sinne zu, es sei ein von diesem herrührender Auszug aus römischen Feldmessern. [2]) Das arabische Wort al-ʿidâda bedeutet eigentlich einen Türpfosten, dann als technischer Ausdruck ein Lineal. Die Engländer gebrauchen seit Ende des XVI. S. das Wort in der Verketzerung *athelida*. Weigand, Deutsches Wörterbuch, 2. Auflage 1876, ist der Meinung, aus diesem *athelida* sei unter Vereinigung mit dem vorgesetzten Artikel *the* das sonst in seiner Ableitung unerklärliche Theodolit entstanden. Vgl. K. Zöppritz in den Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge XX, 175—176 (1883). [3]) Curtze l. c. S. 96.

Im 24. Kapitel knüpft sich dann wieder ganz in römischer Weise eine Methode an, bei der von der Mißlichkeit eines Verfahrens gesprochen wird, welches den Beobachter zwingt, sein Gesicht glatt an die Erde zu drücken. Da erinnert an Epaphroditus (S. 556) und an Sextus Julius Africanus (S. 440) eine im Kapitel 31 gelehrte Höhenmessung mit Hilfe eines massiven rechtwinkligen Dreiecks von den Seitenlängen 3, 4 und 5. Wieder eine den Hilfsmitteln nach verschiedene Höhenmessung ist sodann die im Kapitel 35, welche wir die Messung mittels der festen Stange nennen wollen, da sie darauf hinausläuft, eine Stange von bekannter Höhe in den Boden zu befestigen und alsdann rückwärts gehend den Punkt aufzusuchen, von welchem aus die Sehlinie aus dem Auge des Beobachters nach der Stangenspitze in ihrer Verlängerung die Spitze des zu messenden Gegenstandes, eines Turmes oder dergleichen, erreicht. Kapitel 38 und 39 messen Flußbreiten, die Aufgabe des Nipsus wie vor ihm des Heron. Kapitel 40 endlich kennzeichnet sich selbst als militärische Methode zur Höhenmessung. Zwei Pfeile werden, ein jeder an eine lange Schnur befestigt, gegen die Mauer abgeschossen, auf deren Höhenmessung es abgesehen ist, und zwar richtet man den einen Schuß nach der Spitze, den anderen nach dem Fuße der Mauer. Die beidemal abgewickelten Schnurlängen geben Hypotenuse und Grundlinie eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Höhe zu berechnen nunmehr keine Schwierigkeit mehr hat.

Solche Methoden werden nicht auf einmal erfunden. Der Verfasser dieser Abteilung, wer es auch gewesen sein mag, ob Gerbert, ob ein anderer Schriftsteller im oder vor dem XI. S., ob ihm die ganze Gerbertsche Geometrie, ob nur deren mittlere Abteilung angehört, erhebt auch keinerlei Anspruch darauf als Erfinder angesehen zu werden. Er sagt stets „die Höhe usw. wird gemessen", niemals „ich messe" auf diese oder jene Weise, und um derartige Worte der Aneignung war das Mittelalter nie verlegen, selbst wo sie nicht vollständig der Wahrheit entsprachen. Sagt doch der Verfasser der ersten Abteilung, bevor er im 13. Kapitel höchst unbedeutende Bemerkungen ausspricht „Ich glaube unter keiner Bedingung schweigend an Ausblicken vorbeigehen zu sollen, welche, während ich dies schrieb, die eigene Natur mir eröffnete"[1]). Ein Weiteres tritt hinzu, welches erst im folgenden Bande im 42. Kapitel zur vollen Geltung kommen kann. Am Anfang des XIII. S. finden wir einige dieser Messungsmethoden,

---

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 425: *Sed nequaquam silentio puto transeundum quod interim dum haec scriptitarem ipsa mihi natura obtulit speculandum.*

aber nicht alle bei einem Schriftsteller wieder, von welchem kaum anzunehmen ist, er habe aus der Gerbertschen Geometrie geschöpft, so daß die unmittelbare weniger wahrscheinlich sein dürfte, als eine beiden gemeinsame Abhängigkeit von einer noch älteren, jedenfalls römischen Quelle, mag deren Urheber Frontinus oder Balbus geheißen, oder einen anderen bekannten oder verschollenen Namen geführt haben. Von dieser Annahme aus steigert sich die Wichtigkeit von Gerberts Geometrie nach zwei Seiten hin. Sie lehrt uns nicht bloß, was durch Jahrhunderte hindurch von Methoden der Feldmessung sich erhalten hat, sie füllt uns auch eine empfindliche Lücke in unserer Kenntnis der römischen Verfahrungsweisen aus, wenn wir nicht gar in Erinnerung an die Erzählung des Polybius (S. 362), es sei möglich die Höhe einer Mauer von weitem zu messen, für die Entstehung mancher Methoden bis in das griechische Altertum hinaufgreifen müssen.

Was den ersten Teil dieser Geometrie betrifft, so haben wir schon auf die Definition von *podismus* aufmerksam gemacht, welche in ihm sich befindet. In ihm kommt auch das Wort *coraustus* für Scheitellinie vor, den griechisch-römischen Ursprung bezeugend. Andere Bemerkungen lassen sich an Definitionen und einfachste Sätze der Geometrie kaum knüpfen. Sie sind uns höchstens als Stilprobe von Wert, in welcher die dem Verfasser eigene behäbige Breite hervortritt, ein Bestreben, recht klar zu sein, welches er aber niemals dadurch betätigt, daß er Sätze kürzer faßte und den Sinn Verwirrendes wegließe, sondern stets so, daß er von dem Seinigen beifügt.

Mit dem dritten Teile haben wir uns oben so weit beschäftigt, daß wir seine Quellen enthüllten. Einige wenige Gegenstände müssen wir noch aus ihm hervortreten lassen. Wir haben (S. 377) die heronische Konstruktion des regelmäßigen Achtecks ausgehend von dem Quadrate besprochen; wir haben (S. 560) die Figur, an welcher die Richtigkeit der Konstruktion sich nachweisen läßt, bei Epaphroditus wiedergefunden; wir haben sie (S. 586) bei dem Fälscher des Boethius auftreten sehen. Die Gerbertsche Geometrie hat die Konstruktion selbst im Kapitel 89 aufbewahrt, die Figur dagegen nicht abgebildet, weder bei Gelegenheit der Konstruktion, noch bei Gelegenheit der Achteckszahlen. Überhaupt fühlte der Verfasser offenbar deutlicher als die römischen Schriftsteller, die ihm als Vorlage dienten, daß die Lehre von den figurierten Zahlen nur gewohnheitsmäßig in die Geometrie aufzunehmen sei, nicht eigentlich dort ihren richtigen Platz habe; der ganze Gegenstand war ihm klarer. Er hat nicht eine einzige Figur in seinen arithmetischen Kapiteln benutzt. Er hat für die Fünfecks- und Sechseckszahlen die richtigen Formeln angegeben, wo Epaphroditus und der gefälschte Boethius sich Rechenfehler zu-

schulden kommen ließen. In der Gerbertschen Geometrie finden wir in Kapitel 55 die allgemeine Formel, um aus der Seite die Polygonalzahl, in Kapitel 65 diejenige, um aus der Polygonalzahl die Seite zu entnehmen, in ihr zweimal in Kapitel 60 und 62 die Formel, welche die Pyramidalzahl aus der Seite und der Polygonalzahl entstehen läßt. Die Summierung der Reihe der Kubikzahlen ist dagegen nicht in Gerberts Geometrie übergegangen. Es kann wohl sein, daß der Verfasser den betreffenden Paragraphen des Epaphroditus nicht verstand, wie er im Codex Arcerianus auf ihn stieß, und wer möchte ihm das verübeln, da gerade jener Paragraph dort eine so verderbte Gestalt angenommen hat[1]), daß er kaum zu verstehen ist, es sei denn, man wisse schon, nach welcher Formel Kubikzahlen sich summieren und ermittle rückwärts aus dieser Kenntnis die richtige Lesart.

Man hat die arithmetischen Kapitel von Gerberts Geometrie als Zeugnis für die Unechtheit der ganzen Schrift angerufen. Wir halten gerade umgekehrt diesen dritten Abschnitt für gesichertes Eigentum Gerberts. Gerbert, das haben wir in dem biographischen Teile dieser Erörterung gesagt, hat auch als Papst noch einen Brief von Adelbold von Utrecht erhalten. In demselben ist, wie oben angedeutet, von der Ausmessung des Kreises und der Kugel die Rede, deren Körperinhalt, *crassitudo*, dadurch gefunden werde, daß von dem Kubus des Durchmessers $\frac{10}{21}$ abgezogen, beziehungsweise $\frac{11}{21}$ genommen werden. Ein anderer Brief des Adelbold an Gerbert ist verloren gegangen, dagegen ist Gerberts Antwort erhalten und z. B. in der Handschrift des Salzburger St. Peterstiftes, welche die Gerbertsche Geometrie enthält, hinter der Geometrie und in unmittelbarem Anschluß an jenen Brief Adelbolds über den Kugelinhalt vorhanden. Daraus hat sich die Vermutung gebildet, hier liege wohl die Antwort auf ein späteres Schreiben vor, und mit Rücksicht auf die Aufschrift des erhaltenen Briefes Adelbolds „an Gerbert den Papst" mußte man sie in die letzten Lebensjahre Gerberts setzen. Adelbold hatte, wie wir aus Gerberts Antwort ersehen, Skrupel darüber bekommen, daß das Dreieck in seiner Fläche zweierlei Ausmessung besitzen sollte. Er konnte nicht begreifen, wie das gleichseitige Dreieck, dessen Seite die Länge 7 besitzt, ebensowohl den Flächeninhalt 28 $\left(=\frac{7\cdot 8}{2}\right)$ als auch den Flächeninhalt 21 $\left(=\frac{7\cdot 6}{2}\right)$ besitze. Gerbert erläutert ihm die Sache ganz richtig. Der wirkliche geometrische Flächeninhalt, sagt er, ist 21 und er gibt dabei die Regel: die Höhe des gleichseitigen Dreiecks

[1]) Agrimensoren S. 127—128.

sei immer um $\frac{1}{7}$ kleiner als dessen Seite. Die andere Zahl 28, fährt Gerbert fort, sei nur arithmetisch als Fläche zu nehmen und besage, man könne in das Dreieck 28 kleine Quadrate mit der Längeneinheit als Seite einzeichnen, freilich so, daß Überschüsse über das Dreieck erscheinen, wie der Augenschein (Fig. 114) am deutlichsten lehre. Gerbert, sagte man nun, hat also hier deutlich für die Geometrie verworfen, was in Gerberts sogenannter Geometrie gelehrt ist, mithin ist letztere unecht.

Fig. 114.

Dieser Einwurf ist vollkommen nichtig. Wir wollen nicht bloß darauf hinweisen, daß es eine und dieselbe Handschrift aus der Mitte des XII. S. ist, welche beide Schriftstücke für Gerbert in Anspruch nimmt, noch darauf, daß die Geometrie, wenn sie in Bobbio unter Benutzung des dort befindlichen Codex Arcerianus geschrieben wurde, etwa 20 Jahre älter als der Brief an Adelbold ist, und daß in 20 Jahren Ansichten auch über wissenschaftliche Dinge sich klären und ändern können. Wir geben vielmehr namentlich zu bedenken, was wir oben schon auf den Inhalt der arithmetischen Kapitel selbst uns stützend gesagt haben, daß Gerbert diesen Abschnitt seiner Geometrie als das erkannte, was er war, und ihn wohl überhaupt nur darum aufnahm, weil er auch in seinen Musterwerken sich an ähnlicher Stelle vorfand. Ja man kann umgekehrt den Brief eine willkommene Bestätigung der Geometrie nennen, wenn Adelbold, dessen Anfrage ja verloren ist, gerade auf Gerberts Geometrie, wie wir vermuten, sich berief, um die falsche Zahl 28 neben der als richtig bekannten Zahl 21 durch ein Zeugnis zu stützen, welches von dem, an welchen er seine Anfrage richtete, nicht zurückgewiesen werden konnte. Zu dieser Vermutung führen nämlich die Anfangsworte von Gerberts Brief hin[1]): „Unter den geometrischen Figuren, welche Du von uns entnommen hast, war ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite 30 Fuß lang war, die Höhe 26 Fuß, die Fläche gemäß der Vergleichung von Seite und Höhe 390.“ Diese Figur nebst den genannten Zahlenwerten ist nämlich in Gerberts Geometrie der Inhalt von Kapitel 49.

Zugleich zeigt sich in der Tat eine Ansichtsänderung Gerberts. Während er in dem aus Epaphroditus entnommenen Kapitel der Geometrie noch $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ rechnete, sagt er jetzt, wie wir gesehen haben, im Verlaufe des Briefes, die Höhe des gleichseitigen Dreiecks sei

[1]) *In his geometricis figuris, quas a nobis sumpsisti, erat trigonus quidam aequilaterus, cuius erat latus XXX pedes, cathetus XXVI, secundum collationem lateris et catheti area CCCXC.*

immer um $\frac{1}{7}$ kleiner als dessen Seite, und darin steckt der Näherungswert $\sqrt{3} = \frac{12}{7}$, dessen Vorkommen bei irgend einem früheren Schriftsteller wir nicht zu bestätigen imstande sind, während er (S. 223) Baumeistern der Perikleischen Zeit bekannt gewesen zu sein scheint, vielleicht auch in den Bauschulen erhalten blieb, weil er bequemerer Rechnung als der heronische Näherungswert, wenn auch weniger genau als jener ist. Der Näherungswert $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ findet sich, um dieses gelegentlich hervorzuheben, gleichfalls in der dritten Abteilung von Gerberts Geometrie, in Kapitel 66.

Diese Schriften Gerberts, von welchen wir bisher gehandelt haben, waren geometrischen Inhaltes. Zwei andere beziehen sich auf Rechenkunst. Zunächst ist aus zwei dem XI. und dem XII. S. angehörenden Handschriften durch den letzten Herausgeber von Gerberts Werken eine Abhandlung: Regel der Tafel des Rechnens, *Regula de abaco computi* überschrieben und als von Gerbert herrührend bezeichnet zum Drucke befördert worden[1]). Der Titel dieser ausführlichen Abhandlung ist nicht ohne Interesse in der Richtung, daß in ihm das Wort Computus unzweifelhaft nicht als Osterrechnung, sondern als Rechnen im allgemeinen zu übersetzen ist, eine erweiterte Bedeutung, deren Möglichkeit wir (S. 834) betonten. Er findet seine Beglaubigung, wenn eine solche nötig erschiene, in einer Äußerung eines Schriftstellers des XI. S., der im folgenden Kapitel von uns besprochen werden muß, Bernelinus. Dieser redet nämlich von der „Regel“ des Papstes[2]). Wir werden indessen gleich nachher ausführlicher über die Verfasserfrage zu reden haben, wenn wir über den Inhalt der Regel im klaren sein werden, und über diesen kommen wir am raschesten hinaus, wenn wir denselben als in wesentlicher Übereinstimmung mit den seinerzeit im 27. Kapitel geschilderten rechnenden Abschnitten der Geometrie des Boethius anerkennen. Die Multiplikationsregeln sind soweit fortgesetzt, daß höchstens 27 Kolumnen des Abacus in Anspruch genommen werden, wodurch eine Übereinstimmung mit Richers Schilderung des Rechenbrettes, welches Gerbert in Rheims seinem Unterrichte zugrunde legte, hergestellt ist. Allerdings scheint ein nur flüchtiger Blick auf die Regel dieser Bemerkung zu widersprechen. Wo z. B. die Multiplikation von Einern in Zehner, in Hunderter usf. gelehrt wird, heißt es ausdrücklich, es

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 311—348. [2]) Ebenda pag. 357: *Si domini papae regula de his subtilissime scripta tantum sapientissimis non esset reservata, frustra me ad has compelleres scribendas.*

gebe 25 Fälle, und ähnlich, wenn der Multiplikator und ihm entsprechend der Multiplikandus von höherer Ordnung gedacht sind. Da könnte man auf das Vorhandensein von nur 26 Kolumnen zu schließen sich versucht fühlen, wenn man zu erwägen vergißt, daß die zählenden Ziffern beider Faktoren für sich ein zweiziffriges Produkt zu liefern imstande sind, also in der Tat das Vorhandensein einer bei manchen Multiplikationen freibleibenden, bei anderen zu benutzenden 27. Kolumne voraussetzen. Das Dividieren ist das komplementäre, sofern der Divisor aus Zehnern und Einern besteht. Besteht derselbe aus Hundertern und Einern, so wird wieder, wie bei Boethius, eine Einheit höchster Ordnung des Dividenden fürsorglich beseitigt und dann zunächst durch die Hunderter des Divisors geteilt, als wären sie von Einern gar nicht begleitet. Das Bruchrechnen bildet den Schluß und wendet diejenigen Brüche an, welche wir als ursprünglich römische Duodezimalbrüche wiederholt in Frage treten sahen.

Die ganze Schrift ähnelt in ihrer breitspurigen Stilistik der Geometrie Gerberts. Sie trägt, wie wir fast überflüssigerweise bemerken, in jeder Zeile ein durchweg römisches Gepräge. Man kann sogar einiges Erstaunen darüber an den Tag legen, daß nur die gemeinen römischen Zahl- und Bruchzeichen vorkommen, daß weder im fortlaufenden Texte, noch auf den Zeichnungen des Abacus, welche in der Handschrift jüngeren Datums sich vorfinden, jene Apices benutzt sind, welche doch nach Richers nicht mißzuverstehender Schilderung Gerbert in Rheims zu benutzen pflegte. Das läßt einigen Zweifel in die Meinung setzen, Gerbert habe gerade während seiner Rheimser Lehrzeit die Regel aufgeschrieben, beziehungsweise seinem dortigen Unterrichte zugrunde gelegt, eine Meinung, welche in weiterem Widerspruche gegen unsere (S. 850) begründete Ansicht steht, Gerbert habe dort überhaupt nicht nach einem den Schülern in die Hände gegebenen Buche das Rechnen gelehrt, in Widerspruch auch gegen die Worte Richers, man solle Gerberts Buch an C. den Grammatiker zu Rate ziehen. Konnte Richer so schreiben, wenn die ausführliche Regel älteren Datums als das Buch an Constantinus war, in welchem wir sogleich eine wesentlich kürzere Darstellung kennen lernen werden? Mußte Richer die Regel, wenn sie in Rheims in Gebrauch war, nicht unbedingt kennen, während seine Worte die Vermutung erwecken, er wenigstens habe nur von einer Schrift über Rechenkunst aus Gerberts Feder gewußt? Ähnliche nur noch stärkere Bedenken sind einer Berner Handschrift der Regel entnommen worden[1]). Die Vermutung, jene Handschrift gehöre dem IX. S. an, sie sei also längere Zeit vor Gerberts Geburt geschrieben, hat sich allerdings als irrig erwiesen. Die Zeit der Niederschrift wird nicht über das X. S. hinaufzurücken sein[1]), und somit könnte das Original allenfalls um 970 entstanden sein. Aber aus dem Berner Kodex geht deutlicher als aus dem dem Drucke der Regel zugrunde gelegten hervor, daß man überhaupt nicht eine Abhandlung, sondern deren zwei vor sich hat, eine über das Multiplizieren und Dividieren mit ganzen Zahlen, eine zweite über das Bruchrechnen, und da nur von einer Schrift Gerberts die Rede sein könnte, so wäre mindestens die zweite Abhandlung einem Verfasser zuzuweisen, der spätestens als Gerberts Zeitgenosse lebte, der durch seine Duodezimalbrüche sich als Schüler römischer Rechenkunst zu erkennen gibt, und der mit diesen Brüchen die komplementäre Division ausübt! Wieder eine andere Auffassung ist diejenige[2]), welche die ganze Schrift Gerbert abspricht und sie zwar auch als aus verschiedenen Bestandteilen zusammengesetzt erachtet, aber Heriger von Lobbes für den Verfasser des ersten Hauptteiles hält. Heriger habe etwa zu gleicher Zeit in Lobbes wie Gerbert in Rheims gelehrt, so daß eine Beeinflussung des einen durch den anderen, Gerberts durch Heriger wie Herigers durch Gerbert, ausgeschlossen erscheine. Wir verzichten darauf eine Entscheidung zu treffen, wo nirgend strenge Beweise vorliegen, vielmehr nur Vermutung gegen Vermutung steht. Uns darf die eine Behauptung genügen, in welcher, soweit wir sehen, alle übereinstimmen, daß die Regel zu Gerberts Lebzeiten verfaßt ist, und daß die komplementäre Division aus Rom stammt.

Dagegen wird gegen eine andere Schrift Gerberts kein Zweifel erhoben. Büchlein über das Dividieren der Zahlen, *libellus de numerorum divisione*, ist die Überschrift der Abhandlung[3]), welche durch einen Brief an Constantinus eingeleitet, kürzer und weniger klar, als die Regel es tut, den genau gleichen Gegenstand behandelt gleichfalls ohne der Zahlzeichen auch nur mit einer Silbe zu gedenken. Der Einleitungsbrief lautet in seinen ersten wichtigen Sätzen wie folgt[4]): „Der Stiftslehrer Gerbert seinem Constantinus. Die Gewalt der Freundschaft macht fast Unmögliches möglich, denn wie würde ich versuchen, die Regeln der Zahlen des Abacus zu erklären, wenn Du nicht, Constantinus, mein süßer Trost der Mühen, die Veran-

[1]) Gerbert und die Rechenkunst des X. Jahrhunderts von Dr. Alfred Nagl (Wien 1888, Sonderabdruck aus Bd. 116 der Sitzungsberichte der phil.-histor. Klasse der Wiener Akademie).

[1]) So das Ergebnis genauer Erwägungen von Herrn Delisle in Paris. [2]) Bubnov S. 205, Note 1. [3]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 349—356. [4]) Math. Beitr. Kulturl. S. 320 verbessert nach dem in der Ausgabe von Olleris abgedruckten gereinigten Texte.

lassung bötest? So will ich denn, obwohl etliche Jahrfünfe vergangen sind, seit ich weder das Buch in Händen hatte noch in Übung war, einiges in meinem Gedächtnisse zusammensuchen, und es zum Teil mit denselben Worten, zum Teil demselben Sinne nach vorbringen." Es geht daraus hervor, daß Gerbert zu Constantinus auch wohl früher schon in dem Verhältnisse des Lehrers zum Schüler gestanden haben muß, weil er sonst nicht den Titel Stiftslehrer mit seinem Namen in Verbindung gebracht hätte, was er außerdem nur dreimal in den uns bekannten Briefen tat[1]). Wir wissen auch, daß die Bekanntschaft beider aus den Jahren 972 bis 982 herrührt, aus der Zeit, in welcher Gerbert wechselweise lernend und lehrend aus der Stellung des Stiftsschülers in die des Stiftslehrers übersprang, um dann wieder für einzelne Stunden in die erstere zurückzukehren. An jene Zeit erinnert Gerbert offenbar mit den Worten, es seien etliche Jahrfünfe, *aliquot lustra*, vergangen, und diese Zeit von mindestens 15 bis 20 Jahren zu der des Rheimser Aufenthaltes hinzugefügt liefert etwa das Jahr 997, in welchem (S. 858) der Brief an Constantinus höchst wahrscheinlich geschrieben ist. Seit einigen Jahrfünfen, sagt Gerbert, habe er weder das Buch in Händen noch irgend Übung gehabt, und der letzte Teil dieses Satzes bezieht sich zuverlässig nicht auf Übung im Rechnen, sondern im Rechenunterrichte, denn das ist es, was Constantinus von ihm verlangte. Ein Buch zum Rechenunterrichte war es also auch, welches als seit vielen Jahren vermißt bezeichnet ist. Damals, als Gerbert noch in Rheims lehrte, ja da hatte er das Buch, damals ließ er auch die Vorschriften sich aber- und abermals von den Schülern hersagen, sagte er sie ihnen vor, stets dieselben Ausdrücke gebrauchend, und nur dadurch wird es ihm möglich, auch jetzt noch teils mit denselben Worten wie damals teils dem Sinne nach das Gleiche aus dem Gedächtnisse wieder herzustellen. Und so sind wir nun zu der letzten Frage gelangt: Was für ein Buch war es denn, von welchem Gerbert redet? Man hat vermutet, die „Regel" sei damit gemeint. Wir haben die Gegengründe entwickelt, welche uns gegen diese Vermutung einnehmen. Sollten sie als entscheidend angesehen werden, dann muß es freilich ein anderes Buch gewesen sein, überhaupt kein von Gerbert selbst verfaßtes, für welches er auch wohl eine andere Bezeichnung gehabt hätte, als kurzweg das Buch, *librum*. Auch das Buch des weisen Josephs des Spaniers kann es nicht wohl gewesen sein, da dieses im

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) *Epistola* 11: *Gerbertus quondam scolasticus Ayrardo suo salutem* (pag. 7). *Epistola* 17: *Hugoni suo Gerbertus quondam scolasticus* (pag. 10). *Epistola* 142: *Gerbertus scolaris abbas Remigio monaco Treverensi* (pag. 78).

Jahre 984, wie wir sahen (S. 856), von Rheims aus gesucht wurde. Aber über diese negative Bestimmung, welches Buch es nicht war, das Gerbert vermißte, kommen wir freilich nicht hinaus. Die „Regel" ist sodann von Gerbert als Papst — wie der Ausspruch des Bernelinus gleichfalls verstanden werden kann — verfaßt worden, erst nachdem das Büchlein für Constantinus aus dem Gedächtnisse zusammengeschrieben war. Gerbert, nehmen wir an, beabsichtigte, nachdem er den Gegenstand sich wieder vollständig gegenwärtig gebracht hatte, ihn endgültig und in genügender Klarheit für jeden Leser abzuschließen. Doch gleichviel. Diese kleinen Meinungsverschiedenheiten sind im Grunde sehr geringfügig gegenüber der Aufgabe, die uns bleibt: zu zeigen, welche Bedeutung Gerberts Lehren von Anfang an besessen und mehr und mehr gewonnen haben.

Die realistischen Studien[1]) waren mehr und mehr aus den Klöstern verschwunden, in welchen sie unter Alcuins unmittelbarem und mittelbarem Einflusse ein, wie es schien, ewiges Bürgerrecht sich erworben hatten. Nur ganz vereinzelt waren noch Mönche zu finden, welche weltliches Wissen besaßen oder nach solchem strebten. Büchersammlungen von mehr als 15 oder 20 Bänden gab es nur in den wenigsten Klöstern. Die Bücher selbst waren ihrer Seltenheit wegen einzeln an Kettchen befestigt. Der Abt hatte nicht einmal das Recht sie nach auswärts zu verleihen, außer nach bestimmten anderen Klöstern, welche einen Mitbesitz an den Büchern genossen. Nun trat Gerbert auf. Er gab dem Unterrichte zu Rheims, wo die Erinnerung an Remigius, der einst jene Schule zu Ansehen brachte, fast verloren gegangen war, ein neues Leben. Er lehrte freilich nicht wesentlich Neues, aber er lehrte es mit neuem Erfolge, und der Erfolg wuchs noch mit der Zunahme der persönlichen Bedeutung des Lehrers. Gerbert hatte allen Anfeindungen zum Trotze die höchste Stufe kirchlicher Würden erstiegen. Er war ein Papst an Sittenreinheit einzig dastehend unter den Päpsten seines Jahrhunderts, welche in wüster Sinnlichkeit dem heiligen Charakter ihrer Stellung Hohn boten, so daß ihr Regiment mit Recht als eine Pornokratie hat verunglimpft werden können. Ganz natürlich, daß jetzt die Gerbertsche Schule an Ansehen gewann. Der Glanz des Lehrers strahlte auf seine früheren Zöglinge zurück, gab ihnen selbst eine höhere Weihe. So würde es unzweifelhaft, wenn vielleicht auch nur mit kurz andauerndem Erfolge, gewesen sein, wenn die Lehren Gerberts weniger klar, weniger nützlich, weniger vortrefflich gewesen

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris): *Vie de Gerbert* pag. XXIV—XXXIII ist eine sehr hübsche Übersicht über den Geisteszustand der Zeit.

wären. Um wieviel mächtiger mußte die Wirkung sein, wo der innere Wert dem äußeren Rufe gleich kam, wo unter päpstlicher Fahne zur Modesache wurde, was verdiente keiner Mode unterworfen zu sein. Jetzt regte es sich wie auf ein gegebenes Zeichen aller Orten. Die Bibliotheken wurden wieder zahlreicher. Neue Abschreiber vervielfältigten die selten gewordenen Schriften. Der Unterricht, und was für uns allein in Betracht kommt, auch der mathematische Unterricht nahm an Umfang zu.

Gerberts Geometrie scheint freilich trotz oder vielleicht wegen ihrer verhältnismäßig höheren wissenschaftlichen Bedeutung eine rechte Wirkung nicht erzielt zu haben. Die geometrische Unwissenheit war, wie wir mehrfach hervorgehoben haben, bei Römern und folglich auch bei Schülern der Römer eine noch dichtere als die arithmetische. Der Boden war in diesem Gebiete noch weniger zubereitet fruchtbaren Samen aufzunehmen. Was wir wenigstens von mönchischen Versuchen in der Geometrie vor Gerbert kennen, beschränkt sich auf eine Zeichnung[1]), welche ein Schreiber des X. oder XI. S. einem Auszuge aus der Naturgeschichte des Plinius beifügte, und in welcher man eine graphische Darstellung unter Zugrundelegung des Koordinatengedankens erkannt hat. Wir stellen nicht in Abrede, daß hier der Anfang zu einer Betrachtungsweise vorhanden ist, die am Ende des XIV. S. an Wichtigkeit und Verbreitung gewann und das Wort latitudines, welches Plinius noch als Breite braucht, mit dem Sinne der Abszissen begabte, aber in der Zeit, in welcher jene Figur entstand, fällt es uns schwer an das Bewußtsein ihrer Tragweite zu glauben. Auch von Nachfolgern Gerberts in geometrischen Untersuchungen ist so wenig bekannt, daß wir es füglich hier anschließen können. Da ist zunächst von Briefen zu reden, deren Schreiber teils wenig bekannt teils unbekannt sind, aber alle der ersten Hälfte des XI. S. angehören. Da überdies sämtliche zehn Briefe sich handschriftlich in Paris und nur in Paris erhalten haben, so war es durchaus gerechtfertigt, sie gemeinschaftlich dem Drucke zu übergeben[2]). Zuerst sind 8 zwischen Radulf von Lüttich und Regimbold von Cöln gewechselte Briefe zum Abdruck gebracht. Dann folgt ein weiterer Brief an Regimbold, dessen Schreiber sich als Mönch B. bezeichnet, eine Bezeichnung welche vollständiger Namenlosigkeit gleichkommt. Das letzte Stück der Sammlung führt einzig

[1]) S. Günther, Die Anfänge und Entwicklungsstadien des Coordinatenprincipes in den Abhandlungen der naturf. Gesellsch. zu Nürnberg VI. Separatabdruck S. 20 flgg. und 48—49. [2]) *Une correspondance d'écolâtres du XI. Siècle publiée par* M. Paul Tannery et M. l'abbé Clerval in den *Notices et extraits* XXXVI, 487—543. Paris 1900.

den Titel *De Quadratura Circuli*. Radulf von Lüttich wird gemeinsam mit Regimbold von Cöln als Mathematiker aus der unmittelbar auf Gerbert folgenden Zeit gerühmt[1]), allein diese Erwähnung ist durch keinerlei Beziehung auf ältere Schriftsteller gestützt und darum unverwertbar. Der einzige Zeuge, welchen man anrufen könnte ist Adelmann, der in seinen Versen auf berühmte Zeitgenossen Regimbold von Cöln nennt und von ihm sagt, er habe sich lange in Lüttich aufgehalten[2]). Alles, was wir sonst wissen, stammt aus dem Briefwechsel selbst. Regimbold hat bei vorübergehendem Besuche in Chartres dort mit dem berühmten Bischof Fulbert verkehrt[3]) und erwähnt diesen Besuch mit der Bitte Radulf möge bei Fulbert eine Erkundigung einziehen. Fulberts Todestag war der 10. April 1028, also ist der Brief vor diesem Tage geschrieben. Regimbold nennt ferner den Bischof Adelbold von Utrecht[4]), und dieser gelangte 1010 zu der ihm beigelegten Würde, also ist der Brief nach 1010 geschrieben. Mehr aber, als daß der Briefwechsel der Zeit zwischen 1010 und 1028 angehört, läßt sich nicht behaupten. Es ist ja ganz interessant, daß Regimbold sagt, er lehre seit mehr als 20 Jahren[5]), er werde nächstens nach Rom reisen[6]), daß von Wazo in einer Weise die Rede ist, als wäre er Regimbolds Lehrer gewesen[7]), aber zur genaueren Datierung der Briefe dienen diese Tatsachen keineswegs. Der Briefwechsel selbst geht davon aus, Boethius habe in seinen Erläuterungen zu den Kategorien des Aristoteles gesagt: *scimus triangulum habere tres interiores angulos equos duobus rectis*[8]). Diese Behauptung wird nach verschiedenen Richtungen besprochen. Radulf hält den Satz von der Winkelsumme eines Beweises wert und sucht ihn für das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck zu liefern, indem er die Diagonale eines Quadrates zieht. Bei dieser Gelegenheit bemerkt er, das Quadrat über der Diagonale sei das Doppelte des ursprünglichen Quadrates und die Diagonale selbst sei $\frac{7}{5}$ der Quadratseite[9]). Regimbold dagegen entnimmt dem *Geometricum* des Boethius die Diagonale sei $\frac{17}{12}$ der Quadratseite[10]). Der Herausgeber des Briefwechsels hat mit Recht hervorgehoben,

[1]) Karl Werner, Gerbert von Aurillac, die Kirche und Wissenschaft seiner Zeit S. 77 (Wien 1878). [2]) *Correspondance d'écolâtres* pag. 522 lin. 14. [3]) Ebenda pag. 532 lin. 22—23. [4]) Ebenda pag. 522 lin. 13 *Trajectensem Episcopum Adelboldum.* [5]) Ebenda pag. 529 lin. 24. [6]) Ebenda pag. 532 lin. 4. [7]) Ebenda pag. 522 lin. 14 und pag. 531 lin. 8. [8]) Ebenda pag. 518 lin. 12. [9]) Ebenda pag. 515 lin. 24 *superbipartiens quintas.* [10]) Ebenda pag. 525 lin. 2—4 *In Geometrico dicit Boethius: Omne diagonium equilateri quadrati habet ipsum latus in se et eius quincuncem.*

diese Regel oder $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ finde sich in keiner dem Boethius zugeschriebenen Geometrie, auch nicht in der gefälschten, sie sei dagegen im 66. Kapitel von Gerberts Geometrie, also in deren dritten Abteilung vorgetragen (S. 867). Es leuchtet ein, daß hieraus nur eine einzige Folgerung gezogen werden darf, diejenige daß im ersten Viertel des XI. S. in Cöln eine Geometrie des Boethius bekannt war, welche nicht mit irgend einer von den Handschriften übereinstimmte, die heute mit Recht oder Unrecht Boethius zugeschrieben werden. Regimbold wendet nun die Regel, daß die Hypotenuse des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks $\frac{17}{12}$ seiner Kathete sein muß, weiter an, um aus dem gegebenen Umfange die einzelnen Seiten zu finden. Diese Rechnung ist dadurch besonders merkwürdig, daß Regimbold sich nicht, wie Radulf es tut, mit den römischen Duodezimalbrüchen begnügt um die Seitenlängen annähernd zu berechnen, sondern daß er den Bruch $\frac{17}{246}$ anwendet[1]). Einen weiteren Gegenstand des Briefwechsels bilden die Ausdrücke *pedes recti, quadrati, crassi*, deren Bedeutung Radulf entfallen war, bis Regimbold sie ihm als Längen, Flächen und Körpermaße in Erinnerung bringt. Da fällt es Radulf ein, daß er in Chartres die Erklärung aus dem Albinus kennen gelernt habe, und er benutzt die Gelegenheit um Regimbold dreist zu bitten, ihm den Albinus oder, wenn der nicht vorhanden sein sollte, den sogenannten Podismus zuzuschicken[2]). Ob Albinus irgend ein Werk Alcuins war, ob der Podismus einen Auszug aus römischen Feldmessern bezeichnete, wenn nicht Gerberts Geometrie, darüber ist nichts bekannt, und ebenso verhält es sich mit einer von Regimbold angerufenen Regel der Divisionen und der Brüche, welche vorschreibe, wenn der Divisor den Dividendus übersteige, solle man den Dividendus als Rest bezeichnen oder zur intellektualen Division seine Zuflucht nehmen[3]). Der letztere Ausdruck bedeutet offenbar einen gewöhnlichen Bruch wie das vorerwähnte $\frac{17}{246}$. Fast noch mehr Interesse als an den auf Rechnung bezüglichen Fragen hatten aber Radulf sowohl als Regimbold daran, was Boethius wohl unter inneren und unter äußeren Dreieckswinkeln verstanden habe. Wir erinnern uns, daß im 9. Kapitel der Gerbertschen Geometrie (S. 861) die gleiche Frage dahin beantwortet wurde, der spitze Winkel sei ein innerer, der

[1]) *Correspondance d'écolâtres* pag. 526 lin. 3 *X et VII ducentesimas quadragesimas sextas siliquas.* [2]) Ebenda pag. 531 lin. 15—20. [3]) Ebenda pag. 518 lin. 21—24.

stumpfe ein äußerer, bei jenem liege der mit der Grundlinie den spitzen Winkel bildende Schenkel im Inneren eines rechten Winkels, bei diesem befinde sich der den stumpfen Winkel bildende Schenkel außerhalb des rechten Winkels. Genau die gleiche Meinung besitzt Regimbold[1]). Auch Fulbert setzte den inneren und spitzen, den äußeren und stumpfen Winkel einander gleich, aber mit anderer Begründung: bei dem spitzwinkligen Dreiecke falle die Senkrechte von der Dreiecksspitze auf die Grundlinie in das Innere des Dreiecks, bei dem stumpfwinkligen Dreiecke falle sie außerhalb[2]). Radulf endlich meint, von inneren Winkeln rede man in der Ebene, von äußeren im Raume[3]). Im Laufe des Briefwechsels erscheinen noch andere Deutungsversuche, auf welche wir einzugehen verzichten.

Ob der Mönch B. von dem Briefwechsel zwischen Regimbold und Radulf Kenntnis hatte, läßt sich weder behaupten noch leugnen. Jedenfalls beginnt er seinen Brief an Regimbold mit der Verdoppelung des Quadrates, von der er behauptet sie sei durch Messung möglich, in Zahlen unmöglich[4]). Man solle die Diagonale des kleineren Quadrates, welche $\frac{17}{12}$ von deren Seite sei, als Seite des größeren Quadrates benutzen. Wir fassen die bei uns gesperrt gedruckte Behauptung so auf, daß B. das Bewußtsein hatte $\sqrt{2}$ könne durch Rechnung niemals genau, sondern nur annähernd, etwa in der Größe $\frac{17}{12}$ gefunden werden, während die Konstruktion des doppelten Quadrates mittels der Diagonale des einfachen Quadrates vollziehbar sei. Als zweite Aufgabe gilt für B. die Quadratur des Kreises. Auch auf sie verweist eine Stelle aus den Erläuterungen des Boethius zu den aristotelischen Kategorien. Aristoteles hatte die Kreisquadratur als möglich aber als unbekannt bezeichnet. Boethius hatte dazu bemerkt[5]), jene Unbekanntschaft gelte nur für die Zeit des Aristoteles, später habe man den Kreis quadrieren lernen. Ob Boethius das archimedische $\pi = \frac{22}{7}$ für genau richtig hielt, ob er, wie vermutet worden ist[6]), an eine Quadratur mittels eigens dazu erfundener Kurven, wie die Quadratrix, dachte, ist wohl nicht zu entscheiden. Jedenfalls rechnet B. mit der archimedischen Zahl, wenn er den Durchmesser 7, den Kreisumfang 22 wählt und $\frac{7}{2}$ mal $\frac{22}{2}$ als Kreisfläche findet; das sei die alte Regel für den Kreis in den geometrischen Schriften[7]).

[1]) *Correspondance d'écolâtres* pag. 526 lin. 16—27. [2]) Ebenda pag. 532 lin. 27—28. [3]) Ebenda pag. 520 lin. 14—15. [4]) Ebenda pag. 533 lin. 13—14: *et hoc in mensura, in numeris nunquam.* [5]) Ebenda pag. 534. [6]) Ebenda pag. 508 in der Einleitung Tannerys. [7]) Ebenda pag. 534 letzte Zeile: *Hacc in Geometricis vetusta circuli habetur regula.*

Welche Schriften B. hier meint, ob vielleicht die *Geometrica* das gleiche bedeuten, was bei Regimbold *Geometricum Boethii* heißt[1]), darüber kann man nicht entscheiden, nur so viel scheint aus dem Wortlaute hervorzugehen, daß B. von einer ganz bestimmten, Regimbold, an den sein Brief gerichtet ist, wie ihm bekannten älteren Schrift redet. Als Seite des $\frac{154}{4} = 38,5$ großen Quadrates[2]) bezeichnet B. die Länge $6 + \frac{1}{5} + \frac{1}{200} = 6,205$. Als weniger beschwerliche Quadratur des Kreises könne man sich damit begnügen $\frac{5}{4}$ des Durchmessers als Diagonale des Quadrates zu benutzen[3]). Augenscheinlich entspricht diese Vorschrift dem Werte $\pi = 3\frac{1}{8}$.

Das letzte anonyme Stück der im Druck vereinigten Sammlung heißt *De Quadratura Circuli*[4]). Diese kleine Schrift lehrt verschiedene Quadraturen kennen, unter welchen wir nur die erste hervorheben, welche $\frac{8}{9}$ des Kreisdurchmessers als Quadratseite wählt, d. h. $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ setzt, wie es im Rechenbuche des Ahmes der Fall war. Da kein einziges Vorkommen dieses Wertes in den fast 3000 Jahren, um welche Ahmes von der anonymen Schrift absteht, bekannt ist, so dürfte nach unserem heutigen Wissen eine Abhängigkeit ausgeschlossen sein, man wird vielmehr an eine selbständige Nacherfindung zu denken haben[5]). Der Anonymus spricht nach der Quadratur des Kreises auch noch von äußeren und inneren Winkeln, welche er wie Regimbold als stumpfe und spitze Winkel deutet, und von der Winkelsumme eines gleichseitigen Dreiecks, welches er zu einem doppelt so großen Rechtecke vervollständigt, dadurch an Radulfs Beweisführung bei dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke erinnernd.

Nächst den in der beschriebenen Sammlung vereinigten Stücken haben wir ein von Franco von Lüttich verfaßtes Werk in 6 Büchern über die Quadratur des Kreises[6]) zu nennen. Eine Chronik[7]) berichtet, die Schrift über die Quadratur des Kreises sei dem Erzbischof Hermann gewidmet, und da Hermann II., der allein in Frage steht, von 1036 bis 1055 Erzbischof von Cöln war, so würde dadurch die Entstehungszeit jener Schrift in sehr enge Grenzen eingeschlossen. Die in Rom erhaltene Handschrift nennt den Namen des Erzbischofs, dem das Werk zugeeignet ist, nicht, und so erscheint jene Angabe immerhin zweifelhaft. In der Vorrede sagt Franco, die Kenntnis der Kreisquadratur von Aristoteles ausgehend habe sich, wie man behaupte, unzweifelhaft bis zu Boethius erhalten[1]), dann sei alles so sehr verloren gegangen, daß alle Gelehrten von Italien, von Frankreich und von Deutschland hierin Fehler machten. Unter denen, welche sich vergebliche Mühe gaben, sei Adelbold gewesen, dann Wazo, der größte der Gelehrten[2]) und Gerbert, der Wiederhersteller der Wissenschaft. An anderen Stellen wird auf Gerbert, auf Regimbold und Racechin[3]) Bezug genommen. Auch der Arbeiten des Boethius über Kreisquadratur wird wiederholt gedacht[4]), an deren Vorhandensein also damals kein Zweifel obwaltete. Wir wissen, daß die Erläuterungen des Boethius zu den aristotelischen Kategorien damit gemeint sind. Franco zeigt sich in der ganzen Schrift als gewandten Rechner, dem namentlich die Anwendung von Brüchen — die durchweg römische Duodezimalbrüche sind — keine Schwierigkeit bereitet. Sein geometrisches Wissen dagegen ist so gering, daß nicht einmal die Kenntnis des pythagoräischen Lehrsatzes bei ihm anzunehmen ist. Die geschichtliche Ausbeute ist dem entsprechend eine hauptsächlich arithmetische. Wir erfahren, daß Regimbold $\sqrt{2}$ durch $\frac{17}{12}$ ersetzte[5]), was wir aus Regimbolds Briefen schon wissen, ein Wert, den (S. 436) Theon von Smyrna kannte, den (S. 640) wahrscheinlich auch Inder benutzten. Wir hören[6]), daß die Kreisfläche bald als Quadrat von $\frac{7}{8}$ des Durchmessers, bald als Quadrat des vierten Teils der Peripherie betrachtet wurde. Beide Verfahren sind uns bekannt, jenes aus Indien (S. 641), dieses aus spätrömischen Feldmessern (S. 591). Ferner hält Franco selbst[7]) $\frac{9}{10}$ des Durchmessers für die Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrates, rechnet also mit

$$\pi = \left(\frac{9}{5}\right)^2 = 3,24.$$

Daß die Kreisfläche des Kreises vom Durchmesser 14 durch die Zahl 154 dargestellt werde, zeigt Franco[8]), indem er den Umfang,

[1]) *Correspondance d'écolâtres* pag. 525 lin. 2. [2]) Ebenda pag. 535 lin. 1—2. [3]) Ebenda pag. 536 lin. 21—24. [4]) Ebenda pag. 536—538. [5]) Ebenda pag. 512 lin. 6—11 in Tannerys Einleitung. [6]) Ang. Mai, *Classici autores e vaticanis codicibus editi* III, 346—348. Roma 1831, veröffentlichte Bruchstücke davon. Dr. Winterberg gab das ganze Werk heraus. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik IV, 137—183 (1882). Im Anschluß ist S. 183—190 noch eine zweite nicht von Franco herrührende kleinere Schrift über die Quadratur des Kreises zum Abdrucke gebracht. Wir zitieren Franco mit der betreffenden Seitenzahl. [7]) Sigebert Gembl. Chron. ad ann. 1047 bei Pertz Mon. VIII, 359. Vgl. Prantl, Geschichte der Logik im Abendlande II, 68, Anmerkung 278.

[1]) *Eius itaque scientiam haud dubium ferunt usque ad Boetium perdurasse.* Franco 143. [2]) Wazo starb 1048 als Bischof von Lüttich. [3]) Franco 158 und häufiger. [4]) Ebenda 166, 184. [5]) Ebenda 158. [6]) Ebenda 145. [7]) Ebenda 187. [8]) Ebenda 152.

welcher die Länge 44 habe, in 44 gleiche Teile zerlegt und jeden Endpunkt eines Teiles mit dem Kreismittelpunkt verbindet. So entstehen 44 Dreiecke, welche paarweise in entgegengesetzter Richtung aneinander gelegt je ein Rechteck, im ganzen deren 22 liefern mit den Seitenzahlen 1 und 7. Auch diese Beweisführung erinnert so sehr an die des Inders Gaṇeça (S. 656), daß man versucht wird, nach einer beiden gemeinschaftlichen Quelle zu fahnden. Wir wollen endlich noch bemerken, daß Franco von den Streitigkeiten über die Bedeutung eines äußeren und eines inneren Winkels weiß[1]) und sich dahin entscheidet, ein äußerer Winkel sei ein solcher der außerhalb der betreffenden Figur liege.

Hier ist der Ort einzuschalten, was wir von der gefälschten Geometrie des Boethius wissen. Es ist blutwenig. Die Erlanger Handschrift gehört dem XII. S. an. Damals spätestens ist also das ungemein geschickt gemachte Schriftstück verfaßt worden. Es war dadurch vorbereitet, daß ältere Handschriften zwar keineswegs gleichen Inhalts, aber fast gleichen Titels vorhanden waren, deren einige bis auf den heutigen Tag erhalten sind. Damit stehen wir am Ende unseres Wissens. Wer der Fälscher war, und — eine Frage, die sich aufdrängen muß — was er mit seiner Fälschung beabsichtigte, das hat noch niemand erörtert, noch niemand zu erörtern gesucht. Überlassen wir es anderen Forschern hier Vermutungen aufzustellen. Wir verlassen die Geometrie der Zeit vor dem Schlusse des XII. S. und kehren zu der (S. 871) unterbrochenen Geschichte der Rechenkunst zurück.

Das Kolumnenrechnen fand mit Gerberts wachsendem Ansehen allgemeine Verbreitung. Wir dürfen uns mit der so allgemeinen Behauptung nicht begnügen, wir müssen ihr näher treten. Sie wird uns die Gelegenheit geben, die Männer zu nennen, welche aus Gerberts Schule hervorgegangen jene Verbreitung vollzogen, wird uns zugleich Gelegenheit geben, zu sehen, wie seit 1100 etwa, seit dem Beginn der Kreuzzüge, wirklich Arabisches in das Abendland eindrang, wie ein eigentümlicher Kampf um das Dasein zwischen der alten und neuen Rechenkunst sich entspann, zwischen dem Kolumnenrechnen und dem Zifferrechnen, deren jedes seine Vertreter besaß. Man hat sich daran gewöhnt, diese Vertreter als Abacisten und Algorithmiker zu bezeichnen, und unter diesen Sammelnamen wollen wir sie kennen lernen.

[1]) Franco 143—144.

40. Kapitel.

Abacisten und Algorithmiker.

Bei den Versuchen den Abacus mit den eigentümlichen Zeichen, die wir Apices nennen, nach aufwärts zu verfolgen, ist in früheren Werken stets von einer rätselhaften Handschrift der Kapitularbibliothek von Ivrea die Rede gewesen[1]), welche nach der Ansicht eines im allgemeinen zuverlässigen Handschriftenkenners von einer Hand des X. S. herrührte oder gar, wie eine nachgelassene Notiz desselben Gelehrten meinte, am Hofe Karls des Großen geschrieben ward[2]). Es sei eine Anweisung zum Dividieren in arabischen Ziffern. Alle diese Angaben sind nun freilich wesentlichen Abänderungen zu unterwerfen. Genaue wiederholte Untersuchung der Handschrift[3]) hat ergeben, daß sie erst dem XI. S. angehört, mithin in die Zeit fällt, welche wir in diesem Kapitel[4]) zu besprechen haben, in die Zeit nach Gerbert, wenn auch vielleicht nicht viel später als er. Der Inhalt ist ein eigentümlicher.

Zuerst ist als Aufgabe gestellt, 1111111537 durch 809 zu dividieren, wobei der Quotient 1373438 erscheint und 195 übrig bleibt. Aufgabe und Auflösung sind teils in Worten, teils in römischen Zahlzeichen geschrieben. Dann folgen 19 Hexameter, welche auf das Rechnen auf dem Abacus sich beziehen, welche aber vollständig zu verstehen uns nicht gelungen ist. Hieran schließt sich die Wiederholung der Aufgabe und ihre Auflösung im Kolumnensysteme geschrieben, aber ohne daß senkrechte Striche die einzelnen Rangordnungen trennten. Zwölf Kopfzahlen genügen den Abacus anzudeuten. Über ihnen steht der Dividend, unter ihnen der Divisor, unter diesem der Rest, unter diesem wieder der Quotient, sämtlich in richtiger Ordnung, so daß also bei Niederschreibung des Divisors 809 unter der Kopfzahl der Zehner ein freier Raum blieb. Die Kopfzahlen des 12reihigen Abacus sind durch römische Zahlzeichen angegeben, die sämtlichen anderen Zahlen durch Apices. Endlich folgt wieder nur in Worten und ohne durch irgend ein Beispiel

[1]) Friedlein, Gerbert, die Geometrie des Boetius und die indischen Ziffern. Erlangen 1861, S. 41, Anmerkung 20 hat zuerst die Mathematiker auf diese Handschrift aufmerksam gemacht. [2]) Bethmann im Archiv der Gesellschaft für ältere deutsche Geschichtskunde, herausgegeben von Pertz IX, 623 und XII, 594. [3]) Reifferscheid in den Sitzungsberichten der philosoph.-histor. Klasse der k. Akademie der Wissenschaften. Wien 1871. Bd. 68, S. 587—589 die Beschreibung des Codex LXXXIV, die dem XI. S. angehöre. Dann „f. 87. 88 Allerlei von späteren Händen“. [4]) Unsere Angaben beruhen auf einem Faksimile, welches Fürst Bald. Boncompagni die große Güte hatte, für uns in Ivrea durchpausen zu lassen.

Unterstützung zu finden die Vorschrift, wie man bei der Division durch einen aus Hundertern, Zehnern und Einern bestehenden ununterbrochen dreiziffrigen Divisor — *tres sint divisores nullo interposito* — verfahren solle in offenbarer Anlehnung an die „Regel" Gerberts. Alles zusammen füllt nur eine einzige Seite und dürfte, wenn auch nicht so alt wie die einen hofften, die anderen fürchteten, doch einiges Interesse nicht entbehren, so daß ein vollständiger richtiger Abdruck des kurzen Stückes immerhin wünschenswert erscheint.

Ein Schüler Gerberts war vielleicht Bernelinus, der in Paris ein durch den Druck veröffentlichtes Buch über den Abacus geschrieben hat[1]). Bernelinus beruft sich (S. 867) auf die Regel des Papstes Gerbert, die freilich nur für die Weisesten geschrieben sei, und darauf, daß sein Freund Amelius, auf dessen Andrängen er sein Werk verfasse, es verweigerte, an die Lothringer sich zu wenden, bei welchen diese Lehren in höchster Blüte ständen. Nur diese beiden Erwägungen vereinigt hätten ihn zum Schriftsteller gemacht. Er beginnt sodann mit der Schilderung des Abacus und zeigt darin seine Selbständigkeit, denn Gerbert selbst hat weder in der Regel, wenn die (S. 867) als solche bezeichnete Schrift wirklich von ihm herrührt, noch in der Abhandlung für Constantinus eine solche Schilderung an die Spitze zu stellen für nötig gehalten, ein Umstand, welchen wir uns nur so erklären können, daß Gerbert den Abacus nicht als etwas Neues oder Schwieriges betrachtete, sondern als ein alt- und allbekanntes Hilfsmittel, während die Divisionsregeln allerdings wenig bekannt gewesen sein müssen. Der Abacus war, nach Bernelinus, eine vorher nach allen Seiten sorgsam geglättete Tafel und pflegte von den Geometern mit blauem Sande bestreut zu werden, auf welchen sie auch die Figuren der Geometrie zeichneten. Bis zur Höhe der eigentlichen Geometrie wolle er sich aber nicht erheben, er bemerke nur, daß zu rechnerischen Zwecken die Tafel in 30 Kolumnen abgeteilt werde, von welchen 3 für die Brüche aufzubewahren, die übrigen 27 nach Gruppen von je 3 zu bezeichnen seien. Die erste Kolumne wird nämlich durch einen kleinen Halbkreis abgeschlossen, die zweite und dritte zusammen durch einen größeren, alle drei gemeinsam durch einen noch größeren. Bernelinus sagt zwar nicht Kolumnen, sondern Linien, *lineas*, aber er meint es so, wie wir es ausgesprochen haben, da ja ein Abschluß von einer, von zwei, von drei Linien durch an Größe verschiedene Halbkreise nicht gedacht werden kann, sondern nur von Kolumnen. In jeder Dreizahl von Kolumnen, deren es unendlich viele geben kann, ist eine Kolumne der Einer, eine der

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 357—400 *Liber Abaci.* Die Anfangsworte lauten: *Incipit praefatio libri abaci quem iunior Bernelinus edidit Parisiis.*

Zehner und eine der Hunderter zu unterscheiden, welche der Reihe nach mit *S* und *M*, mit *D*, mit *C* bezeichnet werden sollen. *C* sei nämlich Anfangsbuchstabe von *centum*, *D* von *decem*, *M* von *monas* — Bernelinus schreibt dafür fälschlich *monos* — oder von *mille*, *S* endlich von *singularis*. In den Zahlzeichen spiegele die Gruppierung nach drei Kolumnen sich gleichfalls ab, da ein Horizontalstrich, *titulus*, über dem I, dem X, dem C dieselben vertausendfache. Der Beschreibung der Kopfzahlen, welche über sämtliche Kolumnen sich fortsetzen und mit den Bezeichnungen der in jeder Dreizahl unterschiedenen Rangordnungen nicht zu verwechseln sind, läßt sodann Bernelinus die Schilderung und Abbildung der neun Zahlzeichen folgen. Es sind die Apices, welche hier auftreten, wenn uns dieses Wort ein für allemal die betreffenden Zeichen vertreten soll, von denen schon soviel die Rede war. Außerdem könne man sich auch griechischer Buchstaben bedienen, und hier enthüllt Bernelinus wiederholt, wie vorher durch Anwendung des ungriechischen monos, eine mangelhafte Kenntnis dieser Sprache. Die Zahl 6 läßt er nämlich durch Σ bezeichnen, während bekanntlich ϛ das richtige Zeichen wäre. — Das Einmaleins schließt sich an, bei welchem eine zunächst sehr auffallende Lücke sich darbietet: die Produkte gleicher Faktoren, also 1 mal 1, 2 mal 2, 3 mal 3 bis 9 mal 9 fehlen, warum? ist nicht gesagt. Wir können nur einen Grund vermuten, darin bestehend, daß die Quadrierung einziffriger Zahlen, und nur um diese handelt es sich, in dem Grade eine Ausnahmerolle spielte, als die sogenannte regula Nicomachi (S. 433) zur Ausführung derselben allgemeiner bekannt war, als irgend andere Regeln. Daß freilich jene Regel besonders erwähnt werde, muß man aus unserer fast zaghaft ausgesprochenen Meinung nicht schließen wollen. Bei der Multiplikation der einzelnen Rangeinheiten bedient sich Bernelinus der Wörter Finger- und Gelenkzahl. Eine Erklärung würde man auch hier vergebens suchen, doch steht dabei die Veranlassung auf festerem Boden. Wir wissen durch Beispiele aus den verschiedensten Zeiten, daß jene Wörter so bekannt waren, daß jede Erläuterung überflüssig erscheinen mußte. Als Ende des ersten Abschnittes, der also bis zur Multiplikation einschließlich sich erstreckt, ist die Ausrechnung von 12^2, von 12^3, von 12^4, von 12^5, von

$$12 + 12^2 + 12^3 + 12^4 + 12^5$$

zu betrachten, wobei wir vielleicht in Erinnerung bringen dürfen, daß 12 die Grundzahl des römischen Bruchsystems ist.

Der zweite Abschnitt handelt von der einfachen Division, d. h. von denjenigen Teilungen, bei welchen der Divisor ein Einer oder ein einfacher Zehner ist. Drei Fälle sind dabei unterschieden, der erste, wenn der Divisor der Reihe nach in allen Stellen des Dividendus enthalten ist und nur bei den Einern allenfalls ein Rest bleibt, wie z. B. 668 geteilt durch 6; der zweite, wenn Reste auch bei früheren Stellen bleiben, beziehungsweise wenn der Divisor einen höheren Wert hat als einzelne Stellen des Dividendus, so daß zwei Stellen des Dividendus zur Vornahme der Teilung gemeinsam betrachtet werden müssen, wie z. B. 888 geteilt durch 5 oder 333 geteilt durch 6; endlich der letzte Fall, wenn der Divisor ein Zehner ist, z. B. 1098 geteilt durch 20. Die Divisionen können dabei mit oder ohne Differenz, d. h. als komplementäre Division oder gewöhnlich vollzogen werden. Auf dem Abacus werden dabei vier Horizontallinien gezogen, welche von oben nach unten die erste, zweite, dritte, vierte Zeile heißen mögen. Auf die erste Zeile schreibe man den Divisor, beziehungsweise bei der Division mit Differenz auch seine Ergänzung zu 10, oder im dritten Falle zu 100. Die zweite Zeile enthält den Dividendus, die dritte ebendenselben noch einmal geschrieben, die vierte den Quotienten. Die Zahl der zweiten Zeile bleibt im ganzen Beispiele unverändert. Die Zahlen der darunter folgenden Zeilen werden, wie es der Sand des Rechenbrettes leicht gestattet, fortwährend verändert. Die Division 668 : 6 sieht z. B., wenn das Auslöschen und Ersetzen von Ziffern durch Durchstreichen derselben bildlich dargestellt werden darf, folgendermaßen aus:

Division 668 : 6
mit Differenz

C	D	S
		6
		4
6	6	8
~~6~~	~~6~~	~~8~~
~~2~~	~~4~~	~~4~~
~~1~~	~~8~~	~~8~~
~~1~~	~~4~~	~~8~~
	~~2~~	2
	~~4~~	
	~~6~~	
	~~2~~	
	~~2~~	
	~~6~~	~~6~~
	~~2~~	~~2~~
	~~1~~	~~2~~
1	1	1

C	D	S
		6
6	6	8
~~6~~	~~6~~	~~8~~
		2
1	1	1

Division 668 : 6
ohne Differenz

Der Wortlaut der Rechnung ist bei der Division mit Differenz folgender: 10 in 600 geht **60** mal, aber 4 mal 60 oder 240 sind wieder beizufügen; 10 in 200 geht **20** mal, aber 4 mal 20 oder 80 sind wieder beizufügen, und nun schreiben wir statt 60 + 40 + 80 ihre Summe 180 und sagen weiter 10 in 100 geht **10** mal mit einer nötigen Ergänzung 4 mal 10 oder 40, welche mit 80 zusammen 120 liefert. Jetzt ist 10 in 100 wieder **10** mal enthalten, und die Ergänzung 4 mal 10 oder 40 gibt mit 20 zusammen 60. Man dividiert weiter 10 in 60 geht **6** mal, die Ergänzung ist 4 mal 6 oder 24. Mithin sagt man geht 10 in 20 weitere **2** mal mit der Ergänzung 4 mal 2 oder 8. In der einheitlichen Kolumne sind jetzt vorrätig 8 + 4 + 8 oder 20. Zehner sind wieder hergestellt und 10 in 20 geht **2** mal. Die Ergänzung 2 mal 4 oder 8 ist durch 10 nicht mehr teilbar, nur noch durch 6, wobei **1** als Quotient, 2 als Rest erscheint. Alle Quotiententeile vereinigt geben so den Gesamtquotient 60 + 20 + 10 + 10 + 6 + 2 + 2 + 1 = **111** nebst dem Reste **2**. Wir wollen nicht versäumen, hier gelegentlich auf die nicht unwichtige, wenn auch nur negative Tatsache hinzuweisen, daß die hier beschriebene Ordnung des Divisors, des zweimal angeschriebenen Dividenden, des Quotienten bei keinem Araber vorkommt.

Der dritte Abschnitt ist der zusammengesetzten Division gewidmet, welche auch wieder ohne Differenz oder mit Differenz ausgeführt wird. An neuen Gedanken ist hier so wenig zu gewinnen, als an neuen Ausführungsmethoden, es ist eben nur wieder die Unterscheidung in viele Fälle, wie sie dem Geübten, insbesondere dem mathematisch denkenden Geübten sehr überflüssig erscheint, wie sie aber dem Schüler eines ersten Rechenunterrichtes wünschenswert, ja unentbehrlich sich erweisen mag.

Ein vierter Abschnitt lehrt das Rechnen mit Brüchen, natürlich mit Duodezimalbrüchen der uns bekannten Art. „Lasse uns denn zu der Abhandlung über die Gewichtsteile und ihre Unterabteilungen kommen, und wundere Dich nicht, wenn darin Richtiges mir entging, denn die Unbequemlichkeit der Weinlese beschäftigt meine Seele mannigfaltig, auch habe ich als Muster kein Werk als das des Viktorius, und dieser ist bei dem Bestreben kurz zu sein, außerordentlich dunkel geworden“[1]). Wir haben diese Stelle ihrem Wortlaute nach eingeschaltet, um an ihr die Richtigkeit einer Bemerkung

[1]) *Nunc itaque ad unciarum minutiarumque tractatum veniamus, in quo si quid me veritas praeterierit minime mireris, cum et vindemiarum importunitate meus animus per diversa quaeque rapiatur, et nullius praeter Victorii opus habeam exemplar, qui, dum brevis studuit fieri, factus est obscurissimus.*

über den Calculus des Viktorius zu erweisen. Das Vorhandensein jenes Rechenknechtes (S. 531) kann nun und nimmermehr als Zeugnis dafür angerufen werden, daß der Zeit, in welcher er entstand, das Rechnen auf dem Abacus fremd gewesen sei. Wir finden hier in Bernelinus einen Mann, der dieses Rechnen selbst lehrt, der es mit einer Klarheit lehrt, welche die Darstellungen Gerberts übertrifft, und derselbe Bernelinus sieht in dem Calculus des Viktorius nichts weniger als einen überwundenen Standpunkt. Er findet ihn außerordentlich dunkel, also schwierig und verkennt nicht die Notwendigkeit mehr zu tun als nur hinzuschreiben, daß $\frac{1}{2}$ mal $\frac{1}{2}$ sich zu $\frac{1}{4}$ multiplizieren. Er erläutert vielmehr, man müsse den einen Bruch als Einheit betrachten, von welcher so viele Teile zu nehmen seien, als der andere ausspreche[1]), und erörtert dieses an verschiedenen Beispielen, darunter an solchen, bei welchen die nur begrenzt vorhandenen Duodezimalbrüche nicht gestatten anders als nur mittels eines gesprochenen Bruches zu verfahren, wie z. B. duella multipliziert in triens. Unter duella versteht man 8 scripulae, deren 24 auf eine uncia oder auf $\frac{1}{12}$ des as als Grundeinheit gehen; unter triens versteht man 4 Unzen. Wir würden also römische Gedankenfolge so viel als möglich uns aneignend sagen: $\frac{1}{36}$ sei mit $\frac{1}{3}$ zu vervielfachen und gebe $\frac{1}{108}$ oder $\frac{1}{9}$ von $\frac{1}{12}$, beziehungsweise $\frac{1}{9}$ Unze. Weil ferner die Unze 24 Skrupeln hat, so ist ihr $\frac{1}{9}$ so viel wie $\frac{24}{9} = 2\frac{2}{3}$ Skrupeln. Aber zwei Skrupeln heißen emisescla und so ist das Produkt eine emisescla und ihr Drittel. Auch Bernelinus kommt zu diesem Ergebnisse. Duella in trientem ducta fit emisescla et emisesclae tertia sagt Bernelinus. Die Rechnung, die ihn dahin führt, mündet darin, es sei $\frac{1}{3}$ der duella zu nehmen, aber gerade diese letzte Ausführung unterschlägt er. Das Bruchrechnen war in der Tat, wie an der kurzen Auseinandersetzung, die wir hier gaben, erkannt werden wird, ein schwieriges, wäre sogar für uns noch schwierig, wenn wir in derselben Gewohnheit befangen wären, die Brüche nicht durch Zähler und Nenner, sondern unter Anwendung von Namen auszusprechen, welche zwar dem Geübten beim Hören sogleich verständlich sind, aber zur Rechnung immer erst wieder in die Begriffe verwandelt werden müssen, mit welchen sie sich decken.

[1]) *Quaelibet unciarum vel minutiarum in quamcumque unciarum vel minutiarum fuerit ducta totam partem illius in qua ducitur quaerit, quota ipsa est assis.*

Ist es, fragen wir, denkbar, daß Gerbert für das ganzzahlige Rechnen, welches solchen erheblichen Schwierigkeiten nie ausgesetzt war, arabische Methoden sich angeeignet und in seiner Schule verbreitet hätte, daß er dagegen das weit anlockendere Rechnen mit Sexagesimalbrüchen vernachlässigt und weder selbst angewandt noch einem einzigen Schüler mitgeteilt hätte? Wir können unseren Unglauben damit begründen, daß die ersten Übersetzungen aus dem Arabischen sich sofort der Sexagesimalbrüche bemächtigten (S. 718), daß die ersten nachweislichen Bearbeitungen (S. 801) es ebenso machten.

Bernelinus lehrt in Anschluß an die Multiplikation der Brüche auch noch deren Division, welche er komplementär ausführt, indem er den Divisor zur nächsten ganzen Einheit ergänzt, und sodann den Quotienten jedesmal neu verbessert, nachdem die notwendige Richtigstellung der Teilreste eingetreten ist.

Wir haben nur eines noch unserer Darstellung hinzuzufügen, beziehungsweise zu verhüten, daß man ihr etwas entnehme. Bernelinus, sagten wir, bilde die neun Apices ab. Man darf daraus nicht schließen wollen, daß sie im weiteren Verlaufe der Schrift benutzt werden. Nur auf dem Abacus konnte ohne Null oder — wovon wir später auch ein Beispiel kennen lernen werden — ohne abwechselnde Verwendung von Apices und römischen Zahlzeichen ein regelmäßiger Gebrauch der Apices stattfinden. Bernelinus hat aber in seinem Werke nirgend einen Abacus gezeichnet, kann sich also in der einzig in Worte gefaßten Darstellung der Regeln und der Beispiele nur römischer Zahlzeichen bedienen. Wenn wir oben bei der Division den Abacus wirklich abbildeten, so haben wir uns damit eine Untreue der Berichterstattung zuschulden kommen lassen; wir haben zur größeren Deutlichkeit gezeichnet, was Bernelinus nur erklärt, dessen Nachahmung er seinen Lesern zumutet, ohne ihnen ein Muster vorzulegen.

Um die Zeit des Bernelinus hat auch Guido von Arezzo sich mit dem Abacus beschäftigt, der um 1028 eine Abhandlung über die Kunst der Rechnung auf der mit Sand bedeckten Tafel verfaßte[1]).

Erhalten hat sich ferner die Abhandlung über den Abacus von Hermannus Contractus[2]). Sie ist kurz und bündig, lehrt das

[1]) *Nouveau traité de Diplomatique par deux religieux de la congrégation de S. Maur T. IV, préface*, pag. VII. Paris 1759. [2]) Aus einem Karlsruher und einem Münchener Kodex veröffentlicht durch Treutlein im *Bullettino Boncompagni* X, 643—647 (1877).

Multiplizieren und Dividieren auf dem Abacus, dessen vier wagrechte Zeilen unterschieden werden, während von einer gruppenweisen Vereinigung der Kolumnen zu je dreien Abstand genommen ist, auch eine Beschränkung der Anzahl dieser Kolumnen nicht stattfindet, von denen vielmehr gesagt ist, daß sie, jede die vorhergehende um das Zehnfache übersteigend, in das Unendliche sich erstrecken[1]). Das Dividieren ist einfach oder zusammengesetzt und kann in beiden Fällen mit oder ohne Differenz vollzogen werden. Hermann hat, wie wir von Radulph von Laon, einem Schriftsteller des XII. S., der uns gleich nachher beschäftigen wird, erfahren, nächst Gerbert am meisten für die Verbreitung des Kolumnenrechnens getan. Es hat darum Interesse hervorzuheben, daß von anderen Zahlzeichen als den gewöhnlichen römischen bei ihm mit keiner Silbe die Rede ist.

Hermannus Contractus hat noch zwei andere Schriften verfaßt, deren wir trotz ihres nicht eigentlich mathematischen Inhaltes kurz gedenken möchten. Er hat über jenes eigentümliche Zahlenspiel, die Rhytmomachie, geschrieben. In der Beschreibung einer dem XI. bis XII. S. entstammenden Handschrift dieser Abhandlung ist der Anfang derselben abgedruckt[2]), welcher die Erfindung dem Boethius zuweist, in Übereinstimmung, wie wir uns erinnern (S. 852), mit Walther von Speier. Diese Übereinstimmung kann uns übrigens nicht verwundern, wenn wir uns ins Gedächtnis zurückrufen, daß Speier von St. Gallen her seinen Studienplan erhielt, kurz bevor Walther dort erzogen wurde, und zugleich berücksichtigen, daß auch in Reichenau ein strenger Abt ebendaher das Regiment führte kurz bevor Hermann in die Schule trat.

Hermann hat ferner zwei Bücher über den Nutzen des Astrolabiums verfaßt, welche in dem Salzburger Kodex aus der Mitte des XII. S., welcher eine Haupthandschrift von Gerberts Geometrie uns darstellte (S. 859), den Anfang jenes so wichtigen Sammelbandes bildet[3]). Die Echtheit der Bezeichnung könnte, wenn man jenem Kodex allein Glauben zu schenken Bedenken trüge, noch besonders nachgewiesen werden. Das 2., 3. und 4. Kapitel des II. Buches[4]) beschäftigt sich nämlich in einer mutmaßlich von Makrobius abhängigen Fassung mit der seinerzeit durch Eratosthenes vollzogenen Messung des Erdumfanges. Der Verfasser will aus dem Umfange den Durchmesser berechnen und sich dabei der archimedischen

[1]) *Sicque in ceteris unaquaque linea decuplum aliam superante usque in infinitum progreditur.* [2]) *Catalogue of the extraordinary collection of splendid manuscripts of G. Libri.* London 1859, pag. 103, Nr. 483. Vgl. auch E. Wappler, Bemerkungen zur Rhytmomachie in Zeitschr. Math. Phys. XXXVII, Histor.-literar. Abtlg. S. 1—17 (1892). [3]) Agrimensoren S. 176. [4]) Ebenda S. 177.

Verhältniszahl $\frac{22}{7}$ bedienen, d. h. er hat $\frac{7}{22}$ des Erdumfanges von 252 000 Stadien zu ermitteln. Dazu ist eine mittelbare Methode angewandt[1]), welche auch im 56. Kapitel von Gerberts Geometrie, wir wissen freilich nicht aus welcher Quelle, hat nachgewiesen werden können[2]). Es wird nämlich, um $\frac{21}{22}$ zu erhalten, zuerst $\frac{1}{22}$ des Umfanges abgezogen, dann von jenen $\frac{21}{22}$ der dritte Teil genommen: „Gegeben ist der Umkreis 252 000. Sein $\frac{1}{22}$ beträgt 11 454 $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{22}$. Durch Abziehen bleibt 240 544$\frac{1}{2}$ und $\frac{21}{22}$, deren Drittel mit 80 181$\frac{1}{2}$ und $\frac{7}{22}$ den Durchmesser liefert.“ Das waren freilich Brüche, wie sie Bernelinus z. B. nie geschrieben hätte, wie sie aber auch bei einem griechischen Schriftsteller, der Stammbrüche zu brauchen gewohnt war, nicht vorgekommen wären. Es waren Brüche, welche darauf hinweisen, daß, wer sie schrieb, das Bewußtsein hatte, man könne Bruchrechnungen auch anders als an den römischen Minutien oder zwölfteiligen Brüchen vollziehen, ohne jedoch vollständig in das andere Verfahren eingedrungen zu sein. Wir haben in einem Briefe Regimbolds (S. 874) ein ähnliches Beispiel kennen gelernt. Um so unverständlicher mußte das so Herausgerechnete einem Leser erscheinen, welcher neben ganzen Zahlen nur römische Minutien kannte. Ein solcher Leser war aber Meinzo der Stiftslehrer von Konstanz. In einem Briefe, der, wie man Grund hat anzunehmen, spätestens im Anfange des Jahres 1048 geschrieben ist, wandte er sich um die ihm nötige Erklärung an Hermann, und damit ist der Beweis geliefert, daß Hermann wirklich der Verfasser jener Kapitel, beziehungsweise der sie enthaltenden und unter seinem Namen auf uns gekommenen Schrift über den Nutzen des Astrolabiums ist. Auf diesen Nachweis einiges Gewicht zu legen haben wir aber einen sehr triftigen Grund, indem die genannte Schrift unverkennbar unter arabischem Einflusse verfaßt ist, und arabischer Einfluß durch dieselben deutlichen Anzeigen auch in einem anderen Texte der Bücher über das Astrolabium zu Tage tritt, welcher im übrigen an Verschiedenheiten gegen die auch im Druck bekannten Texte nicht arm ist[3]). Einigermaßen verstümmelte, aber immer noch erkennbare arabische

[1]) Ein Schreiben Meinzos von Konstanz an Hermann den Lahmen, herausgegeben von E. Dümmler im Neuen Archiv der Gesellschaft für ältere deutsche Geschichtskunde V, 202—206. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 453. [3]) *Catalogue of the extraordinary collection of splendid manuscripts of G. Libri.* London 1859, pag. 103, Nr. 483.

Wörter, wie walzachora, almuchantarah, almagrip, almeri, walzagene usw. kommen nämlich an den verschiedensten Stellen jener Bücher vor[1]) und fordern die Frage heraus, wie Hermann dazu kam, dieser Wörter sich zu bedienen?

Lassen wir Hermanns Leben rasch an uns vorüber gehen[2]). Dem schwäbischen Grafen Wolverad wurde 1013 ein Knabe Hermann geboren, welcher mit sieben Jahren, also 1020, der Schule, wahrscheinlich in Reichenau, übergeben wurde, wo ein Verwandter von Hermanns Mutter mit Namen Rudpert als Mönch lebte. Hermann selbst wurde im Alter von dreißig Jahren, 1043, unter die Zahl der Mönche aufgenommen. Er lehrte mit herzgewinnender Liebenswürdigkeit, welche ihm Schüler von den verschiedensten Orten herbeizog. Er starb nur 41 Jahre alt am 24. September 1054. Von sehr früher Zeit an waren seine Gliedmaßen schmerzhaft zusammengezogen, wovon ihm der Name Hermannus Contractus geworden ist. Er saß immer in einem Tragstuhle, er konnte ohne Hilfe nicht einmal seine Lage ändern, ja er konnte nur mit Mühe verständlich sprechen.

Es ist nicht denkbar, daß Hermann in Gesundheitsverhältnissen, wie wir sie schildern mußten, noch vor seinem 30. Jahre — später ist es gar nicht möglich — Reisen gemacht haben sollte, von welchen er die Kenntnis der arabischen Sprache mitgebracht hätte. Es ist nicht denkbar, daß von solchen Reisen nirgend, auch nicht andeutungsweise die Rede wäre. Er müßte also das Arabische, wenn er dessen mächtig war, in Reichenau selbst sich angeeignet haben. Das setzt voraus, daß es dort entweder Persönlichkeiten gab, welche Unterricht in jener Sprache zu erteilen befähigt waren oder aber eine geschriebene Sprachlehre und ein desgleichen Wörterbuch, beides Annahmen, welche sich nicht wohl verteidigen lassen. Dazu kommt, daß von Kenntnissen Hermanns im Arabischen keiner seiner zahlreichen älteren Lobredner etwas weiß, daß nur seit dem XV. S. die Behauptung sich findet, Hermann habe Schriften des Aristoteles aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt, eine Behauptung, die nach aller Wahrscheinlichkeit auf einer Verwechslung beruht[3]). Ein solcher Übersetzer war nämlich ein gewisser Hermanus Alemannus, der unmöglich derselbe sein kann wie der unsrige, da er von Persönlichkeiten spricht, die erst dem XIII. S. angehören. In der Vorrede zur Übersetzung

[1]) Jourdain, *Recherches critiques sur l'âge et l'origine des traductions latines d'Aristote.* 2. édition. Paris 1843, pag. 146. [2]) Wattenbach, Deutschlands Geschichtsquellen im Mittelalter (4. Ausgabe 1877) II, 36—40 unter Benutzung von Heinr. Hansjakob, Herimann der Lahme. Mainz 1875. [3]) Jourdain l. c. pag. 135—147. Chapitre III, § XI: *D'Hermann surnommé Contractus et d'Hermann l'Allemand. Erreurs des biographes à leur égard.*

der Poetik des Aristoteles insbesondere nennt er den Bischof Robert von Lincoln mit dem dicken Kopfe, Robertus grossi capitis Lincolniensis episcopus, welcher 1253 starb, zwei Jahrhunderte später als der Mönch von Reichenau. Alle diese Gründe zusammengenommen lassen die gerechtesten Zweifel obwalten, ob Hermann der Lahme der arabischen Sprache mächtig war, mächtig gewesen sein kann, und da auf der anderen Seite kein Zweifel möglich ist, daß arabische Ausdrücke in seinen Büchern über das Astrolabium vorkommen, so ist nur ein Ausweg aus diesem Dilemma: daß Hermann jene Bücher unter Benutzung von damals bereits vorhandenen lateinischen Übersetzungen arabischer astronomischer Schriften anfertigte, denen er jene verketzerten Kunstausdrücke entnahm[1]). Daß es in der Tat solche Übersetzungen gab, wenn auch vermutlich nur in sehr geringer Anzahl, wissen wir. Wir wissen, daß Lupitus von Barcelona ein astronomisches Werk übersetzt, daß Gerbert nach dieser Übersetzung Verlangen getragen hat (S. 857), und dieses oder ein ähnliches mag Hermanns Quelle gewesen sein.

Dem XI. S. gehören noch verschiedene andere Schriftsteller an, welche über den Abacus und verwandte Gegenstände schrieben, oder in ihren Klöstern schreiben oder abschreiben ließen[2]). Zu denen, welche Abschriften aller Art anfertigen ließen, gehören Werner und Wilhelm von Straßburg, sowie Fulbert von Chartres, und es ist gar nicht unmöglich, daß unter des letzteren Einflusse jene Handschrift des Anonymus von Chartres entstand, der wir (S. 590) einige Bemerkungen gewidmet haben. Fulbert von Chartres hat selbst Verse über die Duodezimalbrüche, versus de uncia et partibus eius, verfaßt[3]). Als große Astronomen werden genannt Engelbert von Lüttich, Gilbert Maminot von Lisieux, Odo Stiftsherr von Tournai. Über den Abacus schrieb Heriger von Lobbes, einem bei Lüttich gelegenen vielgerühmten Kloster, von dessen hierher gehörenden Schrift bereits (S. 869) die Rede war. Heriger war der Freund, vielleicht der Lehrer von Adelbold von Utrecht, der jedenfalls seine Erziehung in Lobbes erhielt[4]). Über den Abacus schrieben auch Helbert von St. Hubertus in den Ardennen, Franco von Lüttich, den wir schon (S. 876) als Geometer kennen lernten. Auch Radulf von Lüttich und Regimbold von Cöln (S. 872)

[1]) Jourdain l. c. pag. 147: *Il est plus naturel de croire qu'il composa ses deux traités d'après les traductions qui avaient cours alors, mais qu'il ne fit aucune version de l'arabe.* [2]) Math. Beitr. Kulturl. S. 332. [3]) Werner, Gerbert S. 64, Anmerkung 4. [4]) C. Le Paige, *Notes pour servir à l'histoire des mathématiques dans l'ancien pays de Liège.* Vgl. *Bulletin de l'institut archéologique Liégeois* XXI, 461.

wurden aus der unmittelbar auf Gerbert folgenden Zeit als Mathematiker gerühmt[1]). Viele, ja die meisten Pflanzstätten mathematischer Bildung, von welchen die hier genannten Persönlichkeiten ihren Namen, aus welchen sie ihr Wissen erhielten, liegen in ziemlich engem Kreise um Lüttich herum, damals dem geistigen Mittelpunkte von Lothringen und bestätigen so ein Wort des Bernelinus: bei den Lothringern blühe die Kunst des Abacus[2]).

Wir überspringen nun fast ein Jahrhundert, um von einem Manne zu reden, der am Anfange des XII. S. tätig war, und dessen Schrift über den Abacus gegenwärtig veröffentlicht ist und uns Gelegenheit zu vielfachen Bemerkungen gibt. Wir meinen Radulph von Laon, der 1131 gestorben ist[3]). In Laon war um 1100 eine hochberühmte Klosterschule, welche ihre Blüte namentlich Anselm verdankte, der Leuchte Frankreichs, wie seine Bewunderer ihn nannten, dem Lehrer des fast noch bekannteren Abelard. Radulph war Anselms Bruder und, wie er, Lehrer an der Klosterschule, bevor er zum Bischofe eingesetzt wurde. Er schrieb, wie gesagt, über den Abacus, und eine Einleitungsstelle beschäftigt sich mit der geschichtlichen Entwicklung der Rechenkunst auf dem Abacus[4]): „Jetzt ist zu besprechen, welcher Wissenschaft diese Vorrichtung hauptsächlich dient. Der Abacus erweist sich als sehr notwendig zur Untersuchung der Verhältnisse der spekulativen Arithmetik; ferner bei den Zahlen, auf denen die Tonweisen der Musik beruhen; desgleichen für die Dinge, welche durch die emsigen Bemühungen der Astronomen über den verschiedenen Lauf der Wandelsterne gefunden sind und über deren gleiche Umdrehung dem Weltall gegenüber, wenn auch ihre Jahre je nach dem Verhältnisse der ungleichen Kreise sehr verschiedenes Ende haben; weiter noch bei den dem Platon nachgebildeten Gedanken über die Weltseele und zum Lesen all der alten Schriftsteller, welche ihren scharfsinnigen Fleiß den Zahlen zuwandten. Am allermeisten aber zeigt der Gebrauch dieser Tafel sich bequem und wird von den Lehrern der Kunst benutzt bei Auffindung der Formeln der geometrischen Disziplinen und bei Anwendung derselben auf die Ausmessung der Länder und Meere. Allein die Wissenschaft, von der ich eben rede, ist fast bei allen Bewohnern des Abendlandes in Vergessenheit geraten, und so wurde auch diese Kunst des Rechnens beim Aufhören der Kunst, als deren Hilfsmittel sie erfunden worden

[1]) Werner, Gerbert S. 77. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 357. [3]) *Histoire littéraire de la France* VII, 89 sqq., 143. Der arithmetische Tractat von Radulph von Laon, herausgegeben von A. Nagl, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik V, 85—134 (1890). [4]) *Compt. Rend.* XVI, 1413, Anmerkung 1.

war, nicht gar groß beachtet; ja sie kam in Mißkredit, und nur Gerbert, genannt der Weise, ein Mann von höchster Einsicht, und der vortreffliche Gelehrte Hermann und deren Schüler pflanzten einiges bis zu unseren Zeiten fort; in ihnen zeigt sich noch ein schwacher Abfluß jener Quellen der genannten Wissenschaft.“

Es sind hier, der zu Radulphs Zeit vorhandenen wissenschaftlichen Überzeugung folgend, Sätze ausgesprochen, welche durchweg mit den Ansichten in Einklang stehen, welche wir schon die ganze Zeit her vertreten haben: Der Abacus ist sehr notwendig zum Verständnis der Platoniker; die Mathematiker bedienten sich seiner hauptsächlich bei Berechnungen aus dem Bereiche der Feldmeßkunst, und als diese letztere Kunst schwand, da wurde auch der Abacus fast vergessen; Gerbert und Hermann und ihre Schulen haben nicht etwa den Abacus neu eingeführt oder gar erfunden, sie haben die halbwegs vergessene Kunst nur in einiger Erinnerung erhalten. Von Arabern, bei welchen die Kunst geblüht haben könnte, ist auch bei Radulph mit keinem Worte die Rede. Wir schalten hier vorgreifend ein, daß auch von einem anderen Schriftsteller ein sehr beredtes Schweigen zu melden ist, daß auch Atelhart von Bath, welcher, sei es vor sei es nach Radulph, jedenfalls am Anfange des XII. S. über den Abacus schrieb, in dieser Abhandlung den Abacus wohl den Pythagoräern zuwies, dagegen der Araber keine Erwähnung tat, er, der vollkommen Arabisch konnte und Übersetzungen aus dem Arabischen vollzogen hat, daß er zugleich des Zusammenhanges des Abacus mit der Geometrie sich wohl bewußt war[1]), und daß er von Brüchen ausschließlich die römischen Minutien benutzte. Endlich ist hervorzuheben, daß sowohl bei Atelhart als bei Radulph von einer *divisio aurea* und einer *divisio ferrea* die Rede ist[2]), Ausdrücke, auf welche wir etwas weiter unten zurückkommen.

Radulph begnügt sich nicht, der Verbreitung, des Verschwindens, des Auffrischens des Abacus zu gedenken; er spricht auch über dessen Erfindung und Einrichtung, und dabei bedient er sich der Apices, die wir nur der Bequemlichkeit halber in unserer Übersetzung durch die gewöhnlichen Zahlzeichen wiedergeben[3]): „Bei der Zeichnung dieser Tafel, wie wir zu sagen angefangen haben, wird die Menge der Zwischenräume in drei mal neun eingeteilt, d. i. nach

[1]) Chasles in den *Compt. Rend.* XVI, 1410—1411 und XVII, 147. Die ganze Abhandlung ist veröffentlicht im *Bullettino Boncompagni* XIV, 91—134 (1881) unter Vorausschickung gelehrter biographischer und bibliographischer Untersuchungen des Fürsten Bald. Boncompagni, ebenda pag. 1—90. [2]) Darauf hat H. Eneström (*Biblioth. Mathem.* 3. Folge VII, 83—84) aufmerksam gemacht. [3]) *Journal Asiatique* 1863, I. Halbjahr, pag. 48—49, Anmerkung 3.

der Gestalt eines Würfels, welcher die Länge drei auch nach der Breite und Höhe in gleichen Abmessungen vermehrt. Und da die Assyrer für die Erfinder dieses Instrumentes gehalten werden, welche der chaldäischen Sprache und Buchstaben sich bedienten, und beim Schreiben rechts anfingen und nach links fortfuhren, so beginnt gemäß des den Erfindern in fortgesetzter Verbreitung schuldigen Ansehens die Zeichnung dieser Tafel zur Rechten und setzt ihre Länge nach links fort. Die Zwischenräume selbst sind aber so unterschieden, daß, während jeder einzelne seinen oberen Abschluß hat, auch je drei von dem Anfange bis zum Ende der Tafel durch obere Abschlüsse endigen, so daß, indem je drei Zwischenräume immer durch einen Halbkreis geschlossen sind, auf der ganzen Länge der Tafel IX obere Abschlüsse gefunden werden. Der erste Abschluß dreier Zwischenräume ist mit dem Zeichen der Einheit überschrieben, welche mit chaldäischem Namen igin heißt; 1 stellt die Gestalt eines lateinischen Buchstaben dar. Man erkennt, daß dieses deshalb geschieht, damit jene drei Zwischenräume, welche das Zeichen der Einheit vorbemerkt haben, bezeugen, daß sie dadurch den ersten Rang erlangt haben. Der zweite Abschluß von drei Zwischenräumen trägt dieses Zeichen der zwei 2, welches bei den vorgenannten Erfindern andras heißt, damit durch diese Wendung erklärt werde, jene drei Zwischenräume, über welchen es geschrieben ist, nehmen den zweiten Rang für sich in Anspruch. Der dritte Abschluß von drei Zwischenräumen lehrt, daß er den dritten Rang einnehme, dadurch, daß er mit folgender Gestalt der drei 3 bezeichnet ist, welche bei den Chaldäern ormis genannt wird. Ähnlich bezeugt auch der Abschluß der vierten Ordnung, daß er den vierten Rang behaupte, indem über ihn dieses Zeichen 4 der vier geschrieben ist, das bei den Erfindern als arbas gilt. Nicht weniger kündigt die fünfte Ordnung an, sie halte den fünften Rang ein, weil sie diese Gestalt 5 der fünf trägt, welche quimas heißt. Ebenso gehabt sich die sechste Ordnung als sechste, weil sie als Aufschrift das Zeichen 6 oder sechs hat, welches caltis heißt. Auch die siebente ist durch folgende Gestalt 7 der sieben bezeichnet, welche zenis heißt. Die achte hat folgende Form 8 der acht, welche man temeniam nennt; und die neunte ist mit dieser Figur 9 der neun bezeichnet, welche bei den Erfindern celentis genannt wird. Bei der letzten Ordnung wird auch die sipos genannte Figur ⊙ angeschrieben, welche, wiewohl sie keine Zahl bedeutet, doch zu gewissen anderen Zwecken dienlich ist, wie im folgenden erklärt werden wird."

Wir werden Radulphs Beispiel folgend auch erst nachher von dem sipos und seiner Benutzung reden, anderes vorausschicken. Es

könnte zunächst auffallen, daß Radulph wiederholt von der Länge der Tafel redet, wo wir die Breite genannt erwarten. Allein wie Heron im Anschlusse an ägyptische Übung (S. 395) Breite die kleinere, Höhe die größere Abmessung nannte, ohne auf die Lage selbst zu achten, so ist für Vitruvius nur derselbe Gegensatz bei der Anwendung der Wörter Breite und Länge maßgebend[1]), und Radulph steht mit Beibehaltung dieser altertümlichen Sitte durchaus auf römischem Boden. Der mit 27 Kolumnen ausgestattete Abacus mußte mehr breit als lang erscheinen, die Breite deshalb als Länge benannt werden.

Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf den assyrischen oder chaldäischen Ursprung, den Radulph für den Abacus, für die Apices und für deren Namen in Anspruch nimmt. Wir pflichten entschieden der Meinung bei, welche hierin ein Anlehnen an griechische Erinnerungen findet[2]), die manche astronomische und anderweitige Kenntnisse von den Chaldäern ableiteten. Warum sollte Radulph statt der Assyrer nicht die Araber oder die von diesen stets als Erfinder der Zahlzeichen gerühmten Inder genannt haben, wenn er von ihnen wußte? Sein Schweigen ist mithin als Beweis anzusehen, daß ihm und mit ihm gewiß den Zeitgenossen, vor welchen er durch Gelehrsamkeit sich auszeichnete, ein Vorkommen des Abacus bei den Arabern gerade so unbekannt war wie bei uns.

Drittens müssen wir zu jenen rätselhaften Wörtern uns wenden, die uns von Radulph als desselben chaldäischen Ursprunges wie der Abacus genannt werden. Wir haben (S. 584) von Wörtern gesprochen, welche nicht im Texte, aber auf dem Abacus zwischen dem I. und II. Buche der Geometrie des Boethius vorkommen und dort möglicherweise erst nachträglich ihren Platz gefunden haben. Es sind dieselben, die wir hier nach Radulph mitgeteilt haben. Dieselben finden sich in zehn Versen eines lateinischen Pergamentkodex des Vatikan[3]):

Ordine primigeno sibi nomen possidet Igin.
Andras ecce locum previndicat ipse secundum.
Ormis post numerus non compositus sibi primus.
Denique bis binos succedens indicat Arbas.
Significat quinos ficto de nomine Quimas.
Sexta tenet Calcis perfecto munere gaudens.
Zenis enim digne septeno fulget honore.
Octo beatificos Temenias exprimit unus.
Terque notat trinum Celentis nomine rithmum.
Hinc sequitur Sipos est, qui rota namque vocatur.

---

[1]) Agrimensoren S. 67 und 196, Anmerkung 129. [2]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, I. Halbjahr, pag. 49. [3]) Vat. Univ. 5327, wie wir freundlicher Mitteilung von Prof. L. Gegenbauer entnehmen. Die gleichen Verse

Der Sinn dieser Verse, welche vielleicht nur als Gedächtnisverse zu betrachten sind, welche die Einprägung jener fremdartigen Wörter erleichtern sollen, dürfte aus folgendem Übersetzungsversuche[1]) sich ergeben:

> *Igin* führet das Zeichen in erster Stelle zum Namen.
> Auf den zweiten der Plätze erhebet *Andras* den Anspruch.
> Dann als erste einfache Zahl folgt *Ormis* auf jene.
> Zweimal zeiget die Zwei das jetzt nachfolgende *Arbas*.
> *Quimas* bildet die Fünf mit ausersonnenem Namen.
> Ihrer Vollkommenheit freut sich die *Calcis* an sechseter Stelle.
> Siebenfältiger Ehre erglänzet am würdigsten *Zenis*.
> Und die glückselige Acht zeigt nur *Temenias* einzig.
> Dreimal schreibet die Drei das Zeichen mit Namen *Celentis*.
> Ähnlich gestaltet dem Rade ist, was hier *Sipos* ich nenne.

Eben dieselben Wörter finden sich bei einem etwas jüngeren Zeitgenossen Radulphs, von dem wir noch zu sprechen haben, Gerland, und bei verschiedenen Schriftstellern bis in das XIV. S. herab[2]). Meistens fehlt das Wort *sipos*. Hat nun Radulph recht, wenn er die Wörter aus dem Chaldäischen herstammen läßt, und sind sie in der Tat ebenso alt, ebenso lange in Gebrauch als der Abacus, oder wenigstens als die Apices? Würde die letzte Frage noch weiter eingeschränkt auf die Zeit der Neubelebung und allgemeinen Verbreitung des Abacus- oder Kolumnenrechnens, so wäre sie entschieden mit Nein zu beantworten. Gerbert, Bernelinus, Hermann der Lahme benutzten jene Wörter nie, und sie sind doch als die hervorragendsten Lehrer zu betrachten. Auch aus keinem anderen Schriftsteller des XI. S. wird das Vorkommen jener Wörter uns berichtet, und erst im XII. S. scheinen sie aufzutreten. Allerdings steht diese Tatsache in Widerspruch zu den Worten Radulphs, der die Entstehung der Wörter in graue Urzeit zurückverlegt.

Vielleicht sind die Wörter selbst geeignet den Zweifel zu lösen? Ein Assyriologe will fünf derselben als assyrisch erkannt haben[3]); *igin* sei *ischtin*, *arbas* sei *arba*, *quimas* sei *χamsa*, *zenis* wohl in der

nur unter Weglassung des auf *celentis* bezüglichen hat Chasles, *Aperçu hist.* pag. 473, deutsch S. 540, aus dem Kodex von Chartres veröffentlicht, in welchem auch die Geometrie des Anonymus von Chartres (S. 590) steht.

[1]) Math. Beitr. Kulturl. S. 244. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 578—579. [3]) Lenormant, *La légende de Sémiramis, premier mémoire de mythologie comparative* pag. 62 in den *Mémoires de l'Académie Royale des sciences et belles-lettres de Belgique.* T. XL (Bruxelles 1873). Frühere Untersuchungen vgl. bei Vincent in Liouville, *Journal de mathématiques* IV, 261 und in der *Revue archéologique* II, 601; Math. Beitr. Kulturl. S. 245—246; Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, I. Halbjahr, pag. 51; *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 579—581.

gleichfalls vorkommenden Form *zebis* sei *schibit*, *temenia* sei *schumunu*. Es gehört immerhin eine gewisse Phantasie dazu, um diese Verwandtschaften als offenkundig anzuerkennen. *Arbas, quimas, temenias* sind allerdings als semitisch wohl von allen Untersuchern anerkannt worden, aber ohne daß Einigkeit darüber stattfände, ob das Arabische, das Hebräische oder das Aramäische die Grundformen geliefert habe, worauf es natürlich nicht wenig ankommt, wenn das Alter und die Überlieferungsweise der Wörter geprüft werden wollen. Mit der semitischen Ursprungserklärung der anderen Wörter geht es nicht so leicht. Man hat sie freilich ingesamt arabisch deuten wollen, aber fraget nur nicht wie, möchte man ausrufen. *Caltis*, 6 und *zenis*, 7 sollen als *cadis* und *zebis* aus der entsprechenden arabischen Kardinal-, *igin*, 1 aus der arabischen Ordinalzahl stammen; *ormis*, 3 und *celentis*, 9 sollen ihren Wert vertauscht haben, alsdann aber wieder arabische Klänge geben, und *andra*, 2 soll diesem Ursprunge gleichfalls nicht widersprechen, vorausgesetzt daß man das arabische Wort schlecht gelesen habe. Andere, weniger leicht mit Verstümmelungen und Wertvertauschungen zufrieden, haben zwar *igin* aus dem Hebräischen, dem Persischen, der Berbersprache, *andras* aus dem Hebräischen, dem Arabischen, *zenis* aus dem Hebräischen abgeleitet, aber, wie wir durch die Nebeneinanderstellung der beigezogenen Sprachen andeuteten, wieder in fast unlösbarem Widerspruche zueinander, einig nur in dem Verzichte auf jegliche Erklärung für *ormis*, *calcis*, *celentis*. Semitisch also, den Schluß können wir allenfalls ziehen, sind die fremden Zahlwörter nicht ausnahmslos. Man hat auch versucht, einige der Wörter, welche besondere Schwierigkeiten bereiten, *ormis* und *celentis*, aus dem Magyarischen herzuleiten[1]). Eine andere Richtung schlugen alsdann Gelehrte ein, welche den hebräischen Ursprung von *arbas, quimas, temenias* als mit der alexandrinischen Heimat der sämtlichen von ihnen als neupythagoräisch vermuteten Wörter wohl vereinbarlich zugaben, dagegen die anderen aus dem Griechischen ableiteten, und zwar aus Wörtern, welche Begriffen entsprachen, die in der Tat in der Zahlensymbolik der späten Pythagoräer mit den betreffenden Zahlen im Zusammenhang stehen. *Igin* soll aus ἡ γυνή, *andras* aus ἀνδρός, *ormis* aus ὁρμή entstanden sein, weil die 1 das Weibliche, die 2 das Männliche, die 3 die Vereinigung beider bedeute; *calcis*, welches auch in den Formen *caltis* und *chalcus* vorkommt, sei nach einer Meinung καλότης, weil die 6 dem Begriffe

[1]) Fr. Th. Köppen, Notizen über die Zahlwörter im Abacus des Boethius (in dem VI. Bande der *Mélanges Gréco-Romains tirés du Bulletin de l'Acad. impér. des sciences de St. Pétersbourg*).

des Vollkommenen und des Schönen entspreche, während die andere Meinung *chalcus*, χαλκοῦς damit rechtfertigt, daß χαλκοῦς und οὐγγία Synonyma seien, die Alten aber nach einer Behauptung des Cassiodorius in einem Briefe an Boethius[1]) für 6 auch Unze sagten. Eine Ableitung von *zenis* als Tochter des Zeus beruht darauf, daß die 7 bei Theon von Smyrna Athene genannt wird[2]), eine dem Sinne nach ähnliche von *celentis* aus σελήνη darauf, daß 9 die Zahl der Jungfrau ist[3]), die Mondgöttin aber sich vor allen der Jungfräulichkeit erfreut. Andere dagegen wollen *celentis* von θηλυντός weibisch, oder vielmehr unter der Annahme, das Anfangs-α eines Wortes könne, auch wenn es verneinende Bedeutung habe, wegfallen, von ἀθηλυντός nicht weibisch, kräftig, ableiten, weil die 9 den Begriff der Kraft in sich schließe. So steht eine nicht unbedingt zu verwerfende Anzahl von Erklärungen der fremdklingenden Zahlwörter Radulphs zu Gebote. Weiter aber als bis zur Ablehnung der unbedingten Verwerfung möchten wir unsere Zustimmung doch nicht erstrecken und betrachten das Rätsel als immer noch nicht mit Gewißheit aufgelöst, gern bereit eine zuverlässigere Deutung jener Wörter freudig zu begrüßen, welche auch die Frage nach der Zeit der Entstehung endgültig beantworten würde.

Wir gehen nunmehr mit Radulph zu dem letzten Zeichen des *sipos* über, zu dem Kreise mit angedeutetem Mittelpunkte, jene Figur „welche, wiewohl sie keine Zahl bedeutet, doch zu gewissen anderen Zwecken dienlich ist, wie im folgenden erklärt werden wird“ (S. 892) Radulph erfüllt das gegebene Versprechen treulich[4]). Der vorsichtige Abacist — *providus abacista* — wird, sagt er, unter den anderen Zeichen auch ein nach Art eines Rädchens — *in modum rotulae* — gestaltetes *sipos* sich auf Marken — *in calculis* — anfertigen, und nun erläutert er deren Gebrauch. Wir begnügen uns, ohne wörtlich zu übersetzen, auf den Kernpunkt hinzuweisen. Wenn die Multiplikation mehrziffriger Zahlen miteinander vorgenommen wird, so kommt es darauf an, immer zu wissen, wo man mit dem Vervielfältigen halte. Ist dieses schon notwendig, wofern alle Zwischenrechnungen stehen bleiben, so ist es noch weit unerläßlicher, wenn, wie wir von Bernelinus gelernt haben, Ziffern fortwährend verändert wurden. Sei es daß man auf dem Sande neue Zeichen schrieb, sei es daß man auf dem vom Schildmacher hergerichteten Abacus neue Marken auf-

[1]) *Variae I*, epist. 10: *Senarium vero, quem non immerito perfectum docta Antiquitas definuit, unciae, qui mensurae primus gradus est, appellatione signavit.* [2]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) pag. 103, lin. 1—5. [3]) Theologumena (ed. Ast) pag. 58, lin. 12 flgg. [4]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, I. Halbjahr, pag. 246—247, Anmerkung 1.

legte, in beiden Fällen war dem vor Augen befindlichen Teilergebnisse nicht anzusehen, welchem Augenblick der Rechnung es entstamme. Da trat das *sipos* in seine Rechte. Man rückte nämlich eine solche Marke längs den Ziffern des Multiplikators von der Rechten zur Linken fort, um anzugeben, mit welcher Stelle man gerade vervielfache; um aber auch zu wissen, welchen Abschnitt der Vervielfältigung jeder Multiplikatorsziffer mit dem ganzen Multiplikandus man schon ausgeführt habe, ließ man gleichzeitig eine zweite *sipos*-Marke längs des Multiplikandus fortrücken. Man sieht somit: das *sipos* ist keine Null, ist, wie Radulph ganz richtig bemerkt, überhaupt kein Zahlzeichen, sondern nur ein Rechnungsbehelf ähnlich dem Pünktchen, dessen auch wohl in der heutigen Zeit Rechner beim Dividieren sich bedienen, sowie beim Multiplizieren vielziffriger Zahlen miteinander, vorausgesetzt, daß sie diese letztere Rechnung so vollziehen, daß alle Zwischenrechnungen bis zum Hinschreiben der einzelnen Ziffern des Gesamtproduktes im Kopfe vorgenommen werden. Daß beim *sipos* ein Kreis das Pünktchen umschließt, ist vielleicht nur die Zeichnung einer runden Marke überhaupt und die Ähnlichkeit mit dem Zeichen der Null eine durchaus zufällige. Was das Wort *sipos* betrifft, so ist es kaum weniger zweifelhafter Bedeutung als die anderen Wörter, von welchen wir oben gesprochen haben, denn wenn die einen es mit dem aṣ-ṣifr (leer) der Araber, andere es mit dem *saph* (Gefäß) der Hebräer in Verbindung setzen, leiten noch andere, offenbar hier weit mehr in Übereinstimmung mit der Verwendung des *sipos*, es von ψῆφος (Rechenmarke) ab. Man ist sogar so weit gegangen[1]) zu fragen, ob nicht das arabische aṣ-ṣifr selbst als Lehnwort mit dem griechischen ψῆφος in Zusammenhang zu bringen sei.

Wir können hier einschaltend auch das Wort *abacista* hervorheben, durch welches Radulph den auf dem Abacus Rechnenden benennt. Der Name[2]) geht mindestens bis auf Gerbert zurück, der sich in seiner Geometrie desselben bedient, und seine Nachfolger gebrauchen bald dieses Hauptwort, bald ein von demselben abgeleitetes Zeitwort *abacizare*[3]), welches Rechnen auf dem Abacus bedeutet. Die Hochschätzung Gerberts als desjenigen, welcher das Rechnen mehr als jemals früher zum Gemeingute gemacht hat, spricht sich in dem gleichfalls einmal aufgefundenen Worte *gerbertista*[4]) für Rechner aus.

[1]) Karl Krumbacher, Woher stammt das Wort Ziffer (chiffre)? in den *Études de philologie néogrecque publiées par M. Jean Psichari.* Paris 1892. Dagegen Derselbe, Noch einmal das Wort Ziffer, in der Byzantinischen Zeitschrift. Leipzig 1893. [2]) Math. Beitr. Kulturl. S. 331. [3]) Franco 185. [4]) *Oeuvres*

Jüngerer Zeitgenosse Radulphs war, wie wir schon sagten, Gerland[1]). Er war Schüler des von dem Bistum Besançon abhängigen Benediktinerklosters in der Stadt gleichen Namens. Er wirkte selbst dort als Stiftslehrer, dann als Prior in den Jahren 1131 und 1132. Im Jahre 1148 begleitete er nebst Theodorich von Chartres den Erzbischof Adalbero von Trier zu einem Reichstage nach Frankfurt und führte mit seinem Reisegefährten während der Rheinfahrt ein glänzendes Wortgefecht. Er schrieb unter anderem einen Komputus, d. h. wie wir wissen, eine Anleitung zur Osterrechnung, und eine Abhandlung über den Abacus, die in einer Karlsruher Sammelhandschrift aus dem XII. S., die also jedenfalls kurz nach der Abfassung der Abhandlung entstanden sein muß, sich erhalten hat[2]).

Wir heben nur weniges als bemerkenswert aus ihr hervor. Gerland benutzt die fremdartigen Zahlwörter beim Rechnen selbst: *Igin pone iuxta andram*, setze *igin* neben *andras* usw. Er benutzt ferner fortwährend einen gezeichneten Abacus, dessen einzelne Kolumnen Bogen, *arcus*, heißen und einen oberen Abschluß durch einen Kreisbogen finden. An einer einzigen Stelle vereinigt er, wie Bernelinus, wie Radulph es vorschrieben, überdies Gruppen von drei Kolumnen unter einem größeren Kreisbogen und von diesen dreien selbst wieder zwei unter einem mittelgroßen Bogen; allein dabei macht sich eine Verschiedenheit gegen Bernelinus geltend, denn Bernelinus will (S. 880) den mittelgroßen Bogen über die Zehner- und Hunderterkolumne gezeichnet haben, worin ein guter Sinn liegt, der der Unterscheidung von Einern und Nichteinern der betreffenden Gruppe, Gerland dagegen vereinigt, man weiß nicht wozu, die Einer- und Zehnerkolumne unter einem mittelgroßen Bogen. Die Zahl der Kolumnen ist 12, also auch nicht mit jenen Vorgängern in Übereinstimmung. Eine andere Handschrift von Gerlands Abacusregeln hat 15 Kolumnen, und überhaupt ist der Wechsel in diesen Anzahlen ein sehr häufiger und nur darin beschränkt, daß die Kolumnenzahl stets durch 3 teilbar die Bildung von Triaden gestattet[3]); neben 27 kommen beispielsweise auch 30 Kolumnen vor, mutmaßlich so zu erklären, daß neun Gruppen von je 3 Kolumnen mit den Wörtern *igin* bis *celentis* überschrieben waren und dann noch eine zehnte Gruppe hinzugenommen wurde, um die Überschrift *sipos* verwerten

de Gerbert (ed. Olleris) pag. XXXVII aus dem Codex von Montpellier Nr. 491.

[1]) Boncompagni im *Bullettino Boncompagni* X, 653—656. [2]) Zum Drucke befördert durch Treutlein in dem *Bullettino Boncompagni* X, 595—607. [3]) *Compt. Rend.* XVI, 1405.

zu können, deren Sinn allmählich verloren ging, als man mit der wirklichen Null der Araber bekannt wurde. Beim Dividieren lehrt Gerland nicht das komplementäre, sondern das unmittelbare Verfahren sowohl an dem Beispiele 120 : 3 als an dem Beispiele 100 : 11, bei welchem letzteren das übrig bleibende 1 zur Fortsetzung der Division in Duodezimalbrüche verwandelt wird.

Greifen wir jetzt aus der zahlreichen Menge von dem Verfasser und der Abfassungszeit nach nicht genau bestimmbaren Schriften über den Abacus noch einige heraus, die uns bemerkenswerter erscheinen und möglicherweise in die Zeit gehören, bis zu welcher wir gelangt sind. Dem XII. S. entstammen nach der Ansicht der meisten Oddos Regeln des Abacus[1]) (S. 845). Diese Regeln beginnen wieder mit einer an geschichtlichen Erinnerungen reichen Einleitung: „Will einer Kenntnis des Abacus haben, so muß er Betrachtungen über die Zahlen sich aneignen. Diese Kunst wurde nicht von den modernen Schriftstellern erfunden, sondern von den Alten, und wird deshalb von vielen vernachlässigt, weil sie durch die Verworrenheit der Zahlen sehr verwickelt ist, wie wir aus der Erzählung unserer Vorfahren wissen. Erfinder dieser Kunst war Pythagoras, wie uns mitgeteilt wird. Deren Übung ist bei einigen Dingen notwendig, weil ohne Kenntnis derselben kaum irgend jemand es in der Arithmetik zur Vollkommenheit bringen, noch die Lehren der Kalkulation d. h. des Komputus verstehen wird. Hätten doch unsere heiligen Weisen niemals die für die heilige Kirche notwendigen Regeln auf das Ansehen jener Heiden gestützt, wenn sie gefühlt hätten, es sei eine müßige Kunst, die jene lehrten. Will z. B. einer die Bücher Bedas des Ehrwürdigen über den Komputus lesen, so wird er ohne Besitz dieser Kunst wenig Nutzen erzielen können. Eben sie ist in dem Quadrivium, d. h. in der Musik, Arithmetik, Geometrie und Astronomie so notwendig und nützlich, daß ohne sie fast alle Arbeit der Studierenden zwecklos erscheint. Wir glauben, daß sie vor alters griechisch geschrieben und von Boethius ins Lateinische übersetzt wurde. Aber das Buch über diese Kunst ist zu schwer für den Leser, und so haben wir einige Regeln hier auseinandergesetzt.“

Wir sehen hier in den geschichtlichen Angaben eine ziemliche Übereinstimmung mit denen Radulphs, jedoch so, daß keiner der

[1]) *Scriptores ecclesiastici de musica* (ed. Mart. Gerbert). St. Blasien 1784, I, 296—302: *Regulae Domni Oddonis super abacum.* Vgl. Math. Beitr. Kulturl. S. 295—302. Die wichtigsten Gründe, welche für eine späte Lebenszeit Oddos sprechen, bei R. Peiper auf S. 216—220 des Supplementheftes zu Zeitschr. Math. Phys. XXV (1880) und bei A. Nagl, Gerbert und die Rechenkunst des X. Jahrhunderts S. 33.

beiden Schriftsteller eine Abhängigkeit von dem anderen verrät, die Allgemeinheit der Überlieferung also durch ihre ähnlichen Behauptungen nur um so sicherer bestätigt wird. Wenn Radulph die Notwendigkeit des Abacus zum Verständnis Platons betont, führt Oddo das Rechnen auf demselben auf Pythagoras zurück. Wenn Radulph ihn der Geometrie dienen läßt, ist er bei Oddo dem ganzen Quadrivium ein nützliches Hilfsmittel. Wenn Radulph die Kunst in Mißkredit, fast in Vergessenheit geraten läßt, bis Gerbert und Hermann sie erneuerten, spricht Oddo die Meinung aus, Boethius habe darüber eine Schrift aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt, aber dieses Buch sei zu schwierig, und deshalb setze er seine Regeln auseinander. Die letztere Bemerkung Oddos verdient unsere ganz besondere Aufmerksamkeit, da es schwer fällt, dieselbe nicht auf die gefälschte Geometrie des Boethius zu beziehen. Dann muß aber Oddo nach der Entstehung dieser Geometrie, d. h. nicht früher als im XII. S. seine Regeln verfaßt haben.

Die Benennung der Einer und Zehner als Finger- und Gelenkzahlen, der Kolumnen als Bögen, die Vereinigung von je drei Bögen zu einer mit einem größeren Bogen überspannten Gruppe, das Auftreten der Apices, das sind lauter Dinge, die Oddo mit vielen gemein hat. Die Zahlennamen *igin* usw. kommen bei ihm nicht vor, und das könnte Anlaß geben, ihn für einen Zeitgenossen eines früheren als des XII. S. zu halten. Bei der Multiplikation unterscheidet er die beiden Faktoren als Summe, *summa*, und Grundzahl, *fundamentum*, wovon jene oben, diese weiter unten geschrieben wird. Das Produkt kommt zwischen beide Zeilen zu stehen[1]). Dabei findet zwischen den Faktoren Gegenseitigkeit statt: „Mag man 5 mal 7 oder 7 mal 5 nehmen, so entsteht XXXV.“ Der Gegensatz der Schreibweise in diesem Satze, die Darstellung einziffriger Zahlenwerte durch Apices, mehrziffriger durch römische Zahlzeichen, ist die naturgemäße Folge des Nichtvorhandenseins der Null, ohne welche die Apices die längste Zeit über nur dann Stellenwert erhielten, wenn sie einem Abacus eingezeichnet waren.

Ein einziges Beispiel vom Gegenteil ist bis jetzt bekannt geworden[2]). In einer Handschrift der alexandrinischen Bibliothek zu Rom, welche um das Jahr 1200 herum entstanden ist, findet sich

[1]) *Summa vocatur quod in summitate arcuum; fundamentum autem quidquid inferius disponitur. Et quod ex utroque numero procedit multiplicato inter duas lineas ponitur.* [2]) Enrico Narducci, *Intorno ad un manuscritto della Biblioteca Alessandrina contenente gli apici di Boezio senz' abaco e con valore di posizione* in den *Memorie dell' Accademia Reale dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Serie 3. Vol. 1. Seduta dell' 8. aprile 1877.

nämlich auf zwei eigentümlichen kreisrunden Figuren eine ziemliche Menge von Zahlen, teils einziffrige, teils zweiziffrige. Sie sind mit geringfügigen Ausnahmen durch Apices geschrieben, die zu diesem Zwecke offenbar Stellungswert erhielten. Daß aber dem Schreiber die Null noch nicht bekannt war, oder, was auf das Gleiche herauskommt, daß er sie noch nicht zu gebrauchen wagte, geht mit Bestimmtheit daraus hervor, daß mitten zwischen den Apices die römischen Zeichen für X und XX vorkommen.

Doch wir kehren zu Oddo zurück. Nach den Multiplikationsregeln gelangt er zur Division und unterscheidet, wie wir es schon wiederholt und auch in der gefälschten Geometrie des Boethius gefunden haben, die einfache, die zusammengesetzte und die unterbrochene Division, je nachdem der Divisor einstellig ist, mehrstellig in aufeinander folgenden Kolumnen, oder mehrstellig, aber so, daß dazwischen eine Kolumne leer bleibt. Der Dividend steht hier in der Mitte, der Divisor oben, der Quotient unten[1]), und es ist nicht zu verkennen, daß hier eine völlig gleichmäßige Anordnung wie bei der Multiplikation gewählt ist, die das Produkt zwischen beide Faktoren stellt. Allerdings sind wir genötigt, die Stellung aus Oddos Worterklärungen zu entnehmen, denn die Zeichnung eines Abacus kommt bei ihm nicht vor. Er vollzieht die Divisionen unmittelbar, nicht komplementär, und überhaupt fühlt er sich bei der übernommenen Aufgabe, die Division in ihren drei Fällen schriftlich erklären zu müssen, nicht wohl. Schon bei der zusammengesetzten Division sagt er: „das Alles läßt sich viel leichter mit einem einzigen Worte mündlich als schriftlich abmachen“[2]). Nach der Division folgen die Brüche, d. h. wie immer Duodezimalteile des as. Oddo prunkt dabei mit einer gewissen Gelehrsamkeit, er sagt dragma sei griechisch, sichel hebräisch usw., eine Gelehrsamkeit, welche er, wie richtig bemerkt worden ist[3]), sich leicht in dem etymologischen Werke des Isidorus von Sevilla verschaffen konnte. Er dividiert sodann 1001 durch 1000 und verwandelt die zunächst übrig bleibende Einheit in immer kleinere Bruchteile, bis deren Anzahl 1000 übersteigt und eine Fortsetzung der Division zuläßt. Die Verwandlung selbst, aufeinander folgende Multiplikationen erfordernd, wird auf dem Abacus ausgeführt. Schließlich kann man freilich nicht weiter zu noch niedrigeren Einheiten übergehen. Da hört denn auch die Division auf, und man könne am Ende sich nicht wundern, wenn bei

[1]) *Quidquid dividendum est in abaco in medio ponitur; divisores praeponuntur; denominationes autem, hoc est partes divisae supponuntur.* [2]) *Quae omnia magis unicae vocis alloquio quam scripta advertuntur.* [3]) Friedlein in der Zeitschr. Math. Phys. IX, 326.

den Bruchteilen etwas übrig bleibe, da auch andere Künste in vielen Punkten wacklig seien[1].

„Nur der die Dinge gemacht und bewahrt mit schützendem Walten
Ist mit jedwelcher Macht allein für vollkommen zu halten."
Rerum vero parens, qui solus cuncta tuetur,
Cum sit cunctipotens, perfectus solus habetur.

Eine anonyme Schrift über den Abacus[2]), einer Münchener Handschrift aus der Mitte des XII. S. entstammend und folglich spätestens gleichzeitig mit Radulphs oder mit Gerlands Arbeiten entstanden, zieht unsere Aufmerksamkeit dadurch auf sich, daß sie einige Kunstausdrücke enthält und deutlich erklärt, welchen wir (S. 891) bei Atelhart von Bath und bei Radulph von Laon bereits begegnet sind. Sie nennt nämlich das unmittelbare Divisionsverfahren das der goldenen Division, das komplementäre das der eisernen, jenes, weil es leicht zu verstehen und über die Annehmlichkeit des Goldes hinaus ergötzlich ist, dieses dagegen weil es allzuschwer ist und gewissermaßen die Härte des Eisens überbietet[3]. Die Apices sind einmal gezeichnet und griechische Buchstaben als mit ihnen abwechselnd auftretend genannt, ähnlich wie es bei Bernelinus der Fall war, und eine andere Ähnlichkeit mit diesem Schriftsteller besteht darin, daß für 6 nicht der richtige griechische Buchstabe angegeben ist, allerdings auch nicht Σ, sondern ein großes lateinisches *S*. Weitere Ähnlichkeiten mit Bernelinus könnten noch darin gefunden werden, daß im ganzen Verlaufe der Schrift die Apices nicht weiter benutzt werden, daß kein Abacus gezeichnet ist, daß aber die Regeln mit ungemeiner Klarheit an Beispielen erläutert werden, bei welchen durchgängig nur römische Zahlzeichen in Anwendung kommen. Die Zahlenbeispiele selbst sind nicht die gleichen bei beiden. In dieser Beziehung sind überhaupt die Abacisten sehr unabhängig voneinander.

Es ist uns nicht erinnerlich, daß irgend zwei derselben in der Benutzung des gleichen Zahlenbeispiels zusammenträfen. Dagegen ist uns ein Beispiel Gerlands in seiner ganzen Einkleidung bei einem Algorithmiker begegnet, welcher spätestens am Ende des XII. S. gelebt hat.

Unter Algorithmikern verstehen wir diejenigen Schriftsteller,

[1]) *Nec mirandum est aliquid de minutiis superesse, cum alias artes in multis videam vacillare.* [2]) Abgedruckt im *Bullettino Boncompagni* X, 607—625. Über die Handschrift vgl. Treutlein ebenda pag. 591 unter 2. [3]) Ebenda pag. 609: *Dicuntur aureae divisiones eo quod ad intelligendum faciles et super auri gratiam sint delectabiles; sicut contra ferreae que sunt nimis graves quasi ferri duriciam preponderantes.*

welche ihre unmittelbare Abhängigkeit von arabischen Vorbildern durch Vorkommen des bald mißverstandenen Wortes algorithmus, durch Anwendung des Stellenwertes der Ziffern mit Einschluß der Null, durch Nichtanwendung des Abacus, durch den beiden letzten Eigentümlichkeiten entsprechende Rechnungsverfahren an den Tag legen. Wozu indessen in allgemeinen Sätzen die Erkennungszeichen algorithmischer Schriften erörtern, deren beide hervorragendsten wir in früheren Kapiteln einzeln besprochen haben, die lateinische Übersetzung des Rechenbuches des Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî (S. 714 flgg.) und die an dasselbe Werk sich anlehnende ausführliche Schrift des Johannes von Sevilla (S. 800 flg.)?

Wir müssen einen Blick auf die allgemeinen Verhältnisse werfen, welche die Entstehung dieser Übersetzungen begleiteten. Gerbert war für uns am Ende des X. S. vor allen Dingen der glänzende Lehrer gewesen, der den Unterricht in den mathematischen Wissenschaften, so viel oder wenig aus römischen Quellen ihm davon zur Kenntnis gelangt war, neu belebte. Auch der Geschichte der Philosophie gehört der Philosoph auf dem Stuhle St. Peters an[1]). Nicht bloß das Rechnen auf dem Abacus wurde von seinen Schülern, als sie selbst zu Lehrern geworden waren, über Frankreich, Deutschland und Italien verbreitet, von wo sie einst zu den Füßen des Rheimser Stiftslehrers gepilgert waren, es machte überhaupt um die Mitte des XI. S. ein neuer Aufschwung des wissenschaftlichen Denkens sich geltend. Lanfrank, am Anfang des Jahrhunderts in Pavia geboren, in Frankreich herangebildet, führte die Dialektik in die Theologie ein und ließ den Sinn für aristotelische Schriften erstarken. Freilich kannte man sie zunächst nur aus Bearbeitungen des Boethius, aber da und dort waren doch immer einzelne Männer zu finden, welchen das Griechische geläufig genug war, ihnen zu gestatten, die Urquelle aufzusuchen, und so entstanden jetzt schon einige wenige neuere Übersetzungen. Die dadurch genährte und wachsende Neigung mit allem bekannt zu werden, was Aristoteles, dessen Name mehr und mehr den Inbegriff aller Wissenschaft darstellte, geschrieben hatte, trat besonders in zwei Ländern hervor: in England, wohin Lanfrank als Erzbischof von Canterbury gekommen war, und in Italien, wo gleichfalls eine bestimmte Persönlichkeit, Anselm der Peripatetiker, nicht zu verwechseln mit dem Bruder Radulphs von Laon, den geistigen Mittelpunkt der neuen Bewegung bildete. Deutschland beteiligte sich erst,

[1]) Herm. Reuter, Geschichte der religiösen Aufklärung im Mittelalter I, 78 flgg. Berlin 1875.

nachdem, man kann fast sagen, Missionsreisende für die dialektischen Studien es durchzogen hatten, wozu eben jener Anselm der Peripatetiker gehörte.

Aber wie sollte man die Begierde nach der Kenntnis aristotelischer Schriften stillen? Griechische Texte waren nur in seltensten Handschriften zugänglich. Man erfuhr, daß die Araber eifrige Philosophen waren, daß auch sie keinen der Alten höher schätzten, als Aristoteles, daß bei ihnen Übersetzungen und Erläuterungen in Menge zu finden waren. Arabisches war schon früher, jedenfalls schon am Ende des X. S. ins Lateinische übersetzt worden. Wir erinnern an die Übersetzungen astronomischer Schriften, welche Lupitus von Barcelona angefertigt, Gerbert zu besitzen gewünscht hat, wir erinnern an die Vorlage Hermann des Lahmen für seine Bücher über das Astrolabium. Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, daß wir somit es keineswegs an sich für unmöglich halten, daß Gerbert bei seinem Aufenthalt in der spanischen Mark durch Übersetzungen auch mit arabischer Rechenkunst hätte bekannt werden können, sondern daß wir nur durch den allerdings entscheidenden Umstand bewogen sind, diese Kenntnis in Abrede zu stellen, daß gar nichts zwischen Gerbert und den Arabern gemein ist, durchaus gar nichts in der Anordnung wie in der Ausführung der Rechnungen als nur neun Ziffern ohne das zehnte Zeichen der Null, und daß diese Gemeinschaft sich uns hinreichend mittels römischer Erinnerungen erklärt, während jeder andere Erklärungsversuch an der verhältnismäßigen Geringfügigkeit des Gemeinschaftlichen neben den weit überwiegenden Verschiedenheiten scheitert.

Jetzt suchte man, etwa vom Jahre 1100 an, noch mehr der arabischen Bearbeitungen griechischer Schriftsteller habhaft zu werden und sie in das Lateinische zu übertragen. Dazu kommt ein anderer Umstand, der, scheint es uns, nicht übersehen werden darf, wenn es sich darum handelt, ein geistiges Bild jener Zeit zu entwerfen und die mehr und mehr sich geltend machende Einwirkung arabischer Wissenschaft auf das Abendland zu schildern. Mit dem Jahre 1100 beginnen die Kreuzzüge. Jeder wissenschaftliche Zweck war denselben fremd, aber wissenschaftliche Erfolge haben sie gehabt. Wir haben (S. 778) berührt, daß die Kreuzfahrer im Oriente auf eine ihnen überlegene Bildung stießen, daß zwei Jahrhunderte lang der Verkehr ein meistens feindlicher, aber in längeren Pausen auch ein nachbarlich freundlicher war. Wie ehedem nestorianische Christen die Ärzte der Chalifen gewesen waren und zur Einführung griechischer Wissenschaft unter die Araber das meiste beigetragen haben, so bildete jetzt wieder medizinisches und astrologisches Wissen den

Freipaß, auf welchen hin arabische und jüdische in arabischer Schulung gebildete Ärzte und Sterndeuter an den christlichen Höfen erschienen. Sie kamen von Osten her, aber auch Spanien stellte seine Männer, und Sizilien lieferte für ganz Unteritalien im XII. und mehr noch im XIII. S. den belebenden geistigen Sauerstoff.

Für Italien waren die Kreuzzüge noch in mehreren anderen Beziehungen von nicht zu unterschätzenden Folgen[1]). Die Menschenmasse, welche in den Kreuzzügen sich nach Osten wälzte, die einen getrieben von heiligem Glaubenseifer, die anderen beseelt von dem Wunsche die äußeren Vorteile zu genießen, zu welchen die Kreuznahme berechtigte, die dritten mit fortgerissen von dem allgemeinen Zug, bezifferte sich auf viele Millionen. Die meisten nahmen ihren Weg über Italien; nicht wenige kehrten bis dahin, aber auch nur bis dahin zurück. Der kaufmännische Geist der Italiener wußte aus dieser Strömung vielfach Nutzen zu ziehen. Italiener — Lombarden wie man sie gewöhnlich nannte — erschienen in den Mittelpunkten, wo Kreuzfahrer sich sammelten, boten gegen wertvolles Pfand und hohen Zins ihre Geldhilfe an, welche gern in Anspruch genommen ihnen gestattete, aus dem Gewinne ganze Straßen zu bauen, die bis auf den heutigen Tag sich nach ihnen benennen. Die zurückkehrenden Kreuzfahrer ließen sich nicht minder ausnutzen. Sie brachten Beutestücke mit, die sie in Geld umsetzten, um den üppigeren Neigungen zu genügen, welche sie insbesondere in bezug auf Speisen und Kleidung angenommen hatten. Und wieder waren es die Italiener, die vorzugsweise es auszubeuten wußten, daß die Gewürze, die Seide des Orients zu Lebensbedürfnissen geworden waren. An der Nordküste Afrikas, wie in Ägypten, wie an dem Strande des ehemaligen Tyrus entstanden italienische Handelsplätze, überall in nächster Beziehung zu arabischen Kaufleuten und, wie wir (S. 817) schon angedeutet haben, hier nicht ohne Einfluß auf das Wissen derselben, andererseits jedenfalls auch von ihnen Samen erhaltend, dessen Keimen wir im nächsten Bande dieses Werkes verfolgen müssen, wenn wir in den reichen italienischen Städten uns umsehen, deren Bürger die Feder nicht bloß zum Eintrag gewinnbringender Handelsgeschäfte in ihre kaufmännisch geführten Bücher, sondern auch zu streng wissenschaftlichen Arbeiten zu benutzen wußten und sich zu Trägern mathematischer Fortentwicklung machten.

Wir haben einen der ersten Schriftsteller, der nachweislich mit der Übersetzung mathematischer Schriften aus dem Arabischen sich

---

[1]) De Choiseul-Daillecourt, *De l'influence des croisades sur l'état des peuples de l'Europe.* Paris 1809.

beschäftigte, schon einigemal genannt: Atelhart von Bath[1]). Sein Hauptwerk „Fragen aus der Natur" enthält Bemerkungen, welche vermöge der Persönlichkeiten, auf die sie sich beziehen, nur in den ersten 30 Jahren des XII. S. niedergeschrieben sein können, und somit zur Feststellung der Lebenszeit ihres Verfassers führten. Atelhart hat, um zur Kenntnis der arabischen Sprache zu gelangen, weite Reisen gemacht. Er ist in Kleinasien, in Ägypten, in Spanien gewesen, überall die gleichen wissenschaftlichen Zwecke verfolgend und um ihretwillen tausend Gefahren trotzend. Wir wissen schon, daß Atelhart die astronomischen Tafeln des Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî übersetzt hat, daß von ihm eine lateinische Bearbeitung der euklidischen Elemente[2]) nach dem Arabischen herrührt (S. 713). Ob Atelhart es war, welcher die Übersetzung des Rechenbuches Alchwarizmîs anfertigte, konnte nicht mit Bestimmtheit festgestellt werden. Merkwürdig wäre es um deswillen, weil Atelhart auch über den Abacus geschrieben hat (S. 891) und somit Abacist und Algorithmiker in einer Person wäre.

Als Schüler Atelharts bezeichnet sich selbst Ocreat der Verfasser eines Auszuges aus einer arabischen Schrift über Multiplikation und Division in den Einleitungsworten: *Prologus H. Ocreati in Helceph ad Adelhardum Baiotensem magistrum suum*[3]). Man möchte zunächst an Atelhart von Bath als Lehrer denken. Dann müßte es aber Adelhardum Bathonensem heißen. Die Form Baiotensem zwingt einen im übrigen unbekannten Atelhart von Bayeux anzunehmen. Ferner hat man in Helceph den Namen des arabischen Schriftstellers erkennen wollen, von welchem die durch Ocreatus (der Gestiefelte?)[4]) ausgezogene Abhandlung herrührte. Man ist jedoch zu der nachträglichen sehr anmutenden Meinung gekommen, es sei Helceph die Verketzerung von *Al kâfî*, die genügende Untersuchung, und Ocreatus' Vorlage sei ähnlich betitelt gewesen wie die Schrift Alkarchîs, von der wir unter dem Namen *Al kâfî fîl hisâb* gehandelt haben (S. 762 flg.). Wir erinnern uns, daß wir dem Auszuge Ocreatus' (S. 433) die Bemerkung entnahmen, Nikomachus habe das Quadrat a^2 mittels einer

[1]) Jourdain, *Recherches sur les anciennes traductions latines d'Aristote* (2ième édition) pag. 27, 97—99, 258—277. [2]) Vgl. darüber einen Aufsatz von Weißenborn in dem Supplementhefte zur historisch-literarischen Abteilung der Zeitschr. Math. Phys. Bd. XXV (1880). [3]) Jourdain l. c. pag. 99, Anmerkung 1 hat auf diese in einer Pariser Handschrift des XIII. S. enthaltene Abhandlung hingewiesen. Zum Abdrucke gelangte sie im Supplementhefte der histor.-literar. Abtlg. Zeitschr. Math. Phys. Bd. XXV (1880) mit einer Einleitung von C. Henry, welcher wir die von L. Rodet herstammende im Texte folgende Vermutung über Helceph entnehmen. [4]) Auf diese mögliche Bedeutung des Namens hat uns W. Wattenbach aufmerksam gemacht.

Art komplementärer Multiplikation sich zu verschaffen gewußt. Ob diese Angabe der arabischen Vorlage entstammt, ob sie durch Ocreatus etwa einer damals noch vorhandenen Bearbeitung des Nikomachus von Appuleius entnommen wurde, ist durchaus nicht zu entscheiden. Ein Johannes Ocreatus wird in dem englischen Handschriftenkataloge als Euklidübersetzer genannt. Ob dieses auf einem Mißverständnisse beruht, wäre an Ort und Stelle zu untersuchen[1]).

Am Anfange des XII. S. lebte auch Plato von Tivoli oder Plato Tiburtinus[2]), der vermeintliche Übersetzer des Albattânî, durch welchen, wie man früher annahm, das Wort Sinus (S. 737) in die Trigonometrie eingeführt worden sei. Wenn nicht Albattânîs Astronomie hat Plato doch verschiedene astrologische Schriften übersetzt. Eine derselben unter dem Titel: Astrologische Aphorismen von oder an Almanṣûr hat Plato in Barcelona angefertigt und im Jahre 530 der Hidschra, d. h. 1136 n. Chr. beendigt[3]). Auch die aus dem Hebräischen des Abraham Savasorda durch Plato übersetzte praktische Geometrie, welche in mehrfachen Handschriften vorhanden ist, trägt ein Datum 510 arabischer Zeitrechnung d. h. also 1116 und ist als ältestes Zeugnis seiner Wirksamkeit aufgefaßt worden. Unter den mittelbar aus dem Griechischen stammenden Werken ist die mathematisch wichtigste Schrift, welche Plato aus dem Arabischen übersetzt hat, die Sphärik des Theodosius.

Noch ein Übersetzer, an welchen wir uns zu erinnern haben, ist Gerhard von Cremona[4]). Zufolge einer sehr alten biographischen Notiz über denselben ist Gerhard 1114 in Cremona geboren, wurde frühzeitig von philosophischen Studien angezogen und fand insbesondere an der Astronomie seine Freude. Das Bedauern, der großen Zusammenstellung des Ptolemäus nicht habhaft werden zu können, vereinigt mit der, wir wissen nicht wie, erlangten Kenntnis, daß dieses Werk in arabischer Sprache vorhanden sei, führte Gerhard nach Toledo, wo er 1175 die Übersetzung des Almagestes aus dem Arabischen in das Lateinische vollendete[5]). Aber das war, wenn auch die Veranlassung, doch keineswegs die einzige Frucht seines Toledoer Aufenthaltes. Eine fast unglaublich große Menge von Schriften aller Art wird uns genannt, welche Gerhard aus dem Arabischen in das

[1]) Catalog. Mss. Angl. Tom. II pag. 247 Nr. 8639. Wüstenfeld, Die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische S. 23. [2]) B. Boncompagni, *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino traduttore del secolo duodecimo.* Roma 1851. [3]) Vgl. Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. Bd. XII, S. 26. [4]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese traduttore del secolo duodecimo e di Gherardo da Sabbionetta astronomo del secolo decimoterzo.* Roma 1851. [5]) Ebenda pag. 18.

Lateinische übertrug[1]), so daß wir unter Erwägung des Todesjahres Gerhards, welches auf 1187 fiel, kaum annehmen dürfen, daß alle seine Übersetzungen erst nach der des Almagestes angefertigt worden sein sollten. Unter den mathematischen Schriften, welche Gerhard bearbeitet haben soll, sind 15 Bücher des Euklid genannt, jedenfalls seine Elemente und die beiden Bücher, welche lange als 14. und 15. Buch mitgeschleppt wurden. Von der Übersetzung der euklidischen Elemente sind teils Bruchstücke teils vollständige Handschriften in Paris, in Boulogne sur mer, in Brügge aufgefunden worden[2]). Deren Wortlaut läßt mit höchster Wahrscheinlichkeit darauf schließen, daß zu Gerhards Zeiten außer den arabischen Übersetzungen Euklids, deren eine ihm als Vorlage diente, auch eine ihm bekannte und von ihm mitbenutzte lateinische Übersetzung aus dem Griechischen vorhanden war, eine Tatsache, die uns nicht allzusehr in Erstaunen setzen kann, wenn wir an das Palimpsest von Verona (S. 565) denken. Von Gerhards weiteren Übersetzungen werden uns genannt Euklids Buch der gegebenen Dinge, die Sphärik des Theodosius, ein Werk des Menelaus. Diese zahlreichen Übersetzungen ursprünglich griechischer Schriften bilden die geschichtliche Bedeutung Platos und Gerhards. Nur was sie in lateinischer Sprache boten, konnte zu europäischem Besitze werden und ist es geworden, wie wir im II. Bande uns überzeugen werden. Gerhard übersetzte ferner auch mit gleichem geschichtlichen Erfolge geometrische Schriften von arabischen Verfassern, von den drei Brüdern, von Tâbit, aber auch die Algebra des Alchwarizmî[3]). Da Gerhard, wie wir wissen, eine Algebra übersetzt hat (S. 803), welche erhalten ist und als von der des Muḥammed ibn Mûsâ verschieden sich erwies, so ist entweder in jener alten Notiz ein kleiner Irrtum vorhanden, oder wir müssen annehmen, Gerhard habe neben der Algebra des Muḥammed ibn Mûsâ auch jene andere vollkommnere übersetzt, die nur in dem genannten Verzeichnisse fehle, eine Annahme, welche darin ihre Stütze findet, daß jenes Verzeichnis auch sonst nicht ganz vollständig ist und medizinische Schriften des Râzi, des Ibn Sina, des Albucasis vermissen läßt, von deren Übersetzung durch Gerhard uns anderweitig berichtet wird[4]). Vielleicht darf man darauf gestützt auch einen Algorithmus des Meister Gerhard, der handschriftlich in London sich befindet[5]), unserem Gerhard von Cremona überweisen. Das wäre alsdann der erste Algorithmus von bekanntem abendländischem Verfasser, den

[1]) B. Boncompagni, Gherardo Crem. pag. 4—7 und 12. [2]) Björnbo in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge VI, 242—248. [3]) B. Boncompagni, Gherardo Crem pag. 5: *Liber alchoarismi de iebra et almucabula tractatus* I. [4]) Ebenda pag. 12. [5]) Ebenda pag. 57.

wir zu nennen hätten. Vielleicht gibt es noch eine zweite umfangreichere Handschrift desselben Algorithmus in einem Vatikankodex, der den *Tractatus magistri Gernardi*[1]) enthält. Genauer werden wir auf diesen Algorithmus, der unter dem Namen Algorithmus demonstratus ohne Bezeichnung eines Verfassers 1533 gedruckt worden ist, erst im II. Bande und zwar im 43. Kapitel eingehen.

Auch Rudolf von Brügge, der im Jahre 1144 das Planisphärium des Ptolemäus nebst den Erläuterungen eines gewissen Maslama al Madjriti dazu bearbeitete[2]), gehört unter die Übersetzer des XII. S.

Den Algorithmus des Johannes von Sevilla müssen wir wiederholt an dieser Stelle in Erinnerung bringen, um nochmals einige Einzelheiten zu betonen, die, wenn auch nicht so wesentlich wie das Vorkommen des Wortes Algorithmus, der Null[3]) und dagegen das Nichtvorkommen eines Abacus, doch als kennzeichnend genug sich erweisen, um sofort die Verschiedenheit der Quellen für Abacisten und Algorithmiker hervortreten zu lassen. Der Algorithmiker nennt die Inder, der Abacist nicht. Der Algorithmiker schildert Verdoppelung und Zweiteilung als besondere Rechnungsverfahren, bevor er zur Multiplikation und Division übergeht, der Abacist nicht. Der Algorithmiker lehrt Wurzelausziehungen, der Abacist nicht. Der Algorithmiker benutzt Sexagesimalbrüche nach indischem, der Abacist Duodezimalbrüche nach römischem Vorbilde. Allen diesen Verschiedenheiten gegenüber, zu welchen wir noch beifügen können, daß die Zahlwörter *igin* usw., welche bei Abacisten vorkommen, bei Algorithmikern, so viel wir wissen, nie gefunden worden sind, ist es nur die Übersetzung von Einer und Zehner durch *digitus* und *articulus*, welche Algorithmikern und Abacisten gemeinsam ist. Aber wir wiederholen hier, was wir früher gesagt haben (S. 802), der Algorithmiker bediente sich dieser Wörter, weil nur sie in seiner Zeit landläufige waren. Er dachte dabei so wenig an Übernahme von Ausdrücken aus einem ganz anderen Gedanken- und Bildungskreise, wie da wo er irgend eines Zahlwortes sich bediente. Ihm hieß *digitus* Einer, *articulus* Zehner genau mit der gleichen Unbefangenheit wie *septem* sieben, *viginti* zwanzig. Es gab ihm in latei-

[1]) Björnbo in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 149—150 (1902). P. Duhem in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge VI, 9—15 (1905). [2]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 511, deutsch S. 595, hat den Namen unrichtig *Molsem*. Der richtige Namen wurde von Steinschneider angegeben. *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge III, 76 (1902). [3]) Wie langsam übrigens die Null sich einbürgerte vgl. Wattenbach, Anleitung zur lateinischen Palaeographie. 4. Auflage. Leipzig 1886. S. 104.

nischer Sprache keine anderen Wörter für diese Begriffe als die genannten, und er fühlte sich weder verpflichtet, noch berechtigt, neue Wörter einzuführen, wo es nur um alte Begriffe sich handelte. Der Algorithmiker stellt, das bleibt unter allen Umständen wahr, eine spätere Entwicklung dar als der Abacist, und hat, wenn Ähnlichkeiten auch anderer Art auftreten, sicherlich aus seinen abendländischen Vorgängern geschöpft.

Ein Beispiel solcher Art scheint ein Algorithmus zu gewähren, der einer nicht später als 1200 geschriebenen früheren Salemer, jetzt Heidelberger Handschrift entstammt[1]). Er enthält die sämtlichen wesentlichen Merkmale der Algorithmiker, aber darüber hinaus die komplementäre Multiplikation[2]) fast in derselben Form, wie wir sie früher (S. 528) hauptsächlich der Ähnlichkeit des Gedankens mit der komplementären Division wegen als römischen Ursprunges vermutet haben. „Ziehe, so schreibt der Verfasser vor, die Differenz des einen Faktors von dem anderen Faktor ab, der Rest gibt die Zehner, dann multipliziere die Differenzen beider Faktoren miteinander, und Du hast die Summe der ganzen Zahl." Wir haben freilich diese komplementäre Multiplikation, die der Formel

$$a \cdot b = 10\,(a - (10 - b)) + (10 - a) \cdot (10 - b)$$

gehorcht, bei keinem älteren Schriftsteller, weder bei irgend einem Abacisten noch bei einem Araber gefunden, nur Ocreatus' Regel des Nikomachus ist ihr einigermaßen verwandt, aber um so gewisser scheint es uns, daß nur ein römisch gebildeter Rechner sich ihrer bedienen konnte. Darin beirrt uns auch der Umstand nicht, daß die komplementäre Division bei unserem Verfasser nicht Eingang gefunden hat. Wohl fand solchen, wie schon (S. 902) angekündigt, ein Rechenbeispiel Gerlands. Gerland stellt die Aufgabe: unter elf Krämer die Summe von 100 Mark zu verteilen[3]) und findet als Quotient 9 nebst Bruchteilen, die in den bekannten duodezimalen Untereinheiten ausgesprochen werden. Unser Algorithmiker hat die Division von 100 Librae durch 11 vollzogen und jeder Teilhaber ist ihm ein Krämer, *institor*[4]). Die eine bei der Division übrig bleibende *libra* verwandelt er nun freilich nicht in Zwölftel, sondern er setzt sie gleich 40 *solidi*. Der weitere Rest von 7 *solidi* wird in *nummi* verwandelt, deren 12 einen *solidus* ausmachen. Wieder bleiben bei der Division 7 *nummi* übrig, und für diese solle man Eier kaufen, deren die Krämer bei der Mahlzeit sich erfreuen werden. Für jeden

[1]) Abgedruckt in der Zeitschr. Math. Phys. X, 1—16. [2]) Ebenda S. 5. [3]) *Bullettino Boncompagni* X, 604: *Sint XI institores et dividantur inter eos C marcae.* [4]) Zeitschr. Math. Phys X, 7: *Exemplum librarum C.*

nummus erhält man 13 Eier, im ganzen also 91, und teilt man auch diese wieder durch 11, so bleibt abermals ein Rest von 3 Eiern. Die soll man dem zum Lohne geben, der die Teilung vollzogen hat, oder sie gegen Salz umtauschen, welches vermutlich zu den Eiern gegessen werden soll.

Andere Algorithmiker aus der Zeit, welche wir hier besprechen, also bis etwa zum Jahre 1200, sind gewiß noch mannigfach in handschriftlichen Texten vorhanden, aber im Drucke nicht veröffentlicht worden. Spätere Schriften der gleichen Natur müssen wir zur Behandlung uns aufbewahren, wenn wir das XIII. S. zu schildern haben werden, und mit noch späteren Perioden fällt erst die Erinnerung an den Ursprung des Abacus zusammen, die z. B. in Bildwerken aus dem Jahre 1500 etwa nachzuweisen wäre.

Wir schließen hier unsere Darstellung zunächst ab. Das Jahr 1200 ist für die Geschichte der europäischen Mathematik ein allzuwichtiges, um nicht durch das Ende eines Bandes ihm auch äußerlich die Bedeutung beizulegen, welche es verdient. Mit dem Jahre 1200 ist das christliche Abendland im Besitze der Rechenkunst aus den verschiedensten Quellen, im Besitze der Null und des durch sie ermöglichten vollen Stellenwertes der Ziffern. Die Algebra als Lehre von den Gleichungen ersten und zweiten Grades ist durch Gerhard von Cremona zugänglich geworden. Die Geometrie des Euklid, die Astronomie des Ptolemäus, Schriften des Theodosius, des Menelaus sind in lateinischen Übersetzungen vorhanden. Das Bewußtsein, wo weitere griechische Schriften erhaltbar sein müssen, die zum voraus begründete Wertschätzung derselben macht sich mehr und mehr geltend. In diesem Augenblicke auftretende mathematische Geister trafen in eine glückliche Zeit. Zum ersten Male war ihnen wieder genügender Stoff gegeben, mit welchem ihre Erfindungsgabe sich beschäftigen, von welchem aus sie wesentliche Fortschritte machen konnten. Und wie das im Winde fliegende Samenkorn meistens ein Fleckchen Erde findet, in welchem es sich entwickelt, so hat die Schöpfungskraft dafür gesorgt, daß kaum jemals Gedanken zugrunde gehen, die dem geistigen Luftzuge einmal angehören. Es finden sich zur rechten Zeit die rechten Männer. Zwei Namen seien hier ankündigend genannt, welche die Träger der neu sich entfaltenden Wissenschaft für uns werden: Leonardo der Pisaner und Jordanus Nemorarius.

Ergänzungen und Verbesserungen.

Zu S. 163—164. Herr Junge macht uns brieflich darauf aufmerksam, daß die (S. 164, Anmerkung 1) angegebenen beiden Erklärungsversuche von Martin und Hultsch wesentlich voneinander abweichen. Ersterer habe die Timäusstelle erklärt durch die Proportion: Feuer zu Luft wie Wasser zu Erde; letzterer dagegen habe zwei aufeinanderfolgende stetige Verhältnisse angenommen: Feuer zu Luft wie Luft zu Wasser wie Wasser zu Erde, und in der Tat schließe diese Übersetzung sich dem Texte des Timäus besser an. Für die auf S. 164 gegebene Auseinandersetzung der Begriffe von Flächen- und Körperzahlen ist es allerdings ziemlich gleichgültig, welcher Verdeutschung man den Vorzug gibt.

Zu S. 502. Herr Eneström (Bibliotheca Mathematica, 3. Folge VII, 203) rückt gestützt auf Untersuchungen von Tannery und von Heiberg die Lebenszeit des Eutokius um etwa 50 Jahre hinauf. Dieser sei etwa 480 geboren und nicht Schüler des Isidorus, sondern des Ammonius (S. 500) gewesen.

Zu S. 717. Herr Eneström (Bibliotheca Mathematica, 3. Folge VII, 204—205) hält die Musterrechnung von 46468 : 324 für unrichtig und schlägt eine andere Anordnung derselben vor. Das Original enthält keinerlei Musterrechnung, eine solche war vielmehr nach dem beigegebenen Texte herzustellen, und da scheint in der Tat die Eneströmsche Anordnung Vorzüge vor der früher angenommenen zu besitzen.

S. 760—762. Herr Suter hat von dem Leidener Ms. 556 (Warn.), in welchem Al-Nasawîs Befriedigender Traktat fol. 68^{v}—79^{v} sich befindet, Einsicht genommen und hat darüber (Bibliotheca Mathematica, 3. Folge VII, 113—119) berichtet. Wir entnehmen seinem Berichte folgende wichtige, vorher nicht bekannte Tatsachen. Al-Nasawî lehrt die Division von Brüchen dadurch zu vollziehen, daß er Divisor und Dividend gleichnamig macht. Er sagt also dem Sinne nach

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}.$$

Er gibt aber auch die Regel von der Multiplikation mit umgekehrtem Divisor oder

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Die Quadratwurzelausziehung wird zuerst in allgemeinen wenig deutlichen oder nur lückenhaft erhaltenen Vorschriften gelehrt, dann an dem Beispiele: Quadratwurzel aus 57342 erläutert. Das Verfahren ist geradezu modern. Die Zahl wird von der Rechten beginnend in zweistellige Gruppen zerlegt und $2^2 = 4$ als der 5 nächstliegende Quadratzahl erkannt. Diese 4 zieht Al-Nasawî von der 5 ab und dividiert mit dem Doppelten von 2 oder mit 4 in 17. Der Quotient ist 3, worauf 3 mal 43 oder 129 von 173 abgezogen den Rest 44 läßt. Durch $2 \times 23 = 46$ wird nun in 444 dividiert, wodurch 9 als Quotient erscheint. Dann ist 9 mal 469 oder 4221 von 4442 abzuziehen und läßt 221 als Rest. Das um 1 vermehrte Doppelte von 234 ist aber 469, also $\frac{221}{469}$ noch zu 239 als Quadratwurzel hinzuzufügen. Man erkennt in dieser Auseinandersetzung die Formel $(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)b$ und den für die bruchweise Annäherung gebrauchten Wert $\sqrt{A^2+r} \sim A + \frac{r}{2A+1}$. Die Kubikwurzelausziehung schließt sich an und wird an dem Beispiele der Kubikwurzel aus 3652296 erläutert. Wir gehen hier rascher über unsere Vorlage hinweg und bemerken nur, daß sie den Gebrauch der Formel $(a+b)^3 = a^3 + [3a^2 + (3a+b)b]b$ zu erkennen gestattet. Was aber die weitergehende bruchweise Annäherung betrifft, so vermutet zwar unser Berichterstatter, sie habe sich nach der Formel $\sqrt[3]{A^3+r} \sim A + \frac{r}{3A^2+3A+1}$ gerichtet, kann jedoch diese Vermutung nicht durch den erhaltenen Text bestätigen. Dagegen kommt in dem 4. dem Rechnen mit Sexagesimalbrüchen gewidmeten Buche deutlich zu erkennen, daß Al-Nasawî gleich dem von Johannes von Sevilla (S. 801) übersetzten Schriftsteller den Gebrauch von Dezimalbrüchen bei der Ausziehung von Quadratwurzeln liebte. Er setzt z. B. $\sqrt{17^0} = \frac{1}{100}\sqrt{170000^0} = \frac{1}{100} \cdot 412^0 = 4^0\, 7'\, 12''$.

Zu S. 805. Wir haben leider versäumt in unserem Handexemplare seinerzeit anzumerken, daß die von Ibn Chaldûn erwähnte Vorlage des Ibn Albannâ inzwischen näher bekannt geworden ist. Wir sehen uns dadurch genötigt, noch nachträglich auf Herrn Suters ausführlichen Aufsatz „*Das Rechenbuch des Abû Zakarîjâ el Hassâr*“ (Bibliotheca Mathematica, 3. Folge II, 12—40) hinzuweisen, welcher in unseren Text hätte hineingearbeitet werden sollen. Diese Vorlage scheint dem XII. S. anzugehören.

Register.

A.

B.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

X.

Y.

Z.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Diophantus, des, von Alexandria Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. Wertheim [X u. 346 S.] gr. 8. 1890. geh. n. ℳ 8.—

Engel, Friedrich, und **Paul Stäckel,** Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Mit vielen Figuren im Text. In 2 Bänden. gr. 8. geb.

I. Band: **Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij,** zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Friedr. Engel. I. Teil: Die Übersetzung. Mit einem Bildnisse Lobatschefskijs und mit 194 Figuren im Text. II. Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Register. Mit 67 Figuren im Text. [XVI, IV u. 476 S.] 1899. geh. n. ℳ 14.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 15.40.

II. Band: **Wolfgang und Johann Bolyai,** geometrische Untersuchungen, herausgegeben von Paul Stäckel. Mit einem Bildnisse Wolfgang Bolyais. [In Vorbereitung.]

Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit Benutzung der Textausgabe von Heiberg. Von Dr. Max Simon, Professor an der Universität Straßburg i. E. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XI. Heft. Mit 192 Figuren im Text. [VII u. 141 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 5.—

Fiorini, Matteo, Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion. Nach dem Italienischen frei bearb. von Dr. Sigmund Günther, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 138 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 4.—

Galilei, Galileo, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das Ptolemäische und das Kopernikanische. Aus dem Italienischen übersetzt und erläutert von Emil Strauß. [LXXXIV u. 586 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 16.—

Gauß, Carl Friedrich, Werke. Herausgegeben von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 10 Bände. gr. 4. kart.

Band I: Disquisitiones arithmeticae. 2. Abdr. [478 S.] 1870. n. ℳ 20.—
— II: Höhere Arithmetik. 2. Abdr. [528 S.] 1876. n. ℳ 20.—. Nachtrag z. ersten Abdr. des 2. Bandes. [33 S.] 1876. n. ℳ 2.—
— III: Analysis. 2. Abdr. [499 S.] 1876. n. ℳ 20.—
— IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Geometrie. 2. Abdr. [492 S.] 1880. n. ℳ 25.—
— V: Mathematische Physik. 2. Abdr. [642 S.] 1877. n. ℳ 25.—
— VI: Astronomische Abhandlungen. 2. Abdr. [664 S.] 1874. n. ℳ 33.—
— VII: Theoria motus und Theoretisch-Astronomischer Nachlaß. [650 S.] 1906. n. ℳ 30.—
— VIII: Fundamente der Geometrie usw. [III u. 458 S.] 1900. n. ℳ 24.—
— IX: Geodätische Nachträge zu Band IV; insbesondere Hannoversche Gradmessung. [IV u. 528 S.] 1903. n. ℳ 26.—

Band X wird biographische Angaben und interessante Stücke des Briefwechsels bieten.

——— und **Wolfg. Bolyai,** Briefwechsel. Mit Unterstützung der Kgl. Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgeg. von Franz Schmidt und Paul Stäckel. [XVI u. 208 S.] 4. 1899. In Halbkalblederband n. ℳ 16.—

Hering, K., Ingenieur in Darmstadt, das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine 1706—1906. Eine historisch-technisch-wirtschaftliche Betrachtung A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XXIII. Heft. Mit 13 Figuren im Text. gr. 8. [Erscheint Ende Januar 1907.]

Jacobi, C. G. J., und **M. H. Jacobi,** Briefwechsel. Herausgegeben von Dr. W. Ahrens in Magdeburg. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor XXII. Heft. Mit 2 Bildnissen. [XX u. 282 S.] gr. 8. 1907. geh. n. ℳ 6.90, in Leinwand geb. n. ℳ 7.50.

Koenigsberger, Dr. Leo, Professor an der Universität Heidelberg, Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Mit einem Bildnis und dem Faksimile eines Briefes. [XVIII u. 554 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 16.—

Koenigsberger, Dr. Leo, Professor an der Universität Heidelberg, Carl Gustav Jacob Jacobi. Rede zu der von dem internationalen Mathematiker-Kongreß in Heidelberg veranstalteten Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages, gehalten am 9. August 1904. Mit einem Bildnis Jacobis. [II u. 40 S.] 4. 1904. geh. n. ℳ 1.20.

Leibniz, G. W., nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausgegeben und mit erläuternden Anmerkungen versehen von Dr. E. Gerland, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Klausthal. Mit 200 Figuren im Text. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XXI. Heft. [VI u. 256 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 10.—

Lobatschefskij, N. I., imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Dr. Heinrich Liebmann, Professor an der Universität Leipzig. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XIX. Mit 39 Figuren im Text und auf einer Tafel. [XI u. 187 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 8.—

Loria, Dr. Gino, Professor der höheren Geometrie an der Universität Genua, die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie, in ihrer früheren und jetzigen Entwickelung. Historische Monographie. Unter Benutzung zahlreicher Zusätze und Verbesserungen seitens des Verfassers ins Deutsche übertragen von Fritz Schütte, Oberlehrer am Gymnasium zu Düren. Mit einem Vorworte von Professor R. Sturm. [VI u. 132 S.] gr. 8. 1888. geh. n. ℳ 3.—

Macfarlane, Dr. Alexander, Professor in Chatham (Ontario Canada), Vorlesungen über britische Mathematiker des 19. Jahrhunderts. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. gr. 8. [In Vorbereitung.]

Marinelli, Dr. G., Professor an der Universität Padua, die Erdkunde bei den Kirchenvätern. Vortrag, gehalten in der italienischen geographischen Gesellschaft zu Rom am 12. März 1882. Deutsch von Dr. Ludwig Neumann, Professor am Gymnasium zu Heidelberg. Mit einem Vorwort von S. Günther. Mit Holzschnitten im Text und 2 lithographierten Karten. [VIII u. 87 S.] gr. 8. 1884. geh. n. ℳ 3.60.

Müller, Dr. Conrad H., in Göttingen, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Mit einer Einleitung: Über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik. (Sonderabdruck aus dem XVIII. Heft der Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor.) [92 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 2.—

Müller, Dr. Felix, Professor in Friedenau, Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur. [IV u. 104 S.] gr. 8. 1892. In Leinwand geb. n. ℳ 2.40.

——— Vocabulaire Mathématique, français-allemand et allemand-français. Mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch. Enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. [XV u. 316 S.] Lex.-8. 1900/1901. In Leinwand geb. n. ℳ 20.—

Wurde in 2 Lieferungen ausgegeben:

I. Lieferung: [IX u. 132 S.] 1900. geh. n. ℳ 8.—
II. — [IX—XV u. 133—316.] 1901. geh. n. ℳ 11.—

——— Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. Mit einem Bildnis Karl Schellbachs. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XX. Heft. [86 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 2.80.

Neumann, Franz, gesammelte Werke. In 3 Bänden. II. Band. Bei der Herausgabe dieses Bandes sind tätig gewesen die Herren: E. Dorn (Halle), O. E. Meyer (Breslau), C. Neumann (Leipzig), C. Pape (früher in Königsberg), L. Saalschütz (Königsberg), K. Von der Mühll (Basel), A. Wangerin (Halle), H. Weber (Straßburg). Mit einem Bildnis Franz Neumanns aus dem 86. Lebensjahre in Heliogravüre. [XVI u. 620 S.] gr. 4. 1906. geh. n. ℳ 36.—

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 4.80.

——— der Wert der Wissenschaft. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber, Professor in Straßburg i. E., und einem Bildnis des Verfassers. [V u. 252 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 3.60.

Rudio, Dr. **F.,** Professor am Polytechnikum zu Zürich, Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Mit vier Abhandlungen (in deutscher Übersetzung) über die Kreismessung von Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Mit Figuren im Text. [VIII u. 166 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 4.—, in Leinwand geb. n. ℳ 4.80.

Simon, Dr. **Max,** Professor an der Universität Straßburg i. E., über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband I. Mit 28 Figuren im Text. [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 9.—

Suter, Dr. **Heinrich,** Professor am Gymnasium zu Zürich, die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. X. Heft. [IX u. 278 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 14.—

Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Herausgegeben von dem Schriftführer des Kongresses Dr. A. Krazer, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe i. B. Mit einer Ansicht von Heidelberg in Heliogravüre [X u. 756 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 18.—

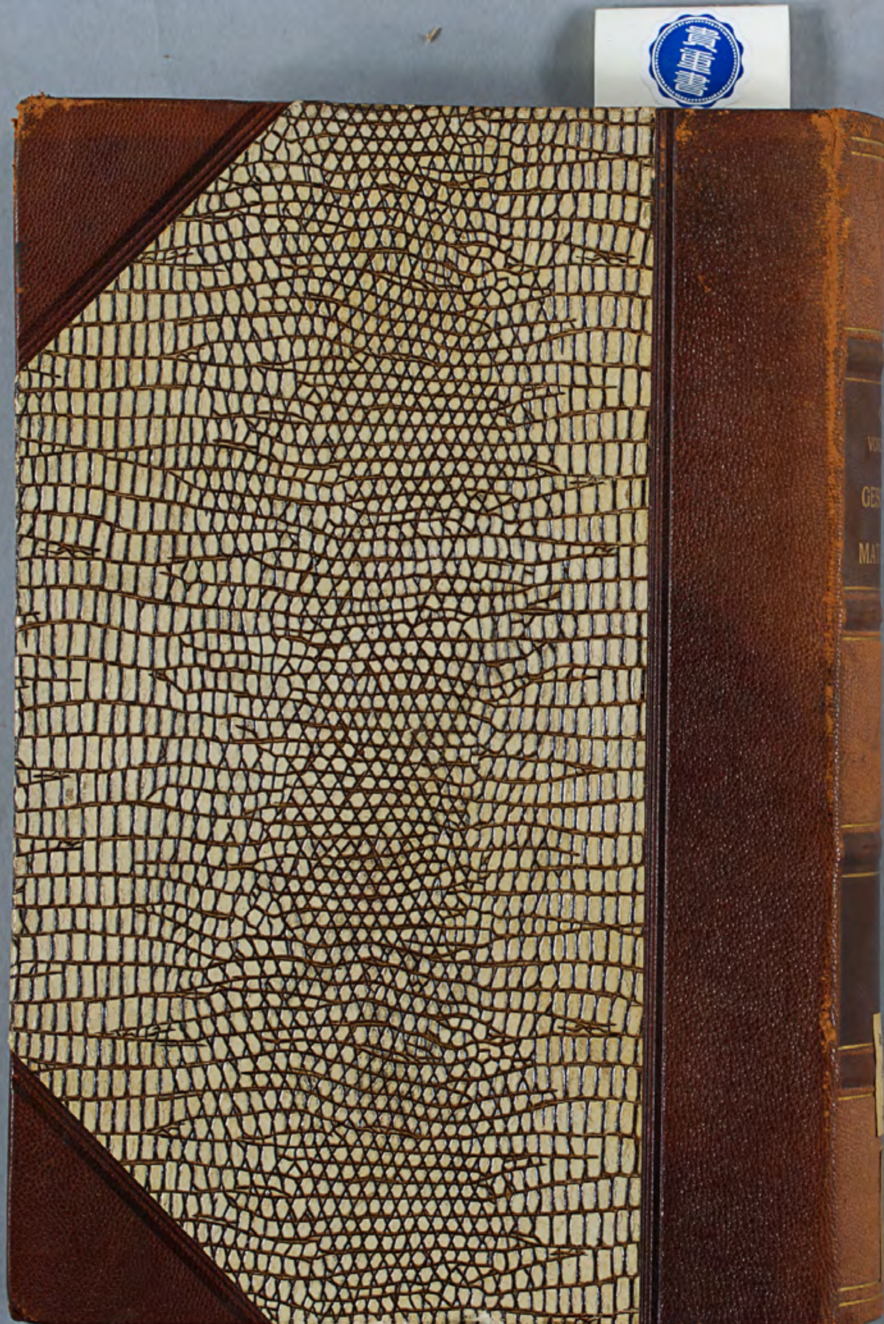
Verneri, Johannis, de triangulis sphaericis liber. Von Dr A. A. Björnbo in Kopenhagen. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XXIV. Heft. [ca. 160 S.] [Erscheint Anfang 1907.]

Weber, Dr. **H.,** Professor in Straßburg, und Dr. **J. Wellstein,** Professor in Straßburg, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 9.60. II. Band. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 12.— (Bd. III. Anwendungen der Elementar-Mathematik. Unter der Presse.)

Weinstein, Dr. **B.,** Professor an der Universität Berlin, die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin. [XIV u. 543 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 9.—

Wölffing, Dr. **Ernst,** Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Stuttgart, mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI 1. [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 14.—, in Leinwand geb. n. ℳ 15.—

Zeuthen, Dr. **H. G.,** Professor an der Universität Kopenhagen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Deutsch von Raphael Meyer. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVII. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 16.—, in Leinwand geb. n. ℳ 17.—



[Frontispiece.