31. Kapitel.

Die Mathematik der Chinesen.

„Wissen, daß man es weiß, von dem was man weiß, und wissen, daß man es nicht weiß, von dem was man nicht weiß, das ist wahre Wissenschaft.“ So soll Confucius, der chinesische Weise, dessen Lebensdauer von 551 bis 479 angesetzt wird, zu seinen Schülern gesagt haben[1]. Von China selbst dürfte nach dieser Definition kaum eine Wissenschaft möglich sein, denn weder was wir über dieses Reich wissen, noch was wir nicht wissen, ist von Zweifel befreit.

Europäischer Nachforschung hat man mit geringen Ausnahmen, welche sich auf Männer bezogen, die keineswegs mit der kritischen Vorbereitung eines Gelehrten von Fach ausgerüstet waren, zu allen Zeiten Hindernisse in den Weg zu legen gewußt. Was uns über Chinas Vergangenheit erzählt wird, stammt ausschließlich von der Benutzung chinesischer Quellen durch Chinesen her. Der Chinese aber liebt das Alte. Seine Anhänglichkeit an dasselbe geht so weit, daß er Neuerungen, wo möglich, als Rückkehr zu Altem und Ältestem darstellt, und wenn ein anderer Ausspruch des Confucius, er habe neue Schriften nicht verfaßt, er habe nur die alten geliebt, erläutert und verbreitet[2], vielleicht der persönlichen Bescheidenheit des Redners entstammt, so ist jedenfalls von anderen diese Auffassung dahin überboten worden, daß sie für alt ausgaben, was durchaus neuen und neuesten Datums war.

So gibt es kaum eine Erfindung, welche nicht mit dankbarer, vielleicht häufig ganz unbegründeter Erinnerung an bestimmte Persönlichkeiten eines längst entschwundenen Altertums geknüpft wird. Die Schrift, nach der Ansicht einer Gelehrtenschule in namenlose Vorzeit hinaufreichend, soll nach der Ansicht einer zweiten Schule von Kaiser Fü hi um 2852 v. Chr. herrühren, und ein fürstlicher

---

[1] Paul Perny, *Grammaire de la langue chinoise orale et écrite.* Paris. T. I, 1873. T. II. 1876. Der hier zitierte Ausspruch II, 243, Note I. [2] Perny II, 263.

Gelehrter Prinz Huây nân tsè gibt (189 v. Chr.) gar an, die Schrift sei durch Tsâng kiĕ, den Minister des Kaisers Huâng tì 2637 v. Chr. auf Befehl des Kaisers erfunden worden[1]). Auf Fŭ hī wird auch das dekadische Zahlensystem zurückgeführt[2]), welches er abgebildet auf dem Rücken eines aus den Fluten des Gelben Stromes auftauchenden Drachenpferdes sah und dessen Bedeutung erkannte. Die chinesische Tusche soll unter Kaiser Où wâng 1120 v. Chr. schon bereitet worden sein[3]). Confucius soll sich zum Schreiben damit eines Pinsels aus Antilopenhaar bedient haben, während Pinsel aus Hasenhaar durch Mông tiên 246 v. Chr. erfunden wurden, einen General, welcher auch eine Art von Papierbereitung lehrte und zugleich die Aufsicht über die Erbauung der chinesischen Mauer führte, eine Vereinigung von Tatsachen, in welcher wir fast eine Ironie der Geschichte zu erkennen geneigt sind. Wir würden noch anderen eben so glaubhaften oder unglaubwürdigen Nachrichten begegnen, wenn wir weiter griffen. Wir wollen lieber an der Hand chinesischer Quellen einen Blick auf die Geschichte des Reiches der Mitte werfen[4]).

Wilde Jäger waren die Ureinwohner Chinas. Zu ihnen wanderte zwischen dem XXX. und XXVII. S. von Nordwesten her das „Volk mit schwarzen Haaren" ein, Hirten, die sich bald dem Landbau widmeten und eine gewisse Kultur schon mit sich brachten. Sie hatten ein Wahlkaisertum, welches bis um 2200 währte. Nun folgten in meistens lang am Ruder bleibenden Erbfolgen verschiedene Dynastien. Die Dynastie Hin regierte 500 Jahre. Sie wurde von der Dynastie Chang gestürzt, diese um 1122 durch die Dynastie der alten Tcheōu entthront. Die Tcheōu waren ein Stamm, der unter den Chang von der alten Gemeinschaft sich trennte und westlich sich ansiedelte. Dort erstarkten sie so weit, daß seit 1200 Kämpfe zwischen ihnen und den Untertanen der Chang begannen, die in dem genannten Jahre 1122 mit der Ersetzung des letzten Chang-Kaisers Cheou sin durch Où wâng endigten. So wurde dieser letztere Kaiser aller wieder vereinigten Stämme und gab ihnen ein neues Gesetzbuch, den Tcheōu lỳ, welchen sein Bruder Tcheōu kong verfaßt haben soll, während eine andere Sage den Tcheōu lỳ wenige Jahre später (1109) im sechsten Regierungsjahre von Then wâng entstanden sein läßt[5]). Die Dynastie der Tcheōu blieb im Besitze der kaiserlichen Macht bis 221 also volle 900 Jahre.

[1]) Perny II, 2—4, 7, 9. [2]) Biernatzki, Die Arithmetik der Chinesen in Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik (1856). LII, 59—94. Die hier angezogene Stelle auf S. 92. [3]) Perny II, 92. [4]) Unsere Quelle war namentlich die Einleitung des zweibändigen Werkes: *Le Tcheōu Lỳ ou rites de Tcheōu traduit par* Ed. Biot. Paris 1851. [5]) Perny II, 303.

In diese lange Periode fällt eine Einwanderung von vielleicht hochwichtigem Einflusse auf die chinesische Kultur. Eine jüdische Kolonie ließ sich jedenfalls im VI. S. in China nieder[1]), also etwa zur Zeit, die kurz vor die Geburt des Confucius fällt, die etwa die Blütezeit eines andern chinesischen Weisen Laò tsè war, welcher 604—523 gelebt hat. Bei Laò tsè, von welchem übrigens auch weite Reisen nach Westen, vielleicht bis Assyrien, erzählt werden, findet sich mutmaßlich eine Spur der Berührung mit diesen Einwanderern in dem dreieinigen Namen Ŷ hŷ wŷ, welche er dem Taò, d. h. dem höchsten Wesen, beilegt und in welchem man Jehova, den der war, ist und sein wird, hat erkennen wollen.

Auf die Tcheōu folgt Tsin schè huâng tỳ, der sich durch eine Anordnung aus dem Jahre 213 v. Chr. den Beinamen des Bücherverbrenners verdiente[2]). Ob er nur eine neue Schrift allgemein einführen wollte, um der wachsenden Verwirrung ein Ende zu machen, die darin ihren Ursprung hatte, daß allmählich die allerverschiedensten Verschnörkelungen der Schriftzeichen Eingang gewonnen hatten, ob er, was dem, der der Gründer eines neuen Herrschergeschlechtes zu werden beabsichtigt, weit ähnlicher sieht, alles vernichtet wissen wollte, was auf die frühere Geschichte sich bezog, damit nicht der Geschmack der Alten über die neueren Einrichtungen ein Verdammungsurteil spreche oder gar die Staatskunst des Kaisers tadle, jedenfalls wurde der Befehl des Kaisers vollzogen, so genau es möglich war, und Stöße von zusammengehefteten Bambusbrettchen mit eingeritzten Schriftzeichen, die Bücher der alten Chinesen, wurden den Flammen überantwortet.

Der Kaiser starb 211. Seinem Geschlecht verblieb die Regierung nicht. Die Dynastie der Han folgte 197, und der ihr angehörige Hoei ti hob 191 das Verbrennungsedikt wieder auf. Ja unter einem der nächsten Regenten dieses Hauses Hiao wen ti 170—156 suchte man nach Werken, welche der Vernichtung entgangen waren, und fand solche in ziemlicher Menge. Bruchstücke des Tcheōu lỳ sollen damals entdeckt und der kaiserlichen Büchersammlung einverleibt worden sein, welche sodann zwischen 32 und 6 v. Chr. durch den gelehrten Minister Lieou hin noch interpoliert wurden, um, wie es heißt, gewissen damals zu treffenden Einrichtungen den Stempel hohen Alters aufzudrücken. Die Dynastie der Han ging 223 n. Chr. zu Ende.

Wieder haben wir ein für chinesische Kulturverhältnisse ungemein

[1]) Perny II, 265, 305, 312. [2]) Vgl. Tcheōu lỳ I, pag. XIII flgg. mit Perny II, 34—36.

bedeutsames Ereignis aus dieser Zeit zu erwähnen. Im Jahre 61 n. Chr. fand der in Indien verfolgte Buddhismus in China Eingang, wo er insbesondere unter der niederen Bevölkerung sich unaufhaltsam und mit so dauerndem Erfolge verbreitete, daß noch jetzt die große Masse der etwa 500 Millionen Menschen, welche chinesisch reden, ihm anhängt.

Es kann unsere Aufgabe nicht sein auch nur skizzenhaft der nun folgenden Dynastien zu gedenken. Höchstens, daß wir erwähnen wollen, wie unter den Sung im Jahre 1070 ein politisch-literarischer Streit an eine Auslegung sich knüpfte, welche Wang ngan chi, der Minister des Kaisers Chin tsong, einigen Stellen des Tcheōu lỳ gab. Damals ging man so weit die Ursprünglichkeit jenes Werkes völlig zu leugnen und es für eine Fälschung des Lieou hin, also etwa aus den drei letzten Jahrzehnten vor dem Beginne der christlichen Zeitrechnung, zu erklären. Daß man nicht einen noch späteren Zeitpunkt für das unterschobene Werk annahm, war wohl vorzugsweise in der Lebenszeit der Kommentatoren des Tcheōu lỳ begründet. Man kannte damals hauptsächlich drei solcher Kommentatoren: Tching tong dem I. S. n. Chr., Tchin khang tching dem II. S., Kiu kong yen dem VIII. S. angehörig, von welchen insbesondere der zweite zur Sicherung des Originals seit seinem Leben dienen konnte, weil sein Kommentar über das ganze Werk fortläuft und stete Vergleichungen mit den Sitten und Regeln, mit den Würden und Obliegenheiten seiner Zeit anstellt[1]). Hundert Jahre nach jenem Streite trat ein vierter Kommentator Wang tchao yu hinzu, und nun am Ende des XII. S. verfocht auch der gelehrte Tchu hi wieder die volle Echtheit des Tcheōu lỳ.

Auf die Sung folgte ein fremdes Herrschergeschlecht. Mongolen drangen in China ein und gaben dem Reiche eine Dynastie, welche 1275—1368 den Kaiserthron besetzt hielt, bis sie, die sogenannte Dynastie Yuën, verdrängt wurde durch die einheimische Dynastie Ming 1368—1644. Im Gefolge der Mongolen kamen, wie mit Bestimmtheit bekannt ist, arabische Gelehrte an den Kaiserhof von China, ihre wieder ganz anders geartete Wissenschaft mit sich führend, freilich nicht die ersten Araber, welche in China erschienen, denn schon 615 n. Chr., 713, 726, 756, 798 waren arabische Gesandtschaften dorthin gelangt, das heißt Handeltreibende, deren Anführer, um mehr beachtet und geachtet zu sein, sich als Abgeordnete des Herrschers der Araber aufspielten. Der Name, unter welchem die Araber erwähnt werden, ist Ta schi, das ist Tâzy, der persische Name

[1]) Tcheōu lỳ I, pag. LX—LXI.

derselben[1]). In die Mongolenzeit fallen auch die Reisen des Venetianers Marco Polo, dessen Berichte bei der 1295 erfolgten Heimkehr auf unverdienten Unglauben stießen. Erst unter der Mingdynastie suchten andere Europäer dem Beispiele des Wundermannes, der von seinem Umsichwerfen mit großen Zahlen oder von seinen Reichtümern den Beinamen Messer Millione erhalten hatte, zu folgen und in das schwer zugängliche Reich einzudringen.

Dem Jesuitenmissionar Matthias Ricci gelang es 1583 zuerst Zugang zu finden und in seinem Unternehmen, das Christentum zu predigen, nennenswerte Erfolge zu erreichen. Er machte sich zugleich auch als tüchtiger Astronom am Kaiserhofe geltend, so daß ihm, bis er 1620 China wieder verließ, die Leitung des Kalenderwesens übertragen wurde, eine früher in China erbliche Würde, und von nun an blieb China ein der katholischen Mission geöffnetes Land, so daß dieselbe mehr und mehr erstarkte, so daß Missionsprediger Kenntnisse genug von Land und Leuten, von Sprache und Schrift sich erwarben, um in umfangreichen Werken davon handeln zu können, um auch ihrerseits den Chinesen europäische Wissenschaft mitzuteilen. Wissen wir doch, daß Julius Aleni, der von 1613 bis zu seinem 1649 eintretenden Tode in China verweilte, in der Landessprache einen Auszug aus den Elementen des Euklid und eine praktische Geometrie verfaßte[2]). Jean François Gerbillon löste ihn ab 1686—1707, in welchem Jahre er in Peking starb. Es verfaßte eine Geometrie nach Euklid und Archimed in chinesischer und in tartarischer Sprache[3]). Das änderte sich auch nicht als die Mandschu, erst mit den Chinesen in Krieg verwickelt und zurückgeschlagen, von einer der in China nicht seltenen Gegenregierungen, die in China gegen den Kaiser sich erhob, zu Hilfe gerufen wurden, und ein Mandschu Schun tchi nach mehrjährigen Kämpfen 1647 die noch jetzt vorhandene Dynastie der Tsing gründete. Unter dieser Dynastie, insbesondere unter Kaiser Kang hi, wurde vielmehr das Verhältnis zwischen dem Kaiserhofe und den Missionären ein immer engeres. Schon unter Kang hi's Vorgänger war Adam Schaal aus Köln, gleich Ricci, Aleni und Gerbillon Mitglied des Jesuitenordens, gleich ihnen Astronom und Missionär, in China ansässig geworden. Nun folgte ein fünfter Jesuit, der Holländer Ferdinand Verbiest, den

[1]) Bretschneider, *On the knowledge possessed by the Chinese of the Arabs and Arabian Colonies.* London 1871, und A. v. Kremer, Culturgeschichte des Orients II, 280. Wien 1877. [2]) *Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero etc. con Giovanni Antonio Magini pubblicato ed illustrato da* Antonio Favaro. Bologna 1886, pag. 108 Note 4. [3]) Poggendorff, Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften I, 877.

Kang hi zum Präsidenten des Kollegiums für Astronomie ernannte, derselbe Kang hi, der in mannigfachster Weise seine Liebe für Wissenschaft betätigte und z. B. ein Wörterbuch der damals vorhandenen Schriftzeichen anfertigen ließ, welches in 32 Bänden 42000 Zeichen enthält[1]). Es folgten im XVIII. S. Männer wie Pater Prémare, Pater Gaubil, deren Werke für die Kenntnis Chinas unentbehrlich geworden sind, wenn ihnen auch anhaftet, was wir zu Anfang dieses Kapitels angedeutet haben, daß sie den Erzählungen chinesischer Berichterstatter und chinesischer Bücher ein allzubereites Ohr zu leihen liebten. Am Anfange des XIX. S. erfolgte ein Umschlag, als 1805 die katholische Mission eine Landkarte einer chinesischen Provinz nach Rom zu schicken wagte. Das alte Mißtrauen, die alte Feindschaft gegen die Fremden erwachte, welche kaum durch die Waffen Europas um die Wende des XIX. zum XX. Jahrhundert gebändigt, sicherlich nicht vernichtet worden ist.

Der Überblick, welchen wir, selbstverständlich auf Quellenwerke zweiter Hand allein uns stützend, hier gegeben haben, soll uns mehrfache Zwecke erfüllen. Er soll uns gestatten im Verlaufe dieses Kapitels der Dynastien als Zeitbestimmungen uns zu bedienen. Er soll zweitens in ein helles Licht setzen, daß die Kultur des Reiches, mit welchem wir uns zu beschäftigen haben, doch nicht so sehr gegen auswärtige Einflüsse abgeschlossen war, als man in gebildeten Kreisen Europas zu wähnen pflegt, daß vielmehr in dem Zeitraum, welcher mit dem VI. vorchristlichen Jahrhundert beginnt, der Reihe nach jüdisch-babylonische, dann indische, dann arabische, dann europäische Wissenschaft die Gelegenheit hatte in China einzudringen, eine Gelegenheit, welche kaum jemals unbenutzt verlaufen sein mag. Er soll drittens uns bemerklich machen, daß den chinesischen Zeitangaben für schriftstellerische Überreste nicht immer Glaube beizumessen ist, daß es häufig absichtliche Rückverlegungen sind, von Chinesen selbst wenigstens im Eifer gelehrter Streitigkeiten als solche verunglimpft und ihres Ansehens für unwürdig erklärt.

Steht es doch um die Glaubwürdigkeit chinesischer Berichte überhaupt nicht sonderlich, und ohne auf Gründe psychologischer Art uns einzulassen, die man weder behaupten noch verwerfen sollte, ohne sich auf eigne Kenntnis des betreffenden Volkscharakters stützen zu können, wollen wir nur ein Moment hervorheben: das ist die buddhistische Neigung zur Anwendung großer Zahlen, welche in China ihren Gipfelpunkt erreichte und in dem Namen Sand des

[1]) Stanisl. Julien in dem *Journal Asiatique* vom Mai 1841. 3ième série XI, 402.

Ganges, heng ho cha, welcher dem 10^{53} beigelegt wurde[1]), ihren Ursprung deutlich an den Tag legt.

Man könnte ferner aus dem Umfange vorhandener chinesischer Enzyklopädien den Rückschluß ziehen, daß viel Unwahres in denselben mit in Kauf genommen werden muß. Wenn uns gesagt wird, daß eine solche Enzyklopädie, welche den Namen Yûn lô tá tièn führt, aus beinahe 15000 Bänden bestehe[2]), so kann uns das schon ein Kopfschütteln entlocken. Wenn nun aber gar eine neue Enzyklopädie, zu deren Herstellung Kaiser Kiêu lông den Befehl gab, auf 160000 Bände veranschlagt worden ist, von welchen über 100000 bereits vollendet seien[3]), so ruft diese Mitteilung in uns persönlich keineswegs das Gefühl demütiger Bewunderung hervor, welches den Berichterstatter offenbar durchdringt. Wir kommen vielmehr selbst unter Beschränkung der Stärke der Bände auf das Geringfügigste und unter Ausdehnung der durch Blumenreichtum der Sprache trotz der ungemein raumsparenden Wortschrift erzielten Raumverschwendung auf das Unerträglichste nur zu dem einen Gedanken: Wie viel muß in einer solchen Enzyklopädie unwahr sein, da für ein Volk, welches seinen Stolz darein setzt um das Ausland sich nicht zu kümmern, so viel Wahres gar nicht vorhanden sein kann.

Wir werden freilich, trotz dieser Bekenntnis unserer ungläubigen Voreingenommenheit, getreulich wieder berichten, was aus verschiedenen chinesischen Werken für die Geschichte der Mathematik bei jenem Volke ermittelt worden ist, überall soweit als möglich der Zeitangabe folgend, welche die Chinesen selbst liefern, aber wir verargen es keinem unserer Leser, wenn ihn die erheblichsten Zweifel an unsere Gewährsmänner erfüllen sollten. Man wird es um so begreiflicher finden, daß wir europäischer Übertreibungen, die chinesischer als die Chinesen selbst der Sternkunde jenes Volkes ein Alter von 18500 Jahren beilegen wollen, nur mit diesem einen Worte gedenken[4]).

Einem Minister des Kaisers Huâng tì, welcher 2637 v. Chr. regierte, wurde, wie wir (S. 664) gesehen haben, nach einem Berichte die Erfindung der Schrift beigelegt. Ein anderer Minister desselben Kaisers, Cheọu lỳ, wird als Erfinder des Rechenbrettes, *swán pân*,

[1]) Ed. Biot, *Table générale d'un ouvrage chinois intitulé Souan-fa-tong-tson ou Collection des règles du calcul* im *Journal Asiatique* vom März 1839. 3ième série, VII, 195. [2]) Perny I, 10. [3]) Ebenda II, 7. [4]) G. Schlegel, *Uranographie chinoise.* Wir selbst kennen das Werk nur aus den dessen Tendenz ablehnenden Rezensionen von Jos. Bertrand (*Journal des Savans* 1875) und von S. Günther (Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, XII. Jahrgang, Heft 1).

genannt[1]), und unter ebendemselben soll das erste arithmetische Werk, die neun arithmetischen Abschnitte, *Kieou tschang*, verfaßt worden sein[2]), welches in fast allen nachfolgenden arithmetischen Werken als die erste Grundlage der Wissenschaft des Rechnens genannt wird, und welches schon Tcheöu kong, von welchem noch nachher die Rede sein wird, um 1100 v. Chr. im Auge gehabt haben soll bei einer Vorschrift[3]): die Söhne der Fürsten und des hohen Adels in den sechs Künsten zu unterweisen, nämlich in den fünf Klassen gottesdienstlicher Gebräuche, in den sechs verschiedenen Arten der Musik, in den fünf Regeln für Bogenschützen, in den fünf Vorschriften für Wagenlenker, in den sechs Anweisungen zum Schreiben und endlich den neun Methoden mit Zahlen zu rechnen. Wieder Huâng ti ist es, dem die Einführung eines 60jährigen Zyklus nachgerühmt wird[4]).

Zum besseren Verständnis dieser Berichte müssen wir einiges hier einschalten. Die Chinesen teilen ihre Zeit nach den Grundzahlen 12 und 10 ein. Zwölf Stunden bilden ihnen den Tag, und der Zehn bedienen sie sich zur höheren Zeiteinteilung[5]), nachdem eine in den heiligen Schriften vorkommende siebentägige Zeitgruppe wieder verloren gegangen ist[6]). Aus den beiden Grundzahlen 12 und 10 vereinigt soll nun die Zahl 60 jener Jahreszyklen entstanden sein. Jedes der 60 Jahre hat seinen besonderen Namen, das erste kiă, das zweite tsè usw., weshalb der ganze Zyklus kiă tsè genannt wird. Die aufeinander folgenden Namen dieser Jahre weiß jeder Chinese auswendig, und er sagt daher über sein Alter befragt ohne weiteres: ich bin in dem so und so genannten Jahre des gegenwärtigen oder des vergangenen, des vorvergangenen Zyklus geboren. Eine anderweitige Anwendung dieser Namen bietet die Geometrie, indem die einzelnen Punkte einer Figur durch sie unterschieden werden, in derselben Weise wie Griechen und Römer es durch die Buchstaben ihres Alphabetes zu erreichen wußten.

Wir haben ferner vom **Rechenbrette** swán pân gesprochen[7]). Von demselben handelt der swán fă tŏng tsöng in 6 Bänden von je 2 Büchern. Der Swán pân besteht aus in einen Rahmen eingespannten Drähten, welche insgesamt durch einen Querdraht in zwei Abteilungen zerfallen, deren kleinere 2, deren größere 5 Kugeln trägt, also abgesehen von einer sehr überflüssigen Kugel in jeder einzelnen

[1]) Perny I, 108. [2]) Biernatzki l. c. S. 62. [3]) Ebenda S. 67. [4]) Ebenda S. 62. [5]) Perny I, 104. [6]) Ebenda I, 107. [7]) Abbildungen desselben bei Duhalde, Ausführliche Beschreibung des chinesischen Reiches und der großen Tartarei, übersetzt von Mosheim. Rostock 1747, Bd. III, S. 350, und bei Perny I, 108.

Abteilung genau in der Weise hergerichtet sind, wie wir den Abacus der Römer (S. 529) beschrieben haben. Die meisten Swán pâns besitzen 10 Drähte. Es soll auch solche von 15 und mehr Drähten geben. Einem Zeichnungsfehler dürfen wir es vielleicht zuschreiben, wenn eine Abbildung nur 9 Drähte aufweist[1]), während wir allerdings selbst der Ausnahmsbildung eines echt chinesischen Swán pân mit 11 Drähten begegnet sind[2]). Wie ausnahmslos die Chinesen sich ihres Swán pân bedienten, ist schon daraus zu entnehmen, daß in den Lehrbüchern der eigentlichen Rechenkunst über Addition und Subtraktion gar keine Vorschriften gegeben sind[3]), doch wohl nur, weil man diese Rechnungsarten mit der Hand und nicht im Kopfe auszuführen gewohnt war. Für das Multiplizieren und Dividieren sind dagegen Regeln vorhanden. Ersteres beginnt bei der Vervielfachung der größten Zahlenteile, letztere wird durch wiederholte Subtraktion ausgeführt.

Da auch unter Huâng ti die Anwendung der Schrift auf arithmetische Dinge uns erwähnt wird, so müssen wir hier von der **Zahlenschreibung** bei den Chinesen reden. Wir dürfen dabei wohl zweierlei als bekannt voraussetzen: erstens daß die chinesische Sprache der Beugungsformen durchaus entbehrt, so daß alle syntaktischen Beziehungen der Wörter eines Satzes zueinander nur durch die gegenseitige Stellung sowie durch eigens dazu vorhandene Partikeln ausgedrückt werden müssen, zweitens daß die Schrift der Chinesen keine Lautschrift oder Silbenschrift, sondern eine ursprünglich bildliche Begriffsschrift ist, deren Zeichen kursiv geworden und ihrer ursprünglichen Gestalt entfremdet nunmehr aus 214 Schlüsseln[4]) durch das reichhaltigste Verbindungsverfahren hergestellt werden können. So wuchs die Anzahl chinesischer Zeichen bis auf die 42000 des Wörterbuches Kaisers Kang hi, während freilich die vier sogenannten klassischen Bücher der Chinesen nicht mehr als die Kenntnis von 2400 Zeichen von ihrem Leser verlangen[5]). Das sind immer noch viel mehr als eigentliche chinesische Stammwörter vorhanden sind, deren man neuerdings 304 zählt, welche sich durch verschiedenartige Betonung auf 1289 erheben[6]), aber naturgemäß weitaus nicht hinreichen jedem Begriffe ein eigenes Wort zuzuwenden, so daß 20, ja 30 chinesische Schriftzeichen durch dasselbe Wort ausgesprochen werden, beziehungsweise daß man dasselbe Wort, weil es

[1]) Perny I, 109 und 110. [2]) Das 11 drähtige Exemplar gehört der ethnographischen Sammlung des Missionshauses in Basel an. [3]) Biernatzki S. 72. [4]) Perny II, 103. [5]) Stanisl. Julien im *Journal Asiatique* vom Mai 1841, pag. 402. [6]) Perny I, 34—36.

20 bis 30 Bedeutungen besitzt, bald so bald so zu schreiben übereingekommen ist.

Diese Armut der Sprache nötigte nun bei den Zahlwörtern Verbindungen weniger Elemente eintreten zu lassen, und die Elemente wurden nicht anders als wie bei den übrigen Völkern gewählt, denen wir bisher unsere Aufmerksamkeit zuwandten: das Zehnersystem der Zahlbildung ist auf das folgerichtigste festgehalten. Der Mangel an jeglicher Beugung ließ ja nicht einmal Wortverschmelzungen wie z. B. unser dreißig zu; die Wortelemente drei und zehn mußten unverändert sich zusammensetzen. Eben dieselben Wortelemente mußten zu der Bildung des Zahlwortes dreizehn ausreichen, und so ergab sich für die Chinesen als sprachnotwendig, was überall sonst mehr oder weniger Willkür war: man **mußte** je nachdem der Name einer kleineren Zahl dem einer größeren voranging oder folgte bald multiplikativ bald additiv verfahren, und vermöge des Gesetzes der Größenfolge, welches dem des Zehnersystems im allgemeinen noch vorgeht, ergab sich die Regel von selbst aus sän = 3 und chĕ = 10 additiv chĕ sän = $10 + 3 = 13$, multiplikativ sän chĕ = $3 \times 10 = 30$ zu bilden. Die Schrift hat nun bei den Chinesen dieselbe Methode festgehalten. Sie unterscheidet sich freilich von der dem Europäer geläufigen Reihenfolge insofern als der Chinese seine Wörter von oben nach unten zu Zeilen, die Zeilen von rechts nach links zu Seiten vereinigt[1]), aber diese Anordnung als bekannt vorausgesetzt schreiben sich die Zahlwörter in der Tat so, wie es eben angedeutet wurde (die Zahlzeichen und Beispiele vergleiche auf der am Schlusse des Bandes beigefügten Tafel). Es gibt allerdings Wörter und Zeichen, welche noch weit über 10000, ja über das multiplikativ herstellbare 10000 mal 10000 sich erheben — wir haben vorher in 10^{53} ein überzeugendes Beispiel davon kennen gelernt — aber eben jenes Beispiel mit seinem Ursprungszeugnisse an der Stirn läßt vermuten, was berichtet wird, daß die altchinesische Gewohnheit nicht über 10000 als höchste einfache Rangordnung sich erhob. Eine Bestätigung liefert die früher von uns (S. 24) erwähnte Unterscheidung des Heilrufes, der einem Großen des Reiches noch 1000, dem Kaiser noch 10000 Jahre wünscht.

Außer den Zahlzeichen, von deren Benutzung wir bisher gesprochen haben, und welche die **altchinesischen** heißen mögen, gibt es merkwürdigerweise noch mehrere andere Schreibarten. Wir meinen nicht eine offizielle verschnörkelte Form, welche zur Verhinderung von Fälschungen in öffentlichen Aktenstücken mit Vorliebe

[1]) Abel Remusat, *Élémens de la grammaire chinoise* (Paris 1822) pag. 23.

angewandt wird, noch eine kursive flüchtigere Form, in welcher die Gestaltung der einzelnen Zeichen sich mehr und mehr verwischt hat; diese Zeichen sind beide nur als das aufzufassen, als was wir sie benannten, als Formverschiedenheiten. Wir meinen dagegen Zahlenanschreibungen, welche einem ganz anderen Grundgedanken folgen, und zwar unter Benutzung von selbst zweierlei Zeichen, welche wir **Kaufmannsziffern** und **wissenschaftliche Ziffern** nennen wollen, und deren Form gleichfalls auf der Tafel am Schlusse des Bandes zu vergleichen ist. Die Kaufmannsziffern wie die wissenschaftlichen Ziffern werden horizontal nebeneinander geschrieben in derselben Richtung wie die indischen Ziffern, also so daß die höchste Ordnung am weitesten links erscheint. Die Kaufmannsziffern an Form den altchinesischen nahe verwandt sollen nie gedruckt erscheinen[1]), sondern nur im täglichen Gebrauche des Lebens ihre Anwendung finden. Die multiplikative Ziffer, welche also angibt, wieviele Zehner, wieviele Hunderter usw. gemeint sind, tritt nur äußerst selten links von dem Zeichen der betreffenden Einheit auf, dann nämlich wenn keine Einheiten von anderer Ordnung vorkommen, also z. B. wenn 3000 oder 400 geschrieben werden soll. Sonst werden die Rangziffern und Wertziffern in zwei Zeilen übereinander geschrieben, jene in der unteren, diese in der oberen Zeile, bis auf die Einer, welche wegen nicht vorhandenen Rangzeichens in die untere Zeile hinabrücken. Eine zweite und noch wichtigere Eigentümlichkeit dieser Kaufmannsziffern besteht in dem Zeichen der Null, für welche ein kleiner Kreis in Anwendung tritt um anzudeuten, daß Einheiten einer gewissen Ordnung, welche aber selbst nicht weiter angedeutet wird, sondern aus den Nachbarziffern einleuchtet, nicht vorhanden sind.

Gewichtige Gründe sprechen dafür, daß hier erst spät von auswärts Eingeführtes, nicht ursprünglich Vorhandenes vorliegt. Das geht eben aus dem gegenseitigen Verhältnisse von Sprache und Schrift bei den Chinesen hervor. Die Schrift konnte verschiedene Zeichen für gleichlautende Wörter besitzen um den verschiedenen Sinn derselben zu erkennen zu geben, aber sie fügte kein durch die Nachbarwerte überflüssiges Null hinzu.

Noch weniger kann in China eine vollständige Stellungsarithmetik erfunden worden sein. Wenn die Zahl 36 z. B. chinesisch durch die drei Wörter drei-zehn-sechs ausgesprochen wurde, so konnte der Chinese von sich aus unmöglich auf den Gedanken kommen, beim

[1]) Ed. Biot, *Sur la connaissance que les Chinois ont eu de la valeur de position des chiffres* im *Journal Asiatique* vom Dezember 1839, pag. 497—502.

Schreiben das Wort zehn aus der Mitte heraus fortzulassen, welches er noch immer lesen sollte. Er konnte nicht auf diesen Gedanken kommen, weil bei ihm nicht, wie bei anderen Völkern, das Anschreiben der Zahlen ohnedies ein aus dem Rahmen der gewöhnlichen Lautschrift heraustretendes war, weil alle Schrift vielmehr, wie wir schon sagten, für ihn Begriffsschrift war, mochten es Wörter einer oder einer anderen Bedeutung sein, die aufgezeichnet werden sollten.

Nichtsdestoweniger hat, wie die Zeichen, welche wir wissenschaftliche Ziffern nennen, beweisen, die Stellungsarithmetik mit einem eigenen System von Zeichen, welches viel durchsichtiger ist als die bisher besprochenen, in China Eingang gefunden. Man bezeichnet nämlich die Eins durch einen senkrechten oder wagrechten, die Fünf entsprechend durch einen wagrechten oder senkrechten Strich und verbindet diese beiden Elemente zur Bezeichnung von 6 bis 9, während 1 bis 5 durch Wiederholung der Eins, Null durch einen kleinen Kreis geschrieben werden. Wenn wir zum voraus schon diese Bezeichnungsweise als eine jedenfalls spät eingeführte schildern durften, so entspricht dem die Tatsache, daß dieselbe nicht früher als in einem Werke des Jahres 1240 etwa erscheint[1]), in dem Su schu kieou tschang (neun Abschnitte der Zahlenkunst) des Tsin kiu tschau, der unter der Dynastie Sung gegen Ausgang derselben lebte. Andere Beispiele gehören gar der Zeit der Mongolen (1275—1368) erst an[2]), so daß wir von den neun Abschnitten der Rechenkunst unter der Sungdynastie bis zu dem Werke gleichen Namens des Huâng tì den weiten Weg von fast 4000 Jahren zurückverfolgen müssen, um uns wieder an der Stelle zu befinden, von welcher aus wir diese Abschweifung begannen.

Und selbst jener Ausgangspunkt war ein zu später, denn noch vor Erfindung des Rechenbrettes, vor Verfassung des ersten arithmetischen Lehrbuches muß ja ein Rechnen, muß der Begriff der Zahlen festgestanden haben. Die chinesische Überlieferung läßt uns auch für jene allerältesten Zeiten nicht im Stich. Mit Knötchen versehene Schnüre in Verschlingungen gezeichnet bilden die beiden Tafeln hô tû und lö schu[3]). Auf der ersteren (Fig. 92) sind durch die je einer Schnur angehörigen Knoten die Zahlen 1 bis 10, auf der zweiten (Fig. 93) die 1 bis 9 dargestellt. Weiß sind die ungeraden Zahlen gezeichnet, denn das Ungerade ist das Vollkommene wie der Tag, die Hitze, die Sonne, das Feuer. Die geraden Zahlen dagegen

[1]) Biernatzki S. 72 und 69. [2]) Ed. Biot im *Journal Asiatique* für Dezember 1839. [3]) Perny II, 5—7.

sind schwarz, denn das Gerade ist das Unvollkommene, wie die Nacht, die Kälte, das Wasser, die Erde. Man hat neuester Zeit darauf aufmerksam gemacht[1]), daß die Anordnung der Zahlen 1 bis 9 auf

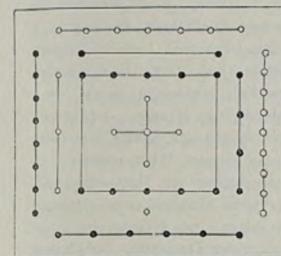


Fig. 92.

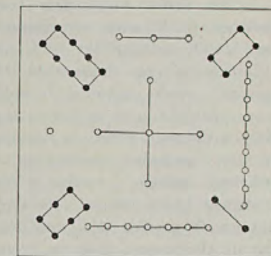


Fig. 93.

Fig. 93 das magische Quadrat ebenderselben Zahlen darstelle. Diese Tafeln sollen nun — wie? ist uns wenigstens ganz unersichtlich — in der Urzeit Chinas dazu gedient haben in der Verwaltung der öffentlichen Angelegenheiten benutzt zu werden, und Kaiser Fŭ hî um 2852 soll sie erst durch seine 8 aufgehängten Zeichen pă kuá ersetzt haben, gewöhnlich kurzweg die Kuas genannt. Sie bestehen aus bald ganzen, bald gebrochenen Linien, jene das Vollkommene diese das Unvollkommene bezeichnend, in dieser Bezeichnung also mit dem hô tû und lö schu übereinstimmend, wie auch darin mit ihnen übereinstimmend, daß wir uns unter Zuhilfenahme der vorhandenen Berichte auch nicht die geringste Anschauung von der Anwendungsart der Kuas zu bilden vermögen[2]). Nur schwach vermutend möchten wir darauf hinweisen, daß der Swán pân aus den Knotenschnüren vielleicht seine Entstehung genommen oder zu der einen Ursprung suchenden Rückerfindung jener Urbilder geführt haben kann, daß ferner in den gezeichneten Tafeln hô tû und lö schu wie in den kuá eine Art von Zahlensymbolik auftritt, welche uns daran erinnert, daß wir schon früher (S. 43) auf Übereinstimmungen zahlenträumerischer Gedankenverbindungen zwischen

[1]) Dr. Gram hat dieses bemerkt. Vgl. Zeuthen, *Forelaesning over mathematikens Historie. Oldtid og Middelalder.* Kopenhagen 1893. S. 274. [2]) Über die Kuas vgl. *Le Chou king un des livres sacrés chinois traduit par le* P. Gaubil *revu et corrigé par* M. de Guignes. Paris 1770, an sehr verschiedenen Stellen, die im Register s. v. *koua* zu entnehmen sind. Daß man in den Kuas einmal ein chinesisches Binärsystem erkannt haben wollte, führen wir beiläufig an. Vgl. Math. Beitr. Kulturl. S. 48—49.

chinesischen und pythagoräischen Lehren aufmerksam machen mußten, welche wohl einen geistigen wie örtlichen Mittelpunkt ihres Daseins in Babylon besaßen.

Wir gehen weiter zum Tcheōu lỳ über, jenem Gesetzbuche, welches auf Où wâng oder dessen nächste Nachfolger zwischen 1122 und 1109 zurückgeführt wird. In ihm sind alle jene zahlreichen Würdenträger des chinesischen Hofstaates mit ihren Obliegenheiten genannt, welche sicherlich in späterer Zeit vorhanden waren, wenn auch vielleicht nicht in früher, da, wie wir uns erinnern, der Tcheōu lỳ von Chinesen selbst als eine Fälschung aus den letzten 30 Jahren v. Chr. angesehen worden ist. Unter diesen Würdenträgern erscheinen mehrere[1]), welche in der Geschichte der Mathematik Erwähnung finden müssen. Da sind erbliche Würden eines Hofastronomen, fong siang schi, und Hofastrologen, pao tschang schi. Da ist ein Obermesser, liang jin, betraut mit der Tracierung der Mauern der Paläste wie der Städte. Da ist ein eigener Beamter des Meßapparates, tu fang schi, der mit dem tu kueï genannten Instrumente, das ist mit einem Schattenzeiger, den Schatten der Sonne und dergleichen bestimmen muß. Die bedeutsamste Stelle, welche wir deshalb der französischen Übersetzung entnehmen, lautet: „Wird eine Hauptstadt angelegt, so ebnen die Erbauer, tsiang jin, den Boden nach dem Wasser, indem sie sich des hängenden Seils bedienen. Sie stellen den Pfosten mit dem hängenden Seile auf. Sie beobachten mit Hilfe des Schattens. Sie machen einen Kreis und beobachten den Schatten der aufgehenden Sonne und den Schatten der untergehenden Sonne.“ Das hängende Seil aber wird uns dahin erläutert, es befänden sich 8 Seilstücke am oberen Teile des Pfahles befestigt, 4 längs der Kanten, 4 in der Mitte der Seitenflächen, und wenn diese 8 Seilstücke sämtlich dicht am Pfahle herunterhängen, so sei seine senkrechte Aufstellung gewährleistet.

Für jeden Leser dieses Bandes muß hier mancherlei auffallen: die Nivellierung nach der Wasserfläche, die Bestätigung des Senkrechtstehens eines Pfahles durch hängende Seilstücke, die Benutzung eines Schattenzeigers, die Beobachtung des Schattens der auf- und der untergehenden Sonne zur Orientierung nach den Himmelsgegenden, das sind alles Dinge, die uns in Alexandria oder aus Alexandria stammend in Rom begegnet sind, die mindestens im ersten vorchristlichen Jahrhunderte im Westen bekannt waren und uns nun im fernsten Osten zu Gesicht

[1]) Tcheōu lỳ Buch XXVI, Nr. 15 und 18; Buch XXX, Nr. 6—10; Buch XXXIII, Nr. 60; Buch XLIII, Nr. 19 flgg. Letztere Stelle T. II, pag. 553 der Übersetzung.

kommen. Es dürfte kaum einen anderen Ausweg geben, als entweder mit den heißspornigsten Sinologen anzunehmen, die ganze Mathematik und Astronomie sei altchinesische Erfindung und sei von dort zu den Völkern des Westens gelangt, oder aber mit den Zweiflern unter den Chinesen selbst die Entstehung des Tcheōu lỳ in eine Zeit kurz vor Christi Geburt herabzulegen und zu schließen, es müsse damals schon aus Alexandria über Indien, wo wir auch ein sehr einfaches Wassernivellement hätten nachweisen können[1]), oder wieder aus Babylon, dessen mathematische Vergangenheit uns von Abschnitt zu Abschnitt merkwürdiger und erforschungsbedürftiger wird, dergleichen nach China gedrungen sein. Diese Zwangswahl wird unseren Lesern noch mehr als einmal im Laufe dieses Kapitels sich aufdrängen, auch wenn wir nicht darauf aufmerksam machen, hat sich ihnen vielleicht schon geboten, als wir vom 60jährigen Zyklus des Huâng tì sprachen. Wir haben in der letztangeführten Stelle des Tcheōu lỳ: „Sie machen einen Kreis und beobachten den Schatten der aufgehenden Sonne und den Schatten der untergehenden Sonne“ das uns wohlbekannte Orientierungsverfahren erkannt. Daß wir in dem vielleicht auch anderer Deutung fähigen Wortlaut nicht mehr hinein als heraus lesen, beweist eine Stelle eines mathematischen Werkes, mit welchem wir uns jetzt beschäftigen müssen.

„Wenn die Sonne zu erscheinen beginnt, errichte eine Beobachtungsstange und beobachte den Schatten. Beobachte den Schatten aufs neue, wenn die Sonne untergeht. Die beiden Hauptschattenpunkte, welche sich entsprechen, bezeichnen Ost und West. Teile deren Entfernung hälftig und ziehe eine Linie nach der Beobachtungsstange hin, so wirst Du Süd und Nord bestimmt haben.“ So unzweideutig spricht sich der Tcheou pei aus[2]).

Der Tcheou pei oder tcheou pei swan king, d. h. heiliges Buch (king) der Rechnung (swan), welches genannt ist Beobachtungsstange (pei) im Kreise (tcheou), besteht aus zwei Teilen, welche sich scharf unterscheiden lassen. Im ersten wie im zweiten Teile wird zwischen zwei Männern, von denen der eine den Lehrer, der andere den Schüler darstellt, ein wissenschaftliches Gespräch geführt, welches auf den Schattenzeiger sich bezieht. Aber die beiden Redner wechseln. Im ersten Teile sind es Tcheōu kong und der Gelehrte Schang kao, und sie beziehen sich auf die Kenntnisse, welche Kaiser Fŭ hī und

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 27—28. [2]) Ed. Biot, *Traduction et examen d'un ancien ouvrage chinois intitulé Tcheou pei, littéralement: Style ou signal dans une circonférence* im *Journal Asiatique* vom Juni 1841, pag. 593—639. Die hier angeführte Stelle der künftig als Tcheou pei zu zitierenden Übersetzung auf pag. 624.

der nicht minder sagenberühmte Kaiser Yu besessen haben. Im zweiten Teile wird ein Yung fang von einem Tchin tsoe unterrichtet. Die Redner des I. Teils sind Persönlichkeiten aus dem Anfange der Tcheōu-Dynastie, welche um 1100 v. Chr. gelebt haben sollen. Die Redner des II. Teils kennt man nicht, doch ist hier ein Zitat aus lu schi tschun tsieou des Lu pu oei vorhanden[1]), welcher letztere bekannt ist als Minister des Kaisers Tsīn schè huâng tý des Bücherverbrenners, also um 213 v. Chr. lebte. Drei ältere Kommentatoren werden für beide Teile genannt, deren ältester Tchao kun hiang von den einen in die Dynastie der östlichen Han etwa auf 200 n. Chr., von den anderen erst in die Dynastie der Tsin im IV. S. gesetzt wird. Was man von den Kommentatoren und von dem auf die Tcheōu-Dynastie zurückgeführten Alter des I. Teiles weiß — von dem II. Teile wird ohne genau bestimmte Zeitangabe nur gesagt, er sei jünger als der I. — stammt aus einer Vorrede, welche 1213 n. Chr. unter der Dynastie Sung verfaßt worden ist. In einem anderen Werke wird ferner noch berichtet[2]), der Tcheōu pei sei unter der Dynastie Thang, dann wieder unter der Dynastie Sung „einer Durchsicht" unterworfen worden. Was man aber unter Durchsicht zu verstehen habe, geht daraus hervor, daß zugestanden wird, man habe bei der letzten 120 Zeichen, mithin Wörter, verändert und 60 weggelassen.

Fassen wir diese Angaben zusammen, so steht freilich die heutige Gestalt des Werkes nur in einem Alter von noch nicht sieben Jahrhunderten fest. Nimmt man an, es seien damals und früher unter den Thang wirklich nur unwesentliche Verbesserungen getroffen worden und die Kommentatoren seien richtig datiert, so kommt man auf die Zeit zwischen 213 v. Chr. und etwa 300 n. Chr., innerhalb welcher der II. Teil entstanden sein müßte, ohne daß irgend eine Nötigung vorläge, sich der früheren Grenze mehr zu nähern als der späteren. Man könnte also z. B. eine Gleichzeitigkeit des II. Teiles mit jenem Lieou hin annehmen, welcher den Tcheōu lỳ gefälscht haben soll. Was endlich den I. Teil betrifft, so müssen wir es unseren Lesern überlassen, ob sie der Überlieferung, welche ihn von Tcheōu kong selbst herrühren läßt, Glauben schenken wollen. Uns scheint ein Beweis, gestützt darauf, daß Tcheōu kong redend eingeführt ist, gestützt ferner auf eine Vorrede, die mehr als zwei Jahrtausende nach Tcheōu kong geschrieben ist, nicht unumstößlich festzustehen, und man gestattet uns vielleicht trotz unserer vollständigen Unbekanntschaft mit der chinesischen Sprache den Hinweis, daß bei der

[1]) Tcheou pei pag. 616. [2]) Ebenda pag. 597.

eigentümlichen Doppelbedeutung von tcheou als Kreis und als Name einer Dynastie es nicht so gar weit entfernt lag, ein Werk von der Beobachtungsstange im Kreise dem Tcheōu zuzuschreiben. Dann freilich rückt auch das Datum des I. Teiles so weit herab, daß er nur vor der Lebenszeit des ersten Kommentators entstanden sein muß, möglicherweise auch nicht weit von der Zeit um Christi Geburt entstand.

Der I. Teil ist kurz genug, um die wichtigsten Lehren des Schang kao in Übersetzung hier anzufügen. Schang kao spricht:

„Die Wissenschaft der Zahlen stammt vom Kreise und vom rechtwinkligen Vierecke.

Der Kreis stammt von dem rechtwinkligen Viereck, und das rechtwinklige Viereck stammt vom Kreise.

Der kuu d. h. das Winkellineal stammt von 9 mal 9, welches 81 gibt.

Teile den kuu.

Mache die Breite keou d. h. den gekrümmten Haken gleich 3.

Mache die Länge kou d. h. die Hälfte gleich 4.

Der king yu d. h. der Weg, der die Winkel vereinigt, die Diagonale, ist 5.

Nimm die Hälfte des rechtwinkligen Vierecks außen herum, es wird ein kuu sein.

Vereinige sie und behandle sie gemeinschaftlich mit dem Rechenbrette, so wirst Du genau 3, 4, 5 erhalten.

Die zwei kuu bilden zusammen die Größe 25. Das ist was man die Vereinigung der kuu nennt.

Die Wissenschaft, deren Yu sich einst bediente, um was unter dem Himmel sich befindet zu regeln, beruht auf diesen Zahlen."

Hier folgen im Originale drei Figuren, welche in der Übersetzung, deren wir uns bedienen, nicht abgebildet, sondern nur beschrieben sind[1]). Sie sollen die Theorie des rechtwinkligen Dreiecks klar machen. Die erste Figur heißt „Figur des Seiles" und wird folgendermaßen geschildert. In einem in 49 Teile geteilten großen Quadrate befindet sich eingezeichnet ein aus 25 Teilen bestehendes zweites Quadrat. Dieses zweite Quadrat ist selbst in vier rechtwinklige Dreiecke und ein inneres Quadrat zerlegt. Man kann nicht sagen, daß die Klarheit dieser Schilderung nichts zu wünschen übrig lasse. Wir entnehmen ihr, die Figur des Seiles habe so ausgesehen:

[1]) Tcheou pei pag. 601, Note 1. Biernatzki S. 64—66 hat eine deutsche Übersetzung nach englischer Vorlage, von welcher die unsrige sehr abweicht. Von den hier erwähnten Figuren sagt er kein Wort.

(Fig. 94). Da die Richtigkeit dieser Auffassung durch einen 1682 gedruckten chinesischen Kommentar zum Tcheou pei, in welchem die Erläuterungen stets den neuerdings abgedruckten Textesworten folgen, nachträgliche volle Bestätigung gefunden hat[1]), so stellt das zweite Quadrat mit seiner Zerlegung die Figur dar (Fig. 87), deren Bhâskara um 1150 sich bediente (S. 656), etwa 60 Jahre vor der Durchsicht des Tcheou pei in der Sung-Dynastie.

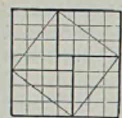


Fig. 94.

Da wir den Lauf unserer wörtlichen Wiedergabe doch einmal unterbrochen haben, so sei auf einiges aus dem bisherigen Texte hingewiesen: auf den pythagoräischen Lehrsatz an dem Dreiecke von den Seiten 3, 4, 5; auf den Namen der Diagonale für die Hypotenuse, welcher zeigt, daß der Satz am Rechtecke und nicht am Dreiecke bekannt geworden war; auf den weiteren Namen Seil für Hypotenuse, welcher täuschend an die Seilspannung der Inder erinnert, wenn wir keine andere Verwandtschaft suchen wollen.

Nach jenen Figuren folgen nun weitere Lehren, wie man den *kuu*, also das Winkellineal, benutzen soll. Eben hingelegt diene es zum Gradmachen, umgekehrt zur Höhenmessung, verkehrt zur Tiefenmessung, ruhend zur Messung der Entfernung. Der *kuu* für den Kreis, d. h. der Zirkel, diene zur Herstellung des Kreises, der Doppelkuu zur Herstellung rechtwinkliger Vierecke. Die rechtwinklige Figur entspreche der Erde, die runde dem Himmel. Der Himmel sei der Kreis, die Erde sei das Quadrat.

Dieser letztere Satz bedarf gar sehr der Erläuterung. Vielleicht ist es richtig, was ein Missionär, welcher lange in China war, zur Erklärung gesagt hat[2]), Himmel und Erde seien symbolisch für die Zahlen 3 und 4; andererseits gehöre die Zahl 3 zum Kreise, dessen Umfang als dreifacher Durchmesser galt, 4 naturgemäß zum Quadrate, und so sei die weitere Vergleichung des Himmels mit dem Kreise, der Erde mit dem Quadrate zustande gekommen.

Es folgen noch einige philosophische uns unverständliche Redensarten, und nun schließt Schang kao: „Das Wissen stammt vom gekrümmten Haken, der gekrümmte Haken vom Winkellineal, das

[1]) Giov. Vacca, *Sulla Matematica degli antichi Cinesi* in dem *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* (Oktober, November und Dezember 1905). Da H. Vacca zurzeit (Winter 1905—1906) unter der Leitung von H. Carlo Puini in Florenz chinesischen Studien obliegt, so dürfte in Bälde Genaueres über chinesische Mathematik bekannt werden. [2]) Tcheou pei pag. 602, Note 1 mit Beziehung auf eine Bemerkung des Pater Gaubil.

Winkellineal mit Zahlen vereinigt regelt und leitet alle Dinge.“ Tcheŏu kong sprach: „Das ist wundervoll!“

Hiermit schließt der I. und, wie man behaupten will, ältere Teil des Tcheou pei. Es folgt der II. viel ausführlichere Teil. Wir brauchen ihm eine weit weniger eingehende Aufmerksamkeit zuzuwenden, teils wegen des allgemein anerkannten verhältnismäßig späten Datums seiner Entstehung, teils weil es sich in ihn mehr um astronomische Verwertung der Beobachtungsstange handelt. Nur zwei Bemerkungen scheinen uns von Wichtigkeit.

Erstlich, daß die Verhältniszahl des Kreisumfangs zum Durchmesser stets als 3 gerechnet wird[1]). Das bestätigt jene Bemerkung, warum 3 die Zahl des Kreises sei, erinnert zugleich an die nach unserer Vermutung altbabylonische Umfangsformel. Aus den Durchmessern 238000, $317333\frac{1}{3}$, 357000, $396666\frac{2}{3}$, $436333\frac{1}{3}$, 476000, 810000 sind die Umfänge 714000, 952000, 1071000, 1190000, 1309000, 1428000, 2430000 gefolgert, und in einem Beispiele heißt es ausdrücklich: „Nimm einen Durchmesser von $121\frac{75}{100}$ Fußen, vervielfache mit 3, Du erhältst $365\frac{1}{4}$ Fuß.“

Dieses letztere Beispiel[2]) führt uns zu unserer zweiten Bemerkung. Der Kreisumfang wird bei den Chinesen nicht in 360 Grade, sondern in $365\frac{1}{4}$ Grade eingeteilt, und die Chinesen kennen die Jahreslänge des Sonnenjahres von $365\frac{1}{4}$ Tagen. „Unter 4 Jahren sind, wie man weiß, drei von 365 Tagen und eines von 366 Tagen; daraus weiß man, daß das Jahr im Mittel aus $365\frac{1}{4}$ Tagen besteht.“ Eine deutlichere Bestätigung unserer Ansicht, daß die Kreiseinteilung in 360 Grade nichts anderes bezwecke als die von der Sonne am Himmel scheinbar durchlaufenen Wege sichtbar zu machen (S. 40), dürfte sich kaum finden lassen. Wenn die Chinesen diese Bedeutung der Gradeinteilung überliefert bekamen und nachträglich die mit der Wahrheit besser übereinstimmende Jahreslänge von $365\frac{1}{4}$ Tagen erfuhren oder erkannten, dann, aber auch nur dann, konnten sie dem allem Zahlengefühle Hohn sprechenden Gedanken verfallen, den Kreis

[1]) Tcheou pei pag. 613, 614, 626. Auf pag. 614 ist zwar zu dem Durchmesser $267666\frac{2}{3}$ der Umfang 833000 statt 803000 angegeben, doch dürfte diese einzige Ausnahme auf einem Druckfehler im *Journal Asiatique* beruhen. [2]) Ebenda pag. 625. Vgl. auch pag. 638—639.

nunmehr selbst in $365\frac{1}{4}$ Grade zu zerlegen, damit wieder jeder Grad einen Tagesweg darstelle. Außerdem sprechen mittelbare Spuren dafür, daß den Chinesen die Kreisteilung in 360 Grade gleichfalls einmal bekannt war, denn nur von ihr aus erklärt sich die Anwendung der Zahl 60 in dem sechzigjährigen Zyklus, nur von ihr aus die 30 Speichen in dem Rade des Kaiserwagens in der Tcheou-Dynastie, wie eine Abbildung sie zeigt[1]). Bei den Unterabteilungen des Grades bedienten sich dagegen die Chinesen nach einem Berichte des Paters Verbiest seit undenklichen Zeiten der Zerlegung in 100 Teile, welche man Minuten nennen könnte[2]).

Leider ist der Tcheou pei die einzige mathematische Abhandlung der Chinesen, welche durchaus übersetzt uns vorliegt. Für alle übrigen Schriften sind wir gezwungen, uns auf notdürftige Auszüge zu beziehen, von welchen nur einer eine halbwegs genügende Inhaltsanzeige des Werkes liefert, aus welchem er stammt und zugleich das Alter dieses Werkes zweifellos angibt. Die anderen Berichte leiden meistens an Unklarheit und lassen es selbst fraglich erscheinen, welches Werk von verschiedenen, die den gleichen Namen führen, eigentlich gemeint sei?

Kieou tschang oder die neun Abschnitte war (S. 670) der Titel des ältesten arithmetischen Werkes. Kieou tschang swan su d. h. Arithmetische Regeln zu den neun Abschnitten schrieb alsdann etwa ein Jahrhundert vor der christlichen Zeitrechnung ein gewisser Tschang tsang. Dieses Werk behauptet „die von den kaiserlichen Hofmeistern unter der Dynastie Tcheōu befolgten arithmetischen Grundsätze zu enthalten. Jedoch gibt es sich nicht für ein neues Originalwerk aus, sondern nur für eine revidierte und verbesserte Auflage eines viel älteren Buches, dessen Verfasser unbekannt ist. Das Werk hat bis heute mehrere neue Auflagen erlebt, ist jedoch jetzt sehr selten geworden; es hat aber viele Kommentatoren unter namhaften chinesischen Gelehrten gefunden“[3]). Gegen Ende der Dynastie Sung um 1240 schrieb Tsin kiu tschau, welchen wir (S. 674) als den Schriftsteller nannten, bei welchem die sogenannten wissenschaftlichen Ziffern zuerst erwähnt werden, sein su schu kieou tschang oder die neun Abschnitte der Zahlenkunst. Werke ähnlichen Titels von noch anderen Verfassern folgten vielfach. Wenn wir uns nun der chinesischen Rückverlegungen erinnern, welche dem

[1]) Tcheōu lỳ II, 488. [2]) Henri Bosmans S. J. in den *Annales de la société scientifique de Bruxelles.* T. XXVII Nr. 3 (April 1903). [3]) Wörtlich aus Biernatzki S. 67.

Götzen des nationalen Eigendünkels mit persönlicher Bescheidenheit das Opfer der eigenen Erfinderfreude zu bringen verlangten und in diesem Verlangen offenbar nirgend auf Widerstand stießen; wenn uns dann ein Auszug aus den neun Abschnitten gegeben[1]), aber mit keiner Silbe gesagt wird, welches von den vielen Werken, die diese Überschrift tragen, zugrunde gelegt sei, welchen geschichtlichen Wert kann das für uns haben? Doch wohl keinen anderen, als daß wir dem Auszuge das alte vielleicht auf Tschang tsang, vielleicht noch weiter hinauf zurückzuverfolgende Vorhandensein von neun Abschnitten glauben, ohne jedoch annehmen zu dürfen, diese Abschnitte hätten von jeher dieselben 246 Aufgaben enthalten, oder es sei auch nur sicher, daß die Namen der Abschnitte sich nicht verändert hätten.

Die Namen der Abschnitte[2]): 1. Viereckige Felder, 2. Reis und Geld, 3. Verschiedene Teilungen, 4. Eng und weit, 5. Körpermessung (wörtlich: überlegen und beendigen), 6. Gerechte Verteilung, 7. Überschuß und Mangel, 8. Vergleichen und recht machen (d. h. Gleichungen), 9. Dreieckslehre erinnern ungemein an Namen indischer Abschnitte, gebildet nach irgend einer Hauptaufgabe, an welche die anderen anknüpfen, wenn auch nicht immer im Inhalt ihr gleichend. Gleich im ersten Abschnitte findet sich die Regel für die Dreiecksfläche als Produkt der Grundlinie in die halbe Höhe. Die Kreisfläche zu berechnen wird nach sechs der Form nach verschiedenen Arten gelehrt: „Man multipliziere den halben Durchmesser mit dem Radius, oder nehme ein Dritteil vom Quadrat des halben Umkreises, oder ein Zwölftel vom Quadrate des Umkreises, oder ein Viertel vom dreifachen Quadrate des Durchmessers, oder ein Viertel vom Produkte aus Durchmesser und Umkreis, oder endlich das dreifache Quadrat des Radius.“ Man sieht sofort, daß die fünf letzten Regeln sämtlich auf $\pi = 3$ herauskommen. Die erste allein ist mit $\pi = 1$ gleichbedeutend und höchst auffallend dadurch, daß sie in einem Atem von dem halben Durchmesser und dem Radius spricht. Wir möchten daher hier einen Druck- oder Übersetzungsfehler annehmen und lesen „man multipliziere den halben Umkreis mit dem Radius“, eine Vorschrift, welche sonst fehlen würde, und welche nicht mit $\pi = 3$ in Widerspruch steht.

Das genauere Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser war einem Schriftsteller Tsu tschung tsche, der dem Ende des

[1]) Biernatzki S. 73—76. [2]) Die drei ersten Namen nach Biernatzki, die sechs folgenden nach L. Nix. Vgl. W. Schmidt im Bericht über griechische Mathematiker und Mechaniker 1890—1901 S. 63.

VI. S. angehören soll, als $\pi = \frac{22}{7}$ bekannt und Liu hwuy[1]) benutzte $\pi = \frac{157}{50}$.

Der 9. der neun Abschnitte beschäftigt sich mit 24 geometrischen Aufgaben, welche mittels des rechtwinkligen Dreiecks gelöst werden. Über die Methode läßt uns der Auszug im unklaren, doch dürfte wohl der pythagoräische Lehrsatz angewandt sein, der im Tcheou pei uns gleichfalls begegnet ist. Von den Körpermessungen im 5. Abschnitte ist uns nur ganz allgemein berichtet, die angewandten Formeln scheinen mithin zu besonderen Anmerkungen eine dringende Veranlassung nicht geboten zu haben. Aus den übrigen Abschnitten erwähnen wir Gesellschafts- und Vermischungsrechnungen im 3. und 6. Abschnitte, Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln im 5. Abschnitte, Gleichungen im 8. Abschnitte.

Die Geometrie dürfte wohl den schwächsten Teil chinesischer Mathematik gebildet haben, kaum über die niedrigsten Anwendungen des Satzes vom rechtwinkligen Dreiecke sich erhebend; denn wenn Ko schau king um 1300 unter den Mongolen die sphärische Trigonometrie erfunden haben soll, welche in einem Werke aus der Dynastie Ming wiederholt dargestellt sei[2]), so klingt das doch sehr nach arabischen ins Chinesische nur übersetzten Schriften.

In der Lehre von den Gleichungen dagegen müssen wir den Chinesen selbsttätiges Vorgehen nachrühmen, denn hier finden wir in der Tat Fortschritte, welche weder auf indischem Boden uns bekannt geworden sind, noch überhaupt anderswo so frühzeitig gemacht wurden. Hauptquelle für die Lehre von den bestimmten wie von den unbestimmten Gleichungen sind Schriften desselben Tsin kiu tschau aus der Mitte des XIII. S., welchen wir auch unter den Verfassern von Neun Abschnitten der Rechenkunst nannten. Die Lehre von den bestimmten Gleichungen findet sich in dessen Aufstellung der himmlischen Monade, *leih tien yuen yih*[3]), und ist erläutert durch Le yay jin king, welcher während der Mongolenzeit gelebt hat[4]). Die Monade, yuen, ist das durch ein besonderes Schriftzeichen dargestellte Symbol der ersten Potenz der unbekannten Größe, also das yâvattâvat der Inder. Auch die Zahl, welche als ein Gegebenes in der Gleichung auftritt, die rûpa der Inder, hat einen Namen täe. Die Zeichen für yuen und täe werden rechts von den betreffenden

[1]) Dessen Lebenszeit anzugeben sind wir nicht imstande. Biernatzki sagt nämlich S. 63—64, er habe früher als *Tsu tschung tsche* gelebt, und S. 68, er habe im VII. S. gelebt, und sein Werk sei im VIII. S. neu aufgelegt worden! [2]) Biernatzki S. 70. [3]) Ebenda S. 84 flgg. [4]) Ebenda S. 70 und 84.

Zahlenkoeffizienten geschrieben. Die Gleichungen sind vor dem Anschreiben geordnet und zwar so, daß die unbekannten Dinge den bekannten gleich gesetzt sind. Ein Gleichheitszeichen tritt dabei nicht auf, ist vielmehr aus der bloßen Stellung ersichtlich. Die unterste Reihe mit rechts stehendem täe enthält die bekannte Zahl, die darüber befindliche mit rechts stehendem yuen die Unbekannte, die nächsthöhere ohne weiteren Zusatz enthält die zweite Potenz der Unbekannten usf. Eine fehlende Potenz der Unbekannten muß, da die Höhe der Potenzen nach dem Stellungswerte zu entnehmen ist, durch Null angedeutet werden. Von den beiden Wörtern täe und yuen kann eines, beliebig welches fehlen, da die Verständlichkeit dadurch noch nicht aufgehoben ist. Positive und negative Zahlen werden durch die Farbe des Druckes unterschieden. Erstere druckt man rot, letztere schwarz. So heißt z. B. unser $14x^3 - 27x = 17$ auf chinesisch, wenn wir die Benutzung unserer Ziffern beibehalten und die Farben durch die links beigesetzten Anfangsbuchstaben $_r$ (rot) und $_s$ (schwarz) unterscheiden:

${}_r14$		${}_r14$		${}_r14$
${}_r00$		${}_r00$		${}_r00$
	oder		oder	
${}_s27$ *yuen*		${}_s27$		${}_s27$ *yuen*
${}_r17$ *täe*		${}_r17$ *täe*		${}_r17$

Es scheint dabei eine Annäherungsmethode für Gleichungen höherer Grade bestanden zu haben, in welcher man eine Ähnlichkeit mit der sogenannten Hornerschen Näherungsmethode entdecken will[1]), die aber wenigstens in unserer Vorlage zu dürftig behandelt ist, als daß wir es wagten, diese Meinung zu stützen oder zu widerlegen.

Die Lehre von den unbestimmten Gleichungen scheint unter dem Namen große Erweiterung, Ta yen, zuerst von Sun tse in dunkeln Versen beschrieben worden zu sein[2]), und dieser Verfasser wird gegenwärtig in die Dynastie Han im III. S. n. Chr. gesetzt. Besondere Anwendung fand die Regel Ta yen durch Yih hing, einen Geistlichen unter der Dynastie Thang, welcher 717 das Werk Ta yen lei schu darüber verfaßte, und dieses Werk hat wieder unser Tsin kiu tschau neu bearbeitet. Das Hauptbeispiel heißt in wörtlicher

[1]) Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878, S. 964—965. [2]) Biernatzki S. 77 flgg. Vgl. besonders L. Matthiessen, Vergleichung der indischen Cuttaca- und der chinesischen Ta yen-Regel in der Zeitschr. f. math. und naturw. Unterricht (1876) VII, 78—81. Ebenderselbe hatte schon 1874 in der Zeitschr. Math. Phys. XIX, 270—271 die Ta yen-Regel erklärt, die vor ihm nie verstanden worden war.

Übersetzung: „Dividiert durch 3 gibt Rest 2; schreibe 140. Dividiert durch 5 gibt Rest 3; schreibe 63. Dividiert durch 7 gibt Rest 2; schreibe 30. Diese Zahlen addiert geben 233, davon subtrahiert 210 gibt 23 die gesuchte Zahl. Für 1 durch 3 gewonnen setze 70. Für 1 durch 5 gewonnen setze 21. Für 1 durch 7 gewonnen setze 15. Ist die Summe 106 oder mehr, subtrahiere hiervon 105 und der Rest ist die gesuchte Zahl."

Man hat nun vollständig zutreffend darauf aufmerksam gemacht[1]), daß dieselben Divisoren 3, 5, 7 und dieselben gewonnenen Zahlen 70, 21, 15 mit deren Anwendung zur Auffindung von 23 auch in einer griechischen Aufgabe vorkommen, deren Text in einer Handschrift aus dem Ende des XIV. oder Anfang des XV. S. sich erhalten hat, während ein Verfasser nicht genannt ist. Es ist nicht unmöglich, daß die chinesische Aufgabe und ihre Auflösung etwa durch arabische Vermittlung irgend einem Byzantiner bekannt geworden sein kann, der sie sich aufnotierte. Ein umgekehrter Gang, daß also hier wie so vielfach im Westen Bekanntes nach China drang, ist kaum anzunehmen, weil nur im chinesischen Texte die Begründung des Verfahrens angedeutet ist, freilich schwer zu verstehen, aber doch zu verstehen, wie die Erfahrung gezeigt hat.

Der Sinn ist nämlich folgender. Soll eine Zahl x gefunden werden, welche durch m_1, m_2, m_3 geteilt die Reste r_1, r_2, r_3 liefere, so sucht man drei Hilfszahlen k_1, k_2, k_3, welche Multiplikatoren, *tsching su*, genannt werden, und deren jede vervielfacht mit ihrer Erweiterungszahl, *yen su*, d. h. mit dem Produkte derjenigen m, welche einen andern Index als das betreffende k führen, und dann geteilt durch ihre bestimmte Stammzahl, *ting mu*, d. h. das dritte m den Rest 1 liefern. So gibt unsere Aufgabe unter Anwendung von Kongruenzen: $5 \cdot 7 \cdot k_1 \equiv 1 \pmod 3$; $3 \cdot 7 \cdot k_2 \equiv 1 \pmod 5$; $3 \cdot 5 \cdot k_3 \equiv 1 \pmod 7$. Daraus werden nun gewonnen: aus 3 die Zahl $k_1 = 2$ oder $5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$; aus 5 die Zahl $k_2 = 1$ oder $3 \cdot 7 \cdot 1 = 21$; aus 7 die Zahl $k_3 = 1$ oder $3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$. Wie diese Zahlen gewonnen wurden, ist auch nicht andeutungsweise gesagt, die Vermutung liegt daher am nächsten, man werde sich durch Probieren geholfen haben. Nun wird jede der gewonnenen Zahlen $m_2 m_3 k_1 = 70$, $m_1 m_3 k_2 = 21$, $m_1 m_2 k_3 = 15$ mit dem entsprechenden Reste $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$ vervielfacht und ihre Summe $140 + 63 + 30 = 233$ gebildet, von welcher man die Stammerweiterung, *yen mu*, d. h.

[1]) Matthiessen in der Zeitschr. f. math. und naturw. Unterricht. Vgl. Nikomachus (ed. Hoche) pag. 152—153 und Friedleins Anzeige dieser Ausgabe in der Zeitschr. Math. Phys. (1866) Bd. XI, Literaturzeitung S. 71

das Produkt der drei m, $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, so oft als möglich abzieht und hat damit

$$x = m_2 m_3 k_1 r_1 + m_1 m_3 k_2 r_2 + m_1 m_2 k_3 r_3 - c\, m_1 m_2 m_3$$

gefunden, wie z. B.

$$x = 2 \cdot 70 + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15 - 2 \cdot 105 = 23.$$

Es steht ebenso fest, daß dieses Verfahren von der indischen Zerstäubung, mit welchem man es zu vergleichen liebte, bevor man es verstand, durchaus verschieden ist, als daß es eine wahre Methode genannt zu werden verdient, deren Erfinder mit dem glücklichsten Scharfsinne ihrer Aufgabe zu Leibe zu gehen wußten[1]).

Etwas später als Tsin kiu tschau lebte Tschu schi kih, welcher 1303 den kostbaren Spiegel der vier Elemente, *Sze yuen yuh kihn*, veröffentlichte. Hier finden sich die *lihn* bei Berechnung von Zahlen bis zur achten Potenz als eine alte Methode. In unseren Ziffern sehen dieselben folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Es sind[2]) die den Arabern freilich seit dem Ende des XI. S. bekannten Binomialkoeffizienten zu der Gestalt geordnet, welche man in Europa seit dem Ende des XVII. S. das arithmetische Dreieck genannt hat. Das hier auftretende Wort *lihn* wird auch bei der früher erwähnten Annäherungsmethode zur Auflösung von Gleichungen höherer Grade mehrfach benutzt und hat dadurch Anlaß zu dem gleichfalls erwähnten Deutungsversuche dieser Methode gegeben.

Das arithmetische Dreieck ist auch in einem letzten Werke wiedergefunden worden, von welchem wir einigermaßen eingehender unterrichtet sind, da wenigstens die Inhaltsangabe desselben in

[1]) Matthiessen hat l. c. mit Recht hervorgehoben, daß die Methode *ta yen* mit derjenigen, welche Gauß in den *Disquisitiones arithmeticae* § 32—36 gelehrt hat, übereinstimme. Vgl. Dirichlet, Zahlentheorie § 25 (III. Auflage. 1879, S. 56—57). [2]) Biernatzki S. 87—89.

Übersetzung vorhanden ist[1]). Wir meinen die Grundlagen der Rechenkunst, *swan fa tong tsong*, welche unter Wan ly aus der Dynastie Ming 1593 dem Drucke übergeben worden sind. Es heißt in demselben, jene Zahlenanordnung finde sich schon in einem älteren Werke des U schi, aber unser europäischer Gewährsmann fügt ausdrücklich hinzu, dieser Name sei ein so gewöhnlicher, daß Folgerungen aus demselben nicht zu ziehen seien, und so wissen wir nicht einmal, ob dieser U schi früher oder später als Tschu schi kih gelebt hat. Im *Swan fa tong tsong* werden noch mancherlei andere Dinge gerühmt, so die Anwendung der Verhältniszahl $\pi = \frac{22}{7}$, das Vorkommen von Dreieckszahlen und Pyramidalzahlen, magische Quadrate, Multiplikationen unter Anwendung von dreieckigen Feldern, also vielleicht so, wie wir sie (S. 611) bei den Indern in Übung fanden. Wir berichten genauer nur über eine Messungsaufgabe, welche Verwandtschaft mit in Europa vorkommenden Verfahren (S. 556) an den Tag legt. Die Höhe eines zugänglichen Baumes wird zu kennen verlangt[2]). Man entfernt sich von dessen Fuße um eine gemessene Strecke, stellt eine Signalstange auf und entfernt sich dann noch weiter, bis man mittels eines hohlen Rohres die Spitze der Stange und des Baumes in einer geraden Linie sieht. Die Höhe des Auges über dem Boden wird nun zu 4 Fuß geschätzt und alsdann die Höhe des Baumes mit Hilfe ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke berechnet.

Wir sind der Zeit schon sehr nahe, in welcher die europäischen Missionäre an dem Hofe des den Wissenschaften ergebenen Kaisers Kang hi freundliche Aufnahme fanden. Er schätzte in ihnen die höhere Bildung, welche er, sich darin als kein Nationalchinese verratend, wohl anerkannte. Aber einen chinesischen Gelehrten Mei wuh gan, einen Anhänger der verjagten Ming-Dynastie und trotzdem wegen seines Wissens bei dem fremden Kaiser wohlgelitten, wurmte das Übergewicht dieser Europäer. Er behauptete[3]), von den durch sie eingeführten Theorien sei die bei weitem größte Mehrzahl den Chinesen schon Jahrhunderte früher bekannt gewesen, und dieses nur aus Unkunde mit der heimischen Literatur übersehen worden. Ja aus China stamme alle Wissenschaft, übersetzt sei sie zu den Bewohnern anderer Länder gedrungen und habe dort weiter gelebt, während sie in China selbst seit der großen Bücherverbrennung auf-

[1]) Ed. Biot im *Journal des Savants* 1839 pag. 270—273 und besonders im *Journal Asiatique* für März 1839 pag. 193—217. Die Bemerkung über U schi pag. 194. [2]) *Journal Asiatique* für März 1839, pag. 212. [3]) Biernatzki S. 60—62.

gehört habe sich zu entwickeln, wie sie begonnen hatte. Jetzt suchte man wieder eifriger und allgemeiner nach den alten Schriften und fand sie.

Wieviele deren echt, wieviele unecht waren, wer könnte diese Frage ohne die eingehendsten Kenntnisse der verschiedensten Art beantworten? Für die mathematischen Schriften muß notwendigerweise neben den sprachlichen Merkmalen höheren oder niedrigeren Alters, vielleicht noch vor diesen der Inhalt zur Beantwortung beitragen, und diesem Inhalte, soviel uns davon bekannt geworden ist, entnehmen wir die gleiche Folgerung, welche (S. 669) als vorläufige Ansicht schon von uns geltend gemacht worden ist, als wir die Ursprungs- und Echtheitsfrage zuerst aussprachen. Wir glauben nicht an eine hohe Entwicklung der ursprünglichen chinesischen Mathematik. Wir glauben vielmehr, daß das meiste aus verschiedenen Quellen, unter welchen die babylonische wohl nicht die mindest ergiebige gewesen ist, dorthin zusammenfloß. Wir gehen aber andererseits auch nicht so weit, daß wir den Chinesen jede einzelne Leistung auf mathematischem Gebiete absprechen. Die Algebra scheint wie den Indern so auch den Chinesen das ihrem Geiste angemessene Arbeitsfeld geboten zu haben, und auf diesem Felde wuchsen Früchte, denen wir bis auf weiteres die chinesische Heimat abzuerkennen in keiner Weise gerechtfertigt sind. Die Methode der großen Erweiterung zur Auflösung gleichzeitig bestehender unbestimmter Gleichungen ersten Grades dürfte die edelste dieser Früchte sein.

Für die verhältnismäßig geringe Meinung, welche wir von der altchinesischen Mathematik hegen, können wir eine mittelbare Bestätigung in den entsprechend geringen Kenntnissen finden, die fast zweifellos von China aus weiter nach Osten vordrangen. Wir berufen uns in diesem Sinne auf die Mathematik der Japaner.

Was wir von derselben wissen, stammt unmittelbar oder mittelbar aus neueren geschichtlichen Untersuchungen dort einheimischer Gelehrten, welche das Ergebnis ihrer Forschungen teils in japanischer teils in englischer Sprache zum Drucke gegeben haben. Insbesondere sind es die Herren Endō, Kikuchi, Fujisawa, Hayashi, welche sich um den Gegenstand verdient gemacht haben. Sie unterscheiden eine Anzahl von Zeiträumen in der Geschichte der japanischen Mathematik und zwar:

1. Die Zeit bis 553 nachchristlicher Zeitrechnung, in welcher sie eine von außen unbeeinflußte Bildung vermuten, welche aber nicht über das Zählen und das elementarste Rechnen hinausging. Von der Art, wie das letztere geübt wurde, ist nicht der geringste Bericht vorhanden. Beim Zählen scheinen Gruppen von je 10^4 Einheiten

eine wesentliche Rolle gespielt zu haben. Wir erkennen darin die griechischen Myriaden wieder, natürlich ohne aus dieser Ähnlichkeit eine Beeinflussung Japans von Griechenland oder gar Griechenlands von Japan folgern zu wollen. Sprachliche Gründe — wir meinen das Vorhandensein eines einfachen Wortes für den Begriff zehntausend — können an mehreren Orten zugleich und unabhängig voneinander solche Gruppierungen zur Folge gehabt haben. An diese älteste Zeit schloß sich

2. die Zeit von 554—1591, während welcher chinesische Mathematik, zuerst auf dem Umwege über Korea, dann bei sich steigerndem Verkehre unmittelbar, in Japan eindrang. So kam das *Kieou tschang*, die neun Abschnitte (S. 670), nach Japan, ohne jedoch dort weiter ausgebildet zu werden. Im Gegenteil geriet das anfänglich freudig aufgenommene fremde Wissen allmählich in Mißachtung und Vergessenheit.

Erst in dem als weitere Periode unterschiedenen Zeitraume von 1592 an scheint sich, zum Teil unter holländischem Einflusse, eine japanische Mathematik gebildet zu haben, welche wirklich erzählenswert ist, und von ihr soll im III. Bande dieses Werkes im 110. Kapitel die Rede sein, wo die Ähnlichkeiten und Unähnlichkeiten, welche zwischen europäischer und japanischer Mathematik hervorzuheben sind, deutlicher betont werden können.

Hier kam es uns ja nur darauf an, den nach unserer Meinung geringen Wert altchinesischen mathematischen Wissens durch dessen geringe Einwirkung auf ein Volk zu belegen, dessen Begabung in späterer Zeit einen Zweifel nicht aufkommen läßt.

VII. Araber.

32. Kapitel.

Einleitendes. Arabische Übersetzer.

Wenn in den beiden vorigen Abschnitten der Ursprung der Kenntnisse, welche bei den Indern und Chinesen nachweislich waren, unsere Kritik herausforderte und uns die Hoffnung kaum gestattet ist, daß bei den einander schnurstracks entgegenstehenden Schulmeinungen in dieser Beziehung unsere Auffassung von allen Lesern geteilt des Charakters einer wenn auch durch Gründe gestützten doch wesentlich persönlichen Meinung entkleidet werde, so verhält es sich ganz anders mit der arabischen Mathematik[1]).

Daß ein Volk Jahrhunderte lang jedem Kultureinflusse von seiten seiner Nachbarvölker unzugänglich war, daß es selbst in jener ganzen Zeit keinen Einfluß üben konnte, daß es dann plötzlich seinen Glauben, seine Gesetze und mit diesen seine Sprache weiten Ländern aufzwang, welche an Ausdehnung kaum von dem Machtbereiche anderer Eroberer erreicht worden sind, ist für sich eine so regelwidrige Erscheinung, daß es wohl der Mühe lohnt, ihren Ursachen nachzuforschen, daß aber zugleich mit ihr die Gewißheit gegeben ist, die plötzlich auftretende anderen Entwicklungen ebenbürtige Geistesreife könne aus sich selbst unmöglich zustande gekommen sein.

---

[1]) Wir folgen in diesem Abschnitte in der Anordnung des Stoffes wesentlich Hankels arabischen Kapiteln S. 223—293. Von Büchern allgemeinen Inhaltes, deren wir uns außer den auch von Hankel benutzten bedient haben, seien besonders erwähnt: G. Weil, Geschichte der islamitischen Völker von Mohammed bis zur Zeit des Ṡultan Selim übersichtlich dargestellt. Stuttgart 1866, und Alfr. v. Kremer, Kulturgeschichte des Orients unter den Chalifen. Wien 1877. Suter, Das Mathematikerverzeichnis im Fihrist des Ibn Abî Ja'ḳûb an-Nadîm. Übersetzung mit Anmerkungen in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik VI, 1—87, 1892. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik X, 1—278, 1900 nebst Nachträgen in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 155—185, 1902. Wir zitieren diese Werke als Kremer, Weil, Fihrist, Suter, die Nachträge an den wenigen Stellen, wo wir uns ihrer bedienen, in ausführlicher Bezeichnung. Bei der ersten Auflage hat uns auch ein inzwischen allzufrühe aus dem Leben geschiedener Orientalist, Heinrich Thorbecke, in ausgiebigster Weise unterstützt.

Muhammed floh im September 622 aus Mekka. Er starb im Juni 632. Zehn Jahre hatten ausgereicht, ihn auf der Flucht aus seiner Vaterstadt, ihn kämpfend mit wechselndem Erfolge, ihn endlich auf dem Gipfel seiner Macht zu sehen, und, was nur wenigen gleich ihm beschieden war, er starb auf einem Höhepunkt angelangt. Seine Nachfolger — Chalifen — setzten das von ihm begonnene Werk fort, die Glaubenssätze, welche Muhammed als ihm offenbart verkündigt hatte, mit dem Schwerte in der Hand zu verbreiten. Nicht eigentliche Eroberung war der nächste Zweck der Kriege. Die Annahme der neuen Religion durch die Bekriegten genügte den Siegern in erster Linie, und auch wo der Glaubensfeldzug mit Ländererwerb endigte, blieb der erste Beweggrund an manchen Erscheinungen sichtbar. Der Fremde war nicht länger der Unterworfene, als er selbst wollte. Mit dem Übertritte zum Islam erlangte er das Bürgerrecht, trat er in die Rechte der herrschenden Nation ein[1]), nur Eines fehlte ihm: Stammesgemeinschaft, da der Muselmann auf die alte Nationalität verzichten mußte, der neuen nicht von selbst angehörte. Aber auch diesem Mangel konnte er abhelfen. Er trat meistens zu dem herrschenden Stamme, zu dessen Anführer oder zur regierenden Dynastie in das Klientelverhältnis. In der nächsten Generation waren seine Nachkommen schon vollständig den neu gewonnenen Freunden gleichartig und galten bald als echte Araber, denen sie in Sprache und Sitte so schnell als möglich sich anzuschließen bedacht waren. Diesen durch den Übertritt zu erwerbenden Vorteilen vereinigt mit der geschichtlichen Tatsache, daß in vielen Ländern, gegen welche die ersten Züge der Mohammedaner sich wandten, religiöse Gleichgültigkeit, in anderen Verkommenheit und Widerstandslosigkeit ihnen gegenübertrat, vereinigt mit der weiteren Tatsache, daß nationalarabische Volksteile an den verschiedensten Orten des Ostens längst vor dem Auftreten des Propheten verbreitet waren, welche auch den Stammesgegensatz zwischen Siegern und Besiegten zu lindern sich eigneten, mag eine wesentliche Rolle bei der raschen Ausbreitung des Islam zugefallen sein. Eben diese Art der Ausbreitung erklärt es aber, daß die arabische Sprache in fast unglaublich kurzer Zeit als herrschende Sprache sich aufdrängen, daß z. B. noch nicht volle 200 Jahre nach Muhammed unter dem Chalifen Almamûn, welcher uns noch oft beschäftigen wird, ein Statthalter in Persien seinen Wohnsitz haben konnte, der nicht ein Wort persisch verstand[2]).

Den geistig kräftigeren Elementen, welche an der Religion ihrer

[1]) Kremer II, 147. [2]) Ebenda 150, Anmerkung 1.

Väter hingen und nicht zum Übertritte zu bewegen waren, sondern das blieben als was sie erzogen worden waren, meistens nestorianische Christen und Juden, wurde freilich dem Wortlaut des Gesetzes nach mit Bedrückung mannigfacher Art gedroht. Schon Chalife Omar 634—644, derselbe, welcher das Jahr 622 der Flucht Muhammeds als Hidschra zum Anfang einer neuen Zeitrechnung schuf, erließ das Verbot, daß kein Jude oder Christ in Staatskanzleien angestellt werde[1]). Hârûn Arraschîd 786—809 befahl, alle Kirchen in dem Grenzgebiete niederzureißen und verordnete, daß die Nicht-Muselmänner sich einer besonderen Kleidung zu bedienen hätten[2]). Aber viele dieser Gesetze standen nur auf dem Papiere und wurden massenhaft umgangen. Wenn wir hören, daß Hârûn Arraschîd selbst einen nestorianischen Christen Dschibril ibn Bachtischû' zum Leibarzt hatte, der sich bei ihm jährlich auf 280 000 Dirham (das sind über M. 200 000) stand[3]), wenn Chalife Almuktadir 869—870 das Verbot Andersgläubige anzustellen mit der Klausel versah: es sei denn als Ärzte oder Geldwechsler, so wird uns der Grund nicht lange verborgen bleiben, warum man so schonend in mancher Beziehung verfuhr.

Unter den echten Arabern war die Schreibkunst noch wenig verbreitet. Es ist zweifelhaft, ob Muhammed selbst in späteren Jahren sie sich aneignete[4]). Gewandtheit mit dem Schreibrohre umzugehen besaßen noch lange Zeit nur Christen und Juden, und so mußte man wohl oder übel sich ihrer bedienen. Namentlich die nestorianischen Christen waren es, die das staatliche Rechnungswesen fast allein besorgten und ebenso als Ärzte unentbehrlich waren. Auch Juden, Perser, Inder betrieben die praktische Medizin, aber das christliche Element war entschieden vorherrschend. Erst der große Râzî, dessen Todesjahr auf 932 fällt, eröffnet den Reigen der mohammedanischen Ärzte[5]). Dagegen war schon unter den persischen Sassanidenkönigen im V. S. ungefähr in der Stadt Dschundaisâbûr in der Provinz Chuzistan eine von Nestorianern geleitete und besuchte medizinische Schule gegründet worden. Diese Schule wurde durch die Eroberung in ihrer Blüte keineswegs gehemmt, aus ihr gingen die besten und berühmtesten Ärzte ihrer Zeit hervor, aus ihr insbesondere die Leibärzte der Chalifen, und wir haben an einem Beispiele gesehen, wie dieselben bezahlt wurden. Die ungeheuren Geldsummen, welche rasch ihren Besitzer zu wechseln pflegten, bilden überhaupt ein kennzeichnendes Merkmal der damaligen Verhältnisse,

[1]) Weil S. 20. [2]) Kremer II, 167. [3]) Ebenda 179. [4]) Weil S. 3. [5]) Kremer II, 183.

und man hat gewiß mit Recht auf diesen Umstand hingewiesen[1], um die Raschheit der Entwicklung, die eben so große Jähe des Verfalls der orientalisch-arabischen Bildung zu erklären. Wo nicht bloß der Beherrscher der Gläubigen über ungezählte Schätze verfügte, wo nur als ein Beispiel unter vielen von einem Kaufmanne in Al-Basra unter Al-Mahdî 775—785 uns berichtet wird, der ein tägliches Einkommen von 100 000 Dirham (beinahe 30 Millionen Mark jährlich!) besaß, so begreifen wir, welche Treibhaustemperatur durch solche Mittel den Fleiß anzufeuern geschaffen wurde.

Eine ungemein fruchtbare übersetzende Tätigkeit begann, sobald das Arabische die allgemeine Literatursprache geworden war[2]). Aus dem Syrischen, aus dem Persischen, aus dem Griechischen, aus dem Indischen wurden durch eingeborene Andersgläubige wertvolle Werke in das Arabische übertragen. Die Regierungen der Chalifen Almanṣûr 754—775, Hârûn Arraschîd 786—809, Almamûn 813—833 sind für solche Tätigkeit ganz besonders günstig gewesen, und hier beginnt auch die Geschichte der Mathematik bei den Arabern.

Vielleicht sollte man zugunsten einer Persönlichkeit noch um einige Chalifate weiter hinaufgreifen bis zu dem Omaijaden ʿAbd Almelik 684—705, während die drei obengenannten dem Geschlechte der Abbasiden angehörten. Unter ʿAbd Almelik, welcher gleich den anderen Omaijaden in Damaskus residierte, war ein Christ von echtgriechischer Herkunft, Sergius, Schatzmeister, und dessen Sohn Johannes von Damaskus folgte in noch jugendlichem Alter wahrscheinlich dem Vater bei dessen Tode in dieser Stellung nach. Bald aber zog er sich nach dem Kloster Saba zurück, wo er nach den einen 760, nach den andern gar erst 780 starb[3]). Wir haben früher (S. 464) gesehen, daß ihm, dessen schriftstellerische Tätigkeit allerdings auf theologischem Gebiete liegt, nachgerühmt wird, er sei in der Geometrie so bewandert gewesen wie Euklid, in der Arithmetik wie Pythagoras und Diophantus, aber das ist auch alles, was wir von ihm als Mathematiker wissen.

Die Abbasiden folgten im Chalifate auf die Omaijaden im Jahre 750 in der Person des grausamen, undankbaren, rachsüchtigen und meineidigen Abû'l ʿAbbâs, dessen blutgetränkte Regierung nur vier Jahre dauerte[4]). Wir erwähnen aus dieser Zeit nur eine Neuerung. Die Heiligkeit des Nachfolgers des Propheten gestattete nicht mehr einen unmittelbaren Verkehr zwischen ihm und dem Volke. Ein Träger seiner Befehle mußte die Vermittelung hinfort übernehmen, und ein solcher Träger, arabisch Wezîr, wurde demgemäß ernannt. Wir

[1]) Kremer II, 190. [2]) Ebenda 169. [3]) Ebenda 402. [4]) Weil S. 131.

stehen jetzt wieder an dem Regierungsantritt Almanṣûrs, der nach den verschiedensten Richtungen eine neue Zeit einleitete und wie zum äußeren Zeichen derselben seinen Wohnsitz von Damaskus nach Bagdad an den Tigris verlegte, an die Stelle, wo im Umkreise nur weniger Meilen einst Babylon und Ktesiphon mächtigen Königen zum Mittelpunkt ihrer Herrschaft gedient hatten. Der Handel belebte sich sichtlich. Die Schiffahrt im persischen Meerbusen und darüber hinaus brachte den Kaufleuten namentlich von Al-Baṣra an der Mündung des mit dem Euphrat vereinigten Tigris jene Reichtümer, von denen vorübergehend die Rede war, brachte ihnen Menschenkenntnis und Welterfahrung und Wissen der mannigfachsten Art.

Al-Baṣra wurde jetzt der Ort, von wo auch geistige Güter der Reichshauptstadt zugeführt wurden[1]). ʿAmr ibn ʿUbaid lebte in Al-Baṣra, ein Philosoph von sittlicher Reinheit und geistiger Größe, der sich tief erbittert über die schmachvolle Regierungsweise der letzten Omaijaden lebhaft mit politischen Umtrieben beschäftigte und für seinen Teil an dem Sturze wenigstens eines Tyrannen aus jenem Geschlechte emsig mitwirkte. Als die Dynastie vollends beseitigt war, trat er zu dem Abbasiden Almanṣûr in nahe Beziehungen, und dieser verehrte ihn wie einen väterlichen Freund. Wahrscheinlicherweise waren es die Lehren des ʿAmr ibn ʿUbaid, welche die kulturfreundlichen Anwandlungen Almanṣûrs in Taten überführten. Auf Almanṣûrs Befehl entstanden Übersetzungen, von denen wir andeutungsweise gesprochen haben. Aus dem Griechischen, vielleicht freilich erst mittelbar aus syrischen Bearbeitungen, übertrug man medizinische Schriften[2]); aus dem Pehlewî die ursprünglich indischen Tierfabeln des Bidpai, welche in der zweiten Hälfte des VI. S. der Leibarzt des persischen Königs Chosrau Anôscharwân, desselben, der den flüchtigen Lehrern der Athener Hochschule eine Heimat geboten hatte (S. 503), in jene Sprache übersetzt hatte[3]); aus dem Sanskrit lernte man den Sindhind kennen, welchen Al-Fazârî arabisch herausgab[4]), und sobald einmal, sagt der arabische Geschichtsschreiber, der uns dieses erzählt, diese Werke in die Öffentlichkeit gedrungen waren, las man sie und studierte mit Eifer die darin behandelten Gegenstände.

[1]) Kremer II, 410—412. [2]) Wenrich, *De auctorum Graecorum versionibus et commentariis Syriacis, Arabicis, Armeniacis Persicisque.* Leipzig 1842, pag. 13—14. [3]) Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher. Göttingen 1840, S. 6, Nr. 7 und S. 11, Nr. 21. [4]) Kremer II, 442. Suter 4—5, Nr. 6.

Wir sind namentlich über das, was den Sindhind betrifft[1], aufs beste unterrichtet durch eine in der Einleitung zu einem astronomischen Werke enthaltene Erzählung. Aus dieser berichtet nämlich ein anderer Araber wie folgt: „Alhusain ibn Muḥammed ibn Hamid, bekannt unter dem Namen Ibn Aladamî, erzählt in seinem Tafelwerke, bekannt unter dem Namen der Perlenschnur[2]), daß im 156. Jahre der Hidschra vor dem Chalifen Almanṣûr ein Mann aus Indien erschien, welcher in der unter dem Namen Sindhind bekannten Rechnungsweise, die sich auf die Bewegungen der Sterne bezieht, sehr geübt war, und zur Auflösung der Gleichungen Methoden, die sich auf die von einem halben Grade zu einem halben Grade berechneten Kardagas stützten, und außerdem mannigfache astronomische Verfahren zur Bestimmung der Sonnen- und Mondfinsternisse, der Koaszendenten der Zeichen der Ekliptik und anderer ähnlicher Dinge, insgesamt in einem aus einer gewissen Zahl von Kapiteln bestehenden Buche besaß. Das Buch wollte er ausgezogen haben aus den Kardagas, welche den Namen eines indischen Königs Figar tragen, und welche auf eine Minute genau berechnet waren. Almanṣûr ordnete an, daß man dieses Buch ins Arabische übersetze und danach ein Werk verfasse, welches die Araber den Planetenbewegungen zugrunde legen könnten. Diese Arbeit wurde dem Muḥammed ibn Ibrâhîm Alfazârî anvertraut, welcher danach ein Werk verfaßte, das bei den Astronomen der große Sindhind heißt. Das Wort Sindhind bedeutet nämlich in der Sprache der Inder ewige Dauer. Insbesondere die Gelehrten jener Zeit bis zur Regierung des Chalifen Almamûn richteten sich danach. Für diese wurde ein Auszug davon durch Abu Dschaʿfar Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî angefertigt, welcher sich dessen auch zur Herstellung seiner in den Ländern des Islam berühmten Tabellen bediente. In diesen Tafeln stützte er sich für die mittleren Bewegungen auf den Sindhind und wich für die Gleichungen und Deklinationen davon ab. Er stellte seine Gleichungen nach der Methode der Perser und die Deklinationen der Sonne nach der Weise des Ptolemäus auf. Er schlug auch in diesem Werke schöne von ihm erfundene Näherungsmethoden vor, welche aber wegen gewisser augenscheinlicher Irrtümer, die das Werk enthält, und die des Verfassers Schwäche in der Geometrie zeigen, unzulänglich sind. Diejenigen Astronomen der genannten Zeit, welche der Methoden des Sindhind sich bedienten, schätzten das Werk sehr und verbreiteten es rasch weiter. Noch heute ist es sehr gesucht von denjenigen, welche sich mit der Berechnung der Gleichungen der Planeten beschäftigen.“

[1]) Vgl. Woepcke im *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863, pag. 474 flgg. Auch die von uns nachher zu gebenden Erläuterungen finden sich bei Woepcke, welcher sich hier zum Teil auf Colebrooke stützt. [2]) Ibn Aladamî lebte um 900. Sein Tafelwerk wurde 920 nach seinem Tode von einem Schüler herausgegeben. *Notices et extraits de manuscrits de la biblioth.* VII, 126, Anmerkung 3. Suter 44, Nr. 82.

Wir müssen diesem Berichte mannigfache Erläuterungen beifügen. Der Name Sindhind ist nichts anderes als eine offenkundige Verketzerung von Siddhânta, und es ist also nur die Frage, welches von den diesen Namen führenden astronomischen Werken der Inder gemeint sei. Da es im Jahre 156 der Hidschra, welches mit dem Jahre 773 n. Chr. übereinstimmt, nach Bagdad gekommen ist, so stehen später verfaßte Siddhântas natürlich außer Frage. Genauere Antwort gestattet sodann die Nennung des Königs Figar. Es ist sehr wahrscheinlich, daß Figar aus Vyâghra entstand, daß aber Vyâghra selbst eine Abkürzung aus Vyâghramuka ist, dem Namen des Königs, während dessen Regierungszeit Brahmagupta 628 seinen Brâhma-sphuṭa-siddhânta (S. 598) verfaßte. Berücksichtigt man endlich die gleichfalls allgemein zugestandene Verketzerung Kardaga aus kramajyâ, so dürfte folgende Vermutung zur fast sicheren Tatsache sich gestalten: Im Jahre 773 kam durch einen Inder ein Auszug aus dem astronomischen Lehrgebäude des Brahmagupta nach Bagdad, und dieser Inder nannte seine Quelle nicht mit dem wahren Namen des Verfassers, sondern nach dem Könige, unter welchem das Werk verfaßt war, darin vielleicht nur die Fragen des Chalifen beantwortend, welcher die fürstliche Macht so verstand, daß alles nach dem benannt werden müsse, unter dem es geleistet wurde.

Die arabischen Personennamen, welche in dem Berichte und auch sonst uns bereits vorgekommen sind, erheischen gleichfalls eine erläuternde Bemerkung[1]). Die Araber bedienten sich verhältnismäßig sehr wenig zahlreicher Namen. Um so sicherer trat es ein, daß viele gleichnamig waren, und zur Unterscheidung wurde alsdann, verbunden durch das Wort ibn = Sohn, auch der Vatersname genannt, Muḥammed ibn ʿAbdallâh (der Sohn des ʿAbdallâh) war ein anderer als Muḥammed ibn ʿOmar (der Sohn des ʿOmar). Waren auch die Väter gleichnamig, so konnte wiederholt durch ibn eingeführt auf den Vater des Vaters zurückgegangen werden usw. War eine Verwechslung nicht möglich, so ließ man nicht selten dem Namen des Vaters gegenüber den des Sohnes weg und sprach nur von dem Sohne ʿOmars oder von dem Sohne ʿAbdallâhs. Auch umgekehrt

[1]) Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher, S. X—XIII.

hat man durch den Sohn auch wohl den Vater näher bezeichnet, der nun abû = Vater des nachfolgend Genannten hieß. Ein Muḥammed also, der einen ʿOmar zum Vater, einen ʿAbdallâh zum Sohne hatte, vereinigte die Namen beider Blutsverwandten mit dem eignen und hieß dementsprechend Abû ʿAbdallâh Muḥammed ibn ʿOmar. Man findet dabei die eigentümlichsten Verbindungen und Weglassungen. So konnte von dem Vater eines bekannten Mannes, von dem Sohne des Vaters eines Dritten die Rede sein, ohne daß der Name des eigentlich Gemeinten überhaupt ausgesprochen wurde. Abû Marwân war Marwâns Vater, gleichgültig wie er hieß; Ibn Abû Marwân war der Sohn von Marwâns Vater, d. h. Marwâns Bruder. Der Araber hat nun ferner die Gewohnheit auch Eigennamen den Artikel al vorzusetzen, welcher mit Abû sich zu Abû'l vereinigt und auch andere Veränderungen erleidet, z. B. vor einem anfangenden R sich in ar verwandelt. Daß dieser Artikel um so weniger bei Beinamen fehlen durfte ist einleuchtend. Wir erinnern als Beispiele an die Chalifennamen al Manṣûr = der Siegreiche, ar Raschîd = der auf richtigen Weg Geleitete, al Mamûn = der durch Vertrauen Beglückte. Die Beinamen, vielfach zur genaueren Bestimmung der gemeinten Persönlichkeit beitragend, sind verschiedener Gattung. Sie können sich auf geistige oder körperliche Vorzüge oder Mängel dessen beziehen, dem sie beigelegt wurden; sie können von dem Geburtsorte oder Wohnorte des Betreffenden herrühren; sie können eine religiöse Sekte bezeichnen, welcher er angehörte; sie können den Stand oder die Beschäftigungsweise der Persönlichkeit selbst oder des Vaters angeben. Wir werden durch diese Erläuterung darauf vorbereitet, arabische Schriftsteller mit einem für unsere Gewohnheiten übermäßig langen Namen auftreten zu sehen, aber auch darauf, daß man, um die Länge zu vermeiden, sich gern nur der Beinamen bediente. So ist in obigem Bruchstücke schon von Alhusain ibn Muḥammed ibn Hamid die Rede und dabei erwähnt, man nenne ihn gemeiniglich Ibn Aladamî. So kommt ebendort Abû Dschaʿfar Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî vor, d. h. Muḥammed, der Vater des Dschaʿfar, der Sohn des Mûsâ aus der Provinz Chwarizm, und wir werden sehen, daß Alchwarizmî der Name blieb, unter welchem dieser Schriftsteller in weiteren Kreisen bekannt wurde.

Wir kehren nach dieser Abschweifung zu der unmittelbar vorher ausgesprochenen Behauptung zurück, daß 773 ein Auszug aus dem uns bekannten Werke des Brahmagupta nach Bagdad kam. Die arabische Überarbeitung durch Alchwarizmî muß um 820 etwa stattgefunden haben. Aber schon vorher wurde jener Auszug von Arabern benutzt. Jaʿḳûb ibn Ṭâriḳ schrieb schon 777 Tafeln gezogen aus dem Sindhind[1]. Ähnliche Tafeln fertigte Ḥafṣ ibn ʿAbdallâh aus Bagdad, und Aḥmed ibn ʿAbdallâh Ḥabasch genannt al Ḥâsib = der Rechner aus Merw stellte um 830 drei verschiedene astronomische Tafeln her, eine nach arabischen Beobachtungen, eine nach den Lehren der Perser, eine nach den Methoden der Inder[2]. Auf ein noch späteres Datum weisen nach indischer Methode berechnete Tafeln des Abû'l ʿAbbâs Faḍl ibn Ḥâtim aus Nairîz in Persien[3] um 900 und die Perlenschnur des Ibn Aladamî aus der gleichen Zeit. Ob jedoch alle diese Anwendungen indischer Methoden auf der einmaligen Einführung im Jahre 773 beruhten, ob spätere Verbindungen zwischen arabischen und indischen Gelehrten vorhanden waren, wenn wir von den Reisen absehen, welche Masʿûdî († 956) und Albîrûnî († 1038) in Indien machten und ausführlich beschrieben haben, ob schon vor 773, damals als Muḥammed ibn Ḳâsim unter dem Omaijaden Welid I., 705 bis 715, bis an den Indus vordrang[4], indische Wissenschaft in mündlicher Übertragung zu den Arabern gelangt war, das sind Fragen, zu deren Bejahung wir freilich keinen überlieferten Anhaltspunkt haben, deren vollständige Verneinung aber uns fast noch kühner erscheinen möchte.

Ungleich gesicherter ist jedenfalls die Art und Weise, in welcher griechische Wissenschaft in sich wiederholenden Wellen den arabischen Boden durchtränkte. Ganz Syrien in den gebildeten vorzugsweise christlichen Kreisen ist fast als griechische Kolonie zu denken. Aus der Schule von Antiochia ging jener Nestorius hervor, welcher 428 bis 431 Patriarch von Konstantinopel war, und dessen Anhänger seine Heimatsgenossen waren und bis auf den heutigen Tag geblieben sind. In Emesa und Edessa waren nestorianische Schulen, in welchen man nicht aufgehört hatte, Hippokrates und Aristoteles zu studieren. Als dann bei der Amtsentsetzung des Nestorius wegen seiner als ketzerisch verurteilten Ansichten diese Anstalten in eine Art von Verruf kamen und die zu Edessa 489 ganz aufhörte, da verschwand das Studium griechischer Medizin nicht etwa ganz, es zog sich nur weiter zurück nach Dschundaisâbûr in der Provinz Chuzistân, wie wir (S. 695) gelegentlich gesagt haben. Die spätere Omaijadenresidenz selbst, Damaskus, besaß unter ihren Einwohnern Männer von grie-

[1]) Hankel S. 230—231. Fihrist 33. Suter 4, Nr. 4. [2]) Abulpharagius, *Historia dynast.* ed. Pococke. Oxford 1663, pag. 161 der lateinischen Übersetzung. Vgl. auch Caussin in den Anmerkungen zu den Ḥâkimitischen Tafeln des Ibn Junis. *Notices et extraits de manuscrits de la Bibliothèque nationale* VII, 98, Anmerkung 2. [3]) *Notices et extraits* etc. VII, 118, Anmerkung 2. Suter 45, Nr. 88. [4]) Weil S. 97. Woepcke im *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863, pag. 472.

chischer Herkunft und griechischer Bildung. Damascius von Damaskus (S. 501) stand um 510 an der Spitze der athenischen Hochschule, entsprechend wie Johannes von Damaskus in der zweiten Hälfte des VIII. S. Vertreter griechischer Denkungsart in der Heimat war. Auch in Persien fehlte es keineswegs neben alten an neueren Beziehungen zu Griechenland. Der Hof jenes Sasaniden, Chosrau I. Anôscharwân war, woran wir eben (S. 697) erinnert haben, von 531 bis 533 etwa die Zufluchtsstätte der aus Athen vertriebenen letzten Peripatetiker gewesen, und wenn dieselben auch der Heimat sich wieder zuwandten, sobald der Friedensvertrag von 533 es ihnen gestattete, die Samen, welche sie einmal ausgestreut hatten, gingen doch nicht alle in der fremden Erde zugrunde. So war also, als durch Verhältnisse, auf die wir aufmerksam gemacht haben, eine Neigung der Chalifen erwachte, Schriftsteller anderer Völker in arabischer Sprache kennen zu lernen, an Männern kein Mangel, welche Griechisches aus schon vorhandenen syrischen und persischen Übersetzungen, aber auch aus der Ursprache zu übertragen imstande waren.

Die ersten griechischen Mathematiker, welche den Arabern mundgerecht gemacht wurden, waren Ptolemäus und Euklid[1]).

Für beide werden wir auf die Regierungszeit Arraschîds verwiesen, dessen Wezîr Jaḥjâ ibn Châlid der Barmekide die große Zusammenstellung übersetzen ließ. Der erste Versuch scheint jedoch nicht von sonderlichem Erfolge begleitet gewesen zu sein. Vielleicht entstammt ihm die sprachwidrige Verbindung des arabischen Artikels al mit dem griechischen Superlativ *μεγίστη*, welche in dem Worte Al-Midschisti (Almagest) ein höchst ungerechtfertigtes, aber durch die lange Dauer des Besitzes unantastbar gewordenes Bürgerrecht erlangte. Erneuerte Durchsicht und Verbesserung dieser Übersetzung erfolgte noch unter desselben Chalifen Regierung durch Abû Ḥasan und Salmân, dann durch Haddschâdsch ibn Jûsuf ibn Maṭar, welcher letztere auch als erster Übersetzer der euklidischen Elemente genannt wird. Euklid scheint er sogar zweimal, zuerst unter Arraschîd, dann unter Almamûn, vorgenommen zu haben, da von den beiden Bearbeitungen unter dem Namen jener Chalifen die Rede ist als von einer harûnischen und einer mamûnischen[2]).

Wir stellen uns keineswegs die Aufgabe, alle arabischen Übersetzer zu nennen, oder die griechischen Schriftsteller über Mathematik sämtlich anzugeben, welche von jenen übersetzt worden sind. Die einen wie die anderen dürften nicht einmal alle bekannt sein, selbst für solche, welche mit dem gediegensten Einzelwissen an die Untersuchung dieses Gegenstandes herangetreten sind. Die Anzahl der noch nicht katalogisierten oder ungenügend beschriebenen, jedenfalls von Mathematikern von Fach noch nicht durchgesehenen arabischen Handschriften, welche auf unsere Wissenschaft sich beziehen, in Bibliotheken des Ostens wie des Westens — wir nennen insbesondere die reichhaltigen spanischen Sammlungen — ist eine ungemein große und verbietet dadurch jedes abschließende Wort, mag es um Übersetzer oder um Originalschriftsteller sich handeln. Nur einige wenige Übersetzer sind unter allen Umständen zu erwähnen.

[1]) Gartz, *De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis.* Halle 1823, pag. 7, und Wenrich, *De auctorum Graecorum versionibus etc.* pag. 177 und 227.

[2]) Über diese und andere Euklidübersetzungen vgl. Klamroth, Ueber den arabischen Euklid (Zeitschr. der morgenländ. Gesellschaft XXXV, 271—326, Leipzig 1881). Über Haddschâdsch s. Suter 9, Nr. 16.

Ḥunain ibn Isḥâḳ mit dem ausführlichen Namen Abû Zaid Ḥunain ibn Isḥâḳ ibn Sulaimân al 'Jbâdi[1]) gehörte dem christlichen arabischen Stamme der 'Jbâd an. Er kam schon mit guter Vorbildung nach Bagdad, machte dann Reisen in die griechischen Städte, wo er deren Sprache sich aneignete und kehrte über Al-Baṣra, wo er sich noch im Arabischen vervollkommnete, nach Bagdad zurück. Jetzt begab er sich an die Übersetzung einer ganzen Reihe griechischer Naturforscher und Philosophen, auch des Ptolemäus, dessen Almagest er bearbeitete. Andere Schriftsteller, wie die meisten Werke des Euklid, die Schrift des Archimed von der Kugel und dem Zylinder, den Autolykus ließ er unter seiner Aufsicht durch seinen Sohn Abû Ja'ḳûb Isḥâḳ ibn Ḥunain[2]) übersetzen. Der Vater starb, durch den Bischof Theodosius wegen Gotteslästerung aus der Gemeinde ausgestoßen, 873, der Sohn 910 oder 911. Beiden fehlten bei aller philologischen Gewandtheit, deren sie sich rühmen durften, die sachlichen Kenntnisse, ohne welche es nun einmal nicht möglich ist, ein mathematisches Buch zu übersetzen, und so bedurften ihre Arbeiten gar sehr der fachkundigen Verbesserung.

Diese wurde ihnen durch Tâbit ibn Ḳurrah[3]). Abû'l Ḥasan Tâbit ibn Ḳurrah ibn Marwân al Ḥarrânî wurde 836 zu Ḥarrân in Mesopotamien geboren. Er war zuerst Geldwechsler, wandte sich aber dann der Wissenschaft zu und erwarb sich in Bagdad ausge-

[1]) Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher S. 26, Nr. 69. Suter 21—23, Nr. 44. Wenrich l. c. pag. 228 glaubte fälschlich die Almagestübersetzung dem hier gleich folgenden Isḥâḳ ibn Ḥunain zuschreiben zu müssen. Vgl. Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. X, 469, Anmerkung 2. [2]) Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher S. 29, Nr. 71. [3]) Ebenda l. c. S. 34, Nr. 81. Fihrist 25—26. Suter 34—38, Nr. 66.

zeichnete Kenntnisse, sowohl als Mathematiker und Astronom, als auch in der griechischen Sprache, welcher er wie der syrischen und arabischen mächtig war. Ein erneuerter Aufenthalt in seiner Vaterstadt war für Tâbit mit Mißhelligkeiten verknüpft. Er gehörte nämlich der Sekte der Sabier an, teilte aber deren Ansichten nicht in der geforderten Strenge und wurde deshalb ausgestoßen. Nun kehrte er abermals nach Bagdad zurück, welches er nicht wieder verließ. Dort starb er 901 in höchstem Ansehen bei dem Chalifen Almuʿtaḍid[1]), 892—902, der ihn seines nächsten Umganges würdigte. Wir werden es im 34. Kapitel mit Tâbit als Originalschriftsteller zu tun haben. Unter seinen Übersetzungen nennen wir Schriften des Apollonius von Pergä, des Archimed, des Euklid, des Ptolemäus, des Theodosius. Den Übersetzungen können wir auch als nahe verwandten Inhaltes einen Kommentar Tâbits[2]) zu dem (S. 424) von uns erwähnten Buche des Charistion über die Wage anschließen. Es ist in einer viel verbreiteten alten lateinischen Übersetzung erhalten und den Forschern über die Geschichte der Mechanik als *Liber Charastonis* bekannt.

Etwa gleichzeitig mit Tâbit zwischen 864 und 923 ist Ḳusta ibn Lûkâ zu nennen[3]), ein christlicher Philosoph und Arzt, der von seinen Reisen durch die griechischen Städte eine Menge Bücher mit nach Hause brachte, deren Übersetzung er sich angelegen sein ließ. In seinen eigenen Schriften soll Reichtum an Gedanken neben Kürze der Ausdrucksweise zu bewundern sein. Er übersetzte die Sphärik des Theodosius, astronomisch-geometrische Schriften des Aristarch von Samos, des Autolykus, des Hypsikles, den Gewichtezieher des Heron von Alexandria, mit großer Wahrscheinlichkeit auch den Diophant.

Die ganze zweite Hälfte des X. S. erfüllt Abû'l Wafâ Muḥammed ibn Muḥammed Al-Bûzdschânî 940—998 aus Bûzdschân[4]), der als Übersetzer des Diophant zu nennen ist. Er verließ schon mit 20 Jahren seine Heimat, um nach ʿIrâḳ überzusiedeln, wo er spekulative und praktische Arithmetik vermutlich bei zwei Oheimen, Geometrie bei zwei anderen Lehrern studierte. Unter der spekulativen Arithmetik ist das zu verstehen, was die Griechen Arithmetik nannten, also Zahlentheorie und Algebra, unter der praktischen Arithmetik die eigentliche Rechenkunst, die Logistik der Griechen,

[1]) Weil S. 194—198. [2]) P. Duhem, *Les origines de la statique* I, 79—93. [3]) Wüstenfeld l. c. S. 49, Nr. 100. Wenrich l. c. S. 178. Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. X, 499. Suter 40—42, Nr. 77. [4]) Eilhard Wiedemann, Zur Geschichte Abul Wefas. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, histor.-literar. Abtlg. S. 121—122 (1879). Fihrist 39—40.

wobei jedoch keineswegs jetzt schon mit Bestimmtheit ausgesprochen werden will, daß er beide nach griechischen Mustern erlernt habe.

Die griechischen Schriftsteller, deren Werke wir als von Arabern übersetzt namhaft zu machen hatten, sind neben den großen Meistern Euklid, Archimed, Apollonius, Heron, Diophant hauptsächlich solche, welche den sogenannten kleinen Astronomen (S. 447) der Griechen ausmachten. Die Araber hatten für diese Schriften, deren Studium zwischen die Elemente des Euklid und den Almagest einzuschalten ist, gleichfalls einen besonderen Sammelnamen, sie nannten sie die mittleren Bücher[1]).

Man muß nicht glauben, daß damit die Reihe griechischer Mathematiker, von denen man weiß, daß ihre Schriften arabische Übersetzer fanden, abgeschlossen sei, und ebensowenig, daß es eine einfache Sache sei, aus arabischen Zitaten klug zu werden. Wenn es natürlich ist, daß Eigennamen, bei welchen man sich, auch wenn man die Sprache des Volkes, dem ihre Träger angehörten, kennt, gar häufig nichts denken kann oder Falsches sich zu denken versucht ist, beim Übergang in fremde Literaturen verdorben werden, so haben arabische Abschreiber, welche sogenannte diakritische Punkte bald wegließen, bald unzutreffend hinschrieben, ein besonderes Geschick an den Tag gelegt, Namen unkenntlich zu machen. Sind nun vollends die arabischen Schriften nicht im Urtexte bekannt, sondern selbst wieder in Gestalt von Übersetzungen ins Lateinische, welche seit dem XII. S. angefertigt wurden und zum Teil von Männern angefertigt wurden, denen die wirklichen griechischen Eigennamen unbekannt waren, so ist das Unmögliche an Verketzerungen fast das Gewöhnliche. Aus Heron ist Iran und Yrinius geworden[2]), aus Menelaus Milleius, aus Archimed bald Arsamites, bald Arsanides, bald Archimenides usw.[3]).

Einen Vorteil bilden diese Umgestaltungen, sobald sie einmal erkannt sind; sie geben die Möglichkeit, lateinischen Übersetzungen oder Bearbeitungen griechischer Schriftsteller, welche dieselben enthalten, auf den ersten Blick anzusehen, daß nicht der griechische Grundtext, sondern die Zwischenbehandlung eines Arabers die Vorlage des letzten Übersetzers bildete, daß also notwendigerweise der betreffende griechische Schriftsteller als einer von denen betrachtet werden muß, deren Werke auf arabische Mathematik Einfluß üben

[1]) Steinschneider, Die mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter. Zeitschr. Math. Phys. X, 456—498 (1865). [2]) Zeitschr. Math. Phys. X, 489, Anmerkung 60. Suter in der *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge II, 408—409 (1902). [3]) Steinschneider in der Hebräischen Bibliographie Juli-August 1864 (Bd. VII, Nr. 40) S. 92—93, Anmerkung 20.

konnten. So müssen beispielsweise die Arbeiten des Zenodorus den Arabern bekannt gewesen sein, weil in einer lateinischen Abhandlung über die isoperimetrische Aufgabe, welche handschriftlich in Basel vorhanden ist[1]), der Name Archimenides vorkommt.

Von anderen Schriftstellern, welche den Arabern bekannt waren, nennen wir neben Jamblichus und Porphyrius, deren Studium bei den Syrern niemals aufgehört hat, insbesondere Nikomachus[2]), dessen arabische Quellen selbst gedenken. Ebenso dürfen wir eine Bekanntschaft mit Pappus vermuten, da Pappus der Rumäer doch wohl nur irrtümlich statt der Alexandriner gesagt ist.

Die Übersetzungstätigkeit war auch von einer vielfach kommentierenden begleitet, auf die wir aber, da sie immerhin einige Ansprüche an das Selbstdenken des Kommentators erhebt, bei den Originalarbeiten zu reden kommen. Wir haben, bevor wir diesen uns zuwenden, nur eine Bemerkung noch zu machen.

Die Schriftsteller, von welchen als Übersetzern seither die Rede war, gehörten sämtlich dem Morgenlande an. Das Morgenland war es aber nicht allein, welches der Islam sich unterwarf, in welchem arabisch gesprochen und arabisch gelehrt wurde, und wenn wir gelten lassen, was für die früheren Abschnitte unsere Richtschnur bildete, daß es wesentlich auf die Sprache ankommt, nicht auf das örtliche Beisammenwohnen, um die Zugehörigkeit zu einem Kulturverbande zustande zu bringen, so werden wir neben den Ostarabern auch Westaraber berücksichtigen müssen, welcher letztere Name für die arabisch redenden Bewohner der afrikanischen Nordküste, Spaniens und Siziliens in Anspruch genommen wird.

Längs der afrikanischen Küste[3]) verbreitete sich der Islam unter der Regierung Welid I., 705—717, vornehmlich durch die Tapferkeit zweier Feldherren, des Mûsâ und des Târiḳ. Letzterer war es auch, der sein Waffenglück über das Mittelmeer hinübertrug und im Mai 711 auf spanischem Boden jene steile Höhe besetzte, die nach ihm Târiḳs Höhe, Dschebel Târiḳ, Gibraltar genannt ist. Von diesem festen Punkte aus wurde Spanien bald zum größten Teile unterworfen. Aber die große Entfernung von der Chalifenhauptstadt gab dem Emîr, d. h. dem Befehlshaber von Spanien, die Gelegenheit sich selbständiger zu gehaben, als Statthalter der näher gelegenen Provinzen es wagen durften. Nachdem die Abbasiden zur Macht gelangt waren, kam es zur vollständigen staatlichen Trennung, indem Emîr

[1]) In dem Sammelbande F. II, 33 der Basler Stadtbibliothek. [2]) Zeitschr. Math. Phys. X, 463, Anmerkung 24 über Nikomachus und auf derselben Seite im Texte: Pappus der Rumäer. [3]) Weil S. 97 flgg.

'Abd Arraḥmân ein Omaijade 747 eine eigene spanische Omaijadendynastie gründete[1]), welche Versuche des Chalifen Al-Mahdî 776—777 Spanien wieder zu unterwerfen, mit Glück zurückwies[2]). Auch das afrikanische Küstengebiet trennte sich vom Mutterlande. Seit dem Anfang des IX. S. entstand[3]) dort ein Reich mit der Hauptstadt Fez, und dieses war, kaum gegründet, kräftig genug selbst wieder erfolgreiche Kolonisten nach Sizilien auszusenden, wo auch wieder eine selbständige moslimische Dynastie ihren Herrschersitz aufschlug. Wir haben zum Glück uns nicht mit den Kämpfen und Feindseligkeiten zu beschäftigen, welche zwischen den einzelnen Dynastien herrschten. Gift und Dolch ebenso wie offene Empörungen ließen bald einzelne Persönlichkeiten, bald ganze Geschlechter in der Herrschaft wechseln und auch den Sitz der Herrschaft mehrfach verlegen.

Uns genügt die Tatsache der fast unaufhörlichen Kämpfe zur Stütze der weiteren Tatsache, daß auch wissenschaftlicher Neid zwischen den Arabern des Ostens und des Westens eine Scheidewand errichtete, welche es verhinderte, daß manches, welches den einen eigentümlich geworden war, in derselben Form von den anderen übernommen wurde, und was wir damit meinen, wird wohl klar, wenn wir die Jahreszahl 773, welche das Auftreten indischer Astronomie in Bagdad bezeichnet, mit der Zahl 715 der Eroberung des Westreiches, oder auch nur mit der 747 des Beginnes des spanischen Omaijadenreiches vergleichen. Wir werden sofort an diese Datenvergleichung erinnern müssen, wenn wir nunmehr an die Ausbreitung des Zahlenrechnens als ersten Teil arabisch-mathematischen Originalschriftstellertums gelangen und dabei wieder zuerst von den Zahlzeichen der Araber reden.

33. Kapitel.

Arabische Zahlzeichen. Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî.

Die Schreibkunst der Araber[4]) in der Zeit, zu welcher sie für die Geschichte der Mathematik unsere Aufmerksamkeit beanspruchen dürfen, war nicht weit her (S. 695). Von einer alten Schrift mit groben starken geradaufstehenden Zeichen, welche von späteren ara-

[1]) Weil S. 140 flgg. [2]) Ebenda S. 150 [3]) Ebenda S. 297—336 die moslimischen Dynastien in Afrika und Sicilien. [4]) Vgl. Silvestre de Sacy, *Grammaire arabe.* Paris 1810 und die von Gesenius verfaßten Artikel Arabische Schrift S. 53—56 und Arabische Literatur S. 56—69 im V. Bande von Ersch und Grubers Enzyklopädie.

bischen Gelehrten selbst diesem Aussehen nach den Namen einer gestützten säulenartigen Schrift erhalten hat, sind nur geringe Überreste vorhanden. Ob Zahlzeichen darunter vorkommen, ist uns nicht bekannt. Eine neue Schrift, welche zunächst dazu angewandt wurde, den Koran zu schreiben, entwickelte sich um die Mitte des VII. S. Die Schreibkunst gelangte bei diesem heiligen Zwecke bald zu höherem Range, gewerbsmäßige Abschreiber bildeten sich aus, und da diese besonders zahlreich und geschickt in dem 639 am Euphrat erbauten Al-Kûfa auftraten, so erhielt die Schrift den Namen der kufischen. Am Anfange des X. S. veränderte sich diese doch immer noch grobe und rohe Schrift, welche man mit einem Stifte oder einer ungespaltenen Röhre zu schreiben pflegte, besonders unter dem Einflusse des 940 verstorbenen Wezirs Ibn Mukla zu jener flüchtigen, abgerundeten Kurrentschrift, welche heute noch im Oriente dient und in Druckwerken nachgeahmt wird. Sie führt den Namen Neschischrift oder Schrift der Abschreiber, und wurde, seit man sich gespaltener Rohrfedern zu ihrer Darstellung bediente, immer feiner und eleganter. Schreibkünstler wie Ibn Bauwâb († 1032), wie der berühmte Jâkût († 1221) glänzten. Spanien bewahrte seinen eigenen Schriftzug, der sich bis jetzt in Westafrika, in dem sogenannten Magrib, erhalten hat; er ist von einer altertümlichen Steifheit und Ungefälligkeit[1]).

Die Buchstaben des arabischen Alphabetes waren ursprünglich nach Reihenfolge und Aussprache wohl übereinstimmend mit den 22 Lauten, welche auch anderen semitischen Alphabeten angehören, und diese ältere Anordnung führt den Namen Abudsched durch Verbindung der drei ersten Laute, wie man Abece und Alphabet sagt. Als die Nes-chîcharaktere sich bildeten, verließ man die alte Reihenfolge, um die Buchstaben nach ihrem Aussehen zu ordnen, d. h. so, daß die einander ähnlichen Schriftzeichen nebeneinander gestellt wurden.

Daß die Schreibart der Zahlen bei den vielfachen Veränderungen der ganzen Schrift sich nicht gleich bleiben konnte, ist nicht mehr als natürlich. Vor allem liebten es die Araber, die Zahlwörter selbst vollständig zu schreiben, eine Methode, wenn man das Methode nennen darf, welche selbst in einem Lehrbuche der Rechenkunst noch beibehalten ist, das zwischen 1010 und 1016 in Bagdad verfaßt wurde[2]).

Aus ihr wohl entstanden die einem arabisch-persischen Wörter-

[1]) Kremer II, 314. [2]) Kâfî fîl Hisâb des Abu Bekr Mohammed ben Alhusein Alkarkhî, deutsch von Ad. Hochheim. Halle 1878.

buche entnommenen sogenannten Diwâniziffern, welche nur abgekürzte Zahlwörter sein sollen[1]). Am klarsten stelle sich dieses durch den Umstand heraus, daß in Zahlen, die aus Hundertern, Zehnern und Einern bestehen, die Einer zwischen den Hundertern und Zehnern ihren Platz finden, wie es in der Aussprache auch sei (S. 607).

Außerdem bedienten sich die Araber ihrer in der Reihenfolge Abudsched geordneten Buchstaben in derselben Weise wie die übrigen Semiten, um die Zahlen von 1 bis 400 darzustellen. Freilich ist die genannte Reihenfolge nicht allerorten ganz streng festgehalten worden. Der gleiche Buchstabe, der in Bagdad 90 bedeutete, hatte im nördlichen Afrika den Wert 60, 300 wechselte an eben diesen Orten mit 1000 usw.[2]), und man hat daraus den Schluß gezogen, diese von den Arabern als wesentlich arabisch bezeichnete Darstellungsweise der hurûf aldschummal, d. h. der Zahlenwerte der Buchstaben nach ihrer alten Reihenfolge, könne erst entstanden sein, nachdem Afrika islamisiert war, also nach 715. Damit stimmt auch eine Notiz überein[3]), welche dem Chalifen Welid I., unter dessen Regierung jene Ausbreitung nach Westen erfolgte, das Verbot nacherzählt, in die öffentlichen, wie wir uns erinnern meist von Christen geführten Bücher griechische Einträge zu machen mit Ausnahme der Zahlen, weil arabisch eins, oder zwei, oder drei, oder achteinhalb nicht geschrieben werden könne. Eine Ausnahme, welche natürlich nur so gedeutet werden kann, daß damals um 700 die Bezeichnung der Zahlen in abgekürzter Buchstabennotation anders als mit griechischen Buchstaben noch nicht stattfand. Die Schwierigkeit Hunderte von 500 an zu bezeichnen, scheint man anfänglich ähnlich überwunden zu haben, wie zum Teil bei den Hebräern (S. 126) durch gleichzeitige additive Benutzung von zwei oder gar drei Buchstaben. Später, vielleicht erst vom XI. S. an[4]), ersann man ein neues Mittel. Wie nämlich im Hebräischen gewisse Buchstaben existieren, welche in zweierlei Aussprache mit und ohne Aspiration vorhanden sind, so gibt es auch im Arabischen sechs Charaktere von doppelter Lautbedeutung. Man unterscheidet dieselbe durch Punkte, welche deshalb diakritische Punkte genannt werden. Diese sechs neuen punktierten arabischen Buchstaben wurden nun den 22 schon vorhandenen beigefügt und lieferten in dieser Weise nicht nur Zeichen für die Hunderte 500 bis 900, sondern, da jetzt ein Zeichen überschüssig war, auch noch für 1000. Die Vereinigung mehrerer Buchstaben zu

[1]) Silv. de Sacy, *Grammaire arabe* I, 76, Note a und Tabelle VIII. [2]) Woepcke im *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863 pag. 463, Note 1 und 464. [3]) Theophanes, *Chronographia* (ed. Franc. Combefis). Paris 1655, pag. 314. [4]) Silv. de Sacy, *Grammaire arabe* I, 74, Note b.

Zahlen geschah nach dem Gesetze der Reihenfolge linksläufig, wie es die Schrift morgenländischer Völker mit sich brachte.

So war für das Volksbedürfnis, für das Schreiben und Lesen von Zahlen im fortlaufenden Texte ausreichend gesorgt, insbesondere da den Arabern bei ihrer allmählichen Ausbreitung auch noch eine Möglichkeit offen stand, die Möglichkeit sich der in dem eroberten Lande schon vorhandenen, dort volkstümlich gewordenen Zahlzeichen zu bedienen, von der sie wirklich da und dort Gebrauch machten[1].

Das Rechnen, dessen Kenntnis am langsamsten unter den eigentlichen Arabern sich entwickelte, stellt andere Anforderungen. Teils war es ein schwieriges nur Geübten mögliches Kopfrechnen, bei welchem vielleicht die Darstellung der Zahlen an Fingern als Hilfsmittel diente. Sind wir auch über die Zeit durchaus im unklaren, wann ein solches Fingerrechnen stattfand, so wissen wir aus einem kleinen Lehrgedichte eines Verwaltungsbeamten Schams addîn al Mauṣilî[2], daß es bei Arabern in Übung war. Genau nach der gleichen Folge, wie Nikolaus Rhabda es seine Landsleute lehrte (S. 514—515), wurden die Einer und Zehner an der linken, die Hunderter und Tausender an der rechten Hand dargestellt.

Teils aber lernten die Araber beim Rechnen den indischen Stellungswert der Ziffern kennen. Darüber kann bei der übereinstimmenden Aussage aller arabischen Quellen Zweifel nicht bestehen. Am deutlichsten spricht sich Albîrûnî darüber aus. Dieser Schriftsteller[3] ist in Iran geboren. Er brachte lange Jahre in Indien zu, studierte im Sanskrit geschriebene Werke, stellte astronomisch-geographische Beobachtungen an, denen namentlich auffallend genaue Breitenangaben für die von ihm bestimmten Orte verdankt werden, und schrieb ein großes Werk über Indien, welches in jeder Beziehung zu den bedeutendsten Erscheinungen der arabischen Literatur gehört. Albîrûnî starb im Jahre 1038 oder 1039. Er sagt uns[4], die Inder hätten nicht die Gewohnheit ihren Buchstaben eine Bedeutung für das Rechnungswesen zu geben, wie die Araber es täten, welche ihre Buchstaben nach dem Zahlenwerte anordneten. Die Inder bedienten sich vielmehr gewisser Zahlzeichen, die aber verschiedener Art seien, wie denn auch die Gestalt der Buchstaben bei den Indern von einer Landesgegend zur andern wechsle. Die von

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863 pag. 236—237. [2]) Übersetzt von Aristide Marre im *Bullettino Boncompagni* (1868) I, 310—312. Suter in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 181 (1902). [3]) Suter 98—100 Nr. 218 und in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge III, 128, Note 2 (1903). [4]) Woepcke im *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863 pag. 275 flgg.

den Arabern angewandten Zahlzeichen seien eine Auswahl der geeignetsten bei den Indern vorhandenen. Auf die Form komme es nicht an, wenn man nur die innenwohnende Bedeutung kenne. Ferner sagt uns Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî[1], derselbe, welcher für Almamûn die indische Astronomie bearbeitet hat (S. 698) und dessen schriftstellerische Leistungen uns noch in diesem Kapitel ausführlich beschäftigen müssen, es herrsche in bezug auf die Zeichen Verschiedenheit unter den Menschen, eine Verschiedenheit, welche zumal bei der 5, der 6, der 7 und der 8 hervortrete, doch liege darin kein Hindernis.

Sieht man sich so vorbereitet die arabischen Handschriften an, so findet man wesentliche Abweichungen zwischen den Zahlzeichen der Ostaraber und der Westaraber. Der Vergleich der auf der Tafel am Ende unseres Bandes ausgeführten Zeichen lehrt, daß die hauptsächlichsten Abweichungen in den Zeichen für 5, 6, 7 und 8 stattfinden, während 1, 4, 9 ziemlich gleich aussehen, 2 und 3 nur aus horizontaler Lage in vertikale übergingen. Das kann uns nicht gerade überraschen. Wohl aber überrascht es uns, daß die arabischen Zahlzeichen so ungemein abweichen von den Devanagariziffern und daß sie viel eher den Vergleich aushalten mit den Apices, beziehungsweise mit indischen Zeichen des II. bis III. S. Das gibt zu denken! Als immer wahrscheinlicher drängt sich die Vermutung auf, es könne der ganze historisch so dunkle als merkwürdige Vorgang folgender gewesen sein[2]:

Um das II. S. n. Chr. kamen indische Zahlzeichen nach Alexandria, von wo sie sich in ihrer Anwendung beim Kolumnenrechnen vielleicht nach Rom, jedenfalls aber nach dem Westen Afrikas verbreiteten. Die Erinnerung an die indische Herkunft mag wach geblieben sein. Im VIII. S. lernten die Araber des Ostens die indischen Zahlzeichen in bereits wesentlich veränderter Gestalt mit der inzwischen dazugetretenen Null kennen. Die Null nannten sie *aṣ-ṣifr*, das Leere,

[1]) *Trattati d'aritmetica pubblicati da* Bald. Boncompagni I, pag. 1—2. [2]) Diese Theorie rührt von Woepcke her. *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863 pag. 69—79 und 514—529. Gundermann, Die Zahlzeichen (Gießen 1899), hat dagegen folgende Theorie zu begründen gesucht: Ein älteres einfaches System, die Zahlen durch Striche zu bezeichnen, ist allmählich aber nie ganz durch ein neues System, das von allen Kulturvölkern der antiken Welt angenommen wurde, zurückgedrängt worden. Die Buchstaben eines Alphabetes fanden in ihm ihrer Reihenfolge nach Verwendung. Aus diesem Systeme entwickelte sich schrittweise ein neues, das nur einzelne Grundzeichen festhielt, die übrigen abstieß. Das vollständige System lebte aber verborgen weiter und kam nochmals zu großer Blüte. Endlich wurden durch das Ziffernsystem, den Abkömmling eines vollständigen Systems, alle früheren Systeme verdrängt.

als Übersetzung von *sunya*, wie die Null bei den Indern heißt (S. 614). Im Westen nahm man zwar die Null auf, blieb aber, und wäre es nur im bewußten Gegensatze zu den Ostarabern, den alten Zeichen treu, deren indischen Ursprungs man sich ebensowohl als ihres alexandrinischen Stempels noch lange erinnerte, und die man jetzt Ġubârziffern nannte, d. h. Staubziffern[1]) im Gedächtnisse der indischen Weise auf mit Staub bedeckten Tafeln zu rechnen.

Wenn wir behaupten dürfen, jene doppelte Erinnerung sei lange nicht verloren gegangen, so beziehen wir uns dafür auf drei Stellen ziemlich später arabischer Rechenbücher[2]). In allen dreien ist die Form der Ġubârziffern neben der der ostarabischen, welche letztere den Namen der indischen führen, aufgezeichnet; in zweien sind die Ġubârziffern beschrieben, d. h. ihre Ähnlichkeit mit arabischen Buchstaben und Buchstabenvereinigungen ist hervorgehoben, so daß man sie deutlich erkennen kann; in allen dreien sind dann auch die Ġubârziffern als indische Formen bezeichnet. Das eine Rechenbuch erzählt in dieser Beziehung: „Ihr Ursprung bestand darin, daß ein Mann aus dem Volke der Inder feinen Staub nahm, welchen er auf eine Tafel von Holz oder anderem Stoff oder auf irgend eine ebene Fläche ausbreitete, und daß er darauf verzeichnete was ihm beliebte an Multiplikationen, Divisionen oder sonstigen Operationen, und hatte er die Aufgabe vollendet, so schloß er die Tafel wieder fort bis zum Gebrauche.“ Eben dieses Rechenbuch leitet aber, und das ist beweisend auch für die andere Erinnerung, die ganze Erörterung durch die Bemerkung ein, die Pythagoräer seien die Männer der Zahlen gewesen.

Mögen die Vermutungen, mit deren Hilfe hier ein einheitlicher Überblick zu gewinnen gesucht wurde, richtig sein oder nicht, das Vorhandensein der ostarabischen wie der Ġubârziffern wird dadurch nicht beeinträchtigt, und wir müssen nun Schriftsteller verschiedener Zeiten und verschiedener Heimat kennen lernen und von ihnen erfahren, was sie in der Mathematik geleistet haben, auch wie sie rechneten.

Der erste arabische Schriftsteller, mit welchem wir es zu tun haben, ist Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî. Er hat, wie wir wissen, im ersten Viertel des IX. S. gelebt. Er war einer der Gelehrten, welche der Chalif Almamûn so sachgemäß zu beschäftigen wußte, indem er einen Auszug aus dem sogenannten Sindhind anfertigen, eine Revision der Tafeln des Ptolemaeus vornehmen, Beob-

---

[1]) *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863 pag. 243. [2]) Ebenda pag. 58 bis 68.

achtungen zu diesem Zwecke in Bagdad und in Damaskus anstellen, endlich die Messung eines Grades des Erdmeridians ausführen ließ[1]). Die astronomischen Tafeln Alchwarizmîs gehen uns nicht weiter an, als daß wir hervorheben müssen, daß sie von Atelhart von Bath, einem englischen Mönche, welcher um 1120 die erste Übersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische anfertigte (vergl. Kapitel 40), gleichfalls in lateinischer Sprache bearbeitet worden sind[2]), und daß sich in ihnen zweifellos eine Sinustafel befand[3]). Eingehend müssen wir uns dagegen mit zwei Schriften Alchwarizmîs beschäftigen, in welchen er zuerst die Algebra, dann die Rechenkunst behandelt hat, deren Reihenfolge wir in unserer Besprechung aber umkehren.

Beide wurden hoch geschätzt und, wie wir sehen werden, nicht ohne Grund. Beide sind, oder waren in verhältnismäßig neuer Zeit im arabischen Texte vorhanden. Die Algebra freilich ist allein in diesem Urtexte veröffentlicht, während für die Rechenkunst man lange auf das Nachsprechen eines selbst arabischer Quelle entstammenden Lobes beschränkt war: das Buch übertreffe alle anderen an Kürze und Leichtigkeit und beweise den Geist und Scharfsinn der Inder in den herrlichsten Erfindungen[4]). Ein lateinisches Manuskript, 1857 in der Bibliothek zu Cambridge entdeckt und im Drucke herausgegeben[5]), erwies sich aber als Übersetzung des vermißten Werkes, und der Umstand, daß trotz nachträglichen eifrigen Suchens kein zweites Exemplar dieser Übersetzung außer dem Kodex von Cambridge hat aufgefunden werden können, vereinigt mit der Tatsache der Übersetzung der astronomischen Tafeln desselben Verfassers durch Atelhart von Bath, haben die Vermutung entstehen lassen[6]), der gleiche Übersetzer habe auch die Arithmetik lateinisch bearbeitet, eine Vermutung, welche wenigstens soweit große Wahrscheinlichkeit für sich hat, als man auf einen Landsmann und Zeitgenossen des Atelhart, wenn nicht auf ihn selbst als Übersetzer wird schließen dürfen.

---

[1]) Kremer II, 442—443. Suter 10—11, Nr. 19, aber auch Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 158—160 (1902). [2]) Math. Beitr. Kulturl. S. 268—269. Wüstenfeld, Die Uebersetzungen arabischer Werke in das Lateinische. Abhandlungen der königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. Bd. XXII (1877) S. 20—23. [3]) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 49 Note 1 und 2. [4]) Casiri, *Bibliotheca arabico-hispana Escurialensis* I, 427 (Madrid 1760). [5]) Die Schrift bildet das I. Heft der von dem Fürsten Bald. Boncompagni herausgegebenen *Trattati d'aritmetica*. [6]) Vgl. einen Aufsatz von Chasles in den *Comptes Rendus de l'académie des sciences* XLVIII, 1058 vom 6. Juni 1859.

Die Schrift beginnt mit den Worten: „Gesprochen hat Algoritmi. Laßt uns Gott verdientes Lob sagen, unserem Führer und Verteidiger.“ Der Name des Verfassers Alchwarizmî ist also hier in Algoritmi übergegangen, und fast in dieser letzteren Form nur noch etwas weniger der Urform gleichend, nämlich als Algorithmus hat das Wort Jahrhunderte überdauert[1]) und bezeichnet jetzt jedes wiederkehrende zur Regel gewordene Rechnungsverfahren. Das Bewußtsein der eigentlichen Bedeutung des Wortes ist in diesem modernen Algorithmus gänzlich verloren gegangen, aber das Gleiche gilt bereits für das XIII. S., wo man schon durch allerlei sprachliche Taschenspielerkünste sich bemühte ein Verständnis des Wortes zu gewinnen[2]). Da sagt einer, das Wort kommt von *alleos* fremd und *goros* Betrachtung, weil es eine fremde Betrachtungsweise ist. Nein, sagt der zweite, es kommt von *argis* griechisch und *mos* Sitte, es ist eine griechische Sitte. Der dritte kommt zu *ares* die Kraft und *ritmos* die Zahl. Ein vierter sieht in *algos* ein griechisches Wort, welches weißen Sand bedeute, und daher der Name, denn die Rechnung *ritmos* wurde auf weißem Sande geführt. Wieder ein anderer legt sich das Wort auseinander in *algos* die Kunst und *rodos* die Zahl. Manchen war durch Überlieferung vielleicht das Bewußtsein geblieben, es handle sich um den Namen eines Mannes, aber dieser hieß ihnen bald Algorus von Indien, bald König Algor von Kastilien, bald Algus der Philosoph. Allerdings ist auch ein Zeugnis dafür vorhanden, daß man in Deutschland im letzten Drittel des XIII. S. Algorismus als Namen eines Mannes kannte. Im jüngeren Titurel findet sich eine Strophe[3]):

Nu ist auch hi gesundert
Lot vurste von Norwege
Ichn weyz, mit we vil hundert,
Ob Algorismus noch lebens plege
Unde Abakuc de geometrien kunde,
De heten vil tzo scaffen
Solten se ir aller tzal da haben funden.

Am auffallendsten erscheint, daß hier nicht bloß *Algorismus*, sondern auch *Abakuc* als eine Persönlichkeit vorkommt. Neuere Gelehrsamkeit hat sich, ehe die richtige Ableitung bekannt war, mit

[1]) In dem Algorithmus den Namen Alchwarizmî erkannt zu haben, ist das große Verdienst von Reinaud (*Mémoire sur l'Inde* pag. 303 sq.), der schon 1845 diesen Gedanken aussprach, also lange bevor die Entdeckung des Cambridger Kodex die Vermutung in Gewißheit verwandelte. [2]) Math. Beitr. Kulturl. 267. [3]) Wir verdanken die Kenntnis dieser Strophe Herrn Armin Tille. Vgl. Zeitschr. für deutsche Philologie Bd. XXX. Ein Xantener Bruchstück des jüngeren Titurel (insbesondere S. 175 die obige Strophe 2009).

scheinbarem Rechte fast am weitesten von der Wahrheit entfernt, indem sie in ähnlicher Weise wie bei Almagest eine Zusammensetzung des arabischen Artikels *al* mit dem griechischen ἀριθμός, die Zahl, vermutete und das dazwischengetretene *g* als sprachliche Absonderlichkeit betrachtete, die einer Erklärung nicht fähig sei, auch nicht bedürfe, da man bei dem Übergange aus dem Griechischen durch das Arabische in das Lateinische auf alles gefaßt sein müsse. Es können einen solche Verirrungen nicht erstaunen, wenn man berücksichtigt, daß durch neckischen Zufall alle anderen Formen des Namens unseres arabischen Gelehrten, die bekannt geworden sind, dem Algorithmus lange nicht so verwandt klingen wie das zuletzt veröffentlichte *Algoritmi*. Als solche Formen erwähnen wir *Alchoarismus*[1]), *Alkauresmus*, ja sogar *Alchocharithmus*[2]).

Eine Frage könnte noch erhoben werden dahin gehend, welche den Namen Alchwarizmî führende Persönlichkeit den Urtext zu jener lateinischen Übersetzung geliefert habe? Wir nahmen an, es sei Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî gewesen, aber eine zweite Persönlichkeit konnte gleichfalls als Verfasser gelten. Albîrûnî, nach unserer früheren Darstellung (S. 710) dem Nordwesten Indiens entstammend, hatte nach anderer Meinung seine Heimat in einem kleinen Orte Bîrûn der Landschaft Chwarizm, und diese Meinung, wenn auch mutmaßlich irrig, war verbreitet genug ihm den Namen Alchwarizmî bei manchen zuzuziehen[3]). Außerdem weiß man von ihm, daß er ein Rechenbuch verfaßt hat[4]), einiger Zweifel konnte daher entstehen, ob der erste, ob der zweite Alchwarizmî sich in jener Schrift redend einführe. Die Sicherung in dem Sinne beruht auf dem Umstande, daß nur von dem ersten, nicht von dem zweiten Alchwarizmî eine Algebra geschrieben worden ist, und daß der Verfasser des Rechenbuches nach jenem Anrufen und Preisen des Lenkers der Dinge, welches er echt arabisch noch weiter fortsetzt als wir es oben mitteilten, nach Erörterung der Verschiedenheit der Zahlzeichen unter den Menschen, auf welche wir ebenfalls (S. 711) uns schon bezogen haben, fortfährt wie folgt[5]): „Und ich habe schon in dem Buche Aldschebr und Almuḳâbala, d. h. der Wiederherstellung und Gegenüberstellung eröffnet, daß jede Zahl zusammengesetzt sei, und daß jede Zahl sich über eins zusammensetze. Die Einheit also wird in jeder Zahl gefunden, und das ist es, was in einem anderen Buche der Arithmetik ausgesprochen ist. Weil die Einheit Wurzel

[1]) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 298. [2]) Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* pag. 375. [3]) Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher S. 75, Nr. 129. [4]) Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* pag. 303. [5]) *Trattati d'aritmetica* I, 2.

jeder Zahl und außerhalb der Zahl ist.“ Der Anfang dieses Satzes bis zu der „einem anderen Buche der Arithmetik“, *in alio libro arithmetico*, entnommenen Bemerkung über die Ausnahmestellung der Einheit findet sich aber nahezu wörtlich in der Algebra des Muḥammed ibn Mûsâ[1]). Wir sind also in der Tat berechtigt, hier unter dem Namen des Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî über jenes Rechenbuch weiter zu berichten, für ihn in Anspruch zu nehmen, was aus dem letzten Teile der hier mitgeteilten Stelle unzweifelhaft hervorgeht, daß wer so schrieb, in der Zahlenlehre der Neupythagoräer wohl geschult sein mußte, welche er nicht aus indischen Quellen kennen lernen konnte, daß unter jenem anderen Buche der Arithmetik die spätere sogenannte spekulative Arithmetik im Gegensatze zur praktischen Arithmetik (S. 704) gemeint ist, daß dem Verfasser darüber Kenntnisse zu Gebote standen, welche unmittelbar oder mittelbar auf Nikomachus, vielleicht auch auf Theon von Smyrna, der am deutlichsten betont hat, die Einheit sei keine Zahl (S. 435), zurückgehen.

Nun wird das eigentliche Rechnen gelehrt, das Zahlenschreiben, das Addieren, bei welchem ein besonderes Gewicht auf den Fall gelegt ist, daß die Summe der Ziffern an einer Stelle 9 übersteigt; die Zehner sollen alsdann der folgenden Stelle zugerechnet und an der ursprünglichen Stelle nur das geschrieben werden, was unterhalb 10 noch übrig bleibt. „Bleibt nichts übrig, so setze den Kreis, damit die Stelle nicht leer sei; sondern der Kreis muß sie einnehmen, damit nicht durch ihre Leerheit die Stellen vermindert werden und die zweite für die erste gehalten wird“[2]). Bei der Subtraktion wie bei der Addition soll man bei der höchsten Stelle, also links anfangen, dann zur nächstfolgenden übergehen, weil dadurch die Arbeit, so Gott will, nützlicher und leichter werde. Die eigentliche Schwierigkeit der Subtraktion für Anfänger, die Behandlung des Falles, daß eine Stelle des Subtrahenden durch eine höhere Zahl als die entsprechende Stelle des Minuenden erfüllt ist, wird zwar erwähnt[3]), aber ohne daß ein Beispiel dafür angegeben wäre, trotzdem vorher *tres modi* d. h. drei Beispiele in Aussicht gestellt sind. Da zwei derselben (nämlich 3211 von 6422 und 144 von 1144) angegeben sind,

[1]) *The algebra of Mohammed ben Musa* (ed. Rosen). London 1831, pag. 5, § 3: *I also observed that every number is composed of units and that any number may be divided into units.* [2]) *Si nihil remanserit pones circulum, ut non sit differentia vacua: sed sit in ea circulus qui occupet eam, ne forte cum vacua fuerit, minuantur differentiae, et putetur secunda esse prima. Trattati d'aritmetica* I, 8. [3]) Hierauf hat H. Eneström in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge, Bd. VI, 307 hingewiesen.

so entsteht die Frage, ob hier an einen Mangel des arabischen Originals oder an eine durch den Übersetzer verschuldete Auslassung zu denken sei. Die dritte Operation ist das Halbieren, welches in der umgekehrten Ordnung bei der niedersten Stelle zu beginnen hat. Das Verdoppeln hingegen, die vierte Operation, beginnt wieder von oben. Die Hervorhebung von Halbierung und Verdoppelung als besonderen Rechnungsarten ist sehr bemerkenswert. Indisch ist sie nicht, wenigstens finden wir sie weder bei indischen Originalschriftstellern, noch bei dem nach indischem Muster arbeitenden Maximus Planudes. Nach dem heutigen Stande des Wissens können wir nur an unmittelbaren oder durch Griechen vermittelten ägyptischen Einfluß denken. Die Multiplikation wird nach der Weise ausgeführt, welche wir (S. 610—611) bei den Indern kennen gelernt haben; das Produkt wird jeweil über die betreffende Ziffer des Multiplikandus geschrieben und verbessert, wenn eine nach rückwärts folgende Stelle des Multiplikandus mit der Multiplikatorziffer vervielfacht eine Verbesserung nötig macht. Von der Richtigkeit der genannten Operationen überzeugt man sich durch die Neunerprobe. Die Division wird nach dem gleichen Gedanken wie die Multiplikation ausgeführt, nur natürlich in umgekehrtem Gange. Die Schreibweise ist die, daß der Dividend unter sich den Divisor, über sich den Quotienten erhält und erst über dem Quotienten die aufeinanderfolgenden Veränderungen erscheinen, welche mit dem Dividenden durch Abziehung der Teilprodukte vorgenommen werden. Der Divisor bleibt übrigens an seiner Stelle unter dem Dividenden nicht stehen, sondern rückt fortwährend von links nach rechts zurück. So liefert die Division 46468 : 324 den Quotient 143 und den Rest 136. Faßt man die umständliche Beschreibung[1]) in eine kurze, vielleicht durch den Verfasser, vielleicht durch den Übersetzer weggelassene Musterrechnung zusammen, so würde sie folgendermaßen ausgesehen haben:

```
    136
     24
    110
     22
   140
   143
  46468
  324
   324
    324.
```

[1]) *Trattati d'aritmetica* I, 14—16.

Von einer komplementären Division ist keine Spur zu finden. Im Anschlusse an die Division kommt der Verfasser zu den Brüchen und bemerkt, die Inder hätten sich der 60 teiligen Brüche bedient, welche er dann schließlich ausführlich erklärt und das Rechnen an und mit denselben erläutert.

Wir schalten hier eine Bemerkung über arabische Brüche ein, von welcher wir zwar nicht die volle Überzeugung besitzen, daß sie bereits für die Zeit des Muḥammed ibn Mûsâ Geltung habe, aber auch für das Gegenteil keinerlei Gründe kennen, indem es mehr um etwas Sprachliches als der Rechenkunst Angehöriges sich handelt. Die Araber unterschieden nämlich stumme Brüche von aussprechbaren[1]). Aussprechbar sind die Brüche mit den Nennern 2 bis 9 oder anders gesagt: es gibt arabische Wörter für Halbe, Drittel, . . . Neuntel. Stumm sind Brüche mit Nennern, welche nicht 2 bis 9 sind oder aus diesen multiplikativ zusammengesetzt werden können, wie etwa Sechstel des Fünftels statt Dreißigstel. Ein stummer Bruch ist also z. B. $\frac{1}{13}$ und muß umschreibend durch ein Teil von 13 Teilen ausgedrückt werden. Man hat die Ähnlichkeit mit dem Aussprechbarmachen der Brüche durch Verwandlung in eine Summe von Stammbrüchen bei den Ägyptern (S. 68) hervorgehoben[2]), und wenn wir uns kein bestimmtes Urteil über die Triftigkeit dieser unter allen Umständen höchst scharfsinnigen Vergleichung zutrauen, so unterlassen wir doch nicht sie zu wiederholen und im voraus darauf aufmerksam zu machen, daß uns noch eine weitere Vergleichung, möglicherweise eine ägyptische Erinnerung durch mündliche Überlieferung von Jahrtausenden in diesem Kapitel aufstoßen wird.

Von einem Rechenbrette oder etwas, was demselben irgendwie gleicht, ist bei Alchwarizmî keine Rede, und ebenso erfolglos wird unser Suchen danach bei älteren arabischen Schriftstellern bleiben. Von Alkindî, der seine wissenschaftliche Tätigkeit um 850 entfaltete, wird zwar eine Schrift erwähnt, deren Titel in richtiger Übersetzung über die Linien und das Multiplizieren mit der Zahl der Gerstenkörner[3]) lautet, aber daraus ein Rechnen auf Linien oder zwischen Linien mit Hilfe von Gerstenkörnern entnehmen zu wollen, dürfte allzukühn sein.

Die zweite Schrift des Alchwarizmî, welcher wir uns jetzt zuwenden, ist die, wie wir schon gesagt haben, vor der Arithmetik des-

[1]) Kâfî fîl Hisâb (deutsch von Hochheim) Heft I, S. 11, Anmerkung 4, und Behaeddins Essenz der Rechenkunst (deutsch von Nesselmann) S. 4. [2]) Herr L. Rodet in einem Privatbriefe. [3]) Fihrist 11. Suter 23—26, Nr. 45.

selben Verfassers entstandene Algebra[1]), das erste Werk, soviel man weiß, in welchem dieses Wort selbst als Titel erscheint. Ja, wenn man arabischen Notizen, die teils in einem Werke des XII. S., teils in Randbemerkungen zu einer Handschrift von Alchwarizmîs Algebra niedergelegt sind[2]), Glauben beimessen darf, so ist es das erste Werk, in welchem jenes Wort vorkommen kann, denn vor Alchwarizmî habe kein Araber je über den dadurch bezeichneten Gegenstand geschrieben. Wir müssen demnach sicherlich an dieser Stelle von dem Worte Algebra reden[3]).

Eigentlich sind es zwei Wörter Aldschebr walmuḳâbala, welche Alchwarizmî vereint als Titel benutzt hat. Dschebr ist restauratio, die Wiederherstellung, muḳâbala ist oppositio, die Gegenüberstellung. Allein mit diesen Wortübersetzungen ist gewiß für niemand, der den Sinn der Wörter in der Mathematik noch nicht gekannt hat, etwas verdeutlicht. Trotzdem fand es Alchwarizmî nicht für notwendig, die Wörter, die ihm als Überschrift dienten, zu erklären, und, was noch mehr sagen will, in dem eigentlich theoretischen Teile seines Buches kommen diejenigen Operationen, welche dschebr und muḳâbala genannt werden, gar nicht vor. Wir werden noch Folgerungen aus diesem höchst merkwürdigen Tatbestande ziehen. Einstweilen erläutern wir auf die Erklärungen späterer arabischer Schriftsteller uns stützend die Meinung unseres Verfassers.

Wiederherstellung ist genannt, wenn eine Gleichung derart geordnet wird, daß auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nur positive Glieder sich finden; Gegenüberstellung sodann, wenn Glieder gleicher Natur auf beiden Seiten weggelassen werden, so daß Glieder dieser Art nach vollzogener Gegenüberstellung nur noch auf der einen Seite vorkommen, wo sie eben im Überschusse vorhanden waren.

Alchwarizmî nimmt, wie gesagt, in seinem theoretischen Teile, wo er zuerst die Auflösung der Gleichungen lehrt, stillschweigend an, die betreffenden beiden Vorbereitungsoperationen seien bereits vollzogen, und er unterscheidet danach 6 Arten von Gleichungen, welche wir schreiben würden:

$$ax^2 = bx, \quad ax^2 = c, \quad bx = c, \quad x^2 + bx = c, \quad x^2 + c = bx,$$
$$x^2 = bx + c.$$

[1]) Eine alte lateinische Übersetzung ist abgedruckt bei Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 253—297. Wir verstehen unter Mohammed ben Musa, Algebra immer die von Friedr. Rosen besorgte mit englischer Übersetzung begleitete Ausgabe. London 1831. [2]) Mohammed ben Musa, Algebra pag. VII. [3]) Ebenda pag. 177—188 und Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 45—53.

Er gibt sodann für jede dieser Gleichungen Regeln, welche er zugleich an Zahlenbeispielen erläutert.

Wir wollen die Auflösung von $x^2 + c = bx$ hier beispielsweise übersetzen, weil sie in mehreren Beziehungen die wichtigste ist[1]). „Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln; z. B. 1 Quadrat und 21 an Zahlen sind gleich 10 Wurzeln desselben Quadrates, d. h. was muß der Betrag eines Quadrates sein, welches nach Addition von 21 Dirham gleichwertig wird mit 10 Wurzeln jenes Quadrates? Auflösung: Halbiere die Zahl der Wurzeln; ihre Hälfte ist 5. Vervielfache dieses mit sich selbst; das Produkt ist 25. Ziehe davon die mit dem Quadrate vereinigten 21 ab; der Rest ist 4. Ziehe die Wurzel; sie ist 2. Ziehe dieselbe von der halben Anzahl der Wurzeln, welche 5 war, ab; der Rest ist 3. Das ist die Wurzel des gesuchten Quadrates und das Quadrat selbst ist 9. Oder Du kannst jene Wurzel zu der halben Anzahl der Wurzeln addieren; die Summe ist 7. Das ist die Wurzel des gesuchten Quadrates, und das Quadrat selbst ist 49. Wenn Du auf ein Beispiel dieses Falles stößest, versuche die Lösung durch Addition, und wenn diese nicht den Zweck erfüllt, dann wird Subtraktion es sicherlich tun. Denn in diesem Falle können beide — Addition und Subtraktion — angewandt werden, was in keinem anderen der drei Fälle, in welchen die Anzahl der Wurzeln halbiert werden muß, gestattet ist. Wisse auch, daß, wenn in einer Aufgabe dieses Falles das Produkt der Vervielfachung der halben Anzahl der Wurzeln in sich selbst kleiner ausfällt als die Zahl der Dirham, welche mit dem Quadrate verbunden ist, die Aufgabe unmöglich ist; ist aber jenes Produkt den Dirham selbst gleich, dann ist die Wurzel des Quadrates gleich der Hälfte der Anzahl der Wurzeln allein ohne jede Addition oder Subtraktion.“ In Zeichen würden wir das so schreiben, daß aus $x^2 + c = bx$ sich

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

ergebe, also mit zwei möglichen Werten, vorausgesetzt, daß $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$; bei $c > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ sei die Aufgabe unmöglich; bei $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ gebe es nur einen Wert $x = \frac{b}{2}$.

Nachdem die verschiedenen Gleichungsformen aufgelöst sind, wendet sich Alchwarizmî zum geometrischen Nachweise der Richtigkeit des betreffenden Verfahrens. Auch hier wollen wir nur einen Fall, etwa $x^2 + bx = c$ hervorheben[2]), um zu zeigen, wie die Sache

[1]) Mohammed ben Musa, Algebra pag. 11—12. [2]) Ebenda pag. 13—16.

gemeint sei. Das Zahlenbeispiel lautet $x^2 + 10x = 39$. Man zeichne (Fig. 95) ein Quadrat $\alpha\beta$ und an jede Seite desselben ein Rechteck, so entsteht, wenn man noch 4 kleine Quadratchen an den Ecken beifügt, ein größeres Quadrat $\delta\varepsilon$. Soll die erste Figur $\alpha\beta$ das Quadrat x^2, sollen die 4 Rechtecke $\gamma, \eta, \varkappa, \theta$ die $10x$ vorstellen, so ist die Breite jedes solchen Rechteckes $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ und die 4 Eckquadratchen betragen zusammen $4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25$. Das größere Quadrat $\delta\varepsilon$ ist also $x^2 + 10x + 25$ oder 64, weil $x^2 + 10x = 39$ ist. Die Seite des größeren Quadrates ist mithin $\sqrt{64} = 8$. Eben diese Seite ist aber auch $x + \frac{10}{2}$, folglich $x = 8 - 5 = 3$ oder als Formel geschrieben

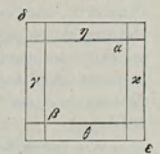


Fig. 95.

$$x = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{b}{4}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}, \quad \text{beziehungsweise} \quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Alchwarizmî erklärt dann ebendenselben Fall mit Hilfe eines Gnomons. Er legt nämlich (Fig. 96) an $\alpha\beta = x^2$ das $10x$ in Gestalt nur zweier Rechtecke γ, δ an 2 Seiten an, so daß ein aus $\alpha\beta$, γ und δ bestehender Gnomon gebildet ist, welchem zur Vollendung des Quadrates $\varepsilon\zeta$ nur ein Eckquadrat von der Seite $\frac{10}{2} = 5$, mithin von der Fläche 25 fehlt. Das größere Quadrat ist nunmehr wieder $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$ und seine Seite $\sqrt{64} = 8$. Ebendiese ist aber auch $x + 5$ und so wieder $x = 8 - 5 = 3$.

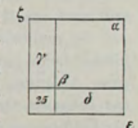


Fig. 96.

Wir bleiben in unserem Berichte hier zuvörderst stehen, um an das Bisherige die erforderlichen Bemerkungen zu knüpfen. Wir haben gesehen, daß Alchwarizmî seine Schrift Aldschebr walmuḳâbala nannte. Als im Mittelalter lateinische Übersetzungen angefertigt wurden, übernahm man erst einfach die beiden Wörter, welche man nur mit lateinischen Buchstaben schrieb[1]), und welchen man allenfalls die Übersetzung *restauratio et oppositio* beifügte, die dabei mitunter in der Reihenfolge wechselten, so daß sie *oppositio et restauratio* hießen. Allmählich ging von den beiden arabischen Wörtern das zweite verloren, das erste blieb allein in der Form *algebra* übrig, und nun geschah das Entgegengesetzte wie bei *algorithmus*. Dort vergaß man, daß es ein Mann war, der so hieß, und suchte das Wort zu übersetzen, hier vergaß man, daß es ein übersetzungs-

[1]) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 253.

fähiges Wort war, welches man vor sich hatte und hielt *algebra* für den Namen eines Mannes. Von einem Araber Geber sollte die Kunst herrühren, behauptete im XIV. S. ein Florentiner, Rafaele Canacci[1]), und andere schrieben das gläubig ab, nicht selten den Erfinder in jenem Astronomen Dschâbir ibn Aflaḥ aus Sevilla vermutend, der gemeiniglich Geber genannt wird und mehrere Jahrhunderte nach Alchwarizmî erst lebte[2]). Im Spanischen ist die Bedeutung und das Wort selbst annähernd erhalten in *Algebrista*, der Chirurg[3]).

Wir haben ferner gesehen, daß Alchwarizmî jene Wörter *dschebr* und *muḳâbala* zwar in der Überschrift gebraucht aber nirgend erklärt hat, wiewohl der bloße Wortlaut ganz gewiß nicht ausreicht, um die technische Bedeutung zu verstehen. Die Folgerung ist dadurch geradezu aufgezwungen, daß Alchwarizmî, mag er auch der erste arabische Schriftsteller über seinen Gegenstand gewesen sein, doch keinesfalls einen für seine Landsleute neuen Gegenstand behandelte, daß vielmehr durch mündliche Lehre, entnommen aus persönlichen Übertragungen fremdländischen Wissens oder aus Schriften, die in nicht-arabischer Sprache verfaßt waren, schon bekannt gewesen sein muß, was Herstellung und was Gegenüberstellung sei.

So sind wir zu der Frage gelangt, aus welcher Sprache die arabische Lehre von den Gleichungen sich abgeleitet hat und wann diese Ableitung erfolgte. Die letztere Frage zu beantworten reicht das bekannte Quellenmaterial nicht aus. Wir können nur behaupten, die Einführung der Algebra müsse hinlänglich lange Zeit vor Alchwarizmî stattgefunden haben, um die Möglichkeit zu gewähren, daß jene Begriffe und die für dieselben erfundenen Kunstausdrücke unter den Fachleuten — denn für solche schrieb Alchwarizmî — schon landläufig geworden sein konnten. Aber woher war damals die Algebra gekommen? Zwei Quellen stehen uns, soweit wir sehen, zu Gebot. Was Alchwarizmî gibt kann griechischen, kann indischen Ursprungs sein, kann vielleicht einer aus beiden Quellen gemischten Strömung sein Dasein verdanken, wie wir ja auch in seinem Rechen-

[1]) Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra.* Parma 1797. I, 35. [2]) Hankel S. 248, Note **. Dieser Geber darf ja nicht verwechselt werden mit dem Alchimisten Abû Mûsâ Dschâbir, der gleichfalls als Geber in der Literargeschichte genannt wird und ein Schüler des Dscha'far aṣṢâdiḳ (699—765) war, mithin vor Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî gelebt hat. Vgl. Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher S. 12, Nr. 25. [3]) *Llegàron à un pueblo, donde fuè ventura hallàr à un Algebrista con quièn se curò el Sanson desgraciado. Don Quixote,* Parte III, L. V, c. 15 am Ende. Hier ist augenscheinlich Algebrista der Chirurg, der Zerbrochenes wieder einrichtet.

buche überwiegend Indisches und daneben einzelne griechische Spuren vorfanden. Wir wollen zu zeigen versuchen, daß, wenn die Algebra überhaupt als eine Mischung zu betrachten ist, jedenfalls griechische Elemente in ihr weitaus vorherrschen.

Schon die beiden Verfahren der Herstellung und Gegenüberstellung, welche voraussetzen, daß auf beiden Seiten der Gleichung nur Positives stehe, wenn der Ansatz vollendet ist, können nicht indisch sein, weil die Inder von dieser Bedingung nichts wissen. Es kann hier nur auf Griechisches gemutmaßt werden, und vergleichen wir unsere Auszüge aus Diophant (S. 472), so finden wir ganz genau die Vorschrift der Herstellung und Gegenüberstellung, in welcher nur keine Namen für jenes Verfahren angegeben sind, Namen die mithin jünger und mutmaßlich arabischer Herkunft sein werden. Bei Diophant finden wir ferner gerade die drei Formen unreiner quadratischer Gleichungen, welche unser Araber kennen lehrt, wieder mit einem kleinen Unterschied, auf den wir noch zu reden kommen. Vergleichen wir weiter.

Alchwarizmî hat für die in den Gleichungen auftretenden Größen verschiedene Namen. Die Unbekannte heißt schai, die Sache, oder dschidr, die Wurzel. Das Quadrat der Unbekannten heißt mâl, Vermögen, Besitz. Die bekannte Größe wird als die Zahl benannt. Der Name des Quadrats kann nun sehr wohl aus dem griechischen δύναμις, Möglichkeit, Vermögen übersetzt sein, während es aus dem indischen varga, die Reihe, unter keinen Umständen abgeleitet werden kann[1]). Das Wort schai für die Unbekannte entspricht weder dem indischen yâvattâvat, noch dem ἀριθμός des Diophant. Letzteres war freilich nicht mehr zu verwenden, wenn man ihm schon eine andere Bedeutung gegeben hatte, wenn man ganz zweckmäßig die bekannte Größe der Gleichung, die μονάς des Diophant, die rûpa der Inder Zahl genannt hatte. Der Name schai, Sache, für die Unbekannte erinnert, wenn man ihn nicht als in der Natur der Fragen begründet einheimisch entstanden lassen sein will, nur an das ägyptische hau, welches gleichfalls Sache heißt und für die Unbekannte gebraucht wird, eine Ähnlichkeit, auf welche wir oben (S. 718) vorbereitet haben[2]). Nun bleibt noch dschidr, die Wurzel, für die Unbekannte erklärungsbedürftig. Man hat darin eine Übersetzung des indischen mûla erkannt. Das ist ganz gewiß richtig für die Bedeutung von

[1]) Über alle diese Namen vgl. Hankel S. 264, Note *, wo freilich weder alles angegeben ist, was wir hier mitteilen, noch die gleichen Folgerungen gezogen sind. [2]) Die Vergleichung zwischen *schai* und *hau* haben wir in dem Aufsatze: „Wie man vor vierthalbtausend Jahren rechnete" in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung vom 6. September 1877 ausgesprochen.

dschiḏr als Quadratwurzel einer Zahl, welche bei den Griechen stets πλευρά, die Seite, hieß. Aber ob nicht zugleich an das ῥίζη des Nikomachus, welches in der Arithmetik des Boethius sich mit erweiterter Bedeutung als radix wiederfindet[1]), erinnert werden darf, ist eine doch wohl aufzuwerfende Frage. Es könnte ῥίζη selbst eine Übersetzung von mûla sein, wenn wir an die indische Beeinflussung Alexandrias im II. S. uns erinnern; es könnte mûla aus ῥίζη übersetzt worden sein, wenn wir an die alexandrinische Beeinflussung Indiens denken; es könnte dschiḏr dem einen wie dem andern Worte sein Dasein verdanken! Soviel scheint daraus hervorzugehen, in diesen Wortvergleichungen werden wir den Schlüssel zu dem uns beschäftigenden Geheimnisse nicht finden.

Täuschen wir uns nicht, so liegt dieser Schlüssel in den Figuren, welche Alchwarizmî zur Begründung seiner Auflösungen der unreinen quadratischen Gleichungen gezeichnet hat, oder vielmehr in den Buchstaben, welche er zur Bezeichnung dieser Figuren verwendet[2]). Alchwarizmî beweist Algebraisches geometrisch; das ist von vornherein griechisch, nicht indisch, da dem Inder gerade das entgegengesetzte Verfahren Gewohnheit ist, Geometrisches algebraisch zu behandeln, und nur eine unbestimmte quadratische Gleichung

$$xy = ax + by + c$$

(S. 631) geometrische Erörterung fand, welche uns an einen griechischen Ursprung gerade dieser Gleichungsauflösung denken ließ. Alchwarizmî bezeichnet ferner seine Figuren mit Buchstaben; das ist wieder griechisch, nicht indisch. Und nun vollends mit welchen Buchstaben bezeichnet er sie? Allerdings mit arabischen Buchstaben, aber mit solchen, welche eine bunte Reihenfolge in dem späteren arabischen Alphabete darstellen und auch durch die Reihenfolge Abudsched nicht ganz erklärt sind, während sie durch griechische Buchstaben nach dem Gesetze gleichen Zahlwertes, sofern man die Buchstaben als Zahlen betrachtet, ausgedrückt die vollständig richtige griechische Reihenfolge zeigen, und auch darin griechisch sich geben, daß sie das ϛ und ι ausschließen. Welchen Grund könnte ein Araber gehabt haben, seinen beiden Zeichen, welche die Zahlenbedeu-

---

[1]) *Radices autem proportionum voco numeros in superiore dispositione descriptos, quasi quibus omnis summa supradictae comparationis innitatur* (Boetius ed. Friedlein pag. 60 l. 1—3). [2]) Der den Charakter einer Methode an sich tragende Gedanke auf die Buchstaben einer Figur und deren Reihenfolge zu achten, um die Herstammung einer Lehre zu erkennen, rührt von Hultsch her, der ihn in seiner Abhandlung über den herônischen Lehrsatz, Zeitschr. Math. Phys. IX, 247 zuerst in Anwendung gebracht hat.

tung 6 und 10 haben und so den als ausgeschlossen von uns genannten entsprechen, also den w-Laut und den j-Laut, nicht zu benutzen? Keinen, so viel wir sehen. Der Grieche hatte solche Gründe. Das ϛ war ihm im Gewöhnlichen überhaupt kein Buchstabe mehr, und das ι, wie wir uns erinnern, dem einfachen Striche allzuähnlich. Der ein griechisches Muster benutzende Araber folgte ihm, aber auch nur dieser.

Wir behaupten auf diese Begründung gestützt: Zum mindesten die geometrischen Nachweisungen für die Auflösung unreiner quadratischer Gleichungen bei Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî sind griechisch, und damit gewinnen auch frühere Behauptungen erneute, für manchen Leser vielleicht erhöhte Wahrscheinlichkeit, die Behauptung jene Auflösung der Gleichung $xy = ax + by + c$ bei Bhâskara sei griechischen Ursprungs, die Behauptung, die griechische Algebra habe von Euklid zu Heron, vielleicht zu Diophant in vollkommen selbständiger Entwicklung sich ausgebildet.

Wie Alchwarizmî zu griechischer Algebra gekommen sein kann, darüber vollends ist nach der allgemeinen kulturgeschichtlichen Übersicht, welche wir im vorigen Kapitel zu geben uns gedrungen fühlten, kein Zweifel. Die griechischen Gelehrten, die am persischen Hofe erschienen waren, gehörten einer Zeit an, welche wohl anderthalb Jahrhunderte nach Diophant fällt, und durch sie kann und wird manches aus Diophant, beziehungsweise aus Kenntnissen, wie sie in griechischer Sprache uns nur bei Diophant erhalten sind, mitgeführt worden sein. Wir erinnern ferner daran, daß Johannes von Damaskus im VIII. S. zum arabischen Hofe in Beziehung stand, jener Mann (S. 696), der mit Pythagoras und Diophant verglichen worden ist, vielleicht doch mehr als eine Floskel seines Lobredners, vielleicht ein Hinweis darauf, daß die Gegenstände pythagoräischer wie diophantischer Arithmetik und Algebra ihm geläufig waren.

Es fehlt freilich bei Alchwarizmî neben Dingen, in welchen er als Schüler griechischer Algebraisten sich erweist, auch nicht an Dingen, in welchen er sich wie von den Indern, so auch von ihnen zu unterscheiden scheint, nicht an solchen, in welchen er über sie hinausgeht. Die Griechen, und wie die Griechen so auch die Inder (S. 625), bereiteten eine unreine quadratische Gleichung, etwa

$$ax^2 + bx = c,$$

zur Auflösung dadurch vor, daß sie dieselbe mit dem Koeffizienten a des quadratischen Gliedes, unter Umständen auch mit dem Vierfachen desselben $4a$ vervielfachten. Alchwarizmî schlägt den entgegengesetzten Weg ein, er läßt seine Gleichung durch jenen Koeffizienten dividieren[1]) und bringt sie so in die in seinen Lösungen vorgesehene Form $x^2 + b_1 x = c_1$. Wir erinnern uns ferner, daß es mindestens sehr wahrscheinlich gemacht werden konnte, Diophant habe nicht gewußt, daß manche unreine quadratische Gleichungen zwei voneinander verschiedene positive Wurzelwerte besitzen (S. 476). Alchwarizmî spricht ausdrücklich von den beiden Wurzeln der Gleichungen $x^2 + c = bx$ (S. 720). Das dürfte doch wohl auf indischen Einfluß zurückzuführen sein, so daß damit das Wort Mischung, dessen Möglichkeit wir für die arabische Algebra in sehr einschränkende Klauseln einschlossen, sich für dieses eine indische Element rechtfertigen könnte.

Indisch ist auch wohl die nur uneigentlich der Algebra zugeteilte Regeldetri, welche in der Fortsetzung von Alchwarizmîs Werke auftritt[2]) und ähnlich bei griechischen Schriftstellern uns nicht bekannt ist.

Gehen wir in unserem Berichte weiter, so kommen wir zu einem unzweifelhaft wieder griechischen Quellen entstammenden Kapitel mit der Überschrift die Messungen, *misâhât*[3]). Einzelheiten mögen unsere Behauptungen bestätigen. Alchwarizmî spricht den pythagoräischen Lehrsatz aus und will ihn beweisen. Zum Beweise dient ihm (Fig. 97) das in acht gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke zerlegte Quadrat, die Figur, deren wir als Fig. 34 zum Verständnis der berüchtigten platonischen Menonstelle (S. 217) bedurften, welche auch von Pythagoras mutmaßlich zum Beweise seines Satzes in dem ersten Falle, daß das vorgelegte rechtwinklige Dreieck die Hälfte eines Quadrates war, benutzt wurde, eine Mutmaßung, die selbst wieder zu gesteigerter Wahrscheinlichkeit gelangt, wenn wir die dazu dienende Figur als eine griechische wirklich nachweisen können. Das können wir aber trotz des arabischen Fundortes wieder mit Hilfe der

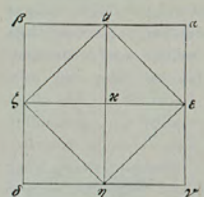


Fig. 97.

[1]) *The solution is the same when two squares or three, or more or less be specified; you reduce them to one single square and in the same proportion you reduce also the roots and simple numbers, which are connected therewith* (Mohammed ben Musa, Algebra pag. 9). [2]) Mohammed ben Musa, Algebra pag. 68—70. [3]) Ebenda pag. 70—85. Eine französische Übersetzung dieses einen Kapitels hat Aristide Marre nach Rosens englischer Übersetzung in den *N. ann. math.* V, 557—570 gegeben. Später hat er sie nach dem arabischen Grundtexte verbessert zum erneuerten Abdruck bringen lassen in *Annali di matematica pura ed applicata* T. VII. Roma 1866.

Buchstaben. Unter den 12 Figuren, welche überhaupt in dem Kapitel der Messungen vorkommen, ist eine (ein durch einen vertikalen Durchmesser geteilter Kreis) ohne jede Bezeichnung. Zehn Figuren sind durch an die Seiten beigeschriebene Längenmaße bezeichnet. Die einzige zum pythagoräischen Lehrsatze gehörige Figur trägt Buchstaben an den Ecken und zwar solche, die nach unserer vorerwähnten Methode ins Griechische übertragen eine richtige Reihenfolge der gewählten Buchstaben geben[1]). Vierecke, heißt es alsdann weiter, sind von fünf Arten: Quadrate, Rechtecke, Rhomben, Rhomboide, unregelmäßige Vierecke. Das sind ganz genau die fünf euklidischen Vierecke im Gegensatze zu den indischen (S. 651). Alchwarizmî unterscheidet dabei Länge und Breite der Figuren, unter ersterer die größere, unter letzterer die kleinere Abmessung verstehend. Das ist wieder alexandrinisch und von ägyptischer Zeit her in Gebrauch (S. 394). Die Aufgabe wird gestellt: in ein gleichschenkliges Dreieck, dessen beide gleiche Schenkel 10 und dessen Grundlinie 12 zur Länge hat, ein Quadrat einzuzeichnen. Die Höhe des Dreiecks ergibt sich ihm als 8, die Quadratseite als $4\frac{4}{5}$. Genau dieselbe Aufgabe mit denselben Maßzahlen findet sich bei Heron[2]), denn darin wird man doch wohl eine Verschiedenheit nicht erkennen wollen, daß Heron von seinem gleichschenkligen Dreiecke nur die Grundlinie mit 12, die Höhe mit 8 bekannt gibt, woraus man die beiden gleichen Seiten mit je 10 berechnen könnte, wenn Heron es auch unterläßt. Eine gewisse Verschiedenheit bietet nur die Art der Berechnung der Quadratseite, die in dem arabischen Texte deutlicher ist als in unserem griechischen Wortlaute. Heron nämlich verschafft sich ohne weitere Begründung die Quadratseite, indem er das Produkt von Höhe und Grundlinie durch die Summe von Höhe und Grundlinie dividiert; Alchwarizmî dagegen rechnet — ob nach griechischer Vorlage lassen wir dahingestellt — dieselbe Formel erst algebraisch aus, indem er die Quadratseite als Unbekannte wählt und die vier Stücke, in welche die Einzeichnung des Quadrates das ursprüngliche Dreieck zerlegt, ihrer Fläche nach einzeln berechnet, welche alsdann zusammen der bekannten Gesamtfläche gleich gesetzt werden. Allerdings fehlen auch in dem Kapitel der Messungen gewisse Dinge, welche wir sonst bei Schriftstellern, die unmittelbar an Heron sich anlehnen, zu finden gewohnt sind. Die näherungsweise Berechnung des gleichseitigen Dreiecks unter

[1]) Rosen hat zwar R wo wir ζ haben, doch ist dieses offenbar Wirkung eines Schreibfehlers, indem die beiden entsprechenden arabischen Buchstaben sich nur durch ein kleines Pünktchen unterscheiden. [2]) Heron (ed. Hultsch) pag. 74—75.

Benutzung von $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$, die heronische Dreiecksformel aus den drei Seiten, jene altägyptischen Annäherungswerte für Vierecksflächen als Produkte der arithmetischen Mittel von je zwei Gegenseiten lehrt Alchwarizmi nicht. Von Stereometrischem hat nur der Inhalt einer abgestumpften quadratischen Pyramide, deren Grundfläche die Seite 4, die Abstumpfungsfläche die Seite 2 besitzt, während die Höhe 10 ist, Beachtung gefunden. Die Berechnung selbst kann nach griechischem Muster geführt sein, wiewohl gerade diese Zahlen in keinem der bekannten heronischen Beispiele vorkommen. Auch ein indisches Element ist übrigens mit Bestimmtheit in diesem Kapitel nachzuweisen. Die Verhältniszahl π wird nämlich in dreierlei Größen angegeben. Davon werde $\frac{22}{7}$ „im praktischen Leben angewandt, wiewohl es nicht ganz genau sei; die Geometer besitzen zwei andere Methoden“, und diese sind die indischen $\pi = \sqrt{10}$ und $\pi = \frac{62832}{20000}$.

Nun kommt ein letzter wieder ganz verschieden gearteter Abschnitt, an Länge ziemlich genau die Hälfte des ganzen Buches ausmachend[1]) und dadurch den Beweis liefernd, daß in den Augen des Verfassers hier wohl der Schwerpunkt seiner Aufgabe liegen mochte. Es handelt sich um die ungemein verwickelten, um nicht zu sagen verworrenen Bestimmungen über Erbrecht, über Freimachung von Sklaven und dergleichen, welche in dem Koran, dem bürgerlichen nicht minder als religiösen Gesetzbuche der Araber, enthalten waren, und welche mit ihren sich oft widersprechenden Forderungen nicht selten eine Entscheidung nötig machten, die von dem Rechte und der Rechnung gleichmäßig abwich, weil es untunlich schien, nur das eine zugunsten des anderen zu verletzen. Aufgaben wie jene römische Erbschaftsfrage von der Witwe, die nach dem Tode des Mannes Zwillinge zur Welt bringt, sind in diesem Abschnitte nicht enthalten, was ja zum voraus keineswegs sicher war, da möglicherweise auch diese Doktorfrage einem arabischen Rechenkünstler hätte bekannt werden können und dann gewiß seine Sammlung kitzlicher Fälle zu bereichern beigetragen haben würde. Aber wenn auch Ähnlichkeiten und Übereinstimmungen mit dem römischen Rechte bei den Arabern nachzuweisen sind, ableitbar aus der langen Geltung römischen Rechtes in Palästina und Syrien, im Erbrecht finden sich keine Vergleichungspunkte. Es ist ganz unabhängig von fremden Einflüssen auf ausschließlich semitischem Boden entstanden, und nur die hebräische Gesetzgebung, die ebenso wie die arabische auf eine

[1]) Mohammed ben Musa, Algebra pag. 86—174.

altsemitische gemeinsame Rechtsauffassung zurückreicht, hat hierbei mitgewirkt[1]). Dieser Abschnitt der Algebra ist also arabisch durch und durch und ist als Grundlage zahlreicher späterer besonderer Schriften zu betrachten, welche geradezu von den Erbteilungen und den dabei vorkommenden Rechnungen ausschließlich handeln. Ibn Chaldûn, ein arabischer Gelehrter, der von 1332 bis 1406 im Okzidente lebte, hat diesen Teil der mathematischen Wissenschaften unter dem Namen al farâ'id, d. h. gesetzlich festgestellte Bedingung, ausführlich geschildert und Schriftsteller genannt, welche sich mit demselben besonders beschäftigten[2]). Gleiches findet sich bei Hadschî Chalfa[3]), einem Bibliographen des XVII. S.

Wir haben die beiden Lehrbücher Alchwarizmîs, sein Lehrbuch der Rechenkunst und das der Zeit nach ältere der Algebra, verhältnismäßig sehr ausführlich besprochen. Die ganz außergewöhnliche Wichtigkeit, welche beide Schriften für die Entwicklung der abendländischen Mathematik gewonnen haben, wird noch nachträglich dieses längere Verweilen rechtfertigen. Schon jetzt dürfte aber unsere Rechtfertigung von dem Gesichtspunkte aus geliefert sein, daß uns nunmehr die Grundlage genau bekannt ist, welche durch den ersten arabischen Schriftsteller über Mathematik natürlich aus fremdem Stoffe geschaffen war, eine Grundlage, auf welcher seine Landsleute nun fortbauen konnten und mußten, mochten sie gleich ihm die schon zubehauenen Steine den Trümmern einer fremdländischen Bildung entnehmen, oder mochten sie selbst ganz Neues schaffend ihre Befähigung mehr als bloße Aufbewahrer angeeigneten Gutes zu sein glänzend bewähren.

Was das Verhältnis betrifft, in welchem gemischt Griechisches und Indisches von Alchwarizmî aufgenommen und verarbeitet wurde, so läßt sich dasselbe kurz dahin angeben, daß als indisch vornehmlich die Rechenkunst, als griechisch dagegen, wenn auch nicht unter Ausschließung jeglicher aus Indien stammender Veränderung, die Algebra sowie die Geometrie, mit anderen Worten die eigentliche wissenschaftliche Mathematik sich erweist.

Diese fast gegensätzliche Scheidung der beiden Richtungen, welche bei Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî sich einigermaßen verwischte, scheint auch fast zwei Jahrhunderte nach ihm im allgemeinen noch bemerklich gewesen zu sein. Erzählt doch der be-

[1]) Kremer I, 527—532. [2]) Ibn Khaldoun, *Prolégomènes* in den *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale* T. XXI, Partie 1, pag. 21 bis 25 und 138—140. Über Ibn Khaldoun selbst vgl. Suter 169—170, Nr. 420. [3]) Hâǵǵî Ḫalîfa, Bd. IV, S. 393 flgg.

rühmteste unter allen arabischen Ärzten Abû ʿAlî Ḥusain ibn ʿAbdallâh ibn Ḥusain ibn ʿAlî as-Schaich ar-Raʾîs Ibn Sînâ oder Avicenna, wie man ihn gewöhnlich nennt, er habe[1]) in seinem zehnten Lebensjahre — das war zwischen 990 und 995 n. Chr. — in Buchârâ von einem Lehrer Unterricht im Lesen des Koran und in den Wissenschaften erhalten und habe bald den Gegenstand allgemeiner Bewunderung gebildet; dann habe der Vater ihn zu einem Manne geschickt, der mit Kohl handelte, und der in der indischen Rechenkunst wohl erfahren war, damit er von diesem lerne.

Selbst Muḥammed ibn Mûsâ hat neben seiner Algebra noch eine Schrift verfaßt, in welcher er nach höchster Wahrscheinlichkeit Gegenstände sehr ähnlicher Natur nach einer weniger wissenschaftlichen als praktischen Methode, die auch bei den Indern, wenn auch etwas abweichend (S. 618) uns begegnet ist, behandelte[2]). Wir kennen freilich nur die Überschrift des uns verlorenen Buches Über die Vermehrung und Verminderung, fîl dscham' wattafriḳ, und aus diesem Titel selbst ließe sich gar nichts entnehmen, wenn er nicht häufiger vorkäme, einmal begleitet von der Abhandlung, der er als Überschrift dient, und aus deren Inhalt man auf den der gleichbetitelten aber nicht mehr vorhandenen Arbeiten schließen zu dürfen glaubt. So ergänzt man sich die Schrift über die Vermehrung und Verminderung des Alchwarizmi, so die des Sind ibn ʿAlî, des Sinân ibn Alfatḥ. Von diesen beiden war der erstere einer der Astronomen, welche Chalif Almamûn zugleich mit Alchwarizmî in Diensten hatte, und ebenso wie von diesem, ebenso wie von dem vielleicht nicht viel späteren Sinân ibn Alfatḥ ist auch von ihm eine Schrift über indische Rechenkunst ausgegangen[3]). Die zur Ergänzung dienende Schrift ist in einem dem Mittelalter entstammenden lateinischen Texte vorhanden[4]) und ist betitelt: *Liber augmenti diminutionis vocatus numeratio divinationis ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit.* Ob dieser Abraham, wie man vermutet hat, der sonst unter dem Namen Ibn Esra bekannte gelehrte Jude ist, der 1093 bis 1168 lebte, ob ein Araber Ibrâhîm sich darunter verbirgt, wie man früher als einzige Möglichkeiten in Wahl stellte, ist keineswegs ausgemacht. Gewichtige Gründe werden vielmehr dafür beigebracht, der

[1]) Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 64—75, Nr. 128 *Abul Pharagius Historia Dynast.* (ed. Pocock) pag. 229 der lateinischen Übersetzung. Suter 86—90, Nr. 198. [2]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* 1. Halbjahr 1863, pag. 514. [3]) Ebenda 490. [4]) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 304—371. Über einige dunkle Stellen vgl. Schnitzler, Zeitschr. Math. Phys. IV, 383—389.

rätselhafte Verfasser sei ein gelehrter Ägypter Sodscha ibn Aslam[1]) gewesen, von dem man weiß, daß er ein Buch über die Vermehrung und über die Verminderung geschrieben hat. Die Namensverschiedenheit soll dabei kaum ins Gewicht fallen, da der ohnedies sehr seltene Name Aslam in arabischen Schriftzügen verhältnismäßig leicht mit Ibrâhîm verwechselt werden könne[2]). Unzweifelhaft dagegen ist es, daß das gelehrte Verfahren den Indern zugeschrieben ist, da ihrer nicht bloß in der Überschrift gedacht wird, sondern auch im Texte, wo der Verfasser wiederholt, er habe dieses Buch nach denjenigen Erfindungen zusammengestellt, welche die Weisen der Inder über die Rechnung der Annahme gemacht haben; es sei nützlich für den, welcher es beachte und sich bemühe und beharre und dessen Meinung verstehe.

Die eigentliche Methode zu erläutern, wollen wir die erste Aufgabe hier mitteilen: „Ein gewisser Besitz (*census*), von welchem man dessen Drittel und dessen Viertel weggenommen hat, ließ 8 als Rest. Wie groß war der Besitz? Die Methode der Rechnung desselben ist, daß Du aus 12 eine Wagschale (*lancem*) bildest. Der dritte und der vierte Teil entstehen daraus. Du nimmst den dritten und vierten Teil weg, welche 7 betragen und 5 bleibt übrig. Stelle 8 gegenüber, nämlich den Rest des Besitzes, und es wird klar, daß Du um 3 in der Verminderung geirrt hast. Diese bewahre. Sodann nimm Dir eine zweite Wagschale, welche durch die erste teilbar sei, etwa 24; nimm ihren dritten und vierten Teil, also 14 weg, 10 bleibt übrig. Stelle 8 gegenüber, den Rest des Besitzes. Es wird klar, daß Du um 2 in der Vermehrung geirrt hast. Vervielfache jetzt den Irrtum 2 der zweiten Wagschale mit der ersten Wagschale 12 zu 24, sodann vervielfache den Irrtum 3 der ersten Wagschale mit der zweiten Wagschale 24 zu 72. Addiere nun 24 und 72, weil der eine Irrtum in der Verminderung, der andere in der Vermehrung war; wären dagegen beide in der Verminderung oder in der Vermehrung gewesen, so müßtest Du die kleinere Zahl von der größeren abziehen. Nachdem Du die 24 und 72 addiert hast, deren Summe 96 ist, addiere auch die zwei Fehler 2 und 3; sie geben 5. Nun teile 96 durch 5, um zu erfahren, welche Zahl es sei, aus welcher die Aufgabe stammt, und es kommt $19\frac{1}{5}$ heraus."

[1]) Suter 43, Nr. 81 und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 164 zu Nr. 81. [2]) Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. XII, 42 und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik III, 118—123 (1880). Suter in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge III, 350—354 (1902) und zuletzt in den Verhandlungen des 3. internationalen Mathematiker-Kongresses 1904 in Heidelberg. S. 558—561.

Unmittelbar anschließend fährt der Verfasser fort als Regel, offenbar aber im Gegensatze zu dem erst gelehrten Verfahren, vorzuschreiben: „Man nehme 12 als die unbekannte Zahl, aus welcher die Wegnahme des dritten und vierten Teiles 5 hervorbringt und frage nun, womit wird 5 vervielfacht, um 12 hervorzubringen? Das gibt $2\frac{2}{5}$: vervielfache also die $2\frac{2}{5}$ mit 8 und es entsteht $19\frac{1}{5}$." Das ist genau die ishta karman der Inder, das Verfahren mit der angenommenen Zahl (S. 618), von welchem die Hauptregel als eine Abart sich erweist, auf welche wir gleich zurückkommen.

Die Methode der Vermehrung und Verminderung wird noch an vielen anderen Beispielen gelehrt und das Ergebnis häufig mittels noch anderer Rechnungsweisen gefunden. Darunter ist auch das Umkehrungsverfahren[1]) unter dem sonderbaren Namen der Wortrechnung, *regula sermonis*. Auch dieses haben wir bei den Indern kennen gelernt, und es kann uns als Bestätigung dienen, daß Abraham mit Recht auch die Methode der Vermehrung und Verminderung ebendenselben zuschreibt.

Die Abweichung der letzteren von dem Verfahren mit der angenommenen Zahl besteht, wie wir sahen, darin, daß dort nur ein einmaliger Versuch genügt, während hier zwei falsche Ansätze gebildet werden, wodurch sich auch der Name *regula elchataym*, Regel der zwei Fehler, rechtfertigt[2]), welchen die Methode bei späteren abendländischen Schriftstellern führt. Daß sie auch Methode der Wagschalen heißt und in eigentümlicher Schreibweise auftritt, werden wir noch im 37. Kapitel zu besprechen haben. Ihre algebraische Begründung ist sehr einfach. Es sei $ax = b$, folglich $x = \frac{b}{a}$. Nun setzt man einmal $x = n_1$, das andremal $x = n_2$ und erhält $an_1 = b - e_1$, $an_2 = b + e_2$, wo e_1 und e_2 die beiden Fehler sind, der erstere in der Verminderung, der zweite in der Vermehrung. Jetzt soll $x = \frac{e_1 \cdot n_2 + e_2 \cdot n_1}{e_1 + e_2}$ sein, und das ist auch der Fall, indem

$$e_1 n_2 = bn_2 - an_1 n_2, \quad e_2 n_1 = an_1 n_2 - bn_1,$$

$$e_1 n_2 + e_2 n_1 = bn_2 - bn_1 = \frac{b}{a} \cdot a(n_2 - n_1) = \frac{b}{a}(e_1 + e_2)$$

ist. Der Fall, daß beide Fehler in der Verminderung, oder beide in der Vermehrung ausfallen, kann entsprechend bewahrheitet werden.

Wir dürfen allerdings, wenn wir den doppelten falschen Ansatz als indisch beanspruchen, nicht außer Augen lassen, daß wir (S. 372) in

[1]) Libri l. c. 313. [2]) Diese richtige Übersetzung bei Hankel S. 259, Anmerkung.

einem doppelten falschen Ansatze das Rechnungsverfahren vermuteten, welches Heron in seiner Vermessungslehre anwandte, um zu dort vorkommenden angenäherten Quadrat- und Kubikwurzeln zu gelangen. Hier liegt unter allen Umständen eine geschichtliche Schwierigkeit vor, auf die wir uns verpflichtet fühlen hinzuweisen, wenn wir sie auch nicht zu lösen imstande sind. Jedenfalls gehört auch diese Methode zu dem Grundstocke mathematischer Wahrheiten, welcher in der Zeit des Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî, also im ersten Drittel des IX. S., Eigentum der Araber war. Wir werden nun bei einzelnen Schriftstellern, von denen wir zu reden haben, sehen, welche Vermehrungen teils als neuerdings erworbenes fremdes Wissen, teils als eigene Erfindung hinzutreten.

34. Kapitel.

Die Mathematiker unter den Abbasiden. Die Geometer unter den Bujiden.

Als der Zeit nach Nächste fordern die sogenannten drei Brüder unsere Aufmerksamkeit[1]). Mûsâ ibn Schâkir soll in seiner Jugend Räuber gewesen sein, d. h. hatte wohl zu einer der räuberischen Horden gehört, welche damals wie noch jetzt Unsicherheit der Wüstengegend hervorbrachten, ohne daß die persönliche Ehrenhaftigkeit der einzelnen Mitglieder in arabischer Auffassung dadurch beeinträchtigt erschiene. Dementsprechend nahm Mûsâ später am Hofe des Chalifen Almamûn eine hohe Stellung ein und erwarb sich die Gunst des Herrschers in solchem Maße, daß dieser nach Mûsâs Tode sich die Erziehung der drei hinterlassenen Söhne Muḥammed, Aḥmed und Alḥasan angelegen sein ließ. Deren Wohlhabenheit wird dadurch bezeugt, daß sie drei Übersetzer aus dem Griechischen, darunter Tâbit ibn Kurrah (S. 703) mit je 500 Dinaren monatlich unterstützten[2]). Der Name des ältesten: Muḥammed ibn Mûsâ ibn Schâkir kann, wenn der Vatersname nicht von dem des Großvaters begleitet ist, leicht zur Verwechslung mit Alchwarizmî führen, um so leichter, als alle drei Brüder tüchtige Astronomen und Mathematiker wurden. Von ihnen stammt die sogenannte Gärtnerkonstruktion der Ellipse mittels eines an zwei Punkten festgehaltenen und durch einen Stift gespannten Fadens gemäß dem Berichte eines Arabers Alsidschzî, welcher zu Ende des X. S. lebte und, selbst Mathematiker von Bedeutung, am

[1]) Vgl. Mohammed ben Musa, Algebra. Vorrede pag. XI, Anmerkung. Fihrist 24—25. Suter 20—21, Nr. 43. [2]) Suter 22.

Schlusse dieses Kapitels uns beschäftigen wird. Eine geometrische Schrift ist in mittelalterlicher lateinischer Übersetzung auf uns gekommen[1]). Sie führt den Titel *Liber trium fratrum de geometria* und beginnt mit den Worten: „Verba filiorum Moysi, filii Schiae, id est Mahumeti Hameti et Hason" oder nach anderer Lesart in einem zweiten Kodex „Verba filiorum Moysi, filii Schaker, Mahumeti Hameti Hasen" und danach ist die Bezeichnung der drei Brüder, beziehungsweise der drei Söhne des Mûsâ ibn Schâkir geworden, unter welcher die Verfasser genannt zu werden pflegen. Manches Interessante findet sich dort, wenn auch wenig Neues, da fast alles, um nicht zu sagen alles, auf griechische Vorlagen zurückgeführt werden kann. Auch eine durch Bewegungsgeometrie erzielte Dreiteilung des Winkels dürfte griechischen Ursprungs sein. Vorzugsweise die heronische Formel für die Dreiecksfläche aus den drei Seiten hat die Aufmerksamkeit eines Forschers auf sich gezogen, der den Beweis obwohl einigermaßen von dem heronischen verschieden doch als abhängig von demselben erkannte und insbesondere aus den Buchstaben, mit welchen die Eckpunkte der Figur bezeichnet sind, den Nachweis führte, daß diese Figur einem griechischen Muster nachgebildet sein müsse, so eine vielfach mit Erfolg anwendbare (S. 724) neue kritische Methode zur Ermittelung des Ursprungs mathematischer Untersuchungen erfindend. Vielleicht war es Muḥammed, der älteste der drei Brüder, welcher die Kenntnis des heronischen Satzes nach Bagdad brachte, während allerdings andere heronische Schriften schon zu Alchwarizmis Zeiten, wie wir aus manchen bei diesem auftretenden Dingen schließen durften, bekannt gewesen sein mögen. Jedenfalls weiß man von einer Reise nach den griechischen Gebieten, welche jener machte, und daß es auf der Rückkehr von dieser Reise war, daß er Ṯâbit ibn Ḳurrah kennen lernte, welchen er aufforderte ihn nach Bagdad zu begleiten, und so kam auch dieser letztere an den Chalifenhof, und wurde in das Astronomenkollegium Almuʿtaḍids aufgenommen.

Von dem Leben (826—901) und der reichen Übersetzungstätigkeit des gelehrten Ṯâbit ibn Ḳurrah haben wir (S. 703—704) gesprochen. Wir haben es jetzt mit ihm als Originalschriftsteller zu tun, und da finden wir eine Abhandlung von ihm, welche unsere Aufmerksamkeit zu fesseln ein entschiedenes Anrecht besitzt[2]). Der Gegenstand ist ein zahlentheoretischer und zwar ein solcher, der nur der grie-

[1]) Vgl. Hultsch in der Zeitschr. Math. Phys. IX, 241—242 und 247 in dem Aufsatze „Der heronische Lehrsatz über die Fläche des Dreiecks als Funktion der drei Seiten", und Jahresbericht über Mathematik im Alterthum für 1878—79 von Max Curtze. Ein von ebendiesem besorgter Abdruck des Buches in den Nova Acta der Leop.-Car. Akademie. Halle 1885. [2]) *Notice sur une*

chischen, nicht ebenso der indischen Zahlentheorie angehört. Ṯâbit sagt auch in den Einleitungssätzen, daß es Betrachtungen seien, welche der pythagoräischen Lehre angehörten, daß einiges über das zu Behandelnde bei Nikomachus und Euklid sich finde; er geht endlich, wieder nach seinen eigenen Worten, über diese beiden hinaus und liefert somit für uns das erste Beispiel einer wirklich arabischen Leistung auf mathematischem Boden. Es handelt sich um vollkommene und um befreundete Zahlen. Für die Bildung der ersteren hat Euklid die Regel angegeben (S. 268), Nikomachus sie wiederholt. Die zweiten hat nach Jamblichus schon Pythagoras gekannt und die Zahlen 220 und 284 als Beispiele aufgestellt, wie Freunde sein sollen, ein jeder dem andern ein zweites Ich (S. 167). Aber wie man solche befreundete Zahlen finde, darüber äußert sich auch Jamblichus nicht. Ṯâbit ibn Ḳurrah hat eine solche Vorschrift gegeben, welche mit der Euklids zur Bildung der vollkommenen Zahlen in Zusammenhang steht und dadurch sich als den Kern der Aufgabe enthüllend kennzeichnet. Sind

$$p = 3 \cdot 2^n - 1, \qquad q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, \qquad r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

insgesamt Primzahlen, so sind $A = 2^n \cdot p \cdot q$ und $B = 2^n \cdot r$ befreundete Zahlen. Bei $n = 2$ ist $p = 11$, $q = 5$, $r = 71$ und $A = 220$, $B = 284$.

Die befreundeten Zahlen haben übrigens von da an nicht aufgehört den Arabern bekannt zu sein. In einer mystischen Schrift über die Zwecke des Weisen hat El Madschrîṭî, der Madrider († 1007), die Vorschrift, man solle die Zahlen 220 und 284 aufschreiben und die kleinere wem man will zu essen geben und selbst die größere essen; der Verfasser habe die erotische Wirkung davon in eigener Person erprobt[1]), und Ibn Chaldûn weiß gleichfalls von den wunderbaren Kräften eben dieser Zahlen, als Talismane gebraucht, zu erzählen[2]).

Alsidschzî berichtet auch kurz über eine Dreiteilung des Winkels durch Ṯâbit ibn Ḳurrah. Figur und Wortlaut stimmen so nahe mit einem Satze aus dem IV. Buche des Pappus überein[3]), daß an einer genauen Benutzung dieses Schriftstellers nicht zu zweifeln ist, auch scheint Ṯâbit kein Hehl daraus gemacht zu haben, daß er nicht der

théorie ajoutée par Thâbit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs von Woepcke im *Journal Asiatique* für Oktober und November 1852 pag. 420—429.

[1]) Steinschneider, Zur pseudoepigraphischen Literatur insbesondere der geheimen Wissenschaften des Mittelalters S. 37 (Berlin 1862). [2]) *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale* T. XXI, Partie 1, pag. 178—179 (Paris 1868). [3]) Pappus IV, 32. Die Figur vgl. (ed. Hultsch) pag. 275.

Erfinder sei, da Alsidschzi ausdrücklich sagt, er wolle in seinem Berichte über Winkeldreiteilung von den Sätzen der Alten ausgehen, worunter sehr wohl die Griechen verstanden sein können[1].

Wir haben des weiteren auf eine Schrift Ṯâbits über den Satz des Menelaus hinzuweisen, welche Gerhard von Cremona (1114—1187) unter dem Titel *Liber thebit de figura alkata tractatus I* ins Lateinische übersetzte und so das Wort *alkata* (= sector d. h. die Transversale) mit lateinischem Bürgerrechte versah. Ob Ṯâbit aus der Figur alle trigonometrischen Folgerungen zog, deren sie fähig ist, bleibt so lange ungewiß, als seine Abhandlung nur bruchstückweise bekannt ist[2].

Wieder zu Almuʿtaḍid stand ein uns als Verfertiger astronomischer Tafeln (S. 701) schon bekannter geometrischer Schriftsteller Alnairîzi[3]) in Beziehung, den wir also hier zu nennen haben. Er verfaßte einen Kommentar zu den euklidischen Elementen, als dessen größtes Verdienst zu loben ist, daß dort wertvolle Bruchstücke der in der Ursprache verlorenen Erläuterungen von Heron und Simplicus (S. 386) erhalten sind[4].

Die Zeitfolge führt uns zu einem Manne, welcher in ganz anderer Richtung arbeitete, und dessen Name untrennbar verbunden ist mit der Geschichte der Einführung der trigonometrischen Funktionen im Abendlande, zu Albategnius, wie die Übersetzer ihn genannt haben[5]. Muḥammed ibn Dschâbir ibn Sinân Abû ʿAbdallâh al Battânî führt seinen Beinamen nach Battân in Syrien, wo er geboren ist, und welchem er zur Berühmtheit verholfen hat. Er stellte 878—918 in Ar-Raḳḳa astronomische Beobachtungen an, welche von seinen Landsleuten als die genauesten gefeiert worden sind, die irgend jemand gelungen seien, der unter dem Islam gelebt hatte, und mit nicht geringerem Lobe haben sie seine Schrift über die Bewegung der Sterne bedacht, welche im XII. S. durch einen Übersetzer Plato von Tivoli, der uns seinerzeit noch beschäftigen wird, unter der Überschrift De motu oder De scientia stellarum in lateinischer Sprache bearbeitet wurde. Aus dieser Übersetzung soll das Wort *sinus* als Name einer trigonometrischen Funktion in die Mathematik aller

---

1) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* (ed. Woepcke), Paris 1851, pag. 118. Die Übereinstimmung Ṯâbits mit Pappus hat Woepcke hervorgehoben ibid. pag. 117, Anmerkung **. 2) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 46—47. 3) Fihrist 35. Suter 45, Nr. 88. 4) Alnairîzis Kommentar wurde 1893—1905 von Besthorn und Heiberg herausgegeben. Über die Eukliderklärungen von Heron und von Simplicius vgl. auch Fihrist 22 und 21. Die von Gerhard von Cremona herrührende lateinische Übersetzung des Kommentars des Alnairîzi hat Curtze als Supplementband zu den Werken Euklids (Leipzig 1899) herausgegeben. 5) Hankel S. 241 und 281. Suter 45 bis 47, Nr. 89.

Völker eingedrungen sein. Der Ursprung des Wortes wäre dann nach aller Wahrscheinlichkeit folgender[1]. Die Benennung der Sehne war im Sanskrit jyâ oder jîva, die der halben Sehne ardhajyâ (S. 658). Allmählich wurde, da man nur die halbe Sehne trigonometrisch verwertete, das kürzere jîva auch für diese benutzt und drang so zu den Arabern, welche es in seinem Wortlaute, wie sie ihn verstanden, übernahmen und dschîba schrieben. Genau dieselben Konsonanten, welche arabisch dschîba zu lesen sind, lassen aber auch die Lesung dschaib zu, welches ein wirkliches arabisches Wort ist und den Einschnitt oder Busen bedeutet. Nun wird angenommen, die Überlieferung, daß man, für den Araber sinnlos, dschîba lesen müsse, sei verhältnismäßig frühzeitig abhanden gekommen, und die Lesart dschaib sei dafür die regelmäßige geworden. Jedenfalls übersetzte zwar nicht Plato von Tivoli, wie man früher fälschlich annahm, aber Gerhard von Cremona bei der Bearbeitung anderer arabischer Astronomen das arabische dschaib durch das ganz richtige Wort sinus, welches von nun an sich forterbte[2]. Daß übrigens die Araber das indische kramajyâ in der Form kardaga übernommen haben, welches ihnen den 96. Teil des Kreisumfanges bedeutete, ist schon (S. 699) erwähnt worden. Bei anderen arabischen Mathematikern, insbesondere bei solchen, deren Schriften im christlichen Mittelalter übersetzt wurden, bedeutet kardaga den 24. Teil des Kreisumfanges. Wieder bei anderen scheint kardaga zur Benennung des Sinus eines gewissen Bogens gedient zu haben[3].

Den Sinus wendet nun Albattânî im III. Kapitel seiner Sternkunde, welches eine Trigonometrie enthält, regelmäßig an und zwar, was einen nicht hoch genug anzuerkennenden Fortschritt gegen die Inder bezeichnet, im Vollbewußtsein des Gegensatzes gegen die im Almageste benutzten ganzen Sehnen mit dem ausdrücklichen Zusatze, daß man so in der Rechnung das fortwährende Verdoppeln erspare.

In einer anderen Beziehung ist aber Albattânî noch immer Schüler des Ptolemaeus und ebenso Schüler der Inder. Er weiß noch nichts von trigonometrischen Gleichungen, nichts von deren algebrai-

---

1) Die hier folgende Hypothese stammt von dem Pariser Orientalisten Munk her. Vgl. Woepcke in dem *Journal Asiatique* 1863, 1. Halbjahr, pag. 478, Anmerkung. 2) Max Koppe, Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht. Osterprogramm 1893 des Andreas-Realgymnasiums zu Berlin. S. 32—34, hat nachgewiesen, daß bei Plato von Tivoli die sinngetreuere Übersetzung *chorda* vorkommt. Über die dem Wortlaut nach richtige Übersetzung *sinus* bei Gerhard von Cremona vgl. Jul. Ruska in der Zeitschr. Math. Phys. XL, Histor.-liter. Abtlg. 126—128. 3) Eneström in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge IV, 284.

schen Umformung; er kennt nur an Figuren zu beweisende geometrische Sätze[1]). In diesem Sinne spricht er von dem Schatten und versteht darunter die Schattenlänge l, welche ein von der Sonne unter dem Winkel φ beschienener Schattenmesser h wirft. Je nachdem der Schattenmesser auf einer Horizontalebene oder auf einer Vertikalebene aufsteht, ist $\frac{l}{h}$ die Kotangente oder die Tangente des Winkels φ. Albattânî hat eine kleine von Grad zu Grad fortschreitende Kotangententafel hergestellt. Ferner kennt er Beziehungen zwischen einem Winkel und den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks, welche auf

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

hinauslaufen, aber diese Gleichung selbst darf man bei ihm nicht suchen.

Dem Anfange des X. S. gehört Aḥmed ibn Jussuf[2]) an, der in Ägypten lebte. Unter seinen zahlreichen Schriften hat diejenige, welche über die Verhältnisse handelt, einen geschichtlichen Einfluß geübt, von welchem im 41. Kapitel im folgenden Bande die Rede sein wird.

Von Al-Baṣra war, wie wir uns erinnern (S. 697), der Anstoß ausgegangen, der den Chalifen Almamûn zu einem Beförderer der Philosophie und der Mathematik machte. In derselben an Bildungselementen der verschiedensten Länder reichen Handelsstadt scheint in der zweiten Hälfte des X. S. eine Art von wissenschaftlichem Geheimbund entstanden zu sein[3]), dessen Mitglieder in Gemeinschaft arbeiteten, wenigstens in Gemeinschaft veröffentlichten, was sie für notwendig zur Bildung des Geistes und des Charakters hielten. Diese Abhandlungen der lauteren Brüder müssen wir bis zu einem gewissen Grade der Besprechung unterziehen. Von den, wie gesagt, anonymen Verfassern ist es doch gelungen, einige zu enträtseln[4]), und unter diesen dürfte Almuḳaddasî der bekannteste sein, ein anderer hieß Zaid ibn Rifâʿa. Die Abhandlungen selbst verbreiteten sich rasch sehr weit, ja sogar bis zu den Westarabern Spaniens drangen sie durch El Madschrîṭî oder durch dessen Schüler El Karmâni, von welchem letzteren, der 1066 über 90 Jahre

[1]) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 50—54. [2]) Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. X, 492 (1865) und *Bibliotheca mathematica* 1888, 111—112. Suter 42—43, Nr. 78. [3]) Vgl. Dieterici, Die Propädeutik der Araber im X. Jahrhundert. Berlin 1865. Flügel, Ueber die Abhandlungen der aufrichtigen Brüder und treuen Freunde in der Zeitschr. der morgenl. Gesellschaft XIII, 1—38 (Leipzig 1859), Sprenger ebenda XXX, 330—335 (Leipzig 1876). [4]) Flügel l. c. S. 21.

alt in Cordova starb, eine Studienreise nach dem Oriente bekannt ist[1]). Und trotz dieser Tatsache, welche eine packende Bedeutung der Schriften zu erweisen scheint, hat die arabische Kritik selbst wenig Gutes ihnen nachzurühmen gewußt. Zaid sei ein unwissender Schwindler, sagte ein Zeitgenosse[2]), und das Urteil eines gelehrten Schaich, der die Abhandlungen einer genauen Durchsicht unterworfen hatte, lautet: Sie ermüden, aber befriedigen nicht; sie schweifen herum, aber gelangen nicht an; sie singen, aber sie erheitern nicht; sie weben, aber in dünnen Fäden; sie kämmen, aber machen kraus; sie wähnen was nicht ist und nicht sein kann[3]).

Was den mathematischen Inhalt der Abhandlungen betrifft, so können wir dieses harte Urteil kaum ein allzustrenges nennen, und wenn wir trotz dieses geringen Wertes ihrer erwähnen, so geschieht dieses, weil in dem Mancherlei, in den zusammengestoppelten und gekoppelten Dingen, wie ein anderer Araber rügend sagt, doch geschichtlich verwertbare Körner haben aufgefunden werden können. Von den vollkommenen Zahlen heißt es[4]), sie kämen in jeder Zahlenstufe nur einmal vor, 6 unter den Einern, 28 unter den Zehnern, 496 unter den Hundertern und 8128 unter den Tausendern. Das stimmt genau mit einer Bemerkung des Jamblichus überein[5]) und stellt zusammengehalten mit dem, was wir aus der Einleitung zu Tâbits Abhandlung über befreundete Zahlen beibrachten, außer Zweifel, daß die Schriften des Jamblichus, welche in Syrien nie aufgehört hatten gelesen zu werden (S. 706), um 900 auch den Arabern überhaupt gut bekannt waren. Um so auffallender ist eine Bemerkung, welche durch keine andere Überlieferung gestützt ist: die meisten Völker hätten nur 4 Zahlstufen, aber die Pythagoräer, die Männer der Zahlen, kannten 16 Stufen derselben tausend tausend tausend tausend tausend[6]). Wir können das nur dahin verstehen, daß während im Arabischen die selbständigen Zahlwörter sich nicht auf andere Rangeinheiten als auf 1, 10, 100, 1000 erstrecken, die Pythagoräer solche Namen bis 10^{15} besaßen. Wenn diese Auffassung richtig und die Aussage wahrheitsgetreu, so ist der Zusammenhang zwischen Indern und Neupythagoräern in Dingen, die auf das Zahlensystem Bezug haben, um einen neuen Beleg reicher und die Hypothese

[1]) Flügel l. c. S. 25. Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 61, Nr. 122 und S. 80, Nr. 137. Suter 105, Nr. 238. [2]) Sprenger l. c. S. 333. [3]) Flügel l. c. S. 26. [4]) Propädeutik der Araber S. 12. Daß dort statt 8128 fälschlich 7128 steht, ist wohl nur Druckfehler? [5]) Jamblichus in Nikomachum (ed. Tennulius) pag. 46, (ed. Pistelli) pag. 33. [6]) Propädeutik der Araber S. 6.

des Eindringens indischer Zahlzeichen in jene griechische Schule wird immer wahrscheinlicher.

Wir haben (S. 706) gesehen, daß die Araber jedenfalls mit den Arbeiten des Zenodorus bekannt waren. Auch dafür haben wir hier eine Bestätigung in der Bemerkung, die Kreisfigur habe eine weitere Umfassung als alle vielwinkligen Figuren mit gleich langer Umfassungslinie[1]), und wir können jetzt noch einen Schritt weiter gehend vermuten, aus Pappus habe man die Kenntnis gerade dieser Untersuchungen geschöpft. Im V. Buche des Pappus hat, wie wir uns erinnern (S. 446), die Abhandlung des Zenodorus Platz gefunden, und an die Einleitung eben des V. Buches erinnern aufs lebhafteste folgende Sätze[2]): „Viele Tiere schaffen von Natur schon Werke. Das ist ihnen ohne Unterricht eingegeben. So die Bienen, die sich Häuser schaffen. Sie bauen Häuser in Stockwerken von runder Gestalt wie Schilde, eins über das andere. Die Öffnungen der Häuser machen sie alle mit sechs Seiten und Winkeln. Dies tun sie mit sicherer Weisheit, denn es ist die Eigentümlichkeit dieser Figur, daß sie weiter ist als das Viereck und das Fünfeck."

Eine Stelle, welche auf falsche Flächenberechnung sich bezieht, haben wir schon früher (S. 173) erwähnt. Sie heißt folgendermaßen[3]): „In einem jeden Gewerk erfaßt den Zweifel, der dasselbe ohne Mathematik zu verstehen unternimmt, oder nur mangelhafte Kenntnisse davon hat und sich darum nicht kümmert. Man erzählt, jemand hätte von einem Manne ein Stück Landes für 1000 Dirham gekauft, das 100 Ellen lang und ebensoviel breit sei. Darauf sprach der Verkäufer: Nimm statt dessen zwei Stück, ein jedes 50 Ellen lang und breit, und meinte, damit geschehe jenem sein Recht. Sie stritten nun vor einem Richter, der nicht Mathematik verstand, und dieser war irrigerweise derselben Ansicht, dann aber stritten sie vor einem anderen Richter, der der Mathematik kundig war, und der entschied, daß dies nur die Hälfte seines Anrechts wäre." Wir machen mit wenigen Worten auf einen verhältnismäßig weitläufig behandelten Gegenstand[4]) aufmerksam, auf Verhältnisse der Abmessungen, welche zwischen den einzelnen Strichen stattfinden sollen, aus welchen die Buchstabenzeichen gebildet werden, und derjenigen, welche die Natur bei den einzelnen Teilen des menschlichen Körpers uns zum sinnlichen Bewußtsein bringt, letzteres ein Gegenstand, mit welchem auch Vitruvius (S. 544) sich beschäftigt hat. Wir erwähnen endlich noch eines, welches nicht ohne Interesse ist, magische Quadrate[5]). Die magischen

[1]) Propädeutik der Araber S. 42. [2]) Ebenda S. 32. [3]) Ebenda S. 34—35. [4]) Ebenda S. 133—137. [5]) Ebenda S. 43—44.

Quadrate aus 9, 16, 25, 36 sind hergestellt; daß es auch Quadrate von 49, 64, 81 gebe, wird gesagt; das Quadrat 9, heißt es, erleichtere die Nativität (?). Wir können hier so wenig als es uns früher (S. 635) gelang, dem Ursprunge dieser eigentümlichen Amulette auf die Spur kommen. Wir bemerken nur, daß sie bei den Arabern unter dem Namen *wafk* in der Zauber- und Vorbedeutungskunde eine nicht unbedeutende Rolle gespielt haben[1]), und daß unserem Gewährsmanne zufolge jeder der sieben Planeten einen ihm eigentümlichen *wafk* besaß, vielleicht eben jene sieben den lauteren Brüdern bekannte Quadrate von 9 bis 81? Am ausführlichsten soll darüber der unter dem Namen El Bûnî[2]) berühmte arabische Mystiker geschrieben haben, welcher in Bona geboren dieser Stadt unter den Arabern die gleiche Verherrlichung gab, welche sie als Heimat des heiligen Augustinus bei den Christen besaß. El Bûnî starb 1228.

Die Schriftsteller Alchwarizmî, die drei Brüder, Tâbit ibn Kurrah, Al Battânî waren an dem Hofe der Abbasiden ihren gelehrten Beschäftigungen nachgegangen. Unter demselben Chalifengeschlechte war die Verbindung der lauteren Brüder entstanden. Aber wenn auch Abbasiden fortfuhren, die Chalifen zu heißen, von einer Regierung derselben, ja auch nur von einem Einflusse auf die Wissenschaft durch Gelehrte, in deren Kreise sie weilten, die Zügel des Reiches den stärkeren Händen ihrer Heerführer, der sogenannten Emîr Alumarâ überlassend, war nachgerade keine Rede mehr[3]). Und die Emire selbst schienen allmählich die Schlaffheit ihrer Drahtpuppen, welche Gebieter hießen und Sklaven waren, ererbt zu haben. Das Chalifat schrumpfte nach und nach bis auf das Weichbild von Bagdad zusammen. Eine kriegerische Horde unter dem Befehle eines Bujiden d. h. eines Nachkommen von Abû Schudschâ' Bûjeh, welcher selbst seine Abstammung von den alten Perserkönigen herleitete, zog gegen Bagdad heran und bemächtigte sich der Stadt. Der Chalif mußte 945 dem Bujiden Mu'izz Eddaula den Sultanstitel verleihen und ihm alle weltliche Macht abtreten. Dieses neue Geschlecht wußte zunächst mit neuer Kraft die Herrschaft wieder aufzurichten und auszudehnen, doch dauerte es nicht lange, so entbrannten unter den Bujiden Familienkämpfe um die Gewalt, wie sie unter den Omaijaden, wie sie unter den Abbasiden stattgefunden hatten, und nach einem Jahrhunderte, im Jahre 1050, hatten die Bujiden ihrer Unfähigkeit den Sturz zu verdanken. Die Seldschukensultane lösten sie ab.

[1]) *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale* T. XXI, 1. Partie, pag. 180, Note 4 (Paris 1868). [2]) Hammer-Purgstall, Literaturgeschichte der Araber 2. Abteilung, Bd. VII, S. 402, Nr. 7944. [3]) Weil S. 219—226

Die Wissenschaft ist in diesem Jahrhundert, von der Mitte des X. bis zur Mitte des XI. S., keineswegs zurückgegangen. Im Gegenteil sind es einige der hervorragendsten Mathematiker, welche wir in jener Zeit aufzuzeichnen haben. Der Bujide ʿAḍud ed Daula 978—983 rühmte sich selbst astronomische Studien gemacht zu haben. Sein Sohn Scharaf ed Daula, derselbe, unter welchem die Familienzwistigkeiten zuerst entbrannten, errichtete in dem Garten seines Palastes zu Bagdad eine neue Sternwarte und berief dorthin um 988 eine ganze Vereinigung von Fachmännern[1]). Unter ihnen waren Abû'l Wafâ, Alkûhî und Aṣ-Ṣâġânî.

Abû'l Wafâ Muḥammed ibn Muḥammed ibn Jaḥjâ ibn Ismaʿîl ibn Al-ʿAbbâs Albûzdschânî[2]) wurde, wie wir (S. 704) schon sagten, 940 in Bûzdschân, einem kleinen Orte des persischen Gebirgslandes Chorasan, geboren, derselben Gegend, welche so viele arabische Mathematiker hervorgebracht hat. Er erfreute sich, bald Abû'l Wafâ, bald Albûzdschânî genannt, unter den Arabern des größten Ruhmes und drei Jahrhunderte später sagt von ihm Ibn Challikân, der über berühmte Männer im allgemeinen, nicht bloß über berühmte Gelehrte schrieb, er sei ein weitbekannter Rechner, eine der glänzenden Leuchten der Geometrie gewesen, es seien ihm in dieser Wissenschaft wunderbare Entdeckungen gelungen. Er starb 998. Seine Schriften sind ungemein zahlreich. Eine, welcher er den Titel Almagest beilegte, dadurch selbst kundgebend, nach wessen Muster er gearbeitet habe, enthält die in der Geschichte der Astronomie berühmt gewordene Stelle, über welche bis auf den heutigen Tag die Meinungen gespalten sind, ob darin die Entdeckung der sogenannten Variation enthalten sei oder nicht[3]). Uns kümmert nur der Mathematiker, und auch als solcher hat Abû'l Wafâ große Verdienste. Er war einer der letzten arabischen Übersetzer und Kommentatoren griechischer Schriftsteller, und wir müssen aufs lebhafteste bedauern, daß gerade von dieser Tätigkeit gar keine unmittelbare Spur sich erhalten hat. Der Gelehrte, welcher mit Diophant sich so eingehend beschäftigte, daß er nicht bloß ihn übersetzte, ihn erläuterte, sondern ein besonderes Schriftchen mit den Beweisen der bei Diophant und in seinen Erläuterungen zu demselben enthaltenen Lehrsätze füllte, muß viel Wissenswertes für uns auf diesem Gebiete vereinigt haben. Sein Kommentar zur Algebra des Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî würde uns wohl der Mühe überhoben haben, vermutungsweise dem Ur-

[1]) Hankel S. 242 nach *Abulpharagius Histor. dynast.* (ed. Pocock) pag. 216 der Übersetzung. [2]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für Februar und März 1855 pag. 243 flgg. Suter 71—72, Nr. 167 und 213 Note 36. [3]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 53 und 204.

sprunge der dort enthaltenen Lehren nachzuspüren. Sein Kommentar zur Algebra des Hipparch, vorausgesetzt daß der Name richtig überliefert ist, ist ein eben so gerechter Gegenstand unserer Neugier, da wir hier ja nicht einmal die unzweifelhaft wichtige Abhandlung kennen, zu welcher er gehört. Aber leider sind von diesen algebraischen Kommentaren nur die Überschriften uns bewahrt. Eine Zusammenstellung dessen, was Rechnungsbeamten notwendig ist, hat sich wenigstens teilweise erhalten, ist aber nur in einem dürftigen Auszuge bekannt gemacht[1]), was Bedauern erregen kann, da ausdrücklich bemerkt ist, in jenem ganzen Werke seien wesentliche Unterschiede gegen andere arabische Rechenbücher auffallend, es sei z. B. nicht eine einzige Ziffer darin angewandt.

Dagegen ist ein genügend ausführlicher Bericht über geometrische Leistungen veröffentlicht[2]), zu welchem wir uns jetzt wenden. Von Abû'l Wafâ selbst rührt das aus zwölf Kapiteln bestehende Buch der geometrischen Konstruktionen freilich nicht her. Es ist vielmehr die persische Übersetzung eines Vorlesungsheftes, welches, wie es scheint, auf Grund von öffentlichen Vorträgen Abû'l Wafâs durch einen begabten aber doch nicht alles verstehenden Schüler angefertigt worden ist, und somit kann Abû'l Wafâ unmöglich für die Mängel verantwortlich gemacht werden, welche bei der mehrfachen Überarbeitung nur allzuleicht sich einschleichen konnten. Man hat mit Recht drei Gruppen von Aufgaben aus diesem Buche hervorgehoben, welche geschichtlich und sachlich unsere Aufmerksamkeit verdienen. Eine erste Gruppe beschäftigt sich mit der Auflösung von Aufgaben unter Anwendung nur einer Zirkelöffnung. Abû'l Wafâ hat die Bedingung teils aussprechend, teils sie stillschweigend verstehend nicht weniger als 18 Paragraphe mit solchen Aufgaben gefüllt[3]). In einer zweiten Gruppe handelt es sich um Zusammenlegung von Quadraten zu einem neuen Quadrate, so daß die Methode auch Praktiker befriedigen könne, welche die geometrische Anschauung der Rechnung vorziehen. Man wird aus einigen wenigen Beispielen am deutlichsten erkennen, wie das gemeint ist. Ein Quadrat soll gezeichnet werden von der dreifachen Größe eines gegebenen Quadrates[4]). Man findet die Seite als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches die Seite und die Diagonale des gegebenen Quadrates als Katheten besitzt. Dagegen lehnen sich aber die Praktiker auf; mit einer solchen Auflösung, welche ihre Sinne nicht überzeuge,

[1]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für Februar und März 1855 pag. 246—251. [2]) Ebenda pag. 318—359. [3]) Ebenda pag. 226. [4]) Ebenda pag. 349—350.

könnten sie nichts anfangen. Abû'l Wafâ befriedigt sie nunmehr durch folgende Konstruktion (Fig. 98). Er zeichnet die drei einander gleichen Quadrate hin und halbiert zwei davon durch Diagonalen. Die vier so entstehenden gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke legt er nun um das dritte Quadrat herum, so daß die Hypotenusen Verlängerungen der vier Quadratseiten in der Art bilden, daß an jeder Ecke eine und nur eine Seite verlängert ist. Endlich verbindet er die rechtwinkligen Spitzen dieser Dreiecke untereinander und hat so das gewünschte Quadrat fertig. Man möchte fast erwarten, als Beweis jene Aufforderung „Sieh!" zu lesen, welche indische Geometer ähnlichen Konstruktionen nachzuschicken für genügend hielten. Ja, eine Konstruktion, welche wir (S. 656) als in Bhâskaras Schriften vorhanden erörtert haben, welche mit gleicher Sicherheit (S. 680) in China aufgefunden worden ist, kommt bei Abû'l Wafâ vor[1]). Zwei Quadrate sollen zu einem dritten vereinigt werden. Man zeichnet sie (Fig. 99) aufeinander, so daß eine Ecke und die Richtung zweier Seiten beiden gemeinsam ist. Verlängert man darauf die beiden freiliegenden Seiten des kleinen Quadrates bis zum Durchschnitte mit den Seiten des größeren Quadrates, so ist die Summe der gegebenen Quadrate zerlegt in ein Quadratchen, dessen Seiten gleich dem Unterschiede der Seiten der ursprünglich gegebenen Quadrate sind, und in zwei Rechtecke, auf der Figur einander zum Teil überdeckend, deren jedes durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke zerfällt. Die vier rechtwinkligen Dreiecke um das Quadratchen herumgelegt bilden (Fig. 87) das verlangte große Quadrat. Es ist unmöglich, bei so übereinstimmenden Figuren so eigenartigen Gedankens nicht einen tatsächlichen Zusammenhang anzunehmen. Wir stehen nicht an, der Meinung uns anzuschließen[2]), daß wiewohl Abûl Wafâ fast zwei Jahrhunderte vor Bhâskara lehrte, und wiewohl es leicht möglich war, daß Arabisches von den islamisierten Indusländern aus sich weiter verbreiten konnte, dennoch hier nicht daran zu denken ist,

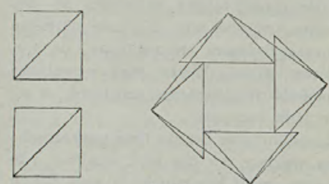


Fig. 98.

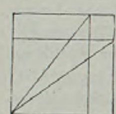


Fig. 99.

[1]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für Februar und März 1855 pag. 346 und 350—351. [2]) Ebenda pag. 235—238.

Bhâskara habe die Konstruktion aus arabischer Quelle. Nur das persönliche Anrecht Bhâskaras an die Figur und ihre Benutzung geht verloren, wie wir von vornherein bemerklich machten, aber ihr indischer Stempel dürfte ihr erhalten bleiben, erhalten mit so viel älterer Datierung, daß sie schon den Praktikern, d. h. mutmaßlich indischen Handwerkern, Baumeistern, mit welchen Abû'l Wafâ verkehrte, bekannt war. Die dritte Gruppe von Aufgaben hat die Beschreibung regelmäßiger Vielflächner zum Zwecke. Wir wissen, daß Euklid (S. 273) und Pappus (S. 447) jeder in seiner Weise sich ebenfalls damit beschäftigt haben. Abû'l Wafâ schließt sich so ziemlich an Pappus an[1]), und bestrebt sich nur auf der Kugeloberfläche die Eckpunkte des gedachten nicht förmlich einbeschriebenen Vielflächners zu bestimmen. Mit anderen Worten: er teilt die Kugeloberfläche in regelmäßige, einander gleiche sphärische Vielecke. Diese drei Hauptgruppen von Aufgaben erschöpfen indessen nicht sämtliche zwölf Kapitel. Das Ende des 6., das ganze 7., der Anfang des 8. Kapitels

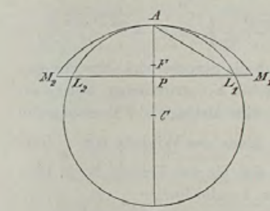


Fig. 100.

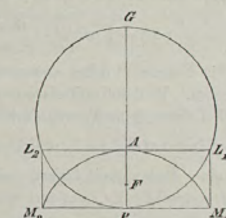


Fig. 101.

sind verloren, und der erhaltene Rest schließt außer dem von uns bisher Hervorgehobenen noch manche wissenswürdige Einzelheit ein. Wir erwähnen nur zwei Sätze. Im 2. Kapitel im 6. Paragraphen und wiederkehrend im 3. Kapitel im 13. Paragraphen ist die Aufgabe, ein regelmäßiges Siebeneck zu konstruieren[2]), näherungsweise so gelöst, daß die Hälfte der Seite des einem Kreise einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks als Seite des demselben Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Siebenecks gilt, ein Verfahren, welches durch Jahrhunderte durch sich fortgeerbt hat. Im 1. Kapitel im 21. und 22. Paragraphen sind punktweise Konstruktionen der Parabel gelehrt[3]), denen wir uns nicht erinnern bei früheren Schriftstellern begegnet zu sein. Von einem Punkte C der Parabelachse aus (Fig. 100), der um die

[1]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für Februar und März 1855 pag. 241 und 352—358. [2]) Ebenda pag. 329 und 332. [3]) Ebenda pag. 326.

doppelte Brennweite $2AF = AC$ vom Scheitelpunkte entfernt ist, als Mittelpunkt und mit der CA als Halbmesser wird ein Kreis beschrieben und in einem Punkte P der Achse die Senkrechte PL errichtet. Auf ihr nimmt man $PM = AL$ ab, so ist M ein Punkt der Parabel. In der zweiten Konstruktion verlängert man (Fig. 101) die Parabelachse über den Scheitel hinaus um den Parameter $4c = AG$. Mit der Entfernung von G bis zu einem beliebigen Punkte P der Achse als Durchmesser beschreibt man einen Kreis, an P dessen Berührungslinie und ihr parallel durch A die $L_1 L_2$. Senkrechte von L_1 und L_2 auf jene Berührungslinie treffen sie in den Parabelpunkten M_1 und M_2.

Andere Verdienste hat sich Abû'l Wafâ in der Trigonometrie erworben[1]). Er kennt Formeln, welche unseren Gleichungen

$$2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \cos\alpha, \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

entsprechen. Er weiß $\sin(\alpha \pm \beta)$ herzustellen und schreibt dafür

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sqrt{\sin\alpha^2 - \frac{\sin\alpha^2\cdot\sin\beta^2}{r^2}} \pm \sqrt{\sin\beta^2 - \frac{\sin\alpha^2\cdot\sin\beta^2}{r^2}},$$

wo die Nenner r^2 daher stammen, daß die Sinusse wirkliche Strecken bedeuten. Er leitet mittels geometrischer Konstruktionen, welche wir durch Rechnung an Formeln ersetzen, eine Methode zur Berechnung von Sinustafeln her[2]), welche den Sinus des Winkels von $\frac{1}{2}$ Grad mit einer Genauigkeit liefert, welche sich bis zur Einheit der 9. Dezimale erstreckt. Er geht aus von der Vergleichung

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha - \beta).$$

Er beweist dieselbe nicht, aber es ist einleuchtend, daß sie Gültigkeit hat, sofern die Winkel $\alpha - \beta$, α, $\alpha + \beta$ sämtlich dem ersten Kreisquadranten angehören, weil, sofern

$$0 < \cos\beta < 1 \quad \text{aus} \quad \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta$$

sofort $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) < 2\sin\alpha$ und daraus jene Vergleichung hervorgeht. Setzt man die Vergleichung nach rechts wie nach links fort, so erhält man:

$$\sin(\alpha + 3\beta) - \sin(\alpha + 2\beta) < \sin(\alpha + 2\beta) - \sin(\alpha + \beta)$$
$$< \sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha - \beta) < \sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - 2\beta)$$
$$< \sin(\alpha - 2\beta) - \sin(\alpha - 3\beta)$$

[1]) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 55—59. [2]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für April und Mai 1860 pag. 298—299.

und daraus:

$$\sin(\alpha + 3\beta) - \sin(\alpha + 2\beta) < \sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha - \beta)$$
$$\sin(\alpha + 2\beta) - \sin(\alpha + \beta) < \sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha < \sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - 2\beta)$$
$$\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha = \sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha < \sin(\alpha - 2\beta) - \sin(\alpha - 3\beta).$$

Addiert man die drei Formeln, so entsteht:

$$\sin(\alpha + 3\beta) - \sin\alpha < 3[\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha] < \sin\alpha - \sin(\alpha - 3\beta)$$

oder endlich

$$\frac{1}{3}[\sin(\alpha + 3\beta) - \sin\alpha] < \sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha < \frac{1}{3}[\sin\alpha - \sin(\alpha - 3\beta)].$$

Nun kann man $\sin 36^0$ und $\sin 60^0$ durch Quadratwurzelausziehung in beliebiger Genauigkeit finden und durch Quadratwurzelausziehung, die weiter jeden beliebigen Grad von Genauigkeit gestattet, auch zu den Sinussen der stets halbierten Winkel gelangen. So kommt man zu den Sinussen von $\frac{36^0}{64}$ und von $\frac{60^0}{128}$ oder zu $\sin\frac{18^0}{32}$ und $\sin\frac{15^0}{32}$, zwischen denen $\sin\frac{16^0}{32} = \sin 30'$ enthalten sein muß. Nun setzt man $\alpha = \frac{15^0}{32}$, $\beta = \frac{1^0}{32}$, so nimmt die letzterhaltene Vergleichung die Gestalt an:

$$\frac{1}{3}\left[\sin\frac{18^0}{32} - \sin\frac{15^0}{32}\right] < \sin 30' - \sin\frac{15^0}{32} < \frac{1}{3}\left[\sin\frac{15^0}{32} - \sin\frac{12^0}{32}\right].$$

Außer $\sin 30'$ ist darin nur noch $\sin\frac{12^0}{32}$ unbekannt, welches aber auch mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden kann vermöge $\frac{12}{32} = 4\cdot\left(\frac{18}{32} - \frac{15}{32}\right)$ und somit ist eine neue fortlaufende Ungleichung

$$\sin\frac{15^0}{32} + \frac{1}{3}\left[\sin\frac{18^0}{32} - \sin\frac{15^0}{32}\right] < \sin 30'$$
$$< \sin\frac{15^0}{32} + \frac{1}{3}\left[\sin\frac{15^0}{32} - \sin\frac{12^0}{32}\right]$$

herstellbar, in welcher der größere wie der kleinere Wert bekannt ist, in welcher außerdem beide nicht weit voneinander abweichen, also auch beide dem zwischenliegenden Werte nahezu gleich sind. Um so genauer wird daher dieser Zwischenwert als arithmetisches Mittel der beiden äußeren Werte gelten dürfen, und diese Annahme macht dem entsprechend Abû'l Wafâ, d. h. er setzt

$$\sin 30' = \sin\frac{15^0}{32} + \frac{1}{6}\left[\sin\frac{18^0}{32} - \sin\frac{12^0}{32}\right].$$

Noch wichtiger in ihren Folgen war eine Neuerung, welche Abû'l Wafâ in die Gnomonik einführte. Wir haben bei Al Battânî (S. 738) das Auftreten der Schatten auf Horizontalebenen (Kotangenten) oder Vertikalebenen (Tangenten) erwähnt. Abû'l Wafâ widmete besonders den letzteren seine Aufmerksamkeit. Er nahm h zu 60 Teilen an und berechnete die Schatten, *umbra versa* in den lateinischen Bearbeitungen, d. h. also die trigonometrischen Tangenten der Winkel φ, welche er in einer Tafel vereinigte, von welcher er auch bei anderen Aufgaben als der gnomonischen, bei der sie entstanden war, Gebrauch machte. Denn ihm ist nachträglich[1]) „die umbra eines Bogens eine Linie, welche von dem Anfangspunkte des Bogens parallel dem Sinus geführt wird in dem Intervalle zwischen diesem Anfange des Bogens und einer von dem Mittelpunkte des Kreises nach dem Ende des Bogens gezogenen Linie ... So ist die umbra die Hälfte der Tangente des doppelten Bogens, welche enthalten ist zwischen den zwei Geraden, welche vom Mittelpunkte des Kreises nach den Endpunkten des doppelten Bogens geführt werden“. Da ist, wie wir sehen, der allgemeine Begriff der Tangente ganz fertig, da ist der Name dieser Funktion vorbereitet. Und Abû'l Wafâ geht noch einen großen Schritt weiter. Er erfindet die Sekanten und Kosekanten unter dem Namen der Durchmesser des ersten und des zweiten Schattens. Er kennt bereits die Proportionen und Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha : r = \sin\alpha : \cos\alpha$$
$$\operatorname{cotg}\alpha : r = \cos\alpha : \sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}\alpha : \sec\alpha = \sin\alpha : r$$
$$\operatorname{tg}\alpha : r = r : \operatorname{cotg}\alpha$$
$$\sec\alpha = \sqrt{r^2 + \operatorname{tg}\alpha^2}$$
$$\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{r^2 + \operatorname{cotg}\alpha^2}.$$

Er wagt es endlich $r = 1$ zu setzen, indem er sagt: Also ist es klar, daß, wenn man den Radius gleich 1 setzt, das Verhältnis des Sinus eines Bogens zu dem Sinus seines Komplementes der erste Schatten und das Verhältnis des Sinus des Komplementes zu dem Sinus des Bogens der zweite Schatten ist.

Endlich berichtet ein Schriftsteller des XIII. S., Naṣîr Eddîn, der uns im 36. Kapitel begegnen wird, über verschiedene Beweise des Sinussatzes im sphärischen Dreieck, welche von Abû'l Wafâ, von Abû Naṣr[2]) und von Al Chodschandî herrühren. Wem der drei ziemlich gleichzeitigen Gelehrten die Erfindung des Satzes angehört, ist unbekannt.

Der zweite Astronom, den wir, als an die Sternwarte im Palastgarten des Bujiden berufen, genannt haben, war Alkûhî[3]). Waid-

[1]) Hankel S. 284—285. [2]) Suter 81, Nr. 186. [3]) M. Steinschneider, *Lettere intorno ad alcuni matematici del medio evo a D. Bald. Boncompagni.* Rom 1863, pag. 31 sqq. Fihrist 40. Suter 75—76, Nr. 175.

schan ibn Rustam Abû Sahl Alkûhî führt den Beinamen, unter welchem er vorzugsweise bekannt ist, nach dem Bergland Al-Kûh in Ṭabaristân. Von ihm rühren astronomische Beobachtungen des Jahres 988 her, welche er aber in ziemlich hohem Alter angestellt haben muß. Eine Jugendschrift Alkûhîs hat nämlich auf seinen Wunsch der Sohn des Ṯâbit ibn Ḳurrah durchgesehen und verbessert und dieser, welcher den Namen Sinân[1]) führte, auch selbst für einen in der Wissenschaft des Euklid sehr bewanderten Gelehrten galt, starb schon 943, mithin 45 Jahre vor jenen Bagdader Beobachtungen. Beiläufig sei hier bemerkt, daß auch Sinâns Sohn Ibrâhîm ibn Sinân ibn Ṯâbit ibn Ḳurrah[2]) (908—946) ein geschickter Mathematiker war und einen Kommentar zum I. Buche der Kegelschnitte sowie selbständige Abhandlungen über Berührungsaufgaben schrieb. Alkûhîs wichtigste geometrische Leistungen, welche bekannt sind, liegen auf einem Gebiete, welches durch Griechen, besonders durch Archimed und durch Apollonius von Pergä bereits urbar gemacht, doch erst von den Arabern gründlich und erfolgreich bebaut worden ist: auf dem Gebiete der Lösung solcher geometrischen Aufgaben, die analytisch behandelt zu Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade führen.

So kennen wir von Alkûhî einen Satz, der sich auf die Dreiteilung des Winkels bezieht[3]). So kennen wir von ihm eine Auflösung dreier zusammengehöriger Aufgaben[4]): 1. einen Kugelabschnitt zu finden, der einem gegebenen Kugelabschnitte inhaltsgleich, einem anderen ähnlich sei; 2. einen Kugelabschnitt zu finden, der mit einem gegebenen Kugelabschnitte gleiche gekrümmte Oberfläche besitze und einem anderen gegebenen Kugelabschnitte ähnlich sei; 3. einen Kugelabschnitt zu finden, der zu zwei gegebenen Kugelabschnitten in dem Zusammenhang stehe, daß er denselben Inhalt wie der eine, eine gleich große gekrümmte Oberfläche wie der andere besitze. Von diesen Aufgaben kommen die beiden ersten im II. Buche von Archimeds Schrift über Kugel und Zylinder im Satze 6 und 7 vor, während die dritte und schwierigste von Alkûhîs eigener Erfindung ist. Er löst sie mit Hilfe einer gleichseitigen Hyperbel und einer Parabel, deren Durchschnittspunkte die Unbekannte ausmessen lassen. Er fügt auch eine strenge Erörterung der Bedingungen bei, unter welchen allein die Aufgabe lösbar ist, also das, was die Griechen den Diorismos nannten, und was die Nachahmer der Griechen im allgemeinen — die Araber nicht ausgeschlossen — keineswegs mit gleicher Regel-

[1]) Suter 51—52, Nr. 108. [2]) Ebenda 53—54, Nr. 113. [3]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* (ed. Woepcke) pag. 118. [4]) Ebenda pag. 103—114.

mäßigkeit zu beachten pflegten. Diesen Leistungen Alkûhîs gegenüber wissen wir endlich[1]), daß es ihm nicht gelang eine Aufgabe zu bewältigen, welche auf die Gleichung

$$x^3 + 13\frac{1}{2}x + 5 = 10x^2$$

führte.

Der dritte Name, welchen wir nannten, war Aṣ-Sâgânî, der aus Ṣâgân in Chorasan Herstammende[2]). Aḥmed ibn Muḥammed Aṣ-Ṣâgânî Abû Ḥamid al Usturlabi d. h. auch der Verfertiger von Astrolabien genannt, starb 990. Er war, wie der zweite Beiname zu folgern gestattet, besonders geschickt in der Anfertigung jener astronomischen Winkelmessungsvorrichtungen, welche den Übergang von der Dioptra des Heron zu dem modernen Theodolit bilden. Von mathematischen Leistungen ist uns nur ein Satz über Kreissegmente bekannt[3]), welcher mit der Dreiteilung des Winkels in einigem Zusammenhange steht.

Die Sätze des Ṯâbit ibn Kurrah, des Alkûhî, des Aṣ-Ṣâgânî, welche auf Winkeldreiteilung sich beziehen, stehen insgesamt in einer größeren Abhandlung über den gleichen Gegenstand[4]), welche Abû Saʿîd Aḥmed ibn Muḥammed ibn ʿAbd Al-Dschâlib As-Sidschzî verfaßt hat, ein Schriftsteller, der gewöhnlich unter seinem Heimatsnamen Alsidschzî, mitunter aber auch statt dessen als Alsindschârî genannt zu werden pflegt[5]), und welcher etwa 30 Jahre vor der Abfassung jener Abhandlung in Schîrâs eine mathematische Handschrift niederschrieb, die das Datum 972 tragend der Pariser Bibliothek angehört. Die Aufgabe der Winkeldreiteilung wird durch Alsidschzî zunächst auf einen Satz zurückgeführt, der mit den anderen, welche er der Reihe nach unter den Namen ihrer Erfinder herzählt, zwar nicht übereinstimmt, aber doch zu ihrer aller Beweisen ausreicht. Der Peripheriewinkel M (Fig. 102) sei nämlich der dritte Teil des Zentriwinkels DCK, wenn $DE \times EC + EC^2 = CD^2$. Weil nämlich $CD = CA$, so sei $CD^2 = CA^2 = CE^2 + AE \times EK = CE^2 + DE \times EM$. Nun war E so gewählt, daß $CD^2 = CE^2 + DE \times EC$, folglich muß $EM = EC$ sein. In dem gleichschenkligen Dreiecke CEM sind demnach je

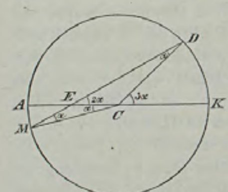


Fig. 102.

[1]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* (ed. Woepcke) pag. 54. [2]) Hankel S. 243. Suter 65, Nr. 143. [3]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 119. [4]) Ebenda pag. 117—125. [5]) Hankel S. 246, Anmerkung **. Suter 80—81, Nr. 185.

zwei Winkel $= \alpha$, und der Außenwinkel DEC dieses Dreiecks ist $= 2\alpha$. Der Winkel bei D ist wegen der Gleichschenkligkeit von DCM wieder $= \alpha$ und der Winkel $DCK = 3\alpha$ als Außenwinkel des Dreiecks CDE. Die erste Aufgabe der Winkeldreiteilung ist daher auf die zweite zurückgeführt, einen Punkt E von der gewünschten Eigenschaft zu finden. Die Alten, sagt Alsidschzî, lösten diese mittels Bewegungsgeometrie[1]); er selbst tut es, indem er mit dem der Figur schon angehörenden Kreis eine gleichseitige Hyperbel in Verbindung setzt, welche durch C hindurchgeht und den Kreishalbmesser als Halbachse besitzt. Er beruft sich dabei ausdrücklich auf einen Satz (den 53sten) des I. Buches der Kegelschnitte des Apollonius. Eine in Leiden befindliche Handschrift enthält ferner eine Abhandlung Alsidschzîs, welche mit der Zeichnung von Kegelschnitten sich beschäftigt[2]). Andere geometrische Abhandlungen Alsidschzîs beziehen sich endlich der Hauptsache nach auf Durchschnitte von Kreisen mit Kegelschnitten[3]), welche letztere demnach ein Lieblingsgegenstand der Untersuchungen des Verfassers gewesen sein müssen.

35. Kapitel.

Zahlentheoretiker, Rechner, geometrische Algebraiker von 950 etwa bis 1100.

Ganz anderer Richtung gehören die Arbeiten einiger Gelehrten der gleichen, wohl auch noch etwas früherer Zeit an, von welchen wir jetzt reden wollen. An deren Spitze steht der anonyme Verfasser einer Abhandlung, welche, wie wir am Schlusse des vorigen Kapitels gesagt haben, Alsidschzî 972 abschrieb. Die Abhandlung ist durchaus zahlentheoretischen Inhaltes und hat es hauptsächlich mit der Bildung rationaler rechtwinkliger Dreiecke zu tun[4]). Primitive Dreiecke, deren Seiten teilerfremd zueinander sind, werden

[1]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 120. Aus dieser Stelle stammt die Kenntnis des Wortes Bewegungsgeometrie. [2]) *Journal Asiatique* für Februar und März 1855 pag. 222. Woepcke hat diese Abhandlung Alsidschzîs, sowie zwei andere ähnlichen Inhalts, d. h. gleichfalls über Kegelschnittzirkel, von Alkûhî und von Muḥammed ibn Hosein in den *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque nationale* XVII zur Veröffentlichung gebracht. Vgl. A. von Braunmühl, Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven in dem Katalog der Mathematischen Ausstellung zu Nürnberg 1892. [3]) *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque du roi* XIII, 136—145. [4]) Woepcke, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise* in den *Atti dell' Accademia Pontificia de nuovi Lincei* 1861, T. XIV, pag. 211—227 und 241—269.

dabei von abgeleiteten unterschieden. Im primitiven Dreiecke müsse, so wird behauptet, die Hypotenuse immer ungerad und Summe zweier Quadrate sein. Die Ungeradheit wird noch näher dahin bezeichnet, daß die Hypotenuse stets von der Form $12m+1$ oder $12m+5$ sei. Die Formen, denen Quadratzahlen und Summen von Quadratzahlen angehören können, mit anderen Worten ein Teil der Lehre von den quadratischen Resten, werden erörtert. Die Aufgabe, welche von nun an der Geschichte der Arithmetik erhalten bleibt: ein Quadrat zu finden, welches um eine gegebene Zahl vergrößert oder verkleinert wieder Quadratzahlen gibt, wird gestellt und gelöst. Das dürften die wichtigsten Sätze dieses Bruchstückes sein, dessen Anfang leider verloren gegangen ist und mit ihm der Name des arabischen Verfassers. Ein Araber war er unzweifelhaft, wie aus einer Stelle hervorgeht, in welcher er sich selbst als den Erfinder preist, aber nicht ohne hinzuzufügen: der Ruhm davon gehört Gott allein, ein geradezu kennzeichnender Ausdruck, dessen nur Araber sich zu bedienen pflegten. Vielleicht kann man, wenn auch nicht mit gleicher Bestimmtheit behaupten, der Verfasser habe am Studium des Diophant sich gebildet. Bei diesem Schriftsteller nämlich ist, wie mit Recht betont worden ist[1]), die erste Quelle jener Aufgabe von den drei in arithmetischer Progression stehenden Quadratzahlen, ist zugleich eine Auflösung mit Hilfe rationaler rechtwinkliger Dreiecke zu finden[2]).

Abû Maḥmûd Alchodschandî aus der Stadt Chodschanda in Chorasan, der uns (S. 748) als Trigonometer bekannt geworden ist, war im Jahre 992 noch am Leben, da uns eine von ihm herrührende astronomische Beobachtung aus diesem Jahre bekannt ist[3]). Von ihm rührt ein Beweis des merkwürdigen zahlentheoretischen Satzes her, daß die Summe zweier Würfelzahlen nicht wieder eine Würfelzahl sein könne, daß $x^3+y^3=z^3$ rational unlösbar sei. Leider kennen wir den Beweis nicht. Es wird uns nur gesagt, daß derselbe mangelhaft gewesen sei, ebenso wie Untersuchungen des gleichen Verfassers über rationale rechtwinklige Dreiecke.

Der Berichterstatter ist der Schaich Abû Dschaʿfar Muḥammed ibn Alḥusain, welcher nach dem Tode Alchodschandîs — denn es ist von ihm mit dem Zusatze „Gott sei ihm barmherzig" die Rede — seine eigene Abhandlung über rationale rechtwinklige Dreiecke ver-

[1]) Woepcke l. c. S. 252. [2]) Diophant (Tannery) III, 19, S. 182 und V, 8, S. 330. [3]) Woepcke, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise* in den *Atti dell' Accademia Pontificia de nuovi Lincei* 1861, XIV, 301—302. Suter 74, Nr. 173.

öffentlicht hat[1]), in welcher er übrigens nicht sehr weit über den anonymen Arithmetiker, mit welchem wir es eben erst zu tun hatten, hinausgeht, in mancher Beziehung sogar hinter ihm zurückbleibt. Auch diese Abhandlung ist vermutlich von Asidschzîs Hand abgeschrieben[2]), doch müßte, wenn die verschiedenen Jahreszahlen, die uns berichtet sind, namentlich die der astronomischen Beobachtung Alchodschandîs, welche doch seinem Tode beziehungsweise der Abfassung der erst nach seinem Tode vollendeten Abhandlung des Ibn Alḥusain vorangegangen sein müßte, auf Richtigkeit Anspruch erheben, ein weiter Zwischenraum von mehr als 20 Jahren die in einem Bande vereinigten Abschriften aus derselben Feder trennen, deren eine 972 datiert ist, die andere erst später als 992 entstanden sein könnte. Wenn wir sagten, daß Ibn Alḥusain nicht selten hinter dem Anonymus zurückbleibt, so bezieht sich dieses auf einige offenkundige Fehler, die bemerkt worden sind, wo er höchst wahrscheinlich eine Vorlage, nach welcher er arbeitete, nicht verstanden hatte[3]). Sollte, fügen wir fragend bei, diese Vorlage die uns unbekannte Schrift Alchodschandîs über rationale rechtwinklige Dreiecke gewesen sein, an welcher das nach Ibn Alḥusains Meinung Mangelhafte eben darin zu suchen wäre, daß der Tadler es nicht richtig auffaßte? Sollte gerade die Schrift des Alchodschandî nach Verlust der Anfangsparagraphe als anonymer Traktat übrig geblieben sein? Mehr als diese Fragen können wir nicht äußern, doch scheinen sie nicht schlechterdings verneint werden zu können. Ibn Alḥusain unterscheidet, wie der Anonymus, primitive und abgeleitete Dreiecke, benutzt aber andere Wörter, um diese Unterscheidung auszusprechen. Bei dem Anonymus heißt das primitive Dreieck aṣl, bei Ibn Alḥusain awwalî; das abgeleitete Dreieck heißt dort farʿ oder mafrûʿ, hier tâbiʿ[4]). Ibn Alḥusain gibt ausdrücklich als Zweck der ganzen Untersuchung die Lösung der Aufgabe an: ein Quadrat zu finden, welches um die gegebene Zahl vergrößert oder verkleinert wieder ein Quadrat werde[5]). Es ist bemerkenswert, daß eine geometrische Erläuterung der gegebenen Auflösung von ähnlichen Grundgedanken Gebrauch macht, wie wir sie bei Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî verfolgen konnten, da wo es um die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten sich handelte. Es ist weiter bemerkenswert, daß Ibn Alḥusain bei dieser Auseinandersetzung sich ausdrücklich auf den 7. Satz des II. Buches der euklidischen Ele-

[1]) Woepcke l. c. 301—324 und 343—356. Suter 80, Nr. 183 und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 168. [2]) Woepcke l. c. 324. [3]) Woepckes Bemerkungen pag. 307, 317, 323. [4]) Woepcke, *Recherches* etc. pag. 320. [5]) Ebenda pag. 350 flgg.

mente bezieht. Bei der den Arabern am Schlusse des X. S. ganz allgemeinen Verehrung des Werkes ist freilich mit einer gelegentlichen Anführung desselben nichts weniger als ein Ursprungszeugnis für dasjenige, um dessenwillen Euklid beigezogen ist, verbunden; aber wenn wir die Beweisführung selbst ansehen, so kann die mehrfach benutzte Figur des Gnomon uns mindestens zweifelhaft lassen, ob wir für den Ursprung nach Indien, ob wir nach Griechenland zurückschauen, ob wir an Abû'l Wafâs dem Augenschein genügende Konstruktionen denken sollen, um so mehr als, wie wir schon bemerkten, ähnliche Aufgaben bei Diophant, bisher aber nicht in indischen Schriften aufgefunden worden sind und Abu'l Wafâ (S. 742) der Erläuterung der diophantischen Schriften seine beste Kraft zugewandt zu haben scheint. Die Katheten $AB = c_1$ und $BC = c_2$ eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 103), dessen Hypotenuse h heißen soll, werden aneinander gesetzt und über ihrer Summe, aber auch über der größeren c_1 wird ein Quadrat beschrieben. Die beiden freiliegenden Seiten BE, DE des letzteren Quadrates werden bis zum Durchschnitte mit den Seiten des Quadrates über der Summe $AC = c_1 + c_2$ verlängert.

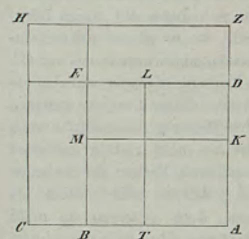


Fig. 103.

Aus dieser Konstruktion geht die Zerfällung des großen Quadrates in folgende 4 Teile hervor: AE (das Quadrat von c_1), EH (das Quadrat von c_2) und CE sowie ZE (die beiden Rechtecke zwischen c_1 und c_2). Ist nun $2c_1c_2 = k$, so folgt wegen $c_1^2 + c_2^2 = h^2$, daß $(c_1 + c_2)^2 = h^2 + k$ sei. Aber auch $h^2 - k$ ist ein Quadrat. Schneidet man nämlich von B gegen A hin und von D ebenfalls gegen A hin Stücke $BT = DK = c_2$ ab, so ist das Quadrat AE zerlegt in das Quadrat KT und die beiden Rechtecke DM, BL, von welchen das Quadrat LM abzuziehen ist. Mit anderen Worten, es zeigt sich

$$AE + LM - 2BL = KT$$

oder

$$c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 = (c_1 - c_2)^2$$

oder

$$(c_1 - c_2)^2 = (c_1^2 + c_2^2) - 2c_1c_2 = h^2 - k$$

und man findet also Zahlen, welche die verlangte Eigenschaft besitzen in den Quadraten der Summe der beiden Katheten, der Hypotenuse und der Differenz der beiden Katheten eines rechtwinkligen

Dreiecks, während das doppelte Produkt der beiden Katheten die Zahl ist, um welche das erstere Quadrat größer, das letztere kleiner als das mittlere ist. Entsprechend heißt es bei Diophant: „In jedem rechtwinkligen Dreieck bleibt aber das Quadrat der Hypotenuse auch dann noch ein Quadrat, wenn man das doppelte Produkt der Katheten davon abzieht oder dazu addiert"[1]). Nun gibt es Methoden aus zwei beliebigen Zahlen a und b ein rationales rechtwinkliges Dreieck entstehen zu lassen, und solche Methoden werden in der anonymen Abhandlung, werden von Ibn Alḥusain gelehrt; z. B.

$$c_1 = \frac{a+b}{2}, \quad c_2 = \frac{ab}{a-b}, \quad h = \frac{a^2+b^2}{2(a-b)}.$$

Setzt man diese Werte ein, so wird $k = 2c_1c_2 = \frac{(a+b)ab}{a-b}$ und

$$\left(\frac{a+b}{2} \pm \frac{ab}{a-b}\right)^2 = \left[\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}\right]^2 \pm \frac{(a+b)ab}{a-b}$$

oder indem alle Seiten mit $2(a-b)$ vervielfacht werden

$$c_1 = a^2 - b^2, \quad c_2 = 2ab, \quad h = a^2 + b^2$$

und die beiden ganzzahligen Endgleichungen

$$(a^2 - b^2 + 2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 + 4ab(a^2 - b^2)$$

nebst

$$(a^2 - b^2 - 2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 - 4ab(a^2 - b^2).$$

Beide Abhandlungen stimmen noch in einer weiteren Beziehung überein. Sie enthalten Zahlentabellen, gebildet infolge von Versuchen — freilich von auf eine theoretische Betrachtung gestützten Versuchen — welche der zunächst in Behandlung tretenden Aufgabe rationale rechtwinklige Dreiecke zu finden genügen. In keinem der bisherigen Abschnitte dieses Bandes haben wir das Vorhandensein genau solcher Tabellen erwähnen können, wenn wir auch auf manche eine Vergleichung gestattende Dinge stießen. Vergleichen läßt sich schon die altägyptische Zerlegungstabelle der Brüche mit ungeradem Nenner und dem Zähler 2 als Summe von Stammbrüchen; vergleichen lassen sich die Tabellen der Quadrat- und Kubikwurzeln in Senkereh, vergleichen die Einmaleinstafel bei Nikomachus, die kleine Liste der Diametralzahlen bei Theon von Smyrna; und auch bei den Indern fehlt es nicht an nächstverwandten Vergleichungsstücken, denn die den Çulvasûtras entlehnten Beispiele rechtwinkliger Dreiecke (S. 638) sind vielleicht ein Auszug aus einer solchen Tabelle, von deren Vorhandensein wir sonst nichts wissen. Das sind Anhaltspunkte, welche

[1]) Diophant (Tannery) pag. 182, (Wertheim) S. 110 und fast gleichlautend (Tannery) pag. 326, (Wertheim) S. 203.

man, wenn es einst gelingen soll auf Grundlage reichhaltiger Quellenkunde die Frage nach dem ersten Ursprunge dieser arabischen Untersuchungen zur Entscheidung zu bringen, nicht wird übersehen dürfen. Endlich gehört ebendahin das, was wir eine Art von Kenntnis quadratischer Reste genannt haben, und was uns (S. 632) bei Indern schon bekannt geworden ist, was von einem Araber ausdrücklich als indisch benannt worden ist.

Wir meinen den berühmten Arzt und Naturforscher Ibn Sînâ, gewöhnlicher in abendländischer Umformung Avicenna genannt. Wir haben (S. 730) über die Erziehung dieses merkwürdigen Mannes gesprochen und über den Rechenunterricht, welchen er zwischen 990 und 995 von einem Gemüsehändler erhielt. Unter den zahllosen bändereichen Schriften, welche Avicenna trotz seines häufig wechselnden Aufenthaltes, trotz der Staatsgeschäfte, welche er als Wezîr des Emirs Schams ed Daula zu Hamadân auszuüben hatte, trotz seiner großartigen ärztlichen Tätigkeit verfaßt hat, befindet sich eine handschriftlich in Leiden aufbewahrte spekulative Arithmetik[1]), d. h. also nach unserer früheren Erläuterung dieses Wortes eine Art Zahlentheorie nach griechischem Muster. Zwei Stellen derselben sind allein in Übersetzung veröffentlicht, beide dem III. Buche angehörend. „Will man nach der indischen Methode“, besagt die eine Stelle, „Quadratzahlen auf ihre Richtigkeit untersuchen, so ist unvermeidlich 1, 4, 7 oder 9. Dem 1 entspricht 1 oder 8; dem 4 entspricht 2 oder 7; dem 7 entspricht 4 oder 5; dem 9 entspricht 3, 6 oder 9.“ Die andere Stelle fügt dann hinzu: „Eine Eigenschaft der Kubikzahlen besteht darin, daß ihre Untersuchung nach der indischen Rechenkunst, ich meine die Probe, von welcher diese Rechenkunst Gebrauch macht, immer 1, 8 oder 9 ist. Ist sie 1, so sind die Einheiten der zum Kubus erhobenen Zahl 1, 4 oder 7; ist sie 8, so sind sie 8, 2 oder 5; ist sie 9, so sind sie 3, 6 oder 9.“ Beide an sich nicht ganz leicht verständliche Stellen sind gewiß richtig dahin erklärt worden, es handle sich in ihnen um die Neunerprobe bei Potenzerhebungen, und man hat sie dementsprechend verwertet, um in Übereinstimmung mit der Aussage des Maximus Planudes (S. 611) aber ohne unmittelbare Bestätigung durch einen der indischen Schriftsteller, welche uns bekannt sind, eben diese Probe als

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, 1. Halbjahr pag. 501—504. H. Eneström (*Biblioth. Mathem.* 3. Folge VII, 81) macht darauf aufmerksam, daß Avicenna auch als Verfasser eines zweiten arithmetischen Traktates bezeichnet wird, dessen Anfang in französischer Sprache im *Dictionnaire des sciences mathématiques* von A. S. de Montferrier I, 141—143 (Paris 1835) abgedruckt ist.

indisch zu erweisen. Man kann auch auf eben diese Stellen sich beziehen, um die Kenntnis quadratischer und kubischer Reste bei den Indern zu bestätigen. Offenbar sagt nämlich Avicenna zuerst nichts anderes, als was wir in modernen Zeichen

$$(9n \pm 1)^2 \equiv 1, \quad (9n \pm 2)^2 \equiv 4,$$
$$(9n \pm 3)^2 \equiv (9n + 9)^2 \equiv 9, \quad (9n \pm 4)^2 \equiv 7$$

immer für den Modulus 9 schreiben würden; und in der zweiten Stelle sind nach dem gleichen Modulus 9 die Kongruenzen enthalten

$$(9n + 1)^3 \equiv (9n + 4)^3 \equiv (9n + 7)^3 \equiv 1,$$
$$(9n + 8)^3 \equiv (9n + 2)^3 \equiv (9n + 5)^3 \equiv 8,$$
$$(9n + 3)^3 \equiv (9n + 6)^3 \equiv (9n + 9)^3 \equiv 9.$$

Zurückverweisung nach Indien wird uns auch bei Albîrûnî gewiß nicht in Erstaunen setzen, der ein Zeitgenosse des Avicenna lange Reisen in Indien, wie wir wissen (S. 710), gemacht hat. Albîrûnî nimmt gegen die bisher besprochenen Persönlichkeiten insgesamt eine Ausnahmestellung ein. Er gehörte nämlich nicht zu den gelehrten Hofkreisen von Bagdad, sondern ruhte in Gazna von seinen Reisen, am Hofe des kunstsinnigen Fürsten Maḥmûd des Gaznawiden, der an Machtfülle wie an Fürsorge für die Wissenschaften mit den Herrschern von Bagdad wetteiferte. Albîrûnî hat in seiner Chronologie ganz gelegentlich die Summe der geometrischen Schachfelderprogression, die mit 1 beginnend auf jedem folgenden Felde Verdopplung vorschreibt, angegeben[1]) als Beispiel, wie man eine und dieselbe Zahl, um jeden Irrtum unmöglich zu machen, in drei verschiedenen Arten niederschreiben könne: mit indischen Ziffern, umgerechnet in das Sexagesimalsystem und durch die ḥurûf aldschummal oder (S. 709) Buchstaben mit Zahlenwert. Jene Zahl sei $(((16^2)^2)^2)^2 - 1$ und betrage 18 446 744 073 709 551 619. Man finde sie nach folgenden beiden Regeln. Erstens: Das Quadrat der Zahl eines von den 64 Feldern ist gleich der Zahl des Feldes, welches von dem vorgenannten eben so weit entfernt ist als jenes von dem ersten. Ist also 16 die Zahl des 5. Feldes, so muß $16^2 = 256$ die Zahl des 9. Feldes sein wegen $9 - 5 = 5 - 1$. Zweitens: Die um 1 verringerte Zahl eines Feldes ist die Summe der Zahlen der vorhergehenden Felder. Wenn 32 die Zahl des 6. Feldes ist, so muß 31 die Summe der Zahlen der 5 früheren Felder sein, oder $31 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$. In einem anderen

[1]) Ed. Sachau, Algebraisches über das Schach bei Bîrûnî. Zeitschr. der deutsch. morgenl. Gesellsch. (1876) XXIX, 148—156.

Werke, dem Buche der Ziffern, kommt Albîrûnî auf den gleichen Gegenstand zu reden und lehrt die Berechnung nach einem Kunstgriffe, der sich an die obigen beiden Regeln anschließt, welche auf den Fall des ganzen Schachbrettes angewandt nichts anderes besagen als man solle die Zahl eines gedachten 65. Feldes berechnen und von ihr 1 abziehen. Wenn Glieder einer geometrischen Reihe a, ae, ae^2, ... ae^n vorliegen, so kann die Gliederzahl gerad oder ungerad sein, je nachdem n ungerad oder gerad ist. Im ersteren Falle ist das Produkt der äußersten Glieder $a \times ae^{2m+1}$ gleich dem Produkte zweier mittleren Glieder $ae^m \times ae^{m+1}$; im zweiten Falle ist jenes Produkt der äußersten Glieder $a \times ae^{2m}$ gleich dem Produkte eines Mittelgliedes in sich selbst $(ae^m)^2$. Nennen wir nun die Zahlen, welche jedem Schachbrettfelde entsprechen, durch die das Feld bezeichnende in römischen Ziffern dargestellte Zahl, so liefern uns die Felderzahlen I, II, III, ... LXV eine Reihe von ungerader Gliederzahl und demgemäß I $\times$ LXV = (XXXIII)^2. Aber die Zahl I ist 1, vervielfacht also nicht, und somit ist LXV = (XXXIII)^2 und XXXIII heißt das erste Mittel. Ebenso findet man XXXIII = (XVII)^2 und XVII heißt das zweite Mittel. Ferner ist XVII = (IX)^2, IX = (V)^2 und IX und V heißen drittes und viertes Mittel. Auch ein fünftes Mittel III, ein sechstes II wird durch V = (III)^2, III = (II)^2 gefunden und nun gerechnet. Das sechste Mittel II ist 2, das fünfte III ist $2^2 = 4$; das vierte V wird $4^2 = 16$, das dritte IX demnach $16^2 = 256$; weiter wird das zweite Mittel XVII notwendig $256^2 = 65\,536$ und XXXIII oder das erste Mittel $65\,536^2 = 4\,294\,967\,296$. Diese Zahl endlich quadriert gibt LXV, wovon 1 abgezogen die früher erwähnte Summe liefert. Ohne diesem Kunstgriff jeden Wert absprechen zu wollen, sind wir doch nicht imstande Folgerungen daraus zu ziehen, denn eine genaue Bekanntschaft mit den Gesetzen der geometrischen Reihe wird niemand den Griechen so wenig wie den Indern absprechen können[1]). Ob das Buch der Ziffern, in welchem Albîrûnî den Kunstgriff gelehrt hat, jenes Lehrbuch der Rechenkunst ist, welches wir als von ihm verfaßt gelegentlich (S. 715) erwähnten, können wir nur vermutungsweise aussprechen.

Auch in der Geometrie war Albîrûnî tätig und zwar auf dem Gebiete, welches, wie wir an mehreren Beispielen schon gesehen haben, die Araber um das Jahr 1000 so vielfach beschäftigt hat, auf dem ebensowohl algebraisch als geometrisch zu nennenden Ge-

[1]) S. Günther, Zeitschr. Math. Phys. XXI. Historisch-literar. Abteilung S. 57—61 findet in der Analogie zwischen Albîrûnîs Kunstgriff und dem Verfahren in Archimeds Sandrechnung eine bedeutsame Hinweisung.

biete der Auflösung solcher Aufgaben, für welche der Kreis und die Gerade nicht ausreichen, mit Hilfe von Kegelschnitten. Ob freilich Albîrûnî die Auflösungen der durch ihn gestellten Aufgaben selbst kannte, ist uns unmittelbar nicht berichtet; die Tatsache der Aufgabenstellung aber, eine Sitte, welche jedem Leser des Archimed, der sie auch ausübte, wohl bekannt sein mußte, läßt darauf schließen. Albîrûnîs Aufgaben haben die Dreiteilung des Winkels zum Gegenstande[1]).

Abû'l Dschûd, mit seinem ganzen Namen Abû'l Dschûd Muḥammed ibn Allaiṯ, ein tüchtiger Geometer aus derselben Zeit, hat sich erfolgreich mit der Auflösung der Albîrûnîschen Aufgaben beschäftigt. Durch den Durchschnitt einer Parabel mit einer gleichseitigen Hyperbel hat er die Aufgabe gelöst[2]) von einem Punkte A außerhalb einer Strecke BC eine Verbindungslinie AD nach einem derartigen Punkte D dieser Strecke zu ziehen, daß $AB \times BC + BD^2 = BC^2$ werde. Ein anderes Mal löste er die Aufgabe[3]), an welcher Alkûhî (S. 750) sich vergebens versucht hatte, und welche als Gleichung geschrieben $x^3 + 13\frac{1}{2}x + 5 = 10x^2$ heißt. Wieder eine andere Leistung Abû'l Dschûds bezieht sich auf die Einzeichnung des regelmäßigen Neunecks in einen Kreis[4]). Albîrûnî hatte im 7. Satze des 7. Kapitels des IV. Buches seiner Geometrie, wie uns berichtet wird, den Satz ausgesprochen, die Konstruktion des Neunecks beruhe auf einer Gleichung zwischen einer Unbekannten einerseits und deren Würfel und einer Zahl andrerseits und hatte den Nachweis dieses Satzes verlangt. Abû'l Dschûd lieferte denselben wie folgt. Es sei (Fig. 104) AB die gesuchte Neunecksseite und das

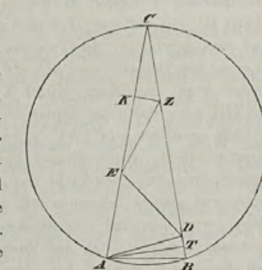


Fig. 104.

Dreieck gleichschenklig über ihr mit der Spitze auf dem Kreisumfang beschrieben. Dann sei $AB = AD = DE = EZ$ aufgetragen und $AT \perp BC$, $ZK \perp AC$ gezogen. Der Winkel bei C ist $\frac{360^0}{18} = 20^0$, die Winkel bei B und A je $= 80^0$. Daraus folgt

$$\sphericalangle DAE = 80^0 - 20^0 = 60^0,$$

[1]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 114 und 119. [2]) Ebenda pag. 114—115. Suter 97, Nr. 215. [3]) Ebenda pag. 54—57. [4]) Ebenda pag. 125—126.

$\sphericalangle DEA$ ebenso groß, also auch $\sphericalangle ADE = 60^0$ und das Dreieck ADE ist gleichseitig. In dem ferneren gleichschenkligen Dreiecke DEZ ist $\sphericalangle EDZ = 180^0 - 60^0 - 80^0 = 40^0$, $\sphericalangle EZD$ ebenso groß und $\sphericalangle DEZ = 180^0 - 2 \cdot 40^0 = 100^0$. Folglich

$$\sphericalangle ZEC = 180^0 - 100^0 - 60^0 = 20^0 = \sphericalangle ZCE,$$

und somit auch Dreieck CZE gleichschenklig, d. h.

$$CZ = ZE = ED = DA = AB = AE.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CZK und CAT folgt

$$CZ : CK = CA : CT,$$

daraus $CZ : 2CK = CA : 2CT$ oder $AB : CE = CA : (CD + CB)$ und auch $AB : (AB + CE) = CA : (CA + CD + CB)$ oder

$$AB : AC = AC : (CD + 2AC).$$

Nun setzt Abû'l Dschûd $AC = BC$ als Einheit, AB als Unbekannte, wofür wir x schreiben und somit folgt aus dem letztgeschriebenen Verhältnisse $1 = x(2 + CD)$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und BDA weiß man aber ferner $AC : AB = AB : BD$ oder $BD = x^2$. Folglich ist $CD = BC - BD = 1 - x^2$, und die Gleichung, aus welcher x zu ermitteln bleibt, nimmt die Gestalt

$$1 = x(3 - x^2)$$

beziehungsweise schließlich $x^3 + 1 = 3x$ an, wie Albîrûnî behauptet hatte. Diese Gewandtheit eine geometrische Aufgabe in eine Gleichung umzusetzen verleiht endlich einer Angabe volle Glaubwürdigkeit, es habe Abû'l Dschûd „eine besondere Abhandlung über die Aufzählung von Gleichungsformen verfaßt und über die Art und Weise die meisten derselben auf Kegelschnitte zurückzuführen, freilich ohne vollständige Erörterung ihrer Fälle und ohne Scheidung der möglichen Aufgaben von den unmöglichen, sondern nur so, daß er die Entwicklungen gab, zu welchen er durch Betrachtung besonderer zu jenen Formen gehörender Aufgaben geführt wurde"[1]).

Wir werden sehen, wie es einem Nachfolger Abû'l Dschûds um 1080 gelang das Kapitel einer geometrischen Algebra zum Abschlusse zu bringen, müssen aber vorher wieder zum Beginne des XI. S. zurückkehren, um zweier Schriftsteller zu gedenken, welche dem rechnenden und dem rein algebraischen Teile der Mathematik vorzugsweise ihre Aufmerksamkeit zuwandten, Alnasawî und Alkarchî.

Abû'l Hasan 'Alî ibn Ahmed Alnasawî war aus Nasa in der Landschaft Chorasan. Wir sind in die Lage versetzt seine Lebens-

[1]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 82.

zeit ziemlich genau angeben zu können, indem wir wissen[1]), daß er für die Finanzbeamten des Bujiden Madschd Addaulah, welcher 997—1029 regierte, ein Rechenbuch in persischer Sprache herausgab, und daß er auf Wunsch von dessen Nachfolger, also wohl kurz nach 1030, eine zweite neue Bearbeitung in arabischer Sprache vollendete, welche letztere er mutmaßlich aus dem Grunde, weil er den Fürsten damit zufrieden stellen wollte, den befriedigenden Traktat nannte. Wir erinnern uns, daß um 820 das erste arabische Lehrbuch der Rechenkunst, von welchem wir Kenntnis haben, durch Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî verfaßt worden ist, daß dasselbe sich ungemein folgewichtig erwies. Andere Schriften ähnlicher Natur werden uns da und dort genannt, zum Teil auch in Alnasawis Vorrede.

Alkindî[2]), der philosophischste Kopf seiner Zeit, gleich berühmt als Mediziner wie als Astronom und Mathematiker, ein Günstling der Chalifen Almamûn und Almû'tasim, der bis in das letzte Viertel des IX. S. gelebt haben muß, weil er eine Übersetzung des Kusta ibn Lûkâ aus dem Griechischen des Hypsikles zu verbessern den Auftrag hatte, hat, wie Alnasawî uns erzählt, ein Rechenbuch verfaßt, welches diesem jedoch einen konfusen und übermäßig breiten Eindruck machte. Dasselbe Urteil fällt er über ein Rechenbuch Alantâkis[3]), des Antiochiers, welcher 987 gestorben ist. Alkalwadânî[4]) am Ende des X. S. wird als zu schwierig bezeichnet; er gebe Regeln, welche nur für solche Personen notwendig seien, welche mit den feinsten Aufgaben sich beschäftigen, und aus der gleichen Zeit nennt Alnasawî noch verschiedene andere Verfasser von Lehrbüchern der Rechenkunst, einen Abû Hanîfa[5]), einen Kûschjâr[6]), welchen er bei allem Lobe doch diesen oder jenen kleinen Tadel nicht erspart. Die Schriften dieser Vorgänger sind, wenn überhaupt noch vorhanden, jedenfalls nicht in Übersetzungen veröffentlicht, und nur den befriedigenden Traktat Alnasawis kennen wir aus einem kurzen Auszuge, der kaum mehr als Überschriften der einzelnen Kapitel enthält[7]).

Wir entnehmen ihm, daß Verdoppelung und Halbierung als besondere Rechnungsarten gelehrt wurden. Wir entnehmen ihm die Multiplikation und Division „nach indischer Weise", worunter die

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, 1. Halbjahr, pag. 492. Suter 96—97, Nr. 214. [2]) Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 21 bis 22, Nr. 57, und Flügel in den Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes Bd. I, Abhandlung 2. Leipzig 1859. Suter 23—26, Nr. 45. [3]) Suter 63—64, Nr. 140. [4]) Ebenda 74, Nr. 171. [5]) Ebenda 31—32, Nr. 60. [6]) Ebenda 83—84, Nr. 192 und Steinschneider in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik III, 109. [7]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, 1. Halbjahr, pag. 496—500.

Methoden verstanden sind, die wir auch durch Maximus Planudes als indische kennen. Der Multiplikator, beziehungsweise der Divisor rückt unter dem Multiplikandus oder dem Dividendus weg von der Linken zur Rechten. Beide Operationen beginnen dort, d. h. an der höchsten Stelle, die Teilprodukte werden nach und nach addiert oder subtrahiert und die nötigen Verbesserungen und Veränderungen entsprechend angebracht, beim wirklichen Rechnen vermutlich so, daß man die unrichtige Zahl wegwischte und die richtige dafür hinschrieb, in den Beispielen des Lehrbuches so, daß die richtigen Zahlen über die unrichtigen gesetzt sind, welche dadurch selbst für vernichtet gelten. Die Zahlzeichen sind die ostarabischen. Auf diese, sagt Alnasawi, hätten die meisten Personen, welche mit der Rechenkunst sich beschäftigten, sich geeinigt, doch sei volle Übereinstimmung nicht vorhanden. Mit Bruchteilen verbundene Zahlen werden in drei Zeilen untereinander geschrieben; in der obersten Zeile stehen die Ganzen, in der zweiten der Zähler, in der dritten der Nenner des Bruches; sind keine Ganzen vorhanden, so wird, um Mißverständnissen vorzubeugen, eine Null in die oberste Zeile gesetzt. So heißt also

$$\begin{matrix}\text{٠}\\ \text{١}\\ \text{٢}\end{matrix} = \frac{1}{2};\quad \begin{matrix}\text{٠}\\ \text{١}\\ \text{١١}\end{matrix} = \frac{1}{11};\quad \begin{matrix}\text{١٣}\\ \text{١}\\ \text{٣}\end{matrix} = 13\frac{1}{3};\quad \begin{matrix}\text{١٥}\\ \text{٧}\\ \text{١٩}\end{matrix} = 15\frac{7}{19}.$$

Die Rechnungsaufgaben erstrecken sich in den drei ersten Büchern bis zur Ausziehung der Kubikwurzeln aus mit Brüchen vereinigten ganzen Zahlen. Das vierte Buch ist dem Rechnen im Sexagesimalsysteme gewidmet. Von komplementären Rechnungsverfahren keine Spur!

Abû Bekr Muḥammed ibn Alḥusain Alkarchî[1]) ist ein Schriftsteller ganz anderen Charakters. Von ihm besitzt man zwei Schriften, welche einander fortsetzen, nämlich als ersten Teil ein Rechenbuch: Al-Kâfî fîl ḥisâb, Das Genügende über das Rechnen, und als zweiten Teil eine Algebra: Al-Fachrî[2]). Der Name dieses zweiten Teils ist mutmaßlich dem einer Persönlichkeit nachgebildet, zu welcher Alkarchî in naher Beziehung gestanden zu haben scheint. Abû Gâlib war es, welcher den Beinamen Fachr al mulk, Ruhm des Reiches, führt und welcher Wezîr der Wezîre gewesen sein muß zur Zeit als die beiden Schriften verfaßt wurden, die zweite nach ihm den Titel Al-Fachrî

[1]) Suter 84—85, Nr. 193. [2]) Der Kâfî fîl ḥisâb des Alkarchî ist deutsch von Ad. Hochheim (Halle 1878—80) herausgegeben, der Fachrî auszugsweise französisch von Woepcke (Paris 1853). Unsere biographischen Notizen gründen sich vorzugsweise auf Hochheims einleitende Notizen zum I. Heft des Kâfî fîl ḥisâb.

erhielt. Dadurch ist aber die Zeit, in welcher Alkarchî schrieb, ganz genau bestimmt. Abû Gâlib nahm als Statthalter von Bagdad, wo Alkarchî lebte, die höchste Rangstufe seit 1010 oder 1011 ein. Ebenderselbe wurde, ein Beispiel orientalischen Schicksalswechsels, 1015 oder 1016 auf Befehl des Sultans hingerichtet. So bleiben nur die fünf dazwischenliegenden Jahre, in welchen Alkarchî ihm Schriften als Wezîr der Wezîre zugeeignet haben kann. Das hervorragend Wichtige an den Werken Alkarchis besteht darin, daß er teils eingestandenermaßen, teils mittelbar aus dem Inhalte zu erschließen der Hauptsache nach auch in der Rechenkunst nicht aus indischen, sondern aus griechischen Quellen geschöpft hat, so einen Gegensatz bildend gegen die Alnasawi usw., welche indische Rechenkunst lehrten und lehren wollten. Wir müssen um so mehr hier einen bewußten Gegensatz zweier Schulen, nicht bloß ein Abweichen des vereinzelten Alkarchî von der allgemeinen Gewohnheit erkennen, als, wie wir uns erinnern (S. 743), Abû'l Wafâ in der zweiten Hälfte des X. S. ein Rechenbuch verfaßt hat, in welchem die indischen Ziffern keine Anwendung fanden und Alkarchî selbst sich Schüler des uns im übrigen unbekannten Albustî nennt[1]). Freilich ist die von uns ausgesprochene Behauptung selbst nicht in aller Schärfe, sondern nur in der Beschränkung anzunehmen, welche wir ihr gegeben haben. Abû'l Wafâ, den wir zur griechischen Richtung beizuzählen die mannigfachsten Gründe haben, war, wie wir annahmen, in seiner Anschauungsgeometrie durch und durch indisch. Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî rechnete nach indischen Vorschriften, und in seinem Lehrbuche der Rechenkunst vernahmen wir griechische Anklänge (S. 717). Vollständig den gegenseitigen Einfluß auszuschließen, gelang es weder der einen noch der anderen Schule, wenn sie es überhaupt beabsichtigte. So wird uns trotz der vorwiegend griechischen Schulung Alkarchis Indisches in seinen Schriften nicht in Erstaunen setzen dürfen, vorausgesetzt, daß es in homöopathisch kleinen Mengen auftritt, und diese Voraussetzung trifft ein. Indisch müssen wir vielleicht die Neunerprobe nennen[2]), indisch das was von quadratischen Resten, wir meinen von den Endziffern, welche eine Quadratzahl besitzen kann, gesagt ist[3]), indisch ist uns die Lehre von der Regeldetri[4]). Aber damit schließt die Summe nachweisbaren indischen Ein-

[1]) Kâfî fîl ḥisâb Heft I, S. 4. Suter 57, Nr. 122 nennt zwar einen bedeutenden Gehrten Muhammed ibn Ahmed ibn Hibbân Abû Hâtim Albustî. Da aber dieser 965 starb und Alkarchî vor 1015 seinen Al-Fachrî verfaßte, so lägen etwa 50 Jahre zwischen Alkarchîs Lehrzeit und seiner schriftstellerischen Tätigkeit; möglicherweise war also sein Lehrer ein anderer Albustî. [2]) Kâfî fîl ḥisâb I, 8. [3]) Ebenda II, 13. [4]) Ebenda II, 16.

flusses ab, wenn wir nicht etwa den Ursprung von Multiplikationsmethoden[1], welche auf Zerlegung eines Faktors in Unterfaktoren oder auf Betrachtung derselben als Summe oder Differenz von Zahlen, welche eine leichte Multiplikation zulassen, hinauslaufen und welche allerdings bei den indischen Schriftstellern uns ebenso begegneten, aber einem Griechen nicht minder einfallen konnten, ausschließlich nach Indien verlegen wollen. So bedeutsam diese Dinge sind, so stellen sie doch nur einen geringfügigen Teil des Inhaltes des Kâfî fil ḥisâb uns dar, geringfügig namentlich gegen das, was mit größter Zuversicht auf griechische Quellen zurückgeführt werden muß. Da finden wir Multiplikationsmethoden, welche an die des Apollonius, des Archimed, wie sie von Pappus, von Eutokius uns berichtet werden, welche an die des Heron vielfach erinnern[2]. Da finden wir die Definition der Multiplikation selbst fast wörtlich wie bei Euklid[3]. Da finden wir wieder genau nach Euklid die Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Divisors[4], genau nach ihm eine ausführliche Proportionenlehre[5], welche gewissermaßen als theoretische Grundlage der nachher vom Standpunkte praktischen Geschäftsbedürfnisses erörterten Regeldetri vorausgeschickt ist. Da finden wir Stammbrüche und Brüche von Brüchen, wie sie bei Heron nicht zu den Seltenheiten gehören[6], und wobei, beiläufig bemerkt, zwischen jenen stummen und aussprechbaren Brüchen unterschieden wird, deren Bedeutung wir bereits (S. 718) erörtert haben. Da ist die Rechnung mit Sexagesimalbrüchen, insbesondere die Ausziehung von Quadratwurzeln aus solchen, wie sie bei Ptolemäus und bei Theon von Alexandria in Übung war[7]. Da finden wir in dem geometrischen Kapitel auf Schritt und Tritt griechische Definitionen und Sätze[8], den ptolemäischen Satz vom Sehnenviereck[9], die heronische Dreiecksformel aus den drei Seiten[10] usw. Da finden wir einzelne Wörter, welche geradezu Übersetzungen griechischer Ausdrücke sind, wie die aussprechbaren und nicht-aussprechbaren Quadratwurzeln (*ῥητόν* und *ἄλογον*)[11], wie die Grenze (*ὅρος*, lateinisch *limes*, auch *terminus*)[12] um bei Sexagesimalbrüchen die Ordnung zu bezeichnen, oder sagen wir vielleicht entsprechender um das Reihenglied anzugeben, bei welchem man stehen zu bleiben wünscht.

In diesem Lehrbuche nun, dessen Reichhaltigkeit aus unseren nur besonders für den Ursprung zeugende Dinge berücksichtigenden Notizen zur Genüge erhellt, ist von Verdoppelung und Halbierung

[1]) Kâfî fil ḥisâb I, 6 flgg. [2]) Ebenda I, 5, 6; II, 7. [3]) Ebenda I, 4. [4]) Ebenda I, 10—11. [5]) Ebenda II, 15—16. [6]) Ebenda I, 7, 14 und häufiger. [7]) Ebenda II, 10 und 15. [8]) Ebenda II, 18 flgg. [9]) Ebenda II, 26. [10]) Ebenda II, 23. [11]) Ebenda II, 12. [12]) Ebenda II, 4.

als besonderen Rechnungsarten nirgend die Rede und wird, was noch weit merkwürdiger ist, nicht ein einziges Mal von Ziffern irgendwelcher Art gesprochen. Alle und jede Zahlen, welche in dem Texte vorkommen, sind vielmehr in ganzen ausgeschriebenen Worten angegeben. Selbst die umständlichsten Rechnungen führt Alkarchi nur in dieser Weise aus, so daß eine rasche Übersicht ganz und gar nicht möglich ist, man sich vielmehr immer in die Lage eines durch das Ohr allein Lernenden versetzt fühlt. Die Frage, wie Alkarchî, ein Mann von glänzendem Scharfsinne, wie uns insbesondere sein zweites Werk beweisen wird, die indischen Rechenmethoden, deren Unkenntnis bei ihm, dem Zeitgenossen und Ortsgenossen des Alnasawî, zur Unmöglichkeit sich gestaltet, so sehr unterschätzen konnte, daß er nicht mit einem Worte ihrer erwähnte, enthält eine so schwere Anklage, daß uns eben die Notwendigkeit ihr zu begegnen, auf die oben ausgesprochene Vermutung führte. Wir glauben nicht Unkenntnis oder Unterschätzung der indischen Methoden bei einem Alkarchi annehmen zu dürfen. Wir sehen hier bewußten, grundsätzlichen Schulgegensatz, der aus Verbissenheit selbst das Vortrefflichste sich entgehen läßt, wenn es seinen Ursprungsstempel so deutlich auf der Stirne trägt, wie dieses bei den indischen Zahlzeichen der Fall war.

Ist es die Heimatszugehörigkeit gewesen, welche den einen in diese, den anderen in jene Schulrichtung bannte? Wir wissen es nicht. Vielleicht müssen wir an eine unerwartete Rückwirkung theologischer Streitigkeiten denken, an den Gegensatz von Sunniten und Schîʿiten, von Orthodoxen und Muʿtazeliten, der die ganze arabische Geschichte beeinflußt hat und zwischen 1020 und 1030 öffentliche Disputationen veranlaßte, die so regelmäßig in große Raufereien ausarteten, daß sie gänzlich verboten wurden[1].

Wir würden uns nicht übermäßig erstaunen dürfen und es keineswegs als Beweis gegen den von uns vermuteten alexandrinisch-römischen Ursprung gelten lassen, wenn die komplementären Rechnungsverfahren der Multiplikation und der Division Alkarchî bekannt geworden wären in einer Zeit, zu welcher, wie wir sehen werden, diese Methoden auch im christlichen Abendlande an Verbreitung gewannen. Dem ist indessen nicht so, und nur zwei leise Spuren, welche zwar nicht an jene Verfahren selbst, aber an den Weg, der zu ihnen führt, etwas erinnern, sind uns aufgestoßen. Wir führen die Stellen, weil Gegner unserer Meinungen sie vielleicht in ihrem Sinne verwerten möchten, wörtlich an.

[1]) Weil S. 225.

„Wisse nun, daß man die Zahlen in zwei Klassen teilt, nämlich in einfache und zusammengesetzte. Die einfachen Zahlen sind solche, die nur einer Ordnung angehören, und die zusammengesetzten solche, die zwei oder mehreren Ordnungen angehören“[1]).

Das klingt ungemein nach dem Fälscher der Geometrie des Boethius und ganz und gar nicht nach der 13. und 14. Definition des VII. Buches der Euklidischen Elemente, wo die Primzahlen einfach heißen, und zusammengesetzt solche Zahlen, die in Faktoren sich zerlegen lassen. Die zweite Stelle ist um ein Blatt früher in der Handschrift des Kâfî fîl ḥisâb zu finden. Dort heißt es:

„Was die Ordnungen anlangt, so sind diese drei: Einer, Zehner und Hunderter. Das aber, was über diese hinausgeht, ist auf sie aufgebaut wie die Eintausender, die Zehntausender, die Hunderttausender, [die Eintausendtausender], die Zehntausendtausender, die Hunderttausendtausender. Alle diese ruhen auf dem Fundamente der drei ersten, indem mit der Eins der Ausdruck Tausend entweder einmal oder zweimal oder dreimal verbunden ist, indem dann zweitens mit der Zehn der Ausdruck Tausend entweder einmal oder zweimal oder mehrmal verbunden ist. Und so ist jede Zahl, welche einer anderen als diesen drei Ordnungen angehört, wenn Du den Ausdruck Tausend von ihr wegnimmst, entweder ein Einer, Zehner oder Hunderter“[2]).

Das sind offenbar Triaden, wie der Römer sie besaß, wie das christliche Abendland sie nachahmen wird, und nicht griechische Tetraden. Man darf aber nicht vergessen, daß diese zweite Ähnlichkeit auf sprachlichem Boden beruht, daß die Araber gleich dem Römer, gleich dem Deutschen Zehntausend zusammensetzen mußten, während die Griechen noch ihre einfache Myrias gebrauchten, und daß so Triaden gar wohl an den verschiedenen Orten und unabhängig voneinander sich ausbilden konnten, Tetraden nur in Griechenland.

Alkarchî hat auch mancherlei, was bei ihm zuerst unseren Blicken sich darbietet und vielleicht seiner eigenen Erfindung angehört. Er benutzt neben der Neunerprobe eine Elferprobe[3]). Er nimmt als angenäherte Quadratwurzel für $\sqrt{a^2+r}$, wo der Rest r übrig bleibt, nachdem die nächste Quadratzahl abgezogen wurde, mithin jedenfalls $r < 2a+1$ ist, den Wert $a + \frac{r}{2a+1}$. Er hat unter den geometrischen Rechenbeispielen Formeln[4]), welche zwar an heronische Beispiele etwas erinnern, aber doch nicht mit denselben zur Deckung zu bringen sind, oder sich aus ihnen ableiten lassen[5]). Der Grund

[1]) Kâfî fîl ḥisâb I, 5. [2]) Ebenda I, 4. [3]) Ebenda I, 9. [4]) Ebenda II, 14. [5]) Ebenda II, 24, 25, 26, 28 die Formeln für Kreissegmente, für Kreisbögen, für die Durchmesser des Um- und des Innenkreises regelmäßiger Vielecke, für den Körperinhalt der Kugel.

der Näherungsformel $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+1}$ dürfte, wie allerdings erst im 41. Kapitel im nächsten Bande genauer erwiesen werden kann, folgender sein. Wenn a und die nächste ganze Zahl $a+1$ beide quadriert werden, so ist die Differenz der Quadrate

$$(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1.$$

Wächst also die Quadratzahl um $2a+1$, so wächst die Wurzel um 1, und Anwendung einer Proportion läßt weiter folgern, daß einem Wachstum der Quadratzahl um r ein Wachstum der Wurzel um $\frac{r}{2a+1}$ entsprechen müsse. Neueste Forschungen[1]) haben es in hohem Grade wahrscheinlich gemacht, daß schon Archimed von geometrischer Grundlage aus den Näherungswert $a + \frac{r}{2a+1}$ ebensowohl als den $a + \frac{r}{2a}$ kannte, ja daß er sogar der fortlaufenden Ungleichung

$$a \pm \frac{r}{2a} > \sqrt{a^2 \pm r} > a \pm \frac{r}{2a \pm 1}$$

sich bediente, um die in der Kreismessung vorkommenden Quadratwurzelwerte zu erhalten.

Die ganze Bedeutsamkeit des Mannes, mit welchem wir uns beschäftigen, tritt in seinem zweiten Werke, im Al-Fachrî, hervor, in welchem er andrerseits auch wieder als unbedingten bewundernden Schüler der Griechen, insbesondere des Diophant sich erweist, welch letzterer an häufigen Stellen mit Namen erwähnt ist. Al-Fachrî besteht selbst aus zwei Abteilungen, einer ersten, welche die Theorie, wenn man so sagen darf, enthält, nämlich die Lehre vom algebraischen Rechnen und die Auflösungen sowohl bestimmter als unbestimmter Gleichungen, und einer zweiten, welche eine Aufgabensammlung darstellt. In beiden Abteilungen finden wir, wie gesagt, Diophant in umfassendster Weise benutzt, aber in beiden Abteilungen auch Dinge, welche über Diophant hinausgehen. Indische Methoden zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten wie zweiten Grades wird man dagegen vergebens suchen.

Diophant hat z. B. Namen der 2. bis zur 6. Potenz der Unbekannten additiv aus *δύναμις* und *κύβος* zusammengesetzt. Ganz ähnlich verfährt Alkarchî, dem *mâl* das Quadrat der Unbekannten — mitunter auch allerdings irgend eine Größe[2]) — bezeichnet, *ka'b* den

[1]) Hultsch, Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes. Nachrichten von der königl. Gesellsch. der Wissensch. und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen vom 28. Juni 1893, besonders S. 399. [2]) Fakhri 48.

Würfel und dann weiter durch sich regelmäßig wiederholende Addition *mâl mâl, mâl ka'b, ka'b ka'b, mâl mâl ka'b, mâl ka'b ka'b, ka'b ka'b ka'b* usw. ins Unendliche die folgenden Potenzen der Unbekannten.

Wir bemerken hier beiläufig, daß wenn in arabischen Schriften *mâl* bald das Quadrat der unbekannten Größe, bald eine erste Potenz bezeichnet, diese Zweideutigkeit auch dem lateinischen Worte *census* in mittelalterlichen Übersetzungen aus dem Arabischen beigeblieben ist[1]).

Alkarchî lehrt das Rechnen mit solchen allgemeinen Größen, zu welchen genau so wie bei Diophant auch die Brüche mit der 2., 3., usw. Potenz der Unbekannten als Nenner treten, in ausführlicher und klarster Weise. Diophant hat solches Rechnen mehr vorausgesetzt als gelehrt. Alkarchî behandelt nach den Rechnungsverfahren an den Potenzen der Unbekannten oder den ihnen inversen Ausdrücken auch Irrationalitäten[2]). Freilich bleibt er hier bei den einfachsten Fällen stehen und nähert sich nicht von weitem den von den Indern auf diesem Felde erzielten Ergebnissen, so daß man nicht nötig hat, an einen fremden Einfluß zu denken, um das Vorkommen von Gleichungen wie $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{50}$ oder $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16}$ zu erklären. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit Reihensummierungen[3]). Die hier auftretenden Sätze sind Alkarchî offenbar von anderer Seite zugegangen, und er hat nur für manche derselben Beweise geliefert, sei es algebraische, sei es geometrische, für manche künftige Beweise versprochen, ein Versprechen, welches er in einem Kommentare zum Al-Fachrî zu lösen gedachte, den er selbst zu schreiben beabsichtigte[4]). Der fremde Ursprung der Summenformeln geht z. B. unzweifelhaft aus der Summierung der Quadratzahlen

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+r^2=(1+2+3+\cdots+r)\left(\frac{2}{3}r+\frac{1}{3}\right)$$

hervor, welche Alkarchî mitteilt, aber nicht beweisen zu können eingesteht. Als Anhaltspunkt zur Beantwortung der Frage nach der Heimat dieser Formel weisen wir darauf hin, daß es genügt,

$$1+2+3+\cdots+r=\frac{r(r+1)}{2}$$

zu setzen, um sofort

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+r^2=\left(\frac{r}{3}+\frac{1}{6}\right)(r+1)r$$

zu erhalten, eine Form, welche Archimed nicht, wohl aber Epaphroditus benutzt hat[5]). Für die Summierung der Kubikzahlen

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+r^3=(1+2+3+\cdots+r)^2$$

[1]) Vgl. solche Übersetzungen bei Libri, *Histoire des mathématiques en Italie* I, 276—277 und I, 305. [2]) Fakhri 57—59. [3]) Ebenda 59—62. [4]) Ebenda 6—7. [5]) Agrimensoren S. 128.

gibt Alkarchî einen geometrischen Beweis, dessen Gedankengang folgender ist[1]). Im Quadrate AC (Fig. 105) sei die Seite

$$AB=1+2+3+\cdots+r,$$

und nun schneidet man von diesem Quadrate einen Gnomon $B'BCDD'C'B'$ ab, dessen Breite $BB'=r$ ist. Die Fläche desselben ist offenbar

$$2r\cdot AB-r^2=2r\cdot\frac{r(r+1)}{2}-r^2=r^2(r+1-1)=r^3.$$

Es ist einleuchtend, daß, wenn $B'B''=r-1$ gewählt wird, ein zweiter Gnomon losgetrennt werden kann, dessen Fläche $(r-1)^3$ sein muß, und daß in dem ganzen Quadrate $r-1$ derartige immer kleiner werdende Gnomone entstehen, deren letzter von der Fläche 2^3 ist, und weggenommen noch ein Quadratchen 1^2 übrig läßt. Da aber $1^2=1^3$, so ist auch

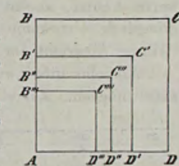


Fig. 105.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+r^3=(1+2+3+\cdots+r)^2.$$

Jetzt kommt Alkarchî zu den sechs Gleichungsformen, welche wir (S. 719) bei Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî besprechen mußten, und setzt bei dieser Gelegenheit auseinander, was dschebr und muḳâbala sei[2]). Er versteht dabei das Wegheben gleichartiger Größen auf beiden Seiten der Gleichung, welches wir im Einverständnisse mit späteren Schriftstellern muḳâbala genannt haben, bereits unter dschebr. Ihm ist muḳâbala vielmehr nur die endgültig zur Auflösung vorbereitete Gleichung in einer der sechs Formen. Unter den Beispielen, welche Alkarchî behandelt, ist auch $x^2+10x=39$ und $x^2+21=10x$, deren beider, wie wir uns erinnern, Alchwarizmî sich bedient hat. Alkarchî hat für sie eine doppelte Auflösung, die eine geometrisch, die andere nach Diophant, wie er sich ausdrückt, und diese letztere besteht in der Ergänzung zum Quadrate. Die Gleichung $x^2+10x=39$ wird also aufgelöst durch die Umwandlung in

$$x^2+10x+5^2=39+5^2,\quad\text{oder}\quad(x+5)^2=8^2,$$

woraus $x+5=8$, $x=3$ gefolgert wird. Bei der Gleichung $x^2+21=10x$ ist das Verfahren folgendes:

$$x^2+21+(x^2-10x+25)=10x+(x^2-10x+25),$$

$$(x^2-10x+25)=10x+(x^2-10x+25)-(x^2+21)=4=2^2.$$

[1]) Fakhri 61. Vgl. Hankel S. 192 Anmerkung, der in dem Beweise ein durchaus indisches Gepräge erkennen will. [2]) Ebenda 63—64.

Aber $x^2 - 10 + 25$ ist ebensowohl $(x-5)^2$ als $(5-x)^2$, also ist $x - 5 = 2$ und $5 - x = 2$ eine Auflösung und entsprechend $x = 7$ und $x = 3$.

Das Auffallende bei der Behandlung dieser letzteren Gleichung ist, daß Alkarchî auch von ihr des Ausdrucks „nach Diophants Art" sich bedient. Wenn wir (S. 476) wahrscheinlich machen, um nicht zu sagen zur Gewißheit erheben konnten, daß Diophant nicht wußte, daß die Gleichung $ax^2 + c = bx$ zwei voneinander verschiedene Wurzelwerte besitzt, so ist jener Ausdruck ganz unverständlich. Nicht griechisch war unter allen Umständen die eine geometrische Darstellung Alkarchîs für die Auflösung der Gleichung $x^2 + 10x = 39$.

Alkarchî gibt zwei geometrische Darstellungen unmittelbar einander folgend. Zuerst läßt er (Fig. 106) die Strecken x und 10 geradlinig aneinander setzen und den Mittelpunkt der letzteren Strecke angeben.

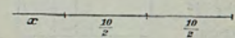


Fig. 106.

Unter Berufung auf einen „bekannten Satz des Euklid"[1]), worunter der 6. Satz des II. Buches der Elemente verstanden ist (S. 263), folgert er sodann

$$(10 + x)x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = \left(\frac{10}{2} + x\right)^2.$$

Nun sei aber $(10 + x)x = 39$, also

$$64 = \left(\frac{10}{2} + x\right)^2, \quad 8 = 5 + x, \quad x = 3.$$

Diese Beweisführung kann sehr wohl alter griechischer Überlieferung sein, kann bis auf Euklids nächste Nachfolger, wenn nicht auf ihn selbst, zurückgehen. Nun läßt aber Alkarchî eine zweite geometrische Darstellung folgen. Die Strecken (Fig. 107)

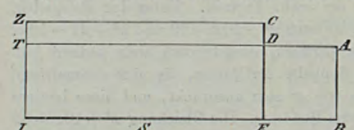


Fig. 107.

$CD = x^2$, $DE = 10x$, deren Summe 39 sein muß, werden geradlinig aneinander gesetzt. Über DE wird das Quadrat $ABED$ errichtet, dessen Fläche folglich $100x^2$ ist. Nun bildet man über CD ein Rechteck $CDTZ = 100x^2$, d. h. man macht $CZ = 100$, das Rechteck $CZIE$ ist folglich

$$100(x^2 + 10x) = 100 \cdot 39 = 3900$$

und ebenso groß ist das Rechteck $ABIT$. Ist jetzt S die Mitte von IE, so ist ähnlich wie im vorigen Beweise

[1]) Fakhri 65.

$$IB \times EB + ES^2 = BS^2 \quad \text{oder} \quad 3900 + 50^2 = (10x + 50)^2,$$

woraus

$$10x + 50 = 80, \quad 10x = 30, \quad x^2 = 39 - 10x = 9$$

folgt. Dieser Beweis, das können wir zuversichtlich aussprechen, rührt von keinem Griechen her. Niemals hätte ein solcher eine Strecke als x^2, eine andere als $10x$ bezeichnet und aneinander gesetzt, niemals die weiteren Folgerungen gezogen. Auch die Buchstaben der Figur, wenn wir die Transkription, in welcher sie allein uns bekannt geworden sind, für zuverlässig halten dürfen, bestätigen durch das unter ihnen vorkommende I, daß sie mindestens von keinem Griechen aus der klassischen Zeit ihrer Geometrie herrühren können. Hier ist uns vermutlich arabische Zutat geboten, wahrscheinlich eine Erfindung von Alkarchî selbst. Die Gleichung $x^2 + ax = b$ kann aber auch so behandelt werden, daß x^2 unmittelbar hervortritt, ohne durch Quadrierung des zunächst gesuchten x gefunden zu werden[1]). Nachdem

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4} \quad \text{und} \quad x + \frac{a}{2} = \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

gefolgert sind, sieht man sofort, daß

$$ax + \frac{a^2}{2} = a\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{a^2 b + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}.$$

Andererseits ist

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{2} = b + \frac{a^2}{2},$$

und zieht man davon den Wert von $ax + \frac{a^2}{2}$ ab, so bleibt

$$x^2 = b + \frac{a^2}{2} - \sqrt{a^2 b + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}.$$

Alkarchî gehört ferner wohl die Auflösung der dreigliedrigen Gleichungen von den Formen

$$ax^{2p} + bx^p = c, \quad ax^{2p} + c = bx^p, \quad bx^p + c = ax^{2p},$$

welche als auf quadratische Gleichungen zurückführbar dargestellt werden, an[2]). Die theoretische Abteilung schließt sodann mit noch zwei Aufgaben. Deren erste bildet der istiḳrâ, d. h. wörtlich das Weitergehen von Stelle zu Stelle. Gewöhnlich versteht der Araber darunter ein auf Kenntnis aller besonderen Fälle beruhendes induktives Urteil[3]), hier aber ist etwas anderes gemeint: die Aufgabe ein Monom, Binom oder Trinom, welches formell keine Quadratzahl ist,

[1]) Fakhri 65. [2]) Ebenda 71—72. [3]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 10, Anmerkung.

durch Annahme eines bestimmten Wertes der Unbekannten zum Quadrate zu machen, also die unbestimmte Gleichung

$$mx^2 + nx + p = y^2$$

zu lösen. Alkarchî setzt als Bedingung voraus, es müsse m oder p eine Quadratzahl sein, dann wählt er y als Binom, dessen einer Teil entweder $\sqrt{mx^2}$ oder $\sqrt{p}$ ist, so daß die ausgeführte Quadrierung von y gestattet, ein Glied auf beiden Seiten zu streichen, entweder das nach x quadratische oder das konstante. Die zweite der beiden Schlußaufgaben des theoretischen Teiles fordert die Auffindung eines Faktors, welcher mit $a + \sqrt{b}$ vervielfacht die Einheit hervorbringe.

Die Aufgabensammlung, welche in fünf Abschnitte zerfallend die zweite praktische Abteilung bildet, ist nach der Schwierigkeit der Aufgaben als einzigem Einteilungsgrunde geordnet. Man trifft also in ihr in bunter Mannigfaltigkeit bestimmte und unbestimmte Aufgaben von den verschiedensten Graden. Alkarchî benutzt, wie sich erwarten läßt, bei seinen Auflösungen nur positive Zahlen. Negative Gleichungswurzeln sind ihm ein Beweis der Unmöglichkeit der betreffenden Aufgaben, und, was einigermaßen auffallen darf, auch der Wurzelwert 0 wird von ihm ausgeschlossen[1]). Die bestimmten Aufgaben höherer Grade gehören sämtlich jenen dreigliedrigen auf quadratische Gleichungen zurückführbaren Formen an. Die unbestimmten Aufgaben sind teilweise dem Diophant entlehnt, und ein Kommentator Ibn Alsirâdsch hat am Schlusse des 4. Abschnittes der Aufgaben ausdrücklich bemerkt: „Ich sage, die Aufgaben dieses Abschnittes und ein Teil derer des vorhergehenden Abschnittes sind ihrer Reihenfolge nach den Büchern Diophants entnommen. So geschrieben durch Ahmed ibn Abû Bekr ibn ʿAlî ibn Alsirâdsch Alkalânisî. Schluß"[2]). Andere Aufgaben rühren dagegen, wie es scheint, von Alkarchî selbst her, und unter diesen mögen späterer Rückbeziehungen wegen zwei besonders angeführt werden, die in moderner Schreibart $x^2 + 5 = y^2$ und $x^2 - 10 = y^2$ heißen[3]). Zur Auflösung der ersteren setzt Alkarchî $y = x + 1$, zur Auflösung der zweiten $y = x - 1$ und erhält so für jene $x^2 = 4$, $y^2 = 9$, für diese $x^2 = 30\frac{1}{4}$, $y^2 = 20\frac{1}{4}$. Man sieht, daß Alkarchî die gebrochenen Auflösungen unbestimmter Aufgaben keineswegs scheut, sondern gleich Diophant nur irrationale Werte verpönt. An sich interessant ist es, daß Alkarchî die Auflösbarkeit von

$$\pm(ax - b) - x^2 = y^2$$

---

[1]) Fakhri pag. 78 und 11. [2]) Ebenda 22—23. [3]) Ebenda 84 (Aufgaben II, 22 und 23).

behandelt und ihre Bedingung in der Zerlegbarkeit von $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b$ in die Summe zweier Quadrate erkannt hat[1]). Die Auflösung von

$$\pm(ax - b) - x^2 = y^2$$

nach x liefert nämlich

$$x = \pm\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} \mp b\right) - y^2},$$

wo die oberen, beziehungsweise die unteren Vorzeichen in der Aufgabe und in der Auflösung zusammengehören. Kann man nun $\frac{a^2}{4} \mp b$ in zwei Quadrate zerlegen, so setze man diese $y^2 + z^2$ und bekommt dadurch

$$x = \pm\frac{a}{2} + z.$$

In zwei Aufgaben bedient sich Alkarchî zweier Unbekannten, welchen er besondere Namen beilegt[2]). Das eine Mal heißt ihm die erste Unbekannte Sache, die zweite Maß; das andere Mal benutzt er neben Sache noch Teil. Ganz Ähnliches findet sich auch in einem anonymen mutmaßlich gleichfalls dem XI. S. entstammenden arabischen Aufsatze über Winkeldreiteilung[3]). Daß hierin ein Hinausgehen über Diophant enthalten ist, leuchtet ein, da dieser, wenn er auch unter Umständen Hilfsunbekannte eingeführt hat, für dieselben stets nur die gleiche Benennung und Bezeichnung wählte wie für die Hauptunbekannte und durch den verbindenden Text dafür sorgte, daß eine Verwechslung nicht eintrete. Den Buchstaben gegenüber, welche die Inder für voneinander zu unterscheidende Unbekannte in fast beliebiger Anzahl zu setzen gewohnt waren, ist Alkarchîs Verfahren ein untergeordnetes.

Ob auch hier ein absichtliches Vernachlässigen dessen, was die Inder über die Griechen hinaus geleistet haben, ob ein wirkliches Nichtwissen anzunehmen sei, dürfte schwerlich ermittelt werden können. Wahrscheinlicher ist uns jedoch das letztere, weil auch in solchen arabischen Schriften, die ausgesprochenermaßen indischen Schriften nachgebildet sind, die Methoden der Inder, Gleichungen mit mehreren Unbekannten aufzulösen, mag es um bestimmte oder um unbestimmte Aufgaben sich handeln, regelmäßig fehlen.

Wir haben gesagt, daß die bestimmten Gleichungen, welche Alkarchî löst, sofern sie den 2. Grad übersteigen, stets solche sind, welche auf Gleichungen des 2. Grades sich zurückführen lassen. Bestimmte kubische Gleichungen hat er nicht behandelt, und eben-

---

[1]) Fakhri 113 (Aufgabe IV, 32). [2]) Ebenda 139—143 (Aufgaben III, 5 und 6). [3]) *Journal Asiatique* für Oktober und November 1854 pag. 381—383.

sowenig läßt sich eine Spur finden, daß irgend ein anderer Araber dieser Zeit sich in algebraischer Weise erfolgreich mit denselben beschäftigt hätte. Nur geometrisch treten sie mit Glück an diese Aufgabe heran.

Wir haben an der Wende des X. zum XI. S. Männer wie Abû'l Dschûd mit kubischen Gleichungen sich abarbeiten sehen, bald in einzelnen Fällen ein Ergebnis erzielend, bald der Schwierigkeiten, die sich ihnen entgegenstellten, nicht Meister werdend. Auch andere etwas frühere Schriftsteller wie Almâhanî[1]) am Ende des IX. S. und Abû Dscha'far Alchâzin[2]) am Ende des X. S. haben sich im Chalifenreiche ähnliche Aufgaben gestellt und wurden für ihre Bemühungen von einem, wie wir gleich sehen wollen, sehr befugten Berichterstatter gelobt. Ersterer versuchte vergebens die archimedische Aufgabe, eine Kugel in Abschnitte von gegebenem gegenseitigem Raumverhältnisse zu teilen, welche er in eine Kuben, Quadrate und Zahlen enthaltende Gleichung umgesetzt hatte, durch Auffindung der Gleichungswurzeln zu lösen[3]). Letzterer fand, daß Kegelschnitte genügten das zu zeichnen, was zu errechnen nachgerade als Unmöglichkeit galt[4]). Unser Berichterstatter ist Alchaijâmî d. h. der Nachkomme des Zeltenverfertigers, und er wußte endlich die Lehre zum Abschlusse zu bringen. Er gehört schon einer Zeit an, die jenseits der Periode liegt, bis zu welcher wir (S. 741) der Schicksale des Chalifates in flüchtigen Umrissen gedacht haben.

Die Dynastie der Abbasiden dauerte unter dem Namen und dem Scheine des Chalifates noch fort, aber die Bujiden, die eigentlichen Machthaber, waren seit der Mitte des XI. S. gestürzt, und an ihre Stelle traten Männer aus dem Geschlechte Seldschuḳs, die aus der Steppe der Kirgisen gekommen neue frische Kräfte mitbrachten, noch unverbraucht in der Verfeinerung und Verweichlichung städtischen und höfischen Lebens[5]). Ṭogrulbeg der Enkel Seldschûḳs zog 1050 halb gerufen von dem Chalifen Alḳâ'im und achtlos des Widerspruchs des Bujidensultans Al-Melik Ar-Raḥîm in Bagdad ein. Mehrjährige Kämpfe endeten zu seinem Gunsten, und der ihm verliehene Ehrentitel „König des Ostens und des Westens" gewann wenigstens für die Umgegend der Hauptstadt einige Wahrheit. Auf Ṭogrulbeg folgte 1063 sein kriegerischer Neffe Alp Arslan, auf diesen 1073—1092 dessen Sohn Melikschâh. Den beiden letztgenannten Sultanen stand als Wezîr Niẓâm Almulk zur Seite, und dieser war der Jugendfreund unseres Omar Alchaijâmî[6]). Noch ein dritter Jüngling, Al-Ḥasan ibn Aṣ-Ṣabbâḥ, war mit beiden zusammen aufgewachsen.

[1]) Suter 26—27, Nr. 47. [2]) Ebenda 58, Nr. 124. [3]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 2. [4]) Ebenda pag. 3. [5]) Weil S. 226 flgg. [6]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami Préface* pag. IV—VI.

Die jungen Männer hatten sich gegenseitige Unterstützung zugeschworen, wenn einer von ihnen zu Ehren und Ansehen käme. Niẓâm Almulk war in der Lage, sein Versprechen einzulösen, und es lag nicht an ihm, wenn es anders kam, als die Phantasie der Freunde es sich ausgemalt hatte. Al-Hasan ibn Aṣ-Ṣabbâḥ, der eine Stelle als Kämmerer erhalten hatte, suchte seinen beginnenden Einfluß zum Schaden Niẓâm Almulks selbst zu verwenden, wurde durch diesen wieder vom Hofe verdrängt, begab sich nach Ägypten und kehrte von dort später als schî'itischer Parteiführer nach Persien zurück, woher er stammte. In der Burg Alamût, deren er sich 1090 bemächtigte, gründete er den Orden der Haschîschesser (Haschîschîn), welche unter dem berückenden Einflusse jenes gefährlichen Reizmittels zu allen Verbrechen bereit waren, die ihr Führer ihnen anbefahl, den Märtyrern ewige paradiesische Genüsse versprechend, und welche so den Namen ihres Ordens gleichbedeutend mit Meuchelmördern machte, eine Bedeutung, die der abendländischen Verketzerung ihres Namens Assassini beigeblieben ist.

Alchaijâmîs[1]) Leben war weniger stürmisch. Eine eigentliche Hofstellung scheint er ausgeschlagen zu haben und nur als Astronom für Melikschâh tätig gewesen zu sein, in welcher Eigenschaft er 1079 eine Kalenderreform zuwege brachte. Sie bestand darin, daß man zum persischen Sonnenjahre von 365 Tagen zurückkehrte und alle vier Jahre ein Schaltjahr von 366 Tagen eintreten ließ, zum 8. Schaltjahre aber nicht das 4., sondern das 5. Jahr nach dem letzten Schaltjahre wählte. So bekam man für 33 Jahre die Dauer von $25 \times 365 + 8 \times 366$ Tagen und mithin 1 Jahr $= 365^d\, 5^h\, 49^m\, 5^s, 45$ in einer Übereinstimmung mit der Wirklichkeit, welche größer ist als bei allen sonstigen Kalendereinrichtungen[2]). Auch Alchaijâmî scheint in die religiösen Zwiespalte zwischen Schî'iten und Sunniten etwas verwickelt gewesen zu sein. Wenigstens berichtet eine ihm freilich nicht freundliche Feder, er habe, nicht aus Frömmigkeit, sondern durch ein fast zufälliges Zusammentreffen, die jedem Moslim gebotene große Pilgerfahrt gemacht, sich aber bei der Wiederkehr nach Bagdad gegen allen wissenschaftlichen Verkehr abgeschlossen und habe dann in die Heimat nach Chorasan sich zurückgezogen.

Sein Ruhm als großer Mathematiker blieb unbeeinträchtigt, und noch in der Mitte des XVII. S. hat Hadschî Chalfa, welcher sich sonst begnügt, den Titel der Bücher nur anzugeben, welche er in seinem

[1]) Suter 112—113, Nr. 266. [2]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 331, wo der Name Alchaijâmîs als *Omar-Cheian* angegeben ist, eine ältere Lesart, deren wir uns in Anschluß an Woepcke nicht bedienen.

umfassenden bibliographischen Werke aufzählt, ein nicht unbedeutendes Stück der Algebra Alchaijâmis zum Abdrucke gebracht.

ʿOmar Alchaijâmi rechtfertigt durch seine Algebra vollständig den Ruhm, welcher bei seinen Landsleuten ihm nachblieb. Er war der erste, welcher die Unterscheidung der Fälle, die dadurch, daß nur positive Glieder in den Gleichungen vorkommen dürfen, sich ergeben, auch für die kubische Gleichung durchführte, und sodann, nicht, wie es die Griechen schon mehrfach getan hatten, diese oder jene geometrische Aufgabe löste, sondern mit diesen Gleichungen als solchen sich vollbewußt beschäftigte. Es ist wahr, er blieb hinter dem Erreichbaren in manchen Beziehungen zurück. Er sah nicht, daß es kubische Gleichungen von der Form $x^3 + bx = ax^2 + c$ gibt, welche durch drei positive Wurzeln erfüllt, eine Ähnlichkeit mit jenem Falle $ax^2 + c = bx$ der quadratischen Gleichung an den Tag legen, welcher zwei positive Wurzeln zuläßt[1]). Er glaubte, die kubischen Gleichungen könnten überhaupt nicht durch Rechnung gelöst werden, sondern man müsse mit der Konstruktion von einander durchschneidenden Kegelschnitten sich begnügen[2]). Ihm entgingen manche Wurzelwerte, welche durch Zeichnung sich eigentlich hätten kundgeben müssen, dadurch, daß er von den Kegelschnitten, die er zur Konstruktion verwandte, immer nur einen Arm zu zeichnen pflegte[3]). Er nahm es auch nicht sehr genau mit dem Diorismus der einzelnen Fälle[4]), d. h. mit der Untersuchung der Zahlenwerte, welche die einzelnen in den Gleichungen vorkommenden Koeffizienten annehmen müssen, um die Möglichkeit einer Konstruktion, wir würden sagen um eine positive Gleichungswurzel hervorzubringen. Er hielt biquadratische Gleichungen auf geometrischem Wege für unlösbar[5]). Aber diese Mängel sind doch nur geringfügige gegen den ungemein großen Fortschritt, überhaupt Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade systematisch bearbeitet und in Gruppen zerlegt zu haben. Fragen wir, welcher Mathematiker irgend eines Volkes noch vor dem Jahre 1100 trinome kubische Gleichungen von quadrinomen unterschied, unter jeden wieder zwei Gruppen bildend, je nachdem dort das Glied 2. oder 1. Grades fehlte, hier die Summe von drei Gliedern einem, oder die Summe von zwei Gliedern der der beiden anderen gleichgesetzt war, so wird man uns sicherlich nur den einzigen Namen ʿOmar Alchaijâmi als Antwort zu nennen wissen, und das genügt, dem Manne seine hervorragende Stellung in der Geschichte der Algebra zuzuweisen.

1) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* XVI und 65, Anmerkung. 2) Ebenda pag. 11 und 12. 3) Ebenda pag. 68. 4) Ebenda XVII—XVIII. 5) Ebenda pag. 79.

Es scheint, als sei noch ein anderes Verdienst ihm zuzuschreiben, die Kenntnis der Binomialentwicklung für den Fall ganzzahliger positiver Exponenten. Er sagt nämlich: „Ich habe gelehrt, die Seiten des Quadratoquadrats, des Quadratokubus, des Kubokubus etc. bis zu beliebiger Ausdehnung zu finden, was man vorher noch nie getan hatte. Die Beweise, welche ich bei dieser Gelegenheit gab, sind einzig arithmetischer Natur und gründen sich auf die arithmetischen Abschnitte der euklidischen Elemente“[1]). Diese Behauptung kann kaum anders verstanden werden, als daß die Ausziehung der Quadratwurzel sich stütze auf die Entwicklung von $(a+b)^2$, die der Kubikwurzel auf die Entwicklung von $(a+b)^3$, die der $m$ten Wurzel auf die Entwicklung von $(a+b)^m$, eine Auffassung, zu deren Bestätigung es dienen kann, daß Alchaijâmi unmittelbar vor der angeführten Stelle von den Methoden der Inder die Quadrat- und Kubikwurzel zu finden geredet hat und nur deren Art vermehrt zu haben sich rühmt.

Wir reihen diesen Bemerkungen noch eine geometrische Aufgabe an, welche von einem Ungenannten bearbeitet worden ist, der nach der ganzen Behandlungsweise jedenfalls der Zeit und der Schule angehört, deren Hauptvertreter wir soeben kennen gelernt haben. Es handelt sich um die Konstruktion[2]) eines Paralleltrapezes von drei einander gleichen gegebenen Seiten und von zugleich gegebenem Flächeninhalte. Diese an griechische wie an indische Vorbilder (S. 651—652) erinnernde Aufgabe führt zu einer Gleichung des 4. Grades von der Form $x^4 + bx = ax^3 + c$ und wird mittels des Durchschnittes eines Kreises und einer Hyperbel gelöst.

36. Kapitel.

Der Niedergang der ostarabischen Mathematik. Ägyptische Mathematiker.

Wieder verlangen die politischen Ereignisse, daß wir einen Augenblick bei ihnen verweilen. Wir stehen an dem Zeitpunkte, von welchem an durch zwei Jahrhunderte, in runden Zahlen von 1100 bis 1300, jene Kämpfe wüteten, welche in ihrer Gesamtheit die Kreuzzüge genannt worden sind, welche aber mehr als einmal durch Zeiten unterbrochen waren, in welchen friedlichster Verkehr zwischen den Feinden stattfand. Das waren die Zeiten, in welchen

1) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 13. 2) Ebenda pag. 115.

die europäische Christenheit in dauernde unmittelbare Beziehung zur ostarabischen Bildung trat, eine Beziehung, welche von größter Wichtigkeit werden mußte. Nicht für die Kultur der Araber tritt uns die ganze Bedeutung der Kreuzzüge hervor. Wenigstens in den Wissenschaften, um deren Geschichte wir uns zu kümmern haben, sind die Araber von 1100 den Gelehrtesten des christlichen Abendlandes so ungemein überlegen, daß sie nichts, wir würden noch schärfer betonen gar nichts, von jenen lernen konnten, wenn nicht vielleicht eine an sich unbedeutende Kleinigkeit uns nachher noch die Vermutung erwecken dürfte, es habe auch hier sich bewährt, daß keine Wirkung ohne Gegenwirkung zu denken ist. Jedenfalls aber werden wir an den Einfluß der Kreuzzüge vorwiegend in Europa zu erinnern haben.

Die Kriege gegen die Andersgläubigen, vornehmlich in Palästina und Ägypten ausgefochten, waren nicht die einzigen, welche das arabische Ostreich in diesem Zeitraume beschäftigten. Daneben dauerten wie unter allen Dynastien unaufhörliche Kämpfe gegen die Provinzen fort, die unter kühnen Feldherren und Gegenfürsten bald sich losrissen, bald zu Paaren getrieben wurden. Daneben hatte man des Andranges der Mongolen sich zu erwehren[1]), die im ersten Viertel des XIII. S. unter Dschingiz-chân die östlichen Grenzen des Reiches überfluteten. Wieder war es der Hilferuf eines ohnmächtigen Chalifen, der dem Eroberer den kaum mehr notwendigen Vorwand gab, sich in dieser Richtung weiter auszudehnen. Schon 1220 wurde Chorasan, jene Geburtsstätte zahlreicher Mathematiker, von den Mongolen besetzt. Wieder 36 Jahre später, 1256 drangen die Mongolen unter Hûlâgû abermals weiter vor, und 1258 fiel Bagdad. Der Chalife Almustaʿṣim wurde mit vielen Prinzen seines Hauses getötet, das Chalifat hörte auch dem Namen nach auf, wie es seit lange schon der Tat nach so gut wie nicht bestand.

In diesen Zeitraum fällt Kemâl Eddîn[2]), einer der größten Gelehrten unter den Arabern. Er ist 1156 in Moṣul geboren und hat ebenda das nach ihm benannte Kemâlische Kollegium gegründet. Er war es, der nach einem arabischen Berichterstatter die mathematischen Fragen zu beantworten wußte, um deren Erledigung willen der Frankenkönig Imbarûr — eine Verketzerung von Imperator, unter welcher Friedrich II. verborgen ist — eine besondere Gesandtschaft nach Moṣul geschickt hatte.

Unter Hûlâgûs Begleitern war ein Mann, der einst vom Chalifen schwer beleidigt vielleicht zu den Anstiftern jenes Kriegszuges ge-

[1]) Weil S. 249—255. [2]) Suter 140, Nr. 354.

hörte, jedenfalls unter die Günstlinge des mongolischen Führers zählte und auch für uns von hervorragender Bedeutung ist: Naṣîr Eddîn[1]). Der Name Naṣîr Eddîn d. h. Verteidiger der Religion ist nur Beiname. Eigentlich hieß er Abû Dschaʿfar Muḥammed ibn Ḥasan al Tûsi aus Tûs, wo er 1201 geboren wurde. Er starb 1274. Seine Gelehrsamkeit umfaßt die allerverschiedensten Gegenstände. Philosophie und Arzneikunde, Naturgeschichte und Geographie haben ihm Stoff zu Abhandlungen gegeben, neben welchen ein Gesetzbuch der Perser sich kaum sonderbarer ausnimmt als ein Werk über die Punktierkunst. Die Îlchânischen Tafeln, welche den Titel von den Fürsten erhalten haben, unter welchen Naṣîr Eddîn die 12jährigen in den Tafeln verwerteten Beobachtungen anstellte, von den sogenannten Großchânen, sind das Werk, um dessen willen Naṣîr Eddîn in seiner Heimat den größten Ruhm genoß. Die Beobachtungen sind auf der Sternwarte in Marâga angestellt, deren Gründung 1259 unmittelbar nach der Einnahme von Bagdad auf Naṣîr Eddîns Rat vollzogen wurde. Die dort erbeuteten Schätze des letzten Chalifen fanden zum Teil ihre Verwendung bei der Erbauung der großartigen Anstalt, deren Kostspieligkeit nahezu imstande gewesen wäre, noch im letzten Augenblick die Inangriffnahme zu verhindern, wenn nicht Naṣîr Eddîn es verstanden hätte, Hûlâgû zu bereden. Nach Fertigstellung der Sternwarte diente sie als Sammelplatz zahlreicher Astronomen, welche Hûlâgû herbeirief, und soll mit einer Bibliothek von über 400000 Bänden ausgerüstet gewesen sein, Beutestücke aus Plünderungen in Bagdad, Syrien und Mesopotamien. Von mathematischen Schriften Naṣîr Eddîns werden solche über Algebra, über Arithmetik und über Geometrie genannt. Von großer Bedeutung ist die Abhandlung Naṣîr Eddîns über die Figur der Schneidenden[2]), d. h. über den Satz des Menelaos. Er hat auf denselben eine ganz vollständige ebene und sphärische Trigonometrie aufgebaut, welche hier zum ersten Male als Teile der reinen Geometrie erscheinen, d. h. nicht mehr bloß als Einleitung zur Astronomie dienen. In der ebenen Trigonometrie kennt er den Sinussatz, in der sphärischen sind ihm die sechs Hauptformeln des rechtwinkligen Dreiecks vertraut, er löst aber auch

[1]) Über Naṣîr Eddîn vgl. einen Aufsatz von Wurm in v. Zachs Monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde (1811) Bd. XXIII, S. 64—78 und 341—361. Suter 146—153, Nr. 368. [2]) Naṣîr Eddîns *Schakl al kaṭṭâ*, wie der arabische Name lautet, ist 1892 durch Alexander Pascha Karatheodory herausgegeben worden. Suter gab ein Referat in der *Bibliotheca mathematica* 1893, 1—8, an welches wir uns teilweise wörtlich anschließen. Vgl. ganz besonders A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 65—71.

alle sechs Fälle des schiefwinkligen Dreiecks, sofern man nicht geschmeidige Formeln verlangt, sondern sich damit zufrieden gibt, daß gezeigt wird, man könne, wenn diese oder jene Stücke gegeben sind, diese oder jene andere Stücke finden. In diesem Sinne führt Naṣîr Eddîn auch den Fall der drei Winkel auf den der drei Seiten zurück. Er bildet nämlich zu dem gegebenen Dreiecke dasjenige neue Dreieck, welches erst drei Jahrhunderte später in Europa einer abermaligen Erfindung bedurfte, um von da an als Polardreieck ein geschätztes Hilfsmittel der sphärischen Trigonometrie zu bleiben. Über die wichtige Frage, welche Verbreitung diese Trigonometrie fand, und ob sie im Oriente den ganzen Einfluß übte, den sie zu üben imstande war, fehlen noch Untersuchungen. Sicher ist, daß etwa ein Jahrhundert nach Naṣîr Eddîn Levi ben Gerson als Fortsetzer seiner Lehren auftrat, der selbst wieder abermals ein Jahrhundert später einen neuen Fortsetzer in Regiomontanus fand. Zu den grundsätzlich weniger wichtigen aber immerhin der Erwähnung würdigen Stellen bei Naṣîr Eddîn gehört diejenige, an welcher er beweist, daß wenn ein Kreis einen anderen von doppelt so großem Halbmesser innerlich berührt, und wenn beiden Kreisen drehende beziehungsweise rollende Bewegung erteilt wird, die entgegengesetzt gerichtet und für den kleinen Kreis doppelt so groß als für den großen Kreis ist, der anfängliche Berührungspunkt alsdann eine gerade Linie, und zwar den Durchmesser des großen Kreises beschreibt[1]. Weit bekannter als Naṣîr Eddîns Trigonometrie war jedenfalls seine Bearbeitung der Euklidischen Elemente. Er hat an seiner Vorlage mancherlei zu ändern gewagt, und insbesondere findet sich bei ihm ein Versuch, die Parallelentheorie von den ihr innewohnenden Schwächen zu befreien[2].

Erläuterungen zu Euklid wurden dagegen auch später noch geschrieben, und als Verfasser von solchen wird der Perser Ḳâḍizâdeh Ar-Rûmî genannt[3], der auch den Namen Maulânâ Salaḥeddîn Mûsâ ibn Muḥammed führte, und von welchem ein Leben des Euklid nach griechischen Quellen herrührt, welches handschriftlich noch vorhanden sein soll. Ḳaḍizâdeh Ar-Rûmî starb 1412 oder 1413. Er gehörte zu den Astronomen, welche wieder ein neuerer Eroberer an einen neuen Mittelpunkt zusammenrief.

Tîmûr[4], gewöhnlich Tamerlan genannt, ein Häuptling des Tartarenstammes Berlas, schuf sich am Schlusse des XIV. S. ein neues

[1] Curtze in der *Bibliotheca Mathematica* 1895, S. 33—34. [2] Wallis, Opera II, 669—673. Kästner, Geschichte der Mathematik I, 374—381. [3] Gartz, *De interpretibus et explanatoribus Euclidis Arabicis* etc. pag. 30—31. Suter 174—175, Nr. 430. [4] Weil S. 421 flgg.

Reich. Wenn er auch 1393 in Bagdad einzog, seine Hauptstadt hatte er in Samarḳand, welche rasch emporblühte und Sammelplatz für Handel und Gewerbe, für Künste und Wissenschaften wurde. Timûr selbst, noch mehr sein Sohn Schâhruch bemühten sich, dieses Ergebnis hervorzubringen, und nun gar der Enkel Muḥammed ibn Schâhruch Ulûġ Beg, geboren 1393, ermordet 1449, war selbst ein hervorragender Astronom und verfertigte in Gemeinschaft mit anderen astronomische Tafeln von hohem Werte[1]. Zu seinen Hilfsarbeitern gehörte vorzugsweise Ar-Rûmî, der auch als Lehrer des Ulûġ Beg angeführt wird. Der Enkel Ar-Rûmîs Maḥmûd ibn Muḥammed ibn Ḳâḍizâdeh Ar-Rûmî genannt Mîram Tschelebî schrieb 1498 Erläuterungen zu jenen Tafeln[2].

Zu dem Ulûġ-Begschen Gelehrtenkreise ist auch Dschamschîd ibn Mas'ûd ibn Maḥmûd der Arzt mit dem Beinamen Ġijâṯ eddin Al-Kâschî zu zählen, welcher eine Abhandlung „Schlüssel der Rechenkunst" verfertigte, welche handschriftlich vorhanden ist, und deren Vorrede auch übersetzt worden ist[3]. Der Verfasser kündigt in der Vorrede einige der Sätze an, welche er mitteilen wird. Dazu gehört die Summenformel der aufeinander folgenden Kubikzahlen von 1 an, wie sie unter den Arabern uns bei Alkarchî bekannt geworden ist (S. 769), aber auch die Summenformel für die mit der 1 beginnenden aufeinander folgenden Biquadratzahlen, welche hier überhaupt zum ersten Male auftreten dürfte. Ġijâṯ eddin Al-Kâschî setzt

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+r^4=\left[\frac{(1+2+3+\cdots+r)-1}{5}+(1+2+3+\cdots+r\right]$$
$$\times\left[1^2+2^2+3^2+\cdots+r^2\right],$$

eine allerdings sehr umständliche Form, deren Zurückführung in die einfachere Gestalt

$$\frac{6r^5+15r^4+10r^3-r}{30}$$

er nicht zu vollziehen imstande gewesen zu sein scheint, jedenfalls nicht vollzogen hat. In jener Vorrede rühmt sich der Verfasser auch eine Methode erfunden zu haben, um die Sehne, die zu dem Bogen von 1^0 gehört, in beliebiger Annäherung zu erhalten, weil es doch nicht möglich sei, in genauer Weise die Sehne eines Bogens aus der Sehne des dreifachen Bogens abzuleiten. Die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung kubischer Gleichungen galt also damals auch bei den Arabern noch für ausgemacht.

[1] Sédillot hat 1853 die Einleitung zu diesen Tafeln in französischer Übersetzung herausgegeben. [2] *Journal Asiatique* für 1853, série 5, T. II, 333 bis 356. Suter 188, Nr. 457. [3] Woepcke, *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes.* Roma 1864, pag. 22—25.

Die Näherungsmethode Al-Kâschîs ist uns höchst wahrscheinlich bekannt, denn sein Name dürfte in der wohl durch falsche Stellung der sogenannten diakritischen Punkte veränderten Lesart Atabeddin Dschamschîd zu erkennen sein, von welchem Mîram Tschelebî in dem obengenannten Kommentare zu den Ulûg Begschen Tafeln uns eine solche Methode mitteilt[1]). In modernen Zeichen stellt die Methode sich etwa folgendermaßen dar. Es sei $x^3 + Q = Px$ aufzulösen, wo P und Q positive Zahlen und P gegen Q sehr groß sein soll, woraus alsdann folgt, daß x entsprechend klein, also auch x^3 gegen Q sehr klein gewählt, die Gleichung zu erfüllen vermag. Dem entsprechend wird, indem wir das Ähnlichkeitszeichen $\backsim$ benutzen, um angenäherte Gleichheit auszudrücken, neben

$$x = \frac{Q + x^3}{P} \quad \text{auch} \quad x \backsim \frac{Q}{P}$$

sein. Liefert jene Division einen Quotienten a und den Rest R, so ist $Q = a \cdot P + R$. Der genaue Wert von x wird jedenfalls $> a$ sein, etwa $= a + \beta$. Alsdann ist

$$a + \beta = \frac{Q + (a+\beta)^3}{P} = a + \frac{R + (a+\beta)^3}{P} \backsim a + \frac{R + a^3}{P}.$$

Die Division $\frac{R + a^3}{P}$ möge den Quotienten b, den Rest S liefern, so daß $R = bP + S - a^3$. Weiter setzen wir $x = a + b + \gamma$. Daraus folgt

$$a + b + \gamma = \frac{Q + (a+b+\gamma)^3}{P} = a + \frac{R + (a+b+\gamma)^3}{P}$$
$$= a + b + \frac{S - a^3 + (a+b+\gamma)^3}{P} \backsim a + b + \frac{S + (a+b)^3 - a^3}{P}.$$

Die letztere Division $\frac{S + (a+b)^3 - a^3}{P}$ wird nun abermals vollzogen. Sie liefere den Quotienten c mit dem Reste T oder

$$T = S + (a+b)^3 - a^3 - cP.$$

Ein weiterer Annäherungsversuch $x = a + b + c + \delta$ führt demnach zu

$$a + b + c + \delta = \frac{Q + (a+b+c+\delta)^3}{P} = a + \frac{R + (a+b+c+\delta)^3}{P}$$
$$= a + b + \frac{S + (a+b+c+\delta)^3 - a^3}{P}$$
$$= a + b + c + \frac{T + (a+b+c+\delta)^3 - (a+b)^3}{P}$$
$$\backsim a + b + c + \frac{T + (a+b+c)^3 - (a+b)^3}{P} \quad \text{usw.}$$

[1]) *Journal Asiatique* von 1853, série 5, T. II, pag. 347. Die Vermutung Atabeddin = Ġijât Eddîn hat gestützt auf die Ansicht mehrerer Orientalisten Hankel S. 292, Anmerkung * ausgesprochen. Die Näherungsmethode selbst hat er S. 291 an einem Beispiele durchgeführt. Suter 173—174, Nr. 429.

Die Brauchbarkeit dieser Methode, bei welcher es nur auf Divisionen durch einen und denselben Divisor P und auf Berechnung der dritten Potenzen von a, von $a + b$, von $a + b + c$ usw., also von den aufeinander folgenden Näherungswerten von x, ankommt, ist eine ziemlich bedeutende und hat nur, wie man, um allzuhoch gespannten Meinungen entgegenzutreten, hervorheben muß, den einen Mangel, daß ein einzig auf die gegebene Gleichungsform unter der Bedingung eines gegen Q sehr großen P beschränktes Verfahren damit gelehrt ist. Ist letztere Bedingung nicht erfüllt, oder ist die Form der Gleichung nicht $x^3 + Q = Px$, so läßt die Methode sich nicht anwenden. Es muß vielmehr alsdann wesentlich anders verfahren werden, und ob ein Araber, der, wie wir wissen, nur mit positiven Zahlen rechnete und deshalb so viele verschiedene Gleichungsformen unterscheiden mußte, auch in jenen abweichenden Fällen sich zu helfen wußte, ist uns im höchsten Grade unwahrscheinlich, da nicht einmal andeutungsweise von solchen anderen Fällen die Rede ist. Der Ursprung der hier behandelten besonderen Gleichung dritten Grades war, wie wir (S. 781) gesagt haben, ein trigonometrischer. Man sollte aus dem bekannten Sinus von 3^0 den von 1^0 ermitteln. Hieß letzterer x und der Kreishalbmesser r, so fand sich an einer Figur

$$x^3 + \frac{r^2}{4} \sin 3^0 = \frac{3r^2}{4} x$$

und das war die zu lösende Gleichung. Man hat nun die Meinung ausgesprochen[1]), die Herstellung dieser Gleichung werde schon Abû'l Dschûd gelungen sein, welcher ähnliche Aufgaben behandelte (S. 759). Alsdann habe es sich um die Auflösung einer einmal bekannten Gleichung gehandelt, die vermutlich nicht so lange auf sich habe warten lassen. Man habe also nur einen späten Bericht über eine wahrscheinlich ältere Leistung. Das ist eine vollkommen in der Luft schwebende rein persönliche Meinung, der wir uns um so weniger anschließen können, als ja Al Kâschî sich ausdrücklich der Erfindung der Methode rühmt.

So tief wir schon herabgerückt sind, bis zu einer Zeit, welche schon später als die Einnahme von Byzanz durch die Türken liegt und eigentlich erst im folgenden Bande dieses Werkes besprochen werden dürfte, so wollen wir doch in ähnlicher Weise, wie wir dieses für die Mathematik der Chinesen uns gestattet haben, lieber jetzt eine zeitliche als später eine räumliche Abweichung von einem ein-

[1]) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 72, Note 2.

heitlich angelegten Plane uns gestatten. Man muß nun einmal die Entwicklung der Mathematik auf asiatischem Boden unter die zu betrachtenden Dinge vollwertig einrechnen, wird aber entschieden besser daran tun, sie ein für allemal von Anfang bis zu Ende zu verfolgen, als sie der Entwicklung auf europäischem Boden je und je einzureihen.

Jahrhunderte hindurch haben die Araber des Ostens einen mächtigen Vorsprung vor den Europäern, die teilweise bei ihnen in die Schule gehen. Mit den Männern, welche wir zuletzt genannt haben, hört jeder Fortschritt bei den einen auf, während er bei den anderen zu immer rascherer Gangart sich gestaltet. Und auch die Empfänglichkeit der Araber auf mathematischem Gebiete war dahin. Das zeigt uns der letzte orientalische Schriftsteller, von dem wir nunmehr zu reden haben, Behâ Eddîn[1]). Dieser Mathematiker lebte, wie ein in arabischer Sprache verfaßtes biographisches Wörterbuch berichtet, 1547—1622. Er war, was aus einzelnen Stellen seines Rechenbuches mit Bestimmtheit hervorgeht, Schî'ite und demnach wahrscheinlich geborener Perser oder doch in Persien ansässig, was mit der Angabe, er sei in Ispahan gestorben, im Einklang steht. Der Titel des von ihm herrührenden Werkes lautet Essenz der Rechenkunst, Chulâṣat al ḥisâb, weil es die Essenz der Bücher älterer Schriftsteller sei, die er vereinigt habe. Den Inhalt bildet ein Gemenge von arithmetischen, algebraischen, geometrischen Dingen in bunter Reihenfolge, und nicht minder bunt ist das Gemenge, wenn wir die einzelnen Dinge auf ihren Ursprung uns ansehen und Griechisch-abendländisches mit Indischem, mit Arabischem regellos wechselnd erkennen. Nur eines muß man nicht erwarten: daß Behâ Eddîns Sammelgeist es verstanden hätte, jeder Heimat die edelste Frucht zu entnehmen, welche sie zeitigte. Griechisch erscheint die Behauptung, die Einheit sei keine Zahl, erscheint das ganze Kapitel der Messungen mit einer Ausnahme. Griechisch ist die Auffindung der vollkommenen Zahlen, der Summe von Quadrat- und Kubikzahlen. Ebendahin weist uns wohl die komplementäre Multiplikationsmethode (S. 528), welche Behâ Eddîn kennt und folgendermaßen lehrt: „Addiere die beiden Faktoren und nimm den Überschuß über 10 zehnfach und dazu das Produkt der Überschüsse der 10 über jeden Faktor"[2]). Er dehnt die Regel, welche, wie er ausdrücklich hervorhebt, nur für zwei Faktoren zwischen 5 und 10 Geltung hat, auch mit einigen geringfügigen Abänderungen auf andere Faktoren aus. Die komplementäre Division ist dagegen auch in Behâ Eddîns Essenz nicht eingedrungen, und an abendländische Zutat erinnert bei der Division nur das Ziehen von Vertikallinien, welches freilich zur Vermeidung von Irrtümern jedermann erfinden konnte, welches aber auch ein Überbleibsel von Kolumnen sein kann, welche in Europa benutzt wurden. An Heron werden wir in dieser spät entstandenen Sammlung durch Höhenmessungen aus Schattenlängen und mit Hilfe von Beobachtungsvorrichtungen[1]) erinnert, an ihn durch die Aufgabe die Breite eines Flusses zu messen. Die Ausführung dieser Messung selbst erfolgt in einer uns noch unbekannten Art: „Stelle Dich an das Ufer des Flusses und beobachte sein anderes Ufer durch das Diopterlineal; dann kehre Dich um, so daß Du durch dasselbe eine Stelle des Bodens siehst, während das Astrolabium an seinem Platze bleibt; nun ist der Abstand zwischen Deinem Standpunkte und jener Stelle gleich der Breite des Flusses"[2]). An Indien erinnert uns das Zifferrechnen, die Neunerprobe, die Regeldetri, die Rechnung des doppelten falschen Ansatzes, die Rechnung durch Umkehrung der Reihenfolge und Ausführung der zu vollziehenden Operationen, die Netzmultiplikation[3]), welche letztere besonders deutlich gelehrt wird, während zwei andere Multiplikationsmethoden nur genannt, aber nicht erläutert werden, so daß der Sinn, der mit der Multiplikation des Umgürtens und des Gegenüberstellens zu verbinden ist, rätselhaft bleibt. Wenn wir diese Dinge griechisch-abendländisch, beziehungsweise indisch nannten, so ist unsere Meinung keineswegs die, als habe Behâ Eddîn aus jenen entfernten Quellen selbst geschöpft. Er hat zuverlässig nur Schriften seiner Heimat benutzt. Aber in jene sind früher oder später die Einschiebungen schon erfolgt und zwar, wie es uns wenigstens vorkommt, die der Kolumnenüberbleibsel, möglicherweise der komplementären Multiplikation, vielleicht auch der praktisch-feldmesserischen Aufgaben erst nach den Kreuzzügen. Arabische Originalquellen lieferten daneben die Unmöglichkeit, der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ zu genügen[4]) oder eine Quadratzahl zu finden, welche um 10 vermehrt oder vermindert wieder eine Quadratzahl liefere. Einheimisch war, soweit wir wissen,

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + 1}.$$

[1]) Behâ Eddîns Essenz der Rechenkunst, arabisch und deutsch herausgegeben von Nesselmann. Berlin 1843. Biographisches in den Anmerkungen auf S. 74—75. Suter 194, Nr. 480. [2]) Behâ Eddîn S. 9.

[1]) Behâ Eddîn S. 35—36. [2]) Ebenda S. 36—37. [3]) Ebenda S. 12. [4]) Ebenda S. 56, Nr. 4. Diese Nummer bezieht sich auf sieben von Behâ Eddîn in seinen Schlußworten S. 55—56 zusammengestellte Aufgaben, welche er als solche bezeichnet, die „seit alter Zeit als unauflösbar übrig blieben, sich empörend gegen alle Genies bis zu dieser Frist". Mit der Beleuchtung jener

Einheimisch kann auch die Vorschrift sein, den Kreisumfang durch einen Faden zu messen[1]), sowie wir die falsche Regel den Raum einer Kugel vom Durchmesser d durch

$$d^3\left\{\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left[\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left(1-\frac{3}{14}\right)\right]\right\}$$

zu berechnen[2]) einheimischem Mißverständnisse später Zeit zur Last legen möchten. Augenscheinlich ist nämlich der für den Kugelinhalt angegebene Ausdruck gleichbedeutend mit $\left(\frac{11}{14}d\right)^3 = \left(\frac{r\pi}{2}\right)^3$ d. h. mit dem Kubus des vierten Teils des Kreisumfanges, und bei aller Verwandtschaft mit der falschen Berechnung des Kugelinhaltes durch Âryabhaṭṭa (S. 646) ist doch die Verschiedenheit wieder zu bedeutend, um ein Abhängigkeitsverhältnis anzunehmen. Weit eher möchten wir an die spätrömische Kreisflächenausmessung (S. 591) uns erinnert fühlen. Einige geometrische Namen sind sowohl nach Bedeutung als Ursprung zweifelhaft, einige wenigstens in letzterer Beziehung. Einer Art von Trapez, welche Gurke genannt wird, stehen wir ebenso ratlos gegenüber wie der Kommentator, der da sagt: „Eine Beschreibung dieser Art von Trapezen ist in keinem Buche zu finden, die es erläuterte; vielleicht wird Gott nach dieser Zeit es lehren"[3]). Woher stammt die Spitzenfigur, das ist ein Sternzehneck, dessen Seiten nur bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt, nicht darüber hinaus gezeichnet sind, so daß das Innere der Figur leer bleibt? Hängt der Name Figur der Braut, welcher dem pythagoräischen Dreiecke beigelegt wird[4]), etwa mit talismanischer Verwendung desselben zusammen, ähnlich wie wir solche von magischen Quadraten berichtet bekommen? Das sind Fragen, die ihrer Beantwortung noch harren. Im ganzen aber dürften unsere Leser von Behâ Eddîns Essenz der Rechenkunst den Eindruck erhalten haben, daß hier ein Rückschritt, oder jedenfalls mindestens ein Stehenbleiben der Wissenschaft zu bemerken ist, welche vorher ruckweise vorgeschritten war.

Man hat mit Fug und Recht als ein kennzeichnendes Merkmal der arabischen Mathematik den Umstand hervortreten lassen[5]), daß sie durchaus von Fürstengunst abhängig war, daß es einzelne Herrscher waren, die zur Astronomie eine Vorliebe an den Tag legten, und daß unter ihnen Astronomen und Mathematiker erstanden, sonst nicht. Es ist vielleicht nicht minder kennzeichnend, daß keine einzige Herrscherfamilie ohne solche der Wissenschaft huldigende

---

Aufgaben hat sich gelegentlich Genocchi beschäftigt in Tortolini, *Annali di scienze matematiche e fisiche* VI, 297—304 (1855).

[1]) Beha Eddin S. 31. [2]) Ebenda S. 33. [3]) Ebenda S. 29 und 66, Anmerkung 17. [4]) Ebenda S. 71, Anmerkung 33. [5]) Hankel S. 252.

und dienende Vertreter war. Die ersten Abbasiden wie die Bujiden, seldschukische wie mongolische Fürsten, wie endlich jenen Enkel Tamerlans haben wir rühmend zu nennen gehabt. Es war, als wenn der auch nur vorübergehende Besitz von Bagdad die Geister mit Wissensdrang erfüllte und Bagdad so wirklich die Stadt des Heils war, als welche ihr Name sie bezeichnete. Und in anderer Beziehung war es, als wenn derselbe Besitz, jenem Kleinode der nordischen Sage vergleichbar, für den, der sich desselben bemächtigte, den Keim des Unheils in sich getragen hätte, so rasch verfielen die aufeinander folgenden Herrscherfamilien dem Fluche der Zwietracht und des Verwandtenmordes.

Folgende Zeitpunkte traten uns in unserer ausführlichen Darstellung vor Augen, deren wir nur noch einmal unter Erwähnung der wichtigsten Namen uns erinnern wollen. Unter den Abbasiden in dem etwa 150 Jahre dauernden Zeitraum vom letzten Viertel des VIII. bis zum ersten Viertel des X. S. ist es der Hauptsache nach Aneignung indischer und mehr noch griechischer Mathematik, letztere in zahlreichen Übersetzungsarbeiten sich äußernd, welche wir einem Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî, einem T̲âbit ibn Ḳurrah, einem Albattânî nachzurühmen haben. Bei ihnen beginnt daneben eine zahlentheoretische und eine trigonometrische Selbsttätigkeit, welche indessen gegen den Übersetzungseifer zurücktritt. Ihm sind wir zu besonderem, zu um so größerem Danke verpflichtet, als, wie wir noch sehen werden, die griechische Mathematik höherer Natur dem Abendlande wesentlich durch arabische Kanäle zugeführt wurde, jedenfalls von da aus weit früher bekannt wurde, als die Neuentdeckung der Originaltexte es ermöglichte. Ja in einzelnen Fällen sehen wir uns heute noch auf arabische Übersetzungen zum alleinigen Ersatze für die verloren gegangenen Originalien angewiesen. Um das Jahr 1000 herum gruppieren sich sodann unter bujidischem Schutze die großen Schriftsteller, welche wieder durch zahlentheoretische, aber auch durch geometrische und vorzugsweise durch algebraisch-geometrische Forschungen die Wissenschaft vermehrten, ein Abû'l Wafâ, welcher daneben noch eine gewisse Stetigkeit nach rückwärts herstellend zu den Übersetzern gehört, ein Alkûhî, ein Assidschzî, ein Alchodschandî, ein Abû'l Dschûd, ein Alkarchî. Ihnen gleichzeitig vertrat Albîrûnî uns die Blüte des gaznawidischen Hofes. Im letzten Viertel des XI. S. begünstigen seldschukische Sultane ʿOmar Alchaijâmî, den systematischen Algebraiker, dem zuerst mit vollem Bewußtsein die Schwierigkeit der kubischen Gleichung entgegentrat, und dem die Geometrie nur dienendes Werkzeug für seine Zwecke wurde. Die Schule Naṣîr Eddîns knüpfte in der Mitte des XIII. S. an die von mongolischen Fürsten errichtete Sternwarte zu Marâġa ihr Bestehen, und eine Schule des XV. S. hatte zu Samarḳand in dem tartarischen Fürsten Ulûġ Beg Gönner und Mitglied zugleich. Die beiden letzten Schulen gehörten mehr der Geschichte der Astronomie als der der Mathematik an, und nur Ġijât eddîn Al-Kâschi verdiente für uns besondere Berücksichtigung wegen einer sinnreichen Näherungsrechnung zur Auflösung kubischer Gleichungen von einer gewissen gegebenen Form.

Der Höhepunkt der Mathematik war für die Araber des Ostens etwa auf 1050 zwischen die Namen Alkarchî, Alchaijâmî anzusetzen. Von da an ging es bergab, erst mit teilweise neuen kleinen Erhebungen, dann in trostlose Öde sich verflachend, als deren Sohn allein Behâ Eddîn am Ende des XVI. und Anfang des XVII. S. uns noch beschäftigen durfte.

Die äußersten Grenzen des ostarabischen und des westarabischen Kulturbereiches sind durch ungeheure Entfernungen voneinander geschieden und gewähren dadurch und durch die politische Trennung, mitunter verstärkt durch religiöse Gegensätze, die Möglichkeit und die Notwendigkeit gesonderter Betrachtung der beiderseitigen Entwicklungen. Minder streng läßt sich aber die Sonderung für die aneinander stoßenden Bezirke beider Reiche durchführen, und insbesondere hätte von den beiden Persönlichkeiten, welche jetzt noch die ägyptische Mathematik uns vertreten sollen, mindestens die zweite als im Osten geboren und herangebildet mit gleichem Rechte wie hier im vorigen Kapitel behandelt werden können. Das macht, daß die ägyptischen Fürsten Schiʿiten waren und darum den sunnitischen Abbasiden viel schroffer, den gleichfalls schiʿitischen Bujiden dagegen kaum feindlich gegenüberstanden, so daß unter diesen allmählich Beziehungen vorkommen, welche noch unter den ersten Bujiden zu den Unmöglichkeiten gehören.

Ibn Jûnus von Kairo, seinem ausführlichen Namen nach Abû'l Ḥasan ʿAlî ibn Abi Saʿîd ʿAbderrahmân, starb 1008, war also in der Blütezeit seines Wirkens Zeitgenosse des Abû'l Wafâ, ähnelte in seinen astronomisch-trigonometrischen Leistungen ebendemselben und scheint doch von dessen Arbeiten in keiner Weise Notiz genommen zu haben, sei es, daß er sie wirklich nicht kannte, sei es, daß er sie nicht kennen wollte. Die ägyptischen Herrscher Al-ʿAzîz, 975—996, und Al-Ḥâkîm, 996—1021, waren für Ibn Jûnus freigebige Gönner. Sie sorgten für seine wissenschaftlichen Bedürfnisse durch Erbauung und Ausstattung einer Sternwarte, durch Anlage einer Büchersammlung usw. Er arbeitete auf ihr Geheiß seine astronomischen Tafeln aus, welche Al-Ḥâkim zu Ehren die ḥâkimi-

tischen Tafeln genannt wurden[1]) und in der Geschichte der Astronomie eine rühmliche Stellung einnehmen. Für die Geschichte der Mathematik ist weniger daraus zu entnehmen, höchstens die Auflösung einiger Aufgaben der sphärischen Trigonometrie unter Einführung von gewissen Hilfswinkeln und die unbewiesene Näherungsformel

$$\sin 1^0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \sin\left(\frac{9}{8}\right)^0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{15} \sin\left(\frac{15}{16}\right)^0 .$$

Die erstere Neuerung hätte wichtig werden können, fand aber keine Nachahmung. Ob Ibn Jûnus bei Benutzung des Wortes Schatten um den Quotienten des Sinus eines Winkels durch den Kosinus desselben Winkels zu benennen wirklich vollständig unabhängig von Abû'l Wafâ verfuhr, mag dahingestellt sein. Gewiß ist, daß er insofern unter jenem blieb, als er seine Schattentafel nie zur Berechnung anderer Winkel als wirklicher Sonnenhöhen verwertete, während Abû'l Wafâ, dessen Tod fast 10 Jahre früher als die letzte von Ibn Jûnus angestellte Beobachtung eintrat, die Verallgemeinerung des Schattenbegriffes, wie wir wissen (S. 748), vollzogen hat.

Der zweite Schriftsteller, welchen wir hier der Besprechung unterziehen, ist in Al-Baṣra geboren und nur im Mannesalter in Ägypten eingewandert. Sein vollständiger Name lautet Abû ʿAlî al Ḥasan ibn al Ḥasan ibn Alhaiṯam, kürzer als Ibn Alhaiṯam bezeichnet, mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit derselbe große Gelehrte, dessen Optik von lateinischen Übersetzern mit dem Verfassernamen Alhazen überschrieben ist[2]). Dürfen wir diese Identität festhalten, so bleibt allerdings aus der Optik, so bedeutend ihr Wert für die Geschichte der angewandten Mathematik ist, für uns nur eine Aufgabe merkwürdig, nämlich die den Spiegelungspunkt eines kugelförmig gekrümmten Spiegels zu finden, von welchem aus das Bild eines an einem gegebenen Orte befindlichen Gegenstandes in ein gleichfalls an einem gegebenen Orte befindliches Auge geworfen wird, eine Aufgabe, welche analytisch behandelt zu einer Gleichung des 4. Grades führt[3]). Den aus Al-Baṣra gebürtigen Ibn

[1]) Der Anfang ist von Caussin übersetzt und erläutert in den *Notices et extraits de la bibliothèque nationale* T. VII, pag. 16—240. Die ungedruckte Übersetzung der späteren Kapitel durch Sédillot hat Delambre für seine *Histoire de l'astronomie du moyen-âge* benutzt. Vgl. Hankel S. 244, 282, 288. Suter 77—78, Nr. 178. [2]) Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 76—77, Nr. 130. *L'algèbre d'Omar Alkayami* pag. 73—76, Anmerkung ***, und Narducci, *Intorno ad una traduzione italiana fatta nel secolo decimoquarto del trattato d'ottica d'Alhazen, matematico del secolo undecimo ed ad altri lavori di questo scienziato* im *Bullettino Boncompagni* IV, 1—48 (1871). Suter 91—95, Nr. 204. [3]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 498, deutsch S. 576.

Alhaiṯam haben wir jedenfalls, und zwar noch zur Zeit als er im Osten lebte, als Verfasser einer in einem Vatikankodex noch vorhandenen Abhandlung über die Quadratur des Kreises anzuerkennen[1]). Sie ist allerdings herzlich unbedeutend und zeigt nur die Quadratur der gewöhnlichen Mondchen des Hippokrates, in deren eines ein kleiner Kreis einbeschrieben ist, welcher zu dem Mondchen, also auch zu dem ihm flächengleichen Dreiecke, in einem gewissen Verhältnis stehe. Ein Hinausgehen über Archimed in dem Sinne, daß eine nähere Bestimmung der Zahl π versucht wäre, ist nicht vorhanden.

Ebenderselbe Ibn Alhaiṯam hat auch ungemein zahlreiche sonstige Schriften zustande gebracht, von welchen wenigstens eine geometrische zur Übersetzung gelangt ist, die zwei Bücher der gegebenen Dinge[2]). Der Verfasser sagt darüber in der Einleitung: „Das I. Buch enthält vollkommen neue Dinge, deren Gattung nicht einmal von den alten Geometern gekannt war, und das II. enthält eine Reihe von Sätzen, welche denen ähneln, die in dem I. Buche von den gegebenen Dingen des Euklid zu finden sind, ohne jedoch selbst in jenem Werke vorzukommen.“ Was hier von dem II. Buche gerühmt ist, entspricht allerdings der Wahrheit, nicht so was Ibn Alhaiṯam als den Wert des I. Buches ausmachend schildert. Allerdings sind solche Sätze, wie sie im I. Buche enthalten sind, und welche kurzweg als Ortstheoreme, wenn nicht gar als Porismen im euklidischen Sinne des Wortes bezeichnet werden müssen, den Alten, d. h. den Griechen bekannt gewesen. Die euklidischen Porismen sind aber den Arabern bekannt gewesen, wenn sie auch von ihnen für unecht, d. h. nicht von Euklid verfaßt, gehalten wurden[3]). Wir wissen nicht, ob das Gleiche von den kleineren Schriften des Apollonius von Pergä gilt, welche sonst auch der Ruhmredigkeit Ibn Alhaiṯams ihr Verbot entgegenzustellen berechtigt gewesen wären, jedenfalls aber ist seine Überhebung keine minder unerlaubte angesichts der Sammlung des Pappus, von der wir wiederholt gesehen haben, daß sie Arabern des X. S. bekannt war. Wir müssen daher, wollen wir einen so tüchtigen Gelehrten, wie Ibn Alhaiṯam es jedenfalls war, nicht der absichtlichen Unwahrheit verbunden mit großer

[1]) *Bullettino Boncompagni* IV, 41 sqq. Suter hat die Abhandlung in der Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Histor.-literar. Abtlg. S. 33—47 (1899) im Urtext mit deutscher Übersetzung herausgegeben. [2]) *Nouveau Journal Asiatique* XIII, 435 flgg. (1834). Sédillot, *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux* pag. 379—400. Chasles, *Aperçu hist.* pag. 498—501, deutsch S. 577—581. [3]) Fihrist 17 unter Vergleichung von Suters Anmerkung 49 (Fihrist 49).

Unvorsichtigkeit bezichtigen, zu der Annahme uns bequemen, die Sammlung des Pappus sei für die große Mehrzahl auch der arabischen Gelehrten doch zu hoch gewesen und sei darum wenig bekannt geworden, beziehungsweise bald wieder in Vergessenheit geraten. Die Örter, von welchen Ibn Alhaiṯam handelt, sind übrigens ausschließlich Kreise und gerade Linien, gehören mithin zu den einfachsten, welche überhaupt vorkommen. Wir nennen einige von den Sätzen des I. Buches: 6. Zieht man von zwei gegebenen Punkten aus Gerade, die beim Durchschnitte einen gegebenen Winkel bilden, so liegt der Durchschnittspunkt auf einer gegebenen Kreislinie. — 7. Zieht man von zwei gegebenen Punkten aus Gerade, die bei ihrem Durchschnitt einen gegebenen Winkel bilden, verlängert man darauf die eine Gerade so, daß das Verhältnis der Strecke vom Anfangspunkte bis zum Durchschnitte zu ihrer Verlängerung ein gegebenes sei, so liegt der Endpunkt auf einer der Lage nach gegebenen Kreislinie. — 8. Zieht man von zwei gegebenen Punkten gleichlange sich in ihrem Endpunkte treffende Strecken, so liegt der Durchschnittspunkt auf einer der Lage nach gegebenen Geraden. — 9. Zieht man von zwei gegebenen Punkten aus Gerade, deren Längen bis zum Durchschnittspunkte in gegebenem Verhältnisse stehen, so befindet sich der Durchschnittspunkt auf einer der Lage nach gegebenen Kreislinie. — 19. Zieht man an einen Punkt der kleineren von zwei sich innerlich berührenden Kreislinien eine Berührungslinie bis zum Durchschnitt mit der umgebenden Kreislinie und verbindet man diesen Durchschnittspunkt geradlinig mit dem Berührungspunkte der beiden Kreise, so ist das Verhältnis der beiden Strecken gegeben. Mit dem II. Buche mögen folgende Muster uns bekannt machen: 2. Die Gerade, welche von einem gegebenen Punkte aus gezogen von einem gegebenen Kreise ein der Größe nach gegebenes Stück abschneidet, ist der Lage nach gegeben. — 5. Zieht man von einem gegebenen Punkte eine Gerade zum Durchschnitt mit einer gegebenen Strecke, so daß das begrenzte Stück der Geraden mit dem einen Abschnitte der Strecke eine gegebene Summe bilde, so ist die Gerade der Lage nach gegeben. — 12. Zieht man an einen gegebenen Kreis eine Berührungslinie bis zum Durchschnitte mit einer gegebenen Geraden, und ist die so begrenzte Berührungslinie der Länge nach gegeben, so ist sie es auch der Lage nach.

Ibn Alhaiṯam wurde nicht wegen seiner theoretisch-wissenschaftlichen Leistungen, sondern um praktischer Dinge willen nach Kairo berufen. Er hatte sich nämlich geäußert, er halte es für leicht, am Nil solche Einrichtungen zu treffen, daß der Fluß jedes Jahr gleichmäßig austrete, ohne daß Witterungsverhältnisse einen Einfluß üben könnten. Diese Zusage zu erfüllen, ließ Al-Ḥâkim ihn kommen, ging ihm bis zur Vorstadt von Kairo entgegen und empfing ihn überhaupt mit den größten Ehren. Ibn Alhaiṭam zog hierauf guten Mutes mit zahlreichen Gefährten nilaufwärts, bis er zu den ersten Nilfällen bei Syene gelangte, wo er erkannte, daß er zu voreilig Sicherheit an den Tag gelegt hatte, und daß die Verwirklichung seines Planes unmöglich war. So mußte er sich zu entschuldigen suchen, so gut es eben ging, und als er, nunmehr in anderen Staatsarbeiten beschäftigt, sich auch hier Fehler zuschulden kommen ließ, mußte er sich verbergen, um Al-Ḥâkims Zorne zu entgehen. Erst nach dessen Tode kam er wieder zum Vorschein und führte ein wesentlich schriftstellerisches Leben. Er starb 1038.

Das sind die beiden Männer, welche die ägyptische Mathematik für uns kennzeichnen sollten. Wir gehen zu der Entwicklung unserer Wissenschaft in Spanien und in dem gegenüberliegenden westlichen Teile der afrikanischen Nordküste, in Marokko, über.

37. Kapitel.

Die Mathematik der Westaraber.

Von der Entstehung eines selbständigen arabischen Reiches in Spanien im Jahre 747 unter dem Omaijaden ʿAbd Arraḥmân haben wir gelegentlich (S. 707) gesprochen. In unaufhörlichen Kämpfen gegen die westgotischen Christen sowie gegen afrikanische Araber erhob sich seine Dynastie bei 300jährigem Bestande zu unsterblichem Ruhme, rieb sich aber auch vollständig auf[1]). In die Zeit der Omaijaden fällt die Entstehung aller jener glänzenden Überreste maurischer Baukunst, die noch heute den Anschauer mit Bewunderung erfüllen sollen, und die nach den Berichten solcher Schriftsteller, welche sie in ihrer ganzen Pracht sahen, die Wundermärchen der Tausend und eine Nacht zur Wahrheit stempelten. Besonders ʿAbd Arraḥmân III. und sein Sohn Al-Ḥakam II., welche von 912 bis 976 regierten, spielten eine glänzende Rolle in der Geschichte der Entwicklung westarabischer Kultur. Von allgemein kulturgeschichtlichem Interesse ist es vielleicht, daß der letztgenannte Herrscher eine Geheimschreiberin Lubnâ[2]) beschäftigte, welche als sehr bewandert in Grammatik, Metrik, Dichtkunst und Rechenkunst gerühmt wird und eine sehr schöne Schrift hatte. Eine Bibliothek von 600000 Bänden entsteht

[1]) Aschbach, Geschichte der Omaijaden in Spanien Bd. II. Frankfurt a. M. 1830. [2]) Suter 61, Nr. 135.

in dem Palaste in Cordova. Ein Bibliotheksverzeichnis in 44 Bänden unterstützt die Benutzung. Gelehrte sammeln sich, aber, wie wir nicht für überflüssig halten, besonders zu betonen, ausschließlich Moslims, denn ʿAbd Arraḥmân, der Verteidiger des Glaubens, wie er sich nennen ließ, würde so wenig wie sein Sohn fremde christliche Schüler geduldet haben. Dieselben beiden Fürsten fanden ihre Freude in der Herstellung baulicher Denkmale ihres Glanzes und der hohen Vollkommenheit, bis zu welcher arabische Kunstfertigkeit gelangt war Mag manches nach früheren praktisch gewordenen und ihres geometrischen Grundes verlustig gegangenen Regeln hergestellt worden sein, so ist doch schlechterdings nicht möglich, daß eine solche Architektur sich nur empirisch entwickelte. Die Baumeister, und wenn nicht sie selbst, so doch diejenigen, bei welchen sie sich in gegebenen Fällen Rats erholten, mußten Mathematiker sein.

Freilich steht uns mehr als dieser zwingende Schluß nicht zu Gebote. Von westarabischen mathematischen Schriften bis zum XI. S. ist nichts veröffentlicht. Von Namen sogar steht uns kein älterer als Abû'l Kâsim Maslama ibn Aḥmed Almadschriṭi[1]) zu Gebote, der uns schon zweimal gelegentlich vorgekommen ist. Er wollte (S. 735) die befreundeten Zahlen in ihrer Wirkung kennen gelernt haben. Er oder sein Schüler Alkarmânî, von welchem letzteren Reisen in den Orient bekannt sind, sollen die Abhandlungen der lauteren Brüder in Spanien eingeführt haben (S. 738). Alkarmânî war übrigens vorzugsweise Chirurg. Die mathematische Lehrtätigkeit Almadschriṭis in Cordova, der Residenz der Emire, fällt in die Regierung Al-Ḥakam II. und dessen Nachfolgers. Er starb 1007. Von seinen Schülern haben Ibn aṣ-Ṣaffâr und Ibn as Samḥ el Muhandis Al-Garnâtî, der erste in Cordova dann in Dânia, der zweite in Granada eigene Schulen eröffnet, in welchen Mathematiker und Astronomen gebildet wurden[2]). Der Geometer von Granada starb 1035 in einem Alter von 56 Jahren, hatte aber schon vieles geschrieben, worunter eine Einleitung in die Geometrie zur Erklärung Euklids, das große Buch über die Geometrie, die er nach geradlinigen und nach krummlinigen Gebilden einteilte, ein Buch über das Geschäftsrechnen, ein solches über das Luftrechnen d. h. Kopfrechnen lobend erwähnt werden.

Die Tatsache, daß die letztgenannten außerhalb Cordova sich niederließen, beruht gewiß zum Teil auf den Unruhen, welche seit

[1]) Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 61, Nr. 122. Steinschneider, Pseudoepigraphische Literatur usw. S. 28 flgg. und 73 flgg. Suter 76—77, Nr. 176. [2]) Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 62, Nr. 123 und S. 64, Nr. 127. Suter 85, Nr. 194 und 86, Nr. 196.

1008 in Cordova an der Tagesordnung waren und mit wechselndem Glücke der Parteien bis 1036 dauerten, um mit dem Tode Hischâms des letzten Omaijaden zu endigen. Ein einheitliches spanisch-arabisches Reich hat es seit dieser Zeit nicht mehr gegeben[1]). Kleine Gebiete, teils als Freistädte, teils unter besonderen Fürsten, bildeten sich und gingen zugrunde, sich gegenseitig befehdend und dabei die christlichen Nachbarn wechselweise zu Hilfe rufend, welche bei solcher Gelegenheit nicht ermangelten, eine Stadt, eine Provinz nach der anderen den Moslimen abzunehmen und für sich zu behalten. Seit der Mitte des XIII. S. war nur noch das Königreich Granada dem Islam unterworfen. Später als um diese Zeit wird uns aber auch kein westarabischer Mathematiker in Spanien begegnen. Nur von Bewohnern der afrikanischen Küstengegenden werden wir in jener späten Zeit zu reden haben und brauchen uns deshalb um die langjährigen Kämpfe nicht zu kümmern, welche erst kurz vor dem Jahre 1500 mit dem gänzlichen Sturze arabischer Herrschaft auf spanischem Boden, mit der Einnahme von Granada am 2. Januar 1492 durch Ferdinand den Katholischen endigten, denselben Fürsten, für welchen Christoph Columbus Amerika entdeckte. An diesem Tage entstand, wenn man so sagen darf, das Sultanat von Marokko als Ersatz für das westarabisch-spanische Reich.

Der erste Schriftsteller, von welchem wir seit dem Beginne der Zersplitterung zu reden haben, lebte im XI. S. in Sevilla. Es war Abû Muḥammed Dschâbir ibn Aflaḥ[2]), gewöhnlich Geber genannt, von dessen Namen man, wie wir uns erinnern (S. 722), eine Zeitlang das Wort Algebra herzuleiten sich gewöhnt hatte. Die Araber nannten ihn auch wohl Alischbîlî d. h. den von Sevilla. Er gehörte zu den hervorragendsten Astronomen seiner Zeit, verfaßte aber, wie so viele seiner Zeitgenossen, auch mystische Schriften, an deren Inhalt er nicht minder fest glaubte als seine Leser. Seine Lebenszeit ist dadurch festgestellt, daß sein Sohn in Spanien mit dem berühmten Moses Maimonides persönlich verkehrte, was nur um das Jahr 1100 herum möglich war. Ibn Aflaḥ selbst muß also in der zweiten Hälfte des XI. S. am Leben gewesen sein. Sein Hauptwerk, eine Astronomie in 9 Büchern, wurde im XII. S. durch Gerhard von Cremona ins Lateinische übertragen[3]), und diese lateinische Bearbeitung erschien 1534 im Drucke. Das erste Buch[4]) enthält eine vollständige Trigonometrie, welche mit Vorbedacht an die Spitze gestellt wird, um

[1]) Weil S. 284—296. [2]) Steinschneider, Pseudoepigraphische Literatur usw. S. 15 flgg. und 70 flgg. Suter 119—120, Nr. 284. [3]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese.* Roma 1851, pag. 13. [4]) Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen-âge* pag. 179—185. Hankel

Wiederholungen zu vermeiden. Der Verfasser, der fast 200 Jahre vor Naṣîr Eddîn (S. 779) lebend von ihm nicht beeinflußt gewesen sein kann, aber auch aus (S. 788) angeführten Gründen ohne Einfluß auf diesen blieb, legte eine Probe geistiger Selbständigkeit ab, indem er es wagte, in dieser Trigonometrie von dem althergebrachten Gange des Ptolemäus, von der Regel der 6 Größen (S. 413 und 420) abzuweichen und sogar polemisch gegen den alten Meister der Sternkunde an den verschiedensten Stellen vorzugehen, was die Albattânî, die Abû'l Wafâ, die Ibn Jûnus, welche in ihrer Lebenszeit Ibn Aflaḥ vorangehen, niemals auch nur versuchten. Ibn Aflaḥ stützt sich bei seinen Beweisen — und daß er solche gibt, ist eine weitere rühmliche Eigentümlichkeit, durch welche er von den übrigen arabischen Astronomen sich unterscheidet — auf eine Regel der vier Größen, welche in folgendem Satze besteht und von welcher eine Vorahnung sich in der Schrift des Ṯâbit ibn Ḳurrah über den Satz des Menelaus (S. 736) vorfand. Diese arabische Schrift dürfte aber Ibn Aflaḥ gekannt haben, wie daraus geschlossen worden ist, daß hebräische Übersetzungen des Ṯâbit und des Ibn Aflaḥ in einer und derselben Hand-

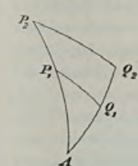


Fig. 108.

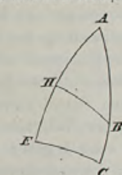


Fig. 109.

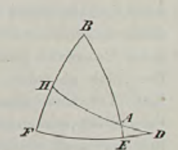


Fig. 110.

schrift vereinigt vorkommen. Es seien (Fig. 108) P_1P_2 sowie Q_1Q_2 zwei Bögen größter Kreise, welche in A sich schneiden. Von P_1 und P_2 werden die Bögen größter Kreise P_1Q_1 und P_2Q_2 senkrecht zu AQ_1Q_2 gezogen, so verhält sich $\sin AP_1 : \sin P_1Q_1 = \sin AP_2 : \sin P_2Q_2$. Nun sei (Fig. 109) das bei H rechtwinklige sphärische Dreieck ABH vorgelegt, in welchem $\sphericalangle BAH = \alpha$, $BH = a$, $AB = h$ heiße. Man verlängert AB und AH bis zur Länge von 90^0 nach C und E, so ist A der Pol von CE, also der Bogen CE das Maß des Winkels α und der Bogen AE senkrecht auf EC. Die Regel der vier Größen liefert jetzt als 13. Satz das Verhältnis $\sin AC : \sin CE = \sin AB : \sin BH$ oder $\sin 90^0 : \sin\alpha = \sin h : \sin a$, mithin $\sin a = \sin h \cdot \sin\alpha$. An einer anderen Figur (Fig. 110), bei welcher wieder ABH ein bei

S. 285—287. A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 81—83.

H rechtwinkliges sphärisches Dreieck darstellt und $AH = b$ und $\sphericalangle ABH = \beta$ genannt ist, werden BA und BH bis nach E und F verlängert, so daß

$$BE = BF = 90^0, \quad EF = \beta \quad \text{und} \quad \sphericalangle BFE = BEF = 90^0$$

werden. FE und HA treffen sich verlängert in D, so ist wegen

$$\sphericalangle BHD = BFD = 90^0$$

jener Punkt D der Pol von FH, also $DH = 90^0$. Die Regel der vier Größen liefert, weil jetzt AE und HF senkrecht zu EF sind, das Verhältnis: $\sin DA : \sin AE = \sin DH : \sin HF$ oder

$$\sin(90^0 - b) : \sin(90^0 - h) = \sin 90^0 : \sin(90^0 - a),$$

also $\cos h = \cos a \cdot \cos b$ der Inhalt des 15. Satzes. In derselben Figur ist aber das Dreieck DEA bei E rechtwinklig, die Anwendung des 13. Satzes ergibt deshalb $\sin DE = \sin DA \cdot \sin DAE$ d. h.

$$\sin(90^0 - \beta) = \sin(90^0 - b) \cdot \sin\alpha \quad \text{oder} \quad \cos\beta = \cos b \cdot \sin\alpha$$

als Inhalt des 14. Satzes. Letzterer Satz ist weder bei Ptolemäus noch bei einem arabischen Vorgänger des Ibn Aflaḥ zu finden und wird deshalb häufig unter Anwendung des Namens, unter welchem dieser Gelehrte, wie wir sagten, bekannt zu sein pflegt, der Gebersche Lehrsatz genannt. Daß wir vorzogen, hier regelmäßig von Ibn Aflaḥ zu reden, hat seinen Grund darin, daß es mehrere nach Zeit, Ort und wissenschaftlicher Tätigkeit ungemein verschiedene Persönlichkeiten gegeben hat oder gegeben haben soll, welche alle Geber genannt werden, so daß Verwechslungen sehr leicht sind. Es ist mit großem Rechte als überraschend bezeichnet worden, daß Ibn Aflaḥ, in der sphärischen Trigonometrie ein geradezu kühner Neuerer, in der ebenen Trigonometrie um keinen Schritt weiter gegangen ist als Ptolemäus, daß er sogar Sinus und Kosinus anzuwenden hier vermeidet und noch in griechischer Weise mit den Sehnen der doppelten Winkel sich begnügt. So war noch für Ibn Aflaḥ offenbar die sphärische Trigonometrie weitaus die Hauptsache und eine eigentliche ebene Trigonometrie nur zur Vollständigkeit der Betrachtungen vorhanden, aber nicht der wichtige Teil der Mathematik, zu welchem sie erst durch Naṣîr Eddin werden sollte.

Wir haben gesagt, daß Gerhard von Cremona die Astronomie des Ibn Aflaḥ etwa in der zweiten Hälfte des XII. S. übersetzte. Er hat die dazu nötigen Kenntnisse in dem den Arabern bereits abgerungenen Toledo sich erworben, wo um jene Zeit eine wahre Übersetzungsschule vorhanden war. Raimund, Erzbischof von Toledo zwischen 1130 und 1150, stand geistig an ihrer Spitze. Nicht als

ob er selbst dabei tätig gewesen wäre, aber er veranlaßte Dominicus Gondisalvi in Gemeinschaft mit einem jüdischen Schriftgelehrten, Johannes von Luna oder Johannes von Sevilla (Johannes Hispalensis) genannt[1]), arabische Bücher und zwar hauptsächlich solche, die sich auf aristotelische Philosophie bezogen, zu bearbeiten. Die Bearbeitung erfolgte auf einem Umwege, der nicht ohne Folgen blieb. Man mußte den arabischen Text durch einen der kastilianischen wie der arabischen Sprache kundigen Mittelsmann verdolmetschen lassen, bevor ein anderer oder auch mehrere dem Gelehrtenstande angehörende Männer nun wieder einen lateinischen Wortlaut herstellten, der nachmals irgend einem unter den Mitwirkenden zugeschrieben wurde[2]). Überlegt man nun, daß der arabische Text durch nicht über alle Zweifel erhabene Übersetzungskunst dem Griechischen entnommen war, so läßt sich denken, welcherlei aristotelische Philosophie aus solchen dreifacher Verpfuschung ausgesetzt gewesenen lateinischen Darstellungen dem Mittelalter zur Kenntnis kam. Weniger schlimm waren die Veränderungen, welche solche Schriften erlitten, die wenigstens von Ursprung her arabisch waren und ihrem Inhalte nach nicht so dunkel wie philosophische Gegenstände, selbst in der Sprache eines Aristoteles, es einem Laien gegenüber immer sein mußten. Gar keinen sinnentstellenden Veränderungen waren solche Schriften unterworfen, bei deren Übertragung in die lateinische Sprache der Verfasser selbst mitwirken konnte.

Wie unsere Leser sofort bemerken, haben wir bei dem zuletzt Ausgesprochenen ein ganz bestimmtes Werk eines bestimmten Verfassers im Auge. Abraham bar Chijja ha Nasi[3]), d. h. Abraham Sohn des Chijja der Fürst, war ein gelehrter Jude in Barcelona, von wo er zu gelegentlichem Aufenthalte wohl auch nach der Provence kam. Er stand bei Königen und Fürsten in hohem Ansehen, welches er vermutlich astrologischer Tätigkeit verdankte. Er unterstützte einen Übersetzer Plato von Tivoli bei dessen Übersetzungen aus dem Arabischen, und da ebenderselbe auch ein Werk Abrahams übersetzte, so ist es mindestens wahrscheinlich, daß auch hierbei der Ver-

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* XXVI, 565 (Paris 1858). Jourdain, *Recherches critiques sur l'âge et l'origine des traductions latines d'Aristote.* 2. édition. Paris 1843, pag. 115 flgg. hält den Namen Johannes Hispalensis für entstellt aus *Johannes Hispanensis de Luna* d. h. Johannes der Spanier aus Luna. Ebenda pag. 117, Anmerkung 1 ist eine Stelle aus einer Widmung des Johannes an Raimund abgedruckt, durch welche seine Lebenszeit gesichert ist. [2]) Darin hat man den Grund erkannt, warum die gleiche in mehreren Handschriften erhaltene Übersetzung bald einem, bald einem anderen Übersetzer zugeschrieben ist. Vgl. H. Bosmans, *Revue des Questions scientifiques.* Octobre 1904. [3]) Steinschneider in der *Bibliotheca Mathematica* 1896, S. 34—38.

fasser Dienste geleistet haben wird. Abraham bar Chijja ist übrigens bekannter unter dem Namen Abraham Savasorda, und darunter verbirgt sich der Ehrentitel *Sa'hib al Schorta* d. h. Oberst der Leibwache. Das von Plato von Tivoli übersetzte ursprünglich in hebräischer Sprache verfaßte Werk führte die Überschrift *Chibburta Meschika we ha Tischboret* und ist übersetzt als *Liber embadorum a Savasorda in hebraico compositus et a Platone Tiburtino in latinum sermonem translatus anno Arabum DX mense saphar*, wodurch die Datierung auf Juni 1116 gesichert erscheint. Das „Werk der Raumausmessungen", wie man den Titel etwa verdeutschen könnte, besteht aus vier Kapiteln[1]).

Das 1. Kapitel enthält die Erklärungen, Forderungen und Grundsätze Euklids, soweit sie geometrischer Natur sind, aber auch die in Euklids arithmetischen Büchern vorkommenden Erklärungen der verschiedenen Zahlenarten bis zu den vollkommenen Zahlen, diese mit eingeschlossen, sind aufgenommen. Ferner enthält das 1. Kapitel einige der geometrischen Lehrsätze Euklids über Gleichflächigkeit von Dreiecken und Parallelogrammen und die Erklärung der Ähnlichkeit zweier Dreiecke. Das 2. Kapitel zerfällt in fünf Teile, deren erster in geometrischem Gewande und mit Anwendung von Sätzen aus dem zweiten Buche Euklids, der ausdrücklich genannt ist, die drei verschiedenen Formen der unreinen quadratischen Gleichung behandelt. Hier ist gezeigt, daß $x^2 + b = ax$ zwei Wurzelwerte besitzt, und Platos Übersetzung von 1116 ist demnach das älteste lateinisch geschriebene Buch, von welchem wir Kenntnis haben, aus welchem das Abendland die Lösung der quadratischen Gleichungen mit Einschluß des doppeldeutigen Falles zu erlernen imstande war. Fragen wir aber rückwärts woher Savasordas Wissen stammte, so verweist uns eine Aufgabe[2]), bei deren Behandlung die Summe von vier Strecken als Rechteck gezeichnet wird, auf Al Karchî, welcher (S. 770) einer ähnlichen ganz ungriechischen Versinnlichung sich bediente. Al Karchî lebte aber etwa ein Jahrhundert vor Savasorda, so daß inzwischen trotz des Gegensatzes zwischen Ost und West seine Lehren irgendwie bis nach Spanien gedrungen sein können; werden doch die spanischen Bibliotheken nicht alles ausgeschlossen haben, was im Osten entstand, wofür die in Spanien entstandenen Übersetzungen ostarabischer Werke

[1]) Das *Liber embadorum* ist durch Curtze mit deutscher Übersetzung und unter Vorausschickung einer Einleitung, deren wir uns zum Teile wörtlich bedienen, in den Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen XII, 3—183 (Leipzig 1902) herausgegeben. Wir zitieren Savasorda. [2]) Savasorda pag. 40.

ein deutliches Zeugnis ablegen. Der zweite Teil des 2. Kapitels behandelt die Ausmessung der Dreiecke. Wir machen hier nur auf $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ aufmerksam, welches bei der Fläche des gleichseitigen Dreiecks benutzt wird[1]), und auf die Formel zur Auffindung der Dreiecksfläche aus den drei Seiten, für welche kein Urheber genannt ist, und von deren Beweis gesagt ist[2]), er sei sehr verwickelt und könne deshalb nicht leicht auseinandergesetzt werden. Hier kann das Buch der drei Brüder (S. 734) Savasordas Quelle gewesen sein. Der dritte Teil des 2. Kapitels ist den verschiedenen Vierecken, der vierte Teil dem Kreise gewidmet. In diesem Teile ist bald mit $\pi = 3\frac{1}{7}$, bald mit $\pi = 3\frac{17}{120}$ gerechnet, die Gewährsmänner Archimed und Ptolemaeus finden keine Erwähnung. Die Ellipsenfläche wird als Kreis, dessen Durchmesser das arithmetische Mittel der beiden Achsen ist, berechnet[3]). Außerdem findet sich hier eine Sehnentafel von geringer Ausdehnung[4]), die älteste, welche in einem lateinisch geschriebenen Buche hat nachgewiesen werden können. Der fünfte Teil des 2. Kapitels mißt Vielecke, welche zu diesem Zwecke in Dreiecke zerlegt werden, und dann noch Felder, welche an Bergabhängen gelegen sind, wobei mittels einer Nivellierungs-Vorrichtung die senkrechte Höhe des Berges gemessen wird[5]). Im 3. Kapitel, der Darlegung der Felderteilung, sehen wir die geometrische Abteilung der oft erwähnten arabischen Erbteilungsaufgaben vor uns, welche in dem euklidischen Buche von der Teilung der Figuren ihr Vorbild besitzt. Das 4. Kapitel endlich ist überschrieben als Ausmessung der Körper nach Länge, Breite und Höhe. Unter den dort befindlichen Sätzen heben wir den hervor[6]), der die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedon von den Abmessungen a, b, c als $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ finden lehrt. Den Schluß bilden einige sehr einfache Aufgaben praktischer Feldmessung.

Der hier gegebene Überblick über das Werk der Raumausmessungen zeigt uns Savasorda als einen nicht gerade gelehrten, aber gewandten Lehrer, der ohne eigne Zutaten aus den ihm in arabischen Übersetzungen bekannt gewordenen Schriften des Euklid, des Archimed, des Ptolemaeus, aber auch aus arabischen Originalwerken Wissenswertes auszuziehen verstand. Um so auffallender erscheint es, daß an einer Stelle[7]) eine Berufung auf die Arithmetik des Boethius sich vorfindet. Man hat, wie uns scheint mit Recht, die Vermutung ausgesprochen, diese Stelle habe gar nicht im hebräischen Urtexte ge-

[1]) Savasorda pag. 52. [2]) Ebenda pag. 74. [3]) Ebenda pag. 108. [4]) Ebenda pag. 108. [5]) Ebenda pag. 122. [6]) Ebenda pag. 162. [7]) Ebenda pag. 16, letzte Zeile und Curtzes Anmerkung 1 auf pag. 18.

standen, sondern sei die einzige Zutat Platos von Tivoli, der sein Licht auch einmal leuchten lassen wollte. Eine sichere Entscheidung wäre allerdings nur dann möglich, wenn es gelänge den Urtext Savasordas aufzufinden. Die geschichtliche Bedeutung des Werkes der Raumausmessungen kann erst in unserem II. Bande im 42. Kapitel erkannt werden, wo es sich zeigen wird, wie sehr Savasorda einem viel höher stehenden Nachfolger als Vorlage gedient hat.

Gehört Savasorda und seine in hebräischer Sprache verfaßte Raumausmessungslehre nur uneigentlich in dieses der Mathematik der Westaraber gewidmete Kapitel, so verhält es sich nur wenig anders mit einigen Schriften, welche durch Johannes von Sevilla, welche etwas später durch Gerhard von Cremona aus dem Arabischen in das Lateinische übertragen wurden.

Von wem die Originalien herrühren, wissen wir nicht. Wo sie verfaßt wurden, ob im Westen ob im Osten, ist uns gleichfalls unbekannt. Ebensowenig wissen wir, ob wir gut daran tun gerade in diesem Zeitpunkte, also gegen die Mitte des XII. S., von ihnen zu reden. Unsere Berechtigung entnehmen wir einzig dem Umstande, daß sie damals in Toledo vorhanden gewesen sein müssen und jedenfalls zu den geschätzten Schriften gehörten, weil sonst doch wohl nicht sie übersetzt worden wären, wenn eine Auswahl auch berühmterer Werke zu Gebote gestanden hätte. Die übersetzten Schriften sind ein Lehrbuch der Rechenkunst und eine Algebra.

Jenes wird in scheinbarem Widerspruche zu unseren eben geäußerten Bemerkungen von dem Übersetzer Johannes von Sevilla dem Alchwarizmî zugewiesen. *Incipit prologus in libro alghoarismi de practica arismetrice a magistro Johanne yspalensi* lautet der Anfang[1]). Ist aber, woran wir zu zweifeln keinen Grund haben, die Schrift, welche wir früher als Rechenbuch des Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî geschildert haben, echt, so kann es diese nicht sein. Der gleiche Schluß gilt freilich auch in umgekehrter Reihenfolge, allein wir glauben jene schon besprochene als die ältere, die von Johannes von Sevilla bearbeitete als die jüngere betrachten zu müssen, weil jene einfacher und kürzer, diese mehr als dreimal umfangreicher, weitschweifiger, ausführlicher ist, und somit eher den Charakter einer späteren Bearbeitung einer älteren Vorlage aufweist, während jene nicht wohl als Auszug aus dem größeren Buche gedacht werden kann, weil sie einzelne die unmittelbare Abhängigkeit ausschließende Abweichungen von demselben wahrnehmen läßt. So heißt es z. B. in

[1]) *Trattati d'aritmetica pubblicati da Bald. Boncompagni* II (und letztes Heft) pag. 25 (der durch beide Hefte durchlaufenden Pagination).

der kürzeren Fassung die Zahlzeichen für 5, 6, 7, 8 würden verschiedentlich gebildet; in der längeren wird dasselbe von 7 und 4 behauptet. In der kürzeren Fassung ist die Algebra des Verfassers erwähnt; und dieses Zitat, auf welches wir uns (S. 715) stützen durften, um die Persönlichkeit des Verfassers festzustellen, fehlt in der längeren Fassung usw. Das Rechenbuch des Johannes von Sevilla, wie wir es von jetzt an mit dem Namen des Übersetzers benennen wollen, da der eigentliche Verfasser nicht zu ermitteln zu sein scheint, enthält nun sehr mannigfache interessante Dinge, teils solche, welche schon gegenwärtig für uns von Interesse sind, teils solche, welche ihre Bedeutung für uns erst gewinnen, wenn es sich um die Entwicklung der Wissenschaft im christlichen Abendlande handelt. Wir werden alsdann, im 40. Kapitel, auf die Schrift des Johann von Sevilla zurückverweisen, schildern sie aber gegenwärtig schon, um nicht eine Zersplitterung eintreten zu lassen.

Der Verfasser lehnt sich durchweg so viel als möglich an die Inder an, welchen er z. B. die Erfindung der Sexagesimalbrüche zuschreibt[1]). Von ihnen hat er wohl auch die näherungsweise Ausziehung der Quadratwurzel mit Hilfe von Dezimalbrüchen[2]), natürlich nicht in einer Schreibart, wie sie den modernen Dezimalbrüchen zur erhöhten Bequemlichkeit ihres Gebrauches anhaftet, aber dem Gedanken nach damit übereinstimmend. Es werden der Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, $2n$ Nullen angehängt, und die sodann gefundene Wurzel gilt als Zähler eines Bruches, dessen Nenner aus einer mit n Nullen versehenen Einheit besteht. Die Auflösung quadratischer Gleichungen[3]) wird an drei Beispielen gelehrt, den drei bekannten Fällen entsprechend. Das erste Beispiel ist wieder das althergebrachte $x^2 + 10x = 39$. Für den zweiten Fall ist dagegen $x^2 + 9 = 6x$ als Beispiel aufgestellt, eine merkwürdige Wahl insofern als bei dieser Gleichung wegen

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9 = 0$$

nur eine einzige Wurzel $x = 3$ auftritt, so daß man wohl fragen möchte, ob die Wahl eine absichtliche, ob eine durch eigentümlichen Zufall dieses Ergebnis liefernde war? Am Schlusse der Schrift[4]) ist das magische Quadrat

$$\begin{array}{ccccc} 4 & - & 9 & - & 2 \\ | & \diagdown & & \diagup & | \\ 3 & - & 5 & - & 7 \\ | & \diagup & & \diagdown & | \\ 8 & - & 1 & - & 6 \end{array}$$

[1]) *Trattati d'aritmetica pubblicati da Bald. Boncompagni* II, pag. 49. [2]) Ebenda pag. 87—90. [3]) Ebenda pag. 112. [4]) Ebenda pag. 136.

mit die einzelnen Zahlen in Beziehung zueinander setzenden Strichen hergestellt, aber ohne jeden erklärenden Text. Negativ heben wir hervor, daß komplementäre Rechnungsverfahren, wie wir sie schon mehrfach vergeblich gesucht haben, nicht vorkommen. Einige lateinische Ausdrücke scheinen zwar an jene Rechnungsverfahren zu erinnern, aber es ist nur Schein.

Da kommt das Wort *differentia* mehrfach vor, auch bei der Division, aber es bedeutet nur die Stelle, bis zu welcher man vorbeziehungsweise zurückrückt. Das gleiche Wort im gleichen Sinne hat auch der Übersetzer der kleinen Abhandlung, welche wir als die des Alchwarizmî selbst anerkennen, angewandt. Da braucht Johannes von Sevilla die Wörter *digitus* und *articulus*, Finger- und Gelenkzahl, genau in dem gleichen Sinne, in welchem diese Wörter in der gefälschten Geometrie des Boethius zur Anwendung kamen (S. 583). Wir könnten als Ergänzung darauf hinweisen, daß auch in einer mittelalterlichen Übersetzung der Algebra Alchwarizmîs das Wort *articulus* für Gelenkzahl im antiken Sinne, aber ohne das Wort *digitus* vorkommt[1]). Aber es wären Trugschlüsse, aus diesen Übersetzungen, von deren Entstehungsweise wir gesprochen haben, den Wortlaut des Urtextes wiederherstellen zu wollen und dabei an jeden einzelnen Ausdruck sich festzuklammern. Jene Übersetzer des XII. S., die anderen so gut wie Johannes von Sevilla, benutzten eben die Wörter, welche in ihrer Zeit die weiteste Verbreitung hatten, sofern sie mit dem Sinne des Arabischen, hier z. B. mit Einern und Zehnern, sich deckten. Sie wollten ja nicht historische Untersuchungen anstellen und darum den Wortlaut des Gegebenen so genau als möglich festhalten. Sie beabsichtigten vielmehr den verbreitungswerten Inhalt zur Kenntnis ihrer des Arabischen nicht mächtigen Landsleute zu bringen und mußten darum danach streben, bereits bekannter leicht verstandener Ausdrücke sich zu bedienen. Nur wo etwas dem Begriffe nach ganz Neues vorkam, wurde mit mehr oder weniger Geschick dem Wortlaute nach übersetzt. So nennt Johannes von Sevilla bei den quadratischen Gleichungen das Quadrat der Unbekannten *res*, die Unbekannte selbst *radix*[2]), ersteres eine schlechte Übersetzung von *mâl*, letzteres eine gute von *dschidr*.

Wir könnten schließlich noch rätselhafter Buchstabenfolgen gedenken, welche nur dadurch zu lesbaren Wörtern werden, daß man annimmt, es sei jeder Vokal durch den ihm nachfolgenden Konso-

[1]) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 265. Die Stelle entspricht in Rosens englischer Übersetzung pag. 21. [2]) *Trattati d'aritmetica* II, pag. 112.

nanten ersetzt worden, und man müsse die entsprechende Rückverwandlung z. B. von *xnxm* in *unum*, von *dxp* in *duo* vornehmen[1]).

Gerhard von Cremona hat sicherlich die Algebra des Alchwarizmî übersetzt, allein es ist fast mehr als wahrscheinlich, daß die Bearbeitung, welche als jene Übersetzung gedruckt worden ist[2]), nicht von Gerhard herrührt und nicht die Algebra des Alchwarizmî ist[3]), daß man dagegen als die genannte Übersetzung jene anzuerkennen hat, welche als anonyme Übersetzung[4]) zur Veröffentlichung gelangte (vgl. S. 719 Anmerkung 1), und welche auch in einer Madrider Handschrift als von Gerhard von Cremona herrührend bezeichnet ist.

Die andere nach dieser Auffassung nicht von Gerhard von Cremona sondern von irgend einem uns Unbekannten übersetzte Abhandlung kündigt sich selbst an als das Buch, welches nach dem Gebrauche der Araber *algebra* und *almucabala* und „bei uns" *(apud nos)* Buch der Wiederherstellung *(liber restauracionis)* genannt wird, zu Toledo aus dem Arabischen in das Lateinische übersetzt durch Magister Gerhard von Cremona. Das Original muß als eine andere Bearbeitung des von Alchwarizmî in seiner ähnlich betitelten Schrift behandelten Stoffes angesehen werden. Die Beispiele

$$x^2 + 10x = 39, \quad x^2 + 21 = 10x,$$

letzteres mit seinen beiden Wurzelwerten $x = 7$ und $x = 3$ treten auf. Geometrische Beweise der drei Fälle der quadratischen Gleichungen fehlen nicht. Sonstige bedeutsame Verschiedenheiten nötigen aber an einen anderen Verfasser des arabischen Textes als an Alchwarizmî zu denken. Sehr wichtig erscheint z. B. der Umstand, daß die Auflösungen der drei Formen quadratischer Gleichungen in Gestalt von Gedächtnisversen gelehrt sind[5]). Das ist durchaus indische Sitte, während sie den Arabern, so viele uns deren bisher zur Rede kamen, fremd ist. Und doch können gerade diese Verse nicht aus indischen Mustern übersetzt sein, denn die Inder — wir wiederholen hier früher Gesagtes — wußten gar nichts von drei Formen quadratischer Gleichungen, weil sie vermöge ihrer Fähigkeit mit negativen Zahlen zu rechnen nur eine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx = c$$

mit bald positiven, bald negativen Koeffizienten in Behandlung

[1]) *Trattati d'aritmetica* II, pag. 126. [2]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese* pag. 28—51. [3]) Axel Anthon Björnbo in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge, VI, 239—241. [4]) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 253—297. [5]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese* pag. 31, 32, 34.

nahmen. Dieser Widerspruch scheint zu der Annahme zu nötigen, der Verfasser des hier übersetzten Buches sei ein Gelehrter gewesen, welcher selbständig vorgehend die indische Sitte auf arabische, um nicht geradezu zu sagen auf griechisch-arabische Gegenstände anwandte. Er muß mit indischen Werken bekannt gewesen sein, muß ihnen das entnommen haben, was er für besonders brauchbar hielt, während er gleichzeitig von den unter den Arabern längst eingebürgerten drei Fällen nicht ließ, sei es, daß er sie wirklich für notwendig hielt, sei es, daß er als echter Araber anhängend an dem durch Alter der Überlieferung Geheiligten doch nicht allzu große Neuerungen wagte. Waren es doch neben den Gedächtnisversen noch andere ungemein überraschende Dinge, welche er seinen Landsleuten bot: eine algebraische Schrift durch Abkürzungen und übereinkommliche Zeichen, wie die Inder sie benutzten.

Fast ganz indisch ist die Bezeichnung abzuziehender Größen durch einen unter die Benennung angebrachten Punkt[1]), indisch darum wahrscheinlich auch die Darstellung der Benennung selbst durch den Anfangsbuchstaben des Benannten, sei es, daß es um die Unbekannte, oder um ihr Quadrat, oder um die absolute Zahl der Aufgabe sich handelte[2]). Welcher Buchstaben das Original sich bediente, ist nicht mit voller Sicherheit zu behaupten, indem der Übersetzer einen Beweis scharfsinnigen Verständnisses ablegend, oder aber irgendwie und irgendwo über den abkürzenden Ursprung der im Urtexte gebrauchten Buchstaben richtig belehrt, die Anfangsbuchstaben der lateinischen Wörter gewählt hat, deren er selbst sich bedient, der Wörter: *radix* für die Unbekannte, *census* für das Quadrat derselben, *dragma* für die absolute Zahl, doch ist die Wahrscheinlichkeit eine bedeutende, es seien diese Wörter die Übersetzungen von *dschidr, mâl, dirham*, deren Abkürzungen uns noch im Laufe dieses Kapitels in westarabischen Werken begegnen werden. In dem Gebrauche von *census* für *mâl* hat der Übersetzer richtiger übersetzt als Johannes von Sevilla, welcher *res* dafür sagte, während eine Übereinstimmung beider in den Wörtern *digitus* und *articulus* herrscht[3]).

Wer der arabische Gelehrte war, welcher Gedächtnisverse, welcher Abkürzungen und fast algebraische Zeichen zuerst anwandte, ist uns, wir wiederholen es, nicht bekannt, denn die Vermutung, er habe Sa'îd geheißen[4]), steht auf nicht so festen Füßen, daß wir ihr Vertrauen schenken möchten. Dagegen kennen wir die Namen west-

[1]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese* pag. 38—39. [2]) Ebenda pag. 36 sqq. [3]) Ebenda pag. 38. [4]) Ebenda pag. 56.

arabischer Schriftsteller, welche vor dem Ende des XIII. S. — ob vor oder nach dem Aufenthalte Gerhards von Cremona in Toledo wissen wir nicht — lebten und welche ähnlich verfuhren. Der Berichterstatter über die Namen ist Ibn Chaldûn, jener Schriftsteller des XIV. S., von dem wir eine Stelle über befreundete Zahlen schon (S. 735) benutzt haben. Er erwähnt[1]) ein algebraisches Werk, welches unter dem Titel: Der kleine Sattel im Magrib, also im afrikanischen Nordwesten geschrieben worden sei, und aus welchem Ibn Albannâ einen Auszug verfertigte habe. Von diesem Auszuge von der Hand des in der zweiten Hälfte des XIII. S. wirkenden Gelehrten haben wir nachher zu reden. Vorläufig bleiben wir bei dem Berichte Ibn Chaldûns, welcher fortfahrend erzählt, Ibn Albannâ habe auch einen Kommentar: Die Aufhebung des Schleiers zu dem kleinen Sattel geschrieben. Dieses Werk sei ungemein wertvoll, aber schwierig für Anfänger. Ibn Albannâ habe sich dabei an zwei Vorgänger angelehnt: an „die Wissenschaft des Rechnens“ von Ibn Almun'im und an „den Vollkommenen“ von Alaḥdab. Er habe die Beweisführungen dieser beiden Werke zusammengefaßt und noch anderes, nämlich die technische Anwendung von Symbolen bei diesen Beweisen, welche zu gleicher Zeit einen doppelten Zweck erfüllen, die abstrakte Schlußfolge und die sichtbare Darstellung, worin eben das Geheimnis und die Wahrheit der Erklärung von Lehrsätzen der Rechenkunst durch Zeichen bestehe. Es kann nicht wohl ein Zweifel obwalten, daß diese an sich etwas dunklen Worte richtig auf Dinge bezogen worden sind, wie sie etwa in der Vorlage des Gerhard von Cremona vorkamen, und daß diese in mindestens mittelbarer Abhängigkeit von Ibn Almun'im oder Alaḥdab stehen müßte, wenn der Beweis erbracht werden könnte, daß diese Schriftsteller bis auf das XII. S. also bis reichlich hundert Jahre vor Ibn Albannâ zurückgreifen.

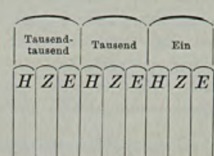
Ibn Albannâ, d. h. der Sohn des Baumeisters[2]), ist 1252 oder 1257 in Marokko geboren. Der Vater stammte, wie es scheint, aus Granada. Der vollständige Name unseres Gelehrten war Abû'l Abbâs Aḥmed ibn Muḥammed ibn 'Oṯmân Al-Azdî Al-Marrâkuschî ibn Albannâ Algarnâṭî. Er hat eine große Zahl von mathematischen und anderen Schriften verfaßt, welche in seiner Lebensbeschreibung aufgezeichnet sind. Auffallenderweise fehlt in diesem von einem Lands-

[1]) *Journal Asiatique* für Oktober und November 1854, pag. 371—372.
[2]) Aristide Marre, *Biographie d'Ibn Albannâ* in den *Atti dell'Accademia pontificia de' Nuovi Lincei* unter dem Datum des 3. Dezember 1865 (Bd. XIX). Steinschneider, *Rectification de quelques erreurs* etc. Bullettino Boncompagni X, 313—314 (1877). Suter 162—164, Nr. 399.

manne Ibn Albannâs herrührenden Verzeichnisse die durch Ibn Chaldûn so hoch gestellte Aufhebung des Schleiers, fehlt in ihm auch der Auszug aus dem kleinen Sattel. Gerade dieser letztere Auszug, talchîs nennt ihn Ibn Chaldûn, dürfte uns aber erhalten sein. Ein arithmetisch-algebraisches Werk unter dem Titel „Talchîs des Ibn Albannâ“ ist nämlich in der Bodleyanischen Bibliothek aufgefunden und in französischer Übersetzung des arabischen Textes dem Drucke übergeben worden[1]). Da Name und Inhalt mit der von Ibn Chaldûn erwähnten Schrift in vollem Einklange stehen, so ist an der tatsächlichen Übereinstimmung kaum zu zweifeln, eine Zweifellosigkeit, welche sich nur noch steigert, wenn dem Leser von Zeile zu Zeile zwingender die Notwendigkeit erläuternder Zusätze sich aufdrängt, so daß er begreift, daß Ibn Albannâ selbst die Aufhebung des Schleiers unternahm.

Spätere Gelehrte folgten seinem Beispiele, erläuterten aber nicht das ursprüngliche Hauptwerk des kleinen Sattels, sondern den Auszug, den Talchîs, wie wir von nun an mit dem jetzt gebräuchlich gewordenen Fremdnamen sagen wollen. Es gibt mehrere Kommentare zum Talchîs, es gibt auch Werke, welche ohne sich als Kommentare zu geben als solche benutzt werden können, weil sie dessen Auseinandersetzungen weiter ausführen, und von diesen ist eines, dem XV. S. angehörend, durch eine gedruckte Übersetzung zugänglich. Wir werden über manches Dunkle im Talchîs besser aus jenem späten Werke uns unterrichten, vorher aber wenigstens einige Stellen des Talchîs selbst reden lassen.

Ibn Albannâ unterscheidet Rangordnungen der Zahlen unter dem Namen mukarrar und takarrur[2]). Der Sinn ist der, daß Gruppen von je 3 Ziffern von rechts nach links abgeteilt werden, die Gruppe der Einheiten, der Tausender, der Tausendtausender usw. Bildet man lauter einzelne Kolumnen für jede Ziffernordnung und begrenzt dieselben oben durch einen kleinen Bogen



[1]) *Le Talkhys d'Ibn Albannâ publié et traduit par Aristide Marre.* Rome 1865. [2]) Talkhys pag. 3 und 9.

(ein kleines Gewölbe oder Dach), so sind größere Dächer über drei Kolumnen zu spannen und damit jene Gruppeneinteilung versinnlicht. Jede vollständige Gruppe von drei Kolumnen bildet einen takarrur; mukarrar dagegen ist die Gesamtzahl der Kolumnen, in welche eine gegebene Zahl sich einträgt. Der mukarrar ist der dreifache takarrur einer Zahl nebst der Zahl der links überschießenden Kolumnen, welche nur 2, 1 oder 0 betragen kann. So ist der mukarrar von 5000000, welches 2 takarrur und noch 1 Kolumne braucht $= 3 \times 2 + 1 = 7$. Der mukarrar von 30000 ist $= 3 \times 1 + 2 = 5$, der mukarrar von 400000000 ist $3 \times 3 + 0 = 9$.

Wir sehen hier aufs deutlichste Kolumnenrechnen und Zifferrechnen vereint, aber wir sehen es erst hier gegen Ende des XIII. S., und es ist uns persönlich kaum fraglich, daß wir statt von einer Vereinigung der beiden Verfahren von einem Übergreifen des Kolumnenrechnens in das Zifferrechnen zu reden haben, daß hier abendländischer Einfluß erhärtet ist, der gerade an der afrikanischen Küste unabweisbar war. Hatten doch z. B. in Bugia die großen italienischen Kaufleute schon vor dem Jahre 1200 eigene Handelskomptoire, eigene Zollbeamte, und war doch damit die Anwesenheit von im Rechnungswesen geübten Persönlichkeiten mit Notwendigkeit verbunden. Was aber dasselbe Bugia den Arabern war, schildert ein spanischer Araber aus Valencia, welcher 1289 jene Gegend bereiste, mit beredten Worten[1]): „Bugia ist ein großer Seehafen und eine befestigte Stadt, deren Name in der Geschichte berühmt ist. Sie ist auf steilen Höhen und in einer Schlucht angelegt, die Mauern ziehen sich bis ans Meer. Die Festigkeit der Häuser kommt der Zierlichkeit ihrer Formen gleich. Vorwerke schützen sie, so daß der Feind vergebens einen Angriff versuchen würde. Die Wut der kriegerischen Horden würde an diesen Mauern zerschellen. In Bugia steht eine Moschee, deren Pracht alle bekannten Gotteshäuser übertrifft, und deren Minaret sowohl von dem Meere als von dem Land aus gesehen wird. Gleichsam Mittelpunkt der Stadt erfreut dieses entzückend schöne Bauwerk ebensosehr den Blick, wie es die Seele mit einem Gefühle unsäglicher Glückseligkeit erfüllt. Die Einwohner versäumen nie ihren fünf durch das Gesetz vorgeschriebenen Gebeten dort zu genügen, und sie unterhalten die Moschee mit größter Sorgfalt, weil sie ihnen gewissermaßen als Versammlungsort dient, und selbst gleich einem belebten Wesen den Menschen Gesellschaft leistet. Bugia ist

[1]) Einen Auszug aus dem Reisebericht des Al'Abderî hat Cherbonneau in dem *Journal Asiatique* für 1854, II. Halbjahr, pag. 144—176 herausgegeben. Die Beschreibung von Bugia S. 158.

eine der ältesten Hauptstädte des Islams und ist bevölkert mit berühmten Gelehrten.“

Wir kehren zum Talchiș zurück. Bei Gelegenheit der Addition werden die Summenformeln für die Reihen der Quadrat- und der Kubikzahlen angegeben[1]). Bei Gelegenheit der Subtraktion kommt der Rest zur Rede, welcher entsteht, wenn von irgend einer Zahl 9, 8 oder 7 so oft als möglich abgezogen wird[2]). Die Auffindung dieser Reste, welche alsdann als Proben bei Rechnungen angewandt werden, wie wir es von der Neunerprobe schon wissen, beruht bei der 9 auf dem Satze $10^n \equiv 1$ (mod. 9), bei der 8 auf den drei Sätzen $10^1 \equiv 2$, $10^2 \equiv 4$, $10^3 \equiv 0$ (mod. 8). Somit ist der Rest einer Zahl nach 9 ihrer Ziffernsumme gleich, der Rest nach 8 der Einerziffer nebst dem Doppelten der Zehnerziffer noch vermehrt durch das Vierfache der Hunderterziffer. Umständlicher ist das Verfahren den Rest nach 7 zu finden. Ibn Albannâ begründet es mit den Sätzen, welche nach moderner Schreibweise

$$10^1 \equiv 3,\quad 10^2 \equiv 2,\quad 10^3 \equiv 6,\quad 10^4 \equiv 4,\quad 10^5 \equiv 5,\quad 10^6 \equiv 1 \text{ (mod. 7)}$$

heißen und setzt hinzu „von da an beginnt die Reihenfolge aufs neue“. Man hat also von der Rechten zur Linken fortschreitend unter die einzelnen Ziffern der zu prüfenden Zahl der Reihe nach 1, 3, 2, 6, 4, 5 sich stets wiederholend niederzuschreiben, die betreffenden Ziffern mit diesen Werten zu multiplizieren und die Summe dieser Produkte zu bilden, welche dann selbst wieder nach 7 zu prüfen ist. Die Zahlen 1, 3, 2, 6, 4, 5 besser zu behalten ersetzt man sie durch die gleichwertigen Buchstaben des älteren arabischen Alphabetes, welche durch Einschiebung von Vokalen zu zwei nicht ganz richtig geschriebenen Wörtern sich verbinden lassen, deren Bedeutung etwa die eines ein Aufzubewahrendes bergenden Grabens ist.

Bei der Quadratwurzelausziehung unterscheidet Ibn Albannâ zwei Fälle[3]), ob nämlich, nachdem $\sqrt{a^2+r} \backsim a$ gefunden ist, der Rest sich als kleiner beziehungsweise als gleich, oder aber als größer als der schon gefundene Wurzelteil erweist. Ist $r \leqq a$ so soll man $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a}$, dagegen bei $r > a$ lieber

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+1}$$

setzen. Wir erinnern daran, daß Alkarchî (S. 766) der letzteren Formel sich bedient hat, ohne auf das Größenverhältnis zwischen a und r Rücksicht zu nehmen. Die Methode des doppelten falschen Ansatzes lehrt Ibn Albannâ als das Verfahren mit Hilfe der Wagschalen

1) Talkhys pag. 5—6. 2) Ebenda pag. 9. 3) Ebenda pag. 53.

und sagt, es beruhe auf Geometrie[1]). Er zeichnet eine Figur (Fig. 111), welche bei einem Kommentator die etwas abweichende Gestalt Fig. 112 besitzt, und welche die eigentümliche Schreibweise gestattet, auf welche wir (S. 732) zum voraus hingewiesen haben. Seine Vorschrift ist, wenn wir uns unserer früheren Buchstaben bedienen, folgende. Die Zahl b, welche der Gleichung $ax = b$ zufolge herauskommen muß, schreibt man in die obere Einbiegung. Die Zahlen n_1 und n_2, welche die beiden Ansätze für die Unbekannte sind, schreibt man zwischen die Parallelen rechts und links, oder, wie Ibn Albannâ sagt, man legt sie auf die beiden Wagschalen. Die Fehler e_1 und e_2 werden auf derselben Seite, wo schon n_1, beziehungsweise n_2 steht, über oder unter die beiden die Wagschale darstellenden Parallelen geschrieben, je nachdem sie positiv oder negativ sind. Dann wird der Fehler rechts mit der Annahme links, die Annahme rechts mit dem Fehler links vervielfacht und beide Produkte addiert, wenn die Fehler von entgegengesetzter Natur waren, das kleinere vom größeren subtrahiert, wenn die Fehler gleichartig waren. Wie man mit den Produkten verfuhr, verfährt man ferner mit den Fehlern, man addiert ungleichartige, man bildet die Differenz von gleichartigen. Man dividiert endlich die aus Fehlern und Annahmen gebildete Zahl durch die aus den Fehlern allein erhaltene, so ist der Quotient die Unbekannte. Der Ausspruch, daß die Methode des doppelten falschen Ansatzes auf Geometrie beruhe, ist einigermaßen auffallend. Man hat versucht, denselben zu erklären und hat zwei sehr voneinander abweichende Auswege ermittelt. Entweder erklärt man die Sache mit der Klangverwandtschaft des Wortes *handasa*, welches Geometrie heißt, und *hindi* indisch[2]); beide hießen ursprünglich „indische Kunst“, wie denn auch in der Tat die Methode des doppelten falschen Ansatzes indischen Ursprunges sei. Oder aber man scheut den gewichtigen Einwurf, daß sodann übrig bleibe die unleugbar vorhandene Bedeutung von Geometrie für *handasa* zu rechtfertigen, und zwar aus derselben Klangverwandtschaft zu rechtfertigen, während die arabische Geometrie nichts weniger als indischen Ursprunges ist, und man gerät alsdann auf den Versuch, die Methode graphisch, also geometrisch zu ver-

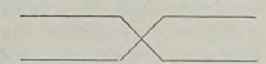


Fig. 111.

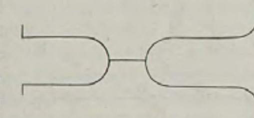


Fig. 112.

1) Talkhys pag. 26—27. 2) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für 1863, I. Halbjahr, pag. 505 flgg.

sinnlichen[1]). Von A aus trage man (Fig. 113) nach P_1 und nach P_2 die falschen Annahmen $AP_1 = n_1$ und $AP_2 = n_2$ auf. Ist nun der Sinn der beiden Fehler e_1 und e_2 derselbe, so errichtet man $P_1Q_1 = e_1$ und $P_2Q_2 = e_2$ senkrecht zu AP_1P_2 nach derselben Seite; sind e_1 und e_2 ungleichartig, so zieht man jene Senkrechten nach entgegengesetzten Seiten der Geraden AP_1P_2. Jedenfalls verbindet man Q_1Q_2 geradlinig und bestimmt den Durchschnittspunkt B mit der AP_1P_2. Alsdann ist AB der richtige Wert der Unbekannten. Das ist gewiß ungemein scharfsinnig und im Ergebnisse auch richtig, auch in eine Formel umgesetzt übereinstimmend mit der gegebenen Vorschrift. Ob aber in der Figur wirklich eine zwingende Ähnlichkeit mit der von Ibn Albannâ gezeichneten Wage zu finden ist, ob, wenn Ibn Albannâ oder einem seiner Vorgänger eine solche geometrische Begründung zu eigen gewesen wäre, sie sich nicht bei einem Kommentator hätte erhalten müssen, das sind Fragen, deren erste ebensowenig unbedingt bejaht, wie die zweite unbedingt verneint werden dürfte. Wir selbst sehen daher keinen der beiden Auswege als den richtigen und begnügen uns mit dem Eingeständnisse, keine Erklärung für Ibn Albannâs Ausspruch, das Verfahren mit Hilfe der Wagschalen beruhe auf Geometrie, zu wissen.

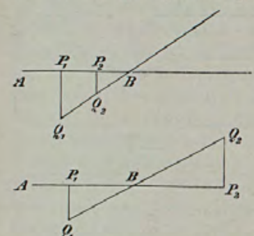


Fig. 113.

Es ist kennzeichnend für den Talchîṣ, daß für alle in ihm enthaltene Regeln keinerlei Zahlenbeispiele gegeben sind, daß vielmehr nur in ganz allgemeinen Worten die Vorschriften ausgesprochen werden, ein wissenschaftlicher Vorzug dieses Werkes, welchen in solcher Ausschließlichkeit kein anderes von denen, welche uns bisher zur Kenntnis gekommen sind, teilt. Um so nötiger aber, wir wiederholen es jetzt, war für die gleichzeitigen Leser, und noch für Leser späterer Jahrhunderte ein Kommentar zum Talchîṣ oder eine scheinbar selbständige weitere Ausführung des gleichen Gegenstandes.

Zu einer solchen gehen wir jetzt über. Sie ist verfaßt von Alḳalaṣâdî[2]), geboren in Baza, ansässig in Granada, von wo er auswanderte, als die Christengefahr immer drohender herannahte. Fern

[1]) Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen S. 924—926. [2]) Woepcke im *Journal Asiatique* für Oktober und November 1854 pag. 358—360. Ḥâdschî Chalfa nennt ihn überall Alkalṣâwî. Suter 180—182, Nr. 144.

von der Heimat starb er 1486. Ebenderselbe hat auch einen Kommentar zum Talchîṣ verfaßt, aus welchem aber nur eine Stelle veröffentlicht ist[1]), auf welche wir uns (S. 712) bezogen haben, um zu beweisen, daß bei Arabern die Erinnerung stets wach blieb, daß die Pythagoräer die Männer der Zahl gewesen seien. Der Titel des Werkes, mit welchem wir es gegenwärtig zu tun haben, ist in verschiedenen Angaben bekannt. In der einen Handschrift heißt es „Aufhebung der Schleier der Wissenschaft des Ġubâr", in einer anderen „Enthüllung der Geheimnisse der Anwendung der Zeichen des Ġubâr", in einem Verzeichnisse von Handschriften „Enthüllung der Geheimnisse der Wissenschaft von den Zeichen des Ġubâr". Ġubâr, ursprünglich Staub, wie wir uns erinnern (S. 712), heißt hier so viel wie Tafelrechnen mit Ziffern im Gegensatze zum Kopfrechnen. Ob dabei die Ġubârziffern des Westens oder ob die ostarabischen Ziffern in Anwendung kommen, ist sehr gleichgültig, wenigstens gibt es in der Pariser Bibliothek eine Abschrift des Alḳalaṣâdî, in welcher nur ostarabische Ziffern vorkommen, und die gleichwohl das Wort Ġubâr in ihrem Titel an der Spitze trägt. Das Werk, oder vielmehr der Auszug aus dem Werke von Alḳalaṣâdî selbst angefertigt, welchen wir allein besitzen, besteht aus vier Büchern, deren erstes die Arithmetik der ganzen Zahlen enthält, das zweite die Brüche, das dritte die Wurzeln, das vierte die Auffindung der Unbekannten. Es ist in französischer Übersetzung gedruckt[2]).

Gleich das erste Buch ist ungemein lehrreich für jeden, welcher sich mit der Form des arabischen Rechnens bekannt machen will, die vielfach von dem heute gebräuchlichen abweicht, z. B. darin, daß die Rechnungsergebnisse bei der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation nach oben angeschrieben werden, der neueren Gewohnheit geradezu entgegengesetzt und ein unbefangenes Weiterschreiben an einem Blatte, wenn der Text durch eine Rechnung unterbrochen wird, verhindernd, weil der Araber vor Beginn der Rechnung erst im Kopfe überschlagen muß, wieviel Raum er etwa gebrauchen werde, wie weit unten auf der Seite also er die Rechnung werde beginnen müssen. Folgende Beispiele dürften nunmehr leicht verstanden werden, wenn wir noch bemerken, daß bei der Addition das Überschießende unter die Ziffer nächsthöheren Ranges angeschrieben, nicht im Kopf behalten wird, und daß ähnlicherweise bei der Subtraktion ein für den Minuenden zu borgendes 10 dem Sub-

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, I. Halbjahr, pag. 58—62. [2]) Woepcke, *Traduction du traité d'arithmétique d'Abul Hasan Ali ben Mohammed Alkalsadi* in den *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei* 1859, Bd. XII, pag. 230—275 und 399—438.

trahenden als Einheit der nächsten Ordnung wieder zugesetzt wird[1]) (S. 610).

Die Addition $48 + 97 = 145$ schreibt sich demnach:

$$\begin{array}{r} 145 \\ \hline 48 \\ 97 \\ 1 \end{array}$$

Die Subtraktion $725 - 386 = 339$ schreibt sich:

$$\begin{array}{r} 339 \\ 725 \\ 386 \\ 11 \end{array}$$

Die Subtraktion heißt ṭarḥ, einem von taraha = wegwerfen abgeleiteten Stammworte, also gleichen Stammes mit Tara, welches als Verpackung, die bei der Berechnung des Wertes oder des zu verzollenden Gewichtes einer Ware usw. nicht mit eingerechnet, sondern abgezogen wird, in Gebrauch geblieben ist. Die Multiplikation $73 \times 52 = 3796$ erfolgt „in geneigter Weise“, wenn zunächst $70 \times 50 + 3 \times 50$ dann unter Weiterrückung des Multiplikators 73 auch $70 \times 2 + 3 \times 2$ gebildet und alles addiert wird. Das Exempel sieht dann so aus:

$$\begin{array}{l} 3796 \\ \hline \quad\;\; 6 \\ \;\; 14 \\ \;\; 15 \\ 35 \\ \qquad 52 \\ \;\; 73 \\ \quad 73 \end{array}$$

Es werden noch mancherlei andere Multiplikationsverfahren gelehrt. Ohne auf alle eingehen zu wollen, erwähnen wir nur, daß die sogenannte netzförmige Multiplikation als Multiplikation dschadwal vorkommt[2]) und daß bei einem Verfahren der Stellenzeiger der miteinander zu vervielfachenden Einzelziffern, ihr ass oder Exponent berücksichtigt wird[3]). Die komplementäre Multiplikation, welche wir bei Behâ Eddîn nachweisen konnten, findet sich dagegen bei Alḳalaṣâdî nicht. Ebensowenig findet sich bei ihm die komplementäre Division. Die Division ist überhaupt gegen die Multiplikation etwas dürftig behandelt und nur nach der einen uns von früher bekannten Weise

[1]) Additionen vgl. l. c. pag. 233, Subtraktionen pag. 235, Multiplikationen pag. 237. [2]) Alkalasadi pag. 244. [3]) Ebenda pag. 239.

gelehrt[1]), daß der fortrückende Divisor unter, die Teilreste über den Dividend geschrieben werden, der Quotient wieder unter den Divisor, nachdem ein Strich dazwischen gezogen wurde. Das Beispiel $924 : 6 = 154$ sieht also so aus:

$$\begin{array}{l} 32 \\ 924 \\ 666 \\ \hline 154 \end{array}$$

Ob man dabei den Divisor auf einmal oder in Faktoren nacheinander berücksichtigt, ob man also gleich durch 15 dividiert, oder erst durch 5 und dann nochmals durch 3, übt auf das eigentliche Verfahren eine Wirkung nicht aus.

Aus dem II. Buche von den Brüchen sind die voneinander abhängigen Brüche besonders bemerkenswert, eine Art von Zahlenverbindung, welche die neuere Mathematik aufsteigende Kettenbrüche zu nennen pflegt. Auch frühere Schriftsteller haben dieselben Formen, aber Alḳalaṣâdî setzt ihre Entstehung durch wiederholte Division mit Hilfe der Faktoren eines Divisors am deutlichsten auseinander[2]). Soll etwa $\frac{253}{280}$ in eine solche abhängige Bruchform gebracht werden, so zerlegt man zunächst 280 in $5 \times 7 \times 8$ und dividiert mit 8 in 253. Das geht 31 mal und läßt 5 als Rest. Man schreibt den Rest als Zähler, den Divisor 8 als Nenner. In den früheren Quotient 31 wird wiederholt mit 7 dividiert und der Quotient 4 nebst dem Reste 3 erhalten. Dieser neue Rest nebst dem eben gebrauchten Divisor kommen über und unter dem schon gezogenen Bruchstriche rechts, aber durch einen kleinen Zwischenraum getrennt neben die von vorhin vorhandenen Zahlen zu stehen. Nun dividiert man mit 5 in den Quotient 4, das geht 0 mal und 4 bleibt Rest, worauf man mit diesem Reste und dem Divisor 5 nach der schon einmal befolgten Regel verfährt. Es ist also $\frac{253}{280} = \frac{5\ \ 3\ \ 4}{8\ \ 7\ \ 5}$ oder, wie man gegenwärtig schreibt,

$$= \cfrac{4 + \cfrac{3 + \cfrac{5}{8}}{7}}{5}$$

Vermutlich dürfen wir hier, wie bei den Brüchen des Diophant mit gemischtzahligen Zählern (S. 478) eine späte Nachwirkung altägyptischer Gewohnheit (S. 71) erkennen. Bruchbrüche[3]) sind solche wie $\frac{4}{5}$ von $\frac{3}{7}$ von $\frac{5}{8}$, dessen Wert $\frac{60}{280}$ ist und welcher $\frac{5}{8}\big|\frac{3}{7}\big|\frac{4}{5}$ geschrieben wird.

[1]) Alkalasadi pag. 249—252. [2]) Ebenda pag. 256 *De la dénomination* und pag. 265 *Fractions relatives.* [3]) Ebenda pag. 265 *Fraction divisée en parties.*

Im III. Buche von den Wurzelausziehungen begegnen wir interessanten Näherungsverfahren[1]). Auch Alkalaṣâdî unterscheidet, ob bei Ausziehung der Quadratwurzel $\sqrt{a^2+r}$ der erste Rest $r \leqq a$ oder $r > a$. Im ersteren Falle setzt auch er wie Ibn Albannâ (S. 808)

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a},$$

aber im zweiten Falle nicht wie jener

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+1},$$

sondern

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r+1}{2a+2}.$$

Als noch genaueren Näherungswert gibt er, ohne Fälle zu unterscheiden,

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}$$

an. Alkalaṣâdî weiß auch, daß $p + \sqrt{q}$ mit $p - \sqrt{q}$ sich zu einem rationalen Produkte vervielfacht und benutzt diese Kenntnis zur Umwandlung[2]) von

$$\frac{m}{p+\sqrt{q}} \quad \text{in} \quad \frac{m(p-\sqrt{q})}{p-q}.$$

Weitaus das Wichtigste in diesem Buche ist aber für uns das Auftreten eines **Wurzelzeichens**, insbesondere wenn man es mit den Zeichen des IV. Buches zusammenhält, und an die früher begründete Annahme denkt, daß diese symbolischen Bezeichnungen bis jenseits Ibn Albannâ hinaufreichen. Wurzel, insbesondere Quadratwurzel heißt bei den Arabern dschiḏr (S. 723) und dieses Wort wurde vor den betreffenden Zahlen, aus welchen die Quadratwurzel zu ziehen war, ausgeschrieben. Jetzt tritt statt des ganzen Wortes der Anfangsbuchstabe dschîm desselben auf. Das würde freilich allein eine eigentliche Zeichenschrift nicht begründen, sondern eine Abkürzung sein können. Aber der Buchstabe ج steht nicht vor — d. h. also, da wir es mit arabischen Texten zu tun haben, zur Rechten — der betreffenden Zahl, sondern über derselben und durch einen Horizontalstrich von derselben getrennt[3]). Die Horizontalstriche fehlen auch mitunter, wenn nicht in der Mehrzahl der Fälle, und insbesondere die beiden Beispiele $\sqrt{20\frac{4}{7}}$ und $3\sqrt{6}$ entbehren denselben im Originale. Ein die Wurzelgröße allenfalls vervielfachender Zahlenkoeffizient

---

[1]) Alkalasadi pag. 402—405. [2]) Ebenda pag. 413. [3]) Ebenda pag. 407 bis 414 und *Journal Asiatique* für Oktober und November 1854, pag. 362—364.

steht noch über dem Wurzelzeichen. Mit Anwendung unserer Ziffern sieht also ein derartiger Ausdruck so aus:

$$\sqrt{48} = \overset{\text{ج}}{\overline{48}} \qquad \sqrt{20\tfrac{4}{7}} = \overset{\text{ج}}{\tfrac{4}{7}}\,20 \qquad 3\sqrt{6} = \overset{3}{\overset{\text{ج}}{6}}\,.$$

Symbole finden sich, sagten wir, noch häufiger im IV. Buche, welches dem Aufsuchen der Unbekannten gewidmet ist Schon bei der Regeldetri[1]) werden drei ein Dreieckchen bildende Punkte $\therefore$ zwischen je zwei Zahlen der Proportion gesetzt und die unbekannte Größe durch ein dschîm bezeichnet. Man vermutet, es sei dieses dschîm nicht als Anfangsbuchstabe von dschiḏr gedacht, sondern als Anfangsbuchstabe des Zeitwortes dschahala = nicht kennen, des Stammwortes für madschhûl, welches gewöhnlich in dem Sinne „unbekannte Größe" gebraucht wird. So ist $7:12 = 84:x$ geschrieben:

ج $\therefore$ 84 $\therefore$ 12 $\therefore$ 7.

In der eigentlichen Algebra kommen folgende Symbole vor[2]): Die Unbekannte selbst, schai oder dschiḏr genannt, wird durch ein schîn ش, das Quadrat der Unbekannten mâl durch ein mîm م, der Kubus der Unbekannten kaʿb durch ein kâf ك geschrieben, welche über den zugehörigen Zahlenkoeffizienten stehen. Ein Zeichen der Addition ist nicht vorhanden, unvermittelte Aufeinanderfolge genügt, um die additive Vereinigung der so geschriebenen Glieder zu veranlassen. Die Subtraktion bedient sich des Wortes illâ (außer) الا, links von welchem der Richtung der Schrift gemäß das Abzuziehende geschrieben wird. Das Merkwürdigste endlich ist ein Gleichheitszeichen. Wir erinnern uns, daß in manchen Handschriften des Diophant der Anfangsbuchstabe ι von ἴσοι gleich hieß (S. 472). Gleichsein heißt auf Arabisch ʿadala, wird aber nicht etwa durch seinen Anfangsbuchstaben, sondern durch ein finales lâm ل, mit welchem das Wort abschließt, ersetzt, eine Bezeichnung, welche noch mehr als die übrigen das Wesen bloßer Abkürzung abgestreift und das eines Symbols angenommen hat. So schreibt also Alkalaṣâdî $3x^2 = 12x + 63$ in folgender Weise:

$$6\ 3\ \overset{\text{ش}}{12}\ \text{ل}\ \overset{\text{م}}{3}$$

und $\frac{1}{2}x^2 + x = 7\frac{1}{2}$ in folgender Weise:

$$\tfrac{1}{2}\ 7\ \text{ل}\ \overset{\text{ش}}{1}\ \overset{\text{م}}{\tfrac{1}{2}},$$

---

[1]) Alkalasadi pag. 415. *Journal Asiatique* l. c. pag. 364. [2]) Ebenda pag. 420—429. *Journal Asiatique* l. c. pag. 365—367.

endlich den Ausdruck $2x + 8x^3 - (5 + 6x^2)$ durch

م ك ش
6 5 لا 8 2

In einzelnen Handschriften ist auch das illâ (außer) ähnlich wie das ʿadala (gleich sein) durch eine auffallende Abkürzung, durch die Endsilbe lâ لا ersetzt, wodurch das algebraische Aussehen der Formeln noch erhöht wird. Wir haben schon des Stellenzeigers oder des Exponenten ass erwähnt, der bei Alkalaṣâdî vielfach vorkommt. Er tritt auch bei der Multiplikation von Potenzen der Unbekannten in Gebrauch, und zwar immer in der Einzahl des Wortes, nicht in der Mehrzahl isâs. Es heißt also nicht „der kaʿb hat 3 isâs“, sondern „der ass des kâʿb ist 3“ und ähnlich auch bei höheren Potenzen.

Einer nicht genau bestimmbaren Zeit gehört noch ein kleines Rechenbuch an, dessen Übersetzung ebenfalls veröffentlicht ist[1]). Jedenfalls ist es später als die Lebenszeit des darin zitierten[2]) Ibn Albannâ entstanden, und vor Ende des XVI. S., da die Handschrift, aus welcher es übersetzt ist, am 26. Januar 1573 vollendet wurde[3]). Das Schriftchen heißt Einleitung zum Staub- (ġubârî) und Luft- (hawâʾî) Rechnen. Letzterer Ausdruck ist uns früher (S. 793) schon begegnet und als Kopfrechnen im Gegensatze zum Zifferrechnen verstanden worden, wenn auch sonderliche Kopfrechnungsmethoden nicht beschrieben werden. Abgesehen von der sehr geringfügigen Abänderung, daß bei der Addition wie bei der Multiplikation nicht nur ein Horizontalstrich über den untereinandergestellten Zahlen sich findet, sondern auch ein zweiter Horizontalstrich unter jenen Zahlen, während das Rechnungsergebnis doch wieder oben hingeschrieben wird, ist nur eine kleine Neuerung bei der Subtraktion zu bemerken[4]). Soll nämlich eine Ziffer höheren Wertes g im Subtrahenden von der im Range entsprechenden Ziffer niedrigeren Wertes k im Minuenden abgezogen werden, wo man also 10 borgen muß, so sei es gleichgültig, ob man g von $10 + k$ abziehe, oder aber k von g und den Rest von 10. Mit anderen Worten der Verfasser weiß, daß

$$(10 + k) - g = 10 - (g - k).$$

Fassen wir wieder in Kürze zusammen, was wir von westarabischer Mathematik kennen gelernt haben, so ist ein Unterschied gegen die ostarabische Mathematik namentlich in dreifacher Beziehung wahrnehmbar. Sie ist erstens einseitiger. Sie hat zweitens erst in späterer

1) *Introduction au calcul gobârî et hawâî traduit par* F. Woepcke. *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei* (1866) XIX. 2) pag. 5 des Sonderabzugs. 3) pag. 18 des Sonderabzugs. 4) pag. 3 des Sonderabzugs.

Zeit Schriftstücke geliefert, welche auf uns gekommen sind. Sie wurde drittens mindestens seit dem XII. S. dem christlichen Europa durch in Spanien angefertigte Übersetzungen bekannt. Ihre einseitige arithmetisch-algebraische Entwicklung, welche hauptsächlich unser Augenmerk fesselte, ließ sie auf diesem Gebiete Fortschritte machen, von welchen bei den Ostarabern nichts zu bemerken ist. Es bildete sich allmählich eine förmliche algebraische Schreibweise aus, welche auch den Übersetzungen in die lateinische Sprache sich mitteilte, und welche somit den Europäern gestattete, schon im XII. S. die Lehre von den Gleichungen in größerer Vollkommenheit kennen zu lernen, als wenn sie deren Entwicklung einzig im Oriente bei dem durch die Kreuzzüge hervorgerufenen Zusammentreffen mit arabischer Kultur verfolgt hätten. Was die Rechenkunst, den elementareren aber weitest verbreiteten Teil der Mathematik betrifft, so sehen wir, wie sie im Westen immerhin einige äußere Verschiedenheiten von Zeit zu Zeit sich aneignete, wie wahrscheinlich durch italienische Kaufleute Elemente nichtarabischer Methoden, Spuren des Kolumnenrechnens oder mit anderen Worten eines gezeichneten Abacus, sich eingemischt zu haben scheinen, Spuren, welche wir aber freilich erst vom XIII. S. an bemerken konnten. Eines nur finden wir in keiner Weise, und dieses negative Ergebnis ist zu wichtig, um nicht fort und fort darauf aufmerksam zu machen: wir finden kein komplementäres Rechnen, nicht die komplementäre Division, nicht einmal die komplementäre Multiplikation, während doch gerade die Multiplikation emsig gepflegt und nach verschiedenartigeren Verfahrungsweisen gelehrt wurde, als sie es eigentlich verdient.