IV. Römer.

25. Kapitel.

Älteste Rechenkunst und Feldmessung.

Wenn wir die Geschichte der Mathematik, wie sie auf italienischem Boden geworden ist, zum Gegenstande unserer Untersuchung machen, so müssen wir fast mehr als bei anderen Schauplätzen menschlicher Gesittung uns hüten Verschiedenartiges durcheinander zu mengen. Der Süden Italiens ist es gewesen, wo die hellenische Bildung des Pythagoräismus ihre Blüte hatte. Das geographisch von Italien nicht zu trennende Sizilien hat die mächtige Küstenstadt Syrakus entstehen sehen, und es ist ein halbwegs berechtigter Nationalstolz italienischer Gelehrter, wenn sie Pythagoras und Archimedes ihre Landsleute nennen. Aber freilich mehr als nur halbberechtigt können wir diese Ansprüche auf den Ruhm der größten Mathematiker des Altertums für die eigene Vergangenheit nicht nennen, weil unserer Auffassung gemäß das Volk und die Sprache vor dem Lande die Zugehörigkeit bestimmt, und deshalb waren uns jene Männer Griechen. Zwischen den von Norden kommenden Kriegern, unter deren Streichen Archimedes verblutete, nachdem er seine Vaterstadt gegen sie lange verteidigt hatte, und denen, die im gleichen Dialekte mit Archimed sprachen und schrieben, muß die Kulturgeschichte einen Gegensatz erkennen lassen. Wir denken diesen Gegensatz recht laut zu betonen, wenn wir in diesem Abschnitte unseres Bandes überhaupt nicht von itàlischer, sondern von römischer Mathematik reden. Mag ja auf italischem Boden mancherlei an mathematischem Wissen vorhanden gewesen sein noch bevor Rom entstand. Wir leugnen es so wenig, daß wir den Spuren nachzugehen bemüht sein werden. Immer aber soll, was wir finden, unter dem römischen Sammelnamen vereinigt werden.

Über die älteste Geschichte der Bevölkerung des Landes von Nordosten her sind die Akten noch keineswegs abgeschlossen, wenn man auch gegenwärtig der Annahme zuneigt, eine altitalische Nation habe sich gebildet in der Ebene des Po, nachdem sie vorher von den Hellenen, dann von den Kelten sich getrennt hatte[1]). Von dort ging der Zug nach Süden und trieb ältere Bewohner vor sich her, vielleicht verwandt mit den Sikulern, den Einwohnern von Sizilien, deren Name in alten ägyptischen Urkunden zu den bekanntesten gehört. Wann diese Ereignisse stattfanden, ob mehr als 1000 Jahre vor unserer Zeitrechnung, wie aus der Zusammenstellung mit Persönlichkeiten des trojanischen Krieges, die vielleicht mehr als eine Sage ist, hervorgehen könnte, darüber schwebt wieder tiefes Dunkel, kaum erhellt seit Auffindung jener alten Totenstadt am Albanersee[2]), deren Graburnen unter einer Aschendecke vulkanischen Ursprungs sich erhalten haben, über welche Jahrhunderte einen Pflanzenwuchs hervorriefen, der selbst wieder in einer einen halben Meter mächtigen Peperinschicht eine zerstörende und zugleich schützende Decke fand. Welche Rolle bei den Wanderungen und Niederlassungen auf der apenninischen Halbinsel die Etrusker spielten, welchem Völkerstamme überhaupt diese angehörten, ist ein weiterer Gegenstand wissenschaftlichen Zweifels, und dieser Zweifel erstreckt sich so weit, daß man nicht einmal darüber einig ist, ob diejenigen Sitten und Gebräuche tatsächlich als etruskisch gelten dürfen, welche römisch-priesterliche Überlieferung uns als etruskisch bezeichnet hat.

Wir können und müssen uns genügen lassen, auf das Vorhandensein dieser vielen Rätselfragen von ausgesuchter Schwierigkeit hinzuweisen, so wichtig deren Lösung gerade für die Geschichte der Mathematik wäre. Den Etruskern nämlich gehören mutmaßlich die Zeichen an, welche als Zahlzeichen den Römern dienten, ihnen wird zugeschrieben, was als praktische Feldmessung der Römer sich erhalten hat.

Wir wollen mit den Zahlzeichen unsere Erörterungen beginnen. Zahlenbezeichnung, wenn auch nicht durch Zahlzeichen, war es, wenn die Etrusker, wenn ihnen folgend die Römer in dem Heiligtume der Minerva alljährlich einen Nagel einschlugen, um die Zahl der Jahre vorzustellen[3]). Zahlzeichen sind diejenigen Charaktere,

[1]) H. Nissen, Das Templum, antiquarische Untersuchungen. Berlin 1869. Vgl. besonders Kapitel IV. Italische Stammsagen. [2]) De Rossi in den *Annal. dell' Instit.* 1867, pag. 36 sqq. [3]) Livius VII, 3. Vgl. für andere Stellen Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen 1869, S. 19. Noch andere Analoga wie z. B. einzelne Striche, farbige Steinchen als Zahlenbezeichnung sind mit Beispielen belegt bei Rocco Bombelli, *Studi archeologico-critici circa l'antica numerazione italica Parte I.* Roma 1876, pag. 31.

welche allmählich zu Buchstabenform sich abändernd das bilden, was gegenwärtig als römische Zahlzeichen bekannt ist[1]). Wie die ganze Schrift der Römer und der Etrusker bei hervorragender Ähnlichkeit es doch auch an wesentlichen Unterschieden nicht fehlen läßt, die eine unmittelbare Ableitung der einen aus der anderen zur Unmöglichkeit machen, ist seit einem halben Jahrhundert festgestellt. Schon die linksläufige Schrift der Etrusker gegenüber von der rechtsläufigen der Römer deutet darauf hin, daß der Ursprung jener in eine Zeit zu setzen ist, während deren die Griechen noch nicht durch die Übergangsperiode einer in der Richtung von Zeile zu Zeile wechselnden Schrift hindurchgegangen waren, wogegen die römische Schrift diese Veränderung bereits voraussetzt. Die Annahme nicht unmittelbarer Ableitung auseinander findet noch Bestätigung darin, daß im römischen Alphabete das altgriechische Koppa als Q erhalten ist, welches die Etrusker nicht kennen, während umgekehrt manche Buchstaben dem tuskischen Alphabet angehören, die dem römischen fehlen. Wann das etruskische Alphabet, welches nach Tacitus[2]) durch den Korinther Demaratus nach Italien kam, daselbst zur Einführung gelangte, wissen wir ungefähr. Es wird zwischen 650 und 600 v. Chr. gewesen sein[3]). Die Trennung des römischen Alphabetes von dem gräkoitalischen Mutterstamme ist nicht zeitlich so bestimmt, doch muß sie jedenfalls eingetreten sein, bevor die Benutzung der Buchstaben als Zahlzeichen den Griechen bekannt war, also (S. 121) vor 500 v. Chr., denn bei den Römern sind niemals nach griechischem Muster die aufeinanderfolgenden Buchstaben des Alphabetes als Zahlzeichen verwertet worden[4]). Und dennoch sehen die ältesten Zahlzeichen der Römer, sehen die der Etrusker Buchstaben ungemein gleich und ähneln sich untereinander so sehr (vgl. die hinten angeheftete Tafel), daß die vorhandenen Übereinstimmungen unmöglich als Zufälligkeiten erklärt werden können. Zufällig erscheint vielmehr die Verwandtschaft mit den späteren römischen Zeichen I V X L C M, welche aus der Ähnlichkeit mit Buchstaben durch Volksetymologie sich in diese Buchstabenformen selbst verwandelten, noch ein Zeichen D für 500 zwischen C und M und ein Zeichen q vielleicht aus VI entstanden, für die 6 sich aneignend und C und M mit den Anfangs-

[1]) Ottfried Müller, Die Etrusker Bd. II, S. 312—320. Breslau 1828. Th. Mommsen, Die unteritalischen Dialekte (besonders S. 19—34). Leipzig 1850. Math. Beitr. Kulturl. S. 161 flgg. Friedlein l. c. S. 27 flgg. R. Bombelli l. c. pag. 33. [2]) Tacitus, *Annales* XI, 14. [3]) A. Riese, Ein Beitrag zur Geschichte der Etrusker. Rhein. Museum für Philologie (1865) XX, 295—298. [4]) Über andere Benutzung von Buchstaben als Zahlzeichen bei Römern in vermutlich recht später Zeit vgl. Friedlein l. c. S. 20—21.

buchstaben der Wörter centum und mille vergleichend. Der Ursprung der Zeichen für 5, 50, 500 ist, wie ziemlich allgemein zugestanden wird, in der Halbierung der Zeichen für 10, 100, 1000 zu finden, und nur die Entstehung dieser letzteren bleibt strittig. Am glaubhaftesten dürfte die mit Belegung durch reiches inschriftliches Material wahrscheinlich gemachte Vermutung sein[1]), daß die *Decussatio*, Verzehnfachung, jeweils durch Hinzutreten einer neuen Kreuzung des vorhandenen Zeichens mittels eines hinzutretenden geraden oder gekrümmten Striches hervorgebracht worden sei.

Neben der alphabetischen Reihenfolge ist auch die Benutzung der Anfangsbuchstaben von Zahlwörtern als Zeichen für die Zahlen begreiflich nächstliegend, und so erscheint die Frage nicht müßig, ob vielleicht die Buchstabenähnlichkeit der tuskischen Zahlzeichen so erklärt werden könne? Es ist bisher den Gelehrten, welche mit etruskischen Studien sich beschäftigt haben, nicht möglich gewesen diese Frage vollgültig zu beantworten, doch neigen sie zur Verneinung derselben. Wie schwierig übrigens die Beantwortung ist, geht schon daraus hervor, daß der Wortlaut der etruskischen Zahlwörter keineswegs feststeht. Man hat im Jahre 1848 alte etruskische Würfel gefunden, deren sechs Flächen mit Wörtern beschrieben sind, welche man mach, thu, zal, huth, ki, sa liest[2]). Man hat allseitig diese Wörter für die Namen der sechs ersten Zahlen gehalten, aber man ist uneinig darüber, welche Zahl jedes einzelne Wort bedeute[3]).

Sei nun der Ursprung der tuskisch-römischen Zeichen welcher er wolle, eines tritt bei beiden Völkern hervor, was als hochbedeutsam hervorgehoben werden muß: die **subtraktive Bedeutung** eines Zeichens kleineren Wertes, sofern es vor einem Zeichen höheren Wertes, also bei den Etruskern rechts, bei den Römern links von demselben auftritt, wie IV = 4, IIX = 8, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, wovon das Zeichen für 8 schon zu den Seltenheiten gehört[4]). Die subtraktive Schreibung kann sehr wohl den Zweck der

[1]) Zangemeister in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 10. November 1887. [2]) *Bullettino dell' Instituto di correspondenza archeologica.* Roma 1848, pag. 60, 74. [3]) Vgl. Zeitschr. Mathem. Phys. XXII, Histor.-literar. Abtlg. S. 55, wo die Ansichten von Isaac Taylor denen der italienischen Gelehrten gegenübergestellt sind. Vgl. auch C. Pauli, Die etruskischen Zahlwörter in den Etruskischen Forschungen und Studien von Deecke und Pauli, 3. Heft (Stuttgart 1882), wo die zehn ersten Zahlwörter heißen: 1 = sa, 2 = zal, 3 = thu, 4 = huth, 5 = mach, 6 = ki, 7 = men, 8 = cezp, 9 = semp, 10 = nurth. [4]) Die subtraktiven Ziffern sollen bei den Etruskern häufiger als bei den Römern zur Anwendung gekommen sein. Corssen, Ueber die Sprachen der Etrusker I, 39—41 (Leipzig 1874) gibt XIIIXX = 27, ↑III = 47, auch das zweimal subtrahierende ↑XII = 50 — 10 — 2 = 38 als etruskisch an.

Raumersparung gehabt haben. Darum ist IIX statt VIII möglich, IIIX statt VII unmöglich[1]). Ein sprachliches Subtrahieren haben wir (S. 11) auch bei der Bildung der Zahlwörter anderer Völker in Erwägung ziehen dürfen, nirgend aber als bei den Etruskern und Römern findet sich die Subtraktion in den Zeichen versinnlicht, und es gehört zu den weiteren Eigentümlichkeiten, daß Zeichen und Sprache bei den Römern sich nicht decken. Schriftlich ist die Subtraktion nur bis X, nicht bei den späteren Zehnern in Gebrauch, wie sich auch leicht verstehen läßt, weil z. B. IXXX dem Zweifel Raum gäbe, ob 29 (XXX weniger I) oder 11 (XX weniger IX) gemeint sei. Deutlichkeitsgründe waren es auch, welche dafür den Ausschlag gaben, daß auf Schwertklingen VIIII statt IX geschrieben wurde, weil dieses, je nach der Seite, von welcher man die Klinge betrachtete, mit XI verwechselt werden konnte[2]). Dagegen wird sprachlich die Eins wie die Zwei nie von Zehn, sondern nur von den Zehnern: Zwanzig bis 100 abgezogen. Wir fügen hinzu, daß die Römer gleichfalls allein unter allen Völkern subtraktiver Ausdrücke auch bei Datierungen ihrer Monatstage sich bedienten.

Was die schriftliche Darstellung von Zahlen über Tausend betrifft, so ist zu verschiedenen Zeiten wahrscheinlich verschiedentlich verfahren worden. Eine Übereinstimmung in der Auffassung der einzelnen Stellen ist indessen nicht vorhanden[3]), nur die vertausendfachende Wirkung eines über Zahlzeichen hinweggezogenen Horizontalstriches z. B. $\overline{\text{XXX}} = 30\,000$, $\overline{\text{C}} = 100\,000$, $\overline{\text{M}} = 1\,000\,000$ scheint außer Zweifel.

Wenden wir uns zu den Zahlen unterhalb der Einheit, zu den Brüchen, so stehen wir hier vor einem ausgesprochenen **Duodezimalsystem**. Wir haben es mit einem ähnlichen Gedanken zu tun, wie bei dem Sexagesimalsystem der Babylonier und der griechischen Astronomen. Nur daß dort der jedesmalige Zähler seinerseits angeschrieben wurde, als wenn er als ganze Zahl vorhanden wäre, und der Nenner durch Stellung oder durch ein eigentümliches dem Zähler anhaftendes Zeichen, Strichelchen oder dergleichen sich kund gab; bei den Römern sind dagegen für alle Zwölftel von $\frac{1}{12}$ bis zu $\frac{11}{12}$ besondere Bruchzeichen und Bruchnamen vorhanden. Die Ähnlichkeit beider Systeme zeigt sich beispielsweise in Ausdrücken

[1]) Th. Mommsen, Zahl- und Bruchzeichen. Hermes XXII, 596—614, insbesondere S. 603—605 über die subtraktive Bezeichnung. [2]) Th. Mommsen l. c. [3]) Math. Beitr. Kulturl. S. 162—165. Th. H. Martin in den *Annali di matematica* (1863) V, 295—297. Friedlein l. c. S. 28—31.

wie anderthalb Zwölftel. Unseren Begriffen nach ist das weit umständlicher gesprochen, als wenn wir ein Achtel sagen; dem Römer ist offenbar dieses Umständlichere das Einfachere und Faßlichere, weil er eben ein Zeichen für $\frac{1}{12}$, sowie für die Hälfte von $\frac{1}{12}$ besitzt, ein solches für $\frac{1}{8}$ dagegen nicht hat[1]). Auch der Grieche würde nur von sieben Sechzigsteln und von 30 zweiten Sechzigsteln reden, wenn er nicht neben und vor den Sexagesimalbrüchen die Stammbrüche besäße, die dem Römer fehlen. Eine weitere Ähnlichkeit zwischen den Sexagesimalbrüchen und den römischen Duodezimalbrüchen dürfte darin gefunden werden, daß beide von einer ganz bestimmten Teilung hergenommen sind, also ursprünglich benannte Zahlen waren, bis allmählich der Bruchgedanke über den des kleinen Bogenteiles der Babylonier, des kleinen Gewichtsteiles der Römer die Oberhand gewann. Wie alt freilich die Bruchzeichen bei den Römern gewesen sein mögen, ist nicht genau zu ermitteln. Etruskische Inschriften[2]) von mutmaßlich hohem Alter enthalten das Zeichen $\cap = \frac{1}{2}$. Andererseits läßt ein Ausspruch von Varro die Deutung zu, als sei die kleinste Bruchеinheit von $\frac{1}{288}$ As in der Zeit vor den punischen Kriegen entstanden[3]). Die Frage, wie man zu dem Systeme fortgesetzter Zwölfteilung gekommen sei, läßt sich, gleich vielen ähnlichen Fragen, leichter stellen als beantworten. Möglicherweise ist an die von der Natur gegebene, auf den gegenseitigen Stellungen von Sonne und Mond am Himmel beruhende Zwölfteilung des Jahres in Monate als Ursprung zu denken. Wenn auch Romulus in erster Linie ein Jahr von zehn Monaten einsetzte, so sind doch zwölf Monate von der Sagengeschichte mit dem Namen des Königs Numa oder des älteren Tarquinius in Verbindung gebracht, also vielleicht älter als die römischen Gewichte.

Es erscheint zweckmäßig hier anzuknüpfen, was man über das gewöhnliche Rechnen der Römer weiß mit Ausschluß eines denselben vielleicht bekannten wissenschaftlichen Rechnens, von welchem unter Boethius die Rede sein muß. Das gewöhnliche Rechnen wird wohl auf dreierlei Art geübt worden sein: als Finger-

[1]) Auch noch Volusius Maecianus, der in der Mitte des II. S. n. Chr. lebte (vgl. Mommsen in den Abhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissensch. III, 281—285. 1853), setzt in seinen Zeichen $\frac{1}{8} = \frac{1\frac{1}{2}}{12}$. [2]) Vgl. Corssen l. c. [3]) Varro, *De re rustica* I, 10: *Habet iugerum scriptula CCLXXXVIII quantum as antiquus noster ante bellum Punicum pendebat.*

rechnen, als Rechnen auf einem Rechenbrett, als Rechnen unter Benutzung vorhandener Tabellen.

Das Fingerrechnen hat die älteste Überlieferung für sich, indem nach Plinius[1]) schon König Numa Zahlendarstellung mittels der Finger kannte. Er ließ nämlich ein Standbild des doppeltbeantlitzten Janus errichten, dessen Finger die Zahl 355 als Zahl der Jahrestage andeuteten. Ein späterer römischer Schriftsteller, Macrobius[2]), weiß von derselben Sitte den Janus mit gekrümmten Fingern abzubilden, nur nennt er nicht König Numa als Urheber und gibt die dargestellte Zahl der Jahrestage zu 365 an, offenbar dem späteren römischen Jahre diese Zahl entnehmend, ohne daß ein altes Bildwerk ihm vor Augen gewesen wäre. Martianus Capella[3]) läßt die als Göttin auftretende Arithmetik die Zahl 717 mittels der Finger darstellen. Neben diesen Angaben ganz bestimmter durch Fingerbeugung angedeuteter Zahlen kann man noch viele Stellen römischer Schriftsteller aus den verschiedensten Zeiten anführen, welche das Fingerrechnen im allgemeinen bestätigen. Die rechte Hand, sagt Plautus[4]), bringt die Rechnung zusammen. Mit Wort und Fingern läßt Suetonius[5]) die Goldstücke abzählen. Bei Quintilian[6]) ist von einer Abweichung von der Rechnung durch unsichere oder unschickliche Bewegung der Finger die Rede, Firmicus Maternus[7]) erinnert daran, daß Anfänger im Rechnen die Finger zu Hilfe nehmen und ähnlich bei anderen[8]). Wir führen nur eine Stelle noch besonders an, weil sie die fortschreitende Reihenfolge von links nach rechts bestätigt, welche wir zuletzt noch bei Nikolaus Rhabda (S. 514) als Regel kennen gelernt haben. Juvenal[9]) läßt nämlich den mehr als Hundertjährigen die Zahl seiner Jahre schon an der rechten Hand zur Darstellung bringen. Eine ausführliche Beschreibung, wie man Zahlen durch Fingerbewegungen kenntlich mache, von Beda Venerabilis, dem schottischen Mönche aus dem VII. und VIII. S., gehört bereits der Literatur des Mittelalters an, und wird uns im 38. Kapitel beschäftigen.

Vielleicht mit jener mittelalterlichen Verbreitung des Finger-

[1]) Plinius, *Histor. natur.* XXXIV, 16. [2]) Macrobius, *Conviv. Saturn.* I, 9. [3]) Martianus Capella, *Satura VII init.* [4]) Plautus, *Miles gloriosus Act. II sc. 3: Dextera digitis rationem computat.* [5]) Suetonius, Claudius XXI . . . *ut oblatos aureos voce digitisque numeraret.* [6]) Quintilian I: *si digitorum solum incerto aut indecoro gestu a computatione dissentit.* [7]) Firmicus Maternus I, 5, 14 *Vides ut primos discentes computos digitos tarda agitatione deflectant?* [8]) Eine Zusammenstellung, bei welcher auch die Kirchenväter berücksichtigt sind, bei Rocco Bombelli l. c. pag. 101—107. [9]) Juvenalis, *Sat.* X, v. 248 *suos jam dextra computat annos.*

rechnens, vielleicht aber auch schon mit römischen Gewohnheiten sind Spuren in Verbindung zu setzen, welche bis auf den heutigen Tag sich erhalten haben. In der Walachei[1]) bedient man sich der Finger, um das Produkt zweier einziffriger Zahlen, die größer als 5 sind, zu finden. Die Finger jeder der beiden Hände erhalten vom Daumen zum Kleinenfinger aufsteigend die Werte 6 bis 10. Hat man nun zwei Zahlen, z. B. 8 mal 9 zu multiplizieren, so streckt man den Achterfinger (Mittelfinger) der einen und den Neunerfinger (Ringfinger) der anderen Hand vor. Die nach dem Kleinenfinger hin übrigen Finger beider Hände (2 Finger und 1 Finger) multipliziert man miteinander und hat damit die Einer ($2 \cdot 1 = 2$) des Produktes. Die von den Daumen aus vorhandenen Finger mit Einschluß der ausgestreckten Finger (3 Finger und 4 Finger) addiert man und hat damit die Zehner ($3 + 4 = 7$) des Produktes ($8 \cdot 9 = 72$). Die Richtigkeit dieser komplementären Multiplikation ist einleuchtend. Heißen a und b die zu vervielfältigenden Zahlen, so sind $10 - a$ und $10 - b$ die noch übrigen Finger zum Kleinenfinger hin, $a - 5$ und $b - 5$ die Finger vom Daumen an. Die Regel läßt also $(10 - a) \cdot (10 - b) + 10\,(a - 5 + b - 5) = 100 - 10a - 10b + ab + 10a + 10b - 100 = ab$ bilden. Der Zweck, der erreicht wird, besteht darin, daß hauptsächlich nur der Anfang des Einmaleins bis zu 4 mal 4 auswendig behalten werden muß und die Erlernung der Abteilung, die mit 6 mal 6 beginnt, erspart bleibt.

Wenn wir nun die Mutmaßung wagen, es sei hier römisches Fingerrechnen zu verfolgen, so veranlassen uns dazu die eigentümlichen Tatsachen, daß die römischen Zahlzeichen VI, VII, VIII, oder IIX, VIIII oder IX sehr leicht zur Beachtung der Ergänzungszahlen, die hier benutzt sind, führen konnten; daß ein ganz ähnliches Verfahren auch bei französischen Bauern gefunden worden ist; daß wir im Mittelalter ähnlichen Regeln begegnen werden, die im 40. Kapitel zu besprechen sind; daß auch ein komplementäres Divisionsverfahren unsere Aufmerksamkeit mehrfach in Anspruch nehmen wird, für welches ein anderer Ursprung als ein römischer zunächst nicht zu Gebote steht. Wir sagen zunächst, denn es wäre immerhin möglich, daß auch die komplementären Rechnungsverfahren bis nach Griechenland verfolgt werden müßten, wenn die nötigen Voraussetzungen, wir meinen griechische Lehrbücher der Rechenkunst, vorhanden wären. Wir erinnern an jenes dem Nikomachus

[1]) D. Pick in Hoffmanns Zeitschr. für math. und naturw. Unterricht V, 57 (1874).

zugeschriebene Verfahren die Quadrate von Zahlen zu finden (S. 433), welches zwar mit der komplementären Multiplikation sich nicht deckt, aber eine entschiedene Familienähnlichkeit zu derselben nicht verkennen läßt.

Nächst dem Fingerrechnen war bei den Römern das Rechnen auf dem Rechenbrett üblich und bildete einen Gegenstand des elementaren Unterrichtes. Auch dafür ist eine ganze Anzahl von Stellen gesammelt worden[1]), welche meistens auf einen mit Staub überdeckten Abacus Bezug nehmen, auf welchem man alsdann geometrische Figuren aller Art entwerfen konnte, welche man aber auch imstande war durch Ziehen gerader Striche in Kolumnen abzuteilen, welche mit Steinchen, calculi, belegt zum Rechnen dienten. Die sogenannte Pariser Gemme, wahrscheinlich etruskische Arbeit, zeigt einen Rechner, der in der Linken eine mit Zahlzeichen kolumnenförmig (allerdings ohne abteilenden Strich) bedeckte Tafel hält[2]), während er mit der Rechten Steinchen auf einen Tisch legt. Neben diesem somit für römische Übung gesicherten Kolumnenabacus gab es aber auch einen Abacus mit Einschnitten und in diesen Einschnitten verschiebbaren Knöpfchen. Vier solcher Vorrichtungen[3]) haben sich bis in die neuere Zeit erhalten, darunter wenigstens eine, deren altertümlicher Ursprung von dem Beschreiber ganz besonders hervorgehoben worden ist[4]).

Eine solche römische Rechentafel, eigens zum Rechnen, nicht zu mehrfachem Gebrauche hergerichtet, war von Metall und hatte acht längere und acht kürzere Einschnitte, je einen von jenen mit einem von diesen in gerader Linie. In den Einschnitten waren bewegliche Stifte mit Knöpfen, in einem der längeren fünf Stück, in den übrigen vier, in den kürzeren je einer. Jeder längere Einschnitt war oben, also nach der Seite, wo der kürzere Einschnitt ihn fortsetzte, mit einer Überschrift versehen. Der Gebrauch der Rechentafel ergibt sich von selbst. Sie wurde mit zu dem Rechner senkrechten Einschnitten auf eine beliebige Unterlage aufgestellt, zu welchem Zwecke unten an der Tafel Füßchen angebracht waren. Dem Rechner am nächsten waren, wie wir schon andeuteten, die längeren Einschnitte; die kürzeren waren weiter von ihm entfernt. Die Marken in den längeren Einschnitten bedeuteten einzelne Einheiten ihrer Klasse; die in den kürzeren Einschnitten galten fünf

[1]) Rocco Bombelli l. c. pag. 116 sqq. [2]) Zangemeister, Monatsberichte der Berliner Akademie vom 10. November 1887. Die Tafel ist auf S. 11 des Sonderabzuges abgedruckt. [3]) Deren Beschreibung bei Becker-Marquart, Handbuch der römischen Alterthümer V, 100. [4]) Claude du Molinet, *Le cabinet de la bibliothèque de Ste. Geneviève.* Paris 1692, pag. 25.

solcher Einheiten. Nur der erste kürzere Einschnitt von rechts bildete dabei eine Ausnahme, indem dessen einzelne Marke sechs Einheiten bedeutete. Dieser äußerste Einschnitt (sofern man die beiden Einschnitte, den längeren und den kürzeren, nur als Abteilungen eines einzigen in der Mitte unterbrochenen Einschnittes betrachtet) war nämlich mit Θ bezeichnet und enthielt die Unzen, deren 12 auf eine Aß gingen. Die übrigen für die Asse bestimmten Einschnitte trugen in nach links dekadisch aufsteigender Reihenfolge die Bezeichnungen I, X, C usf. bis zu IXI oder einer Million. Der erste Einschnitt von rechts aus konnte danach zur Angabe von 11 Unzen noch dienen, wenn man die ursprünglich so weit als möglich voneinander getrennten Knöpfchen der beiden Abteilungen sämtlich gegen die Mitte des Brettes vorschob, wo die schriftlichen Bezeichnungen standen, und so einander näherte. An diesem Orte erhielten sie den Zählwert von fünf einzelnen Unzen und einer Sechsunzenmarke. Kamen dann noch weitere Unzen hinzu, so ersetzte man ihrer 12 durch eine gegen die Mitte vorgeschobene Marke der nächsten Linie, d. h. der Einheiten der Asse. In den folgenden sieben Einschnitten konnte man durch ähnliches Verfahren bis zu je neun Einheiten in jeder Klasse von den Einern bis zu Millionen von Assen darstellen. So zeigten drei verschobene Knöpfe in einem längeren Einschnitte und der einzelne in dem zugehörigen kürzeren Einschnitte gleichfalls nach der Mitte des Abacus fortgerückt die Zahl 8 in der entsprechenden Klasse an. Neben den Einschnitten der Unzen waren noch drei kleinere Einschnitte, die beiden oberen mit je einer Marke, die unterste mit zwei Marken versehen. Die Bedeutung dieser Einschnitte war den beigeschriebenen Zeichen zufolge von oben nach unten die halbe Unze semuncia, die viertel Unze siciliquus, die drittel Unze duella. Das alles ergibt sich aus der Betrachtung der Rechentafel selbst mit Ausnahme dessen, was wir über die nötige Verschiebung der Knöpfchen bemerkt haben, und wofür wir eine altertümliche Quelle anzugeben allerdings nicht imstande sind. Es muß eben der Natur der Sache nach so oder umgekehrt verfahren worden sein, und da scheint uns, daß die Übersicht wesentlich erleichtert ist, wenn die wirklich zu zählenden Knöpfchen in der Mitte des Brettes vereinigt waren, dicht bei den Zeichen, die den Wert des einzelnen Knöpfchens angaben, daß also, wo die Nützlichkeit den Ausschlag geben durfte, nicht leicht eine andere Wahl getroffen worden sein wird, als die wir andeuteten.

Auf diesem Rechenbrette konnten, wie auf jedem ähnlichen Apparate mit festen Marken, Additionen und Subtraktionen leicht vollzogen werden. Wollte man multiplizieren oder dividieren, so war

es nötig die Zahlen, an welchen jene Operationen vorgenommen werden sollten, besonders, etwa schriftlich, anzumerken, und der Abacus vermittelte nur die Vereinigung der Teilprodukte, beziehungsweise die Subtraktionen der aus den Teilquotienten entstandenen Zahlen.

Dabei war ein Kopfrechnen mit Benutzung des Einmaleins nicht zu umgehen, und bei diesem konnte vielleicht die beschriebene Fingermultiplikation Anwendung finden. Wir wissen, daß römische Knaben in ihren Schulen im Kopfrechnen geübt wurden, daß dem Vorübergehenden die einförmigen Töne des 2 mal 2 sind 4, bis bina quatuor, welches die Knaben gemeinsam herzusingen (decantare) hatten, entgegenzudringen pflegten, daß damit noch andere Mißtöne sich häufig genug vereinigten, das Klatschen der Rute oder der Peitsche und das Heulen der in solcher Weise Unterrichteten.

Kamen freilich Multiplikationen hoher Zahlen, oder gar solche von Brüchen vor, so nutzte dem ungeübten Rechner nicht Rechenbrett noch gewöhnliches Einmaleins, er mußte die Produkte von einem tabellarisch geordneten Rechenknechte hernehmen, und das ist es, was wir weiter oben ein Rechnen unter Benutzung vorhandener Tabellen genannt haben. Ein solcher Rechenknecht hat sich erhalten, dessen freilich sehr später Verfasser überdies nicht auf italischem Boden lebte. Gleichwohl wird ein Zweifel darein nicht gesetzt werden können, daß es Römisches und nur Römisches ist, was hier vorliegt, mag auch darüber gestritten werden können, ob ältere Musterwerke bloß benutzt oder geradezu abgeschrieben sind.

Wir meinen den Calculus des Victorius[1]), eines Schriftstellers, der mitunter aber wahrscheinlich unrichtig auch Victorinus genannt wird. Seine Persönlichkeit bestimmt sich dahin, daß er aus Aquitanien stammte und im Jahre 457 n. Chr. eine sogenannte Osterrechnung, d. h. eine Anleitung zur Auffindung des richtigen Osterdatums verfaßte. Vor oder nach diesem canon paschalis, das eine ist ebensogut möglich als das andere, richtete der als eifriger und gewissenhafter Rechner von seinen Kommentatoren gerühmte Victorius diese Tabellen her, aus welchen Vervielfältigungen sowohl ganzer als gebrochener Zahlen in großer Ausdehnung entnommen werden können. Mathematischer Wert ist den Tabellen selbstverständlich nicht beizulegen. Wir müssen nur bemerken, daß auf ihnen eigentümliche Bruchzeichen sich befinden, verschieden von denen der älteren Schriftsteller, dagegen sich forterbend durch das ganze Mittelalter.

[1]) Vgl. Christ in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie 1863, S. 100—152. Dann Friedlein in der Zeitschr. Math. Phys. XVI, 42—79 (1871) und im *Bullettino Boncompagni* 1871, pag. 443—463, wo der, wie es scheint, zuverlässigste Text aus einer Vatikanhandschrift abgedruckt ist.

Bevor wir das Rechnen der Römer verlassen, fordert die eigentümliche Anwendung eines gewissen Zahlwortes bei ihnen ein Wort der Besprechung: *sexcenti* = sechshundert, welches in der Bedeutung unendlich viele bei Schriftstellern fast jedes Zeitalters, soweit sie sich erhalten haben, erstmalig aber bei Plautus um 200 v. Chr. vorkommt. Wir nehmen keinen Anstand bei einer vor langer Zeit geäußerten Vermutung[1]) zu verharren, dieses sexcenti sei das chaldäische ner. Wenn (S. 45) Chaldäer 139 v. Chr. aus Rom vertrieben wurden, so darf man ihren damals erworbenen schädlichen Einfluß für alt genug halten, daß etwa sechzig Jahre früher ein von ihnen oftmals unbestimmt gebrauchtes Zahlwort sich in weiteren Kreisen einbürgerte.

Wir leiteten diese Erörterungen, welche uns, wie man sieht, chronologisch aber nicht mathematisch sehr weit geführt haben, mit der Behauptung ein, wie die Zahlzeichen der Römer, so werde auch deren praktische Feldmessung auf etruskische Ursprünge zurückgeführt, sei nun die Überlieferung eine berechtigte oder nicht. Wir wenden uns zu diesem zweiten Gegenstande, welcher ebenfalls eine weitläufigere Erörterung fordert.

Der älteste uns bekannte römische Schriftsteller, welcher mit nicht mißzuverstehenden Worten es ausspricht, die Art, wie die Begrenzungen festgestellt werden, rühre von den Etruskern her[2]), ist Varro etwa 50 bis 80 Jahre vor dem Anfange der christlichen Zeitrechnung, und von ihm aus begegnen wir dieser Überlieferung durch Jahrhunderte.

Die Begrenzungen, von denen die Rede ist, sind sehr allgemeiner Natur. Demselben Grundgedanken gehorchend finden sie sich überall, wo es um gesetzliche räumliche Absonderung sich handeln kann, bei der Anlage der Stadt wie des Lagers, bei der Vermessung des angebauten Landes, bei dem Grundrisse des bürgerlichen Hauses wie des Hauses, als dessen Eigentümer eine Gottheit gilt. Diese letztere, der Tempel, führt sogar den Namen nach dem Abschneiden (τέμνειν) aus dem umgebenden Grund und Boden, und ein templum ist bis zu einem gewissen Grade jedes Grundeigentum[3]). Wenn auch der Begriff des Templum in der römischen Religion und allen mit ihr zusammenhängenden Verrichtungen eine maßgebende Rolle spielt, er hat sich gleichwohl so wenig aus dem des Heiligen, Gottgeweihten

[1]) Mathem. Beiträge Kulturl. S. 362. [2]) *Limitum prima origo, sicut Varro descripsit, a disciplina Etrusca.* Römische Feldmesser I, 27. [Unter dem Zitate „Römische Feldmesser" verstehen wir die Schriften der Römischen Feldmesser herausgegeben und erläutert von F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff. Berlin 1848 und 1852.] [3]) Nissen, Das Templum S. 7, 8, 10, 55 und häufiger.

entwickelt, daß er sich mit diesem nicht einmal deckt. Eines der höchsten Heiligtümer in Rom, das der Vesta, war sogar kein Templum. Die städtische Anlage dagegen gehört unter den genannten Begriff. Die italische Stadt nämlich entsteht nicht gleich der modernen und mittelalterlichen im langsamen Verlaufe der Zeiten von einzelnen Häusern zum Dorf, vom Dorfe zur Stadt anwachsend. Sie wird auf einmal geschaffen durch eine einzige politisch-religiöse Handlung. Sie weiß ihren Gründer, ihr Gründungsjahr, oftmals ihren Gründungstag zu nennen, den man dann alljährlich als städtisches Fest feiert.

Die Bedingung, welche nun solcher Absteckung von Grenzen die Gesetzmäßigkeit verleiht, besteht darin[1]), daß der Gesichtskreis durch zwei senkrecht zueinander stehende Gerade in vier Teile geschnitten werde, und daß die Geraden ein für allemal die Richtungen für die Seiten der rechteckigen Einzelgebilde abgeben, mögen Häuser oder Feldstücke, Zimmer oder Tempelräume diese Einzelgebilde sein. Die beiden Richtungen werden überdies nicht willkürlich angenommen, sondern sollen mit den Verbindunglinien der einander gegenüberliegenden Haupthimmelsgegenden übereinstimmen.

Wir erinnern uns, daß eine derartige Orientierung religiösen Zwecken dienender Baulichkeiten uns auch an anderen Orten bemerklich wurde, daß wir (S. 15) zum voraus ankündigten, wir würden in der häufig vorkommenden Tatsache selbst keinen Grund erkennen, eine Übertragung von einem Volke zum anderen mit Notwendigkeit annehmen zu müssen. Wir finden es angemessen zusätzlich hier zu bemerken, daß eine solche Übertragung für die altitalischen Orientierungen weniger als irgend sonstwo anzunehmen sein wird. Jedenfalls hat hier und nur hier der Orientierungsgedanke eine Entwicklung genommen wie sonst nirgend, hat er die Errichtung fast jedes Gebäudes, fast jeder Verbindung von Gebäuden in so folgerichtiger Weise, wie wir es schon andeuteten, beeinflußt. Nicht bloß ein einzelner Tempel, die römischen Gesetzen unterworfene Welt war nach einem einzigen rechtwinkligen Koordinatensysteme geordnet[2]), und wir werden auf diesen Gedanken noch zurückzugreifen haben.

Die Abszissenachse des gemeinsamen Systems war die Ostwestlinie, dessen Ordinatenachse die Südnordlinie oder Mittagslinie.

[1]) Agrimensoren S. 65 flgg. [2]) Nissen, Das Templum S. 165: „Seit Augustus war der Culturkreis des Mittelmeeres zu einem einzigen politischen Ganzen geschlossen worden; das Templum, welches einst auf den palatinischen Hügel beschränkt gewesen war, hatte sich ausgedehnt in immer weiteren Kreisen und anjetzt war das letzte und grösste Templum constituirt worden."

Allerdings zeigen die Trümmer von Tempeln, von Städteanlagen und dergleichen, welche man genauer auf ihre Lage zu prüfen noch nicht gar lange begonnen hat, nicht ganz unerhebliche Abweichungen von der wahren astronomischen Mittagslinie. Es ist für unsere Zwecke durchaus gleichgültig, ob diese Verschiedenheiten unabsichtlich, ob sie absichtlich entstanden sind; ob sie, wie man früher annahm, aus einem ungeschickten Verfahren derer hervorgingen, welche die Richtungen bestimmten, oder ob, wie eine jedenfalls geistreiche und genaue Prüfung verdienende Vermutung es will[1]), die Richtung nach dem Punkte des Sonnenaufgangs am Gründungstage des betreffenden Tempels in der Abszissenachse festgehalten werden sollte, einem Tage, der selbst keineswegs willkürlich angenommen wurde, sondern der jedesmalige Hauptfeiertag derjenigen Gottheit sein mußte, welcher das Heiligtum geweiht werden sollte.

Wir haben für die Grundrichtungen uns der ganz modernen Namen der Koordinatenachsen bedient. Den Römern hießen dieselben Decimanus und Cardo, offenbar sehr altertümliche Namen, wie man gewiß mit Recht schon daraus gefolgert hat, daß als Abkürzung für Cardo stets ein K benutzt worden ist, ein Buchstabe, der der römischen Schrift im übrigen schon frühzeitig abhanden kam. Die Bedeutung von Decimanus dürfen wir heute wohl nur als unbekannt bezeichnen[2]). Wie die antike Ableitung des Wortes Decimanus von einem selbst mehr als zweifelhaften duocere, zweiteilen, weil der Raum überhaupt in zwei Abteilungen zerfällt worden sei, sprachlich ganz und gar unhaltbar ist, so ruht eine moderne Ableitung, welche Decimanus einfach aus decem entstanden wissen will, sachlich auf gar schwachen Füßen. Die Italiker, sagt man, bedienten sich von uralters her eines Dezimalsystems. Der Zehnte macht daher die Reihe voll, und die Linie, welche eine Flächeneinheit begrenzt, erhielt passend von ihm den Namen, gerade wie diejenige, welche die Flächeneinheit halbiert, die fünfte heißt. Wir vermögen diese Schlüsse als genügend nicht anzuerkennen. Zuerst würde man uns nachweisen müssen, daß die begrenzte Flächeneinheit wenigstens nach einer Richtung die Seitenlänge 10 hatte, und dann müßte man uns noch erklären, wie neben dem Worte via quintana für eine Querstraße auch die Wortverbindung decimana quintaria entstehen konnte, bevor wir jene Deutung als gesichert anerkennen. Um so zweifelloser ist Cardo, die Angel, um welche das Weltall sich dreht, die Weltachse.

[1]) Diese Theorie ist von Nissen in seinem mehrerwähnten Werke über das Templum aufgestellt. [2]) Vgl. Agrimensoren S. 66 mit Nissen, Das Templum S. 12 und 27.

Jedenfalls zog bei irgend einer Gründung der Augur[1]) zuerst einen Decimanus, dann senkrecht zu ihm einen Cardo, und somit sind es zwei praktische Tätigkeiten, welche er von Anfang an auszuüben verpflichtet und folglich auch befähigt sein mußte: die Ostwestlinie zu bestimmen und zu einer gegebenen Geraden auf dem Felde eine Senkrechte zu ziehen.

Für die Bestimmung der Ostwestlinie sind drei verschiedene Methoden durch Hyginus, einen Feldmesser etwa aus dem Jahre 100 n. Chr., beschrieben. Die erste Methode[2]) richtete ein zum Visieren geeignetes Instrument, von welchem wir noch zu reden haben, nach dem Punkte des Horizontes, wo wirklich die Sonne aufging. Diese Richtung wurde als Ostwestlinie, die zu ihr senkrechte als Cardo bestimmt, und, fügte der Beschreiber im stolzen Gefühle seiner Überlegenheit hinzu, um Mittag stimmte diese Mittagslinie nicht mit der Wirklichkeit überein. Die zweite Methode[3]) befestigte auf geebneter Grundlage einen senkrechten Stift als Schattennehmer, sciotherum, und beschrieb um denselben als Mittelpunkt einen Kreis, dessen Halbmesser kleiner als die größte Schattenlänge des Stiftes gewählt werden mußte. Sowohl des Morgens als des Nachmittags mußte der Schatten einmal so lang werden, daß sein Endpunkt genau in diesen Kreisumfang eintraf, und die beiden Punkte, in welchen solches stattfand, hatte man zu beobachten und anzumerken, endlich zu verbinden. Die Verbindungsgerade war der gewünschte Decimanus. Die dritte Methode[4]) machte von drei ungleichen Schattenlängen Gebrauch, welche in kurz aufeinander folgenden Zeitpunkten, aber sämtlich vormittags, auf der Grundebene des Sciotherums verzeichnet worden waren.

Die letzte Methode, unter deren Vorzügen wir nur den einen hervorheben wollen, daß sie unabhängig davon war, ob die Sonne in einem gewissen Momente unbewölkt am Himmel stand und die vorausbestimmte Schattenlänge wirklich liefern konnte oder nicht, setzt Kenntnisse der Stereometrie in einem Maße voraus, daß wir ihre Entstehung nur bei einem Schriftsteller vermuten dürfen, dessen

[1]) Der Name Augur wird (nach Nissen l. c. S. 5, Anmerkung 1) von J. Schmidt mit *aio, auctor, autumari, εὔχεσθαι* in Verbindung gebracht. [2]) *Hygini gromatici de limitibus constituendis* in Römische Feldmesser I, 170. [3]) Hyginus, Römische Feldmesser I, 188—189. [4]) Ebenda 189—191. Vgl. Agrimensoren S. 68—69. Über diese Methode hat schon Cristini geschrieben, von welchem 1605 in Turin ein Druckwerk herauskam: *Methodus inveniendae meridianae lineae ex tribus umbris, simul cum paraphrasi in similem methodum conscriptum ab Hygino Augusto Liberto.* Vgl. *Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero etc. con Giovanni Antonio Magini pubblicato ed illustrato da* Antonio Favaro. Bologna 1886, pag. 296, 302 und 304, Note 1.

wissenschaftliche Bildung eine weit höhere war, als Römer sie unserer persönlichen Überzeugung nach je besaßen. Wir meinen, es müsse eine griechische Methode aus der Zeit entwickelter Stereometrie sein, wenn es auch nicht möglich gewesen ist, sie bei irgend einem der uns erhaltenen griechischen Astronomen aufzufinden.

Die von uns als zweite bezeichnete Methode dürfte, wenn auch nicht der ältesten Zeit, doch einem erheblich früheren Zeitalter als dem des Hyginus angehören. Ebendieselbe beschreibt nämlich auch Vitruvius[1]) um das Jahr 15 v. Chr. Andererseits kann sie in Rom nicht früher als frühestens 250 v. Chr. etwa bekannt gewesen sein, wie daraus hervorgeht, daß sie den Gebrauch einer Art von Sonnenuhr als bekannt annimmt, während eine solche nach einer Angabe im Jahre 293, nach einer anderen gar erst 263 erstmalig in Rom aufgerichtet wurde[2]).

So bleibt uns als ältestes italisches Verfahren kein anderes übrig als jenes dem Gedanken nach einfachste Hinschauen nach der Gegend, wo die Sonne zuerst sichtbar wurde, ein Verfahren welches bei aller Unzuverlässigkeit doch eine erträgliche Orientierung liefern kann, wenn es zu einer Jahreszeit vorgenommen wurde, welche nicht gar zu entfernt von der Tagundnachtgleiche lag[3]).

Ihm war nur ein Apparat unentbehrlich, der womöglich zwei Zwecken zu dienen hatte: eine Richtung einzuvisieren, eine andere Richtung senkrecht zur ersteren auf dem Felde zu bestimmen; von einem solchen altitalischen Instrumente sprechen uns aber die Berichterstatter unter dem Namen Groma. Auch dieses Wort ist nach Ursprung und Bedeutung keineswegs über jeden Zweifel erhaben[4]). Die alte Annahme, groma komme von dem griechischen *γνώμων* her, ist unhaltbar, weil nicht bloß die beiden unter diesen Namen bekannten Dinge verschieden sind, sondern auch der griechische Gnomon, die Sonnenuhr, mit dem Namen in römische Schriftsteller Eingang fand. Dagegen ist nicht ausgeschlossen, daß beiden Wörtern ein und dasselbe Stammwort zugrunde liege, ein Stammwort, welches italisch geschrieben vielleicht gnorma hieß, und ein Senkrechtes im allgemeinen bedeutet haben mag, wie früher *γνώμων*. Diese gnorma konnte sowohl in norma als in groma übergehen. Als aber die Römer viel später den Gnomon der Griechen herübernahmen, mochte die Ableitung der Groma längst aus dem Bewußtsein geschwunden gewesen sein, so daß es möglich wurde, daß beide Bezeichnungen,

[1]) Vitruvius Lib. I, Kap. 6, § 6. [2]) Agrimensoren S. 71. [3]) Roms Geburtstag wurde durch das Parilienfest am 21. April begangen. Nissen, Das Templum S. 166. [4]) Vgl. Agrimensoren S. 72 flgg. mit Hultschs Rezension in Fleckeisen und Masius, Jahrbücher der Philol.

ursprünglich verwandt, jetzt unbedenklich zur Benennung zweier verschiedener Vorrichtungen gebraucht wurden, nachdem der Heimatsschein des älteren Wortes, wenn wir so sagen dürfen, verloren gegangen war. Gegen diese im allgemeinen sehr annehmbare Auffassung läßt sich, soviel wir sehen, nur der eine nicht unbedenkliche Einwand erheben, daß alsdann der Name, welchen die Groma (oder auch cruma, wie es sich wohl findet) bei den Etruskern, welche eines gleichen Instrumentes sich bedienten, besaß, besessen haben muß, spurlos verloren gegangen wäre, ein etwas mißlicher Umstand gegenüber von den verschiedenen älteren und jüngeren Namen, die sich erhalten haben.

Solche jüngere Namen sind machinula und stella, und wenn von groma der Name der Feldmesser, gromatici, sich hergeleitet hat, eine Art amtlicher Personen, die in ältester wie in jüngster Zeit eine festgegliederte Genossenschaft, fast eine Zunft, bildeten, wenn Groma selbst auch den Platz in der Mitte der Hauptstraße eines Lagers oder einer Stadt bezeichnete, wo bei der Gründung das Instrument aufgestellt worden war, so läßt die Variante stella uns erkennen, welcherlei Gestalt jenes Instrument gehabt haben muß. Es war der Stern, welcher zu Herons Zeiten bereits durch die Dioptra überholt noch immer bei einzelnen in Gebrauch war (S. 382). Was aber aus diesem Namen geschlossen werden konnte, erhielt zuerst Bestätigung in der Abbildung einer Groma (Fig. 80), die bei Ivrea auf dem Grabsteine eines römischen Feldmessers aufgefunden worden ist[1]), und wurde vollends sichergestellt, als eine wirkliche Groma an den Tag kam[2]). Die Groma war ein Winkelkreuz, gebildet durch zwei in horizontaler Ebene sich schneidende Lineale und aufgestellt auf einem mit Eisen beschlagenen Fußgestelle, dem ferramentum. An den Enden der Lineale herabhängende Bleisenkel, vier an der Zahl, wenn auch die Abbildung auf dem Grabsteine nur noch deren zwei erkennen läßt, verbürgten die wagrechte Aufstellung.

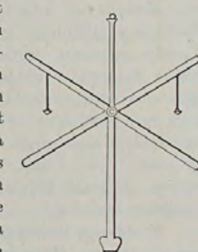


Fig. 80.

[1]) Gazzera hat die betreffende Grabschrift 1854 mit 33 anderen im XIV. Bande der II. Serie der Abhandlungen der Turiner Akademie veröffentlicht. Cavedoni lenkte dann im *Bullettino archeologico napoletano, nuova seria, anno* 1°, die Aufmerksamkeit auf den 11. Stein mit der Abbildung der Groma. Vgl. Giov. Rossi, *Groma e squadro* 1877, pag. 43 und *Figura* 3. [2]) Eine Lichtdruckabbildung der bei Limesgrabungen in Bayern ans Licht gebrachten Groma findet sich in einem Aufsatze von H. Schöne (Jahrbuch des archäolog. Instituts XVI, 1901) und daraus abgedruckt bei Wilh. Schmidt, Über die Gestalt der Groma der römischen Feldmesser. *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge IV, 234—237 (1903).

Mittels dieses Kreuzes ließen in der Tat die beiden Handlungen sich vollziehen, die wir den Auguren bei Absteckung des Templum zuweisen mußten: es ließ sich das eine Lineal in die Richtung nach dem Aufgange der Sonne bringen, und das andere Lineal zeigte dann von selbst die dazu senkrechte Richtung an. Decimanus und Cardo konnten abgesteckt werden. Noch eine weitere feldmesserische Verrichtung haben wir uns als uralt auf italischem Boden zu denken: die Abmessung von bestimmten Strecken in gegebener Richtung, denn die Ländereien waren in lauter gleiche Rechtecke abgeteilt, deren Seiten ursprünglich wohl von gleicher Länge gewesen sein werden, in späterer Zeit im Verhältnisse von 1 zu 2 standen[1]).

Die Vereinigung der Groma mit der Meßstange genügte alsdann bereits zur Auflösung praktisch nicht unwichtiger Aufgaben, z. B. der Aufgabe: die Breite eines Flusses von einem Ufer aus zu messen ohne den Fluß zu überschreiten, eine Aufgabe, für welche ein bestimmter Name, fluminis varatio, bekannt ist. Bei einem allerdings vermutlich ziemlich späten Schriftsteller hat sich eine Methode zur Lösung dieser Aufgabe erhalten[2]), die wohl mit Recht eine altitalische genannt und in Vergleich zu ganz ähnlichen Verfahrungsweisen gebracht worden ist, zu welchen nordamerikanische Naturvölker unbeeinflußt von europäischer Wissenschaft sich aufzuschwingen vermocht haben. Das Verfahren ist nämlich, wenn auch zutreffend, über die Maßen schwerfällig. Es zeichnet die nicht unmittelbar zugängliche Länge selbst auf das Feld mittels kongruenter Dreiecke und läßt sie in dieser getreuen Wiederholung messen, statt daß Berechnung einträte aus Verhältnissen von Seiten ähnlicher Dreiecke.

Mit diesen Bemerkungen haben wir aber keinenfalls zu wenig der altitalischen Geometrie zugewiesen, welche somit als eine nur dem täglichen Bedürfnisse gewidmete eines wissenschaftlichen Anstriches entbehrende sich kennzeichnet.

26. Kapitel.

Die Blütezeit der römischen Geometrie. Die Agrimensoren.

Was ist bei den Römern im Laufe der Jahrhunderte aus altitalischer Rechenkunst, aus altitalischer Feldmessung geworden? Er-

[1]) Stellen dafür vgl. Agrimensoren Anmerkung 260. [2]) Römische Feldmesser I, 285—286. Vgl. Agrimensoren S. 108, Günthers Rezension dieses Buches in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung, 21. März 1876 und *Narrative of the travels and adventures of Monsieur Violet etc. by* Capt. Marryat. Chapter IX (Tauchnitz-Edition, pag. 64—65).

scheint es doch unmöglich, daß eine Stadt, die als weltbeherrschender Mittelpunkt bedeutende Männer aus allen Provinzen des großen Reiches anzuziehen wußte, nicht auch von solchen zum Wohnort gewählt worden sein soll, welche der Mathematik sich befleißigten. Wenn wir nur in Erinnerung bringen, was uns beiläufig begegnete: in Rom hat im Jahre 98 n. Chr. Menelaus Beobachtungen angestellt (S. 412), in Rom hat um 244 Plotinus seine vielbesuchte Schule eröffnet (S. 457), in welcher gewiß auch nach damaligem Geschmacke modernisierte altgriechische Arithmetik einen Gegenstand der Lehre bildete. So mögen zu verschiedenen Zeitpunkten in Rom Persönlichkeiten gelebt und gewirkt haben, die um Mathematik sich kümmerten — Spuren davon werden sich deutlich erkennen lassen — aber sie waren beinahe verstohlenerweise Mathematiker. Was wir (S. 517) schon angedeutet haben, ist jetzt nur stärker zu betonen. Die ganze geistige Anlage des römischen Volkes war nach anderen Gebieten gerichtet als der Mathematik, und das Wort Ciceros, die Geometrie sei bei den Griechen in höchsten Ehren gestanden, deshalb sei nichts glänzender als ihre Mathematiker, bei den Römern aber sei das Maß jener Kunst durch den Nutzen des Rechnens und Ausmessens begrenzt[1]), hat fast für alle Zeiten Gültigkeit. Nur eine kurze Spanne bildet vielleicht eine Ausnahme und gab Anlaß zu Anfängen einer eigenen mathematischen Literatur, die aber bald ausartete, so daß nur Übersetzungen oder handwerksmäßige Vorschriften neben beiläufigen Andeutungen das Material liefern, aus welchem wir Belehrung ziehen.

Jene Ausnahmsperiode eröffnete sich, während ein Mann an der Spitze des römischen Staates sich befand, der selbst mathematischen Sinn besaß und als Schriftsteller in unserem Fache aufgetreten ist: Julius Cäsar. Er hat ein Buch de astris verfaßt[2]), welches in der Mitte des I. S. n. Chr. dem älteren Plinius vielfach als Quelle für das XVIII. Buch seiner Naturgeschichte gedient hat, und welchem um das Jahr 400 Macrobius das Beiwort eines nicht ohne Gelehrsamkeit verfaßten Werkes beilegte. Dasselbe hängt, wie man anzunehmen berechtigt ist, mit einer Aufgabe zusammen, welche Cäsar sich als seiner würdig gestellt hatte, mit der Aufgabe der Kalenderverbesserung.

Das römische Jahr[3]), der Sage nach von König Romulus zu 304 Tagen angenommen, wurde durch Numa auf 355 Tage verlängert,

[1]) Cicero, *Tuscul. Quaest.* Lib. I, Cap. 2, § 5. [2]) Agrimensoren S. 78 flgg. [3]) Ludw. Ideler, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. Berlin 1826, Bd. II, S. 67 flgg., 119—124 und 130—132.

womit jenes Janusdenkmal zusammenhängt, dessen gekrümmte Finger eben diese Zahl darstellten. Der noch immer mangelhaften Jahreslänge wurde im Jahre 304 der Stadt durch die Decemvirn, wie es scheint, mittels eines Schaltmonates nachgeholfen, der alle zwei Jahre abwechselnd mit 22 und mit 23 Tagen eingeschoben wurde. Jetzt war das Jahr wieder zu lang, und zwar nahezu um einen Tag, denn $4 \cdot 355 + 22 + 23 = 1465 = 4 \cdot 366\frac{1}{4}$. Es mußte also von Zeit zu Zeit ein Schaltmonat weggelassen werden, erst regellos, dann im 24jährigen Schaltzyklus. So trat allmählich eine heillose Unordnung ein, so zwar, daß die Chronologie hinter dem wirklichen Jahre um volle 85 Tage zurückblieb. Cäsar war eben siegreich aus dem alexandrinischen Feldzuge zurückgekehrt, welcher die Jahre 48 und 47 in Anspruch nahm, als er beraten von Sosigenes die chronologische Frage ins reine brachte, so daß die Vermutung nahe liegt, Sosigenes, der von Simplicius ein Ägypter, von Plinius ein Peripatetiker genannt wird[1]), sei selbst Alexandriner gewesen, und habe noch aus den Schätzen der alexandrinischen Gelehrsamkeit schöpfend von der Kalenderverbesserung aus dem Jahre 238 unter König Ptolemäus Euergetes I. gewußt, deren wir (S. 329) gedacht haben. Jedenfalls war Cäsars Einrichtung die gleiche, welche damals in Alexandria getroffen worden war. Das Jahr 46 war das letzte Jahr der Konfusion, ein Name, welcher ihm geblieben ist. Die 85 fehlenden Tage wurden in ihm eingeschaltet, und nun sollte jedes Jahr aus 365 Tagen bestehen, und zur Ergänzung alle vier Jahre zwischen dem 23. und 24. Februar oder römisch gesprochen zwischen dem dies septimus und sextus ante Calendas Martis ein Tag als bissextus eingeschaltet werden, woraus der Name des bissextilen Jahres für das Schaltjahr entstand.

Noch ein zweiter großer Gedanke war in Cäsars Geiste erwacht oder erweckt worden, der einer Vermessung des ganzen römischen Reiches, wie sie unserer früheren Bemerkung (S. 533) gemäß schon insofern nötig war, als das ganze Reich ein Templum sein mußte, ein wohlorientiertes Eigentum mit gleichmäßig gerichteten, gleichmäßig abgesteckten Grenzen. Auch für diesen Gedanken war Cäsar schriftstellerisch tätig, wenn man einer Aussage trauen darf, welche den Ursprung römischer Feldmeßkunst mit einem Briefe Cäsars in Verbindung setzt[2]). Doch leider ist von diesem Briefe so wenig wie von der astronomischen Schrift ein eigentlicher Überrest

[1]) Über Sosigenes vgl. den von Baehr verfaßten Artikel in Paulys Realenzyklopädie. [2]) *Nunc ad epistolam Julii Caesaris veniamus quod ad huius artis originem pertinet.* Römische Feldmesser I, 395.

auf uns gekommen. War der Gedanke der Reichsvermessung durch andere in Cäsar angeregt worden, so müssen offenbar auch hier Alexandriner mit im Spiele gewesen sein. Wenigstens waren es Männer mit durchaus griechisch klingenden Namen, welchen verschiedenen Quellen nach Cäsar die Ausführung seines Gedankens anzuvertrauen gedachte oder schon übertragen hatte, als er am 15. März 44 v. Chr. unter Mörderhand verblutete.

Augustus ließ das Werk nicht unerfüllt[1]). Keinen Geringeren als M. Vipsanius Agrippa betraute er mit der Leitung des ganzen Unternehmens, und unter diesem scheint ein Oberwegemeister Balbus tätig gewesen zu sein, der eine wie der andere vielleicht nur mit ihrem Namen bei der Angelegenheit beteiligt, um dem Unternehmen wenigstens einen römischen Anstrich zu verleihen, wenn es von Römern nicht ins Werk gesetzt werden konnte. Fühlte man auch, daß Griechen allein fähig waren das Gewünschte zu leisten, so trug man doch wohl eine gewisse Scheu sie den Ruhm ihrer Leistung davontragen zu lassen, und so ist von der Reichsvermessung bald des Augustus, bald des Agrippa, bald des Balbus die Rede, welche die Zeit von 37 bis 20 v. Chr. im ganzen in Anspruch genommen haben dürfte. Gehörte, wie wir (S. 366) sahen, ein Heron Metricus zu den tatsächlich an der Arbeit Beschäftigten, was nicht ganz zweifellos ist, und haben wir, was ebensowenig zweifellos ist, in Heron Metricus unseren Heron von Alexandria zu erkennen, so muß man zugestehen, daß der richtige Mann an den richtigen Platz gestellt war. Ergebnis der Reichsvermessung war die verbürgtermaßen einst vorhandene große Landkarte, welche den Namen des Agrippa führte, und welche in einer besonders dazu aufgebauten Säulenhalle „der Welt die Welt als Schauspiel darbot"[2]); Ergebnis die geographischen Kommentarien des Agrippa, auf welche ganze Bücher aus der Naturgeschichte des Plinius sich stützen.

Die gleiche Zeit ungefähr dürfen wir zuversichtlich als diejenige betrachten, während welcher die mathematischen Schriften den Römern einigermaßen bekannt wurden, deren die griechischen Feldmesser sich bei ihren Arbeiten bedienten, und deren Wert auch für den Nichtsachverständigen aus der Trefflichkeit dieser Arbeiten sich erschließen ließ. Was das aber für Schriften waren, ist keinem Zweifel unterworfen. Es war vor allen der „Heron", das feldmesse-

[1]) Die letzte Schrift über die große Reichsvermessung ist die Breslauer Habilitationsschrift von J. Partsch, Die Darstellung Europas in dem geographischen Werke des Agrippa, 1875. Ältere Literatur vgl. Agrimensoren S. 82—84. [2]) Plinius, *Histor. natural.* III, 2: *Orbem terrarum orbi spectandum propositurus erat.*

rische Handbuch des Alexandriners, welches so auf italischem Boden Eingang fand. Es war aus ihm ebensowohl die Feldmeßkunst als die Feldmeßwissenschaft zu erlernen, wenn wir diese beiden unterscheidenden Namen weiter gebrauchen, um durch den ersteren die eigentlichen praktischen Arbeiten auf dem Felde, durch den zweiten die daran anknüpfenden Rechnungen zu bezeichnen, welche letztere wir auch wohl rechnende Geometrie nennen (S. 406). Jetzt verdrängte die vollkommenere Dioptra die altertümliche Groma, jetzt bürgerten sich Regeln zur Ausrechnung der Felder ein, während man bisher vielleicht jede derartige Regel entbehrte, ohne sie zu vermissen, weil das ausgemessene Land in gleichmäßigen Rechtecken von bekannter Größe bestehend einer Flächenberechnung nicht bedurfte, nicht ausgemessenes Land aber seinen Besitzer nicht leicht änderte; wenigstens wurden nur über Besitzstücke mit geradlinigen, zueinander senkrechten Grenzen Flurkarten öffentlichen Glaubens angefertigt.

Um die Zeit, zu welcher unter dem Einflusse des Machthabers die Veränderung römischen Geschmackes stattfand, welche nur zu wenig nachhaltig sich erwies, als daß sie der Mathematik zu Fortschritten hätte verhelfen können, schrieb Marcus Terentius Varro, der Freund des Cicero, des Pompejus, in späterer Zeit des Cäsar, dessen Leben nach der wahrscheinlichsten Annahme die Jahre 116 bis 27 v. Chr. erfüllte. In politischen Kreisen spielte er trotz seiner Beziehungen eine nur selten und wenig hervorragende Rolle. Desto bedeutender war die literarische Tätigkeit, der er sich hingab. Er gebot über fast unerschöpfliches Arbeitsmaterial, da er nicht nur Besitzer der großartigsten Privatbibliothek war, sondern auch von Cäsar einer öffentlichen Büchersammlung vorgesetzt wurde. Wie er aber dieses Material zu benutzen verstand, beweist seine eigene Äußerung[1]), nach welcher er am Ende seiner siebziger Jahre 490 Bücher geschrieben hatte, und so kann man wohl dem Urteile des Terentianus Maurus, eines Grammatikers aus den Zeiten der Kaiser Nerva und Trajan, beistimmen, der Varro den Gelehrtesten aller Gegenden nannte. Die erhaltenen Schriften des Varro beziehen sich auf Landwirtschaft und auf Grammatik und nehmen unter den Arbeiten auf diesen beiden Gebieten einen ehrenvollen Rang ein. Um so mehr bedauern wir den Verlust gerade der Werke, welche uns wichtig sein würden[2]).

[1]) Aul. Gellius, *Noctes Atticae* III, 10, 17: *M. Varro ibi (in primo librorum qui inscribuntur Hebdomades vel De imaginibus) addit se quoque jam duodecimam annorum hebdomadem ingressum esse et ad eum diem septuaginta hebdomadas librorum conscripsisse.* [2]) Gast. Boissier, *Étude sur la vie et les ouvrages de M. T. Varron.* Paris 1861. Über die wissenschaftlichen Schriften, welche zu dem letzten zu gehören scheinen, was Varro schrieb, vgl. pag. 327

Verloren ist eine Schrift über Vermessungen, mensuralia; verloren ist ein Buch Geometrie, in welchem, nach dem Bericht des Cassiodor, die Gestalt der Erde als eirund angegeben war, ein insoweit verdienstlicher Gedanke, als damit in origineller Weise unter Beibehaltung der runden Körpergestalt der Erde ihre Abweichung von der Kugelform gemutmaßt wurde; verloren ist allem Anscheine nach ein arithmetisches Werk Varros, Atticus sive de numeris, welches Vertranius Maurus, der eine Biographie des Varro geschrieben hat, noch im Jahre 1564 in Rom gesehen haben will[1]); verloren ist auch ein Werk aus neun Büchern bestehend, de disciplinis, in welchem, wie man annimmt, enzyklopädisch über die einzelnen Wissenschaften gehandelt war, und welches somit das Urbild für viele ähnliche Sammelwerke abgab, die uns noch begegnen werden, aber selten mehr liefern als einzelne fast nur zufällig verwertbare Notizen. Die Reihenfolge der neun Wissenschaften bei Varro war: 1. Grammatik, 2. Dialektik, 3. Rhetorik, 4. Geometrie, 5. Arithmetik, 6. Astrologie, 7. Musik, 8. Medizin, 9. Architektur, und es ist zweifelhaft, ob nicht die oben erwähnte Geometrie als das hier genannte 4. Buch zu betrachten ist. Würde sich eine bei Plinius vorkommende Notiz[2]) auf das 8. Buch beziehen, so hätte Varro dieses Werk in seinem 83. Lebensjahre verfaßt. Als ganz originell ist übrigens auch bei ihm die Zusammenstellung nicht anzusehen, da die griechische Wissenschaft schon den Begriff der freien Künste ausgebildet hatte, der jetzt in wechselnder Zahl (meistens 7 artes liberales anführend) und in wechselnder Wahl der Gegenstände die ganze Folgezeit bis durch das Mittelalter hindurch beherrscht. Ob freilich Varro, der römisch gesinnte Römer, seine Abhängigkeit von griechischen Mustern nicht teilweise zu verbergen suchte, wird schwerlich mehr zu ermitteln sein. Wir kamen zu dem Gedanken an diese Möglichkeit von der Erwägung ausgehend, daß es Varro vorzugsweise ist, der die Feldmeßkunde der Römer auf etruskische Anfänge zurückgeführt hat.

Der nächste römische Schriftsteller, welchem tiefer gehende mathematische Kenntnisse nicht bloß in allgemeiner Weise zuzutrauen sind, sondern aus dessen Schriften wir Belege dafür zu schöpfen vermögen, ist Vitruvius, der Verfasser von 10 Büchern über Architektur, die vermutlich im Jahre 14 v. Chr. vollendet wurden und dem Augustus zugeeignet sind. Das ist alles, was über die Persönlichkeit des Vitruvius mit Sicherheit gesagt werden kann. Sogar sein Beiname Vitru-

bis 331. Siehe auch Teuffel, Geschichte der römischen Literatur (III. Auflage) S. 288.

[1]) Vossius, *De scientiis mathematicis* pag. 39 (Amsterdam 1650). [2]) Plinius, *Histor. natural.* XXIX, 18, 65.

vius Pollio schwebt einigermaßen in der Luft, indem der Verfasser eines Auszuges aus der vitruvischen Architektur, welcher uns denselben überliefert hat, eine selbst rätselhafte Persönlichkeit von ganz unbekanntem Zeitalter ist, der nur aus sprachlichen Gründen meistens für dem Zeitalter des Vitruvius ziemlich nahestehend und dem entsprechend glaubwürdig gehalten wird. In den Schriften des Vitruvius, sagten wir, stecken mancherlei Belege jenes mathematischen Wissens. In einem Werke über Architektur findet sich an und für sich an den verschiedensten Stellen Veranlassung ein solches Wissen an den Tag zu legen, um wieviel mehr bei Vitruvius, dessen schriftstellerische Eigentümlichkeit es genannt werden kann, daß er mit fast possierlicher Geschwätzigkeit Bemerkungen beizufügen und Geschichtchen zu erzählen liebt, die zu dem behandelten Gegenstande nur in entferntester Beziehung stehen, oft aber uns erwünschte Mitteilungen enthalten. Überall verrät sich dabei Vitruvius als das, als was wir ihn zu finden erwarten mußten, als Schüler der Griechen, wenn auch als einen solchen, der es mitunter wagt von der Ansicht des Lehrers sich zu entfernen. Wir nennen als der Mathematik angehörig[1]) eine Auseinandersetzung über die Größenverhältnisse der einzelnen Körperteile des Menschen; einen Abriß der arithmetischen Harmonielehre nach Aristoxenus; eine Schilderung dessen, was nach Vitruvs Geschmack die drei größten mathematischen Entdeckungen waren: die Irrationalität der Diagonale eines Quadrates, das pythagoräische Dreieck aus den Seiten 3, 4, 5 und die archimedische Kronenrechnung. Wir nennen Beschreibungen von feldmesserischen Apparaten verschiedener Art und Anweisungen sich derselben zu bedienen. Da ist der Gnomon mit der Bestimmung der Mittagslinie aus zwei Beobachtungen gleicher Schattenlängen am Vor- und Nachmittage. Da sind Nivellierungen mittels der Dioptra und ein Wegemesser. Bei der Beschreibung des letzteren ist gelegentlich der Umfang eines Rades von $4\frac{1}{6}$ Fuß Durchmesser zu $12\frac{1}{2}$ Fuß angegeben, was ein Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser von $3:1$ bezeugt[2]). Wir nennen Berechnungen des Kalibers von Wurfmaschinen aus dem Gewichte der Massen, welche sie zu schleudern bestimmt waren, wobei

[1]) Vitruvius III, 1; V, 4; VIII, 6; IX, 1, 2, 3, 8; X, 14, 15, 17, 21. Vgl. Agrimensoren S. 157 und 86—89. [2]) In älteren Ausgaben des Vitruvius war der Durchmesser des Rades zu 4 Fuß angegeben, was einem $\pi = 12\frac{1}{2} : 4 = 3\frac{1}{8}$ entspräche. Die letzte von V. Rose veranstaltete Ausgabe hat die in unserem Texte angegebene Zahl $4\frac{1}{6}$ als beglaubigte Lesart.

Brüche in Menge vorkommen, allerdings nur ziemlich angenäherte Werte hervorbringend, so daß von der Rechenkunst des Vitruvius auch hierdurch uns keine übermäßig hohe Meinung erweckt wird[1]). Wir haben endlich zu dem (S. 367) zugesagten Nachweise der Abhängigkeit des Vitruvius von Heron überzugehen, eine Abhängigkeit, welche auch die Nivellierungsmethoden in hohem Grade wahrscheinlich machten. Wir glauben es dem Auffinder der betreffenden Beweisstellen schuldig zu sein, seine Schlußfolgerungen im Wortlaute[2]) zu wiederholen, indem wir nur zur Bequemlichkeit unserer Leser die Stellen aus Vitruvius in deutscher Übersetzung geben und vorausschicken, daß Vitruvius sich meistens nur auf die Griechen, *Graeci*, als seine Gewährsmänner bezieht, ohne Aristoteles und Archimedes bestimmt zu nennen, wo sie sicherlich als Quelle dienten:

„Vitruv[3]) schreibt: Ist das kurze Ende (*lingula*) eines eisernen Hebels unter eine Last gebracht, und drückt man dessen langes Ende (*caput*) nicht nach abwärts, sondern hebt es vielmehr aufwärts, so besitzt das auf den Boden der Erde sich stützende kurze Ende diese als Last, die Ecke der Last aber dient dem Drucke. So wird zwar nicht so leicht wie beim Abwärtsdrücken, sondern ihm entgegengesetzt immerhin das Gewicht der Last in die Höhe geschafft.

Die entsprechende Stelle bei Heron[4]) lautet: Nehmen wir zuerst an, er (der Hebel) sei dem Erdboden parallel. Der Hebel sei die Linie $\alpha\beta$ und die durch ihn zu bewegende Last, nämlich γ, bei dem Punkte α, die bewegende Kraft bei dem Punkte β (Fig. 81)... Wenn wir nun das bei β befindliche Hebelende heben..., dann beschreibt der Punkt β einen Kreis um den Mittelpunkt δ (δ ist die Kante des Körpers γ, gegen welche der Hebel drückt[5])), und der Punkt α um denselben Mittelpunkt einen kleinen Kreis. Wenn sich nun die Linie $\beta\delta$ zu $\delta\alpha$ verhält wie die Last γ zur Kraft bei β, so hält die Last γ der Kraft β das Gleichgewicht. Ist das Verhältnis $\beta\delta:\delta\alpha$ größer als das der Last zur Kraft, so hat die Kraft das Übergewicht über die Last, weil zwei Kreise um denselben Mittelpunkt vorhanden sind und

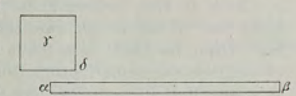


Fig. 81.

[1]) Hultsch, Die Bruchzeichen des Vitruvius in Fleckeisen und Masius, Jahrbücher der Philol. [2]) Edm. Hoppe, Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandria S. 4—5 (Hamburg 1902). [3]) Vitruvius (ed. V. Rose) X, 3, 3 pag. 250. [4]) Heron (ed. L. Nix) II, 114 Z. 30 flgg. [5]) Bei Hoppe steht irrigerweise ς statt δ; übrigens ist der ganze eingeklammerte Satz eine Erläuterung Hoppes und bei Heron nicht vorhanden.

die Last sich am Bogen des kleineren Kreises und die bewegende Kraft sich am Bogen des größeren Kreises befindet usw.

Zunächst ist zu bemerken, daß beide denselben Fehler machen, nämlich diesen einarmigen Hebel als zweiarmigen zu behandeln. Sollte die Heronsche Darstellung richtig werden, müssen die Radien der beiden Kreise $\alpha\beta$ und $\alpha\delta$ sein, α der gemeinsame Mittelpunkt. Während man aber bei Heron sehr wohl den Grund des Fehlers einsieht, ist bei Vitruv gar nicht abzusehen, wie er auf die Verwechslung gekommen sein sollte, wenn er sie nicht eben aus den auch an dieser Stelle angerufenen „Graeci", d. h. Heron, abgeschrieben hat. Heron hat nämlich vorher die Wellräder beschrieben und da die Gesetze mit Hilfe der Kreisbogen abgeleitet, so führt er auch beim Hebel die Erklärung auf die Welle zurück. Nun hat er die Beobachtung gemacht, daß, wenn unter dem zu hebenden Steine γ das Erdreich weich ist, das Ende α unter dem Steine in dem sandigen Erdboden einen Kreisbogen zu beschreiben scheint, während an der Kante δ scheinbar der Ruhepunkt ist. Diese Beobachtung ist irrig, denn der Stein γ wird nur gehoben, wenn das Ende α schließlich in dem Erdreich doch einen Stützpunkt findet; bis dies geschieht, ist in der Tat das Zusammendrücken der Erde durch α die Wirkung eines zweiarmigen Hebels, dagegen sobald die Last γ gehoben wird, arbeitet der Hebel als ein einarmiger. Der Fehler bei Heron ist also verständlich, der bei Vitruv ist unerklärlich.

Noch an einer anderen Stelle[1]) drückt sich Vitruv sehr zweideutig aus, so daß es mir zweifelhaft ist, ob er Heron verstanden hat. Vitruv beschreibt nach Heron den Windebaum, vergißt zu erwähnen, was bei Heron[2]) ausführlich beschrieben ist, daß der Baum in seinem Unterstützungslager drehbar sein muß, dann sagt er am Schlusse: eine einzige Aufstellung des Windebaums gewährt den Nutzen, daß er durch Neigung die Last soweit man will nach vorn oder nach rechts oder links zur Seite niederlassen kann. Wenn diese „Neigung" (proclinare) erfolgt, ehe die Last an den Kopf des Windebaums gezogen ist, so ist die Vitruvsche Vorrichtung unmöglich, denn beim Heben der Last würde diese sofort nach der Seite hinpendeln, wohin der Balken geneigt ist, und gegen die Mauer oder den Wagen, auf welchen sie gehoben werden soll, schlagen. Heron hat das natürlich gewußt, er schreibt[3]): Hierauf ziehen wir die Seile (der Winden) an, entweder mit den Händen, oder mit sonst einem Werkzeug, und die Last hebt sich alsdann. Wenn man nun einen

[1]) Vitruvius (ed. V. Rose) X, 2 pag. 246. [2]) Heron (ed. L. Nix) II, 202. [3]) Ebenda II, 204.

Stein auf eine Mauer oder an einen beliebigen Ort bringen will, so löst man das Seil[1]) an einem der festen Stützpunkte, welche den Stützbalken, an dem die Rollen befestigt sind, halten und zwar auf der entgegengesetzten Seite als die, nach welcher man den Stein bringen will, und der Balken neigt sich nach jener Seite, dann läßt man das Seil mit der Rolle langsam herab bis zu dem Orte, wo man den Stein einsetzen will. Wenn man aber den Stützbalken, an welchem die Rolle befestigt ist, nicht soviel neigen kann, um die gehobene Last an den beabsichtigten Ort gelangen zu lassen, so bringen wir Walzen darunter an, auf denen wir sie laufen lassen, oder treiben sie mittels Hebels so weit, bis wir sie an die beabsichtigte Stelle bringen.

Ich habe die Heronsche Beschreibung so ausführlich hier angegeben, damit sich jeder überzeugen kann, daß wir es mit der Arbeit eines „Erfinders" oder doch jemandes, der die Werkzeuge genau beobachtet hat, zu tun haben. Es mag sein, daß Vitruv auch meint, man solle erst die Last heben und dann den Balken neigen, gesagt hat er es aber nicht, und seine Leser konnten sehr wohl die umgekehrte Ordnung herauslesen. Die ungenaue Beschreibung macht den Eindruck, als ob Vitruv die Maschine nicht gesehen hätte, sondern nach einer literarischen (unverstandenen) Vorlage gearbeitet habe. Das ist typisch für das Verhältnis Vitruvs zu den von ihm genannten Graeci, d. h. Heron. Und es kann meiner Meinung nach kein Zweifel bestehen, wie das Abhängigkeitsverhältnis zu denken ist."

Wir wissen dieser Auseinandersetzung nichts hinzuzufügen. Höchstens möchten wir deren letzte Worte dahin ergänzen, daß wer die Verwandtschaft zwischen Vitruvius und Herons Mechanik zugibt, nur annehmen kann, Vitruvius habe die Mechanik benutzt und deren Angaben abgekürzt. Daß Heron die undeutliche Schilderung des Vitruvius zu jener klaren Darstellung in der Mechanik erweitert haben könnte, ist uns wenigstens undenkbar, und somit scheint uns die zeitliche Reihenfolge: Heron früher als Vitruvius gesichert. Wer dagegen die erwähnte Verwandtschaft leugnet oder auf gemeinsame Abhängigkeit von einem unbekannten älteren Schriftsteller deutet, wird zunächst als untere Lebensgrenze Herons festzuhalten haben, daß er vor Menelaus von Alexandria gesetzt werden muß.

L. Junius Moderatus Columella[2]) aus Gades (Cadix) war Militärtribun der VI. gepanzerten Legion und lebte als solcher längere Zeit in Syrien. Von dort heimgekehrt widmete er sich mit begeisterter

[1]) Der Windebaum wurde durch drei oder vier Seile aufrechtgestellt.
[2]) Agrimensoren S. 89—93.

Anhänglichkeit der Landwirtschaft, welche er in zwei Werken nacheinander verherrlichte. Von der ersteren kürzeren Ausarbeitung ist nur ein Bruchstück erhalten, die zweite ausführliche Schrift ist dagegen vollständig auf uns gekommen. Die XII Bücher De re rustica, wahrscheinlich 62 n. Chr. geschrieben, sind eine fast unerschöpfliche Fundgrube reichster Art für alle Gebiete, welche zur Landwirtschaft irgendwie in Beziehung gesetzt werden können, da der begabte und gelehrte Verfasser seinen Gegenstand in weitestem Umfange behandelt. Freilich ist damit für ihn die Unbequemlichkeit entstanden, daß man, wie er selbst klagt, über alle möglichen Dinge Auskunft von ihm begehre. Er hilft sich so gut er kann. Er zieht befreundete Fachmänner verschiedener Gattung zu Rate, und so gesteht er auch zu, daß das 2. Kapitel des V. Buches, in welchem er Feldmessung lehrt, kein Erzeugnis seines eigenen Geistes sei[1]). Für Vollständigkeit oder Unvollständigkeit, sowie für die Richtigkeit der gegebenen Vorschriften sind diejenigen verantwortlich, welche ihm hier mit ihrer Erfahrung beigestanden haben.

Zuerst macht Columella seinen Leser mit den unentbehrlichsten Ackermaßen bekannt, dann löst er neun geometrische Aufgaben je an einem bestimmten Zahlenbeispiele. Allgemeine Vorschriften, wie bei anderen Zahlenangaben zu verfahren sei, gibt er nicht; diese soll der Leser sich selbst aus der Musterrechnung entnehmen[2]). Schon an dieser Eigentümlichkeit wird man den Schüler des Heron von Alexandria vermuten, und die Vermutung wird zur Gewißheit, wenn man die Aufgaben des Columella selbst ansieht. Es sind sämtlich Aufgaben, welche mit solchen in Herons Vermessungslehre oder in den Heronischen Sammlungen oder in beiden übereinstimmen, wenn wir von der einzigen Verschiedenheit absehen, daß Columellas Zahlenwerte für die Länge einzelner Strecken dort nicht auftreten. Wir erinnern uns, daß Heron in der Sammlung, welche die Überschrift Geometrie führt, die Fläche des Sechsecks nach zwei Methoden berechnet. Zuerst läßt er das Quadrat der Sechsecksseite 13 mal nehmen und dann durch 5 teilen; anders, heißt es hierauf, in einem anderen Buche, wo die Vorschrift gegeben sei $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{10}$ des Seitenquadrats 6fach anzusetzen; als Beispiel dient das Sechseck von der Seite 30. Vergleichen wir damit Columellas 9. Aufgabe, so erkennen wir in der Rechnung der Fläche des Sechsecks von der Seite 30 durch die Zahlen 900, 300, 90 und der Summe 390 dieser beiden

[1]) *Ne dubites id opus geometrorum magis esse quam rusticorum, desque veniam, si quid in eo fuerit erratum, cuius scientiam mihi non vindico.* [2]) *Cuiusque generis species subiciemus, quibus quasi formulis utemur.*

letzten hindurch zum 6fachen derselben Summe mit 2340 genau den Gang und die Zahlen Herons. Heronische Formeln bieten nun auch die anderen Aufgaben Columellas, so die 4. Aufgabe, welche das gleichseitige Dreieck als $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{10}$ des Seitenquadrats berechnet, die 8. Aufgabe, welche die Fläche eines Kreisabschnittes, der kleiner ist als der Halbkreis, aus der Sehne s und der Höhe h des Abschnittes nach der Formel $\frac{s+h}{2} \cdot h + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{14}$ findet usw. Auch die von uns als nicht anzuzweifelnd gegebene Zeitbestimmung, Heron müsse vor Menelaus gesetzt werden, erleidet höchstens eine Verschiebung um wenige Jahrzehnte, wenn wir Heron gegenwärtig vor das Jahr 62 n. Chr. hinaufzurücken Veranlassung finden.

Etwa gleichaltrig mit Columella war M. Fabius Quintilianus, dessen Lebenszeit ungefähr von 35—95 angesetzt wird. Er verfaßte XII Bücher Vorschriften für Redner, und es ist ein glücklicher Zufall zu nennen, daß im I. Buche dieses Werkes eine Stelle von mathematischer Wichtigkeit sich vorfindet, welche wir um ihrer nach verschiedenen Seiten wirkenden Bedeutung willen in wörtlicher Übersetzung folgen lassen[1]): „Wer wird einem Rechner nicht vertrauen, wenn er vorbringt, der Raum, der innerhalb gewisser Linien enthalten sei, müsse der gleiche sein, sofern jene Umfassungslinien dasselbe Maß besitzen? Doch ist dieses falsch, denn es kommt sehr viel darauf an, von welcher Gestalt jene Umfassung ist, und von den Geometern ist Tadel gegen solche Geschichtsschreiber erhoben worden, welche da glaubten, die Größe von Inseln werde zur Genüge durch die Dauer der Umschiffung gekennzeichnet. Je vollkommener eine Gestalt ist, um so mehr Raum schließt sie ein. Stellt daher jene Umfassungslinie einen Kreis dar, welches die vollkommenste der Gestalten der Ebene ist, so schließt sie mehr Raum ein, als wenn sie bei gleicher Küstenstrecke ein Quadrat bildete. Das Quadrat hinwiederum schließt mehr Raum ein als das Dreieck, das gleichseitige Dreieck mehr als das ungleichseitige. Doch dieses andere mag vielleicht zu dunkel sich erweisen; verfolgen wir dagegen einen auch dem Ungeübten sehr leichten Versuch. Es wird nicht wohl irgend jemandem unbekannt sein, daß das Maß des Jucharts[2]) 240 Fuß in die Länge beträgt, während es nach der Breite um die Hälfte sich öffnet; was also der Umfang ist, und wieviel Feld er in sich schließt ist bequem zusammenzubringen. Aber 180 Fuß an

[1]) Quintilianus, *Institutiones oratoriae* (ed. Halm, Leipzig 1868) I, 10, 39—45 (pag. 62). [2]) *jugerum* ist das römische Doppelfeldmaß, welches z. B. Varro definiert hat: *Jugerum dictum iunctis duobus actibus quadratis.*

jeder Seite bilden dieselbe Ausdehnung der Grenzen, dagegen weit mehr von den vier Linien eingeschlossenen Flächenraum. Wer widerwillig ist das auszurechnen, kann dasselbe an kleineren Zahlen lernen. Je 10 Fuß ins Quadrat sind 40 Fuß ringsum, inwendig 100 Fuß. Sind je 15 Fuß seitlich, je 5 in der Fronte, so wird man bei gleichem Umfange von dem, was eingeschlossen ist, den vierten Teil abziehen müssen. Wenn aber 19füßige Seiten nur um je 1 Fuß voneinander abstehen, so werden sie nicht mehr Quadratfuße in sich fassen, als die Zahl, nach welcher die Länge wird gezogen worden sein. Die Umfassungslinie aber wird von derselben Ausdehnung sein wie die, welche 100 Quadratfuß enthält. Was man also von der Quadratgestalt abzieht, das geht auch von der Menge zugrunde. Es kann folglich auch das erreicht werden, daß mit einem größeren Umfange eine geringere Menge Feldes eingeschlossen sei. So in der Ebene, denn daß bei Hügeln und Tälern die Bodenfläche eine größere ist als die der darüber befindlichen Himmelsdecke, liegt auch für den Unerfahrenen zutage.“ Wir haben diese Stelle wiederholt früher beigezogen. Wir haben (S. 173) mit ihr belegt, daß irrige Meinungen fast zäher festgehalten werden als richtige. Wir möchten beinahe entschuldigend ergänzen, daß Römer, deren Felder, wie wir gesehen haben, tatsächlich gleiche Gestalten besaßen, leichter dem gerügten Irrglauben verfallen konnten. Durften sie doch beinahe dem Beispiele, durch welches Quintilian sie eines Besseren belehren wollte, entgegenhalten, solche Felder von 180 Fuß ins Quadrat kämen nicht vor. Zweitens ist, wie uns scheint, durch die Sätze über den Flächenraum der verschiedenen, weniger vollkommnen und vollkommneren, Figuren der Beweis geliefert (S. 357), daß Zenodorus, welchen man für den Erfinder jener Sätze hält, vor Quintilian gelebt haben muß, wodurch mindestens eine untere Lebensgrenze für denselben gewonnen wird, die weit höher hinaufreicht als das Zeitalter des Pappus. Drittens endlich ist uns Quintilian ein Beispiel fast heimlicher Beschäftigung mit mathematischen Dingen, wie wir sie oben (S. 539) angekündigt haben, er weiß, daß er von seinen Lesern nicht verstanden werden wird, daß er mit seinem Wissen vereinzelt dasteht, aber er kann es doch nicht unterlassen wenigstens nebenbei Sätze zu erwähnen, die für ihn Interesse besitzen.

Dem Geburts- wie dem Todesjahre nach wieder nahe bei Quintilian wird Sextus Julius Frontinus[1]) von 40—103 angesetzt. Er gehörte dem Staatsdienste an, während Vespasianus, Titus, Domitianus, Nerva und Trajanus als Kaiser aufeinander folgten. Unter

[1]) Agrimensoren S. 93 flgg.

Domitianus' Regierung scheint er mit Vorschriften über die Feldmeßkunst erstmalig als Schriftsteller aufgetreten zu sein. Kriegswissenschaftliche Schriften folgten rasch. Ein uns einzig vollständig und unverfälscht durch fremde Zutaten erhaltenes Werk in zwei Büchern über Wasserleitungen[1]), unter Nerva begonnen, unter Trajan etwa im Jahre 98 beendigt, bildet den Schluß seiner schriftstellerischen Tätigkeit. Für die Geschichte der Mathematik bietet es kaum etwas mit Ausnahme von ziemlich zahlreichen Berechnungen von Umfängen von Wasserleitungsröhren aus ihren Durchmessern, bei welchen die Verhältniszahl $\pi = 3\frac{1}{7}$ benutzt ist, soweit die römischen Duodezimalbrüche, mit denen allein operiert ist, es gestatten die Verhältniszahl zu erkennen. Wenn Frontinus in der Vorrede zu dieser Schrift sagt: nachdem Kaiser Nerva ihn dem sämtlichen Wasserwesen vorgesetzt habe, schreibe er dies Büchlein um sich selbst über seine Pflichten klar zu werden, es könne dann möglicherweise auch seinen Nachfolgern im Amte sich nützlich erweisen; was er dagegen früher geschrieben, habe sich stets auf Dinge bezogen, mit welchen er durch lange Übung vertraut war, und sei daher der Hauptsache nach mit Rücksicht auf die Belehrung seiner Nachfolger entstanden, so sind diese Bemerkungen reichlich dazu angetan uns den Verlust des feldmesserischen Werkes bedauern zu lassen. Wir wissen nur aus einer Randbemerkung[2]) eines Schreibers vermutlich zu Anfang des XII. S., daß dieser ein Buch des Frontinus gekannt hat, in welchem Flächeninhalte von Vierecken berechnet wurden. Wir wissen ferner von einzelnen Stellen aus jenem feldmesserischen Werke und von der fast wörtlichen Wiederkehr solcher Stellen in einem berühmten Buche aus dem Anfange des XIII. S.[3]), welche die Vermutung erweckt, gewisse dort beschriebene und, wie der Verfasser sich ausdrückt, alten Weisen zu verdankende feldmesserische Operationen möchten, wiewohl in den Fragmenten des Frontinus selbst fehlend, ursprünglich von ihm beschrieben worden sein.

Die uns erhaltenen Bruchstücke des Frontinus finden sich vereinigt mit anderen für die Geschichte der Mathematik hochwichtigen Fragmenten in einer Sammelhandschrift, welche von 1566—1604 im Besitze von Johannes Arcerius in Gröningen war und deshalb von

[1]) Vgl. über dieses Werk eine kleine Druckschrift des New Yorker Wasserbauingenieurs Clemens Herschel, *Frontinus and his two books on the water supply of the city of Rome*, die den Inhalt einer von ihrem Verfasser am 2. Februar 1894 in der Cornell-Universität gehaltenen Vorlesung wiedergibt. [2]) Agrimensoren S. 94 und Anmerkung 186. [3]) Agrimensoren S. 179 flgg. über Frontinus und Leonardo von Pisa.

dem nachfolgenden Eigentümer Petrus Scriverius in einer Beschreibung aus dem Jahre 1607 den Namen der arcerianischen Handschrift erhielt, als welche sie heute noch bekannt ist[1]). Sie ist eine der ältesten größeren Handschriften, welche man überhaupt besitzt, und nach dem Urteile der Fachgelehrten nicht später als im VII., vielleicht schon im VI. S. niedergeschrieben. Man nimmt an, es seien um das Jahr 450 aus älteren Schriften, sämtlich auf Gebietseinteilung, Agrargesetzgebung und dergleichen bezüglich, amtliche Auszüge veranstaltet worden als rechtswissenschaftlich-statistisches Nachschlagebuch für Verwaltungsbeamte des römischen Kaiserreichs, und eine wieder um ein oder anderthalb Jahrhundert jüngere Abschrift dieser Sammlung sei als Codex Arcerianus auf uns gekommen, die sauber und schön geschriebene Arbeit eines vielleicht als Beamter sehr brauchbaren Mannes, der aber von Feldmessung wenig oder gar nichts verstand und daher zu den Fehlern, welche bereits in seiner Vorlage vorhanden gewesen sein mögen, noch weitere nicht seltene eigene Versehen und Schreibfehler hinzufügte. Man sieht, daß es insofern keine sehr reine Quelle ist, aus welcher wir genötigt sind unser Wissen zu schöpfen. Es steht keineswegs fest, daß die verschiedenen Bruchstücke gerade von den Schriftstellern herrühren, welchen sie zugeschrieben sind; es steht keineswegs fest, wie die Namen, welche mitunter in mehrfachen Schreibformen vorkommen, wirklich gelautet haben; es steht keineswegs fest, wann die Träger dieser Namen gelebt haben, ob, wie man aus ihrer Vereinigung und aus manchen anderen Umständen schließen möchte, sie alle etwa der Zeit von 50 bis 150 angehören, d. h. dem Jahrhunderte, in dessen Mitte Kaiser Trajan lebte, unter welchem, wie wir uns wiederholt erinnern wollen, Menelaus von Alexandria in Rom seinen Aufenthalt aufgeschlagen hatte, oder ob man für sie zum Teil wesentlich späterer Datierungen bis um das Jahr 400 sich bedienen muß.

Inmitten dieser Zweifel begnügen wir uns die Namen der Feldmesser Frontinus, Hyginus, Balbus, Nipsus, Epaphroditus, Vitruvius Rufus, die als Verfasser kleinerer oder größerer Bruchstücke[2]) genannt sind, anzugeben, ferner kurz zu berichten, was man

[1]) Über den *Codex Arcerianus* der Wolfenbüttler Bibliothek vgl. Agrimensoren S. 95. [2]) Die Bruchstücke des Epaphroditus und Vitruvius Rufus vgl. Agrimensoren und *Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus publié d'après le Ms. Latin 13084 de la Bibliothèque Royale de Munich par* Victor Mortet *avec une introduction de* Paul Tannery. *Notices et Extraits etc.* T. XXXV, 2e Partie (Paris 1896); alle übrigen s. Römische Feldmesser I. Übersetzungen wichtiger Teile bei E. Stoeber, Die römischen Grundvermessungen. München 1877.

von den Persönlichkeiten des Hyginus und des Balbus weiß, und schließlich ein Gesamtbild der in jenen Bruchstücken enthaltenen mathematischen Kenntnisse zu geben, ohne eine genauere Zeitbestimmung daran zu knüpfen als diejenige, daß alles vorhanden war, als der Schreiber des Codex Arcerianus es zu Papier brachte.

Der Name Hyginus tritt mehrfach in der römischen Literatur auf. Hyginus, ein Zeitgenosse des Augustus, hat ein astronomisches Werk verfaßt. Ein Militärschriftsteller Hyginus hat über die Anlage von Lagern mutmaßlich zwischen 240 und 267 gehandelt[1]). Von beiden verschieden ist der Feldmesser Hyginus, der unter Trajan lebte und ein größeres feldmesserisches Werk wahrscheinlich im Jahre 103, im Zwischenraume zwischen den beiden dacischen Kriegen verfaßte[2]).

Auch der Name Balbus tritt mehrfach auf. Wir haben einen Oberwegemeister Balbus aus der Zeit des Augustus zu nennen gehabt, dem die Aufsicht über die große Reichsvermessung übertragen war. Der Balbus, von welchem uns Bruchstücke überliefert sind, gehört der trajanischen Zeit an[3]). Er begleitete den Kaiser auf seinem dacischen Feldzuge, und nach errungenem Siege, mithin 103 oder wenn der zweite Feldzug gemeint war spätestens 117, nach Hause zurückkehrend, richtete er eine feldmesserische Schrift an einen Celsus, welcher nicht genau bekannt ist, aber den Worten des Balbus gemäß eine erste Autorität des Ingenieurfaches gewesen sein muß.

Die anderen Namen Marcus Junius Nipsus, Epaphroditus, Vitruvius Rufus sind außer in Verbindung mit den ihnen zugeschriebenen Bruchstücken nicht näher bekannt. Den erstgenannten, wahrscheinlich einen griechischen Freigelassenen eines Römers aus dem Hause der Junier, hat man gewichtige Gründe nicht später als in das II. S. zu setzen. Um jene Zeit dürfte nämlich das Geschlecht der Junier erloschen sein, um jene Zeit wurde es auch Sitte vier, fünf, sogar sechs Namen nacheinander zu führen, während Marcus Junius Nipsus wie in guter alter Zeit nur Pränomen, Nomen und Cognomen erkennen läßt.

Fassen wir sämtliche Schriftsteller des Codex Arcerianus zusammen, so läßt sich unschwer bestätigen, was wir schon vorher behaupten durften: auch diese Feldmesser sind als Schüler des Heron von Alexandria anzusehen, daneben vielleicht noch anderer grie-

[1]) H. Droysen im Rhein. Museum für Philologie (1875) XXX, 469. [2]) Lachmann in Römische Feldmesser II, 139 und Hultsch, *Scriptores metrologici* II, *Prolegomena* pag. 6. [3]) Römische Feldmesser I, 91, 93 und II, 146 flgg. (Mommsen).

chischer Schriftsteller; auch sie bedienten sich des andern Buches von Herons Geometrie, sei es im Originale, sei es in einer lateinischen Übersetzung, deren Vorhandensein freilich nur daraus erschlossen ist, daß es unwahrscheinlich gefunden wird, daß Feldmesser untergeordneten Geistes imstande gewesen sein sollten den Urtext zu verstehen. Andrerseits könnte freilich die Art, wie der Text dieser Feldmesser mit dem Herons in Übereinstimmung tritt, eine Übereinstimmung, die mitunter einem Gegensatz ähnelt, zur Vermutung führen, sie hätten ein in fremder Sprache geschriebenes Buch mißverstanden, oder aber, wenn sie selbst griechischen Stammes waren, sie hätten sich in der ihnen fremden lateinischen Sprache nur mangelhaft auszudrücken gewußt.

Es lassen sich bei ihnen allen ähnlich wie bei Heron gewisse Hauptabschnitte erkennen, von welchen freilich bei dem einen Schriftsteller der eine, bei dem anderen der andere bevorzugt wird: sie werden gebildet durch Maßbestimmungen, durch geometrische Definitionen, durch praktisch feldmesserische Vorschriften, durch rechnende Geometrie, wozu noch bei Epaphroditus und Vitruvius Rufus, für welche gemeinschaftlich ein größeres Bruchstück durch den Schreiber des Codex Arcerianus beansprucht ist, ein Abschnitt über Vieleckszahlen und Pyramidalzahlen kommt, wohl einen anderen Ursprung verratend als Heron, in dessen Schriften, wenigstens soweit die uns erhaltenen Sammlungen Aufschluß geben, derartiges nicht vorkam.

Maßbestimmungen und Definitionen waren für jeden notwendig, der ohne Geometer zu sein Geometrisches lesen wollte oder mußte. Sie hier zu treffen kann uns daher nicht in Erstaunen setzen, und wir bemerken nur, weil gerade die Gelegenheit sich bietet, daß Parallellinien durch *lineae ordinatae* übersetzt sind[1]), das Wort, welches viele Jahrhunderte später für die einer bestimmten Richtung parallelen Geraden (Ordinaten) in Anwendung blieb und uns als einem schon bei den Griechen insbesondere bei Apollonius (S. 337) vorkommenden Ausdrucke nachgebildet erscheint. Dem Charakter des Verwaltungshandbuches gemäß, welchem es nicht auf die Auffindung von Entfernungen, nicht einmal auf die Ausmessung von Grundstücken, sondern auf die Rechtsverhältnisse schon ausgemessener Felder und etwa auf die Berechnung ihres Rauminhaltes aus gegebenen Ausdehnungen zum Zwecke von Versteuerung und dergleichen ankam, sind die Stücke über das, was wir Feldmeßkunst nennen, am kärglichsten vertreten, und wir wissen aus dem Vorhandenen kaum mehr,

[1]) Agrimensoren S. 98.

als daß Entsprechendes aus der Feder eines Frontinus, eines Balbus, eines Celsus einstmals vorhanden gewesen sein muß. Schon um dieser wichtigen Gemeinsamkeit des Inhaltes willen und wegen des vereinigten Vorkommens der Bruchstücke in dem mehrgenannten Codex Arcerianus wollen wir für die Verfasser derselben uns eines häufig benutzten Sammelnamens bedienen und sie die Agrimensoren nennen.

Die Schüler des Heron erkennen wir in ihnen ferner an einer ziemlichen Anzahl von Wörtern, die als genaue Übersetzungen erscheinen[1]). Die Scheitellinie insbesondere heißt, wie wir uns erinnern, bei Heron *κορυφή*, bei den Agrimensoren *vertex* oder *coraustus*, letzteres eine offenbare Verstümmelung von *κορυστὸς* (sc. *γραμμή*)[2]). Wird in einem Dreiecke eine Senkrechte aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt, und trifft sie dieselbe zwischen ihren Endpunkten, so bildet sie einen Abschnitt, der bei Heron *ἀποτομή*, bei den Agrimensoren *praecisura* heißt. Trifft die Senkrechte jenseits des Endpunktes auf die Grundlinie, so entsteht eine Überragung, bei Heron *ἐκβληθεῖσα*, bei den Agrimensoren *eiectura*. Wenn die Aufgabe gestellt ist, leitet Heron die Auflösung mitunter durch die Worte *ποίει οὕτως*, die Agrimensoren durch *sic quaeres* ein, häufig abgekürzt in S. Q., wiewohl man auch versucht hat S. Q. als Abkürzung von *sequitur* zu deuten[3]) und sich darauf stützt, daß in einem dem IX. oder X. S. angehörenden Münchner Manuskripte dieses Wort an Stelle des S. Q. mannigfach abgekürzt erscheint. Wenn Heron das rechtwinklige Dreieck *ὀρθογώνιον*, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite *ὑποτείνουσα*, einen Schenkel des rechten Winkels *κάθετος*, den Flächeninhalt *ἔμβαδον*, die Ausmessung nach Fußen *ποδισμός* nennt, so schreibt ein Agrimensor fast die gleichen Wörter nur mit lateinischen Buchstaben, so daß sie bei ihm *hortogonium*, *hypotenusa*, *chatetus*, *embadum*, *podismus* lauten.

Gleichwie bei Heron findet sich die Berechnung der Fläche des Dreiecks aus seinen drei Seiten. Aufgaben über Dreiecke, in welchen eine Höhe gezogen ist, sind geradezu wörtlich aus Herons Geometrie übersetzt. Wie bei Heron sind rationale rechtwinklige Dreiecke angegeben, ausgehend von ungeraden sowie von geraden Zahlen. Die heronische Berechnung des gleichseitigen Dreiecks findet sich zwar nicht vollständig, aber doch ist dessen Einwirkung unverkennbar.

[1]) Genauere Beweisführung des hier Behaupteten in unseren „Agrimensoren". [2]) Diese Ableitung wurde 1840 durch Gottfried Hermann gegeben. Vgl. Zeitschr. Math. Phys. XX. Histor.-liter. Abtlg S. 68. [3]) Tannery in einer Fußnote zu *Un nouveau texte d'arpentage etc.* *Notices et extraits* XXXV, 2e Partie, pag. 532 (pag. 26 des Sonderabdrucks).

Das gleichseitige Dreieck von der Seite 30 habe, heißt es nämlich, als Quadrat der Seite 900, als Quadrat der halben Seite 225, als Höhe 26 und darin liegt eingeschlossen, daß nach der Ansicht des Verfassers $26 = \sqrt{900 - 225} = \sqrt{675} = 15\sqrt{3}$ sei, also $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ wie bei Heron. Wir bedürfen wohl nicht einer noch genaueren Beweisführung für die Abhängigkeit der Agrimensoren von Heron von Alexandria und wollen vielmehr auf einige Dinge aufmerksam machen, welche in unserem Heron nicht ermittelbar, doch ohne Zweifel griechischen Ursprungs gewesen sein müssen.

Unter dem Namen Nipsus ist die Aufgabe überliefert, aus der Fläche $\triangle$ und der Hypotenuse h eines rechtwinkligen Dreiecks die Katheten c_1 und c_2 zu finden. Die Auflösung wendet die Formeln $c_1 + c_2 = \sqrt{h^2 + 4\triangle}$, $c_1 - c_2 = \sqrt{h^2 - 4\triangle}$ an. Dabei ist dem Schreiber das Versehen begegnet bei dem Satze „der Podismus der Hypotenuse beträgt 25 Fuß“ das wichtigere Wort Hypotenuse zu vergessen und nur zu schreiben „der Podismus beträgt 25 Fuß“. Wir werden uns diesen interessanten Schreibfehler zu merken haben, welcher uns im 39. Kapitel dienen wird, im Codex Arcerianus die Quelle eines Werkes aus dem X. S. zu erkennen.

In dem als von Epaphroditus und Vitruvius Rufus herrührend bezeichneten Bruchstücke ist der Durchmesser des in ein rechtwinkliges Dreieck beschriebenen Kreises als der Rest berechnet, welcher bei Abziehung der Hypotenuse von der Summe der beiden Katheten übrig bleibt.

Ebenda wird die Oberfläche von Bergen nach einer Näherungsmethode berechnet, welche derjenigen nahe verwandt ist, von der (S. 489) unter dem Namen des Patrikius die Rede war, welche aber, da sie, wie wir dort bemerkten, fast wahrscheinlicher uralt ist, zur Datierung des Epaphroditus nichts beitragen kann, auch wenn wir genau wüßten, welcher Patrikius in der betreffenden Stelle gemeint ist. Die Berechnung erfolgt, indem das arithmetische Mittel von drei, ein andermal von zwei Kreisperipherien als durchschnittlicher Umfang des Berges das eine Mal mit dessen Höhe, das andere Mal mit der halben Summe zweier an Abhängen von verschiedener Steilheit zu messenden Höhen vervielfacht wird.

Wieder in einer anderen Aufgabe ist mit Hilfe eines massiven gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, längs dessen Hypotenuse man bei horizontaler Lage der einen Kathete den Gipfel eines Baumes einvisiert, eine der vertikalen Höhe des Baumes gleiche Entfernung von seinem Fuße bestimmt, die alsdann abgemessen werden kann

und somit eine Höhenmessung liefert[1]), welche von der Benutzung des Schattens absieht; eine Methode, welche sowohl an sich bemerkenswert ist, als auch dadurch, daß sie durch die in einem Zwischensatze hervorgehobene Ausschließung der Schattenbeobachtung bestätigt, daß die Höhenmessung aus dem Schatten, das Verfahren also, welches man bis auf Thales zurückzuführen liebt, die Regel bildete.

Am merkwürdigsten sind einige Paragraphe des gleichen Fragmentes, welche mit arithmetischen Sätzen sich beschäftigen, und zwar merkwürdig nach zwei Richtungen: erstlich dadurch, daß sie erkennen lassen, was einzelne in Rom aus offenbar griechischer Quelle einmal gewußt haben, zweitens dadurch, daß sie bezeugen, wie spätestens zur Zeit der Abfassung der Sammlung, welche uns als Quelle dient, die Dinge bereits mißverstanden wurden. Wir haben (S. 361) bei Hypsikles um 180 v. Chr. die Definition der $r$ten $m$ecks-zahl kennen gelernt als $p_m^r = 1 + (m-1) + (2m-3) + \cdots + (1 + (r-1)(m-2))$. Wir haben (S. 486) bei Diophant um 300 n. Chr. vielleicht allerdings aus früherer Quelle die beiden Gleichungen auftreten sehen $p_m^r = \frac{[(m-2)(2r-1)+2]^2 - (m-4)^2}{8(m-2)}$ und $r = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8(m-2)p_m^r + (m-4)^2} - 2}{m-2} + 1\right]$. Diese beiden Formeln nun, welche bei bekannter Ordnung m einmal die Vieleckszahl aus ihrem oberen Index r, das andere Mal jenen Index r aus der $r$ten Vieleckszahl ableitet, kommen in unserem Fragmente vor, zwar nicht wie bei Diophant als in Worte gekleidete allgemeine Formeln, aber in ihrer Anwendung auf die Vieleckszahlen aufeinanderfolgender Ordnung von der Dreieckszahl bis zur Zwölfeckszahl, mit zwei Rechenfehlern, wo es um Fünf- und Sechseckszahlen sich handelt. Dort wäre nämlich richtig $p_5^r = \frac{3r^2 - r}{2}$, $p_6^r = \frac{4r^2 - 2r}{2}$, während die irrigerweise statt der Subtraktionen in den betreffenden Zählern vorgenommenen Additionen die falschen Formeln $p_5^r = \frac{3r^2 + r}{2}$, $p_6^r = \frac{4r^2 + 2r}{2}$ hervorbrachten, nach welchen gerechnet ist. Es ist gewiß berechtigt, daraus den Schluß zu ziehen[2]), daß dabei die allgemeinen Wortformeln den Ausgangspunkt bildeten, denn es ist unendlich viel wahrscheinlicher, daß zwei Fehler mangelhafter Substitution vorkommen, als daß bei der Einzelbetrachtung der aufeinander folgenden Vieleckszahlen zwei in Rechenfehler ausartende

[1]) *ut sine umbras solis et lunae mensuris* (Agrimensoren S. 215, lin. 8—9).
[2]) Agrimensoren S. 126.

Schreibfehler just bei niedrigem Werte von m sich hätten einschleichen sollen. In der Tat sind in der Münchner Handschrift die richtigen Formeln an dieser Stelle benutzt.[1])

Auch eine merkwürdige Formel für Pyramidalzahlen läßt aus den Einzelfällen sich erkennen, deren Ableitung freilich nirgend gegeben ist, aber nachträglich sich leicht erraten läßt, ohne irgend Kenntnisse in Anspruch zu nehmen, welche nicht bei den Griechen sich nachweisen ließen. Nennt man die Summe der r ersten $m$ecks-zahlen die $r$te $m$eckige Pyramidalzahl und schreibt dafür P_m^r, so ist die Definitionsgleichung $P_m^r = p_m^1 + p_m^2 + \cdots + p_m^r$. Nun nehmen wir an, es sei ausgehend von dem bekannten Satze

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$$

die Umformung vorgenommen worden:

$$\frac{[(m-2)(2r-1)+2]^2 - (m-4)^2}{8(m-2)}$$

$$= \frac{[(m-2)(2r-1)+2+(m-4)] \cdot [(m-2)(2r-1)+2-(m-4)]}{8(m-2)}$$

$$= \frac{(m-2)\,2r\,[(m-2)\,2r+8-2m]}{8(m-2)} = \frac{m-2}{2} \cdot r^2 - \frac{m-4}{2} \cdot r.$$

Setzt man die entsprechenden Werte in alle Vieleckszahlen von p_m^1 bis p_m^r ein, so erhält man

$$P_m^r = \frac{m-2}{2}(1^2 + 2^2 + \cdots + r^2) - \frac{m-4}{2}(1 + 2 + \cdots + r).$$

Aber spätestens zu Archimeds Zeiten (S. 313—314) war bekannt

$$1 + 2 + \cdots + r = \frac{r(r+1)}{2} \text{ und } 1^2 + 2^2 + \cdots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6},$$

wenn auch letzteres noch nicht in der kurzen Form, deren wir uns bedienen. Diese Werte liefern

$$P_m^r = \frac{m-2}{2} \cdot \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} - \frac{m-4}{2} \cdot \frac{r(r+1)}{2}$$

beziehungsweise

$$P_m^r = \frac{r+1}{6}\left[\frac{m-2}{2} \cdot 2r^2 + \frac{m-2}{2} \cdot r - \frac{m-4}{2} \cdot 3r\right]$$

$$= \frac{r+1}{6}\left[\frac{2(m-2)}{2} r^2 - \frac{2(m-4)}{2} \cdot r + \frac{m-2}{2} \cdot r - \frac{m-4}{2} \cdot r\right]$$

$$= \frac{r+1}{6}\left[2p_m^r + r\right]$$

und dieser letzteren Formel bedient sich der römische Schriftsteller.

Ja er kennt sogar die Summierung der r ersten Kubik-

[1]) *Un nouveau texte d'arpentage etc.* *Notices et Extraits* XXXV, 2e Partie, pag. 540—541 (pag. 34—35 des Sonderabdrucks).

zahlen: $1^3 + 2^3 + \cdots + r^3 = \left(\frac{r(r+1)}{2}\right)^2$. Auch hier ist die Auffindung des Weges, auf welchem ein Grieche zu dieser Formel gelangen konnte, mag er nun geheißen und gelebt haben wie und wann er wolle, nicht allzuschwierig. Nikomachus, sagten wir (S. 432), habe um 100 n. Chr. die Beziehung zwischen den Kubikzahlen und aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen erkannt, welche dahin sich ausspricht, die erste Kubikzahl sei gleich der ersten ungeraden Zahl, die zweite gleich der Summe der zwei darauffolgenden ungeraden Zahlen, die dritte gleich der Summe der darauf wieder folgenden drei ungeraden Zahlen usw. Über sämtliche r erste Kubikzahlen ausgedehnt liefert das als deren Gesamtsumme die Summe der $1 + 2 + \cdots + r$ d. h. der $\frac{r(r+1)}{2}$ aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen von der 1 anfangend. Die alten Pythagoräer wußten aber schon (S. 160), daß diese das Quadrat ihrer Anzahl bilden. Die Gesamtsumme ist mithin $1^3 + 2^3 + \cdots + r^3 = \left(\frac{r(r+1)}{2}\right)^2$, und genau so rechnet unser Schriftsteller[1]).

Diese arithmetischen Kenntnisse: eine Darstellung der Vieleckszahl aus ihrer Seite, der Seite aus der Vieleckszahl, der Pyramidalzahl aus Vieleckszahl und Seite, endlich die Summierung der aufeinanderfolgenden Kubikzahlen einem griechischen Schriftsteller auch ohne Beweis entnommen zu haben, würde schon ein gewisses mathematisches Verdienst der Männer voraussetzen, welche es verständnisvoll unternahmen die interessanten Formeln aufzubewahren. Ob wir aber dem Epaphroditus und Vitruvius Rufus das Beiwort des Verständnisses zuerkennen dürfen? Eine Figur, welche in den Text hineingeraten ist, läßt daran gerechte Zweifel entstehen.

Figuren finden sich auch bei griechischen Arithmetikern, wie wir wissen, zur Versinnlichung der Vieleckszahlen, ja diese Zahlen selbst haben von Anfang an ihre Namen von dieser Versinnlichung her bekommen, und so wird die Quelle unserer Römer mit an Gewißheit streifender Wahrscheinlichkeit die Figuren des regelmäßigen Fünfecks, Sechsecks, . . . Zwölfecks enthalten haben, welche neben den Formeln übernommen werden durften, wenn nicht mußten. Aber bei der Ausrechnung der Achteckszahl ist nicht bloß das regel-

[1]) Herr P. Tannery hat bemerkt, daß diese Formel, von der es langezeit unbeachtet geblieben war, daß sie den Alten bekannt gewesen, doch im XVII. S. der Aufmerksamkeit Pascals nicht entging, sonst könnte er zu Anfang seines Aufsatzes *Potestatum numericarum summa* nicht gesagt haben: *Datis ab unitate quotcumque numeris continuis invenire summam quadratorum eorum tradiderunt veteres; imo etiam et summam cuborum eorumdem. Oeuvres de Pascal.* Paris 1872. Vol. III, pag. 303.

mäßige Achteck, es ist auch in einen Kreis eingezeichnet die Figur zweier sich symmetrisch durchsetzender Quadrate vorhanden, die wir früher um einige vom Kreismittelpunkte gezogene Hilfslinien vermehrt und mit einer Buchstabenbezeichnung einiger Punkte versehen kennen gelernt haben (Fig. 66). Diese Figur ist unter keinen Umständen arithmetischen Charakters. Sie kann sich nur auf die geometrische Entstehung des regelmäßigen Achtecks aus dem Quadrate beziehen, und ihr Vorkommen bei Epaphroditus gewährt unseren früher (S. 401) ausgesprochenen Vermutungen über die Anwendung jener Figur eine nicht geringfügige Unterstützung. Wer aber die beiden Figuren, das arithmetische und das geometrische Achteck, wenn wir so sagen dürfen, um unsere Meinung in recht scharfe sprachliche Gegensätze zu kleiden, nebeneinander abbildete, der bewies damit, daß er die arithmetische Figur nicht verstand, daß er glaubte beidemal mit geometrischen Dingen zu tun zu haben. Wir fürchten, es waren jene Römer, welche dem Mißverständnisse unterlagen, und sollten Epaphroditus und Vitruvius, oder wenigstens einer derselben, an der Vermengung dieser Dinge unschuldig sein — die Vermutung liegt ja nahe, daß von jenen beiden Männern der eine eine geometrische, der andere eine arithmetische Schrift verfaßte, aus welchen nur ein Auszug vorliegt, dessen Blätter einigermaßen durcheinandergekommen sind — so hat jedenfalls der Schreiber des Codex Arcerianus unter dem Banne der vermengenden Verwechslung gestanden. Läßt sich doch schon zum voraus, und ohne des uns triftig erscheinenden Beweisgrundes der beiden Achtecke sich zu bedienen, die Behauptung aussprechen, Arithmetisches als solches habe in der Sammlung eines Verwaltungsbeamten keinen Platz gefunden. Es konnte sich dort überhaupt nur einschleichen, wenn man wähnte, es handle sich um Geometrisches, also nicht um Vieleckszahlen, sondern um den Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke, und bei den Pyramidalzahlen, bei den Kubikzahlen, welche dort vorkommen, mag der Schreiber sich wohl gar nichts gedacht haben. Diese Behauptungen finden auch ihre Bestätigung in den vielen bei den arithmetischen Sätzen auftretenden Schreibfehlern.

Fassen wir also das bisher Gewonnene zusammen, so wird das Ergebnis sich gestalten wie folgt: Die Römer sind, wenn sie auch eine uralte Feldmeßkunst besaßen und des Rechnens zum täglichen Gebrauche nicht entbehren konnten, zur Mathematik schlecht genug veranlagt gewesen. Ein bis anderthalb Jahrhunderte lang, von Cäsar bis nach Trajan etwa, war eine verhältnismäßige Blütezeit römischer Geometrie und vielleicht auch römischer Arithmetik, beide auf griechische Quellen zurückgehend, unter welchen sich jedenfalls Schriften

des Heron von Alexandria befanden. Allmählich jedoch verschwand sogar das Verständnis des damals ins Lateinische Übersetzten.

27. Kapitel.

Die spätere mathematische Literatur der Römer.

Die Behauptung, daß die Römer in den Zeiten Cäsars bis Trajans auch arithmetischer und damit bei den Griechen schon enge verbundener algebraischer Leistungen bis zu einem gewissen Grade fähig waren, ist außer aus dem Bruchstücke des Codex Arcerianus, welches wir zu diesem Zwecke verwandt haben, auch aus den Rechtsquellen zu bestätigen.

Zinszahlungen, also auch Zinsberechnungen sind bei den Römern ungemein alt[1]), so daß von anderen Erleichterungen überbürdeter Schuldner abgesehen schon im Jahre 342 v. Chr. die freilich nicht eingehaltene Lex Genucia gegen jede Zinsverleihung Gesetzeskraft gewann. Noch zu Ciceros Zeit war 48 Prozent nichts Unerhörtes, wenn auch eigentlich nicht gestattet. In der Kaiserzeit galt ein Zinsfuß von 12, später von 6 Prozent als gesetzlich. Dichterstellen, besonders bei Horaz, beweisen, daß das Zinsrechnen zu den täglich notwendigen und darum immer geübten Kenntnissen gehörte[2]). Auch eine entsprechende Verminderung für vorzeitigen Genuß eines erst später zu erlangenden Besitzes, das sogenannte Interusurium oder die Repräsentation, wie der Römer sagte, ist alt, wenn auch die Größe der Verminderung und die Regeln, nach welchen sie abgeschätzt wurde, weit entfernt davon sind, im klaren zu sein. Ulpian, der am Ende des II. und Anfang des III. S. n. Chr. lebte, stellte bereits Berechnungen ähnlicher Art unter Voraussetzung einer wahrscheinlichen Lebensdauer an[3]), allerdings wieder ohne daß wir eine Ahnung haben, wie jene wahrscheinliche Lebensdauer gewonnen wurde.

Zu anderen Rechnungsaufgaben gab das Erbrecht der Römer, gaben die vielfach ungemein verzwickten letztwilligen Verfügungen Anlaß, die geradezu Regel bei ihnen waren. Im Jahre 40 v. Chr. stellte die Lex Falcidia fest, daß dem eigentlichen Erben mindestens ein Viertel des hinterlassenen Vermögens verbleiben mußte. Waren also Vermächtnisse im Gesamtbetrage von mehr als Dreiviertel des

[1]) Gustav Billeter, Geschichte des Zinsfußes im griechisch-römischen Altertum bis auf Justinian. Leipzig 1898. [2]) Hultsch im Jahrbuch für klassische Philologie 1889. S. 335—343. [3]) *Ad legem Falcidiam* XXXV, 2, 68

Vermögens testamentarisch verheißen, so mußten diese mittels einer Gesellschaftsrechnung herabgemindert werden, so daß die sogenannte falcidische Quart nicht angegriffen wurde.

Ein für die Geschichte der Mathematik in seiner Eigentümlichkeit, welche eine Übertragung von einem Werke zum andern sichert, höchst bedeutsamer Fall ist der eines Erblassers, der seine Witwe in schwangerem Zustande hinterläßt und Bestimmungen für die beiden Möglichkeiten getroffen hat, daß sie einem Knaben oder einem Mädchen das Leben schenkt, während der tatsächlich eintretende Fall, daß Zwillinge, und zwar Zwillinge von verschiedenem Geschlechte, geboren werden, nicht vorgesehen war. Ein daran sich knüpfender Rechtsstreit ist durch Salvianus Julianus[1]), einen Juristen, der unter den Kaisern Hadrian und Antoninus Pius wirkte, berichtet; ein zweiter verwandter Fall kommt bei Cäcilius Africanus[2]), ein dritter bei Julius Paulus[3]), einem glänzenden Juristen des III. S., vor, der unter Kaiser Alexander Severus der römischen Rechtswissenschaft zur Zierde gereichte. Die älteste Entscheidung des Julianus lautet folgendermaßen: „Wenn der Erblasser so schrieb: Wenn mir ein Sohn geboren wird, so soll dieser auf $\frac{2}{3}$ meines Vermögens, meine Frau aber auf die übrigen Teile Erbe sein; wird mir aber eine Tochter geboren werden, so soll diese auf $\frac{1}{3}$, auf das Übrige aber meine Frau Erbe sein, und ihm nun ein Sohn und eine Tochter geboren wurden, so muß man das Ganze in 7 Teile teilen, so daß von diesen der Sohn 4, die Frau 2 und die Tochter 1 Teil erhält. Denn auf diese Weise wird nach dem Willen des Erblassers der Sohn noch einmal soviel erhalten als die Frau, und die Frau noch einmal soviel als die Tochter. Denn obgleich nach den Bestimmungen des Rechtes ein solches Testament umgestoßen werden sollte, so verfiel man doch aus rein vernünftigen Gründen auf die genannte Entscheidung, da ja nach dem Willen des Erblassers immer die Frau etwas erhalten soll[4]), mag ihm ein Sohn oder eine Tochter geboren werden. Auch Juventius Celsus stimmt hiermit vollkommen überein." Dieser letztere Jurist, auf welchen Julianus sich bezieht, der die Aufgabe also jedenfalls kannte, lebte unter Trajan um das Jahr 100 n. Chr., war also sicherlich ein Zeitgenosse jenes Celsus,

[1]) *Lex* 13 *principio. Digestorum* lib. XXVIII, tit. 2. [2]) *Lex* 47, § 1. *Digestorum* lib. XXVIII, tit. 5. [3]) *Lex* 81 *principio. Digestorum* lib. XXVIII, tit. 5. [4]) Wäre nämlich das Testament umgestoßen und somit als nicht vorhanden zu betrachten, so würden nach römischem Rechte die Kinder allein geerbt haben, die Witwe aber leer ausgegangen sein.

an welchen, wie wir uns erinnern, Balbus sein feldmesserisches Werk gerichtet hatte. Unmöglich erscheint es daher nicht, daß diese beiden Persönlichkeiten mit Namen Celsus in eine verschwimmen müßten, daß der gelehrte Jurist Celsus auch Ingenieur gewesen, auch in der Geometrie als Schriftsteller aufgetreten wäre, daß von ihm auch jene Erbteilungsaufgabe herrührte, welche ebensogut in einem mathematischen Buche als in einer Sammlung von Rechtsfällen einen Platz einnehmen konnte.

Zeitgenosse des Julianus um die Mitte des II. S. war ein Schriftsteller, der uns gleichfalls für das unter den Antoninen noch vorhandene Interesse an arithmetischen Dingen Bürge ist. Appuleius, geboren zu Madaura, einer blühenden Kolonie an der Grenze Numidiens gegen Gätulien hin, machte seine Studien vornehmlich zu Athen, begab sich aber alsdann zu weiterer Ausbildung auf größere Reisen. Von schönschriftstellerischer Seite ist er als Verfasser eines witzigen Romans bekannt. Aber auch als mathematischer Schriftsteller ist er aufgetreten. Cassiodor[1]) im zweiten Drittel des VI., Isidor von Sevilla[2]) am Anfang des VII. S. bezeugen ausdrücklich, die Arithmetik des Nikomachus sei erstmalig durch Appuleius, dann zum zweiten Male durch Boethius ins Lateinische übertragen worden. Unmittelbare Überreste der Bearbeitung durch Appuleius sind nicht erhalten, so daß ein Urteil darüber nicht gefällt werden kann, inwieweit die Behauptung, Appuleius habe auch Rechenbeispiele in größerer Anzahl gelehrt, nur auf einem Mißverständnisse beruht, indem die betreffenden Gewährsmänner seine Arithmetik gleichfalls nur vom Hörensagen kannten und aus dem Titel ihre falschen Schlüsse zogen, oder aber Wahrheit ist. Im XV. und XVI. S. wurde mit Sicherheit an die Wahrheit geglaubt. Ein Rechenbuch, algorithmus linealis genannt, aus jener Zeit, der Erlanger Universitätsbibliothek angehörig, beginnt ausdrücklich mit den Worten: „Um die vielen Irrtümer der Kaufleute und die Schwierigkeiten des andern Teiles der Arithmetik zu vermeiden, ist bei Appuleius, dem in allen Wissenschaften hocherfahrenen Manne, eine andere Anschauung dieser Kunst erfunden, welche ebenso viel berühmter als leichter und den Geisteskräften eines jeden angepaßter ist als die erste; bei uns heißt sie Rechnung auf den Linien"[3]). Ein 1540 in Paris anonym erschienenes Rechenlehrbuch sagt: „Die ganze Kraft dieser Disziplin ruht in den Beispielen der Addition und Subtraktion; wer das ganze

[1]) Cassiodor, *Opera* (ed. Garet). Venedig 1729, Bd. II, pag. 555, col. 2, lin. 14 v. u. [2]) Isidor Hispalensis, *Origines* Lib. III, Cap. 2. [3]) Friedlein, Zahlzeichen und elementares Rechnen usw. S. 48.

Kapitel vollauf kennen lernen will, der lese den Appuleius, welcher zuerst den Römern diese Dinge beleuchtete"[1]). Es hält so bestimmten Äußerungen gegenüber schwer, des Glaubens sich zu erwehren, daß, wer so sprach, die Schrift des Appuleius selbst vor Augen gehabt habe. Nicht minder schwer freilich fällt die Annahme, Appuleius habe die Arithmetik des Nikomachus, die wir im Originale wie in der Bearbeitung des Boethius zur Genüge kennen, so selbstständig oder unter Zuziehung anderer Quellenschriften behandelt, daß er Rechenbeispiele einfügen konnte. Oder sollen wir annehmen, Nikomachus habe neben der Arithmetik ein ganz verschollenes Rechenbuch verfaßt? Auf dieses beziehe sich der Ausspruch Lucians: Du rechnest wie Nikomachus? Dieses habe Appuleius übersetzt, und das Mißverständnis rühre von Cassiodor und dem ihn ausschreibenden Isidor her, welche die Übersetzungen zweier verschiedener Werke des Nikomachus ins Lateinische vermengten? Wir fühlen wohl, wie viele Gründe sich auch dieser Annahme entgegentürmen, wollten aber keinesfalls versäumen, jede der verschiedenen Möglichkeiten jene Äußerungen später Zeit zu erklären anzuführen. Unterstützend für unsere Annahme ist jene Berufung des Nikomachus auf eine von ihm verfaßte Einleitung in die Geometrie (S. 432). Es ist uns wenigstens gar nicht undenkbar, daß diese einen wesentlich rechnenden Charakter hatte. War doch seit Herons rechnender Geometrie gerade eine diese Vorkenntnisse umfassende Einleitung Bedürfnis geworden, während zu einer wahrhaft geometrischen Einleitung in die Geometrie Anlaß kaum vorhanden war.

Auch auf geometrischem Gebiete ist die wenn nicht selbstschöpferische doch an Übertragungen griechischer Schriftsteller sich übende Tätigkeit der Römer keineswegs mit den Zeiten Trajans abgeschlossen. Neben den im Codex Arcerianus vereinigten, wie wir sahen, um die Mitte des V. S. schon zusammengestellten vielleicht zum Teil später als Trajan, sogar später als Diophant zu datierenden Stücken ist uns ein sehr bedeutsames Fragment aus dem IV. S. erhalten, welches zeigt, daß nicht bloß der „Heron" der Praktiker, sondern auch der „Euklid" der Theoretiker der römischen Sprache mächtige Liebhaber besaß. Dieses Fragment[2]), auf welches zuerst 1820 hingewiesen worden ist, und welches seitdem unausgesetzt die

[1]) Math. Beitr. Kulturl. Anmerkung 351. [2]) Vgl. die von Niebuhr 1820 in Rom herausgegebenen Bruchstücke der Reden Ciceros für Fonteius und Rabirius pag. 20. Blume, *Iter Italicum* I, 263. Keil auf pag. XI der Vorrede zu seiner Ausgabe des Probus. Reifferscheid, Sitzungsber. d. philol. Abtlg. der Wiener Akademie XLIX, 59. Mommsen, Abhdlg. der Berliner Akademie 1868, S. 153, 156, 158.

Aufmerksamkeit philologischer Forscher in Spannung erhielt, gehört der unteren Schrift eines Palimpsestes an, der in der Kapitelbibliothek zu Verona früher unter der Nummer 38, jetzt unter der Nummer 40 aufbewahrt wird. Die jüngere dem IX. S. angehörende Schrift enthält einen Teil der „Moralischen Betrachtungen zum Buch Hiob" vom Papst Gregor dem Großen († 604). Die darunter erkennbare ältere Schrift stammt nach dem Dafürhalten aller neueren Sachkundigen unter Beachtung aller Merkmale der Schrift wie der Sprache, welche zur Entscheidung beitragen können, aus dem IV. S. Kaum mit bloßem Auge erkennbar, gab sie mühevollster Entzifferung ihren Inhalt kund. Es sind Bruchstücke des Vergilius, des Livius und Geometrisches, welche im IX. S. würdig schienen theologisch-moralischen Betrachtungen den Platz zu räumen. Das geometrische Fragment[1]) gibt sich selbst als dem XIV. und XV. Buche des Euklid entstammend an. Seine Numerierung ist aber keineswegs mit der gebräuchlichen gleichlaufend. Als XIV., als XV. Buch der euklidischen Elemente bezeichnet man bekanntlich (S. 358 und 501) jene von mindestens zwei verschiedenen Schriftstellern herrührenden stereometrischen Abhandlungen, welche, man weiß nicht recht wie und wann, an die dreizehn Bücher der Elemente angehängt worden sind. Diesen Abhandlungen gleicht das lateinische Bruchstück nicht im geringsten. Ohne Satz für Satz und Figur für Figur mit dem griechischen Euklidtexte zur Deckung gebracht werden zu können, ist es doch unter allen Umständen den echt euklidischen mit Stereometrie sich beschäftigenden Büchern, dem XII. und XIII. Buche unserer griechischen Texte entnommen. Es ist entweder Auszug, oder Übersetzung eines Auszuges, jedenfalls Arbeitsexemplar des Unbekannten, von welchem es herrührt, wie der Entzifferer mit großem Scharfsinne aus der Tatsache geschlossen hat, daß einzelne Wörter durchstrichen und durch anders lautende Synonyma ersetzt sind. Das kann selbstverständlich nur auf den Schriftsteller, beziehungsweise den Übersetzer selbst zurückgeführt werden, und zwar in einer Zeit, in welcher seine Arbeit noch in Vorbereitung, noch nicht abgeschlossen war.

Die andere Seite unserer zum Schlusse des vorigen Kapitels ausgesprochenen Behauptung, daß das Verständnis der aus Griechenland überkommenen mathematischen Kenntnisse der Römer mehr und

[1]) Der Entzifferer, Prof. W. Studemund, hat längst eine Herausgabe zugesagt. Er ist leider gestorben, ohne seine Zusage erfüllt zu haben. Unser Bericht entstammt den mündlichen Mitteilungen, welche er so freundlich war, unter Vorzeigung seines vorbereiteten Materials uns zu machen, und deren Veröffentlichung er uns gestattet hat.

mehr schwand, findet gleichfalls Bestätigung, wenn wir die Magerkeit uns betrachten, zu welcher im Laufe der Jahrhunderte die römische Mathematik zusammenschrumpfte.

Theodosius Macrobius, ein vielleicht aus Afrika stammender Schriftsteller, von welchem uns Kommentare erhalten sind[1]), die um 400 entstanden sein dürften, und in welchen hier und da zerstreut auch einige mathematische Erläuterungen vorkommen, ist noch bei weitem der dürftigste nicht. Wir denken auch nicht an den kurz vor oder nach 457 entstandenen Calculus des Victorius, dessen Notwendigkeit wir oben (S. 531) eingesehen haben, begründet in der Schwierigkeit mit den römischen Duodezimalbrüchen Rechnungen auszuführen. Wir denken zunächst an Martianus Mineus Felix Capella. Er war in der ersten Hälfte des V. S. in Karthago geboren und stieg bis zur Würde eines römischen Prokonsuls empor. Er hat uns ein aus neun Büchern bestehendes enzyklopädisches Werk, welches den Gesamtnamen *Satira* führt, hinterlassen[2]), dessen Entstehung etwa auf das Jahr 470 fällt. Die beiden ersten Bücher führen den besonderen Titel der Vermählungsfeier der Philologie mit Merkur und stellen ein kleines Ganzes dar, eine Art von philosophischem und allegorischem Romane, der als Einleitung dient. Zur Vermählung erscheinen alsdann die sieben Jungfrauen, welche Merkur zu Gesellschafterinnen seiner jungen Frau bestimmt, nämlich die sieben Wissenschaften, welche, um den Ausspruch Quintilianus' zu benutzen, den Kreis der freien Lehre ausmachen[3]). Es sind dieselben freien Künste, in derselben Reihenfolge, wie wir sie durch Varros Werk kennen, dessen Einteilung uns wenigstens erhalten blieb (S. 543). Jede Wissenschaft bringt ihr Symbol mit. Nach der Grammatik, der Dialektik und der Rhetorik tritt die Geometrie auf. Sie hat den mit blauem Sande bestreuten Abacus in Händen[4]), auf welchen also diesmal die Figuren gezeichnet werden sollen, mit welchen die Geometrie sich abgibt. Freilich eine sonderbare Geometrie, deren räumlicher Hauptbestandteil in geographischen Begriffen, in einer Aufzählung historisch interessanter Orte, deren Gründer zugleich genannt werden, aufgeht. Dann kommen Definitionen von Linien, Figuren, Körpern, dann die notwendigsten Forderungen, alles nach Euklid und unter Benutzung der griechischen Benennungen. Sind aber die Vorbereitungen erst soweit getroffen, daß die Göttin auf dem Abacus eine gerade Linie zieht und die Frage stellt: Wie läßt sich über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichten, da erkennen sofort die in dichtem Haufen sie umstehenden Philosophen, sie wolle den ersten Satz der euklidischen Elemente bilden, brechen in lautes Klatschen und Hochrufen auf Euklid aus . . .[1]) und das VI. Buch und mit ihm die Geometrie ist zu Ende. Von Feldmessung, von rechnender Geometrie, mit einem Worte von Heronischem ist in keiner Weise die Rede. Im VII. Buche macht die Arithmetik ihre Aufwartung mit ihren Fingern die Zahl 717 darstellend, durch welche sie den Gott der Götter begrüßt. Wir haben dieses Zeugnis für die auch damals bekannte Fingerrechnung (S. 527) anrufen dürfen. Wir fügen hinzu, daß Pallas auf die Frage der Philosophie, was jene Zahl zu bedeuten habe? erwidert: die Arithmetik grüße Jupiter mit seinem eigenen Namen. Diese Stelle ist jedenfalls richtig dahin erklärt worden, Jupiter sei der Anfang der Dinge und ἡ ἀρχή stelle durch den Zahlenwert der Buchstaben $8 + 1 + 100 + 600 + 8$ die Zahl 717 vor. Auch Pythagoras ist bei den der Vermählung wegen versammelten Gästen und tritt nun näher hinzu, er, der bisher bei den Zeichnungen auf dem Abacus als Zuschauer gestanden hatte. Der kundige Leser ist durch die symbolische Begrüßung, durch das persönliche Auftreten des Pythagoras zur Genüge auf das vorbereitet, was er im VII. Buche nun entwickelt finden wird: eine wesentlich pythagoräische Arithmetik nach dem Muster des Nikomachus, wie sie den Römern, wenn nicht schon seit Appuleius, jedenfalls seit Plotinus unter ihnen gelebt hatte, geläufiger geworden war, wie sie jetzt in einer Zeit, während welcher mancher von den tonangebenden vornehmsten Römern zu den Füßen des Proklus in den Vorlesungsräumen von Athen gesessen hatte, gewiß auf Verständnis zählen durfte. Wir sind mit der Bemerkung, daß diese Erwartung nicht getäuscht wird, einer genaueren Berichterstattung über das VII. Buch überhoben. Wir machen nur auf die negativ eigentümliche Erscheinung aufmerksam, daß der vieleckigen Zahlen, die bei Nikomachus eine so wichtige Rolle spielen, kaum gedacht ist. Wohl heißt es, die Ebene habe verschiedene Gestaltungen, nach welchen die Zahlen geordnet werden können[2]), aber nach einer arithmetisch vernünftigen Ausführung dieses Gedankens fahndet man vergeblich. Es kann unsere Aufgabe nicht sein zu erörtern, wie viel oder wie wenig im VIII. Buche der Astronomie, im IX. Buche der Musik in den Mund gelegt wird. Wir sind von der Mühe befreit die Geschichte

[1]) Macrobius, *Opera* (ed. v. Jan), Quedlinburg und Leipzig 1848—52. [2]) *Martiani Capellae De nuptiis philologiae et Mercurii de septem artibus liberalibus libri IX* (ed. Ulr. Kopp). Frankfurt a. M. 1836. [3]) Quintilianus I, 10, 1. [4]) *Hyalini pulveris respersione coloratam mensulam.*

[1]) *Quo dicto cum plures philosophi, qui undiquesecus constipato agmine consistebant, primum Euclidis theorema formare eam velle cognoscerent, confestim acclamare Euclidi plaudereque coeperunt.* [2]) *Ipsa autem planities varias formas habet, numeris ad similitudinem figurarum ordinatis.*

auch dieser Wissenschaften zu verfolgen, und ohne irgendwelchen Zwang der Durchforschung wird man die schwülstigen und zugleich langweiligen Auseinandersetzungen des Martianus Capella sich lieber schenken.

In die Blütezeit des eben besprochenen Schriftstellers etwa auf 475 fällt die Geburt eines anderen Mannes, zu welchem wir uns nun zu wenden haben, Magnus Aurelius Cassiodorius Senator[1]). Er war im südlichen Italien in Bruttien geboren, unweit von Scyllacium, an einer von Naturschönheiten so reich erfüllten Stelle, daß er sie später von allen aussuchte, sein Leben dort zu beschließen. Noch in sehr jugendlichem Alter von kaum 20 Jahren trat er in den Staatsdienst, frühestens im Herbst 500[2]), zu einer Zeit, wo Theodorich eben den gotischen Staat in Italien gegründet hatte, und zu diesem Fürsten trat Cassiodorius in die Stellung eines Geheimschreibers, äußerlich genommen Theodorichs Dolmetscher, in Wirklichkeit sein einflußreicher Ratgeber. Die vielseitigen, wenn auch nicht überall tiefen Kenntnisse des Ministers — als solchen dürfen wir ihn vielleicht bezeichnen — machten ihn dem Könige unentbehrlich, sowohl in den Geschäften der Regierung, als in den verschiedensten Privatbeziehungen, und erst der Tod Theodorichs 526 löste das Band, welches Gewohnheit und gegenseitige Zuneigung um beide Männer geschlungen hatte. Auch unter den Nachfolgern Theodorichs blieb Cassiodorius, so verhaßt ihm Persönlichkeiten und einzelne Handlungen oft sein mochten, der gotischen Sache getreu, um von dem Staatsbaue seines königlichen Freundes zu retten, was noch zu retten war. Man besitzt Staatsschriften von 538, die Cassiodorius unterzeichnet hat. Am Hofe erlebte er noch den Ausbruch des Krieges gegen die Byzantiner, und erst 540 etwa, nachdem Ravenna schon in Belisars Händen war, zog Cassiodorius sich in das von ihm selbst gestiftete Kloster in seiner Heimat zurück, dort eine reiche literarische Tätigkeit zu entfalten. Cassiodorius war einer der ersten, welche dem Beispiele folgend, das Benedikt von Nursia in seinem 529 zu Monte Casino bei Neapel gestifteten Kloster so

[1]) A. Thorbecke, *Cassiodorus Senator.* (Heidelberger Lyceumsprogramm von 1867.) V. Mortet, *Notes sur le texte des Institutiones de Cassiodore* in der *Revue de Philologie, de Littérature et d'Histoire ancienne* XXIV (1900) pag. 103 bis 118 und 272—281, XXVII (1903) pag. 67—78 und 139—150. Die Lesart Cassiodorius hat Usener, *Anecdoton Holderi* (Festschrift zur 32. Philologenversammlung. Wiesbaden 1877), S. 16, wie wir glauben, sichergestellt. [2]) Nach Usener l. c. S. 70 datiert sich der erste bekannte Brief des Cassiodorius von 501. Dafür, daß Cassiodorius damals noch am Anfange der zwanziger Jahre gestanden haben muß, vgl. Thorbecke S. 7—10, Usener S. 4.

segensreich aufstellte, dem klösterlichen Leben einen anderen Inhalt als den der bloßen Zurückgezogenheit und Beschaulichkeit gaben. Eine Bibliothek entstand, lernende und forschende Tätigkeit entfaltete sich. Ein stärkerer Gegensatz als der gegen die Kulturentwicklung im byzantinischen Reiche ist kaum denkbar. Dort befinden Religion und Wissenschaft sich in fast fortwährendem Kampfe, bei welchem die weltliche Macht meist auf Seite der Kirche steht (S. 503). Hier ist das Kloster, also eine Gründung religiösen, wenn nicht kirchlichen Ursprunges, Stätte der Wissenschaft und bleibt es, so lange die Regel des heiligen Benedikt allein die Ordensbrüder beherrscht. Das Theologische stand naturgemäß obenan, aber auch die weltlichen Wissenschaften, als nützliche Vorbereitungsschule zu Höherem, wurden keineswegs vernachlässigt. Tag und Nacht wurden von emsigen Händen in schönen Zügen Schriften von mitunter zweifelhaftem mitunter wirklichem Werte zu Pergament gebracht. Preist doch Cassiodor im 30. Kapitel seines Buches *De institutione divinarum literarum* das Bücherabschreiben als die verdienstlichste körperliche Arbeit in begeisterten Worten, hat er doch Lampen eigener Art für die Nachtarbeit erfunden, Sonnen- und Wasseruhren aufgestellt, um Zeit und Tätigkeit zu ordnen. Daß er aber im Fleiße sich von keinem seiner Untergeordneten übertreffen ließ, beweist neben anderen Schriften eine Abhandlung über Orthographie, welche er bereits 93 Jahre alt noch verfaßt hat. Es ist anzunehmen, daß dies seine letzte Arbeit war und daß er um 570 gestorben ist. Cassiodorius hat 12 Bücher Briefe[1]) hinterlassen, aus welchen auch für die Geschichte der Mathematik unterschiedliche Notizen gewonnen worden sind. Teils sind es unveränderte Abschriften früherer staatlicher oder privater Schreiben, welche Cassiodor für Theodorich zu fertigen hatte, teils neue Redaktionen solcher Schreiben, in wenig angenehmer Weise durch Schwulst und Überladung ausgezeichnet, welche dem VI. S. im allgemeinen, welche aber vorzugsweise unserem Schriftsteller eigentümlich sind.

Von seinen übrigen Werken nennen wir eine kurzgefaßte Enzyklopädie, *De artibus ac disciplinis liberalium literarum*, welche in ähnlichen 7 Abteilungen, wie wir sie bei Martianus Capella teilweise zu schildern hatten, die Wissenschaften behandelt. Die Einteilung in 7 Wissenschaften war für Cassiodorius geradezu verführerisch. Er besaß eine im letzten Grunde mutmaßlich den Ausläufern des Neuplatonismus entstammende Verehrung für heilige Zahlen[2]). Er hatte die Zwölfzahl der Bücher seiner Briefe nur um der zahlreichen

[1]) *Variarum (epistolarum) libri XII.* [2]) Thorbecke l. c. S. 52.

Vergleichspunkte willen gewählt; er witterte, wie sein Psalmenkommentar beweist, hinter der Ordnungszahl eines jeden Psalmen tiefere Beziehungen; so war ihm die Zahl der 7 Wissenschaften Symbol der Ewigkeit. Die Reihenfolge hat Cassiodorius gegen Varro und Martianus Capella geändert. Ihm folgen jetzt Grammatik, Rhetorik, Dialektik, Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie aufeinander. Ein weiterer einigermaßen wesentlicher Unterschied gegen Martianus Capella besteht darin, daß bei diesem die griechischen Wortformen teilweise sogar in griechischen Schriftzügen vorherrschen, während Cassiodorius hier mit mitunter recht ungeschickten Übersetzungen als lateinischer Sprachreiniger auftritt. Er beabsichtigt nicht das Ausführliche dieser Wissenschaften zu lehren. Er will vielmehr die Schriftsteller der Griechen und Römer bezeichnen, bei welchen man sich mit den einleitenden Kenntnissen versehen ausführlicher unterrichten könne[1]. So ist es gewissermaßen entschuldigt, wenn Arithmetik und Geometrie, auf die wir wieder allein unser Augenmerk richten, noch mehr zu einer bloßen Sammlung von Definitionen geworden sind. Eine solche Definition wollen wir besonders hervorheben: *Magnitudines rationales et irrationales sunt, rationales quarum mensuram scire possumus; irrationales vero, quarum mensurae quantitas cognita non habetur*, d. h. Größen sind rational oder irrational, rational wenn ihr Maß erkannt werden kann, irrational wenn ihre Messungsgröße nicht erkannt werden kann. Es will scheinen, als ob hier zum ersten Male die Kunstausdrücke rational und irrational im Gegensatze zueinander gebraucht worden wären, deren Erfinder mithin Cassiodorius gewesen sein dürfte[2]. Seinem Versprechen getreu empfiehlt er Pythagoras, Nikomachus und die Übersetzer des letzteren Appuleius und Boethius, aus deren Schriften, wie man sage — *ut aiunt* — man sich mit den klarsten Anschauungen durchdringen könne, eine Ausdrucksweise, welche in Zweifel setzt, ob er selbst diese Schriften kannte und somit dem, was wir über eine mögliche Vermengung verschiedener durch Appuleius und Boethius übersetzten Schriften (S. 564) andeuteten, nicht im Wege steht. Dem Abschnitte über Geometrie fügt er bei, in dieser Wissenschaft seien bei den Griechen Euklid, Apollonius, Archimed und andere annehmbare Schriftsteller aufgetreten, von welchen Euklid durch denselben großartigen Mann Boethius in die römische Sprache übertragen worden sei, *ex quibus Euclidem translatum in Romanam linguam idem vir magnificus*

[1]) *Nec illud quoque tacebimus quibus auctoribus tam Graecis quam Latinis, quae dicimus, exposita claruerunt: ut qui studiose legere voluerit, quibusdam compendiis introductus, lucidius Majorum dicta percipiat.* [2]) V. Mortet in der *Revue de Philologie etc.* XXIV, 280.

Boethius dedit. Allerdings haben einige gute Handschriften nicht *translatum* sondern *adlatum*, wonach Boethius weniger eine Übersetzung als eine Bearbeitung des Euklid geliefert haben würde, aber dem steht wieder gegenüber, daß in einem Briefe[1]) an Boethius die Worte vorkommen: *Translationibus tuis .... geometricus Euclides audiuntur Ausoniis*, dem steht besonders der in der Enzyklopädie unmittelbar nachfolgende Schlußsatz des Cassiodorius gegenüber: *Qui si diligenti cura relegatur* etc., d. h. man solle die Euklidübersetzung wieder und wieder lesen. Für die Musik wird auf die Griechen Euklid, Ptolemäus und so weiter, in lateinischer Sprache auf Appuleius von Madaura verwiesen. Aus dem astronomischen Abschnitt endlich erwähnen wir der Empfehlung der Schriften von Ptolemäus. Der Name des Boethius kommt in diesen beiden letzten Abschnitten nicht vor, einer lateinischen Übersetzung des Ptolemäus ist überhaupt nicht gedacht.

Wir verweilen etwas länger, als der Gegenstand und die enzyklopädische Behandlung desselben es eigentlich verdienen, bei Cassiodorius und seiner Wissenschaftslehre, um zugleich ein Bild mönchischen gelehrten Treibens zu entwerfen, wie es von diesem Zeitpunkte an uns jeden Augenblick wieder begegnen wird. Diesem Bilde würde ein nicht unwesentlicher Strich fehlen, und uns zugleich die Gelegenheit entgehen, hier schon eines regelmäßigen Arbeitsstoffes mittelalterlicher Gelehrten zu gedenken, wenn wir nicht noch über einen ganz kurzen Aufsatz redeten, der unter den Werken des Cassiodorius abgedruckt worden ist. Wir meinen einen *Computus paschalis* vom Jahre 562.

Man hat Einsprache dagegen erhoben, daß diese Osterrechnung von Cassiodor herrühren könne. In der Vorrede zur Abhandlung über Orthographie, welche Cassiodorius, wie wir schon sagten, mit 93 Jahren schrieb, sind die Schriften desselben aufgezählt, und unter diesen ist kein Computus enthalten. Sollte derselbe daher später geschrieben sein, etwa im 94. Lebensjahre, so müßte durch Rückwärtsrechnung Cassiodor im Jahre 500 bei seiner ersten Anstellung mindestens 32 Jahre alt gewesen sein im Widerspruch gegen die früher angeführte wohlbegründete Annahme, er habe damals am Anfange der zwanziger Jahre gestanden. Diesen Widerspruch zu heben und zugleich den Computus für Cassiodor zu retten hat man die Vermutung ausgesprochen, dieses Schriftstück sei bereits mehrere Jahre vor der Abhandlung über Orthographie entstanden und um seiner geringfügigen Ausdehnung willen in dem genannten Verzeich-

[1]) Cassiodorius, *Varia* I, 45.

nisse eigener Schriften ausgelassen worden. Sei dem nun, wie da wolle, sicher ist, daß im Jahre 562 ein Computus paschalis möglicherweise durch Cassiodor verfaßt wurde, wie wir auch schon (S. 531) gelegentlich gesehen haben, daß Victorius von Aquitanien 457 eine solche Anleitung zur Auffindung des richtigen Ostertages schrieb[1]).

Solche theologisch-chronologische Abhandlungen waren wesentlich durch das auf dem Concilium von Nicäa, 325, ergangene Verbot der mit den Juden gleichzeitigen Feier des Osterfestes hervorgerufen worden. Das Passahfest, d. h. das Fest der Verschonung, womit die Verschonung von den Plagen in Ägypten gemeint war, fand bei den Juden stets vom 14. bis zum 21. des Monats Nisan statt, und zwar wurde dieser Monat dem Mondjahre der jüdischen Zeitrechnung gemäß immer so durch periodisch eingeschobene Schaltmonate bestimmt, daß der 14. auf die Frühlingstagundnachtgleiche fiel. Das christliche Osterfest mit seiner ganz anderen Bedeutung war zunächst auf dem althergebrachten Datum des 14. Nisan verblieben. Erst das nicäanische Konzil faßte, wie gesagt, diese Zeitbestimmung als ketzerisch auf, und man verfolgte die, welche bei den alten Ostertagen blieben, als Quatuordecimani oder Tessareskaidekasiten. Ostern solle von den strenggläubigen Bekennern der christlichen Religion stets am Sonntage nach dem ersten Vollmonde seit der Frühlingstagundnachtgleiche gefeiert werden, niemals an diesem Tage selbst, auch nicht wenn der Vollmond auf die Frühlingstagundnachtgleiche und diese auf einen Sonntag fiel; dann mußte der folgende Sonntag als Ostersonntag gewählt werden, damit das Zusammentreffen mit dem Passahfest unter allen Umständen vermieden blieb. Es kam also darauf an, den Tag der Frühlingstagundnachtgleiche im Sonnenjahre, den des nächsten Vollmondes im Mondjahre genau zu kennen, beziehungsweise eine Ausgleichung zwischen dem Sonnen- und Mondjahre zu treffen, welche auf gewissen Zyklen beruhte, in welchen beide Jahresgattungen genau enthalten waren. Das nicäanische Konzil nahm an: 19 Sonnenjahre seien genau 235 Mondsmonate. Damit war ein Irrtum verbunden, da nach strenger Rechnung zu den 235 Mondsmonaten noch etwa $1\frac{1}{2}$ Stunden hinzuzufügen sind. Die Notwendigkeit anderer genauerer Zyklen wurde eingesehen, und nach Auffindung solcher Gleichungen zwischen Sonnen- und Mondzeit die Berechnung des Ostertages für jedes Jahr vorzunehmen, die sogenannte goldene Zahl, die Epakte zu finden[2]), zu finden ob

[1]) Über den *Computus* des Victorius vgl. L. Ideler, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie II, 275—284. [2]) Ebenda II, 239 und

das Jahr Schaltjahr sei oder nicht und dergleichen, das ist der algebraisch ziemlich dürftige Inhalt derjenigen Schriften, welche sämtlich den gleichen Titel des *Computus paschalis* führen.

Unter den von Cassiodorius zum genaueren Studium empfohlenen Schriftstellern ist uns wiederholt der Name des Boethius erschienen. Anicius Manlius Severinus Boethius[1]) stammte aus einer der reichsten und berühmtesten Patrizierfamilien Roms, deren Mitglieder längst gewohnt waren, hohe Staatsstellen zu bekleiden, aber auch den Wechsel der Schicksale durch fürstliche Ungnade zu empfinden. Er war zwischen 480 und 482 etwa geboren[2]) und verlor kurz darauf seinen Vater, so daß seine Erziehung von Fremden geleitet werden mußte. Wahrscheinlich und zum Glück für die geistige Ausbildung des begabten Jünglings wurde er der Sorge des Patriziers Symmachus[3]) anvertraut, der vollständig geeignet war Vaterstelle an ihm zu vertreten. Später wurden aus den Beziehungen beider enge Familienbande, indem Boethius die Tochter des Symmachus heiratete. Boethius war schon Lehrer in dem Alter, wo andere zu lernen pflegen[4]). König Theodorich forderte in einem selbstverständlich durch Cassiodor geschriebenen und in dessen Briefsammlung uns aufbewahrten Briefe ihn auf, auch für den Burgunderkönig Gundobad eine Wasser- und Sonnenuhr zu besorgen. Im Jahre 507 entbrannte Krieg zwischen Theodorich und Gundobad. Jener ein freundliches Verhältnis beider voraussetzende Brief kann demnach nur vor oder kurz nach diesem Kriege geschrieben sein[5]), vor 507 oder etwa um 510, wahrscheinlicher in der zuletzt genannten Zeit. Wir werden aus jenem Briefe, den wir schon (S. 571) anführten, nachher noch entnehmen, welche schriftstellerische Tätigkeit als Übersetzer aus dem Griechischen Boethius damals schon entfaltet hatte. Fürs erste ist er uns ein Zeugnis für das Ansehen, in welchem Boethius bei dem Könige stand, und dieses ebenso wie das des Symmachus wuchs beständig. Allein mit der steigenden Bedeutung des Boethius stieg auch sein eifriges Bemühen die Freiheit und das Ansehen des römischen Senates wieder herzustellen, wodurch er den Höflingen, die schon

häufiger. F. J. Brockmann, System der Chronologie (Stuttgart 1883), Kap. IV. Die christliche Osterrechnung.

[1]) Usener, *Anecdoton Holderi* pag. 37—66. Ältere Quellen sind benutzt in Math. Beitr. Kulturl. S. 176—230. Samuel Brandt, Entstehungszeit und zeitliche Folge der Werke von Boethius im Philologus LXII, 141—154 und 234 bis 275. [2]) Usener pag. 40. [3]) Über Symmachus vgl. Usener pag. 17—37. [4]) Ennodius sagt von ihm: *Boethius patricius, in quo vix discendi annos respicis et intelligis peritiam sufficere iam docendi.* [5]) Usener pag. 39. Brandt l. c. 146—147 mit Berufung auf Mommsens Ausgabe des Cassiodor.

lange neidisch auf ihn waren, Gelegenheit gab ihn beim Könige zu verdächtigen. Untergeschobene Briefe mußten die Ansicht begründen helfen, als habe Boethius aus Ehrgeiz sich zum Verrate verleiten lassen. Schuldig befunden, weil man ihn schuldig wollte, wurde er seines Vermögens beraubt, seiner Würden entsetzt und wahrscheinlich nach Pavia, dem damaligen Ticinum, verwiesen. Dort wurde er wenigstens nach längerer Gefangenschaft enthauptet, vermutlich 524, der Kirchensage nach am 23. Oktober, welcher zu Pavia, Brescia und an anderen Orten wohl schon seit dem VIII. S. als Tag des heiligen Boethius gefeiert wurde. Symmachus konnte seinem Schmerze über den gewaltsamen Tod seines Schwiegersohnes nicht gebieten. Seine Äußerungen darüber, denen es an berechtigter Schärfe nicht gefehlt haben mag, wurden dem Könige hinterbracht, der sie ebenso ahndete wie das angenommene Verbrechen dessen, dem die Klagen des Symmachus galten. Symmachus wurde in Fesseln nach Ravenna gebracht und im Gefängnisse getötet. Auch dafür gibt die Sage einen bestimmten Tag, den 8. Mai. Theodorich folgte seinen Opfern, deren Geister sein zerrüttetes Nervensystem ihm unaufhörlich vor die Augen zauberte, noch 526 nach. Wie viel theologische Streitigkeiten zwischen dem formell rechtgläubigen Boethius und dem arianischen Hofe Theodorichs zu der Entwicklung beigetragen haben mögen, ist unklar. Daß Boethius die ihm eine Zeitlang abgesprochenen theologischen Schriften wirklich verfaßt hat, dürfte nach Auffindung eines Zeugnisses des Cassiodor nicht länger zweifelhaft erscheinen[1]). Ein Widerspruch gegen das Werk „über die Tröstungen der Philosophie“, welches Boethius im Gefängnisse zu seiner eigenen Geistesberuhigung verfaßte, ist nur scheinbar, keinesfalls so groß, um Boethius nicht als möglichen Verfasser auch der theologischen Abhandlungen erkennen zu lassen. Die Geistesrichtung des Boethius, der an griechischen Schriftstellern sich durchweg gebildet hatte, war, trotz formaler Strenggläubigkeit im Christentum, eine dem Heidnischen nicht abgeneigte, und überdies lehnt sich jenes Werk der Tröstungen an griechische Vorbilder an, an Schriften von Aristoteles verquickt mit spätplatonischen Kommentatoren. War doch fast die ganze schriftstellerische Tätigkeit des Boethius gerade diesen Männern gewidmet. Sind es doch wesentlich Übersetzungen von und Erläuterungen zu aristotelischen Schriften und deren Kommentatoren, welche Boethius zum großen Manne machten, während daneben auch seine Lebens-

[1]) Usener pag. 48—59 über die theologischen Schriften des Boethius, namentlich auch über deren scheinbaren Widerspruch gegen die Bücher *De consolatione*.

schicksale ihm den Strahlenkranz des unschuldig Verfolgten verliehen. Man muß sich ganz im allgemeinen wohl davor hüten bei Boethius viele eigene Gedanken zu suchen, oder aus der Hochschätzung der Zeitgenossen und der Nachkommen eine zu große Meinung von der Bedeutung des Mannes sich zu machen, dessen Übersetzungsarbeiten selbst nicht auf die Höhe ihrer Aufgabe gelangt sind, und der darum noch lange kein Riese war, wenn er Zwerge überragte. Die Regel der Kombinationen zu je zweien aus beliebig vielen Elementen, man soll die Hälfte des Produktes der Elementenzahl in ihre um 1 verminderte Anzahl nehmen, wird Boethius vermutlich, wie vieles sonst, aus Ammonius (S. 501) entlehnt haben. Er hat sie im fünften Buche seiner *Commentaria in Porphyrium* sowie in seinem Kategorienkommentare ausgesprochen[1]).

Uns interessieren namentlich diejenigen Übersetzungen, welche Boethius, wie wir gesehen haben, in seinem 28. Lebensjahre etwa schon vollendet haben muß. In jenem Briefe des Theodorich an Boethius[2]) heißt es: „In Deinen Übertragungen wird die Musik des Pythagoras, die Astronomie des Ptolemäus lateinisch gelesen. Nikomachus der Arithmetiker, der Geometer Euklid werden von den Ausoniern gehört. Plato der Forscher göttlicher Dinge, Aristoteles der Logiker streiten in der Sprache des Quirinals. Auch Archimed den Mechaniker hast Du lateinisch den Sikulern zurückgegeben, und welche Wissenschaften und Künste auch das fruchtbare Griechenland durch irgendwelche Männer erzeugte, Rom empfing sie in vaterländischer Sprache durch Deine einzige Vermittlung.“ Vorzugsweise Wichtigkeit besitzen für uns von diesen Übersetzungen die der Arithmetik und Geometrie; daneben kann die der Musik, der Astronomie, der Mechanik uns gelegentliche Notizen liefern, die sich vielleicht wertvoll erweisen.

Der Musik haben wir uns (S. 165) als Quelle bedienen dürfen.

Von den mechanischen Schriften nach Archimed ist uns freilich außerhalb der hier angeführten Briefstelle keinerlei Erwähnung bekannt.

Was die Astronomie und Musik betrifft, die Boethius lateinisch schrieb, so erinnern wir daran, daß von ihnen in der Enzyklopädie des Cassiodorius keine Rede ist. Doch ist für die Astronomie wenigstens mehr als ein späteres Zeugnis vorhanden. Wir werden später sehen, daß Gerbert in einem vermutlich im Sommer 983 in Bobbio

[1]) Heiberg im Philologus XLIII, 475—476. Brandt l. c. 148 und private Mitteilungen über die Benutzung des Ammonius durch Boethius. Die Stelle findet sich in der Baseler Folioausgabe der Werke des Boethius von 1570 auf pag. 104 und 105. [2]) Cassiodorius, *Varia* I, 45.

geschriebenen Briefe seine Freude darüber kundgibt, daß er acht Bücher gefunden habe: Boethius über Astronomie, über Geometrie und anderes nicht weniger Bewundernswertes[1]). In mittelalterlichen Handschriftenverzeichnissen wird gleichfalls die Astronomie des Boethius genannt[2]), und noch 1515 war die Astronomie nach aller Wahrscheinlichkeit vorhanden, wenigstens beruft sich ein in jenem Jahre zu Augsburg gedrucktes Buch auf deren Benutzung[3]). Möglicherweise ist bei jener Berufung ein 1503 in Paris gedruckter von Faber Stapulensis herausgegebener Band gemeint, der den ausführlichen Titel[4]) führt: „Boetius Sev. Epitome compendiosaque introductio in libros arithmeticos Sev. Boetij: adjecto familiari commentaria dilucidata. Praxis numerandi. Introductio in Geometriam. Liber de quadratura circuli. Liber de cubicatione sphere. Perspectiva introductio. Insuper Astronomicon.“ Wenn dem aber so wäre, so stünde die Meinung auch das Astronomicon müsse von Boethius verfaßt gewesen sein, freilich auf recht schwachen Füßen.

Dafür daß Boethius eine Arithmetik und eine Geometrie schrieb, ist das unabwendbarste Zeichen vor allen Dingen die Enzyklopädie des Cassiodorius. Dieser konnte nicht auf beide Werke und am bestimmtesten auf die Geometrie verweisen, wenn sie nicht vorhanden waren. Die Ausflucht, mit welcher man wohl gegen die ältere Briefstelle Mißtrauen zu erregen gesucht hat, Cassiodorius habe Schriften, die schon verfaßt waren, aber auch solche genannt, welche noch zu erwarten waren, hat keine Wirksamkeit für die Zeit, als Cassiodorius ins Kloster zurückgezogen seine Enzyklopädie schrieb. Boethius war damals längst tot. Von ihm ließ sich nichts mehr erwarten. Von einem „vermeintlichen“ Faktum[5]) kann aber bei so ausdrücklicher Verweisung desjenigen, der sich genauer unterrichten wollte, auf die genannten Bücher unmöglich die Rede sein. Ein gewissenhafter, pünktlicher Lehrer — und pünktlich war Cassiodorius durchaus — verweist nicht auf Schriften, die er nur von Hörensagen kennt, geschweige denn von deren Vorhandensein er kaum weiß, ohne einschränkende Bemerkung. Wir würden daher allenfalls begreifen können, wenn man nach den Worten Cassiodors bezweifeln wollte, daß Boethius wirklich die Arithmetik des Nikomachus übersetzt habe;

[1]) *Reperimus octo volumina Boethii de astrologia praeclarissima quoque figurarum geometriae aliaque non minus admiranda.* [2]) Brandt l. c. 236 Note 3 unter Berufung auf Schepss (Festschrift für W. v. Christ S. 113). [3]) M. Curtze in dem *Bullettino Boncompagni* 1868, pag. 140. [4]) Wir verdanken die Kenntnis des Titels H. Karl Bopp, welcher ihn einem antiquarischen Kataloge entnahm. [5]) Weißenborn, Die Boetiusfrage im Supplementheft zur Histor.-literar. Abtlg. der Zeitschr. Math. Phys. XXIV, S. 190.

an das Vorhandensein der Übersetzung der euklidischen Geometrie ist ihm gegenüber jeder Zweifel unstatthaft. Andere Zeugnisse kommen dazu. Für die Arithmetik gilt als sicherstes Zeugnis, daß nach Briefen, welche zwischen Gerbert und Otto III. gegen 994 gewechselt wurden, ersterer dem letzteren ein Exemplar der Arithmetik des Boethius zugeschickt hat. Für die Geometrie wird der vorerwähnte Brief Gerberts von 983 angerufen, während andere die Berechtigung in Abrede stellen, den Namen des Boethius, der als Verfasser der Astronomie bezeichnet ist, auch auf die Geometrie zu beziehen. Ferner beruft man sich auch für beide Werke noch auf ein der Zeit nach früheres Zeugnis. Der Bibliothekar Regimbertus auf Reichenau hat nämlich 821 einen Katalog der damals unter seiner Obhut vorhandenen Handschriften hinterlassen, und darin ist von Boethius die Arithmetik in zwei Büchern, die Geometrie in drei Büchern genannt[1]), wogegen freilich abermals der Einwand erhoben worden ist, nur für die Arithmetik sei Boethius als Verfasser gemeint, nicht auch für die Geometrie. Man findet endlich in einem um 1025 geschriebenen Briefe die Worte[2]): Boethius sagt in seinem geometrischen Werke, *in Geometrico dicit Boethius*, um welche man sich nicht herumdeuten kann.

Zu diesen verschiedenen mittelbaren Zeugnissen kommt noch, daß eine ganze Anzahl von Handschriften sich bis auf den heutigen Tag erhalten hat, in welchen den Titeln nach die Arithmetik, die Musik, die Geometrie des Boethius aufgezeichnet sind. Die älteste Handschrift der Arithmetik soll dem IX. bis X. S. entstammen[3]), die älteste Handschrift der Musik dem IX. S.[4]), endlich die älteste Handschrift der Geometrie dem IX. S.[5]).

Diese Tatsachen fassen sich also dahin zusammen, daß jedenfalls Boethius über die vier genannten Wissensgebiete nach griechischen Mustern sich verbreitet hat, und daß noch erhaltene Handschriften der drei ersten Werke mit Ausschluß der den Schluß bildenden

[1]) Agrimensoren, Anmerkung 245. [2]) *Une Correspondance d'écolâtres du XI. Siècle* in den *Notices et Extraits* XXXVI, 525 lin. 2 (pag. 43 des Sonderabdrucks). [3]) Boetius (ed. Friedlein) Leipzig 1867, pag. 2: *codex r.* [4]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 175: *codex g.* [5]) G. Schepss, Zu Boethius (in den *Commentationes Woelfflinianae.* Leipzig 1891) pag. 279 nennt drei Pariser Codices, deren ältester dem IX. S. angehört, während die beiden anderen im X. S. entstanden sein müssen. In ihnen wird ausdrücklich das Ganze als Eigentum des Boethius in Anspruch genommen. Dem XI. S. entstammt die Erlanger Handschrift. Boetius (ed. Friedlein) pag. 372: *codex e.* Friedlein gibt ferner dem *codex n = cod. Vatican.* 3123 ein höheres Alter, indem er ihn in das X. S. setzt, aber Usener (pag. 47) rückt nach eigener Anschauung diesen Kodex herunter in das XI.—XII. S.

Astronomie um das Jahr 900 vorhanden gewesen sind und damals für von Boethius verfaßt galten.

In der Einleitung zur Arithmetik bestätigt Boethius gleichfalls, was wir aus anderen Quellen erfahren haben, daß er über die vier verwandten Gegenstände schreiben wolle. Er bezieht sich in dem Widmungsschreiben an Symmachus darauf, daß er von den vier mathematischen Wissenschaften die Arithmetik, welche die erste sei, vollendet habe[1]), und wenn auch die Stelle, in welcher die Reihenfolge, Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie angedeutet ist, weil die Menge an und für sich betrachtet in der Arithmetik, die Menge bezogen auf andere in der Musik, die unbewegte Größe in der Geometrie, die bewegte in der Astronomie behandelt werde, sowie eine andere, in welcher noch näher erklärt wird, weshalb von der Arithmetik ausgegangen werden solle, nur freie Übersetzungen aus dem Nikomachus sind[2]), so kann auch darauf für die Absicht des Boethius Bezug genommen werden. Er hätte jene Stellen der Einleitung, wenn sie nicht seine eigenen Pläne ausdrückten, unzweifelhaft beiseite gelassen, denn gerade hier hat sich Boethius mit größter Unabhängigkeit seines Stoffes bedient. Bei dieser Gelegenheit findet sich z. B. zum ersten Male das Wort quadruvium benutzt, um den Kreuzweg der viergeteilten mathematischen Wissenschaften zu bezeichnen, welche von Cassiodorius mit anderem Bilde die vier Pforten der Wissenschaft genannt wurden[3]). Wir bemerken, daß das von Boethius gewählte Wort als Gemeingut sich forterbte, daß dem Quadruvium noch das Trivium zugesellt wurde, um die Gesamtheit der sieben freien Künste in ihren beiden großen Gruppen zu benennen. In der Musik hat alsdann Boethius den einmal eingeschlagenen Weg weiter für den richtigen erklärt. Er gibt nämlich wiederholt den Unterschied der vier Wissenschaften und ihre Reihenfolge in gleicher Weise an, wie er es nach Nikomachus getan hatte[4]). Eine Widmung ist der Musik nicht vorausgeschickt. Die Geometrie dagegen beginnt mit der Anrede „mein Patricius", *mi Patrici*, was ohne jede Schwierigkeit auf den Rhetor Patricius gedeutet werden kann, welchem Boethius auch ein anderes Werk, seinen Kommentar zu Ciceros Topik, mit derselben am Anfang des zweiten

[1]) *Cum igitur quattuor matheseos disciplinarum de arithmetica, quae est prima, perscriberem, tu tantum dignus eo munere videbare.* [2]) Darauf hat Th. H. Martin aufmerksam gemacht: *Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-age. Annali de matematiche* V. Roma 1864, Cap. XIII, pag. 44 der Separatausgabe. [3]) Cassiodorius, *Varia* I, 45: *Tu artem praedictam ex disciplinis nobilibus natam per quadrifarias Mathesis ianuas introisti.* [4]) Boetius (ed. Friedlein) *Musica* Lib. II, Cap. 3, pag. 228—229.

Buches vorkommenden Anrede *mi Patrici* gewidmet hat[1]). In der Geometrie ist sodann von der Arithmetik des gleichen Verfassers die Rede[2]). Wieder in der Geometrie ist von der Arithmetik und der Musik gesagt, daß dort gewisse Dinge zur Genüge besprochen seien.[3]). Auf die Arithmetik wird für den Satz verwiesen, daß die Einheit keine Zahl sei, sondern Quelle und Ursprung der Zahlen.[4]) Das sind lauter Kennzeichen, daß die Geometrie von Boethius herrührt, oder daß wer sie verfaßte für Boethius gehalten sein wollte.

Dieser Satz mag mit Recht dem Leser auffallen. Wir bemerken deshalb einschaltend, auch um die Tragweite der folgenden Untersuchung zum voraus erkennen zu lassen, daß gegen die Echtheit der Arithmetik und Musik, wie sie uns handschriftlich als von Boethius herrührend überliefert sind, ein Zweifel nie erhoben worden ist, daß dagegen die Geometrie, deren Echtheit oder Unechtheit eine geschichtliche Bedeutung ersten Ranges besitzt, von weitaus den meisten für untergeschoben gehalten wird[5]).

Wir müssen nun den Inhalt sowohl der Arithmetik als der Geometrie prüfen, welcher uns erst die Berechtigung geben soll, die Frage zu einigem Abschlusse zu bringen. Die Arithmetik ist das, was sie nach der Erklärung des Cassiodorius, was sie aber auch nach den eigenen Worten des Boethius[6]) sein soll, eine Bearbeitung der Arithmetik des Nikomachus, wobei bald Weitläufigeres zusammengezogen, bald Dinge, die rascher durchlaufen dem Verständnis einen allzuengen Zugang boten, einigermaßen erweitert wurden. Man wird daher bei Boethius die auffälligsten Dinge wiederfinden, welche aus dem griechischen Texte uns schon bekannt sind, Sätze dagegen, die mathematisch von Wichtigkeit sind, nicht selten vermissen. Die Einmaleinstabelle fehlt so wenig[7]), wie die figurierten Zahlen, deren hier ausgesprochener Name *numeri figurati*[8]), die wörtliche Übersetzung von *ἀριθμοὶ σχηματογραφθέντες*, seit Boethius immer allgemeiner in Gebrauch gekommen ist. Wir bemerken fast überflüssigerweise, daß sich Boethius auch der Ausdrücke *numeri primi* und

[1]) Diese Lösung der früher vorhandenen Schwierigkeit, die Widmung der Geometrie zu verstehen, rührt von S. Brandt l. c. 234 Note 1 her. [2]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 390, 3—5. [3]) Ebenda pag. 396, 3—6. [4]) Ebenda pag. 397, 20—398, 1. [5]) So namentlich von Friedlein, von Weißenborn: Die Boetiusfrage in dem Supplementheft zur Histor.-literar. Abtlg. der Zeitschr. Math. Phys. XXIV (1879) und: Zur Boetiusfrage, Osterprogramm 1880 des Eisenacher Realgymnasiums. Am kräftigsten und vollständigsten hat Heiberg die Gründe gegen die Echtheit der Geometrie zusammengestellt in der Zeitschrift Philologus XLIII, 507—519. [6]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 4, 30 bis 5, 4. [7]) Ebenda pag. 53. [8]) Ebenda pag. 101 in der Überschrift von *Arithmetica* II, 17.

numeri compositi bedient. Die Proportionenlehre ist ausführlich gelehrt, und damit ist vielleicht die Sage in Verbindung zu bringen, welche übrigens wohl auch auf Wahrheit beruhen kann, Boethius habe im Gefängnisse zu seiner Unterhaltung ein Zahlenkampf genanntes Spiel ausgedacht, welches wesentlich auf Anwendung von Zahlenverhältnissen beruht[1]). Bemerkenswert erscheint dem gegenüber, daß unter den weggebliebenen Dingen jener Satz des Nikomachus enthalten ist, der von der Entstehung der Kubikzahlen aus der Summe ungerader Zahlen handelt, und ebenso der Satz, daß die $n$eckszahl von der Seite r und die Dreieckszahl von der Seite $r-1$ zusammen die $n+1$eckszahl von der Seite r bilden (S. 432). Wir sehen an solchen Dingen bewahrheitet, was wir ankündigten, sehen bestätigt, was wir weiter oben (S. 575) behauptet hatten. Es ist kein ebenbürtiger Bearbeiter, der sich an den griechischen Zahlentheoretiker gewagt hat. Gerade den feinsten arithmetischen Dingen ist er aus dem Wege gegangen. Sein Griechisch reichte aus zur Übersetzung, seine Mathematik nicht, und wenn den Namen Boethius bis in das späte Mittelalter hin ein gewisser Nimbus umgibt, so ist dieser Glanz zum Teil der allgemeinen Dunkelheit zuzuschreiben, zum Teil Wiederstrahl der Märtyrerkrone, mit welcher, wie wir schon sahen, die Kirche ihn bedacht hat.

Wir wenden uns zur Geometrie des Boethius, wie sie von den Handschriften uns überliefert ist. Zwar sind und waren die Handschriften weder in bezug auf die Anzahl der Bücher noch auf den Text durchweg übereinstimmend. Es gibt und gab Geometrien des Boethius in fünf Büchern[2]), in vier Büchern[3]), in drei Büchern[4]), in zwei Büchern.

Indessen sind diese verschiedenen Gestaltungen wesentlich auf deren zwei zurückzuführen, von denen sich eine aus 5, eine aus 2 Büchern zusammensetzt. Jene längere wird kaum von irgend jemand für die echte Geometrie des Boethius gehalten werden können. Ihre beiden ersten Bücher sind zwar in alte Druckausgaben des Boethius zu einem Buche vereinigt als Geometrie aufgenommen, aber sie enthalten ein buntes Allerlei, worunter nicht zum wenigsten Auszüge aus der Arithmetik des Boethius, die noch obendrein in Unordnung geraten sind. Die beiden folgenden Bücher enthalten eine Boethius zugeschriebene Übersetzung aus den 4 ersten Büchern des Euklid. Im fünften Buche, welches im Drucke noch nicht herausgegeben ist, zeigt

[1]) R. Peiper in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik III, 167—227 (1880). [2]) Math. Beitr. Kulturl., Anmerkung 399. [3]) Friedleins Münchner Kodex *m* aus dem XI.—XII. S. [4]) Z. B. das alte Exemplar, welches im Reichenauer Bibliothekskatalog von 821 beschrieben ist.

sich neuerdings ein Allerlei, aus welchem sich ein sehr interessantes, den Begleitstücken in keiner Weise ähnelndes Fragment *Altercatio duorum geometricorum* hervorhebt, ein katechetisches Zwiegespräch, dessen Ursprung in tiefstes Dunkel gehüllt ist. Das Ganze — wir meinen die fünf hier geschilderten Bücher — hat die Benennung als Pseudoboethius[1]) erhalten, um sie von den zwei Büchern zu unterscheiden, und von dieser Geometrie in zwei Büchern allein ist die Rede, wenn Untersuchungen über Echtheit oder Gefälschtsein der Geometrie des Boethius angestellt werden. Die älteste Handschrift dieser Geometrie ist die Erlanger aus dem XI. S.

Wir wollen jetzt an die Schilderung dieser Geometrie herantreten und in die Schilderung verweben, was für die Echtheit angeführt worden ist, damit unseren Lesern die Möglichkeit einer Meinungsverschiedenheit begreiflich werde. Die zwei Bücher der Geometrie leiden nun allerdings auch an einer Buntheit, welche auffallen muß, und welche keineswegs mit dem übereinstimmt, was ein moderner Bearbeiter des Euklid liefern würde. Sind wir aber berechtigt, dem Ähnliches zu erwarten? Wir glauben nicht. Griechische Arithmetik war, wie wir gesehen haben, den Römern nicht gerade neu. Griechischer Geometrie in irgend gegliederter Aufeinanderfolge, euklidischer Strenge der Beweise sind wir noch nicht begegnet. Auch jene Bearbeitung der Stereometrie in dem Veroneser Palimpseste (S. 565) schließt sich vermutlich nur an ein Exzerpt des Euklid, nicht an den wirklichen Euklid an, und ein Exzerpt muß Boethius vor sich gehabt haben, denn wie wollte er sonst die gesamten Elemente in zwei, drei, vier, fünf Bücher fassen, wenn wir die Gliederung zulassen wollen, welche die meisten Bücher der Geometrie des Boethius angibt? Es kann also die Geometrie des Boethius zu der des Euklid gewiß nicht in dem gleichen Verhältnisse gestanden haben, wie die Arithmetik desselben zu der des Nikomachus. Auch Boethius selbst in der Einleitung zur Geometrie gestattet uns keineswegs solche Ansprüche zu erheben: „Da ich, mein Patricius, auf Dein Ansuchen, da Du von den Geometern wohl die meiste Übung besitzest, auf mich genommen habe, das, was von Euklid über die Figuren der geometrischen Kunst dunkel vorgetragen wurde, auseinanderzusetzen und für einen leichteren Eingang zuzubereiten, so glaube ich zuerst den Begriff des Messens erläutern zu müssen“[2]). Die Figuren geometrischer Kunst, das ist es, was Boethius auseinandersetzen will,

[1]) Tannery, *Notes sur la Pseudo-Géométrie de Boèce* in der *Bibliotheca Mathematica.* 3. Folge I, 39—50 (1900). [2]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 373, 21—24.

und über die Figuren der Geometrie handelte, was Gerbert gemeinschaftlich mit der Astronomie des Boethius in Bobbio fand (S. 575), und was gerade durch diese Benennung die Urheberschaft des Boethius näher legt. Wenn dann Cassiodorius, der noch weniger Mathematiker war als Boethius, daraus entnimmt, es sei eine Übersetzung des Euklid gewesen, die jener verfaßte, wenn ein Abschreiber in der Überschrift sagt: „Es beginnt die Geometrie des Euklid von Boethius einleuchtender ins Lateinische übersetzt“[1]), eine Überschrift, die schon ihrem Wortlaute nach nicht von Boethius herrührt, wie überhaupt auf eine Überschrift niemals ein größeres Gewicht zu legen ist als nach der Richtung, daß sie die Ansicht der Zeit der Abschrift uns kundgibt; so ist Boethius uns an beidem unschuldig. Er wollte nur die Figuren geometrischer Kunst auseinandersetzen. Er tat es, indem er nach Definitionen den Inhalt des I. Buches der Elemente und weniges aus dem III. und IV. Buche aussprach[2]), ohne daß der geringste Beweis die Wahrheit des Ausgesprochenen bestätigte. Dann sagt er[3]), er wolle das bisher wörtlich aus Euklid Übersetzte teilweise wiederholen, um in der Beleuchtung einzelner Beispiele dem Leser Freude zu bereiten. Wesentlich aus dieser Stelle ist der Schluß gezogen worden[4]), die Vorlage des Boethius sei selbst schon ein recht dürftiger griechischer Auszug aus den Elementen gewesen, und dieser Meinung schließen wir uns an. Was alsdann Boethius als seine Zusätze liefert, ist freilich eigentümlicher Art. Es ist die Auflösung der drei Aufgaben: über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben; von einem gegebenen Punkte aus eine Gerade von gegebener Länge zu ziehen; von einer größeren Strecke eine kleinere abzuschneiden. Das sind die drei ersten Sätze des I. Buches der Elemente, und der Text stimmt fast wörtlich mit dem Euklidischen überein. Welcher wirklichen Euklidausgabe Boethius diese Stücke entnahm, das können wir nicht entscheiden. Die Annahme[5]), es sei die Theonsche Ausgabe gewesen, und Boethius habe den Euklid nur für den Erfinder der Sätze, Theon dagegen für den der Beweise gehalten, die um so unbedenklicher zu entnehmen seien, hat jedoch viel für sich. Jedenfalls hat er ohne weiteres sein genannt, was nur aus einer anderen Quelle stammte, als das unmittelbar vorher Übersetzte, eine Unbefangenheit, welche bei Boethius fast als schriftstellerische Eigentümlichkeit gelten kann, wie sein Werk über die Tröstungen beweist[6]). An

[1]) *Incipit geometria Euclidis a Boetio in latinum lucidius translata* (ed. Friedlein, pag. 373). [2]) Eine genauere Vergleichung bei Weißenborn l. c. S. 196 und 204. [3]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 389, 18—23. [4]) Von H. Th. Martin. [5]) Weißenborn l. c. S. 206 flgg. [6]) Usener l. c. pag. 51—52.

die drei Aufgaben schließt sich nun die merkwürdige Stelle an[1]): „Doch es ist Zeit zur Mitteilung der geometrischen Tafel überzugehen, welche von Architas, einem nicht gemeinen Schriftsteller dieser Wissenschaft für Latium zurecht gemacht wurde, wenn ich zuerst wieviele Gattungen von Winkeln und Linien es gebe vorausgeschickt und weniges über Flächen und Grenzen gesagt haben werde.“ Er erfüllt letzteres Versprechen wieder durch einige Definitionen und kommt dann zu der berühmt gewordenen Stelle vom Abacus.

Fingerzahlen, digiti, wurden nach ihm von den Alten alle Zahlen unterhalb der ersten Grenze, limes, d. h. bis 9 genannt[2]). Gelenkzahlen, articuli, heißen die Zahlen, welche in der Ordnung der Zehner und so fort ins Unendliche sich befinden. Zusammengesetzte Zahlen sind alle zwischen der ersten Grenzzahl 10 und der zweiten Grenzzahl 20 gelegenen und die übrigen der Reihe nach mit Ausnahme der Grenzzahlen selbst. Diese nebst den Fingerzahlen heißen nichtzusammengesetzt, incompositi[3]).

Er fährt dann fort: „Männer von alter Einsicht, welche der pythagoräischen Schule angehören, und als Forscher über platonische Weisheit mit merkwürdigen Spekulationen sich beschäftigen, haben den Gipfelpunkt der ganzen Philosophie in die Eigenschaften der Zahlen gesetzt. In der Tat, wer wird die Masse des musikalischen Einklangs verstehen, wenn er glaubt, sie hingen nicht mit Zahlen zusammen? Wer wird unbekannt mit der Natur der Zahlen die aus Sternen zusammengesetzten Sternbilder der Himmelsfeste erkennen oder den Aufgang und Untergang der Thierzeichen erfassen? Was endlich soll ich von der Arithmetik und Geometrie sagen, die selbst nicht in nichtnennenswerter Gestalt erscheinen, so wie die Eigenschaften der Zahlen verloren gehen? Doch davon ist in der Arithmetik und in der Musik zur Genüge die Rede gewesen, kehren wir daher zu dem zurück, was jetzt zur Sprache kommen soll. Die Pythagoräer haben sich, um bei Multiplikationen, Divisionen und Messungen nicht in Irrtümer zu verfallen (wie sie in allen Dingen voller Feinheiten und Einfälle waren) einer gewissen gezeichneten Figur bedient, welche sie ihrem Lehrer zu Ehren die pythagoräische Tafel, mensa Pythagorea, nannten, weil die ersten Lehren in den so dargestellten Dingen von jenem Meister ausgegangen waren. Von den Späteren wurde die Figur Abacus genannt. Sie beabsichtigten

[1]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 393, 6—10. [2]) Die Engländer nennen in ihren Lehrbüchern der Rechenkunst heute noch die Einer *digits*. [3]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 395, 3—16.

damit das, was tiefsinnig erdacht worden war, leichter zur allgemeinen Kenntnis zu bringen, wenn man es gewissermaßen vor Augen sähe und gaben der Figur die hier folgende merkwürdige Gestalt"[1]).

Wir haben diese ganze Stelle wörtlich aufgenommen, um jeden Zweifel verschwinden zu lassen, wie Boethius, der sich hier wiederholt auf seine früheren Schriften bezieht, über den Ursprung der von ihm gezeichneten Figur denkt: es ist eine pythagoräische Erfindung, aber freilich keine altpythagoräische, denn sonst würde nicht der Forschungen über platonische Weisheit jener Angehörigen der pythagoräischen Schule gedacht sein können. Also Neuplatoniker oder vielleicht Neupythagoräer haben nach der Ansicht unseres Schriftstellers die Figur gebildet, welche zuerst Tafel des Pythagoras, dann Abacus genannt wurde. Sie wurde Abacus genannt, unterschied sich mithin von dem früher als solcher vorhandenen Rechenbrette, und der Unterschied liegt in der Art der Benutzung.

Kolumnen, feste oder gezeichnete, hatten zwar auch die alten und ältesten Rechenbretter, aber deren Ausfüllung beim Rechnen erfolgte mittels Marken, deren jede die Einheit der betreffenden der Kolumne oder der Kolumnenabteilung angehörenden Rangordnung bezeichnete. Jetzt war eine wesentliche Änderung eingetreten. „Man hatte Apices (Kegelchen?) oder Charaktere von verschiedener Gestalt"[2]).

Jede dieser Marken war mit einer Bezeichnung versehen, welche ihr den Wert einer der neun Fingerzahlen beilegte, und diese Bezeichnung wird nun im fortlaufenden Texte genau so abgebildet wie es auf dem vorher gezeichneten Abacus der Fall war. Damit ist also widerspruchslos bewiesen, daß die Zeichen gleichen Alters und gleichen Ursprunges wie der sie umgebende Text sind, und nicht erst nachträglich auf die vorher von derartigen Zeichen freigewesene Tafel eingeschmuggelt werden konnten. Wohl aber wäre es möglich, daß es sich so mit gewissen eigentümlichen Wörtern verhielte, die nicht im Texte, sondern einzig und allein auf der Figur sich finden.

Wir würden der ganzen Untersuchung einen selbst für die Wichtigkeit, welche ihr innewohnt, unverhältnismäßig großen Raum widmen müssen, wenn wir fortführen wörtlich zu übersetzen oder gar zu erläutern. Wir wollen nur kurz berichten, daß Regeln der Multiplikation und der Division nachfolgen, jene breiter und deut-

[1]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 395, 25—396, 16. [2]) Ebenda pag. 397, 2—3.

licher angelegt, diese dunkler, wie der Verfasser selbst fühlt, wenn er sagt: „Ist es irgendwie dunkel gehalten, so müssen wir dem fleißigen Leser die Einübung überlassen"[1]). Bei der Multiplikation kommen die Einzelfälle zur Sprache, welches Produkt also entstehe, wenn Zehner mit Hunderten, mit Tausenden usw. vervielfacht werden. Bei der Division erscheint die komplementäre Divisionsmethode, von der ankündigend (S. 528) die Rede war. Das Komplement, die Differentia des Boethius, ist die Zahl, um welche ein Divisor kleiner ist als die nächste nichtzusammengesetzte Zahl, letzteres Wort in dem oben definierten Sinne genommen. Der Divisor 16 z. B. hat bis zu 20 die Differenz 4, der Divisor 78 bis zu 80 die Differenz 2, der Divisor 623 hätte bis zur nächsten nichtzusammengesetzten Zahl 700 die Differenz 77. Nun wird mit dem vergrößerten Divisor dividiert, und jedesmal dem Reste das Produkt des Quotienten in die Differenz ergänzend wieder beigefügt, bis man fertig ist. Man wird leicht erkennen, daß diese Methode, wenn auch mehr Teildivisionen als die gewöhnliche erfordernd, weit zuverlässiger ist, weil hier, wo mit einer einfachen Zahl die Teildivision vorgenommen wird, niemals der Fall eintreten kann, daß irrtümlich ein zu großer Quotient angesetzt würde. Eine etwas abgeänderte Anordnung der komplementären Division tritt ein, wenn der Divisor aus Hundertern und Einern besteht. Man soll alsdann die Einer des Divisors zunächst unberücksichtigt lassen, dagegen auch vom Dividenden eine Einheit höchster Ordnung beiseite lassen, damit nachträglich das Produkt des Quotienten in die Einer des Divisors bis zu jener Einheit ergänzt und die Ergänzung dem erstgewonnenen Divisionsreste beigefügt werde.

Fragen wir nun wiederholt, woher diese Dinge stammen mögen, so sollte man vermuten, wir würden in erster Linie die auf den Apices befindlichen Zahlzeichen über ihren Ursprung befragen. Wir werden diese Frage jedoch erst im 33. Kapitel stellen. Jetzt bemerken wir, daß die Apices selbst ungemein an die Pythmenes oder Stammzahlen des Apollonius erinnern, und das Multiplizieren der verschiedenen Rangordnungen an die von jenem gegebenen Einzelvorschriften (S. 347—348). Ein Fortschritt ist ja in der Benutzung der Apices unbedingt enthalten, aber doch ein solcher, den wir späteren Alexandrinern zutrauen dürfen. Ob das Divisionsverfahren Erfindung eines Römers war? Wir wissen es nicht, wenn auch unser Gefühl sich dagegen sträubt, einen römischen Geist als so erfinderisch in mathematischen Dingen annehmen zu sollen. Wir können nur wieder-

[1]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 400, 28—30.

holt auf die Dinge hinweisen, welche wir zur komplementären Multiplikation (S. 528) in Beziehung gesetzt haben, daß subtraktive Zeichen entschieden römisch sind, daß von Nikomachus mutmaßlich Rechnungsvorteile gelehrt wurden, welche dem komplementären Verfahren ähneln. Boethius selbst, beziehungsweise der unter dem Namen des Boethius Schreibende, scheint alles einer und derselben Vorlage entnommen zu haben, einem lateinisch schreibenden Architas. Auch von diesem soll erst weiter unten die Rede sein, wenn wir die Geometrie des Boethius zu Ende besprochen haben.

Jetzt nämlich, nachdem das Rechnen d. h. Multiplizieren und Dividieren gelehrt worden, kommt der Verfasser zum zweiten Buche und in ihm zur rechnenden Geometrie, zu welcher der Abschnitt vom Abacus eine Einleitung bildete, vielleicht nach dem entfernten Muster des Nikomachus (S. 564). Wir finden uns auf völlig bekanntem Boden. Wir haben die Geometrie der römischen Feldmesser vor uns, in einigen Dingen wieder etwas tiefer gesunken und von den wenigst genauen heronischen Vorschriften Gebrauch machend. So z. B. finden wir die Flächenberechnung des gleichseitigen Dreiecks[1]) durch die nicht verstandene Formel $a^2 - \frac{17}{30}a^2$. Wir finden Gebrauch gemacht von der schlechten Annäherung zur Fläche eines unregelmäßigen Vierecks[2]) durch Bildung des Produktes der arithmetischen Mittel von je zwei einander gegenüberliegenden Seiten. Auch die Vieleckszahlen als Vielecksflächenräume kommen hier vor. Bei dem Achtecke ist nur die aus zwei Quadraten verschränkte Figur gezeichnet. Bei dem Fünfeck und Sechseck sind falsche Formeln angewandt. Dagegen ist hier die deutliche Spur der allgemeinen Formel für die $r$te $m$eckszahl vorhanden, welche wir bei Epaphroditus (S. 557) nur mutmaßten[3]). Die Vorlage für dieses zweite Buch scheint im allgemeinen Frontinus verfaßt zu haben[4]). Als Ausnahme wohl ist der Satz vom Durchmesser des Innenkreises des rechtwinkligen Dreiecks (S. 556) dem Architas zugeschrieben, nachdem er vorher durch Euklid hinzuerfunden worden sei[5]).

Auf eben diesen Architas bezieht sich Boethius noch einmal zum Schlusse des zweiten Buches, um nach den Regeln der rechnenden Geometrie die Bruchrechnung zu erörtern. Die ganze Stelle gehört samt der Tabelle, welche ihr beigefügt ist, noch immer zu dem Dunkelsten, was man besitzt. Nur eins ist einleuchtend: warum nämlich gerade am Schlusse der Geometrie diese Lehre vorgetragen

[1]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 404, 14—405, 10. [2]) Ebenda pag. 417, 16—28. [3]) Ebenda pag. 423, 1—7. [4]) Ebenda pag. 402, 27—403, 2 und 428, 16—19. [5]) Ebenda pag. 412, 20—413, 9.

wird[1]). Das geschieht und muß geschehen, weil nunmehr die Astronomie folgte, in welcher Bruchrechnungen in größter Menge notwendig wurden. Wie der Abacus zwischen den beiden Büchern der Geometrie den Übergang von der eigentlichen theoretischen Geometrie zur Feldmeßwissenschaft bildete, so bildet jetzt die Bruchrechnung den weiteren Übergang zu den uns verloren gegangenen Büchern der Astronomie. Es zeigt sich somit, daß die Geometrie des Boethius nach vorwärts und rückwärts Beziehungen zu den drei anderen mathematischen Schriften desselben Verfassers darbietet.

Es ist daher nur eine einzige Wahl gestellt: entweder die ganze Geometrie des Boethius mit dem Inhalte, über welchen wir berichtet haben, ist echt oder aber sie ist das Werk eines Fälschers, der mit vollbewußter Absicht den Anschein sich gab, als sei er Boethius. Man hat diese letztere Meinung zu verteidigen gewußt[2]) und sich dabei auf Einzelheiten gestützt. Man hat nämlich zu zeigen gesucht, daß die Redeweise der Arithmetik zu der der Geometrie in Widerspruch stehe, daß somit wenn erstere von Boethius herrühre, letztere nur untergeschoben sein könne. Solche Widersprüche sind, wir geben es zu, vorhanden, aber sie sind ganz von der gleichen Natur wie derjenige, welchen wir (S. 435) bei Theon von Smyrna nachzuweisen imstande waren, der sich in einem und demselben Werke nicht scheut die Einheit keine Zahl zu nennen und als Zahl zu benutzen. Will man Boethius dessen für unfähig halten, so muß man seine geistige Bedeutung zu einer Höhe hinaufschrauben, auf welche er nach unserer wiederholt ausgesprochenen Überzeugung nie gelangte. Wir geben ferner zu bedenken, daß man zur Möglichkeit einer Fälschung, die spätestens im XI. S. vollzogen worden sein mußte — denn aus dieser Zeit rühren unsere ältesten Handschriften, welche die Stelle vom Abacus enthalten, her — anzunehmen gezwungen ist, daß damals bereits die echte Geometrie des Boethius verloren gegangen war, trotz der übertriebenen Wertschätzung, die man dem Manne zu zollen nie aufgehört hatte, oder daß man falls solches nicht stattfand Wahrscheinlichkeitsgründe dafür geltend zu machen hätte, warum nur Abschriften der gefälschten Geometrie und daneben keine der echten sich erhielten.

Wir denken nicht daran, ferner unserer früher lange festgehaltenen Meinung von der Echtheit der Geometrie des Boethius anzuhaften, nachdem die gewiegtesten Kenner des Mittelalters, die am

[1]) Math. Beitr. Kulturl. S. 228—229. [2]) Zuletzt und am scharfsinnigsten Weißenborn in der schon wiederholt angeführten Abhandlung „Die Boetiusfrage".

meisten damit vertraut sein müssen, was man jener Zeit an Fälschungen zumuten darf, die entgegengesetzte Meinung als einzig mögliche hingestellt haben[1]), aber eines dürfen wir betonen: das Schlußergebnis ist und bleibt, daß der Verfasser der sogenannten Geometrie des Boethius, der Fälscher, wie man ihn unter dieser Voraussetzung zu nennen hat, wesentlich feldmesserische Quellen benutzt haben muß, daß er auf dem Boden griechischer Bildung steht, und somit, wenn auch unter Herabrückung der Zeit, in welcher seine Schrift entstanden ist, für die Geschichte späterer römischer Mathematik Verwendung finden darf.

Gehen wir nach dieser Zwischenbemerkung noch einmal und mit vermehrter Sicherheit zum I. Buche der Geometrie des Boethius zurück, und zwar zu der Stelle, wo die Übersetzung des Auszuges aus den Elementen des Euklid aufhört. Die letzten Sätze, die ausgesprochen sind, lauten[2]): „Um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck zu zeichnen lehren die Geometer. In einen gegebenen Kreis ein Fünfeck zu zeichnen, welches gleichseitig und gleichwinklig sei, ist nicht unpassend.“ Die Fortsetzung wagen wir nicht zu übersetzen. Sie begründet die unmittelbar hervorgehende Behauptung mittels gewisser auf das Verhältnis von Zahlen herauskommenden Rücksichten, aus denen wir einen guten Sinn nicht mit Sicherheit zu entnehmen vermögen. Gleichwohl ist an der Echtheit der floskelhaften Begründung nicht zu zweifeln, da sie sich wortgetreu in 28 darauf hin untersuchten Handschriften, die in anderen Punkten Unterschiede gegeneinander zeigen, wiederfindet[3]). Dagegen hat keine dieser Handschriften eine Figur damit verbunden, während die älteren Druckausgaben der Geometrie des Boethius, wir wissen nicht aus welcher Quelle[4]), ein in den Kreis eingezeichnetes regelmäßiges Fünfeck mit seinen sämtlichen fünf Diagonalen beigegeben haben. Zumeist aus dieser nichts weniger als authentischen Figur hat man einen Sinn jener dunkeln Worte abgeleitet, als wenn neben dem gewöhnlichen Fünfeck das Sternfünfeck beschrieben werden sollte[5]), welches Boethius danach gekannt haben würde. Wir sind gegenwärtig nicht geneigt diese Meinung aufrecht zu halten. Nicht als ob es uns unmöglich schiene, daß Boethius das schon alte Sternfünfeck gekannt hätte, aber wir trauen ihm so wenig Geometrie zu, daß er wohl nicht aus eigenen Gedanken das Pentagramm mit dem regelmäßigen Sehnenfünfeck in Verbindung brachte und bei Euklid konnte er entschieden keine Anregung dazu erhalten, weder in dem Auszuge noch in dem vermeintlichen Kommentare des Theon. Dort fand er höchstens, daß die Winkel eines aus zwei Diagonalen und einer Fünfecksseite gebildeten Dreiecks sich wie $1:2:2$ verhalten, und das soll möglicherweise in den dunkeln Worten ausgesprochen sein.

[1]) Wir verweisen für ihre Begründung wiederholt auf Heiberg im Philologus XLIII, 507—519. [2]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 389, 8—16: *Circum datum circulum quinquangulum aequilaterum et aequiangulum designare geometres praecipiunt. Intra datum circulum quinquangulum, quod est aequilaterum atque aequiangulum designare non disconvenit. Nam omnia, quaecunque erint, numerorum ratione sua constant et proportionabiliter alii ex aliis constituuntur circumferentiae aequalitate multiplicationibus suis quidem excedentes atque alternatim portionibus suis terminum facientes.* [3]) Boncompagni im *Bullettino Boncompagni* 1873, 341—356. [4]) Etwa aus einem griechischen Euklid IV, 11? [5]) Chasles, *Aperçu hist.* 477, deutsch 545—546.

Wir kommen ferner auf ein Anderes zurück, wovon erst andeutungsweise die Rede war. Architas, ein nicht gemeiner Schriftsteller dieser Wissenschaft, hat nach dem sogenannten Boethius die geometrische Tafel, d. h. den Kolumnenabacus mit seinen Kegelchen, für Latium zurecht gemacht. Wer war dieser Architas, welcher in dem Zwischenstücke zwischen dem I. und II. Buche und in dem II. Buche der Geometrie, im ganzen an fünf Stellen[1]) genannt ist: für die geometrische Tafel und für die Bruchrechnung; für den Satz vom Durchmesser des Innenkreises des rechtwinkligen Dreiecks und für die Bildung rationaler Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks von der geraden Zahl ausgehend, also für die Methode, welche sonst Platon zugeschrieben wird; endlich für eine falsche Berechnung der Fläche eines Dreiecks als doppeltes Quadrat seiner Höhe? Auch hier stehen zwei Meinungen einander gegenüber. Die einen halten Architas für den alten tarentiner Pythagoräer, auf welchen die Überlieferung gar vieles mit Recht und mit Unrecht zurückgeführt habe, und welcher auch in der Arithmetik und in der Musik des Boethius mehrfach vorkam, so daß Boethius oder der seinwollende Boethius ihn anzuführen Gründe hatte. Die anderen meinen Architas, der lateinisch schrieb, der nach der Stelle vom Kreisdurchmesser später als Euklid gelebt habe, könne nicht der Tarentiner sein. Es sei vielmehr ein römischer Schriftsteller, ein Feldmesser oder dergleichen gewesen, der alsdann sicherlich vor Verfassung der Geometrie, in welcher er genannt ist, aber unbestimmt wann gelebt haben muß. Mit dieser Annahme ist die Geschichte der Mathematik bei den Römern um einen Namen reicher, um den Architas Latinus, aber die Schriften des Mannes bleiben auch denen, die an ihn glauben, unbekannt.

Wir selbst zählten früher zu den letzteren, sind aber durch eine neuere Entdeckung zur entgegengesetzten Meinung bekehrt worden.

[1]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 393, 7; 408, 14; 412, 20; 413, 22; 425, 23.

Man hat nämlich bemerkt[1]), daß der so auffallende Ausdruck *non sordidus auctor*, der von Architas gebraucht wird, von Horatius in seiner Ode auf Archytas von Tarent angewandt wurde[2]), daß mithin nur eine Erinnerung an diesen bekannten Vers in jenem Ausdrucke zu finden ist, und diese ist undenkbar, wenn nicht die Persönlichkeit, von der die Rede ist, die gleiche wäre. Die Schwierigkeit, daß Architas nach Euklid gesetzt wird, löst sich durch die seit der Zeit des Kaisers Tiberius (S. 261) übliche Verwechslung des Mathematikers Euklid mit Euklides von Megara, der ein älterer Zeitgenosse des Archytas von Tarent wirklich war. Ob endlich die platonische Formel für rationale rechtwinklige Dreiecke nicht wirklich ursprünglich dem Archytas angehörte, ist eine Frage, deren Verneinung nicht durch zwingende Gründe gefordert wird. Wenn wir also gegenwärtig annehmen, ein Architas Latinus als Persönlichkeit sei aus der Geschichte zu streichen, wenn die Meinung, Boethius habe lateinisch zugestutzte Schriften des Tarentiners vor sich gehabt, als er die Worte *Latio accommodatam*[3]) gebrauchte, daran strandet, daß nie und nirgend die leiseste Spur einer solchen Bearbeitung nachzuweisen ist, so bleibt die fortgesetzte Berufung auf Architas für uns diejenige Klippe, von der aus wir am leichtesten zur Fälschungstheorie gelangen.

Wir haben nun von einigen bekannten Schriften völlig unbekannter Verfasser zu reden. Der älteste von ihnen wird vermutlich derjenige sein, den wir anderwärts den Anonymus von Chartres genannt haben[4]), den man auch wohl für Julius Frontinus gehalten hat. Bei ihm tritt die Dreiecksberechnung aus den drei Seiten nach der sogenannten heronischen Formel auf, bei ihm die Formel für rationale Seiten rechtwinkliger Dreiecke, bei ihm der Satz vom Innenkreise des rechtwinkligen Dreiecks, bei ihm die Berechnung der Kugeloberfläche gleich der vierfachen Fläche des größten Kreises, bei ihm das Verhältnis $22:7$ des Kreisumfangs zum Durchmesser, kurzum richtige Dinge, welche den Verfasser wohl noch mehr als die bei ihm gerühmte Latinität in die Blütezeit römischer Feldmeßwissenschaft hinaufrücken, während der Römer an den als Flächenformeln benutzten Formeln für Vieleckszahlen mitten zwischen geometrischen Betrachtungen kenntlich bleibt.

Ein anderes Stück, in demselben Sammelbande in Chartres enthalten, aber wohl nicht von dem Anonymus verfaßt[5]), hat eine

[1]) Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclid* pag. 110. [2]) Horatius, Lib. I, Ode 28: *iudice te non sordidus auctor naturae verique.* [3]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 393, 8, [4]) Agrimensoren S. 132. Vgl. Chasles, *Aperçu hist.* 457—459, deutsch 517 flgg. [5]) Das hat Weißenborn l. c. S. 223 gegen uns, mit Berufung auf Chasles, den wir hierin mißverstanden hatten, mit Recht betont.

Abhandlung über das Abacusrechnen zum Inhalte, welche der des Boethius sehr ähnlich ist, aber noch weniger als die Geometrie des Anonymus sich datierungsfähig erweist.

Eine andere geometrische des Namens ihres Verfassers entbehrende Schrift ist diejenige, welche die Überschrift führt: Von der Ausmessung der Jucharte, *de iugeribus metiundis.* Sie ist in der sogenannten Gudianischen Handschrift der Wolfenbüttler Bibliothek enthalten, mithin im IX. bis X. S. jedenfalls vorhanden gewesen[1]). Mehr wissen wir nicht zu sagen. Der Verfasser, zu seiner Zeit vielleicht als großer Mathematiker anerkannt, hat unverstandene Bruchstücke aus den verschiedensten Vorlagen vereinigt, alte Mängel getreu übernehmend, neue hinzufügend. Wir haben nicht nötig auf dieses bunte Allerlei einzugehen, nur das wollen wir uns bemerken, daß die Vierecksfläche als Produkt der arithmetischen Mittel gegenüberstehender Seiten erhalten wird, daß sogar der Kreis quadratisch gedacht ist, indem dessen Fläche sich aus der Vervielfältigung des vierten Teiles des Umfanges mit sich selbst bildet. Es ist ja nicht schwer, in den laienhaften Gedanken sich zurückzuversetzen, welcher den Kreis als krummliniges Viereck mit den vier Quadranten als Seiten auffaßte und weiter annahm, die Fläche verändere sich nicht, wenn nur die Seitenlängen dieselben bleiben (S. 549), man habe also nur eben jene Kreisquadranten als Gerade rechtwinklig aneinander zu setzen, um die Quadratur des Kreises zu vollziehen. Mathematisch gesprochen lief dieses Verfahren vermöge $\left(\frac{2\pi r}{4}\right)^2 = \pi r^2$ auf $\pi = 4$ hinaus, oder darauf den Kreisdurchmesser dem vierten Teile des Kreisumfanges gleich zu setzen. Gerade dieses so ungenaue Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser wird uns nötigen der dasselbe enthaltenden Schrift noch einmal zu gedenken, wenn wir mit den mittelalterlichen Schriftstellern uns beschäftigen, zu welchen dieser weise Anonymus jedenfalls hinüberführt, vielleicht gehört.

Für jetzt verlassen wir den europäischen Boden. Wir müssen unter allen Umständen zusehen, was in der Heimat älterer Kultur, in Asien, aus der Mathematik geworden ist, und daß wir gerade diesen Augenblick dazu wählen, jene Umschau zu halten, hat seinen vollwichtigen Grund. Wir haben in diesem Kapitel immer deutlicher den Untergang geometrischen Verständnisses bei römischen Schriftstellern verfolgt. Wir haben zu unserem Erstaunen daneben die Überbleibsel einer entwickelteren Rechenkunst erscheinen sehen, verbunden mit Zahlzeichen, aus welchen, wie wir jetzt verraten wollen, die gegenwärtig in Europa gebräuchlichen als bloße Umformungen

[1]) Agrimensoren S. 135—138.

sich herleiten lassen. Wir haben die Vermutung durchblicken lassen, jene Rechnungsweisen könnten vielleicht griechischen Ursprunges sein. Nach Griechenland, nach dem geistigen Mittelpunkte griechischer Mathematik in Alexandria würden wir daher versuchen müssen auch jene Zeichen rückwärts zu verfolgen, wenn nicht laute Einsprache zu gewärtigen wäre.

Die Anfechter der Echtheit der Geometrie des Boethius sind zu diesem von beiden Seiten hartnäckig geführten Streite eigentlich nur durch die Abacusstelle vermocht. Sie können und wollen, von ihrer Fälschungstheorie aus, derselben kein höheres Alter als etwa bis in das X., frühestens IX. S. verstatten. Sie leiten alsdann die Zahlzeichen und deren Benutzung auf dem Kolumnenabacus aus dem Oriente her: von den Indern erdacht, durch Araber verbreitet sollen die Zeichen in Europa sich eingebürgert haben.

Dieser Möglichkeit gegenüber müssen wir die Heimat der Null, durch deren Vorhandensein das Ziffernrechnen sich wesentlich vom Kolumnenrechnen, auch von dem mit Apices, unterscheidet, aufsuchen. Wir begeben uns zu diesem Zwecke nach Indien.

V. Inder.

28. Kapitel.

Einleitendes. Elementare Rechenkunst.

Zu einer selbst möglicherweise aus zweierlei Völkern, deren eines die krausen Haare der Australneger besaß, gemischten Ureinwohnerschaft des heutigen Dekkans wanderte vielleicht 1400 Jahre v. Chr. der Stamm der Arier ein, die niedriger stehenden Besitzer des Landes teils vertreibend, teils unterjochend[1]. In der späteren Kasteneinteilung des indischen Volkes sind die Nachkommen der alten Besiegten als die dienende, verachtete Kaste der Çûdras übrig geblieben, deren Berührung schon befleckte, und die streng ausgeschlossen waren von den Segnungen einer Bildung, deren Träger freilich zumeist in den beiden oberen Kasten der Brâhmaṇas und Kshattriyas, der Priester und Krieger, zu suchen sind, während sie kaum noch auf die Vaiçyas, den bürgerlichen Kern des Volkes sich erstreckte. Die Sprache der Arier, der Trefflichen nach der späteren Bedeutung des Namens, ist dieselbe, welche man Sanskrit zu nennen pflegt. Sie wurde die herrschende Sprache von ganz Vorderindien, vermochte aber in dieser Ausdehnung sich nicht zu erhalten. Das Sanskrit verblieb nur als Gelehrtensprache in den Priesterschulen der Brahmanen, während es als Volkssprache ausstarb, beziehungsweise durch Töchtersprachen verdrängt wurde.

Zwei Momente mögen bei dieser Verdrängung wirksam gewesen sein. Einmal die Seltenheit schriftlicher Überlieferung, welche soweit ging, daß Fremde, welche nur kurze Zeit im Lande verweilten, an den Mangel jeder schriftlichen Aufzeichnung glauben durften, zweitens die jene Seltenheit selbst wohl verschuldende mehr und mehr hervortretende Zentralisation der Gelehrsamkeit bei den Brahmanen.

---

[1] Für die allgemeinen Verhältnisse waren unsere Quellen der Artikel „Indien" von Benfey in Ersch und Grubers Encyklopädie 1840. Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* in den *Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles-lettres* XVIII, 2. Paris 1849. Albr. Weber, Vorlesungen über indische Literaturgeschichte. 2. Auflage. Berlin 1876. Herr E. Windisch unterstützte uns bei der Drucklegung der ersten Auflage wesentlich durch Ratschläge für die Rechtschreibung indischer Namen und Wörter.

Das Volk lebte unter einem heftigen Drucke, welchem die Einführung einer neuen Religion entsprang, des Buddhismus, etwa seit der Mitte des VI. S. v. Chr. Rasch um sich greifend nach mühseligen Anfängen wurde der Buddhismus durch den König Açoka am Beginn des III. S. zur Staatsreligion erhoben, und diese herrschende Stellung besaß er auch noch zur Zeit des Königs Kanishka um 50 v. Chr., eines zweiten indischen Fürsten von in der Erinnerung der Nachkommen sich fast sagenhaft mehrendem Ruhme. Um die Zeit von Christi Geburt etwa gelang es dem Brahmanismus in den Ländern westlich vom Ganges wieder die Oberhand zu gewinnen, während der Buddhismus weiter nach Osten siegreich fortschritt, beziehungsweise sich dort erhielt.

Der Buddhismus war ebenso schreibselig wie der alte Brahmanismus der schriftlichen Arbeit abgeneigt. Eine reiche buddhistische Literatur hatte sich erzeugt, aber der neu erwachende Brahmanismus vertilgte schonungslos, wessen er nur habhaft werden konnte, und das bot eine neue Veranlassung, die Sanskritsprache in Indien selbst zur Unverständlichkeit zu bringen. Sie behielt nur noch das Wesen und den Charakter einer heiligen Sprache, als solche allen höheren Zwecken dienstbar. Religion und Wissenschaft waren an sie geknüpft, und auch was wir von der Mathematik der Inder wissen, ist wesentlich aus Sanskrittexten geschöpft, wenn nicht aus Schriftstellern anderer Völker erschlossen.

Ein Verkehr Indiens mit dem Westen wie mit dem Osten ist nämlich für fast alle Zeiten von den ältesten an gesichert. Sind es insbesondere sprachliche Gründe, welche für die allerältesten Zeiten den Ausschlag geben müssen, so treten bestimmte Überlieferungen seit dem IV. S. v. Chr. bestätigend hinzu. Nach dem Alexanderzuge entstanden dicht an den Grenzen Indiens griechische Königreiche, welche Verbindungen mit dem Mutterlande ununterbrochen aufrecht erhielten, und mittels deren herüber und hinüber auch Wissenschaft und wissenschaftliche Berufstätigkeit in Austausch treten mußten. Kanishka, den wir vorher erwähnten, schloß ein Bündnis mit dem Triumvirn Marcus Antonius, und von seinen Truppen befanden sich unter den Geschlagenen bei Aktium. Indische Gesandtschaften erschienen, wie wir in dem griechischer Entwicklung gewidmeten Abschnitte (S. 456) zu erwägen gaben, an dem Kaiserhofe in Rom wie später in Byzanz. Augustus, Claudius und Trajan, Constantinus und Julian durften die aus dem fernen Osten kommenden Botschafter begrüßen. Und keineswegs weniger gesichert ist der Verkehr zwischen Indien und der Ostküste Ägyptens über das indische Meer hin. In den beiden Jahrhunderten, welche zwischen der Regierung Trajans

und dem Jahre 300 liegen, scheint insbesondere der Handel auf dieser durch Passatwinde begünstigten Wasserstraße stetig an Ausdehnung gewonnen zu haben, so daß eine Schwierigkeit die Art und Weise der Übertragung zu erklären keineswegs besteht für den Fall, daß indische Bildungselemente in griechischen, griechische in indischen Werken sich nachweisen ließen. Beides ist aber der Fall.

Philosophie und Theologie der alexandrinischen Neuplatoniker und Gnostiker haben indische Gedanken sich angeeignet. Daß auch umgekehrt indische Literatur vielfach von griechischen Quellen zeuge, ist eine Tatsache, welche gegenwärtig wohl von keinem Sanskritologen mehr in schroffe Abrede gestellt wird. Nur über den Grad der Beeinflussung, stellenweise über die Richtung derselben findet ein Zwiespalt statt, da ja an und für sich betrachtet Dinge, die an zwei Orten gefunden werden, falls man an ein selbständiges doppeltes Auftreten aus diesem oder jenem Grunde zu glauben nicht geneigt ist, eben so leicht von dem östlichen Fundorte nach dem westlichen gelangt sein können als umgekehrt.

Wir werden nunmehr prüfen müssen, welcherlei mathematisches Wissen bei den Indern sich nachweisen läßt, und wie sich dasselbe zur griechischen Wissenschaft verhält.

Eins schicken wir voraus: die Form indischer Wissenschaft darf uns, wenn sie von der griechischen noch soweit abweicht, nicht als Beweis der Selbständigkeit derer gelten, die sich ihrer bedienten. Ein arabischer Schriftsteller, Albîrûnî, hat am Anfange des XI. S. die Erfahrung gemacht, daß Auszüge aus Euklid und Ptolemäus, welche er indischen Gelehrten mitteilte, von diesen sofort in Verse so dunkeln Verständnisses umgesetzt wurden, daß er kaum mehr wiedererkannte, was er selbst sie gelehrt hatte[1]). Nicht viel anders scheint das Verhältnis der indischen Heilkünstler des Mittelalters zu Hippokrates aufzufassen[2]).

Wir haben von dunkeln Versen gesprochen. Es ist das eine besondere Eigentümlichkeit indischer Gelehrten, daß sie wissenschaftliche Werke in Versen zu verfassen liebten. Es hängt das offenbar mit der brahmanischen Neigung zusammen dem Gedächtnisse zu vertrauen und Aufzeichnungen zu vermeiden. Nicht unwichtige Folgen ergeben sich aber daraus. Einmal ist die indische Prosodie eine auf sehr feste Regeln gegründete, so daß Irrtümer in einem alten Texte unter Umständen außer aus dem Sinne auch aus holperndem Versmaße erkannt werden können. Zweitens aber hat, wie wir schon

[1]) Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* pag. 334, Anmerkung 2. [2]) E. Haas in der Zeitschr. der deutschen morgenländischen Gesellsch. XXXI, 647—666.

sagten, die Versform häufig Dunkelheit erzeugt und so die Nötigung zu ausführlichen Erklärungen der für die Schüler fast unverständlichen Schriften mit sich getragen, Erklärungen, die selbst dazu dienen den älteren Text in unzweifelhafter Reinheit zu bewahren, weil sie fortlaufende Kommentare bilden, Wort für Wort des Textes wiederholen, zur Sache selbst aber meistens recht wenig bieten, indem sie sich mit bloßen Umschreibungen zu begnügen pflegen.

Die indische Prosodie, sagten wir, sei auf sehr feste Regeln gegründet. In der Tat besitzt sie Versmaße sehr verschiedener Natur, von denen wir zwei nennen müssen, das Sloka- und das Ârya-Metrum. Letzteres diente den Mathematikern seit Âryabhaṭṭa, dessen Zeitalter wir gleich angeben werden, ausschließlich. Früher soll man des Sloka-Metrums sich bedient haben, und dieser Umstand ist zur Datierung eines arithmetischen Bruchstückes benutzt worden, welches im Mai 1881 in Bakhshâlî, in dem nordwestlichsten Indien, in der Erde vergraben aufgefunden worden ist. Es wird angenommen, das Rechenbuch von Bakhshâlî[1]), wie wir es nennen wollen, sei im dritten oder vierten nachchristlichen Jahrhundert verfaßt, wenn auch die aufgefundene Niederschrift auf Birkenrinde erst zwischen den Jahren 700 und 900 entstanden sein dürfte. Von dem Inhalte des Rechenbuches von Bakhshâlî reden wir am Anfange des 29. Kapitels.

Eigentlich mathematische Schriftsteller scheint es nach der gegenwärtigen Kenntnis, die wir von der Sanskritliteratur besitzen, in Indien nicht gegeben zu haben. Astronomie und Astrologie fanden dagegen ihre berufsmäßigen Vertreter, und da diese genötigt waren mathematische Vorkenntnisse vorauszusetzen, so entwickelten sie das, was ihnen unentbehrlich war, in Einleitungskapiteln oder in gelegentlichen Abschweifungen. So hielten es wenigstens die drei vorwiegend mathematischen Astronomen, deren Werke wir besitzen.

Âryabhaṭṭa geboren 476 n. Chr. in Pâtaliputra am oberen Gangeslaufe schrieb ein Werk Âryabhâṭṭîyam betitelt, dessen dritter Abschnitt der Mathematik gewidmet ist[2]).

Brahmagupta geboren 598 schrieb „das verbesserte System des Brahma“, *Brâhma-sphuṭa-siddhânta*, aus welchem das 12. und 18. Kapitel der Mathematik angehören.

Bhâskara Âcârya, d. h. Bhâskara der Gelehrte, schrieb „die Krönung des Systems“ *Siddhântaçiromaṇi*, dessen zwei für uns wichtige Kapitel mit besonderer Überschrift *Lîlâvatî* (die Reizende)

[1]) *The Bakshali Manuscript* von Rudolf Hoernle im *Indian Antiquary* XVII, 33—48 und 275—279 (Bombay 1888). [2]) Eine Übersetzung von L. Rodet im *Journal Asiatique* von 1879. (Série 7, T. XIII.)

und *Vijagaṇita* (Wurzelrechnung) genannt sind[1]). Bhâskara ist 1114 geboren.

Die Geburtsdaten dieser drei Schriftsteller sind vollständig sicher, da sie aus eigenen Angaben der betreffenden Männer, welche in ihren Werken aufgefunden worden sind, hergestellt werden konnten[2]). Wir fügen dem hinzu, daß andere Astronomen oder Mathematiker, welche wir noch nennen werden, insgesamt viel jüngeren Datums als Âryabhaṭṭa sind, daß ein astronomisches Werk, von dem wir sogleich reden wollen, auch nicht älter als frühestens aus dem IV. oder V. S. nachchristlicher Zeitrechnung ist.

Wir meinen den Sûrya Siddhânta oder das Wissen der Sonne[3]), indem Sûrya (die Sonne) ihre Siddhânta (Erkenntnis, Wissenschaft, System) dem Asura Maya d. h. dem Dämon Maya offenbart, der es niederschreibt. Wer dieser dämonische Schriftsteller selbst sei, wann er gelebt hat, ist nur durch eine ziemlich kühne Vermutung erschließbar. In dem Werke selbst kommen nämlich unzweifelhaft griechische Ausdrücke vor, welche in der indischen Verkleidung leicht erkannt worden sind. Wenn Kendra die Entfernung eines Planeten von einem Störungsmittelpunkte bedeutet, so ist das eben das griechische ἡ ἐκ κέντρου, wenn *liptâ* oder *liptikâ* die Winkelminute heißt, so ist das λεπτόν das Geschabte, der Bruchteil, Ableitungen, die trotz der Stammverwandtschaft indischer und griechischer Sprache angenommen werden müssen, indem für *kendra* und *liptâ* eine unmittelbar indische Herkunft nicht zu ermitteln ist. Dazu kommt, daß einzelne Lehren des Sûrya Siddhânta griechisches Gepräge tragen. Die Ostwestlinie für einen Punkt wird mittels der zwei Schattenbeobachtungen gleicher Länge am Vormittage und am Nachmittage gewonnen, welche wir bei Vitruvius und Hyginus (S. 535—536) kennzeichnen mußten. Anderes scheint auf den ptolemäischen Almagest hinzuweisen. Gerade diese Annahme vereinigt sich sodann mit einer höchst merkwürdigen Tatsache: daß nämlich ägyptische Könige aus der Ptolemäerfamilie in indischen Inschriften als Turamaya vorkommen mit eigentümlicher Verketzerung des Namens. Man

[1]) Die mathematischen Kapitel von Brahmagupta und von Bhâskara sind in einer englischen Übersetzung vorhanden, welche wir als Colebrooke zitieren: *Algebra with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara translated by* H. Th. Colebrooke. London 1817. [2]) Bhaû Dajî, *On the age and authenticity of the works of Varâhamihira, Brahmegupta, Bhattotpala and Bhaskarâchârya* in dem *Journal of the Asiatic society* 1865 (New Series I, pag. 292—418). [3]) Herausgegeben mit englischer Übersetzung von Burgess und Anmerkungen von Whitney in dem *Journal of the American Oriental Society* Vol. VI (New Haven 1860).

hat deshalb vermutet[1]), auch der Astronom Ptolemäus sei zu einem Turamaya geworden, der volkstümlich sich weiter in einen Asura Maya verketzerte. Zu einer solchen sagenhaften Personenveränderung bedarf es einiger Zeit und so kann der Sûrya Siddhânta nicht allzurasch nach Ptolemäus' Leben d. h. nach dem II. S. n. Chr. verfaßt sein. Andererseits hat Varâhamihira von dem Sûrya Siddhânta Gebrauch gemacht und dessen Blütezeit fällt nach der Aussage eines noch späteren Astronomen Bhaṭṭa Utpala nach 505, dessen Tod einem anderen Berichterstatter Amarâja zufolge auf 587. Beide Daten vereint lassen uns im Varâhamihira einen jüngeren Zeitgenossen von Âryabhaṭṭa finden, und der Sûrya Siddhânta muß dem entsprechend zwischen Ptolemäus und Varâhamihiras Lebzeiten d. i. etwa im IV. oder V. S. entstanden sein.

Varâhamihira[2]) gibt übrigens den Ursprung mancher seiner Kenntnisse mit ehrlicherer Gewissenhaftigkeit an, als es sonst bei Indern der Fall zu sein pflegt. Er bezieht sich für die Namen der Sternbilder, welche er benutzt, geradezu auf den Yavaneçvarâcârya, d. h. auf den ionischen oder griechischen Meister, indem die Yavana sicherlich Griechen bedeuten. Bei ihm und anderen Astronomen und Astrologen ist sodann von Romaka Pura, d. h. von Rom und von Yavana Pura, d. h. der Stadt der Ionier nämlich von Alexandria die Rede, lauter Momente, welche den alexandrinisch-indischen Beziehungen entstammen und die Abhängigkeit indischer Astronomie auch von alexandrinischem Wissen bestätigen, wie anderenteils ein Zusammenhang ältester indischer Sternkunde mit Babylon (S. 39) nicht abzuweisen sein dürfte.

Wir haben außerordentlich wenig für uns Brauchbares dem Sûrya Siddhânta entnehmen können, eigentlich nichts weiter, als daß ein griechischer Einfluß auf indische Wissenschaft damals schon, mithin vor Âryabhaṭṭa feststeht. Wir haben daneben einige weitere Namen indischer Astronomen kennen gelernt. Wir lassen hier andere folgen. Von einiger Bedeutung dürften Çrîdhara und Padmanâbha gewesen sein. Beide sind bei Bhâskara erwähnt, bei Brahmagupta noch nicht, haben daher vermutlich in der Zwischenzeit zwischen diesen beiden gelebt. Es kommt dazu Paramâdîçvara, der Kommentator Âryabhaṭṭas, welcher später als Bhâskara gelebt hat, welchen er kennt. Ferner kommen Bhâskaras Kommentatoren hinzu, wie Gangâdhara, der 1420 lebte, Sûryadâsa um 1540, Ganeça um

[1]) Albr. Weber, Zur Geschichte der indischen Astrologie in den Indischen Studien II, 243. [2]) *The Pañchasiddhântikâ of Varâha Mihira* ed. by G. Thibaut and Mahâmahopâdhyâya Sudhâkara Dvivedî. Benares 1889.

1545, Ranganâtha um 1640, Râma Krishṇa vielleicht um dieselbe Zeit, jedenfalls nicht viel älter, und andere. Sie alle lassen uns ratlos in der wichtigsten Frage, welche wir ihnen so gern vorlegen würden, in der Frage: Und was war vor Âryabhaṭṭa?

Sollen die Inder mit mathematischen Kenntnissen erst zu einer Zeit vertraut geworden sein, welche später liegt als diejenige, in welcher die Nachblüte alexandrinischer Wissenschaft unter Pappus und Diophant bereits zu Grabe getragen war? Es genügt, die gestellte Frage von der Höhe der allgemeinen Bildungsstufe aus, welche das Volk der Inder erreicht hat, sich wiederholt zu vergegenwärtigen, um zur Verneinung zu gelangen. Aber worin die älteren Kenntnisse bestanden haben, davon wissen wir ungemein wenig. Sogar wo uns in nicht-mathematischen Schriften Aufgaben berichtet werden, deren Altertum kaum bezweifelbar ist, zwingt die Jugend des Berichtes zum Eingeständnis, daß die Methoden der Auflösung jener Aufgaben möglicherweise um viele Jahrhunderte später entstanden oder eingeführt sein können als die Aufgaben selbst. Wir haben in Rom es gesehen, daß die Festlegung der Ostwestlinie, eine altertümliche Aufgabe, ein geradezu priesterliches Geschäft, bald so, bald so vorgenommen wurde; wir haben durch einen günstigen Zufall, das Bestreben eines Schriftstellers Hyginus nach Vollständigkeit, von drei Methoden offenbar aus verschiedenen Zeiten stammend Kenntnis gewonnen; wir haben eine Datierung der drei Methoden versucht, versuchen können. Wie aber, wenn Hyginus uns nur das jüngste Verfahren mitgeteilt hätte, wenn Vitruvius ganz darüber schwiege, würden wir die berichtete Methode als die der ältesten Zeiten anerkennen müssen? Vergegenwärtigen wir uns nun noch die schon berührte Fähigkeit der Inder, Fremdländisches rasch in die einheimische Form zu gießen, so kommen wir notgedrungen zu der Überzeugung, es werde in vielen Fällen nur spät Eingeführtes oder mindestens durch Einführungen wesentlich Verändertes sein, wovon uns berichtet wird, soweit wir auch in Aufsuchung mathematischen Stoffes zu greifen geneigt sind.

Daraus folgt aber die Unmöglichkeit eine chronologische Übersicht der indischen Mathematik zu geben, und wir werden in jeder Beziehung uns besser stehen, wenn wir versuchen eine Gruppeneinteilung des indischen mathematischen Wissens nach dem Inhalte vorzunehmen. Es wird dabei in ein helleres Licht treten, was als Leitfaden durch diesen ganzen Abschnitt benutzt werden kann: ein gewisser Gegensatz zwischen griechischer und indischer Denkungsart und schöpferischer Kraft.

Die Griechen waren das vorzugsweise geometrische Volk, sie waren es in solchem Maße, daß wir den einengenden Zusatz: des Altertums uns füglich erlassen dürfen. An den Indern werden wir die vorzugsweise rechnerische Begabung zu bewundern haben. Bei ihnen ist dem entsprechend mutmaßlich die Heimat einer staunenerregenden Entwicklung der Rechenkunst zu suchen. Und umgekehrt tritt uns mit der einzigen Ausnahme einer selbst auf Rechnung gegründeten Trigonometrie wenige vorläufig rätselhafte indische Geometrie gegenüber, deren Spuren wir nicht mit Leichtigkeit nach Alexandria zurückverfolgen könnten. Mit der Algebra endlich wird sich uns ein Gebiet eröffnen, das beiden Begabungen zugänglich war. Die Griechen gingen von einer geometrisch eingekleideten Algebra aus, welche sie bis zur Auflösung unreiner quadratischer Gleichungen fortführten, nur allmählich des geometrischen Gewandes sich entäußernd. Spuren griechischer Algebra müssen mit griechischer Geometrie nach Indien gedrungen sein und werden sich dort nachweisen lassen. Aber entweder stieß die griechische Algebra in Indien auf eine einheimische oder vielleicht aus Babylon frühzeitig eingedrungene Schwesterwissenschaft, mit der sie sich vereinigte, oder sie entwickelte sich dort rechnerisch, also recht eigentlich algebraisch bis zu einer Höhe, die sie in Griechenland niemals zu erreichen vermocht hat.

Bei der nunmehr zu beginnenden Besprechung indischer Rechenkunst tritt uns vor allem das Zifferrechnen gegenüber, welches nach vielfach verbreiteter Überlieferung indischen Ursprungs ist. Ein arabischer Schriftsteller des X. S., Masʿûdî, erzählt[1], unter Brahmas, des ersten indischen Königs, Regierung habe die Wissenschaft ihre größten Fortschritte gemacht. Man habe damals in den Tempeln Himmelskugeln abgebildet; die Regeln der Astrologie, des Einflusses der Sterne auf Menschen und Tiere seien festgestellt worden; die vereinigten Gelehrten verfaßten den Sindhind (d. h. den Siddhânta), das Buch der Zeit der Zeiten; astronomische Tafeln wurden zusammengestellt; endlich erfand man die neun Zeichen, mit welchen die Inder rechnen. In diesem Berichte spukt offenbar indischer Nationalstolz, welcher den Sûrya Siddhânta wie alles was mit Sternkunde in engerer oder weiterer Verbindung steht als einheimisch betrachtet wissen und darum in ein graues Altertum hinaufrücken will. Noch deutlicher zeigt sich die gleiche Eigenschaft in der Fortsetzung des Berichtes, der Masʿûdî von indischer Seite zugetragen wurde, so daß er nur als Sprachrohr uns erscheint. Die Inder, heißt es nämlich weiter, hätten nach Âryabhaṭṭa einen Almagest verfaßt, aus welchem Ptolemäus sein Werk gleichen Titels entnommen habe, eine Umkehrung der Tatsachen, die ihresgleichen sucht. Gegenwärtig haben wir es indessen mit den Ziffern zu tun, und da scheint gegen das, was man Masʿûdî erzählt hat, kein Widerspruch sich zu erheben. Ähnlich lauten auch andere Berichte. So heißt es in einer um 950 an der Nordküste von Afrika entstandenen rabbinischen Abhandlung[1]: die Inder haben neun Zeichen erfunden um die Einheiten anzuschreiben. Weitere Bestätigung finden wir bei dem Byzantiner Maximus Planudes, dessen bezügliche Äußerungen (S. 511) mitgeteilt worden sind, in welchen auch der Erfindung der Null besonders gedacht ist.

[1]) Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* pag. 324.

Ob freilich die Null gleichen Alters ist mit den anderen Zahlzeichen, diese Frage möchte eher zu verneinen als zu bejahen sein. Es scheint fast nachweisbar, daß die ältere indische Zahlenschreibung der Null noch entbehrte, welche erst später hinzuerfunden wurde. Das erste bekannte Vorkommen der Null in einer Urkunde ist erst aus dem Jahre 738 bekannt[2]). Wir wollen nicht versäumen hier in Erinnerung zu bringen, daß in Babylon ein Stellungswert von Zahlzeichen bestand, und daß in einer verhältnismäßig späten Zeit (S. 31), welche aber immer noch ein Jahrtausend vor der urkundlich nachgewiesenen indischen Null liegt, dort ein Zeichen vorhanden war, welches eine Lücke ausfüllen sollte.

Die Insel Ceylon hat ihre Kultur von Indien her erhalten, sei es schon im V. S. v. Chr., sei es im III. S., als König Açoka den Buddhismus auch dorthin über das Meer trug. Auf Ceylon wurde aber im Gegensatze zum Festlande, wo ein Fortschritt wenigstens in manchen Jahrhunderten mit größter Deutlichkeit hervortritt, die Bildung vollständig stationär, und eine am Anfange des XIX. Jahrhunderts noch auf Ceylon bei den Gelehrten übliche Zahlenschreibart kann sehr wohl ältesten indischen Ursprungs sein[3]). Während das Volk sich der gewöhnlichen europäischen Ziffern bedient, welche mit den Kolonisten der letzten Jahrhunderte eingewandert in der veränderten Gestalt, welche sie durch diese erhalten hatten, sich unweit der alten Heimat wie fremd neu einbürgerten, haben die Gelehrten

[1]) Es ist ein Kommentar von Abu Sahl ben Tamim in hebräischer Sprache zu der bekannten kabbalistischen Schrift *Sepher Yecira* und handschriftlich in Paris vorhanden. Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* pag. 565. [2]) E. Clive Bayley, *On the genealogy of modern numerals* in dem *Journal of the royal asiatic society*. New series XIV, 335—376 (1882) und XV, 1—72 (1883). Über die Urkunde von 738 vgl. XV, 27. [3]) Die Untersuchungen des dänischen Gelehrten Rask über diesen Gegenstand stammen aus dem Jahre 1821. Vgl. Brockhaus, Zur Geschichte des indischen Zahlensystems in der Zeitschrift für die Kunde des Morgenlandes IV, 74—83.

folgendes Verfahren aufbewahrt. Sie besitzen neun Zeichen für die verschiedenen Einer, ebensoviele für die Zehner, ein Zeichen für Hundert, eins für Tausend und schreiben mittels dieser 20 Zeichen sämtliche Zahlen von 1 bis 9999, indem die Hunderter und Tausender dadurch ausgedrückt werden, daß man die Anzahl derselben vervielfachend den Zeichen für 100 und 1000 vorsetzt. So schreibt man z. B. 7248 mit sechs Zeichen, nämlich 7, 1000, 2, 100, 40, 8. Vier Zeichen nämlich 7000, 200, 40, 8 würden genügen, wenn man auch für die einzelnen Hunderter und für die einzelnen Tausender wie für die Zehner besondere Zeichen, im ganzen demnach 36 Zeichen besäße, und das wird auch den allergelehrtesten Einwohnern nachgerühmt. Das ist freilich ein Verfahren, welches dem, was man indische Rechenkunst zu nennen pflegt, weit weniger gleicht, als z. B. altägyptischer hieratischer Zahlenbezeichnung.

Eine Ähnlichkeit gibt sich nur darin zu erkennen, daß jene singhalesischen Zeichen nichts anderes sein sollen als abgekürzte Zahlwörter. Auch die alten indischen Ziffern, d. h. die Zeichen von eins bis neun, wie sie ursprünglich aussahen und nicht wie sie in der späteren indischen Schrift sich verändert haben, sollen nichts anderes gewesen sein als die Anfangsbuchstaben der betreffenden neun Zahlwörter, wobei wohl zu beachten ist, daß im Sanskrit eine Verschiedenheit der neun Anfänge obwaltet, wie sie in anderen indogermanischen Sprachen nicht stattfindet, so daß in diesen ein einfacher Anfangsbuchstabe nicht genügen würde, das Zahlwort unzweideutig zu bestimmen. Man denke nur an die deutschen Zahlwörter sechs und sieben; an die lateinischen *sex* und *septem*, aber auch an *quatuor* und *quinque*; an die griechischen ἕξ und ἑπτά. Allerdings wechselten im Laufe der Jahrhunderte auch die Buchstaben ihre Formen, und es scheint[1]), als ob Buchstaben des II. S. n. Chr. vorzüglich zur Ziffernbildung gedient hätten. Aus ihnen leiten sich am ungezwungensten die Zeichen ab, welche für uns (S. 584) Apices heißen, welche auch bei den Westarabern uns noch begegnen werden. (Siehe die lithographierte Tafel am Ende des Bandes.) Freilich ist diese Meinung nicht die allgemeine, und wir dürfen nicht verschweigen, daß andere Forscher von hoher Glaubwürdigkeit[2]) nicht viel von jener Buchstabenableitung halten. Die Apices seien allerdings indischen Ursprungs, stammten aber von nichtalphabetischen Zahlzeichen aus Höhleninschriften des II. S. n. Chr. Für uns geht mithin als ge-

[1]) So hat Woepcke im *Journal Asiatique* von 1863, pag. 75 bemerkt.
[2]) Burnell, *Elements of South-Indian Palaeography*. Mangalore 1874, pag. 47 bis 48.

sichert hervor, was beiden widersprechenden Annahmen gemeinschaftlich ist: daß im II. S. Zahlzeichen, gleichviel welcher ursprünglichen Entstehung, in Indien vorhanden waren, und von da nach Alexandria gekommen sein können, welche zur Ableitung der Apices vollkommen genügen.

Die Inder bedienten sich sehr verschiedener Bezeichnungsarten der Zahlen, von denen wir reden müssen. Eine solche wird von Âryabhaṭṭa berichtet, der sich ihrer im ersten Kapitel, und nur im ersten Kapitel des Âryabhaṭṭîyam bediente[1]). Zu deren Verständnis, wie überhaupt für das Folgende sind wir genötigt, weniges über das Alphabet der Sanskritgrammatik einzuschalten.

Es besteht aus 25 Konsonanten in fünf Abteilungen, deren jede als ein Varga bezeichnet zu werden pflegt. Es sind das die Kehllaute, die Gaumenlaute, die Zungenlaute, die Zahnlaute, die Lippenlaute. Die fünf Buchstaben, aus welchen jeder Varga besteht, sind der harte und der weiche, jeder von beiden ohne und mit Aspiration sich unmittelbar folgend, und der Nasenlaut, Unterschiede, die dem europäischen Ohre fast unmerklich sind, insbesondere was die Nasenlaute betrifft, da wir den Lippennasenlaut allerdings als *m* zu unterscheiden wissen, die Nasenlaute der vier ersten Vargas dagegen sämtlich als *n* hören. Nach den 25 Konsonanten kommen vier Halbvokale *y, r, l, v*. Als 30. bis 32. Buchstabe erscheinen drei Zischlaute, das Gaumen-*ç*, das Zungen-*sh*, das Zahn-*s*. Als 33. Buchstabe wird das *h* gezählt. Dazu treten 14 Vokale und Diphthongen gleichfalls von unseren europäischen Gewohnheiten weit abweichend. Vokale sind nämlich *a, i, u, ṛi, ḷi*, ein jeder in kurzer und in gedehnter Aussprache vorhanden. Diphthonge sind *e, ai, o, au*. Von diesen Buchstaben werden die Vokale und Diphthongen nur dann durch den anderen Lauten gleichberechtigte Zeichen geschrieben, wenn sie für sich allein eine Silbe ausmachen, also in der Regel nur am Anfange eines Wortes oder gar einer Zeile. Folgt hingegen der Vokal auf einen Konsonanten, so wird er durch kleinere Nebenzeichen ausgedrückt, welche über oder unter dem Konsonanten angebracht werden, etwa wie in den semitischen Sprachen. Das kurze *a* bedarf jedoch keines Zeichens, indem es ein für allemal inhäriert, d. h. indem jeder der Buchstaben von *k* bis *h*, wenn kein anderer Vokal ihm folgt, er aber der letzte Konsonant einer Silbe ist, als mit kurzem *a* behaftet ausgesprochen wird. Stehen zwischen zwei Vokalen, die einem oder auch zwei Wörtern angehören können, mehrere Konsonanten, so werden

[1]) Lassen in der Zeitschr. f. d. Kunde des Morgenlandes II, 419—427. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhatta* (*Journal Asiatique* 1879) pag. 8.

diese in zusammengesetzter Form geschrieben, indem Teile eines jeden einzelnen Konsonanten zu einem oft sehr fremdartig aussehenden Buchstaben vereinigt werden.

Âryabhaṭṭa gibt nun den Konsonanten durch ihre fünf Vargas hindurch die Zahlenwerte 1 bis 25. Ihm ist also $k=1$, $kh=2$, $g=3, \ldots\ldots m=25$. Die Halbvokale, die Zischlaute und das h bedeuten die hier sich anschließenden Zehner, also $y=30$, $r=40$, $\ldots h=100$. Diese Bedeutungen finden statt, wenn der betreffende Buchstabe mit nachfolgendem kurzen oder langen a verbunden ausgesprochen wird. Die weiteren Vokale des Alphabets, ohne Rücksicht auf Länge und Kürze, und dann noch die vier Diphthonge vervielfachen den Konsonanten, welchem sie angehängt sind, mit aufeinanderfolgenden Potenzen von 100. So ist also $ga=3$, $gi=300$, $gu=30000$, *ge* ist eine 3 mit 10 Nullen, *gau* eine 3 mit 16 Nullen. Zwei verbundene Konsonanten sind als mit demselben Vokale begabt anzusehen, und ihr Wert ist zu addieren. So ist *kvi* z. B. aufzulösen in $ki+vi=1\cdot 100+60\cdot 100=6100$.

Die Ähnlichkeit mit dem Systeme der singhalesischen Gelehrten ist nicht zu verkennen. Die Vokale und Diphthonge stellen hier die Zeichen für Einheiten höheren Ranges vor, welche durch vorausgehende Konsonanten gewissermaßen als Koeffizienten vervielfacht werden. Positionsarithmetik dagegen ist diese Bezeichnung nicht, und wenn wir bei unserer Schilderung von Nullen sprachen, so geschah dieses, um uns unseren Lesern in kürzester Form verständlich zu machen, nicht aber weil die Methode selbst es verlangte. Es wäre übrigens falsch, wenn man die Folgerung ziehen wollte, Âryabhaṭṭa habe überhaupt die Positionsarithmetik nicht gekannt. Das Gegenteil geht vielmehr, wie wir sehen werden, aus seinen im zweiten Kapitel des Âryabhaṭṭiyam enthaltenen Vorschriften für die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln hervor[1]).

Positionsarithmetik ist auch die Grundlage zweier anderer Systeme. Das eine soll den Mathematikern des südlichen Indiens angehören, ein Erfinder wird jedoch nicht angegeben[2]). Die einzelnen Ziffern werden hier durch Buchstaben ausgedrückt, und zwar jede einzelne nach Belieben durch verschiedene Buchstaben. Die Ziffern 1 bis 9 entsprechen nämlich der Reihe nach erstens den neun ersten Konsonanten, also dem Varga der Kehllaute und den vier ersten Gaumenlauten; zweitens dem 11. bis 19. Konsonanten, also dem Varga der Zungenlaute und den vier ersten Zahnlauten; drittens den vier Halbvokalen, den drei Zischlauten, dem h und einem in Südindien

[1]) Rodet l. c. pag. 19. [2]) Math. Beitr. Kulturl. S. 68.

noch vorkommenden konsonantischen *lr*. Der Varga der Lippenlaute bedeutet die Ziffern 1 bis 5. Endlich die noch übrigen Buchstaben, nämlich der Nasenton der Gaumenlaute und der Zahnlaute, sowie alle initiale Vokale und Diphthonge sind Nullen. Völlig bedeutungslos dagegen sind durch Nebenzeichen geschriebene oder inhärierende Vokale und Diphthonge, ebenso wie die zuerst auszusprechenden Teile zusammengesetzter Konsonanten, deren letzter allein als wertgebend in Geltung tritt. Die so geschriebenen Zahlen werden alsdann gemäß der hier wirklich vorkommenden Nullen nach den Regeln des Stellungswertes gelesen. Die Möglichkeit, eine und dieselbe Zahl nach dieser Methode auf verschiedene Weise darzustellen, ist eine fast unbegrenzte und gewährt durch den Sinn der jedesmal gewählten Worte nicht bloß eine wahre Gedächtnishilfe, sondern auch die Benutzbarkeit im fortlaufenden Versmaß unter Einhaltung der strengen Regeln indischer Prosodie.

Noch geeigneter zu solcher Benutzung in Versen erscheint die zweite hier zu erwähnende Methode einer symbolischen Positionsarithmetik[1]), die ziemlich weite Verbreitung erlangt hat, da sie bei den Indern, wie in Tibet, wie bei den Eingeborenen der Insel Java vorkommt. Es werden dabei für die Einer und auch für manche zweiziffrige Zahlen gewisse symbolische Wörter gewählt, welche alsdann mit Positionswert zusammengesetzt werden. Die Reihenfolge ist die der Sprache in den Zahlen unter Hundert, nicht die der Schrift. Das Zahlenschreiben befolgt, wie wir wissen, das Gesetz der Größenfolge. Die Sprache ist nicht immer so folgerichtig, und so läßt sie im Sanskrit wie im Deutschen, wie im Arabischen, in dem Gebiete unterhalb von Hundert das kleinere Element dem größeren vorausgehen z. B. dreiundsiebzig, *trisaptati*. Ebenso macht es diese symbolische Bezeichnung, welche wir um dieser Eigentümlichkeit willen lieber eine Aussprache der Zahlen mit Stellungswert, als eine Schreibweise nennen möchten. So heißt *abdhi* (der Ozean, deren es vier gibt) die Zahl 4, *sûrya* (die Sonne mit ihren zwölf Wohnungen) die Zahl 12, *açvin* (die beiden Söhne des Sûrya) die Zahl 2 und *abdhisûryâçvinas* in seiner Zusammensetzung 2124. Da mehr als ein Wort für jede einzelne Zahl zur Verfügung steht, für 4 z. B. auch *krita* (die erste der vier Weltperioden), außerdem die mehrziffrigen Zahlen auch nach verschiedenen Gruppen geteilt werden können (z. B. $2124=2\cdot 12\cdot 4=2\cdot 1\cdot 24=2\cdot 1\cdot 2\cdot 4$) so ist hier die Kombinationsfähigkeit eine gleichfalls außerordentliche, und die Ein-

[1]) *Nouveau Journal Asiatique* XVI, 12, 25 und 34—40, sowie *Journal Asiatique* 6. série, I, 284—290 und 446.

fügung in das Versmaß ist damit so erleichtert, daß man es begreiflich findet, daß Astronomen wie Brahmagupta mit Vorliebe gerade der symbolischen Zahlenbenennung in ihren didaktischen Gedichten sich bedienten.

Ein derartiges bewußtes Spielen mit den Begriffen der Stellungsarithmetik mit Einschluß der Null erklärt sich am leichtesten in der Heimat dieser Begriffe, für welche uns Indien gilt und gelten darf, selbst wenn es sich um eine zweite Heimat handelt, wir meinen, wenn beide Begriffe, was große Wahrscheinlichkeit besitzt, in Babylon geboren waren und noch wenig ausgebildet nach Indien einwanderten. Als mit der Stellungsarithmetik in offenbarem Zusammenhange stoßen wir in Indien auf eine Reihe eigentümlicher Zahlennamen, wie keine andere Sprache der Erde sie besitzt, die westlicher als Indien sich entwickelte. Bei den Griechen waren Namen für 1, 10, 100, 1000, 10000 vorhanden, aus denen die der höheren Einheiten sich zusammensetzten. Bei den Römern war die Anzahl selbständiger Namen noch beschränkter, da 10000 bereits zur Zusammensetzung nötigte. Das Gleiche findet, wie wir vorausschickend bemerken, im Arabischen statt. Das Sanskrit besitzt dagegen von 100 Millionen an die Gewohnheit durch Beifügung des Wortes *mahâ* (groß) eine Verzehnfachung vorzunehmen, z. B. *arbuda* = 100 Millionen, *mahârbuda* = 1000 Millionen; *padma* = 10000 Millionen, *mahâpadma* = 100000 Millionen usw., aber sonstige wirkliche multiplikative Zusammensetzungen wie *decem millia*, *ἑκατονταкιςμύριοι* kommen nicht vor, und die eigentümlich gebildeten Wörter erstrecken sich[1]) bis zur Bezeichnung der 1 mit 20 Nullen *akshauhiṇî* und der 1 mit 21 Nullen *mahâkshauhiṇî*. Es ist mit Recht bemerkt worden, daß diese Aussprechbarkeit jeder einzelnen Rangordnung deren Gleichberechtigung ganz anders zu Bewußtsein bringe, als die griechischen und römischen Zusammenfassungen in Tetraden und Triaden es gestatten, daß hier eine Wurzel der Stellungsarithmetik zutage trete[2]). Aber freilich müßte man, um ein vollgültiges Urteil fällen zu können, genau wissen, wie alt jene Sanskritwörter sind, wie alt dann wiederum die Kenntnis der Null, und beides wissen wir nicht. Was die Wörter betrifft, so erstreckt sich Zweifel über ihre Anzahl wie über ihren Klang, da Bhâskara z. B. in der Lilâvati ganz andere Zahlwörter als die obigen angibt, die sich bis zur 1 mit 17 Nullen erstrecken, und auch andere Formen noch berichtet werden[3]). Noch zweifelhafter stehen wir der

[1]) Pihan, *Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes.* Paris 1860, pag. 59. [2]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, pag. 443, Anmerkung 1. [3]) Colebrooke pag. 4, Note 4 und Albr.

zweiten Frage gegenüber, wann die Null erfunden worden sei. In Indien selbst haben wir keinen Beleg für das Vorhandensein der Null, der höher hinaufreichte als der Sûrya Siddhânta. Fremde Quellen reichen gleichfalls nicht sehr viel höher hinauf, da eine babylonische Null nicht vor dem dritten vorchristlichen Jahrhundert bekannt ist (S. 31) und die Zeit ihres Eindringens in Indien, vorausgesetzt daß wir nicht an selbständige Nacherfindung zu denken hätten, nun gar in tiefstem Dunkel liegt. Eine negative Erscheinung läßt uns an viel älterem Vorkommen überhaupt zweifeln. Wenn die indischen Zahlzeichen es waren, wie wir annehmen, die um das II. S. n. Chr. durch indisch-alexandrinischen Verkehr nach Westen drangen, um dort zu Apices zu werden, so ist undenkbar, daß die Null und mit ihr die Positionsarithmetik nicht auch zugleich herübergekommen wären, falls sie vorhanden waren. Das Kolumnenrechnen mit den Apices setzt alsdann notwendig voraus, daß in Indien selbst die Null erst nach dem II. S. landläufiger Besitz war. Ist aber dieser Schluß richtig, dann ist es auch wahr, daß die der frühesten religiösen Literatur, den sogenannten vedischen Schriften bereits angehörenden hohen Zahlwörter älter als Null und Stellungswert sind und vielleicht wenn nicht zu deren Erfindung so doch zu deren leichter Einbürgerung hinüberleiteten. Gesichert freilich, und damit schließen wir diese Bemerkungen, ist nur das Vorkommen der Null etwa seit 400 n. Chr. Eine äthiopische Inschrift aus dem II. oder III. S. n. Chr., in welcher man die Zahlen 6383 und 11103 erkannt haben will[1]), ist zu undeutlich, um als sicheres Beweismittel für ein so altes Vorkommen der Null gelten zu können.

Wie die Inder rechneten, bevor das Stellensystem ihnen bekannt war, würde in mancher Beziehung sich als von geschichtlicher Bedeutung erweisen können. Leider befinden wir uns hier im dichtesten Dunkel. Nicht die leiseste Andeutung ist zu unserer Kenntnis gelangt, daß bei den Indern vor Zeiten ein Fingerrechnen oder ein instrumentales Rechnen stattgefunden hätte. Sollen wir daraus den Schluß ziehen, daß ähnliche Hilfsmittel dem Inder fremd waren? daß die Inder vielmehr, unterstützt durch die bequemen Zahlennamen, und ihrer Natur nach zu in sich gekehrtem, von der Außenwelt abgewandtem Grübeln geneigt, wesentlich Kopfrechnen übten, welches naturgemäß sich nicht zu verändern brauchte, als die dem gesprochenen Worte abgelauschte Positionsarithmetik erfunden

Weber, Vedische Angaben über Zeittheilung und hohe Zahlen in der Zeitschr. der deutsch. morgenländ. Gesellsch. XV, 132—140.

[1]) *Corpus Inscriptionum Graecarum* III, 5108.

ward? Das ist nicht unmöglich und findet vielleicht Unterstützung in gewissen Verfahren, von welchen wir noch zu reden haben, und welche an das Zahlengedächtnis ziemlich hohe Anforderungen stellen. Es ist aber auch ein Anderes möglich, worauf wir weiter oben bereits einmal hingewiesen haben. Unvollkommeneres kann bis zur Vergessenheit durch Vollkommeneres verdrängt werden, und bei den Indern fand vielleicht diese Verdrängung bezüglich der Rechnungsverfahren statt, so zähe die Überlieferung auch die Aufgaben festgehalten haben mag, deren Ausführung verlangt wurde.

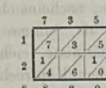
Das Rechnen der Inder seit Einführung des Stellenwertes ist teils aus indischen Werken selbst bekannt, teils und zwar hauptsächlich aus dem Rechenbuche des Maximus Planudes, welches ausdrücklicher Angabe des Verfassers gemäß nach indischen Quellen bearbeitet ist. Wir kommen jetzt auf die Dinge zu reden, an welchen wir bei unserer ersten Besprechung jenes Werkes (S. 511) rascher vorübergehen durften. Wir heben in erster Linie die Ausführung der Subtraktion hervor, welche unter der Voraussetzung, daß eine Stelle des Subtrahenden einen höheren Wert als die entsprechende Stelle des Minuenden besitzt, nach zwei Regeln gelehrt wird. Man borgt entweder die zur Ergänzung des Minuenden notwendigen 10 Einheiten des betreffenden Ranges von der nächsthöheren Stelle, oder man gleicht die Vergrößerung des Minuenden dadurch aus, daß man auch den Subtrahenden, und zwar in der nächsthöheren Stelle um 1 vergrößert. Um also 821 — 348 zu finden sagt man entweder: 8 von 11 läßt 3, 4 von 11 läßt 7, 3 von 7 läßt 4, also Rest 473 oder aber: 8 von 11 läßt 3, 5 von 12 läßt 7, 4 von 8 läßt 4 mit demselben Ergebnis wie vorher.

Die Multiplikation wird in sehr unterschiedenen Verfahren gelehrt. Wir erwähnen nur beiläufig der Zerlegung des Multiplikators in Faktoren, mit welchen nacheinander multipliziert wird, der Auffassung des Multiplikators als Summe aber auch als Differenz von Zahlen, die eine im Verhältnisse leichtere Vervielfältigung zulassen, Methoden also, welche dem Kopfrechnen vorzugsweise dienen. Beim schriftlichen Rechnen ist darauf Rücksicht genommen, daß der Inder vielfach mit einem Griffel auf einer mit Sand bestreuten Tafel rechnete und rechnet, daß also das Weglöschen einer Zahl und ihr Ersetzen durch eine andere nicht dem ganzen Exempel ein unreinliches, häßliches Aussehen verschafft. Die einzelnen Teilprodukte können demzufolge beginnend mit der höchsten Stelle des Multiplikandus, über welche das erste und hauptsächlichste Teilprodukt geschrieben wird, gebildet werden. Jedes hinzutretende folgende Teilprodukt vereinigt sich mit dem schon dastehenden Ergebnis zu einem

neuen, dessen Ziffern an die Stelle der rasch verwischten früheren Ziffern treten, bis schließlich das Produkt über dem Multiplikandus, oder gar statt dessen erscheint, da man auch wohl so weit geht, die Ziffern des Multiplikandus selbst wegzulöschen, sobald jede derselben so weit in Betracht gezogen wurde, als es für das Gesamtergebnis notwendig ist. Eine die nachträgliche Kontrolle nicht zur Unmöglichkeit machende Multiplikation wurde wahrscheinlich gerade so ausgeführt, wie wir noch heute in Europa verfahren. Meistens jedoch wurden dabei alle Zwischenoperationen dem Gedächtnisse überlassen. Das gab dasjenige Verfahren, welches Tatstha (es bleibt stehen) oder Vajrâbhyâsa (blitzbildend d. h. zickzackförmig) genannt wurde[1]). An einem Beispiele mit allgemeinen Buchstabensymbolen erläutert sich dieses Verfahren wie folgt. Es ist

$$\begin{aligned}(a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2 \cdot \cdot) &\times (b_0 + 10 \cdot b_1 + 100 \cdot b_2 + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + 10(a_0 b_1 + a_1 b_0) + 100(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots.\end{aligned}$$

Nach dem so zutage tretenden Gesetze verschaffte man sich jede Rangziffer sogleich vollständig genau und mit Zurechnung dessen, was von früheren Ziffern hinzutreten mußte, also ohne irgend weitere Verbesserung nötig zu machen. Eine andere Methode möchten wir das gerade Gegenteil der eben geschilderten nennen, insofern sie dem Gedächtnisse auch gar nichts außer dem gewöhnlichen Einmaleins zumutet. Die Vorbereitung besteht in der Herstellung einer schachbrettartigen Figur[2]), deren einzelne Felder durch gleichlaufende von rechts oben nach links unten geneigte Diagonalen nochmals in je zwei Dreiecke abgeteilt sind, in welche dann die Einer beziehungsweise Zehner jedes Einzelproduktes zu stehen kommen. Die Additionen erfolgen nach den durch jene Diagonalen gebildeten schräg liegenden Kolumnen. Die Multiplikation $12 \times 735 = 8820$ sieht mithin folgendermaßen aus:



Bei der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation findet die sogenannte Neunerprobe statt, welche in dem zahlentheoretischen Satze begründet ist, daß die Ziffernsumme einer Zahl durch 9 geteilt den gleichen Rest wie die Zahl selbst liefert. Wir sind ihr neben der Siebenerprobe bei einem Griechen des III. S. be-

[1]) Colebrooke pag. 6, Note 1 und pag. 171, Note 5. [2]) Ebenda pag. 7, Note 1.

gegnet (S. 461), wir kommen im 35. und im 37. Kapitel auf beide zurück.

Die Division ist wenigstens in den uns überkommenen Quellen sehr stiefmütterlich behandelt. Bei dem Abziehen der den einzelnen Quotientenziffern entsprechenden Teilprodukte wird vom Wegwischen vorhandener Ziffern, vom Ersetzen derselben durch andere Gebrauch gemacht. Am wichtigsten erscheint die freilich nur negative also nicht unzweifelhaft feststehende durch neue Entdeckungen möglicherweise umzuwerfende Tatsache, daß noch keine Spur eines Verfahrens angetroffen worden ist, welches den komplementären Operationen der Römer zu vergleichen wäre.

Ist schon an und für sich zu vermuten, daß das Rechnen mit ganzen Zahlen historisch weit hinaufreiche, so ist es sagenmäßig, und zwar an sehr großen Zahlen geübt, bis in die Jugendzeit des Reformators der indischen Religion zurückzuverfolgen. Der Lalitavistara, dessen Abfassungszeit freilich durchaus unbekannt ist, beschäftigt sich mit der Jugend des Bodhisattva. Er bewirbt sich bei Daṇḍapâṇi um dessen Tochter Gopâ, deren Hand ihm aber nur unter der Bedingung zugesagt wird, daß er einer Prüfung in den wichtigsten Künsten sich unterziehe. Die Schrift, der Ringkampf, das Bogenschießen, der Sprung, die Schwimmkunst, der Wettlauf, vor allem aber die Rechenkunst liefert den Inhalt dieser von dem Jünglinge mit glänzendem Erfolge bestandenen Prüfung. In der Arithmetik erweist er sich sogar geschickter als der weise Arjuna und gibt Zahlennamen an bis zu tallakshana d. i. eine 1 mit 53 Nullen. Das sei aber nur ein System, und über dieses System gehen noch fünf oder sechs andere hinaus, deren Namen er gleichfalls angibt. Jetzt fragt man ihn, ob er die Zahl der ersten Elementarteilchen berechnen könne, welche aneinandergelegt die Länge eines Yôjana erfüllen, und er berechnet die Zahl mittels folgender Verhältniszahlen: 7 Elementarteilchen geben ein sehr feines Stäubchen, 7 davon ein feines Stäubchen, 7 davon ein vom Winde aufgewirbeltes Stäubchen, 7 davon ein Stäubchen von der Fußspur des Hasen, 7 davon ein Stäubchen von der Fußspur des Widders, 7 davon ein Stäubchen von der Fußspur des Stieres, deren 7 auf einen Mohnsamen gehen; 7 Mohnsamen geben einen Senfsamen, 7 Senfsamen ein Gerstenkorn, 7 Gerstenkörner ein Fingergelenk; 12 von diesen bilden eine Spanne, 2 Spannen eine Elle, 4 Ellen einen Bogen, 1000 Bögen einen Kroça, deren endlich 4 auf einen Yôjana gehen. Letzterer besteht also in unserer modernen Schreibweise aus $7^{10} \cdot 32 \cdot 12000$ Elementarteilchen, d. h. aus 108470495616000 solchen Teilchen. Wenn nun auch die im Lalita-

vistara angegebene Zahl von dieser richtigen abweicht, so hat doch nachgewiesen werden können[1]), daß eine Entstehung der falschen Zahl aus der richtigen wahrscheinlich sei, und es ist auch die stoffliche Verwandtschaft der Aufgabe zur Sandrechnung des Archimed gebührend hervorgehoben worden. Wäre also gesichert, was freilich nicht der Fall ist, daß der Lalitavistara vor 300 v. Chr. entstand, so bekäme damit die (S. 322) angedeutete weitere Annahme Wahrscheinlichkeit, Archimed sei mit seiner Aufgabe als einer schon älteren bekannt geworden, die er dann aber immerhin nicht unwesentlich veränderte.

Nächst den ganzen Zahlen kommen Brüche in den Rechnungen vor. Wir begegnen bei den Indern Brüchen mit beliebigen ganzzahligen Zählern und Nennern. Die Schreibweise besteht darin, daß der Zähler über dem Nenner steht, ohne daß sich ein horizontaler Bruchstrich dazwischen befände. Bei dem Rechnen mit Brüchen kommt es hauptsächlich auf die Einführung eines gemeinsamen Nenners an, bei dessen Auffindung mancherlei Vorteile zur Übung kommen. Natürlich fällt die Notwendigkeit der Zurückführung auf gemeinsamen Nenner bei den Sexagesimalbrüchen weg, welche vorzugsweise den indischen Astronomen gedient haben und ihnen wohl nicht minder als den Griechen unmittelbar aus der babylonischen Heimat zugeflossen sein dürften, so daß ein gräko-indischer Einfluß hier nicht notwendig anzunehmen ist.

29. Kapitel.

Höhere Rechenkunst. Algebra.

Wir haben im vorigen Kapitel uns mit dem Inhalte des gewöhnlichsten, allgemeinst bekannten Rechnens der Inder beschäftigt. Wenn wir zu ihren höheren Kenntnissen uns wenden, haben wir zuerst das (S. 598) gegebene Versprechen einzulösen und von dem Rechenbuche von Bakhshâlî zu reden. Leider ist es in jeder Beziehung Bruchstück. Es fehlen, man weiß nicht wieviele, aber vermutlich zahlreiche Rindentafeln am Anfang wie am Ende, auch einige solche in der Mitte, und die vorhandenen Tafeln sind auch nichts weniger als wohlerhalten, so daß nur Mangelhaftes mitzuteilen ist, ein so glänzendes Zeugnis es auch für den Ordner des Fundes bildet, daß es ihm überhaupt gelang, einen gewissen Zusammenhang herzustellen. Der Name des Verfassers fehlt. Die Aufgaben sind Text-

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, pag. 260—266.

aufgaben. Das Zahlenrechnen ist bei ihrer Behandlung als bekannt vorausgesetzt. Brüche werden so geschrieben, daß der Zähler über dem Nenner ohne trennenden Bruchstrich steht, wie es auch bei anderen, späteren Schriftstellern (s. oben) der Fall blieb. Ganze Zahlen werden als Brüche mit dem Nenner 1 geschrieben. Bei gemischten Zahlen tritt die ganze Zahl als solche über den Bruch, also $\begin{matrix}1\\1\\3\end{matrix} = 1\frac{1}{3}$. Die Zahlen, welche zu einer Operation vereinigt werden, sind meistens durch gerade Linien eingerahmt; dann folgt das unserem Gleichheitszeichen entsprechende Wort *phalam* oder abgekürzt *pha* und dann das Ergebnis.

Beim Addieren steht *yuta*, abgekürzt *yu*, hinter den Summanden

$$\text{z. B. } \boxed{\begin{matrix}5 & 7\\ 1 & 1\end{matrix}\ \text{yu}} \text{ pha } 12 \quad \text{heißt } \frac{5}{1} + \frac{7}{1} = 12.$$

Beim Subtrahieren steht das Subtraktionszeichen hinter dem Subtrahenden, und zwar in Gestalt eines Kreuzes +. Es ist als alte Form von *ka* gedeutet worden, der Abkürzung von *kanita* = vermindert.

Multiplikation wird nicht bezeichnet. Das Nebeneinanderstehen von Zahlen zeigt an, daß ihr Produkt gemeint ist; z. B.

$$\boxed{\begin{matrix}5 & 32\\ 8 & 1\end{matrix}} \text{ pha } 20 \quad \text{heißt } \frac{5}{8} \times \frac{32}{1} = 20.$$

Ferner heißt $\boxed{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 3+ & 3+ & 3+\end{matrix}}$, die Zahl $1 - \frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ solle dreimal als Faktor auftreten und $\frac{8}{27}$ hervorbringen.

Die Division fordert das dem Divisor nachgesetzte Wort *bhâga* = Teil abgekürzt *bhâ*.

Die Einheit heißt immer *rûpa*, die unbekannte Zahl *sunya*, und letztere wird durch einen ziemlich starken Punkt • bezeichnet. Das gehört zum Merkwürdigsten im ganzen Rechenbuche. Sunya bedeutet nämlich wörtlich leer und wird auch für die gleichfalls durch einen Punkt dargestellte Null gesagt. Der der doppelten Anwendung von Wort und Zeichen zugrunde liegende Gedanke ist offenbar richtig in folgendem erkannt worden[1]): Eine Stelle muß ein für allemal leer bleiben, wenn ihre Ausfüllung nicht vorhanden ist; sie muß also auch zunächst leer bleiben, wenn und so lange ihre Ausfüllung noch unbekannt ist, so lange es sich noch um eine Lücke handelt. Wir

[1]) Hoernle im *Indian Antiquary* XVII, pag. 35.

gebrauchen dieses Wort absichtlich um auch hier an die Lückenzeiger der Babylonier zu erinnern.

Die Auflösungen der gestellten Aufgaben erfolgen mitunter durch Zurückführung auf die Einheit. Wir führen ein Beispiel an[1]). B gibt 2 mal so viel als A, C 3 mal so viel als B, D 4 mal so viel als C; sie geben zusammen 132; was gab A? Man setze 1 (rûpa) für die Unbekannte (sunya). Nun ist $A = 1$, $B = 2$, $C = 6$, $D = 24$, ihre Summe $= 33$. Durch diese angenommene Summe 33 wird die wirkliche Summe 132 dividiert; der Quotient 4 läßt erkennen, was A gab. Man könnte die Behandlung auch als durch falschen Ansatz vermittelt bezeichnen, ebenso den falschen Ansatz im Rechenbuche des Ahmes (S. 79) eine Zurückführung auf die Einheit nennen. Ein Einfluß altägyptischer Methoden ist in Indien nicht viel weniger möglich als der babylonische, wenn er auch nicht mit gleicher Sicherheit behauptet werden will.

Arithmetische Reihen und deren Summierung sind bekannt. Ein Reisender[2]) legt am ersten Tage 2 Wegeinheiten zurück, jeden folgenden Tag 3 mehr. Ein zweiter Reisender legt am ersten Tage 3 Wegeinheiten zurück, jeden folgenden Tag 2 mehr. Wann treffen sie zugleich an einem Punkte ein? Seien a_1, d_1 für den ersten, a_2, d_2 für den zweiten Reisenden Anfangsgeschwindigkeit und tägliche Vermehrung derselben, x die Zahl der Tage bis zur Begegnung. Die Forderung der Aufgabe lautet:

$$\begin{aligned} &a_1 + (a_1 + d_1) + \cdots + (a_1 + (x-1)d_1) \\ &\quad = a_2 + (a_2 + d_2) + \cdots + (a_2 + (x-1)d_2) \end{aligned}$$

oder

$$[2a_1 + (x-1)d_1]\frac{x}{2} = [2a_2 + (x-1)d_2]\frac{x}{2},$$

woraus sofort $x = \frac{2(a_1 - a_2)}{d_2 - d_1} + 1$ folgt, und so scheint auch die ohne vorhergegangene Herleitung ausgesprochene Regel des Rechenbuches es vorzuschreiben.

Neben bestimmten Aufgaben sind unbestimmte vorhanden. Wir führen wieder ein Beispiel an[3]). Man sucht eine Zahl, welche um 5 vermehrt oder um 7 vermindert jeweils ein Quadrat gebe. Aus $x + 5 = y^2$ und $x - 7 = z^2$ folgt $12 = y^2 - z^2 = (y - z)(y + z)$. Für $y - z$ und $y + z$ werden nun irgend zwei Faktoren des Produktes 12 gesetzt, z. B. $y - z = 2$ und $y + z = \frac{12}{2} = 6$. Daraus folgt $y = 4$, $z = 2$, $x = 11$, wie es im Rechenbuche unter Andeutung der vollzogenen Rechnung auch herauskommt.

[1]) Hoernle im *Indian Antiquary* XVII, pag. 45. [2]) Ebenda pag. 42.
[3]) Ebenda pag. 44.

Wir wenden uns nun zu dem höheren arithmetischen Wissen derjenigen Schriftsteller, deren Namen und Zeitalter wir genau zu bestimmen imstande waren. Etwas höher steht schon das Erheben einer Zahl zur zweiten und dritten Potenz, sowie die Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln. Den Indern gehörte freilich Potenzerhebung und Wurzelausziehung noch zu den elementaren Operationen, deren sie demzufolge 6 zählten, *shadvidham* die sechs Rechnungsverfahren[1]). Die zugrunde liegenden Formeln waren, wie nicht anders zu erwarten steht, die der Binomialentwicklungen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

Âryabhaṭṭa weiß schon von den zwei-, beziehungsweise dreistelligen Abschnitten zu reden, in welche man die Zahlen zum Zwecke der beiden Wurzelausziehungen zu teilen habe[2]), was uns gestattete zu behaupten (S. 606), er müsse die eigentliche Stellungsarithmetik gekannt haben. Wurzel überhaupt, auch in der Bedeutung der Wurzel einer Pflanze, heißt *mûla* oder *pada*; *varga* bedeutet eine Reihe gleicher Gegenstände, dann ein Quadrat im geometrischen wie im arithmetischen Sinne des Wortes; *ghana* ist ein Körper; und durch Zusammensetzung dieser Ausdrücke gewann man die Namen Quadratwurzel, *varga mûla*, und Kubikwurzel, *ghana mûla*[3]).

Ist nach unserem Dafürhalten die Erfindung der Null eine babylonische, die Vertiefung des Begriffes eine indische, so ist das Rechnen mit der Null schon zu Brahmaguptas Zeit Gegenstand besonderer Vorschriften gewesen[4]). Null geteilt durch Null ist nichts. Zahlen geteilt durch Null geben Brüche mit Null als Nenner. Das sind freilich dürftige Bestimmungen, mit welchen nicht viel zu machen ist. Ganz anders weiß Bhâskara Bescheid, wenn er sagt: Diese Größe, nämlich der Bruch, dessen Nenner Null ist, läßt keine Änderung zu, mag auch vieles hinzugesetzt oder weggenommen werden. Findet doch gleichermaßen in der unendlichen und unveränderlichen Gottheit kein Wechsel statt zur Zeit wo Welten zerstört oder geschaffen werden, wenn auch zahlreiche Ordnungen von Wesen aufgenommen oder hervorgebracht werden[5]). Der Kommentator Krishṇa erläutert den Gegenstand mit den Worten: Je mehr der Divisor vermindert wird, um so mehr wird der Quotient vergrößert. Wird der Divisor aufs äußerste vermindert, so vergrößert sich der Quotient

[1]) Vgl. L. Rodet in der Abhandlung: *L'algèbre d'Al-Khârizmi et les méthodes indienne et grècque. Journal Asiatique.* 7ième série XI, 21 (1878). [2]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 9 und 18 flgg. [3]) Colebrooke pag. 9, Note 3 und pag. 12, Note 1. [4]) Ebenda pag. 339—340. [5]) Ebenda pag. 138.

aufs äußerste. Aber so lange er noch angegeben werden kann, er sei so und so groß, ist er nicht aufs äußerste vergrößert; denn man kann alsdann eine noch größere Zahl angeben. Der Quotient ist also von unbestimmbarer Größe und wird mit Recht unendlich genannt[1]). Es ist auffallend genug, daß bei so verständiger Auffassung Bhâskara an anderer Stelle[2]) das Rechnen mit der Null in haarsträubender Weise mißbraucht und daß auch seine Erklärer nichts dabei zu erinnern wissen. Eine Zahl soll nämlich aus folgenden Angaben gefunden werden: Ihr Quotient durch Null vermehrt um die Zahl selbst und vermindert um 9 wird zum Quadrat erhoben, alsdann die Wurzel dieses Quadrates hinzugefügt und die Summe mit Null vervielfacht, so soll 90 herauskommen. Die Rechnung ist folgende: $\frac{x}{0} + x - 9$ ist immer noch $\frac{x}{0}$, das Quadrat $\frac{x^2}{0}$. Dazu $\frac{x}{0}$ addiert gibt $\frac{x^2}{0} + \frac{x}{0}$ und nach Vervielfältigung mit der Null $x^2 + x = 90$, woraus $x = 9$ folgt!

Wir sind mit diesem Beispiele schon zur Algebra der Inder übergegangen, welche trotz des wenig bestechenden Einganges, den wir gewählt haben, sich uns in überraschender Entfaltung vorstellen wird. Doch bevor wir uns mit ihr beschäftigen, haben wir zu bemerken, daß die Inder Rechnungsaufgaben mitunter auch in nicht algebraischer Weise lösten, und daß für einzelne Regeln besondere Namen üblich waren, teils auf das Verfahren, teils aber auch weit weniger folgerichtig auf den Inhalt der Aufgaben sich beziehend.

Unter den ersteren nennen wir die Umkehrung, *vilôma kriyâ*, bei welcher die Reihenfolge der Operationen, welche vorzunehmen waren um zur gegebenen Zahl zu gelangen, geradezu umgekehrt wird. Âryabhaṭṭa gibt in der 28. Strophe seines mathematischen Kapitels[3]) die Regel in seiner lakonischen Weise: „Multiplikationen werden Divisionen, Divisionen werden Multiplikationen; was Gewinn war wird Verlust, was Verlust Gewinn; Umkehrung.“ Um dieser Kürze die poetisch anmutende Form gegenüberzustellen, welche Bhâskara namentlich in dem Lîlâvati überschriebenen Kapitel anzuwenden liebt, lassen wir ein Beispiel aus diesem Kapitel folgen[4]): „Schönes Mädchen mit den glitzernden Augen sage mir, so du die richtige Methode der Umkehrung verstehst, welches ist die Zahl, die mit 3 vervielfacht, sodann um $\frac{3}{4}$ des Produktes vermehrt, durch 7 geteilt, um $\frac{1}{3}$ des Quotienten vermindert, mit sich selbst vervielfacht, um 52 ver-

[1]) Colebrooke pag. 137, Note 2. [2]) Ebenda pag. 213. [3]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 14 und 37—38. [4]) Colebrooke pag. 21.

mindert, durch Ausziehung der Quadratwurzel, Addition von 8 und Division durch 10 die Zahl 2 hervorbringt." Die Rechnung nimmt hier den Gang

$$(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196, \ \sqrt{196} = 14 \text{ und } 14 \cdot 1\tfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot \tfrac{4}{7} : 3 = 28$$

als Anfangszahl.

Eine zweite Regel ist das Verfahren mit der angenommenen Zahl, *ishta karman*; es ist genau dasselbe Verfahren, welches wir (S. 76 und 79) als Methode des falschen Ansatzes bei den Ägyptern kennen gelernt haben, mit dem einzigen Unterschiede, daß jetzt als bewußte Methode auftritt, was ehedem fast instinktiv geübt wurde. So sollen[1]) 68 erhalten werden, indem man eine Zahl verfünffacht, $\frac{1}{3}$ des Produktes abzieht, den Rest durch 10 dividiert und $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Zahl addiert. Im Rechenbuche von Bakhshâlî wäre versuchsweise 1 für die ursprüngliche Zahl gesetzt worden, Bhâskara wählt versuchsweise 3 und erhält so 15, 10, 1 und

$$1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{17}{4}.$$

Man muß also mit $\frac{17}{4}$ in 68 dividieren und den Quotient 16 mit 3 multiplizieren um die Zahl 48 zu finden. Der Kommentator Gaṇeça bemerkt dazu ganz richtig, daß bei dieser Methode nur Multiplikationen, Divisionen und Additionen oder Subtraktionen von Bruchteilen der Ergebnisse vorkommen dürfen.

Die Regeldetri kommt bei Âryabhaṭṭa vor[2]), dann in mehreren Regeln direkten und indirekten Ansatzes zerspaltet und zur Regel mit mehreren Verhältnissen erweitert bei Brahmagupta, bei Çridhara, bei Bhâskara. Wir geben wieder einige Beispiele. „Eine weiße Ameise bewegt sich in einem Tage um die Länge von 8 Gerstenkörnern weniger $\frac{1}{5}$ eines solchen vorwärts; sie kriecht in 3 Tagen um $\frac{1}{20}$ Finger zurück; in welcher Zeit wird sie unter diesen Verhältnissen ein Yôjana weit vorrücken"[3])? Die Verhältniszahlen sind 8 Gerstenkörner = 1 Finger, 24 Finger = 1 Elle, 4 Ellen = 1 Stab, 8000 Stab = 1 Yôjana und so findet man 98042553 Tage. Die Aufgabe: „Eine 16jährige Sklavin kostet 32 Nishkas, was wird eine 20jährige kosten"[4])? wird nach umgekehrter Proportion behandelt, weil „der Wert lebender Geschöpfe (Sklaven und Vieh) sich nach deren Alter regelt". Das ältere ist das billigere.

[1]) Colebrooke pag. 23. [2]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 14 und 37. [3]) Colebrooke pag. 283, Note 2. [4]) Ebenda pag. 34.

Von den Regeln, deren Name an die behandelten Gegenstände erinnert, nennen wir die Zinsrechnung, bei welcher ebensowohl die Anrechnung von Zinseszinsen[1]) als der Zinsfuß von 5 Prozent monatlich[2]) auffallen mag.

Wir nennen ferner die Mischungsrechnung von Eßwaren[3]), wo um eine gegebene Summe etwa Reis und Bohnen im Verhältnisse von 2 zu 1 Maßteilen gekauft werden will, während der Preis dieser Gegenstände einzeln bekannt ist. Dem Gedanken nach können wir eben dazu auch die Aufgaben rechnen, welche wir Brunnenaufgaben genannt haben (S. 391), die aber bei den Indern keinen ähnlichen Namen führen[4]).

Hierher sind auch die Aufgaben über Reihen zu zählen[5]). Âryabhaṭṭa, Brahmagupta und Bhâskara lehren die Summierung der arithmetischen Reihe sowie auch der von 1 an aufeinander folgenden Quadratzahlen und Kubikzahlen. Mit geometrischen Progressionen hat Bhâskara, hat auch Pṛithûdaka, ein Erklärer des Brahmagupta, sich beschäftigt[6]). Die Ergebnisse gehen in keiner Beziehung über diejenigen hinaus, welche wir bei den Griechen teils genau nachweisen konnten, teils voraussetzen mußten, weil wir sie bei Epaphroditus in offenbar erst nachgeahmter Form wiederfanden, während kein Zweifel obwalten kann, daß schon Epaphroditus mehr als ein Jahrhundert früher als Âryabhaṭṭa gelebt haben muß.

Eine besondere Gruppe von Aufgaben bilden endlich die Versetzungen. Wenn man nicht als älteste Spur derselben bei den Indern die 24 Namen gelten lassen will, welche den Abbildungen des Vischnu je nach der Ordnung, gemäß welcher er in seinen vier Händen die Keule, die Scheibe, die Lotosblume und die Muschel hält, beigelegt wurden[7]), so muß man jedenfalls jene Kapitel der indischen Prosodie hierher rechnen[8]), in welchen die verschiedenen Möglichkeiten gezählt werden, welche bei Versen von gegebener Silbenmenge in bezug auf Länge und Kürze der einzelnen Silben auftreten, eine Aufgabe, welche auf Versetzungen teilweise untereinander gleicher Elemente führt. Formeln der Kombinatorik ohne Beweise zusammengestellt finden sich bei Bhâskara[9]). Dort ist die Zahl der Kombinationen ohne Wiederholung zu bestimmter Klasse angegeben, dort

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 14 und 36—37. [2]) Colebrooke pag. 39. [3]) Ebenda pag. 43. [4]) Ebenda pag. 42 und 282, Note 1. [5]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 12—13 und 32—36. Colebrooke pag. 290 flgg. und 51 flgg. [6]) Ebenda pag. 55 und 291, Note. [7]) Ebenda pag. 124, Note 1. [8]) Albr. Weber, Ueber die Metrik der Inder. Indische Studien VIII, besonders S. 326—328 und 425 flgg. [9]) Colebrooke pag. 49 und 123—127.

die Zahl der Permutationen mit lauter ungleichen oder teilweise gleichen Elementen, dort die Summe, welche entsteht, wenn man alle Permutationsformen als dekadisch geschriebene Zahlen betrachtet und zueinander addiert, lauter Dinge, welche in dieser Vollkommenheit gewiß keinem Griechen jemals bekannt waren, wenn auch, wie wir gezeigt haben, die Meinung aufzugeben ist, als sei den Griechen die Kombinatorik überhaupt durchaus fremd gewesen.

Gehen wir nun zu der eigentlichen Algebra der Inder über, so haben wir erstens von ihren Bezeichnungen und Benennungen, zweitens von ihrer Auflösung bestimmter Gleichungen, drittens von ihren zahlentheoretischen Kenntnissen zu reden.

In den Bezeichnungen und Benennungen ist bei den Indern selbst ein Fortschritt zu erkennen, welcher sie von unvollkommenen Anfängen zu einer Höhe führt, welche die Entwicklung, zu welcher Diophant diese Dinge brachte, ziemlich tief unter sich läßt. Âryabhaṭṭa[1]) nennt die unbekannte Größe einer Aufgabe: Kügelchen, *gulikâ*, die bekannte Größe: mit Zeichen versehene Münzen, *rûpakâ*. Das letztere Wort ist ohne die Anhängsilbe *kâ*, welche im Sanskrit sehr häufig wiederkehrt, als *rûpa* geblieben, das gleiche Wort, welches im Rechenbuche von Bakhshâlî die Einheit bedeutete; für die Unbekannte tritt bei Brahmagupta schon das allgemeinere Wort: so viel als (*quantum tantum*), *yâvattâvat* ein. Einen Vergleich mit dem ägyptischen *hau*, dem Diophantischen ἀριθμός unterlassen wir, als zu unbestimmter Natur. Die Inder besaßen für beide Gattungen von Größen, für die bekannte wie für die unbekannte, Zeichen, die in den Anfangssilben jener Wörter *rû* und *yâ* bestanden, mithin erst eingeführt worden sein dürften, als *gulikâ* zugunsten von *yâvattâvat* abgängig geworden war. Sollten derartige Größen addiert werden, so wurden die zu vereinigenden Ausdrücke ohne weiteres einander nachgesetzt, wie es von Diophant auch geschah. Bei der Subtraktion ist ein Unterschied zwischen der griechischen und der indischen Bezeichnung, welcher zugunsten der letzteren ausschlagen möchte. Wir wissen, daß Diophant das Subtraktionszeichen ⋔ dem Abzuziehenden vorsetzte, daß bei ihm nur von Differenzen, von abzüglichen aber keineswegs von negativen Größen die Rede war (S. 471). Anders die Inder. Bei der Subtraktion wird über den Zahlenkoeffizient des Abzuziehenden, seien es *rû* oder *yâ* um die es sich handelt, ein Pünktchen gemacht. Das ist ein so wesentlicher Fortschritt gegen das Kreuz der Subtraktion, von welchem (S. 614) die Rede war, daß er nicht genug hervorgehoben werden kann. Das jüngere

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 15 und 39—40.

Pünktchen ist kein Zeichen der Operation, sondern der Zahlenart. Es verwandelt die Subtraktion in eine Addition anders gearteter, entgegengesetzter Größen. Es sind wirklich positive und negative Zahlen, mit denen man operiert. Die positiven Zahlen heißen *dhana* oder *sva*, die negativen *ṛiṇa* oder *kshaya*, erstere mit der Bedeutung Vermögen, letztere Schulden bedeutend[1]). Ja die Erläuterung des Gegensatzes positiver und negativer Zahlen durch den Gegensatz der Richtung einer Strecke ist dem Inder nicht fremd[2]). Diophant blieb bei der Bezeichnung der ersten Potenz der Unbekannten nicht stehen. Ebensowenig tut es der Inder. Allein auch hier ist eine sehr wesentliche Verschiedenheit zwischen beiden Bezeichnungen. Diophant addiert (S. 470) seine Exponenten; die Inder multiplizieren sie, wenn nicht das Wort *ghaṭâ* besonders anzeigt, daß eine Addition vorgenommen werden soll. Die zweite Potenz wird durch *varga* abgekürzt in *va*, die dritte durch *ghana* abgekürzt zu *gha* bezeichnet, Wörter, die uns oben bei der Wurzelausziehung schon bekannt geworden sind. Dann heißt der angedeuteten Regel gemäß *va va*, *va gha*, *va va va*, *gha gha* die $2 \cdot 2 = 4$te, $2 \cdot 3 = 6$te. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$te, $3 \cdot 3 = 9$te Potenz, und die zwischenliegenden 5. und 7. Potenz der Unbekannten führen die Namen und Zeichen *va gha ghata*, *va va gha ghata*. Über diese Potenzbezeichnung hinaus hat sich aber der Inder auch noch zu einer Bezeichnung der irrationalen Quadratwurzel einer Zahl mit Hilfe des Wortes *karaṇa*, geschrieben *ka*, emporzuschwingen gewußt. Die Bedeutung dieses Wortes, welches mit dem Zeitwort machen in Verbindung steht, deutet allerdings darauf hin, daß hier das indische Zeichen einem griechischen Begriffe nachgebildet sei, daß man die Länge sucht, welche eine gewisse Oberfläche als ihr Quadrat macht; denn wenn der Grieche hier auch können zu sagen liebt, so steht dem doch der Ausdruck ὁ ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ d. h. das von der Strecke $\overline{\alpha\beta}$ gemachte Quadrat zur Seite[3]). Der Inder hat ferner ein Zeichen der Multiplikation in dem den Faktoren nachzusetzenden Worte *bhâvita*, das Hervorgebrachte, geschrieben *bhâ*. Dieselbe Silbe war (S. 614), als Anfang eines anderen Wortes, Divisionszeichen. Er hat endlich eine unterscheidende Bezeichnung für mehrere Unbekannte, indem nur die erste, häufig alleinige Unbekannte *yâvattâvat* heißt, während die übrigen nach Farben unterschieden werden[4]): die schwarze *kâlaka*, die blaue *nîlaka*, die gelbe *pîtaka*, die rote *lohitaka*, die grüne *haritaka* regelmäßig durch die Anfangssilbe bezeichnet, eine Bezeichnungs-

[1]) Colebrooke pag. 131, Note 1. [2]) Ebenda pag. 71, § 166. [3]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 31. [4]) Colebrooke pag. 139 und 348 flgg.

weise, deren ganz allgemeine Übung zu dem Rückschlusse geführt hat, es müßten auch die indischen Zahlzeichen ursprünglich Anfangssilben der betreffenden Zahlwörter gewesen sein. Als Beispiel der eben erwähnten mehrere Unbekannte umfassenden Schreibweise mag *yâ kâ bhâ* gelten d. h. die Unbekannte mit der Schwarzen in Vervielfachung oder x mal y. Die Gleichsetzung zweier Zahlen vollzog Diophant durch das Wort ἴσοι, mitunter zu ι abgekürzt. Auch dem Inder fehlt nicht ein Wort dieser Bedeutung: in Gleichgewicht, *tulyau*, heißen die beiden Glieder, *pakshau*[1]), aber sie bedürfen dessen beim Schreiben nicht. Sie setzen die einander gleichen Ausdrücke unmittelbar untereinander ohne jedes vermittelnde Wort, allerdings auch ohne Gleichheitszeichen. Sie scheuen es dabei nicht eine negative Zahl allein die eine Seite einer Gleichung bilden zu sehen, wenn sie auch freilich rein sinnlich genommen dieselbe selten allein sehen, indem meistens die nicht vorkommenden Glieder mit dem Koeffizienten 0 behaftet angeschrieben werden. Soll also bei Brahmagupta aus $10x - 8 = x^2 + 1$ die Folgerung $-9 = x^2 - 10x$ gezogen werden[2]), so schreibt er $0x^2 + 10x - 8 = 1x^2 + 0x + 1$ und dann erst $-9 = x^2 - 10x$ oder in indischer Weise

$$\begin{array}{lll} \textit{yâ va } 0 \;\; \textit{yâ } 10 \;\; \textit{rû } \dot{8} & \text{und dann} & \textit{rû } \dot{9} \\ \textit{yâ va } 1 \;\; \textit{yâ } 0 \;\; \textit{rû } 1 & & \textit{yâ va } 1 \;\; \textit{yâ } \dot{10}. \end{array}$$

Negative Wurzeln einer Gleichung waren, wenn auch nicht streng verpönt, doch auch nicht gestattet; man darf vielleicht sagen, sie wurden mit Bewußtsein ihres Vorkommens beseitigt: „Absolute negative Zahlen werden von den Leuten nicht gebilligt“[3]).

Damit sind wir aber schon bei der Auflösung bestimmter Gleichungen angelangt. Die Inder behandelten solche von verschiedenen Graden. Eine Grundoperation ging immer voraus. Nachdem nämlich der Ansatz vollzogen war, zog man entsprechende Teile voneinander ab; Vielfache des Quadrats der Unbekannten, Vielfache der Unbekannten, Bekanntes wurden bei der dafür ungemein bequemen indischen Anordnung voneinander subtrahiert, und man nannte dieses *sâma çôdhanam* d. h. Abziehung des Ähnlichen. Mit Fug und Recht hat man diesen Ausdruck neben das diophantische „Gleichartiges von Gleichartigem“ (S. 472) gestellt[4]). Es ist gewiß nicht zu weit gegangen, wenn man behauptet von den Wörtern *sâma çôdhanam* und ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια sei das eine die Übersetzung des andern, und warum wir geneigt sind Diophant als selbständigen

[1]) L. Rodet, *L'algèbre d'Al-Khârizmi* pag. 17. [2]) Colebrooke pag. 346 bis 347, § 49. [3]) Ebenda pag. 217, § 140. [4]) L. Rodet, *L'algèbre d'Al-Khârizmi* pag. 49.

Schriftsteller zu betrachten, haben wir früher (S. 465) erörtert. Hier wäre somit schon eine von den verheißenen Spuren griechischer Algebra auf indischem Boden, hier eine Spur indischen Fortschrittes in Gestalt ihrer Anordnung. Âryabhaṭṭa hat in seiner 31. Strophe ein merkwürdiges Beispiel aufgestellt[1]): „Teile bei entgegengesetzter Bewegung die Entfernung durch die Summe der Geschwindigkeiten, bei übereinstimmender Bewegung teile die Entfernung durch die Differenz der Geschwindigkeiten; die zwei Quotienten sind die Begegnungszeiten der beiden in der Vergangenheit oder Zukunft“, das ist die allgemein gestellte Aufgabe der beiden Kuriere, wie richtig erkannt worden ist. Hat aber Âryabhaṭṭa diese Aufgabe gleichungsweise gelöst in der Weise, wie wir soeben zu erörtern angefangen haben, oder hat er nur eine von auswärts erhaltene Regel wiederholt? Eine bestimmte Antwort läßt sich noch nicht geben. Jedenfalls ist bei Brahmagupta die Gleichung als solche vorhanden. Viermal der zwölfte Teil einer um 1 vermehrten Zahl wird um 8 vergrößert, um die um 1 vermehrte Zahl zu finden[2]). Die Zahl *yâ* wird um 1 vermehrt zu *yâ* 1 *rû* 1. Dann teilt man durch 12 und vervielfacht mit 4 zu $\frac{\textit{yâ } 1 \; \textit{rû } 1}{3}$, vermehrt um 8 zu $\frac{\textit{yâ } 1 \; \textit{rû } 25}{3}$. Das soll aber dem *yâ* 1 *rû* 1 gleich sein, mithin ist:

$$\begin{array}{l} \textit{yâ } 1 \;\; \textit{rû } 25 \\ \textit{yâ } 3 \;\; \textit{rû } 3. \end{array}$$

Der Ansatz ist soweit vollendet und nun heißt es weiter: Der Unterschied der Unbekannten ist *yâ* 2; hierdurch der Unterschied der bekannten Zahlen nämlich 22 geteilt gibt die Zahl 11. Bhâskara hat mit Vorliebe Textaufgaben behandelt, deren Form dem poetischen Gewande, in welchem das Ganze erscheint, sich trefflich anpaßt. Wie er das Kapitel der Rechenkunst Lilâvati, die Reizende, genannt hat, und von den glitzernden Augen der Schönen (S. 617) im Zusammenhang mit dem Umkehrungsverfahren zu reden wußte, so stellt er auch folgende auf eine Gleichung ersten Grades führende Frage[3]): „Von einem Schwarm Bienen läßt $\frac{1}{5}$ sich auf einer Kadambablüte, $\frac{1}{3}$ auf der Silindhablume nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten eines Kuṭaja, eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin und herschwebte gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandamus. Sage

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 15 und 41—42. [2]) Colebrooke pag. 344, § 45. [3]) Ebenda pag. 24—25, § 54.

mir, reizendes Weib, die Anzahl der Bienen.“ Er ahmt übrigens selbst nur Çridhara darin nach, auf welchen folgende Aufgabe ihrer wesentlichen Form nach zurückzuführen ist[1]): „Bei verliebtem Ringen brach eine Perlenschnur; $\frac{1}{6}$ der Perlen fiel zu Boden, $\frac{1}{5}$ blieb auf dem Lager liegen, $\frac{1}{3}$ rettete die Dirne, $\frac{1}{10}$ nahm der Buhle an sich, 6 Perlen blieben aufgereiht; sage, wie viele Perlen hat die Schnur enthalten?“

Bisher trat nur eine Unbekannte auf. Eine Aufgabe, welche mehrere Unbekannte bestimmt wissen will, ist diejenige, welche Âryabhaṭṭa in seiner 29. Strophe uns erhalten hat[2]): „Die Summe einer gewissen Anzahl von Größen je um eine derselben vermindert, alle vereinigt, man teilt durch die um 1 verringerte Anzahl der Größen, man hat die Summe.“ Wir fürchten keinen Widerspruch, wenn wir in dieser Aufgabe und in dem Epantheme des Thymaridas (S. 158) so nahe Verwandte erkennen, daß an einen Zufall nicht zu denken ist. Vollkommen ist zwar die Übereinstimmung nicht. Nennen wir s wieder die Summe der n Unbekannten $x_1, x_2, \cdots x_n$ und die Differenzen $s - x_1 = d_1$, $s - x_2 = d_2$, $\cdots s - x_n = d_n$, so behauptet Âryabhaṭṭa, es sei $s = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}{n - 1}$ und fügt hinzu, daß durch einzigweise Subtraktion von $d_1, d_2, \cdots d_n$ von dem so gefundenen s die Unbekannten $x_1, x_2, \cdots x_n$ erhalten werden können; aber nur um so wahrscheinlicher wird dadurch, was auch durch die selbst nur mangelhaft bekannte, jedenfalls aber sehr frühe (S. 158) anzusetzende Lebenszeit des Thymaridas an die Hand gegeben wird, daß dieser Pythagoräer der Erfinder war, als welchen Jamblichus ihn ausdrücklich nannte, daß Âryabhaṭṭa in echt indischer Weise, genau so wie Albîrûnî es uns schildert (S. 597), das Erlernte unkenntlich zu machen wußte. Ist aber diese Folgerung gerechtfertigt, so ist eine neue Spur griechischer Algebra in Indien aufgedeckt, und damit immer größere Sicherheit gewonnen, daß wirklich auf diesem Gebiete die Inder von den Griechen lernten, keineswegs aber umgekehrt, und daß die Inder alsdann nur, wie wir wiederholt erklären, in dem ihrer Geistesrichtung besonders zusagenden Gedankenkreise überraschende Fortschritte auf eigenen Füßen machten.

So glauben wir auch deutlich die griechische Auflösung der quadratischen Gleichung, wie Heron (S. 405), wie Diophant

---

1) Colebrooke pag. 25, Note 5. 2) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 14—15 und 38—39.

(S. 474) sie übte, in der mit ihr nicht bloß zufällig übereinstimmenden Regel des Brahmagupta zu erkennen[1]): „Zu der mit dem Koeffizienten des Quadrates vervielfachten absoluten Zahl füge das Quadrat des halben Koeffizienten der Unbekannten. Die Quadratwurzel dieser Summe weniger dem halben Koeffizienten der Unbekannten geteilt durch den Koeffizienten des Quadrates ist die Unbekannte.“ D. h. aus

$$ax^2 + bx = c \text{ folgt } x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}.$$

Bei Âryabhaṭṭa ist die gleiche Auflösungsmethode wenigstens vorausgesetzt[2]), da die in seiner 20. Strophe gelehrte Auffindung der Gliederzahl einer arithmetischen Reihe aus Summe, Differenz und Anfangsglied die vorhergehende Möglichkeit eine unreine quadratische Gleichung auflösen zu können in sich schließt.

Çridhara hat Brahmaguptas Regel verbessert[3]), indem er die gegebene Gleichung statt mit a sogleich mit $4a$ vervielfachen läßt, wodurch die Möglichkeit Brüche unter dem Wurzelzeichen zu erhalten verschwindet; aus $ax^2 + bx = c$ erhält er nämlich

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac \text{ oder } (2ax)^2 + 2b \cdot (2ax) = 4ac,$$

also auch $(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$ und $x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$. Die Ergänzung des quadratischen Teiles, welche in Wirklichkeit dahin führt statt eines quadratischen Gliedes und eines Gliedes mit der ersten Potenz der Unbekannten nur das Quadrat eines Binoms ersten Grades als unbekannt aber bestimmungsfähig zu erhalten, wird seit Brahmagupta „Wegschaffung des mittleren Gliedes“, *madhyama haranam*, genannt[4]).

Der wichtigste Fortschritt, welchen die Lehre von den unreinen quadratischen Gleichungen schon bei Brahmagupta vollzogen hat, besteht aber darin, daß die drei verschiedenen Formen (S. 473)

$$ax^2 + bx = c, \quad bx + c = ax^2, \quad ax^2 + c = bx$$

verschwunden sind, wie es vermöge der Gewohnheit mit negativen Zahlen zu rechnen gestattet war.

Nun ist Bhâskara noch wesentlich über Brahmagupta hinausgegangen. Er kennt die bei den Quadratwurzeln sich ergebenden Doppelsinnigkeiten und Unmöglichkeiten. Er faßt sie in die Regel[5]): „Das Quadrat einer positiven wie einer negativen Zahl ist

---

1) Colebrooke pag. 346, § 48. 2) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 13 und 33. 3) L. Rodet, *L'algèbre d'Al-Khârizmi* pag. 71. 4) Ebenda pag. 76. 5) Colebrooke pag. 135.

positiv, und die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl ist zwiefach, positiv und negativ. Es gibt keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl, denn diese ist kein Quadrat.“ Dementsprechend kennt er die paarweise auftretenden Wurzeln einer quadratischen Gleichung, gibt sie aber aus dem oben angegebenen Grund, daß „absolute negative Zahlen von den Leuten nicht gebilligt werden“, nur dann an, wenn beide Wurzelwerte positiv ausfallen und keinen Durchgang durch ein Negatives voraussetzen; er folge dabei Padmanâbha[1]). Folgende Beispiele mögen die Meinung der einschränkenden Klausel erläutern[2]). „Der 8. Teil einer Herde Affen ins Quadrat erhoben hüpfte in einem Haine herum und erfreute sich an dem Spiele, die 12 übrigen sah man auf einem Hügel miteinander schwatzen. Wie stark war die Herde?“ Hier gibt es zwei Auflösungen: 48 und 16. „Das Quadrat des um 3 verminderten 5. Teiles einer Herde Affen war in einer Grotte verborgen, 1 Affe war sichtbar, der auf einen Baum geklettert war. Wieviele waren es im ganzen?“ Bhâskara sagt 50 oder 5, aber der zweite Wurzelwert dürfe nicht genommen werden. Ein Kommentar erklärt uns, wie das gemeint sei. Man könne den 5. Teil von 5, oder 1, nicht um 3 vermindern, ohne daß, wenn auch nur vorübergehenderweise, die absolute negative Zahl -2 auftrete.

Bhâskara hat auch an anderer Stelle[3]) gezeigt, wie mit Hilfe der Formel

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Quadratwurzeln aus Summen rationaler und irrationaler Zahlen gezogen werden können, und hat die Wurzelausziehung auf noch verwickelter zusammengesetzte Größen wie

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

ausgedehnt. Er erklärt diese Darstellung ausdrücklich für seine Erfindung, welche aber einer sehr behutsamen Benutzung bedürfe, widrigenfalls man zu falschen Ergebnissen geführt werde; die Erzielung eines solchen beweise alsdann, daß eine Wurzelausziehung eben nicht gelinge, und alsdann müsse man sich damit begnügen statt der einzelnen vorkommenden Irrationalitäten deren Näherungswerte in Rechnung zu haben.

Das Rechnen mit Irrationalgrößen führt Bhâskara ferner zu der Aufgabe, Brüche rational zu machen[4]). Man soll Zähler und Nenner

---

[1]) Colebrooke pag. 218, § 142. [2]) Ebenda pag. 215—217. [3]) Ebenda pag. 149—155. Die Bemerkung über falsche Ergebnisse pag. 155, § 51. [4]) Ebenda pag. 147, § 34—35.

mit einem dem Nenner ähnlichen Ausdrucke vervielfachen, bei welchem nur das Vorzeichen einer Irrationalzahl entgegengesetzt gewählt wird, und soll dieses Verfahren so lange fortsetzen, bis man wirklich imstande sei die noch geforderte Division zu vollziehen.

Endlich ist bei Bhâskara noch ein letzter großer Fortschritt vorhanden. Er hat auch Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade in Angriff genommen[1]). So z. B. $x^3 + 12x = 6x^2 + 35$. Er zieht $6x^2 + 8$ auf beiden Seiten ab und gewinnt so

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27\,,$$

wo beiderseits vollständige dritte Potenzen erscheinen, nämlich $(x-2)^3 = 3^3$. Die Kubikwurzelausziehung gibt ihm $x - 2 = 3$, woraus endlich $x = 5$ folgt. Ähnlich behandelt er

$$x^4 - 2(x^2 + 200x) = 9999\,.$$

Er addiert auf beiden Seiten $4x^2 + 400x + 1$ und gewinnt dadurch nach vollzogener Umformung $(x^2+1)^2 = (2x+100)^2$. Quadratwurzelausziehung führt zu der selbst noch quadratischen Gleichung $x^2 + 1 = 2x + 100$, aus welcher $x = 11$ folgt. „In diesem Falle bedarf es des Scharfsinnes“ sagt Bhâskara, und man kann ihm diese kleine Ruhmredigkeit nicht verargen. Es ist nicht unmöglich, daß Diophant, welcher gleichfalls eine kubische Aufgabe gelöst hat (S. 478), den Anstoß auch zu diesen Untersuchungen gab, aber wieder ist ein ungeheures Mehr auf seiten Bhâskaras zu verzeichnen. Er hat einen Kunstgriff erdacht, den er uns ausdrücklich kennen lehrt, und der richtig gehandhabt zu einer Methode der Gleichungsauflösung werden konnte.

So ist wohl nach beiden Seiten hin gerechtfertigt, was wir über die Algebra bestimmter Gleichungen angekündigt haben: daß manches davon griechischer Herkunft zu sein scheint, daß die Inder mit dem ihnen fremd Zugetragenen staunenswerte eigene Leistungen zu verbinden wußten.

Noch bedeutender ist es, was die Inder in der Zahlentheorie leisteten, in welcher sie uns zum ersten Male Gelegenheit geben werden, wirkliche allgemeine Methoden kennen zu lernen. Zwei Bemerkungen müssen wir vorausschicken. In den indischen Schriften, welche uns bekannt sind, kommen die altpythagoräischen Zahlenbetrachtungen nicht vor. Den vermutlich späteren Begriff vollkommener oder befreundeter Zahlen aufzustellen, ist, soviel wir wissen, keinem Inder in den Sinn gekommen. Auch figurierte Zahlen kommen

---

[1]) Colebrooke pag. 214—215.

als solche kaum vor, jedenfalls nicht in der Ausdehnung, in welcher Diophant sich mit ihnen beschäftigte. Nur die Summierung

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{6}$$

als Anzahl der Kugeln in einem dreieckigen Haufen ist seit Âryabhaṭṭas 21. Strophe[1]) bekannt, aber von Fünfeckszahlen oder gar $m$eckszahlen ist nirgend die Rede. Einen Griechen und Indern gemeinschaftlichen Gegenstand der Untersuchung bildet nur die Auffindung rationaler rechtwinkliger Dreiecke[2]). Das ist das eine, was wir uns merken wollten. Zweitens aber ist ein noch viel grundsätzlicherer Widerstreit zwischen indischer und griechischer Zahlentheorie vorhanden. Für die unbestimmte Analytik ist nämlich die Bedingung ganzzahliger Auflösungen maßgebend, eine Forderung, welche Diophant (S. 478) niemals stellt und nur ausnahmsweise erfüllt. Das sind so wesentliche Gegensätze, daß wir auf diesem Gebiete fast nur selbständige Leistungen im Westen wie im Osten zu erwarten haben.

Gehen wir jetzt darauf aus, einen Überblick über die indischen Leistungen in der unbestimmten Analytik zu gewinnen, und beginnen wir mit den unbestimmten Gleichungen ersten Grades. Schon Âryabhaṭṭa hat sich in der 32. und 33. Strophe seines mathematischen Kapitels mit solchen Gleichungen beschäftigt[3]) und dabei eine Methode in Anwendung gebracht, der Brahmagupta wahrscheinlich den Namen Zerstäubung, *kuṭṭaka*, beigelegt hat, unter welchem sie sich auch bei Bhâskara auseinandergesetzt findet[4]). Bhâskara beginnt ihre Darstellung mit der Aufgabe, das gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden. Diese löst er, wie sie eben gelöst werden muß, wie Euklid verfuhr, wie auch Bhâskara sehr wohl selbständig erdacht haben oder von selbständigen indischen Vormännern übernommen haben kann. Er vollzieht fortlaufende Divisionen des früheren Divisors durch den bei Teilung mittels desselben verbliebenen Rest, und der letzte dieser Reste ist der gesuchte größte gemeinsame Divisor der beiden gegebenen Zahlen. Durch ihn verkleinert werden sie feste Zahlen, *dṛidha*, oder teilerfremd, ein Begriff, den Brahmagupta durch die Namen *niccheda* oder *nirapavarta* dem deutschen Worte entsprechender bezeichnet[5]). Soll nun eine Zerstäubungsaufgabe gelöst werden, so muß vor allen Dingen Dividend, Divisor

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 13 und 35. [2]) Colebrooke pag. 306, § 35 und pag. 340, § 38. [3]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 15 und 42—46. [4]) Colebrooke pag. 112 flgg. [5]) Ebenda pag. 330, Note 3.

und Additive durch dieselbe Zahl verkleinert werden können. „Mißt die Zahl, welche für Dividend und Divisor das Maß ist, die Additive nicht, so ist die Aufgabe schlecht gestellt." Die Meinung dieses Satzes, von welchem übrigens so wenig wie von der eigentlichen Methode ein Beweis gegeben ist, besteht darin, daß wenn $ax + b = cy$ in ganzen Zahlen lösbar sein soll, jeder Teiler des Dividenden a und des Divisors c auch in der Additiven b enthalten sein muß, daß es also möglich sein muß, durch Verkleinerung der vorgelegten Gleichung mittels des größten gemeinsamen Teilers von a und c diese beiden Koeffizienten teilerfremd zu machen. Denkt man sich diese Vorbereitung getroffen, so muß bei der nunmehr erfolgenden Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers der neuen a und c nach dem euklidischen Kettenbruchverfahren schließlich der Rest 1 auftreten. Die einzelnen Quotienten der aufeinanderfolgenden Divisionen seien $q_1, q_2, \ldots q_n$, die entsprechenden Reste $r_1, r_2, \ldots r_n$, wo also $r_n = 1$ sein muß. Man schreibt die Quotienten in ihrer Reihenfolge in eine Zeile und fügt am Schlusse noch die Additive b und eine Null bei, so daß diese letztere eingeschlossen $n + 2$ Zahlengrößen in einer Zeile nebeneinander stehen. Nun vervielfacht man das drittletzte Glied mit dem vorletzten und addiert das letzte, streicht das letzte ganz und ersetzt das drittletzte durch die eben gefundene Zahl. Man hat mithin jetzt eine Zeile von $n + 1$ Zahlengrößen vor sich, an welcher man das eben erläuterte Verfahren, welches die Anzahl wieder um eins verringert, wiederholt. Das setzt man so fort bis schließlich nur zwei Zahlen in der Zeile sich befinden, und nun hat man zwei Fälle zu unterscheiden. War n gerad, so ist von beiden Zahlen die erste y, die zweite x. War n ungerad, so muß man die erhaltenen Werte von a und von c abzählen, um die richtigen y und x zu finden. Eine Verminderung des gefundenen y um den Betrag eines Vielfachen von a, während von x das Gleichvielfache von c abgezogen wird, ist in beiden Fällen gestattet.

Ein Beispiel, welches zu einem geraden n führt, ist[1])

$$100x + 90 = 63y.$$

Die Division $100:63$ gibt den Quotienten $q_1 = 1$ und den Rest $r_1 = 37$. Die folgenden Quotienten und Reste sind $q_2 = 1$, $r_2 = 26$; $q_3 = 1$, $r_3 = 11$; $q_4 = 2$, $r_4 = 4$; $q_5 = 2$, $r_5 = 3$; $q_6 = 1$, $r_6 = 1$, mithin $n = 6$. Die zu bildenden Zahlenreihen sind:

[1]) Colebrooke pag. 115, § 255.

1, 1, 1, 2, 2, 1, 90, 0.		$1 \cdot 90 + 0 = 90$
1, 1, 1, 2, 2, 90, 90.		$2 \cdot 90 + 90 = 270$
1, 1, 1, 2, 270, 90.		$2 \cdot 270 + 90 = 630$
1, 1, 1, 630, 270.		$1 \cdot 630 + 270 = 900$
1, 1, 900, 630.		$1 \cdot 900 + 630 = 1530$
1, 1530, 900.		$1 \cdot 1530 + 900 = 2430$
2430, 1530.		$x = 1530 \quad y = 2430.$

Nun zieht man $24 \cdot 100$ von y, $24 \cdot 63$ von x ab und erhält die kleineren Werte $x = 18$, $y = 30$.

Zu einem ungeraden n führt[1]): $60x + 16 = 13y$. Hier ist nämlich $q_1 = 4$, $r_1 = 8$; $q_2 = 1$, $r_2 = 5$; $q_3 = 1$, $r_3 = 3$; $q_4 = 1$, $r_4 = 2$; $q_5 = 1$, $r_5 = 1$ und $n = 5$. Die Rechnung stellt sich daher folgendermaßen:

4, 1, 1, 1, 1, 16, 0.		$1 \cdot 16 + 0 = 16$
4, 1, 1, 1, 16, 16.		$1 \cdot 16 + 16 = 32$
4, 1, 1, 32, 16.		$1 \cdot 32 + 16 = 48$
4, 1, 48, 32.		$1 \cdot 48 + 32 = 80$
4, 80, 48.		$4 \cdot 80 + 48 = 368$
368, 80.	$13 - 80 = -67 = x$	$60 - 368 = -308 = y$

Diesmal addiert man $6 \cdot 60$ zu y, $6 \cdot 13$ zu x und erhält die Werte $x = 11$, $y = 52$.

Die Zerstäubungsmethode stimmt, wie vielfach bemerkt worden ist, in ihrem ganzen Gange mit der Methode der Auflösung unbestimmter Gleichungen ersten Grades durch Kettenbrüche überein, wie sie in jedem Lehrbuche der Zahlentheorie erörtert ist; wir können den Nachweis ihrer Richtigkeit füglich übergehen. Wir übergehen auch die unbestimmten Gleichungen ersten Grades mit mehr als zwei Unbekannten, welche Âryabhaṭṭa wie Brahmagupta schon kannten[2]) und in wesentlich der gleichen Art behandelten, wie die Zerstäubungsmethode es für zwei Unbekannte vorschreibt.

Wir gehen zu den unbestimmten Gleichungen zweiten Grades über. Brahmagupta behandelt hier zuerst solche Gleichungen, welche nur das Produkt der beiden Unbekannten unter sich als quadratisches Glied enthalten und dann erst solche, in welchen die Quadrate der Unbekannten vorkommen[3]). Bhâskara schlägt den ent-

[1]) Colebrooke pag. 116, § 257. [2]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 15 und 43. Colebrooke pag. 348—360: *Equation of several colours.* [3]) Ebenda pag. 361—362: *Equation involving a factum* und 363—372: *Square affected by coefficient.*

gegengesetzten Weg ein, indem er zuerst mit Aufgaben von der Form $ax^2 + b = cy^2$, dann erst mit solchen wie $xy = ax + by + c$ sich beschäftigt[1]). Bei der Auflösung dieser letzteren bedient er sich entweder des Verfahrens die eine Unbekannte, etwa y, ganz willkürlich anzunehmen und alsdann $x = \frac{by + c}{a - y}$ zu setzen, wobei freilich ganzzahlige Lösungen nur infolge günstigen Zufalles auftreten, oder aber er geht von einer auffälligen Verbindung geometrischer und algebraischer Anschauungen aus, die zugleich Methode und Beweis derselben enthalten (Fig. 81).

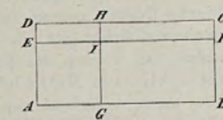


Fig. 81.

In dem Rechtecke $ABCD$ sei die Basis $AB = x$, die Höhe $BC = y$, so ist die Fläche xy. Ist nun $DE = a$, $AG = b$, so ist $CDEF = ax$, $AGHD = by$ und $ax + by$ = Gnomon $CFIGADC + DEIH$, oder da $DEIH = ab$, so ist Gnomon $CFIGADC = ax + by - ab$. Zieht man diesen Gnomon von dem ursprünglichen Rechtecke $ABCD = xy$ ab, so bleibt das Rechteck $BFIG = xy - ax - by + ab$, welches als aus den Seiten $x - b$ und $y - a$ bestehend auch die Fläche $(x - b) \cdot (y - a)$ besitzt. Nach dem Wortlaute der Aufgabe ist aber $xy - ax - by + ab = c + ab$, mithin ist auch $(x - b) \cdot (y - a) = c + ab$. Man hat also nur nötig $c + ab$ in zwei Faktoren, etwa m und $\frac{c + ab}{m}$ zu zerlegen und den einen mit $x - b$, den anderen mit $y - a$ zu identifizieren. So entsteht entweder $x - b = \frac{c + ab}{m}$, $y - a = m$ oder $y - a = \frac{c + ab}{m}$, $x - b = m$; beziehungsweise entweder $x = \frac{c + b(a + m)}{m}$, $y = a + m$ oder

$$x = b + m, \quad y = \frac{c + a(b + m)}{m}$$

und die Lösungen werden ganzzahlig, wenn m ein ganzzahliger Faktor von $c + ab$ ist.

Wir haben bei dieser Auseinandersetzung des griechischen Wortes Gnomon uns bedient. Bei Bhâskara entspricht demselben kein eigentümlicher indischer Ausdruck. Er spricht vielmehr nur von dem Unterschiede der Rechtecke $ABCD$ und $BFIG$. Wir haben die nicht unbedeutende Abweichung von dem Urtexte uns gestattet, um damit unsere Auffassung kund zu geben, daß wir nicht umhin können,

[1]) Colebrooke pag. 170—184: *Affected square*, 245—267: *Varieties of quadratics*, 268—274: *Equation involving a factum of unknown quantities.*

in diesem nichts weniger als indischen Verfahren griechische Erinnerungen zu vermuten.

Die indische Auflösung der Gleichungen von der Form $ax^2 + b = cy^2$ hier ausführlich mitzuteilen, würde uns viel zu weit führen. Wir begnügen uns mit wenigen Andeutungen. Bhâskara kennt das, was wir quadratische Reste[1]) und das, was wir kubische Reste[2]) nennen, insofern als er weiß, daß es Zahlen von gewissen Formen gibt, die Quadrate und Kuben sein können, und andere, bei welchen das Entgegengesetzte stattfindet. Er lehrt in der zyklischen Methode[3]), wie die Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ gelöst werde, ausgehend von einer beliebigen empirisch gegebenen Gleichung $aA^2 + B = C^2$, welche nur so gewählt worden ist, daß die keinen quadratischen Faktor enthaltende Zahl B so klein als möglich ausfällt, ein Verlangen, zu dessen Erfüllung es genügte $\sqrt{a}$ näherungsweise in Bruchgestalt etwa als $\frac{C}{A}$ zu suchen, und Zähler und Nenner dieses Bruches in der versuchsweise aufzustellenden Gleichung ihren Platz anzuweisen. Aus der für B ausgesprochenen Bedingung folgt von selbst ihre Teilerfremdheit gegen A. Besäßen nämlich A und B einen gemeinsamen Teiler δ, so müßte derselbe wegen $aA^2 + B = C^2$ auch in C enthalten sein. In A^2 wäre δ^2, ebendasselbe auch in C^2 und schließlich auch in B enthalten. Nun setzt man $\frac{Az_1 + C}{B} = A_1$, wobei durch Zerstäubung z_1 nebst A_1 ganzzahlig gefunden werden, und zwar wählt man von den unendlich vielen möglichen Werten von z_1 einen solchen, der $z_1{}^2 - a$ kleinstmöglich macht. Setzt man hierauf $\frac{z_1^2 - a}{B} = B_1$, so ist B_1 eine ganze Zahl. Der indische Schriftsteller gibt allerdings dafür so wenig wie für die vorhergehende Teilerfremdheit zwischen A und B einen Beweis, aber die Sache ist richtig. Aus $\frac{Az_1 + C}{B} = A_1$ folgt nämlich

$$z_1 = \frac{BA_1 - C}{A}, \quad z_1^2 - a = \frac{B^2A_1^2 - 2BCA_1 + C^2 - aA^2}{A^2}$$
$$= \frac{B^2A_1^2 - 2BCA_1 + B}{A^2} = \left(\frac{BA_1^2 - 2CA_1 + 1}{A^2}\right) \cdot B.$$

Nun ist $z_1^2 - a$ eine ganze Zahl, also muß das Gleiche für den zuletzt erhaltenen Ausdruck gelten, und das kann, weil, wie wir sahen,

[1]) Colebrooke pag. 262—263, § 202—204. [2]) Ebenda pag. 265, § 206. [3]) Ebenda pag. 175 flgg. H. Konen, Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ (Leipzig 1901).

B gegen A teilerfremd ist, nur dann der Fall sein, wenn A^2 in $BA_1^2 - 2CA_1 + 1$ ganzzahlig enthalten ist. D. h.

$$\frac{z_1^2 - a}{B} = B_1 = \frac{BA_1^2 - 2CA_1 + 1}{A^2}$$

ist eine ganze Zahl. Ersetzt man rechts B wieder durch $C^2 - aA^2$, so zeigt sich

$$B_1 = \frac{C^2A_1^2 - aA^2A_1^2 - 2CA_1 + 1}{A^2} = \left(\frac{CA_1 - 1}{A}\right)^2 - aA_1^2$$

oder

$$aA_1^2 + B_1 = \left(\frac{CA_1 - 1}{A}\right)^2 = C_1^2.$$

Auch $C_1 = \frac{CA_1 - 1}{A}$ muß als rationale Quadratwurzel der ganzen Zahl $aA_1^2 + B_1$ selbst ganzzahlig sein. Somit ist aus der lauter ganze Zahlen enthaltenden Gleichung $aA^2 + B = C^2$ eine neue Gleichung $aA_1^2 + B_1 = C_1^2$ hervorgegangen, in der wieder nur ganze Zahlen vorkommen. Man kann nun in gleicher Weise andere und andere ähnlich geformte Gleichungen ableiten, man kann aber auch gewonnene Gleichungen nach einem anderen Satz vereinigen. Dieser Satz lautet[1]), daß $au_1^2 + b_1 = v_1^2$ und $au_2^2 + b_2 = v_2^2$ die Folgerung $au_3^2 + b_3 = v_3^2$ gestatten, wo $u_3 = u_1v_2 + u_2v_1$, $b_3 = b_1b_2$, $v_3 = au_1u_2 + v_1v_2$. Durch solche Veränderungen und Divisionen, wo immer sie möglich sind, kann man bis auf eine Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ geführt werden und hat alsdann die Aufgabe gelöst. Allerdings wird dieses indische Verfahren nicht stets zum Ziele führen, namentlich nicht nach ganz vorschriftsmäßigen Regeln die Wurzeln der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ finden lassen. Vieles bleibt dem Takte des Auflösenden überlassen. Mit Recht sagt auch Bhâskara an einer anderen Stelle[2]): „Die Regeldetri ist Arithmetik, die Algebra aber ist makelloser Verstand. Was wäre dem Scharfsinnigen unbekannt?“ Wird übrigens bei der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ kein Gewicht auf die Ganzzahligkeit der Lösungen gelegt, so kann immer ohne weiteres ein genügendes Wurzelpaar angeschrieben werden[3]). Aus $aA^2 + B = C^2$ in Verbindung mit der noch einmal gesetzten unveränderten Gleichung ergibt sich nämlich nach der erwähnten Vereinigungsregel: $a \cdot (2AC)^2 + B^2 = (aA^2 + C^2)^2$ und daraus

$$a \cdot \left(\frac{2AC}{B}\right)^2 + 1 = \left(\frac{aA^2 + C^2}{B}\right)^2.$$

Überblicken wir alle diese Untersuchungen, welche natürlich, so algebraisch begabt wir die Inder uns denken mögen, die Kraft der bedeutendsten Geister in um Jahrhunderte weit auseinander liegenden

[1]) Colebrooke pag. 171, § 77—78. [2]) Ebenda pag. 276. [3]) Ebenda pag. 172, § 80—81.

Zeiten in Anspruch genommen haben können, so ist ein nicht unbedeutendes Interesse mit der Frage verknüpft, wo denn die Wurzel aller zahlentheoretischen Untersuchungen für die Inder lag[1])? Die unbestimmten Gleichungen zweiten und höheren Grades sind wohl nichts weiteres gewesen als siegreiche Erfolge einer Spekulation, welche wachgerufen war durch Aufgaben, die nur auf unbestimmte Gleichungen vom ersten Grade geführt hatten. Diese aber waren vermutlich astrologisch-chronologischer Natur.

Die Astronomen, welche, wie wir uns erinnern, alle diese Gegenstände in eingeschalteten Kapiteln ihrer Astronomien zu behandeln pflegten, haben wenigstens, je weiter wir im Datum zurückgehen können, um so ausschließlicher die Zerstäubungsrechnung auf umgekehrte Kalenderaufgaben angewandt, auf die Frage, wann gewisse Konstellationen am Himmel eintreten, wann also bedeutungsvolle Übereinstimmung verschiedener Zyklen erreicht wird? Das sind, wie man leicht einsieht, Fragen, bei denen es darauf ankommt, aus gegebenen Resten, welche eine unbekannte ganze Zahl bei Division durch bekannte ganze Zahlen gibt, jene Zahl selbst zu erkennen.

Ist aber diese ganze Klasse von Aufgaben indisch? Wir können die Frage weder bejahen noch verneinen. Zu beidem fehlt die nötige Reichhaltigkeit gesicherter altertümlicher Quellen. Wir können nur darauf hinweisen, daß die Beantwortung dieser Frage nicht früher wird gegeben werden können, als bis man entschieden haben wird, ob die altindische Sternkunde lange bevor griechische Einflüsse sich geltend machen konnten landesursprünglich oder fremden Ursprunges, ob sie, wenn letzteres der Wahrheit entsprechen sollte, chinesischer oder babylonischer Herkunft war. Wir fühlen uns nicht befugt in dieser hochwichtigen Streitfrage das Urteilsrecht uns anzumaßen. Nur auf einige wenige Punkte sei aufmerksam gemacht, die unter den Entscheidungsgründen keinenfalls fehlen dürfen. Fehlen darf nicht die Berücksichtigung der Sexagesimalbrüche, welche mit Wahrscheinlichkeit unmittelbar aus Babylon nach Indien herüberkamen (S. 613). Verschwiegen darf nicht werden, daß astrologische Deutungen, daß Amulette und Talismane gerade in Babylon zu Hause waren, daß andererseits Zahlenspielereien den Babyloniern ebenso angehörten. Und dieser letzte Gedanke wird auch nicht in den Hintergrund gedrängt werden dürfen, wenn wir anknüpfend an diese Bemerkungen jetzt noch einige Worte über eine Spielerei zu sagen gedenken, welcher immerhin einiger mathematische Wert innewohnt.

[1]) Mit dieser Frage hat sich Hankel S. 197 beschäftigt, wenn auch nicht unter Ziehung aller Folgerungen, die sich ergeben können.

Wir meinen die magischen Quadrate, bhadra gaṇita. Über diesen Gegenstand[1]) schrieb Nârâyana, ein von Gaṇeça zitierter Schriftsteller; Gaṇeça selbst verfaßte 1545 seinen Kommentar zu Bhâskara. Das sind freilich recht späte Daten, aus welchen auch nur Vermutungen auf eine ältere Zeit sich nicht stützen lassen. Solchen liegt nur die Tatsache zugrunde, daß in Indien das Schachspiel erfunden worden ist[2]), während die Zerlegung in schachbrettartige Felder der Bildung magischer Quadrate, deren Wesen wir (S. 515) erörtert haben, notwendig vorausgehen mußte. Die einzige ausführliche Mitteilung ist um anderthalb Jahrhunderte jünger als selbst Gaṇeça. Sie findet sich in einem 1691 gedruckten Berichte über das Königreich Siam[3]). Allerdings ist sie in ihrer Ausführlichkeit von großer Zuverlässigkeit, indem sie die Methode kennen lehrt, nach welcher die Inder ein magisches Quadrat von ungerader Felderzahl anzufertigen wußten. Daß sie auch magische Quadrate von gerader Zellenzahl zu bilden verstanden, behauptet Laloubère, der Verfasser jenes Reiseberichtes, ebenfalls, gibt aber die betreffende Methode nicht an[4]). Bei der mathematisch nicht gar hoch anzuschlagenden Tragweite des Gegenstandes verzichten wir, wie schon früher, auf nähere Darlegung.

30. Kapitel.

Geometrie und Trigonometrie.

Als Quellen für indische Geometrie dienen nicht bloß die wiederholt von uns benutzten Zwischenkapitel der astronomischen Schriften des Âryabhaṭṭa, des Brahmagupta und Bhâskara, sondern auch Schriften von geometrisch-theologischem Charakter, wie sie, abgesehen von einigen ägyptischen Inschriften, in keiner Literatur sich wiederfinden. Wir meinen die Çulvasûtras. Der indische Gottesdienst, peinlich genauen Vorschriften folgend, kann der geometrischen Regeln nicht entbehren. Wenn der Altar nicht genau in der anbefohlenen Gestalt erbaut ist, wenn eine Kante nicht rechtwinklig zur anderen steht, wenn in der Orientierung nach den Himmelsgegenden ein Fehler stattfand, so nimmt die Gottheit das ihr dargebrachte Opfer nicht an, ein dem Inder schrecklicher Gedanke, da für ihn jedes Opfer ein

[1]) Colebrooke pag. 113, Note *. [2]) Lassen, Indische Alterthumskunde IV, 905. Bonn 1862. [3]) La Loubère, *Du royaume de Siam*, Tom. II, pag. 237, 266 sqq., 273. Amsterdam 1691. [4]) S. Günther, Vermischte Untersuchungen z. Geschichte d. mathemat. Wissenschaften Kap. IV, S. 188—191. Leipzig 1876.

förmlicher Vertrag mit der betreffenden Gottheit, eine Art von Tauschgeschäft ist, und er somit auf Erfüllung seines bei dem Opfer gehegten Wunsches sich nicht die geringste Rechnung machen kann, sofern seine Gabe verschmäht würde. Die rituellen Vorschriften, soweit sie auf die Opfer überhaupt sich beziehen, sind in den sogenannten Kalpasûtras enthalten, und zu jedem Kalpasûtra scheint als Unterabteilung ein Çulvasûtra gehört zu haben, welches eben jene geometrischen Vorschriften lehrte, und deren zwei in auszugsweiser, eines in vollständiger Übersetzung zugänglich gemacht sind[1]).

Die Verfasser derselben heißen Baudhâyana, Âpastamba und Kâtyâyana. Leider ist deren Lebenszeit noch ziemlich im Dunkeln. Es scheint zwar, daß die Reihenfolge, in welcher wir sie nannten, der Zeitfolge ihres Lebens entspricht, aber ob z. B. Baudhâyana zwei Jahrhunderte früher als Âpastamba zu setzen ist, ob die Zeitbestimmung des IV. oder V. S. v. Chr. auf Âpastamba zu deuten ist oder auf die Niederschrift des ältesten Çulvasûtra, darüber suchen wir vergebens nach einer unzweideutig ausgesprochenen Meinung. Nur einer bestimmten Behauptung[2]) begegnen wir: daß der Satz vom Quadrate der Hypotenuse spätestens im VIII. S. vor Chr. in Indien bekannt gewesen sein müsse, eine Behauptung, welche diejenigen zu vertreten haben, die sich berufsmäßig mit indischer Sprache und Geschichte beschäftigen, und welche wir zum Ausgangspunkte unserer weiteren Untersuchungen machen müssen.

Unter den auf die Errichtung von Altären bezüglichen Aufgaben handelt es sich, wie wir schon andeuteten, zunächst um deren Orientierung und deren genau rechtwinklige Herstellung. Die ostwestliche Linie, welche dabei abgesteckt werden muß[3]), führt den Namen *prâcî*, und wir haben (S. 599) schon berührt, daß deren Richtung im Sûrya Siddhânta[4]) genau nach der Methode gefunden wird, welche wohl aus griechischer Quelle zu Vitruvius und zu den römischen

---

[1]) *The S'ulvasûtras by G. Thibaut. Reprinted from the Journal of the Asiatic Society of Bengal, Part I for* 1875. Calcutta 1875. Außer auf diese (als Thibaut zu zitierende Schrift) verweisen wir auf unsere daran anknüpfende Abhandlung: Gräkoindische Studien, Zeitschr. Math. Phys. XXII, Histor.-literar. Abteilung (1877). Ferner vgl. L. v. Schroeder, Pythagoras und die Inder (Leipzig 1884), Albert Bürk, Das Âpastamba — Sulba — Sûtra herausgegeben, übersetzt und mit einer Einleitung versehen. Zeitschr. d. Deutsch. Morgenl. Gesellsch. LV, 543—591 (Einleitung und Urtext) und LVI, 327—391 (deutsche Übersetzung 1901), unsere Abhandlung: Über die älteste indische Mathematik. Archiv d. Math. u. Phys. 3. Reihe, VIII, 63—72 (1904), Zeuthen, *Théorème de Pythagore. Comptes Rendus du II. Congrès internat. de Philosophie à Genève, Septembre* 1904, pag. 833—854 (1905). H. Vogt, *Biblioth. Mathem.* 3. Folge VII, 6—23 (1906). [2]) Bürk l. c. LV, 556. [3]) Thibaut S. 9—10. [4]) Sûrya Siddhânta S. 239.

Feldmessern gelangte. Selbstverständlich ist diese späte Angabe ohne jede überzeugende Kraft für die Zeit der ersten Vorschriften zur Herstellung richtig orientierter Altäre. Wie damals die Prâcî abgesteckt wurde ist uns unbekannt. Die Çulvasûtras schweigen darüber. Ist die Prâcî gefunden, so werden rechte Winkel abgesteckt, und zwar mit Hilfe eines Seiles. Die Länge dieser ostwestlich gezogenen Strecke sei 36 Padas. An ihren beiden Endpunkten wird je ein Pflock in den Boden eingeschlagen[1]). An diese Pflöcke befestigt man die Enden eines Seiles von 54 Padas Länge, in welches zuvor, 15 Padas von einem Ende entfernt, ein Knoten geschlungen wurde. Spannt man nun (Fig. 82) das Seil auf dem Erdboden, indem man den Knoten festhält, so entsteht ein rechter Winkel am Ende der Prâcî. Daß das Verfahren richtig ist, und auf dem rechtwinkligen Dreiecke von den Seiten 15, 36, 39, oder in kleinsten Zahlen ausgedrückt 5, 12, 13 beruht, ist einleuchtend. Einleuchtend ist aber auch, daß es in der Kenntnis des pythagoräischen Lehrsatzes wurzelt, daß es die Seilspannung genau in der gleichen Weise anwendet, wie Heron dieselbe benutzte (S. 384 Fig. 64), wie wahrscheinlich die altägyptischen Harpedonapten bei Lösung der gleichen Aufgaben verfuhren (S. 106).

Fig. 82.

Nächst der richtigen Orientierung und Scharfkantigkeit des Altars hat seine Gestalt eine hohe Wichtigkeit. Sie hat allerdings im Laufe der Zeiten gewechselt, Formen annehmend, welche für jeden nichtindischen Geist an das Lächerliche streifen. Welcher Europäer kann sich hineindenken, einen Altar in der Figur eines Falken oder irgend eines anderen Vogels, eines Wagenrades usw. zu errichten? Dabei treten jedoch zwei mathematische Gesetze auf[2]), jedes eine besondere Gruppe von Aufgaben erzeugend.

Wird ein Altar von gegebener Gestalt vergrößert, so muß die Gestalt selbst in allen ihren Verhältnissen dieselbe bleiben. Man muß also erstens verstehen eine geometrische Figur zu bilden, einer gegebenen ähnlich und zu derselben in gegebenem Größenverhältnisse stehend.

Die Fläche des Altars von normaler Größe ist ferner ohne Rücksicht auf seine Gestalt stets dieselbe. Man muß also zweitens verstehen eine geometrische Figur in eine andere ihr flächengleiche zu verwandeln.

---

[1]) Albr. Weber, Indische Studien X, 364 und XIII, 233 flgg. und Âpastamba Kap. I, 32, vgl. Bürk l. c. LVI, 327. [2]) Thibaut S. 5.

Gleich das erste Gesetz mahnt uns mit Entschiedenheit an die Würfelgestalt, welche das Grabmal für Glaukos besitzen sollte, während es auf Geheiß des Königs Minos in doppelter Größe aufzuführen war (S. 211). Euripides hat, wie wir uns erinnern, das vielleicht sagenhafte Geheiß in einer Tragödie verwertet, und Euripides lebte 485—406, mehr als 70 Jahre bevor der Alexanderzug geregeltere indisch-griechische Beziehungen hervorrief. Wir fügen hinzu, daß eine indische astronomische Handschrift den Ursprung ihrer Wissenschaft nicht bloß auf einen ionischen Meister Yavaneçvarâcârya zurückführt (S. 600), sondern neben diesem eine Persönlichkeit des Namens Minarâja anführt[1]) ein Name, der täuschend an den König Minos zu erinnern geeignet ist.

Ein wesentlicher Unterschied besteht allerdings zwischen der Aufgabe, welche König Minos seinem Architekten stellte, und der Aufgabe, welche bei der Inhaltsveränderung indischer Altäre vorkommt. Jener sollte den Kubikraum verdoppeln, hier kommt es nur auf die Oberfläche an, soweit die Çulvasûtras uns Auskunft geben. Es galt also nur eine Vervielfachung einer ebenen Figur zu vollziehen, oder mit anderen Worten eine Quadratwurzel zu finden, was bei Griechen wie bei Indern ebensowohl geometrisch als arithmetisch geschah. Die Würfelvervielfältigung hätten die Inder arithmetisch gleichfalls vollziehen können, da, wie wir gesehen haben, Âryabhaṭṭa Kubikwurzeln auszuziehen wußte; geometrisch dagegen überstieg diese Aufgabe indische Kräfte bei weitem, indem die Kurven, mittels welcher die Würfelvervielfachung geleistet werden kann, die Kegelschnitte, die Konchoide und wie sie alle heißen, den Indern durchaus unbekannt geblieben zu sein scheinen.

Für die geometrische Ausziehung der Quadratwurzel gibt Baudhâyana folgende Regeln[2]): Das Seil, quer über das gleichseitige Rechteck gespannt, bringt ein Quadrat von doppelter Fläche hervor. Das Seil, quer über ein längliches Rechteck gespannt, bringt beide Flächen hervor, welche die Seile längs der größeren und kleineren Seite gespannt hervorbringen. Diesen zweiten Fall erkenne man an den Rechtecken, deren Seiten aus 3 und 4, aus 12 und 5, aus 15 und 8, aus 7 und 24, aus 12 und 35, aus 15 und 36 Längeneinheiten bestehen.

Das ist nun offenbar der pythagoräische Lehrsatz, erläutert an Zahlenbeispielen. Das zuletzt genannte Dreieck mit den Katheten 15 und 36 ist vorher schon einmal in den kleineren Zahlen 12 und 5

[1]) Brockhaus in den Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Philolog.-histor. Klasse IV, 18—19 (1852). [2]) Thibaut S. 7, 8, 9. Bürk LVI, 340—341.

genannt, offenbar ohne daß Baudhâyana dieser Wiederholung sich bewußt war, ein Zeugnis dafür, daß er den Gegenstand seiner Darstellung nicht durchaus beherrschte, sondern mindestens teilweise Hergebrachtes vortrug, welches er nicht verstand. Der pythagoräische Lehrsatz ist aber nicht als einheitlicher Satz vorgetragen, sondern in zwei Unterfällen, je nachdem die beiden Katheten gleicher Länge sind oder nicht. Es ist wahrscheinlich (S. 185), daß Pythagoras bei dem Beweise seines Satzes ebenso verfuhr.

Die Anwendung dieser Sätze in den Çulvasûtras ist der doppelten Gattung von Aufgaben entsprechend, welche bei Herstellung eines Altars sich darbieten, eine doppelte. Es kann eine Strecke verändert werden sollen, so daß ihr Quadrat sich im Verhältnisse $1:n$ vergrößert, es kann auch eine Figur in eine andere gleichen Inhaltes umgewandelt werden sollen. Die Auffindung der Seite eines 2, 3, 10, 40 mal so großen Quadrates, als ein gegebenes ist, geschieht durch allmähliche, sich wiederholende Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes, indem von dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke ausgegangen und die Hypotenuse eines Dreiecks immer als die eine Kathete eines folgenden Dreiecks benutzt wird, dessen andere Kathete der des zuerst betrachteten Dreiecks gleich ist. Dabei erscheinen Namen für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ usw., gebildet durch Zusammensetzung der Zahlwörter mit dem von uns früher (S. 621) erörterten Worte *karaṇa*[1]), also *dvikaraṇi* $=\sqrt{2}$, *trikaraṇi* $=\sqrt{3}$, *daçakaraṇi* $=\sqrt{10}$, *catvarinçatkaraṇi* $=\sqrt{40}$ usw.

Bei den Verwandlungen von Figuren ineinander ist die Auffindung des einem Rechtecke gleichen Quadrates[2]) sehr interessant, weil sie nur des pythagoräischen Lehrsatzes sich bedient, dagegen von Anwendung des Hilfsmittels, welches im 14. Satze des II. Buches der euklidischen Elemente geboten ist, d. h. von der Fällung einer Senkrechten aus einem Punkte einer Kreisperipherie auf den Durchmesser, absieht (Fig. 83). Von dem Rechtecke $ABCD$ wird zunächst vermittels $AE = AD$ ein Quadrat $ADFE$ abgeschnitten. Der Rest $EFCB$ wird durch GH halbiert und die obere Hälfte $GHCB$ unten rechts als $DFIK$ angesetzt. So ist $ABCD$ in einen Gnomon $AGHFIKA$ verwandelt, oder, wie Baudhâyana sagt, der des Wortes Gnomon sich so wenig bedient wie Bhâskara, bei welchem wir (S. 631) die gleiche Figur

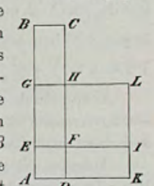


Fig. 83.

[1]) Thibaut S. 16. [2]) Ebenda S. 19. Âpastamba Kap. II, § 7, vgl. Bürk LVI, 333.

nachwiesen, in den Unterschied der beiden Quadrate $AKLG$ und $FILH$, und dieser Unterschied ist mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes leicht in die Gestalt eines Quadrates zu bringen.

Die Quadratwurzelausziehung, welche geometrisch genau erfolgt, muß arithmetisch sich mit einer Annäherung begnügen, und zwar wird, wenn die Quadratwurzel zum Zwecke praktischer Ausmessungen gezogen worden ist, eine solche Annäherung genügen, welche auf dem Felde keinen bemerklichen Unterschied gegen die strenge Wahrheit mehr hervorbringt. So benutzten Baudhâyana und Âpastamba $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$. Erinnern wir uns hier an die bei Theon von Smyrna (S. 436) angegebenen Näherungswerte für $\sqrt{2}$. Sie heißen der Reihe nach $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}$, und dieser letztere Wert kommt uns hier in der Form $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$ also durch eine Summe von Stammbrüchen dargestellt wieder zu Gesicht. Wir sagten damals, er habe auf außergriechischem Boden eine Rolle gespielt, und wir erkennen diese Rolle nunmehr darin, daß er Veranlassung gab, eine von ihm als Voraussetzung ausgehende größere Annäherung zu erzielen. Die Quadrierung $\left(\frac{17}{12}\right)^2 = 2\frac{1}{144}$ läßt nämlich erkennen, daß $\frac{17}{12}$ zu groß ist. Soll aber das Quadrat um $\frac{1}{144}$ kleiner werden, so muß $\frac{1}{144}$ das doppelte Produkt des gefundenen Teiles $\frac{17}{12}$ der Quadratwurzel aus 2 in die negative Ergänzung sein, falls man von dem Quadrate jener Ergänzung absehen zu können glaubt, und nun ist $\frac{1}{144}$ geteilt durch 2 mal $\frac{17}{12}$ nichts anderes als $\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$, welches Baudhâyana wirklich abzieht, so daß hiermit die Entstehung des Wertes $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$ hinlänglich erklärt sein dürfte[1]).

Arithmetisch und zugleich geometrisch interessant sind die Auflösungsversuche der Çulvasûtras für die Aufgabe, Flächengleichheit zwischen quadratischen und kreisrunden Figuren hervorzubringen[2]), eine Aufgabe, die noch mehr als andere geeignet erscheint, geschichtliche Zusammenhänge nachweisen zu lassen, weil eben hier vermöge der Natur der Aufgabe von vornherein auf volle Genauigkeit verzichtet werden muß, und bei bloßen Annäherungen — mögen die Er-

[1]) Dem Grundgedanken nach stimmt diese Darstellung ziemlich genau mit der von Thibaut zuerst versuchten Wiederherstellung überein. Thibaut S. 13—15. [2]) Ebenda S. 26—28.

finder sie als Annäherungen oder als genau richtige Werte betrachtet haben — eine Notwendigkeit gerade dieses oder jenes bestimmte Ergebnis zu erhalten nicht vorhanden ist. In den Çulvasûtras ist ebensowohl die Quadratur des Kreises gelehrt als auch unmittelbar vorher umgekehrt die Aufgabe gestellt, ein gegebenes Quadrat in einen Kreis zu verwandeln, eine Aufgabe, welche man füglich Zirkulatur des Quadrates wird nennen können. Die Lösung ist folgende[1]) (Fig. 84). Die Diagonalen AC, BD des Quadrates $ABCD$ werden gezogen und durch ihren Durchschnittspunkt E die Gerade KI parallel zu den Seiten AD und BC des Quadrates. Von E als Mittelpunkt aus wird mit der halben Diagonale EA als Halbmesser ein Bogen beschrieben, der die über I hinaus verlängerte KI in F schneidet. Nun wird das Stück IF in G und H in drei gleiche Teile zerlegt und EH als Halbmesser des gesuchten Kreises betrachtet. Es lohnt sich zuzusehen, ob es nicht möglich wäre, diese Konstruktion in ein Rechnungsresultat umzusetzen.

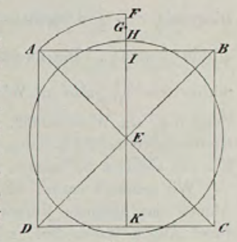


Fig. 84.

Wir gehen davon aus, daß, indem FI in drei gleiche Teile zerlegt wird, dadurch die Wahrscheinlichkeit entsteht, es sei $FI = 3$ angenommen worden, oder es sei $EA = EI + 3$ gesetzt, d. h. $EI \cdot \sqrt{2} = EI + 3$ und daraus $EI^2 - 6EI = 9$, $EI = 3 + \sqrt{18}$. Das ist annähernd $EI = 7$ und $EA = 10$ oder $\sqrt{2} = \frac{10}{7}$, ein in der Tat gar nicht übler Wert, wenn es auch noch nicht gelungen ist, ihn bei irgend einer anderen Gelegenheit, sei es bei Indern, sei es bei Griechen, nachweisen oder auch nur mutmaßen zu können. Ist aber diese Meinung richtig, dann ist die Seite des Quadrates 14, seine Diagonale 20, der Durchmesser des gleichflächigen Kreises 16, und die Kreisfläche demnach $14^2 = (16 - 2)^2 = \left(16 - \frac{16}{8}\right)^2$. Darin ist aber eine doppelte Regel enthalten. **Erstens:** Die Zirkulatur des Quadrates benutzt als Kreisdurchmesser $\frac{8}{10}$ der Diagonale des Quadrates[2]). **Zweitens:** Die Quadratur des Kreises benutzt als Quadratseite $\frac{7}{8}$ des Kreisdurchmessers. Freilich stehen diese aus der

[1]) Thibaut S. 26—28. Âpastamba Kap. III, § 2 und 3 vgl. Bürk LVI, 335. [2]) Genau diese Regel wird uns bei Albrecht Dürer wieder begegnen.

Zirkulatur des Quadrates hergeleiteten Werte, wie wir uns sehr bald überzeugen werden, nicht im Einklang mit dem, was bezüglich der Quadratur des Kreises gelehrt wird, doch zunächst verweilen wir noch einen Augenblick bei unseren gegenwärtigen Folgerungen. Deren erste heißt zur Ausrechnung von π benutzt: $2r = \frac{8}{10}$ Diagonale, $r = \frac{2}{5}$ Diagonale, $r^2 = \frac{4}{25}$ Diagonalenquadrat $= \frac{8}{25}$ Quadrat, Quadrat $= \frac{25}{8} r^2$, mithin $\pi = 3\frac{1}{8}$. Die zweite heißt: Kreis $= \left(\frac{7}{8} d\right)^2 = \left(\frac{7}{4} r\right)^2 = \frac{49}{16} r^2$, mithin $\pi = 3\frac{1}{16}$, also im Widerspruch zu der eben gezogenen ersten Folgerung, ein Widerspruch, der darauf beruht, daß wir bei unserer Rechnung vermeiden konnten, mit dem nur näherungsweise bekannten $\sqrt{2}$ uns abfinden zu müssen.

Wir erinnern daran, daß schon das altägyptische Handbuch des Ahmes eine ähnliche Vorschrift, allerdings, was man gewiß nicht außer Augen lassen darf, mit anderen Zahlen enthält, indem dort als Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrates $\frac{8}{9}$ des Kreisdurchmessers gilt. Wir erinnern uns um so mehr daran, als der Versuch nahe liegt durch andere Annahme des Näherungswertes für $\sqrt{2}$ die indische Konstruktion mit der ägyptischen Zahl in Einklang zu bringen. Diese Übereinstimmung läßt sich aber nur mittels $\sqrt{2} = \frac{11}{8}$ erzielen, eine uns sehr unwahrscheinliche Annahme. Unsere Hypothese, die Quadratseite sei bei den Indern $\frac{7}{8}$ des Kreisdurchmessers gewesen, gewinnt aber selbst eine Bestätigung in einer arithmetischen Kreisquadratur, welche Baudhâyana lehrt, allerdings mit der Zahl $\frac{7}{8}$ sich nicht begnügend, sondern ihr eine Korrektur beifügend.

Baudhâyana schreibt nämlich vor, den Kreisdurchmesser mit $\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}$ zu vervielfachen, um die Seite des dem Kreise gleichflächigen Quadrates zu erhalten. Die Korrektur $\frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}$ stammt daher, daß Baudhâyana offenbar nicht von $\sqrt{2} = \frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 7}$ seinen Ausgangspunkt zur Umsetzung der Konstruktion in eine Formel nahm, sondern von dem oben erörterten Werte $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408}$. Es war $EA = EI \cdot \sqrt{2}$, $FI = EI\,(\sqrt{2} - 1)$, $HI = EI \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$,

$EH = EI + IH = EI \cdot \frac{\sqrt{2} + 2}{3}$, $EI = \frac{3}{2 + \sqrt{2}} \cdot EH$, und für die doppelten Strecken d. h. Quadratseite und Kreisdurchmesser gilt derselbe Zahlenfaktor $\frac{3}{2 + \sqrt{2}}$. Mit Hilfe von $\sqrt{2} = \frac{577}{408}$ geht derselbe aber über in

$$\frac{1224}{1393} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{41}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1393},$$

dessen letzter Teil als nahezu $\frac{1}{34}$ des ihm vorangehenden selbst schon sehr kleinen Bruches vernachlässigt ist[1]).

Eine andere Zahlenregel für die Quadratur des Kreises findet sich übereinstimmend bei Baudhâyana, Âpastamba und Kâtyâyana: „Teile [den Durchmesser] in 15 Teile und nimm 2 weg, das [was übrig bleibt] ist ungefähr die Seite des Quadrates“, oder mit Âpastamba zu reden „ist genau die Seite des Quadrates“. Setzen wir diese Vorschrift in Zahlen um. Sei wieder d der Kreisdurchmesser, r der Kreishalbmesser, so ist $\left(\frac{13}{15} d\right)^2 = \left(\frac{26}{15} r\right)^2 = 3\frac{1}{225} r^2$ die Quadratur des Kreises. Darin liegt die Annahme $\pi = 3\frac{1}{225}$, welche nahezu mit $\pi = 3$ übereinstimmt und genau damit übereinstimmen würde, wenn $\frac{26}{15} = \sqrt{3}$ gesetzt werden müßte. Beide hier hervorgehobenen Werte sind uns aber keineswegs unbekannt. $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ ist uns auf griechischem und auf römischem Boden begegnet. $\pi = 3$ ist in Indien selbst aus sehr altertümlichen Schriften bestätigt worden[2]), gehört überdies allen von uns der Besprechung unterzogenen Kulturstätten an mit Ausnahme des alten Ägypten, wo wir ihm nicht begegnet sind. Wir haben wahrscheinlich zu machen gesucht, $\pi = 3$ habe ursprünglich den Babyloniern angehört.

Mit diesen Werten haben wir eine neue Frage angeschnitten, die Frage nach dem Ursprunge der in den Çulvasûtras aufbewahrten ältesten indischen Geometrie. Die Meinung, welche wir selbst ehedem für die wahrscheinlichste hielten, Heronisches sei seit dem ersten vorchristlichen Jahrhunderte den oftbetretenen Pfaden des Handelsverkehrs folgend von Alexandria aus nach Indien vorgedrungen, ist natürlich von dem Augenblicke an unhaltbar geworden, in welchem das einstimmige Urteil der Indologen den Çulvasûtras ein so

[1]) Der Gedanke, die Konstruktionsregel mit der Zahlenformel in Einklang zu bringen, rührt von Thibaut her. [2]) Thibaut, *On the S'uryaprajñapti. Journal of the Asiatic Society of Bengal*, Vol. XLIX, Part. I, pag. 120 Note * (1880).

hohes Alter beilegte als wir (S. 636) berichtet haben. Nicht haltbarer scheint uns, beiläufig bemerkt, die Meinung Pythagoras sei Schüler altindischer Weisheit, und insbesondere der Satz vom Quadrate der Hypotenuse, die Lehre von den rationalen rechtwinkligen Dreiecken, die Lehre vom Irrationalen usw. sei ihm aus Indien bekannt geworden. Es ist wahr, daß manche Bestandteile der pythagoräischen Lehren, die Seelenwanderung, das Verbot des Bohnenessens, sich nach der Aussage von Indologen leicht aus indischen, schwer oder gar nicht aus ägyptischen Einflüssen erklären lassen. Es ist nicht minder wahr, daß ein Bericht[1]) über die Wanderungen des Pythagoras zu erzählen weiß, er habe von den Brahmanen gelernt, ein Bericht, welchen wir im 6. Kapitel gleich demjenigen, der Pythagoras zu den Galliern führte (S. 176) vernachlässigten, weil wir seiner zum Nachweis eines einheitlichen Ursprunges des mathematischen Wissens des Pythagoras — und zu einem Urteile über seine sonstigen Lehren fehlt uns jede persönliche Berechtigung — nicht bedurften noch bedürfen. Der Aufenthalt des Pythagoras in Ägypten kann keinem Zweifel unterworfen sein, und er genügt, um die Entstehung der pythagoräischen Mathematik zu verstehen, deren Grundbestandteile (wir erinnern nur an das Dreieck aus den Seiten 3, 4, 5) sich in Ägypten um viele Jahrhunderte früher nachweisen lassen als die Zeit ist, welche als weitest entlegene Ursprungszeit der in den Çulvasûtras vorgetragenen Lehren in Anspruch genommen wird. Aber verhalte es sich mit dem indischen Einflusse auf Pythagoras wie es wolle, so lohnt es sich an und für sich über die Kenntnisse der Çulvasûtras von rationalen rechtwinkligen Dreiecken zu berichten.

Âpastamba sagt[2]): „Es folgt nun eine allgemeine Regel für die Vergrößerung eines gegebenen Quadrates. Man fügt das, welches man mit der jedesmaligen Verlängerung umzieht, an zwei Seiten hinzu und an der Ecke das Quadrat, welches durch die betreffende Verlängerung hervorgebracht wird". Unter Beiziehung von späten Kommentaren ist es gelungen, die an und für sich recht dunkle Vorschrift zu verstehen. Sie will ein Quadrat a^2 zu einem größeren Quadrate $(a+b)^2$ werden lassen, indem man an zwei aneinanderstoßenden Quadratseiten je ein Rechteck ab und an der Ecke das Quadrat b^2 hinzufügt, wieder ein Gnomon, wie es (S. 639 Fig. 83) schon aufgetreten war.

Es ist nun ganz richtig, daß, wenn $2ab + b^2 = c^2$ eine Quadratzahl ist, die Gleichung $a^2 + c^2 = (a+b)^2$ entsteht und zur Auffindung

[1]) Alexander Polyhistor in seiner Schrift über die Pythagoraeischen Symbole. Vgl. L. v. Schroeder, Pythagoras und die Inder S. 24 Note 1.
[2]) Âpastamba Kap. III, 39. Bürk LVI, 336.

der Seiten eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks führen kann. Man könnte mit modernem Denken aus $2ab + b^2 = c^2$ zu $a = \frac{c^2 - b^2}{2b}$ gelangen, von da zu $\left(\frac{c^2 - b^2}{2b}\right)^2 + c^2 = \left(\frac{c^2 + b^2}{2b}\right)^2$, aber so dachten, so rechneten weder die uralten Inder noch Pythagoras, wenn auch von dem letzteren ebenso wie von Plato Formeln für ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke berichtet werden, die uns (S. 186 und 224) bekannt geworden sind, und an die wir noch in diesem Kapitel zu erinnern haben werden.

Aber wenn man sogar, was wir nicht mittun, zugibt, Pythagoras sei Schüler der Inder, wessen Schüler waren die Inder? Haben sie alles selbst erdacht? Wir hegen daran den größten Zweifel. Erinnern wir uns, wie vieles an Babylon mahnt! Babylon als mutmaßliche Heimat der Null, als mutmaßliche Heimat der Quadrat- und Kubikwurzeln aus Zahlen, welche zwischen ganzen Quadrat- und Kubikzahlen liegen, als bekannt mit dem zu Messungszwecken benutzten Seil *tim*, als Ort, an welchem der längste Tag die Dauer wirklich besaß, welche die Inder ihm zuschrieben, als wahrscheinliche Heimat von $\pi = 3$, das alles drängt dazu mit doppelter Wachsamkeit auf künftige Entdeckungen zu warten, welche das Zweistromland uns noch bieten kann. Einige Punkte möchten wir überdies noch hervortreten lassen. *Çulva* bedeutet Seil, kommt aber in den Çulvasûtras nicht vor. Dort ist für das Seil ein anderes Wort im Gebrauch *rajju*, gleichsam als wenn in einer Seilvorschrift nur von einem Strick die Rede wäre. Das mutet fast an, als wenn Titel und Text nicht gleichzeitig entstanden wären, als wenn der Text eine spätere Umarbeitung erlitten hätte. Ferner kommen in den Vorschriften für rechnerische Ausziehung von $\sqrt{2}$ und für die Kreisquadratur Stammbrüche vor, wie sie in anderen indischen Schriften allerdings wesentlich jüngeren Ursprunges uns nicht bekannt geworden sind. Endlich zeugt die spätere indische Geometrie, mit Ausnahme der Trigonometrie, keineswegs für besondere geometrische Begabung.

Sehen wir uns doch Âryabhaṭṭas geometrisches Wissen an. Der Körper mit sechs Kanten, d. h. die dreieckige Pyramide, ist bei ihm das halbe Produkt aus der Grundfläche in die Höhe[1]). Wir vermuten als Ursprung dieser grundfalschen Formel, der Verfasser habe das arithmetische Mittel zwischen der Grundfläche und der als Nulldreieck betrachteten Spitze als ein Mitteldreieck betrachtet, über welchem ein Prisma gleicher Höhe mit der Pyramide gebildet den gewünschten

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 10 und 20.

Körperinhalt darstellte, eine Anschauung, welche der ägyptischen Dreiecksflächenberechnung ähnelt. Der Kugelinhalt ist bei ihm Produkt der Fläche des größten Kreises in die Quadratwurzel derselben[1]), wieder ein Unsinn, welcher in der kaum halbgeometrischen Auffassung wurzelt, der Würfel derselben Seite, welche als Quadrat die Kreisfläche darstellt, müsse den Inhalt der körperlichen gleichmäßigen Rundung, das ist eben der Kugel liefern. Daneben weiß aber Âryabhaṭṭa, daß 62832 : 20000 das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser ist[2]), oder er kennt $\pi = 3{,}1416$. Ist es denkbar, daß derartige Anschauungen mit einem Näherungswerte, der den archimedischen an Genauigkeit übertrifft, zugleich vorkommen und sämtlich einheimisch sein sollen? Die Berechnung des Paralleltrapezes wird gelehrt, dessen parallele Seiten genau so wie im Handbuche des Ahmes (S. 97) zur Rechten und Linken, nicht oben und unten gezeichnet sind[3]), und unmittelbar anschließend wird in allerdings etwas dunklem von dem indischen Kommentator mißverstandenem[4]) Wortlaute verlangt, jede auszumessende Figur der Ebene solle in Trapeze zerlegt werden, ein Verfahren, welches Ahmes, welches die Tempelpriester von Edfu übten (S. 110). Wir denken, das sind wieder einige Bausteine zur Herstellung dessen, was von auswärtiger Geometrie nach Indien gelangt war, Bausteine, denen ihr Ursprung deutlich anzusehen ist.

Wir kommen zur weit umfangreicheren Geometrie Brahmaguptas[5]). Sie ist eine rechnende Geometrie, eine Sammlung von Vorschriften, Raumgebilde zu berechnen wie bei Heron von Alexandria. Zu Anfang heißt es, die Fläche des Dreiecks und Vierecks werde in rohem Überschlag gewonnen als Produkt der Hälften von je zwei Gegenseiten. Das ist die alte ägyptisch-heronische Formel, ist zugleich die Auffassung des Dreiecks als Viereck mit einer verschwundenen Seite und geht nur in einer allerdings wesentlichen Beziehung weiter darin, daß die Ungenauigkeit des Verfahrens ausdrücklich betont wird, welche Heron ohne allen Zweifel auch erkannte, aber in dem uns erhaltenen Texte nicht hervorgehoben hat. Damit man ja an dem Ursprung nicht zweifle, gibt der gleiche Paragraph die genaue Fläche des Dreiecks aus den drei Seiten nach der heronischen Formel. Als genau gilt auch die Formel für das Viereck, wenn von den Faktoren unter dem Wurzelzeichen jeder die um eine Seite verminderte halbe Seitensumme darstellt, wenn also $\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 10 und 20—21. [2]) Ebenda pag. 11 und 23. [3]) Ebenda pag. 10 und 21. [4]) Ebenda pag. 22. [5]) Colebrooke pag. 295—318.

gebildet wird, wo $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ bedeutet und a, b, c, d die Vierecksseiten sind. Im folgenden Paragraphen lehrt Brahmagupta aus den Seiten eines Dreiecks die Abschnitte finden, welche eine gezogene Höhe auf der Grundlinie bildet. Genau so lehrt Heron dasselbe. Wir können unmöglich so fortfahrend alle einzelnen Paragraphe der Reihe nach durchgehen. Wir begnügen uns mit einzelnen Bemerkungen.

Eine Rechtecksseite wird Seite, die andere Aufrechtstehende genannt, die Diagonale vollendet mit beiden ein rechtwinkliges Dreieck, auf welches der pythagoräische Lehrsatz Anwendung findet; das ist heronisch. Die obere Seite eines Vierecks wird als Scheitellinie mit besonderem Namen belegt[1]); das ist wieder ägyptisch-heronisch. Der Name selbst *mukha* oder *vadana* bedeutet Öffnung, Mund. Der Durchmesser des Umkreises eines Dreiecks ist der Quotient des Produktes zweier Seiten geteilt durch die auf der dritten Seite errichtete Höhe; das stimmt wieder mit Heron[2]). Die Figuren sind nicht an den Ecken mit Buchstaben bezeichnet, sondern mit den die Längen angebenden Zahlen an den Seiten selbst. Ähnliches finden wir zwar nicht in Herons Vermessungslehre, aber in den sogenannten Heronischen Sammlungen im Gegensatze zu allen anderen griechischen Geometrien. Der Kreisdurchmesser beziehungsweise das Quadrat des Halbmessers mit 3 vervielfacht sind für die Praxis Umfang und Inhalt des Kreises; die genauen Werte werden durch die Quadratwurzel aus den 10fachen zweiten Potenzen jener Zahlen gefunden[3]). Das will sagen, in roher Weise ist $\pi = 3$ und genau $\pi = \sqrt{10}$.

Den ersteren Wert haben wir oben (S. 643) besprochen. Der zweite kommt uns hier zum ersten Male vor. Es ist der Versuch gemacht worden, zu ermitteln, wie man auf diesen Näherungswert gekommen sein mag[4]). Die Seite des regelmäßigen Sechsecks in dem Kreise von dem Durchmesser 10 war von alters her als 5, der ganze Umfang somit als 30 bekannt. Nun wird behauptet, der Umfang des demselben Kreise einbeschriebenen Zwölfecks sei als $\sqrt{965}$, der des 24ecks als $\sqrt{981}$, der des 48-, des 96ecks als $\sqrt{986}$, als $\sqrt{987}$ gefunden worden, und so habe man sich veranlaßt gefühlt, die Grenze $\sqrt{1000} = 10 \cdot \sqrt{10}$ als nach unendlich oft wiederholter Verdoppelung der Seitenzahl erreichbar anzusehen. Diese Wiederherstellung wäre eine ungemein glückliche zu nennen, wenn es gelänge ebenso, wie in den Kommentaren zu Brahmagupta an dieser Stelle

[1]) Colebrooke pag. 72, Note 4 und pag. 307, § 36. [2]) Ebenda pag. 229, § 27 = *Heron Liber Geoponicus* cap. 58 (ed. Hultsch) pag. 214. [3]) Ebenda pag. 308, § 40. [4]) Hankel S. 216—217.

der Kreisdurchmesser mehrfach als 10 angenommen ist, auch jene Wurzelgrößen, von denen behauptet wird, sie seien für die Umfänge der Vielecke von immer verdoppelter Seitenzahl gesetzt worden, in indischen Schriften nachzuweisen. Solange aber dieses nicht geschieht, bleibt jener Wert $\pi = \sqrt{10}$ so rätselhaft wie er allen Geschichtsforschern zu erscheinen pflegte, und wir teilen zur Bestätigung dieser Behauptung noch drei Erklärungsversuche mit. Da ist behauptet worden[1]), entsprechend dem Näherungswerte

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a+1} \text{ sei } \sqrt{10} = 3\frac{1}{7},$$

bei Archimed aber sei $\pi = 3\frac{1}{7}$, und so sei $\pi = \sqrt{10}$ zustande gekommen. Das heißt doch: man ersetzte $3\frac{1}{7}$ durch $\sqrt{10}$, einen rationalen Wert durch einen irrationalen, und das kommt in der ganzen Geschichte der Mathematik nirgends vor. Die zweite Erklärung[2]) geht davon aus, daß Brahmagupta wußte[3]), daß der Pfeil h_n, welcher zwischen der Seite s_n und dem Kreisumfang sich befindet, durch die Formel $h_n = \frac{1}{2}\left[d - \sqrt{d^2 - s_n^2}\right]$ gegeben ist. Im Sechsecke insbesondere ist

$$h_6 = \frac{1}{2}\left[d - \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{4}}\right] = \frac{d}{4}\left[2 - \sqrt{3}\right]$$

und hätte man das Recht, $\frac{5}{3}$ als Näherungswert für $\sqrt{3}$ anzunehmen, so wäre $h_6 = \frac{d}{12}$. Da ferner allgemein $s_{2n}^2 = h_n^2 + \frac{1}{4}s_n^2$, so wäre auch $s_{12}^2 = h_6^2 + \frac{1}{4}s_6^2 = \frac{10d^2}{144}$ und $(12s_{12})^2 = 10d^2$. Aber $12s_{12} = u_{12}$ ist der Umfang des Sehnenzwölfecks, und so hätte man erhalten $u_{12} = d\sqrt{10}$, d. h. $\pi = \sqrt{10}$ bedeutet, man habe den Kreis als mit dem Sehnenzwölfeck zusammenfallend angesehen. Sehr sinnreich, wenn nur $\sqrt{3} = \frac{5}{3}$ irgendwo Beglaubigung fände. Die dritte Vermutung ist folgende[4]). Bei Heron kommt der Näherungswert $\sqrt{54} = \frac{22}{3}$ vor. Da nun bei Archimed $\pi = \frac{22}{7}$, so kann

$$\pi = \frac{3}{7} \cdot \frac{22}{3} = \frac{3}{7}\sqrt{54} = \sqrt{\frac{486}{49}}$$

---

[1]) L. Rodet, *Sur les méthodes d'approximation chez les anciens* in dem *Bulletin de la Société mathématique de France* T. VII (1879). [2]) Hunrath, Über das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern. Hadersleben 1883, S. 25. [3]) Colebrooke pag. 310, § 42. [4]) Briefliche Mitteilung von Max Curtze.

gesetzt worden sein und, weil $\frac{486}{49}$ nur wenig von 10 abweicht, auch $\pi = \sqrt{10}$. Diese Vermutung ähnelt in ihrem Grundgedanken der Ersetzung eines rationalen Wertes durch eine Irrationalzahl der ersten der drei hier geschilderten Vermutungen, dürfte also von der gleichen Einwendung wie jene bedroht sein.

Heronisch ist es wieder, wenn unter Anwendung von Proportionen Höhen mit Hilfe von Schattenlängen gemessen werden[1]). Von Interesse ist uns dann noch die stereometrische Aufgabe, den Rauminhalt einer abgestumpften quadratischen Pyramide zu finden, für welche Brahmagupta drei Lösungen angibt, eine für Praktiker, eine für annähernde, eine für genaue Rechnung[2]). Der Praktiker begnüge sich mit dem Produkte der Höhe in das Quadrat des Mittels zwischen den Seiten an der unteren und oberen Fläche des Stumpfes. Annähernd richtig, fährt Brahmagupta fort, sei das Produkt der Höhe in das Mittel der Grundflächen. Wir gehen wohl nicht fehl, wenn wir darin eine Bestätigung unserer oben ausgesprochenen Vermutung über die Entstehung der falschen Formel für den Rauminhalt der dreieckigen Pyramide bei Âryabhaṭṭa erkennen. Richtig sei, wenn man den Inhalt des Praktikers um den dritten Teil des Unterschiedes der Inhalte des Praktikers und des annähernd Rechnenden vergrößere. Dieser letzte Ausspruch ist vollkommen wahr. Heißen a_1 und a_2 die Seiten der beiden quadratischen Grundflächen und ist h die Höhe des Pyramidenstumpfes, so ist richtig dessen Inhalt $= h \cdot \frac{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}{3}$. Der Praktiker rechnet aber nach Brahmagupta $h \cdot \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$; annähernd richtig sei $h \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$ und nun ist

$$h \cdot \frac{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}{3} = h \cdot \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left[h \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} - h \cdot \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2\right].$$

Wir sind oben mit sehr kurzen Worten über die Flächenformel Brahmaguptas für das Viereck hinweggegangen, welche als besonderen Fall die heronische Dreiecksformel einschließt. Daß die Vierecksformel als eine allgemeine nicht gelten kann, ist ersichtlich. Gleichwohl hat Brahmagupta in jenem ersten Paragraphen seiner geometrischen Lehren in keiner Weise ausgesprochen, daß er der Formel nur bedingte Zulässigkeit für gewisse Vierecke, *caturaçra*, zuschreibe. Man hat in verschiedener Weise sich dieser Schwierigkeit gegenüber einen Ausweg zu bahnen gesucht. Man hat angenommen, Brahmagupta, ein hervorragend geometrischer Geist, habe

---

[1]) Colebrooke pag. 317. *Section IX, Measure by shadow.* [2]) Ebenda pag. 312—313, § 45—46.

eigentlich nur vom Sehnenviereck reden wollen; auf dieses bezögen sich auch einige andere Sätze, deren wir hier Erwähnung zu tun unterlassen, und Brahmagupta sei nur aus Kürze dunkel geblieben[1]). Man hat im schroffen Gegensatze dazu und an dem Wortlaute der Regel bei Brahmagupta festhaltend ihn beschuldigt, er habe die Regel, die er an einem besonderen Vierecke entdeckt habe, wirklich auf alle bezogen[2]). Man hat dagegen wieder von anderer Seite in Brahmaguptas Text alles finden wollen, was zum Verständnis nötig sei. Im 26. Paragraphen lehre nämlich Brahmagupta die Berechnung des Durchmessers des Umkreises, und darin liege ausgesprochen, daß die gemeinten Vierecke einen Umkreis besäßen; im 38. Paragraphen definiere er „die Aufgerichteten und die Seiten zweier rechtwinkliger Dreiecke wechselweise mit der Diagonale vervielfacht sind vier unähnliche Seiten eines Trapezes; die größte ist die Grundlinie, die kleinste die Scheitellinie, die beiden anderen sind die Seiten", und diese Definition, der man trotz ihrer Dunkelheit einen guten Sinn abzugewinnen wußte, bilde einen zweiten Kern der ganzen Untersuchung, welche aber nur für Vierecke von den Gattungen stichhaltig sei, wie sie hier näher bestimmt wurden[3]). Auch dieser Meinung ist man entgegengetreten: Brahmagupta werde doch nicht in § 38 erst definieren, was er seit § 21 benutze; er werde den Gang seiner Untersuchung doch nicht so eingerichtet haben, daß man besser daran tue, sie von hinten nach vorn als in der Folge zu lesen, wie er sie niederschrieb; er werde doch endlich nicht als Formel für das Tetragon, das Viereck also, aussprechen, was er vom Trapeze meinte; und nach diesen freilich nicht ungewichtigen Einwürfen hat man versucht zu zeigen, wie Brahmagupta rechnend und durch Induktion von der ihm bekannten Dreiecksformel aus zu der entsprechenden Vierecksformel gelangte, deren bedingte Gültigkeit ihm nur nach und nach klar wurde[4]). Diese sehr verschiedenen Auffassungen können uns nur bestimmen, die Dunkelheit des ganzen Kapitels bei Brahmagupta von § 21 bis § 38 als eine bisher noch nicht vollständig vernichtete zu erklären. Wir glauben dabei noch immer an die Richtigkeit einiger aus der Formel von § 26 und der Definition von § 38 gezogenen Schlüsse, möchten aber doch nicht so zuverlässig behaupten, jede Schwierigkeit sei damit verschwunden.

Wir meinen freilich, ein Teil der Schwierigkeiten sei durch unglückliche Übersetzung entstanden, welche das Wort Trapez anwandte,

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 420 sqq., deutsch 465 flgg. [2]) Arneth, Geschichte der reinen Mathematik S. 145 flgg. (Stuttgart 1852). [3]) Hankel S. 210—215. [4]) Weißenborn, Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmagupta in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik II, 169—184 (1879).

wo es nach dem Sinne, welchen man diesem Worte beizulegen gewohnt ist, nicht angewandt werden durfte. Caturveda Pṛithûdakasvâmin, ein Scholiast des Brahmagupta, der selbst vor Bhâskara lebte, der ihn anführt[1]), gibt zu dem die Flächenformel enthaltenden § 21 eine wichtige zu wenig berücksichtigte Erläuterung[2]): Dreierlei Dreiseite gebe es, fünferlei Vierecke und als neunte ebene Figur den Kreis; die Dreiseite seien gleichseitig, gleich für zwei Seiten und ungleichseitig; die Vierecke seien gleiche, paarweis gleiche, mit zweien gleiche, mit dreien gleiche und ungleiche Vierecke. Man sieht wohl: von Parallelismus, von Trapez und dergleichen ist dabei ausdrücklich wenigstens nicht die Rede, und wenn man die fünf Gattungen von Vierecken aus den Beispielen, die derselbe Pṛithûdakasvâmin beifügt, zu bestimmen sucht, so findet man, daß das gleiche Viereck das Quadrat, das paarweise gleiche das Rechteck ist; daß unter dem mit zweien gleichen und mit dreien gleichen gleichschenklige Paralleltrapeze zu verstehen sind, deren kleinere Parallelseite in dem zweiten Falle auch noch den beiden gleichen Schenkeln gleich sein soll. Die fünfte Gattung von Vierecken, nämlich die unter gewissen anderen zu erfüllenden Bedingungen ungleichen Vierecke sind im § 38 definiert. Nun sieht man, welche heillose Verwirrung entstehen mußte, sobald man die Vierecke letzter Gattung Trapeze nannte, statt irgend ein anderes Wort, z. B. unser ungleiches Viereck zu wählen. Man sieht aber noch mehr. Man sieht, daß die fünf Gattungen von Vierecken keineswegs richtig gewählt sind. Sie erschöpfen den Begriff des Vierecks durchaus nicht. Aber darin sehen wir nur einen weiteren Beweis für den ausländischen Ursprung der indischen Geometrie. Die Fünfzahl der Vierecke ist vielleicht selbst auf griechische Erinnerung zurückzuführen, da Euklid in der 30. bis 34. Definition des I. Buches seiner Elemente ebensoviele Gattungen unterscheidet: Quadrat, Rechteck, Rhombus und Rhomboid, unregelmäßiges Viereck, in seinen Gattungen freilich jeder Möglichkeit einen Platz zuweisend. Nun waren den Indern nur Sätze über die fünf unberechtigten Vierecksarten, welche Pṛithûdakasvâmin uns nennt, bekannt geworden; nur mit ihnen also hatte man sich zu beschäftigen. Es waren das in den vier ersten Gattungen gerade die Vierecke, welche Heron mit Vorliebe behandelt hat, das Quadrat und das Rechteck und das gleichschenklige Trapez, die Lieblingsfigur schon der alten Ägypter. Was die Zerfällung der Trapeze in solche mit zwei und mit drei gleichen Seiten betrifft, so kann man verschiedener Meinung sein. Man kann meinen, da bei Heron verschiedene Gattungen von Parallel-

[1]) Colebrooke pag. 245, § 174 und Note 5. [2]) Ebenda pag. 295, Note 1.

trapezen gefunden worden waren, deren Unterscheidungsgrundlage man nicht verstand, so habe man auf eigene Faust neue Gruppen gebildet; man kann aber auch an einen griechischen Ursprung denken, da beispielsweise Hippokrates von Chios (S. 208) sich mit Paralleltrapezen mit drei gleichen Seiten vielfach abquälte und es daher wohl möglich ist, daß Spätere auch noch um diese Figur sich kümmerten, ohne daß wir unmittelbar davon wissen. Kehren wir jetzt zu § 26 Brahmaguptas zurück. Wenn darin von dem Halbmesser des Umkreises zuerst jedes Vierecks mit ausdrücklicher Ausnahme des ungleichen Vierecks die Rede ist, so sind eben nur die vier ersten Gattungen gemeint, und diese vier sind zweifellos Sehnenvierecke, und wenn in demselben Paragraphen fortfahrend auch die Berechnung des Halbmessers des Umkreises der fünften Vierecksgattung gelehrt wird, so ist wieder zweifellos auch für diese Gattung die Eigenschaft als Sehnenviereck damit in Anspruch genommen.

Jene ungleichen Vierecke der fünften Gattung entstehen aber gemäß § 38 auf folgende Weise. Man denke (Fig. 85) zwei rationale rechtwinklige Dreiecke aus den Seiten c_1, c_2, h und C_1, C_2, H gebildet. Man vervielfache die Seiten des ersteren zuerst mit C_1, dann mit C_2, so sind auch $c_1 C_1$, $c_2 C_1$, $h C_1$ und $c_1 C_2$, $c_2 C_2$, $h C_2$ Seiten zweier rechtwinkliger Dreiecke. Diese beiden setzt man mit den rechten Winkeln als Scheitelwinkeln aneinander, so daß $c_1 C_1$ als Fortsetzung von $c_2 C_2$ und $c_1 C_2$ als Fortsetzung von $c_2 C_1$ erscheint, beziehungsweise daß $c_1 C_1 + c_2 C_2$ und $c_1 C_2 + c_2 C_1$ zwei sich senkrecht durchkreuzende Gerade bilden, welche als Diagonalen eines leicht zu vollendenden Vierecks auftreten. Gegenseiten dieses Vierecks sind, wie wir schon wissen, $h C_1$ und $h C_2$; das andere Paar Gegenseiten heißt leicht ersichtlich $H c_1$ und $H c_2$. Alle vier Vierecksseiten sind voneinander verschieden, sind ungleich; das Viereck ist aber aus vier rationalen rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt, und je zwei Scheiteldreiecke sind einander ähnlich. Diese ungleichen Vierecke sind unter denen der fünften Gattung verstanden, und die Gleichheit der Summe je zwei gegenüberstehender Winkel kennzeichnet sie als Sehnenvierecke. Zu ihrer Bildung sind also Zusammensetzungen rechtwinkliger Dreiecke notwendig, welche Heron gekannt hat (S. 399), und für welche er in seiner Geometrie des eigenen Kunstausdruckes zusammenhängender rechtwinkliger Dreiecke,

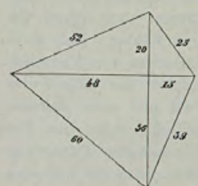


Fig. 85.

τρίγωνα ὀρθογώνια ἡνωμένα, sich bediente. Durch ähnliche Zusammensetzung ist aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken 5, 12, 13 und 9, 12, 15 an der Kathete 12 das in allen Beziehungen rationale berühmte Dreieck 13, 14, 15 entstanden, welches Heron kannte, welches auch den Indern vielfach als Beispiel diente.

Vor der Zusammensetzung rationaler rechtwinkliger Dreiecke müssen wir aber auch die Kenntnis rationaler rechtwinkliger Dreiecke selbst als vorausgehend vertreten finden. Heron hat sich mit solchen beschäftigt; auch bei Brahmagupta fehlen sie nicht, der, wie wir schon (S. 628) andeuteten, zweimal darauf zurückkommt, zuerst in seinem geometrischen Kapitel und dann eingeschaltet zwischen dem Rechnen mit irrationalen Quadratwurzeln, wo die Regel am deutlichsten ausgesprochen ist[1]). Man solle c, $\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{b} - b\right)$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{b} + b\right)$ als Seiten wählen, wobei c und b ganz beliebige Werte haben. Diese Formel, welche die unter dem Namen des Pythagoras und des Platon bekannten Sonderfälle durch $b = 1$ und $b = 2$ in sich schließt, ist genau so bei keinem Griechen uns begegnet, stimmt aber zu der (S. 645) erörterten Entstehungsweise rationaler rechtwinkliger Dreiecke. Dieser Umstand ebenso wie die Stelle, wo die Regel sich ausgesprochen findet, geben ihr ein, wenn auch nicht altindisches, immerhin indisches Gepräge, aber die Aufgabe, welche durch sie ihre Lösung fand, dürfte griechisch sein, dürfte, wenn man den Ausdruck gestatten will, in Indien nur noch mehr algebraisiert worden sein, als sie es schon war.

Wir denken nicht, daß alle diese kleineren und größeren Übereinstimmungen zwischen Heron und Brahmagupta der Annahme unseres Grundgedankens entgegenwirken können, und fragen nun, was aus einer so aus der Fremde eingeführten Lehre im Lauf der Zeiten werden mußte? Wesentliche Fortschritte dürfen und können wir bei einem nicht geometrisch angelegten Volksgeiste nicht erwarten. Im Gegenteil, manches anfänglich Verstandene muß verloren gegangen sein. Nur Aufgaben einer algebraischen Geometrie werden den indischen Geist ansprechend weitere Pflege erfahren und sich vielleicht in einem Umfange erhalten haben, der das bei Brahmagupta Vorhandene überragt. Die Geometrie des Bhâskara[2]) erfüllt diese unsere Erwartung.

Bis zu Bhâskara ist vor allen Dingen der Rest des Verständnisses der Formel für die Vierecksfläche verloren gegangen. In einem Vierecke mit denselben Seiten, sagt er, gibt es verschiedene Diago-

[1]) Colebrooke pag. 340, § 38. [2]) Ebenda pag. 58—111.

nalen. „Wie kann jemand, der weder eine Senkrechte noch eine der Diagonalen angibt, nach dem Übrigen fragen? oder wie kann er nach der bestimmten Fläche fragen, wenn jene unbestimmt sind? Ein solcher Fragesteller ist ein tölpelhafter böser Geist. Noch mehr ist es aber der, welcher die Frage beantwortet, denn er berücksichtigt nicht die unbestimmte Natur der Linien in einer vierseitigen Figur“[1]). Hinzugekommen ist die Kreisverhältniszahl $\pi = \frac{22}{7}$, welche als für Praktiker genügend erklärt wird, während der feinere Umfang $\frac{3927}{1250}$ mal dem Durchmesser sei[2]). Hier ist allerdings etwas rätselhaft. Das erste Verhältnis ist das archimedische, das zweite das von Âryabhaṭṭa in der Form $\frac{62832}{20000}$ benutzte, während diesem die archimedische Zahl nicht bekannt oder, was noch auffallender wäre, nicht mitteilenswert gewesen zu sein scheint, und doch soll es die Methode Archimeds gewesen sein, welche zu dem genaueren Werte geführt hat. Archimed, erinnern wir uns, ließ vom Sechsecke ausgehend die Seitenzahl des eingeschriebenen Vielecks sich immer verdoppeln, bis er zum 96eck gelangte (S. 303). Gaṇeça, der Kommentator Bhâskaras, berichtet uns, man sei vom Sechsecke durch stete Verdoppelung der Seitenzahl bis zum 384eck vorgeschritten und habe so $\pi = \frac{3927}{1250}$ gefunden. Bhâskara bedient sich übrigens auch noch einer anderen Annäherung[3]), nämlich $\pi = \frac{754}{240} = 3{,}141\,666\ldots$ Hinzugekommen sind ferner einige Aufgaben über rechtwinklige Dreiecke, welche unsere Aufmerksamkeit verdienen. Sie finden sich nicht, wie die bisher angeführten Dinge, in der Lilâvatî, sondern in dem Vîja Gaṇita genannten algebraischen Kapitel. Es wird verlangt, die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden, wenn neben der Summe derselben erstens das Produkt der beiden Katheten oder zweitens das Produkt der drei Seiten gegeben ist[4]). Die erstere Aufgabe ähnelt nämlich ebensowohl der heronischen Aufgabe vom Kreise, bei welcher Summen von Stücken verschiedener Dimensionen gegeben sind (S. 404), als der des Nipsus aus Hypotenuse und Fläche, d. h. also halbem Produkte der Katheten die Dreiecksseiten selbst zu finden (S. 556). Bhâskara löst die erste Aufgabe wie folgt. Ist $c_1 c_2 = p$, so ist

$$2p = 2c_1c_2 = (c_1+c_2)^2 - (c_1^2+c_2^2) = (c_1+c_2)^2 - h^2 = (c_1+c_2+h)(c_1+c_2-h).$$

Da nun $c_1 + c_2 + h = s$ gegeben ist, so folgt $c_1 + c_2 - h = \frac{2p}{s}$ und

[1]) Colebrooke pag. 73. [2]) Ebenda pag. 87. [3]) Ebenda pag. 95, § 214.
[4]) Ebenda pag. 225—226, § 151—152.

$$2h = s - \frac{2p}{s}, \quad h = \frac{s^2 - 2p}{2s}, \quad c_1 + c_2 = \frac{s^2 + 2p}{2s}.$$

Die Katheten findet man noch einzeln, indem von $(c_1 + c_2)^2 = \left(\frac{s^2 + 2p}{2s}\right)^2$ der Wert $4c_1c_2 = 4p$ abgezogen wird; so entsteht nämlich

$$(c_1 - c_2)^2 = \frac{s^4 - 12ps^2 + 4p^2}{4s^2}$$

und daraus $c_1 - c_2$, welches in Gemeinschaft mit $c_1 + c_2$ die Katheten liefert. In der zweiten Aufgabe ist $c_1 \cdot c_2 \cdot h = p$ und $c_1 + c_2 + h = s$ gegeben. Aus $s - h = c_1 + c_2$ erhält man

$$s^2 - 2sh + h^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 = h^2 + \frac{2p}{h},$$

mithin ist $s^2 - 2sh = \frac{2p}{h}$ und $2sh^2 - s^2h = -2p$. Daraus findet man h, daraus $s - h = c_1 + c_2$ und $\frac{4p}{h} = 4c_1c_2$, und nun ist es wieder leicht $c_1 - c_2$ und endlich die Katheten zu finden. Das sind Methoden, welche der von Nipsus angewandten entschieden ähneln, so wenig in Abrede gestellt werden soll, daß Bhâskaras Aufgaben die bei weitem verwickelteren sind. Hinzugekommen sind endlich einige Beweise geometrischer Sätze durch Rechnung, und einige auf Anschauung beruhende, wenn man letztere als Beweise gelten lassen darf. Ein Beispiel beider Auffassungen bildet der Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes, der sich in dem Vîja Gaṇita vorfindet[1]). Das eine Mal wählt man die Hypotenuse zur Grundlinie, auf welche (Fig. 86) von der Spitze des rechten Winkels aus eine Senkrechte gefällt wird, und weist auf die Eigenschaft der zwei so entstehenden rechtwinkligen Dreiecke hin, mit dem ursprünglichen Proportionalitäten zu bilden. So kommen, wenn h_1 und h_2 die Stücke der Hypotenuse h heißen, die je an c_1 und c_2 anstoßen, die Verhältnisse heraus

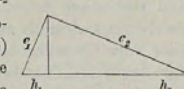


Fig. 86.

$$\frac{c_1}{h} = \frac{h_1}{c_1} \quad \text{und} \quad \frac{c_2}{h} = \frac{h_2}{c_2},$$

und daraus folgt

$$h(h_1 + h_2) = h^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

Bei Euklid (VI, 8 der Elemente) findet sich zwar nicht dieser rechnende Beweis selbst, aber doch dessen Grundlage, daß die Senkrechte aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse zwei dem ganzen Dreiecke ähnliche Teildreiecke hervorbringt.

[1]) Colebrooke pag. 220—222, § 146.

Der andere Beweis, welcher, wie im 34. Kapitel sich zeigen wird, mehr als 200 Jahre vor Bhâskara schon bekannt war, konstruiert (Fig. 87) über jede Seite des Quadrates der Hypotenuse nach innen zu das rechtwinklige Dreieck. „Sehet!“ Damit begnügt sich Bhâskara und erwähnt nicht einmal, daß die Anschauung

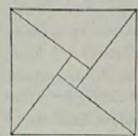


Fig. 87.

$$h^2 = 4 \times \frac{c_1 \cdot c_2}{2} + (c_1 - c_2)^2 = c_1^2 + c_2^2$$

liefere. Ganz ähnlicher Natur sind Beweise, welche der Kommentator Gaṇeça zu Sätzen Bhâskaras beigebracht hat[1]). Die Dreiecksfläche wird erhalten als Rechteck der halben Höhe und der Grundlinie (Fig. 88). Sehet! Die Kreisfläche wird erhalten als Rechteck des halben Durchmessers in den halben Kreisumfang (Fig. 89). Sehet!

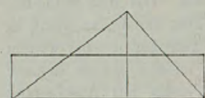


Fig. 88.

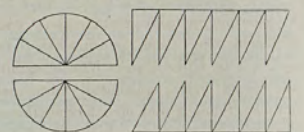


Fig. 89.

Diese Beweisform, welche bei Brahmagupta nirgend auftritt, muß wohl als indisch betrachtet werden. Sie ist mit der algebraischen Beweisform verbunden ungemein charakteristisch für die Darstellungsweise jener Geometer. Rechnen in nahezu unbegrenzter Möglichkeit oder Anschauen, darüber kommen sie nicht hinaus. Das eine wie das andere ist zum Beweise schon bekannter Sätze gleich gut anzuwenden, die Rechnung ist strenger, die Berufung auf unmittelbare Anschauung vielfach überzeugender. Aber kann letztere zur Erfindung neuer Sätze führen? Kann es erstere, wenn nicht eine gewisse Summe geometrischer Sätze als Ausgangspunkt vorhanden ist, unter welchen der pythagoräische Lehrsatz einer der wichtigsten ist? Kann der pythagoräische Lehrsatz gefunden worden sein von einem Beweise ausgehend, wie die beiden durch Bhâskara uns überlieferten? Wir wissen, daß diese Fragen bald verneinend bald bejahend beantwortet worden sind, daß man gerade den auf Fig. 87 beruhenden Beweis des Satzes von dem Quadrate der Hypotenuse bis zu einem gewissen Grade für die Entstehung des Satzes in Anspruch genommen hat. Wir persönlich können diese Ansicht nicht teilen. Wir kommen, wie wir es in unserer seitherigen Schilderung indischer Geometrie

[1]) Colebrooke pag. 70, Note 4 und pag 88, Note 3.

überall haben durchklingen lassen, immer wieder zur Überzeugung, es sei für die Inder nach einer frühen Periode geometrischer Beeinflussung von Norden her eine solche eingetreten, in welcher von Südwesten her Fremdes eindrang, Fremdes, welches der indischen Denkweise entsprach, also weniger der „Euklid“ mit seinen streng geometrischen Folgerungen, als der „Heron“ mit seinen Rechnungen. Eine solche Übertragung schließt keineswegs aus, daß indische Mathematiker des überkommenen Stoffes sich in ihrer Weise bemächtigten, ihn mißhandelten oder behandelten, wie sie es eben verstanden, bald einen Rückgang, bald einen Fortschritt zuwege bringend.

Am unzweifelhaftesten sind die Fortschritte, welche der der Rechnung am meisten bedürftige Teil der alten Geometrie bei den Indern gemacht hat, die Trigonometrie[1]). Hier ist zwar von Griechenland aus sicherlich die archimedische Verhältniszahl $\frac{22}{7}$ der Kreisperipherie zum Durchmesser nach Indien gedrungen (S. 654). Vielleicht mag auch griechischen Ursprunges sein, wie die Höhe h eines Kreisabschnittes, sein *utkramajyâ* nach indischem Sprachgebrauche, mit der Sehne s und dem Kreishalbmesser r in Verbindung steht, wir meinen (Fig. 90) die leicht abzuleitende Gleichung

$$2hr - h^2 = \frac{s^2}{4} \quad \text{oder} \quad s = 2\sqrt{h(2r - h)}.$$

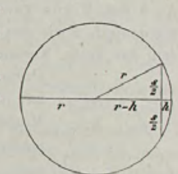


Fig. 90.

Aber ihre ganze weitere Rechnungsweise beginnend von dem Maße der Linien im Kreise ist so ungriechisch wie möglich, also vermutlich indischen Ursprunges.

Allerdings zerlegt der Inder, wie wir schon früher betont haben, gleich dem Griechen und wahrscheinlich babylonischer Sitte folgend den ganzen Kreisumfang in 360 Grade oder in 21600 Minuten, da jeder Grad gleich 60 Minuten ist; aber wenn dann der Grieche den Halbmesser gleichfalls in 60 Teile mit sexagesimal fortschreitenden Unterabteilungen zerlegt, so fragt der Inder, wie groß der Kreisbogen in Minuten sei, zu welchem der Halbmesser sich zusammenbiegen läßt. Er vollzieht eine Arkufikation der geraden Linie und muß dazu des schon bei Âryabhaṭṭa vorkommenden Wertes $\pi = 3{,}1416$ sich bedient haben, denn nur dann folgt aus $2\pi r = 21600$ Minuten,

[1]) Vgl. außer Colebrooke den Sûrya Siddhânta und das von Rodet übersetzte Kapitel des Âryabhaṭṭa. Ferner *Asiatic researches* (Calcutta) II, 225; daraus Arneth, Geschichte der reinen Mathematik S. 171—174. Woepcke, *Sur le mot kardaga et sur une méthode indienne pour calculer les sinus* in den *N. ann. math.* (1854) XIII, 386—394. A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 31—42.

$r = \frac{21\,600}{6{,}2832} = 3437{,}7\ldots$ in ganzen Zahlen am nächsten $r = 3438$ Minuten, wie der Inder rechnet. Es ist nicht unmöglich, daß der Gedanke der Arkufikation darin wurzelt, daß die Trigonometrie der Inder wie der Griechen in astronomischen Aufgaben ihren Ursprung hat, also zunächst eine sphärische Trigonometrie war, in welcher nur Bogen vorkommen, wenn auch im übrigen, wie wir noch bemerken werden, von sphärisch-trigonometrischen Aufgaben keine Rede ist.

Von $r = 3438$ Minuten als erster Tatsache ausgehend wurde nun die ähnlicherweise in Minuten umgebogene Länge anderer Geraden im Kreise gesucht. Die Sehne, welche einen Bogen bespannt, wurde *jyâ* oder *jiva* genannt, welche Wörter auch die Sehne eines zum Schießen bestimmten Bogens bezeichnen. Die halbe Sehne hieß dann *jyârdha* oder *ardhajyâ* und wurde unter letzterem Namen auch zum halben Bogen in Beziehung gesetzt. Sie war nichts anderes als was die spätere Trigonometrie den Sinus jenes Bogens genannt hat. Auch den Sinus versus unterschied man, wie schon bemerkt, als *utkramajyâ*, sowie den Kosinus als *koṭijyâ*. Man wußte zugleich aus dem aus Sinus, Kosinus und Halbmesser bestehenden rechtwinkligen Dreiecke, daß $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = r^2 = (3438)^2$. Da nun die Sehne von 60^0 dem Halbmesser oder 3438 Minuten gleich ist, so mußte ihre Hälfte oder in moderner Schreibweise $\sin 30^0 = \frac{r}{2} = 1719$ Minuten sein. Man war nun imstande, aus dem Sinus eines Bogens den des halb so großen Bogens zu finden, da (Fig. 91) $2\sin\frac{\alpha}{2}$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks bildet, dessen beide Katheten $\sin\alpha$ und $\sin\text{vers}\,\alpha$ sind. Folglich mußte


Fig. 91.

$$\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = (\sin\alpha)^2 + (\sin\text{vers}\,\alpha)^2$$

sein. Aber $\sin\text{vers}\,\alpha = r - \cos\alpha$ und $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = r^2$ in Berücksichtigung gezogen, wird auch $\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2r^2 - 2r\cdot\cos\alpha$ und

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{r}{2}(r - \cos\alpha)} = \sqrt{1719\,(3438 - \cos\alpha)}\,.$$

So verschaffte man sich vielleicht die Zahlen, welche im Sûrya Siddhânta unter anderen angegeben sind: $\sin 15^0 = 890$ Minuten, $\sin 7^0\,30' = 449$ Minuten, $\sin 3^0\,45' = 225$ Minuten. Aber $3^0\,45'$ sind selbst 225 Minuten, also bei soweit fortgesetzter Bogenhalbierung fiel der Sinus mit dem Bogen zusammen, war ihm an Länge gleich, sofern man es bei der Genauigkeit von einer Minute bewenden ließ, und um so mehr mußte diese Gleichheit für noch kleinere

Bögen und deren Sinus stattfinden d. h. es mußte $\sin\alpha = \alpha$ sein, wofern $\alpha \leqq 225'$ war. Damit war dem Bogen von $225'$ oder, wie wir auch sagen können, dem 96. Teile des Kreisumfanges eine besondere Wichtigkeit beigelegt, welche ihn würdig machte durch einen besonderen Namen ausgezeichnet zu werden. Man nannte seinen Sinus und ihn selbst den geraden Sinus, *kramajyâ*.

Wenn wir uns ausdrückten, man habe vielleicht von $\sin 30^0$ ausgehend durch Bogenhalbierung $\sin 225' = 225'$ gefunden, so gebrauchten wir dieses einschränkende Wort, weil möglicherweise auch der umgekehrte Weg eingeschlagen wurde. Die archimedische Verhältniszahl $\frac{22}{7}$ war gefunden worden, indem man das 96eck als mit dem umschriebenen Kreise nahezu zusammenfallend sich dachte; daraus könnte man Veranlassung genommen haben, auch $\sin\frac{360^0}{96} = \frac{360^0}{96}$ zu setzen und zum voraus diese Annäherung als genügend zu betrachten.

Sei dem nun, wie da wolle, jedenfalls spielte von nun an der Bogen von $225'$ wie dessen Vielfache und die Sinus derselben in der indischen Trigonometrie eine Rolle, deren Wichtigkeit zur Genüge hervortreten wird, wenn wir sagen, dieser Bogen bildete die Bogeneinheit einer Sinustabelle, die sich von $3^0\,45'$ bis 90^0 in 24 Werten erstreckte. Die Auffindung der Sinusse der durch Zusammensetzung von Bögen gebildeten größeren Bögen erfolgte nach ähnlichen Methoden, wie Ptolemäus sie im Almageste gelehrt hat. Nachdem die Tabelle gebildet war, erkannte man vermutlich empirisch das Zahlengesetz, daß

$$\sin((n+1)\,225') - \sin(n\cdot 225') = \sin(n\cdot 225') - \sin((n-1)\,225') - \frac{\sin(n\cdot 225')}{225}$$

war, und benutzte nunmehr diese Interpolationsformel, um die Tabelle selbst jeden Augenblick herstellen zu können. Bhâskara ist sogar bei dieser Tabelle nicht stehen geblieben. Er hat die Sinusse und Kosinusse in Bruchteilen des Halbmessers des Kreises angegeben:

$$\sin 225' = \frac{100}{1529}, \quad \cos 225' = \frac{466}{467}; \qquad \sin 1^0 = \frac{10}{573}, \quad \cos 1^0 = \frac{6568}{6569},$$

wo jedesmal die betreffenden Teile des Halbmessers gemeint sind; er hat die Berechnung einer Sinustabelle gelehrt, deren Bögen von Grad zu Grad fortschreiten. Damit steht vielleicht eine in der Lîlâvati[1]) mitgeteilte Formel in Verbindung, welche die Sehne s aus

[1]) Colebrooke pag. 94, § 213.

dem Kreisumfange P, dem Durchmesser d und dem Bogen B finden lehrt: $s = \frac{4\,d\,B\,(P-B)}{\frac{5}{4}P^2 - B(P-B)}$, eine Formel, deren Ableitung noch nicht enträtselt ist, welche aber eine ziemlich genügende Annäherung liefert[1]).

Trigonometrie als Berechnung von Dreiecksstücken eines beliebigen Dreiecks mit Hilfe von Winkelfunktionen scheinen die Inder nicht gekannt zu haben. Sie führen vielmehr fast alle Aufgaben auf ebene und zwar auf rechtwinklige Dreiecke zurück und konnten so mit ihren planimetrischen Kenntnissen ausreichend die verschiedenen vorkommenden Fragen beantworten.

Als wesentlicher Fortschritt, den die Trigonometrie in Indien machte, bleibt danach das übrig, was wir oben besprachen: die Sinustabelle. Die Sehnen waren verdrängt durch ihre Hälften. Was im Analemma des Ptolemaeus angedeutet war (S. 423), aber bei dem Griechen nicht seine in Zahlen umgesetzte Ausbildung fand, dessen Wichtigkeit ahnte wenigstens der rechnungsgeübte Inder. In dem Sûrya Siddhânta findet sich bereits eine Sinustabelle. Die ganze Tragweite der damit vollzogenen Abänderung ergab sich allerdings auch den Indern noch nicht, sondern erst ihren Nachfolgern, den Arabern.

[1]) Ein Herleitungsversuch der Formel von Suter in den Verhandlungen des III. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904 S. 556—558 scheint uns zu kühn, um ihn aufzunehmen.

VI. Chinesen.