19. Kapitel.

Heron von Alexandria. (Fortsetzung.)

Von der Abhandlung über die Dioptra wenden wir uns zu einem raschen Überblick über anderes, was von Zeugen, deren Zuverlässigkeit unbestritten ist, unserem Heron zugeschrieben wird. Der erste Zeuge ist Proklus, der in seinen Erläuterungen zu Euklids Elementen zwei Beweise als von Heron stammend anführt[1]), einen Beweis des Satzes, daß in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite ist und einen solchen des Satzes, daß wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten stückweise übereinstimmen, in der dritten aber nicht, der der dritten Seite gegenüberliegende Winkel in dem Dreiecke der größere sein wird, in welchem die genannte Seite die größere ist. Der zweite Zeuge ist Al Nairizi[2]), der gleichfalls Erläuterungen zu Euklids Elementen verfaßte und darin vielfach auf Heron sich beruft. Diese Berufung findet allerdings für die beiden durch Proklus überlieferten Beweise nicht statt[3]), deren ersten Al Nairizi ohne Urhebernamen wiedergibt und den zweiten mit der Bemerkung, er wisse nicht, von wem der Beweis herrühre, aber dadurch verlieren die anderen Zitate nicht an Wert. Es geht aus dem Mangel an Übereinstimmung, der sich vielfach auch darin äußert, daß Proklus keinen Urheber nennt, wo der Araber sich auf Heron beruft, nur hervor, daß beide nicht nach der gleichen Vorlage arbeiteten. Wir heben nur weniges hervor. Nach dem Berichte des Al Nairizi[4]) erkannte Heron, daß bei dem Euklidischen Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes die Senkrechte aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse und die Verbindungsgeraden der beiden anderen Dreiecksspitzen mit den gegenüberliegenden Eckpunkten der über den beiden Katheten nach außen gezeichneten Quadrate einen gemeinsamen Durchschnittspunkt besitzen. Heron bewies[5]), daß von jedem außerhalb eines Kreises gelegenen Punkte zwei gleiche Berührungslinien an den Kreis gezogen werden können. Heron dehnte den Satz, daß der Peripheriewinkel die Hälfte des Zentriwinkels auf gleichem Bogen sei, auf stumpfe Peripheriewinkel aus[6]) und bewies mit dessen Hilfe den Satz, daß im Sehnenviereck je zwei einander gegenüberliegende Winkel sich zu zwei Rechten ergänzen. Heron hat den Satz aus-

[1]) Proklus ed. Friedlein pag. 323 und 346. [2]) Anaritii in *decem libros priores Elementorum Euclidis* ed. Max Curtze. Leipzig 1899. [3]) Anaritius pag. 58 und 62. [4]) Ebenda pag. 78. [5]) Ebenda pag. 130. [6]) Ebenda pag. 130 bis 133.

gesprochen[1]), jedes regelmäßige Vieleck besitze einen von allen Eckpunkten gleich weit entfernten Mittelpunkt, der zugleich Mittelpunkt des Umkreises und des Innenkreises des Vielecks sei. Heron behauptet[2]), die Halbierende eines Winkels eines regelmäßigen Vielecks halbiere zugleich auch den gegenüberliegenden Winkel, und alle diese Winkelhalbierenden schnitten sich im gleichen Punkte. Die damit ausgesprochene Abpaarung der Winkel zeigt, daß Heron ausschließlich vom $2n$-Eck redete, und diese Einschränkung bestätigt sich mittelbar dadurch, daß gleich darauf[3]) der Satz Euklids erwähnt ist, im regelmäßigen $2n+1$ Eck[4]) stünden die Winkelhalbierenden auf den gegenüberliegenden Seiten senkrecht, und auch diese Winkelhalbierenden besäßen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt. Wo freilich dieser Euklidische Satz sich vorfand ist heute unbekannt. Ebensowenig weiß man, wo Euklid, wo Archimed eine Definition von homogenen Größen gegeben haben mögen, welche Heron dahin erläuterte[5]), homogene Größen seien Größen derselben Gattung, von denen die eine durch Vervielfachung über die andere hinauswachsen könne, während z. B. eine Strecke selbst ins Unendliche vervielfacht niemals größer als eine Fläche werden könne. Ganz besonders möchten wir aber hervorheben, daß Heron die Verfahren kannte, welche in lateinischer Übersetzung *dissolutio* und *compositio* heißen[6]), und welche wir Klammerauflösung und Absonderung nennen, d. h. daß er wußte, man sei berechtigt $6(2+3+5) = 6 \cdot 10 = 60$ und umgekehrt $10 \cdot 10 = 10 \cdot 3 + 10 \cdot 7 = 30 + 70$ zu setzen.

Nächst diesen Sätzen erwähnen wir Definitionen, welche ein zusammenhängendes Ganzes darstellend als heronisch überliefert sind, allerdings aber von manchen Schriftstellern[7]) für ganz unecht, von anderen, darunter von uns selbst, für überarbeitet und mehrfach entstellt gehalten werden. Deren Kern aber sehen wir keinen Grund Heron als Sammler, wenn nicht als Urheber, abzusprechen.

Eine hochwichtige Frage geht nun dahin, ob ursprünglich die hier erwähnten Sätze und Definitionen vereinigt oder getrennt vorhanden waren, und wenn vereinigt, in welcher Gestalt? Es dürfte wohl am meisten für sich haben die Vermutung auszusprechen, Heron habe einen Kommentar zu Euklids Elementen verfaßt, und in diesem seien auch diejenigen geometrischen Definitionen enthalten gewesen, welche Heron statt der von Euklid gegebenen an die Spitze der Geometrie gestellt wünschte. Wir wollen nicht verhehlen, daß dieser Vermutung Bedenken im Wege stehen, daß man

[1]) Anaritius pag. 152. [2]) Ebenda pag. 154. [3]) Ebenda pag. 155. [4]) *Figurarum quarum laterum numerus impar.* [5]) Anaritius pag. 162. [6]) Ebenda pag. 89. [7]) Friedlein im *Bulletino Boncompagni* IV, 93—121 (1871).

Zweifel hegen kann, ob schon im ersten vorchristlichen Jahrhunderte, an welchem wir, wie im vorigen Kapitel ausführlich begründet wurde, als Herons Lebenszeit festhalten, eine kommentierende Tätigkeit unter den Mathematikern Platz gegriffen hatte, daß man bei Proklus bei Erklärung der euklidischen Definitionen nirgend einer Erwähnung Herons begegnet, die doch, da sich Proklus für einige wenige Beweise auf unseren Schriftsteller bezieht, mit einiger Wahrscheinlichkeit zu erwarten gewesen wäre, aber wir ziehen trotz dieser Schwierigkeiten die ausgesprochene Vermutung einer anderen vor, zu welcher der Keim in Herons Definitionen selbst enthalten liegt. In einer Art von Widmung an Dionysius, welche der Verfasser der Definitionen diesen vorausschickt, heißt es nämlich, er wolle eine wissenschaftliche Darstellung der geometrischen Elemente[1]) geben, und später ist in ganz ähnlichen Worten von einer Einleitung in die arithmetischen Elemente[2]) die Rede. Man wäre dadurch versucht, an zwei mehr oder weniger selbständige Schriften mit diesen Titeln zu denken. Allein diese Ausdrücke lassen sich auch auf Kommentare zu den geometrischen und zu den arithmetischen Büchern Euklids deuten, so daß wir diese letztere Auffassung der gebrauchten Worte vorziehen.

Unter den Definitionen wollen wir eine besonders hervorheben, die der Parallellinien[3]), in welcher es heißt, sie besäßen alle Senkrechten, welche von irgend einem Punkte der einen Parallelen auf die andere gefällt werden, von gleicher Länge. Eben diese Definition in die Worte gekleidet, Parallellinien hätten gleichen Abstand voneinander, erscheint nämlich auch in einer als Geometrie Herons bezeichneten Schrift[4]), von der wir gleich zu reden haben werden, erscheint ferner bei Proklus[5]), wo sie dem Posidonius, also jedenfalls dem Posidonius von Rhodos, zugeschrieben wird, der ja auch in Herons Mechanik vorkommt (S. 365), lauter Umstände, die einander gegenseitig als Stütze zu dienen geeignet sind.

Wir gelangen weiter zu den Schriften, welche vor der Auffindung der Vermessungslehre als Hauptquellen für die Kenntnis heronischer Mathematik galten, und von welchen wir (S. 368) erörterten, in welchem Sinne wir sie alle als echt, alle zugleich als unecht bezeichnen möchten. Wir werden für sie mitunter den Ausdruck: heronische Sammlungen gebrauchen.

---

[1]) Heron (ed. Hultsch) pag. 7 lin. 1: τῆς γεωμετρικῆς στοιχειώσεως τεχνολούμενα. [2]) Ebenda pag. 34 lin. 12—13 und pag. 38 lin 1—2: ἐν τοῖς πρὸ τῆς ἀριθμετικῆς στοιχειώσεως. [3]) Ebenda pag. 22 lin. 15—17. [4]) Ebenda pag. 44 lin. 12—14. [5]) Proklus ed. Friedlein pag. 176 lin. 6—10. Vgl. auch L. Majer, Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid S. 18 Note 3. Tübingen 1875.

Die erste ist das Buch der Geometrie. Geometrische Definitionen, zwischen welche eine historische Notiz über den Ursprung der Geometrie mit Hinblick auf den jährlichen Austritt des Nils eingeschaltet ist, und eine Maßtabelle eröffnen dasselbe. Nach diesen kommt die Berechnung von Quadraten und Rechtecken, deren Fläche und deren Diagonale gesucht wird. Das rechtwinklige Dreieck folgt, auf dieses die aneinanderhängenden Dreiecke, das gleichseitige, das gleichschenklige, das beliebige Dreieck. Beim rechtwinkligen Dreiecke werden die Methoden des Pythagoras und des Platon zur Auffindung rationaler Seitenlängen gelehrt; beim beliebigen Dreiecke wird die Senkrechte von der Spitze auf die Grundlinie gefällt und unterschieden, ob diese Senkrechte die Basis selbst trifft und Abschnitte auf ihr erzeugt, oder ob sie jenseits der Basis eintreffend eine Überragung hervorbringt; es wird aber auch die heronische Formel unmittelbar angewandt, welche ohne Durchgang durch die Berechnung des Abschnittes, beziehungsweise der Überragung und der Höhe die Dreiecksfläche sofort aus den drei Seiten ableitet. Nun folgt die Rückkehr zum Vierecke und zu den mannigfaltigsten Zerlegungen einer Figur durch Hilfslinien. Quadrate in gleichschenklige Dreiecke eingezeichnet, Rhomben oder verschobene Quadrate, Rechtecke, Parallelogramme, rechtwinklige Trapeze, gleichschenklige Trapeze, beliebige Vierecke werden so der Berechnung unterzogen. Nach den geradlinig begrenzten Figuren wendet Heron sich zum Kreise und zu dessen Teilen. Durchmesser, Umfang, Inhalt des Kreises werden gegenseitig auseinander abgeleitet. Die Fläche eines Kreisabschnittes und die Länge seines Bogens werden aus der Sehne und Höhe des Abschnittes ermittelt, und auch der Ring zwischen zwei konzentrischen Kreisen wird berechnet. Vom Kreise kehrt der Verfasser zu den regelmäßigen Vielecken zurück, indem er Formeln gibt, welche die Flächen dieser Vielecke vom Fünfecke bis zum Zwölfecke aus der Seitenlänge finden lehren. Damit dürfte der richtige Text im ganzen abschließen, indem das noch folgende Stück (fünf Seiten der Druckausgabe füllend) ziemlich unzweifelhaft als unecht sich erweist. Dort ist nämlich eine dem Patrikius, also einem sehr späten Schriftsteller, angehörende Vorschrift, dort die Wiederholung der Vorschriften für die Vielecksberechnung, die Wiederholung der geschichtlichen Bemerkung über den Ursprung der Geometrie mit kaum erwähnenswerten Varianten, dort am Schlusse wieder eine Maßtabelle zu finden.

Eine andere Schrift heißt Geodäsie. Auch sie beginnt mit Definitionen, mit einer historischen Notiz, mit Maßvergleichungen; auch sie berechnet den Flächeninhalt von Quadraten und Rechtecken, bevor sie zum Dreiecke sich wendet, und zwar wieder zum rechtwinkligen Dreiecke, welches nach Pythagoras und Platon aus ganzzahligen Seiten bestehen kann, zu den aneinanderhängenden Dreiecken, zu dem gleichseitigen, zu dem beliebigen Dreiecke, bei welchem die heronische Formel den Schluß bildet.

Die sogenannte Stereometrie ist begreiflicherweise wesentlich anderen Inhaltes. Hier sind es Rauminhalte von Körpern und Körperoberflächen, welche den Gegenstand der Berechnungen bilden. Die Kugel, der Kegel, der abgestumpfte Kegel, der in langgestreckter Form bald Obelisk, bald Säule heißt, der Zylinder geben Beispiele, bevor zu den allseitig eben abgegrenzten Körpern: Würfel, Parallelepipedon, Keil übergegangen wird, als dessen nicht ganz deutlich beschriebene Sonderfälle wohl der Huf, der Mäuseschwanz, der Ziegel zu betrachten sind. Fast eben diese, aber auch andere eben begrenzte Körper erscheinen sofort noch einmal als Pyramiden mit quadratischer, mit rechteckiger, gleichseitig dreieckiger, mit rechtwinklig dreieckiger Grundfläche, jede derselben sowohl ganz als abgestumpft der Untersuchung unterworfen. Dann kommen mancherlei der Praxis, aber nicht der eigentlichen Stereometrie angehörige Körperformen an die Reihe. Von dem Inhalt einer Muschel, einer Schale, von dem Umfange eines Amphitheaters und von der Menschenmenge, welche ein Zuschauerraum fassen kann unter der Annahme, daß die Bänke sich nach dem Gesetz einer arithmetischen Reihe verjüngen, von Speisesälen und Badezimmern, von Brunnen, von Kufen und Butten, von Transportschiffen ist die Rede, und wo man bei der Berechnung über die aus den Namen nicht mit genügender Klarheit hervorgehende Gestalt sich Rats erholen will, läßt jene uns meistenteils erst recht im Stiche.

Eine zweite Sammlung mit der Überschrift als Stereometrie und dem Verfassernamen Herons gibt auch nur meist zweifelhafte Ergebnisse, bald mit denen der ersten Sammlung übereinstimmend, bald ihnen widersprechend. Die Reihenfolge ist dahin verändert, daß hier rätselhafte Körperformen, die selbst nicht durchweg die gleichen wie die der ersten Sammlung sind, die Reihe eröffnen. Zwischendrein ist die Messung der Höhe einer Säule mittels ihres Schattens angegeben, das erstmalige Auftreten dieser von Thales (S. 138) herrührenden Methode in einem geometrischen Werke. Die Schatten der Säule sowie eines seiner Länge nach bekannten Stabes werden gemessen, und dann wird die Proportion Stabschatten : Säulenschatten = Stab : Säule in Anwendung gebracht. Nun folgen erst Pyramiden, und zwar solche auf rechtwinklig dreieckiger oder gleichseitig dreieckiger Grundlage und solche, deren Grundflächen regelmäßige Fünfecke, Sechsecke und Achtecke sind. Nach einer unverständlichen Stufenpyramide kommt der Satz, daß jede Pyramide der dritte Teil des Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe ist, worauf mit der Berechnung einer abgestumpften Pyramide auf rechteckiger Grundfläche unter dem Namen Altarstufe und mit der gegenseitigen Multiplikation von Längenmaßen zu Flächenmaßen diese Stereometrie abschließt.

Ausmessungen haben wir den Titel μετρήσεις einer weiteren Schrift heronischen Namens übersetzt, welche ungleich den vorigen, denen doch annähernd gleichartige Probleme zum Gegenstande dienen, bald Flächen, bald Körperinhalte durcheinander gewürfelt in zweimaliger Abwechslung darbietet. Zuerst erscheinen nämlich Körper, dann Flächen, dann wieder Körper, zuletzt Flächen. Wir heben aus der wirren Sammlung nur hervor, daß auch hier wieder Körper eigener Art auftreten, zu deren Verständnis noch gar manches fehlt, und daß zwischen die Inhaltsberechnungen auch Brunnenaufgaben eingeschaltet sind, d. h. Aufgaben, in welchen die Zeit gesucht wird, binnen welcher eine Zisterne durch mehrere Röhren gefüllt werden kann, wenn man weiß, wie lange die Füllung durch jede einzelne Röhre dauern würde.

Die letzte heronische Sammlung, das Buch des Landbaues, γεηπονικὸν βιβλίον, geht aus von Definitionen. Ihnen folgen Flächenausmessungen mancherlei Vierecke und Dreiecke, wobei die Vierecke den Dreiecken vorangehen, sowie rechnende Auflösung von Aufgaben, in welchen Kreise vorkommen. Nach Ausrechnung der Pyramiden auf quadratischer Grundfläche kehrt die Sammlung zu ebenen Aufgaben, zu den Durchmessern der dem regelmäßigen Fünfecke und Sechsecke umschriebenen Kreise zurück. Wieder erscheinen Aufgaben, welche, dem Gegenstande nach unerwartet, Einschaltungen sein könnten, und die sich auf die Auffindung von Rechtecken beziehen, deren Umfänge sowie deren Inhalt in gegebenem Zahlenverhältnisse stehen sollen, Aufgaben, welche also eigentlich zahlentheoretischer Natur freilich in planimetrischer Einkleidung sind, so daß die Unterbrechung des Gedankenganges nicht allzu auffällig und die Rückkehr zu wirklich geometrischen Aufgaben vom Rhombus, vom Rechtecke, von regelmäßigen Vielecken, von Kreisen eine leichte ist. Nur einmal gegen das Ende der Sammlung kehren stereometrische Aufgaben wieder, welche aber auf Fässer und Fruchtmaße eigentümlicher Gestalt bezüglich dem Buche des Landbaues nicht ganz unangemessen erscheinen. Den Schluß bilden Vergleichungen zwischen Kubikfußen und Fruchtmaßen.

Das ist in dürftiger, keineswegs erschöpfender, aber eben deshalb vielleicht übersichtlicher Zusammenstellung die Reihenfolge der Gegenstände, welche in den verschiedenen heronischen Sammlungen behandelt sind. Die Geometrie und die Geodäsie lehnen sich, insbesondere die Geometrie, eng an den Stoff des ersten Buches der Vermessungslehre, die beiden Bücher der Stereometrie an den von dessen zweitem Buch, die Ausmessungen und das Buch des Landbaues an den der beiden ersten Bücher. Von dem dritten Buche der Vermessungslehre ist nirgend eine Spur zu finden. Wenn wir eine Anlehnung an den Stoff der beiden ersten Bücher der Vermessungslehre behaupten, so will dieses keineswegs sagen, nur das dort Gelehrte und alles dort Gelehrte kehre wieder, vielmehr sind auch Dinge behandelt, deren wir in unserer bisherigen Darstellung keine Erwähnung zu tun hatten weder als wir von der Vermessungslehre, noch als wir von der Abhandlung über die Dioptra sprachen.

Sollen wir aus diesen Ähnlichkeiten und Unähnlichkeiten die Folgerung ziehen, sämtliche soeben unter besonderen Titeln genannten Sammlungen seien nur späte byzantinische Überarbeitungen der Vermessungslehre[1])? Überarbeitungen müssen uns allerdings vorliegen, denn die Ähnlichkeit mit dem Stoffe der Vermessungslehre ist zu groß, um von ihr durchaus unabhängige Schriften anzunehmen, und die Unähnlichkeit wieder zu groß, um an bei einer bloßen Abschrift mögliche Veränderungen zu denken. Aber die folgerichtige Darstellung, das ungezwungene Sicheinordnen des Neuen in das Alte nötigen uns nach unserem persönlichen Gefühle an einen älteren und ebenbürtigeren Bearbeiter Herons zu denken als die byzantinische Zeit erzeugt hat. Jedenfalls möchten wir aus der erwähnten Vollwertigkeit der Einschaltungen den Schluß ziehen, der Bearbeiter habe Heronisches in Heronisches eingeschaltet.

Woher dieses stammte? Wir wissen es vorläufig noch nicht. Wir wissen nur, daß an zwei nicht allzuweit voneinander entfernten Stellen der Geometrie[2]) von einem anderen Buche Herons — *ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ Ἥρωνος* — die Rede ist, und dieses andere Buch, möglicherweise die Vermessungslehre, wird der Bearbeiter vor sich gehabt haben neben seiner Hauptvorlage, die vielleicht, wie wir schüchtern und zweifelnd hinzusetzen, aus einer neben der Vermessungslehre zu gebrauchenden Aufgabensammlung bestand. Für die anderen heronischen Sammlungen hat man wahrscheinlich andere Bearbeiter anzunehmen von geringerer mathematischer Befähigung, denen aber

[1]) Heiberg, Mathematik, Mechanik und Astronomie (in Kroll, Die Altertumswissenschaft) S. 131 unten. [2]) Heron (ed. Hultsch) pag. 131 lin. 14 und pag. 134 lin. 8 und 15.

doch alte Vorlagen zu Gebote standen, vielleicht noch solche, welche älter als Heron waren.

Wir müssen rechtfertigen, warum wir in der Vermessungslehre möglicherweise das andere Buch Herons vermuten. Wir berufen uns auf unseren Auszug aus der Vermessungslehre (S. 376). Dort sagten wir, Heron lehre $F_5 = \frac{5}{3} a_5^2$ mit der Zusatzbemerkung, dieser Wert hänge von $\sqrt{5} = \frac{9}{4}$ ab; werde ein genauerer Wert von $\sqrt{5}$ in Rechnung gezogen, so könne man auch einen genaueren Wert von F_5 ermitteln. Für F_6 aber ist in der Vermessungslehre $F_6 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a_6^2$ angegeben, weil das Sechseck das Sechsfache des über a_6 beschriebenen gleichseitigen Dreiecks sei. In der Geometrie wird in erster Linie $F_5 = \frac{12}{7} a_5^2$ gesetzt, während das andere Buch $F_5 = \frac{5}{3} a_5^2$ vorschreibe, und für das Sechseck lehrt die Geometrie $F_6 = \frac{13}{5} a_6^2$, während das andere Buch verlange, man solle $F_6 = 6\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10}\right)$ rechnen[1]). Dieser letztere Wert ist ja an und für sich genau der gleiche wie der erste, aber er läßt die Versechsfachung deutlich hervortreten, die im ersten Werte verhüllt ist. Die andere Stelle, wo von dem anderen Buche Herons die Rede ist[2]), ist weniger beweiskräftig, denn sie benutzt zur Kreismessung $\pi = \frac{22}{7}$, während der gleiche Wert auch an solchen Stellen der Geometrie in Anwendung tritt, welche sich nicht auf das andere Buch berufen.

Für beweiskräftig halten wir dagegen die Verschiedenheiten der Geometrie von der Vermessungslehre. Die Geometrie beginnt mit Definitionen, welche beiläufig bemerkt der Einführung in die Geometrie[3]) entnommen sein wollen und mit dem Buche der Definitionen, von welchem am Anfange dieses Kapitels die Rede war, nicht übereinstimmen. Dann folgen Maßtabellen[4]). Von beidem ist in der Vermessungslehre keine Spur zu finden. Die Vermessungslehre gibt Beweise für die anzuwendenden Formeln, die Geometrie begnügt sich mit deutlich vollzogenen Rechnungen, aus welchen der Leser sich erst die benutzte, aber nicht bewiesene Formel herausschälen muß. Die Geometrie beginnt die Anweisung, wie man rechnen solle, mit den Worten[5]): *ποίει οὕτως*, mache es so, in der Vermessungslehre

[1]) Heron (ed. Hultsch) pag. 134. [2]) Ebenda pag. 131 *ὅρος κύκλου εὑρεθεὶς ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ τοῦ Ἥρωνος*. [3]) Ebenda pag. 44 *εἰςαγωγαὶ τῶν γεωμετρουμένων*. [4]) Ebenda pag. 47—49. [5]) Ebenda pag. 51 lin. 28—52 lin. 1 und an vielen anderen Stellen.

sind für den gleichen Zweck zwei Redensarten in Gebrauch: *ἡ δὲ μεθοδός ἐστιν ἄυτη*, folgendes ist die Methode, und *συντεθήσεται ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει ὄυτως*, der Analyse gemäß wird so gerechnet. Uns will scheinen, daß diese Verschiedenheiten ausreichen, um die Behauptung zu begründen, daß wer die Geometrie zusammenstellte, die Vermessungslehre unmöglich als Hauptvorlage, sondern nur gelegentlich als Ergänzungsvorlage benutzt haben kann, und das war eben mit dem sogenannten „anderen Buche Herons" der Fall, war der Fall in besonders nachweisbaren Stellen, und mithin glauben wir jetzt den Beweis geradezu geliefert, daß die Vermessungslehre das andere Buch war.

Und die Hauptquelle der Geometrie? Wir werden jetzt wohl etwas weniger schüchtern annehmen dürfen, es sei eine Aufgabensammlung gewesen, werden jedenfalls behaupten können, die Hauptvorlage habe eine täuschende Ähnlichkeit mit dem Rechenbuche des Ahmes besessen, das konservative Ägypten habe die alte Form aufbewahrt, wenn es derselben auch zum Teil einen neuen Inhalt gab. Wir haben soeben das *ποίει ὄυτως* der Geometrie erwähnt, Ahmes sagte: mache wie geschieht (S. 60). Wir haben die dem Leser auferlegte Pflicht die Rechnungsvorschrift den Rechnungen zu entnehmen bei der Geometrie kennen gelernt, Ahmes nötigte seine Leser zu der gleichen Gedankenarbeit.

Merit heißt bei Ahmes die obere Linie einer gezeichneten Figur (S. 93); Scheitellinie, *κορυφή*, nennt sie Heron und definiert geradezu, Scheitellinie sei die oberhalb der Grundlinie hingelegte Gerade[1]). Das gleichschenklige Paralleltrapez war seit Ahmes bis zu den Edfuinschriften eine von den Ägyptern bevorzugte Figur (S. 96 und 108); Heron widmete derselben Figur in der Geometrie neun aufeinanderfolgende Kapitel[2]). Ahmes zerlegte Figuren durch Hilfslinien in Figuren einfacherer Natur, wie es scheint, wenn auch die genaue Übersetzung der betreffenden Aufgaben noch nicht möglich ist; die Tempelvorsteher von Edfu übten dieselbe Zerlegung bei Berechnung ihrer Felder; Heron bedient sich der Zerlegung durch Hilfslinien zur Messung von unregelmäßig begrenzten Grundstücken in der Abhandlung von der Dioptra, löst gleicherweise verschiedentliche planimetrische Aufgaben in der Geometrie. Bei den Ägyptern heißt das Wort Qa, dessen Hieroglyphe ein die Arme in die Höhe streckendes Männchen ist, sowohl Höhe als allgemeiner die größte Ausdehnung eines Raum-

[1]) Heron, *Geometria* 3 (ed. Hultsch) pag. 44 *κορυφὴ δέ ἐστιν ἡ ἐπὶ τῇ βάσει ἐπιτιθεμένη εὐθεῖα.* [2]) Heron, *Geometria* 72—80 (ed. Hultsch) pag. 103 bis 108.

gebildes (S. 98); genau dasselbe gilt für das Wort *μῆκος* der Alexandriner[1]), bei Heron steht sodann der größeren Höhenabmessung die Breite, *πλάτος*, als geringfügigere Ausdehnung gegenüber, wie besonders deutlich aus einer Stelle seiner Geometrie hervorgeht, wo nach Einzeichnung zerlegender Hilfslinien in eine Figur, ohne daß eine Drehung vorgenommen wäre, plötzlich Höhe heißt, was in der ungeteilten Figur Breite war[2]), offenbar nur deswegen, weil durch die Teilung die wirkliche Höhe abnahm, so daß sie geringer als die unverändert gebliebene Breite wurde. Bei Ahmes war von Flächen zuerst das Quadrat, dann das Dreieck, dann das aus dem Dreiecke durch Abstumpfung gewonnene Trapez zur Ausmessung gebracht (S. 96); in den Edfuinschriften ergab sich eine Veränderung dahin, daß das Dreieck als Trapez mit einer verschwindenden Seite aufgefaßt wurde (S. 111); Heron bleibt dem Beispiele des Ahmes getreuer als selbst die priesterlichen Landsleute: bei ihm geht, wie wir bei flüchtiger Schilderung der Reihenfolge der in seinen Schriften behandelten Gegenstände wiederholt bemerken mußten, die Flächenausmessung des Quadrats, demnächst auch des Rechteckes voraus; ihnen folgt das Dreieck in seinen verschiedenen Formen, und nach diesem kehrt die Betrachtung zum Trapeze und zu anderen Vierecken zurück, dieselben zwar nicht als abgestumpfte Dreiecke untersuchend, aber Verwandlungen und Teilungen durch Hilfslinien mannigfach vornehmend, wie wir schon betont haben. Ahmes hat, worauf wir wiederholt gleichfalls aufmerksam machen, Maßvergleichungen (S. 90), Heron desgleichen. Ahmes bedient sich ausschließlich der Stammbrüche, zu welchen auch $\frac{2}{3}$ gezählt wird (S. 61); Heron verfährt vorzugsweise ebenso, wenn er auch imstande ist, Brüche mit beliebigem Zähler und Nenner in Rechnung zu bringen, ohne sie vorher in eine Summe von Stammbrüchen zu zerlegen. Die Hauaufgabe Nr. 28. des Ahmes (S. 75) hat den Wortlaut „$\frac{2}{3}$ hinzu, $\frac{1}{3}$ hinweg bleibt 10 übrig"; wir erklärten sie durch $\left(x+\frac{2}{3}x\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)=10$; man vergleiche damit etwa die Art, wie in den Ausmessungen ein Kreisbogen aus Sehne und Höhe desselben berechnet wird[3]): „Es sei ein Abschnitt, und er habe die Grundlinie von 40 Fuß, die Höhe von 10 Fuß; seinen Umfang zu finden. Mache es so. Füge immer Durchmesser[4])

[1]) In der Geographie des Ptolemäus I, 6 (ed. Halma) pag. 17 heißt es ausdrücklich *καθόλου μὲν τῇ μείζονι τῶν διαστάσεων προσάπτομεν τὸ μῆκος.* [2]) Heron, *Geometria* 47, 48 (ed. Hultsch) pag. 88. [3]) Heron, *Mensurae* 33 *μέτρησις ἑτέρου τμήματος* (ed. Hultsch) pag. 199—200. [4]) Soll heißen: Grundlinie.

und Höhe zusammen. Es entstehen 50 Fuß. Nimm allgemein davon $\frac{1}{4}$ weg. Es ist $12\frac{1}{2}$. Rest $37\frac{1}{2}$. Zu diesen füge allgemein $\frac{1}{4}$ hinzu. Es ist $9\frac{1}{4}\frac{1}{8}$. Setze zusammen. Es sind Fuße $46\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$. So viel mißt der Umfang des Abschnittes. Wir haben aber ein Viertel weggenommen und ein Viertel hinzugefügt, weil ein Viertel der Teil ist der Höhe von der Grundlinie.“ Als Gleichung übersieht sich diese Vorschrift noch deutlicher in ihrer Ähnlichkeit zu der Ausdrucksweise des Ahmes. Sie lautet

$$B = \left[(s+h) - \frac{h}{s}(s+h)\right] + \frac{h}{s}\left[(s+h) - \frac{h}{s}(s+h)\right],$$

wenn s die Sehne, h die Höhe, B die Bogenlänge des betreffenden Abschnittes bedeutet. An und für sich ist die Formel bis zur Unbrauchbarkeit ungenau. Sie geht bei $s = 2r$, $h = r$ in $B = \frac{9r}{4}$ über, welches, da der Halbkreis die Länge πr besitzt, die Annahme $\pi = 2{,}25$ in sich schließt, aber es kam uns bei Hervorhebung dieser Stelle nur darauf an, die Formverwandtschaft der heronischen Sammlungen, hier der „Ausmessungen“, mit dem Rechenbuche des Ahmes recht deutlich hervortreten zu lassen.

Alle diese Ähnlichkeiten vereinigt dürften jeglichen Zweifel an einer unmittelbaren Abhängigkeit Herons von altägyptischen Formgewohnheiten vernichten. Was wir früher (S. 276) schon ankündigten, hat sich bestätigt: die Form der arithmetisch-geometrischen Beispielssammlung, eine in sich abgeschlossene von der anderer Werke sich wesentlich unterscheidende Form ist durch und durch ungriechisch, ist altägyptisch, und damit gewinnt die andere Vermutung erneuerte Wahrscheinlichkeit, es dürfte mit der Form des theoretisch-geometrischen Lehrbuches, mit der Form der Elemente, sich ganz ebenso verhalten.

Ein anderes freilich gilt für den Inhalt der heronischen Sammlungen, welcher näher in Erwägung gezogen neben mancher überraschenden Ähnlichkeit auch manche bei den Fortschritten, welche die Geometrie gemacht hatte, ziemlich selbstverständliche Abweichungen von dem ägyptischen Verfahren offenbart. Von überraschender Ähnlichkeit ist die Anwendung der beiden Formeln $\frac{a_1 + a_2}{2} \times \frac{b}{2}$ und $\frac{a_1 + a_2}{2} \times \frac{b_1 + b_2}{2}$ (S. 111) zur Auffindung der Fläche eines Dreiecks oder Vierecks, welche wir in den Ausmessungen und in dem Buche des Landbaues wiederfinden[1]). Daß Heron sie gelehrt haben sollte,

[1]) Die Dreiecksformel in den *Mensurae* (ed. Hultsch) pag. 207 lin. 1—5; die Vierecksformel in dem *Liber Geeponicus* (ed. Hultsch) pag. 212 lin. 15 bis 21.

war uns früher so unglaublich, daß wir dieselben für Einschiebungen eines Kompilators hielten. Man hat uns entgegnet[1]), es sei für Heron umgekehrt geradezu unmöglich gewesen, in Ägypten in einer vollständigen Sammlung von geometrischen Rechnungsverfahren jene Formeln wegzulassen, und wir gestehen zu, daß diese Umkehrung der geschichtlichen Wahrheit wohl näher kommen dürfte als unsere erste Meinung. Wir neigen nunmehr selbst der Auffassung zu, auch diese theoretisch zwar unhaltbaren, praktisch aber mitunter ganz erträglichen Näherungsverfahren habe Heron neben den theoretisch richtigen Formeln gelehrt, die meistens nicht unmittelbar zum Ziele, d. h. zur Kenntnis der verlangten Flächenräume führten, sondern vorher die Berechnung von Hilfsstrecken, als Höhen und dergleichen nötig machten. Vielleicht mag sogar die vorzugsweise sogenannte heronische Dreiecksformel ihre Entdeckung dem Bedürfnisse verdankt haben aus den drei Dreiecksseiten unmittelbar, aber richtiger als mittels $\frac{a_1 + a_2}{2} \times \frac{b}{2}$ die Dreiecksfläche zu gewinnen.

Einen wesentlichen Nachteil besaß freilich in den Augen des handwerksmäßigen Feldmessers die heronische Formel gegenüber der der Ägypter: sie verlangte eine Wurzelausziehung. Die Ausführung dieser Operation überschritt, wie wir wissen, die Höhe des gemeinen Rechnens. Schriftstellerische Arbeiten wurden ihr gewidmet, von deren einstigem Vorhandensein wir Kenntnis erlangt haben, wenn sie auch selbst uns verloren sind. Um eine solche vielen Mißbehagen erzeugende Rechnungsaufgabe herumzukommen war fast Notwendigkeit, wenn Praktiker mit der Ausführung betraut gewesen wären, und so blieben Näherungswerte für häufig auftretende ein für allemal berechnete Quadratwurzeln in Gebrauch. Wir haben in $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ ein Beispiel kennen gelernt, welches (S. 223) vielleicht schon zu Platons Zeit in Übung war, wir haben auch $\sqrt{3} = \frac{7}{4}$ und $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ hervorgehoben, auf dessen Entstehung wir (S. 373) vielleicht einiges Licht werfen durften, wenn wir auch jetzt andere Entstehungsweisen der Werte von $\sqrt{3}$ wahrscheinlicher machen können. $\sqrt{3} = \frac{7}{4}$ ist mittels der heronischen Methode zu gewinnen als $\sqrt{3} = 2 + \frac{3 - 4}{2 \cdot 2}$

[1]) Agrimensoren 43 und dagegen S. Günther in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung Nr. 81, vom 21. März 1876.

$= 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ und $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ mittels des doppelten falschen Ansatzes. Wenn nämlich $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = 2$, so ist $d_1 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 3 = \frac{1}{16}$, $d_2 = (2)^2 - 3 = 1$ und $\frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1} = \frac{\frac{7}{4} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{26}{16}}{\frac{15}{16}} = \frac{26}{15}$. Alle diese Näherungswerte hat Heron anzuwenden nicht verschmäht, er, der doch unter die Schriftsteller zählt, die über Ausziehung der Quadratwurzeln schrieben.

Den Näherungswert $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ glauben wir im Buche des Landbaues an zwei verschiedenen Stellen zu erkennen[1]). Die erstere Stelle behandelt das rechtwinklige Dreieck von den Seiten 30, 40, 50, bei welchem $50 = \sqrt{30^2 + 40^2}$ sei; aber, heißt es weiter, es ist auch $50 = (30 + 40) \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}$. Will man diese Ausrechnung nicht für baren Unsinn nehmen, so kann man ihre Entstehung nur folgendermaßen erklären. Im gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke von den Seiten c, c, h ist $h = c \cdot \sqrt{2} = \frac{2c}{\sqrt{2}} = \frac{c + c}{\frac{7}{5}} = (c + c) \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}$. Daraus wurde nun weiter geschlossen, daß auch bei ungleichen Katheten c_1 und c_2 gerechnet werden dürfe $h = (c_1 + c_2) \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}$, ein Schluß, der uns bei Leuten, die gewohnt waren, in ungerechtfertigter Weise arithmetische Mittel ungleicher Seiten einer Figur in Rechnung zu ziehen, nicht sonderlich auffallen kann. Die andere Stelle werden wir weiter unten besprechen.

Die Anwendung, welche Heron von $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ macht, tritt bei den auf das gleichseitige Dreieck bezüglichen Aufgaben hervor. Die Höhe desselben ist offenbar gleich dem Produkte der Seite in $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und dafür setzt Heron $\frac{13}{15}$, sei es nun, daß er dafür $\frac{2}{3}\,\frac{1}{5}$, sei es, daß er $1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30}$ dafür schreibt. Die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, sagt er ausdrücklich[2]), sei $1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30}$ mal der Seite, und die andere Wertform ist in der wiederholt auftretenden Angabe enthalten, die Fläche des gleichseitigen Dreiecks, mithin das Produkt der Seite

[1]) Heron, *Liber Geeponicus* 50 und 152—153 (ed. Hultsch) pag. 212, lin. 28—30 und pag. 226, lin. 9—16. [2]) Heron, *Geometria* 15 (ed. Hultsch) pag. 58, lin. 26—28.

in die halbe Höhe, sei $\frac{1}{3}\,\frac{1}{10}$ vom Quadrat der Seite[1]). Namentlich die Form der letzteren Vorschrift kehrt bei Nachahmern Herons fortwährend wieder.

Für spätere Vergleichungen müssen wir auch die bei Heron vorkommenden aneinanderhängenden rechtwinkligen Dreiecke[2]), *τρίγωνα ὀρθογώνια ἡνωμένα*[3]), uns merken, worunter mutmaßlich zwei rechtwinklige Dreiecke mit rationalen Seiten gemeint sind, welche eine Kathete gleich haben, und an dieser zusammenstoßen, so daß die beiden anderen Katheten als gegenseitige geradlinige Fortsetzungen voneinander erscheinen.

Bei der Dreiecksberechnung finden der Abschnitt, *ἀποτομή*, und die Überragung, *ἐκβληθεῖσα*, häufige Anwendung. Bedeuten b die Grundlinie, a, c die beiden anderen Seiten des Dreiecks und α, ε den Abschnitt, die Überragung von der einen oder der anderen Richtung her an a anstoßend, so rechnet Heron $\alpha = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}$, $\varepsilon = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2b}$.

Die Formeln für den Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke sind der Vermessungslehre und den heronischen Sammlungen[4]) gemeinsam, wie wir (S. 393) genauer zu erörtern genötigt waren, und wir wissen, daß wenigstens für das Neuneck und das Elfeck das Buch von den Geraden im Kreise benutzt wurde, daß wir die ältesten auf uns gekommenen trigonometrischen Formeln vor uns haben.

Außer dem Flächeninhalt des regelmäßigen $n$ecks war unter allen Umständen der Halbmesser r, der Durchmesser d des umschriebenen Kreises von Wichtigkeit. Offenbar lehrte die Sehnentafel durch einfaches Nachschlagen $a_n = \frac{k_n \cdot d}{2}$ und so wird der heronische Ursprung der im Buch des Landbaues sich vorfindenden[5]) Formeln $a_n = \frac{3d}{n}$ und $d = \frac{n \cdot a_n}{3}$, noch dazu durch einen Mangel an Folgerichtigkeit bei $n = 8$ entstellt, indem es $a_8 = \frac{5d}{12}$ heißt, ungemein verdächtig. Nur bei $n = 6$ ist $a_6 = r = \frac{3d}{6}$, aber die Ausdehnung dieses einen zufälligen Ergebnisses zur allgemeinen Formel kann Heron

[1]) Heron, *Geometria* 14 und *Geodaesia* 13 (ed. Hultsch) pag. 58 und 147. [2]) Heron, *Geometria* 13, 4 und *Geodaesia* 12, 4 (ed. Hultsch) pag. 58 und 147. [3]) Das selten vorkommende *ἡνωμένον* ist von *ἑνόω* abzuleiten, welches selbst von *ἕν* (eins) abstammt und *vereinigen* heißt. [4]) Heron, *Geometria* 102, *Mensurae* 51—53, *Liber Geeponicus* 75—77 und 172—179 (ed. Hultsch) pag. 134, 206, 218, 229. [5]) Heron, *Liber Geeponicus* 146—164 (ed. Hultsch) pag. 225—228.

unmöglich verschuldet haben. Wir können die Überzeugung dieser Unmöglichkeit selbst durch Erinnerung an zwei andere Angaben Herons über das regelmäßige Achteck stützen, welche ohnehin der Erörterung unterzogen werden müssen.

In demselben Buche des Landbaues, in welchem die falschen Formeln sich breit machen, ist nur wenige Seiten später die Regel gegeben[1]), man solle zur Konstruktion eines regelmäßigen Achtecks sich eines Quadrates mit seinen Diagonalen bedienen. Die Hälfte der Diagonale von jedem Endpunkte des Quadrates aus auf den beiden in ihm zusammentreffenden Seiten des Quadrates aufgetragen liefere 8 Punkte, welche miteinander verbunden das regelmäßige Achteck geben.

Eine zweite Angabe über das regelmäßige Achteck findet sich in der zweiten stereometrischen Sammlung[2]), wo bei Gelegenheit der Ausmessung des Körperinhaltes der Pyramide auf achteckiger Grundfläche von der Formel $\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2\left(\frac{a_8}{2}\right)^2} + \frac{a_8}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2$ Gebrauch gemacht wird.

Bevor wir den Zusammenhang dieser beiden richtigen Behauptungen nachweisen, wollen wir zeigen, daß die letztere mittels eines Rechenfehlers zu der einen abweichenden Achtecksformel $a_8 = \frac{5d}{12}$ im Buche des Landbaues Anlaß gab. Setzen wir nämlich $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$, so wird $\left(\sqrt{2\left(\frac{a_8}{2}\right)^2} + \frac{a_8}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{5}\cdot\frac{a_8}{2} + \frac{a_8}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2 = \frac{169}{25}\left(\frac{a_8}{2}\right)^2 = \left(\frac{13}{5}\,\frac{a_8}{2}\right)^2$ und da dieser Wert das Quadrat von $\frac{d}{2}$ sein soll, so ist $a_8 = \frac{5}{13}d$. Daraus kann aber sehr leicht irrtümlich $a_8 = \frac{5}{12}d$ entstanden sein. Gibt man uns dieses zu, so ist hier die zweite Anwendung von $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ bei Heron nachgewiesen, welche wir (S. 398) angekündigt hatten.

Man könnte freilich einen Einwand erheben, indem man sagte $d = \frac{13}{5}a_8$ führe zu $F_8 = \frac{24}{5}a_8^2$, während doch Heron $F_8 = \frac{29}{6}a_8^2$ rechne. Allein dieser Widerspruch scheint uns geduldet werden zu müssen. Wir geben nämlich zu bedenken, daß weder d noch F_8 genau richtig, sondern nur angenähert berechnet sind, und daß die

[1]) Heron, *Liber Geeponicus* 199 μέτρησις ὀκταγώνου (ed. Hultsch) pag. 231.
[2]) Heron, *Stereometrica* II, 37 πυραμίδα ἐπὶ ὀκταγώνου βάσεως βεβηκυῖαν μετρῆσαι (ed. Hultsch) pag. 184 lin. 10—17.

Einsetzung eines Näherungswertes in eine zweite Näherungsformel nicht immer zu den gleichen Ergebnissen führt, wenn sie in einem früheren oder in einem späteren Augenblicke erfolgt. Jedenfalls weicht $c_8 = \frac{29}{6} = 4{,}833\,333$ von dem wahren Werte $c_8 = 4{,}828\,427$ weniger ab als $c_8 = \frac{24}{5} = 4{,}800\,000$.

Die erwähnte Konstruktion des Achtecks läßt sich mit Hilfe einer Figur rechtfertigen, welche ein Einwohner Ägyptens oft zu sehen in der Lage war, und deren Anblick einen Mathematiker umgekehrt auf die Erfindung jener beiden Sätze bringen konnte. Die Figur, welche wir meinen, ist die (Fig. 14) zweier einander symmetrisch durchsetzender Quadrate, ein, wie wir uns erinnern (S. 108), häufiges Gewebemuster. Daß die Schnittpunkte dieser Quadratseiten ein regelmäßiges Achteck in der Figur erscheinen lassen, ist augenscheinlich. Eines Beweises bedarf (Fig. 66) nur die Behauptung $\alpha\beta = \beta\gamma$. Der Achteckwinkel bei γ ist 135^0, dessen Hälfte $\alpha\gamma\beta$, mithin $67\frac{1}{2}^0$. Ferner

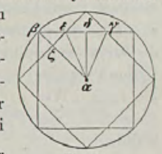

Fig. 66.

ist der Winkel $\alpha\beta\gamma$ die Hälfte eines rechten Winkels oder 45^0, und demnach $\gamma\alpha\beta = 180^0 - 67\frac{1}{2}^0 - 45^0 = 67\frac{1}{2}^0 = \alpha\gamma\beta$, folglich $\alpha\beta = \beta\gamma$. Wir werden im 26. Kapitel noch deutlicher erkennen, daß in der Tat ein dem hier gegebenen Beweise sehr ähnlicher von unserer Figur ausgehender Gedankengang zu dem heronischen Satze vom Achtecke geführt haben muß. Wenn wir heronischen Satz sagen, so meinen wir begreiflicherweise einen solchen, der uns am frühesten bei Heron begegnet, ohne Herons Erfindung für die möglicherweise noch ältere Wahrheit ausdrücklich in Anspruch zu nehmen.

Haben wir hier eine, wie sich herausstellte, wichtige Zwischenbemerkung aus der zweiten stereometrischen Sammlung in Betracht ziehen dürfen, so liefern uns die eigentlich stereometrischen Angaben als solche im allgemeinen wenig Ausbeute. Es mag ja immerhin sein, daß eine Vorschrift, welche in der Vermessungslehre (S. 379), welche aber auch in den Ausmessungen sich findet[1]), eine nicht regelmäßige Oberfläche, etwa die einer Bildsäule zu messen, indem man Leinwand oder Papier herumwickle, welches dann ausgebreitet als Maß diene, uralten Ursprung verrate, viel wird mit diesem Bewußtsein nicht gewonnen sein. Daß wir aber den stereometrischen Aufgaben so wenig abgewinnen können, hat einen zweifachen Grund. Bald steht ungenügendes Verständnis, welche Körper eigentlich ge-

[1]) Heron, *Mensurae* 46 (ed. Hultsch) pag. 204.

meint seien, hindernd im Weg, bald die Tatsache, daß recht viele Rechnungsergebnisse, auch wo sie verständlich sind, sich als falsch erweisen. Der Diorismus, ob eine Aufgabe wie die gestellte überhaupt möglich sei, ist nicht selten versäumt. So ist z. B. eine abgestumpfte Pyramide mit rechteckiger Grundfläche zur Ausrechnung vorgelegt[1]), deren untere Fläche aus den Seiten 14 und 20, die obere aus den Seiten 2 und 4 gebildet wird, während dieser Körper bei mangelnder Ähnlichkeit der beiden Flächen gar nicht als Pyramidenstumpf aufgefaßt werden kann; der Körper gehört vielmehr zu denjenigen, welche deutsche Stereometer Obelisken zu nennen pflegen. Die räumliche Ausmessung der Obelisken findet allerdings nach der gleichen Formel statt, als hätte man es mit einem Pyramidenstumpf zu tun, doch glauben wir kaum, daß Heron dieses schon wußte und die Worte *πυραμὶς κόλουρος εἴτουν ἡμιτελής* (abgestumpfte oder halbfertige Pyramide) in der Meinung gebrauchte, es sei hier von zweierlei die Rede. Wer so weit zu gehen geneigt wäre, müßte jene Worte übersetzen: von Pyramidenstumpfen und ihnen nur verwandten Gestaltungen.

Unmittelbar vor dieser Stelle ist eine andere[2]), bei welcher der mangelnde Diorismus zum erstmaligen Erscheinen einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl geführt hat, welches in der Geschichte der Mathematik hat nachgewiesen werden können. Der Körperinhalt I einer abgestumpften Pyramide von quadratischer Grundfläche wird gesucht. Nennt man nun a_1 die Seite des unteren größeren, a_2 die Seite des oberen kleineren Quadrates, k die Kante des Pyramidenstumpfes, H dessen senkrechte Höhe, h die Höhe einer der parallelotrapezischen Seitenflächen, so ist offenbar

$$h = \sqrt{k^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2}, \quad H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2}$$

oder auch

$$H = \sqrt{k^2 - \frac{1}{2}(a_1 - a_2)^2}$$

und endlich

$$I = H \cdot \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2\right].$$

Eine Ableitung dieser Formel findet so wenig statt wie die irgend einer anderen (mit Ausnahme der in der Abhandlung über die Dioptra bewiesenen heronischen Dreiecksformel), aber sie wird in einem ersten Beispiele, in welchem $a_1 = 10$, $a_2 = 2$, $k = 9$ gewählt ist, mit gutem Erfolge angewandt. Es erscheint nämlich

[1]) Heron, *Stereometrica* I, 35 (ed. Hultsch) pag. 163. [2]) Heron, *Stereometrica* I, 33 und 34 (ed. Hultsch) pag. 162—163.

$$H = \sqrt{9^2 - \frac{1}{2}(10 - 2)^2} = 7$$

und daraus

$$I = 7\left[\left(\frac{10 + 2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{10 - 2}{2}\right)^2\right] = 289\frac{1}{3}.$$

Der Grund der Brauchbarkeit liegt darin, daß, wie es aus der Formel für H hervorgeht, $k^2 > \frac{1}{2}(a_1 - a_2)^2$ sein muß und bei den angewandten Zahlenwerten auch ist. Geometrisch heißt das: ein Pyramidenstumpf mit quadratischen Grundflächen existiert nur dann, wenn bei senkrechter Projizierung der oberen Fläche auf die untere zwischen zwei benachbarten Eckpunkten der ursprünglich unteren Fläche und der Projektion eine Entfernung obwaltet, die kleiner ist als die Kante des verlangten Stumpfes. In einem zweiten Beispiele mit $a_1 = 28$, $a_2 = 4$, $k = 15$ findet dieses aber nicht statt; es ist vielmehr $15^2 < \frac{1}{2}(28 - 4)^2$. Der Rechner, der an der Formel, welche H unmittelbar aus a_1, a_2, k liefert, diese Schwierigkeit bemerkt haben mag und sich ihr nicht gewachssen fühlte, suchte sich durch einen Umweg über h zu helfen. Er rechnete $h = \sqrt{15^2 - \left(\frac{28 - 4}{2}\right)^2} = 9$, worauf er $H = \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 - h^2} = \sqrt{63} = 8$ weniger $\frac{1}{16}$ setzte. Mit anderen Worten: die von Rechtswegen negative Differenz $81 - 144$ unter dem Quadratwurzelzeichen wird zur absoluten Differenz der beiden Zahlen 81 und 144; es wird $\sqrt{-1} = 1$ gesetzt. Ob dieser Rechner Heron war, ob damals die Stereometrie noch immer ein weniger übliches Kapitel mathematischer Untersuchungen bildete und insofern einem so hervorragenden Manne der Fehler den Diorismus vernachlässigt zu haben begegnen konnte, oder ob hier Unwissenheit der Abschreiber sündigte, dürfte nicht zur Entscheidung gebracht werden können. Welche von beiden Annahmen aber auch der Wahrheit entsprechen mag, unter allen Umständen haben wir hier das älteste Auftreten des sogenannten Imaginären vor uns.

Wenden wir uns zu den Beispielen, in welchen der Kreis vorkommt, so tritt die Verhältniszahl π, welche fast bei allen solchen Kreisaufgaben eine Rolle spielt, in zweifachem Werte auf. Weitaus am häufigsten ist $\pi = \frac{22}{7}$ angenommen, aber im Buche der Ausmessungen[1]) ist regelmäßig $\pi = 3$. Wir wissen aus unserem Auszuge aus der Vermessungslehre, daß dort gesagt wird, die Alten[2]) *ὁι ἀρχαῖοι*,

[1]) Heron, *Mensurae* (ed. Hultsch) pag. 188 sqq. [2]) Heron III, pag. 72 lin. 29.

hätten mit $\pi = 3$ gerechnet. Wir haben (S. 48) den babylonischen Ursprung dieses Wertes zu begründen gesucht, der aber bei dem regen Verkehre zwischen Babylon und Ägypten auch in dieses letztere Land eingedrungen sein mag. Und der ägyptische Wert, kann man fragen, $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$, welchen Ahmes angewandt hat (S. 98), kommt er nirgend vor? Nein, und wenn es auch insgemein mißlich ist, negative Erscheinungen erklären zu wollen, hier wären wir am wenigsten in Verlegenheit, einen einleuchtenden Grund anzugeben. Die Neuerung $\pi = \frac{22}{7}$ statt $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ war durch die größere Genauigkeit der Ergebnisse bedeutsam, aber was die Rechnungsausführung betrifft, kaum redenswert. Ob der Praktiker mit dieser oder mit jener gebrochenen Zahl vervielfachte, das konnte ihm gleich sein. Er mußte aus Bequemlichkeit alte und neue angenäherte Dreiecks- und Vierecksformeln ohne Wurzelausziehung festzuhalten suchen, um jener für ihn schwierigen Rechnungsoperation zu entgehen. Er mußte $\pi = 3$ als ganzzahligen Multiplikator vorziehen. Aber daß er nicht auf $\pi = \frac{256}{81}$ zugunsten von $\pi = \frac{22}{7}$ verzichten sollte, dafür gab es gar keinen Grund.

Eine Stelle, welche auf den Kreis sich bezieht, verdient aus mehrfachen Gründen eine nähere Besprechung. Es ist dieselbe Stelle, welcher wir (S. 393) im voraus unsere Aufmerksamkeit zusicherten, als wir von dem anderen Buche Herons sprachen[1]). Es handelt sich um Berechnung des Kreisdurchmessers d aus der Summe S der in einer Zahl vereinigten Kreisfläche K, Peripherie P und Durchmesser d selbst. Die Tatsache der durch S angedeuteten Summenbildung ist an sich eine höchst merkwürdige. Eine Flächengröße und zwei Längenausdehnungen zu vereinigen widerspricht dem geometrischen Bewußtsein und ist nur denkbar, wenn wir zugeben, daß Heron hier auf durchaus **algebraischem** Boden stand, daß ihm die Zahlenwerte als solche und ohne Rücksicht auf ihren geometrischen Ursprung dienten. Unter dieser Voraussetzung gestattet aber Herons Rechnungsergebnis sein Verfahren rückwärts zu ergänzen. Er rechnet $d = \frac{\sqrt{154 S + 841} - 29}{11}$. Bekanntlich ist $K = \frac{\pi}{4} d^2$, $P = \pi d$, folglich ist $S = K + P + d = \frac{\pi}{4} d^2 + (\pi + 1) d$, und ersetzt man π hierin durch $\frac{22}{7}$, so ist die nach d quadratische Gleichung

[1]) **Heron**, *Geometria* 101, 7—9 (ed. **Hultsch**) pag. 133 lin. 10—23. Das ganze Kapitel 101 trägt in der ältesten und besten Handschrift den Titel: ὅρος κύκλου εὑρεθεὶς ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ τοῦ Ἥρωνος.

$$\frac{11}{14} d^2 + \frac{29}{7} d = S$$

der Auflösung unterbreitet. Nun sind von vornherein zwei Wege zur Auflösung vorhanden. Entweder man dividiert die Gleichung durch $\frac{11}{14}$ um eine neue Gleichung zu erhalten, in welcher das quadratische Glied den Koeffizienten 1 besitzt, oder man vervielfacht die Gleichung mit einer derartigen ganzen Zahl, daß im Produkte das quadratische Glied einen ganzzahligen quadratischen Koeffizienten besitze, während auch im übrigen nur ganzzahlige Koeffizienten auftreten. Den letzteren Weg wird vorziehen, wer das Rechnen mit Brüchen so lange als möglich hinausschiebt. Befolgen wir ihn, so haben wir mit 14 mal 11 zu vervielfachen und erhalten $121 d^2 + 638 d = 154 S$, daraus ferner $121 d^2 + 638 d + 841 = 154 S + 841$ oder $(11 d + 29)^2 = 154 S + 841$. Daraus entsteht der Reihe nach $11 d + 29 = \sqrt{154 S + 841}$, $11 d = \sqrt{154 S + 841} - 29$, endlich mit Heron $d = \frac{\sqrt{154 S + 841} - 29}{11}$. Damit ist also der Beweis geliefert, daß jedenfalls **Heron** die **unreine quadratische Gleichung** $ax^2 + bx = c$ **bereits als Rechnungsaufgabe betrachtete**, wenn man Euklid (S. 285) und Archimed (S. 316) diese Kenntnis zuzugestehen sich nicht entschließen wollte. Von Heron steht es jetzt fest, daß er die unreine quadratische Gleichung $ax^2 + bx = c$ zu lösen verstand, und daß die Ergänzung zu einem vollständigen Quadrate auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens so erfolgte, daß $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ gesetzt wurde, woraus

$$x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}$$

gefolgert wurde, nachdem schon am Anfange, wenn nötig, solche Multiplikationen vorgenommen waren, welche a, b, c zu ganzen Zahlen zu machen sich eigneten.

Allerdings setzen diese Schlüsse, deren große Tragweite niemand verkennen wird, Eines voraus: daß Heron wirklich der Urheber der besprochenen Aufgabe samt ihrer Auflösung war. Wir sehen jedoch keine Veranlassung dieser Voraussetzung zu widersprechen. Wir haben zu zeigen gesucht, daß schon Euklid unreine quadratische Gleichungen, allerdings in vollständig geometrischem Gewande, nicht fremd waren. Die Aufgabe, an welche wir gegenwärtig unsere Folgerungen knüpften, steht in derjenigen Sammlung heronischer Schriften, welche nächst der Vermessungslehre die verhältnismäßig größte Zuverlässigkeit besitzt. Sie steht mitten unter anderen Aufgaben vollkommen heronischen Gepräges. Sie ist so gefaßt, daß erst eine kleine Überlegung die Überzeugung beibringen kann, daß die Stelle überhaupt richtig ist und auf einer quadratischen Gleichung beruht, ein in unseren Augen sehr schwer wiegender Grund spätere Einschiebung auszuschließen. Und zu allen diesen die bestimmte Aufgabe betreffenden Erwägungen kommt eine allgemeine Erscheinung hinzu, deren wiederholter Erwähnung wir uns nicht enthalten können: die Entwicklungen Herons sind in den verschiedensten Kapiteln so aneinander gereiht, daß man sich dem Gedanken nicht verschließen kann, jener Mathematiker habe eine Formel aus der anderen gleichungsmäßig hergeleitet, nicht eine jede für sich geometrisch ermittelt, und diese Überzeugung bricht sich insbesondere bei den Aufgaben Bahn, in welchen der Kreis in Betracht kommt.

So haben wir mit steigender Achtung die Leistungen Herons von Alexandria durchmustert, des Mannes, der es reichlich verdiente, daß seine Schriften als Lehrgebäude der Geodäsie durch viele, viele Jahrhunderte unmittelbar oder mittelbar ihre Wirksamkeit behielten. Er ist und bleibt uns der vorzugsweise Vertreter antiker Feldmeßkunst und Feldmeßwissenschaft, wenn ersteres Wort uns die Lehre von den eigentlichen feldmesserischen Operationen, letzteres die von den anzuwendenden Formeln bedeuten soll. Er ist uns aber auch der Vertreter einer entwickelten Rechenkunst bis zur Ausziehung von Quadratwurzeln und Kubikwurzeln, der Vertreter einer eigentlichen Algebra, soweit von einer solchen ohne Anwendung symbolischer Zeichen die Rede sein kann, bis zur Auflösung unreiner quadratischen Gleichungen einschließlich.

20. Kapitel.

Geometrie und Trigonometrie bis zu Ptolemäus.

Kurze Zeit nach der Blüte des hervorragenden Geodäten, mit welchem wir uns in zwei Kapiteln beschäftigt haben, lebte wahrscheinlich Geminus von Rhodos. Er schrieb eine Einleitung in die Astronomie, *εἰςαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα*, welche zwar erhalten ist[1]), aber um ihres eigentlichen Inhaltes willen uns nicht weiter be-

[1]) Dieses Werk ist mehrfach gedruckt, z. B. mit französischer Übersetzung von Halma in dessen Ausgabe des Ptolemäus hinter dem Kanon desselben. Paris 1819. Die letzte Ausgabe mit deutscher Übersetzung von Karl Manitius. Leipzig 1898. Über das mathematische Werk des Geminus ist ziemlich abschließend Carl Tittel, *De Gemini Stoici studiis mathematicis*. Leipzig 1895.

schäftigen darf, als daß wir bemerken, daß darin eine gute Darstellung der Sonnentheorie des Hipparch sich findet[1]), allerdings ohne daß der Name ihres Urhebers dabei genannt wäre. Außerdem verfaßte er ein leider verlorenes mathematisches Werk von fast unbekanntem Titel und Inhalte. Unser Bedauern über den Verlust gründet sich auf etwa 16 Stellen, in welchen Proklus in seinem Kommentare zu den euklidischen Elementen aus Geminus geschöpft hat, auf andere, die bei Eutokius sich erhalten haben, und deren zum Teil geschichtlich wertvollen Inhalt wir verschiedentlich zu benutzen Gelegenheit fanden. Ein eigentlich mathematisch-historisches Werk hat freilich Geminus gewiß nicht geschrieben, wenn man auch früher dieser Annahme zuneigte[2]). Das ist aus dem Mathematikerverzeichnisse bei Proklus gefolgert worden[3]). Wenn Proklus dort erklärt, die Schriftsteller über Geschichte der Mathematik hätten die Entwicklung bis dahin, d. h. bis kurz vor Euklid geschildert, wenn er dann in demselben Kommentare aus Geminus Auszüge gibt, welche für die Zeitbestimmung des Nikomedes, des Diokles, des Perseus verwertbar waren, so ist eben das Werk des Geminus eine Geschichte nicht gewesen. Auch die nähere Prüfung der Notizen aus Geminus selbst würde zu der gleichen Schlußfolgerung führen. Sie sind gewiß nicht von der Art, wie man sie in einem Geschichtswerke suchen würde, sie haben ihre Bedeutsamkeit für historische Zwecke nur dadurch erlangt, daß in ihnen Namen vorkommen, daß also die Träger dieser Namen, beziehungsweise die Erfinder krummer Linien, welche Geminus nennt, früher als er gelebt haben müssen, daß seine genau ermittelte Lebenszeit daher eine untere Grenze für die anderer bildet.

Um so notwendiger ist es in dieser Ermittlung jeden Zweifel auszuschließen. Man hat die Zeit, zu welcher Geminus schrieb, regelmäßig dem 6. Kapitel seiner Einleitung in die Astronomie entnommen. Dort heißt es[4]): Die Griechen nehmen auf die Ägypter und Eudoxus sich stützend an, das Isisfest treffe mit dem kürzesten Tage überein. Das ist vor 120 Jahren einmal so gewesen, aber alle vier Jahre verschiebt sich die Übereinstimmung um einen Tag und beträgt jetzt einen Monat.

Der Nutzen, welcher aus dieser Angabe zu ziehen sein kann, ist augenscheinlich. Weiß man, wann das Fest der Isis nach ägyptischem Kalender stattfand, weiß man ferner, wann das betreffende ägyptische

[1]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 201. [2]) Montucla, *Histoire des Mathématiques* I, 266. [3]) Nesselmann, Algebra der Griechen 6. [4]) Unsere Übersetzung ist nicht wörtlich, kürzt vielmehr die Stelle wesentlich ohne jedoch den Sinn zu verändern. Vgl. ed. Halma pag. 43.

Datum genau auf das Wintersolstitium fiel, so hat man von dem so gewonnenen Jahre nur 120 Jahre weiter zu zählen, um zu der Zeit zu gelangen, zu welcher Geminus seine Einleitung in die Astronomie verfaßte. Diese Rechnung hat man angestellt und ist zu zwei sehr voneinander abweichenden Ergebnissen gekommen. Ein gelehrter Chronologe, Mitglied des Jesuitenordens am Anfange des XVII. S., Denis Petau[1]), hat in dem Isisfeste die Feier der Auffindung des Osiris erkannt, welche in Ägypten vom 17. bis zum 20. Athyr begangen wurde. Diese Feier, d. h. der 17. Athyr, fiel 197 auf das Wintersolstitium und die Abfassung der Einleitung in die Astronomie 120 Jahre später auf 77 v. Chr. Dagegen hat am Ende des XVII. S. ein anderer Gelehrter, Bonjour, folgende Ansicht begründet[2]). Nach römischer Überlieferung ist ein Isisfest vom 1. bis zum 5. Athyr gefeiert worden; der 1. Athyr fiel 257 auf das Wintersolstitium, und somit geben 120 Jahre weiter die Jahreszahl 137, in welcher Geminus geschrieben haben muß. Mit davon verschiedenen Gründen ist ein späterer Forscher gleichfalls zu dem Jahre 140 gekommen, auf welches die Blüte des Geminus zu setzen sei[3]). Zwischen diesen beiden Möglichkeiten hat man sich zu entscheiden, und wir tragen Bedenken Geminus, welcher nach Hipparch gelebt haben muß, um dessen Sonnentheorie, wie wir zu Anfang bemerkten, deutlich darzustellen, der auch Hipparch in seiner Einleitung in die Astronomie einmal mit Namen nennt[4]), während die Beobachtungen Hipparchs von 161 bis 126 fallen, früher als 77 als Schriftsteller anzunehmen[5]). Das zweite Datum, dem wir in unserer Anordnung des Stoffes folgten, indem wir sonst Geminus vor Heron hätten nennen müssen, steht auch im Einklang mit anderen Umständen, die für sich allein nicht entscheidend gewesen wären. Geminus nennt in seiner Einleitung in

[1]) Petavius, *De doctrina temporum* (Paris 1627), Lib. II, cap. 6, § 4 und desselben Verfassers *Uranologion sive systema variorum autorum qui de sphaera ac sideribus eorum motibus graece commentati sunt* (Paris 1630) in den Anmerkungen zu der dort abgedruckten Schrift des Geminus an dem betreffenden Orte. [2]) Bonjour, *De nomine Josephi a Pharaone imposito.* Rom 1696. Vgl. eine Besprechung dieses Buches von Heinr. Pipping in den *Acta Eruditorum* für 1697, pag. 6 sqq. [3]) H. Brandes, Ueber das Zeitalter des Astronomen Geminus und des Geographen Eudoxus in den Jahnschen Jahrbüchern XIII, Supplement S. 199—230, besonders 219. [4]) *Εἰςαγωγή κ. τ. λ.* (ed. Halma) pag. 19. [5]) Auch Aug. Böckh, Ueber die vierjährigen Sonnenkreise der Alten. Berlin 1863, S. 8 flgg. und S. 200 flgg. hat sich in ausführlicher Begründung für diese Meinung entschieden. Dagegen vermutet F. Blaß, *Dissertatio de Gemino et Posidonio* (Kiel 1883) eine noch spätere Lebenszeit des Geminus, nur durch das II. nachchristliche Jahrhundert als *terminus ad quem* begrenzt, weil Geminus bei Alexander Aphrodisiacus genannt ist.

die Astronomie Eratosthenes[1]), der etwa 194 starb, den Geschichtsschreiber Polybius[2]), dessen Universalgeschichte, *ἱστορία καθολική*, bis 146 herabreicht, Krates den Grammatiker[3]), wahrscheinlich denjenigen dieses Namens, der aus Mallus 167 nach Rom kam, wo er etwa 144 starb, den Philosophen Boethus, welcher einen Kommentar zu Aratus geschrieben haben muß[4]), den man aber nicht bestimmt zu identifizieren vermag; sie alle können im Jahre 137 ebenso gut wie im Jahre 77 genannt worden sein. Auch darauf wird man kein zu großes Gewicht legen dürfen, daß die Beobachtungen, von welchen Geminus Gebrauch macht, auf Rhodos, Alexandria und Rom Bezug nehmen. Ein Alexandriner, das haben wir (S. 366) erörtert, würde kaum schon 137 Rom seine Aufmerksamkeit in so hohem Grade gewidmet haben, anders ein Rhodier, nachdem seine Landsleute die Bundesgenossen der Römer seit dem syrischen Kriege im Jahre 190 v. Chr. waren. Aber folgendes gibt endgültig den Ausschlag. Nach einer Angabe des Simplicius im Kommentare zum II. Buche der aristotelischen Physik fertigte Geminus einen Kommentar zu den *μετεωρολογικά* des Posidonius[5]). Nun gab es allerdings einen Posidonius von Alexandria (S. 198), Schüler des 259 verstorbenen Zenon, aber ihn würde Simplicius nicht ohne sonstige Bezeichnung nur Posidonius genannt haben. Dazu mußte die Persönlichkeit eine allgemein bekannte sein, und von einer solchen haben wir Kenntnis: Posidonius von Rhodos[6]), der Lehrer Ciceros, der Freund des Pompejus, der auf der Insel Rhodos gestorben ist, auf welcher Geminus allem Anscheine nach lebte. Dieser Posidonius, der wiederholt durch Heron erwähnt worden ist, dem man eine Definition der Parallellinien verdankt (S. 388), wird frühestens um das Jahr 90 als Schriftsteller aufgetreten sein, und wer aus seinem Werke einen Auszug machte, kann nur 77, nicht 137 eine Einleitung in die Astronomie verfaßt haben. Damit stimmt aber endlich noch eine Tatsache überein. Die 120 Jahre rückwärts von Geminus fallen entweder auf 257 oder auf 197. Nach der ersteren Annahme würde das Edikt von Kanopus vom 7. März 238 die 120 Jahre unterbrochen und vermöge der in ihm angeordneten Einrichtung des Schaltjahres, so lange oder so kurz es in Gültigkeit war, die 30tägige Verschiebung des Isisfestes binnen 120 Jahren zu einer Unwahrheit gemacht haben. Rechnet man dagegen jene 120 Jahre von 197 an, so ist dem nicht so. Man hat vielmehr alsdann eine Grenze gewonnen, wie lange das Edikt von

[1]) Ed. Halma pag. 44. [2]) Ebenda pag. 67. [3]) Ebenda pag. 30, 31, 32, 66. [4]) Ebenda pag. 76. [5]) Aug. Böckh l. c. S. 13. [6]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 167.

Kanopus, von welchem man ohnedies weiß, daß es in Vergessenheit geriet, wirksam gewesen sein kann: von 238 an höchstens durch 40 Jahre hindurch.

Eine Voraussetzung liegt allerdings unserer bisherigen Darstellung zugrunde: daß es nur einen Geminus gab und nicht deren zwei, einen Mathematiker und einen Astronomen[1]). Wer dieser Meinung sich anschließt, verzichtet auf die Ausnutzung der Isagoge zur Bestimmung der Lebenszeit des Mathematikers Geminus und kann daher unseren Entwicklungen nicht den geringsten Wert beilegen. Wir vermögen uns von dem erhobenen Zweifel nicht beirren zu lassen und glauben nach wie vor an die Übereinstimmung des Mathematikers mit dem Astronomen. Wer Geminus war, ist nicht bekannt. Der Name besitzt einen entschieden römischen Klang, und wenn auch die Rechtschreibung *Γεμῖνος*, deren Proklus wie Pappus sich bedient, der römischen Aussprache widerspricht, so kann eine Ausgleichung darin gefunden werden, daß Simplicius den Ton auf die erste Silbe, *Γέμινος*, legt. Man hat demzufolge in Geminus wohl den Freigelassenen eines edlen Römers erkennen wollen.

Das mathematische Hauptwerk des Geminus kann vielleicht den Titel: Über die gesetzmäßige Gliederung der Mathematik geführt haben[2]). Von dessen Inhalt haben wir in negativer Weise behauptet, er sei nicht wesentlich geschichtlich gewesen. Es war auch jedenfalls kein eigentliches Lehrbuch der Mathematik. Geminus wollte vielmehr nach aller Wahrscheinlichkeit die Anfeindungen, welche Zenon von Elea und dessen Nachfolger gegen den logischen Aufbau der Mathematik sich gestattet hatten, widerlegen. Man erkennt diesen Zweck aus der Art, wie das Werk des Geminus benutzt worden ist. Proklus entnimmt ihm gern die Entscheidung, wo es sich um Streitfragen mehr allgemein logischer als mathematischer Natur handelt, um geometrische Erklärungen, Grundsätze und dergleichen. Eine einzige geometrische Entdeckung des Geminus kennen wir aus Proklus, wenn sie wirklich ihm zuzuschreiben ist, woran eine spätere Stelle bei Proklus wieder zweifeln läßt. Dieser sagt nämlich[3]): „Unter den

[1]) Vgl. K. Manitius, Des Geminos Isagoge, Sonderabdruck aus den Commentationes Fleckeisenianae (Leipzig 1890) mit der Besprechung der Abhandlung in Zeitschr. Math. Phys. XXXVI. Histor.-literar. Abtlg. S. 96—97. In seiner Ausgabe der Isagoge von 1898 hat Manitius die 1890 ausgesprochenen Ansichten wesentlich abgeändert und sieht seitdem in dem erhaltenen Texte einen späten in Konstantinopel angefertigten Auszug aus der ursprünglichen Isagoge des Geminus von Rhodos. [2]) Pappus VIII, 3 (ed. Hultsch) 1026 heißt es: *Γεμῖνος ὁ μαθηματικὸς ἐν τῷ περὶ τῆς τῶν μαθημάτων τάξεως.* [3]) Proklus (ed. Friedlein) 112—113 und 251 lin. 2—11. Bretschneider 177.

auf Körpern konstruierten Linien sind die einen in ihren Teilen gleich und ähnlich wie die zylindrischen Schraubenlinien, andere dagegen nicht, nämlich alle übrigen. Es ergibt sich nun aus diesen Unterschieden, daß es nur drei Linien gibt, welche in allen ihren Teilen gleich und ähnlich sind, die Gerade, der Kreis und die zylindrische Schraubenlinie, von denen zwei ganz in der Ebene liegende einfache sind, eine aber eine gemischte ist und auf einem Körper liegt. Auch dies beweist ganz klar Geminus, nachdem er vorher gezeigt hat, daß wenn an eine solche in allen Teilen gleich und ähnliche Linie von einem Punkte aus zwei Gerade gezogen werden, die mit ihr gleiche Winkel bilden, diese Geraden einander gleich sind."

Vielleicht darf als mit Geminus annähernd gleichaltrig Theodosius[1]) genannt werden. Wenigstens kommt der Name dieses von Ptolemäus benutzten Mathematikers und Astronomen bei Strabon und Vitruvius vor, so daß er vor Christi Geburt gelebt haben muß, und dem Gegenstande seiner Untersuchungen nach etwa im letzten Jahrhunderte dieser Zeit. Als Heimat des Theodosius gilt alsdann Tripolis an der phönikischen Küste. Seine Sphärik in drei Büchern ist eine ziemlich vollständige Geometrie der Kugeloberfläche mit Ausschluß des messenden, also trigonometrischen Teiles. Er stützt sich, ohne seine Vorgänger zu nennen, vielfach auf dieselben, wie es bei dem Verfasser eines Lehrbuches Sitte war, auch wohl noch ist. Insbesondere hat die Abhängigkeit von den Phaenomena Euklids (S. 293) nachgewiesen werden können[2]). Wir bemerken, daß die Vermutung gleichfalls ausgesprochen worden ist[3]), der Mathematiker Theodosius sei von Theodosius von Tripolis verschieden. Er stamme vielmehr aus Bithynien und sei Landsmann sowohl als Zeitgenosse des Hipparch (S. 361) gewesen.

Dionysodorus wird von Heron (S. 380), von Strabon[4]) und

[1]) Vgl. Fabricius, *Bibliotheca Graeca* (ed. Harless) IV, 21. Die Sphärik ist griechisch mit lateinischer Übersetzung von Pena (Paris 1558) herausgegeben. Eine deutsche Übersetzung von Ernst Nizze, Stralsund 1826. Von ebendemselben eine griechische Textausgabe mit lateinischer Übersetzung, Berlin 1852. Wertvolle Untersuchungen bei Nokk, Ueber die Sphärik des Theodosius, Programm des Bruchsaler Gymnasiums 1847. Hultsch hat im X. Bande der Abhandlungen der philol.-hist. Klasse der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig (1887) Scholien zur Sphärik des Theodosius herausgegeben, welche teils dem zehnten nachchristlichen Jahrhundert angehören, teils mindestens bis zum dritten Jahrhundert zurückgehen. [2]) Nokk l. c. und Heiberg, Euklidstudien S. 43—46. [3]) *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne par* Paul Tannery. Paris 1893, pag. 36—37 und Axel Anthon Björnbo in den Abhandlungen zur Geschichte der mathemat. Wissenschaften, XIV, S. 64—65. Leipzig 1902. [4]) Strabo XII, 3.

von Plinius[1]) genannt, muß also vor Christus gelebt haben. Strabon berichtet, Amisus im Pontus am asiatischen Südufer des Schwarzen Meeres sei seine Heimat gewesen. Plinius nennt ihn von Melos, so daß möglicherweise zwei verschiedene Persönlichkeiten gemeint sein können, und weiß eine Wundergeschichte zu erzählen, in welcher er eine Rolle spielt. Dem Mathematiker dürfte außer der von Heron erwähnten Schrift über die Spiren die Lösung der archimedischen Aufgabe der Kugelteilung nach gegebenem Verhältnisse der Abschnitte interessant sein, zu welcher Dionysodorus, nach den Mitteilungen des Eutokius[2]), den Durchschnitt einer Parabel mit einer Hyperbel benutzte. Man hat freilich Dionysodor auch weiter rückwärts zwischen Archimed und Apollonius einzuschieben Veranlassung genommen, wodurch die Lebenszeit des Perseus als Erfinder der Spiren ebenfalls um einige Jahrzehnte zurückdatiert werden müßte[3]).

Festen chronologischen Boden unter den Füßen gewinnen wir mit Menelaus von Alexandria. Zwei in Rom angestellte Beobachtungen dieses Astronomen aus dem ersten Regierungsjahre Trajans, d. h. aus dem Jahre 98 n. Chr., sind im Almageste erhalten[4]), und so kann über die Zeit der wissenschaftlichen Tätigkeit des Menelaus kein Zweifel stattfinden.

Er verfaßte sechs Bücher über die Berechnung der Sehnen, welche aber gleich dem ähnlichen Werke seines Vorgängers Hipparch verloren gegangen sind. Seine drei Bücher der Sphärik sind im griechischen Originaltexte gleichfalls nicht bekannt, doch sind einander gegenseitig bestätigende arabische und hebräische Übersetzungen aufgefunden worden, nach welchen seit dem XII. Jahrhunderte weitere lateinische Übersetzungen sich herstellen ließen, welche mehrfach herausgegeben sind[5]). Die Sphärik des Menelaus ist im Gegensatze zu der des Theodosius eine Art von sphärischer Trigonometrie. Wir meinen damit, daß Menelaus der Erste war, welcher die Lehre vom sphärischen Dreieck sowie die sphärische Trigonometrie aus der früheren ganz stereometrisch gehaltenen Sphärik aber auch aus der Astronomie ausgeschieden hat. Sein I. Buch ist dabei durchaus dem I. Buche

[1]) Plinius, *Historia naturalis* II, 109. [2]) Archimed (ed. Heiberg) III, 180sqq. [3]) Wilhelm Schmidt, Über den griechischen Mathematiker Dionysodorus. *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge, Bd. IV, 321—325 (1904). [4]) *Ptolemaei Almagestum* VII, 3 (ed. Halma) T. II, pag. 25 und 27. [5]) Die noch immer beste Übersetzung von Halley. Oxford 1758. Die neuesten Untersuchungen über Menelaus bei Ad. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 14—18 (1900) und besonders bei Axel Anthon Björnbo, Studien über Menelaos' Sphärik. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften XIV, 1—154 (1902), an welche wir uns wesentlich anschließen, mit Ausnahme der Zurückdatierung des sogenannten Satzes des Menelaus bis auf Hipparch.

der Euklidischen Elemente nachgebildet, dessen Dreieckssätze Menelaus aus der Ebene auf die Kugel übertrug. Dazu bedurfte es einer Definition des sphärischen aus Bögen größter Kreise bestehenden Dreiecks, und Menelaus gab sie, gab zugleich dem gebildeten Dreiecke den Namen *τρίπλευρον* im Gegensatze zu *τρίγωνον* als dem Namen des ebenen Dreiecks. Dann finden wir die Sätze, daß im sphärischen Dreiecke gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen, daß der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, nebst der Umkehrung der beiden Sätze. Die Summe zweier Seiten wird als größer als die dritte Seite erkannt, die Summe der drei Winkel als größer als 2 Rechte, während der die Winkelsumme nach oben begrenzende Satz, sie sei kleiner als 6 Rechte, nicht vorkommt. Menelaus versucht niemals einen Deckungsbeweis für stückweise einander gleiche Dreiecke zu führen, wird also vermutlich des Unterschiedes zwischen Kongruenz und Symmetrie auf der Kugel bewußt gewesen sein. Das II. Buch ist nur mittelbar der Sphärik gewidmet und hauptsächlich astronomischen Inhaltes, so daß wir bei unserer Ausschaltung der Astronomie berechtigt, wenn nicht verpflichtet sind, darüber hinwegzugehen. Das III. Buch enthält die eigentliche Trigonometrie und gründet sie auf den ersten Satz des Buches d. i. auf den sogenannten Satz des Menelaus, der zwar unmittelbar als sphärischer Satz ausgesprochen ist, bei dessen Beweis aber der planimetrische Satz des Menelaus in Anwendung tritt. Der planimetrische Satz spricht sich dahin aus, daß bei Durchschneidung der drei Seiten eines ebenen geradlinigen Dreiecks durch eine Gerade Abschnitte erscheinen, welche das gleiche Produkt aus je drei Abschnitten, die keinen Endpunkt gemein haben, hervorbringen; der sphärische Satz verändert diesen Ausspruch nur dahin, daß die Abschnitte der Bögen durch die Sehnen der verdoppelten Abschnitte ersetzt werden. Menelaus selbst hat freilich so wenig wie seine Nachfolger bis in das XVI. S. seine Sätze in dieser Weise ausgesprochen. Es heißt niemals $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$ oder das Parallelepipedon der betreffenden Abschnitte habe gleichen Inhalt, sondern das Verhältnis $a_1 : b_1 = b_2 \cdot b_3 : a_2 \cdot a_3$ ist gebildet und so ausgesprochen, daß gesagt wird, a_1 stehe zu b_1 in dem zusammengesetzten Verhältnisse von b_2 zu a_2 und von b_3 zu a_3. Der Name, unter welchem der Satz bekannt blieb, ist der des Satzes von den sechs Größen, *regula sex quantitatum*. Das Vorkommen zusammengesetzter Verhältnisse bei Euklid und Archimed ist uns (S. 266) bekannt geworden. Wenn der planimetrische Satz in der Sphärik nicht bewiesen ist, so muß daraus gefolgert werden, er sei schon bekannt gewesen, mag man, wozu wir uns nicht leicht entschließen können, annehmen, Hipparch habe ihn bereits besessen und benutzt, oder mag man der Ansicht sein, Menelaus habe auch eine Schrift über ebene Dreiecke verfaßt, in welcher der planimetrische Satz vorkam. Als Stütze dieser letzteren Ansicht dient ein bei Proklus erhaltener Beweis des Menelaus zu einem Dreieckssatze und die Tatsache, daß ein Araber Menelaus als Verfasser von Elementen der Geometrie genannt hat. Von anderen im III. Buche der Sphärik vorkommenden Sätzen sei noch der 5. Satz erwähnt, der die Projektivität der Doppelverhältnisse enthält und zwar ohne jeden Beweis, mithin als altbekannt, der 9. Satz, daß die drei Halbierungsbogen der Winkel, der 10. Satz, daß die drei Höhenbogen eines sphärischen Dreiecks je einen gemeinsamen Durchschnittspunkt besitzen. Die entsprechenden planimetrischen Sätze waren längst, der zweite vermutlich seit Archimed (S. 298) vorhanden.

Menelaus hat auch in der Kurvenlehre sich Verdienste erworben. Er hat, wie Pappus ungemein kurz sich fassend und deshalb für uns sehr fruchtlos erzählt[1]), einer krummen Linie, mit welcher vorher zwei uns gänzlich unbekannte Geometer Demetrius von Alexandria und Philo von Tyana sich beschäftigten, seine besondere Aufmerksamkeit zugewandt und derselben den Namen der außergewöhnlichen oder seltsamen, *παράδοξος γραμμή*, beigelegt.

Klaudius Ptolemäus führte zu Ende, was Hipparch und Menelaus vor ihm begonnen hatten. Er schuf für den astronomischen Gebrauch eine Trigonometrie von so vollendeter Form, daß sie weit über ein Jahrtausend nicht überboten wurde und nicht weniger als die unter dem Namen des ptolemäischen Weltsystems bekannte Lehre von den Bewegungen der Gestirne aber mit besserem Erfolge die Wissenschaft beherrschte. Beides, das astronomische und das trigonometrische Lehrgebäude, ist vereinigt in den 13 Büchern der großen Zusammenstellung, *μεγάλη σύνταξις*[2]). Als dieses Werk später, wie wir im 32. Kapitel zu schildern haben werden, aus dem Griechischen ins Arabische, aus dieser Sprache noch später ins Lateinische übersetzt wurde, erhielt es den durch Zusammenschweißung des arabischen Artikels al mit dem griechischen Superlativ *μέγιστος* gebildeten Bastardnamen Almagest, unter welchem es meistens bekannt ist, und dessen auch wir uns bedienen, einigemal weiter oben schon vorgreifend bedient haben.

[1]) Pappus IV, 30, (ed. Hultsch) pag. 270. [2]) Die bequemste Ausgabe ist die von Halma unter Beigabe einer französischen Übersetzung in zwei Quartbänden veranstaltete. Paris 1813—16. Eine neue Textausgabe aber leider ohne Übersetzung veranstaltete Heiberg 1899—1903. Wichtige Untersuchungen über den Almagest namentlich nach seiner astronomischen Bedeutung in *Recherches sur l'histoire de l'astronomie* par Paul Tannery. Paris 1893.

Im Almageste sind viele astronomische Beobachtungen verwertet, teils dem Ptolemäus eigentümliche, teils von anderen herrührend. Die späteste der so aufgenommenen Datierungen ist die einer Venusbeobachtung aus dem 14. Regierungsjahre des Antoninus[1]), also aus dem Jahre 151, und die Abfassung des Almagestes muß somit später fallen. Andererseits ist die früheste eigene Beobachtung des Ptolemäus, von der wir wissen, im Jahre 125 angestellt und damit erreichen wir als engste Grenzen seiner Wirksamkeit die Jahre 125 bis 141 oder 151. Das ist aber neben einem Aufenthalte in Alexandria auch alles, was wir von den persönlichen Verhältnissen des Ptolemäus mit Gewißheit aussagen können. Nach später aus arabischer Quelle geflossener Angabe[2]) wäre Ptolemäus in Alexandria geboren und aufgewachsen; er sei, heißt es dort, 78 Jahre alt geworden; auch weiß der Bericht von seiner hellen Farbe, seinen kleinen Füßen, einem roten Muttermale an der rechten Kinnlade, dem schwarzen, dichten Barte, seinen Lebensgewohnheiten und Charaktereigenschaften so viel zu erzählen, daß man sehr in Zweifel gerät, soll man der Genauigkeit trauen oder der Übergenauigkeit mißtrauen. Eine gründliche Untersuchung[3]) des arabischen Berichtes hat ergeben, daß derselbe aus einer 1053 geschriebenen Spruchsammlung eines Emir Abû'l Wafâ Mubaschschir ben Fatik stammt und auf ein ähnliches im IX. Jahrhundert entstandenes Werk des Hunain ibn Ishâk zurückgeht. Der 78jährigen Lebensdauer des Ptolemäus, den man danach etwa von 100 bis 178 anzusetzen hätte, dürfte am ersten zu trauen sein. Die genaue Personalbeschreibung wird damit in Zusammenhang gebracht, daß gerade im II. Jahrhundert physiognomische Studien bei den Griechen in Blüte standen, und wie man aus den Gesichtszügen geistige Eigenschaften herauslas, mag man aus bekannten schriftstellerischen Leistungen auf ihnen entsprechende Gesichtszüge geschlossen haben. Daß Ptolemäus in Alexandria geboren sei, steht nicht bei Emir Abû'l Wafâ, sondern ist Zusatz des Gerhard von Cremona. Glaubwürdiger ist eine Angabe des byzantinischen Gelehrten Theodorus Meliteniota (um 1361), Ptolemäus stamme aus der Stadt Ptolemais Hermeiu.

Wir haben es hier zunächst mit dem 9. Kapitel des I. Buches

[1]) Da die anderen unter der Regierung des Antoninus gemachten Beobachtungen den allerersten Jahren jener Regierung angehören, so mutmaßt Franz Boll, Studien über Klaudius Ptolemaeus (XXI. Supplementband von Fleckeisen und Masius Jahrb. f. class. Philol.) jene letzte Beobachtung gehöre nicht dem $\iota\delta = 14$. sondern dem $\delta = 4$. Jahre an, sei also vom Jahre 141. [2]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese etc.* Roma 1851, pag. 16—17. [3]) Boll l. c. S. 58—63.

des Almagestes zu tun, dem wir die Berechnung einer Sehnentafel zu entnehmen haben[1]). Ptolemäus teilt den Kreisumfang in 360 Teile, *τμήματα*, und jeden dieser Teile halbiert er zunächst nochmals. Ferner teilt er den Durchmesser des Kreises gleichfalls und zwar in 120 Teile, *τμήματα*, setzt aber hier die Teilung sogleich sexagesimal fort. Die Unterabteilungen bringen 60 erste, 60 zweite Teile hervor, welche in den lateinischen Übersetzungen zu *partes minutae primae* und *partes minutae secundae* wurden, woraus andere Sprachen ihre Minuten und Sekunden hernahmen. Ein Neues hat Ptolemäus mit diesen Teilungen gewiß nicht gegeben. Wie die Gradeinteilung des Kreises über Geminus, über Hipparch bis auf Hypsikles in Alexandria verfolgbar nach Babylon als Mutterland hinweist, so dürfte ähnliches für die Teilung des Kreishalbmessers nach sexagesimaler Grundzahl gelten müssen, die jedenfalls seinen alexandrinischen Vorgängern bekannt gewesen sein wird. Das Verdienst des Ptolemäus liegt dagegen in seiner Sehnenberechnung selbst. Theon von Alexandria, der Kommentator des Almagestes, sagt uns ausdrücklich[2]), Hipparch habe die Lehre von den Sehnen in 12 Büchern und Menelaus in sechs Büchern abgehandelt, man müsse aber erstaunen, wie bequem Ptolemäus mit Hilfe weniger und leichter Sätze ihre Werte gefunden habe. Den Ausgangspunkt bildet der sogenannte ptolemäische Lehrsatz vom Sehnenviereck[3]), daß das Produkt der Diagonalen der Summe der Produkte je zweier einander gegenüberliegender Seiten gleich sei, und neben diesem Satze die Kenntnis einiger ganz bestimmter Sehnen, nämlich der Seiten der regelmäßigen dem Kreise eingeschriebenen Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke, Zehnecke als der Sehnen von Bögen von 120, von 90, von 72, von 60, von 36 Bogengraden jedesmal in Teilen des Durchmessers, beziehungsweise des Halbmessers des Kreises dargestellt.

Nun folgt aber aus den Sehnen zweier Bögen die Sehne ihres Unterschiedes, aus der Sehne eines Bogens die Sehne des halb so großen Bogens, aus den Sehnen zweier Bögen die Sehne ihrer Summe.

Die Beweise der betreffenden Sätze bestehen dem Sinne nach in folgendem. Aus (Fig. 67) $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ soll $\beta\gamma$ gefunden werden. Man zieht von α aus den Durchmesser $\alpha\delta$, der also 120 Teile enthält und vollendet das Sehnenviereck $\alpha\beta\gamma\delta$ nebst seinen Diagonalen. Nun ist $\gamma\delta = \sqrt{120^2 - \alpha\gamma^2}$, $\beta\delta = \sqrt{120^2 - \alpha\beta^2}$, $\alpha\gamma \cdot \beta\delta = \alpha\delta \cdot \beta\gamma$

[1]) Ein vortrefflicher Auszug von L. Ideler unter dem Titel: „Ueber die Trigonometrie der Alten“ in Zachs Monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde (Juli 1812). Bd. XXVI, 3—38. [2]) Theon Alexandrinus (ed. Halma) I, pag. 110. [3]) Almagest (ed. Halma) I, pag. 29.

$+ \alpha\beta \cdot \gamma\delta$ oder $\alpha\gamma \cdot \sqrt{120^2 - \alpha\beta^2} = 120 \cdot \beta\gamma + \alpha\beta \cdot \sqrt{120^2 - \alpha\gamma^2}$, woraus $\beta\gamma$ gefunden werden kann.

Soll ferner (Fig. 68) aus $\beta\gamma$ die Sehne $\gamma\delta$ des halb so großen Bogens ermittelt werden, so zieht man den Durchmesser $\alpha\gamma$, außerdem $\alpha\beta$, $\alpha\delta$, $\beta\delta$, schneidet auf dem Durchmesser $\alpha\gamma$ das Stück $\alpha\varepsilon = \alpha\beta$ ab, zieht $\delta\varepsilon$ und endlich $\delta\zeta$ senkrecht zum Durchmesser $\alpha\gamma$. Die Dreiecke $\beta\alpha\delta$, $\varepsilon\alpha\delta$ sind nun kongruent, weil die beiden gleichen in α ihre gemeinschaftliche Spitze besitzenden Winkel von gleichen Seiten gebildet werden. Demgemäß sind auch die dritten Seiten gleich $\beta\delta = \delta\varepsilon$, und da überdies $\beta\delta = \delta\gamma$ als Sehnen gleicher Bögen, so ist das Dreieck $\delta\varepsilon\gamma$ gleichschenklig, und die Senkrechte $\delta\zeta$ auf dessen Grundlinie halbiert dieselbe, d. h. es ist $\zeta\gamma = \frac{\varepsilon\gamma}{2} = \frac{\alpha\gamma - \alpha\varepsilon}{2} = \frac{120 - \alpha\beta}{2}$ $= 60 - \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - \beta\gamma^2}$. Ferner sind die

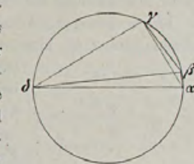

Fig. 67.

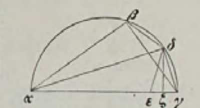

Fig. 68.

beiden rechtwinkligen, einen spitzen Winkel gemeinschaftlich enthaltenden Dreiecke $\gamma\delta\zeta$, $\gamma\alpha\delta$ ähnlich, also $\zeta\gamma : \gamma\delta = \gamma\delta : \alpha\gamma$ und $\gamma\delta^2 = \alpha\gamma \cdot \zeta\gamma$ $= 120\,[60 - \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - \beta\gamma^2}]$, woraus endlich $\gamma\delta$ sich ergibt.

Die letzte Aufgabe ist die, (Fig. 69) aus den Sehnen $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ die Sehne $\alpha\gamma$ zu finden. Zu diesem Zwecke werden die Durchmesser $\alpha\delta$ und $\beta\varepsilon$, außerdem $\beta\delta$, $\delta\gamma$, $\gamma\varepsilon$ und $\delta\varepsilon$ gezogen, welche letztere wegen der Kongruenz der Dreiecke $\alpha\beta\zeta$, $\delta\varepsilon\zeta$ der $\alpha\beta$ gleich sein muß. Der auf das Sehnenviereck $\beta\gamma\delta\varepsilon$ angewandte ptolemäische Lehrsatz liefert nunmehr $\beta\delta \cdot \gamma\varepsilon = \beta\gamma \cdot \delta\varepsilon + \beta\varepsilon \cdot \gamma\delta$ oder

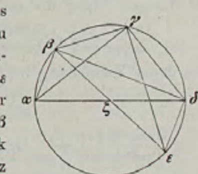

Fig. 69.

$$\sqrt{120^2 - \alpha\beta^2} \cdot \sqrt{120^2 - \beta\gamma^2} = \beta\gamma \cdot \alpha\beta + 120 \cdot \sqrt{120^2 - \alpha\gamma^2},$$

wodurch $\alpha\gamma$ bestimmt ist.

Zu den als bekannt vorausgesetzten Sehnen zurückkehrend erhält demnach Ptolemäus aus den Sehnen von 72^0 und von 60^0 die von $72^0 - 60^0$ oder von 12^0. Wiederholte Halbierung des Bogens lehrt alsdann die Sehne von 6^0, von 3^0, von $1\frac{1}{2}^0$, von $\frac{3}{4}^0$ kennen. Ptolemäus beabsichtigt aber die Sehnen der um je $\frac{1}{2}$ Grad steigenden

Bögen in eine Tabelle zu vereinigen, er bedarf also dazu in erster Linie der Kenntnis der Sehne von 1^0, und dazu verhilft ihm ein Vergleichungssatz von höchster Eleganz. Es seien (Fig. 70) zwei Bögen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ desselben Kreises gegeben, deren letzterer größer als der erstere, und es seien die Sehnen der einzelnen Bögen sowie der Summe der beiden gezogen, wobei wir zur Unterscheidung der Bögen und Sehnen jene z. B. als arcus $\alpha\beta$, diese als chorda $\alpha\beta$ oder als $\alpha\beta$ schlechtweg bezeichnen wollen. Der Winkel bei β werde durch die $\beta\delta$ halbiert; $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$ werden gezogen, auch $\delta\zeta$ senkrecht zu $\alpha\gamma$, und mit $\delta\varepsilon$ d. h. mit der Entfernung des Punktes δ vom Durchschnitte der $\beta\delta$ mit der $\alpha\gamma$ als Halbmesser und mit δ als Mittelpunkt wird ein Kreisbogen beschrieben, der einesteils die $\delta\alpha$ anderenteils die $\delta\zeta$, selbst oder in ihrer Verlängerung, in η und θ schneidet. Nach dem bekannten Satze von der Halbierung eines Dreieckswinkels ist $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma$, aber $\alpha\beta < \beta\gamma$, also auch $\alpha\varepsilon < \varepsilon\gamma$ d. h. $\alpha\varepsilon$ ist weniger als die Hälfte von $\alpha\gamma$, ε fällt zwischen α und ζ und es ist demzufolge $\delta\alpha > \delta\varepsilon > \delta\zeta$, woraus weiter folgt, daß η auf $\delta\alpha$ selbst, θ auf der Verlängerung von $\delta\zeta$ liegen muß. Dann ist aber der Kreissektor $\delta\varepsilon\eta$ kleiner als das Dreieck $\delta\varepsilon\alpha$, und der Kreissektor $\delta\varepsilon\theta$ größer als das Dreieck $\delta\varepsilon\zeta$. Aus diesen Vergleichungen folgen die beiden anderen:

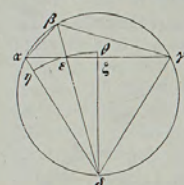

Fig. 70.

$$\frac{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\zeta}{\text{Sektor } \delta\varepsilon\eta} < \frac{\text{Sektor } \delta\varepsilon\theta}{\text{Sektor } \delta\varepsilon\eta} \text{ und } \frac{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\zeta}{\text{Sektor } \delta\varepsilon\eta} > \frac{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\zeta}{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\alpha},$$

aus deren Verbindung hervorgeht, daß

$$\frac{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\zeta}{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\alpha} < \frac{\text{Sektor } \delta\varepsilon\theta}{\text{Sektor } \delta\varepsilon\eta}.$$

Aber $\frac{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\zeta}{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\alpha} = \frac{\varepsilon\zeta}{\varepsilon\alpha}$ und $\frac{\text{Sektor } \delta\varepsilon\theta}{\text{Sektor } \delta\varepsilon\eta} = \frac{\text{arcus } \varepsilon\theta}{\text{arcus } \varepsilon\eta}$. Die gewonnene Ungleichung heißt also auch $\frac{\varepsilon\zeta}{\varepsilon\alpha} < \frac{\text{arcus } \varepsilon\theta}{\text{arcus } \varepsilon\eta}$. Wird beiderseits die Einheit hinzugefügt und alsdann verdoppelt, so entsteht

$$\frac{\alpha\gamma}{\varepsilon\alpha} < \frac{2 \text{ arcus } \eta\theta}{\text{arcus } \varepsilon\eta}.$$

Nun vermindert man wieder beiderseits um die Einheit und gewinnt damit $\frac{\gamma\varepsilon}{\alpha\varepsilon} < \frac{\text{arcus } \theta\varepsilon + \text{arcus } \theta\eta}{\text{arcus } \eta\varepsilon}$. Da aber weiter $\frac{\gamma\varepsilon}{\alpha\varepsilon} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}$ und

$$\frac{\text{arcus } \theta\varepsilon + \text{arcus } \theta\eta}{\text{arcus } \eta\varepsilon} = \frac{\sphericalangle \beta\delta\gamma}{\sphericalangle \beta\delta\alpha} = \frac{\text{arcus } \beta\gamma}{\text{arcus } \alpha\beta},$$

so ist endlich

$$\frac{\text{chorda } \beta\gamma}{\text{chorda } \alpha\beta} < \frac{\text{arcus } \beta\gamma}{\text{arcus } \alpha\beta}$$

d. h. der Quotient der größeren Sehne durch die kleinere Sehne ist kleiner als der Quotient der von den Sehnen bespannten Bögen[1]). Man hat erkannt[2]), daß Aristarchus von Samos, ein Astronom, welcher um das Jahr 270 lebte und von Archimed erwähnt wird (S. 321), sich schon dieses Satzes bediente, wenn auch ohne ihn zu beweisen. Aus diesem letzteren Grunde haben wir darauf verzichtet, dort davon zu reden, wo es im 14. Kapitel der Zeitfolge nach hätte geschehen können. Werden nun Sehne und Bogen von 1^0 mit denen von $1\frac{1}{2}^0$ und von $\frac{3}{4}^0$ verglichen, so ergibt sich

$$\frac{\text{chorda } 1^0}{\text{chorda } \frac{3}{4}^0} < \frac{\text{arcus } 1^0}{\text{arcus } \frac{3}{4}^0} \text{ und } \frac{\text{chorda } 1\frac{1}{2}^0}{\text{chorda } 1^0} < \frac{\text{arcus } 1\frac{1}{2}^0}{\text{arcus } 1^0}.$$

Aber $\frac{\text{arcus } 1^0}{\text{arcus } \frac{3}{4}^0} = \frac{4}{3}$, $\frac{\text{arcus } 1\frac{1}{2}^0}{\text{arcus } 1^0} = \frac{3}{2}$ und somit leicht

$$\frac{2}{3} \text{ chorda } 1\frac{1}{2}^0 < \text{chorda } 1^0 < \frac{4}{3} \text{ chorda } \frac{3}{4}^0.$$

Die beiden äußeren Werte heißen nun bis in den Sekunden übereinstimmend $1 \cdot 2' \cdot 50''$, und somit wird mit einer Genauigkeit, welche die Sekunden noch zuverlässig erscheinen läßt, auch der dazwischen liegende Wert chorda $1^0 = 1 \cdot 2' \cdot 50''$ sein müssen. Jetzt ist die Sehne von 1^0 und die von $1\frac{1}{2}^0$, folglich auch die Sehne von $\frac{1}{2}^0$ bekannt, und die Sehnen aller um je $\frac{1}{2}^0$ wachsenden Bögen von 0 bis 180^0 einschließlich können gefunden werden.

Sie alle hat Ptolemäus in seiner Sehnentafel vereinigt, größere Bögen ausschließend. Er tut dieses nicht etwa, weil die Sehne, die einen Bogen bespannt, der größer als der Halbkreis ist, zugleich auch zu einem anderen kleineren Bogen gehört, der den ersten zu einem ganzen Kreise ergänzt, sondern weil Bögen, die größer als der Halbkreis sind, bei ihm überhaupt nicht vorkommen. Wenigstens führt er diesen letzten Grund ausdrücklich an[3]), während wir den erstgenannten nicht bei ihm finden. Für die Auffindung der Sehnen von Bögen, welche zwischen zwei in der Tabelle befindlichen enthalten sind, sorgt eine weitere Kolumne der Proportionalteile oder,

[1]) Dem Gedächtnisse kann man diesen Satz des Ptolemäus besser in der fast in die Sinne fallenden, bei Ptolemäus jedoch nicht vorkommenden Form einprägen, daß der Quotient des größeren Bogens durch seine Sehne größer sei als der Quotient des kleineren Bogens durch seine Sehne. [2]) v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 8, Note 1. [3]) Almagest I, 11 (ed. Halma) 1, pag. 51: *καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς δὲ λαμβανομένων περιφερειῶν τὸ ὅμοιον ὑπακουέσθω* (sc. *ἐλάσσονα εἶναι ἡμικυκλίου*).

wie Ptolemäus sagt, der Sechzigstel, ἑξηκοστῶν, indem angenommen wird, daß die Veränderung der Sehnen der Bögen innerhalb der tabellarischen Angabe von $\frac{1}{2}^{0}$ zu $\frac{1}{2}^{0}$ oder von 30′ zu 30′ der Veränderung der Bögen proportional sei. So steht beispielsweise neben dem Bogen 20⁰ 0′ die Chorde 20 . 50 . 16, neben dem Bogen 20⁰ 30′ die Chorde 21 . 21 . 12. Der Zunahme des Bogens um 30′ entspricht eine Zunahme der Chorde um 0 . 30 . 56, und findet diese im Verhältnisse der Bogenzunahme statt, so ist der mittlere Zuwachs der Chorde 0 . 1 . 1 . 52 für jede Minute, um welche der Bogen zwischen 20⁰ und 20⁰ 30′ zunimmt. Diese Zahl 0 . 1 . 1 . 52 steht denn auch in der dritten Kolumne neben den Zahlen 20 . 0 der ersten, 20 . 50 . 16 der zweiten Kolumne. Ein Beweis für diese angenommene Proportionalität in engem Bereiche ist dagegen nicht vorhanden[1]).

War das 9. Kapitel der Entwerfung der Sehnentafel gewidmet, so ist im 11. Kapitel die Trigonometrie, und zwar hauptsächlich die sphärische Trigonometrie enthalten, sich aufbauend auf den Sätzen des Menelaus, die hier ohne Quellenangabe vorkommen[2]), so daß man sie lange für Erfindungen des Ptolemäus hielt, bis im XVII. S. Pater Mersenne sie ihrem Urheber zurückerstattete[3]). Der Hauptsatz der ebenen Trigonometrie, daß im Dreiecke zwei Seiten sich verhalten wie die Sehnen der doppelten Bögen, welche die den Seiten gegenüberliegenden Winkel messen, ist allerdings nicht deutlich ausgesprochen, sondern nur in anderen Sätzen inhaltlich mit enthalten. Vollständiger sind die Sätze der sphärischen Trigonometrie angegeben. Dem Wortlaute, aber nicht dem Gedanken nach modernisiert lautet seine Darstellung etwa folgendermaßen[4]). Wenn Ptolemäus (Fig. 71) das bei H rechtwinklige Dreieck AHB berechnen will, so konstruiert er den Pol P von AH, dann den zu A als Pol gehörigen Äquator $PB'H'$, der in B', H' die verlängerten Seiten AB, AH schneidet. Somit wird $B'H' = \alpha$ und alle in der Figur vorkommenden Bögen lassen sich durch a, b, h, α und deren Komplemente ausdrücken. Nun kann der Satz des Menelaus viermal angewandt

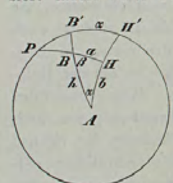

Fig. 71.

[1]) Ideler l. c. 23 hat die Richtigkeit der ptolemäischen Zahlen geprüft und hat gefunden, daß sie auf fünf Dezimalstellen genau sind. [2]) Almagest (ed. Halma) I, pag. 50 der Satz für das ebene Dreieck, pag. 55 der Satz für das sphärische Dreieck. [3]) Vgl. Chasles, *Aperçu hist.* 293, Deutsch 289. Chasles selbst ist geneigt, die Sätze auch dem Menelaus wieder abzusprechen und hält Euklid für den Erfinder, in dessen Porismen sie vorgekommen seien. [4]) Wir entnehmen diese Zusammenfassung fast wörtlich aus Hankel S. 285—286,

werden, nämlich auf die Dreiecke ABH, PBB', PHH', $AB'H'$. Die zugehörigen Transversalen sind in gleicher Ordnung $PB'H'$, AHH', $B'BA$, PBH, und die Anwendung des Satzes von den sechs Größen liefert die vier Gleichungen:

1. $\cos h = \cos a \cdot \cos b$ oder $\cos h = \cos a \cdot \cos b$
2. $\sin a = \sin \alpha \cdot \sin h$ oder $\sin a = \sin h \cdot \sin \alpha$
3. $\cos a \cdot \sin b \cdot \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \sin a$ oder $\operatorname{tng} a = \sin b \cdot \operatorname{tng} \alpha$
4. $\sin b \cdot \cos h = \cos b \cdot \cos \alpha \cdot \sin h$ oder $\operatorname{tng} b = \cos \alpha \cdot \operatorname{tng} h$.

Die Beweise hat Ptolemäus nicht immer gegeben und die Kommentatoren haben nicht unterlassen, hier die sehr nötigen Ergänzungen eintreten zu lassen[1]).

Die Trigonometrie als Kapitel des I. Buches des Almagestes behandelt, entspricht vollständig dem, was wir (S. 412) schon andeuteten. Die Trigonometrie ist wesentlich zu astronomischen Zwecken entstanden, so daß die sphärische Trigonometrie notwendiger und demzufolge auch früher ausgebildet war als die ebene Trigonometrie. Eine ebene Trigonometrie im Dienste der theoretischen Planimetrie ist dem Altertume ebenso fremd wie eine solche im Dienste feldmesserischer Untersuchungen, wenn man von der einzigen Ausnahme der Zahlenformeln Herons für den Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke absieht. Die Tatsache mag uns beim ersten Anblicke auffallen, eine Erklärung derselben scheint nicht schwer zu sein. Trigonometrische Ausdrücke als Durchgangspunkte, von welchen man wieder zu anderen Größengattungen gelangen will, sind nicht denkbar, so lange noch keine ausgebildete Zeichensprache der Mathematik vorhanden ist. Bis dahin liefern trigonometrische Ausdrücke mit Hilfe von Sehnentafeln in Zahlen umgesetzt nur näherungsweise richtige Ergebnisse. Der wissenschaftliche Geometer war aber abgeneigt, sich mit einer bloßen Annäherung, und sei sie noch so nahe, zufrieden zu geben. Der unwissenschaftliche Feldmesser war abgeneigt, das Wissen sich zu erwerben, welches zur Erlernung des trigonometrischen Rechnens unerläßlich war. So überließen beide die mißachteten oder gescheuten Verfahrungsweisen der Trigonometrie dem Astronomen, der weniger heikel als der eine, weniger denkfaul als der andere der guten Ergebnisse dieser Nährungsmethoden sich freute und bediente.

Gehören die übrigen Bücher des Almagestes der Geschichte der Astronomie an[2]), und ist für uns höchstens noch ein Wert von

Anmerkung, da wir es kaum für möglich halten, eine bündigere und übersichtlichere Darstellung zu liefern.

[1]) Theon Alexandrinus (ed. Halma) I, pag. 243 sqq. [2]) Wolf, Geschichte d. Astronomie S. 61—63, eine sehr hübsche Übersicht über den Inhalt des Almagestes.

$\pi = 3 \cdot 8 \cdot 30$ d. h. $= 3\frac{8}{60}\frac{30}{3600} = 3\frac{17}{120} = 3{,}141\,666\ldots$ bemerkenswert[1]), so hat die Entwicklungsgeschichte der Mathematik den Namen des Ptolemäus noch wegen anderer Werke aufzubewahren, die teilweise wieder für sie und für andere Disziplinen ein gemeinsames Interesse besitzen, teilweise rein mathematisch sind.

Wir reden hier zuerst von der mathematischen Geographie des Ptolemäus[2]). Wir erinnern uns, daß Hipparch (S. 362) die Punkte der Erde durch Koordinaten der Länge und Breite bestimmte. Er ging von dem Meridiane von Rhodos als Anfang für die Längen aus. Marinus von Tyrus im ersten Jahrhundert n. Chr. dürfte den Anfangsmeridian nach den kanarischen Inseln verlegt haben, dem damals äußersten nach Westen gelegenen bekannten Punkte[3]). Ptolemäus folgte auf Marinus und fußt in vielen Dingen auf dessen Untersuchungen, in andern ihn tadelnd und verbessernd. Auch ihm heißen die Ausdehnungen von Ost nach West und von Nord nach Süd Länge, *μῆκος*, und Breite, *πλάτος*, weil die Erde, wie jedermann zugestehe, mehr Ausdehnung in der ersten als in der zweiten Abmessung besitze, und Länge eben die größere Abmessung (S. 395) bezeichne[4]). So hat sich also das Koordinatenbewußtsein in seiner geographischen Anwendung fortwährend erhalten.

Ptolemäus ging aber vielleicht in dem Bewußtsein, daß man auf gewisse Grundrichtungen sich beziehen müsse, noch weiter. Wir denken dabei an eine Notiz, welche wir Simplicius, dem bekannten Erklärer des Aristoteles, schulden. In den Erläuterungen zum I. Buche vom Himmel berichtet er, Ptolemäus habe über die Ausdehnungen, *περὶ διαστάσεων*, geschrieben und dort gezeigt, daß nur drei Ausdehnungen eines Körpers möglich seien. Bei der Unbestimmtheit dieser Angabe müssen wir allerdings dahingestellt sein lassen, ob man glauben will, es seien in jener Schrift Gedanken enthalten gewesen, welche dem Begriffe von Raumkoordinaten nahe kommen.

Wieder an Hipparch sich anlehnend, lehrt Ptolemäus in der

[1]) Almagest VI, 7 (ed. Halma). Ptolemäus sagt ausdrücklich, dieser Wert liege nahezu in der Mitte — *μεταξύ ἐστιν ἔγγιστα* — zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$. In der Tat ist sexagesimal ausgedrückt $3\frac{1}{7} = 3^\circ 8' 34{,}28''$ und $3\frac{10}{71} = 3^\circ 8' 27{,}04''$, und deren arithmetisches Mittel ist $3^\circ 8' 30{,}66''$, während $3\frac{17}{120}$ wie in unserem Texte angegeben ist $3^\circ 8' 30''$ beträgt. [2]) *Traité de Géographie de Claude Ptolémée d'Alexandrie* (ed. Halma). Paris 1828. [3]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 153. [4]) *Ptolémée, Géographie* (ed. Halma) pag. 17.

Geographie die Anfertigung von Landkarten, und das 24. Kapitel des I. Buches[1]) ist wohl das älteste erhaltene Schriftstück, welches in seiner Überschrift als der Abbildung der bewohnten Erde auf einer Ebene gewidmet bezeichnet ist, so daß die Maße der Lagenverhältnisse auf der Kugel beibehalten werden sollen. Verschiedene Projektionsmethoden werden hier gelehrt, mit welchen Ptolemäus sich auch in einer anderen Schrift, dem Planisphaerium, beschäftigt hat[2]). Ptolemäus benutzt vorzüglich die Projektion, bei welcher das Auge als im Pole befindlich gedacht wird und die Äquatorialebene die Zeichnungsebene bildet, die Projektion also, welcher Aiguillon 1613 den Namen der stereographischen beigelegt hat. Wieder eine andere Abhandlung ist das Analemma, das griechisch in nicht unbedeutenden Bruchstücken und lateinisch in einer im XIII. Jahrhunderte angefertigten Übersetzung vollständig erhalten ist[3]). Es handelt sich darum, den Ort der Sonne zu einer bestimmten Tageszeit zu ermitteln, und diese Aufgabe wird graphisch gelöst. Was nun die praktische Benutzung der durch Zeichnung erhaltenen Figur betrifft, so geht aus dem Wortlaute des Ptolemäus hervor, daß er die beiden Möglichkeiten unmittelbarer und mittelbarer Winkelmessung kannte und ausübte. Zu der ersten diente ein in 90 Grade geteilter Kreisquadrant, zu der zweiten die Sehnentafel. Man hat darauf aufmerksam gemacht, daß die Figur selbst die Hälfte der Sehne des doppelten Winkels als meßbare Strecke darbot, daß also die Benutzung der Sehnentafel erst eine Verdoppelung einer Strecke, dann eine Halbierung eines Winkels verlangte, während diese Hilfsrechnungen in Wegfall kamen, wenn man das kannte, was in späterer Zeit und auf anderem Boden Sinustafeln genannt wurde.

Schriften des Ptolemäus über die Harmonielehre, d. h. über die Verhältnisse, welche, wie man heute sagen würde, zwischen den Schwingungszahlen der einzelnen Töne stattfinden, und über Optik[4]) begnügen wir uns zu nennen, da sie der Geschichte der Mathematik nicht angehören. Von Arbeiten über Mechanik wissen wir nur überhaupt, daß sie vorhanden waren; Pappus erwähnt ihrer in seinem

[1]) *Ptolémée, Géographie* (ed. Halma) pag. 59. [2]) Diese Abhandlung hat Commandinus 1558 übersetzt und herausgegeben. [3]) Heiberg, *Ptolemaeus de analemmate* in den Abhandlungen z. Gesch. d. Mathem. VII, 1—30 (1895) hat die griechischen Bruchstücke und die alte Übersetzung herausgegeben. Über den Inhalt vgl. A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Gesch. der Trigonometrie I, 11—14 (1900) und die wenig spätere Abhandlung von Zeuthen, *Note sur la trigonométrie de l'antiquité* in der Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, I, 20—27 (1900). [4]) Vgl. Poudra, *Histoire de la perspective.* Paris 1864, pag. 28—32. Eine früher als Ptolemäus, *De speculis* bezeichnete Katoptrik ist nicht von Ptolemäus, sondern von Heron. S. Agrimensoren 18—19.

VIII. Buche, Eutokius in seinen Erläuterungen zu der archimedischen Schrift über das Gleichgewicht. Vielleicht hatte Ptolemäus auch einen Sohn, der ein mechanisches Werk verfaßte, in welchem die ungleicharmige Wage mit Laufgewicht beschrieben war. Jener Sohn, so vermutet man[1]), hieß Charistion und gab der von ihm erläuterten Wage seinen Namen.

Dagegen hat uns Proklus Auszüge aus einem reingeometrischen Buche des Ptolemäus überliefert[2]), welche verdienen, daß wir bei ihnen verweilen. Aus diesen Auszügen geht hervor, daß Ptolemäus jedenfalls der erste Mathematiker war, von welchem bekannt geworden ist, daß er das sogenannte 11. Axiom des Euklid nicht als selbstverständlich betrachtet wissen wollte, daß er die zahllose Reihe derer eröffnet hat, welche durch Versuche die Parallelentheorie zu beweisen vergeblich sich abmühten, bis im XIX. S. der unendlich viel kühnere Versuch auftauchte, die Parallelentheorie als anfechtbar zu erklären und eine Geometrie zu schaffen, welche von ihr absehend als nicht-euklidische oder absolute Geometrie Geltung beansprucht. Ptolemäus beweist zunächst, daß Gerade, welche durch eine Transversale so geschnitten werden, daß die Winkel auf derselben Seite der Transversalen und auf entgegengesetzten Seiten der Geschnittenen sich zu zwei Rechten ergänzen, parallel sein müssen, d. h. sich nicht treffen (Fig. 72). Gesetzt $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ schnitten sich in $\varkappa$, während die Winkel $\beta\zeta\eta$ und $\delta\eta\zeta$ sich zu zwei Rechten ergänzen. Wegen des Satzes über Nebenwinkel werden auch die Winkel $\alpha\zeta\eta$ und $\gamma\eta\zeta$ sich zu zwei Rechten ergänzen, und folglich wird auch auf der Seite, wo α und γ steht, ein Durchschnitt der beiden Geraden in λ stattfinden. Die Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ schneiden sich also zweimal in $\varkappa$ und λ, ohne zusammenzufallen, d. h. sie schließen einen Raum ein, was nicht möglich ist. So wenig gegen diesen Beweis sich einwenden läßt, so wenig zutreffend ist der Beweis, den Ptolemäus von dem umgekehrten Satze liefert, daß bei wirklich vorausgesetztem Parallelismus die entsprechenden Winkel auf derselben Seite der Transversalen sich zu zwei Rechten ergänzen müssen. Die beiden

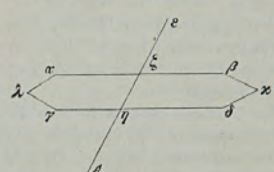

Fig. 72.

[1]) P. Duhem, *Les origines de la statique* I, 86—87. [2]) Proklus (ed. Friedlein) 362—368. Vgl. L. Majer, Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid. Tübingen, Gymnasialprogramm 1875.

$\alpha\zeta$ und $\gamma\eta$, sagt er nämlich, sind nicht weniger parallel als die $\zeta\beta$ und $\eta\delta$. Wäre also die Summe der Winkel $\beta\zeta\eta$ und $\delta\eta\zeta$ mehr oder weniger als zwei Rechte, so müßte genau das Gleiche für die Summe der Winkel $\alpha\zeta\eta$ und $\gamma\eta\zeta$ gelten. Die vier Winkel zusammen müßten also, sei es nun mehr, sei es weniger als vier Rechte betragen, während sie als zwei Paar Nebenwinkel genau vier Rechten gleich sind.

Wie Ptolemäus die euklidischen Elemente in der Theorie der Parallellinien für ergänzungsbedürftig hielt, so scheint es damals auch mit anderen Büchern des darum nicht minder bewunderten Werkes gegangen zu sein. Wir bringen in Erinnerung (S. 348), daß im II. S. der byzantinische Astronom Vettius Valens einen aus 2 Büchern bestehenden Kommentar zum X. Buche der euklidischen Elemente verfaßte, dessen arabische Übersetzung sich möglicherweise erhalten hat.

Die Schriftsteller, mit welchen wir in diesem Kapitel bekannt geworden sind, zeigen uns eine gewisse Gleichartigkeit unter sich und mit denjenigen, welche in dem 17. Kapitel besprochen wurden. Wieder haben wir es mit Geometern zu tun, welche der Kurvenlehre ihre Aufmerksamkeit zuwandten, welche die Stereometrie ausbildeten, von allen Körpern hauptsächlich die Kugel beachtend, welche der rechnenden Geometrie die Vollendung zur Trigonometrie gaben, indem sie gewisse Linien berechneten und tabellarisch zusammenstellten, welche zu gewissen Winkeln gehörten. Die Sehnentabelle ist — wir können uns nicht versagen, unsere Augen so weit nach rückwärts zu werfen — die für lange Zeit letzte Entwicklung eines alten Keimes. Das Seqt genannte Verhältnis des Ahmes wuchs dazu heran, und es scheint fast, als ob die ganze Entwicklung auf ägyptischem Boden vor sich ging.

Ist aber eine Art von Gemeinsamkeit der Mathematiker von Nikomedes und Diokles bis auf Menelaus und Ptolemäus, von 200 v. Chr. bis 150 n. Chr. nicht zu verkennen, so ist es nicht minder notwendig, auf allgemeine kulturhistorische Veränderungen hinzuweisen, welche innerhalb dieser Zeit eintraten, und welche nunmehr beginnen werden auf dem Gebiete, welches wir zu unserem Arbeitsfelde ausgewählt haben, sich deutlich bemerkbar zu machen. In der Einleitung zum 12. Kapitel haben wir (S. 259) die alexandrinische Literaturperiode ihrem allgemeinen Charakter nach kurz umrissen. Wir haben als untere Grenze derselben die Einverleibung Alexandrias in das römische Reich bezeichnet in der Mitte des ersten vorchristlichen Jahrhunderts. Über diese Grenze hat uns das hier abschließende Kapitel hinübergeführt und noch über eine andere von weltgeschichtlich größter Bedeutung. Geminus 77 v. Chr., Ptolemäus

150 n. Chr. bilden Anfang und Schluß unseres Kapitels. Müssen wir erst sagen, was zwischen beiden Jahreszahlen liegt? Und dennoch war die Entstehung des Christentums für die Geschichte unserer Wissenschaft ein zunächst fast nebensächliches Ereignis, weit geringfügiger in seinen unmittelbaren Einwirkungen als jene Machtverschiebung, die wir schon andeuteten. Rom kommt in den feldmesserischen Beispielen des Heron, in den astronomischen Beobachtungen des Geminus vor. Auch Menelaus beobachtete in Rom. Ptolemäus entnahm seine Datierungen den Regierungsjahren römischer Kaiser. Daran erkennen wir äußerlich, daß neue staatliche Kombinationen innerhalb des Lebens gerade der Männer sich gebildet haben, welche wir in diesem Kapitel friedlich nacheinander betrachteten. Solche weltgeschichtliche Tatsachen dürfen auch in der historischen Darstellung einer Wissenschaft nicht mit Schweigen übergangen werden. Die Entwicklung der Wissenschaft knüpft sich an die Träger der Wissenschaft, die Träger der Wissenschaft gehören als Menschen ihrer Zeit an. Deutlicher oder in verwischteren Spuren wird die Zeit auch in der Wissenschaft zu erkennen sein. Überblicken wir darum in raschestem Fluge die allgemeinen Verhältnisse. Wir gelangen damit zugleich zu denjenigen mathematischen Dingen, deren Erörterung uns der Zeit nach etwas zurückgreifend nunmehr obliegt.

21. Kapitel.

Neupythagoräische Arithmetiker. Nikomachus. Theon.

Rom hatte nach und nach in Italien das unbestrittene Übergewicht über die Mitbewohner des Landes südlich von den Alpen errungen. Der Tod des Archimed knüpft sich für uns an die Eroberung von Syrakus, das Todesjahr des Apollonius war es ungefähr, in welchem Rom mit Mazedonien handgemein wurde und den Sieg bei Kynoskephalä erfocht. Zehn Jahre später und der syrische Krieg gegen Antiochus den Großen war geschlagen. Die seegeübten Bewohner der Insel Rhodos wie die Krieger von Pergamum waren den Römern zur Seite gestanden und fühlten von jetzt an den Einfluß der mächtigen Weltbefreier, wie man die Römer noch nannte. Deutlicher wurde das Streben des die Stellung als Weltmacht sich erobernden Staates, als um 150 die Nebenbuhlerschaft Karthagos vernichtet ward, und mehr und mehr drängte sich in dem nun folgenden Jahrhunderte römischer Wille den orientalischen Ländern mit Einschluß Ägyptens auf. Gegen Ägypten selbst führte Cäsar im Jahre 47 seine Truppen zum alexandrinischen Kriege, und der Eroberung der Stadt leuchtete mit bildungsfeindlicher Flamme der Brand des Brucheion.

Wir haben von dem großartigen Sammeleifer der ersten Ptolemäer gesprochen. Ihnen fast voraus war die Gier, mit welcher König Attalus von Pergamum Bücher sich zu verschaffen suchte, und diese Wettbewerbung soll die Ursache nachweisbar vorgekommener Fälschungen gewesen sein. Im II. vorchristlichen Jahrhunderte tauchten plötzlich Schriften auf, von welchen der sein sollende alte Verfasser nie eine Ahnung gehabt hatte, und welche wissenschaftlich nur so weit Verwertung finden können, als sie den Beweis liefern, daß man im II. S. mit den Dingen bekannt war, die den Inhalt derselben bilden. Durch Ankäufe echter und unterschobener Schriften wuchs die alexandrinische Bibliothek so, daß sie in einem Gebäude nicht mehr Platz fand. Nachdem das Brucheion in der Nähe des Hafens angefüllt war, legte man eine zweite Sammlung im Tempel des Serapis an. Jene erste Hauptsammlung war es, die der Feuersbrunst zum Opfer fiel, die mit mehr als 400000 Bänden das vernichtende Element nährte.

Das war ein harter Schlag für die Wissenschaft und deren alexandrinische Vertreter. Bis zu einem gewissen Grade wurde zwar Ersatz geboten. Der römerfreundliche König von Pergamum, Attalus III., hatte sterbend im Jahre 133 v. Chr. den römischen Senat zum Erben seiner Schätze eingesetzt, und Antonius überließ die pergamenische Büchersammlung der Stadt, welche durch die Reize Kleopatras an ihm einen Gönner gewonnen hatte. So war aufs neue eine großartige Bibliothek, jetzt im Serapeion, vereinigt. War die grammatische Tätigkeit, welche wir bei unserem früheren Berühren der alexandrinischen Wissenschaft als im Museum vorzugsweise neben und wohl vor der Mathematik gepflegt nannten, eine solche, die als Stoff ihrer Untersuchung ältere Schriften verwerten mußte, so mag jetzt, nachdem man gesehen, wie ein Unglücksfall unschätzbar vieles zerstört hatte, mehr noch als zuvor eine Neigung erwacht sein, durch Erläuterungen und Zusammenstellungen die alte Wissenschaft in Sicherheit zu bringen. Andere Momente waren gleichfalls vorhanden, anderen Beweggründen entstammend, aber für unsere Zwecke mit der kommentierenden Tätigkeit zusammenfallend.

Alexandria war der Ort, wo Hellenentum, wo Ägyptisches, wo aber auch Asiatisches sich begegneten. Assyrer, Inder, Hebräer trafen dort ein, ihre ältere oder jüngere Bildung mit sich bringend, austauschend, ergänzend. Was bei einem solchen Zusammenströmen Weitgereister einzutreffen pflegt, fehlte auch hier nicht. Der Wissensdurst schöpfte mit notwendigem Eklektizismus bald da, bald dort; das Wunderbarste übte die größte Anziehung; man fühlte sich versucht, selbst nach jenen Gegenden, dem Schauplatze märchenhafter Erzählungen, aufzubrechen; man gewann aber auch neues Interesse an solchen, die ehedem gleiche Reisen ausgeführt hatten, denen man zu den wirklich erlebten Abenteuern neue hinzudichtete. Die Phantasie gewann das Übergewicht über den nüchtern denkenden Verstand. Die Dialektik des Aristoteles entsprach den Neigungen nicht mehr in dem Maße wie Platons die Einbildungskraft anregende und voraussetzende Schriften. Platon als Schriftsteller, Pythagoras als Persönlichkeit zu verehren wurde allgemeiner und allgemeiner. Ein gewisser mystischer Pythagoräismus, von Wissenschaft freilich weit entfernt, war nie gänzlich verschollen. Er erholte sich zu neuem, kräftigem Leben. Die neue Akademie bildete sich heran, die Neupythagoräer entstanden. Sie studierten, sie erläuterten Platon im pythagoräischen Sinne, soweit derselbe zu ermitteln war.

So kamen selbstverständlich auch diejenigen mathematischen Forschungen wieder in eifrigere Übung, welche schon vorher vorhanden gegen die Geometrie zurückgetreten waren, wenn auch ein Verschwinden derselben nicht behauptet werden kann. Die pythagoräische Arithmetik wurde jetzt Mode in dem Sinne, wie wir dieses Wort schon einmal (S. 259) gebraucht haben. Männer wie Nikomachus, wie Theon standen auf.

Nikomachus war in Gerasa zu Hause, einem Orte, der wahrscheinlich in Arabien zu suchen ist[1]). Er nennt in einer musikalischen Abhandlung Thrasyllus, womit jedenfalls der unter der Regierung des Tiberius lebende Platoniker aus Mende gemeint ist, er kann also nicht früher als etwa 30 n. Chr. geschrieben haben. Ihn übersetzte Appuleius von Madaura unter den Antoninen ins Lateinische[2]), und damit ist als untere Grenze das Jahr 150 etwa gewonnen. Gemeiniglich setzt man Nikomachus von Gerasa auf einen mittleren Zeitpunkt zwischen diese Grenzen, um das Jahr 100 n. Chr., denkt ihn also etwa als Zeitgenossen des Menelaus von Alexandria.

Nikomachus war als Pythagoräer bekannt[3]), als Arithmetiker berühmt. Neben der Tatsache einer Übersetzung so kurz nach dem Erscheinen des Werkes, wie die des Appuleius, ist der Ausspruch des Lucian dafür bemerkenswert, der um 160 etwa einen Rechner nicht

[1]) Die Stellen, welche diese Annahme unterstützen, vgl. bei Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 189, Note 33. [2]) So berichtet Cassiodorius. Die Übersetzung selbst ist verloren. [3]) Pappus III, 18 (ed. Hultsch) pag. 81 *Νικόμαχος ὁ Πυθαγορικός*.

besser zu kennzeichnen wußte als mit den Worten, er rechne wie Nikomachus von Gerasa[1]), und auch von Kommentaren zu den Büchern des Nikomachus, welche deren große Berühmtheit verbürgen, werden wir weiter unten zu reden haben.

Die musikalischen Schriften des Nikomachus werden wir nicht zu betrachten haben, so wenig wir andere Musiker in das Bereich unserer Besprechung ziehen. Uns kümmert in erster Linie nur die „Einleitung in die Arithmetik in zwei Büchern“[2]), *εἰςαγωγὴ ἀριθμητική*, eben jenes von Appuleius bald übersetzte Werk, dessen geschichtliche Stellung wir zu erörtern haben. Ein Schriftsteller aus dem Anfange des VII. S., Isidorus von Sevilla, hat behauptet, Nikomachus habe weitläufiger auseinandergesetzt, was Pythagoras über die Zahlenlehre schrieb[3]). Wir sind weit entfernt, an die übertreibungslose Wahrheit dieser Aussage zu glauben, allein eben so gewiß scheint uns, daß von dem Inhalte der Einleitung in die Arithmetik vieles auf ältere und älteste Quellen zurückzuführen sein wird. Nikomachus ist uns auf arithmetischem Gebiete das, was uns Euklid, was uns Heron für die Elemente der theoretischen, der praktischen Geometrie gewesen ist. Er ist der erste Schriftsteller, von dem wir wissen, daß er die arithmetischen Lehren als solche zu einem Lehrkörper zusammenstellte. Euklid hatte auch Arithmetisches behandelt, aber als Einschaltung zwischen geometrische Untersuchungen und in geometrischer Einkleidung. Was Herons Einleitung in die arithmetischen Elemente war, wissen wir nicht. Alle Zweifel schwinden bei Nikomachus. Er hat die Zahlenlehre für sich behandelt, und wenn er auch schon vorhandenen Stoff sicherlich nicht verschmähte, wenn er ebenso auch die Gewohnheit griechischer Mathematiker nicht so weit abzustreifen vermochte, daß er geometrische Begriffe gänzlich aus seiner Darstellung verbannte, er hat doch nicht fortwährend mit Linien oder höchstens beiläufig mit Zahlen zu tun. Er ist, wenn wir so sagen dürfen, der Elementenschreiber griechischer Arithmetik. Er hat eine Liebhaberei, von welcher wir unsere Leser in Kenntnis setzen müssen. Er sucht so viel als möglich nach Dreiteilungen, auch wo dieselben nur mit einem gewissen Zwange erlangt werden können. Die an sich gerechte Bemängelung, die manchen seiner Ein-

[1]) *ἀριθμέεις ὡς Νικόμαχος ὁ Γερασηνός*. [2]) Schon 1538 in Paris gedruckt, ist sie 1817 zugleich mit dem anonymen Buche *θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς* durch Ast herausgegeben, dann 1866 durch Hoche. Wir zitieren nach letzterer Ausgabe. [3]) Isidorus Hispaliensis, *Origines* III, 2: *Numeri disciplinam apud Graecos Pythagoram autumant conscripsisse ac deinde a Nicomacho diffusius esse dispositam, quam apud Latinos primus Appuleius deinde Boethius transtulerunt.*

teilungen geworden ist, mußte stets an diese Tatsache anknüpfen[1]), eine Tatsache freilich, deren nähere Besprechung durchaus der Geschichte der Philosophie und der Theologie angehört, welche mit dem Ursprunge und der Entwicklung des Trinitätsbegriffes sich abzufinden haben. Nach dieser Vorbemerkung berichten wir in aller Kürze über die Einleitung in die Arithmetik[2]). Unsere Leser werden, auch ohne daß wir sie besonders aufmerksam machen, ohne Zweifel vieles erkennen, was wir in früheren Kapiteln dem Werke des Nikomachus entlehnten, um es für Pythagoras und seine Schule bis auf Platon und dessen nächste Nachfolger in Anspruch zu nehmen.

Die Zahlen sind nach Nikomachus gerade und ungerade, jede selbst von drei verschiedenen Gattungen. Die geraden Zahlen sind nämlich 1. gerademalgerad, *ἀρτιάκις ἄρτιοι*, d. h. führen durch fortwährende Halbierung auf die Einheit zurück; oder sie sind 2. geradeungerad, *ἀρτιοπέριττοι*, d. h. führen durch einmalige Halbierung auf eine ungerade Zahl; oder sie sind 3. ungeradegerad, *περισσάρτιοι*, d. h. führen durch mehrmals fortgesetzte Halbierung auf eine ungerade Zahl. Die ungeraden Zahlen sind 1. unzusammengesetzte Primzahlen, 2. zusammengesetzte Sekundärzahlen, 3. unter sich teilerfremde Zahlen. Unter den geraden Zahlen wird eine neue Gruppierung in 1. vollkommene, 2. überschießende, 3. mangelhafte Zahlen vorgenommen. Die vier ersten vollkommenen Zahlen sind 6, 28, 496, 8128, jedesmal eine unter den Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern, abwechselnd mit 6 und 8 schließend[3]). Die euklidische Entstehung der vollkommenen Zahlen wird dann erörtert, welche ins Unendliche fortgesetzt werden könne[4]), oder soweit man mit den Ausrechnungen zu folgen imstande sei[5]). Von zwei gemeinsam betrachteten Zahlen ist die größere entweder ein Vielfaches der kleineren, die alsdann selbst Untervielfaches der größeren ist, oder nicht. Im letzteren Falle werden die Namen angegeben, welche jedesmal der größeren, beziehungsweise der kleineren gegenüber von der anderen beigelegt werden, Namen, die jedes beliebige Verhältnis ausdrücken können, die aber ganz besondere, später auch in die lateinische Sprache übergegangene Formen erhalten, wenn das Verhältnis wie 1 zu $n + \frac{1}{m+1}$ oder wie 1 zu $n + \frac{m}{m+1}$ ist, wo n sowohl als m ganze Zahlen bedeuten, die mindestens der Einheit gleich sind.

[1]) So Nesselmann, Algebra der Griechen S. 195: „Nikomachus hätte sicherlich diesen Fehler nicht begangen, wenn er nicht der Analogie wegen durchaus drei Teile hätte herausbringen wollen.“ [2]) Ein ausführlicher Auszug bei Nesselmann l. c. S. 191—216. [3]) Nicomachi *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 40. [4]) Ebenda pag. 41 lin. 18 *μέχρις ἀπείρου.* [5]) Ebenda pag. 43 lin. 18 bis 19 *ἀεὶ ὄντως, μέχρις ἂν εὐτονῇ τις παρέπεσθαι.*

Um die Sache recht klar zu machen, bedient sich Nikomachus einer schachbrettartig aus 100 Feldern bestehenden Tafel[1]). Die erste Horizontalzeile enthält einfach die Zahlen 1 bis 10, die zweite die Doppelten derselben, 2, 4 bis 20, die dritte die Dreifachen, 3, 6 bis 30 und so fort; endlich die zehnte Horizontalzeile enthält die Zehnfachen jener Zahlen oder 10, 20 bis 100. Sieht man die Tafel als aus zehn Vertikalkolumnen bestehend an, so gleicht jede Vertikalkolumne ganz genau und Zahl für Zahl der entsprechend bezifferten Horizontalzeile, die erste der ersten, die zweite der zweiten, die zehnte der zehnten. Wir halten uns bei dieser Beschreibung etwas länger auf, weil die Benutzbarkeit der Tafel als Einmaleinstabelle einleuchtet. Das Produkt zweier einziffriger Zahlen steht an der Kreuzungsstelle der durch die beiden Faktoren bezifferten Zeile und Kolumne. Außerdem stehen zwei Zahlen derselben Kolumne je in dem gleichen Verhältnisse wie die ihre Zeile eröffnenden Zahlen. Alle diese verschiedenen Verhältnisse lassen sich aber aus einer Terne von Einheiten durch eine gewisse Reihenfolge von Verbindungen hervorbringen, welche symbolisch geschrieben darauf hinauslaufen, daß aus den drei Zahlen a, b, c die drei neuen Zahlen $a, a + b, a + 2b + c$ gebildet werden sollen, ein Bildungsgesetz, welches der moderne Mathematiker mit einigem Staunen als das gleiche erkennen wird, das anderthalb Jahrtausende später zu den Größen $x, x + \Delta x, x + 2\Delta x + \Delta^2 x$ führte. Der Reihe nach erhält man:

1, 1, 1
1, 2, 4 oder die Verdoppelungen,
1, 3, 9 oder die Verdreifachungen,
1, 4, 16 oder die Vervierfachungen, usw.

Schreibt man eine dieser Reihen z. B. die der Verdoppelungen rückläufig 4, 2, 1, d. h. benutzt man bei gleichem Bildungsgesetze wie oben $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$, so entsteht als neue Reihe

4, 6, 9 oder die Veranderthalbfachungen usw.

Im zweiten Buche ist die Lehre von den figurierten Zahlen und daran sich anschließend die von den Proportionen enthalten. Die figurierten Zahlen erscheinen als vieleckige und als körperliche Zahlen. Die vieleckigen Zahlen sind solche, welche durch einzelne Punkte dargestellt ein regelmäßiges Vieleck zu bilden imstande sind. Vielecke aufeinander gehäuft bilden einen Körper, und so wird der Sinn der körperlichen Zahl erkennbar, die freilich zunächst

[1]) Nicomachi *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 51.

nichts mit dem Produkte dreier Faktoren gemein hat, welches Platon als Körperzahl bezeichnet, wenn auch Nikomachus in zweiter Linie auf diese Begriffsbestimmung zurückkommt. Ähnlich geht es schon vorher mit der Flächenzahl, welche für Nikomachus nicht wie für Platon ein Produkt zweier Faktoren bedeutet, während nachträglich diese Bedeutung doch eingeführt wird. Jede vieleckige Zahl ist bei Nikomachus, wie bei Hypsikles, Summe einer mit 1 beginnenden arithmetischen Reihe, deren Differenz stets um 2 kleiner ist als die Eckenzahl, und diese erzeugende arithmetische Reihe heißt auch die Reihe der Gnomonen der betreffenden Vieleckszahlen, weil jede neu hinzutretende Gnomonzahl die Vieleckszahl nur in die nächsthöhere ähnlicher Art verwandelt. Eine beliebige $n$eckszahl mit der an Rang um 1 niedrigeren Dreieckszahl vereinigt gibt stets die $n+1$ ecks-zahl gleichen Ranges. So ist z. B. die vierte Sechseckszahl 28, die dritte Dreieckszahl 6, deren Summe $28+6=34$ wird die vierte Siebeneckszahl sein. — Die Summe aufeinander folgender ungerader Zahlen von der 1 an bildet, der vorher angegebenen Regel für Vieleckszahlen gemäß, eine Quadratzahl. Die Summe aufeinander folgender gerader Zahlen von der 2 an bildet eine heteromeke Zahl. — Die Kubikzahlen erscheinen als Summen aufeinander folgender ungerader Zahlen[1]), und zwar ist die erste Kubikzahl der ersten Ungeraden gleich: $1^3=1$; die zweite Kubikzahl entsteht als Summe der zwei folgenden Ungeraden: $2^3=3+5$; die dritte Kubikzahl als Summe der drei nachfolgenden Ungeraden: $3^3=7+9+11$ usw.[2]). Dieser durch seine Verwendung zur Summierung der Kubikzahlen selbst, wie wir im 26. Kapitel sehen werden, ungemein interessante Satz dürfte wohl von Nikomachus herrühren[3]). — Die Proportionenlehre zählt alsdann als die drei wichtigsten Proportionen die arithmetische, geometrische, harmonische auf, an welche die sieben andern sich anschließen, über die wir (S. 239) uns verbreitet haben. Den Schluß des Ganzen bildet die vollkommenste Medietät, *μεσότης τελειοτάτη*, die nichts anderes ist als die musikalische, welche Jamblichus zufolge Pythagoras aus Babylon mitbrachte (S. 166).

Außer der Einleitung in die Arithmetik muß Nikomachus auch eine solche in die Geometrie geschrieben haben, von welcher uns aber nur eine Erwähnung bei Nikomachus bekannt ist[4]). Vielleicht

[1]) Nicomachi *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 119, lin. 12—18. [2]) Die allgemeine Formel, welche Nikomachus nicht gekannt zu haben scheint, ist $n^3=(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+\cdots+(n^2+n-1)$. [3]) So nimmt auch Nesselmann S. 210 an. [4]) Nicomachi *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 83, lin. 4: *ἐν τῇ γεωμετρικῇ παραδίδοται εἰςαγωγῇ*.

ist eine Vermutung über deren Inhalt statthaft, zu welcher wir im 27. Kapitel gelangen werden.

Ein aus arabischen Quellen schöpfender Schriftsteller des XII. S., Ocreatus, spricht von einer regula Nicomachi, welche die Quadrierung einziffriger Zahlen vollziehen läßt. Soll man a^2 finden, so zieht man a von 10 und die Differenz $d=10-a$ wieder von a ab. Weil nun $(a-d)\cdot(a+d)=a^2-d^2$, so ist auch $a^2=(a-d)\cdot(a+d)+d^2$ oder wegen $a+d=10$ in diesem Falle $a^2=10.\ (a-d)+d^2$ und das ist die Regel des Nikomachus. Bei Nikomachus selbst ist sie als sehr schöne und von den meisten übersehene Eigenschaft der stetigen arithmetischen Proportion dahin ausgesprochen, das Quadrat des Mittelgliedes werde, wenn man das Produkt der äußeren Glieder davon abziehe, gleich dem Quadrate der konstanten Differenz[1]).

Nikomachus scheint ferner eine Schrift über mystische Bedeutung der Zahlen, über Zahlentheologie mag der Titel gewesen sein, verfaßt zu haben, und sie dürfte auszugsweise oder erweitert einem gleichnamigen Buche zugrunde liegen, welches im 23. Kapitel genannt werden wird; der Geschichte der Mathematik gehören diese Dinge kaum an.

Theon von Smyrna ist nach aller Wahrscheinlichkeit derselbe, welchen Ptolemäus als den Mathematiker Theon bezeichnet[2]), indem er vier durch denselben in den Jahren 128 und 132 vorgenommene Beobachtungen des Merkur und der Venus benutzt. Der Kommentator des Almagestes, Theon von Alexandria, erklärt nämlich jenen Mathematiker Theon als den alten Theon, *τόν παλαιὸν Θέωνα*, als ob ein Mißverständnis nicht möglich wäre[3]). Unser Theon selbst erwähnt als jüngsten Schriftsteller noch den Thrasyllus, der, wie wir bei Bestimmung der Lebenszeit des Nikomachus bemerkten, in die Regierung des Tiberius fällt, und den Adrastus, der wohl noch etwas später gelebt hat[4]).

Wir haben (S. 155) schon zu schildern gehabt, welcherlei Inhalt Theon von Smyrna seinem Werke ausgesprochenermaßen geben wollte. Er beabsichtigte vorzutragen, was von mathematischen Kenntnissen

[1]) Nicomachi *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 125, lin. 18—21: *ἔτι τὸ γλαφυρώτατον καὶ τοὺς πολλοὺς λεληθός, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον συγκρινόμενον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου ἔλαττον αὐτοῦ εὑρίσκεται τῷ ὑπὸ τῶν διαφορῶν.* [2]) Almagest IX, 9; X, 1 und X, 2. [3]) Die betreffende Stelle ist abgedruckt bei Nesselmann, Algebra der Griechen S. 224, Note 58. [4]) Vgl. Th. H. Martin in der Abhandlung, welche seiner Ausgabe der astronomischen Abteilung von Theons Werke (Paris 1849) als Einleitung dient pag. 6—12. Martin bezweifelt die Identität des Theon von Smyrna mit dem von Ptolemäus genannten Mathematiker, setzt ihn aber in die gleiche Zeit, worauf es uns schließlich allein ankommt.

für das Studium Platons notwendig sei. Er ging dabei aus von der Arithmetik mit Inbegriff der musikalischen Zahlenverhältnisse, darauf sollte die Behandlung der Geometrie, der Stereometrie, der Astronomie, der Musik der Welten folgen. Man hat daraus lange Zeit die Vermutung geschöpft, es seien fünf Bücher ziemlich gleichen Umfanges gewesen, welche das Werk des Theon von Smyrna bildeten, und diese Vermutung fand eine Art von Begründung in dem Umstande, daß zwei verschiedene umfangreiche Bruchstücke sich vorfanden, das eine vorzugsweise arithmetischen, das andere vorzugsweise astronomischen Inhaltes. Beide wurden getrennt herausgegeben[1]). In dem einen glaubte man das erste, in dem zweiten das vierte Buch zu erkennen. Man vermißte drei ganze Bücher von ähnlichem Charakter: der Geometrie, der Stereometrie, der Musik der Welten gewidmet. Wir sind nicht dieser Meinung und stehen in unserer durchaus abweichenden Ansicht auch nicht vereinzelt[2]). Wir erkennen vielmehr in jenen beiden Fragmenten das ganze Werk Theons. Nach einer philosophischen Einleitung erscheinen Einteilungen der Zahlen in Gattungen ähnlicher Art, wie sie bei Nikomachus uns bekannt wurden. Da ist von der Entstehung der Quadratzahl als Summe ungerader Zahlen, aber auch als Summe von je zwei Dreieckszahlen, von Viereckszahlen und Pyramidalzahlen, von vollkommenen Zahlen und Verwandtem die Rede, darunter von zwei Gegenständen, denen wir nachher besondere Aufmerksamkeit schenken wollen. Daran knüpfen sich Kapitel über die Tonzahlen untermischt mit weitläufig ausgesponnenen zahlensymbolischen Tüfteleien, die auch schon in der ersten Abteilung spukten, untermischt mit Erörterungen über die verschiedenen Proportionen. In kurzen kaum mehr als einige Worterklärungen bietenden Abschnitten ist von Geometrie und von Stereometrie die Rede[3]). Weitaus am ausführlichsten ist alsdann die Astronomie behandelt, vielleicht in diesem mangelnden Ebenmaße der Ansicht förderlich, daß Theon von Smyrna vorzugsweise Astronom, mithin der von Ptolemäus genannte Beobachter war. Die Schlußworte heißen: „Das sind die notwendigsten Dinge und vorzugsweise

[1]) Die sogenannte Arithmetik von Bullialdus. Paris 1644 und von De Gelder. Leiden 1827, die sogenannte Astronomie von Martin. Paris 1849. [2]) Prof. E. Hiller, welchem wir unsere Ansicht brieflich darlegten, teilte uns mit, daß er die genau gleiche in seiner Bonner Habilitationsschrift (1869), welche ungedruckt geblieben ist, ausgesprochen und begründet habe. Diese Auffassung liegt auch der durch ihn besorgten Ausgabe des Theon von Smyrna (Leipzig 1878), nach welcher wir zitieren, zugrunde. [3]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) pag. 111, lin. 14 bis pag. 113, lin. 8 und pag. 117, lin. 12 bis pag. 118, lin. 3. Die erstere Stelle enthält planimetrische und stereometrische Definitionen, die letztere die geometrische Konstruktion eines geometrischen Mittels.

aus der Astronomie zur Kenntnisnahme platonischer Schriften. Da wir aber sagten, die Musik und Harmonie sei teils an Instrumenten, teils an Zahlen, teils am Weltall, und daß wir über die Musik der Welten das Notwendige nach der Astronomie angeben würden — denn auch Platon sagt, sie sei die fünfte Wissenschaft nach Arithmetik, Geometrie, Stereometrie, Astronomie — so ist auch darüber mitzuteilen, was hauptsächlich Thrasyllus zeigte zugleich mit dem, was wir früher selbst ausgearbeitet haben.“ Diese Sätze machen auf uns den Eindruck, als wenn sie einem Werke, nicht bloß einem Abschnitte als Schluß gedient hätten, als ob Theon die zuletzt versprochene weltharmonische Erörterung sich vorbehalten hätte. Mag dem nun sein wie da wolle, wesentliche Lücken zwischen dem Erhaltenen können wir uns unter keinen Umständen entschließen anzunehmen; höchstens könnten wir uns dazu verstehen, an eine Umstellung mancher Kapitel zu glauben, da es eigentümlich sich ausnimmt, wie Theon verschiedentlich auf früher Besprochenes zurückkommt, ohne daß eine künstlerische Anordnung des Werkes die Wiederholung erforderte. Vielleicht sind solche Mängel auch der geringeren Befähigung Theons anzurechnen. Theon war bei weitem kein Nikomachus! Seiner Zusammenstellung fehlt nach Form und Inhalt die Folgerichtigkeit. Erwähnen wir ein Beispiel, welches geschichtlichen Wert besitzt.

„Die Einheit ist nicht Zahl, sondern Anfang der Zahl“, sagt Theon[1]), den pythagoräischen Gedanken deutlicher als irgend ein anderer Grieche aussprechend; das hindert ihn aber nicht 1 neben 3, 5 ... als ungerade Zahl[2]) oder mit nachfolgenden 2, 3, 4 ... in der natürlichen Zahlenreihe auftreten zu lassen[3]).

Es fällt uns nach dieser nicht sehr hohen Meinung, welche wir von Theon besitzen, schwer in ihm den Erfinder bedeutsamer arithmetischer Neuerungen zu sehen, und damit wächst umgekehrt die historische Benutzbarkeit seiner Angaben für alte Zeiten. Älteren Datums dürften daher auch die Dinge sein, auf welche zurückzukommen wir oben zugesagt haben. Jede Quadratzahl, sagt uns Theon[4]), ist entweder selbst oder nach Verminderung um eine Einheit durch 3 wie auch durch 4 teilbar, und so entstehen vier Arten von Quadratzahlen durch Vereinigung jener beiden selbständigen je zwei Unterarten bedingenden Unterscheidungen. Es ist ziemlich gleichgültig, wann man diesen Satz entdeckte, der freilich der Lehre von den quadratischen Resten angehört, aber eine große praktische Bedeutung nicht besitzt.

[1]) Theon (ed. Hiller) pag. 24, lin. 23. [2]) Theon pag. 28, 5 und 32, 11. [3]) Ebenda pag. 33, 4. [4]) Ebenda pag. 35, 17 etc.

Ganz anders verhält es sich mit den Seiten- und Diametralzahlen, πλευρά und διάμετρος, mit welchen Theon sich beschäftigt[1]). Die Entstehung dieser Zahlen ist folgende. Ausgehend von zwei Einheiten bildet Theon neue Zahlen, indem er einmal die beiden gegebenen Zahlen addiert $1 + 1 = 2$ und das andere Mal das Doppelte der einen Zahl zur anderen fügt $2 \cdot 1 + 1 = 3$. Es soll hier nicht versäumt werden, auf Ähnliches bei Nikomachus (S. 431) erinnernd zurückzuverweisen. Von den beiden so gewonnenen Zahlen heißt ihm die kleinere 2 die Seite, die größere 3 die Diametralzahl. Diese Bildungsweise wird alsdann fortgesetzt, indem die Summe einer Seite und ihrer Diametralzahl die folgende Seite, die Summe der doppelten Seite und der Diametralzahl die folgende Diametralzahl liefert. Heißen etwa alle Seiten α, alle Diametralzahlen δ mit jedesmal beizufügender Ordnungszahl, so ist das Bildungsgesetz $\alpha_{n-1} + \delta_{n-1} = \alpha_n$ und $2\alpha_{n-1} + \delta_{n-1} = \delta_n$. Das Quadrat einer jeden Diametralzahl, behauptet nun Theon, unterscheidet sich von dem doppelten Quadrate der zugehörigen Seite nur um eine Einheit, um welche bald die eine, bald die andere Zahl abwechselnd größer ist. Einen Beweis für diesen Lehrsatz:

$$\delta_n^2 = 2\alpha_n^2 \pm 1$$

wird man bei Theon vergeblich suchen, richtig aber ist er, wie die Werte $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$; $\alpha_2 = 2$, $\delta_2 = 3$; $\alpha_3 = 5$, $\delta_3 = 7$; $\alpha_4 = 12$, $\delta_4 = 17$ usw. zeigen. Allgemein folgt aus den Definitionsgleichungen für α_n und δ_n, daß

$$2\alpha_n^2 = 2\alpha_{n-1}^2 + 4\alpha_{n-1}\delta_{n-1} + 2\delta_{n-1}^2,$$
$$\delta_n^2 = 4\alpha_{n-1}^2 + 4\alpha_{n-1}\delta_{n-1} + \delta_{n-1}^2,$$
$$2\alpha_n^2 - \delta_n^2 = -(2\alpha_{n-1}^2 - \delta_{n-1}^2)$$

und durch Fortsetzung der gleichen Schlußart:

$$2\alpha_n^2 - \delta_n^2 = (-1)^{n-1}(2\alpha_1^2 - \delta_1^2) = (-1)^{n-1}(2-1) = (-1)^{n-1}$$

und

$$\delta_n^2 = 2\alpha_n^2 + (-1)^n.$$

Jedenfalls kann man aus dem als wahr angenommenen Satze die Folgerung ziehen, daß $\frac{\delta_n}{\alpha_n}$ sich nur wenig von $\sqrt{2}$ unterscheide, daß also $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{7}, \frac{17}{12}$ usw. aufeinander folgende Näherungswerte von

[1]) Theon pag. 43, 5 etc. Nesselmann, Algebra der Griechen S. 228—231 hat eine von unserer Auffassung verschiedene Erklärung dieser Stelle. Mit uns stimmt dagegen überein Unger in einem Erfurter Gymnasialprogramm von 1843: Kurzer Abriß der Geschichte der Zahlenlehre von Pythagoras bis auf Diophant S. 17—19.

$\sqrt{2}$ sein müssen. Jedenfalls deuten ferner die Namen Seiten- und Diametralzahl mit ihren Beziehungen zur Seite und Diagonale eines Quadrates darauf hin, daß Theon sich dieser Anwendung bewußt war. Um so wahrscheinlicher wird die Vermutung, man werde bei Erfindung seines Satzes von einem wesentlich geometrischen Gedankengange geleitet worden sein. Man hat an folgende Entwicklung gedacht[1]). Es sei (Fig. 73) $AB\Gamma$ ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten α_{n-1}, α_{n-1}, δ_{n-1}. Werden nun die beiden Katheten jede um δ_{n-1} verlängert, so entsteht das neue gleichschenklig rechtwinklige Dreieck $A\Delta E$ mit den Seiten α_n, α_n, δ_n. Voraussetzungsmäßig ist $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \delta_{n-1}$, aber aus der Figur sieht man dann sofort, daß $\delta_n = 2\alpha_{n-1} + \delta_{n-1}$ sein muß. Natürlich ist die hier gezeigte Konstruktion falsch, indem die Diagonale des Quadrates von rationaler Seitenlänge irrational ist; aber um immer nähere Werte zu erhalten, mußte man geometrisch von der falschen Hypothese einer rationalen Diagonale ausgehen. Wir haben $\frac{7}{5}$ mehrfach als mutmaßlich seit Platon bekannten Näherungswert von $\sqrt{2}$ auftreten sehen. Der darauf folgende Bruch $\frac{17}{12}$ wird im 30. Kapitel uns erinnerlich werden müssen. Dadurch wächst die Wahrscheinlichkeit, daß man der erwähnten Folgerung von dem Zusammenhange zwischen $\sqrt{2}$ und $\frac{\delta_n}{\alpha_n}$ sich bewußt war, wenn die Folgerung selbst bei Theon auch nicht gezogen ist. Berücksichtigt man weiter, daß die Bildungsgesetze der Seiten- und der Diametralzahlen genau dieselben sind, welche die Nenner und Zähler der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche für den Kettenbruch

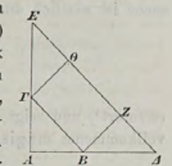

Fig. 73.

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

entstehen lassen, so wird man wohl zu der (S. 317) ausgesprochenen Behauptung genötigt, die Griechen seien natürlich nicht der Form nach, aber der Sache nach mit der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ und mit dem Gesetze der Näherungsbrüche dieses Kettenbruches bekannt gewesen. Wir brauchen nun nicht mehr zu sagen, wie wichtig es wäre, darüber unterrichtet zu sein, ob auch die Bildung der Seiten-

[1]) P. Bergh in Zeitschr. Math. Phys. XXXI, Histor.-literar. Abtlg. S. 135.

und der Diametralzahlen, wie sie bei Theon sich vorfindet, vorplatonischen Ursprunges war?

Eine Stelle, auf welche wir noch aufmerksam zu machen haben, ist diejenige, wo erörtert wird, die Zahl 5 sei arithmetisches Mittel zwischen 1 und 9, zwischen 2 und 8, zwischen 3 und 7. Diese Tatsache ist nämlich durch das Zahlenquadrat

1	4	7
2	5	8
3	6	9

erläutert[1]) und zeigt dadurch einen ersten Anfang wenn auch nur unvollkommener magischer Quadrate.

22. Kapitel.

Sextus Julius Africanus. Pappus von Alexandria.

Wir gelangen zum III. S. nach Christi Geburt. Um die Zeit des Kaisers Alexander Severus, welcher 220—230 regierte, schrieb Sextus Julius Africanus seine Kesten. Der römische Name des Schriftstellers würde ihm in einem anderen Kapitel seinen Platz anweisen, wenn nicht die griechische Sprache, deren er sich bediente, uns veranlaßte, seiner hier zu gedenken. Kesten bedeutet wörtlich „mit der Nadel Durchstochenes“ und als Titel eines Werkes soll das wohl so viel sagen als „Aneinandergeheftetes“. Aneinandergeheftete Bemerkungen der verschiedensten Art sind es auch, die Sextus Julius Africanus dort vereinigt hat, und fast zufällig befinden sich darunter auch zwei Stellen, von welchen die Geschichte der Mathematik Nutzen zu ziehen hat.

Das XXXI. Kapitel der Kesten[2]) beschäftigt sich mit praktischer Kriegsgeometrie, insbesondere mit der Auffindung der Breite eines Flusses, dessen jenseitiges Ufer vom Feinde besetzt ist, und mit der Auffindung der Höhe der Mauern einer belagerten Stadt, um danach im voraus die Größe der herzustellenden Kriegsmaschinen, Türme usw. ermessen zu können. Grundlage des ganzen Verfahrens ist ein geometrischer Satz, dessen Beweis, wie der Verfasser sagt, nur von dem I. Buche der euklidischen Elemente abhängt, der Satz nämlich, daß sämtliche Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks halbiert

[1]) Theon pag. 102. [2]) *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale.* Tome XIX, Partie 2. Paris 1858, pag. 407—415 ist der Text nebst französischer Übersetzung von Vincent abgedruckt. Vgl. Agrimensoren S. 110 flgg.

erscheinen, wenn aus der Mitte einer Kathete parallel zur anderen eine Gerade nach der Hypotenuse, und aus deren Durchschnittspunkte wieder eine neue Parallele zur ersten Kathete bis zum Durchschnitte mit der zweiten gezogen wird (Fig. 74). Sei $\alpha\beta$ die erste Kathete und außer den vorgeschriebenen $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$ noch die Hilfslinie $\delta\zeta$ gezogen. $\alpha\delta = \delta\beta$, $\delta\beta = \varepsilon\zeta$ als Parallele zwischen Parallelen, folglich auch $\alpha\delta \# \varepsilon\zeta$, und somit treten in der Figur zwei Parallelogramme auf $\gamma\varepsilon\delta\zeta$, $\delta\beta\varepsilon\zeta$, vermöge deren $\delta\varepsilon = \gamma\zeta = \beta\zeta$ und $\delta\zeta = \varepsilon\gamma$, während (aus dem in dem Beweise nicht genannten Parallelogramme $\alpha\delta\zeta\varepsilon$ folgend) auch $\delta\zeta = \alpha\varepsilon$ ist.

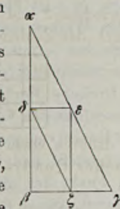

Fig. 74.

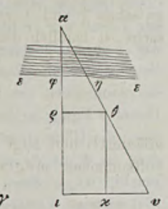

Fig. 75.

Von diesem Satze aus wird die Breite eines Flusses gemessen. Liegt α am feindlichen Ufer (Fig. 75), während $\varepsilon\varepsilon$ die diesseitige Uferlinie bezeichnet, so stellt man die Dioptra in ι auf, weiter vom Flusse entfernt als der Fluß breit ist und visiert sowohl (senkrecht zur Flußlinie $\varepsilon\varepsilon$, was aber nicht ausdrücklich gesagt, sondern nur aus der Figur zu entnehmen ist) nach α, als rechtwinklig zu dieser ersten Linie nach υ, so daß dabei der Punkt $\varkappa$ in der Mitte von $\iota\upsilon$ gewonnen wird. Steckt man nun von υ aus die Richtung $\upsilon\alpha$, von $\varkappa$ aus $\varkappa\theta \# \iota\alpha$ und endlich $\theta\varrho \# \iota\upsilon$ ab, so ist $\alpha\iota$ doppelt so groß, $\alpha\varrho$ genau gleich groß mit $\iota\varrho$ und läßt nach Abziehung von $\varphi\varrho$ die gesuchte $\alpha\varphi$ übrig. Man kann als wesentlich bei dieser Methode auffassen, daß die gesuchte Breite, beziehungsweise eine ihr gleiche Breite, wirklich auf dem Felde dargestellt wird. Man kann bei dem uns erhaltenen Berichte auf die von allen geometrischen Gewohnheiten abweichende Buchstabengebung für die einzelnen Punkte hinweisen. Nicht nur, daß ι nicht vermieden ist, das hörte überhaupt um die Zeit, in welcher wir uns befinden, auf, und noch spätere Geometer ersten Ranges benutzen unterschiedlos ι wie andere Buchstaben, es ist überhaupt kein System zu erkennen, nach welchem α, ε, η, θ, ι, $\varkappa$, ϱ, υ, φ als Buchstaben an eine Figur gewählt worden sein mögen. Das war anders in der vorhergehenden Figur, anders in der folgenden (Fig. 76), an welcher unmittelbar anschließend eine von Dreiecksähnlichkeiten ausgehende Methode die Flußbreite zu messen gelehrt wird. Man soll längs

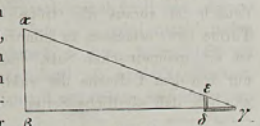

Fig. 76.

dem Flusse in der gemessenen Linie $\beta\gamma$ einhergehen und dabei einen massiven rechten Winkel von augenscheinlich ziemlich bedeutender Größe, der das Kennzeichnende des Verfahrens bildet, und uns wiederholt begegnen wird, mitnehmen. Auf dem einen Schenkel dieses rechten Winkels in ε ist überdies eine Signalstange senkrecht zur Ebene des rechten Winkels befestigt. Wird nun γ so gewählt, daß jene Signalstange bei ε mit dem den Punkt α bezeichnenden Gegenstande und dem Standpunkt γ in einer Geraden liegt, so ist aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\beta\gamma : \gamma\delta = \alpha\beta : \varepsilon\delta$, mithin $\alpha\beta$ gefunden. Dieselbe Figur, so beschließt der Verfasser dieses interessante Kapitel, dient die Höhe einer Mauer von weitem zu messen. Die Dioptra wird dazu in δ als $\delta\varepsilon$ aufgestellt und ihr Lineal in die Neigung $\varepsilon\alpha$ gebracht, wo α einen Punkt des oberen Mauerrandes bedeutet. Die rückwärtsige Verlängerung dieser Richtung $\varepsilon\alpha$ nach γ lehrt $\gamma\delta$ neben dem bekannten $\delta\varepsilon$ und neben dem nach der vorigen Aufgabe ermittelten $\gamma\beta$ finden und nun ist $\gamma\delta : \delta\varepsilon = \gamma\beta : \beta\alpha$. Der Schüler Herons ist hier unverkennbar, und die Paragraphe von dessen Abhandlung über die Dioptra, an welche das angegebene Verfahren sich anlehnt, haben nachgewiesen werden können, wenn auch der massive rechte Winkel bei Heron nicht vorzukommen scheint.

Das LXXVI. Kapitel der Kesten[1]) lehrt eine Art von Feuertelegraphie kennen. Die Römer hätten, so erzählt der Sammler, an leicht sichtbaren Plätzen drei Signalstangen aufgerichtet, je eine links, eine rechts, eine in der Mitte. An jeder Stange konnten bis zu neun Fackeln befestigt werden, und zwar bedeuteten dieselben Einer, wenn sie an der Stange links, Zehner, wenn sie an der mittleren Stange, Hunderter, wenn sie an der Stange rechts befestigt wurden. Sie sollten nämlich von weitem gesehen werden, und für den gegenüberliegenden Beobachter kehrt sich natürlich rechts in links, links in rechts, so daß die Ordnung der Zahlenwerte ihm von rechts nach links zunehmend erscheint, wie es z. B. auch bei der salaminischen Tafel (S. 133) der Fall war. Zahlen als solche sollten freilich nicht mitgeteilt werden. Man machte von den Zahlen Gebrauch, um Buchstaben des griechischen Alphabetes zu erkennen zu geben, deren jeder je einen der Werte 1 bis 9, 10 bis 90 oder 100 bis 900 besitzt, und so konnten an der richtigen Stange sichtbar gemachte Fackeln die Buchstaben eines Wortes, eines Satzes nach und nach dem entfernten Freunde bekannt machen.

[1]) Vgl. Vincent in den *Comptes Rendus de l'académie des sciences* vom 3. Januar 1842, XIV, 43, und Friedlein im *Bullettino Boncompagni* 1868, pag. 49—50.

Eine Sammlung ganz anderen wissenschaftlichen Wertes ist die des Pappus von Alexandria, eines Schriftstellers, der mutmaßlich dem Ende des III. S. angehört hat[1]). Wir besitzen über seine Lebenszeit überhaupt nur zwei, beide aber bestimmt lautende und einander geradezu widersprechende Angaben, beide selbst aus der gleichen Zeit, nämlich aus dem X. S. Die Leidener Bibliothek besitzt eine in den Jahren 913—920 angefertigte Handschrift der theonischen Handtafeln, welche am Rande der Regentenliste verschiedene literärgeschichtliche Glossen aus der Zeit der ersten Niederschrift besitzt. So steht neben der Regierung des Diokletian die Bemerkung: *ἐπὶ τούτου ὁ Πάπος ἔγραφεν*, unter diesem schrieb Pappus. Daß der Name hier nur mit einem *π* geschrieben auftritt, kann uns nicht beirren. In der Mitte des Namens bricht nämlich die Zeile ab und macht eine Spaltung in *Πά* und *πος* notwendig, wobei leicht ein *π* verloren gegangen sein kann, für welches in der ersten Zeile etwa kein Platz mehr vorhanden war. Außerdem ist, wenn der Mathematiker Pappus nicht gemeint sein wollte, kein Schriftsteller gleichen oder nur wenig abweichenden Namens aus der Zeit des Diokletian bekannt. Dieser regierte 284 bis 305, folglich wäre Pappus in dieselbe Zeit zu setzen. Dem gegenüber steht unvermittelt, was Suidas, der bekannte Lexikograph, an zwei sachlich übereinstimmenden Stellen sagt. Unter Theon heißt es bei ihm, er sei Zeitgenosse des Pappus, der wie er in Alexandria zu Hause gewesen sei, und beide hätten unter der Regierung des älteren Theodosius gelebt. Unter Pappus heißt es, er habe unter der Regierung des älteren Theodosius gelebt, zur Zeit, als auch der Philosoph Theon in seiner Blüte stand, welcher über den Kanon des Ptolemäus schrieb. Die Werke des Pappus seien eine Erdbeschreibung, ein Kommentar zu den vier Büchern der großen Zusammenstellung des Ptolemäus, ferner über die libyschen Flüsse und über Traumdeutung. Auch diese Angabe ist von bestimmtester Klarheit. Theon hat, wie wir aus seinem chronologischen Werke selbst entnehmen, jedenfalls 372 noch gelebt; Theodosius I. regierte 379 bis 395; diese Zahlen stimmen zueinander, und folglich wäre Pappus wie Theon an das Ende des IV. S. zu setzen, was auch alle Geschichtswerke der Mathematik ohne Anstand getan haben. Wenn wir gleichwohl der Meinung folgen, welche den älteren Zeitpunkt für Pappus als zutreffend erachtet, so leitet uns folgender Gedanke. Bei zwei einen Widerspruch enthaltenden gleichzeitigen Angaben müssen

[1]) Vgl. Zeitschr. Math. Phys. XXI, Histor.-liter. Abtlg. S. 70 flgg. (1876) über die Lebenszeit und die Handschriften des Pappus. In bezug auf letztere diente die Einleitung zu Hultschs Pappusausgabe als Quelle.

wir einesteils uns fragen, ob und wie ein Irrtum des einen, beziehungsweise des anderen Gewährsmannes Erklärung finden kann, müssen wir andernteils überlegen, ob innere Gründe die eine oder die andere Meinung unterstützen. Die Behauptung des Schreibers des Leidener Kodex ist nun, wenn falsch, auf keine Weise zu verstehen. Suidas könnte dagegen dadurch zu seinem Irrtume gelangt sein[1]), daß in seiner Quelle die beiden Schriftsteller Pappus und Theon von Alexandria ihrer Heimat, ihrer verwandten literarischen Tätigkeit wegen unmittelbar hintereinander aufgeführt waren, oder aber dadurch, daß er einen aus den Erläuterungen des Pappus und des Theon gemischt zusammengesetzten Kommentar zum Almageste vor Augen hatte, eine Möglichkeit, die im 24. Kapitel sich uns ergeben wird, und daß er nun auf eine gar nicht angegebene, weil überhaupt nicht vorhandene Gleichzeitigkeit der beiden Erklärer schloß. Als unterstützend dienen folgende Gesichtspunkte. Suidas war mit des Pappus Werken nicht aufs beste bekannt. Er nennt unter denselben gar nicht dasjenige, welches allein in einiger Vollständigkeit sich erhalten hat, und welches genügt, um unsere Bewunderung des Verfassers zu rechtfertigen. Der andere Berichterstatter ist in seinem Schweigen entschuldigt, weil er gar kein Werk des Pappus mit Namen anführt. Ferner wäre es sehr auffallend, wenn Pappus und Theon an dem gleichen Orte lebend zur selben Zeit einen Kommentar zu demselben Werke, dem Almageste des Ptolemäus, geschrieben hätten. Weit wahrscheinlicher wird diese Tatsache, wenn Pappus hundert Jahre vor Theon von Alexandria schrieb. Fraglich erscheint dabei, ob Pappus den ganzen Almagest erklärt haben mag, oder nur vier Bücher. Die Vermutung, es habe bei Suidas ursprünglich $I\Gamma = 13$ Bücher geheißen, der wirklichen Bücherzahl des Almagestes entsprechend, und daraus sei $\Delta = 4$ Bücher verschrieben worden[2]), ist ausgesprochen worden und hat manche Wahrscheinlichkeit, nachdem es sich erwiesen hat, daß Pappus jedenfalls zum ersten, zum fünften und zum sechsten Buche des Almagestes einen Kommentar verfaßte, daß der zum fünften und sechsten Buch gehörende Teil sich noch erhalten hat[3]). Wahr ist es, daß Theon seinen Vorgänger niemals genannt hat außer in Überschriften, deren Ursprung ja immer zweifelhaft ist. Mag aber Theon 100 oder ein paar Jahre nach Pappus gelebt haben, so ist dieses Schweigen gleich auffallend, zu derselben Zeit auch gleich einfach damit zu erklären, daß Theon den Pappus recht fleißig benutzte. Es bildet, wie uns

[1]) Diese Hypothese rührt von Usener her. Neues Rheinisches Museum 1873, Bd. XXVIII, S. 403. [2]) So glaubt Hultsch pag. VIII, Anmerkung 3 der Praefatio, welche den dritten Band seiner Pappusausgabe eröffnet. [3]) Hultsch l. c. pag. XIV.

von philologischer Seite versichert wird, geradezu eine Eigentümlichkeit der Kommentatoren des IV. S. etwa ein wahres Plünderungssystem an älteren Schriftstellern auszuüben, welche niemals genannt werden, so daß nur in einzelnen Fällen ein glückliches Ohngefähr es möglich gemacht hat, diesen unrechtmäßigen Aneignungen auf die Spur zu kommen. So nehmen wir also an, Pappus habe an der Schwelle vom III. zum IV. S. gelebt und geschrieben.

Ob ein Zitat bei Proklus[1]) dahin zu deuten ist, daß Pappus gleich Heron an der Spitze einer Schule stand, mag dahingestellt bleiben. Nach griechischem Sprachgebrauche kann *οἱ περὶ Ἥρωνα καὶ Πάππον* unzweifelhaft diese Bedeutung einschließen, die Worte können aber auch Heron und Pappus allein bezeichnen sollen, und letzteres wohl noch häufiger als ersteres. Unter den Schriften, welche Pappus verfaßte, fanden seine Bemerkungen zum Almageste mehrfache Erwähnung. Wir erinnern daran, daß (S. 318) Eutokius auch sie unter den Schriften genannt hat, welche über die Ausziehung von Quadratwurzeln zu Rate gezogen werden können. Pappus selbst spricht von einem Kommentare, welchen er zu dem Analemma des Diodorus angefertigt habe[2]). Von jenem Schriftsteller ist zwar auch bei anderen wiederholt die Rede[3]), jedoch ohne daß dadurch sein Zeitalter oder der Inhalt seiner Schrift genauer bekannt würde; deren Titel stimmt allerdings mit demjenigen eines Buches des Ptolemäus überein, von welchem (S. 423) die Rede war. Eine weitere schriftstellerische Leistung des Pappus bildete ein Kommentar zu den euklidischen Elementen, von welchem Bruchstücke, insbesondere eine von Eutokius[4]) erwähnte Bemerkung, in einem Vatikankodex aufgefunden worden sind[5]). Diesem Kommentare dürfte eine Anzahl von Bemerkungen entnommen sein, welche bei Proklus sich erhalten haben, und deren eine verdient, daß wir ihrer erwähnen.

Pappus habe, berichtet Proklus[6]), Einspruch gegen den Satz erhoben, daß der Winkel, der einem Rechten gleich sei, immer selbst ein Rechter sein müsse. Er stellte nämlich (Fig. 77) zwei gleichlange Gerade $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ senkrecht zueinander und beschrieb über jede

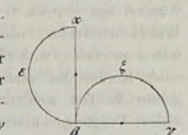

Fig. 77.

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 429, 13. [2]) Pappus IV, 27 (ed. Hultsch) pag. 246. [3]) Vgl. Hultschs Praefatio zum III. Bande seiner Pappusausgabe IX—XI. [4]) Archimed (ed. Heiberg) III, 34 in dem Kommentare des Eutokius heißt es: *εἴρηται καὶ Πάππῳ εἰς τὸ ὑπόμνημα τῶν στοιχείων.* [5]) Heiberg, *Om scholierne til Euklids Elementer* in den Vidensk. Selsk. Skr. 6. Raekke, historisk. og philosophisk. Afd. II, 3. Kjöbnhavn 1888, pag. 297. [6]) Proklus (ed. Friedlein) 190.

derselben einen Halbkreis. Da diese Halbkreise sich decken, müssen die Winkel $\alpha\beta\varepsilon$, $\gamma\beta\zeta$ vollkommen gleich sein. Wird sodann von dem rechten Winkel $\alpha\beta\gamma$ der eine jener identischen Winkel weggenommen, der andere beigefügt, so muß also ein Etwas entstehen, welches einem rechten Winkel wieder gleich ist, ohne daß man doch sagen könnte, dieser Winkel $\varepsilon\beta\zeta$ sei ein rechter Winkel. Diese Betrachtung über nicht geradlinige Winkel ist das Vorbild späterer Spitzfindigkeiten ähnlichen Inhaltes geworden (S. 264).

Das mathematische Werk des Pappus, welches auf uns gekommen ist, und welches merkwürdigerweise durch keine bekannt gewordene Erwähnung von seiten irgend eines Mathematikers oder sonstigen Schriftstellers in seinem Vorhandensein bestätigt wird, führte den Namen der Sammlung, συναγωγή, und bestand aus acht Büchern[1]). Titel und Einteilung verbürgt uns eine vatikanische Pappus-Handschrift aus dem XII. S., welche selbst sämtlichen übrigen, keineswegs seltenen Abschriften unmittelbar oder mittelbar zugrunde liegt. Der Charakter dieser Sammlung besteht darin, daß Pappus den Inhalt von zu seiner Zeit hochgeschätzten mathematischen Schriften kurz angibt und zu denselben erklärende, aber auch erweiternde, oftmals nur den allerlosesten Zusammenhang mit dem gerade in Rede Stehenden wahrende Sätze hinzufügt. Diese Beziehung, oder fast besser diese Beziehungslosigkeit lassen uns die Sätze erkennen, von denen Pappus uns sagt, daß sie zu Werken gehören, welche, wie die Kegelschnitte des Apollonius von Pergä, auf uns gekommen sind und den Vergleich gestatten. Die Freiheit, welche Pappus sich demgemäß bei seinen Zusätzen gestattet hat, die Genauigkeit, deren er daneben bei übersichtlichen Inhaltsangaben sich befleißigte, machen den doppelten Wert seiner Sammlung aus. Jene Gewissenhaftigkeit, welche wir als zweite Tugend des Pappus erwähnten, macht, daß seine Sammlung als Ersatz für wertvolle im Urtexte verloren gegangene Abhandlungen dienen kann, so daß wir nach dem Vorgange aller Schriftsteller über Geschichte der Mathematik keinen Anstand nahmen, sie im Verlauf dieses Bandes wiederholt zu solchem Zwecke zu benutzen. Jene Selbständigkeit, die wir zuerst rühmend betonten, hat uns Dinge geliefert, die, teils nicht anderweitig rückwärts verfolgbar, teils von Pappus ausdrücklich für sich in Anspruch genommen, den zuverlässigen Beweis für die hohe Meisterschaft des Verfassers insbesondere

[1]) Eine lateinische Übersetzung durch Commandinus erschien 1588, dann in mehrfachen neuen Abdrücken bis 1602. C. J. Gerhardt gab 1871 das VII. und VIII. Buch im Urtexte mit nicht tadelloser deutscher Übersetzung heraus. Eine vortreffliche Textausgabe mit lateinischer Übersetzung und reichhaltigen Anmerkungen veranstaltete Fr. Hultsch in 3 Bänden. Berlin 1875, 1877, 1878.

in solchen geometrischen Untersuchungen liefern, welche unser Jahrhundert unter dem Namen der neueren oder der höheren synthetischen Geometrie kennt.

Welchen Gang Pappus bei Ausarbeitung seiner Sammlung einschlug, ob er überhaupt einen bestimmten Gedanken planmäßiger Reihenfolge zugrunde legte, ist mit Sicherheit nicht zu ermitteln, weil das erste Buch und die mutmaßlich größere Hälfte des zweiten Buches verloren gegangen ist, die Darstellung sich mithin auf die übrigen Bücher beschränken muß. Dabei ist überdies vorausgesetzt, daß alle vorhandenen Bücher Pappus angehören. Allerdings nimmt man dieses gegenwärtig an, und ein vereinzelter Versuch[1]) nur das III. und IV. Buch, welche ursprünglich ein einziges gebildet hätten, dann das VII. und das VIII. Buch Pappus zuzuschreiben, alles übrige als unechte spätere Einschaltung auszuscheiden, ist, soviel wir wissen, ohne jegliche Beistimmung geblieben.

Der vorhandene Überrest des II. Buches enthält die Multiplikationsmethode des Apollonius von Pergä.

Im III. Buche sind vier verschiedene Abhandlungen vereinigt. Die erste beschäftigt sich mit der Aufgabe zwischen zwei gegebenen Längen zwei mittlere geometrische Proportionalen einzuschalten nach Methoden des Eratosthenes, des Nikomedes, des Heron, des Pappus selbst. Die zweite Abhandlung lehrt die drei verschiedenen Mittel, welche zwischen zwei Strecken bestehen, das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel, von welchen übrigens auch in den einleitenden Kapiteln der ersten Abhandlung des III. Buches schon die Rede war, an einer und derselben Figur zur Erscheinung bringen. Aber dieses geometrische Problem dient nur zum Anknüpfungspunkte für eine ganz Lehre von den Medietäten, welche mit einer Tabelle von ganzzahligen Beispielen für sämtliche zehn Formen von Medietäten abschließt. Die dritte Abhandlung beschäftigt sich wieder mit einer ganz anderen Untersuchung. Der 21. Satz des I. Buches der euklidischen Elemente behauptet, daß, wenn innerhalb eines Dreiecks ein Punkt gewählt und mit den Endpunkten der Grundlinie geradlinig verbunden wird, die Summe dieser Geraden kleiner ausfalle als die Summe der sie umfassenden Dreiecksseiten. Ganz anders, wenn die inneren Geraden nicht nach den Eckpunkten, sondern nach zwischen denselben liegenden Punkten der Dreiecksgrundlinie gezogen werden. Alsdann kann die Summe der inneren

[1]) C. J. Gerhardt, Die Sammlung des Pappus von Alexandria. Programm des Gymnasiums in Eisleben für 1875. Vgl. dazu die Besprechung in der Zeitschr. Math. Phys. XXI, Histor.-literar. Abteilung 37—42 (1876).

Geraden unter Umständen ebenso groß sein, sie kann auch mehr betragen als die der umfassenden Seiten und zwar in mannigfachen Abstufungen, und diese sämtlichen Fälle werden ausführlich durchgenommen. Die vierte Abhandlung geht zur Einbeschreibung der fünf regelmäßigen Vielflächner in die Kugel über, bei welcher Gelegenheit die Sphärik des Theodosius von Tripolis mehrfach benutzt aber auch ergänzt wird. Es ist mit großem Rechte bemerkt worden[1]), daß die Auffassung der Aufgabe eine wesentlich andere ist als die, von welcher Euklid im XIII. Buche seiner Elemente ausgeht, und daß dadurch die erneute Behandlung um so höheren Wert erhalte. Euklid kommt es auf die metrischen Zusammenhänge zwischen Polyederseite und Kugeldurchmesser an; er bildet sich zuerst die Polyeder und beweist hinterdrein ihre Einbeschreibbarkeit. Pappus will die Polyeder selbst erhalten; er geht aus von der Kugel und verschafft sich die Parallelkreise auf der Kugeloberfläche, welche je eine Polyederfläche als eingeschriebenes Vieleck besitzen.

Das IV. Buch zerfällt gleichfalls in mehrere Abteilungen, wenn schon die Sonderung derselben nicht auf den ersten Blick in die Augen fällt. Es beginnt mit der Lehre von den Kreistransversalen, an welche sich die Aufgabe knüpft, den drei einander äußerlich berührende Kreise umschließenden Kreis zu konstruieren. Noch andere Berührungsaufgaben vollenden das, was wir die erste Abhandlung des IV. Buches nennen möchten. Auf sie folgen eine Anzahl von Sätzen aus der Lehre von der archimedischen Spirale sowie von der nikomedischen Konchoide und darauf eine ziemlich ausgedehnte Abhandlung über die Quadratrix, in welche verschiedene andere Untersuchungen sich ziemlich naturgemäß einfügen. Wir nennen die Rektifikation des Kreises; wir nennen Beziehungen zwischen Quadratrix und Spirale; wir nennen die Trisektion des Winkels und die allgemeinere Aufgabe der Teilung des Kreises in beliebigem Verhältnisse der Bögen mittels der Quadratrix, aber auch mittels der Spirale; wir nennen endlich die Benutzung der Quadratrix zur Lösung der drei Probleme: ein regelmäßiges Vieleck von beliebiger Seitenzahl in einen Kreis zu beschreiben, zu einer gegebenen Sehne einen Kreisbogen zu finden, welcher ein bestimmtes Längenverhältnis zur Sehne besitze, zueinander inkommensurable Winkel zu zeichnen.

Das V. Buch beginnt mit dem Auszuge aus der Abhandlung des Zenodorus über Figuren gleichen Umfanges, so weit ebene Figuren in Frage stehen. Dann geht Pappus zu dem Raume über, lehrt die

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* série 5, T. V (Février-Mars 1855) pag. 238—240.

archimedischen Körper kennen und zeigt, daß bei gleicher Oberfläche Kegel sowohl als Zylinder kleineren Rauminhaltes als Kugeln sind. Damit ist der Rückweg zur Abhandlung des Zenodorus, soweit sie auf Raumkörper sich bezieht, gewonnen, und der Beweis wird ihr nachgebildet, daß von den fünf platonischen regelmäßigen Körpern bei gleicher Oberfläche stets der mehreckige den größeren Inhalt einschließe.

Das VI. Buch stellt sich in seiner Überschrift die Aufgabe Auflösungen zu den Schwierigkeiten zu finden, welche in dem sogenannten kleinen Astronomen, *μικρὸς ἀστρονομούμενος*, enthalten sind. Der Gegenstand, der damit gemeint ist, ist uns keineswegs neu, nur der Name begegnet uns hier zuerst, und deshalb haben wir bis hierher es aufgespart uns desselben zu bedienen. Der kleine Astronom ist nämlich eine Sammlung von Schriften, deren Studium nach dem der Elemente des Euklid und vor dem des Almagestes des Ptolemäus eingeschoben werden mußte, wenn letzteres vollen Erfolg haben sollte. Ob der kleine Astronom eine endgültig begrenzte Sammlung war, ob nicht vielmehr der an sich lose Zusammenhang gestattete, bald diese bald jene kleinere Schrift aufzunehmen oder auszuschließen, dürfte zweifelhaft sein. Der Kommentar des Pappus verbreitet sich über nachfolgende Bücher, welche demgemäß zum kleinen Astronomen gehörten: Die Sphärik des Theodosius, die Abhandlung des Autolykus über die sich drehende Kugel, die des Theodosius über Tag und Nacht, die des Aristarchus über Größe und Entfernung von Sonne und Mond, die Optik des Euklid, die Phaenomena desselben Verfassers. Ein Kommentar des Menelaus zu dem letztgenannten Werke hatte zwar nach einer durch Pappus gegebenen Zusage[1]) auch noch erläutert werden sollen, doch findet sich davon in dem auf uns gekommenen Texte keine weitere Spur. Wir bemerken, daß die beiden Astronomen Autolykus und besonder Aristarchus von Samos in der Geschichte ihrer Wissenschaft hochbedeutsame Persönlichkeiten sind. Autolykus[2]) lebte kurz vor Euklid um 330 etwa, Aristarch[3]), wie wir schon (S. 419) bemerkten, ein gutes halbes Jahrhundert später um 270. Wir bemerken ferner, daß die Erläuterungen des VI. Buches, auch wo sie auf astronomische Werke sich beziehen, ihrer größten Mehrzahl nach geometrischer Natur sind. Wir bemerken endlich, daß Pappus durch seine Namensnennung selbst den Geometern, welche er nur unter den Ersten des Faches auswählt, ein hohes Lob erteilt, daß man also beispielsweise

[1]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 602, lin. 1. [2]) Hultsch in der Vorrede zu seiner Ausgabe des Autolykus. Leipzig 1885. [3]) Wolf, Geschichte der Astronomie. S. 35—37.

aus diesem VI. Buche sich eine Meinung von dem Ansehen bilden kann, in welchem damals verdientermaßen die Schriften des Theodosius und des Menelaos standen.

Wer die Elemente des Euklid inne hat und von ihnen aus der Astronomie sich zuwenden will, bedarf, wie vorher bemerkt, des Studiums des kleinen Astronomen, bei welchem das VI. Buch ihn zu unterstützen bestimmt ist. Wer, mit den allgemeinen Elementen vertraut, erlernen will, wie man durch Konstruktion mannigfacher Linien die Auflösung gestellter Aufgaben vollende, bedarf dazu eines anderweitigen eignen Übungsstoffes, der unter dem Namen Sammelwerke analytischer Natur[1]) von Euklid, von Apollonius von Pergä, von Aristäus dem Älteren behandelt worden ist. Die hierzu notwendigen Hilfssätze und Erläuterungen hat Pappus in seinem VII. Buche vereinigt. Gleichwie im vorhergehenden Buche sind Unterabteilungen gebildet, welchen die Namen der einzelnen Werke als Überschriften dienen, welche Pappus zu empfehlen wünscht. Er nennt die Daten des Euklid, den Verhältnisschnitt, den Raumschnitt, den bestimmten Schnitt, die Berührungen des Apollonius, die Porismen des Euklid, dann wieder von Apollonius die Neigungen, die ebenen Örter, die Kegelschnitte, endlich die körperlichen Örter des Aristäus, die Örter auf der Oberfläche des Euklid, die Mittelgrößen des Eratosthenes. Es sind dies, sagt Pappus, 33 Bücher, deren Inhalt bis zu den Kegelschnitten des Apollonius ich Dir übersichtlich herausgestellt habe[2]), und in der Tat entspricht dieser Angabe eine Einleitung von ziemlichem Umfange. An sie knüpft sich eine große Anzahl von Hilfssätzen zu den Büchern des Apollonius über den Verhältnisschnitt und den Raumschnitt, über den bestimmten Schnitt, über die Neigungen, über die Berührungen, über die ebenen Örter. Weitere Hilfssätze zu den Porismen des Euklid folgen. Die zu den Kegelschnitten des Apollonius und endlich zu Euklids Örtern auf der Oberfläche bilden den Beschluß des Buches. Der 8. Satz zu dem Verhältnisschnitt des Apollonius[3]) würde unter Benutzung von Brüchen statt der Verhältnisse aussprechen, daß $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ immer zwischen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ liege. In der Tat ist

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\delta}{\beta+\delta}\left(\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\alpha}{\beta}\right)$$
$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\beta}{\beta+\delta}\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\right)$$

[1]) So die richtige Übersetzung von τόπος ἀναλυόμενος, wie Gow, *A short history of greek mathematics* pag. 211 Note 1 gezeigt hat. [2]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 636, lin. 25. [3]) Ebenda pag. 688, lin. 31.

woraus die Verschiedenartigkeit der Vorzeichen beider Differenzen einleuchtet. Der 22. Satz zu den Berührungen des Apollonius[1]) stellt die Aufgabe, von drei auf einer gegebenen Geraden gegebenen Punkten aus nach einem gleichfalls gegebenen Kreise Gerade zu ziehen, welche ein diesem Kreise eingeschriebenes Dreieck bilden. Es ist das die Aufgabe, welche im XVIII. S. die Erweiterung erfuhr, daß die drei gegebenen Punkte beliebige Lage in der Kreisebene erhielten, und welche unter anderen von Annibale Giordano aus Ottajano gelöst wurde[2]).

Das VIII. Buch kündigt sich als solches an, welches verschiedene interessante mechanische Aufgaben zur Sprache bringe. Ich habe für gut gehalten, erklärt Pappus, die mit Hilfe der Geometrie gewonnenen, notwendigsten Theoreme über die Bewegung der schweren Körper, die in den Schriften der Alten vorhanden und die von uns selbst geschickt aufgefunden sind, kürzer und deutlicher niederzuschreiben und auf eine bessere Weise, als es früher geschehen, zusammenzustellen[3]). Zu diesen geometrisch begründeten mechanischen Lehren gehören die Theorie des Schwerpunktes, der schiefen Ebene, gehört die Aufgabe mit Hilfe von Zahnrädern, die in gewissem gegenseitigen Verhältnisse der Durchmesser stehen, eine gegebene Last durch gegebene Kraft zu bewegen. Hierher gehört aufs neue die Aufgabe der Einschiebung zweier geometrischen Mittel, welche schon im III. Buche in anderem Zusammenhange aufgetreten war, und welche jetzt wiederkehrt, weil auf ihr die Vergrößerung eines durch mechanische Vorrichtungen irgendwie in Bewegung zu bringenden Körpers unter Festhaltung seiner Gestalt beruht. Weiter läßt Pappus die Aufgabe folgen den Kreisumfang eines geraden Zylinders zu finden, aus welchem überall Stücke herausgebrochen sind, so daß eine unmittelbare Messung an keiner Stelle stattfinden kann. Ohne bemerkbaren Zusammenhang, wie wir es bei Pappus nicht selten gewohnt wurden, treffen wir alsdann auf Fragen, bei denen es sich um Auffindung gewisser Punkte auf einer Kugel handelt, z. B. des Punktes, der einer gegenüberliegenden Ebene am nächsten liegt, und der Punkte, in welchen eine gegebene Gerade die Kugel durchdringt. Daran schließt sich die Einbeschreibung von sieben einander gleichen regelmäßigen Sechsecken in einen gegebenen Kreis, so daß das eine denselben Mittelpunkt mit dem Kreise hat, die übrigen sechs auf je einer Seite des mittleren aufstehen und die dieser gegenüberliegende

[1]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 848. [2]) Vgl. Chasles, *Aperçu hist.* 328 (deutsch 341) mit Zeitschr. Math. Phys. XXXVII, Histor.-literar. Abtlg. S. 216—217. [3]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 1028.

Seite jedesmal als Kreissehne besitzen. Diese Aufgabe dient zur Herstellung von Zahnrädern, und nun bilden Auszüge aus dem Gewichtezieher und aus der Mechanik des Heron (S. 369) den Schluß, der vielleicht von fremder Hand dem ursprünglichen VIII. Buche beigefügt sein dürfte.

Mag man aus dieser schematischen Zeichnung des Gerippes der Sammlung des Pappus, so wie dieselbe auf uns gekommen ist, den Eindruck eines Ganzen oder lose und fast zufällig aneinander gereihter Einzelheiten erhalten, mag ein leitender Gedanke dem einen auffindbar, dem anderen unentdeckbar erscheinen, jedenfalls wird, trotz stylistischer Schönheiten, die an manchen Stellen eine geradezu dichterische Veranlagung des Schreibers enthüllen[1]), die Achtung vor Pappus dem Mathematiker eine höhere sein als die vor Pappus dem Schriftsteller, und diese relative Wertschätzung wird noch festeren Boden fassen, wenn wir Einzelheiten herausgreifen, deren Entdeckung nicht wohl einem anderen als Pappus selbst anzugehören scheint.

An die Spitze stellen wir einen Satz des VII. Buches, der den Körperinhalt eines Umdrehungskörpers als dem Produkte der gedrehten Figur in den Weg des Schwerpunktes proportional erkennt[2]), einen Satz, der als Guldinsche Regel seit dem XVII. S. wieder in der Geschichte auftritt.

Wir fügen aus dem VIII. Buche einen Satz bei dahin gehend, daß der Schwerpunkt eines Dreiecks zugleich Schwerpunkt eines zweiten sei, dessen Eckpunkte auf den drei Seiten des ersten Dreiecks so liegen, daß dadurch jene Seiten sämtlich in gleichem Verhältnisse geteilt erscheinen[3]).

Wir heben jenen Abschnitt des IV. Buches hervor, der mit der Quadratrix sich beschäftigt[4]). Die Quadratrix wird diesem Abschnitte zufolge außer nach dem Gesetze, welches wir bei der ersten Nennung der Kurve schon kennen gelernt haben, auch noch durch zwei viel verwickeltere Entstehungsarten erzeugt, welche man in folgende Worte fassen kann: Es sei eine Schraubenlinie auf einem geraden Kreiszylinder beschrieben, dann bilden die Perpendikel, welche von den einzelnen Punkten derselben auf die Achse des Zylinders gefällt

[1]) Z. B. die Einleitung in das V. Buch (ed. Hultsch) pag. 304, welche der Herausgeber mit Recht als kennzeichnend für die Schreibweise des Pappus erklärt hat. [2]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 682. [3]) Ebenda pag. 1034 sqq. [4]) Dieser Abschnitt (ed. Hultsch) pag. 258—264 hat in dem Eislebener Programm von 1875 durch Gerhardt eine deutsche Übersetzung erhalten. Der Text Gerhardts weicht indessen in wesentlichen Dingen von dem Hultschs ab. Letzterer befindet sich in vollem Einklang mit Chasles, *Aperçu hist.* 31, deutsch 28, dem wir hier vorzugsweise folgen.

werden, eine Schraubenfläche. Legt man durch eines dieser Perpendikel unter passender Neigung gegen die Grundfläche des Zylinders eine Ebene, so schneidet diese Ebene die Schraubenfläche in einer Kurve, deren senkrechte Projektion auf die Grundfläche des Zylinders die Quadratrix ist. Und zweitens: wählt man eine archimedische Spirale zur Basis eines geraden Zylinders und denkt man sich einen Umdrehungskegel, dessen Achse diejenige Seitenlinie des Zylinders ist, welche durch den Anfangspunkt der Spirale geht, so schneidet dieser Kegel die Zylinderfläche in einer Kurve doppelter Krümmung. Die Perpendikel, welche von den verschiedenen Punkten dieser Kurve auf die erwähnte Seitenlinie des Zylinders gefällt werden, bilden die Schraubenfläche, welche Pappus an dieser Stelle plektoidische Oberfläche nennt. Legt man nun durch eine dieser Linien unter passender Neigung eine Ebene, so schneidet diese die Oberfläche in einer Kurve, deren senkrechte Projektion auf die Ebene der Spirale die verlangte Quadratrix sein wird. Welche tiefe Kenntnis krummer Oberflächen mußte nicht vorausgehen, damit diese Erzeugungsarten der Quadratrix erfunden werden konnten! Welchen Weg hat auch in dieser Beziehung die griechische Geometrie von Archytas, der, wie wir uns erinnern (S. 229), gekrümmte Oberflächen zur Würfelverdoppelung benutzte, bis auf Pappus zurückgelegt! Um so bedauerlicher ist es, daß uns die euklidischen Örter auf der Oberfläche fehlen, aus denen wir ermessen könnten, in welcher Periode der größere Teil jenes Weges zurückgelegt worden ist.

Pappus geht hier in seiner Betrachtung von Oberflächen und auf denselben hervortretenden Kurven doppelter Krümmung noch weiter. Er läßt eine sphärische Spirale entstehen, indem ein größter Kugelkreis um seinen Durchmesser mit gleichmäßiger Geschwindigkeit sich dreht, während zugleich ein Punkt mit ebenfalls gleichmäßiger Geschwindigkeit die Peripherie des gedrehten Kreises durchläuft[1]), und er findet die Fläche eines durch diese sphärische Spirale begrenzten Stückes der Kugeloberfläche, eine Komplanation, welche unsere Bewunderung um so lebhafter in Anspruch nimmt, wenn wir daran denken, daß die gesamte Kugelfläche zwar seit Archimed bekannt war, Stücke der Kugeloberfläche aber zu messen, wie z. B. sphärische Dreiecke, damals und noch lange später eine ungelöste Aufgabe darstellte.

Sätze aus der Geometrie der Ebene, welche bei Pappus den Leser überraschen, finden sich namentlich in dem VII. Buche, dessen Inhalt

[1]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 264 sqq. Vgl. Klügels Mathematisches Wörterbuch Bd. IV, S. 449 flgg.

von selbst einlud, Erweiterung zu jenen feinen Analysen vorzunehmen, die in den meisten verlorenen Schriften eines Euklid und Apollonius enthalten gewesen sein müssen[1]). Hier findet sich in den Lemmen zum bestimmten Schnitte des Apollonius die Lehre von der Involution von Punkten, in den Lemmen zu den Berührungen des Apollonius die Aufgabe, durch drei in einer Geraden gelegenen Punkte ebensoviele Gerade zu ziehen, welche ein Sehnendreieck in einem gegebenen Kreise bilden (S. 448). Hier enthält ein Lemma zu den Porismen des Euklid die Lehre von der Konstanz des anharmonischen Verhältnisses und ein Lemma zu den Örtern auf der Oberfläche ebendesselben den Satz, daß die Entfernungen eines jeden Punktes irgend eines Kegelschnittes vom Brennpunkte und der zu demselben gehörigen Leitlinie in konstantem Verhältnisse stehen, was Apollonius vielleicht noch nicht gewußt zu haben scheint (S. 339). Hier ist in den Lemmen zu den Berührungen des Apollonius der Lehre von den Ähnlichkeitspunkten zweier Kreise soweit vorgearbeitet, als wenigstens bekannt ist, daß die Verbindungsgerade der entgegengesetzten Endpunkte paralleler Halbmesser zweier sich äußerlich berührender Kreise durch den Berührungspunkt geht und auch der äußere Ähnlichkeitspunkt einer Figur entnommen werden kann[2]).

Hier endlich spricht Pappus zu den Kegelschnitten des Apollonius die Aufgabe aus, welcher, seit Descartes die Aufmerksamkeit der Mathematiker aufs neue auf sie gelenkt, der Name der Aufgabe des Pappus vorzugsweise geblieben ist[3]). Wenn mehrere gerade Linien der Lage nach in einer Ebene gegeben sind, den geometrischen Ort eines solchen Punktes zu finden, daß, wenn man von ihm Perpendikel, oder allgemein Linien unter gegebenen Winkeln, nach den gegebenen Geraden zieht, das Produkt gewisser unter ihnen zu dem Produkt aller übrigen in einem konstanten Verhältnisse stehe.

Aber nicht die Geschichte der Mechanik und der Geometrie allein kann aus der Sammlung des Pappus ihre merkwürdigen Ergebnisse schöpfen. Auch anderen mathematischen Lehren ist sie eine wenn auch nicht ganz ebenso ergiebige Fundgrube. Betrachten wir z. B. eines der Lemmen zum Verhältnisschnitte und Raumschnitte des Apollonius[4]). Wir haben (S. 266) im 27. Satze des VI. Buches der euklidischen Elemente die Wahrheit erkannt, das Produkt zweier Teile, in welche man eine gegebene Größe teile, werde ein Maximum, wenn die Teile einander gleich sind. So fest wir an dieser Auffassung des betreffenden Satzes halten, so ist immerhin eine Auffassung dazu er-

[1]) Für das Folgende vgl. namentlich Chasles, *Aperçu hist.* 33—44, deutsch 31—41. [2]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 840 und 852. [3]) Ebenda pag. 678. [4]) Ebenda pag. 694.

forderlich. Der Wortlaut des Satzes sagt nicht ausdrücklich, was wir in demselben gefunden haben. Pappus dagegen spricht an der genannten Stelle jene Wahrheit klar und durchsichtig aus. Sein Beweis lautet in Buchstaben übertragen folgendermaßen. Wird a in zwei Teile zerlegt, so ist der eine x kleiner als $\frac{a}{2}$ und zwar um y. Der andere Teil ist, wie man erkennt, $x + 2y$ und das Produkt $x^2 + 2xy$ stets kleiner als $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, oder kleiner als $\frac{a^2}{4}$, so lange y von Null verschieden ist.

Pappus, wissen wir, hat der Ausziehung der Quadratwurzeln seine Aufmerksamkeit zugewandt. Er hat auch die Aufgabe der Einschiebung zweier mittleren Proportionalen zwischen gegebene Größen, die analytisch zur Kubikwurzelausziehung führt, aber von den Griechen stets geometrisch bearbeitet wurde, an zwei verschiedenen Orten im III. und im VIII. Buche verschiedenen Schriftstellern nachbehandelt. Eine solche von ihm durchgesprochene Lösung ist besonders merkwürdig, weil sie falsch ist, und Pappus den Irrtum durch Rechnung nachweist, also den geometrischen Gang zugunsten einer arithmetischen Prüfung unterbricht. Man hat gezeigt[1]), daß jene tatsächlich unrichtige Methode, wenn fortgesetzt angewandt, eine wirkliche näherungsweise richtige Kubikwurzelausziehung liefert, und damit wäre ein ungemein wichtiger Fortschritt griechischer Wissenschaft enthüllt, wenn wahrscheinlich gemacht werden könnte, daß der Erfinder jenes Verfahrens wirklich beabsichtigte, was nachträglich aus seinem Versuche gemacht worden ist. Wir können für jetzt nicht daran glauben, weil ein Mann wie Pappus, gelehrt und geometrisch gewandt wie kein zweiter seiner griechischen Zeitgenossen, sonst wohl kaum mit einer gewissen Geringschätzung von jenem Versuche gesprochen haben würde.

Zu den Berührungen des Apollonius macht Pappus zwei Bemerkungen, von welchen wir (S. 345) andeutungsweise redeten, ihre eigentliche Erwähnung bis hierher aufsparend, da es mindestens zweifelhaft ist, ob wir hier dem Apollonius bereits Bekanntes, ob einen Zusatz des Pappus vor uns haben. Pappus sagt nämlich, aus drei Elementen, deren jedes beliebig oft gesetzt werden darf, lassen

[1]) Pappus (ed Hultsch) pag. 32 sqq. Vgl. Pendlebury, *On a method of finding two mean proportionals* im *Messenger of the mathematics* Ser. 2, Tom. II, pag. 166 sqq., dann Glaisher in dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik V, 244 und beide ergänzend S. Günther, Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik (aus den Abhandlungen der K. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften VI. Folge, 9. Band. Prag 1878) S. 32—41 des Sonderabdruckes.

sich zehn Ternen und nur sechs Amben bilden[1]). Das sind wahre kombinatorische Lehrsätze von einem Mathematiker verwertet. Neben der Ursprungsfrage bleibt noch eine zweite zu stellen, die wir nicht zu entscheiden wagen, ob die beiden Sätze als spezielle Fälle, ob als in einer allgemeinen Hauptwahrheit enthalten bekannt waren. Wir neigen der Meinung zu, es sei nur ersteres der Fall gewesen, und Pappus, oder wer nun die Sätze fand, habe durch tatsächliches Bilden der Kombinationsformen sich von ihrer Anzahl überzeugt.

Die drei hauptsächlichen Mittelgrößen sind schon mehrfach von uns besprochen. Wir wissen, daß Nikomachus von Gerasa, daß Theon von Smyrna sich mit ihnen beschäftigte, aber keiner von beiden leitete so, wie Pappus in seinem III. Buche es tut[2]), alle drei durch eine gleichmäßige Erzeugungsweise ab. Zwischen a und c ist Pappus zufolge eine dritte Größe b arithmetisches, geometrisches oder harmonisches Mittel, je nachdem die beiden Differenzen $a - b$ und $b - c$ in dem Verhältnisse $a : a$ oder $a : b$ oder $a : c$ stehen.

Wir möchten ferner die Aufmerksamkeit unserer Leser auf die dem III. Buche angehörige Aufgabe lenken: zu einem gegebenen Parallelogramme ein zweites zu finden, so daß die Seiten des zweiten zu denen des ersten in einem gegebenen Längenverhältnisse stehen, während die Flächenräume in einem anderen gleichfalls gegebenen Verhältnisse stehen sollen[3]). Die Aufgabe ist an sich leicht und eine vollständig bestimmte, aber sie gewinnt an geschichtlicher Tragweite, wenn wir sie mit jener unbestimmten Aufgabe im Buche des Landbaues vergleichen (S. 391): zwei Rechtecke zu finden, bei welchen die Summe der Seiten in einem, die Flächeninhalte in einem anderen gegebenen Verhältnisse stehen sollen, eine Aufgabe, welche uns noch wiederholt begegnen wird, und deren Ursprung durch das bloße Vorkommen im heronischen Buche des Landbaues noch keineswegs gesichert ist, da gerade dieses Buch spätere Einschiebungen mit großer Wahrscheinlichkeit vermuten läßt.

Endlich kommen wir auf die Multiplikationsmethode des Apollonius im II. Buche des Pappus zurück und auf eine Bemerkung, welche wir bei unserer ersten Erörterung dieses Verfahrens (S. 346) dazu machten. Jene Bemerkung bezog sich auf das Auftreten $\varkappa$ter Myriaden. Die Allgemeinheit der Darstellung beschränkt sich nicht auf sie. Bei den Zahlenbeispielen, an welchen die Multiplikation mit Hilfe der Wurzelzahlen gelehrt wird, kommen natürlich griechischer Gewohnheit gemäß Buchstaben als Vertreter von Zahlen

[1]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 646 und 648. [2]) Ebenda pag. 70 und 72. [3]) Ebenda pag. 126 sqq.

vor. Aber neben den zu diesem Zwecke verwandten Buchstaben des Alphabetes erscheinen auch große Buchstaben in der Bedeutung allgemeiner Zahlen. So ist $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 5$, und von den entsprechenden großen Buchstaben wird angenommen, es sei[1]) $A = 20$, $B = 3$, $\Gamma = 4$, $\Delta = 5$, $E = 6$ und Z sei die Wurzelzahl von A oder 2. Offenbar ist hier ein ungemeiner Fortschritt enthalten. Es ist nicht bloß von einer gesuchten Größe, einem Hau der Ägypter die Rede; es werden nicht bloß, wie in dem Epantheme des Thymaridas, zwei Gattungen von Größen, gegebene und unbekannte unterschieden; es liegt die Möglichkeit vor, so viele allgemeine Größen als es nur große Buchstaben gibt zu unterscheiden, Operationen an ihnen anzudeuten und damit Regeln selbst in ihrer Allgemeinheit auszusprechen, ohne den Leser zu nötigen die Regel erst aus dem besonderen Beispiele zu abstrahieren. Es ist in der Tat eine Buchstabenrechnung. Schon Aristoteles hat (S. 253) eine Kraft, eine Zeit durch einen einfachen Buchstaben bezeichnet. Bezeichnungen durch einfache Buchstaben hat man auch aus Ciceros Briefen nachzuweisen vermocht[2]). Aber eine so freie Bewegung mit den Symbolen allgemeiner Größen wie im II. Buche des Pappus ist doch neu. Dem Vorgange des Aristoteles gegenüber ist es nicht erlaubt ohne weiteres zu leugnen, daß Apollonius schon diesen gewaltigen Fortschritt vollzog. Es ist noch weniger gestattet solches geradezu zu behaupten und anzunehmen weder ein Geometer noch ein Arithmetiker, kein Heron, kein Nikomachus seien in die Fußtapfen des Apollonius getreten. Vielleicht ist der Fortschritt in zwei Bewegungen erfolgt, wenn man uns diese Ausdrucksweise gestatten will. Apollonius, das wissen wir aus Pappus, hat sein Verfahren geometrisch dargestellt[3]), d. h. er sprach offenbar, gleich Euklid an manchen Stellen der Elemente, von Linien und Flächen, wo wir von Zahlen und ihren Produkten zu reden gewohnt sind. Auch Euklid bezeichnete solche Zahlenlinien regelmäßig durch einfache Buchstaben. Dieselbe Gewohnheit, sollten wir meinen, habe Apollonius gehabt; er habe seine Zahlenlinien durchgängig mit je einem großen Buchstaben benannt. Pappus, vermuten wir dann, habe die Buchstaben beibehalten, die lineare Versinnlichung fallen lassen. So war der Fortschritt vielleicht ein halb unbewußter, aber er war darum doch gemacht, und die Algebra der Zeitgenossen wie der Nachkommen konnte Nutzen davon ziehen.

[1]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 8. [2]) *Epistolae ad Atticum* Lib. II *epistola* 3. Wenn dagegen römische Juristen vielfach die Gewohnheit hatten, statt einer unbestimmt gelassenen Zahl *decem* (X) zu schreiben, z. B. *dabo X asses*, so ist diese Gewohnheit kaum als eine Spur allgemeiner Größenbezeichnung aufzufassen. [3]) *τὸ δὲ γραμμικὸν ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου δέδεικται* bei Pappus (ed. Hultsch) pag. 8.

23. Kapitel.

Die Neuplatoniker. Diophantus von Alexandria.

Wir sehen in diesem Kapitel Männer auftreten, deren richtige Würdigung kaum möglich ist, ohne daß wir ein Anlehen bei der Geschichte der Philosophie uns gestatten[1]). Nicht als ob wir gesonnen wären die Unterschiede deutlich zu machen, welche zwischen dem Neupythagoräismus, von welchem wir in der Einleitung zum 21. Kapitel (S. 428) gesprochen haben, und dem Neuplatonismus, zu welchem wir uns jetzt wenden, obwalten; so tief dürfen wir in das uns fremde Gebiet nicht eindringen; aber die Persönlichkeiten müssen wir wenigstens kennen lernen, welche im Neuplatonismus tonangebend waren, und die vielleicht ein Recht in der Geschichte der Mathematik mit Ehren genannt zu werden nur dadurch einbüßten, daß ihre mathematischen Schriften verloren gingen, Schriften, deren arithmetischer Inhalt, sofern wir nach dem Erhaltenen auf das Verlorene schließen dürfen, eine Fortsetzung dessen darstellen würde, was die Neupythagoräer Nikomachus und Theon uns zu entwickeln nötigten. Noch in einem anderen Berührungspunkte treffen die Neuplatoniker, von denen wir besondere mathematische Erinnerung besitzen, mit den genannten neupythagoräischen Arithmetikern überein. Wie Gerasa und Smyrna, so gehört die Heimat des Porphyrius, des Jamblichus dem asiatischen Weltteile an, und gehen wir von dem Satze aus, daß sich häufende Zufälligkeiten wahrscheinlich ähnlichen Gründen entstammen und damit aufhören Zufälligkeiten zu sein, so werden wir die Tatsache uns zu bemerken haben, daß vorderasiatische Philosophen, welche der Mathematik sich zuwandten, vorzugsweise Arithmetiker wurden. Eine Begründung dieser Tatsache aber zu geben reichen die heutigen Mittel nicht aus. Kaum anzudeuten wagen wir, daß es heimatliche Einflüsse gewesen sein dürften, die diese bestimmte Geistesrichtung hervorbrachten, heimatliche Einflüsse, die aber jedenfalls nach Zeit und Ort weiter verfolgbar sein müssen, in eine vielleicht graue Vergangenheit, in weiter östlich liegende Gegenden.

Der Verkehr mit diesem Osten, selbst mit dem äußersten Osten, war wenn auch kein lebhafter doch immer vorhanden. Alexandrinische Handelskarawanen wagten sich nach Indien; aber auch indische und chinesische Gesandtschaften erschienen bei römischen Kaisern.

[1]) Unsere Hauptquelle: Zeller, Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung III. Theil, 2. Abtheilung (2. Auflage) 1868, zitieren wir als Zeller III, 2.

Der Hof des Augustus, des Claudius, des Trajan, des Constantin des Großen, des Julianus hat solche Botschafter fremdartigster Gestalt gesehen[1]). Im II. S. n. Chr. soll Scythianus magische Schriften aus Indien nach Alexandria gebracht haben, die dort gierig verschlungen wurden. In das III. S. fällt die Gründung der neuplatonischen Schule in Alexandria durch Ammonius Sakkas. Ammonius aber war von 232—242 der Lehrer des Plotinus, eines Ägypters, in dem nunmehr die Neigung aus den orientalischen Quellen selbst zu schöpfen so lebhaft erwachte, daß er 39 Jahre alt dem Heere sich anschloß, welches unter Gordian gegen die Perser zu Felde zog. Die selbständige Wirksamkeit des Plotinus entfaltete sich in Rom, wo er etwa 244 als Lehrer auftrat und eines großen Zulaufs sich erfreute, bis er 270 in Campanien einer lange dauernden Krankheit erlag.

Der Lieblingsschüler Plotins erhielt den Auftrag die Schriften des Lehrers zu sammeln und herauszugeben. Es war der Tyrier Malchus, der etwa 232 auf asiatischem Boden geboren zuerst in Athen unter einem Philosophen Longinus, der für uns kein weiteres Interesse besitzt, studierte, dann nach Rom zu Plotinus gelangte und dort den Namen Porphyrius erhielt, unter welchem er uns schon wiederholt vorgekommen ist. Porphyrius erreichte jedenfalls ein hohes Alter, da er selbst von einem Vorfalle aus seinem 68. Lebensjahre erzählt hat, und somit sicherlich erst nach 300 gestorben ist. Er war außer in Rom, wohin er am Ende seiner Laufbahn nochmals zurückkehrte, auch in Sizilien schriftstellerisch und als Lehrer tätig. Von seinen Schriften haben wir das Leben des Pythagoras sowie den Kommentar zu der Musik des Ptolemäus als Quelle mancher wertvollen geschichtlichen Angaben kennen gelernt. Die letztere Schrift ihrem eigentlichen wissenschaftlichen Inhalte nach zu besprechen haben wir keine Veranlassung. Wichtiger wären vielleicht für die Geschichte der Sternkunde und ihrer Ausartungen die astrologischen Anklänge, welche bei Porphyrius vorhanden sind, welche von da an unter den Neuplatonikern nicht verhallen, von welchen aber auch schon Ptolemäus, der strenge Forscher, nicht frei war; ihrem Ursprunge nachgehend könnte man möglicherweise zu auch anderwärts verwertbaren Ergebnissen gelangen. Porphyrius verfaßte ferner Einleitungen zu aristotelischen Schriften. Von Geometrischem, was Porphyrius geschrieben, ist uns nur weniges in des Proklus Kommen-

[1]) Vgl. Reinaud, *Relations politiques et commerciales de l'empire Romain avec l'Asie centrale* im *Journal Asiatique*, 6. série, T. I (1863) und eine Notiz von Woepcke in demselben Bande pag. 458 mit Berufung auf Wilson, *Vishnu Purana*. London 1840 in 4°, pag. VIII und IX.

tare zu dem ersten Buche der euklidischen Elemente erhalten[1]) und dieses Wenige ist nicht von solcher Bedeutung, daß wir dabei zu verweilen hätten.

Zwei Schüler des Porphyrius werden als bedeutendste genannt. Der ältere, ein gewisser Anatolius, war seit 270 Bischof von Laodicea. Von ihm haben sich mancherlei mystisch-arithmetische Bruchstücke erhalten[2]). Sein Schüler und erst später Schüler des ihnen somit gemeinsamen Lehrers Porphyrius war der zweite, den wir zu nennen haben: Jamblichus.

Jamblichus ist aus reicher und angesehener Familie zu Chalcis in Cölesyrien geboren, also Vorderasiate, wie wir oben bemerkten. Er folgte wahrscheinlich in Rom dem Unterrichte des Anatolius und des Porphyrius, als dieser aus Sizilien wieder zurückgekehrt war. Später verlegte Jamblichus seinen Aufenthalt in seine syrische Heimat, wo er selbst schulebildend auftrat. So sehr seine Anhänger ihn verehrten, — den Göttlichen nannte ihn die Schule — so sind doch die Angaben über seine Lebenszeit von Widersprüchen behaftet[3]). An und für sich könnte es ja richtig sein, daß er am Ende des III. S. in Rom zu den Füßen des Porphyrius saß, daß er während der Regierung Constantin des Großen (306—337) wirkte, daß noch Kaiser Julianus Apostata (361—363) in Briefwechsel mit dem greisen Philosophen stand. Wie aber will man dann begreiflich machen, daß Kaiser Constantin den Sopater, einen Schüler des Jamblichus, der erst nach des Lehrers Tode an den Kaiserhof kam, hinrichten ließ, wie damit wieder in Einklang bringen, daß Kaiser Julianus in einem seiner Briefe von Sopater als einem damals noch lebenden Schüler des Jamblichus redet? Soll man wirklich den Tod des Jamblichus etwa auf 330 setzen, die Briefe des Julian an Jamblichus für untergeschoben erklären? Wir verzichten auf die Entscheidung dieser Fragen, welche eine große Wichtigkeit für uns nicht besitzen. Daß Jamblichus unzweifelhaft am Anfange des IV. S. lebte, genügt uns. Wie lange Jamblichus im IV. S. seine Tätigkeit fortsetzte, ist uns ziemlich gleichgültig.

---

[1]) Die betreffenden Stellen sind mit Hilfe des Namensverzeichnisses der Friedleinschen Proklusausgabe leicht aufzufinden. [2]) In einer Münchener Handschrift sind solche Stücke als von Anatolius herrührend gesammelt. Heiberg hat sie in den Veröffentlichungen des *Congrès d'Histoire des sciences* (Paris 1900) abdrucken lassen und P. Tannery hat eine französische Übersetzung sowie Schlußbemerkungen folgen lassen, in welcher mit der älteren Ansicht gebrochen ist, als wäre der Lehrer des Jamblichus gar nicht Christ gewesen, also von dem Bischof von Laodicea zu unterscheiden. Vgl. auch Borghorst, *De Anatolii fontibus* (Berlin 1904). [3]) Zeller III, 2, 613, Anmerkung 2.

Von den Werken des Jamblichus[1]) kümmern uns vorzugsweise einige Bücher, welche zwar getrennt voneinander herausgegeben worden sind, aber ursprünglich ein einziges Werk von zehn Büchern bildeten und den Gesamttitel: Sammlung der pythagoräischen Lehren, *συναγωγὴ τῶν πυθαγορικῶν δογμάτων*, führten. Das I. Buch enthielt das Leben des Pythagoras, das II. eine Einleitung in die Philosophie, das III. eine solche in die Mathematik, das IV. Erläuterungen zu Nikomachus, das V. Physikalisches, das VI. Ethisches, das VII. theologisch-arithmetische Auseinandersetzungen, das VIII. eine Musik, das IX. eine Geometrie, das X. eine Sphärik. Die kleinere Hälfte des Werkes, das I., II., III, IV. Buch haben sich erhalten[2]), die andere Hälfte ist verloren gegangen. Der wesentliche Inhalt des VII. Buches mag allerdings von einem späteren unbekannten Verfasser in die erhaltene Schrift Theologumena Arithmeticae hineingearbeitet worden sein[3]). Verloren ist auch ein Werk über Chaldäisches, aus dessen 28. Buche eine Notiz sich erhalten hat, woraus auf den großen Umfang des Werkes ein Schluß gezogen werden kann. An ihm dürfte die Geschichte der Wissenschaften überhaupt, der Mathematik insbesondere, viel eingebüßt haben, und jedenfalls reicht dessen einstmaliges Vorhandensein aus, die Glaubwürdigkeit dessen, was Jamblichus, der sich somit erwiesenermaßen mit den chaldäischen Überlieferungen beschäftigt hatte, über den Ursprung mancher mathematischen Sätze in Babylon berichtet, wesentlich zu erhöhen. Die sonstigen vielen Schriften, welche Jamblichus mit Recht oder Unrecht beigelegt werden, welche teils ganz verloren, teils in Bruchstücken vorhanden sind, haben für uns keine weitere Bedeutung.

Von den zehn Büchern pythagoräischer Lehren haben wir das IV., welches schon mehrfach von uns ausgebeutet worden ist, dem wir z. B. das Epanthem des Thymaridas entnahmen, noch nach der Richtung hin zu prüfen, was wohl in den Erläuterungen zur Arithmetik des Nikomachus, die übrigens nichts weniger sind als ein fortlaufender Kommentar zum Texte des zu erklärenden Werkes, erwähnenswert sein möchte, und als älteren Schriftsteller nicht überweisbar

---

[1]) Zeller III, 2, 615, Anmerkung 2. [2]) Buch I ist am besten von Kießling, Leipzig 1815, Buch II von ebendemselben, Leipzig 1813, herausgegeben, Buch III ist bei Ansse de Villoison, *Anecdota Graeca* Bd. II. Venedig 1781 abgedruckt, in unserer Zeit von Festa neu herausgegeben. Buch IV gab Tennulius heraus. Arnheim 1668, sowie Pistelli (Leipzig 1894). [3]) *Θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς* ed. Fr. Ast. Leipzig 1817. C. von Ian, *Musici scriptores Graeci* pag. 212 (Leipzig 1895) neigt sich der Ansicht zu, die Theologumena seien von Jamblichus zusammengestellt.

dem Jamblichus angehören könnte. Da ist freilich das Auszuzeichnende ungemein dürftig. Der Satz, daß jede Dreieckszahl mit 8 vervielfacht und alsdann noch um die Einheit vermehrt zur Quadratzahl werde, ist keinesfalls des Jamblichus Eigentum, da derselbe mindestens schon bei Plutarch im I. S. n. Chr. vorkommt (S. 168). Auch was Jamblichus von Seiten- und Diametralzahlen weiß, kennen wir schon von Theon von Smyrna her. Ihm dagegen gehört vielleicht der Satz an, daß jede Zahl mit einer der beiden ihr zunächst liegenden gleichartigen (d. h. gerade mit geraden, ungerade mit ungeraden) vervielfacht unter Hinzufügung der Einheit zu dem Produkte ein Quadrat gibt, und zwar ein gerades Quadrat wenn man von ungeraden, ein ungerades wenn man von geraden Faktoren ausging[1]), ein Satz, der freilich keines weiteren Beweises bedarf, als der sich aus der Identität $a(a+2)+1=(a+1)^2$ ergibt. Über die vollkommenen Zahlen sagt Jamblichus, nach den vier ersten 6, 28, 496, 8128 folgten auch in der ersten und zweiten Stufe der Myriaden je eine usw. ins Unendliche immer abwechselnd mit 6 und 8 endigend.[2])

Jamblichus darf sich wohl auch die Erfindung zuschreiben, welche jede Quadratzahl in ihrer Entstehung als Summe zweier aufeinander folgenden Dreieckszahlen mit dem Bilde einer Rennbahn vergleicht[3]). Von der Einheit als Schranke durchläuft man alle Zahlen bis zu einem Wendepunkte a, von wo aus auf der anderen Seite wieder durch die sämtlichen Zahlen die Rückkehr zur Einheit als Ziel erfolgt; d. h. $1+2+\cdots+(a-1)+a+(a-1)+\cdots+2+1=a^2$. Daneben weiß Jamblichus auch, daß $1+2+\cdots+(a-1)+a+(a-2)+\cdots+2=(a-1)\cdot a$ eine heteromeke Zahl wird, und stellt auch diese Vorwärts- und Rückwärtssummierung, bei der freilich beim Zurückgehen ein Sprung von a nach $a-2$ erfolgt, und außerdem das Ziel bei 2 und nicht bei 1 ist, an dem Bilde einer Rennbahn dar. Ja er hetzt das Bild einer Rennbahn zu Tode, indem er von $1+2+3+\cdots+9+10+9+\cdots+3+2+1=100$ durch Vervielfachung jeder Zahl mit 10, mit 100 usw. zu 1000, zu 10000 usw. gelangt und die Zahlen 1, 10, 100, 1000 die Einheiten des ersten, des zweiten, des dritten, des vierten Ganges mit den Pythagoräern nennt, woraus hervorgeht, daß den Pythagoräern ein genaues Bewußtsein des dekadischen Zahlensystems innewohnte, wie es auch aus dem Begriff der

[1]) Jamblichus *in Nicomachum* (ed. Tennulius) pag. 127, (ed. Pistelli) pag. 90. Vgl. Nesselmann, Algebra der Griechen S. 236, Anmerkung 70. [2]) Jamblichus *in Nicomachum* (ed. Tennulius) pag. 46, (ed. Pistelli) pag. 33. Vgl. Fr. Hultsch in den Nachrichten der k. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen. 1895, Heft 3. [3]) Für diese und die folgenden Bemerkungen zu Jamblichus vgl. Nesselmann, Algebra der Griechen S. 237—242.

Wurzelzahlen bei Apollonius deutlich hervorgeht. Die Wurzelzahlen selbst, aber nicht Pythmenes, sondern Einheit, μονάς, genannt, spielen in einem letzten Satze des Jamblichus eine Rolle. Addiert man drei in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar aufeinander folgende Zahlen, deren größte durch 3 teilbar ist, nimmt die Ziffernsumme der Summe (d. h. bei Jamblichus die Summe der Monaden), von dieser Ziffernsumme abermals die Ziffernsumme usf., so gelangt man endlich zu der letzten Ziffernsumme 6. So erweist sich uns Jamblichus immerhin als erträglicher, wenn auch nicht als bedeutender Arithmetiker. Bedürfte der negative Teil dieses Ausspruches einer Bestätigung, so könnten wir sie in dem Tadel finden, den Jamblichus gegen Euklid sich erlaubt, weil derselbe die Zahl 2 eine Primzahl nenne, während es nach Nikomachus nur ungerade Primzahlen gebe.

Das Wort Pythmen, welches bei Jamblichus vermißt wird, findet sich dagegen bei einem anderen christlichen Schriftsteller des III. Jahrhunderts, bei dem Heiligen Hippolytos[1]), der die Pythmenen zur Neunerprobe und ebenso zur Siebenerprobe benutzt, d. h. die Frage aufwirft, welcher Rest übrig bleibe, wenn man die Summe von Pythmenen durch 9 oder auch durch 7 teile. Eine rechnerische Verwertung dieses Verfahrens ist allerdings nicht beabsichtigt, sondern es handelt sich um eine Art Vorbedeutungsarithmetik, die möglicherweise in Griechenland noch weit vor die Zeit des Hippolytos hinaufreicht.

Der Zeit des Jamblichus gehören möglicherweise die arithmetischen Epigramme der griechischen Anthologie an[2]). Sammlungen kleiner griechischer Gedichte wurden seit dem letzten Jahrhundert vor Christi Geburt vielfach zusammengestellt. Aber was damals, was später während der Regierungen Trajans, Hadrians gesammelt wurde, ist verloren gegangen. Nur die Erinnerung daran ist geblieben, nur was teilweise mit Anlehnung an diese Vorgänger am byzantinischen Hofe zuerst im X. S. von Constantin Kephalas, dann wiederholt in den ersten Jahren des XIV. S. von Maximus Planudes, einem Vielschreiber, welcher uns noch mehrmals als Verfasser mathematischer Schriften begegnen wird, zu einer Blumenlese vereinigt worden ist. Einige dieser Gedichte gehören der Geschichte der Mathematik insofern an, als man in ihnen Isopsephien

[1]) P. Tannery, *Notice sur des fragments d'Onomatomancie arithmétique* (*Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Nationale* 1885, Tome XXXI, 2. Partie). [2]) Die besten Ausgaben der Anthologie von Friedr. Jacobs in 3 Bänden (Leipzig 1813—17) und von Brunck. Die 47 arithmetischen Epigramme hat Zirkel in einem Bonner Gymnasialprogramme vom Herbst 1853 mit deutscher Übersetzung und einigen Erläuterungen herausgegeben. Vgl. auch Nesselmann, Algebra der Griechen S. 477 flgg.

erkannt hat, d. h. sie bestehen aus zwei Distichen, und die Buchstaben aller in je einem Distichon vorkommenden Wörter nach ihrem Zahlenwerte additiv vereinigt geben die gleiche Summe, eine Spielerei, welche an die im ersten nachchristlichen Jahrhunderte in Alexandria geübte **Gematrie** (S. 125) täuschend erinnert. Wirklich ist auch einer der Dichter, welche an Isopsephien sich versuchten, ein gewisser **Leonidas von Alexandria**, der, wie man aus in seinen Gedichten vorkommenden Persönlichkeiten zu ermitteln gewußt hat, in der Zeit von Kaiser Nero etwa gelebt haben muß[1]). Dann finden sich in der Anthologie auch eine große Anzahl algebraischer Rätselfragen. Wir haben (S. 285) das sogenannte euklidische Epigramm von den beladenen Tieren kennen gelernt; es steht in der Anthologie. Das Rinderproblem des Archimed (S. 312) steht nicht in derselben, gehört aber seinem Inhalte wie der dichterischen Einkleidung nach gleichfalls hierher, und man wird vielleicht nicht irre gehen, wenn man Inhalt und Form der Epigramme voneinander trennt, letztere erheblich später als ersteren entstehen läßt. Für mehrere von den algebraischen Epigrammen gilt **Metrodorus** als Verfasser und da dieser nach den einen unter Constantin dem Großen, nach anderen im VI. Jahrhundert gelebt haben soll[2]), so wählten wir diese Stelle, um von den Epigrammen zu reden. Wir wollen freilich nur zwei derselben hervorheben, welche eine gewisse Bedeutung zu besitzen scheinen.

Wir meinen erstens eine Brunnenaufgabe, wenn dieses Wort den Sinn behalten soll, unter welchem wir es (S. 391) bei Besprechung der Ausmessungen des Heron eingeführt haben:

Vier Springbrunnen es gibt. Die Zisterne anfüllet der erste
Täglich; der andere braucht zwei Tage dazu, und der dritte
Drei, und der vierte gar vier. Welche Zeit nun brauchen zugleich sie?

Wir meinen zweitens ein Epigramm, welches seinem Gegenstande nach an die Kronenrechnung des Archimed erinnert, durch die Art aber, wie die gegebenen Größen in ihm mit den Unbekannten verbunden sind, die Anwendung des Epanthems des Thymaridas erheischt:

[1]) H. **Stadtmüller**, Zur griechischen Anthologie in der Festschrift zur Einweihung des neuen Gebäudes für das Großherz. Gymnasium in Heidelberg 1894 besonders S. 40—43. Für die Lebenszeit des Leonidas von Alexandria standen uns mündliche Mitteilungen Stadtmüllers zu Gebote. [2]) **Jacobs**, *Comment. in Anthologiam Graecam* T. XIII, pag. 917. Allerdings beruht nach **Tannery** (Prolegomena zum II. Bd. seiner Diophantausgabe (1895) pag. XII—XIII) die Angabe von **Jacobs** auf einer Verwechslung von Persönlichkeiten gleichen Namens, und der Zusammensteller der algebraischen Epigramme lebte erst im VI. S.

Schmied' mir die Krone und menge das Gold mit dem Kupfer zusammen,
Füg' auch Zinn noch hinzu samt sorglich bereitetem Eisen.
Sechzig der Minen sie hab' an Gewicht. Zwei Drittel der Krone
Wiege das Gold mit dem Kupfer gemengt; drei Viertel dagegen
Gold mit dem Zinn im Gemisch; drei Fünftel betrage das Gold noch,
Wenn du es fügst zu dem Eisen. Wohlan! nun sage mir pünktlich,
Was du an Gold mußt nehmen und Kupfer, zu treffen die Mischung;
Wie viel Minen an Zinn; auch nenne die Masse des Eisens,
Daß du zu schmieden vermagst von sechzig der Minen die Krone.

Mag nun Metrodorus unter Constantin dem Großen im ersten Drittel des IV. S. oder erst im VI. S. gelebt haben, mag im ersteren jetzt allerdings so gut wie ausgeschlossenen Falle ein Mann, dessen Persönlichkeit einem sogleich von uns zu erwähnenden Epigramme den Inhalt gab, vor Jamblichus gelebt haben, so konnte die strenge Zeitfolge für unsere Darstellung nicht maßgebend sein. Jamblichus ist von den Neuplatonikern nicht zu trennen. Er ist in seinen Schriften durch die Leistungen Diophants — denn dieser ist der Mann, den wir im Auge haben — nicht im geringsten beeinflußt. Er konnte daher ohne Rücksicht auf die Lebenszeit des anderen selbständig behandelt werden. In gleicher Weise ist umgekehrt eine Einwirkung des Jamblichus auf **Diophantus von Alexandria**[1]) nicht zu bemerken.

Der Name dieses Schriftstellers war selbst dem Zweifel unterworfen, so lange man in griechischer Sprache nur die Genitivform kannte, welche ebensowohl von einer Endung ης als ος sich herleiten konnte. Man berief sich aber auf die arabische Form des Namens, welche mit der hier benutzten übereinstimmt und fand alsdann volle Bestätigung in einer Stelle des Kommentars Theons von Alexandria zum ersten Buche des Almagestes, wo unzweideutig *Διόφαντος* steht und unser Algebraiker gemeint sein muß, weil es sich bei Theon[2]) um einen Satz handelt, der bei Diophant wirklich in dem dort angegebenen Wortlaute vorkommt. Der gleichen Form *Διόφαντος* hat sich auch Johannes von Jerusalem bedient[3]). Am Ende des VIII. S.

[1]) Über Diophant hat **Cossali**, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra* I, 56—95. Parma 1797, gehandelt; dann **Otto Schulz** in der Einleitung und den Anmerkungen zu seiner deutschen Übersetzung des Diophant. Berlin 1822; **Nesselmann**, Algebra der Griechen S. 243—476. **Hankel** 157—171. T. L. **Heath**, *Diophantos of Alexandria*. Cambridge 1885. P. **Tannery** in der *Bibliotheca mathematica* 1887 pag. 37—43, 81—88, 103—108 und 1888 pag. 3—6. [2]) *Théon d'Alexandrie* (ed. **Halma**) I, 111. [3]) **Vossius**, *De scientiis mathematicis* (Amsterdam 1650) pag. 432 hat die betreffenden Worte abgedruckt und zitiert dafür „pag. 683 edit. **Basil.**" **Tannery** hat sie in seine Diophantausgabe II, 36 in der Form aufgenommen, welche sich im Pariser Kodex 1559 erhalten hat.

lebte nämlich Johannes von Damaskus, der gleich seinem Vater Sergius als Christ Schatzmeister des Kalifen 'AbdAlmelik war. Er zog sich jedoch bald in das Kloster Saba zurück, wo er, wie die einen sagen, 780, nach anderer Meinung 760 gestorben ist[1]). Das Leben dieses Johannes von Damaskus hat nun sein jerusalemitischer Namensgenosse beschrieben und ihm dabei nachgerühmt, er sei in der Geometrie so bewandert gewesen wie Euklid, in der Arithmetik wie Pythagoras und Diophantus.

Für das Leben des Diophantus sind uns zwei weit getrennte Grenzen gegeben. Damit Theon seiner erwähnen konnte, müssen seine Schriften spätestens um 370 vorhanden gewesen sein. Damit er Hypsikles nennen konnte, dessen Definition der Vieleckszahlen er uns aufbewahrt hat (S. 361), muß er später als 180 v. Chr. gelebt haben. So ist ein Zwischenraum von ganzen 550 Jahren gewonnen, in welchem Diophant unterzubringen ist. Die Gründe, weshalb man früher vermutete, Diophant müsse ganz am Ende der überhaupt möglichen Zeit gelebt haben, sind teils negative, teils ein positiver. Negativ ließ man sich dadurch bestimmen, daß weder bei Nikomachus, noch bei Theon von Smyrna, noch bei Jamblichus eine Erwähnung des Diophant oder seiner Lehren aufgefunden worden ist, so nahe dieselbe gerade diesen Schriftstellern gelegen hätte, daß überhaupt eine Einwirkung des Diophant auf griechische Arithmetik nicht nachzuweisen ist, was nur dann begreiflich erscheine, wenn man annehme, er habe erst nach den Männern gelebt, welche ihn einigermaßen, wenn auch nicht vollkommen zu verstehen imstande waren. Dazu kommt dann das positive Zeugnis des Abulpharagius, eines syrischen Geschichtsschreibers aus dem XIII. S., Diophant sei Zeitgenosse des Julianus Apostata gewesen, welcher 361—363 regierte. Der einzige, aber für uns den Ausschlag gebende Gegengrund ist der, daß Michael Psellus in einem Briefe sagt[2]), Anatolius habe eine Schrift über das ägyptische Rechnen dem Diophant gewidmet, und Anatolius war (S. 458) seit 270 Bischof von Laodicea. Diophant würde danach etwa in die Mitte des III. S. zu setzen sein, und die mangelnde Einwirkung auf Jamblichus wäre daraus zu erklären, daß dieser, wenn er Diophants Schriften kannte, sie nicht verstand.

Das mehrerwähnte Epigramm enthält alles, was wir von den persönlichen Verhältnissen des Diophantus wissen.

---

[1]) A. von Kremer, Kulturgeschichte des Orientes II, 402—403 (Wien 1877). [2]) Tannerys Diophantausgabe II, 37—42, insbesondere pag. 38 lin. 22 bis 25.

Hier dies Grabmal deckt Diophantus. Schauet das Wunder!
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
Von sich scheuchend, auch er kam an das irdische Ziel.

Wurde Diophant x Jahre alt und starb der Sohn, als er die Hälfte der damaligen Jahre des Vaters erreicht hatte[1]), so entspricht das Epigramm der Gleichung: $\left(\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5\right)+\left(\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5\right)+4=x$ oder $3x=196$ mit $x=65\frac{1}{3}$. Auf die Kindheit fielen alsdann $10\frac{8}{9}$ Jahre. Nach weiteren $5\frac{4}{9}$ Jahren $\left(\text{mit } 16\frac{1}{3} \text{ Jahren}\right)$ sproßte der Bart. Nach weiteren $9\frac{1}{3}$ Jahren $\left(\text{mit } 25\frac{2}{3} \text{ Jahren}\right)$ folgte die Verheiratung und 5 Jahre später $\left(\text{mit } 30\frac{2}{3} \text{ Jahren}\right)$ die Geburt des Sohnes, der selbst $30\frac{2}{3}$ Jahre alt war als er starb und der Vater mit $61\frac{1}{3}$ Jahren doppelt so alt war. Endlich überlebte der Vater den Sohn um 4 Jahre und wurde $65\frac{1}{3}$ Jahre alt.

Wer aber Diophantus von Alexandria war, darüber sagt uns auch das kleine niedlich erfundene Rätselgedicht nicht das mindeste. Es fällt in das Gebiet der durchaus ungestützten Vermutungen, wenn man hat behaupten wollen, Diophant von Alexandria habe in dieser Stadt nur seinen Wohnsitz gehabt und sei selbst gar nicht Grieche gewesen, so wenig wie seine Wissenschaft griechischen Ursprunges sei. Die Möglichkeit dieser Annahme ist nicht ausgeschlossen; man kann ihr beipflichten ohne in bestimmter Weise Widerlegung zu finden; aber sie ist nicht notwendig. Erinnern wir uns der algebraischen Begriffe, welche wachsend und an Gewicht zunehmend bei Euklid, bei Archimed, bei Heron, bei den Neupythagoräern, bei Pappus uns begegneten, und wir haben nicht nötig die Brücke abzubrechen, welche auf dem Boden

---

[1]) So die Deutung, welche Heinrich Weber uns brieflich vorschlug, und welche vor der früheren, nach welcher der Sohn halb so alt geworden sein sollte als der Vater im ganzen war, wodurch man Diophants Alter auf 84 Jahre ausrechnete, den Vorzug besitzt, daß die auftretenden Zahlen den gemeldeten Ereignissen besser entsprechen, als wenn z. B. 14 Jahre auf die Kindheit fallen, mit 26 Jahren erst der Bart sproßt usw.

Alexandrias, den jedenfalls Euklid, Heron und Pappus bewohnten, in fast unmerklicher Steigung, wenn man die Weite der Jahreskluft erwägt, von den Hauaufgaben des Ahmes zu den Gleichungen des Diophantus hinaufführt. Uns ist Diophant mit seinem in Griechenland mehrfach vorkommenden Namen wirklicher Grieche, Schüler griechischer Wissenschaft, wenn auch ein solcher, der weit über seine Zeitgenossen hervorragt, Grieche in dem, was er leistet, wie in dem, was er zu leisten nicht vermag. Eines wollen wir dabei keineswegs ausgeschlossen haben, was wir übrigens zu Anfang dieses Kapitels anzudeuten schon Gelegenheit nahmen: daß nämlich die griechische Wissenschaft, wie sie von Alexandria aus nach Westen und nach Osten erobernd vordrang, wovon folgende Abschnitte unseres Bandes Zeugnis ablegen, von den gleichen Eroberungszügen auch neuen Wert an Ideen mit nach Hause brachte, daß die griechische Mathematik als solche nie aufgehört hat sich anzueignen, was sie da oder dort Aneignenswertes fand.

Diophant hat ein Werk unter dem Namen Arithmetisches[1], ἀριθμητικά, verfaßt, über dessen Einteilung er sich in der Vorrede folgendermaßen äußert: „Da aber bei der großen Masse der Zahlen der Anfänger nur langsam fortschreitet, und überdies das Erlernte leicht vergißt, so habe ich es für zweckmäßig gehalten, diejenigen Aufgaben, welche sich zu einer näheren Entwicklung eignen und vorzüglich die ersten Elementaraufgaben gehörig zu erklären und dabei von den einfachsten zu den verwickelteren fortzuschreiten. Denn so wird es dem Anfänger faßlich werden, und das Verfahren wird sich in seinem Gedächtnisse einprägen, da die ganze Behandlung der Aufgaben 13 Bücher umfaßt“[2].

Dreizehn Bücher waren es also, und nur von einem Werke des Diophant ist bei zwei arabischen Schriftstellern, die seiner erwähnen, die Rede[3]). Dem gegenüber enthalten die griechischen Handschriften, welche sich erhalten haben[4]), nur sechs Bücher (eine einzige enthält den gleichen Text in sieben Bücher abgeteilt), enthalten sie eine besondere Schrift des Diophant über Polygonalzahlen, verweisen

[1]) Die beste ältere Textausgabe ist die von Bachet de Méziriac von 1621. Dagegen ist ihr Wiederabdruck mit den Anmerkungen von Fermat, Toulouse 1670, vielfach durch Druckfehler entstellt. Eine neue kritische Textausgabe hat P. Tannery besorgt, Leipzig 1893. Eine deutsche Übersetzung von O. Schulz erschien Berlin 1822, eine abermalige von G. Wertheim, Leipzig 1890. Wir zitieren nach den Ausgaben von Tannery und Wertheim. [2]) Diophant (Tannery) pag. 14, (Wertheim) S. 8. [3]) Nesselmann, Algebra der Griechen S. 274, Note 37. [4]) Die Handschriften sind einzeln aufgezählt bei Nesselmann S. 256, Note 23.

sie an einzelnen Stellen auf eine Schrift des Diophant, welche den Namen der Porismen geführt habe. Außerdem berichtet ein unbekannter griechischer Scholiast[1]) in einer in Florenz befindlichen Handschrift von einer Schrift Moriastica, d. h. Teilungsgrößen des Diophant. Ob darunter eine Bruchrechnung verstanden sein soll, oder was sonst damit gemeint ist, ist nicht zu ermitteln.

Man hat aus der stylistischen Verschiedenheit zwischen der wesentlich synthetischen Abhandlung über die Polygonalzahlen und den wesentlich analytischen arithmetischen Büchern geschlossen, es müssen hier zwei getrennte Werke vorliegen; man hat vermutlich daraus, daß in den arithmetischen Büchern die Porismen ausdrücklich genannt werden, gefolgert, auch sie müßten eine besondere Schrift gebildet haben. Man hat von anderer Seite weniger auf die Ungleichartigkeit der Form, als auf den stets arithmetischen Inhalt Gewicht gelegt, und vermutet, es seien die Polygonalzahlen wie die Porismen ursprünglich Bestandteile der 13 Bücher des Diophant gewesen[2]). Wir neigen uns der ersten Meinung zu, deren wirkliche Gründe nicht vornehm beseitigt oder unberücksichtigt gelassen werden können. Glücklicherweise stimmen die Vertreter beider sich schroff ausschließenden Ansichten in einer Meinung überein, der wir uns gleichfalls durchaus anschließen, und welche weitaus Wichtigeres betrifft als die Frage der Zusammengehörigkeit oder Nichtzusammengehörigkeit der genannten Stücke. Man hält nämlich allgemein dafür[3]): 1. daß uns von Diophant viel weniger fehlt, als man gewöhnlich glaubt, wenn man sich an das Zahlenverhältnis von 6 : 13 hält; 2. daß der Defekt nicht am Ende, sondern in der Mitte des Werkes, und zwar hauptsächlich zwischen dem I. und II. Buche zu suchen ist; endlich 3. daß diese Verstümmelung des Werkes ziemlich frühe, gewiß aber vor dem XIII. oder XIV. S. und bereits in Griechenland stattgefunden hat.

Der dritte Satz ist dadurch zur Gewißheit erhoben, daß die älteste der vorhandenen Handschriften, ein Madrider Kodex vom XIII. S., den gleichen Text wie die übrigen besitzt, daß ein Kommentar zu den beiden ersten Büchern, welcher etwa um 1300 entstand, ebenfalls für diese zwei Bücher wenigstens den heutigen Wortlaut bestätigt, daß ein deutscher Astronom, der berühmte Regiomontanus, in einem Briefe an seinen Fachgenossen Bianchini in Ferrara vom Monate Februar 1464 erzählt, er habe in Venedig einen griechischen Arith-

[1]) Jamblichus *in Nicomachum* (ed. Pistelli) pag. 127 lin. 11—13. [2]) Vertreter der ersten Meinung sind Reimer und Hankel, der zweiten Colebrooke und Nesselmann. [3]) Nesselmann l. c. S. 265 hat die drei Thesen am deutlichsten und zwar in dem Wortlaute ausgesprochen, den wir uns hier aneignen.

metiker Diophant entdeckt, der aber leider nur aus sechs Büchern bestehe, während deren 13 in der Einleitung versprochen seien[1]). Die beiden anderen Sätze folgen allerdings nicht mit der gleichen objektiven Gewißheit, sondern mehr für die Überzeugung dessen, der sich genau mit dem Studium der vorhandenen Teile beschäftigt hat, aus diesen selbst. Man gewinnt das Gefühl, Diophant sei über das, was in den erhaltenen sechs Büchern steht, nicht hinausgekommen, es seien nur gewisse der Zahl nach beschränkte Kunstgriffe gewesen, über welche er verfügte, und mittels deren nicht viel mehr zu leisten war, als wir tatsächlich geleistet sehen. Man kommt so zu der Wahrscheinlichkeit, um nicht zu sagen zu der Gewißheit, daß am Schlusse unmöglich so viel fehlen kann, daß man von einer Erhaltung nur der sechs oder sieben ersten Bücher zu reden berechtigt wäre. Dazu kommt die vorher angegebene Verschiedenheit, daß eine Handschrift in sieben Bücher teilt, was den anderen zufolge sechs Bücher waren. Dazu kommt der gelungene Nachweis, daß innerhalb der ersten drei Bücher Verschiebungen stattgefunden haben müssen, daß insbesondere eine Ablösung der beiden letzten Aufgaben des II. Buches von dem Vorhergehenden ebenso wie eine Vereinigung derselben mit den ersten Aufgaben des III. Buches durch den Sinn als notwendig erzwungen ist. Dazu kommt endlich eine unbedingt vorhandene Lücke, über deren Ausfüllung ein Zweifel nicht bestehen kann. In der Einleitung ist nämlich, wie wir noch sehen werden, die Auflösung der gemischten quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten zugesagt. In den späteren Büchern ist dieselbe als bekannt vorausgesetzt. Gelehrt muß sie also worden sein, aber die Vorschrift dazu fehlt. Diese bildete jedenfalls einen Teil und einen nicht unbeträchtlichen Teil des Verlorenen, da wir annehmen dürfen und müssen, die Lösung der gemischten quadratischen Aufgaben sei in drei Sonderfällen vorgetragen worden, deren jeder an zahlreichen Beispielen erläutert vielleicht ein ganzes Buch füllen mochte. Der Platz für diese Lösungen war am naturgemäßesten zwischen dem I. und II. Buche, also dort, wo die große Lücke angenommen zu werden pflegt.

Die Aufgaben, welche Diophant behandelt hat, sind von zwei

[1]) Ch. Th. v. Murr, *Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et universitatis Altdorfinae* I, 135 (Nürnberg 1786) ist der Wortlaut des Briefes abgedruckt, die einzelne auf Diophant bezügliche Stelle schon bei Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern S. 5, Anmerkung *y* (Nürnberg 1730). Die letzte Ausgabe von Regiomontans Briefen gab Curtze in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XII; die betreffende Briefstelle s. S. 256—257.

wesentlich verschiedenen Gattungen. Es sind algebraisch bestimmte und algebraisch unbestimmte Gleichungen, mit denen er sich beschäftigte. Auf dem einen Gebiete besteht seine große Bedeutung darin, daß er Bekanntes in neuer Form vortragend ein organisches Ganzes schuf, wo früher, mindestens bei den Schriftstellern, die wir besitzen, nur zersplitterte Teile vorlagen. Auf dem anderen Gebiete stellt er uns den Pfadfinder vor, der abgesehen von einzelnen Vorgängern, die nur die Vorhalle des Gebäudes betraten, zuerst unter den Griechen, soviel wir wissen, durch das Labyrinth der verwickeltsten Zahlenbedingungen und Beziehungen sich hindurchzuwinden weiß, sei es, daß er dabei nur dem eigenen Genius vertraute, sei es, daß ihm hier wirklich aus der Fremde der Faden der Ariadne gereicht war, der ihn vor Irrgängen sicherte.

Wir reden zuerst von Diophants Leistungen in der bestimmten Algebra. Diophant selbst lehrt uns die Reihenfolge einhalten, da er in der schon erwähnten Vorrede gerade über die bestimmten Aufgaben sich ausläßt und die unbestimmten Aufgaben kaum andeutet. Diophant beginnt mit den Worten: „Ich sehe, mein teuerster Dionysius, mit welchem Eifer Du die Auflösung arithmetischer Aufgaben zu erlernen wünschest; ich habe daher versucht, das Verfahren wissenschaftlich darzustellen, indem ich mit der eigentlichen Grundlage desselben anfange, nämlich mit einer Entwicklung der eigentümlichen Natur und Beschaffenheit der Zahlen. Die Sache scheint vielleicht etwas schwierig, da sie noch gar nicht bekannt ist, und Anfänger haben immer wenig Hoffnung eines glücklichen Fortganges; aber Dein Eifer und meine Darstellung wird Dir alles recht faßlich machen, denn man lernt schnell, wenn Eifer und Unterweisung zusammenkommt“[1]).

Die Worte „da sie noch gar nicht bekannt ist“, *ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι*, wurden mitunter so verstanden, als behaupte Diophant damit, er trage ganz Neues, in Griechenland nicht Bekanntes vor. Die neueren Bearbeiter sind übereinstimmend der Meinung, der Sinn sei gerade umgekehrt der, daß Diophant die Unbekanntschaft des Dionysius allein mit den Auflösungen der arithmetischen Aufgaben betone. Ihm zuliebe will er das Verfahren wissenschaftlich darstellen von den Anfängen zu dem Gipfel aufsteigend.

Die Richtigkeit dieser Auffassung wird durch die weitere Einleitung bestätigt, in welcher algebraische Begriffe der Reihe nach entwickelt sind, welche uns einzeln genommen schon hier und dort

[1]) Diophant (Tannery) pag. 2, (Wertheim) S. 1.

bei griechischen Schriftstellern begegnet sind, und welche auch wohl in ihrer Fortbildung zu Diophants Zeiten schon wesentliche Fortschritte gemacht haben müssen, sonst wäre die Kürze der Darstellung bei ihrer Einführung unbegreiflich. Quadratzahlen und Kubikzahlen z. B. mit ihren griechischen Namen *δύναμις* und *κύβος* sind uns längst bekannt. Diophant geht darüber hinaus und nennt Quadratoquadrat (*δυναμοδύναμις*), Quadratokubus (*δυναμόκυβος*), Kubokubus (*κυβόκυβος*) das was durch stets wiederholte Vervielfachung mit der Grundzahl entsteht. Eigentlich versteht er unter diesen Namen auch das nicht, was wir ihm folgend ausgesprochen haben. Nicht die zweite bis zur sechsten Potenz irgend einer Zahl, sondern nur diese Potenzen der unbekannten Zahl, um deren Auffindung es sich in der betreffenden Aufgabe handelt, hat Diophant im Sinne. Für sie gelten die abgekürzten Bezeichnungen, welche er weiter erörtert, und welche aus den Anfangsbuchstaben *δ* und *κ* bestehen, denen noch rechts oben ein *υ*, der zweite Buchstabe sowohl von *δύναμις* als von *κύβος*, angehängt wird. Was also die moderne Algebra durch x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 bezeichnet, schreibt Diophant:

$$\delta^{\upsilon},\ \kappa^{\upsilon},\ \delta\delta^{\upsilon},\ \delta\kappa^{\upsilon},\ \kappa\kappa^{\upsilon}$$

gewissermaßen unter Ersetzung der Potenzen durch ihre Exponenten und dem entsprechend unter Addition der Exponenten, wo es sich um die Multiplikation der Potenzen handelt. Die gesuchte Zahl selbst, welche eine unbekannte Menge von Einheiten enthält, heißt schlechtweg die Zahl, *ἀριθμός*. Diophant bedient sich für sie des Zeichens ς[1]), welches man früher für ein finales Sigma hielt; es ist aber wahrscheinlicher gemacht worden[2]), daß man es mit einem auch sonst vorkommenden sogenannten Kompendium für *αρ*, als Anfangsbuchstaben von *ἀριθμός* zu tun hat. Dabei ist zu bemerken, daß die unbekannte Einheitsmenge in Diophants Definition *πλῆθος μονάδων ἀόριστον* heißt, also unter Anwendung des Wortes des Thymaridas[3]) (S. 158). Endlich gibt es noch ein ständiges Zeichen für bestimmte Zahlen, welche Einheit *μόνας* heißen und μ^{o} geschrieben werden.

Diophant begnügt sich nicht mit den bisher genannten Zahlenarten. Er bedarf zu seinen Aufgaben auch noch der Brüche, welche jene Benennungen im Nenner führen, algebraische Stammbrüche, wie man sie insgesamt nennen möchte, um nicht von Potenzen mit negativen Exponenten reden zu müssen. Diophant nennt den Stammbruch der Zahl *ἀριθμοστόν*, den der zweiten Potenz *δυναμοστόν* und so fort bis zu dem Stammbruche der sechsten Potenz *κυβοκυβοστόν*. Man

[1]) Diophant (Tannery) pag. 6 lin. 5. [2]) Heath l. c. pag. 57—67. [3]) Nesselmann l. c. S. 291, Anmerkung 54 hat die Stellen gesammelt.

hat diese Wörter ganz zweckmäßig mit einfachem Bruche, quadratischem Bruche, endlich kubokubischem Bruche übersetzt[1]). Diophant lehrt hierauf die Multiplikation solcher Potenzen und algebraischer Stammbrüche unter sich in den vielfachsten Veränderungen. Natürlich gibt er dafür lauter einzelne Regeln, z. B. ein quadratoquadratischer Bruch multipliziert mit der Kubokubikzahl gibt das Quadrat. Wir würden schreiben $\frac{1}{x^4} \cdot x^6 = x^2$. Nur der Fall wird allgemein vorausgeschickt, daß eine dieser Potenzgrößen mit dem gleichnamigen Stammbruche vervielfacht die bestimmte Zahl als Produkt liefere, d. h. $x^n \cdot \frac{1}{x^n} = 1$, und daß, da bestimmte Zahlen bei allen Rechnungen wieder bestimmte Zahlen geben, das Produkt einer bestimmten Zahl und eines allgemeinen Ausdruckes wieder ein Ausdruck derselben Art sein werde.

Diophant unterscheidet hinzuzufügende und abzügliche Zahlen. Die Addition nennt er *ὕπαρξις*, die Subtraktion *λεῖψις* und besitzt für erstere zwar nicht, wohl aber für letztere ein eigenes Abkürzungszeichen, nämlich, wie er selbst sagt, ein verstümmeltes umgekehrtes *ψ* in der Gestalt ⋔. In den Handschriften sieht das Zeichen meistens so aus: Λ|, und ist dahin gedeutet worden[2]), es sei ein aus Λ und I gebildetes Kompendium für den Anfang des Wortes *λεῖψις*. Diophant rechnet dann mit Differenzen, vervielfacht sie und spricht dabei ohne weiteres die Regel aus: Eine abzügliche Zahl mit einer abzüglichen vervielfacht gibt eine hinzuzufügende, eine abzügliche mal einer hinzuzufügenden gibt eine abzügliche[3]). Daß dabei von positiven und negativen Zahlen als Maße entgegengesetzter Größen keine Rede ist, bedarf wohl kaum besonderer Erwähnung. Nur mit Differenzen weiß Diophant umzugehen, mit solchen Differenzen, die einen wirklichen Zahlenwert besitzen, d. h. deren Subtrahend kleiner ist als der Minuend. Mit solchen aber rechnet er in vollster Gewandtheit und schlägt seinem Dionysius vor sich die gleiche Gewandtheit zu erwerben: „Es ist aber sehr zweckmäßig, ehe man sich an die Auflösung von Aufgaben macht, sich in der Addition, Subtraktion und Multiplikation dieser Ausdrücke zu üben; besonders wie man eine Reihe hinzuzufügender und abzüglicher Ausdrücke mit ungleichen Zahlenfaktoren zu anderen allgemeinen Ausdrücken addiert, die entweder bloß hinzuzufügende sind oder aus hinzuzufügenden und abzüglichen Gliedern bestehen; ferner wie man von einer Reihe hinzuzufügender und abzüglicher Zahlen andere subtrahiert, die entweder

[1]) Diophant (Tannery) pag. 6, (Wertheim) S. 3. [2]) Heath l. c. pag. 71 bis 73. [3]) *λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν.*

bloß hinzuzufügende sind, oder auch aus hinzuzufügenden und abzüglichen Gliedern bestehen"[1]). Die Subtraktion der größeren Zahl von der kleineren ist aber für Diophant unmöglich, gibt ihm keine Zahl, kann daher als Auflösung irgend einer Aufgabe nicht vorkommen. Dem entspricht die Tatsache, daß negative Gleichungswurzeln bei Diophant nirgends erscheinen, wenn auch die hier erörterte Begründung nicht ausgesprochen ist.

Abgesehen von dem Nichtvorhandensein negativer Zahlen als solcher ist es aber eine hoch entwickelte Buchstabenrechnung, welcher wir uns bei Diophant gegenüber befinden. Es fehlt ihr nicht einmal ein Gleichheitszeichen, indem der Buchstabe ι als Abkürzung des Wortes ἴσοι (gleich) benutzt wird. Das hat sich aus erneuter Vergleichung der Pariser Handschrift, nach welcher Bachet de Méziriac 1621 einen Abdruck ausführen ließ, ergeben[2]). Nur in einer allerdings nicht unbedeutenden Verschiedenheit kann man einen gewissen Gegensatz der diophantischen Schreibweise gegen diejenige, welche seit dem XVI. S. sich allmählich einbürgerte, erkennen. Die moderne Buchstabenrechnung hat es durchgehend mit Symbolen zu tun, welche sich selbst zur Aussprache einer Wahrheit genügen. Diophant rechnet und schreibt mit Abkürzungen, welche mit ausgeschriebenen Wörtern abwechseln und gleich diesen grammatischer Beugung unterworfen sind, wie sie auch unbedenklich durch Partikeln und dergleichen voneinander getrennt werden. Man vergleiche z. B. $10x + 30 = 11x + 15$ mit dem diophantischen ςς^οἰ ἄρα ῑ μ° λ̄ ἴσοι εἰσὶν ςς^οῖς ῑᾱ μονάσι ῑε̄ und man wird sich des Gegensatzes sofort bewußt werden[3]).

Wie Gleichungen aufgelöst werden, ist in Diophants Einleitung überaus klar und bestimmt gelehrt: „Wenn man nun bei einer Aufgabe auf eine Gleichung kommt, die zwar aus den nämlichen allgemeinen Ausdrücken besteht, jedoch so daß die Koeffizienten an beiden Seiten ungleich sind, so muß man Gleichartiges von Gleichartigem abziehen, bis ein Glied einem Gliede gleich wird[4]). Wenn aber auf einer oder auf beiden Seiten abzügliche Größen vorkommen, so muß man diese abzüglichen Größen auf beiden Seiten hinzufügen, bis auf beiden Seiten nur Hinzuzufügendes entsteht. Dann muß man wiederum Gleichartiges von Gleichartigem abziehen, bis auf jeder Seite nur ein Glied übrig bleibt."

Die Zurückbringung einer Gleichung durch Additionen und Subtraktionen auf die Form $ax^m = bx^n$, wo m und n ganze voneinander verschiedene Zahlen bedeuten, deren eine auch Null sein kann, ist damit in eine Regel gebracht, so unzweideutig, wie wir nur selten im Altertum Regeln ausgesprochen finden. Bemerkenswert ist das Wort εἶδος für Glied, welches später in lateinischer Übersetzung durch *species* wiedergegeben den Ursprung des Namens *arithmetica speciosa* für Buchstabenrechnung gebildet hat.

[1]) Diophant (Tannery) pag. 14, (Wertheim) S. 7. [2]) Vgl. Rodet im *Journal Asiatique*, 7ième série, T. XI (Janvier 1878) pag. 42. [3]) Vgl. Nesselmann l. c. S. 300—301. [4]) ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται.

„In der Folge", sagt Diophant noch weiter, „will ich Dir zeigen, wie man die Aufgabe löset, wenn zuletzt ein zweigliedriger Ausdruck einem eingliedrigen gleich wird."

Damit beabsichtigte Diophant aber sicherlich nicht in gleicher Allgemeinheit wie bei dem vorigen Falle die Auflösung der Gleichung $ax^m + bx^n = cx^p$ zu versprechen, sondern es kann sich nur um die gemischten quadratischen Gleichungen handeln. Allerdings treten dabei drei Möglichkeiten auf, indem nach Ausführung der vorbereitenden Operationen, die im obigen mitgeteilt wurden, entweder $ax^2 + bx = c$ oder $bx + c = ax^2$ oder $ax^2 + c = bx$ als Gleichheit eines zweigliedrigen Ausdruckes mit einem eingliedrigen erhalten wird, a, b, c selbstverständlich als positiv gedacht. Das ist die früher erwähnte Zusage der Auflösung gemischtquadratischer Gleichungen, welche im vorhandenen Texte nirgend erfüllt vielfach als erfüllt vorausgesetzt wird, und daher den Beweis des Verlustes jener Auflösung liefert.

Über den von Diophant bei der Auflösung einer gemischten quadratischen Gleichung eingeschlagenen Weg gibt die 24. Aufgabe des VI. Buches[1]) wohl die deutlichste Auskunft. Die dort erhaltene Gleichung heißt in modernen Zeichen geschrieben

$$\frac{1}{x^2} + 196x^2 - 336x - \frac{24}{x} + 172 = 196x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Diophant sagt nun wörtlich wie folgt, wobei nur wieder moderne Zeichen statt der griechischen Abkürzungen gebraucht sind: „Man addiere auf beiden Seiten die abzüglichen Größen, ziehe Gleichartiges von Gleichartigem ab und vervielfache alles mit x, so erhält man $336x^2 + 24 = 172x$. Diese Gleichung aber läßt sich nicht auflösen, wenn nicht das Quadrat des halben Koeffizienten von x, nachdem man das Produkt der 24 Einheiten in den Koeffizienten von x^2 davon abgezogen hat, ein Quadrat wird."

Was uns zuerst auffallend erscheinen mag, ist die Abhängigkeit der Auflösbarkeit der Gleichung von einer Bedingung, welche nicht etwa besagt, es müsse die unter dem Quadratwurzelzeichen erscheinende Zahl ein Hinzuzufügendes sein, was gleich bei dieser Aufgabe, in welcher $x = \frac{86 + \sqrt{-668}}{336}$ ist, nicht eintreffen würde, sondern welche,

[1]) Diophant (Tannery) pag. 444, (Wertheim) S. 288—290.

wie einige Überlegung uns zeigt, darauf hinausläuft, daß die Wurzel der Gleichung rational werde. Ersetzen wir nämlich die bestimmten Zahlen durch allgemeine Buchstaben, so ist in der angeführten Aufgabe von der dritten Gleichungsform $ax^2 + c = bx$ die Rede und als Kennzeichen der Auflösbarkeit ausgesprochen, es müsse $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ ein Quadrat sein. Wird aber die Gleichung mit dem Koeffizienten a von x^2 vervielfacht und durch beiderseitige Subtraktion von $abx + ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ in die Form $a^2x^2 - abx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ oder $\left(ax - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ übergeführt, so entsteht

$$ax - \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$$

und Diophant knüpft, wie wir vorhin sagten, die Auflösbarkeit der Gleichung an die Rationalität der Quadratwurzel. Jene andere Bedingung, deren wir gewärtig sein durften, daß nur Hinzuzufügendes unter dem Wurzelzeichen nach vollzogener Zusammenziehung der dort auftretenden Werte stehen dürfe — abzügliche Zahlen als solche sind, wie wir oben sahen, bei Diophant überhaupt nicht gestattet, also auch nicht unter einem Wurzelzeichen — steckt wohl in der diophantischen Bedingung enthalten, aber letztere geht noch bedeutend weiter und schränkt die Anzahl der auflösbaren Gleichungen beträchtlich mehr ein. Woher diese Beschränkung stammt, ist, wenn man weiter nachdenkt, unschwer zu erkennen. Die eigentliche Algebra sieht ab von der geometrischen Bedeutung der vorkommenden Glieder. Sie vereinigt z. B. wie in jener heronischen Aufgabe (S. 404) Flächen und Längen, beide nur als Maßzahlen aufgefaßt, in eine Summe. Dieser allgemeinere Standpunkt gestattet geometrisch undenkbare Fragestellungen, schließt aber zugleich nur geometrisch denkbare Antworten aus. Jede Quadratwurzel aus positiven Werten läßt mit Zirkel und Lineal sich geometrisch herstellen, so gut wie die Diagonale des Quadrates eine geometrisch genau bestimmte Länge besitzt, aber in Zahlen ist eine Quadratwurzel nur möglich, wenn sie rational ist. Man halte uns nicht die heronische Aufgabe entgegen, auf welche wir eben uns bezogen haben, nicht die geodätischen Beispiele Herons, in welchen Näherungswerte von Quadratwurzeln vielfach benutzt sind, nicht Archimeds Rechnungen in seiner Kreismessung. Heron blieb Feldmesser, auch wo er der algebraischen Anschauung sich nähert, und die Feldmeßwissenschaft begnügt sich mit dem Maße geometrischer Gebilde, so genau es in Zahlen hergestellt werden kann, während die Gebilde selbst geometrische Größen sind und bleiben. Archimed aber, gleichfalls von geodätischen Zwecken ausgehend, blieb noch

strenger den Gesetzen geometrischer Behandlung auch bei seinen Zahlengrößen getreu: er bediente sich niemals angenäherter Gleichungen, sondern sprach Ungleichungen aus, welche er nur immer näher aneinander brachte. Die griechische Algebra, welche für Diophant einen Teil der Arithmetik bildet, kennt dagegen nur Zahlen als solche, Zahlen, die ausgesprochen werden können. Wir haben schon früher (S. 187) hervorgehoben, daß die Beschränkung sogar auf positive ganze Zahlen der griechischen Arithmetik lange eigentümlich war. Nikomachus, Theon von Smyrna, Jamblichus haben uns keine Veranlassung gegeben, diese Ansicht zu widerrufen. Brüche kommen bei ihnen nur in der Gestalt von Verhältnissen ganzer Zahlen vor. Auch die Seiten- und Diametralzahlen bei Theon (S. 436) waren wesentlich ganze Zahlen, deren Verhältnis nur nach unserem Dafürhalten statt des Verhältnisses $1 : \sqrt{2}$ näherungsweise eintreten konnte. Diophant hielt sich an die Ganzzahligkeit nicht mehr gebunden, und das ist ein zwar allmählich vorbereiteter, aber darum nicht minder wichtiger Fortschritt. Dagegen ist ihm das Irrationale immer noch keine Zahl.

Kehren wir mit diesem Bewußtsein zu dem diophantischen Verfahren bei der Auflösung gemischter quadratischer Gleichungen zurück, so ist uns höchst bemerkenswert die Art, in welcher er die Auflösung vorbereitet. Genau so, wie wir es bei Heron kennen gelernt haben, vervielfacht er die Gleichung mit dem Koeffizienten des Quadrates der Unbekannten, statt durch diesen Koeffizienten zu dividieren. Darauf wies uns die bereits besprochene 24. Aufgabe des VI. Buches. Eine Bestätigung besitzen wir in der 45. Aufgabe des IV. Buches[1]): „Man findet, daß $2x^2$ größer als $6x + 18$ sein muß. Um nun hier eine Vergleichung anzustellen, so erhebe ich den halben Koeffizienten von x ins Quadrat und erhalte 9. Nun multiplizieren wir den Koeffizienten von x^2 mit der bestimmten Zahl 18, gibt 36. Dazu addieren wir 9, gibt 45, und davon ist die Wurzel nicht kleiner als 7. Dazu addieren wir den halben Koeffizienten von x und dividieren durch den Koeffizienten von x^2, so finden wir, daß x nicht kleiner sein darf als 5."

Hier ist freilich eine Ungleichung, keine Gleichung zu behandeln, allein das verändert das anzuwendende Verfahren nur so weit, als hier eine Grenze der betreffenden irrationalen Quadratwurzel eingesetzt werden darf, weil unter Annahme der richtigen Zahl statt 18, die Ungleichung $2x^2 > 6x + 18$ in die Gleichung $2x^2 = 6x + 18 + k$ d. h. in eine Gleichung der zweiten Form übergehen würde, bei

[1]) Diophant (Tannery) pag 304, (Wertheim) S. 187.

welcher z. B. durch $k = 2$ die Irrationalität verschwände. Diophant geht nun folgendermaßen zu Werke. Aus $ax^2 = bx + c + k$ erhält er $\left(ax - \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ak$, daraus $x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ak} + \frac{b}{2}}{a}$ oder endlich $x > \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}}{a}$.

Noch eine andere Eigentümlichkeit, welche freilich bei der eben betrachteten Ungleichung nicht zu Tage treten kann, weil negative Zahlen als solche für Diophant nicht existieren, besteht darin, daß nirgends zwei Auflösungen einer quadratischen Gleichung vorkommen, indem die Wurzelgröße sowohl hinzufügend als abzüglich mit einer anderen Zahl höheren Wertes verbunden ist. Man hat allerdings die Bemerkung gemacht, unter den Beispielen, welche bei Diophant sich vorfinden, sei kein solches, bei welchem eine zweifache Möglichkeit positiver Wurzeln auftrete, weil immer noch gewisse zahlentheoretische Nebenbedingungen zu erfüllen seien, welche sich der Annahme der Wurzel mit negativer Quadratwurzel widersetzen, es sei also ein Zufall, der diese Lücke schuf, und man sei nicht berechtigt anzunehmen, Diophant habe wirklich nicht gewußt, daß es Aufgaben mit zwei voneinander verschiedenen Auflösungen gebe[1]. Es scheint indessen doch, daß man die Behauptung des Nichtwissens rechtfertigen kann. Kommt auch außer der (S. 473) erwähnten nicht auflösbaren Gleichung $336x^2 + 24 = 172x$ keine andere von der Gestalt $ax^2 + c = bx$ bei Diophant, so weit er uns erhalten ist, vor, so trifft man doch bei ihm auf Ungleichungen von der Gestalt $ax^2 + c < bx$ und $ax^2 + c > bx$, welche je zwei positive Grenzwerte für x liefern, mag man eine in ihnen auftretende Quadratwurzel positiv oder negativ wählen. Im V. Buche begegnen wir den doppelten Ungleichungen[2] $\frac{17}{12} < \frac{6x}{x^2+1} < \frac{19}{12}$ und $11 < \frac{x^2+60}{2x} < 12$. Diophant folgert aus ihnen $\frac{66}{19} < x < \frac{67}{17}$, beziehungsweise $19 < x < 21$. Werte, welche der Möglichkeit der negativen neben der positiven Quadratwurzel Rechnung trügen, wären $\frac{36 \pm \sqrt{935}}{19} < x < \frac{36 \pm \sqrt{1007}}{17}$, beziehungsweise $11 \pm \sqrt{61} < x < 12 \pm \sqrt{84}$. Man erkennt an beiden Beispielen die Wahrheit der Tatsache, daß Diophant die Lösungen mit negativer Quadratwurzel nicht berücksichtigte, auch wo sie be-

[1]) So L. Rodet im *Journal Asiatique*, 7ième série, T. XI (Janvier 1878) pag. 89—90. [2]) Diophant (Tannery) pag. 340 und 388, (Wertheim) S. 211 und 251.

rücksichtigungsfähig waren, daß er sie also wahrscheinlich nicht kannte[1]).

In diesem Zusammenhange müssen wir auch von solchen quadratischen Gleichungen reden, welche gewöhnlich mit Hilfe zweier Unbekannten gelöst bei Diophant nur das Aufsuchen einer einzigen freilich mit besonderem Geschick ausgesuchten Größe verlangen. Wenn Diophant in der 30. Aufgabe des I. Buches[2]) zwei Zahlen aus ihrer Summe und ihrem Produkte finden will, so nimmt er die halbe Differenz der beiden Zahlen zur Unbekannten und erhält beide Zahlen je nachdem er die Unbekannte zur halben Summe addiert oder von ihr abzieht; das gegebene Produkt ist daher gleich dem Quadrat der halben Summe verringert um das Quadrat der Unbekannten, die somit durch einfache Quadratwurzelausziehung sich ergibt. Derselben Unbekannten bedient er sich in der 31. Aufgabe[3]), wenn zwei Zahlen aus ihrer Summe und aus der Summe ihrer Quadrate gefunden werden sollen. Wieder erhält er beide Zahlen, je nachdem er die Unbekannte zur halben Summe addiert, oder von ihr abzieht, und die Summe der Quadrate wird gleich dem Doppelten des Quadrates der halben Summe und des Quadrates der Unbekannten, die wieder durch einfache Quadratwurzelausziehung sich ergibt. Nicht anders werden in der 32. Aufgabe[4]) zwei Zahlen aus ihrer Summe und dem Unterschiede ihrer Quadrate gewonnen, welche letztere sich als doppeltes Produkt der Unbekannten in die gegebene Summe erweist, so daß einfache Division hinreicht die Unbekannte zu finden. Sind in der 33. Aufgabe[5]) Differenz und Produkt zweier Zahlen gegeben, so wird die halbe Summe als Unbekannte gewählt, welche die beiden Zahlen in der Gestalt erscheinen läßt, daß die halbe Differenz zur Unbekannten addiert, beziehungsweise von ihr subtrahiert wird. Das gegebene Produkt ist also das Quadrat der Unbekannten vermindert um das Quadrat der halben Differenz, und die Unbekannte wird wiederholt durch eine Quadratwurzelausziehung gefunden. Ähnlich verfährt Diophant noch in anderen Fällen, die wir nicht alle einzeln vorführen dürfen, um uns nicht zu lange bei dem Gegenstande zu verweilen.

Eine kubische Gleichung kommt in der 19. Aufgabe des VI. Buches[6]) vor, aus welcher aber keinerlei gesicherte Schlußfolgerung sich ziehen

[1]) Auf diese Ungleichungen und die aus ihnen zu ziehende Folgerung hat uns Herr C. Büchel brieflich aufmerksam gemacht. [2]) Diophant (Tannery) pag. 60—62, (Wertheim) S. 36. [3]) Ebenda (Tannery) pag. 62—64, (Wertheim) S. 36—37. [4]) Ebenda (Tannery) pag. 64, (Wertheim) S. 37. [5]) Ebenda (Tannery) pag. 66, (Wertheim) S. 38. [6]) Ebenda (Tannery) pag. 434, (Wertheim) S. 282.

läßt. Es heißt bei Diophant nur: „Es ist $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3$, hieraus findet man $x = 4$“ ohne die leiseste Andeutung, wie „man“ diesen Wurzelwert finde. Ob man die Gleichung zunächst in die Form $x^3 + x = 4x^2 + 4$ brachte und dann daraus durch Division mit $x^2 + 1$ den Wert $x = 4$ erhielt?[1]) Es ist wohl möglich, vielleicht wahrscheinlich, denn an einer nur wenig späteren Stelle des VI. Buches[2]) heißt es von dem Ausdrucke $4x^2 + 6x + 2$, er sei zusammengesetzt (σύνθετος), und zwar aus $4x + 2$ und $x + 1$, und wenn man ihn durch $x + 1$ teile, so entstehe $4x + 2$. Diophant mußte also mit Zerlegungen in Faktoren vertraut sein und wissen, daß man mittels Division einer Gleichung durch einen ihren beiden Gleichungsseiten gemeinschaftlichen Faktor deren Grad erniedrigen kann[3]).

Bis hierhin haben wir mit Diophant in der ersten Bedeutung, die wir ihm beilegten, uns beschäftigt. Wir wenden uns zu dem Gebiete der unbestimmten Aufgaben, auf welchem wir Diophant als Bahnbrecher, als Pfadfinder zu erkennen haben. Er setzt sich dabei die gleichen Schranken, welche auch seiner bestimmten Algebra anhaften, keine anderen. Die Wurzelwerte, welche er den vorgelegten Gleichungen zu geben sich bemüht, dürfen keine abzüglichen, keine irrationalen sein, denn sonst wären es keine Zahlen, aber weiter gehen seine Anforderungen nicht. Insbesondere verlangt Diophant nicht ganzzahlige Auflösungen, und nur in einzelnen Fällen, wo etwa das Weglassen eines denjenigen Zahlen, die gemeinschaftlich die gestellte Aufgabe erfüllen, insgesamt anhaftenden Nenners den Übergang zu ganzzahligen Auflösungen allzunahe legt, gibt er solche an. In einer ganzen Anzahl von Aufgaben (II, 36. III, 13. IV, 23, 43, 45. V, 12) kommen sogar Brüche mit gemischtzahligen Zählern vor, wie die Ägypter sie einst benutzten (S. 71). Was also heute Diophantische Analytik genannt zu werden pflegt, was man als Diophantische Gleichungen dem Schulunterrichte einverleibt hat, das darf man bei Diophant nicht suchen. Diophant, sagen wir, löst unbestimmte Aufgaben in rationalen Zahlen, und daraus folgt, daß für ihn eine unbestimmte Aufgabe mit aufsuchungsbedürftigen Wurzeln nur dann vorhanden sein kann, wenn der Grad sich auf den zweiten erhebt, ja in nicht wenigen Fällen weiß er noch Aufgaben vom dritten und vierten Grade zu bewältigen.

Unsere Leser werden nun vielleicht nach den Methoden fragen, deren Diophant sich bei Auflösung dieser unbestimmten Aufgaben

[1]) So meint Schulz S. 589 in seinen Anmerkungen zu der betreffenden Aufgabe. [2]) Diophant (Tannery) pag. 438, (Wertheim) S. 285. [3]) Auf diese Verwandtschaft hat uns Herr C. Büchel brieflich hingewiesen.

bedient, sie werden diese Frage um so sicherer stellen, wenn sie wissen, daß der Geschichtsschreiber neuerer Zeit, der am eingehendsten mit Diophant sich beschäftigt hat, einem umfangreichen Kapitel geradezu die Überschrift „Diophants Auflösungsmethoden“ gegeben hat[1]). Aber neben dem Umfange jenes Kapitels selbst sind dessen erste Worte geeignet die durch die Überschrift geweckten Erwartungen zurückzudrängen: „Diophants Methoden in ihrer ganzen Mannigfaltigkeit vollständig darstellen hieße nichts anderes, als sein Buch abschreiben.“ Darin liegt das Zugeständnis, daß Diophant keine einheitliche Methode besaß, ja nicht einmal eine Anzahl von Methoden, deren jede für sich zur Bewältigung einer umgrenzten Gruppe von Aufgaben diente. „Diophant war“, wie ein anderer genauer Kenner seiner Werke sich sehr bezeichnend ausgedrückt hat[2]), „ein glänzender Virtuos in der von ihm erfundenen Kunst der unbestimmten Analytik, die Wissenschaft hat jedoch, wenigstens unmittelbar, diesem glänzenden Talente wenig Methoden zu verdanken, weil es ihm an dem spekulativen Sinne fehlte, der in dem Wahren mehr als das Richtige sieht.“ Seine Virtuosität zeigt er vornehmlich in der Wahl der unbekannten Größe. Was wir oben bei Gelegenheit bestimmter Aufgaben mit zwei Unbekannten, die er auf die Auffindung einer einzigen Unbekannten zurückzuführen wußte, rühmen durften, gilt auch für Diophants unbestimmte Aufgaben. Er greift die zu suchende Größe so geschickt heraus, daß verhältnismäßig geringe Mühe noch erforderlich ist, die Aufgabe vollends zu bewältigen, während andrerseits die Willkürlichkeit der Voraussetzungen, welche er sich gestattet, in keiner Weise zu rechtfertigen gesucht wird, eine Rechtfertigung auch nicht gestattet.

Wenn Diophant z. B. in der 7. Aufgabe des III. Buches[3]) drei Zahlen von der Beschaffenheit sucht, daß sowohl die Summe von allen dreien als die Summe von je zweien ein Quadrat sei, und die Gesamtsumme $x^2 + 2x + 1$ setzt, so kann dagegen keinerlei Einwand erhoben werden. Wer aber berechtigt ihn die Summe der ersten und zweiten Zahl als x^2 anzunehmen, so daß die dritte Zahl für sich $2x + 1$ wird? Wer berechtigt ihn vollends die Summe der zweiten und dritten Zahl als $x^2 - 2x + 1$ zu setzen, wie er es tut? Unter dieser Annahme wird allerdings eine Lösung gefunden. Die erste Zahl allein muß nämlich erhalten werden, wenn die Summe der zweiten und dritten von der Gesamtsumme, d. h. wenn $x^2 - 2x + 1$ von $x^2 + 2x + 1$ abgezogen wird, sie muß $4x$ sein, und die zweite

[1]) Nesselmann, Algebra der Griechen S. 355—436. [2]) Hankel S. 165. [3]) Diophant (Tannery) pag. 146—148, (Wertheim) S. 89.

Zahl allein ist die um die erste Zahl $4x$ verringerte Summe x^2 der ersten und zweiten Zahl oder $x^2 - 4x$. Es bleibt jetzt nur noch zu erfüllen, daß die Summe der ersten $4x$ und der dritten $2x + 1$, d. h. daß $6x + 1$ ein Quadrat werde, und dazu setzt Diophant $6x + 1 = 121$, mithin $x = 20$ und die drei Zahlen sind 80, 320, 41. Diophant verschweigt uns sogar, warum er $6x + 1 = 121$ setzt und nicht eine kleinere Quadratzahl ähnlicher Form wählt, wenn auch der Grund hiervon nachträglich zu erkennen ist. Die Annahme $6x + 1 = 25$ gibt nämlich die drei Zahlen 16, 0, 9, unter welchen die 0 vorkommt, die ihm keine Zahl ist; und die Annahme $6x + 1 = 49$ gibt die Zahlen 32, 32, 17, welche er wohl deshalb vermeidet, weil die beiden ersten unter sich gleich sind, also streng genommen keine drei Zahlen darbieten.

Man hat in der 17. Aufgabe des II. Buches und in der 9. Aufgabe des III. Buches wirkliche Methoden zu erkennen geglaubt, die auch bei anderen Aufgaben benutzt seien und auf den beiden Sätzen beruhen, daß $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ rationale Zahl werden könne, wenn C oder wenn A eine positive Quadratzahl sei[1]), allein wenn wir auch unseren Lesern diese Vermutung nicht vorenthalten möchten, können wir uns doch nicht entschließen dieselbe als berechtigt anzuerkennen oder gar der Meinung beizustimmen, die erwähnten beiden allgemeinen Sätze seien von Diophant in seinen Porismen (S. 467) ausgesprochen, wenn nicht bewiesen worden.

Virtuosität legt Diophant auch darin an den Tag, daß er die zu lösende Aufgabe teilt, daß er gewisse Bedingungen derselben zunächst willkürlich durch irgend Zahlenannahmen erfüllt, daß er dann diese Annahmen als falsch erkennt und vermöge anderer Bedingungen der Aufgabe in die richtige umwandelt, ein Weg, der uns unwillkürlich an den **falschen Ansatz** erinnert, dessen Ahmes in seiner schwierigsten Aufgabe von der arithmetischen Reihe (S. 78) sich bedient hat, ein Weg, den vielleicht, wie wir im 18. Kapitel bei Besprechung von Herons Vermessungslehre auseinandersetzten, die Griechen zur Aufsuchung von Quadrat- und Kubikwurzeln in kunstvoller Weise gangbar zu machen wußten, der künftig unseren forschenden Blicken wiederholt erkennbar sein wird, von vielen Fußspuren durchkreuzt, die den mannigfachsten Betretern angehören.

Als einfachste Aufgabe dieser Art wird die 22. des IV. Buches[2])

---

[1]) **Paul von Schaewen**, Zur Lösung der Gleichung $z = \sqrt{Ax^2 + Bx + C}$. Osterprogramm 1906 des Evangelischen Gymnasiums zu Glogau [1906 Programm Nr. 235]. Die genannten Aufgaben stehen (**Tannery**) pag. 109 und 151, (**Wertheim**) S. 63 und 90. [2]) Diophant (**Tannery**) pag. 234—236, (**Wertheim**) S. 146—147.

genannt. Drei proportionale Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daß der Unterschied von je zweien ein Quadrat werde. Ist die erste Zahl x, so setzt Diophant die zweite $x + 4$, die dritte $x + 13$, damit der Unterschied der ersten und zweiten, sowie der zweiten und dritten ein Quadrat werde. Die angegebenen Zahlen lassen aber den Unterschied der ersten und dritten nicht zu einem Quadrat werden. Die als Summe der Quadrate $4 + 9$ entstandene Zahl 13 muß also so umgewandelt werden, daß sie die selbst quadratische Summe zweier Quadrate werde. Man wählt z. B. $25 = 9 + 16$ und setzt x, $x + 9$, $x + 25$ für die drei Zahlen. Jetzt endlich ist die Hauptbedingung $x : (x + 9) = (x + 9) : (x + 25)$ oder $x^2 + 18x + 81 = x^2 + 25x$ zu erfüllen, was durch $x = \frac{81}{7}$ geschieht, und die drei Zahlen sind $\frac{81}{7}$, $\frac{144}{7}$, $\frac{256}{7}$. Es kann auffallen, daß Diophant hier versäumt sämtliche Brüche mit 49 (dem Quadrate ihres Nenners) zu vervielfachen, um die ganzzahlige Auflösung 567, 1008, 1792 sich zu verschaffen; vielleicht schienen diese Zahlen ihm zu groß. Noch mehr drängt sich die Frage auf, warum gerade 9 und 25 als die Unterschiede der ersten Zahl von der zweiten und dritten gewählt wurden, warum nicht mindestens gesagt ist $9 + 16 = 25$ sei die kleinste ganzzahlige Auflösung der vorauszulösenden Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, so daß man daraus entnähme, auch andere die gleiche Bedingung erfüllende Zahlen hätten benutzt werden dürfen.

Auf alle solche Fragen, die wir zu stellen geneigt sind, läßt sich stets nur dieselbe Antwort erteilen, die nämlich, daß für Diophant diese Fragen nicht so nahe lagen, wie wir zu meinen geneigt sind. Diophant suchte meistens **eine** Lösung, nicht **die** Lösung. Er beantwortete Rätselfragen, er hatte es nur in seltenen Ausnahmsfällen mit folgerungsreichen Theorien zu tun. Er stand damit innerhalb seiner Zeit, innerhalb seines Volkes. Seine Genialität in Erreichung der vorgesteckten Ziele gehört ihm persönlich zu, die Beschränkung dessen, was er zu erreichen suchte, verschuldet mit ihm die gesamte griechische Arithmetik, wenn von einer Schuld gesprochen werden kann, wo auch das entfernteste Bewußtsein fehlt, man hätte anders handeln können.

Statt daher bei Diophant Methoden zur Auflösung unbestimmter Gleichungen vom ersten oder von höherem Grade zu suchen, werden wir uns begnügen müssen zuzusehen, ob ihm unterwegs bei seinen künstlichen Windungen einzelne zahlentheoretische Wahrheiten bekannt geworden sind, welche der späteren Zeit zugute kamen.

Solche Wahrheiten finden wir nun z. B. in der 22. Aufgabe des

III. Buches[1]), wo es zuerst heißt, daß in jedem rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat der Hypotenuse auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man das doppelte Produkt der Katheten davon abzieht oder hinzufügt, und später daß die Zahl 65 sich von selbst auf zweierlei Art in zwei Quadrate, nämlich zuerst in 16 und 49 und dann wieder in 64 und 1 zerlegen lasse, welches seinen Grund darin habe, daß 65 aus der Multiplikation der Faktoren 5 und 13 entstanden sei, deren jeder die Summe von zwei Quadraten sei. Das heißt erstlich, daß $a^2 + b^2 \pm 2ab$ ein Quadrat gebe und zweitens, daß $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ auf zwei Arten als Summe zweier Quadrate dargestellt werden könne. Wenn auch Diophant nicht sagt, daß ihm die Zerlegungen selbst $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ und $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ bekannt seien, so ist doch wohl nicht daran zu zweifeln, da andernfalls die zweifache Möglichkeit der Zerlegung ihm nicht so einleuchtend hätte sein können.

Daß jedes Quadrat auf beliebig viele Arten als Summe zweier Quadrate aufgefaßt werden könne, lehrt Diophant in der 8. und 9. Aufgabe des II. Buches[2]) wie folgt. Ist a^2 die zu zerlegende Quadratzahl, so denke man x^2 als den einen, $(mx - a)^2$ als den anderen Teil, wo m ganz beliebig gewählt werden kann. Demnach muß $a^2 = x^2 + m^2x^2 - 2amx + a^2$, also $x = \frac{2am}{m^2+1}$ und $mx - a = \frac{a(m^2-1)}{m^2+1}$ sein, oder man hat $a^2 = \left(\frac{2m}{m^2+1} \cdot a\right)^2 + \left(\frac{m^2-1}{m^2+1} \cdot a\right)^2$ unter ganz willkürlicher Annahme von m. Das ist einer von den seltenen Ausnahmefällen, in welchem Diophant sich zur vollen Allgemeinheit erhebt und wie wir von dem $m$fachen, von „irgend einem Vielfachen“ und von „einem beliebigen Vielfachen“ spricht.

Wir nennen ferner die Wahrheit, daß keine Zahl von der Form $4n + 3$ die Summe zweier Quadrate sein könne, welche in der 12. Aufgabe des V. Buches[3]) gelegentlich ausgesprochen ist. Ob Diophant auch wußte, daß jede Primzahl von der Form $4n + 1$ als Summe zweier Quadrate aufgefaßt werden kann? Schwerlich! und noch weniger wird man annehmen dürfen, falls er wirklich diese oder eine ähnliche Umkehrung sich gestattet hätte, er habe einen vollgültigen Beweis dafür besessen.

Diophant geht vielmehr in Umkehrungen nicht mit der nötigen

[1]) Diophant (Tannery) pag. 182—184, (Wertheim) S. 110—111. [2]) Ebenda (Tannery) pag. 90—92, (Wertheim) S. 51—53. [3]) Ebenda (Tannery) pag. 332 bis 334, (Wertheim) S. 206 und in der Übersetzung von Schulz die Anmerkung S. 518—520.

Vorsicht zu Werke, wie aus einem seiner Porismen sich ergibt. Wir haben (S. 467) gesagt, daß Diophant an verschiedenen Stellen auf seine Porismen verweise. Drei Porismen sind ausdrücklich angeführt in der 3., 5. und 19. Aufgabe des V. Buches.

Das erste derselben lautet[1]): „Wenn man zwei Zahlen hat und nicht nur jede dieser Zahlen für sich, sondern auch das Produkt ein Quadrat wird, wenn man die nämliche vorgeschriebene Zahl dazu addiert, so sind sie von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Quadraten entstanden“, d. h. wenn $x + a = m^2$, $y + a = n^2$, $xy + a = p^2$ sein soll, so müssen m, n aufeinanderfolgende ganze Zahlen sein. Hier hat man zeigen können[2]), daß Diophant eine falsche Umkehrung vornahm. Wenn m und n aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, findet allerdings der ausgesprochene Satz statt, aber derselbe kann auch stattfinden, ohne daß diese Bedingung erfüllt werde.

Das zweite Porisma lautet[3]), „daß wenn man zu zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen noch eine dritte Zahl suche, welche um 2 größer ist als die doppelte Summe jener beiden, man dann drei Zahlen von der Beschaffenheit habe, daß das Produkt von je zweien, sowohl wenn die Summe der zwei multiplizierten, als auch wenn die dritte Zahl dazu addiert wird, ein Quadrat werde“. Die drei Zahlen sind a^2, $(a + 1)^2$, $4a^2 + 4a + 4$ und daß diese in der Tat die ausgesprochenen Eigenschaften besitzen, ist leicht erkennbar.

Endlich das dritte Porisma heißt[4]), „daß der Unterschied zweier Kubikzahlen auch allemal Summe von zwei Kubikzahlen sei“. Der Satz ist wahr, aber einen Beweis gibt Diophant an der Stelle, wo er das Porisma anwendet, nicht. Das würde auch niemand erwarten dürfen, denn Verweisungen haben ja gerade den Zweck Beweise zu ersparen. Dagegen ist es allerdings einigermaßen auffallend, daß auch die praktische Ausführung jenes als möglich Erklärten fehlt. Der Satz selbst wird uns erst im XVII. S. wieder begegnen, wo er den Ausgangspunkt interessanter Untersuchungen bildete.

Neben den drei besonders genannten Porismen hat man auch wohl die vorher von uns hervorgehobenen Wahrheiten als Porismen des Diophant aufgefaßt, was wenigstens mit dem Charakter der Sätze nicht in Widerspruch steht.

Bei den erhaltenen sechs arithmetischen Büchern noch einen Augenblick verweilend müssen wir eins betonen, welches von geschichtlicher Bedeutung sein dürfte. Wir haben arithmetische Unter-

[1]) Diophant (Tannery) pag. 316, (Wertheim) S. 195. [2]) Nesselmann, Algebra der Griechen S. 441—442. [3]) Diophant (Tannery) pag. 320, (Wertheim) S. 198. [4]) Ebenda (Tannery) pag. 358, (Wertheim) S. 226.

suchungen griechischer Schriftsteller durch Jahrhunderte verfolgen können und haben deren enge Verbindung mit der Theorie des **rechtwinkligen Dreiecks** in den verschiedensten Perioden hervortreten sehen. Auch Diophant beschäftigt sich mit solchen Zahlen, welche die Längenmaße der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, und zwar treten diese Aufgaben, abgesehen von einigen wenigen[1], die wohl bei der Zerstörung, welche der ursprüngliche Text unter allen Umständen erlitt, an eine unrechte Stelle gekommen sein mögen, durchaus im VI. Buche auf. Man gewinnt dadurch die Empfindung, es seien zuerst arithmetische, dann geometrisch-arithmetische Fragen behandelt worden. Wir haben uns (S. 467) der Meinung angeschlossen, es sei nicht wahrscheinlich, daß am Ende der auf uns gekommenen sechs Bücher vieles fehle. Wir sind nicht gewillt solches gegenwärtig zu widerrufen, aber wenn auch nicht vieles, so könnte ein Gegenstand hier verloren gegangen sein, den wir nennen möchten. Die geometrisch-arithmetischen Fragen des VI. Buches beziehen sich insgesamt auf das rechtwinklige Dreieck. Die Möglichkeit geometrisch-arithmetischer Fragen vom **Rechtecke** ist nicht ausgeschlossen. Solche Aufgaben kennen wir bereits. Sie stehen in dem Buche des Landbaues (S. 391), wir mußten bei Gelegenheit einer Stelle aus dem III. Buche der Sammlung des Pappus (S. 454) daran erinnern. Die Aufgaben verlangen: 1. zwei Rechtecke zu finden, deren Umfänge wie deren Flächeninhalte im Verhältnisse wie 1 : 3 stehen; 2. zwei Rechtecke zu finden, deren Umfänge einander gleich seien, deren Flächen aber im Verhältnisse von 1 : 4 stehen. Die Auflösung der ersten Aufgabe bilden die Rechtecke aus den Seiten 54, 53 und 318,3, die der zweiten die Rechtecke aus den Seiten 3,60 und 15,48. Eine wenn auch nur geringe Familienähnlichkeit dazu besitzt die achte Aufgabe des V. Buches[2] bei Diophant: „Man soll drei rechtwinklige Dreiecke suchen, deren Flächen einander gleich sind.“ Hat Diophant, was wir nicht für unmöglich halten, Aufgaben behandelt, welche näher mit denen im Buche des Landbaues übereinstimmen, so wird er es schwerlich in dem gleichen Buche getan haben, in welchem von den rechtwinkligen Dreiecken die Rede war. Jedes rechtwinklige Dreieck ist zwar für die arithmetische Betrachtung nicht minder wie für die geometrische die Hälfte eines Rechtecks, d. h. die Katheten eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks können auch als Seiten eines rationalen Rechtecks betrachtet werden; aber das gilt nicht umgekehrt. Die Seiten vieler Rechtecke z. B. alle

[1]) Nesselmann, Algebra der Griechen S. 436 hat dieselben gesammelt.
[2]) Diophant (Tannery) pag. 324, (Wertheim) S. 200.

obigen Paare 54, 53 wie 318,3 wie 3,60 wie 15,48 können nicht als Katheten eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks benutzt werden. Dieser Gegensatz erscheint auch in der Natur der gestellten Fragen wieder. Jene Aufgaben von den Rechtecken verlangten sowohl den Inhalt als den Umfang gewissen Zahlenbedingungen zu unterwerfen. Die angeführte diophantische Aufgabe von Dreiecken schrieb nur für den Inhalt eine Bedingung vor, weil die Rechtwinkligkeit der Dreiecke den Seitenlängen von selbst gewisse Bedingungen auferlegt, die nicht erst ausgesprochen zu werden brauchen.

Wie es nun damit sei, ob Diophant in einem Schlußbuche seines Werkes Aufgaben über Rechtecke behandelte oder nicht, unter allen Umständen ist die Form der meisten geometrisch-arithmetischen Aufgaben des VI. Buches zu beachten, bei welchen, wie in jener Aufgabe Herons vom Kreise (S. 404), Flächen und Linien so sehr als Zahlen behandelt werden, daß man Summen und Differenzen aus ihnen bildet. Wir führen als einfaches Beispiel die neunte Aufgabe des VI. Buches[1]) an: „Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben einer gegebenen Zahl gleich wird, wenn man die beiden Katheten davon abzieht“ oder in Zeichen geschrieben $\frac{xy}{2} - x - y = c$.

Wir wenden uns zu der kleinen 10 Sätze umfassenden Abhandlung **über Polygonalzahlen**, welche in den Handschriften mit den arithmetischen Büchern vereinigt ist. Um den Inhalt[2]) der Abhandlung richtig zu verstehen müssen wir uns des Satzes von den Dreieckszahlen erinnern, die 8fach genommen und um 1 vermehrt stets zu Quadraten werden. Wir haben diesen Satz bei Plutarch, später bei Jamblichus (S. 460) gefunden. Ihn verallgemeinert Diophant und behauptet, jede Polygonalzahl werde zu einem Quadrate, wenn man sie mit einem Zahlenkoeffizienten vervielfache, der von der Anzahl der Ecken der Polygonalzahl abhänge, und das Quadrat einer gleichfalls aus dieser Eckenzahl sich ergebenden Zahl hinzuaddiere. Er spricht ihn später dahin aus, daß wenn etwa p_m^r das Symbol der r^{ten} m-Eckszahl, und p_m allgemeiner das Symbol irgend einer m-Eckszahl darstellt, stets $8(m-2)p_m + (m-4)^2$ eine Quadratzahl werde. Er findet sodann diese Quadratzahl, welche nicht bloß von m, sondern auch von dem jedesmaligen r abhängt, als $[(m-2)(2r-1)+2]^2$. Damit ist zugleich eine Doppelformel gegeben, welche zeigt, wie die r^{te} m-Eckszahl gefunden werden kann, sobald m und r bekannt sind,

[1]) Diophant (Tannery) pag. 409, (Wertheim) S. 266. [2]) Eine sehr klare Übersicht bei Nesselmann, Algebra der Griechen S. 463—469. Die Abhandlung selbst in Diophant (Tannery) pag. 450—480, (Wertheim) S. 297—313.

wie aber auch die Seite r einer bekannten m-Eckszahl p_m^r sich berechnen läßt. Denn einmal ist

$$p_m^r = \frac{[(m-2)(2r-1)+2]^2-(m-4)^2}{8(m-2)},$$

was bei Diophant im 9. Satze folgendermaßen lautet: „Wir nehmen die Seite (r) der Polygonalzahl doppelt, ziehen davon die Einheit ab; den Rest vervielfältigen wir durch die um 2 verkürzte Zahl der Ecken (m); zu dem Produkte wird 2 gezählt und die Summe quadriert; von dem Quadrate ziehen wir ab das Quadrat der um 4 verkleinerten Anzahl der Ecken; den Rest teilen wir durch das 8fache der um 2 verkürzten Anzahl der Ecken, so werden wir die Polygonalzahl finden.“ Zweitens findet sich aus dieser Formel durch Rückwärtsentwicklung

$$r = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8(m-2)p_m^r+(m-4)^2}-2}{m-2}+1\right]$$

und Diophant fährt auch wirklich fort: „Ist diese (i. e. die Polygonalzahl) gegeben, so finden wir deren Seite auf folgende Art. Wir vervielfältigen sie durch das 8fache der um 2 verkürzten Anzahl der Ecken; zum Produkte zählen wir das Quadrat der um 4 verkürzten Anzahl der Ecken, so werden wir eine Quadratzahl erhalten, wenn die gegebene wirklich eine Polygonalzahl war. Von der Seite dieses Quadrates ziehen wir 2 ab; den Rest teilen wir durch die um 2 verkleinerte Anzahl der Winkel, setzen die Einheit hinzu und nehmen von der Summe die Hälfte: so werden wir die Seite der gesuchten Quadratzahl erhalten.“ Als Satz 10. schließt sich noch die Aufgabe an, zu erforschen, auf wieviele Arten eine gegebene Zahl Polygonalzahl sein könne? Der Sinn dieser Frage ist klar. Die Zahl 36 z. B. ist die achte Dreieckszahl, die sechste Viereckszahl, die dritte Dreizehneckszahl und die zweite Sechsunddreißigeckszahl, kann also auf vier Arten Polygonalzahl sein, und diese Anzahl 4 wird eben gesucht. Leider ist die Antwort auf diese Frage nicht so verständlich wie die Frage selbst. Sie bricht in der Mitte ab, ohne daß es bisher gelungen wäre, das Bruchstück dem Sinne entsprechend zu ergänzen.

Wir haben schon früher (S. 467) bemerken müssen, daß die Abhandlung über die Polygonalzahlen ein ganz anderes Gepräge trage als die arithmetischen Bücher. Die arithmetischen Bücher, sagten wir, seien wesentlich analytisch, die Schrift über die Polygonalzahlen wesentlich synthetisch. Letztere lehnt sich, wie wir jetzt ergänzend sagen möchten, vornehmlich an die arithmetischen Bücher des Euklid an. Wie dort sind die Sätze erst behauptungsweise ausgesprochen,

dann bewiesen. Wie dort schließt der Beweis häufig mit den Worten: „welches zu zeigen war“. Wie dort sind die Beweise an Linien geführt, welche aber nichts anderes sind noch sein wollen als Versinnlichungen von Zahlen, und geometrische Vorkenntnisse werden nicht beansprucht[1]). Das alles sind nur erschwerende Einzelheiten, geeignet die Übersichtlichkeit der Sätze für den Leser, aber auch für den Erfinder bedeutend zu verringern. Man vergleiche doch die beiden Hauptformeln mit der Einkleidung derselben in Worte bei Diophant, welche wir ihnen zur Seite gestellt haben, und man wird ein Gefühl davon erhalten, wie schwer es bei solcher Fassung war auch nur die zweite Formel aus der ersten herzuleiten.

Was in dieser Abhandlung über die Polygonalzahlen dem Diophant eigentümlich ist, was er von Vorgängern entlehnte, ist zweifelhaft. Fehlen uns auch die Schriften des Philippus Opuntius (S. 169), des Speusippus (S. 249), des Hypsikles (S. 361) über diesen Gegenstand, so wissen wir doch, daß die ersteren die Namen der Vieleckszahlen überhaupt, letzterer eine sachgemäße Definition derselben kannte, auf welche gerade Diophant, bei dem allein sie sich erhalten hat, Rücksicht nimmt. Es ist also jedenfalls unrichtig, daß Diophant zuerst von Vieleckszahlen im allgemeinen gehandelt habe, wie wohl gesagt worden ist. Möglich ist es dagegen, daß die Doppelformel, in welcher Diophants Abhandlung gipfelt, von ihm herrühre, möglich auch, wie im 26. Kapitel verständlich werden wird, daß in dem verloren gegangenen Schlusse der Abhandlung noch Sätze über Pyramidalzahlen und deren Beziehung zu den Polygonalzahlen enthalten waren. Ja es ist selbst nicht ausgeschlossen, daß Hypsikles bereits sich mit Untersuchungen über diesen letzteren Gegenstand beschäftigte.

Lassen wir die weniger bedeutenden Schriftsteller, denen die zufällige Zeit ihres Lebens einen Platz in den beiden letzten Kapiteln anwies, beiseite, so bleiben die beiden Alexandriner: **Pappus**, **Diophantus** als reicher Inhalt. Beide hervorragende Geister, Mathematiker, welche jedem Volke, jedem Jahrhunderte zur Zierde gereicht hätten, welche aber da, wo ihnen zu wirken das Geschick verlieh, einer unmittelbaren Wirkung entbehrten, entbehren mußten. Pappus stand, wie wir gesehen haben, vielleicht an der Spitze einer Schule (S. 443), und von seiner geometrischen Sammlung ist bei keinem Griechen die Rede! Diophantus' Name war, wie wir aus den Äußerungen von Theon von Alexandria, von Johannes von Jerusalem (S. 464) wissen, von dem Strahlenglanze algebraischen Ruhmes um-

[1]) Ganz vereinzelt ist auch die Aufgabe V, 13 der arithmetischen Bücher an einer Linie versinnlicht. Diophant (Tannery) pag. 336, (Wertheim) S. 209.

schlossen, und doch ist kein griechischer Algebraiker nach ihm aufgetreten, der seine Geistesrichtung verfolgte! Vereinzelte Zutaten, Einschiebungen von nicht immer zweifellosem Werte in die Sammlung des Pappus, dürftige Kommentare zu alten Arithmetikern, zu Diophantus selbst, das war alles, wozu griechische Schriftsteller sich noch zu erheben vermochten. Pappus und Diophantus muten uns an, wie riesige erratische Blöcke in einer weiten Ebene. Sie bilden weit sichtbare Punkte, an denen das Auge des Beschauers haften muß, aber sie durchbrechen nur, sie verändern nicht die allgemeine Flachheit. Die Griechen am Ende des IV. S. waren längst nicht mehr das Volk, dem Leben gleichbedeutend war mit Fortschreiten in Kunst und Wissenschaft. Die kommentierende Tätigkeit, welche, wie wir erörtert haben, eine Hauptbeschäftigung der philosophischen Sekten jener Zeit bildete, schloß den Geist in die engeren Schranken des bereits Vollendeten, statt ihm Flügel zum Ausschweifen in unentdeckte Fernen zu verleihen. Immer tiefer sinkt griechische Mathematik herab, und gälte es nicht das Gebot der Vollständigkeit zu erfüllen, wäre es nicht historisch notwendig zu sehen, wie eine Wissenschaft abstirbt, man schlösse am liebsten mit Diophant die Besprechung der in griechischer Sprache geschriebenen mathematischen Werke.

24. Kapitel.

Die griechische Mathematik in ihrer Entartung.

Wir haben in den Schlußsätzen des vorigen Kapitels wohl hinlänglich entschuldigt, weshalb wir mit Diophant wenigstens ein Kapitel abzuschließen für nötig fanden. Es widerstrebte uns auf ihn noch Schriftsteller folgen zu lassen, die zwar auch noch dem IV. S. angehören, deren einer sogar nicht unbedeutender Berühmtheit sich erfreut, die aber doch einen gar zu grellen Abstich gegen Diophant bieten würden.

Wir meinen zunächst Patrikius[1]), einen Schriftsteller, von welchem nur in zwei heronische Bücher, in die Geometrie und in die erste stereometrische Sammlung, unbedeutende Überreste sich eingeschlichen haben. Die erste Stelle lehrt bei größerer Länge eines Grundstückes dessen Breite an verschiedenen Stellen zu messen,

[1]) Th. H. Martin in dem IV. Bande der *Mémoires présentés par divers savants à l'académie des inscriptions et belles-lettres. Série I. Sujets divers d'érudition* (Paris 1854) pag. 220. Agrimensoren S. 112.

daraus eine Durchschnittsbreite zu berechnen und die Fläche als Rechteck zwischen dieser Durchschnittsbreite und der Länge zu betrachten[1]). Die zweite Stelle gibt eine ähnliche Vorschrift für Körperräume: eine nach oben sich verjüngende kreisrunde Säule soll als Zylinder von gleicher Höhe betrachtet werden, für dessen Grundfläche ein Mittelkreis gilt, dessen Durchmesser die halbe Summe des obersten und untersten Säulendurchmessers ist[2]). So Patrikius, wenn die Sätze wirklich in der Einschiebung in heronische Schriften, aus der wir sie kennen, auf den richtigen Urheber zurückgeführt sind, da sie ihrem Charakter nach ebenso gut, ja fast noch besser, uralt sein könnten. Wer aber dieser Patrikius selbst war, ist zweifelhaft. Man kennt zwei Männer des Namens, einen der aus Lydien stammend 374 hingerichtet wurde, also in der Tat noch dem Ende des IV. S. angehört, einen zweiten aus Lykien, der schon in das V. S. hinüberreicht und am bekanntesten ist durch seinen Sohn Proklus, von welchem wir weiter unten zu reden haben.

Serenus hat sich einige Berühmtheit zu erwerben gewußt. Wann er lebte, ist weder aus seinen uns bekannten Schriften noch aus Erwähnungen bei anderen Schriftstellern genau zu ermitteln. Er nennt einen Kyros und einen Peithon als seine Freunde, die im übrigen gänzlich unbekannt sind. Er sagt im 16. Satze seines Zylinderschnittes, er habe Erklärungen zu den Kegelschnitten des Apollonius verfaßt, was aber auch nicht weiterhilft, als daß Serenus später als zu Anfang des II. vorchristlichen Jahrhunderts schrieb. Er selbst wird in der Vorrede zu den euklidischen Daten von Marinus, dem Herausgeber jenes Werkes, genannt[3]), und dieser Marinus war Nachfolger des Proklus am Ende des V. oder Anfang des VI. nachchristlichen Jahrhunderts. Das sind so weit voneinander abliegende Grenzen, daß ihnen nichts zu entnehmen ist. Wir kommen dagegen weiter durch die Kenntnis der Heimat des Serenus. In der ältesten Handschrift seiner Werke, einem Vatikankodex des XII. bis XIII. Jahrhunderts, heißt er ἀντινσέως, welches man lange Zeit durch *von Antissa* übersetzte, so sehr dem Worte damit Gewalt angetan war. Statt dessen wurde die sehr einfache Verbesserung ἀντινοέως vorgeschlagen[4]) und sofort allgemein angenommen. *Antinoeia*, welches danach die Heimat des Serenus wäre, ist im Jahre 122 durch Kaiser Hadrian, der von 117—138 regierte, gegründet, und Serenus muß also frühestens im II. nachchristlichen Jahrhunderte gelebt haben. Sprach-

[1]) Heron (ed. Hultsch) pag. 136. Vgl. ebenda pag. 207, lin. 16—20. [2]) Ebenda pag. 159. [3]) Euklid (ed. Gregory) pag. 457. [4]) Heiberg in der *Bibliotheca mathematica* 1894 pag. 97.

liche Gründe führten, nachdem Serenus jetzt zwischen das II. und das VI. Jahrhundert eingeschlossen war, zu der Vermutung, er werde etwa in der Mitte der überhaupt möglichen Zeit im IV. Jahrhundert, nach Pappus (der Serenus nirgend erwähnt) und vor dem bald von uns zu nennenden Theon von Alexandria gelebt haben[1]).

Die beiden Abhandlungen des Serenus[2]) haben zum Inhalte den Schnitt des Zylinders und den Schnitt des Kegels. Der Schnitt des Kegels ist die unbedeutendere von beiden Schriften. Serenus beschäftigt sich darin mit solchen Schnittebenen, welche durch die Spitze des Kegels gelegt ein Dreieck auf dem Kegelmantel erzeugen, weil keiner seiner Vorgänger sich um diese Dreiecke gekümmert habe. Von einigem Interesse ist höchstens, daß dabei die Frage nach dem größtmöglichen Inhalte der so entstehenden Dreiecke auftaucht. Der Schnitt des Zylinders lehrt zunächst, daß die den Zylinder schneidende Ebene auf dessen Mantel eine Ellipse hervorbringe und löst alsdann Aufgaben, wie die in Satz 22. und 23. Zu einem gegebenen Kegel (Zylinder) einen Zylinder (Kegel) zu finden und beide durch eine und dieselbe Ebene so zu schneiden, daß der Schnitt ähnliche Ellipsen bilde. Von Sätzen, die bewiesen werden, heben wir hervor: Satz 31. Gerade Linien, welche aus demselben Punkte ausgehend eine zylindrische Oberfläche berühren, haben sämtlich die Berührungspunkte in den Seiten eines einzigen Parallelogramms, und Satz 34. Alle Geraden, welche aus demselben Punkte als Berührungslinien an einen Kegelmantel gezogen werden, haben ihre Berührungspunkte in den Seiten eines einzigen Dreiecks. Endlich sei bemerkt, daß im Satz 33. ganz gelegentlich die Grundlage zu dem mitgeteilt ist, was mit modernem Namen die Lehre von den Harmonikalen genannt zu werden pflegt. Es wird nämlich behauptet, daß wenn (Fig. 78)

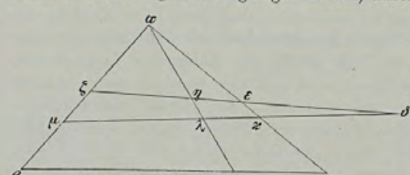

Fig. 78.

[1]) Heiberg in seiner Ausgabe des Serenus von Antinoeia mit lateinischer Übersetzung. Leipzig 1896. Vorrede pag. XVII in Übereinstimmung mit Chasles, *Aperçu hist.* 47 (deutsch 44) und Tannery im *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* 1883. [2]) Der griechische Text ist als Anhang zur Halleyschen Ausgabe der Kegelschnitte des Apollonius gedruckt. Deutsche Übersetzungen hat E. Nizze als Programmbeilagen des Stralsunder Gymnasiums veröffentlicht: Ueber den Schnitt des Cylinders 1860. Ueber den Schnitt des Kegels 1861. Die neueste Ausgabe von Heiberg 1896.

von δ aus die $\delta\varepsilon\eta\zeta$ zum Schnitte eines Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ gezeichnet und η so auf ihr gewählt wird, daß $\delta\varepsilon : \delta\zeta = \varepsilon\eta : \eta\zeta$ und die Gerade $\alpha\eta$ gezogen wird, alsdann jede neue von δ ausgehende Transversale $\delta\varkappa\lambda\mu$ das entsprechende Verhältnis $\delta\varkappa : \delta\mu = \varkappa\lambda : \lambda\mu$ bieten werde. Eigentum des Serenus ist der Satz keinenfalls, da er, wie wir (S. 414) sahen, schon zur Zeit, als Menelaus das III. Buch seiner Sphärik niederschrieb, bekannt gewesen sein muß.

Außer diesen beiden Abhandlungen hat Serenus noch Hilfssätze verfaßt, aus welchen ein geometrischer Satz über Winkel im Kreise mit exzentrischem Scheitelpunkte aber auf gleichen Bögen aufstehend in einer Handschrift des astronomischen Teiles des Werkes Theons von Smyrna aufgefunden worden ist[1]). Könnte man annehmen, Theon habe selbst den Serenus benutzt, so würde durch die bekannte Lebenszeit dieses Schriftstellers eine untere Zeitgrenze mit dem Jahre 130 etwa angegeben sein; doch wäre jene Annahme durchaus willkürlich. Man hat vielmehr, wie bemerkt worden ist, wohl nur an eine Vereinigung ähnlicher Dinge in einer Handschrift zu denken, ohne daß festgestellt wäre, wer es gewesen sein mag, der von jenem Satze aus den Lemmen des Serenus eine astronomische Anwendung machte.

Der dritte Schriftsteller, an welchen wir vorher dachten, ist Theon von Alexandria[2]). Er lebte, wie wir schon bei Gelegenheit der Zeitbestimmung des Pappus (S. 441) angeben mußten, während der Regierung Theodosius des Großen und zwar in Alexandria, wo er, nach der Angabe des Suidas, am Museum lehrte. Wir wissen durch ihn selbst, daß er in Alexandria im Jahre 365 eine Sonnenfinsternis beobachtete. Seine Bemerkungen zu den chronologischen Handtafeln des Ptolemäus erstrecken sich bis auf das Jahr 372. Das Todesjahr seiner nachher zu erwähnenden Tochter ist 415. Das sind lauter zusammenstimmende Jahreszahlen, welche an seiner Lebenszeit einen Zweifel nicht aufkommen lassen.

Den Mathematiker interessieren vorzugsweise zwei Reihen von Arbeiten, welchen Theon sich unterzog. Zuerst gab er die Elemente des Euklid heraus, wie wir bei Besprechung dieses Werkes selbst (S. 277) anführten und vermehrte — bereicherte dürfen wir kaum sagen — dieselben durch Zusätze von geringfügigem Werte. Später verfaßte er einen Kommentar zu dem ptolemäischen Almageste, in welchem von der Euklidausgabe die Rede ist[3]), wo-

[1]) *Theonis Smyrnaei liber de astronomia* ed. Th. H. Martin. Paris 1849, pag. 340 und Martins Bemerkungen pag. 79—81. [2]) Fabricius, *Bibliotheca Graeca* (ed. Harleß) IX, 176, 178—179. [3]) *Commentaire de Théon sur la composition mathématique de Ptolémée* (ed. Halma, Paris 1821) I, 201.

durch die Reihenfolge dieser Arbeiten sich feststellt. Der Kommentar erstreckte sich, wenigstens soweit er im Drucke und auch handschriftlich bekannt ist, nicht auf sämtliche 13 Bücher des Almagestes. Der Kommentar zu einem Teile des V., zum XI. und XII. Buche fehlt. Als Anfang der Erläuterungen zum V. Buche enthalten die Handschriften ein Bruchstück des Pappusschen Kommentars; an diese knüpft sich als Fortsetzung bezeichnet eine Ergänzung Theons[1]), daran wieder ein Stück aus dem Kommentare des Pappus[2]). Man wird darin eine Bestätigung unserer früher (S. 442) ausgesprochenen Meinung, Theon habe Pappus fleißig benutzt, erblicken. Jedenfalls aber muß als Ergebnis dieser Art der Vereinigung der beiden Kommentare angesehen werden, daß Theon später als Pappus lebte, wie groß oder wie klein auch der Zwischenraum zwischen beiden gewesen sein mag.

Theons Kommentar zum I. Buche des Almagestes ist für uns weitaus am wichtigsten. Nicht als ob Dinge darin enthalten wären, geeignet unser ziemlich geringschätziges Urteil über den Verfasser zu entkräften, aber weil er als Quelle mancher geschichtlicher Angaben dient, die wir durch andere zu ersetzen nicht imstande sind. Dort steht jenes Zitat des Diophantus, welches die untere Grenze seiner Lebenszeit bildet, dort der Beweis dafür, daß Theon eine *ἔκδοσις*, eine Herausgabe, des Euklid vollzogen hatte, dort eine Darstellung des Rechnens mit Sexagesimalbrüchen.

Über das sexagesimale Rechnen gibt es eine besondere Abhandlung, welche durch die Handschriften, in welchen sie sich erhalten hat, dem Pappus oder gar dem Diophantus zugeschrieben wird[3]). Wir beabsichtigen keineswegs die Möglichkeit anzuzweifeln, daß namentlich Pappus bei der Kommentierung des I. Buches des Almagestes, wo er über Quadratwurzelausziehungen sich verbreitete, vom Rechnen mit sechzigteiligen Brüchen überhaupt geschrieben haben mag. Nur ist alsdann, falls die jetzt bekannte Abhandlung ein Bruchstück jenes Kommentars bildete, der interessantere Teil immer noch verloren, und wir glaubten der Wertschätzung, die man Pappus und Diophantus schuldet, nur Rechnung zu tragen, wenn wir bei Erörterung ihrer Werke jene elementaren Betrachtungen unberücksichtigt ließen, von wem dieselben auch herrühren mögen — ein Löwe ist aus dieser Klaue keinesfalls zu erkennen, und deshalb tragen wir auch Scheu das Bruchstück zu den Moriastica des Diophantus (S. 467) in Beziehung zu setzen.

[1]) *Τοῦ Θέωνος εἰς τὸ λεῖπον τοῦ Πάππου.* [2]) Fabricius, *Bibliotheca Graeca* (ed. Harleß) IX, 176. [3]) Vgl. Hultsch in der *Praefatio*, welche er dem III. Bande seiner Pappusausgabe vorangeschickt hat, pag. XII und XVI. Dann die durch C. Henry besorgte Ausgabe des *Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanto vel Pappo attribuendum.* Halle 1879, und die kritischen Bemerkungen dazu von Hultsch in der Zeitschr. Math. Phys. XXIV. Histor.-literar. Abtlg. S. 199—203.

Theons Darstellung ist umfangreicher und vollständiger[1]). Die Multiplikation beginnt mit dem größten Teile des Multiplikators, genau so wie wir (S. 319) nach Eutokius das Verfahren des Archimed bei nicht sexagesimal fortschreitenden Zahlen geschildert haben. Um z. B. $37^0\ 4^{I}\ 55^{II}$ mit sich selbst zu vervielfachen wird zuerst das Produkt von 37^0 in die vorgelegte Zahl als $1369^0\ 148^{I}\ 2035^{II}$ angeschrieben, wobei allerdings das Zeichen für Grad ebenso wie für die kleineren Teile nur in dem Sinne von Einheiten und Bruchteilen der Einheit aufzufassen nötig ist, und nicht etwa an eine von Theon nicht beabsichtigte Multiplikation beziehungsweise später an eine Division oder Radizierung benannter Zahlen gedacht werden darf. Dann folgt das durch 4^{I} hervorgebrachte Produkt $148^{I}\ 16^{II}\ 220^{III}$; endlich das Produkt mittels der 55^{II} oder $2035^{II}\ 220^{III}\ 3025^{IV}$, indem die Benennung der einzelnen Teilprodukte den Gesetzen diophantischer Multiplikation allgemeiner Größen folgt. Bei dieser Gelegenheit erscheint eben das Zitat des Diophantus. Theon glaubt eine Unterstützung durch geometrische Beweisführung geben zu müssen, für seine Landsleute und Zeitgenossen eine vermutlich nicht überflüssige Zugabe, bei der wir uns jedoch nicht aufhalten wollen. Nun faßt Theon erst sämtliche Teilprodukte zusammen und vollzieht dabei durch wiederholte Teilung durch 60 die zur Übersichtlichkeit notwendigen Reduktionen: 3025^{IV} sind $50^{III}\ 25^{IV}$; nunmehr sind 490^{III} vorhanden oder $8^{II}\ 10^{III}$; ferner erscheinen 4094^{II} oder $68^{I}\ 14^{II}$; des weiteren 364^{I} oder $6^0\ 4^{I}$; und da endlich 1375^0 sich ergeben, so ist das ganze Produkt $1375^0\ 4^{I}\ 14^{II}\ 10^{III}\ 25^{IV}$, oder unter Vernachlässigung der beiden kleinsten Bruchgattungen nahezu $1375^0\ 4^{I}\ 14^{II}$.

Die Division läßt alle bei der Multiplikation getanen Schritte rückwärts ausführen. So vollzieht Theon die Division von $25^0\ 12^{I}\ 10^{II}$ in $1515^0\ 20^{I}\ 15^{II}$ folgendermaßen. Zunächst ist 25 in 1515 mehr als 60, weniger als 61 mal enthalten; der erste Teilquotient ist demnach 60^0. Zieht man 60 mal 25 von 1515 ab und verwandelt den Rest 15 in Minuten, mit welchen die vorhandenen 20^{I} vereinigt werden müssen, so hat man deren 920. Von ihnen sind 60 mal 12^{I}

[1]) *Commentaire de Théon* (ed. Halma) I, 110—119 und 185—186. Durch falsche Paginierung folgt auf pag. 120 nicht 121, sondern 181, der Zwischenraum zwischen beiden Stellen, an welchen von unserem Gegenstande die Rede ist, beträgt also nur etwa fünf Seiten. Vgl. eine Übersicht bei Nesselmann, Algebra der Griechen S. 138—147.

abzuziehen, wobei 200^{I} und, unter Berücksichtigung der vorhandenen 15^{II}, im ganzen $200^{\mathrm{I}}\ 15^{\mathrm{II}}$ als Rest bleiben. Davon ist wieder 60 mal 10^{II} oder 10^{I} abzuziehen, und so entsteht $190^{\mathrm{I}}\ 15^{\mathrm{II}}$ als Gesamtrest nach Abziehung des vollen ersten Teilproduktes. Nun sucht Theon den zweiten Teilquotienten mittels der Division von 25^{0} in 190^{I} und erhält ihn als 7^{I}. Wieder wird 7^{I} mal 25 von $190^{\mathrm{I}}\ 15^{\mathrm{II}}$ abgezogen; von dem Reste $15^{\mathrm{I}}\ 15^{\mathrm{II}}$ oder 915^{II} werden 7^{I} mal 12^{I}, von dem Reste 831^{II} endlich 7^{I} mal 10^{II} oder $1^{\mathrm{II}}\ 10^{\mathrm{III}}$ abgezogen, so daß als Gesamtrest $829^{\mathrm{II}}\ 50^{\mathrm{III}}$ übrig bleibt. Der letzte Teilquotient durch die Division von 25^{0} in 829^{II} erhalten ist ungefähr 33^{II}, und hier gibt die Subtraktion der einzelnen Stücke des Teilproduktes zuerst den Rest $4^{\mathrm{II}}\ 50^{\mathrm{III}}$ oder 290^{III}, wovon das etwas zu große 396^{III} abgezogen werden mußte. Es ist also $1515^{0}\ 20^{\mathrm{I}}\ 15^{\mathrm{II}}$ geteilt durch $25^{0}\ 12^{\mathrm{I}}\ 10^{\mathrm{II}}$ gleich $60^{0}\ 7^{\mathrm{I}}\ 33^{\mathrm{II}}$ nahezu, *ἔγγιστα*.

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus 4500 Einheiten lehrt endlich Theon nach einer Methode, welche wir wohl genugsam kennzeichnen, wenn wir sie der heute üblichen genau gleich nennen abgesehen von dem Gebrauche von Sexagesimalbrüchen statt der heute üblicheren Dezimalbrüche. Das nächste rationale Quadrat unterhalb 4500 ist 4489, dessen Wurzel 67 heißt. Zieht man (Fig. 79) 4489 von 4500 ab, so bleiben die 11 Einheiten oder 660^{I} in Gestalt eines Gnomon, welcher selbst zunächst aus zwei Rechtecken und einem Quadrate besteht, dessen Seite gesucht werden muß. Man dividiert mit dem Doppelten der 67 Einheiten oder mit 134 Einheiten in 660^{I}. Das gibt 4^{I} als Quotient. Die beiden neuen Rechtecke sind also jedes 67 mal 4^{I} oder 268^{I}, zusammen 536^{I}, und das neue Quadrat ist 4^{I} mal 4^{I} d. h. 16^{II}. Als Rest bleibt zunächst $660^{\mathrm{I}} - 536^{\mathrm{I}} = 124^{\mathrm{I}} = 7440^{\mathrm{II}}$, dann $7440^{\mathrm{II}} - 16^{\mathrm{II}} = 7424^{\mathrm{II}}$, welches wieder in Gestalt eines Gnomon zu denken ist. Um die neue Zerlegung in zwei Rechtecke und ein Quadrat zu finden, nimmt man das Doppelte von $67^{0}\ 4^{\mathrm{I}}$ d. h. $134^{0}\ 8^{\mathrm{I}}$ und dividiert damit in 7424^{II}, wodurch man den Quotienten 55^{II} etwa erhält, dessen Quadrat alsdann außer den beiden Rechtecken noch wegzunehmen sein wird. Die erste Subtraktion gibt als Rest $7424^{\mathrm{II}} - 134^{0}\ 8^{\mathrm{I}} \times 55^{\mathrm{II}} = 46^{\mathrm{II}}\ 40^{\mathrm{III}}$, und dieses ist, sagt Theon, nahezu das Quadrat von 55^{II}. Tatsächlich würde als Rest $45^{\mathrm{II}}\ 49^{\mathrm{III}}\ 35^{\mathrm{IV}}$ übrig bleiben, welcher als Gnomon gedacht eine noch bessere Annäherung als diejenige

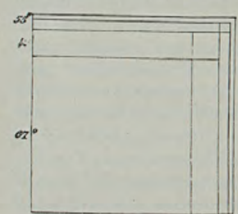

Fig. 79.

$\sqrt{4500^{0}} = 67^{0}\ 4^{\mathrm{I}}\ 55^{\mathrm{II}}$ gestatten würde, mit welcher Ptolemäus sich begnügte.

Die letztere Tatsache ist insofern von geschichtlicher Tragweite, als sie beweist, daß auch Ptolemäus von dem durch Theon gelehrten Näherungsverfahren Gebrauch machte gleichwie Heron es häufig stufenweise anwandte. Es mag immerhin sein, daß je nach dem Umstande, ob man mit Sexagesimalbrüchen rechnete oder nicht, mitunter ein Wechsel des Verfahrens eintrat, ein Wechsel, der seine leichte Begründung darin findet, daß bei Sexagesimalbrüchen sofort und ein für allemal eine Grenze — etwa die des zweiten Sechzigstels — festgesetzt werden konnte, bis zu welcher man die Annäherung treiben wollte, während in gewöhnlichen Brüchen eine solche Grenze sich weder von selbst darbot, noch auch ihre Erreichung im Augenblicke bekannt werden konnte, mithin eine andere Methode leicht als vorzuziehende sich erwies.

Theons Tochter Hypatia[1]) war, wie Suidas angibt, selbst eine Gelehrte von umfassendem Wissen. Die Angabe ebendesselben, sie sei die Gattin des Philosophen Isidorus gewesen, ist vermutlich irrtümliche Einschiebung eines späten Glossators. Hypatia war vielmehr stets unverheiratet. Richtig ist wieder die Zeitbestimmung des Suidas, sie habe ihre Blütezeit unter der Regierung des Arkadius gehabt. Ihr Tod erfolgte unter des Arkadius Nachfolger im März 415 in tragischster Weise. Die Philosophenschulen hatten sich, auch nachdem das Christentum die Religion der römischen Kaiser geworden war, der neuen Lehre keineswegs in dem Maße angeschlossen, wie die sonstige Bevölkerung. Der Schutz, den Kaiser Julianus Apostata insbesondere ihnen gewährt hatte, wirkte noch Jahrzehnte nach seinem Tode fort und ließ die Heidin Hypatia in Ansehen selbst bei einem christlichen Bischofe von Ptolemais, wie Synesius, und bei dem kaiserlichen Präfekten Orestes in Alexandria stehen, ohne daß eine besonders auffallende Erscheinung darin zu suchen wäre. Aber gerade das Ansehen, in welchem sie bei Orestes stand, wurde ihr Verderben. Der Präfekt wies hierarchische Ansprüche des Bischofs Cyrillus zurück. Hypatias Einfluß wurde als Ursache verdächtigt, und der fanatische Pöbel der Stadt zerriß die Unglückliche. War es doch derselbe Pöbel, der 392 schon in dem Zerstörungstaumel religiöser Wut ein Verbrechen begangen hatte, welches die Wissenschaft noch heute schwer empfindet. Theodosius der Große erließ in dem genannten Jahre den Befehl zur Vernichtung der heidnischen Tempel, und dieser

[1]) R. Hoche, Hypatia, die Tochter Theons, in der Zeitschrift: Philologus (1860) XV, 435—474.

Befehl wurde von der plünderungssüchtigen Horde so genau ausgeführt, daß auch der Serapistempel, die zweite alexandrinische Bibliothek, wie wir uns erinnern (S. 427), von Grund auf mit zerstört wurde. Von da an gibt es eine Universalbibliothek des Altertums nicht mehr. Von da an beginnt die Seltenheit alter Originalwerke zur Unmöglichkeit solche zu beschaffen auszuarten.

Wenn wir der Hypatia hier zu gedenken hatten, so liegt der Grund darin, daß ihr auch mathematische Schriften von Suidas nachgerühmt werden[1]), Werke freilich, deren Überschriften ebenso zweifelhaft sind wie ihr Inhalt. Die einen machen daraus einen Kommentar zum Diophant, eine astronomische Tafel, einen Kommentar zu den Kegelschnitten des Apollonius. Die anderen übersetzen[2]): „Sie schrieb einen Kommentar zu der astronomischen Tafel des Diophant und einen Kommentar zu den Kegelschnitten des Apollonius." Gesichert ist keine der beiden Auffassungen. Gibt man der zweiten den Vorzug, so ist Zweifel darüber, ob Diophant, der Verfasser einer astronomischen Tafel, und Diophant, der Algebraiker, ein und dieselbe Persönlichkeit gewesen sein mögen. Das Beispiel Hipparchs zeigt uns, daß die Möglichkeit der Verbindung beider schriftstellerischen Richtungen mindestens nicht auszuschließen ist. Der letzte Herausgeber des Diophant ist wieder der Überzeugung[3]), Hypatia habe die Arithmetik des Diophant erläutert und Teile dieser Erläuterung seien als Scholien erhalten.

Hypatia war für geraume Zeit eine der letzten, wenn nicht die letzte durch die Abfassung mathematischer Schriften bekannte Persönlichkeit in Alexandria. Früher bildete die Lokalisation an diesem Mittelpunkte mathematischer Bildung die wenn auch nicht ausnahmslose Regel. Von Archimed bis Jamblichus verband doch immer ein oder der andere Faden geistiger Zusammengehörigkeit die Schriftsteller, die nicht in Alexandria lebten, mit jenem Zentrum. Allmählich wurde umgekehrt die Lostrennung von jenem Boden, der den Erzeugnissen schriftstellerischer Tätigkeit wie den Schriftstellern als gleich gefährlich sich erwiesen hatte, zur Regel. Der Neuplatonismus setzte sich fort, aber hauptsächlich an jenem Orte, wo die Grundlegung der alten Schule stattgefunden hatte, in Athen, wo eine Universität entstand, an Einrichtungen, Sitten und Unsitten, Gebräuchen und Mißbräuchen deutschen Universitäten vergleichbar[4]).

---

1) *ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διόφαντον τὸν ἀστρονομικὸν κανόνα εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα.* 2) Nesselmann, Algebra der Griechen S. 248, dessen Auseinandersetzungen Hoche in seiner Abhandlung nicht gekannt zu haben scheint. 3) Tannery in seiner Diophantausgabe II, pag. VII—VIII und IX. 4) Zeller III, 2, 675 flgg. und Hertzberg, Gesch. Griechenlands unt. d. Römern Bd. III. Halle 1875.

Der Keim zur neuen athenischen Schule wurde vermutlich nicht von Alexandria aus, sondern von dem syrischen Ableger der Alexandriner, von den Nachfolgern des Jamblichus gepflanzt. Mit der örtlichen Rückkehr aus dem Oriente nach Hellas streifte der Neuplatonismus einen Teil seiner Überschwenglichkeit, seiner Mystik ab. Das Studium der aristotelischen Schriften und damit verbunden dialektische Geistesübungen kamen wieder zu ihrem Recht, und neben und nach Erklärern platonischer Schriften wurden die Jünger der athenischen Schule die emsigsten Scholiasten des Aristoteles. Für uns haben indessen die ersten Schulvorstände in Athen und selbst der berühmte Syrianus kaum soviel Bedeutung, daß wir deren Namen anführen dürften.

Erst Proklus[1]), der Schüler Syrians, verlangt wieder unsere Aufmerksamkeit. Als Sohn des byzantinischen Anwaltes Patrikius von Lykien, den wir (S. 488—489) vielleicht als Urheber zweier geodätischer Näherungsvorschriften kennen gelernt haben, ist Proklus 410 geboren. Sein Tod erfolgte am 17. April 485. Marinus, sein Schüler und Nachfolger, der eine Biographie des Proklus verfaßt hat, erzählt von ihm, er habe als Knabe in der Heimat seiner Eltern, wohin er denselben bald nach seiner Geburt folgte, die Schule eines Grammatikers besucht, worauf ihn ein Rhetor Leonas mit sich nach Alexandria nahm, wo er Grammatik und Rhetorik studierte. Nach kurzer Heimkehr in seine Vaterstadt Byzanz lag er neuerdings in Alexandria philosophischen und mathematischen Studien ob, letzteren unter der Leitung eines gewissen Heron, von welchem aber abgesehen von dieser einen Notiz durchaus nichts bekannt ist. Der Unterricht der alexandrinischen Lehrer genügte bald dem strebsamen Jünglinge nicht. Sein Wissensdurst führte ihn nach Athen, wo er von Syrian an die eigentlichen Quellen menschlichen Denkens hingeleitet wurde. So ward Proklus der naturgemäße Erbe Syrians als Schulvorstand in Athen und erhielt als solcher den Beinamen des Nachfolgers, *διάδοχος*, Diadochus, unter welchem er vielfach bekannt ist. Von den Schriften des Proklus Diadochus kümmern uns weder die philosophischen Originalabhandlungen, noch die zahlreichen Kommentare zu platonischen Schriften. Auch seine Sphärik, *σφαῖρα*, ein bloßer Auszug aus dem astronomischen Werke des Geminus, ist für uns ohne jede Bedeutung. Wir haben es nur mit dem Kommentare des Proklus zu den euklidischen Elementen zu tun, welcher uns im Verlaufe unserer bisherigen Untersuchungen so vielfach als Quelle

---

1) Zeller l. c. 700 flgg. Hertzberg l. c. 516 flgg. J. G. van Pesch, *De Procli fontibus.* Leiden 1900.

dienen mußte, daß die Besprechung sich als notwendig erweisen würde, selbst wenn wir gar nichts mathematisch Neues daraus mitzuteilen hätten.

Der Kommentar des Proklus zum I. Buche der euklidischen Elemente ist mehrfach herausgegeben[1]), und schon dem Übersetzer desselben in der zweiten Hälfte des XVI. S. legte sich die Frage vor, ob Proklus nur zum I. Buche der Elemente einen Kommentar verfaßt habe, verfassen wollte? Die letztere Frage war sofort zu verneinen, da Proklus selbst am Ende des Kommentars zum I. Buche einen solchen zu den gesamten Elementen in Aussicht stellt[2]) und auch an sonstigen Stellen vorläufig ankündigt, was er in dem Kommentare zum II., zum VI. Buche auseinandersetzen werde. Ob aber dieser Plan in Erfüllung ging, ob nicht etwa Proklus vorhatte, was er nicht ausführte, darüber haben erst Entdeckungen neuer Scholien in griechischen Handschriften Aufschluß gegeben, welche mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit dem Proklus zugeschrieben werden[3]). Proklus hat also wirklich zu allen Büchern der euklidischen Elemente, wenige ausgenommen, einen Kommentar verfaßt. Darüber freilich wird immer einiger Zweifel übrig bleiben, ob auch zu den späteren Büchern ein so umfassender Kommentar des Proklus existiert haben müsse wie zu dem I., ob die geringen Bruchstücke, welche uns davon erhalten sind, nur Splitter eines großen Ganzen, ob sie etwa die Hauptsache des einst Vorhandenen darstellen. Wie man sich zu dieser Frage stellt, hängt wesentlich von der Meinung ab, welche man von dem Zwecke des Proklus sich bildet. Wer da glaubt[4]), Proklus wollte nicht Geometrie lehren, sondern die geometrische Genauigkeit für die philosophische Dialektik nutzbar machen, und nur philosophisches Interesse habe seinem ganzen Kommentare als Richtschnur gedient, der kommt natürlich zur Vermutung, das vornehmliche Interesse des Proklus müsse erschöpft gewesen sein, als es sich in dem erläuterten Werke um wirklich geometrische Sätze und nicht mehr um Erklärungen, um Forderungen, um Grundsätze und Grundwahrheiten handelte. Wer dagegen[1]) Proklus als Mathematiker anerkennt, dem es auf einen Versuch der Verbesserung des großen Meisters ankam, einen Versuch, zu welchem er Vorarbeiten älterer Exegeten und selbstständiger Geometer, eines Heron, eines Geminus, eines Ptolemäus, eines Pappus, eines Theon verwerten konnte, ohne darum die pietätsvolle Bewunderung dessen aus den Augen zu verlieren, den er mit dem ganzen Altertume vorzugsweise den Elementenschreiber nennt, wer dieser Meinung huldigt, kann nicht anders als auch für die auf das I. Buch folgenden Bücher einen gleich vollständigen Kommentar anzunehmen, muß den Verlust schmerzlich bedauern, mit welchem ihm zugleich die reichste Quelle für die Geschichte griechischer Mathematik verloren ging. Nicht viel anders wird die Meinung dessen sein, der in dem Werke des Proklus ein Stück des Vorlesungsheftes sieht, nach welchem derselbe in engstem Anschlusse an die von ihm aufs höchste bewunderten Elemente des Euklid seinen Schülern Mathematik vortrug[2]). Wir selbst möchten in dieser persönlichem Dafürhalten weiten Spielraum lassenden Frage nicht Partei ergreifen, wenn wir auch mit der als zweite dargelegten Meinung uns besser als mit der ersten oder der letzten befreunden können. Wir besitzen aber neben dem fortlaufenden Kommentare des Proklus zum I. Buche der Elemente nur kürzere, teilweise allerdings geschichtlich wertvolle Scholien zu einzelnen Sätzen späterer Bücher und müssen wohl oder übel uns damit begnügen.

Was von eigenen Leistungen des Proklus hervorgehoben werden kann, ist teilweise ziemlich dürftig[3]), teilweise läßt sich nicht mit Bestimmtheit ermessen, ob Proklus der Erfinder oder nur der Berichterstatter ist. Ersteres dürfte höchst wahrscheinlich für verschiedene Einwürfe gegen die euklidische aber auch gegen die ptolemäische Parallelenlehre der Fall sein[4]), so wie für die Entstehung der

[1]) Den ersten griechischen Abdruck besorgte Grynaeus in der Basler Euklidausgabe von 1533. Eine lateinische Übersetzung gab Barocius 1560. Auch Commandinus gab die Scholien zum I. Buche und zu den späteren lateinisch in seiner Euklidausgabe von 1572. Friedleins Textausgabe der Scholien zum I. Buche (Leipzig 1873) ist jetzt allgemein verbreitet. [2]) Proklus (ed. Friedlein) 432, 9 sqq. [3]) Die Scholien des Proklus zu späteren Büchern hat C. Wachsmuth entdeckt. Vgl. dessen Aufsatz: „Handschriftliche Notizen über den Commentar des Proklus zu den Elementen des Euklides" im Rhein. Museum für Philologie (1863). Neue Folge XVIII, 132—135. Ebenda (1864) XIX, 452 einen Aufsatz von Hultsch. Programme von Knoche, Herford 1862 und 1865 und von L. Majer, Tübingen 1875. [4]) Dieser Meinung ist Knoche in seinen beiden Programmen. Vgl. Untersuchungen über des Proklus Diadochus Commentar zu Euklids Elementen 1862, S. 14 und 21. Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklids Elementen 1865, S. 36 und 45.

[1]) So L. Majer, Proklus über die Petita und Axiomata bei Euklid 1875, S. 29. Heiberg, Euklidstudien S. 166 Anmerkung 1 spricht sich dahin aus, daß Proklus, wenn er den Kommentar fortgesetzt hat, die übrigen Bücher eben so ausführlich wie das erste erläutert haben muß. Über die in dem Zwischensatze als fraglich hingestellte Tatsache äußert Heiberg keinerlei bestimmte Meinung, neigt aber jedenfalls mehr der Ansicht zu, Proklus habe den Kommentar nicht fortgesetzt Vgl. Heiberg l. c. S. 166—167. [2]) G. van Pesch, *De Procli fontibus*. [3]) Knoche, Programm von 1862, S. 16 flgg. [4]) Vgl. Majers Programm.

Ellipse als geometrischer Ort eines bestimmten Punktes einer gegebenen Strecke von beständiger Länge, welche alle Lagen annimmt, bei denen die beiden Endpunkte die Schenkel eines rechten Winkels durchlaufen[1]).

Zu den Zeitgenossen des Proklus gehörte Domninos aus Larissa, ein Schriftsteller über Arithmetik, der ohne wesentlich Neues zu bringen sich guter älterer Quellenschriften bediente[2]).

Nach dem Tode des Proklus ging es auch mit der Universität Athen entschieden abwärts. Es ist nicht unsere Aufgabe diesen Satz allgemein zu begründen, aber eine bloße Nennung der Namen derer, die als Schulvorstände auf Proklus folgten, und der mathematischen Leistungen, welche von ihnen berichtet werden, genügt, die Wahrheit desselben für unsere Wissenschaft festzustellen. Da erscheint zuerst Marinus von Neapolis, einer Stadt, die man sich wohl hüten muß mit Neapel zu verwechseln. Die Heimat des Marinus war vielmehr Flavia Neapolis in Palästina, das alte Sichem. Von Marinus ist uns als Mathematisches nur eine Vorrede zu den euklidischen Daten bekannt. Noch bei Lebzeiten des Marinus und auf dessen eigenen Wunsch ließ Isidorus von Alexandria sich bestimmen an seine Stelle zu treten. Isidorus erfreute sich allerdings verhältnismäßig großer Berühmtheit. Ihm ward ein Beiname zuteil, welcher überhaupt nur zweimal, und, soviel bekannt ist, nur von zwei Schriftstellern einem griechischen Philosophen beigelegt worden ist[3]), der Beiname des Großen. Der Verfasser des Sophisten, sei es, daß dieser Dialog von Platon oder von einem anderen herrühre, spricht von Parmenides dem Großen, und Damascius, von dem wir gleich noch zu reden haben, gleichfalls von Parmenides dem Großen, aber auch von Isidorus dem Großen. Den Grund oder Ungrund dieser Auszeichnung zu prüfen haben wir nicht Veranlassung. Mathematische Schriften des Isidorus kennen wir nicht, wenn auch dem Geiste der neuplatonischen Schule nach nicht zu zweifeln ist, daß er gleich allen anderen Schulhäuptern solche von höherem oder vermutlich von geringerem Werte verfaßt haben wird.

Neben der Athener Schule bestand auch eine solche in Alexandria. Zu ihren Lehrern gehörte Ammonius, Sohn des Hermeias und der Andesia, und unter seinen Schülern befanden sich so hervorragende Gelehrte wie Simplicius, wie Johannes Philoponus. Ammonius (natürlich nicht mit Ammonius Sakkus zu verwechseln) übte

[1]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 106 lin. 12—15. [2]) Die Schrift des Domninos hat J. F. Boissonade herausgegeben. Anecdota Graeca IV, 413 bis 429. [3]) Th. H. Martin, *Sur l'époque et l'auteur du prétendu XV. livre des éléments d'Euclide* im *Bullettino Boncompagni* 1874, pag. 263—266.

eine reiche schriftstellerische Tätigkeit aus. Er verfaßte z. B. einen Kommentar[1]) zu der Einleitung des Porphyrius zu Aristoteles (S. 457). In diesem ist der Satz ausgesprochen, die Zahl der Kombinationen zu je zweien aus beliebig vielen Elementen werde gefunden, wenn man die Hälfte des Produktes der Elementenzahl in ihre um 1 verminderte Anzahl nehme.

Der Schüler und, wie wir schon sahen, der jedenfalls dankbar begeisterte Schüler des Isidorus war Damascius von Damaskus, der etwa um das Jahr 510 die Schulvorstandschaft in Athen übernahm, nachdem Isidorus, mißmutig und verstimmt darüber seine Kräfte einer verlorenen Sache zu widmen, sich nach Alexandria zurückgezogen hatte. Damascius soll, nach einer scharfsinnigen Vermutung, der Verfasser des sogenannten XV. Buches der euklidischen Elemente sein, welches man sonst auch als II. Buch des Hypsikles über die regelmäßigen Körper zu bezeichnen pflegte. Wir haben (S. 358) dieses Buch mit dem I. Buche des Hypsikles verglichen und sind zu dem Ergebnisse gekommen, das II. Buch sei viel unbedeutender als das I., mit welchem es nicht zusammenhänge. Im 7. Satze dieses Buches spricht nun der Verfasser von seinem großen Lehrer Isidorus[2]) und dieser Ausdruck gab eben die Veranlassung, die ihrer Sprache nach unbedingt ziemlich spät verfaßte Abhandlung dem Damascius zuzuschreiben. Ein scharfer Beweis dürfte allerdings in dem einen Worte nicht zu finden sein, und gäbe es, wie es den Anschein hat, Scholien zu diesem sogenannten XV. Buche des Euklid, die den gleichen Ursprung mit den sonstigen Scholien zu Euklid verraten, die also auch von Proklus herrühren müßten, so wäre umgekehrt der Gegenbeweis gegen das Verfasserrecht des Damascius geliefert, und die Abhandlung müßte von dem Schüler irgend eines anderen Isidorus herrühren, welcher zwischen dem IV. und VI. S., weder viel früher noch keinenfalls später, gelebt haben möchte. Der Name Isidorus ist ohnedies nichts weniger als selten, und aus dem VI. S. selbst ist ein Baumeister Isidorus von Milet berühmt, der in Gemeinschaft mit Anthemius von Tralles im Auftrage des Kaisers Justinian den Prachtbau der Sophienkirche in Konstantinopel herstellte. Isidor von Milet wird von dem Verfasser[3]) der neuesten Untersuchungen über das sogenannte XV. Buch des Euklid für den im 7. Satze desselben genannten Lehrer gehalten. Das Buch selbst will er mit schwerwiegenden, aus der Verschiedenheit der Sprache

[1]) Diesen Kommentar hat A. Busse herausgegeben. Comment. in Aristot. Gr. IV, 1. Berlin 1851 und IV, 3. Berlin 1891. [2]) *Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος μέγας διδάσκαλος.* [3]) G. Kluge, *De Euclidis elementorum libris qui feruntur XIV et XV.* Leipzig 1891.

und des Inhalts hergenommenen Gründen in drei Abteilungen (Satz 1—5, Satz 6, Satz 7) von ebenso vielen Verfassern gespaltet wissen.

Von Anthemius von Tralles ist ein Bruchstück erhalten[1]), welches sich mit der Herstellung von Brennspiegeln beschäftigt, sowohl mit solchen, die aus einem Systeme ebener Spiegel zusammengesetzt sind, als mit parabolisch gekrümmten. Ein weiteres Fragment dieser Schrift des Anthemius dürfte 1881 entdeckt worden sein[2]). Ihm entstammt die Angabe (S. 344), daß Apollonius bereits über Brennspiegel geschrieben habe.

Schüler des Isidorus von Milet war Eutokius von Askalon, der mithin etwa in der zweiten Hälfte des VI. S. die Kommentare zu verschiedenen Schriften des Archimed und zu den Kegelschnitten des Apollonius verfaßte, eine Fundgrube für den Geschichtsforscher, aus der wir gleich unseren Vorgängern zahlreiche Aufschlüsse gewonnen haben, aber mathematisch unbedeutend. Wir haben insbesondere (S. 318) von einer Stelle über die Methoden der Quadratwurzelausziehung bei den ältesten Mathematikern Gebrauch gemacht. Ihr hätten wir auch den Satz entnehmen können, daß das Quadrat einer ganzen Zahl selbst ganzzahlig, das Quadrat eines Bruches selbst ein Bruch sei, woraus die Irrationalität der Quadratwurzel aus jeder ganzen Zahl folgt, die nicht Quadratzahl ist[3]).

Wir kehren zu Damascius von Damaskus zurück. In ihm war[4]) „noch einmal ein Mann des schroffsten antiken Heidentums“ an die Spitze der Schule getreten. Die Rückwirkung blieb nicht aus. Gesinnungsgenossen eilten noch einmal herbei, unter ihnen Simplicius, der Erklärer aristotelischer Schriften sowie der euklidischen Elemente (S. 409), der neben Damascius lehrte und ein keineswegs gering zu schätzender Mathematiker war, wie insbesondere aus seinem mit wertvollen eigenen Bemerkungen durchsetzten Berichte über frühe Quadraturversuche (S. 202) hervorgeht. Aber auch die Feindschaft des gekrönten Theologen, der als Kaiser Justinian 527 den Thron be-

[1]) Abgedruckt in den von Westermann herausgegebenen *Παραδοξόγραφοι (Scriptores rerum mirabilium Graeci).* Braunschweig 1839, pag. 149—158. Ein älterer Abdruck mit Erläuterungen und französischer Übersetzung von Dupuy in *Histoire de l'Académie des Inscriptions et des Belles-lettres* T. 42 pag. 392 bis 451 der *Mémoires* und pag. 72—75 der *Histoire*. Paris 1786. [2]) Chr. Belger in der Zeitschrift Hermes Bd. XVI, S. 261—284. M. Cantor und C. Wachsmuth ebenda S. 637—642. Heiberg in der Zeitschr. Math. Phys. XXVIII. Histor.-literar. Abtlg. S. 121—129. [3]) Archimed (ed. Heiberg) III, 268 lin. 22—25. Vgl. Hultsch in den Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissensch. und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen vom 28. Juni 1893. S. 370 Note 1. [4]) Hertzberg, Die Geschichte Griechenlands unter der Herrschaft der Römer III, 536—545 über die letzte Zeit der Universität Athen.

stiegen hatte, war mit den Lehrern der Schule erworben. Schärfere und schärfere Verordnungen gegen die Bekenner jeder Gattung von Irrlehren folgten einander. Im Jahre 529 erging endlich ein allgemeines Verbot dagegen, daß in Athen noch irgend jemand Philosophie lehrte. Noch einige Jahre fristeten die letzten Lehrer der geschlossenen Hochschule auf dem Boden von Hellas ein kümmerliches Dasein, dann vollzogen sie eine freiwillige Selbstverbannung nach dem Hofe des Perserkönigs Chosrau Anôscharwân.

Der Ruhm des „gerechten“ Sassaniden hatte freilich die Wahrheit übertroffen. Damascius und seine Freunde fanden eine weit geringere Bildung der Hofkreise, grobere Unsitte des Volkes als sie vermutet hatten, und als Chosrau 533 mit Justinian einen Frieden abschloß, der vorangegangenem dreißigjährigem Kriege ein Ziel setzte, und in den Vertrag die ungehinderte Rückkehr der athenischen Gelehrten mit aufnahm, war niemand froher als diese die Heimat wieder zu sehen.

Die athenische Schule aber war und blieb dahin. Da und dort tauchen noch Schüler derselben auf, welche selbst neue Schüler bilden, Philosophen und Mathematiker, in letzterer Beziehung von herzlich geringer Bedeutung. Dahin gehört vielleicht der von Eutokius erwähnte Heronas, welcher einen Kommentar zum Nikomachus geschrieben haben soll (S. 368); dahin mit Kommentaren zu eben demselben Schriftsteller die beiden alexandrinischen Gelehrten Asklepius von Tralles und dessen als Grammatiker vorzugsweise berühmter Schüler Johannes Philoponus, der, wie wir wissen (S. 500), neben Simplicius auch zu den Füßen des Ammonius von Alexandria gesessen hatte. Der Kommentar des ersteren ist nur handschriftlich, der des zweiten auch im Drucke vorhanden[1]), enthält aber kaum irgend bemerkenswerte Stellen.

Johannes Philoponus ist vielfach durch die von Abulpharagius berichtete Geschichte bekannt, er sei es gewesen, der 640 bei der Einnahme Alexandrias durch die Araber für den Bestand der dortigen Bibliothek sich verwandt habe. 'Omar aber habe deren Vernichtung befohlen, denn „entweder enthalten die Bücher das, was im Koran steht, dann brauchen wir sie nicht zu lesen, oder sie enthalten das Gegenteil dessen, was im Koran steht, dann dürfen wir sie nicht lesen“, und nun sei während sechs Monaten die Feuerung der Bäder Alexandrias mit den Bücherrollen der Bibliothek vollzogen worden. Die zweimalige Zerstörung der Bibliotheken im Brucheion und im

[1]) *Joannes Philoponus* in *Nicomachi introductionem arithm.* (ed. R. Hoche) Heft 1. Leipzig 1864. Heft 2. Berlin 1867.

Serapistempel hat aber gewiß nicht eine dritte großartige Bibliothek in Alexandria entstehen lassen, am wenigsten eine so umfangreiche, wie Abulpharagius in der von ihm behaupteten Verwendung der Bücher bezeugt, und so wird der ganze Bericht dieses auch unter dem Namen Barhebräus bekannten den Arabern keineswegs günstig gesinnten syrischen Christen des XIII. S. einigermaßen verdächtig, wenn auch andererseits nicht verkannt werden soll, daß Antwort und Handlungsweise mit dem Charakter des zweiten Nachfolgers Mohammeds wohl verträglich sind, der in der Tat nach Unterwerfung der Hauptstadt der Sassaniden die dort vorhandenen Bücher in den Tigris werfen ließ und auch sonst sich bildungsfeindlich erwies[1]. Die Erwähnung des Johann Philoponus gleichzeitig mit 'Omar ist aber jedenfalls irrig, indem jener im Jahre 517 einen Kommentar zur Physik des Aristoteles verfaßte, mithin keinenfalls 640 noch am Leben gewesen sein kann.

Hier ist wohl die passendste Stelle, von dem Rechenbuche von Achmîm (S. 59) zu reden, einem in Achmîm, in einem koptischen Grabe, aufgefundenen griechischen Papyrus, welcher nach der Meinung des Herausgebers[2]) innerhalb der Zeit zwischen dem VI. und IX. Jahrhunderte von einem Christen geschrieben wurde. Die Angabe läßt möglicherweise die Ergänzung zu, der Schreiber beziehungsweise Verfasser sei ein griechisch schreibender Römer gewesen. Jedenfalls war er in altägyptischer Rechenkunst erfahren und zerlegte Brüche in Summen von Stammbrüchen, wie Ahmes es dritthalbtausend Jahre früher getan hatte. Der wesentliche und nicht hoch genug zu schätzende Unterschied besteht darin, daß der Verfasser des Rechenbuches zu Achmîm die Vorschriften angibt, nach welchen jene Zerlegungen vorgenommen wurden. Darunter ist die Methode der durch Summenteile multiplizierten Faktoren des Nenners besonders bemerkenswert. Als Formel geschrieben heißt sie $\frac{z}{p \cdot q} = \frac{1}{q \cdot \frac{p+q}{z}} + \frac{1}{p \cdot \frac{p+q}{z}}$ und geht bei $z = 2$ in die Formel des Ahmes $\frac{2}{p \cdot q} = \frac{1}{q \cdot \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{p \cdot \frac{p+q}{2}}$ über (S. 67). Bei der oft auftretenden Möglichkeit verschiedenartiger Zerlegung ließ man sich, wie der Herausgeber des Papyrus erkannt hat, von dem Gesichts-

[1]) Schöll-Pinder, Griechische Literaturgeschichte III, 8. [2]) J. Baillet in den *Mémoires publiés par les Membres de la mission archéologique française au Caire* T. IX, Fascicule 1, pag. 1—88 und 8 Tafeln. Paris 1892. Vgl. auch Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII. Histor.-literar. Abtlg. S. 81—87 und Tannery in der *Revue des Études Grecques.*

punkte leiten, Stammbrüche mit solchen Nennern zu wählen, die nicht durch gar zu große Unterschiede voneinander abwichen. Von den verschiedenen möglichen Zerlegungen von $\frac{239}{6460}$ zog man z. B. $\frac{239}{6460} = \frac{1}{85} + \frac{1}{95} + \frac{1}{68}$ allen anderen vor, weil 68, 85, 95 ziemlich nahe beieinander liegen. Die eigentlichen Rechenaufgaben, bei deren Auflösung die Stammbrüche in Anwendung treten, gehören meistens der Regeldetri an, welche uns hier erstmalig bei einem in griechischer Sprache schreibenden Verfasser begegnet. Bruchteile sind häufig auf den Nenner 6000 zurückgeführt, was unzweifelhaft von der Münzeinteilung herrührt, welche ein Goldstück (*νόμισμα*) 6000 Kupfermünzen (*λεπτά*) gleichsetzte[1]). Dieselbe Zurückführung auf Sechstausendstel hat auch bei einem spätestens dem X. Jahrhunderte angehörenden byzantinischen Scholiasten nachgewiesen werden können und neben ihr eine gleichfalls auf Münzeinteilung sich gründende Benutzung von Brüchen mit dem Nenner 288; der Goldsolidus zerfiel nämlich in 288 Billonmünzen mit dem Namev *φόλλις*[2]).

Nach Konstantinopel, wie seit 330 das alte Byzanz hieß, noch bevor es die Hauptstadt des besonderen Reiches wurde, welches man nach dem älteren Namen des Kaisersitzes das byzantinische zu nennen pflegt, hatte Justinian ganz besonders Rechtsgelehrte, der Zahl wie der Bedeutung nach überwiegend, berufen, aus deren Vereinigung eine Rechtsschule als Mittelpunkt einer dort ansässigen Gelehrsamkeit entstand. Auch Mathematiker werden uns hier begegnen, welche aber nur den Eindruck zu verstärken geeignet sind, den wir schon erhalten haben, daß es in immer rascheren Sprüngen bergab ging mit der einstmals so hoch emporgedrungenen griechischen Wissenschaft, daß dann später für die Mathematik wie für benachbarte Kenntnisreihen eine Pause im Niedergange wieder eintrat, daß aber auch für jene späte Zeit — es handelt sich um das XIV. S. — den Byzantinern nicht mehr nachgerühmt werden kann, als ein neuerer Verteidiger ihrer Bildung für sie in Anspruch nimmt[3]), nämlich eine erhaltende Tätigkeit ausgeübt zu haben. Man möchte, insbesondere für die Zeit vom IX. bis zum XI. S., meinen, es seien die geistig bedeutenderen Leute gewesen, die in der Fremde ihre Kenntnis der griechischen Sprache und anderer Idiome dazu benutzten, Übersetzungen der großen griechischen Mathematiker anzufertigen, die man zu Hause nicht mehr studierte, jedenfalls in meist unfruchtbarer Weise studierte.

[1]) Hultsch, Metrologie S. 338 (Berlin 1882). [2]) Ebenda S. 345. [3]) Demetrius Bikélas, Die Griechen des Mittelalters und ihr Einfluss auf die europäische Cultur (deutsch von W. Wagner), Gütersloh 1878.

Wir verweilen einen Augenblick bei einer geodätischen Abhandlung, welche, seit sie 1572 in lateinischer Übersetzung des Barocius bekannt wurde, für das Werk eines Heron des Jüngeren galt, den man wohl in das VII. auch in das VIII. S. zu setzen liebte. Gegenwärtig ist der griechische Text nebst einer französischen Übersetzung leicht zugänglich[1]), und über Ort und Zeit der Entstehung ist kaum ein Zweifel geblieben[2]). Die Örtlichkeit, auf welche die in der Abhandlung vorgenommenen Messungen sich beziehen, ist als die Rennbahn von Konstantinopel erkannt worden, jene berühmte Rennbahn, welche so oftmals zu großen politischen Versammlungen diente, von wo aus meuterische Volkshaufen sich in die Straßen der Hauptstadt ergossen, Umwälzungen einleitend und vollendend. Vorkommende Beobachtungen von Sterndistanzen haben ferner zur Zeitbestimmung führen können und haben ergeben, daß jene Geodäsie in Konstantinopel ziemlich genau im Jahre 938 geschrieben worden sein muß. Wie aber der Verfasser hieß, ob Heron, wie man sonst zu sagen pflegte, ob anders, darüber ist nicht das Geringste bekannt, und vielleicht befreundet man sich am ersten damit, ihn mit uns als den ungenannten Feldmesser von Byzanz zu bezeichnen. Wir haben seiner Abhandlung (S. 164) ganz im Vorübergehen gedenken dürfen, als in welcher ein sehr spätes Zeugnis für den Beweis der Winkelsumme des Dreiecks von der Winkelsumme des Vierecks aus vorlag. Wir möchten jetzt an eben diesen Beweis in dem Sinne erinnern, als er für das Musterwerk des ungenannten Verfassers zur Vermutung führt, dasselbe habe die Betrachtung des Vierecks überhaupt der des Dreiecks vorangehen lassen. Welches Musterwerk aber ihm diente, ist auf den ersten Anblick klar: kein anderes als das feldmesserische Werk des Heron von Alexandria, der übrigens selbst genannt ist[3]), und dessen Abhandlung über die Dioptra insbesondere man in der Nachbildung nicht verkennen kann. Damit ist zugleich gesagt, daß die Schrift des Ungenannten nicht schlecht ist. Wer so wenig wie er von einem trefflichen Muster sich entfernte, konnte Unbrauchbares nicht liefern.

Das gelang viel besser einem Michael Psellus. Dessen letzte Schrift ist von 1092 datiert, er lebte also bis zum Ende des XI. S. Er hatte den Beinamen Erster der Philosophen, ein Beiname, der ihn nicht zu schmücken vermag, sondern nur den Zeitgenossen zur

[1]) *Géodésie de Héron de Byzance* ed. Vincent. *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale.* Paris 1858. T. XIX, 2. partie. [2]) Die abschließenden Untersuchungen von Th. H. Martin in seiner häufig angeführten Abhandlung: *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie.* [3]) *Géodésie de Héron de Byzance* (ed. Vincent) pag. 368.

Unehre gereicht. Eine auf des Psellus Namen im XVI. S. gedruckte Schrift über die vier mathematischen Disziplinen rührt keinenfalls im ganzen von ihm her, da die Astronomie sich selbst vom Jahre 1008 datiert, in welchem Psellus, wenn geboren, jedenfalls im zartesten Kindesalter stand[1]). Ob die auch einzeln herausgegebene Arithmetik[2]) wirklich von Psellus herstammt, bedürfte noch besonderer Untersuchung, aber man kann nicht behaupten, daß diese Mühe sich lohnte. Die Einheit ist keine Zahl, sondern Wurzel und Quelle der Zahlen. Einmal eine Zahl ist von der Zahl nicht verschieden, wohl aber zweimal und dreimal die Zahl. Zwei mal zwei ist mit zwei und zwei gleichwertig, was bei anderen Zahlen nicht vorkommt. Die Zahlen sind bald gerad, bald ungerad, bald zusammengesetzt, bald einfach. Die Primzahlen können mittels einer Siebmethode erkannt werden. Es gibt vollkommene, mangelhafte und überschießende Zahlen. Zwischen den Zahlen gibt es Verhältnisse. Zehn Analogien sind zu unterscheiden. Es gibt vieleckige Zahlen und körperliche Zahlen. Das ist die ganze arithmetische Weisheit des Psellus oder wer der Verfasser gewesen sein mag. Er wird sie aus irgend einem Neupythagoräer oder Neuplatoniker geschöpft haben. Vermehrt hat er sie keinesfalls, auch nicht um den Schatten eines eigenen Gedankens.

In der geometrischen Abteilung, wenn diese echt sein sollte, sagt uns Psellus[3]), es gebe unterschiedene Meinungen, wie des Kreises Inhalt zu finden sei. Am meisten Beifall habe die Gleichsetzung des Kreises mit dem geometrischen Mittel zwischen dem eingeschriebenen und dem umschriebenen Quadrate, d. h. zwischen $2r^2$ und $4r^2$, gefunden. Hier ist also $\pi = \sqrt{8} = 2{,}8284271\ldots$ gesetzt, und der Beifall des Zustimmenden kennzeichnet seine Unwissenheit. Hätte er wenigstens von dem arithmetischen Mittel jener beiden Quadrate gesprochen, so wäre darin eine Erinnerung an das uralte $\pi = 3$ enthalten!

Von großer geschichtlicher Bedeutung, welche allerdings erst in unserem II. Bande im 57. Kapitel hervortreten wird, ist ein Bruchstück des Psellus[4]), worin den Namen, deren sich Diophant (S. 470) für die aufeinander folgenden Potenzen der Gleichungsunbekannten bediente, andere gegenüber gestellt sind. In dieser zweiten Reihe von Ausdrücken heißt die 5. und die 7. Potenz der unbekannten Größe *ἄλογος πρῶτος* und *ἄλογος δεύτερος*, irrational weil, wie aus-

[1]) Tannery in Zeitschr. Math. Phys. XXXVII, Histor.-literar. Abtlg. S. 41. [2]) *Ψέλλου τῶν περὶ ἀριθμητικῆς σύνοψις.* Paris 1538, 4°, lag uns vor. [3]) Kästner, Geschichte der Mathematik I, 281—282. [4]) P. Tannery, *Psellus sur Diophante* in Zeitschr. Math. Phys. XXXVII. Histor.-literar. Abtlg. S. 41—45.

drücklich hinzugesetzt ist, eine solche Potenz weder Quadrat noch Kubus ist.

Es trat eine geistige Versumpfung ein, die als natürliche Begleiterin der steten Palastrevolutionen zu betrachten ist, von welchen die Geschichte des byzantinischen Reiches wimmelt. Auch die Kreuzzüge, um 1100 beginnend, brachten diesen inneren Unruhen keinen Stillstand, brachten ebensowenig neue Bildungselemente, und als 1204 die Unordnung aufs höchste gestiegen war, rückte das lateinische Kreuzheer, Franzosen und Venetianer, vor Konstantinopel, eroberte am 12. April die Stadt und hauste fürchterlich, mit Raub und Brand ganze Viertel zerstörend. Es entstand unter Teilung des Reiches in Konstantinopel ein lateinisches Kaisertum, welches bis 1261 dauerte. Dann kehrte ein eingeborener Fürst Michael Palaeologos, mit genuesischer Hilfe zurück, bemächtigte sich der Herrschaft, und unter den Palaeologen kam im ersten Viertel des XIV. S. für unsere Wissenschaft eine neue Anregung zustande[1]).

Georgios Pachymeres (1242 bis um 1310) verfaßte ein Werk über das Quadrivium, dessen zweites Buch (Musik) und Bruchstücke des vierten Buches (Astronomie) veröffentlicht sind[2]).

Nikephoros Gregoras (1295 bis kurz nach 1359) besaß das Vertrauen des Kaisers Andronikos II. Palaeologos (1282—1328), dem er eine Kalenderreform vorschlug, die der Kaiser jedoch wegen der Schwierigkeit, die anderen Völker zur Annahme zu bewegen, ablehnen zu müssen glaubte.

Im Jahre 1322 wurde von unbekanntem Übersetzer eine griechische Bearbeitung eines persischen astronomischen Werkes angefertigt, als dessen Verfasser *Σαμψ μπουχαρης* genannt ist, eine Verketzerung, in welcher man Schamsaldîn von Bukhara wiedererkannt hat, wahrscheinlich denselben Astronomen, der unter dem Namen Schamsaldîn von Samarkand vermutlich im Jahre 1276 ein Büchlein über die Fixsterne in persischer Sprache geschrieben hat, und der seinen Aufenthalt wechselnd in Samarkand und Bukhara gehabt haben mag.

Nun folgten sich ziemlich rasch weitere byzantinische Bearbeitungen persischer Schriften, mittelbare Abflüsse des im griechischen Texte nahezu vergessenen Almagestes, welcher selbst die vorzüg-

[1]) Vgl. Usener, *Ad historiam astronomiae symbola*, Bonner Universitätsprogramm zur Geburtstagsfeier Kaiser Wilhelm I. am 22. März 1876. Krumbacher, Geschichte der Byzantinischen Litteraturgeschichte (2. Aufl., München 1897) S. 289, 294. [2]) Vincent in den *Notices et extraits* XVI^2 (Paris 1847). Martin, *Theonis Smyrnaei liber de astronomia* (Paris 1849).

lichste Quelle persischer Gelehrsamkeit bildet. Chioniades von Konstantinopel, welcher jedenfalls vor 1346 lebte, Georg Chrysococces im Jahre 1346 selbst, Theodorus Meliteniota, wie es scheint unter der Regierung des Kaisers Johannes Palaeologos 1361 lebend, der Mönch Isaak Argyrus vor 1368, das sind die Hauptvertreter persisch-griechischer Astronomie. Der letztgenannte schrieb[1]) auch eine handschriftlich gebliebene Geodäsie und Scholien zu den ersten sechs Büchern der euklidischen Elemente. Und nun tritt in der zweiten Hälfte des XIV. S. ein neuer Umschlag ein. Mit Nikolaus Cabasilas beginnt ein Geschlecht von Gelehrten, welche auf Ptolemäus selbst zurückgreifen und so die Wiedergeburt klassischer Wissenschaft in Europa vorbereiten. Während auf astronomischem Gebiete die hier kurz geschilderte Bewegung sich vollzog, war es kaum möglich, daß die Mathematik unberührt geblieben wäre, und wirklich haben wir Isaak Argyrus als mathematischen Schriftsteller nennen müssen. Neben ihm treten im XIV. S. noch andere auf, zu welchen wir uns jetzt wenden. Der Hauptsache nach ist ihre Tätigkeit freilich als bloße Kompilation aufzufassen. Höchstens Einer könnte eine Ausnahme bilden, für welchen die Urquelle seines Wissens wenigstens nicht nachzuweisen ist. Ein Vorzug, der ihnen insgesamt zukommt, besteht darin, daß sie nicht mit breitgetretenen Stoffen sich abmühen, wie es die früheren Byzantiner taten, sondern solche Gegenstände wählten, die hier in griechischer Sprache zum ersten Male erscheinen.

Barlaam[2]), ein in Calabrien geborener Mönch, der längere Zeit als Abt in Konstantinopel lebte, dann als Bischof von Geraci im neapolitanischen Gebiete nach Italien zurückkehrte und dort 1348 starb, ist hauptsächlich durch die wechselvolle Stellung bekannt, welche er in dem Streite zwischen der abendländischen und der morgenländischen Kirche einnahm. Von mathematischen Schriften verfaßte er in griechischer Sprache arithmetische Erläuterungen zum zweiten Buche des Euklid, welche mit lateinischer Übersetzung 1564 in Straßburg gedruckt sind, und 6 Bücher Logistik, denen zweimal, 1592 in Straßburg und 1600 in Paris, die Ehre des Druckes widerfuhr. In dieser Schrift wurde in mühseliger Weise die Rechenkunst an

[1]) Nach Montucla, *Histoire des mathématiques* I, 345. [2]) Montucla, *Histoire des mathématiques* I, 344 und v. Jan in Wisowas Enzyklopädie s. v. Barlaam. Nach Wolfs Mathematischem Lexicon (Auflage 1716 S. 177, Auflage 1734 S. 1141) hat Jo. (?) Chambers auf Anraten des Savilius Barlaams Logistik ins Lateinische übersetzt und 1609 mit Anmerkungen herausgegeben. Unsere Bemerkung über den Inhalt der Logistik stammt aus Montucla. Uns ist das Werk noch nie zu Augen gekommen.

ganzen Zahlen, an gewöhnlichen Brüchen und an Sexagesimalbrüchen gelehrt.

Johannes Pediasimus, auch Galenus, γαληνός = der Heitere, genannt, war Siegelbewahrer des Patriarchen von Konstantinopel während der Regierungszeit von Andronikos III. Palaeologos 1328—1341. Von ihm sollen handschriftlich, außer literär-kritischen Schriften, Bemerkungen zu einigen dunkeln Stellen der Arithmetik und eine Abhandlung über Würfelverdoppelung vorhanden sein. Seine Geometrie ist im Druck erschienen[1]). Man kann das Urteil über dieselbe kurz dahin fassen, daß Pediasimus sich ganz ähnlich wie jener unbekannte Byzantiner des X. S. eng an Heron von Alexandria anschließt. Nur daß jener, wie wir gesagt haben, die praktisch-feldmesserische Abhandlung über die Dioptra als Vorbild benutzte, während Pediasimus sich an die rechnende Geometrie des Heron hält, wie sie in den als Geometrie und als Geodäsie betitelten heronischen Schriften vertreten ist. Die Anlehnung ist eine so enge, daß mitunter Pediasimus dazu dienen kann Stellen des Heron zu erläutern.

Maximus Planudes[2]) gehört einer etwas früheren Zeit an. Er lebte etwa 1260—1310, wurde jedenfalls 50 Jahre alt. Ein aus Nikomedien stammender Mönch und besonders durch seine Kenntnisse in lateinischer Sprache und Literatur berühmt, vertrat er 1296 den Kaiser Andronikos II. als Gesandter in Venedig. Maximus Planudes hat einen Kommentar zu den ersten Büchern des Diophant verfaßt, der uns erhalten ist[3]), und als Beweis (S. 467) benutzt wurde, daß die Gestalt, in welcher ihm diese Bücher vorlagen, in keiner Weise von der heutigen Gestalt abwich. Maximus Planudes ist in diesem Kommentar mit weiser Vorsicht allem aus dem Wege gegangen, was der Erläuterung wirklich bedurft hätte, und hat sich nur bei Selbstverständlichem aufgehalten. Wir haben ferner (S. 461) der griechischen Anthologie gedacht, welche Maximus Planudes aus früheren Sammlungen auszog, und in welcher auch algebraische Epigramme sich vorfanden. Wir haben es jetzt mit einer Schrift zu tun, die den widerspruchsvollen Namen Markenlegung nach Art der Inder, *ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς*, führt und gemeiniglich das Rechenbuch des Maximus Planudes[4]) genannt wird. Der Verfasser beginnt

[1]) Die Geometrie des Pediasimus (griechischer Text) herausgegeben von G. Friedlein als Herbstprogramm der Studienanstalt Ansbach für 1866. Die allgemeinen Notizen über den Verfasser entnehmen wir der Friedleinschen Einleitung, in welcher die wünschenswerten Verweisungen sich finden. [2]) Krumbacher, Gesch. der Byzant. Litteraturgeschichte S. 543 flg. [3]) Er ist lateinisch abgedruckt in Xylanders gleichsprachiger Diophantübersetzung. Basel 1571, griechisch in Tannerys Diophantausgabe II, 125—255. [4]) Eine griechische

mit den Worten: „Da die Zahl das Unendliche umschließt, aber eine Erkenntnis des Unendlichen nicht möglich ist, so haben hervorragende Denker unter den Astronomen eine Methode gefunden, wie man Zahlen beim Gebrauch übersichtlicher und genauer darstellen kann. Solcher Zeichen gibt es nur neun und zwar folgende[1]) 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Man fügt auch ein andres Zeichen hinzu, was Tziphra genannt wird und bei den Indern das Nichts darstellt. Auch jene neun Zeichen stammen von den Indern. Die Tziphra wird folgendermaßen geschrieben 0." Hier ist also zum ersten Male im XIV. S. das indische Zifferrechnen nach Byzanz gedrungen, wie wir später sehen werden mindestens 200 Jahre nachdem es auf anderem Wege bereits zur Kenntnis des westlichen Europas gekommen war, wo die sogenannten Algorithmiker in Spanien, in England, in Deutschland, in Frankreich mit den Abacisten ringen, um sie seit Anfang des XIII. S. siegreich zu verdrängen. Wir könnten in der uns hier gegenübertretenden fremdländischen Kunst eine Hindeutung finden, daß wir mit Unrecht auch diese späte Zeit in dem der griechischen Mathematik gewidmeten Abschnitte behandeln, wenn uns nicht umgekehrt gerade das so späte Auftreten, welches wir soeben betonten, darin bestärkte, daß wenigstens verhältnismäßige Abgeschlossenheit der griechisch schreibenden Mathematiker gegen im beginnenden Mittelalter allerwärts sich verbreitende Einflüsse stattfand, und daß sie somit hinter ihrer Zeit stehend und darum ohne Einwirkung auf dieselbe nur als Vertreter einer selbst sich verspätenden Nationalität erscheinen. Der Inhalt des Rechenbuches des Maximus Planudes bedarf dagegen hier keiner auf das eigentlich indische Verfahren eingehenden Erörterung. Die Bemerkung muß uns genügen, daß Addieren und Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren an ganzen Zahlen, dann an Sexagesimalbrüchen gelehrt wird nach Methoden und unter Anwendung von Proben, von welchen wir an anderem Orte zu reden Gelegenheit nehmen. Es folgt alsdann noch die Quadratwurzelausziehung und zwar auf folgende Weise: „Nimm die Quadratwurzel der nächstniedrigen wirklichen Quadratzahl und verdoppele dieselbe; dann nimm von der Zahl, deren Wurzel du suchst, das gefundene nächstniedrige Quadrat weg, und dem Reste gib als Nenner die aus der

Textausgabe hat C. J. Gerhardt veranstaltet. Halle 1865. Eine deutsche Übersetzung von H. Waeschke erschien Halle 1878. Die allgemeinen Notizen über Maximus Planudes entnehmen wir der Gerhardtschen Einleitung. Die deutsche Fassung einzelner Sätze ist bis auf geringe Änderungen, die wir für nötig hielten, der Waeschkeschen Übersetzung entlehnt.

[1]) Die von Maximus Planudes gebrauchten Zeichen vgl. auf der hinten angehefteten Tafel.

Verdoppelung der Wurzel gefundene Zahl. Z. B. wenn 8 das Doppelte der Wurzel wäre, so nenne den Rest Achtel, wenn 10 Zehntel usw. Willst du z. B. 18 als Quadrat darstellen und die Wurzel suchen, so nimm die Wurzel der nächstniedrigen Quadratzahl also von 16. Sie ist 4. Verdopple dieselbe, ist 8. Nimm 16 von 18, bleibt 2. Diese nenne (nach 8) Achtel und sage so: die Seite des Quadrates 18 ist 4 und 2 Achtel, 2 Achtel ist aber gleich einem Viertel, also ist die Seite auch 4 und ein Viertel.“ Nun zeigt der Verfasser, daß $4\frac{1}{4} \cdot 4\frac{1}{4} = 18\frac{1}{16}$ ist, wobei, wie durch den Wortlaut unserer Übersetzung angedeutet worden ist, Brüche nicht in Zeichen, sondern nur mit Worten geschrieben werden. Die Methode sei daher nicht ganz richtig. „Welche Methode aber die genauere und der Wahrheit nähere ist, die ich zugleich als meine mit Gottes Hilfe gemachte Erfindung in Anspruch nehme, das wird in der Folge gesagt werden.“ Die vorher gelehrte Methode muß jedenfalls nach des Verfassers Meinung die indische sein, denn er spricht nachher von der indischen Methode, wie von einer bereits vorgetragenen[1]), während nur diese Auseinandersetzung und die geometrische Begründung ihrer nicht genau zutreffenden Richtigkeit vorausgegangen ist, bevor er an die eigene Methode gelangt, welche er nochmals mit wahren Posaunenstößen ankündigt: „Es ist nun an der Zeit, daß wir die Methode, die wir selbst erfunden haben, und die nur weniges vom wahren Werte abweicht, vorlegen.“

Worin besteht diese eigene Methode? Darin, daß die Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, vorher durch Multiplikation mit 3600 in Sekunden verwandelt wird, worauf die Wurzel in der Gestalt von Minuten sich zeigt! Damit brüstet sich ein Leser von Theons Kommentar zum Almagest, der als solcher sich ausdrücklich zu erkennen gibt, indem er zugesteht, seine Methode sei doch umständlich, wenn es um recht große Zahlen sich handle, wie um die Zahl 4500, aus welcher Theon die Wurzel zu ziehen habe. Alsdann könne man aus der indischen Methode, aus der des Theon und aus seiner eigenen folgende Mischmethode bilden. Zunächst sucht er jetzt die nächste ganzzahlige Wurzel 67 und verschafft sich den Rest $4500 - 67^2 = 11$. Diese 11 Ganze werden als Minuten zu 660, und durch $2 \cdot 67 = 134$ geteilt entstehen $4'$ als Quotient. Der neue Rest $660 - 4 \cdot 134 = 124'$ wird in Sekunden verwandelt und dadurch zu 7440, wovon $16''$ d. h. das Quadrat von $4'$ abgezogen wird. Der neue Rest besteht aus $7424''$. In ihn dividiert man mit

[1]) *Ἑτέρα μέθοδος μίγμα οὖσα τῆς τε Ἰνδικῆς καὶ τοῦ Θέωνος καὶ τῆς ἡμετέρας* (ed. Gerhardt) pag. 45 lin. 3.

dem Doppelten von $67^0\ 4'$ d. h. mit $60 \cdot 134 + 2 \cdot 4 = 8048'$, nachdem man ihn selbst in $60 \cdot 7424 = 445\,440'''$ verwandelt hat. So erscheint der Quotient $55''$, und mit ihm ist die Wurzel zu $67^0\ 4'\ 55''$ ergänzt, und zwar, wie der Vergleich mit dem (S. 494) von uns gegebenen Auszuge aus Theon zeigt, genau in der von diesem gelehrten Weise, nur mit dem Umwege über die Eselsbrücke eingeschalteter Multiplikationen mit 60 vor Ausführung der die Teilziffern der Wurzel liefernden Divisionen, die einzige Beimischung, deren Maximus Planudes sich rühmen kann.

Sind aber das die großen Gedanken eines Schriftstellers, der „sich vorgenommen hat über das zu handeln, was zur astronomischen Rechnung gehört“[1]), so ist kaum anzunehmen, daß ebendemselben zwei Aufgaben eigentümlich sein sollten, mit welchen unmittelbar nach Auseinandersetzung der letzterwähnten Methode zur Quadratwurzelausziehung das Rechenbuch abschließt. Die zweite Aufgabe ist die uns schon bekannte, ein Rechteck zu finden, das einem anderen Rechtecke am Umfange gleich, an Inhalt ein Vielfaches desselben sei. Die Auflösung wird in Worten gelehrt, welche in eine Formel umgesetzt $n - 1$ und $n^3 - n$ als die Seiten des einen, $n^2 - 1$ und $n^3 - n^2$ als die Seiten des $n$mal so großen Rechtecks bezeichnen. Bei $n = 4$ entstehen die Seiten 3 und 60, beziehungsweise 15 und 48, welche wir auch im Buche des Landbaues (S. 484) fanden. Die erste Aufgabe ist eine heute gleichfalls sehr bekannte, da sie in ziemlich allen Aufgabensammlungen Platz gefunden hat. Eine Summe Geldes soll dadurch in lauter gleiche Teile zerlegt werden, daß der erste Teilhaber 1 Stück und den $n$ten Teil des Restes, der zweite alsdann 2 Stück und den $n$ten Teil des Restes, der dritte hierauf 3 Stück und den $n$ten Teil des Restes erhalte, und dieses Gesetz der Bildung der Teile bis zum letzten festgehalten bleibe. Als Auflösung wird $(n - 1)^2$ als die zu teilende Summe, $n - 1$ als die Zahl der Teilhaber erklärt. Zunächst ist freilich $n = 7$ gesetzt, doch ist ausdrücklich die Allgemeinheit der Auflösung hervorgehoben, und als Andeutung wie die Auflösung gefunden werde, der Satz bemerklich gemacht, daß immer $a^2 - 1 = (a - 1) \cdot (a + 1)$ sei. Es würde wohl einer besonderen Untersuchung wert sein, Spuren auch dieser Aufgabe zu verfolgen.

Später als Maximus Planudes lebte Nikolaus Rhabda von Smyrna mit dem Beinamen Artabasdes[2]). Er schrieb 1341 (wie man aus einer auf dieses Jahr sich beziehenden Osterrechnung zu

[1]) *Ἐπεὶ δὲ ὡς ἐν εἴδει περὶ τῶν συμβαλλομένων εἰς τὸν ἀστέρων ψῆφον διελάβομεν* (ed. Gerhardt) pag. 29, letzte Zeile. [2]) Schöll-Pinder, Geschichte der

entnehmen imstande ist) an einen Theodor Tschabuchen von Klazomenä einen Brief über Arithmetik[1]), welcher aus einer Handschrift der Pariser Bibliothek herausgegeben ist[2]). Fast das Bemerkenswerteste an ihm besteht darin, daß an dessen Schlusse eine Sammlung von Beispielen das erste uns bekannte Vorkommen der Wortverbindung politische Arithmetik[3]) bietet. Es sind Aufgaben, welche mittels Regeldetri gelöst sind. Außerdem kann noch hervorgehoben werden, daß für die Ausziehung von Quadratwurzeln die Näherungsregel $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a}$ ausdrücklich ausgesprochen ist. Wir haben es hier mit einer andern Schrift des Rhabda zu tun, mit der mehrfach, zuletzt in Gemeinschaft mit dem eben erwähnten Briefe gedruckten Abhandlung über das Fingerrechnen[4]), *ἔκφρασις τοῦ δακτυλικοῦ μέτρου*. Wir haben gesehen (S. 130), daß bei den griechischen Zeitgenossen des Lustspieldichters Aristophanes etwa um 420 v. Chr. das Fingerrechnen in Übung war. Wir haben keinerlei Grund anzunehmen, es sei jemals ganz in Vergessenheit geraten, aber doch ist die Darstellung des Rhabda die einzige in griechischer Sprache, in welcher förmlich gelehrt wird, was meistens durch mündliche Überlieferung sich fortgesetzt haben mag. Rhabda schildert aufs ausführlichste, wie man durch Beugung der Finger die einzelnen Zahlen darstellen solle. Die Finger der linken Hand dienen zur Bezeichnung der Einer und Zehner, die der rechten zur Bezeichnung der Hunderter und Tausender, und zwar ist die Aufeinanderfolge des Stellenwertes, wenn wir so sagen dürfen, von links nach rechts derart festgehalten, daß der kleine Finger, der Ringfinger und der Mittelfinger der linken Hand für die Einer, Zeigefinger und Daumen der Linken für die Zehner in Bewegung gesetzt werden, Daumen und Zeigefinger der Rechten für die Hunderter, und endlich die drei letzten Finger der Rechten für die Tausender. Wir brauchen viel-

---

griechischen Literatur III, 345 stellt die ungeheuerliche Vermutung auf, Artabasdes sei vielleicht aus *abacista* entstanden.

[1]) Gerhardts Einleitung zu seiner Ausgabe des Rechenbuchs des Maximus Planudes S. XII, Anmerkung. [2]) *Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas (texte grec et traduction) par* M. Paul Tannery. *Extrait des Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque nationale* etc. Tome XXXII, 1re Partie. Paris 1886. [3]) *μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν.* [4]) Ein Abdruck z. B. in *Nicolai Caussini de eloquentia sacra et humana libri XVI.* Lib. IX, cap. VIII, pag. 565 sq. Cöln 1681. Vgl. auch Rödiger, Ueber die im Orient gebräuchliche Fingersprache für den Ausdruck der Zahlen, im Jahresbericht der deutsch. morgenländ. Gesellsch. für 1845—46 und H. Stoy, Zur Geschichte des Rechenunterrichtes I. Theil (Jenaer Inaugural-Dissertation von 1876) S. 36 flgg.

leicht nicht einmal hervorzuheben, wie sich in dieser Reihenfolge eine Übereinstimmung mit früheren Bemerkungen unserer Einleitung (S. 6—7) zu erkennen gibt. Es können also mittels beider Hände sämtliche Zahlen von 1 bis 9999 bezeichnet werden, vollauf ausreichend für den gewöhnlichen Gebrauch und in Übereinstimmung mit der Sprachgewohnheit der Griechen, für welche 10000 das äußerste einfache Zahlwort darstellt.

Manuel Moschopulus ist wegen einer Anleitung zur Bildung von Quadratzahlen[1]) zu nennen. Dieser ungemein vielseitig gebildete Gelehrte war Schüler und Freund des Maximus Planudes und stand in schriftlichem Verkehr mit Kaiser Andronikos II. Palaeologos (1282—1328), wodurch seine Lebenszeit ziemlich genau bestimmt ist. Manuel Moschopulus hat, sagten wir, die Bildung von Quadratzahlen gelehrt, d. h. er hat gezeigt, wie man magische Quadrate herstelle, wie man die Zahlen von 1 bis zu irgend einer Quadratzahl n^2 in ebensoviele schachbrettartig geordnete Felder verteile, so daß die Summe der Zahlen in jeder Längsreihe, wie in jeder Querreihe und auch in den beiden Diagonalreihen stets dieselbe werde, natürlich $\frac{n^3+n}{2}$, da die Zahlen

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n^2 = \frac{(n^2+1)n^2}{2}$$

in n gleichsummige Reihen geordnet sind. Wenn wir sagten, Moschopulus habe die Herstellung des magischen Quadrates für irgend eine Quadratzahl n^2 gelehrt, so müssen wir von dieser Behauptung einen Teil wieder zurücknehmen. Nur zwei Hauptfälle sind erhalten, der eines ungeraden n und der eines geradgeraden n, d. h. wenn n von der Form $4m$ ist. Der dritte noch übrige Fall eines geradungeraden n, d. h. wenn n von der Form $4m + 2$ ist, fehlt in der uns erhaltenen Handschrift, es ist aber kaum zweifelhaft, daß Moschopulus auch ihn in einer verlorenen Schlußbetrachtung behandelt haben wird, wie er es zum voraus angekündigt hat[2]). Er hat dabei einen Gedanken und ein Wort benutzt, welche in der modernen Mathematik eine bedeutsame Rolle spielen, bei Moschopulus aber zuerst aufgefunden worden sind. Wir meinen den Ausdruck „Herumzählung im Kreise“[3]),

---

[1]) S. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1876, Cap IV, Historische Studien über die magischen Quadrate. Der Abdruck des griechischen Textes des Moschopulus nach einer Münchener Handschrift des XV. S. findet sich S. 195—203, dessen Diskussion S. 203—212. Vielfache kritische Bemerkungen zum Texte von A. Eberhard in der Zeitschrift Hermes XI, 434 flgg. Krumbacher S. 546—548. [2]) Günther l. c. pag. 197 lin. 2—5. [3]) Günther pag. 198, wo auch in einer Note auf die Wichtigkeit der in diesem Ausdrucke enthaltenen Anschauung aufmerksam gemacht ist.

ὥσπερ ἀνακυκλοῦντες, wo ein Kreis eigentlich gar nicht vorhanden ist, sondern an das gedacht werden muß, was man gegenwärtig zyklische Anordnung, zyklische Vertauschung und dergleichen zu nennen pflegt. Es will uns recht zweifelhaft erscheinen, ob wirklich Moschopulus selbst der Erfinder der Methoden zur Auflösung der nichts weniger als leichten zahlentheoretischen Aufgabe war. Wenn er auf Andringen des Rhabda die Niederschrift vollzog, so ist damit keineswegs gesagt, daß er Eigenes niederschrieb, und die Gesellschaft, in welcher wir Moschopulus zu nennen hatten, gibt keinenfalls der Vermutung Unterstützung, einen besonders geistreichen Erfinder mathematischer Dinge hier anzutreffen. Dazu kommt, daß uns ein Anfang fast magischer Quadrate bei Nikomachus (S. 438) begegnet ist, daß jedenfalls im X. S. magische Quadrate eine geheimnisvolle Rolle innerhalb der arabischen Philosophensekte der sogenannten lauteren Brüder spielten[1]), daß insbesondere die Quadrate mit 9, 16, 25, 36, 64 und 81 Feldern denselben bekannt waren, daß also sicherlich damals schon eine Methode vorhanden gewesen sein muß solche zu bilden.

Die Zeit griechischer Mathematik, wir wiederholen es zum letzten Male, und man wird uns am Schlusse dieses Kapitels gern glauben, war vorbei. Wenn im XV. S. die vor dem Osmanentum fliehenden letzten Byzantiner Handschriften altklassischen Wertes mit sich führten, deren Kenntnis im Abendlande zündend auf die Geister wirkte und jene glänzende Flamme entfachte, bei deren Scheine die Meisterwerke der Renaissance entstanden, so haben die Byzantiner selbst daran nicht mehr noch weniger teil als Insekten, welche wertvollen Blütenstaub mit sich führen, während sie an dem Orte der Befruchtung sich verkriechen. Wie es aber kam, daß die Griechen ihre durch Jahrhunderte bewährte mathematische Kraft verloren, das ist eine Frage, zu deren Erörterung weitläufigere Auseinandersetzungen nötig wären, als sie hier im Vorübergehen möglich und gestattet sind. Eine Einwirkung politischer Verhältnisse wird ebensosehr angenommen werden müssen, wie eine weiter und weiter abseits führende Verschiebung des wissenschaftlichen Interesses. Theologie und Jurisprudenz hatten in den Zeiten des Verfalles unserer Wissenschaft sich vorgedrängt. Die letztere insbesondere war die bevorzugte Wissenschaft der nüchtern Denkenden geworden, und daß dem so war, dazu waren wieder politische Verhältnisse die Veranlassung. Die philosophischen Griechen waren die Untertanen eines fremden

[1]) Dieterici, Die Propädeutik der Araber im X. Jahrhundert S. 42 flgg. Berlin 1865 und Günther l. c. S. 192 flgg.

Reiches geworden, dessen Gepräge sich auch ihnen um so deutlicher aufdrückte, je näher ihnen der Mittelpunkt des Reiches rückte. Die geistige Aufgabe dieses Reiches war eine andere. Ihm war es beschieden, die Rechtswissenschaft zu begründen. Seine leitenden Gedanken gab aber ein anderes Volk als die Griechen an, ein Volk, welches der Mathematik gegenüber gerade den höchstens erhaltenden Charakter an den Tag legte, den wir seit den Neuplatonikern deutlicher und deutlicher sich offenbaren sahen: das Volk der Römer.