12. Kapitel.

Alexandria. Die Elemente des Euklid.

Athen sank von seiner Höhe. Der junge makedonische Fürst, der mit 18 Jahren in der Schlacht bei Chäronea den ersten Sieg erfocht, der mit 33 Jahren aus dem Leben schied den Beinamen des Großen hinterlassend, ein Bezwinger der damals bekannten Welt, hatte auch die Wissenschaft genötigt seinen Befehlen zu gehorchen. In der eigenen Heimat ihr einen Wohnsitz anzuweisen, daran dachte er nicht. Er mochte empfinden, daß die rauhe Natur des Landes und der Menschen nicht dazu angetan waren einen Bildungsmittelpunkt abzugeben. Dafür erwuchs ein solcher in der jungen Stadt, welche Alexander auf der Landzunge gründete, die zwischen dem Mittelmeere und dem mareotischen See bis zum Nilkanal von Kanopus sich erstreckt. Als große ägyptische Hauptstadt sollte sie den Besitz des eben unterworfenen Ägyptens sichern. In Form eines ausgebreiteten makedonischen Reitermantels war der Plan der Stadt entworfen. Den Namen führte sie nach dem, dessen Machtgebot sie entstehen ließ, Alexandria[1]).

Hauptstadt Ägyptens hatte Alexandria alle Anlage das zu werden, als was Alexander selbst sie vielleicht dachte, die Hauptstadt einer Weltmonarchie von kulturbringendem Charakter, einer Monarchie, welche die verschiedenst gearteten Völker einander näher bringen, ihre Gegensätze ausgleichen, ihnen allen den Schliff griechischer Feinheit gemeinsam machen sollte. Wir brauchen gewiß nicht auseinanderzusetzen, wieso gerade in Ägypten der geeignete Ort für die Anlegung einer solchen Hauptstadt sich fand. Haben wir doch in der Wissenschaft, auf deren Geschichte es uns allein ankommt, Ägypten als ein Mutterland, wenn nicht als das Mutterland, erkennen dürfen. Gereift und gekräftigt kehrte die Mathematik nach dem Lande ihres Entstehens zurück, und es war, als ob die Sage von dem Riesen, der die Muttererde berührend aus ihre neue Stärke zieht, zur Wahrheit werden sollte. Hier auf ägyptischem Boden erprobten sich Kräfte, wie sie bisher der Mathematik noch nicht zugewandt worden waren.

[1]) Über die alexandrinische Entwicklung vgl. die Abhandlung „Alexandriner" von R. Volkmann in Paulys Realencyklopädie der klassischen Altertumswissenschaft (II. Auflage) mit reichen Quellenangaben alter und neuer Literatur, und besonders Fr. Susemihl, Geschichte der griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit (Leipzig 1891—92).

Eine in der Weltgeschichte mehr als einmal sich wiederholende Erfahrung lehrt, daß es in der Wissenschaft eine Mode gibt. Sie pflegt nicht ohne Grund aufzutreten, sie entstammt nicht gerade den Launen eines unberechenbaren Geschmackes, aber sie ist vorhanden, und ihrem Gesetze beugen sich die hervorragendsten Geister in dem Sinne, daß sie vorzugsweise der Modewissenschaft sich widmen. So gibt es Zeiten, in welchen theologische Geisteskämpfe die großen Männer beschäftigen, und Zeiten, in welchen der Kriegsruhm nur die Wissenschaft des Krieges des Denkers würdig macht; Zeiten, in welchen vorzugsweise die Rechtsbildung gelingt, Zeiten, die zur Entwicklung des Schönen dem Gedanken und der Ausführung nach führen. Das war in dem Athen des Perikles der Fall gewesen, das hatte in der Schule Platons nachgelebt. Aristoteles und die Peripatetiker verbreiteten ein vielfach gediegeneres, vielfach nüchterneres Wissen, und Nüchternheit um nicht zu sagen Trockenheit ist der Stempel, welcher der ganzen alexandrinischen Literaturperiode aufgedrückt ist, einer Zeit, welche man etwa von den Jahrzehnten nach dem Tode Alexanders des Großen bis kurz vor die Einverleibung Alexandrias in das römische Reich, etwa von 300 bis 50 v. Chr., durch volle 250 Jahre zu rechnen hat.

Ägypten war unter den Feldherren, die das Erbe des verstorbenen Weltbeherrschers untereinander teilten, dem geistig hervorragendsten, Ptolemäus, Sohn des Lagus, zugefallen, und er, der als Ptolemäus Soter 305 den Königstitel annahm, wie seine beiden Nachfolger Ptolemäus Philadelphus (285—247) und Ptolemäus Euergetes (247—222), welcher letztere durch die adulitische Inschrift wie durch das mit ihr in bestimmten Einzelheiten übereinstimmende Edikt von Kanopus (S. 78) als mächtiger Eroberer ebenso wie als Freund der Wissenschaften bezeugt wird, begründeten das Ptolemäerreich. Unter ihnen wurde Alexandria vollends, wozu die Anlage schon gegeben war, zum Sitze der exakten Wissenschaften und der Grammatik, zum Aufbewahrungsorte der großen alexandrinischen Bibliothek, zum Mittelpunkte, wohin alles strömte, wer nur in den Wissenschaften lernend oder lehrend, sich oder andere fördern wollte. Fand er doch dazu in Alexandria das sogenannte Museum, einen Verein gelehrter Männer, denen aus königlichen Mitteln ein ehrenvoller Unterhalt gewährt wurde. Die drei ersten Ptolemäer gaben, wie gesagt, den Anstoß zu dieser wissenschaftlichen Entwicklung. Ptolemäus Euergetes insbesondere vermehrte aufs bedeutsamste die Bibliothek, zu welcher er den ganzen Bücherschatz beifügte, der einst Aristoteles und Theophrastus angehört hatte. Aber auch die späteren Ptolemäer ließen nicht von der Unterstützung der Gelehrten, welche in ihrem Hause ebenso herkömmlich geworden war, wie Unzucht und Verwandtenmord.

Der erste der großen Mathematiker, welche uns in dem mit der Regierung des Ptolemäus Soter anhebenden Jahrhunderte begegnen, und welche sämtlich in Alexandria blühten oder zu Alexandria in Beziehung traten, war **Euklid**[1]). Proklus erzählt an das Mathematikerverzeichnis anknüpfend sein Auftreten in der Wissenschaft:

„Nicht viel jünger aber als diese ist Euklides, der die Elemente zusammenstellte, vieles von Eudoxus Herrührende zu einem Ganzen ordnete und vieles von Theaetet Begonnene zu Ende führte, überdies das von den Vorgängern nur leichthin Bewiesene auf unwiderlegliche Beweise stützte. Es lebte aber dieser Mann unter dem ersten Ptolemäer. Archimed nämlich gedenkt beiläufig auch in seinem ersten Buche des Euklid, und man sagt ferner, Ptolemäus habe ihn einmal gefragt, ob es nicht bei geometrischen Dingen einen abgekürzteren Weg als durch die Elemente gebe; er aber erteilte den Bescheid, zur Geometrie hin gebe es keinen geraden Pfad für Könige. Er ist somit jünger als die Schüler Platons, älter als Eratosthenes und Archimed; denn diese sind Zeitgenossen, wie Eratosthenes angibt. Seiner wissenschaftlichen Stellung nach ist er Platoniker und dieser Philosophie angehörig, daher er denn auch als Endziel seines ganzen Elementarwerkes die Konstruktion der sogenannten platonischen Körper hinstellte[2]).

Viel mehr, als in diesen Sätzen ausgesprochen ist, wissen wir nicht über die Lebensumstände des Schriftstellers, dessen Elemente unmittelbar oder mittelbar die Grundlage der gesamten Geometrie bis auf unsere Zeit geworden sind. Nicht einmal das Vaterland des Euklid steht fest, wenn wir nicht der Angabe eines syrischen Berichterstatters, des Abulpharagius, unbedingten Glauben schenken wollten, welcher ihn einen Tyrer nennt; das wird aber niemand mehr einfallen, seit nachgewiesen worden ist[3]), daß jene ganze Nachricht aus einer mißverstandenen Stelle einer Schrift des Hypsikles stammt,

[1]) Über Euklid vgl. **David Gregorys** Vorrede zu seiner großen Euklidausgabe (Oxford 1702). **Fabricius**, *Bibliotheca Graeca edit. Harless* (Hamburg 1795) IV, 44—82. **Gartz**, *De interpretibus et explanatoribus Euclidis Arabicis* (Halle 1823). Der von **Lacroix** verfaßte Artikel *Euclide* in der *Biographie universelle.* **M. Cantor**, Euklid und sein Jahrhundert im Supplementheft zu Bd. XII der Zeitschr. Math. Phys. (Leipzig 1867). **Hankel** 381—404. **Heiberg**, Literargeschichtliche Studien über Euklid (Leipzig 1882). Zur Abkürzung zitieren wir die letztgenannte Schrift künftig als **Heiberg**, Euklidstudien. Die letzte Ausgabe in sieben Bänden mit lateinischer Übersetzung von J. L. **Heiberg** und H. **Menge** (Leipzig 1883—1896). [2]) **Proklus** (ed. Friedlein) 68. [3]) **Heiberg**, Euklidstudien S. 4.

welche, wie im 17. Kapitel auseinandergesetzt werden wird, irrigerweise Euklid zugewiesen wurde. Andere wollen Euklid in Ägypten geboren sein lassen. Noch andere, aber sicherlich mit Unrecht, verwechseln ihn mit Euklides von Megara, dem Zeitgenossen Platons, welcher rund 100 Jahre früher lebte. Auffallend genug findet sich dieser Irrtum schon bei einem Schriftsteller aus dem Zeitalter des Tiberius, bei Valerius Maximus. Auch Geburts- und Todesjahr des Euklid sind durchaus unbekannt, und nur die Blütezeit[1]) um 300 etwa wird durch den ersten Ptolemäer, unter welchen sie, wie wir durch Proklus erfahren haben, gefallen sein soll, bezeugt. Von seinem Charakter hat sich bei Pappus eine höchst liebenswürdige Schilderung erhalten. Er sei sanft und bescheiden, voll Wohlwollen gegen jeden, der die Mathematik irgend zu fördern imstande war, gewesen und habe absichtlich an früheren Leistungen so wenig als möglich geändert[2]). Pappus gibt auch ausdrücklich an, daß Euklid in Alexandria gelebt habe.

Schriften des Euklid sind uns mehrfach erhalten. Das Hauptwerk bilden die **Elemente**, *στοιχεῖα*. Wir müssen annehmen, daß es an Bedeutung allen früheren Elementenwerken weit überlegen war. So schildert es uns Proklus und die Bestätigung des Urteils liegt in der Tatsache, daß alle Bücher seiner Vorgänger in dem Kampfe um das Dasein untergegangen sind, daß von Elementen, die durch einen Griechen nach Euklid verfaßt worden wären, nirgends ein Wort gesagt ist, daß vielmehr er ausschließlich gemeint zu sein scheint, wo griechische Schriftsteller später von dem Elementenschreiber schlechtweg reden, ohne einen Namen zu nennen[3]).

Die in 13 Bücher gegliederten Elemente des Euklid zerfallen in vier Hauptteile. **Erstens** behandeln sie Raumgebilde, welche auf einer Ebene gezeichnet sind und das Verhältnis ihrer gegenseitigen Größe, die teils gleich, teils ungleich ist. Im ersteren Falle genügt der Nachweis der Identität, im letzteren verlangt man etwas mehr: man will die Ungleichheit messen. Dazu aber dient die Zahl, das Maß einer jeden Größe, und folglich wird es Bedürfnis, Untersuchungen über die Zahl anzustellen. Damit ist der **zweite** Haupt-

[1]) *Γέγονε* heißt es bei Proklus und dieses bedeutet hier sicherlich „blühte" und nicht „ward geboren". Vgl. E. **Rohde** „*Γέγονε* in den Biographica des Suidas" Rheinisches Museum für Philologie XXXIII neuer Folge, 161—220 (1878). [2]) **Pappus** VII, *praefatio* (ed. **Hultsch**) 676 flgg. [3]) So **Archimed**, *De sphaera et cylindro* I, 6 (ed. **Heiberg** I, 24) wahrscheinlich mit Beziehung auf Euklid XII, 2. Diese Stelle dürfte Proklus im Auge gehabt haben, als er zum Beweis, daß Archimed später als Euklid lebte, sagte, daß dieser jenen in seinem ersten Buche erwähne.

teil des Werkes erfüllt. Die vollständig bestimmte Zahl reicht indessen nicht aus, um alle Größen zu messen, welche der geometrischen Betrachtung unterworfen werden. Es gibt vielmehr Raumgebilde, seien es nun Längen oder Flächen, welche mit der Größeneinheit derselben Art kein genau angebbares gemeinsames Maß besitzen, ohne daß sie deshalb aufhören selbst Größen zu sein. Man nennt sie nur im Gegensatze zu dem genau Meßbaren mit der Einheit inkommensurabel. Die Betrachtung solcher Inkommensurabilitäten ist somit unerläßlich, sie bildet den dritten Hauptteil des Ganzen. Endlich im vierten Teile verläßt die Betrachtung das bisher eingehaltene Feld der Zeichnungsebene, die Verhältnisse des allgemeinen Raumes werden untersucht, die gegenseitige Lage und Größe von Flächen und Körpern werden besprochen. Das ist freilich nur der ganz allgemeine Inhalt des Werkes[1]), es dürfte sich empfehlen näher auf die Einzelheiten desselben einzugehen.

Im I. Buche handelt Euklid von den Grundbestandteilen geradliniger Figuren in der Ebene, von geraden Linien, welche sich entweder schneiden und mit einer dritten Linie ein Dreieck bilden, über dessen Bestimmtheit durch gewisse Stücke gesprochen wird — Kongruenz der Dreiecke — oder welche sich nicht treffen, so weit man sie verlängert — Parallellinien. Der 32. Satz beweist mittels Ziehung einer Parallellinie durch einen Dreieckseckpunkt zu der ihm gegenüberliegenden Dreiecksseite die Gleichheit des Außenwinkels eines Dreiecks mit der Summe der beiden gegenüberliegenden inneren Winkel und läßt so die Summe der Dreieckswinkel erkennen. Von der schon Aristoteles (S. 252) bekannten Weiterführung des Satzes ist keine Rede. Um mit Hilfe der Parallellinien eine Figur zu erzielen bedarf es zweier schneidenden Geraden, und so entsteht das Viereck, insbesondere das Parallelogramm, sofern die Schneidenden selbst unter sich parallel sind. Die Eigenschaften der Parallelogramme vereinigt mit denen der Dreiecke führen zum Begriffe von Figuren, welche aus an und für sich identischen Teilen bestehen, aber nicht in identischer Weise zur gegenseitigen Deckung gebracht werden können, Gleichheit von nichtkongruenten Flächenräumen. Bei solchen Flächen kommt es also darauf an die identischen Teile abzusondern, in anderer Weise zusammenzufügen, und so lehrt der 44. Satz an eine gegebene gerade Linie unter gegebenem Winkel ein Parallelogramm anzulegen, παραβάλλειν, welches einem gegebenen Dreiecke gleich sei; es lehrt der 45. Satz die Verwandlung

[1]) In diesen klaren Umrissen hat ihn z. B. Gregory in der Vorrede seiner Euklidausgabe entworfen.

jeder geradlinigen Figur in ein Parallelogramm von gegebenen Winkeln, bis im 47. und 48. Satze das Buch mit dem interessantesten Falle einer derartigen Umwandlung, mit dem pythagoräischen Lehrsatze und dessen Umkehrung abschließt.

Das II. Buch ist gewissermaßen ein Zusatz zu dem pythagoräischen Lehrsatze. In ihm wird die Herstellung eines Quadrates aus Quadraten und Rechtecken in den verschiedensten Kombinationen, teils als Summe, teils als Differenz gelehrt, bis auch wieder eine Zusammenfassung in der Aufgabe erfolgt, ein jeder gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu zeichnen. Zugleich läßt aber dieses Buch eine andere Auffassung zu, welche mit der doppelten Bedeutung des pythagoräischen Satzes in Verbindung steht. Wir wissen, daß dieser Satz, sofern er der Arithmetik angehört, besagt, daß es zwei Zahlen bestimmter Art gebe, welche als Summe eine dritte Zahl liefern von gleicher Art wie die beiden Posten. Als Zusatz zu dem pythagoräischen Lehrsatze in diesem Sinne lehrt das II. Buch die Rechnung insbesondere die Multiplikation mit additiv und subtraktiv zusammengesetzten Zahlen. In moderner Schreibweise heißen die 10 ersten Sätze alsdann:

$$1)\ ab + ac + ad + \cdots = a(b + c + d + \cdots) \qquad 2)\ ab + a(a - b) = a^2$$
$$3)\ ab = b(a - b) + b^2 \qquad 4)\ a^2 = b^2 + (a - b)^2 + 2b(a - b)$$
$$5)\ (a - b)b + \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad 6)\ (a + b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$$
$$7)\ a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2 \qquad 8)\ 4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$$
$$9)\ (a - b)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2} - b\right)^2$$
$$10)\ (a + b)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2} + b\right)^2.$$

Als 11. Satz erscheint die Aufgabe des goldenen Schnittes. Ihre geometrische Beziehung zur Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks haben wir früher (S. 178) besprochen. Arithmetisch, oder vielmehr algebraisch aufgefaßt ist die Tragweite der Aufgabe „eine gegebene Strecke so zu schneiden, daß das aus dem Ganzen und einem der beiden Abschnitte gebildete Rechteck dem Quadrate des übrigen Abschnittes gleich sei“ dahin zu bestimmen, daß eine Auflösung der Gleichung $a(a - x) = x^2$, beziehungsweise der Gleichung $x^2 + ax = a^2$ gesucht wird[1]). Euklid findet $x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$ und beweist die Richtigkeit dieser Auflösung durch folgende Schlüsse, bei deren Dar-

[1]) Diese Auffassung der Aufgabe II, 11 dürfte zuerst bei Arneth, Geschichte der reinen Mathematik (Stuttgart 1852) S. 102 zu finden sein.

stellung wir uns die einzige Änderung gestatten, daß wir die geometrisch klingenden Wörter in algebraische Buchstaben und Zeichen umsetzen. Wegen 6) ist $\left(a + \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)\right)\left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Man zieht auf beiden Seiten $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ab, so bleibt $\left(a + \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)\right)\left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right) = a^2$, und zieht man weiter $a\left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)$ auf beiden Seiten ab, so bleibt

$$\left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)^2 = a\left(a - \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)\right).$$

Das III. Buch wendet sich zu der einzigen krummen Linie, welche der Behandlung unterzogen wird, zum Kreise und zu den Sätzen, welche auf Berührung zweier Kreise, oder eines Kreises und einer Geraden sich beziehen. Alsdann folgen Betrachtungen über die Größe von Winkeln und mit denselben irgendwie in Verbindung stehenden Kreisabschnitten. Insbesondere der 16. Satz ist im III. oder IV. S. schon Gegenstand beiläufiger Erörterung, in späteren Zeiten Ausgangspunkt interessanter Streitigkeiten zwischen Gelehrten des XVI. und XVII. S. geworden und dadurch, aber auch durch seinen Inhalt bemerkenswert. Er behauptet nämlich, vielleicht in Anschluß an Demokrit (S. 192), der Winkel, welchen der Kreisumfang mit einer Berührungslinie bildet, sei kleiner als irgend ein geradliniger spitzer Winkel. Dieser gemischtlinige Winkel heißt bei Proklus[1]) hornförmiger Winkel, *γωνία κερατοειδής*, ein Name, der bei Euklid noch nicht vorkommt. In den Definitionen, welche den einzelnen Büchern vorausgeschickt werden, ist sogar von ihm keine ausdrückliche Rede. Im ersten Buche heißen die 8. und 9. Definition: „Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien gegeneinander, wenn solche in einer Ebene zusammenlaufen ohne in einer geraden Linie zu liegen. Sind die Linien, die den Winkel einschließen, gerade, so heißt derselbe ein geradliniger Winkel." Dazu ergänzt die 7. Definition des III. Buches: „Der Winkel des Abschnittes ist der vom Umkreise und der Grundlinie eingeschlossene Winkel", aber den Winkel, wenn man von einem solchen reden darf, auf der konvexen Bogenseite gegen die Berührungslinie hin erläutert der Verfasser nicht. Endlich schließt das III. Buch mit den einzeln betrachteten Fällen zweier Geraden, die sich gegenseitig und

[1]) Proklus (edit. Friedlein) pag. 104 und öfters.

ebenso einen Kreis schneiden, und aus deren Abschnitten gewisse Rechtecke zusammengesetzt werden, welche Flächengleichheit besitzen. Mit Rücksicht darauf, daß im 16. Satze des III. Buches das erste Vorkommen des in späteren Zeiten so wichtigen Tangentenproblems sich zeigt, möge Euklids Betrachtung erörtert werden. Ist (Fig. 42a) EA senkrecht zu BA, so liegt kein Punkt derselben innerhalb des Kreises. Wäre es nicht so, so müßte diese zum Kreisdurchmesser senkrechte Gerade einen zweiten Punkt Γ mit der Kreislinie gemein haben und das Dreieck $A\Gamma\Delta$ gebildet werden können, in welchem $\Delta A = \Delta\Gamma$, also auch die Winkel bei A und Γ einander gleich sein müßten, während ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln unmöglich ist. Ferner ist eine Gerade AZ zwischen AE und dem Kreise unmöglich. Gäbe es eine solche und ΔH wäre senkrecht zu ihr, so müßte im Dreiecke $A\Delta H$ der Winkel bei H der größte sein und demnach $A\Delta = \Delta\Theta > \Delta H$ sein, was unmöglich ist. Ein spitzer Winkel $EAH < EA\Theta$ existiert also nicht.

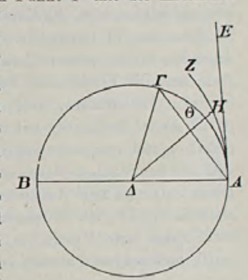

Fig. 42a.

Der Schüler wird nun im IV. Buche weiter mit den Figuren bekannt gemacht, welche entstehen, wenn mehr als zwei Gerade mit dem Kreise in Verbindung treten. Er lernt die dem Kreise ein- und umschriebenen Vielecke insbesondere die regelmäßigen Vielecke kennen. Unter diesen ist das Fünfeck, und dessen Konstruktion macht die erste Anwendung des im II. Buche, wie wir entwickelten, zu anderem Zwecke gelehrten goldenen Schnittes notwendig. Das IV. Buch kommt an den äußersten mit den bisherigen Mitteln erreichbaren Zielpunkten an. Die Gleichheit von Strecken und Flächenräumen ist nach allen Seiten erörtert.

Nun kommt die Ungleichheit in Betracht, insofern sie gemessen werden kann, und zwar ist diese Messung eine zweifache, eine geometrische und eine arithmetische. Beide beruhen auf der Lehre von den Proportionen, welche deshalb in dem V. Buche an dem Sinnbilde gerader Linien in vollständiger Ausführlichkeit dargelegt wird. Die im Verhältnisse aufgefaßten Größen sind als Linien gezeichnet, damit nicht hier schon der Schwierigkeit zu begegnen sei, eine Unterscheidung zu treffen, je nachdem Kommensurables oder Inkommensurables auftritt. Die Linien sind aber nur nebeneinander gezeichnet, ohne Figuren zu bilden, damit man einsehe, wie es sich hier um allgemeineres handle als um die Vergleichung geometrischer Gebilde.

Erst das VI. Buch zieht die geometrischen Folgerungen aus dem im V. Buche Erlernten. Die Ähnlichkeit von Figuren geht aus der Proportionenlehre hervor und dient selbst wieder dazu Proportionen an geometrischen Figuren zur Anschauung zu bringen. Dabei kommt der Begriff des zusammengesetzten Verhältnisses vor, welcher vermutlich schon Philolaus (S. 161) bekannt war[1]) und welcher später (vgl. 20. Kapitel) von großer Bedeutung wurde. Im 23. Satze des VI. Buches ist von dem Verhältnisse je zweier gleichliegenden Seiten zweier Parallelogramme mit gleichen Winkeln die Rede, und die Flächen der Parallelogramme, heißt es weiter, stehen in einem Verhältnisse, welches aus dem der Seiten zusammengesetzt ist[2]). Auch Archimed, wir wollen das gleich hier erwähnen, hat mehrfach mit zusammengesetzten Verhältnissen zu tun, wenn auch in von der euklidischen Redewendung etwas abweichendem Wortlaute[3]). Einen Satz und zwei Aufgaben dieses Buches, welche die Bezeichnung als Satz 27., 28., 29. führen, müssen wir besonders erwähnen. Satz 27. enthält das erste Maximum, welches in der Geschichte der Mathematik nachgewiesen worden ist, und welches als Funktion geschrieben besagen würde: $x(a-x)$ erhalte seinen größten Wert durch $x = \frac{a}{2}$. In den beiden darauf folgenden Aufgaben hat man die Auflösungen der beiden Gleichungen $x(a-x) = b^2$ und $x(a+x) = b^2$ erkannt. Der 27. Satz erscheint bei der unmittelbaren Aufeinanderfolge von 27. und 28. unzweifelhaft als der Diorismus des letzteren. Es darf eben b^2 nicht größer sein als $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, wenn die Aufgabe lösbar sein soll[4]). Geometrisch ausgesprochen haben die beiden Aufgaben in Satz 28. und 29. gleichfalls einen, wie spätere Erörterungen uns lehren sollen, hochwichtigen Inhalt. Es handelt sich um die Anlegung eines einem gegebenen Parallelogramme gleichwinkligen Parallelogramms an eine gerade Linie, welches um so viel größer (kleiner) an Fläche als eine gleichfalls gegebene Figur sei, daß wenn so viel abgeschnitten (zugesetzt) wird, als nötig ist um Flächengleichheit zu

[1]) Newbold in dem Archiv für Geschichte der Philosophie Bd. XIX Heft 2 (1905). [2]) *λόγος συγκείμενος ἐκ (τῶν) τῶν πλευρῶν (λόγων).* *Euclidis Elementa* (ed. Heiberg, Leipzig 1883—88) II, 146 lin. 14. [3]) *ὁ λόγος τῆς Α πρὸς τὴν Β συνῆπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς τὴν Δ καὶ ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.* Archimedes (ed. Heiberg) I, 212 lin. 19—21 und häufiger. [4]) Diese Auffassung zuerst vertreten bei Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878, S. 926—931.

erzielen, dieses Stück selbst dem erstgegebenen Parallelogramme ähnlich werde. Euklid drückt diese Forderung durch die Worte aus, der Flächeninhalt Γ solle an der Linie AB etwas übrig lassen, *ἐλλείπει*, oder darüber hinausfallen, *ὑπερβάλλει*.

Das VII., VIII. und IX. Buch beschäftigen sich mit der Lehre von den Zahlen. Der nächste Zweck ist das arithmetische Messen der Ungleichheit, also diejenigen Folgerungen aus der Proportionenlehre zu ziehen, welche an Zahlengrößen hervortreten. Allein damit verbindet Euklid, vielleicht weil nirgend eine passendere Gelegenheit sich finden wird, eine Zusammenstellung aller ihm bekannten Eigenschaften der ganzen Zahlen. Rechnungsoperationen mit denselben hat er, wie wir uns erinnern, schon im II. Buche ausführen lassen. Das VII. Buch beginnt mit Definitionen, unter welchen wir die der Primzahl, *πρῶτος ἀριθμός*, und der zusammengesetzten Zahl, *σύνθετος ἀριθμός*, hervorheben wollen. Daran knüpft sich die Unterscheidung von teilerfremden Zahlen, *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*, und von solchen, welche ein gemeinsames Maß besitzen, *σύνθετοι πρὸς ἀλλήλους*, sowie die Auffindung dieses letzteren. Euklid findet dasselbe vollständig in der heute noch üblichen Weise durch fortgesetzte Teilung des letztmaligen Divisors durch den erhaltenen Rest, mithin, wenn wir es nicht scheuen auch moderne Namen zu gebrauchen, wo moderne Verfahren angewandt sind, durch einen Kettenbruchalgorithmus. Dann ist von Zahlen die Rede, welche dieselben Teile anderer Zahlen sind, wie wieder andere von vierten, und damit ist also die Zahlenproportion eingeführt. Abgesehen von den vielen neuen Proportionen, welche in der mannigfaltigsten Weise aus den erstgegebenen abgeleitet werden, führt der Satz von der Gleichheit der Produkte der inneren und der äußeren Glieder einer Proportion auf die Teilbarkeit eines solchen Produktes durch einen der Faktoren des anderen Produktes und zur Teilbarkeit überhaupt. Der Rückweg zur Untersuchung teilerfremder Zahlen ist damit gewonnen, und den Schluß des Buches bildet die Auffindung des kleinsten gemeinsamen Dividuums gegebener Zahlen.

Das VIII. Buch setzt die Lehre von den Proportionen fort, indem es zu Gliedern der Proportion nur solche Zahlen wählt, welche selbst Produkte sind, und zwar zum Teil Produkte aus gleichen Faktoren. An die früheren geometrischen Lehren erinnern eben noch die Benennungen, welche in diesem Buche zur Anwendung gelangen: Flächenzahlen, ähnliche Flächenzahlen, Quadratzahlen, Körperzahlen, Kubikzahlen, lauter Wörter, deren Erklärung wir in früheren Kapiteln zu geben Gelegenheit hatten. Vieleckszahlen anderer Art als die Quadratzahlen kommen bei Euklid nicht vor.

Das IX. Buch setzt gleichfalls denselben Gegenstand fort. Im 12. Satze findet sich, vermutlich zum ersten Male in der mathematischen Literatur, eine besondere Abart der apagogischen Beweisführung (S. 221). Aus der Annahme der Unwahrheit einer Tatsache wird ihre Wahrheit gefolgert. Der Satz selbst spricht aus, daß wenn 1, A, B, Γ, Δ eine geometrische Reihe bilden und eine Primzahl E in Δ enthalten ist, die gleiche Primzahl auch in A enthalten sein muß. Ist E nicht in A enthalten, so muß, weil E Primzahl ist, E gegen A teilerfremd sein. Nun ist Δ durch E teilbar, etwa $\Delta = E \cdot Z$, andererseits $\Delta = A \cdot \Gamma$, mithin $E \cdot Z = A \cdot \Gamma$ und $E : A = \Gamma : Z$. Danach muß Z ein Vielfaches von A und Γ ein Vielfaches von E sein, etwa $\Gamma = E \cdot H$. Daneben ist $\Gamma = A \cdot B$, also $E \cdot H = A \cdot B$ und $E : A = B : H$. Daraus folgt H als Vielfaches von A, B als Vielfaches von E, etwa $B = E \cdot \Theta$. Daneben ist $B = A \cdot A$, also $E\Theta = A \cdot A$ und $E : A = A : \Theta$. Daraus ergibt sich Θ als Vielfaches von A und A als Vielfaches von E. Etwas später geht das IX. Buch dadurch zu anderweitigen Betrachtungen über, daß es besondere Rücksicht auf etwa in einer Proportion vorkommende Primzahlen nimmt. Bei dieser Gelegenheit wird nämlich ziemlich außer allem Zusammenhange als 20. Satz bewiesen, daß die Menge der Primzahlen größer sei als jede gegebene Menge derselben, wofür wir kürzer sagen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Noch weniger Zusammenhang ist von dem 20. Satze zu den ihm nachfolgenden Sätzen wahrnehmbar. Mancherlei Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen, von deren Summen und deren Produkten werden erörtert, bis der 35. Satz die Summierung der geometrischen Reihe lehrt und auf diejenige geometrische Reihe angewendet, welche von der Einheit beginnend durch Verdoppelung der Glieder weiterschreitet, endlich im 36. Satze wieder zu den Primzahlen zurückführt und so das Bewußtsein erweckt, wie Euklid bei scheinbarem Abspringen von seinem Thema es immer unverrückt im Auge behält. Jener 36. Satz gibt nämlich an, die Summe der Reihe $1 + 2 + 4 + 8 \cdots$ sei mitunter eine Primzahl. Dieses tritt z. B. ein, wenn die Reihe aus 2, aus 3, aus 5 Gliedern besteht. Werde diese die Summe darstellende Primzahl mit dem letzten in Betracht gezogenen Gliede der Reihe vervielfacht, so entstehe eine vollkommene Zahl (eine Zahl, welche der Summe aller ihrer Teiler gleich ist).

Im X. Buche ist der dritte Hauptteil des euklidischen Werkes behandelt, die Lehre von den Inkommensurablen, und auf die große Bedeutung, die dem Umstande beizumessen ist, daß diesem Gegenstande ein ganzes Buch gewidmet ist, kommen wir im folgenden Kapitel zurück. An der Spitze des Buches steht der Satz,

welcher bei Euklid die Grundlage der Exhaustionsmethode bildet, der Satz: „Sind zwei ungleiche Größen gegeben, und nimmt man von der größeren mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte und so immer fort, so kommt man irgend einmal zu einem Reste, welcher kleiner ist als die gegebene kleinere Größe.“ Dieser Satz, wesentlich verschieden von dem, dessen sich (S. 242) Eudoxus und vielleicht schon Hippokrates zu ähnlichen Zwecken bediente, ist in dieser Form vielleicht Euklids Eigentum, vielleicht auch dessen, von welchem das X. Buch der Hauptsache nach herrührt. Fürs erste freilich zieht Euklid keine Folgerung aus ihm, nicht einmal die, welche man vor allen Dingen erwarten sollte, daß wenn zwei Größen inkommensurabel sind, man immer ein der ersten Größe Kommensurables bilden könne, welches von der zweiten Größe nur um beliebig Weniges unterscheide. Statt dessen sind zwar geistvolle aber doch nach unseren Begriffen maßlos weitläufige Untersuchungen[1] darüber angestellt, unter welchen Voraussetzungen Größen sich wie gegebene Zahlen verhalten, also kommensurabel sind, und unter welchen Voraussetzungen keine solche Zahlen sich finden lassen, die Größen also inkommensurabel sind. Ein besonderes Gewicht legt Euklid auf die Irrationalzahlen, deren er vielfältig unterschiedene Formen aufzählt. Dabei ist zu beachten, daß das Inkommensurable, ἀσύμμετρον, des Euklid sich mit unserem Begriffe der Irrationalzahl deckt, während sein Rationales, ῥητόν, und Irrationales, ἄλογον, von dem, was wir unter diesen Wörtern verstehen, abweicht. Rational ist ihm das an sich und das in der Potenz Meßbare, d. h. diejenigen Linien sind rational, welche selbst durch die Längeneinheit oder deren Quadratfläche durch die Flächeneinheit genau ausmeßbar sind, also a sowohl als $\sqrt{a}$, während das Wort irrational für jeglichen mit Wurzelgrößen behafteten Ausdruck außer der einfachen Quadratwurzel $\sqrt{a}$ Anwendung findet. Demgemäß ist das Produkt a mal $\sqrt{b}$ oder $\sqrt{a}$ mal $\sqrt{b}$ bei Euklid irrational, weil jedes dieser beiden Produkte als Produkt schon eine Fläche bedeutet, also nicht mehr „in der Potenz meßbar“ sein kann. Irrational ist um so mehr die Linie,

[1] Vgl. Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 165—182. Diesem Werke entnehmen wir auch die Übersetzungen der Namen der verschiedenen Formen von Irrationalzahlen. Wie schwer auch geistreiche Mathematiker sich oft in diesem X. Buche zurecht zu finden vermochten, dafür dient als Beispiel ein durch A. Favaro (Galileo Galilei e lo studio di Padova II, 267) veröffentlichter Brief von Benedetto Castelli. Unter dem 1. April 1607 schrieb dieser an Galilei, er sei bei dem 40. Satze des X. Buches stecken geblieben *suffocato dalla moltitudine de vocaboli, profondità delle cose e difficoltà di demonstrationi.*

welche $a \cdot \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ als Quadrat besitzt, d. h. $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\sqrt[4]{ab}$ und diese Gattung von Irrationalitäten heißt *μέση*, die Mediallinie. Addition und Subtraktion zweier Längen, von denen mindestens eine inkommensurabel ist, gibt die Irrationalität von zwei Benennungen, *ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων*, und die durch Abschnitt Entstandene, *ἀποτομή*, d. h. die Binomialen $a + \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ und die Apotomen $a - \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} - b$ oder $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Wir würden allzu weitschweifig werden müssen, wenn wir alle Verbindungen zwischen diesen Medialen, Binomialen und Apotomen erörtern wollten, welche in dem X. Buche vorkommen. Statt dessen nur die Bemerkung, daß wir hier wieder ein Beispiel praktischer Kombinatorik vor uns haben, indem alle Verschiedenheiten berücksichtigt sind, die überhaupt eintreten können. Eines freilich ist vorausgesetzt, daß nämlich nur Wiederholungen von Quadratwurzelausziehungen vorkommen, daß also sämtliche im X. Buche behandelten Irrationalitäten der Konstruktion mit Hilfe von Zirkel und Lineal unterworfen sind, und solche Irrationalitäten sollen uns von nun an euklidische Irrationalitäten heißen, wie sie tatsächlich in späterer Zeit genannt worden sind. Wir heben zwei Sätze des X. Buches besonders hervor, das erste Lemma, welches auf Satz 29. folgt, und welches zwei Quadratzahlen bilden lehrt, deren Summe wieder Quadratzahl ist, und den letzten Satz des Buches von der gegenseitigen Inkommensurabilität der Seite und der Diagonale eines Quadrates. Letzteren Satz haben wir nebst seinem mutmaßlich altpythagoräischen Beweise daraus, daß sonst Gerades und Ungerades einander gleich wären, schon (S. 182) besprochen. Die Herstellung rationaler rechtwinkliger Dreiecke ist uns auch kein neuer Gegenstand. Methoden des Pythagoras (S. 186) und des Platon (S. 224) sind uns bekannt geworden, jene von ungeraden, diese von geraden Zahlen ausgehend. War nämlich aus $a^2 = b^2 + c^2$ die Folgerung $c^2 = (a + b)(a - b)$ gezogen, und daraus die weitere Folgerung, daß $a + b$ und $a - b$ ähnliche Flächenzahlen sein müssen, so nahmen wir an, daß jene Männer die besonders einfachen Versuche angestellt hätten, einmal $a - b = 1$ und einmal $a - b = 2$ zu setzen. Das Verfahren des Euklid kann als Bestätigung unserer Vermutungen gelten. Nach der besonderen Annahme konnte und mußte man dazu übergehen für $a + b$ und $a - b$ irgend welche ähnliche Flächenzahlen zu wählen, und dieses tat Euklid. Er läßt ähnliche Flächenzahlen, d. h. solche, welche proportionierte Seiten haben (Definition 21. des VII. Buches), und deren Produkt eine Quadratzahl geben muß (Satz 1. des IX. Buches), bilden, etwa $\alpha \cdot \beta^2$ und $\alpha \cdot \gamma^2$, und verlangt dabei, daß beide gerade oder beide ungerade seien, damit ihr Unterschied halbierbar ausfalle. Unter dieser Voraussetzung

wird sodann $\alpha\beta^2 \cdot \alpha\gamma^2 + \left(\frac{\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2}{2}\right)^2$, mithin sind die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$, $\frac{\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2}{2}$, $\frac{\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2}{2}$ gefunden.

Wir haben noch den Inhalt des letzten Hauptteiles der euklidischen Elemente anzugeben, der in dem XI., XII. und XIII. Buche enthaltenen Stereometrie. Im XI. Buche beginnt diese Lehre genau in der Weise, wie sie auch heute noch behandelt zu werden pflegt, mit den Sätzen, welche auf parallele und senkrechte gerade Linien und Ebenen sich beziehen, woran Untersuchungen über Ecken sich schließen. Alsdann wendet sich der Verfasser zu einem besonderen Körper, dem Parallelepipedon und geht nur in dem letzten Satze des Buches zu dem allgemeineren Begriffe des Prisma über.

Das XII. Buch enthält die Lehre von dem Maße des körperlichen Inhaltes der Pyramide, des Prima, des Kegels, des Zylinders und endlich der Kugel. Eine wirkliche Berechnung findet sich allerdings bei Euklid nie, weder wo von Flächeninhalten noch wo von Körpermaßen die Rede ist, und namentlich bei solchen Raumgebilden, zu deren Erzeugung Kreise oder Kreisstücke beitragen, ist nirgend angegeben, wie man eigentlich zu rechnen habe. Sollte die Ausrechnung des Kreisinhaltes von den Ägyptern bis zu Euklid verloren gegangen sein? Die Unwahrscheinlichkeit dieser Annahme der mehrfachen Beschäftigung mit der Quadratur des Kreises bei Anaxagoras, bei Antiphon, bei Bryson, bei Hippokrates gegenüber wird vollends für einen in Alexandria lebenden Mathematiker zur Unmöglichkeit. Ägypten, welches das Althergebrachte mit Zähigkeit festhielt, welches ein Exemplar des Rechenbuches des Ahmes noch mehr als 2000 Jahre später als Euklid uns unversehrt überliefert hat, war nicht das Land, in welchem so unbedingt Notwendiges wie die Kreisrechnung vergessen wurde, und ebensowenig läßt sich annehmen, daß die ägyptische Geometrie den griechischen Gelehrten, welche unter dem Schutze des ägyptischen Königs sich dort aufhielten, unbekannt hätte bleiben können. Wir stehen vielmehr hier vor einer absichtlichen Weglassung, vor einem grundsätzlichen Widerstreite zwischen Geometrie und Geodäsie. Letztere, deren Vorhandensein zur Zeit des Aristoteles wir (S. 252) hervorgehoben haben, war ihrem Wesen nach eine rechnende Geometrie. In der eigentlichen oder theoretischen Geometrie war Rechnung als solche ausgeschlossen. Aristoteles hat ausdrücklich gesagt: „Man kann nicht etwas beweisen, indem man von einem anderen Genus ausgeht, z. B. nichts Geometrisches durch Arithmetik ... Wo die Gegenstände so verschieden sind, wie Arithmetik und Geometrie, da kann man nicht die arithmetische Beweisart auf das, was den Größen überhaupt zukommt, anwenden, wenn nicht die Größen Zahlen sind, was nur in gewissen Fällen vorkommen kann"[1]). Der Ausdruck, die Größen seien nur in gewissen Fällen Zahlen, bezieht sich vermutlich auf irrationale Strecken, welche als Nichtzahlen galten, und dieser Ausnahme zuliebe dürfte das V. Buch der Elemente entstanden sein. Was aber von den Beweisen gesagt ist, scheint auch auf Rechnungsoperationen ausgedehnt worden zu sein. So zeigt also Euklid in diesem XII. Buche nur, daß Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser sich verhalten, was Hippokrates von Chios schon wußte; er zeigt, daß, wie die Pyramide der dritte Teil des Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche ist, ein ganz gleichlautender Satz für Kegel und Zylinder stattfindet, was Eudoxus von Knidos schon erkannt hatte; er schließt mit dem Satze, daß Kugeln im dreifachen Verhältnisse ihrer Durchmesser stehen. Euklid benutzt zum Beweise dieser Sätze den an der Spitze des X. Buches stehenden Satz von der Möglichkeit durch fortgesetzte Halbierung einen beliebigen Grad der Kleinheit zu erreichen. Geben wir als Beispiel seines Verfahrens den Satz vom Kreise, wobei wir, wie schon öfter, zur bequemeren Übersicht uns moderner Zeichen bedienen, im übrigen aber uns genau an Satz 2. des XII. Buches anschließen. Vorausgeschickt ist der Satz, daß die Flächen ähnlicher in zwei Kreise eingeschriebener Vielecke sich wie die Quadrate der Durchmesser der betreffenden Kreise verhalten. Heißen nun K_1 und K_2 die beiden Kreisflächen, deren Durchmesser δ_1 und δ_2 sind, so sei angenommen, daß $K_1 : K_2$ in kleinerem Verhältnisse stehen wie $\delta_1^2 : \delta_2^2$. Sicherlich gibt es eine Oberfläche Ω, welche dem Verhältnisse $K_1 : \Omega = \delta_1^2 : \delta_2^2$ genügt, und weil $K_1 : K_2 < K_1 : \Omega$, so wird $K_2 > \Omega$ sein müssen. Dann ist es aber unmöglich, daß dasselbe Verhältnis $\delta_1^2 : \delta_2^2$ auch obwalte zwischen einer Fläche, die kleiner ist als K_1 und einer anderen, die größer ist als Ω, und gleichwohl läßt sich das Vorhandensein eines solchen unmöglichen Verhältnisses unter der gemachten Voraussetzung nachweisen und damit die Unzulässigkeit der Voraussetzung selbst. Denn beschreibt man in K_1 und K_2 einander ähnliche Vielecke Φ_1 und Φ_2, so ist jedenfalls $\Phi_1 : \Phi_2 = \delta_1^2 : \delta_2^2$ und zugleich $\Phi_1 < K_1$. Es genügt also noch zu zeigen, daß es ein Φ_2 gibt, welches größer als Ω und kleiner als K_2 ist, und dazu wird die Exhaustion angewandt. Ein dem Kreis umschriebenes Quadrat ist offenbar größer als der Kreis und zugleich genau doppelt so groß als das dem Kreise eingeschriebene Quadrat. Mithin ist letzteres größer als die halbe Kreisfläche, oder unterscheidet sich von der Kreisfläche um weniger als deren Hälfte. Wird in jedem der vier

[1]) Aristoteles, Analyt. post. I, 7. 75, a.

diesen Unterschied bildenden Kreisabschnitte der Bogen halbiert und mit dem Halbierungspunkte und den Endpunkten als Spitzen ein Dreieck gebildet, so ist dieses die Hälfte eines Rechtecks, innerhalb welches der Kreisabschnitt eingeschlossen liegt, also größer als die Hälfte des Abschnittes. Das entstandene Achteck unterscheidet sich somit von dem Kreise um weniger als den vierten Teil desselben. Ebenso wird zu zeigen sein, daß der Unterschied zwischen dem regelmäßigen Vielecke von 16 Seiten und seinem Umkreise geringer als $\frac{1}{8}$ der Kreisfläche ist. Bei jedesmaliger Verdoppelung der Seitenzahl des Vielecks wird der Flächenunterschied desselben gegen den Kreis mehr als nur halbiert, und schon immerwährende Halbierung genügt nach dem Satze der Exhaustion, um jede beliebige Grenze der Kleinheit zu erreichen. Es ist also damit sichergestellt, daß endlich ein Vieleck Φ_2 erscheinen muß, dessen Fläche sich von der des Kreises um weniger als Δ unterscheidet, wenn $\Delta = K_2 - \Omega$ ist, und das ihm ähnliche dem Kreise K_1 eingeschriebene Vieleck ist jenes zugehörige Φ_1, welches den ersten Widerspruch liefert. Der Beweis, daß auch nicht $K_1 : K_2 > \delta_1^2 : \delta_2^2$ sein kann, wird auf den früheren Fall zurückgeführt. Jene Annahme setzt nämlich zugleich voraus, daß $K_2 : K_1 < \delta_2^2 : \delta_1^2$, und die Unmöglichkeit dieser Voraussetzung zu beweisen hat man bereits gelernt. Keine dieser beiden Annahmen findet also statt, sondern nur die zwischen ihnen liegende $K_1 : K_2 = \delta_1^2 : \delta_2^2$. Das ist der von Euklid eingeschlagene Weg, der in jedem einzelnen Falle mit aller Strenge in ermüdender Einförmigkeit eingehalten wird, ohne daß jemals eine Abkürzung des Verfahrens für statthaft angesehen würde.

Das XIII. Buch endlich kehrt zu einem Gegenstande zurück, dem das IV. Buch teilweise gewidmet war. Es handelt von den regelmäßigen einem Kreise eingeschriebenen Vielecken, insbesondere von den Fünfecken und Dreiecken. Dann aber benutzt es diese Figuren als Seitenflächen von Körpern, welche in eine Kugel eingeschrieben werden und schließt mit der wichtigen Bemerkung, daß es keine weiteren regelmäßigen Körper geben könne als die fünf zuletzt erwähnten, nämlich das Tetraeder, das Oktaeder, das Ikosaeder, die von Dreiecken begrenzt sind, der Würfel, dessen Seitenflächen Quadrate sind, das Dodekaeder, welches von Fünfecken eingeschlossen ist.

Wir haben von diesem merkwürdigen Werke einen weit ausführlicheren Auszug hier mitgeteilt als von den meisten der bisher besprochenen. Die Wichtigkeit des Werkes rechtfertigt unser Verfahren. Sie rechtfertigt zugleich die Frage nach dem Zwecke, welchen

Euklid bei der Niederschrift im Auge hatte. Proklus sagt uns, wie wir oben (S. 260) erwähnten, Euklid habe als Endziel seines ganzen Elementenwerkes die Konstruktion der sogenannten platonischen Körper hingestellt[1]). Daß dieses unrichtig ist bedarf für den, der auch nur unseren Auszug mit einiger Aufmerksamkeit gelesen hat, keiner Auseinandersetzung. Die künstlerisch vollendete Gliederung des Werkes machte es möglich, daß es in dem einen Gipfelpunkte abschloß, aber der Zweck des Werkes war nur durch dessen ganzen Verlauf gegeben und erfüllt. Die 13 Bücher der Elemente sind sich selbst Zweck. „Elemente werden die Dinge genannt, deren Theorie hindurchdringt zum Verstehen der anderen, und von welchen aus die Lösung ihrer Schwierigkeiten uns gelingt“[2]). So sagt derselbe Proklus an einer anderen Stelle mit viel treuerer Wiedergabe dessen, was beabsichtigt war. Euklid wollte, wie die übrigen Elementenschreiber vor ihm es schon versucht hatten, eine vollständige Übersicht aller Teile der Mathematik geben, welche in den folgenden Teilen der Wissenschaft zur Anwendung kommen, wollte zugleich die enzyklopädisch zusammengestellten und geordneten Dinge auf strenge Beweise stützen, welche einen Zweifel nicht aufkommen lassen, sondern vielmehr gestatten wie in eine Rüstkammer blindlings dorthin zu greifen mit der Gewißheit stets eine tadellose Waffe zu erfassen.

Wieweit wir Euklid als selbständigen Verfasser seines Werkes zu bezeichnen haben, ist kaum zu sagen. Jeder Verfasser eines Handbuches irgend eines Teiles der Mathematik ist von seinen Vorgängern abhängig, und man muß die Schriften der letzteren kennen, um abzuschätzen, wieweit er von den vorgetretenen Bahnen sich entfernte. Euklid war ohne allen Zweifel ein großer Mathematiker. Dieses Urteil werden die übrigen Schriften, die er verfaßt hat, rechtfertigen. Damit stimmt auch die Bewunderung, welche alle Zeiten seinem vorzugsweise bekannt gewordenen Elementenwerke entgegenbrachten, überein, und der von uns schon hervorgehobene Umstand, daß im Schatten dieses Riesenwerkes die früher vorhandenen ähnlichen Erzeugnisse verkümmerten und zugrunde gingen, spätere nicht entstehen konnten. Auch die wenigen Beweise, deren Ursprung mit Bestimmtheit auf Euklid sich zurückführt — wir erinnern an den Schulbeweis des pythagoräischen Lehrsatzes — lassen in Euklid den feinen geometrischen Kopf erkennen. Ein großer Mathematiker wird auch da, wo er anderen folgt, seine Eigentümlichkeit nicht ganz

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 68 *τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατονικῶν σχημάτων σύστασιν.* [2]) Proklus (ed. Friedlein) 72, 3—6.

verleugnen, und so war es sicherlich auch bei Euklid. Aber wo haben wir diese Eigentümlichkeit zu suchen? Das ist und bleibt wohl eine unbeantwortbare Frage, um so unbeantwortbarer als Pappus, wie wir gleichfalls schon (S. 261) hervorgehaben haben, den Euklid geradezu wegen seiner pietätvollen Anlehnung an ältere Schriftsteller lobt, und wenn Pappus dabei allerdings ein anderes Werk des Euklid im Auge hat, so dürfte sich diese Charaktereigenschaft auch in den Elementen nicht verleugnet haben.

Wir sind sogar tatsächlich imstande einige und nicht unwesentliche Stellen des großen Werkes anzugeben, in welchen, wie wir schon früher sahen, Euklid nicht selbständig gearbeitet hat. Das V. Buch gehört, wie wir (S. 241) einem alten Scholiasten nacherzählt haben, dem Eudoxus an. Von ebendemselben stammen nach aller Wahrscheinlichkeit die fünf ersten Sätze des XIII. Buches. Spuren von Vorarbeiten des Theaetet sind (S. 237) im X. Buche nicht zu verkennen. Das stimmt gleichfalls mit der Aussage des Proklus überein, daß Euklid „vieles von Eudoxus Herrührende zu einem Ganzen ordnete und vieles von Theaetet Begonnene zu Ende führte“ (S. 260). Eben diese alten Spuren geben uns aber Veranlassung zur Untersuchung einer anderen Frage.

Die Form des V., des X., des XIII. Buches ist von der der anderen Bücher nicht im mindesten verschieden. Höchstens könnte man betonen, daß, während sonst überall nur synthetisch verfahren ist, die fünf ersten Sätze des XIII. Buches Analyse und Synthese verbinden. Aber auch bei ihnen ist die Form, welche man euklidische Form zu nennen pflegt, gewahrt. Der Lehrsatz ist ausgesprochen, die Vorschrift was an der Figur vorgenommen werden soll ist erteilt, der Beweis schließt sich an. Und in anderen Fällen ist eine Aufgabe gestellt. Ihr folgt die Auflösung, dieser die zum Beweise der Richtigkeit der Auflösung nötigen Vorbereitungen durch Ziehen von Hilfslinien usw. und endlich der Beweis selbst. „Was zu beweisen war“, *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* (quod erat demonstrandum) ist die Schlußformel des Lehrsatzes oder Theorems, bei welchem es sich um den Nachweis, *ἀπόδειξιν*, des Behaupteten handelt. Die Aufgabe, das Problem, bei welchem es auf die Ausführung, *κατασκευὴν*, des Geforderten ankommt, hat eine ganz ähnliche Schlußformel: „Was zu machen war,“ *ὅπερ ἔδει ποιῆσαι* (quod erat faciendum). Euklid habe diese Schlußformeln benutzt, sagt uns Proklus[1]), und der Augenschein bestätigt es. Aber rühren diese Schlußworte, rührt die ganze Form von Euklid her?

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 81.

Wir bezweifeln es aufs allerhöchste. Wir haben in dem Übungsbuche des Ahmes eine Sammlung von Beispielen kennen gelernt, deren griechische Nachbildung in Inhalt und Form, insbesondere in letzterer, uns auf alexandrinischem Boden begegnen wird. „Mache es so“ heißen die regelmäßig wiederkehrenden Worte jener Übungsbücher. Wir haben (S. 80 und 113) davon gesprochen, daß ägyptische Lehrbücher neben den Übungsbüchern vorhanden gewesen sein müssen. Werden sie weniger eine herkömmliche unabänderliche Form besessen haben als alles andere in dem Lande der sich stets gleichbleibenden Überlieferungen? Und sind jene euklidischen Schlußworte für Lehrsätze und Aufgaben nicht von anheimelnder Ähnlichkeit zu dem ägyptischen „Mache es so“? Ist es ferner nicht in hohem Grade wahrscheinlich, daß Eudoxus, von dem, wie wir sagten, das V. Buch, daß Theaetet, von dem Teile des X. und des XIII. Buches teilweise wörtlich übernommen wurden, der gleichen Form sich schon bedienten? Ist endlich wohl anzunehmen, Euklid habe eine für den Unterricht, soweit er Gedächtnissache ist, ungemein zweckmäßige Form neu erfunden, und diese Form sei nur der Geometrie, keiner anderen Wissenschaft zugute gekommen? Diese Gründe werden zwar noch nicht Gewißheit hervorbringen; noch immer wird von manchen behauptet werden, der Name euklidische Form sei durchaus gerechtfertigt, denn Euklid sei der selbständige Erfinder derselben; aber andere werden ebenso sicher mit uns der Überzeugung gewonnen sein, die ägyptische Form eines Lehrbuches der Geometrie, in Griechenland eingedrungen, seit überhaupt Geometrie dort gelehrt wurde, in Alexandria durch die neuerdings ermöglichte Kenntnisnahme ägyptischer Originalwerke aufgefrischt, habe bei Euklid nur ihre vollendete Abrundung erlangt.

Eines haben wir bei Besprechung dieser Ursprungsfrage stillschweigend vorausgesetzt: daß nämlich dasjenige, was uns handschriftlich als die Elemente des Euklid überliefert wurde, in der Tat jenes Werk ist, wie es unter dem Griffel des Verfassers entstand. Zweifel daran wären, trotz der ungemeinen Verbreitung, deren die euklidischen Elemente im Altertum sich erfreuten, oder vielleicht eben wegen dieser Verbreitung nicht unmöglich, denn gerade häufig abgeschriebene Schriftstücke verderben leicht durch sich forterbende und durch bei jeder Abschrift neu hinzutretende Fehler, wenn nicht gar durch allmähliche Einschaltung von Randglossen, welche nach und nach in den Text eindrangen, dem sie als Fremdlinge nur angehören. Euklids Elemente sind in antiken Schriften nicht gar oft erwähnt[1]), aber die Übereinstimmung der genannten Büchernummer mit

[1]) Untersuchungen darüber von Savilius abgedruckt in Gregorys Vor-

der Ziffer, welche sie in den Handschriften führt, ist meistenteils vorhanden. Uns wenigstens ist nur ein Beispiel des Gegenteils bekannt welches auf römischem Boden im 27. Kapitel zu besprechen sein wird. Fremde spätere Zusätze sind in dem, was man die Elemente des Euklid nennt, allerdings vorhanden. Eines solchen machte Theon von Alexandria in seiner Ausgabe, ἔκδοσις, der euklidischen Elemente am Ende des VI. Buches sich schuldig, wie er selbst in seinem Kommentare zum I. Buche des ptolemäischen Almagestes erzählt[1]). Aus dieser ungemein wichtigen Stelle im Zusammenhange mit dem Umstande, daß jener Zusatz des Theon seinem Inhalte nach sich vollständig mit dem Zusatze zu Satz 33. des VI. Buches deckt, geht somit hervor, daß es eine theonische Textausgabe der euklidischen Elemente ist, deren wir uns bedienen, und daß wenn auch nicht gerade zahlreiche, doch einige Änderungen durch jenen Schriftsteller vom Ende des IV. S. stattgefunden haben mögen.

Theon kann es vielleicht gewesen sein, welcher den berüchtigten 11. Grundsatz des I. Buches: „Zwei Gerade, die von einer dritten geschnitten werden, so daß die beiden inneren an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen“ an diese unpassende Stelle brachte, während es gar kein Grundsatz, sondern die Umkehrung des Satzes 17. des I. Buches ist[2]), und dort als Folgerung ohne Beweis ausgesprochen immer noch frühzeitig genug stehen würde, um bei Satz 29. des I. Buches benutzt zu werden, wie es der Fall ist.

Theon mag auch die Schuld einiger Definitionen des V. und VI. Buches treffen, welche häufig angegriffen worden sind[3]).

Eine Definition des V. Buches, nämlich die 5., hat freilich unschuldigerweise solche Angriffe erlitten, veranlaßt, wie im folgenden Bande besprochen werden muß, durch Übersetzungsirrtümer zweier Sprachen. Diese Definition geht offenbar ursprünglich auf Zeiten zurück, die vor Euklid liegen. Sie will erklären, was es heiße, wenn man von vier Größen sage, daß sie in Proportion stehen. Da von Größen die Rede ist und nicht von Zahlen, so mußte die Definition so weit gefaßt werden, daß auch Inkommensurables hineinpaßte, und dieses erreichte der Verfasser, sei es Eudoxus oder wer sonst gewesen, indem er außer den Größen A, B, Γ, Δ noch irgend zwei ganze Zahlen μ und ν sich dachte und behauptete, es

rede zu seiner Euklidausgabe. Die gleichen Untersuchungen mit einigen neuen Zutaten bei Hankel 386—388.

[1]) *Commentaire de Théon sur la composition mathématique de Ptolémée* édit. Halma I, 201. Paris 1821. [2]) Das erkannte schon Savilius. [3]) Ausführliches hierüber bei Hankel 389—401.

sei $A : B = \Gamma : \Delta$, wofern immer wenn $\mu A \gtreqless \nu B$ zugleich auch $\mu \Gamma \gtreqless \nu \Delta$. Der Wortlaut ist folgender: „In einerlei Verhältnis sind Größen A, B, Γ, Δ, die erste zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn von beliebigen Gleichvielfachen der ersten und dritten A, Γ und beliebigen Gleichvielfachen der zweiten und vierten B, Δ die Vielfachen der ersten und dritten zugleich entweder kleiner oder eben so groß oder größer sind als die Vielfachen der zweiten und vierten nach der Ordnung miteinander verglichen.“

13. Kapitel.

Die übrigen Schriften des Euklid.

Euklid hat neben und außer den Elementen noch mehrfache andere Schriften verfaßt, die uns leider nicht sämtlich vollständig erhalten sind. So ist uns von einem Werke, welches gewiß höchst interessant war, nur die fast mehr als notdürftige Schilderung übrig geblieben, die Proklus davon mit folgenden Worten gibt: Auch überlieferte er Methoden des durchdringenden Verstandes mit deren Hilfe wir den Anfänger in dieser Lehre in der Aufsuchung der Fehlschlüsse üben und selbst unbetrogen bleiben können. Die Schrift, durch welche er uns diese Ausrüstung verschafft, betitelt er Trugschlüsse, *ψευδάρια*. Er zählt die verschiedenen Arten derselben der Reihe nach auf und übt bezüglich jeder unseren Verstand in allerlei Lehrsätzen, indem er dem Falschen das Wahre gegenüberstellt und den Beweis des Truges mit der Erfahrung zusammenhält[1]).

Verloren sind auch die drei Bücher der Porismen, welche Euklid verfaßte, deren Inhalt jedoch aus Spuren in genügender Weise erkannt werden konnte, um eine vermutlich in der Hauptsache richtige Wiederherstellung zu gestatten[2]). Mit den genannten Spuren hat es folgendes Bewandtnis. Pappus hat in seiner Mathematischen Sammlung, von welcher schon wiederholt die Rede war, neben eigenen Untersuchungen auch vielfach Auszüge aus fremden Schriften gegeben, welche gleichzeitig bis zu einem gewissen Grade erläutert werden.

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 70. [2]) *Les trois livres de Porismes d'Euclide retablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions par* M. Chasles. Paris 1860. Heiberg, Euklidstudien S. 56—79 sucht allerdings die Behauptung zu begründen, die Chaslessche Wiederherstellung der Porismen sei noch keineswegs als endgültig anzusehen.

Unter diesen fremden Schriften befinden sich denn auch die euklidischen Porismen, von welchen im VII. Buche der Sammlung die Rede ist, und zu deren Verständnis Pappus eine Anzahl von Lemmen mitteilt[1]). Freilich wäre der Gebrauch, welchen man von diesen Hilfssätzen allein machen könnte, um aus ihnen den Inhalt des Werkes, zu welchem sie erfunden sind, zu erschließen, kein unbedingter. Wir besitzen nämlich auch noch Lemmen des Pappus zu Werken, deren Urschrift nicht verloren gegangen ist, und an diesen zeigt sich, daß der geometrische Scharfsinn des Verfassers ihn nicht selten weit abseits führte, und daß er sich wohl gerade dadurch verleiten ließ etwas verschwenderisch mit der Benennung Lemma umzugehen. Es kommen Sätze bei Pappus vor, welche so gut wie in gar keiner Beziehung zu den Schriften stehen, als deren Hilfssätze sie bezeichnet werden, und wir haben zum voraus keinerlei Gewähr dafür, daß es sich mit den Hilfssätzen zu den euklidischen Porismen nicht ebenso verhalte. Nachträglich scheint freilich die gelungene Wiederherstellung, von der wir sprachen, und welche für das tiefe Eindringen ihres Verfassers in den geometrischen Geist der Alten ein glänzendes Zeugnis ablegt, jene Gewähr zu liefern. Es ist schwer an einen Zufall zu denken, wo die Ergebnisse vollste Übereinstimmung mit den 38 Lemmen des Pappus, mit der Inhaltsangabe der drei Bücher Porismen, wie sie bei ebendemselben sich findet, mit der Erklärung des Wortes Porisma bei Pappus und mit einer solchen bei Proklus[2]) zutage fördert.

Der sprachliche Zusammenhang des Wortes Porisma, *πόρισμα*, mit *πείρω*, mit Pore, mit parare, mit forschen, mit dem Sanskritworte pri पृ läßt einen Grundbegriff des Vorwärtsbringens wohl erkennen, doch ist damit nur die eine Bedeutung von Porisma als Zusatz, corollarium, gegeben, welche gleichfalls durch das Vorkommen in geometrischen Schriften bestätigt wird. Porisma als Kunstname einer besonderen für sich bestehenden Gattung von Sätzen wird dadurch um nichts klarer. Von diesen sind dagegen ausdrückliche Definitionen vorhanden. Pappus in der Einleitung zu seinem VII. Buche sagt, Porisma sei ein Ausspruch, bei welchem es sich um die Porismierung des Ausgesprochenen handle, und fügt dieser Erklärung durch ein fast gleiches Wort die Erläuterung bei: „Diese Definition des Porisma wurde von den Neueren verändert, welche nicht alles finden können, sondern auf die Elemente gestützt nur zeigen, daß das, was gesucht wird, vorhanden ist, nicht aber dieses selbst finden. So schrieben sie, obschon durch die Definition selbst und das Erlernte widerlegt, mit bezug auf einen Nebenumstand, ein

[1]) Pappus (ed. Hultsch) 648 sqq. [2]) Proklus (ed. Friedlein) 301 sqq.

Porisma sei das, was zur Hypothese eines Ortstheorems fehle.“ Eine weitere Definition, sagten wir oben, gebe Proklus. Sie enthält gleichfalls zweierlei, wenn auch nicht dieselben beiden Unterscheidungen wie Pappus sie trennt. „Einmal nennt man es ein Porisma, wenn ein Satz aus dem Beweise eines anderen Satzes mit erhalten wird, als Fund oder gerade vorhandener Gewinn bei dem Gesuchten, zweitens aber auch, wenn etwas zwar gesucht wird, aber um von der Erfindung Gebrauch zu machen und nicht von der Entstehung oder der einfachen Anschauung.... Man hat es nicht mit der Entstehung des Gesuchten zu tun, sondern mit dessen Erfindung, und auch eine bloße Anschauung genügt nicht. Man muß das Gesuchte in das Gesichtsfeld bringen und vor den Augen ausführen. Von dieser Art sind auch die Porismen, welche Euklid schrieb, als er seine Bücher der Porismen verfaßte.“ Diese Erklärungen haben gewiß keinen Anspruch auf den Ruhm unbedingter Deutlichkeit, aber eines lassen sie erkennen: daß das Wort Porisma allmählich einen anderen Sinn annahm, als es ursprünglich besaß. Man versteht diese Begriffsverschiebung jetzt gewöhnlich so, daß die verhältnismäßig jüngeren Schriftsteller — jünger im Sinne des Pappus gesagt für diejenigen, welche auftraten, seit es Elemente gab — dabei an einen Nebenumstand sich hielten, der von den Alten nicht berücksichtigt wurde, daß aber jedenfalls zu allen Zeiten das Merkmal untrüglich hervortrat, daß ein Porisma gewissermaßen eine Verbindung von Theorem und Problem war, ein Theorem, welches ein Problem anregte und einschloß. Ein sehr allgemeines Beispiel davon bildet auf einem der Mathematik durchaus fremden Gebiete die ärztliche Diagnose. Sie ist ein wahres Porisma. Sie erhärtet als Theorem den gegenwärtigen Zustand des Kranken, wobei sie ebensowohl die bei allen Individuen gemeinsamen Erscheinungen der bestimmten Krankheitsform, als die von einem Menschen zum anderen veränderlichen Naturkundgebungen berücksichtigt. Sie schließt aber auch ein Problem in sich: die weitere Entwicklung des Krankheitsprozesses vorauszusehen und womöglich zu leiten. Sie zeigt sich als unvollständig, so lange nicht eben dieses Problem seiner Lösung entgegengeführt wird. Übersetzen wir nun eben diese Gedankenfolge in die Sprache der Mathematik, so können wir sagen: Ein Porisma ist jeder unvollständige Satz, welcher Zusammenhänge zwischen nach bestimmten Gesetzen veränderlichen Dingen so ausspricht, daß eine nähere Erörterung und Auffindung sich noch daran knüpfen. Ein schon von Proklus angegebenes Beispiel liefert etwa der Satz, daß, wenn ein Kreis gegeben ist, der Mittelpunkt desselben immer gefunden werden könne, denn an ihn knüpft sich die

Aufgabe, die Konstruktion zu ermitteln, durch welche man den Mittelpunkt wirklich erhält, mit Notwendigkeit an. Oder um ein zweites den Griechen noch durchaus unverständliches Beispiel zu wählen, so ist es ein Porisma, wenn man sagt: Jede rationale ganze algebraische Funktion einer Veränderlichen könne immer in einfachste reelle Faktoren zerlegt werden, denn an diesen Satz knüpft sich unmittelbar die weitere Frage, von welchem Grade jene einfachsten Faktoren sein werden, sowie die mit den Mitteln gegenwärtiger Algebra nicht lösbare Aufgabe in jedem einzelnen Falle die betreffenden einfachsten Faktoren selbst aufzufinden. Wenn durch diese Auseinandersetzung der Begriff des Porisma im älteren Sinne des Wortes zu einiger Klarheit gelangt sein dürfte, so können wir jetzt auch die spätere Bedeutung des Wortes ins Auge fassen.

Nachdem man nämlich bemerkt hatte, daß die Veränderlichkeit mitunter in der Ortsveränderung von Punkten bestehe, so klammerte man sich an diesen Nebenumstand fest und setzte als Regel, daß das Veränderliche ausschließlich von der Art sein sollte, daß man es mit einem mangelhaften Ortstheoreme zu tun habe. Eines der berühmtesten Porismen in diesem Sinne, welches bei Pappus sich erhalten hat[1]), lautet in der Sprache heutiger Geometrie etwa so: Schneiden die Linien eines vollständigen Vierseits sich in sechs Punkten, von denen drei in einer Geraden liegende gegeben sind, und sind von den drei übrigen Punkten zwei der Bedingung unterworfen je auf einer gegebenen Geraden zu bleiben, so wird auch der letzte Punkt eine Gerade zum geometrischen Orte haben, welche aus den vorhandenen Angaben bestimmt werden kann. Man sieht augenblicklich, erstens daß es sich hier um einen geometrischen Ort handelt, zweitens daß in der Hypothese die Lage der von zwei Punkten beschriebenen Geraden nicht näher bezeichnet ist, daß also an der Hypothese etwas fehlt, drittens daß demgemäß auch die Folgerung an Bestimmtheit zu wünschen übrig läßt, daß aber viertens die Folgerung zu vollständiger Bestimmtheit ergänzt werden kann, indem man die Lage der dritten Geraden zu den gegebenen Raumgebilden in Beziehung setzt, sie als eine darzustellende Funktion derselben betrachtet. Mit anderen Worten: die Ortsveränderung eines Punktes ist in Abhängigkeit gebracht zu den Ortsveränderungen zweier Punkte, so daß sie der Art nach bestimmt ist, der Lage nach aber erst bestimmt wird, wenn jene Ortsveränderungen der beiden anderen Punkte, sowie drei feste Punkte wirklich gegeben sind.

Dieses vollständiger als die übrigen erhaltene Porisma wurde,

[1]) Pappus VII, praefatio (ed. Hultsch) 652 sqq.

wie wir gleichfalls durch Pappus wissen, in zehn einzelnen Fällen behandelt, je nach der Verschiedenheit der Lage der einzelnen Punkte und Geraden. Man erkennt an diesem einen Beispiele, welche gewaltige Ausdehnung eine Sammlung von Porismen gewinnen konnte, wenn die teils als Bedingungen, teils als Ergebnisse in jedem Porisma vorkommenden geometrischen Örter jeder beliebigen Gattung von Raumgebilden angehören durften. Euklid legte sich die freiwillige Beschränkung auf, nur solche Örter zu benutzen, deren Lehre aus seinen Elementen zur Genüge bekannt war. In den beiden ersten Büchern seiner Porismen treten nur Gerade auf, in dem dritten Buche außer solchen auch Kreise. Trotz dieser engen Beschränkung waren 171 Sätze in dem Werke enthalten, welche Pappus je nach den Ergebnissen, also abseits der Bedingungen, in 29 Gattungen abgeteilt hat. Eine Gattung war es z. B., wenn sich herausstellte, daß ein Punkt auf einer der Lage nach bekannten Geraden liegen müsse; eine zweite, wenn man erfuhr, daß eine gewisse Gerade in allen ihren Lagen durch einen bestimmten Punkt gehen müsse; eine dritte, wenn wieder eine bewegliche Gerade auf zwei gegebenen Geraden Abschnitte von bestimmten Produkten bildete, während man bei der Aufstellung jener Gattungen als solcher zunächst davon absah, welcherlei Bedingungen in jener ersten Gattung die Bewegung des Punktes, in den beiden anderen die Bewegung der Geraden regeln. Von dieser Auffassung ist wenigstens die von uns schon gerühmte Wiederherstellung der euklidischen Porismen ausgegangen, auf welche für die genauere Kenntnis des Gegenstandes verwiesen werden muß. Er ist trotz des Scharfsinnes, welchen der neue Bearbeiter als Geometer wie als Historiker an den Tag legte, nicht so weit über allen und jeden Zweifel erhaben, daß wir es verantworten könnten über die Ergebnisse der Wiederherstellung unter dem Verfassernamen des Euklid zu berichten. Nur Eines entnehmen wir ihr noch: die Verwandtschaft, welche Euklids Porismen nach zwei Seiten hin besaßen. Im Hinblicke auf ihren Inhalt, auf die Lehre von der veränderlichen Lage grenzten sie an die sogenannten geometrischen Örter; in ihrer Form näherten sie sich einem anderen euklidischen Werke, den Daten.

Die Daten[1]), δεδόμενα, des Euklid sind vollständig auf uns gekommen, versehen mit einer Vorrede des Marinus von Neapolis in Palästina, eines Schülers des Proklus, in ihrer Echtheit bestätigt

[1]) Eine deutsche Übersetzung hat J. F. Wurm (Berlin 1825) herausgegeben, den griechischen Text der ersten 24 Sätze nach einem münchner Kodex Fr. Buchbinder in dem Programm der Landesschule Pforta für 1866: Euklids Porismen und Data. Die letzte Ausgabe ist die von H. Menge als 6. Band der Euklidausgabe (1896).

durch eine Beschreibung des Pappus, welche wenn auch nicht in allen Punkten, doch der Hauptsache nach mit unserem Texte übereinstimmt[1]). Was man unter einem Gegebenen, δεδόμενον, zu verstehen habe, sagt Euklid in einer Reihe von Definitionen, welche an der Spitze dieser Schrift stehen. Der Größe nach gegeben heißen Räume, Linien und Winkel, wenn man solche, die ihnen gleich sind, finden kann. Ein Verhältnis heißt gegeben, wenn man ein Verhältnis, welches mit jenem einerlei ist, finden kann. Der Lage nach gegeben heißen Punkte, Linien und Winkel, wenn sie immer an demselben Orte sind usw. Nach diesen Definitionen folgen 95 (Pappus zufolge nur 90) Sätze, in welchen nachgewiesen wird, daß, wenn gewisse Dinge gegeben sind, andere Dinge gleichzeitig mitgegeben sind. Zur besseren Einsicht in den Gegenstand heben wir einige Sätze aus den verschiedensten Teilen der Schrift hervor.

Satz 1. Gegebene Größen haben zueinander ein gegebenes Verhältnis.

Satz 3. Wenn gegebene Größen, wie viele ihrer sein mögen, zusammengesetzt werden, so ist ihre Summe gegeben.

Satz 25. Wenn zwei der Lage nach gegebene Linien einander schneiden, so ist ihr Durchschnittspunkt gegeben.

Satz 40. Wenn in einem Dreiecke jeder Winkel der Größe nach gegeben ist, so ist das Dreieck der Art nach gegeben.

Satz 41. Wenn in einem Dreiecke ein Winkel gegeben ist und die um diesen Winkel liegenden Seiten ein gegebenes Verhältnis zueinander haben, so ist das Dreieck der Art nach gegeben.

Satz 54. Wenn zwei der Art nach gegebene Figuren ein gegebenes Verhältnis zueinander haben, so haben auch ihre Seiten zueinander ein gegebenes Verhältnis.

Satz 58 und 59. Wenn ein gegebener Raum einer gegebenen geraden Linie angefügt, aber um eine der Art nach gegebene Figur zu klein, ἔλλειπον (zu groß, ὑπέρβαλλον) ist, so sind die Seiten der Ergänzung (des Überschusses) gegeben.

Satz 84 und 85. Wenn zwei Gerade einen gegebenen Raum unter einem gegebenen Winkel einschließen und ihr Unterschied (ihre Summe) gegeben ist, so ist jede derselben gegeben.

Satz 89. Wenn in einem der Größe nach gegebenen Kreise eine der Größe nach gegebene Gerade gegeben ist, so begrenzt sie einen Abschnitt, welcher einen gegebenen Winkel faßt.

Die Vergleichung dieser Proben mit dem, was über Porismen gesagt wurde, läßt augenblicklich die angekündigte Formverwandt-

[1]) Pappus VII (ed. Hultsch) pag. 638—640.

schaft erkennen. Auch hier schließt das Theorem, in dessen Gewande die Sätze aufzutreten pflegen, ein künftiges Problem ein, und die Beweisführung erfolgt fast regelmäßig so, daß jenes Problem gelöst wird. So ist in dem oben angeführten Satz 3. die Aufgabe mit eingeschlossen, die Summe der gegebenen Größen auch wirklich zu finden, und in der Tat wird der Satz dadurch als richtig erwiesen, daß man zwar nicht die Summe selbst, denn dieses würde nicht in dem Charakter des Buches der Gegebenen liegen, aber eine der Summe gleiche Größe darstellt. Aber auch dafür ist umgekehrt gesorgt, daß man nicht Daten und Porismen ganz verwechseln könne. Dagegen schützt der gewaltige Unterschied des Inhaltes, der sich kurz dahin bezeichnen läßt, daß bei den Daten die Bedingung der veränderlichen Größe wegfällt, welche zum eigentlichen Wesen des Porisma gehört und dessen wissenschaftliche Stellung nach unseren heutigen Begriffen zu einer weit höheren macht als die der Daten, deren eigentliche Berechtigung uns fast zweifelhaft erscheint, weil in ihnen im Grunde nichts steht, was nicht schon in anderer Form und anderer Reihenfolge in den Elementen steht oder wenigstens stehen könnte.

Die Data, kann man sagen, sind Übungssätze zur Wiederauffrischung der Elemente; die Porismen sind Anwendungen derselben von selbständigem Werte. Der Stoff, welcher dem, der die Daten auswendig weiß, zu Gebote steht, führt ihn doch nicht über die Elemente hinaus; der Stoff, welcher in den Porismen dem Gedächtnisse sich einprägt, kommt in der Lehre von den Örtern, in der höheren Mathematik der Griechen, zur Geltung. Daten kann es in frühester Zeit gegeben haben, Porismen im euklidischen Sinne erst seitdem der Ortsbegriff entstand.

Die nahen Beziehungen der Daten zu den Elementen lassen sich auch auf jenem Gebiete verfolgen, welches ein gemischtes ist, insofern dort Arithmetisches und Algebraisches geometrisch eingekleidet erscheinen. Vergleichen wir z. B. Satz 58. und 59. mit den Aufgaben in Satz 28. und 29. des VI. Buches (S. 266), so liegt die Wechselverbindung auf der Hand[1]). Satz 84. und 85. lehren aus $xy = b^2$ und $x \mp y = a$ die Wurzeln der beiden Gleichungen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Wurzel der quadratischen Gleichung $x^2 \mp b^2 = ax$ zu finden[2]). Wir erinnern dabei an den 11. Satz des II. Buches

[1]) Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen S. 928—929 hat darauf hingewiesen. [2]) Darauf dürfte Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 2. édition. Paris 1875, pag. 11, Note 2 oder deutsche Übersetzung von Sohncke. Halle 1839, S. 9, Anmerkung 11 zuerst aufmerksam gemacht haben. Dieses Werk heißt bei uns künftig Chasles, *Aperçu hist.*

der Elemente (S. 263), in welchem die Gleichung $x^2 + ax = a^2$ erkannt wurde, ein besonderer Fall der Gleichung $x^2 + ax = b^2$ des 29. Satzes des VI. Buches. Wir erinnern an die Gleichung $x^2 + b^2 = ax$ des 28. Satzes des VI. Buches, und haben jetzt hier in den Daten den einzigen noch übrigen Fall $x^2 = ax + b^2$ der quadratischen Gleichung mit lauter positiven Gliedern vor uns. Die Daten sind hier die notwendige Ergänzung der Elemente. Der Schriftsteller, der beide verfaßte, war im Besitz der Mittel eine Wurzel jeder quadratischen Gleichung, welche überhaupt eine reelle Lösung zuläßt, zu finden. Darf aber das Bewußtsein hier eine große Gruppe von Problemen vor sich zu haben, deren Bedeutung nicht nur eine geometrische ist, bei Euklid vorausgesetzt werden? Die geometrische Form, in welcher jene Aufgaben bei Euklid erscheinen und welche man nicht unpassend eine geometrische Algebra[1]) genannt hat, würde nicht genügen, jedes algebraische Bewußtsein zu leugnen, denn jene Form werden wir, als Überbleibsel alter Übung, bei Schriftstellern und in Zeiten noch vorwalten sehen, denen man wohl eher umgekehrt das geometrische Bewußtsein absprechen darf. Ist aber diese kleine Schwierigkeit aus dem Wege geräumt, so nehmen wir keinen Anstand die gestellte Frage voll zu bejahen. Euklid muß mit numerischen quadratischen Gleichungen zu tun gehabt haben, denn nur daraus läßt sich das Entstehen des X. Buches seiner Elemente erklären[2]), und das ist die große Bedeutung, welche wir (S. 268) eben diesem Buche zum voraus beigelegt haben.

Wie verhält es sich aber mit der Fähigkeit des Euklid auch solche Gleichungen zu lösen, welche in durchaus anderem Gewande erscheinen? In einer Sammlung griechischer Epigramme, von welcher im 23. Kapitel die Rede sein wird, kommt als euklidisches Problem eines vor, welches in deutscher Übersetzung folgendermaßen lautet[3]):

Esel und Maultier schritten einher beladen mit Säcken.
Unter dem Drucke der Last schwer stöhnt' und seufzte der Esel.
Jenes bemerkt es und sprach zu dem kummerbeladnen Gefährten:
„Alterchen, sprich, was weinst Du und jammerst schier wie ein Mägdlein?
Doppelt so viel als Du grad' trüg' ich, gäbst Du ein Maß mir;
Nähmst Du mir eines, so trügen wir dann erst beide dasselbe."
Geometer, Du Kundiger, sprich, wieviel sie getragen.

[1]) Den Namen der geometrischen Algebra hat H. Zeuthen eingeführt. [2]) Dieser feine und wichtige Gedanke ist zuerst ausgesprochen bei Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthume (deutsche Ausgabe von R. von Fischer-Benzon. Kopenhagen 1886), S. 24—25. S. A. Christensen, Ueber Gleichungen vierten Grades im X. Buch der Elemente Euklids. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Hist.-liter. Abtlg. S. 201—207 geht uns allerdings etwas zu weit. [3]) Vgl. Nesselmann, Algebra der Griechen S. 480.

Wie verhält es sich mit der Berechtigung dieser Aufgabe, den ihr beigelegten Namen zu führen? Die meisten Schriftsteller leugnen diese Berechtigung vollständig. Jedenfalls muß man zwei Dinge hier unterscheiden, ob Euklid eine derartige Aufgabe lösen konnte und ob er sie so, wie sie überliefert ist, löste oder gar stellte. An der Möglichkeit der Lösung wird man nicht zweifeln. Schon Thymaridas hatte (S. 158) Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten von einer gewissen Form lösen gelehrt, und Euklid dürfte, seiner Gewohnheit nach alles an Linien versinnlichend, gesagt haben, wenn man die Last des Maulesels durch eine Linie A darstellt, so wird, wenn die Längeneinheit abgeschnitten ist, $A - 1$ als übrige Last der bereits um die Einheit vergrößerten Last des Esels gleich sein; die ursprüngliche Last des Esels war also $A - 2$, oder um 2 geringer als die des Maultiers. Nimmt man zu A noch eine Längeneinheit hinzu, so ist $A + 1$ doppelt so groß wie das um die Einheit verminderte $A - 2$, oder wie $A - 3$, d. h. $A + 1$ und $2A - 6$ sind gleiche Längen; daraus folgt $A + 7 = A + A$ und $A = 7$ nebst $A - 2 = 5$. Solche Schlüsse, sagen wir, waren Euklid vollständig angemessen, und die Durchführung von Satz 11. des II. Buches der Elemente, die wir (S. 264) als Probe vorgenommen haben, dürfte jedem Zweifel in dieser Beziehung begegnen. Ein ganz andres ist es, ob die epigrammatische Form der Rätselfrage von Euklid herstamme. Ähnliche Fragen werden uns wiederholt begegnen, teilweise auch auf alte Quellen zurückgeführt. Jedenfalls dient die eine Aufgabe der anderen zur Bestätigung, oder zur vernichtenden Kritik. Ist die eine echt, dann kann auch die andere echt sein; ist die eine verhältnismäßig späte Unterschiebung unter den Namen eines Verfassers, der weniger als Verfasser, denn als Vertreter mathematischer Wissenschaft gemeint ist, so daß euklidisches Problem nur heißen soll: Problem, wie es Euklid zu lösen imstande war, dann dürfte das gleiche auch für die andere Aufgabe gelten. Wir müssen uns enthalten eine Entscheidung zu treffen, zu welcher dem Mathematiker so gut wie keine bestimmenden Gründe vorliegen. Nur die vollständige Verschiedenheit des Epigrammes von allen sonstigen euklidischen Schriften lassen wir als Gegengrund gegen die Echtheit nicht gelten. Ein Gedichtchen ist nun einmal keine Abhandlung. Beide müssen voneinander abweichen, und daß es dem Ernste des Mathematikers nicht widerspricht, auch einmal an die Scherzform der Poesie sich zu wagen, haben Beispiele aller Zeiten bewiesen. Zudem würde dieser Gegengrund vollends schwinden, wenn man zu der eben durch ein Wort angedeuteten Auffassung sich bekennen wollte, Euklid habe die Aufgabe nicht gestellt, sondern gelöst, und sie sei deshalb unter seinem Namen bekannt geblieben.

Proklus berichtet[1]) noch von einer weiteren geometrischen Aufgabensammlung, welche Euklid verfaßte und welche den Namen des Buches von der Teilung der Figuren, *περὶ διαιρέσεων βιβλίον*, führte[2]). Bis in die zweite Hälfte des XVI. S. war diese Schrift, abgesehen von den Auszügen aus derselben, von denen man nicht wußte, daß sie daher stammten, für das Abendland verschollen. Da fand John Dee um 1563 eine arabische Schrift gleichen Titels, welche er, wiewohl Mohammed Bagdadinus (so lautet der Name in der uns allein bekannten latinisierten Form) als Verfasser genannt war, für euklidisch hielt, und deren lateinische Übersetzung er anfertigte, die zuerst 1570 durch Dee in Gemeinschaft mit Commandino herausgegeben wurde, und die alsdann in die Gregorysche Euklidausgabe von 1702 Aufnahme fand. Dees Vermutung hat an Wahrscheinlichkeit gewonnen, seit Woepcke in Paris ein zweites arabisches Bruchstück auffand, welches mit dem Deeschen Manuskripte wenn auch nicht wörtlich doch dem Wesen nach übereinstimmend, namentlich eine Lücke jenes ersten Textes ergänzte. Proklus erwähnt nämlich ausdrücklich Sätze über die Teilung des Kreises, und diese fehlten in dem Deeschen, fanden sich in dem Woepckeschen Bruchstücke. Nimmt man hinzu, daß in letzterem Euklid als Verfasser geradezu genannt ist, so wird es fast zur Gewißheit, daß hier eine Bearbeitung des euklidischen Textes vorliegt. Eine wörtliche Übersetzung anzunehmen hindern einige vorkommende mathematische Unrichtigkeiten, die einem Euklid nicht wohl entstammen können[3]). Einige Beispiele der uns erhaltenen Aufgaben sind folgende. Das Dreieck wie das Viereck werden durch eine einer gegebenen Geraden parallele Linie nach gegebenem Verhältnisse geteilt. Für das Fünfeck ist die Aufgabe nicht ganz so allgemein gestellt, aber immerhin wird die Teilung desselben nach gegebenem Verhältnisse verlangt, sei es von einem Punkte einer Fünfecksseite aus, sei es durch eine zu einer Fünfecksseite unter gewissen Voraussetzungen parallele Gerade. Endlich schließt die pariser Handschrift, wie bemerkt, die Aufgaben ein, eine von einem Kreisbogen und zwei einen Winkel bildenden Geraden gebildete Figur durch eine Gerade in zwei gleiche Teile zu teilen, und von einem gegebenen Kreise einen bestimmten Teil abzuschneiden, Aufgaben, zu deren Lösung ein ziemlicher Grad geometrischer Gewandtheit

---

[1]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 69 und 144. [2]) Vgl. Gregory in der Vorrede zu seiner Euklidausgabe. Woepcke im *Journal Asiatique* für September und Oktober 1851 und ganz besonders Ofterdinger, Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Euklid über die Theilung der Figuren. Ulm 1853.
[3]) Das bemerkte bereits Savilius, *Praelectiones tresdecim in principium Elementorum Euclidis.* Oxford 1621, pag. 17.

erforderlich ist, wenn auch die Grundlage derselben durchaus elementarer Natur bleibt. Die Figur $AB\Gamma\Delta$ z. B. (Fig. 43) wird, wenn E die Mitte der Sehne $B\Delta$ bezeichnet, offenbar durch die gebrochene Linie $AE\Gamma$ halbiert. Wird alsdann EZ parallel zu $A\Gamma$ gezogen, so haben die Dreiecke $AZ\Gamma$ und $AE\Gamma$ gleichen Inhalt, und mithin halbiert auch die Gerade ΓZ unsere Figur.

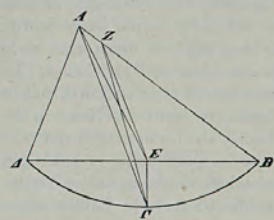

Fig. 43.

Einige andere Schriften des Euklid können als die geistige Fortsetzung seiner Porismen betrachtet werden, indem sie sich zur höheren Mathematik ihrer Zeit ordnen lassen: Vier Bücher über die Kegelschnitte und zwei Bücher über die Örter auf der Oberfläche. Das letztgenannte Werk, die *τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν*, hat als Spur außer seinem Titel nur vier Lemmen bei Pappus hinterlassen[1]). Wenn man daher gemeint hat, Euklid habe in diesen Örtern auf der Oberfläche Umdrehungsflächen zweiten Grades behandelt[2]), so ist diese Vermutung nur mit äußerster Vorsicht zu wiederholen. Größere Wahrscheinlichkeit hat für uns die Auffassung[3]), jene Örter beträfen Kurven auf Zylinderflächen, vielleicht auch auf Kegelflächen.

Das Werk über die Kegelschnitte ist gleichfalls bei Pappus erwähnt, welcher sogar behauptet, die vier ersten Bücher des Apollonius stützten sich wesentlich auf diese Vorarbeit des Euklid[4]). Man wird dadurch leicht verleitet den Inhalt der Kegelschnitte des Euklid einigermaßen zu überschätzen und insbesondere einen Zusammenhang mit dem 44. Satze des I. Buches, dem 28. und 29. Satze des VI. Buches der Elemente zu vermuten, der doch wohl nicht stattfindet. Wir haben diese Sätze (S. 262 und 266) schon erwähnt, wir haben vorher (S. 171) angekündigt, wir würden bei Gelegenheit der euklidischen Geometrie auf die Wörter Parabel, Ellipse, Hyperbel und deren Bedeutung eingehen, wir müssen jetzt diese Zusage einlösen. Wir nehmen dabei zur größeren Einfachheit der Betrachtung an, daß die Parallelogramme, von welchen in jenen drei Sätzen der Elemente die Rede ist, immer Rechtecke seien; bei schiefwinkligen Parallelogrammen wird die Behandlung jener Aufgaben langwieriger, aber keineswegs wesentlich schwieriger.

[1]) Pappus VII *propos.* 235 sqq. (ed. Hultsch) pag. 1004 sqq. [2]) Chasles, *Aperçu hist.* 273. (Deutsch: 272.) [3]) Heiberg, Euklidstudien S. 81—83. [4]) Pappus VII *Prooemium* (ed. Hultsch) pag. 672.

Es sei (Fig. 44) $AB = p$ eine gegebene Länge senkrecht zu $A\Xi$ aufgetragen; ist nun ferner $A\Gamma$ gegeben, so gibt es immer einen einzigen Punkt Δ, welcher zur Bildung des Rechtecks $ABZ\Delta$ führt, das einen bekannten Flächenraum, nämlich den des Quadrates über $A\Gamma$, oder über der der $A\Gamma$ gleichen ΔE, besitzt. Wählt man umgekehrt bei bekanntem $AB = p$ auf der Geraden $A\Xi$ einen beliebigen Punkt Δ, so gibt es senkrecht über und unter Δ die Punkte E, E', welche das Quadrat von ΔE ($\Delta E'$) dem Rechtecke aus p und $A\Delta$ gleich werden lassen.

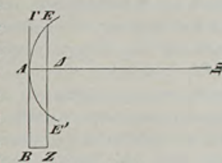

Fig. 44.

Werden verschiedene Punkte Δ gewählt, so nimmt auch E verschiedene Lagen an, aber immer ist das an AB angelegte, *παραβαλλόμενον*, Rechteck dem Quadrate über ΔE genau gleich. Nennen wir nach heutigem Brauche $A\Delta = x$, $\Delta E = y$, so spricht sich die letzte Bemerkung symbolisch $y^2 = px$ aus, d. h. der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch das Fortrücken von Δ auf $A\Xi$ erzeugt denken, ist eine Parabel. Da bei einer solchen Anlegung (*παραβολή*) das Produkt zweier Faktoren dem zweier anderer gleichgesetzt ist, so kann man dieselbe auch zur Division (*μερισμός*) einer Zahl durch eine andere verwenden, und in der Tat definiert sie ein alter Scholiast zum VI. Buche der Euklidischen Elemente geradezu in dieser Weise[1]).

Außer dem $AB = p$ sei (Fig. 45) auf der dazu senkrechten $A\Xi$ ein Stück $A\Lambda = a$ bekannt, so ist $ABK\Lambda$ ein durchaus gegebenes Rechteck, welchem jedes andere Rechteck ähnlich ist, dessen B gegenüberliegende Winkelspitze H auf der Diagonale $B\Lambda$ des erstgenannten Rechtecks sich befindet.

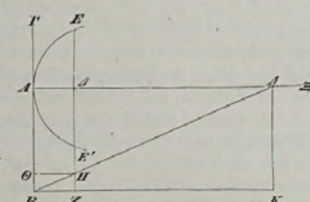

Fig. 45.

Ist nun wieder ein Flächenraum — das Quadrat über $A\Gamma$ oder ΔE — gegeben, so wird es einen einzigen Punkt H der $B\Lambda$ geben, mit dessen Hilfe das Rechteck $A\Delta H\Theta$ gleich jenem Flächenraum wird, oder mit anderen

[1]) Heibergs Euklidausgabe Bd. V, 347 lin. 20 *παραβολὴ παρὰ τοῖς μαθηματικοῖς λέγεται ὁ μερισμός· παραβαλεῖν γὰρ ἀριθμὸν παρὰ ἀριθμόν ἐστι τὸ μερίσαι τὸν μείζονα εἰς τὸν ἐλάττονα ἤτοι δεῖξαι, ποσάκις ὁ ἐλάττων περιέχεται ὑπὸ τοῦ μείζονος.*

Worten, welcher es möglich macht, daß das an AB angelegte Rechteck außer dem Teile $A\Theta$ von AB, welchen es mit dem dem Quadrate von $A\Gamma$ gleichen Flächenraume in Anspruch nimmt, noch ein Stückchen ΘB übrig läßt, ἐλλείπει, über welchem das dem Rechtecke $ABK\Lambda$ ähnliche kleine Rechteck ΘBZH steht. Denken wir uns auch hier die Aufgabe umgekehrt, so wird zu jedem Punkte Δ ein Punkt E senkrecht über ihm, ein Punkt E' senkrecht unter ihm gefunden werden können, so daß das Quadrat von ΔE dem jetzt bekannten Rechtecke $A\Delta H\Theta$, dessen Eckpunkt H auf der Diagonale $B\Lambda$ des vollständig gegebenen Rechtecks $ABK\Lambda$ sich befindet, gleich sei. Auch hier ist der symbolische Ausdruck übersichtlicher. Ist nämlich $\Theta B = \alpha \cdot p$, wo α eine Zahl bedeutet, so muß $\Theta H = \alpha \cdot a$ sein, und die Fläche ΘBZH ist $= \alpha^2 \cdot ap$. Mit Hilfe von $A\Delta = x$, $\Delta E = y$ werden wir also schreiben $y^2 = px - \alpha^2 \cdot ap$, d. h. der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch das Wechseln der Lage von Δ erzeugt denken, ist eine Ellipse.

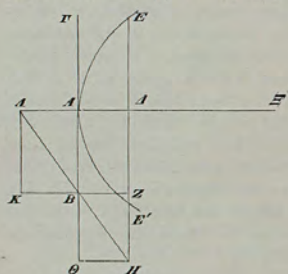

Fig. 46.

Entsprechen (Fig. 46) die griechischen sowohl als die lateinischen Buchstaben denen des vorigen Falles mit dem Unterschiede, daß $A\Lambda = a$ jetzt auf der jenseitigen Verlängerung von $\Lambda\Xi$ aufgetragen, im übrigen aber der Punkt H wieder so gewählt wird, daß er auf der verlängerten Diagonale AB des Rechtecks $ABK\Lambda$ aus den Seiten a und p liegt, daß also die Rechtecke $ABK\Lambda$ und ΘBZH einander ähnlich sind, und das Rechteck $A\Delta H\Theta$ denselben Flächenraum besitzt, wie das Quadrat über $A\Gamma$ oder ΔE, so ist dabei die Forderung erfüllt, daß das an AB angelegte Rechteck, um den ihm zugewiesenen Flächenraum zu erlangen, über AB hinausreicht, ὑπερβάλλει, und zwar mit einem dem gegebenen Rechtecke $ABK\Lambda$ ähnlichen Rechtecke. Es ist fast überflüssig aufs neue hervorzuheben, daß man auch diese Aufgabe so umzukehren imstande ist, daß nicht mehr H sondern E, beziehungsweise E', gesucht werden und die Gleichung $y^2 = px + \alpha^2 \cdot ap$ sich erfüllen soll. Der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch Wechsel der Lage von Δ erzeugt denken, ist eine Hyperbel.

Die Dinge, welche wir hier auseinandergesetzt haben, lassen sich in größter Kürze in die jetzt verständliche Ausdrucksweise zusammen-

fassen, daß es drei geometrische Aufgaben der Flächenanlegung gebe, sämtlich pythagoräischen Ursprunges, sämtlich in Euklids Elementen aufbewahrt, bei deren Ausspruch die drei Zeitwörter vorkommen, welche den Namen der Parabel, Ellipse, Hyperbel zugrunde liegen. Bei Umkehrung dieser Aufgaben, eine Umkehrung aber, welche in den euklidischen Elementen nicht vorkommt, würden als geometrische Örter eben jene Kurven entstehen müssen.

Jetzt sind wir imstande die Fragen genauer zu stellen, um deren Beantwortung willen wir gerade hier auf die Aufgaben pythagoräischer Flächenanlegung näher einzugehen veranlaßt waren. Hat Euklid, von dem wir wissen, daß er über Kegelschnitte schrieb, die Umkehrung jener Aufgaben, für die der Natur der in ihnen vorkommenden Kurven nach in den Elementen kein Platz war, überhaupt gekannt? Haben schon vor Euklid die Pythagoräer das Auftreten dieser Kurven und ihre Eigenschaften bemerkt, die freilich nicht in Form der drei Gleichungen, deren wir uns bedienten, um kürzer sein zu dürfen, aber in einem geometrischen Wortlaute sehr wohl von einem Griechen verstanden werden konnten? Hat Euklid erkannt, daß diese in der Ebene erzeugten Kurven dieselben seien, welche auf dem Mantel geschnittener Kegel entstehen?

Man hat diese Fragen verschiedentlich beantwortet[1]). Uns scheinen sie insgesamt verneint werden zu müssen. Um mit der letzten anzufangen, so hat Euklid die Identifikation der Kurven von den genannten Eigenschaften, die sich auf Flächenanlegung bezogen, mit Kegelschnitten keinesfalls gekannt, weil nach des Pappus ausdrücklichem Zeugnisse Apollonius erst diese doppelte Entstehungsweise entdeckte[2]). Die Bekanntschaft der Pythagoräer mit jenen Kurven werden wir gleichfalls leugnen dürfen, wenn wir nur zu begründen vermögen, daß auch die erste Frage nicht zu bejahen ist, daß vielmehr Euklid, als er die Elemente schrieb, von jener Umkehr, von den dabei entstehenden krummen Linien, ganz abgesehen von ihrer Übereinstimmung mit Kegelschnitten, nichts wußte. Das scheint uns daraus zu schließen gestattet, weil er sonst in den Elementen die drei Aufgaben, welche schon um ihres gemeinsamen Ursprungs bei den Pythagoräern willen bis zu einem gewissen Grade zusammengehörten, wenn sie eine weitere Zusammengehörigkeit dadurch an den Tag gelegt hätten, daß sie alle drei zu eigentümlichen Kurven führten, mutmaßlich nicht getrennt hätte.

[1]) Für die Bejahung Arneth, Geschichte der reinen Mathematik (Stuttgart 1852) S. 92—93, an dessen Darstellung wir uns hier vielfach anlehnten ohne seine Folgerungen zu teilen und ganz besonders Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum. [2]) Pappus, VII *Prooemium* (ed. Hultsch) 674.

Es ist wohl richtig, daß die Sätze 28. und 29. des VI. Buches erst behandelt werden konnten, wo der Begriff der Ähnlichkeit bekannt war; es ist eben so richtig, daß Satz 44. des I. Buches schon vor dem VI. Buche Verwertung fand; aber Euklid war nicht der Mann, dem eine kleine Umformung dieses 44. Satzes des I. Buches sonderliche Mühe verursacht hätte, so daß er den Sinn desselben in anderem Wortlaute im VI. Buche neuerdings neben den verwandten Aufgaben wiederholen konnte, wie er es mit dem goldenen Schnitte gemacht hat, von dem bei der Übersicht der Elemente die Rede war. Euklid lehrte ihn als 11. Satz des II. Buches; er wandte ihn im 10. Satze des IV. Buches an; er brachte ihn um des Zusammenhanges willen im 1. Satze des XIII. Buches in anderer Form noch einmal. Das Gleiche wäre für Satz 44. des I. Buches zu erwarten, wenn der Verfasser der Elemente die Parabel, die Ellipse, die Hyperbel als Kurven in der Ebene gekannt hätte. Daß sie als solche auch in den euklidischen Büchern von den Kegelschnitten nicht vorkommen konnten, ist durch den Titel jener Bücher festgestellt, und so scheint unser nach allen Seiten verneinendes Urteil auf ziemlich sicheren Füßen zu ruhen.

Wenn wir so ausgeschlossen haben, was in den vier Büchern der Kegelschnitte nach unserem Dafürhalten nicht gestanden haben kann, so wissen wir doch von mancherlei Dingen, die dort ihren Platz finden mußten. Vor allem werden dort diejenigen Dinge gestanden haben, welche Menächmus schon kannte, insbesondere werden die Asymptoten vorgekommen sein, mit deren Eigenschaften Menächmus vertraut war. Vorgekommen wird auch sein, was in einer Stelle der Phaenomena wiederholt ist, daß der Schnitt, welcher einen Kegel oder einen Zylinder nicht parallel zur Basis (*μὴ παρὰ τὴν βάσιν*) treffe, der Schnitt eines spitzwinkligen Kegels (vergl. S. 244) sei, welcher einem länglichen Schilde, Thyreos gleiche. Offenbar ist dieser Satz richtig für den Zylinderschnitt, nur bedingt richtig für den des Kegels, wenn nämlich der Schnitt beide Kegelseiten trifft. Die Vermutung, Thyreos sei der älteste Name der Ellipse gewesen, wiederholen wir mit allem Vorbehalte[1]). Dafür spricht allerdings die wiederholte Anwendung des Namens bei Proklos[2]). Ob Anwendungen der Kegelschnitte auf die Verdoppelung des Würfels bei Euklid gelehrt wurden, ist fraglich. Es wäre auffallend, wenn er an so wich-

[1]) Sie rührt von Heiberg her, welcher auch auf die wichtige Stelle der Phaenomena zuerst aufmerksam machte. Vgl. Heiberg, Euklidstudien S. 88. [2]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 103 lin. 6, pag. 111 lin. 6 und besonders pag. 126 lin. 19 sqq. Vgl. L. Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid. Stuttgart 1881. S. 12, Note 1.

tigen älteren Dingen vorübergegangen wäre; es wäre auffallender, wenn er sich dabei aufhielt und weder Eratosthenes noch Eutokius in ihrem historischen Berichte über das delische Problem den Namen des Euklid genannt hätten; von der auffallendsten Erscheinung zu schweigen, die darin wieder bestände, wenn Euklid sich keiner einzigen der antiken höheren Aufgaben zugewandt hätte, er der mitten in seiner Zeit lebend wie kaum je ein anderer ihre Gesamtergebnisse in sich vereinigte.

Wir haben eine einzelne Stelle der Phaenomena[1]), einer astronomischen Schrift Euklids, angeführt. Wichtiger ist diese Schrift noch dadurch, daß in ihr Sätze über die Kugellehre, die sogenannte Sphärik, gesammelt sind, welche zeigen, welchen Grad der Entwicklung dieser Teil der Stereometrie damals schon erreicht hatte. Euklid weiß, daß jede Ebene die Kugel in einem Kreise schneidet. Er weiß, was allerdings auch ein kurz vor ihm lebender Astronom, Autolykus von Pitane[2]), schon ähnlich aussprach, daß Kugelkreise, die sich halbieren, größte Kreise sind. Er kennt Eigenschaften von Kreisen, welche durch die Pole von anderen hindurchgehen. Er weiß, daß, wenn ein größter Kugelkreis zwei gleiche Parallelkreise schief schneidet, die Abschnitte der letzteren in umgekehrter Ordnung einander gleich sind usw. Die Frage ist von großem Belang, woher diese Kenntnisse des Autolykus, des Euklid stammen mögen? Man hat die Vermutung gewagt[3]), bedeutende Anfänge einer Sphärik gingen bis auf Eudoxus zurück. Wir wollen keinen Widerspruch erheben, bemerken aber, daß eigentliche Beweisgründe für diese Vermutung nicht vorhanden sind.

Von dem Gegensatze, welcher für die Griechen zwischen Geometrie und Geodäsie obwaltet, war (S. 252 und 271) die Rede. In Dikaearch haben wir (S. 257), mag er von der Dioptra Gebrauch gemacht haben oder nicht, einen wirklichen Geodäten kennen gelernt. Auch von Euklid ist uns Feldmesserisches in einer sogenannten Optik[4]) erhalten, und über die vier Kapitel 19, 20, 21, 22, welche

[1]) Die Phaenomena sind griechisch herausgegeben von Gregory in seiner Euklidausgabe, deutsch von A. Nokk in einer Freiburger Programmbeilage von 1850. Über die Echtheit der Phaenomena vgl. insbesondere A. Nokk in seiner Bruchsaler Programmbeilage von 1847 Ueber die Sphärik des Theodosius S. 17 flg. Neueste Untersuchungen in Heibergs Euklidstudien. [2]) Die erhaltenen Schriften des Autolykus hat Fr. Hultsch herausgegeben. Leipzig 1885. [3]) Hultsch in der Vorrede zu Autolykus pag. XII mit Berufung auf Heiberg und P. Tannery. [4]) Der griechische Text abgedruckt in Heibergs Euklidstudien S. 100—102, eine deutsche Überarbeitung bei H. Weissenborn, Gerbert. Berlin 1888. S. 96 bis 98. Eine vollständige Ausgabe mit alter lateinischer Übersetzung, die sicherlich schon im XIV. Jahrh. vorhanden war, hat Heiberg im 7. Bande von Euklids Werken (Leipzig 1895) besorgt.

dadurch von hohem Interesse geworden sind, müssen wir berichten. Im 19. Kapitel ist die Höhemessung mittels des Schattens gelehrt, welche wir (S. 144) als die des Thales beschrieben haben. Im 20. Kapitel wird (Fig. 47) zur Messung der Höhe AB ein Spiegel

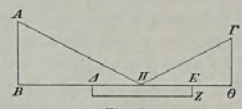

Fig. 47.

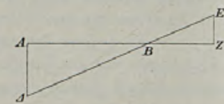

Fig. 48.

ΔZ benutzt, der auf der Erde liegt. Der Messende sieht, wenn Γ sein Auge ist, den Höhepunkt A in H; wird sodann ΘH, BH, $\Theta\Gamma$ gemessen, so läßt AB vermöge der Ähnlichkeit der Dreiecke ABH und $\Gamma\Theta H$ sich leicht berechnen. Ähnlichkeit von Dreiecken führt im 21. Kapitel zur Messung einer Tiefe $A\Delta$, indem (Fig. 48) der Messende so weit sich entfernt, daß sein Auge E den Tiefpunkt Δ an dem Rande B des Brunnens, oder was es nun sein mag, vorüber erblickt. Endlich wird wieder mittels Dreiecksähnlichkeit im 22. Kapitel eine entfernte Länge gemessen (Fig. 49). Die ΔE wird der zu messenden AB parallel gezogen (vielleicht auch vor die Augen gehalten?), so daß $\Gamma\Delta A$ und ΓEB Sehstrahlen sind, welche in A und B eintreffen. Alsdann ist $\Gamma\Delta : \Gamma A = \Delta E : AB$.

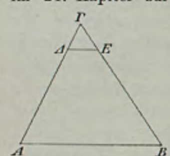

Fig. 49.

Damit sind die hier genauer zu behandelnden Schriften des Euklid erschöpft. Ihm zugeschriebene Bücher über Musik nennen wir nur im Vorübergehen; wir haben S. 165 ein Bruchstück derselben erwähnt, welches von einem arithmetischen Satze des Archytas handelte. Überdies sind verschiedene Bruchstücke mechanischen Inhaltes[1]) teils in arabischer Sprache, teils in mittelalterlicher lateinischer Übersetzung erhalten, für deren Echtheit oder Unechtheit wir uns nicht zu entscheiden brauchen, da sie dem Gegenstande unserer Untersuchungen doch nur sehr entfernt verwandt sind. So viel scheint gesichert, daß die Stücke in letzter Linie dem Griechischen entstammen, und daß sie einen tüchtigen Geometer der klassischen Zeit zum Verfasser hatten, der die Lehre vom Hebel beherrschte.

[1]) P. Duhem, Les Origines de la Statique I, 62—79.

14. Kapitel.

Archimedes und dessen geometrische Leistungen.

Wir stehen an der Schilderung des Schriftstellers, welcher der Zeit nach unmittelbar auf Euklid folgt, dem Gehalte nach dagegen allen den Vorrang abgewann, die im Altertum mit Mathematik sich beschäftigt haben. Wir brauchen nach dieser in wenigen Worten enthaltenen Würdigung wohl kaum zu sagen, wen wir meinen. Archimedes ist einer der wenigen Mathematiker des Altertums, welchen die Nachwelt zu allen Zeiten nach Gebühr ihre dankbare Erinnerung zuwandte. Er hat sogar einen eigenen Biographen in Heraklides gefunden, einem Schriftsteller von nicht näher zu bestimmender Lebenszeit, als daß er jedenfalls vor das VI. S. zu setzen ist, da Eutokios aus ihm geschöpft hat[1]), es sei denn, man wolle in Heraklides einen Freund des Archimedes wiedererkennen, der diesen Namen führte, und von welchem in dem Buche über Schneckenlinien wiederholt die Rede ist[2]). Sei dem, wie es wolle; das vermutlich wichtige Quellenwerk über das Leben des Archimedes ist uns verloren, und so muß, was über seine persönlichen Verhältnisse zu sagen ist, aus den verschiedensten Schriftstellern zusammengesucht werden[3]). Archimed wurde in Syrakus wahrscheinlich 287 v. Chr. geboren. Eine Stelle aus einer Schrift des Archimedes *Φειδία δὲ τοῦ ᾿Ακούπατρος*[4]), der man keinen guten Sinn abgewinnen konnte, und die man deshalb für verderbt hält, hat zur Vermutung[5]) geführt, es habe ursprünglich *Φειδία τοῦ ἁμοῦ πατρός* geheißen, und der Name von Archimedes' Vater sei demnach Pheidias gewesen, derselbe habe sich überdies als Astronom verdient gemacht. Allerdings ist damit der Zweifel nicht gehoben, ob Archimed, wie eine Nachricht meldet, dem Könige Hieron verwandt, ob er, nach einer anderen Nachricht, von niederer Geburt war. Sein nahes fast freundschaftliches Verhältnis zu dem Könige steht jedenfalls außer Zweifel. Wer die Lehrer des Archimed gewesen sind, ist nicht bekannt. So viel gibt Diodor an[6]), und ein

[1]) Archimedes (ed. Heiberg) III, 266 zitiert Eutokius: *Ἡρακλείδης ἐν τῷ Ἀρχιμήδους βίῳ.* [2]) Archimedes (ed. Heiberg) II, 2 und 6. [3]) Die Hauptquellen sind Plutarch (vita Marcelli), Livius XXV, Cicero (Tusculan. und Verrin.), Diodor, Silius Italicus, Valerius Maximus, Tzetzes. Die neuesten Zusammenstellungen in Bunte, Ueber Archimedes (Programm der Realschule zu Leer, Ostern 1877) und in der Kopenhagner Doktordissertation von 1879: J. L. Heiberg, Quaestiones Archimedeae. [4]) Archimedes (ed. Heiberg) II, 248 lin. 8. [5]) F. Blass in den Astronomischen Nachrichten CIV, 255. [6]) Diodor V, 37.

unbekannter arabischer Schriftsteller bestätigt es, daß er in Ägypten war, er wird daher jedenfalls zu den Alexandrinern in Beziehung getreten sein. Auch von einem Aufenthalte Archimeds in Spanien wird erzählt. Nach Syrakus zurückgekehrt lebte er dort der Wissenschaft, deren praktische Anwendung er jedoch so wenig verschmähte, daß gerade seine Leistungen in der Mechanik zu denen gehören, welche ihn am berühmtesten gemacht haben. Vor allem waren die Dienste, die er seiner Vaterstadt Syrakus im Kriege gegen Rom leistete, geeignet, seinem Namen Glanz zu verleihen. Die Bemühungen des Archimed waren es ganz allein, so erzählt Livius, welche die Angriffe des Marcellus auf die belagerte Stadt durch zwei Jahre vereitelten. Nur durch eine Überrumpelung von der Landseite aus gelang es 212 v. Chr. Syrakus zu nehmen, und bei dieser Gelegenheit starb Archimed im Alter von 75 Jahren[1]), ein Opfer der Roheit eines römischen Soldaten, welcher ihn niedermachte, während er des Tumultes nicht achtend seine geometrischen Figuren in den Sand zeichnete. Ob er dabei die Worte aussprach: *παρὰ κεφαλὰν καὶ μὴ παρὰ γραμμὰν*, jener möge lieber den Kopf als die Linien ihm verletzen, oder nur um Schonung seiner Figuren bat, *ἀπόστηθι, ὦ ἄνθρωπε, τοῦ διαγράμματός μου*, wie ein anderer Berichterstatter in jedenfalls unrichtigem Dialekte ihn ausrufen läßt[2]), ist ziemlich gleichgültig. Marcellus, der römische Feldherr, empfand große Trauer über den Tod des berühmten Gegners und ließ ihm ein Grabmal setzen mit einer mathematischen Figur als Inschrift, wie jener es einst selbst angeordnet hatte. Das Grabmal scheint indessen von Archimeds Landsleuten schmählich vernachlässigt worden zu sein, da Cicero, der es bei seinem Aufenthalte in Syrakus, wo er 75 v. Chr. als Quästor von Sizilien verweilte, aufsuchte, es nur mit Mühe unter dem überwuchernden Gestrüppe entdeckte und an der Inschrift erkannte. Er ließ es darauf aufs neue instand setzen.

Die Schriften Archimeds[3]) sind nur zum Teil auf uns gekommen und zudem nicht alle im reinen unverderbten griechischen Grundtexte. Die besterhaltenen tragen als besonderes Kennzeichen noch an sich, daß sie im dorischen Dialekte abgefaßt sind, wodurch sie auch sprachliche Wichtigkeit besitzen. Durch Vergleichung der Persönlichkeiten, welche in den einzelnen Schriften des Archimed

[1]) Nach Tzetzes. Auf dieser Angabe beruht die Berechnung seines Geburtsjahres. [2]) Die erste Redensart nach Zonaras, die zweite nach Tzetzes. [3]) Die beste ältere Ausgabe des Textes und des Kommentars von Eutokius von Askalon, so viel davon vorhanden ist, war die von Torelli. Oxford 1792. Sie wurde weit überholt durch die Ausgabe von Heiberg in 3 Duodezbänden. Leipzig 1880—81. Die beste deutsche Übersetzung von Nizze. Stralsund 1824.

genannt sind, nämlich des Konon, des Zeuxippus, des Dositheus, des Königs Gelon, durch fernere Vergleichung der nicht allzuseltenen Benutzung in späteren Schriften von Sätzen, welche in früheren bewiesen worden waren, ist es gelungen folgende wahrscheinlich zutreffende Anordnung der vorhandenen archimedischen Schriften nach ihrer Entstehungszeit zu erhalten: 1. Zwei Bücher vom Gleichgewichte der Ebenen, zwischen welche eine Abhandlung über die Quadratur der Parabel mitten eingeschoben ist. 2. Zwei Bücher von der Kugel und von dem Zylinder. 3. Die Kreismessung. 4. Die Schneckenlinien oder Spiralen. 5. Das Buch von den Konoiden oder Sphäroiden. 6. Die Sandeszahl. 7. Zwei Bücher von den schwimmenden Körpern. 8. Wahlsätze.

Es will nicht gut angehen wieder, wie wir es bei Euklid getan haben, den Inhalt dieser Schriften einzeln und der Reihe nach durchzusprechen. Daß einer solchen Darstellung notwendigerweise die Übersichtlichkeit abgeht, wird der Leser gerade in den Euklid gewidmeten Kapiteln bemerkt haben. Dort mußten wir aber diese sonst wesentliche Bedingung opfern, weil es darauf ankam zu zeigen, was alles unter dem Namen Elemente der Geometrie einbegriffen wurde. Eine ähnliche Notwendigkeit wird uns im 18. und 19. Kapitel noch zwingen, die für uns vielfach unzusammenhängenden Gegenstände, die Herons großes feldmesserisches Werk behandelte, einzeln zu nennen. Archimed aber hat kein uns erhaltenes Sammelwerk geschrieben. Er verfaßte vorwiegend einzelne Abhandlungen, in denen er zumeist Neues, von ihm selbst Erdachtes mitteilte, und da wird es für die Würdigung der Größe der Entdeckungen sich als zweckmäßiger empfehlen, die Gegenstände aus den einzelnen Abhandlungen herauszureißen und nach ihrem Inhalte zu neuen Gruppen zu vereinigen. Wir werden zu reden haben von den Entdeckungen Archimeds in der Geometrie der Ebene und des Raumes, in der Algebra und Arithmetik, endlich im Zahlenrechnen, wobei wir des griechischen Zahlenrechnens überhaupt gedenken müssen, wir werden auch nicht umhin können, seine mechanischen Leistungen ins Auge zu fassen.

Vielleicht beginnen wir am besten mit einem geometrischen Spielwerke. Ein Metriker aus dem Jahre 500 etwa, Atilius Fortunatianus, erzählt[1]) von dem loculus Archimedius. Ein elfenbeinernes Quadrat war in 14 Stücke von verschiedener vieleckiger Gestalt zerschnitten, und es handelte sich darum aus diesen Stücken das ursprüngliche Quadrat, aber auch sonst beliebige Figuren zusammenzulegen. Es bleibe dahingestellt, ob Archimed wirklich selbst

[1]) Veteres Grammatici (ed. Putschius) pag. 2684.

dieses Spiel erdachte, oder ob man nur als archimedisch, d. h. als sehr schwierig bezeichnen wollte, die einzelnen Gestaltungen herzustellen.

Als archimedisch wird auch häufig die Definition genannt, die Gerade sei die kürzeste Entfernung zweier Punkte. Diese Behauptung ist richtig und unrichtig, je nachdem man den Nachdruck auf den Wortlaut des Satzes oder auf seine Eigenschaft als Definition legt. Archimed benutzt den Satz allerdings in seinen Büchern über Kugel und Zylinder, aber er beabsichtigt keineswegs durch ihn die Gerade zu erklären. Er nehme an, sagt er vielmehr ausdrücklich[1]), von den Linien, welche einerlei Endpunkte haben, sei die gerade Linie die kürzeste; er nehme ferner an, von Linien in einer Ebene, die mit einerlei Endpunkten versehen nach einer Seite hin hohl seien, müsse die umschlossene die kürzere sein.

Als geometrisch interessant bieten sich uns ferner einige Wahlsätze. Das unter diesem Titel bekannte, aus 15 Sätzen der ebenen Geometrie bestehende Buch ist aus dem Arabischen ins Lateinische übertragen worden[2]). Daß es in der Form, wie wir es besitzen, keinenfalls von Archimed selbst herrühren kann, dessen Name im 4. und 14. Satze genannt ist, während in anderen Sätzen andere Unzuträglichkeiten nicht zu verkennen sind, ist mit Recht bemerkt worden[3]). Einige Sätze scheinen uns gleichwohl archimedischen Ursprunges zu sein, unter welchen namentlich der 4., 5., 6., der 11., der 14., der 8. hier genannt seien. Satz 4.—6. beschäftigen sich mit dem Arbelos (Fig. 50), einer in Gestalt eines Schusterkneifes gekrümmten Figur, bestehend aus einem Halbkreise, über dessen Durchmesser in zwei aneinanderstoßenden Abteilungen kleinere Halbkreise in das Innere des umschließenden Halbkreises sich erstrecken. Daß Archimed sich mit dieser Figur beschäftigt habe, ist einer Stelle des Pappus[4]) zu entnehmen, in welcher wenigstens von alten Untersuchungen über sie die Rede ist. Im 5. und im 6. Satze ist von dem gemeinsamen Durchschnittspunkte der drei Höhen eines Dreiecks die Rede[5]). Der 11. Satz besagt,

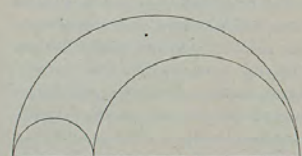

Fig. 50.

[1]) Archimed (ed. Heiberg) I, 8—10, (ed. Nizze) 44. [2]) Liber assumptorum. Archimed (ed. Heiberg) II, 428—446, (ed. Nizze) 254—262. [3]) Heiberg, *Quaestiones Archimedeae*, 24. [4]) Pappus Buch IV, 19 (ed. Hultsch) Bd. I, pag. 208. [5]) Archimed (ed. Heiberg) II, 434 und 436.

daß wenn in einem Kreise zwei Sehnen sich senkrecht durchschneiden, die Quadrate der vier so gebildeten Abschnitte zusammen dem Quadrate des Durchmessers gleich sein müssen. Der 14. Satz lehrt den Flächeninhalt des Salinon messen, der Wogengestalt, wie man den ausdrücklich als von Archimed herstammend bezeugten Namen vielleicht übersetzen darf[1]). Diese Figur entsteht (Fig. 51), wenn über und unter derselben Geraden als Richtung des Durchmessers von demselben Mittelpunkte aus aber mit verschiedenen in beliebigem Verhältnisse zueinander stehenden Halbmessern Halbkreise beschrieben werden, zu welchen noch zwei Halbkreischen nach der Seite des großen Halbkreises hin gerichtet über dem durch den nach der Jenseite sich wölbenden kleineren Halbkreis freigelassenen Stückchen des Durchmessers treten. Wird durch den Mittelpunkt der beiden erstgezeichneten Halbkreise und senkrecht zu deren Durchmesser die Strecke AB gezeichnet, so ist der um dieselbe als Durchmesser beschriebene Kreis dem Salinon flächengleich. Der 8. Satz hat folgenden Inhalt. Wenn (Fig. 52) eine willkürliche Sehne AB eines Kreises verlängert und die Verlängerung $B\Gamma$ dem Halbmesser des Kreises gleich gemacht wird, wenn hiernächst Γ mit dem Mittelpunkte Δ des Kreises verbunden und diese Verbindungslinie bis zum abermaligen Durchschnitte des Kreises nach E verlängert wird, so ist der Bogen AE das Dreifache des

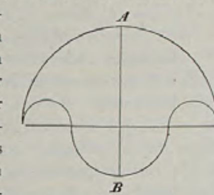

Fig. 51.

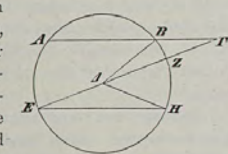

Fig. 52.

[1]) Von σάλος = das Schwanken des hohen Meeres? Heiberg in seiner Archimedausgabe II, 443 gibt die Ableitung σέλινον = Eppich, mit dessen Blatt er in der Figur eine Ähnlichkeit erkennen will. Für diese Meinung führt P. Tannery (Bibliotheca Mathematica 3 Folge I, 266. 1900) an, daß auf den Münzen von Selinunt Eppichblätter abgebildet seien, welche der archimedischen Figur ähneln. T. L. Heath (The works of Archimedes. Cambridge 1897. Introduction pag. XXXIII) nimmt an, das Wort σάλινον sei erst in nacharchimedischer Zeit entstanden, als durch die römische Herrschaft lateinische Wörter in die Sprache Siziliens Eingang fanden, wie z. B. *libra* zu λίτρα wurde, *mutuum* zu μοῖτον, *carcer* zu κάρκαρον, *arvina* zu ἀρβίνη, *patina* zu πατάνη. Entsprechend sei σάλινον aus *salinum*, das Salzfäßchen, entstanden. Silberne Salzfäßchen waren als Familienerbstück schon zur Zeit der römischen Republik in jedem Haushalt vorhanden (Horaz Carmina II, 16, 13 und Livius XXVI, 36); die Salzfäßchen hatten aber einen der archimedischen Figur ähnlichen Durchschnitt, wenn man nach einem im British Museum vorhandenen Exemplare urteilen darf.

Bogens BZ. Man ziehe EH parallel zu AB und die Halbmesser ΔB und ΔH. Der Parallelismus von AB und EH bringt $\sphericalangle\, \Gamma = E$ hervor; Gleichschenkligkeit von Dreiecken zeigt, daß $\sphericalangle\, \Gamma = B\Delta\Gamma$ und $\sphericalangle\, E = H$. Ferner $\sphericalangle\, \Gamma\Delta H = 2E = 2\Gamma = 2B\Delta\Gamma$ und $\sphericalangle\, B\Delta H = 3B\Delta\Gamma$, also arc. $BH = AE = 3BZ$.

Die beiden letzterwähnten Sätze haben, wie uns scheint, eine besondere Tragweite durch die Ziele, auf welche Archimed mit ihrer Hilfe hinsteuerte. Bei dem 8. Satze, glauben wir, dachte er an die zu vollziehende Dreiteilung des Bogens AE. Sie war vermöge seines Satzes gelungen, sobald man eine Sehne AB versuchsweise mittels Bewegungsgeometrie fand, deren Verlängerung bis zur Verbindungsgeraden von E mit dem Kreismittelpunkte Δ die Länge des Kreishalbmessers besaß. Die vorerwähnte Quadratur des Salinon im 14. Satze wird wohl nicht minder richtig dahin aufzufassen sein, daß Archimed im Anschlusse an die Arbeiten des Hippokrates von Chios geometrisch versuchte, den Flächeninhalt des Kreises mit dem anderer Figuren in Gleichheit zu setzen. Nur war vielleicht die Absicht beider die entgegengesetzte. Hippokrates wollte zuverlässig aus den dem Kreise gleichen Figuren die Fläche des Kreises ermitteln. Archimed beabsichtigte möglicherweise anderweitige krummlinig begrenzte Figuren auf den als bekannt vorausgesetzten Kreis zurückzuführen.

Bekannt war ihm nämlich allerdings der Kreis durch seine Kreismessung. Diese merkwürdige Abhandlung ist nach ihrem geometrischen Gehalte wie mit Hinsicht auf die Geschichte des Zahlenrechnens der höchsten Beachtung wert. Wir haben es fürs erste nur mit dem Geometrischen zu tun. Archimed geht davon aus, daß er beweist, der Kreis sei einem rechtwinkligen Dreiecke gleich, dessen eine Kathete die Länge des Halbmessers, die andere die des Kreisumfangs besitzt. Wäre dieses Dreieck kleiner als der Kreis, so müßte irgend ein angebbarer Unterschied vorhanden sein, und es wäre möglich durch Einzeichnung eines Quadrates in den Kreis und fortgesetzte Halbierung der Bogen ein Vieleck zu erlangen, welches den Kreis bis auf gewisse kleine Abschnitte erfüllte, deren Summe endlich kleiner als jener Überschuß des Kreises über das Dreieck wäre. Nennt man etwa K, V, D die Inhalte des Kreises, des Vielecks, des Dreiecks, so wäre mithin $K > V > D$, zugleich aber $U < P$ sofern U den Umfang des Vielecks, P die Kreisperipherie bedeutet, und zwar begründet sich diese letztere Ungleichung aus jener Annahme über die Gerade als kürzeste Entfernung zweier Punkte, von der oben die Rede war. Nun ist V gleich einem rechtwinkligen Dreiecke, welches als größere Kathete U, als kleinere die Senkrechte h besitzt, die vom

Kreismittelpunkte aus auf irgend eine Seite des Vielecks gefällt war, und die selbst kleiner als der Kreishalbmesser r sein muß. Mit anderen Worten $V = \frac{U \cdot h}{2}$, $D = \frac{P \cdot r}{2}$ und wegen $V > D$ auch $U \cdot h > P \cdot r$, während jeder Faktor des größeren Produktes kleiner ist als ein ihm entsprechender Faktor des kleineren Produktes, und darin liegt ein Widerspruch. Zu einem ferneren Widerspruch führt auch die Annahme $K < D$. Ausgehend von dem dem Kreise umschriebenen Quadrate wird durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl ein umschriebenes Vieleck gefunden werden können, dessen Inhalt V' der Ungleichung $K < V' < D$ genügen muß, während sein Umfang $U' > P$ ist, und die Senkrechte h' vom Kreismittelpunkte auf die Seiten dieses Vielecks notwendig $h' = r$ sein muß. Trotzdem müßte hier $\frac{U' \cdot h'}{2} < \frac{P \cdot r}{2}$ sein oder $U' < P$ und doch auch $U' > P$. Es bleibt also nur die Annahme $K = D = \frac{r \cdot P}{2}$ übrig. Freilich hat man die an die Spitze gestellte Voraussetzung, es gebe eine Gerade von der Länge P, welche als Seite eines rechtwinkligen Dreiecks auftreten könne, bemängelt. Wir erinnern daran, daß Dinostratus die gleiche Annahme schon sich gestattet hatte (S. 247). Auch Eutokius nimmt Archimed gegen den angeführten Vorwurf, welcher ihm damals schon gemacht worden war, in Schutz. Er habe nichts Unziemliches ausgesprochen. Die Kreislinie sei eine Größe von bestimmter Abmessung, der irgend eine Gerade gleich sein müsse und es sei keineswegs unstatthaft, das Vorhandensein jener Geraden in einem Satze vorweg zu benutzen, noch bevor man sie finden gelehrt habe. Allerdings ist nun diese Auffindung das nächste Problem und ihm geht jetzt Archimed rechnend zuleibe, nach einer Methode also, welche Euklid, wie wir (S. 271) besprochen haben, sich wahrscheinlich untersagt hätte, nicht geometrisch, sondern geodätisch. Archimed sucht zwei Grenzen, zwischen welche er das Verhältnis der Kreisperipherie P zum Durchmesser d einschließen will und findet

$$P : d < 3\tfrac{1}{7} : 1 \quad \text{und} \quad P : d > 3\tfrac{10}{71} : 1.$$

Wir bemerken, daß Archimed bei seinem früheren Beweise $K = \frac{r \cdot P}{2}$ von den Quadraten ausging, welche dem Kreise ein- und umgeschrieben werden können, wie es (S. 272) Euklid im 12. Buche der Elemente getan hat um die Proportionalität von Kreisinhalt und Durchmesserquadrat festzustellen, wie es (S. 202) schon viel früher Antiphon getan hatte. Bei der Aufsuchung der Zahlengrenzen für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser ging Archimed dagegen von einem ganz anderen Versuche aus, welcher die größere Grenze ihm verschaffen sollte. Er benutzte dasjenige gleichseitige Dreieck, welches seine Spitze im Kreismittelpunkte besitzt, während die dritte dieser Spitze gegenüberliegende Seite Berührungslinie an den Kreis ist. Heißt die Seite dieses Dreiecks a, der Kreishalbmesser r, so ist leicht ersichtlich $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ und $r : \frac{a}{2} = \sqrt{3} : 1$. Archimed behauptet ohne weitere Begründung, es sei $r : \frac{a}{2} > 265 : 153$ und wirklich ist $\left(\frac{265}{153}\right)^2 = \frac{70225}{23409} = 3 - \frac{2}{23409}$ also $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$. Ferner ist $a : \frac{a}{2} = 306 : 153$. Die beiden Verhältnisse vereinigt geben folglich $(r + a) : \frac{a}{2} > 571 : 153$. Nun kommt eine kleine geometrische Betrachtung. Wenn (Fig. 53) die $A\Delta$ den Winkel $BA\Gamma$ halbiert, so ist $AB : A\Gamma = B\Delta : \Delta\Gamma$, $(AB + A\Gamma) : A\Gamma = (B\Delta + \Delta\Gamma) : \Delta\Gamma$ oder $(a + r) : r = \frac{a}{2} : \Delta\Gamma$. Aus dieser Proportion folgt weiter $r : \Delta\Gamma = (r + a) : \frac{a}{2} > 571 : 153$. Dieses Ergebnis zu nachheriger Benutzung aufsparend folgert Archimed weiter $r^2 : \Delta\Gamma^2 > 571^2 : 153^2$ und $(r^2 + \Delta\Gamma^2) : \Delta\Gamma^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2$ oder $A\Delta^2 : \Delta\Gamma^2 > 349450 : 153^2$ und $A\Delta : \Delta\Gamma > 591\frac{1}{8} : 153$. Auch diese Zahlen sind richtig gewählt, denn $\left(591\frac{1}{8}\right)^2 = 349428\frac{49}{64} < 349450$. Der Winkel $\Delta A\Gamma$ wird durch die AE halbiert. Dadurch gewinnt man neue Proportionen $A\Delta : A\Gamma = \Delta E : E\Gamma$, dann $(A\Delta + A\Gamma) : A\Gamma = (\Delta E + E\Gamma) : E\Gamma$ und $(A\Delta + A\Gamma) : (\Delta E + E\Gamma) = A\Gamma : E\Gamma$, d. h. $(r + A\Delta) : \Delta\Gamma = r : E\Gamma$. Nun erinnern wir uns an

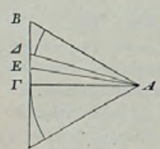

Fig. 53.

$$r : \Delta\Gamma > 571 : 153$$

nebst

$$A\Delta : \Delta\Gamma > 591\tfrac{1}{8} : 153.$$

Die Vereinigung beider Verhältnisse gibt $(r + A\Delta) : \Delta\Gamma > 1162\frac{1}{8} : 153$ oder auch

$$r : E\Gamma > 1162\tfrac{1}{8} : 153.$$

Die gewonnenen Ergebnisse stellen wir übersichtlicher zusammen:

$$r : B\Gamma > 265 : 153$$
$$r : \Delta\Gamma > 571 : 153$$
$$r : E\Gamma > 1162\tfrac{1}{8} : 153.$$

$B\Gamma$ ist die halbe Sechsecksseite, $\Delta\Gamma$ die halbe Zwölfecksseite, $E\Gamma$ die halbe Vierundzwanzigecksseite, wenn immer die regelmäßigen dem Kreise umschriebenen Vielecke gemeint sind. Die Umfänge U'_6, U'_{12}, U'_{24} dieser Vielecke sind

$$U'_6 = 12B\Gamma, \quad U'_{12} = 24B\Gamma, \quad U'_{24} = 48B\Gamma$$

und somit

$$r : U'_6 > 265 : 1836$$
$$r : U'_{12} > 571 : 3672$$
$$r : U'_{24} > 1162\tfrac{1}{8} : 7344.$$

Archimed setzt nun das Verfahren mit Winkelhalbierung, Verbindung von Verhältnissen, Einsetzen von nahezu richtigen, aber immer etwas zu kleinen Quadratwurzelwerten fort bis zu

$$r : U'_{96} > 4673\tfrac{1}{2} : 29376$$

und schließt daraus umgekehrt

$$U'_{96} : d < 14688 : 4673\tfrac{1}{2} < 3\tfrac{1}{7} : 1,$$

da aber $P < U'_{96}$ ist, so muß um so sicherer

$$P : d < 3\tfrac{1}{7} : 1$$

sein.

Nun kommt die entgegengesetzte Aufgabe, eine untere Grenze für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser zu finden an die Reihe, und hierzu nimmt Archimed die dem Kreise eingeschriebenen Vielecke zu Hilfe, indem er, wie Antiphon bei einem seiner Versuche, das eingeschriebene gleichseitige Dreieck zum Ausgange wählt, dessen Seite sich zum Halbmesser verhält wie $\sqrt{3} : 1$, d. h. $< 1351 : 780$. Winkelhalbierungen usw. führen hier zu

$$U'_{96} : d > 6336 : 2017\tfrac{1}{4} > 3\tfrac{10}{71} : 1$$

und um so gewisser zu

$$P : d > 3\tfrac{10}{71} : 1.$$

Nächst dem Kreise beschäftigte sich Archimed bei seinen geometrischen Untersuchungen mit den Kegelschnitten. Man hat wohl angenommen, Archimed habe eine uns verloren gegangene Schrift Elemente der Kegelschnitte, στοιχεῖα κωνικά, verfaßt. Man hat sich dabei auf zwei Stellen gestützt, die eine in der Abhandlung über die Quadratur der Parabel Satz 3.[1]), die andere in dem Buch von

[1]) Archimed (ed. Heiberg) II, 300, (ed. Nizze) 13.

den Konoiden und Sphäroiden Satz 4.[1]), in welchen Archimed auf ein solches Werk verweist, ohne einen Verfasser zu nennen. Das tat, sagt man, Archimed nur, wo er auf eigene Arbeiten zurückgriff. So richtig diese Behauptung im allgemeinen ist, so erinnern wir uns doch einer Ausnahme. Archimed beruft sich, wie wir (S. 261) hervorgehoben haben, im 6. Satze des ersten Buches über Kugel und Zylinder[2]) auf die Elemente und meint damit den Elementenschriftsteller, der vorzugsweise diesen Namen geführt hat, Euklid. Möglich, daß er denselben im Sinne hatte, als er von Elementen der Kegelschnitte sprach, da Euklid bekanntlich auch über diesen Gegenstand ein Werk verfaßt hat[3]). Vielleicht ist eine kleine Bestätigung dieser Vermutung folgendem Umstande zu entnehmen. Pappus gibt nämlich an, die vier ersten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius, mit welchen wir uns bald zu beschäftigen haben, stützten sich wesentlich auf die Vorarbeiten Euklids. Bei Apollonius finden wir aber I, 20, 35, 46; II, 5; III, 17, 18, die Lehrsätze, welche Archimed als in den Elementen der Kegelschnitte enthalten benutzt.

Mag dem sein, wie da wolle, jedenfalls rühren wertvolle Einzeluntersuchungen über Kegelschnitte von Archimed her. Wir legen nicht gerade großes Gewicht darauf, daß Archimed dem früher erwähnten Satz von der Entstehung des Schnittes des spitzwinkligen Kegels den dort fehlenden Zusatz gab[4]), die gleiche Kurve könne auf dem Mantel eines jeden Kegels erzeugt werden, aber um so höher steht seine Quadratur der Parabel. Wir haben schon gesagt, daß diese Abhandlung zwischen die beiden Bücher vom Schwerpunkte und dem Gleichgewichte der Ebene eingeschaltet erscheint. Die Methode, deren Archimed sich bedient, um zu seinem Ziele zu gelangen, ist ihren Hauptzügen nach folgende[5]). Wird ein Parabelabschnitt durch eine durch die Mitte der denselben bildenden Sehne der Achse parallel gezogene Gerade geschnitten, so ist die Berührungslinie an die Parabel in dem Schnittpunkte der Sehne selbst parallel. Somit ist die Senkrechte aus diesem Schnittpunkte auf die Sehne die größte Senkrechte, welche überhaupt aus einem Punkte innerhalb des gegebenen Parabelbogens auf die Sehne gefällt werden kann, oder dieser Punkt ist als höchster Punkt des Parabelabschnittes über seiner Sehne zu bezeichnen. Daraus folgt weiter, daß der Parabelabschnitt durch-

[1]) Archimed (ed. Heiberg) I, 302, (ed. Nizze) 158. [2]) Archimed (ed. Heiberg) I, 24, (ed. Nizze) 48. [3]) Diese Ansicht ist auch durch Heiberg, Die Kenntnisse des Archimedes über Kegelschnitte (Zeitschr Math. Phys. XXV, Histor.-literar. Abtlg. S. 42) ausgesprochen und teilweise anders begründet worden. [4]) Archimed (ed. Heiberg) I, 288, (ed. Nizze) 154. [5]) Archimed (ed. Heiberg) II, 294—353, (ed. Nizze) 22—25.

aus eingeschlossen ist in dem Rechtecke, welches jene Senkrechte als Höhe, die Sehne nebst der ihr parallelen Berührungslinie als Grundlinie besitzt. Bildet man nun das Dreieck, welches die Sehne zur Grundlinie, den genannten Höhepunkt als Spitze besitzt, und welches folglich von dem ersten Parabelabschnitte um zwei neue kleinere Abschnitte sich unterscheidet, so muß dasselbe als Hälfte des Rechtecks und als eingeschrieben in den Parabelabschnitt größer sein als die Hälfte des Abschnittes, kleiner als sein Ganzes. Man kann aber auch die umgekehrte Folgerung ziehen und die Fläche des Abschnittes größer als das betreffende Dreieck, kleiner als das Doppelte desselben nennen. In jeden der beiden neuen kleineren Abschnitte wird nach ähnlicher Regel wieder ein Dreieck beschrieben, deren jedes mehr als die Hälfte des ihn enthaltenden Abschnittes einnimmt und genau den achten Teil des ersten Dreiecks als Flächeninhalt besitzt. Es ist das ein Verfahren, bei welchem dasjenige als Muster gedient haben mag, dessen Euklid sich bediente (S. 272), um zu beweisen, daß Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Der Parabelabschnitt wird dadurch in zweiter Annäherung größer als $1\frac{1}{4}$, kleiner als $1\frac{1}{2}$ des ersten Dreiecks, welches ihm eingezeichnet worden war. Nun werden in die neuen immer kleineren Parabelabschnitte wieder neue Dreiecke beschrieben und dem eben Behaupteten ähnliche Folgerungen gezogen. Nach heutiger Schreibweise kommt die Reihenfolge der so zu gewinnenden Sätze auf die Summierung der unendlichen Reihe $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots$ hinaus, deren Anfangsglied 1 den Flächeninhalt des ersten Dreiecks, deren Summe den Flächeninhalt des ganzen Parabelabschnittes darstellt. Archimed, freilich das Unendliche nur mittelbar in seine Betrachtungen einbegreifend, begnügt sich mit der Summierung der endlichen geometrischen Reihe, deren letztes Glied wir $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ nennen wollen. Deren Summe sei, sagt er, nur um den dritten Teil des niedersten Gliedes kleiner als $\frac{4}{3}$, d. h. also $= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Daran schließt sich der apagogische Teil des Beweises, welchen wir wiederholt als Ersatz für Unendlichkeitsbetrachtungen haben eintreten sehen. Aus der Möglichkeit den Unterschied zwischen dem Parabelabschnitte und $\frac{4}{3}$ des ersteingezeichneten Dreiecks kleiner als irgend eine angegebene Größe werden zu lassen, folgt die doppelte Unmöglichkeit, daß der eine oder der andere Flächenraum der größere sei.

Was die beiden anderen Kegelschnitte, die Hyperbel und die

Ellipse betrifft, so scheint Archimed der ersteren besondere Aufmerksamkeit nicht zugewandt zu haben. Dagegen hat er die Quadratur der Ellipse gefunden und zwischen den Untersuchungen über Konoide und Sphäroide als Satz 5. und 6. eingeschaltet[1]).

Die merkwürdigste uns erhaltene Schrift des Archimed über einen Gegenstand der ebenen Geometrie ist das Buch von den Schneckenlinien, *περὶ ἑλίκων*. Die Schneckenlinie ist die erste krumme Linie, welche durch eine doppelte Gattung von Bewegungen und von bewegten Elementen zugleich erzeugt worden ist. Die Quadratrix des Hippias benutzte freilich auch eine drehende und eine fortschreitende Bewegung zu ihrer Entstehung, aber die bewegten Elemente sind doch zwei gerade Linien, deren Durchschnittspunkt die genannte Kurve zum Orte hat. Wir halten es durchaus nicht für unmöglich, daß Archimed, der bei seinen Studien mit der Quadratrix und deren Anwendungen bekannt geworden sein muß, gerade durch die Abhandlungen des Hippias und des Dinostratus über ihre Kurve mehrfache Anregung gewann, die bei einem Archimed zu einem Fortschritte für die Wissenschaft werden mußte. Ein Fortschritt war es, wenn Archimed nicht mehr wie Dinostratus einfach annahm, daß die Kreisfläche einem rechtwinkligen Dreiecke von den Katheten r und P gleich sei, sondern diese Gleichheit streng bewies. Eine nicht geringere Bereicherung der Wissenschaft war es, als er, anstatt die fortschreitende Bewegung einer Geraden mit der Drehung einer zweiten Geraden zu verbinden, wie Hippias es getan hatte, darauf verfiel jene fortschreitende Bewegung einem Punkte beizulegen. Die archimedische Definition sagt ausdrücklich[2]): „Wenn eine gerade Linie in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte, welcher unbeweglich bleibt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt, bis sie wieder dahin gelangt, von wo die Bewegung ausging, und wenn zugleich in der bewegten Linie ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit von dem unbewegten Endpunkte anfangend sich bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine Schneckenlinie in der Ebene.“

Gehört diese Schneckenlinie, die archimedische Spirale, wie man sie gegenwärtig zu nennen pflegt, wirklich Archimed als Erfinder an? Man hat mit sich forterbendem Irrtume lange behauptet, nicht Archimed, sondern sein Freund Konon habe die Spirale erfunden und die sich auf dieselben beziehenden Sätze entdeckt. Letzteres ist durchaus unrichtig[3]) und folglich ersteres nicht hinlänglich begründet.

---

[1]) Archimed (ed. Heiberg) I, 312—316, (ed. Nizze) 160—161. [2]) Archimed (ed. Heiberg) II, 10, (ed. Nizze) 118. [3]) Das hat Nizze S. 281 in seinen kritischen Anmerkungen nachgewiesen.

Archimed hatte vielmehr jene Sätze an Konon zum Beweise geschickt, eine Sitte, welche in den allerverschiedensten Jahrhunderten, aber stets in Zeiten reger mathematischer Arbeit uns wieder begegnen wird, und hatte auch nach Konons Tode noch viele Jahre gewartet „ohne daß irgend jemand sich mit einer dieser Aufgaben beschäftigt hätte“[1]). Alsdann erst setzte er die Beweise in der Schrift über die Schneckenlinien auseinander. Wir können die Gedrungenheit der Beweise in keinem wiederholt abkürzenden Berichte deutlich machen. Wir verweisen auf die Abhandlung selbst, in welcher gerade der moderne Leser, der gewohnt ist Kurven von der Natur der Spirallinien nur mit Hilfe der Infinitesimalrechnung zu untersuchen, während er in der Lehre von den Kegelschnitten noch heute häufiger von synthetisch geometrischen Anschauungsbeweisen Gebrauch macht, die bewunderungswürdige Gewandtheit des Archimed in der Handhabung einfachster Hilfsmittel staunend erkennen wird. Einige wenige leicht abzuleitende Proportionen und Ungleichheiten, letztere wieder unerläßlich für das apagogische Verfahren der altertümlichen Exhaustion, die Zerlegung des Raumes der Schneckenlinie in Ausschnitte, deren jeder kleiner als ein äußerer, größer als ein innerer Kreisausschnitt ist, das ist der ganze wissenschaftliche Vorrat, mittels dessen die Quadratur der Schneckenlinie gefunden, die Berührungslinie an irgend einen Punkt derselben gezogen wird.

Manche andere Schriften des Archimed würden an dieser Stelle noch zu besprechen sein, wenn sie nicht verloren gegangen wären. Kaum daß die Überschriften uns durch arabische Berichterstatter erhalten blieben[2]). Ihnen zufolge verfaßte Archimed ein Buch über das Siebeneck im Kreise; ein anderes beschäftigte sich mit der gegenseitigen Berührung von Kreisen; ein drittes war den Parallellinien, ein viertes den Dreiecken gewidmet, letzteres möglicherweise auch unter anderem Titel noch genannt. Auch Daten und Definitionen soll Archimed in einem Buche vereinigt haben.

Unter dem, was der Verfasser für die Geometrie des Raumes leistete, ist zunächst eine Untersuchung zu erwähnen, von der wir nicht einmal wissen, bei welcher Gelegenheit und in welchem Zusammenhange er sie angestellt hat. Die Untersuchung selbst dagegen ist von Pappus, dem einzigen Schriftsteller, der von ihr spricht, mit genügender Deutlichkeit geschildert[3]), daß man nach ihm darüber berichten kann. Euklid hatte die Lehre von den fünf einzigen regelmäßigen Körpern erschöpfend behandelt. Archimed erfand zu ihnen

---

[1]) Archimed (ed. Heiberg) II, 2, (ed. Nizze) 116. [2]) Heiberg, *Quaestiones Archimedeae* 29—30. [3]) Pappus V (ed. Hultsch) 350 sqq.

13 halbregelmäßige Körper, welche durch regelmäßige Vielecke von mehr als nur einer Gattung begrenzt werden. Der Anzahl nach können 8, 14, 26, 32, 38, 62 oder 92 Grenzflächen vorhanden sein. Der Art nach sind es Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke, Achtecke, Zehnecke und Zwölfecke, welche auftreten. Bei zehn von den archimedischen Körpern sind nur Flächen zweierlei Art, bei den drei übrigen dreierlei Flächen vorhanden. Kein geringerer Mathematiker als Kepler[1]) hat zuerst nach Archimed seine Aufmerksamkeit diesem Gegenstande wieder zugewandt, worauf aufs neue eine zweihundertjährige Pause eintrat, bis seit Anfang des XIX. S. die halbregelmäßigen Vielflächner Eigentum der elementaren Stereometrie geworden sind.

Archimed selbst stellte von allen seinen Entdeckungen diejenigen am höchsten, welche er in den zwei Büchern von der Kugel und dem Zylinder niedergelegt hat. Es handelt sich darin um den Beweis von drei neuen Sätzen[2]): 1. daß die Oberfläche einer Kugel dem Vierfachen ihres größten Kreises gleich sei; 2. daß die Oberfläche eines Kugelabschnittes (die Kugelkalotte) so groß sei als ein Kreis, dessen Halbmesser einer geraden Linie vom Scheitel des Abschnittes bis an den Umfang des Grundkreises gleich sei; 3. daß der Zylinder, welcher zur Grundfläche einen größten Kreis der Kugel habe, zur Höhe aber den Durchmesser der Kugel, mit anderen Worten der der Kugel umschriebene Zylinder, anderthalbmal so groß sei als die Kugel, und daß auch seine Oberfläche das Anderthalbfache der Kugeloberfläche sei. Ein gewisser Nikon hat in Pergamum eine Inschrift, welche diesen Sätzen galt, in Stein hauen lassen[3]). Daß Archimed gerade auf diese Sätze einen wohlberechtigten Stolz empfand, geht daraus hervor, daß er die Kugel mit dem sie umgebenden Zylinder auf seinen Grabstein eingemeißelt wünschte, und daß es gerade diese Figur war, an welcher Cicero die Begräbnisstätte des großen Mannes erkannte[4]).

Archimed hat in demselben Werke über Kugel und Zylinder, im 4. und 5. Satze des II. Buches[5]), noch zwei andere die Kugel betreffende Aufgaben gestellt, welche ihn geraume Zeit beschäftigten. Eine Kugel soll durch eine Ebene derart geschnitten

[1]) In der *Harmonice mundi*. [2]) Archimed (ed. Heiberg) I, 2—4, (ed. Nizze) 42. [3]) Vgl. Ideler in v. Zachs Monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde XXIII, 257 und Buzengeiger ebenda XXIV, 572. [4]) Wir haben früher (wir wissen nicht mehr nach welchem Gewährsmanne) hier eingeschaltet, die Figur habe sich auf Münzen der Stadt Syrakus erhalten. H. Junge teilt uns mit, daß nach Erkundigungen, welche er im Münzkabinette des Berliner Museums einzog, solche Münzen nicht bekannt sind. [5]) Archimed (ed. Heiberg) I, 210 sqq., (ed. Nizze) 91 flgg.

werden, daß Oberflächen und Körperinhalte der beiden so gebildeten Kugelabschnitte in gegebenem Verhältnisse stehen. Die erstere Aufgabe hat, sofern die Berechnung der Kugelkalotte vorher bekannt ist, wie es der Fall war, keine Schwierigkeit; sie führt alsdann auf eine rein quadratische Gleichung. Anders verhält es sich mit der zweiten Aufgabe. Sie ist nur dann lösbar, wenn, wie Archimed ausdrücklich sagt, eine Länge gefunden werden kann, welche in die Proportion sich einfügt, die in Buchstaben $(a-x):b=c^2:x^2$ lauten würde, wenn also eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3-ax^2+bc^2=0$ gefunden werden kann. Archimed geht nun noch einen großen Schritt weiter, er gibt den Diorismus der Aufgabe. Sie sei, sagt er, nicht allgemein möglich, sondern unter der Voraussetzung $c=2(a-c)$ nur bei Anwendung eines $a-c$, welches selbst größer als b ist. Mit anderen Worten: er nennt die Gleichung $x^3-ax^2+\frac{4}{9}a^2b=0$ lösbar, d. h. mit einer positiven Wurzel versehen, so lange $b<\frac{a}{3}$. Beides, so fährt Archimed fort, d. h. die Notwendigkeit des Diorismus und zugleich die Konstruktion der Aufgabe unter der Annahme, daß jene Bedingung erfüllt sei, solle am Ende seine Analyse und Synthese finden. Es ist undenkbar, daß Archimed eine so bestimmte Zusage gegeben haben sollte, wenn er nicht der gestellten Aufgabe in jeder Beziehung Herr gewesen wäre. Aber wo sind die versprochenen Ergänzungen? Schon sehr bald nach Archimed zur Zeit des Diokles waren sie verloren, wie wir im 17. Kapitel sehen werden. Ob eine von Eutokius im VI. S. aufgefundene alte Handschrift in dorischer Mundart wirklich, wie er vermutete, der Originalarbeit des Archimed nachgebildet war, ist mit Bestimmtheit nicht zu behaupten noch zu leugnen. An Wahrscheinlichkeit fehlt es übrigens der Vermutung des Eutokius um so weniger, als jene Auflösung sich zur Konstruktion nur einer Parabel und einer Hyperbel bedient, mithin Kurven benutzt, welche zur Auflösung einer anderen räumlichen Aufgabe, der Würfelverdoppelung, ziemlich lange vor Archimed, wie wir wissen, bereits in Anwendung waren.

Mit der Geometrie des Raumes hat es ferner das Buch von den Konoiden und Sphäroiden zu tun. Archimed kennt unter diesen Namen die Körper, welche durch die Umdrehung einer Parabel, einer Ellipse, einer Hyperbel entstehen. Er teilt diese Umdrehungskörper durch einander parallele gleich weit voneinander entfernte ebene Schnittflächen und erhält so zwischen je zwei Schnittebenen ein Körperelement, das von einem Zylinder eingeschlossen einen anderen Zylinder in sich enthält. Die Summierung sämtlicher größerer Zylinder nebst der der sämtlichen kleineren Zylinder wird somit zwei Grenzen bilden, zwischen welchen der Körperinhalt des gegebenen Umdrehungskörpers enthalten ist, und welche bei gegenseitiger Annäherung der Schnittflächen selbst beliebig wenig voneinander unterschieden sind. Einige auf Widersprüche führende Vergleichungen vollenden wieder die Exhaustion, und so wird die **Kubatur** der genannten **Körper** gefunden.

Gelegentlich zeigt dabei Archimed im 8., 9. und 10. Satze[1]), wie zu jeder Ellipse unendlich viele Kegel und Zylinder gefunden werden können, auf deren Mantel sie sich befindet, offenbar ein Anfang dessen, was man perspektivische Eigenschaften krummer Linien zu nennen pflegt. Wir bemerken ferner, daß, wo von den Asymptoten der Hyperbel die Rede ist, diese den Namen der engstanschließenden Geraden, *ἁι ἔγγιστα εὐθέιαι*, führen[2]).

Wir können die Entdeckungen Archimeds im Gebiete der Raumgeometrie nicht verlassen ohne zweier falscher Sätze zu gedenken, welche er absichtlich, wie er ausdrücklich sagt[3]), seinerzeit beweislos in die Öffentlichkeit gab „um eben solche Leute, die da alles zu finden behaupten, und doch nie einen Beweis vorbringen, zu überführen, daß sie auch einmal etwas Unmögliches zu finden verheißen hätten". Es waren Sätze, die sich auf den Körperinhalt von Kugelabschnitten bezogen und damit unsere Bemerkung bestätigen, daß Archimed sich geraume Zeit mit Fragen, welche auf die Durchschneidung einer Kugel durch eine Ebene sich bezogen, beschäftigte.

15. Kapitel.

Die übrigen Leistungen des Archimedes.

Wir gehen zu Dingen über, welche einen algebraischen Charakter tragen. In erster Linie haben wir einer Gesellschaftsrechnung zu gedenken, welche Archimed anstellte, und welche nicht etwa der Methode des Rechnens halber, die schon den alten Ägyptern (S. 77) geläufig war, aber wegen des Verfahrens, durch welches Archimed die zur Rechnung notwendigen Zahlen sich verschaffte, zu großer Berühmtheit gelangt ist. Wir meinen die sogenannte **Kronenrechnung**. Richtiger wäre vielleicht die Übersetzung **Kranzrechnung**,

[1]) Archimed (ed. Heiberg) I, 318–338 unter Bezeichnung der betreffenden Sätze als 7. 8. 9., (ed. Nizze) 162–168. [2]) Archimed (ed. Heiberg) I, 278 lin. 1–2 und I, 436 lin. 1. [3]) Archimed (ed. Heiberg) II, 2–4, (ed. Nizze) 116.

da *corona* dem *στέφανος* entspricht, einem aus Zweigen gewundenen Kranze, während die Fürstenkrone erst späteren Ursprunges ist[1]). Vitruvius, der Schriftsteller über Architektur im augusteischen Zeitalter, erzählt die Sache folgendermaßen[2]). König Hiero habe von einem Goldarbeiter eine Krone aus Gold anfertigen lassen und dieselbe alsdann dem Archimed übergeben, um zu ermitteln, ob nicht, wie man zu vermuten Grund hatte, der Künstler nur Gold in Rechnung gebracht, in Wirklichkeit aber teilweise Silber zur Masse hinzugetan hatte. Zufällig sei nun Archimed in ein Badhaus getreten und habe beim Einsteigen in eine mit Wasser ganz angefüllte Wanne bemerkt, daß ebensoviel Wasser auslief, als sein Körper verdrängte. Nun schloß Archimed so: die Menge des verdrängten Wassers hängt nur von der Ausdehnung, nicht von dem Gewichte des eingetauchten Körpers ab, das Gewicht dagegen verändert sich bei gleicher Ausdehnung nach der Natur des Stoffes. Andere Stoffe werden bei gleicher Ausdehnung verschiedenes Gewicht, bei gleichem Gewichte verschiedene Ausdehnungen haben. Bildet man sonach eine reine Goldmasse und eine reine Silbermasse, beide von genau gleichem Gewichte mit der Krone, so wird das Silber am meisten Flüssigkeit aus einem bis zum Rande gefüllten Gefäße verdrängen, nächstdem die aus beiden Metallen gemischte Krone, das Gold endlich am wenigsten. Die Schlüsse, wenn auch noch nicht in der hier ausgeführten Deutlichkeit, scheinen dem Geiste Archimeds sich plötzlich dargeboten zu haben. Die drei Wassermengen σ, $\varkappa$, γ, welche durch das Silber, die Krone, das Gold verdrängt wurden, boten das Mittel die Mischungsverhältnisse der Krone zu berechnen. Wog nämlich die Krone k Gewichtsteile, worunter s Gewichtsteile Silber und g Gewichtsteile Gold, so mußte erstlich $s + g = k$ sein. Zweitens verdrängte aber das Silber nur $\frac{s}{k} \times \sigma$ Raumteile Wasser und das Gold $\frac{g}{k} \times \gamma$ Raumteile derselben Flüssigkeit, die ganze Krone also $\frac{s\sigma + g\gamma}{k}$ Raumteile, oder $\varkappa$ Raumteile, demnach war auch $s\sigma + g\gamma = k\varkappa$. Die beiden Angaben führten dann vereint in Betracht gezogen zu $s = \frac{\varkappa - \gamma}{\sigma - \gamma} \times k$. In der Freude über diese Entdeckung sei Archimed unbekleidet ins Freie und nach seiner Wohnung gelaufen mit dem Rufe: ich habe es gefunden, *εὕρηκα εὕρηκα*. Eine zweite Auffassung findet sich in einem Lehrgedichte „Ueber die Gewichte und Maasse", welches man wohl dem Grammatiker Priscianus zuschrieb, eine Meinung, von welcher man aber allgemein zurückgekommen ist, um die Entstehung des Ge-

[1]) Briefliche Mitteilung von H. Junge. [2]) Vitruvius IX, 3.

dichtes etwa auf das Jahr 500 zu verlegen[1]). Dort ist nämlich die Auffindung des spezifischen Gewichtes eines Stoffes, auf welche allein es ankommt, an eine doppelte Abwägung geknüpft. Wird die zu prüfende Substanz einmal im Freien und das zweite Mal in Wasser eingetaucht gewogen, so wird sie das zweite Mal so viel von ihrer Gewichtswirkung auf den Wagebalken, an welchem sie hängt, einbüßen, als das Gewicht der durch sie verdrängten Flüssigkeitsmenge beträgt. Man wird folglich in dem Verhältnisse des ursprünglichen Gewichtes zu dem Gewichtsverluste das spezifische Gewicht des Stoffes besitzen, und man findet $s = \frac{k' - g'}{s' - g'} \times k$, wenn s', k', g' die Gewichtsverluste im Wasser der an Gewicht außerhalb des Wassers gleichen Mengen Silber, Kronenmetall und Gold bedeuten. Welche von den beiden Methoden also Archimed auch anwandte, und die Wahrscheinlichkeit für die eine wie für die andere zu erörtern gehört der Geschichte der Physik an, die Rechnung als solche war immer die gleiche, war, wie wir zum voraus bemerkten, eine Gesellschaftsrechnung, dergleichen ähnliche wenn auch nicht völlig übereinstimmende im Übungsbuche des Ahmes erledigt sind.

Dem Archimed wird ferner eine unbestimmte Aufgabe zugeschrieben, welche in Distichen abgefaßt unter dem Namen des Rinderproblems bekannt ist[2]). Es handelt sich um die Auffindung von vier Unbekannten in ganzen Zahlen mittels dreier zwischen ihnen gegebenen Gleichungen vom ersten Grade. Zu dieser ursprünglichen Form des Problems sind alsdann in späterer Überarbeitung, wie es scheint, noch anderweitige Zusätze getreten, welche zu ihrer Berücksichtigung Kenntnisse in der Lehre von den Quadratzahlen und von den Dreieckszahlen voraussetzen, welche wir wohl berechtigt sind, einem Archimed als zugänglich anzunehmen, wenn schon Philippus Opuntius (S. 169) über vieleckige Zahlen schreiben konnte. Bezüglich der Echtheit dieses Problems sind die Ansichten geteilt. Der letzte Schriftsteller, der in eingehender Weise mathematisch wie philologisch mit Archimed sich beschäftigt hat, steht nicht an, das Gedicht, wie

[1]) *Scriptores metrologici Romani* (ed. Hultsch) pag. 88 sqq. Die auf die Kronenrechnung bezügliche Stelle v. 124—208. Über die Datierung vgl. Hultschs Prolegomena § 118. [2]) Ältere Ansichten über das Rinderproblem bei Nesselmann, Algebra der Griechen S. 481—491 wissen einen nur halbwegs erträglichen Sinn nicht herauszubringen. Dieses gelang Vincent in dem als Anhang zu den *Nouvelles annales de mathématiques* T. XV (Paris 1856) erschienenen *Bulletin de bibliographie etc.* I, 39 flgg. Einen anderen Sinn haben die Verfasser der neuesten Abhandlung Krumbiegel und Amthor „das *Problema bovinum* des Archimed“ ermittelt. Vgl. Zeitschr. Math. Phys. Bd. XXV. Histor.-literar. Abteilung (1880).

es erhalten ist, als archimedisch anzuerkennen[1]). Wir selbst enthalten uns eines bestimmten Urteils, wie wir (S. 286) uns entschieden, die Frage nach der Echtheit des sogenannten euklidischen Problems als eine offene zu betrachten. Zu einem Ergebnisse kommen wir allerdings auch hier: daß nämlich ein Grund das Rinderproblem darum für untergeschoben zu erklären, weil Archimed es nicht habe lösen können, in keiner Weise vorliegt.

Eine Beschäftigung mit Quadratzahlen ist Archimed jedenfalls nachzurühmen. Er hat jedenfalls in dem Buche von den Schneckenlinien die Summierung der aufeinander folgenden Quadratzahlen von 1 anfangend gelehrt und bewiesen. Er kleidet die Summenformel in folgenden Satz: „Wenn man eine willkürliche Anzahl von Linien annimmt, die nacheinander gleiche Unterschiede haben, so daß die kleinste dem Unterschiede selbst gleich ist, und wenn eine eben so große Anzahl anderer Linien angenommen wird, welche einzeln der größten von jenen gleich sind, so wird die Summe aller Quadrate von denen, welche der größten gleich sind, nebst dem Quadrate der größten selbst und dem Rechtecke unter der kleinsten und einer Linie, welche so groß ist als die Summe aller um gleiche Unterschiede verschiedener, dreimal so viel betragen als die Summe aller Quadrate der um gleiche Unterschiede verschiedenen Linien“[2]). In Zeichen geschrieben heißt das $3[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \cdots + (na)^2] = (n+1)(na)^2 + a(a + 2a + 3a + \cdots + na)$. Da Archimed, wie aus dem Beweise sich ergeben wird, die Summenformel der arithmetischen Reihe anzuwenden wußte, so ist es einigermaßen auffallend, daß er nicht $a + 2a + 3a + \cdots + na$ zu $\frac{n(n+1)a}{2}$ vereinigte, um schließlich $a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \cdots + (na)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{6}$ zu erhalten. Wir erkennen daraus, daß ein so lautender Satz bei Archimed nicht vorkommt, wie sehr man sich hüten muß den Schluß, dieser oder jener Schriftsteller konnte so oder so schließen, hat es also getan, anzuwenden, wenn nicht besondere anderweitige Gründe für jenen Schluß vorhanden sind. Noch eine Bemerkung drängt sich auf. Wir sagten Archimed habe die Summierung der Quadratzahlen vollzogen, und in dem Wortlaute seines Satzes, wie seines Beweises, kommen nur Linien vor. Allein es sind unzusammenhängende Linien, wie sie im V. Buche der euklidischen Elemente zur Versinnlichung von Zahlen dienen, und haben hier gleichfalls keine andere Bedeutung. Wir lassen nun den Beweis folgen, an welchem wir keine andere Veränderung vornehmen,

[1]) Heiberg, *Quaestiones Archimedeae* 26. [2]) Archimed (ed. Heiberg) II, 34—40, (ed. Nizze) 125—128

als daß wir Archimeds Worte in Zeichen übersetzen. Es ist $na = (n-1)a + 1a = (n-2)a + 2a = (n-3)a + 3a = \cdots = 1a + (n-1)a$. Quadriert man alle diese unter sich gleichwertigen Formen von na, so erhält man ebensoviele verschiedene Formen von $(na)^2$, nämlich $(na)^2 = ((n-1)a)^2 + (1a)^2 + 2 \cdot (n-1)a \cdot 1a = ((n-2)a)^2 + (2a)^2 + 2(n-2)a \cdot 2a = ((n-3)a)^2 + (3a)^2 + 2 \cdot (n-3)a \cdot 3a = \cdots = (1a)^2 + ((n-1)a)^2 + 2 \cdot 1a \cdot (n-1)a$. Jede solche Form besteht aus zwei quadratischen Gliedern und einem doppelten Produkte. Addiert man die sämtlichen Formen nebst $2(na)^2 = (na)^2 + (na)^2$ und ordnet die quadratischen Glieder erst fallend dann steigend, und die doppelten Produkte nach fallendem erstem Faktor, so entsteht $(n+1)(na)^2 = (na)^2 + ((n-1)a)^2 + ((n-2)a)^2 + \cdots + (1a)^2 + (1a)^2 + \cdots + ((n-2)a)^2 + ((n-1)a)^2 + (na)^2 + 2[(n-1)a \cdot 1a + (n-2)a \cdot 2a + \cdots + 1a(n-1)a]$. Addiert man ferner auf beiden Seiten $a(a + 2a + \cdots + na)$, so erhält man $(n+1)(na)^2 + a(a + 2a + \cdots + na) = 2[a^2 + (2a)^2 + \cdots + (na)^2] + 2[(n-1)a \cdot 1a + (n-2)a \cdot 2a + \cdots + 1a \cdot (n-1)a] + a[a + 2a + \cdots + na]$. Damit der zu Anfang ausgesprochene Satz bewiesen sei, bedarf es also nur noch Eines: es muß gezeigt werden, daß $a^2 + (2a)^2 + \cdots + (na)^2 = 2[(n-1)a \cdot 1a + (n-2)a \cdot 2a + \cdots + 1a \cdot (n-1)a] + a[a + 2a + \cdots + na]$ sei. Die beiden Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen sind aber $a \cdot A$ und $a \cdot B$ oder vereinigt $a(A+B)$, wobei

$$A = 2(n-1)a + 4(n-2)a + \cdots + (2n-2) \cdot 1a$$
$$B = na + (n-1)a + (n-2)a + \cdots + 1a$$
$$A + B = 1 \cdot na + 3 \cdot (n-1)a + 5 \cdot (n-2)a + \cdots + (2n-1) \cdot 1a$$
$$(A+B) \cdot a = a[1 \cdot na + 3 \cdot (n-1)a + 5 \cdot (n-2)a + \cdots + (2n-1) \cdot 1a] = R.$$

Von den n Quadraten, als deren Summe R zu beweisen ist, wird nun das höchste $(na)^2$ umgeformt in $a(1 \cdot na + (n-1)na)$. Aber die arithmetische Reihe $(n-1)a + (n-2)a + \cdots + 1a$ hat als Summe $\frac{(n-1) \cdot n \cdot a}{2}$, eine Formel, welche demnach, wie oben angekündigt, von Archimed benutzt wird. Demnach ist $(n-1)na = 2[(n-1)a + (n-2)a + \cdots + 1a]$ und $(na)^2 = a[1 \cdot na + 2(n-1)a + 2(n-2)a + \cdots + 2 \cdot 1a]$. Ziehen wir diesen Wert von R ab, so bleibt ein Rest R_1 ähnlicher Form wie R, nämlich $a[1 \cdot (n-1)a + 3(n-2)a + \cdots + (2n-3) \cdot 1a] = R_1$. Nun könnte $((n-1)a)^2$ umgeformt und von R_1 abgezogen werden, wodurch ein Rest R_2 entstünde, dem gegenüber das Verfahren fortzusetzen ist. Schließlich bleibt nichts übrig, es ist also $a^2 + (2a)^2 + \cdots + (na)^2 = R$, wie zu beweisen war.

Wir haben vorher bei der archimedischen Aufgabe von der durch eine Ebene geschnittenen Kugel die kubische Gleichung $x^3 - ax^2 + \frac{4}{9}a^2 b = 0$ angeschrieben (S. 309), zu welcher diese Aufgabe führt.

Wir haben dieses zur deutlicheren Einsicht in die Frage für unsere an die Gleichungsform gewohnten Leser getan. Man muß sich jedoch wohl hüten das, was wir dort taten, als den gleichen Gesichtspunkten entsprechend zu betrachten, wie das, was uns bei unserer letzten Darstellung der Summierung aufeinanderfolgender Quadratzahlen leitete. Wir haben hier nur Zeichen statt der Worte gesetzt, den archimedischen Gedanken in keiner Weise verändernd. Wir haben dort eine Gleichung aus einer Proportion entwickelt. Archimed hätte eine solche Entwicklung dem ganzen Zustande der damaligen Wissenschaft gemäß, welche Körperzahlen kannte, vornehmen können, aber er hat es nicht getan. Er blieb bei der Proportion $(a-x) : b = \frac{4}{9}a^2 : x^2$ stehen, und wir würden in ihn hineinlesen, was er nicht gewußt zu haben scheint, wenn wir auch nur annähmen, Archimed habe eine wesentliche Ähnlichkeit zwischen seiner Aufgabe und der Aufgabe der Würfelverdoppelung, geschweige denn zwischen ihr und der Aufgabe der Winkeldreiteilung bemerkt. Die Würfelverdoppelung verlangte die Einschaltung zweier geometrischer Mittelglieder zwischen gegebenen Größen; von einer derartigen Einschaltung ist bei der archimedischen Kugelteilung nicht die Rede, mag man auch, um die Unbekannte nach innen zu bringen, die Proportion in der Form $b : (a-x) = x^2 : \frac{4a^2}{9}$ oder in der Form $b : x^2 = (a-x) : \frac{4a^2}{9}$ schreiben.

Wir müssen hier vielleicht einem Vorwurfe begegnen, den man uns darüber machen könnte, daß wir, als wir es mit Euklid und dessen durch quadratische Gleichungen darstellbaren Aufgaben zu tun hatten, nicht auch so streng an den Wortlaut des griechischen Schriftstellers uns halten zu müssen glaubten. Wahr ist es, es wäre vorsichtiger gewesen auch dort nicht als Gleichung zu schreiben, was nur eine Proportion war, allein wir können doch einiges hervorheben, welches einen grundsätzlichen Unterschied zwischen der euklidischen und der archimedischen Aufgabe bedingt und dadurch auch eine formelle Verschiedenheit der Darstellung gestattet, ganz abgesehen davon, daß wir wenigstens nicht versäumt haben (S. 285), unsern Zweifel darüber zu äußern, ob Euklid eine Ahnung von dem algebraischen Inhalte seiner Aufgaben gehabt habe. Quadratische und kubische Aufgaben — man gestatte uns diese leicht verständlichen, wenn auch sonst nicht gerade üblichen Benennungen — sind geometrisch gewaltig verschieden. Die quadratische Aufgabe gehört den Elementen in dem geometrischen Sinne des Wortes an. Sie läßt sich, sofern Nichtbeachtung des Diorismus nicht Größen als gegeben wählen ließ, welche jede reelle positive Lösung ausschließen, jedesmal durch Zirkel und Lineal bewältigen. Die kubische Aufgabe ist durch die Elemente nicht lösbar. Sie bedarf besonderer Kurven, deren Eigenschaften in besonderen Schriften erörtert zur Zeit, als Archimed lebte, überhaupt erst anfingen, genau studiert zu werden und die höhere Geometrie bildeten. Man darf daher wohl einen Unterschied machen zwischen der Tiefe, bis zu welcher Euklid und Archimed in das eigentliche Wesen quadratischer und kubischer Aufgaben einzudringen vermochten. Daneben ist auch für rechnendes Verfahren ein nicht minder gewaltiger Unterschied zwischen quadratischen und kubischen Aufgaben, die einem Griechen gestellt waren. Die Ausziehung der Kubikwurzel durch Umkehrung des Verfahrens, welches zur Erhebung auf die dritte Potenz führt, also von der Formel $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ ausgehend, hat, wie wir vorgreifend bemerken dürfen, kein griechischer Schriftsteller des Altertums oder des Mittelalters jemals gelehrt; ob ein anderes Rechnungsverfahren zu dem gleichen Zwecke angewandt wurde, müssen wir hier noch dahingestellt sein lassen. Eine Ausziehung von Quadratwurzeln dagegen durch Rechnung, und zwar auch bei solchen Zahlen, welche nur eine Annäherung an den wahren Wert gestatten, hat die griechische Mathematik vielleicht, wie wir (S. 223) sahen, schon seit Platon besessen, jedenfalls hat Archimed in seiner Kreismessung den Beweis geliefert, daß er im Besitze sehr vollkommener Methoden zur Auffindung solcher Wurzelwerte gewesen sein muß. Damit ist aber, wie zum Schlusse dieser Ausführungen hingeworfen werden mag, zugleich auch die (S. 285) schon begründete Behauptung vollends gesichert, daß man in sehr früher Zeit bei den Griechen quadratische Aufgaben rechnend löste, d. h. tatsächlich mit quadratischen Gleichungen sich beschäftigte, denn wie wäre man sonst zu Methoden der Quadratwurzelausziehung gelangt, die das leisteten, was z. B. von Archimed, zu dessen Arbeiten wir so zurückkehren, geleistet worden ist?

Archimed hat in seiner Kreismessung eine ganze Anzahl von angenäherten Quadratwurzeln berechnen müssen. Er hat dabei erkannt, daß $\frac{1351}{780}>\sqrt{3}>\frac{265}{153}$, daß $\sqrt{349450}>591\frac{1}{8}$, daß $\sqrt{1373943\frac{33}{64}}>1172\frac{1}{8}$, daß $\sqrt{5472132\frac{1}{16}}>2339\frac{1}{4}$. Wie hat er diese Zahlen gefunden? Die Frage ist vielfach aufgeworfen, verschiedentlich beantwortet worden[1]). Man kann wohl sagen, daß

[1]) Zusammenstellungen der auf diesem Gebiete ausgesprochenen Meinungen bei S. Günther, Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik

sämtliche Versuche in einem Punkte zusammentreffen, nämlich in dem Bestreben, ein mehr oder weniger bewußtes Zusammentreffen der Methode des Archimedes mit dem modernen Kettenbruchverfahren nachzuweisen, d. h. mit den Formeln

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cdots}}}$$

und

$$\sqrt{a^2-b}=a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\cdots}}}$$

Nun ist von vornherein zuzugeben, daß der Näherungswert

$$\sqrt{2}=\sqrt{1+1}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

bei griechischen Schriftstellern mit aller Bestimmtheit auftritt, wie wir bei der näheren Betrachtung des Werkes des Theon von Smyrna im 21. Kapitel erkennen werden. Es ist ferner (S. 267) darauf hingewiesen worden, daß die Art und Weise, in welcher Euklid den größten gemeinschaftlichen Teiler zweier ganzer Zahlen aufsucht, einen vollständigen Kettenbruchalgorithmus darstellt, und dennoch können wir die Frage, wie eigentlich Archimed verfuhr, noch nicht als vollständig beantwortet erachten. Die Werte, welche Archimed als angenäherte Quadratwurzeln benutzt, andere Werte, die bei späteren griechischen Schriftstellern auftreten, entstehen nämlich, mit Ausnahme der von uns schon betonten $\sqrt{2}$ und einer weiteren Ausnahme, nicht aus den obigen Kettenbruchformeln, es sei denn, daß man sie auf ein Prokrustesbett spannte, wie wir es nicht ver-

(in den Abhandlungen der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften VI. Folge, 9. Band, Prag 1878) und bei Heiberg, *Quaestiones Archimedeae* 60 bis 66. Bei letzterem auch das bei dem ersteren fehlende Referat über Abhandlungen von Mollweide (1808) und Oppermann (1875). Über die Abhandlung Mollweides vgl. auch einen Bericht von Gauß in den Göttinger Gelehrten Anzeigen vom 9. Januar 1808. Spätere Arbeiten von Hunrath, Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Dezimalbrüche (Kiel 1884) unter anderen haben unserer Ansicht nach die Frage immer noch nicht geklärt. Auch Hultsch, Über Archimeds Quadratwurzeln (Göttinger Gelehrte Anzeigen 1893) und Ebenderselbe, Zur Kreismessung des Archimedes (Zeitschrift für Mathematik und Physik XXXIX, Historisch-literarische Abteilg. 1894) lassen noch zu manchem Zweifel Raum.

antworten zu können glauben. Die erwähnten archimedischen Werte von $\sqrt{3}$ z. B. entstehen nicht aus $\sqrt{4-1} = 2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cdots}}$, sondern die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche dieses Kettenbruches sind $2, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}, \frac{97}{56}, \frac{362}{209} \cdots$, unter welchen wir $\frac{7}{4}$ und $\frac{26}{15}$ hervorheben als die weitere Ausnahme, von welcher soeben die Rede war, da diese Werte für $\sqrt{3}$ in der Tat geschichtlich nachweisbar bei Griechen vorkommen, wie das 18. und 19. Kapitel uns lehren werden. Wir lassen also die Frage nach der Art und Weise, in welcher Archimed seine Quadratwurzeln fand, offen, soviel zugestehend, daß bestimmte Beispiele auf Anwendung von Kettenbruchformeln bei anderen Schriftstellern hinweisen, die somit jener Formeln sich bedient haben werden, wenn auch natürlich nicht als Kettenbrüche, an deren Vorhandensein nicht zu denken ist, bevor eine Schreibweise der Brüche durch räumlich unterscheidbare Zähler und Nenner sich verbreitet hatte.

Es ist nur ein unglücklicher Zufall, daß wir über die Wurzelausziehungsmethoden Archimeds im dunkeln tappen. Eutokius, der einen Kommentar zur archimedischen Kreismessung geschrieben hat, sagt, wo er an die Quadratwurzelwerte kommt: „Wie man aber die Quadratwurzel, die einer gegebenen Zahl sehr nahe kommt, finden könne, ist von Heron in seinem metrischen Werke gezeigt worden, ebenso von Pappus, Theon und mehreren anderen Exegeten der großen Zusammenstellung des Klaudius Ptolemäus. Es ist daher nicht nötig Untersuchungen über diesen Gegenstand anzustellen, da Freunde der Mathematik bei jenen darüber nachlesen können"[1]. Was wir diesen Schriftstellern, soweit sie erhalten sind, entnehmen, müssen wir später im Zusammenhang mit ihren sonstigen Leistungen besprechen.

Versagt uns der Kommentar des Eutokius den Dienst, wo wir seiner am dringendsten bedürfen, so läßt er uns doch nicht ganz ohne Ausbeute. Er vollzieht aufs ausführlichste mehrere Multiplikationen, und diese Stellen gehören zu den bedeutsamsten für die Kenntnis griechischer Rechenkunst. Der Gebrauch der Stammbrüche (S. 128) beim wirklichen Rechnen geht daraus aufs unzweideutigste hervor, dann aber auch, daß die Griechen bei ihren Multiplikationen im wesentlichen der gleichen Methode sich bedienten, der wir noch heute folgen, nur daß sie bezüglich der Anordnung

[1] Archimed (ed. Heiberg) III, 270.

der Teilmultiplikationen den entgegengesetzten Weg einschlugen. Sie fingen nämlich mit dem, was wir die Ziffer höchsten Ranges im Multiplikator nennen, an und stiegen dann zu den niedrigeren Stellen herab, sie beobachteten die gleiche Reihenfolge innerhalb der Teile des Multiplikandus. So wird z. B. $2016\frac{1}{6}$ folgendermaßen quadriert. Es ist $2000 \cdot 2000 = 4000000$, $2000 \cdot 10 = 20000$, $2000 \cdot 6 = 12000$, $2000 \cdot \frac{1}{6} = 333\frac{1}{3}$; $10 \cdot 2000 = 20000$, $10 \cdot 10 = 100$, $10 \cdot 6 = 60$, $10 \cdot \frac{1}{6} = 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$; $6 \cdot 2000 = 12000$, $6 \cdot 10 = 60$, $6 \cdot 6 = 36$, $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$; $\frac{1}{6} \cdot 2000 = 333\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6} \cdot 10 = 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6} \cdot 6 = 1$, $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ und alle diese Teilprodukte vereinigt geben $4064928\frac{1}{36}$.

Man könnte bei diesem Fortschreiten von den größeren Teilen der Zahlen zu immer kleineren an die mehrerwähnte Stelle des Herodot[1]) denken, daß die Hellenen beim Rechnen die Hand von links nach rechts bewegen. Links befand sich (S. 133) auf der Rechentafel mit gegen den Rechner senkrechten Kolumnen die höchste Rangstelle. Man dürfte auch die Vermutung aussprechen, die Vereinigung der Teilprodukte, welche als vollzogen gedacht wird, ohne zu erklären, wie man dabei verfuhr, sei auf der Rechentafel erfolgt, deren Gebrauch zur Zeit des Polybius, mithin nur ein halbes Jahrhundert nach Archimed (S. 132) wir uns ins Gedächtnis zurückrufen. Jedenfalls ist dieses griechische Rechnen innerhalb und mit Benutzung des Zehnerzahlensystems ein ungeheurer Fortschritt gegenüber dem ägyptischen Verfahren der Multiplikation und Division, welches fast nur fortgesetzte Verdoppelungen und Halbierungen nebst additiver Vereinigung so gewonnener Ergebnisse benutzte. In Griechenland selbst wurden übrigens nach Aussage eines Scholiasten zum Charmides des Platon beide Methoden gelehrt, denn anders sind die Ausdrücke *hellenische und ägyptische Methoden der Multiplikation und Division* nicht zu verstehen[2]). Ihr Nebeneinanderbestehen läßt vermuten, daß bereits die Griechen die Erfahrung machten, die ägyptische Methode lasse sich im Handelsverkehre leichter als die hellenische anwenden, eine Erfahrung, welche italienische Kaufleute um Jahrhunderte später erneuerten.

Wir nannten die hier erwähnten Stellen des Eutokius als zu den bedeutsamsten für die Kenntnis griechischer Rechenkunst gehörend. Vieles ist leider verloren gegangen. Unter den Schriften des

[1]) Herodot II, 36. — [2]) P. Tannery, La géométrie grecque etc. pag. 49 hat zuerst auf diese wichtige Stelle hingewiesen.

Xenokrates, welche wir nur dem Titel nach kennen[1]) (S. 249), soll eine Logistik gewesen sein. Ein Rechenmeister Apollodorus wird uns genannt (S. 180). Von der Logistik des Magnus erwähnt Eutokius Rühmendes am Schlusse seines Kommentars zur archimedischen Kreismessung[2]). Eine Schrift, welche in griechischer Sprache von dem Rechnen auf dem Rechenbrette handelte, war im XVIII. Jahrh. noch in der S. Marcusbibliothek in Venedig vorhanden, ist aber inzwischen abhanden gekommen oder verlegt, so daß sie in den Handschriftenverzeichnissen der genannten Bibliothek nicht mehr vorkommt[3]). Aber was läßt mit so dürftigen Angaben sich machen? Sogar die Lebenszeit dieser Schriftsteller mit Ausnahme des Xenokrates ist in tiefstes Dunkel gehüllt. Es ist sehr wahrscheinlich, daß Archimed selbst ein Buch verfaßt hat, welches mit der Rechenkunst sich beschäftigte. Zu dieser Vermutung geben wenigstens einige Bruchstücke und deren Titel Veranlassung. Die Schrift hieß die Grundzüge, *ἀρχαί*, und war dem Zeuxippus zugeeignet[4]). Archimed lehrte darin unter anderen das dekadische Zahlensystem in übersichtlicher Gliederung weit über die Grenzen derjenigen Zahlen ausdehnen, mit welchen man insgemein zu tun hat. Archimed faßt nämlich acht aufeinander folgende Rangordnungen in eine Oktade zusammen[5]). Die erste Oktade geht also von der Einheit bis zur Myriade der Myriaden, d. h. bis zu 100000000, welche Zahl die Einheit der zweiten Oktade bildet. Die Einheit der dritten Oktade ist ihm folglich die Zahl, welche wir durch Eins mit 2 mal 8 oder mit 16 Nullen schreiben. Die Einheit der 26. Oktade ist in unserer Schreibweise 1 mit 25 mal 8, d. h. mit 200 Nullen. Diese Oktaden setzt Archimed fort bis zur 10000 mal 10000sten und sämtliche Zahlen bis zur höchsten dieser letzten Oktade bilden die erste Periode. An sie schließt sich aber eine neue zweite Periode, deren Einheit folglich nach unserer Zahlenschreibweise eine 1 mit 800 Millionen Nullen ist! Es schwindelt einem bei dem Gedanken, auch mit dieser zweiten Periode von 10000 mal 10000 Oktaden die Zahlenreihe nicht abgeschlossen zu finden, sondern vielmehr die Möglichkeit zugeben zu müssen, noch höhere Perioden oder gar höhere Gruppenordnungen als die Perioden selbst zu bilden.

Für die Richtigkeit dieses Auszuges bürgt, daß er von Archimed

[1]) Diogenes Laertius VIII, 12. [2]) Archimed (ed. Heiberg) III, 302. [3]) Privatmitteilung des Grafen Soranzo in Venedig auf die Anfrage des Verfassers nach dem *Abacus in Graeco*, von welchem Bern. de Montfaucon, Bibliotheca bibliothecarum manuscriptarum I, 468 D spricht. [4]) Archimed (ed. Heiberg) II, 242, 246, (ed. Nizze) 209, 212 [5]) Archimed (ed. Heiberg) II, 266 sqq., (ed. Nizze) 217.

in eigener Person herrührt. Er gibt ihn uns in einer vollständig erhaltenen Abhandlung, der Sandrechnung, *ψαμμίτης* (lateinisch: *arenarius*). In ihr ist die Aufgabe gestellt eine Zahl anzugeben, welche größer sei als die Zahl der Sandkörner, die eine Kugel fassen würde, deren Halbmesser die Entfernung des Erdmittelpunktes von dem Fixsternhimmel wäre. Vorausgesetzt nun, daß 10000 Sandkörner hinreichen ein Körnchen von der Größe eines Mohnkornes zu liefern, und daß der Durchmesser eines Mohnkornes nicht kleiner als der 40. Teil einer Fingerbreite sei, vorausgesetzt ferner, daß der Weltdurchmesser kleiner als 10000 Erddurchmesser, der Erddurchmesser endlich kleiner als eine Million Stadien sei, findet Archimed eine Zahl, welche die Sandkörnerzahl einer der Weltkugel gleich gedachten Sandkugel überschreitet in 1000 Einheiten der 7. Oktade der 1. Periode. Ja Archimed geht noch weiter. Er nimmt nach astronomischen Anschauungen des Aristarchus von Samos[1]) die Weltkugel, die er alsdann Fixsternkugel nennt, noch größer an und erkennt, daß Sandkörner 1000 Myriaden der 8. Oktade an Zahl mehr als nur ausreichen würden, selbst diese Fixsternkugel zu bilden[2]).

Was ist die Bedeutung dieser eigentümlichen Aufgabe? Mannigfache Vermutungen sind darüber ausgesprochen worden. Man hat vielleicht nicht ganz unglücklich versucht den Zweck der Schrift in jenem Bruchstücke der Grundzüge zu finden. Mit anderen Worten: man hat es als einzigen Zweck der Sandrechnung bezeichnet, ein Beispiel davon zu liefern, wie man die Aussprache der Zahlen von einer gewissen Höhe an bedeutend vereinfachen und dabei eine Einsicht in die Art ihres Wachstums gewähren könne. Neben diesem Zwecke hat man einen anderen wichtigeren zu erkennen geglaubt, die Sandrechnung sei dazu bestimmt, die arithmetische Ergänzung der geometrischen Exhaustionsmethode zu bilden. Dem Unendlichkleinen gegenüber ist das Unendlichgroße der zweite Pol des Unendlichkeitsbegriffes, wenn wir so sagen dürfen; um beide dreht sich die ganze Infinitesimalrechnung. Will man aber beide Gegensätze deutlicher hervortreten lassen, so eignen sich geometrische Betrachtungen nahezu zusammenfallender Raumgebilde vorzugsweise dazu, das Unendlichkleine zu versinnlichen, während das Unendlichgroße unmöglich an Figuren zu begreifen ist, welche dem Auge innerhalb des Raumes begrenzt erscheinen. Nur durch die Zahl wird es dem Verständnisse näher gebracht. Man kann zeigen, daß jede noch so

[1]) Vgl. über diesen Wolf, Geschichte der Astronomie 35—37. [2]) Archimed (ed. Heiberg) II, 290, (ed. Nizze) 223.

große, aber gegebene Zahl durch eine im übrigen nicht näher bestimmte Zahl überstiegen werden kann, man kann über jede noch so ferne Grenze dabei als zu nahe gelegen hinausgehen. Das gerade hat Archimed in seiner Sandrechnung geleistet.

Ist die Frage nach dem Zwecke der Sandrechnung schon eine schwierige, so ist die Frage nach ihrer Heimat womöglich noch weniger sicher zu beantworten. Auf der einen Seite ist unzweifelhaft die philosophische wie die mathematische Erkenntnis des Unendlichen ein Gegenstand griechischer Forschung schon in einer Zeit gewesen, die um reichlich ein Jahrhundert vor Archimed liegt. Auf der anderen Seite ist die griechische Denkart im ganzen so übertrieben großer Zahlen nicht gewohnt. Nicht vor, nicht nach Archimed finden wir ähnliches in griechischer Sprache. Man könnte erwidern, nicht vor, nicht nach Archimed finde man unter den griechischen Schriftstellern einen Archimed! Allein auch eine andere Auskunft ist nicht unmöglich. Es könnte hier ein auswärtiges Problem vorliegen, welches Archimed irgendwie, irgendwo einmal zu Ohren gekommen wäre, welches er mit seinem allumfassenden Geiste aufnahm und im Sinne seiner Absicht, die vielleicht von der des ursprünglichen Stellers der Aufgabe himmelweit verschieden war, behandelte. Man möchte fast für diese Auffassung auf die einleitenden Sätze der Sandrechnung verweisen: „Manche Leute glauben, König Gelon, die Zahl des Sandes sei von unbegrenzter Größe. Ich meine nicht des um Syrakus und sonst noch in Sizilien befindlichen, sondern auch dessen auf dem ganzen festen Lande, dem bewohnten und unbewohnten. Andere gibt es wieder, welche diese Zahl zwar nicht für unbegrenzt annehmen; sondern nur daß noch keine so große Zahl jemals genannt sei, welche seine Menge übertrifft. Wenn sich nun eben diese einen so großen Sandhaufen dächten, wie die Masse der ganzen Erde; dabei sämtliche Meere ausgefüllt und alle Vertiefungen der Erde so hoch wie die höchsten Berge, so würden sie gewiß um so mehr glauben, daß keine Zahl zur Hand sei, die Menge derselben noch zu überbieten. Ich aber will mittels geometrischer Beweise, denen Du beipflichten wirst, zu zeigen versuchen, daß unter den von mir benannten Zahlen, welche sich in meiner Schrift an den Zeuxippus befinden, einige nicht nur die Zahl eines Sandhaufens übertreffen, dessen Größe der Erde gleichkommt, wenn sie nach meiner Erklärung ausgefüllt ist, sondern auch die eines solchen, dessen Größe dem Weltalle gleich ist.“ So der Anfang der Abhandlung, und man wird zugeben müssen, daß Archimed in ihm die eigentümliche Gruppierung und Benennung der großen Zahlen für sich in Anspruch nimmt, aber keineswegs den Gedanken eines der Erdkugel gleichen

Sandhaufens selbst als einen neuen bezeichnet, welchen noch niemand vor ihm geäußert habe.

Wir haben (S. 297) zugesagt, auch die Kenntnisse Archimeds im Gebiete der Mechanik in das Bereich unserer Darstellung zu begreifen. Bei Archimed war mehr als bei irgend früheren Schriftstellern die Mechanik der Geometrie eng verschwistert. Geometrische Betrachtungen feinster Art standen ihm im Dienste der Mechanik, mechanische Lehren wurden aber auch zur Beweisführung geometrischer Sätze von ihm angewandt. Wir haben wiederholt von der Stellung der Abhandlung über die Quadratur der Parabel mitten zwischen den beiden Büchern vom Gleichgewicht der Ebenen gesprochen, und diese Stellung ist kennzeichnend nach beiden Seiten hin. Eine Stetigkeit des Inhaltes vom I. Buche zur Zwischenabhandlung, von dieser zum II. Buche ist unverkennbar, so unverkennbar, daß es schwer wird zu sagen, welcher einzelne Satz für Archimed mit der Geltung eines mechanischen, welcher mit der eines geometrischen Satzes versehen ist. Es handelt sich in der ganzen Schrift um Schwerpunktsbestimmungen, welche auf Grund des Satzes[1]) gefunden werden, daß der Schwerpunkt einer aus zwei gleich schweren nicht denselben Schwerpunkt besitzenden Größen zusammengesetzten Größe in der Mitte derjenigen geraden Linie liegen muß, welche die Schwerpunkte der beiden Teile verbindet, zu welchem der andere bereits in der aristotelischen Mechanik (S. 255) enthaltene Satz[2]) kommt, daß kommensurable wie inkommensurable Größen im Gleichgewicht stehen, sobald sie ihren Entfernungen von dem Stützpunkte des Hebels, an welchem sie wirkend gedacht sind, umgekehrt proportioniert sind. So findet Archimed den Schwerpunkt eines Parallelogrammes, eines Dreiecks, eines Paralleltrapezes und hat damit das nötige Material, um nun endlich bis zum 17. Satze der Zwischenabhandlung mechanisch die Quadratur der Parabel abzuleiten[3]), von deren sich alsdann noch anknüpfender geometrischen Begründung wir im vorigen Kapitel gesprochen haben. Der Gang ist in aller Kürze folgender. Zuerst (Fig. 54) wird an dem gleicharmigen in B gestützten Hebel $AB\Gamma$ ein Dreieck $\Gamma\Delta H$ mit

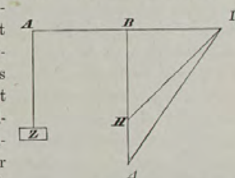

Fig. 54.

[1]) Gleichgewicht der Ebenen Buch I, Satz 4 (ed. Heiberg) II, 146, (ed. Nizze) 2. [2]) Gleichgewicht der Ebenen Buch I, Satz 6 und 7 (ed. Heiberg) II, 152—160, (ed. Nizze) 3—5. [3]) Archimed (ed. Heiberg) II, 308—336, (ed. Nizze) 12—22.

den Befestigungspunkten B und Γ an dem Wagbalken $B\Gamma$ aufgehängt gedacht. Es wird gezeigt, daß dieses Dreieck mit einer in A aufgehängten Figur Z in Gleichgewicht ist, wenn Z der dritte Teil des Dreiecks $\Gamma\Delta H$ ist. Des weiteren wird (Fig. 55) ein Paralleltrapez aufgehängt gedacht, dessen nicht parallele Seiten sich in Γ schneiden, während die parallelen Seiten senkrecht gegen den Wagbalken sind. Für die diesem Trapeze ΔKPT bei A das Gleichgewicht haltende Figur Z wird bewiesen, daß sie zwischen zwei Grenzen, dem $\frac{BE}{B\Gamma}$- und dem $\frac{BH}{B\Gamma}$fachen des Trapezes enthalten ist.

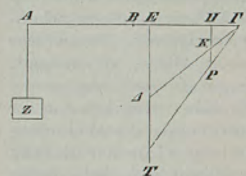

Fig. 55.

Jetzt geht Archimed (Fig. 56) zur Aufhängung eines Parabelabschnittes über. Er hat schon im Eingange der Abhandlung einige Eigenschaften dieser Kurve erwähnt. Er zeigt nun, daß wenn die den Abschnitt bildende Sehne $B\Gamma$ in beliebig viele gleiche Teile geteilt wird, wenn aus jedem Teilpunkte eine Parallele zu $K\Delta$ und aus den Schnittpunkten dieser Parallelen mit der Parabel Verbindungslinien nach Γ gezogen werden, welche man noch jenseits des Parabelpunktes bis zur nächsten Parallelen verlängert, der Parabelabschnitt alsdann als zwischen zwei Summen von trapezartigen Stücken enthalten sich kundgibt. Durch Aufsuchen der jedem Trapezchen in A das Gleichgewicht haltenden Figur, sowie durch Verbindung der beiden genannten Gleichgewichtssätze für das Dreieck und das Trapez ergibt sich endlich der Parabelabschnitt als Drittel des großen Dreiecks $B\Gamma\Delta$.

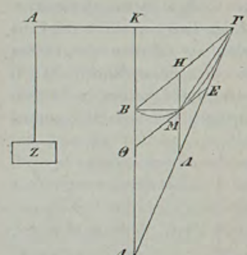

Fig. 56.

Andrerseits ist unter der Voraussetzung, es sei $EM\Theta$ die der $B\Gamma$ parallele Berührungslinie an die Parabel, M die Mitte von $H\Lambda$, H die Mitte von $B\Gamma$ und Λ die Mitte von $\Gamma\Delta$, folglich $HM = \frac{B\Delta}{4}$. Daraus ergibt sich, daß der Parabelabschnitt $\frac{4}{3}$ des kleinen Dreiecks $BM\Gamma$ ist, wie erwiesen werden sollte. Im II. Buche des Gleichgewichts der Ebenen geht dann Archimed dazu über, den **Schwerpunkt des parabolischen Abschnittes** zu finden.

Noch gewaltiger förderte Archimed die Erkenntnis der Gesetze gegenseitigen Druckes flüssiger und fester Körper. Er entdeckte das nach ihm benannte **hydrostatische Prinzip**[1]), welches als Lehrsatz gekleidet von ihm folgendermaßen ausgesprochen wurde: Jeder feste Körper, welcher, leichter als eine Flüssigkeit, in diese eingetaucht wird, sinkt so tief, daß die Masse der Flüssigkeit, welche so groß ist als der eingesunkene Teil, ebensoviel wiegt, wie der ganze Körper[2]). Daraus folgt ein weiterer Satz: Wenn ein Körper, leichter als eine Flüssigkeit, in diese getaucht wird, so verhält sich sein Gewicht zu dem einer gleich großen Masse Flüssigkeit, wie der eingesunkene Teil des Körpers zum ganzen Körper[3]). Dieser Satz bildet selbst die wissenschaftliche Definition des spezifischen Gewichtes für solche Stoffe, die leichter als die zur Dichtigkeitseinheit gewählte Flüssigkeit sind.

Das **spezifische Gewicht** dichterer Körper hatte Archimed, wie wir (S. 310—312) besprochen haben, bei seiner Kronenrechnung zu benutzen verstanden. Wir lehnten es dort ab, zu entscheiden, welcher von den beiden berichteten Methoden Archimed sich tatsächlich bediente. Auch jetzt, wo der Zusammenhang mit den Büchern von den schwimmenden Körpern uns nahe legen würde, von jener unparteiischen Zwischenstellung uns zu entfernen, sprechen wir nur mit besonderem Vorbehalte unsere persönliche Meinung über jene Frage aus. Die Methode mehrfacher Abwägungen ließ jedenfalls ein genaueres Ergebnis finden als die Methode der Abmessung der auslaufenden Flüssigkeit, und gerade deshalb scheint uns, da nun einmal beide Methoden berichtet werden, beide also mindestens zur Zeit, als der Berichterstatter lebte, wahrscheinlich aber viel früher, bekannt gewesen sein müssen, die letztgenannte Methode die ersterfundene gewesen zu sein[4]). Der Gedankengang ist doch wohl der natürlichere, daß dem Archimed zuerst unmittelbare Messung des verdrängten Wassers vorschwebte, und daß erst später, sei es durch ihn selbst, sei es durch Nachfolger, das mittelbare Verfahren erfunden wurde, nachdem die praktische Unausführbarkeit erkannt war, das verdrängte Wasser vollständig und genau aufzufangen und zu messen. Sei dem nun, wie da wolle, jedenfalls hat, wie wir schon andeuteten,

---

[1]) Über das hydrostatische Prinzip vgl. Ch. Thurot, *Recherches historiques sur le principe d'Archimède* in der *Revue Archéologique* 1869. [2]) Archimed, Von schwimmenden Körpern Buch I, Satz 5 (ed. Heiberg) IV, 367, (ed. Nizze) 227. [3]) Archimed, Von schwimmenden Körpern Buch II, Satz 1 (ed. Heiberg) II, 375, (ed. Nizze) 232. [4]) Montucla, *Histoire des Mathématiques* I, 229 vertritt die entgegengesetzte Ansicht und Thurot scheint ihm zu folgen, wenn er sich auch nicht so bestimmt ausspricht.

die Kronenrechnung frühzeitig ein verdientes und ungewöhnliches Aufsehen verursacht. Vitruvius nennt sie neben der Inkommensurabilität der Diagonale eines Quadrates und neben dem pythagoräischen Dreiecke aus den Seiten 3, 4, 5 in gleicher Linie. Sie stellen ihm gemeinschaftlich die drei größten mathematischen Entdeckungen dar[1]. Proklus erzählt, König Gelon habe im Hinblick auf die Kronenrechnung gesagt, er werde hinfort nichts bezweifeln, was Archimed behaupte[2].

Dasselbe geflügelte Wort, erzählt Proklus weiter, werde auch auf König Hiero zurückgeführt, und knüpfe sich an eine andere mechanische Leistung, welche dem Laien noch wunderbarer vorkommen mußte, weil ihm selbst eine unbegreifliche Handlung ermöglicht wurde. Archimed habe nämlich mit Hilfe von eigentümlich zusammengesetzten Herrichtungen es fertig gebracht, daß König Hiero ganz allein ein schweres Schiff von Stapel lassen konnte. Ob die Herrichtung der Hauptsache nach ein Flaschenzug[3], *τρισπάστος*, war, ob eine Spirale[4], *ἕλιξ*, sie darstellte, ist ziemlich gleichgültig. Jedenfalls ist der Name des Archimed für alle Zeiten mit dem einer dritten Gattung von Vorrichtungen, mit der Schraube[5], *κοχλία*, verbunden geblieben, welche er als Wasserhebewerk benutzte, und das ihm innewohnende Bewußtsein der großen Leistungsfähigkeit seiner Maschinen spiegelt sich in dem stolzen Worte: Gib mir wohin ich gehen kann, und ich setze die ganze Erde in Bewegung[6], *πᾶ βῶ καὶ χαριστίωνι τὰν γᾶν κινήσω πᾶσαν*, oder gib mir wo ich stehe und ich bewege die Erde[7] *δός μοὶ ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν*.

Wir übergehen das, was von einem vielleicht durch eine Art Gebläse oder durch Wasserkraft in Bewegung gesetzten Himmelsglobus[8] des Archimed erzählt wird, was sich auf ein für König Hiero erbautes großes Schiff mit 20 Ruderbänken[9], was sich auf die Brennspiegel bezieht, mittels deren Archimed bei der Römerbelagerung die feindlichen Schiffe in Brand gesetzt haben soll[10]. Das sind Gegenstände, die noch weniger als die zuletzt besprochenen der Geschichte der Mathematik angehören, und die, mag an ihnen wahr sein, was da wolle, die Verdienste Archimeds für unsere Zwecke weder erhöhen, noch beeinträchtigen.

[1] Vitruvius IX, 1—3. [2] Proklus (ed. Friedlein) 63. [3] Tzetzes II, 35. [4] Athenaeus V, p. 217. [5] Diodor I, 34 und V, 37. [6] Tzetzes II, 130. [7] Pappus VIII, 11 (ed. Hultsch) 1060. [8] Bunte, Leerer Gymnasialprogramm von 1877, S. 15—18 und Hultsch, Ueber den Himmelsglobus des Archimedes. Zeitschr. Math. Phys. XXII, Histor.-literar. Abteilung 106 (1877). [9] Athenaeus V, pag. 207. [10] Heiberg, *Quaestiones Archimedeae* 39—41.

16. Kapitel.

Eratosthenes. Apollonius von Pergä.

Etwa 11 Jahre nach der Geburt des Archimedes, im Jahre 276 oder 275 wurde in Kyrene, der therischen Kolonie an der Nordküste Afrikas, Eratosthenes, Sohn des Eglaos geboren[1]. Er verbrachte den größten Teil seines Lebens in Alexandria. Dort ward er erzogen unter der Leitung seines Landsmannes Kallimachus, des gelehrten Vorstehers der großen Bibliothek, sowie eines anderen sonst unbekannten Philosophen Lysanias. Dann wandte er sich nach Athen, wo er der Schule der Platoniker sich näherte, so daß er selbst als Platoniker bezeichnet wird, und wo er wahrscheinlich auch zuerst in das Studium der Mathematik eindrang. Ptolemaeus Euergetes — der dritte Ptolemäer, wie Suidas erzählt, dem die Notizen für das Leben des Eratosthenes fast ausschließlich zu verdanken sind — berief Eratosthenes wieder nach Alexandria zurück als Nachfolger seines Lehrers Kallimachus in der Vorstandsstellung bei der Bibliothek, und von da an scheint sein Verhältnis zu diesem Fürsten wie zur Fürstin Arsinoe ein besonders freundschaftliches geworden zu sein. Es ist folglich keinerlei Grund vorhanden anzunehmen, Eratosthenes sei in späteren Jahren von der Bibliothek entfernt ins Elend geraten, wenn auch andrerseits die Nachrichten allzu übereinstimmend sind um sie zu verwerfen, daß Eratosthenes augenleidend, vielleicht sogar erblindet, seinem Leben ungefähr 194 v. Chr. durch freiwilligen Hungertod ein Ende machte.

Die wissenschaftliche Bedeutung des Eratosthenes war eine mannigfaltige. Das Hauptgewicht scheint er selbst auf seine literarische und grammatische Tätigkeit gelegt zu haben, wenigstens gab er sich den Beinamen des Philologen. Allein auch in den meisten anderen Lehrgegenständen trat Eratosthenes als Schriftsteller auf, wie die erhaltenen Überschriften seiner Werke bezeugen, und sicherlich nicht mit Unrecht nannten ihn deshalb die Schüler des Museums Pentathlon, den Kämpfer in allen fünf Fechtweisen, welche bei den Kampfspielen in Gebrauch waren. Um diese Vielseitigkeit zu kennzeichnen mag nur der Schrift über das Gute und Böse neben der Erdmessung, des Werkes über die Komödie neben der Geo-

[1] Vgl. Fabricius, *Bibliotheca Graeca* (ed. Harless) IV, 120—127. *Eratosthenis geographicorum fragmenta* (ed. Seidel) Göttingen 1789. G. Bernhardy, *Eratosthenica*. Berlin 1822 und desselben Verfassers Artikel Eratosthenes in Ersch und Grubers Encyklopädie. *Eratosthenis Carminum reliquiae* (ed. Hiller) Leipzig 1872.

graphie, der Chronologie neben dem Buche über die Würfelverdoppelung gedacht sein.

In der Erdmessung, mit welcher eine besondere Schrift *Περὶ τῆς ἀναμετρήσεως τῆς γῆς* sich beschäftigte, war zum ersten Male von einem Griechen der Versuch gemacht die Größe der Erde genau zu bestimmen. Er fand den Grad zu 126000 Meter, während die wahre Länge des Breitengrades in Ägypten 110802,6 Meter beträgt, so daß also Eratosthenes bei seiner Schätzung um fast $13^3/_4$ Prozent irrte, ein Irrtum, den man aber nicht so beträchtlich finden wird, wenn man erwägt, daß dem Eratosthenes dabei höchstens bis zur zweiten Katarakte wirkliche Landesvermessungsergebnisse zu Gebote standen, während er für das obere Land bis zu den Nilkrümmungen und nach Meroe von den ganz unbestimmten Angaben der wenigen Reisenden abhängig war, welche die Hauptstationen und ihre Entfernungen in Tagesmärschen aufgezeichnet hatten[1]).

Den erhaltenen Bruchstücken der Geographie hat man entnommen, daß Eratosthenes nicht nur eine klare Beschreibung des Vorhandenen lieferte, sondern auch allgemeine Betrachtungen über das Werden und die Ursachen der Veränderungen der Erdoberfläche mit Glück gewagt hat[2]).

Für die Chronologie ist seit Auffindung des Ediktes von Kanopus ein Inhalt bekannt geworden, an welchen niemand früher dachte, niemand denken konnte. Wir haben gelegentlich (S. 78) von dieser Verordnung gesprochen. Die in Kanopus, nur wenige Wegstunden von Alexandria entfernt, versammelte Priesterschaft verkündete unter dem Datum des 19. Tybi des 9. Regierungsjahres Ptolemaeus III., Euergetes I. d. i. am 7. März 238 v. Chr. den Befehl[3]), daß „damit auch die Jahreszeiten fortwährend nach der jetzigen Ordnung der Welt ihre Schuldigkeit tun und es nicht vorkomme, daß einige der öffentlichen Feste, welche im Winter gefeiert werden, einstens im Sommer gefeiert werden, indem der Stern um einen Tag alle vier Jahre weiterschreitet, andere aber, die im Sommer gefeiert werden, in späterer Zeit im Winter gefeiert werden, wie das sowohl früher geschah, als auch jetzt wieder geschehen würde, wenn die Zusammensetzung des Jahres aus den 360 Tagen und den 5 Tagen, welche später noch hinzuzufügen gebräuchlich wurde, so fortdauert, von

[1]) Lepsius, Das Stadium und die Gradmessung des Eratosthenes auf Grundlage der ägyptischen Maße (in der Zeitschr. f. ägypt. Sprache und Alterthumskunde 1877, 1. Heft). [2]) Alex. v. Humboldt, Kosmos II, 208 und zugehörige Anmerkung S. 435. Berger, Die geographischen Fragmente des Eratosthenes neu gesammelt, geordnet und besprochen. Leipzig 1880. [3]) Lepsius, Das bilingue Dekret von Kanopus. Berlin 1866. Bd. I.

jetzt an 1 Tag als Fest der Götter Euergeten alle 4 Jahre gefeiert werde hinter den 5 Epagomenen und vor dem Neuen Jahre, damit jedermann wisse, daß das, was früher in bezug auf die Einrichtung der Jahreszeiten und des Jahres und das hinsichtlich der ganzen Himmelsordnung Angenommene fehlte, durch die Götter Euergeten glücklich berichtigt und ergänzt worden ist.“ Ob Eratosthenes selbst diese wichtige chronologische Neuerung veranlaßte, ist unsicher. Kallimachus soll nämlich um die CXXXV. oder CXXXVI. Olympiade gestorben sein. Der Anfang der ersteren war 240, der der zweiten 236. Zwischen beide Anfänge fällt das Edikt von Kanopus. Da nun Eratosthenes erst nach dem Tode des Kallimachus wieder nach Alexandria zurückkehrte, so hängt es wesentlich von der genauen Bestimmung dieses Todesjahres ab, ob Eratosthenes bei Erlaß des Ediktes zur Stelle war oder nicht. Aber sei dem, wie da wolle, irgend eine Beziehung zwischen der Schaltjahreinrichtung und der Chronologie des Eratosthenes wird nicht wohl von der Hand zu weisen sein. Wir machen zugleich darauf aufmerksam, daß von dieser merkwürdigen Tatsache des Vorhandenseins eines ägyptischen Schaltjahres in der frühen Ptolemäerzeit der Altertumsforschung vor Auffindung des Ediktes selbst nicht eine Silbe bekannt war. Nicht die leiseste Anspielung auf diese jetzt durchaus feststehende bedeutsame Reform kommt in uns erhaltenen alexandrinischen Schriften vor, ein Wink, nicht gar zu viel auf das negative Zeugnis fehlender Belege für eine an sich wahrscheinliche Vermutung zu vertrauen.

Über alle diese Schriften müssen kurze Andeutungen hier genügen. Bevor wir zum Briefe über die Würfelverdoppelung und damit zur mathematischen Seite der Tätigkeit des Eratosthenes übergehen, wollen wir nur eines weiteren Beinamens noch gedenken, unter welchem er mitunter vorkommt. Man nannte ihn nämlich Beta. Die Bedeutung dieses Beinamens ist sehr zweifelhaft. Die einen wollen, er habe ihn deshalb erhalten, weil er der zweite Vorsteher der großen Bibliothek gewesen sei. Allein dieses ist einesteils unrichtig, wenn, wie sonst angenommen wird, Zenodotus der erste, Kallimachus der zweite, Eratosthenes also erst der dritte Vorsteher war, andernteils ist nirgends eine Spur zu finden, daß Zenodotus oder auch Kallimachus etwa Alpha, oder einer der Nachfolger des Eratosthenes Gamma oder Delta genannt worden wäre. Wahrscheinlicher ist die andere Ableitung, wonach das Wort Beta ihn als zweiten Platon kennzeichnen sollte, oder allgemeiner als denjenigen, der überall den zweiten Rang wenigstens sich zu erobern wußte, wenn der erste Rang auch ehrfurchtsvoll den Altvordern eingeräumt werden muß. Endlich kommt noch in Betracht, daß Buchstaben als

Beinamen, und zwar unter den seltsamsten Begründungen, auch anderweitig bei den Griechen um das Jahr 200 v. Chr. vorkommen. So wird ein Astronom **Apollonius**, der zur Zeit des Königs Ptolemaeus Philopator sich mit Untersuchungen über den Mond beschäftigte und dadurch sich weithin bekannt machte, als **Epsilon** bezeichnet; denn der Buchstabe ϵ sehe der Gestalt des Mondes gleich[1]).

Der **Brief über die Würfelverdoppelung** ist von uns bereits mehrfach benutzt worden. Dem Anfange desselben entnahmen wir (S. 211) die Geschichte der Entstehung jenes Problems. Als wir von Eudoxus und Menächmus und ihren Würfelverdoppelungen redeten (S. 231 und 229), bezogen wir uns auf ein Epigramm[2]), welches den Schluß des Briefes bildet. Der Hauptteil des Briefes lehrt selbst eine Verdoppelung des Würfels unter Anwendung eines eigens dazu erfundenen Apparates, des **Mesolabium**, wie es genannt wurde, weil es dabei auf die Auffindung zweier geometrischer Mittel zwischen zwei gegebenen Größen und zwar durch Bewegungsgeometrie (S. 209) ankam[3]). Das Mesolabium bestand aus drei einander gleichen rechtwinkligen Täfelchen von Holz, Elfenbein oder Metall, welche zwischen zwei mit je drei Rinnen versehenen Linealen eingeklemmt in diesen Rinnen übereinander weg verschoben werden konnten. Die Anfangslage ist in der Figur, welche Eutokius in seinem Kommentare zu Archimeds Büchern von der Kugel und dem Zylinder, wo der ganze Brief des Eratosthenes eingeschaltet sich findet, beigibt, mit den Buchstaben (Fig. 57) $AEZ\Lambda$, ΛZHI, $IH\Theta\Delta$ versehen, wobei, wie wir im vorübergehen bemerken, der Buchstabe I auffallen mag. Auch in der in dem gleichen Kommentare erhaltenen Figur zur Würfelverdoppelung des Archytas (S. 228 Fig. 36) kommt ein I vor, während Euklid diesen Buchstaben grundsätzlich vermieden hat, viel-

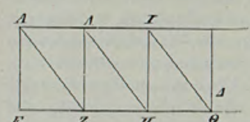

Fig. 57.

[1]) **Ptolemaeus Hephaestio** bei **Photius** cod. CXC. [2]) **Hiller** in seiner Ausgabe der poetischen Fragmente des Eratosthenes hält aus sprachlichen Gründen das Schlußepigramm sowie vielleicht den ganzen Brief für unecht. Die sprachliche Form geben wir deshalb preis, da wir uns nicht berechtigt glauben auf diesem Gebiete zu widersprechen, den Inhalt aber halten wir der wesentlichen Übereinstimmung wegen mit allem, was wir wissen, nach wie vor für echt. [3]) Den Namen des Mesolabium kennen wir aus **Vitruvius** IX, 3 und aus **Pappus** III, 4 (ed. **Hultsch**) 54. Die Beschreibung des Apparates bei Pappus III, 5 (ed. **Hultsch**) 56 sq. weicht in Einzelheiten, aber nicht in dem Hauptgedanken von dem eratosthenischen Briefe ab und bestätigt so unsere in der vorigen Anmerkung ausgesprochene Meinung.

mehr nach Θ sofort zu K überging. Offenbar wollte man dadurch der leicht möglichen Verwechslung des Buchstaben I mit einem einfachen Vertikalstriche vorbeugen. Aristoteles freilich und wohl alle ihm vorhergehenden Schriftsteller vermieden das I noch nicht bei Figurenbezeichnungen[1]). Wohl möglich, daß diese Sitte auch zur Zeit des Eudemus, dessen Aufzeichnungen Eutokius das Verfahren des Archytas entnimmt, noch nicht aufgekommen war. Für das Vorkommen des I in einer Figur des Eratosthenes wissen wir keine andere Erklärung, als daß an dem ursprünglichen Texte mancherlei, wenn auch den Inhalt wenig berührende Änderungen vorgenommen worden sein müssen, von denen unter anderen die Buchstaben der einen Figur betroffen wurden. War nun AE die größere, $\Delta\Theta$ die kleinere Linie, zwischen welche die beiden mittleren Proportionalen einzuschalten waren, so mußte man (Fig. 58) die Rechteckchen so verschieben, daß das erste einen Teil des zweiten, dieses einen Teil des dritten verbarg und zwar derart, daß die von A nach Δ gezogene Grade durch die Punkte B, Γ hindurchging, von welchen an die Diagonalen des zweiten und dritten Rechteckchens sichtbar waren; die BZ und ΓH sind alsdann, wie leicht zu beweisen ist, die beiden gesuchten mittleren Proportionallinien. Eratosthenes schlug diese seine Erfindung so hoch an, daß er zum ewigen Gedächtnisse derselben ein Exemplar als Weihgeschenk in einem Tempel aufhängen ließ. Die von ihm selbst entworfene Inschrift, welche die Gebrauchsanweisung enthielt, soll das mehrgenannte Schlußepigramm des eratosthenischen Briefes sein.

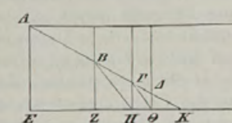

Fig. 58.

Ob ein von Pappus an zwei Stellen[2]) erwähntes Werk des Eratosthenes über **Mittelgrößen**, *περὶ μεσοτήτων* oder *τόποι πρὸς μεσότητας*, sich gleichfalls auf die Würfelverdoppelung bezog, ist ungewiß. Wäre dem so, so würde daselbst möglicherweise eine geometrische Lösung gelehrt worden sein, da Pappus das eine Mal bemerkt, diese Schrift stehe mit den lineären Örtern ihrer ganzen Voraussetzung nach in Zusammenhang.

Noch geringfügiger sind die Spuren eines weiteren Werkes des Eratosthenes, welche auf wenige unbedeutende Zitate bei Theon von Smyrna[3]) sich beschränken. Wenn auch der Schluß gerechtfertigt

[1]) **Heiberg** in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XVIII, 18. [2]) **Pappus** VII, *Prooemium* (ed. **Hultsch**) 636 und 662. [3]) **Theon Smyrnaeus** (ed. **Hiller**) 82, 107, 111.

sein mag, in jenem Werke sei von den Proportionen und sonstigen arithmetischen Fragen die Rede gewesen, so schwebt doch die Behauptung[1]) ganz in der Luft, sie habe den Titel Arithmetik geführt.

Vielleicht gehört ebendahin ein Bruchstück, welches bei Nikomachus von Gerasa und in dem Kommentare zu dessen Arithmetik von Jamblichus sich vorfindet[2]). Vielleicht aber bildet auch dieses Bruchstück einen Teil einer besonderen Schrift, welche den Titel des Siebes führte. Das Sieb, *κόσκινον* (lateinisch: *cribrum Eratosthenis*) ist eine Methode zur Entdeckung sämtlicher Primzahlen. Man schreibt, so lautet die Regel, alle ungeraden Zahlen von der 3 an der Reihe nach auf. Man streicht nun jede dritte Zahl hinter der 3 durch, so sind die Vielfachen der 3 entfernt. Dann geht man zur nächsten Zahl 5 über und streicht jede fünfte Zahl hinter ihr durch ohne Rücksicht darauf, ob sie schon durch einen früheren Strich vernichtet ist oder nicht, so sind die Vielfachen der 5 entfernt. Fährt man weiter so fort, indem man beim Abzählen und Durchstreichen die bereits durchstrichenen Zahlen den unberührten gleichachtet und nur den Unterschied macht, daß man keine durchstrichene Zahl als Ausgangspunkt einer neuen Aussiebung benutzt, so bleiben schließlich nur die Primzahlen übrig. Sämtliche zusammengesetzte Zahlen dagegen sind vernichtet, und am Anfange fehlt auch noch die Primzahl 2, welche Jamblichus, weil sie gerad sei, nicht unter die Primzahlen gerechnet wissen will, trotzdem Euklid sie fehlerhafterweise dorthin verwiesen habe[3]).

Die Siebmethode des Eratosthenes ist gerade keine solche, zu deren Ersinnung ein übermäßiger Scharfsinn gehörte. Trotz dessen glauben wir sie ihrer geschichtlichen Stellung wegen für einen ziemlich bedeutenden Fortschritt in der Zahlentheorie halten zu müssen. Man erwäge nur, wie die Sache der Zeitfolge nach liegt. Zuerst unterschied man Primzahlen von zusammengesetzten Zahlen und leitete wohl manche Eigenschaften der letzteren aus den ersteren ab. Der zweite Schritt war der, daß Euklid zeigte, wie die Anzahl der Primzahlen unendlich sei, wie es folglich nicht möglich sei, alle Primzahlen zu untersuchen. Jetzt erst gewinnt es als dritter Schritt Bedeutung, wenn Eratosthenes zeigt, wie man wenigstens imstande sei, die Primzahlen, soweit man in der Zahlenreihe gehen will, zu entdecken, und somit der Unausführbarkeit der Darstellung sämtlicher Primzahlen eine von der Willkür des Rechners abhängende untere

[1]) Fabricius, *Bibliotheca graeca* (ed. Harless) IV, 121. [2]) Nicomachus (ed. Hoche) 29 flgg. *Jamblichus in Nicomachi arithmeticam* (ed. Tennulius) 41, 42, (ed. Pistelli) 29 sqq. [3]) *Jamblichus in Nicomachi arithmeticam* (ed. Tennulius) 42, (ed. Pistelli) 30, 31.

Grenze zu setzen. An und für sich hätte die Erfindung des Eratosthenes ebensogut vor als nach Euklid gemacht werden können; nur, meinen wir, wäre ihr wissenschaftlicher Wert geringfügiger gewesen, wenn sie älter war. Damals hätte das Sieb ein verunglückter Versuch sein können die genaue Anzahl der Primzahlen zu ermitteln. Jetzt dagegen, nach Euklid, konnte es nur eine Methode sein, bei deren Aussinnung man von Anfang an gerade das beabsichtigte, was sie zu leisten imstande ist. Darin aber schon liegt ein Zeugnis höherer Vollkommenheit, wenn Methoden zu bestimmten Zwecken gesucht und auch wirklich gefunden werden.

Das Jahrhundert von 300 bis 200 v. Chr., welches, weil am Anfang desselben Euklid blühte, das Jahrhundert des Euklid genannt werden kann, schloß würdig ab mit Apollonius von Pergä[1]). Den Beinamen, der ihn von außerordentlich vielen bekannten Männern, welche gleichfalls Apollonius heißen, unterscheiden soll, führt er nach seinem Heimatsorte, einer Stadt in Pamphilien. Ob er mit dem früher erwähnten Astronomen, dem der Beiname Epsilon beigelegt wurde, zusammenfällt oder nicht, steht in Zweifel. Die Lebenszeit der beiden ist allerdings übereinstimmend. Apollonius von Pergä wurde während der Regierung des Ptolemaeus Euergetes geboren und hatte seine Blütezeit, gleich jenem Astronomen, während der bis 205 dauernden Regierung des Ptolemaeus Philopator. Eine fernere Übereinstimmung könnte man darin finden, daß auch von Apollonius von Pergä bekannt ist, daß er mit Sternkunde sich beschäftigte. Wenigstens geht die beste Lesart einer Stelle des 1. Kapitels des XII. Buches des ptolemäischen Almagestes dahin, daß Apollonius von Pergä über den Stillstand und die rückläufige Bewegung der Planeten geschrieben habe, und sie mit Hilfe der Epizyklen zu erklären suchte. Ein freilich nur negativer Gegengrund liegt darin, daß Ptolemäus von den Untersuchungen über den Mond gar nichts sagt, welche doch gerade die vorzüglichste Leistung des Apollonius Epsilon gebildet haben müssen.

[1]) Das Material für die Biographie des Apollonius von Pergä ist zusammengestellt in der Vorrede von Halleys Ausgabe der Kegelschnitte des Apollonius (Oxford 1710). Vgl. auch Fabricius, *Biblioth. Graeca* (ed. Harless) IV, 192 bis 203. Montucla, *Histoire des mathématiques* I, 245—253. Terquem, *Notice bibliographique sur Apollonius* in den *Nouvelles annales des mathématiques* (1844) III, 350—352 und 474—488, endlich die Vorrede von H. Balsam zu seiner deutschen Bearbeitung (nicht Übersetzung) der Kegelschnitte des Apollonius von Pergä. Berlin 1861. Die neueste Ausgabe der vier ersten griechisch erhaltenen Bücher der Kegelschnitte des Apollonius nebst ihren Kommentatoren ist die von Heiberg in 2 Duodezbänden. Leipzig 1891—93. W. Crönert (Sitzungsber. der Berliner Akad. 1900, S. 942—950) gibt das Jahr 170 als Todesjahr des Apollonius.

Von den Lebensverhältnissen des Apollonius von Pergä ist nichts weiter bekannt, als daß er schon als Jüngling nach Alexandria kam, wo er seine mathematische Bildung von den Nachfolgern des Euklid erhielt. Ein bestimmter Lehrer wird nicht genannt. Später ist ein Aufenthalt in Pergamum gesichert, wo Apollonius einem gewissen Eudemus befreundet war, welchem er mit Wachrufung der Erinnerung an jenes Zusammenleben sein Hauptwerk, die acht Bücher der Kegelschnitte, *κωνικά*, widmete.

Zeitgenossen und Nachkommen bewunderten dieses Werk und ehrten dessen Verfasser durch den Beinamen des großen Mathematikers. So erzählt ausdrücklich Geminus, dessen Bericht Eutokius in seinem Kommentare zu den vier ersten Büchern der Kegelschnitte des Apollonius uns aufbewahrt hat[1]). Eutokius will damit den Ungrund des Vorwurfes darlegen, welchen Heraklides, der Biograph des Archimed (S. 295) gegen Apollonius ausspricht, als habe derselbe nur einen literarischen Raub an noch unveröffentlicht gebliebenen Schriften des Archimed begangen. Mit gleichem Rechte läßt der Bericht des Geminus sich gegen die früher (S. 288) erwähnte Behauptung des Pappus verwerten, als stützten sich die vier ersten Bücher des Apollonius wesentlich auf die Kegelschnitte des Euklid[2]). Apollonius wird gewiß so wenig wie ein Schriftsteller irgend einer Zeit und irgend eines Volksstammes versäumt haben die Vorarbeiten auf dem Gebiete, welches er zu behandeln wünschte, kennen zu lernen. Er wird sicherlich von den Vorarbeiten, insbesondere wenn sie von einem Euklid, einem Archimed herrührten, Vorteil gezogen haben; er sagt auch nirgends in seinen Schriften, daß das Ganze seiner Kegelschnitte sein ausschließliches Eigentum sei. Aber von der Benutzung fremder Vorarbeiten als Grundlage, als untere Voraussetzung eines Werkes zu unrechtmäßiger Aneignung fremder Entdeckungen ist doch eine unermeßliche Kluft, und es fällt schwer einem Manne von der sonst allseitig anerkannten Bedeutung des Apollonius letztere Handlung zuzutrauen. Zwei ganz grundlegende Neuerungen haben wir überdies unter allen Umständen dem Apollonius zuzuschreiben.

Geminus sagt ausdrücklich, wie uns Eutokius an der oben erwähnten Stelle berichtet, die Alten hätten nur gerade Kegel geschnitten und die Schnitte stets senkrecht zur Seite des Kegels geführt, worauf sie je nach dem Winkel an der Spitze des Kegels den Schnitt des spitzwinkligen, des rechtwinkligen, des stumpfwinkligen Kegels unterschieden (S. 244). Apollonius dagegen habe ge-

[1]) Apollonius, Conica (ed. Heiberg) II, 170. [2]) Pappus, VII *Prooemium* (ed. Hultsch) 672.

zeigt, daß alle diese Schnitte an einem einzigen Kegel hervorgebracht werden können, und daß man zu diesem Schnitte ebenso wie den geraden Kegel auch den schiefstehenden verwenden könne. Wir sehen also, daß Apollonius das vervollständigte, was Euklid (S. 292), was Archimed (S. 304) nur von der Ellipse wußten, daß sie auf jedem — jetzt nachdem wir den Bericht des Geminus kennen, müssen wir mit einer weiteren Einschränkung sagen: auf jedem geraden — Kegel herausgeschnitten werden kann. Gegen Geminus anzunehmen, daß auch jene schon alle Kegelschnitte auf jedem Kegel hervorzubringen imstande gewesen seien, ist eine Behauptung, welche auf keinerlei alten Bericht sich stützt.

Von der anderen Neuerung wissen wir durch Pappus[1]), der gleichzeitig auch das von Geminus Mitgeteilte bestätigt. Apollonius habe, wie er die Herstellbarkeit jedes Kegelschnittes auf der Oberfläche eines jeden Kegels erkannte, für dieselben neue Namen eingeführt, und zwar die Namen Ellipse, Parabel, Hyperbel mit Rücksicht auf gewisse Eigenschaften der Flächenanlegung.

Wir haben auf diese mit äußerster Bestimmtheit ausgesprochene Angabe uns gestützt, um (S. 291) Euklid die Kenntnis abzusprechen, daß die pythagoräischen Sätze von Flächenanlegungen zu Kegelschnitten als geometrischen Örtern führen konnten. Mit Rücksicht auf die gleiche Stelle hat man gewiß mit Recht die Zuverlässigkeit einiger archimedischen Handschriften in Zweifel gezogen[2]), in welchen die Wörter Parabel und Ellipse statt des Schnittes des rechtwinkligen und spitzwinkligen Kegels vorkommen. Der Name der Parabel insbesondere erscheint nur in der Überschrift der Abhandlung über die Quadratur dieser Kurven, und auch wo der Name der Ellipse im fortlaufenden Texte der Abhandlung von den Konoiden und Sphäroiden dreimal sich vorfindet, dürfte eine späte Einschiebung durch Abschreiber, welche den Wortlaut ganz unbeschadet des Sinnes abkürzen zu dürfen meinten, anzunehmen sein.

Hat aber Apollonius zuerst die Entstehung aller Kegelschnitte an jedem Kegel, zuerst die Eigenschaften derselben erkannt, die wir heutigentages aus den Scheitelgleichungen der drei Kegelschnitte herauszulesen gewohnt sind, dann ist seine Bearbeitung der Kegelschnitte unzweifelhaft ein Originalwerk, mögen auch noch so viele Lehrsätze in den vier ersten Büchern vorkommen, die von Euklid, wenn nicht schon von Menächmus und Aristäus dem Älteren ge-

[1]) Pappus VII, *Prooemium* (ed. Hultsch) 674. [2]) Archimed (ed. Nizze) 285. Die entgegengesetzte Meinung bei Chasles, *Aperçu hist.* 17 in der Anmerkung (Deutsch 15).

kannt waren. Zwei andere Vorgänger nennt übrigens Apollonius selbst in der Vorrede zum IV. Buche[1]): Konon von Samos und Nikoteles von Kyrene, deren ersterer uns schon als geistreicher Freund des Archimed bekannt geworden ist, wenn auch der Umstand, daß seine Schriften uns sämtlich verloren sind, uns abhielt, ihm eine besondere Stelle ausführlicher Beachtung zu gewähren. Hätten wir doch nur berichten können, daß er in Samos geboren, in Alexandrien lebte, aber auch in Italien und Sizilien astronomische Beobachtungen anstellte, daß er um 246 das Haupthaar der Berenike, der Gemahlin des Ptolemaeus Euergetes, unter die Sterne versetzte[2]).

Gehen wir nun mit raschen Schritten an dem Inhalte der Kegelschnitte des Apollonius vorüber[3]). Im I. Buche wird nach der allgemeinen Definition des Kegels als der Oberfläche, die durch eine Gerade sich erzeugt, welche um eine Kreisperipherie herumgeführt wird, während sie zugleich durch einen festen, außerhalb der Ebene der Kreisperipherie liegenden Punkt geht, die so erhaltene Fläche durch Ebenen geschnitten. Jeder Schnitt durch den festen Punkt, d. h. durch die Spitze des Kegels, erzeugt ein Dreieck, und liegt in dieser Schnittebene auch die Achse des Kegels, die Verbindungsgerade der Spitze zum Mittelpunkte des bei der Erzeugung des Kegels mitwirkenden Kreises, so entsteht das Achsendreieck. Nun wird vorgeschrieben, neue Schnittebenen zu führen, deren Spuren in der Grundfläche senkrecht auf der Spur des Achsendreiecks stehen, und Apollonius zeigt, wie je nach der Richtung dieser Schnitte zur Seite des Achsendreiecks die verschiedenen Kegelschnittskurven auf der Kegeloberfläche erscheinen. Die Durchschnittslinie der Schnittebene mit dem Achsendreiecke ist jedesmal ein Durchmesser des Kegelschnittes, d. h. sie halbiert alle Sehnen des Kegelschnittes, welche unter sich und einer jedesmal bestimmten Geraden parallel gezogen werden. Der Punkt, in welchem der Durchmesser die Oberfläche des Kegels trifft, ist der Scheitel des Kegelschnittes. Durch diesen Scheitel wird nun in der Schnittebene, also senkrecht zum Achsendreiecke und parallel zu dem durch den Durchmesser halbierten Sehnensysteme eine Gerade errichtet, deren Länge durch gewisse Methoden geometrisch bestimmt wird, und welche jenes p darstellt, jene Länge, an welche nach unseren früheren Auseinandersetzungen (S. 289) ein gewisser Flächenraum in Gestalt eines Parallelogrammes angelegt werden soll. Diese Linie, welche man in moderner Sprache den Parameter des Kegelschnittes

[1]) Apollonius, Conica (ed. Heiberg) II, 2. [2]) A. Böckh, Ueber die vierjährigen Sonnenkreise der Alten S. 28—29. [3]) Eine sehr hübsche Zusammenstellung von Housel in Liouvilles *Journal des Mathématiques* (1858) XXIII, 153—192.

nennt, heißt bei Apollonius schlechtweg die Errichtete, *ὀρθία*, ein Name, der alsdann in den lateinischen Übersetzungen zum *latus rectum* geworden ist. Man sieht leicht ein, daß Apollonius mittels dieser Vorschriften genau die gleichen Linien ziehen läßt, deren man noch heute bei Anwendung der Methoden der analytischen Geometrie sich bedient. Es ist ein förmliches Koordinatensystem gezeichnet, dessen Anfangspunkt auf dem Kegelschnitte selbst liegt, dessen Abszissenachse ein Durchmesser des Kegelschnittes, und dessen Ordinatenachse die jenem Durchmesser konjugierte Berührungslinie im Koordinatenanfangspunkte ist. Die dabei gebrauchten Benennungen lauten *τεταγμένως κατηγμέναι* d. h. geordnet gezogen[1]) und *ἀποτεμνόμεναι* d. h. abgeschnitten[2]). Von wirklichen Koordinaten sind diese Geraden dadurch wesentlich verschieden, daß sie nicht ein Liniensystem für sich bilden, sondern nur gleich anderen geometrischen Hilfslinien in Verbindung mit dem Kegelschnitte und hervorgerufen durch den jeweil zu beweisenden Lehrsatz auftreten. Diese gegebenen Elemente handhabt nun Apollonius in griechischer Weise. Er rechnet natürlich nicht mit Formeln und Gleichungen, wie wir es tun, aber er verknüpft und verbindet Proportionen von Längen und von Flächenräumen, welche nur einen anderen Ausdruck des in den Gleichungen der Kegelschnitte enthaltenen Gedankens darstellen, um zu den gleichen Folgerungen zu gelangen. Läuft der Schnitt der Seite des Kegels parallel, so kann nur von einem Scheitel der Parabel die Rede sein. Im entgegengesetzten Falle wird außer dem einen Schenkel des Achsendreiecks auch der zweite entweder selbst oder in seiner Verlängerung über die Spitze des Kegels hinaus durch den Schnitt getroffen, und so entsteht ein zweiter Scheitel der Kurve bei der Ellipse, ein Scheitel der Gegenkurve bei der Hyperbel. Die Entfernung der beiden Scheitel begrenzt die Länge des Durchmessers. In der Mitte zwischen beiden ist der Mittelpunkt der Kurve, d. h. ein Punkt, in welchem alle durch ihn gezogenen Sehnen halbiert sind. Mit dem Mittelpunkte tritt auch der Begriff des dem ersten Durchmesser konjugierten Durchmessers auf, der eine gleichfalls begrenzte Länge besitzt, wenn auch bei der Hyperbel die Begrenzung nicht äußerlich sichtbar ist. Zwei zueinander senkrechte konjugierte Durchmesser werden Achsen genannt. Apollonius knüpft daran ferner Betrachtungen über die Berührungslinie an irgend einen Punkt eines Kegelschnittes und über die Vielheit von Paaren konjugierter Durchmesser, welche möglich sind.

In dem II. Buche sind zunächst Eigenschaften der Asymptoten

[1]) Apollonius (ed. Heiberg) I, 70 lin. 15. [2]) Ebenda I, 72 lin. 10—11.

der Hyperbel auseinandergesetzt, d. h. der Linien, welche den Hyperbelarmen sich mehr und mehr nähern, ohne mit denselben zusammenzutreffen. Die geometrische Definition ist folgende: Man ziehe an einen Hyperbelpunkt eine Berührungslinie, trage auf derselben die Länge des ihr parallelen Durchmessers auf und verbinde den so gefundenen Punkt mit dem Mittelpunkt der Hyperbel geradlinig, diese Gerade wird eine Asymptote sein[1]). Aus den übrigen Sätzen des II. Buches mag noch hervorgehoben werden, daß die Gerade, welche den Durchschnittspunkt zweier Berührungslinien mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, ein Durchmesser des Kegelschnittes ist, sowie der andere, daß in jedem Kegelschnitte nur ein einziges senkrechtes Achsenpaar existiert.

In dem III. Buche bilden die ersten 44 Sätze einen besonderen Abschnitt, dessen Charakter schon in dem 1. Satze sich dahin ausweist, daß hier Verhältnisse von Produkten aus Tangenten und Sekanten der Kegelschnitte auftreten. Jener erste Satz heißt etwa folgendermaßen: Es seien M_1 und M_2 zwei Punkte eines Kegelschnittes, dessen Mittelpunkt in O liegt (bei der Parabel wäre O unendlich entfernt, und somit die OM_1 mit OM_2 und mit der Achse der Parabel parallel); die Berührungslinien in beiden Punkten seien M_1T_1 und M_2T_2, indem T_1 den Durchschnitt der Berührungslinie an M_1 mit der OM_2 bezeichnet, und eine ähnliche Definition für T_2 gilt; die M_1T_1 und die M_2T_2 schneiden einander in R. Alsdann sind die Dreiecke M_1T_2R und M_2T_1R flächengleich. Die folgenden Sätze stützen sich auf diesen ersten, und lassen sich, in so vielfältiger Teilung sie auch im Originale ausgesprochen sind, in zwei Hauptsätze zusammenfassen. Der eine Satz, daß, wenn von einem Punkte zwei Sekanten gezogen werden, das Produkt der Entfernungen des Ausgangspunktes nach den beiden Schnittpunkten der einen Sekante dividiert durch dasselbe Produkt in bezug auf die zweite Sekante einen Quotienten gibt, der sich nicht verändert, wenn man von irgend einem anderen Ausgangspunkte ein den ersten Sekanten paralleles Sekantenpaar konstruiert. Der zweite Satz, daß eine Sekante, aus deren einem Punkte man zwei Berührungslinien zieht, durch diesen Ausgangspunkt, den Durchschnitt mit der Berührungssehne und die beiden Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitte eine harmonische Teilung darbietet[2]). Noch einige auf Flächen bezügliche Wahrheiten schließen sich ziemlich naturgemäß an, wie z. B. daß die Dreiecke, welche durch die Asymptoten und irgend eine Berührungs-

[1]) Apollonius (ed. Heiberg) I, 194 lin. 15 das erste Vorkommen des Namens *ἀσύμπτωται*. [2]) Apollonius benutzt dabei allerdings noch nicht das Wort: harmonische Teilung, sondern schreibt den Satz als Proportion.

linie der Hyperbel gebildet werden, einen konstanten Flächeninhalt haben, da derselbe Satz, anders ausgesprochen, dahin gehen würde, daß jede Berührungslinie der Hyperbel auf den Asymptoten Stücke von konstantem Produkte abschneide. Alsdann kommt der Verfasser in dem 45. Satze zu den Punkten, welche er *σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς* nennt, eine Bezeichnung, welche schwierig zu verdeutschen ist, da Punkte, die bei der Anlegung entstehen, kaum den Anspruch erheben können, nur einigermaßen einen Begriff davon zu gewähren, welche Punkte gemeint sind; es sind aber die Brennpunkte der Ellipse und Hyperbel, während der Brennpunkt der Parabel in dieser Zeitperiode noch nicht vorkommt. Die Definition der Brennpunkte bei Apollonius und die Eigenschaften, welche er besonders hervorhebt, sind folgende: ein Brennpunkt ist ein Punkt, der die große Achse in zwei Teile teilt, deren Rechteck einem Viertel der Figur gleich ist; unter Figur aber ist das Rechteck des Parameters mit der großen Achse zu verstehen, oder, was dem Werte nach gleichbedeutend ist, das Quadrat der kleinen Achse. Wenn man das Stück einer Berührungslinie, welches zwischen den beiden Senkrechten zur großen Achse in den Endpunkten derselben abgegrenzt ist, zum Durchmesser eines Kreises nimmt, so schneidet dieser Kreis die große Achse in den Brennpunkten. Die 4 Punkte, welche derart bestimmt sind, nämlich 2 Brennpunkte und 2 Punkte einer Berührungslinie werden paarweise verbunden, je ein Punkt der Berührungslinie mit dem einen, der andere mit dem anderen Brennpunkte. Diese Verbindungsgeraden nennt man konjugierte Linien. Sie schneiden einander auf der Normallinie, d. h. auf der Senkrechten, welche zur Berührungslinie im Berührungspunkte errichtet ist. Nun folgt der Satz über Winkelgleichheit für die Winkel, welche die Normallinie mit den beiden Brennstrahlen des Berührungspunktes bildet; ferner der Satz, daß die Fußpunkte der Senkrechten von den Brennpunkten auf Berührungslinien sämtlich in einer um die große Achse als Durchmesser beschriebenen Kreisperipherie liegen; endlich der Satz von der konstanten Summe, beziehungsweise Differenz der Brennstrahlen. Alle diese Wahrheiten entwickelt Apollonius der Reihe nach in dem III. Buche, welches dadurch fast für sich allein den Charakter einer elementaren Kegelschnittslehre gewinnt. Man ist allerdings in der Wertschätzung dieses III. Buches viel weiter gegangen, als wir es taten. Apollonius sagt in der Vorrede zum I. Buche seiner Kegelschnitte, von Euklid sei die Synthesis des Ortes zu drei und vier Geraden nicht gegeben, sondern nur ein Teil derselben, und dieser überdies nicht glücklich; es sei auch nicht möglich gewesen, diese Synthesis richtig zu vollenden ohne das, was er, Apollonius, eben in dem III. Buche neu gefunden habe[1]). Pappus tadelt diese Ruhmredigkeit, indem er gleichzeitig hervorhebt, daß Apollonius seinen Vorgängern hätte dankbar sein müssen, ohne deren Vorarbeiten es ihm unmöglich gewesen wäre, das Neue hinzuzuentdecken. Der Ort zu drei oder vier Geraden sei aber folgender: Sind drei (vier) Gerade der Lage nach gegeben, und zieht man nach ihnen hin von einem gegebenen Punkte aus Gerade unter gegebenen Winkeln, ist alsdann das Verhältnis zwischen dem Rechtecke aus zwei der Verbindungsgeraden zu dem Quadrate der dritten (dem Rechtecke aus den beiden anderen) ein für allemal dasselbe, so liegt der Ausgangspunkt der Verbindungsgeraden auf einem Kegelschnitte[2]). Das ist alles, was aus alten Quellen bekannt ist. Wenn man nun versucht hat[3]), jenes Ortsproblem unter Zugrundelegung des III. Buches des Apollonius vollständig zu erledigen, so kann man in diesem Wiederherstellungsversuche die ganze geometrische Begabung seines Verfassers bewundern, aber ein geschichtliches Ergebnis ist es darum keineswegs.

Waren die drei ersten Bücher dem Eudemus gewidmet, so beginnt das IV. Buch mit einem Sendschreiben an Attalus, in welchem der Tod jenes Freundes beklagt, nebenbei aber auch der Inhalt des beigefügten Buches kurz dahin bezeichnet wird, es beschäftige sich mit der Frage, wieviele Punkte Kegelschnitte mit Kreisperipherien und mit anderen Kegelschnitten gemein haben können, ohne ganz und gar zusammenzufallen. Apollonius weiß dabei sehr wohl eine Berührung von einer Durchschneidung zu unterscheiden. Er hebt z. B. hervor, daß 2 Kegelschnitte 4 Durchschnittspunkte haben können, oder 2 Durchschnittspunkte und 1 Berührungspunkt oder 2 Berührungspunkte; ferner daß 2 Parabeln nur 1 Berührungspunkt haben können, ebenso Parabel und Hyperbel, wenn die Parabel die äußere Kurve ist, ebenso Parabel und Ellipse, wenn die Ellipse die äußere Kurve ist usw.

Es ist einleuchtend, daß die Sätze dieses IV. Buches für die Griechen eine viel höhere Bedeutung hatten als für neuere Mathematiker. Waren es doch gerade die Durchschnittspunkte der Kurven, deren zum Zwecke der Würfelverdoppelung notwendige Ermittelung die Kurven selbst hatten untersuchen oder gar erfinden lassen. Die Methode, nach welcher Apollonius die Punkte bestimmt, welche zwei Kurven gemeinsam sind, kommt auf eine apagogische Beweisführung hinaus, die sich großenteils auf das Lemma des III. Buches bezüglich der harmonischen Teilung stützt. So mußte das IV. Buch der Form und dem ganzen Inhalte nach gleichmäßige Verbreitung mit den 3 ersten Büchern gewinnen, deren Abschluß es gewissermaßen für solche Mathematikstudierende bildete, welche von der damaligen höheren Mathematik gerade das in sich aufnehmen wollten, was bis zur Lösung der delischen Aufgabe, diese mit inbegriffen, notwendig war. Ja diese innere Zusammengehörigkeit engerer Art der 4 ersten Bücher bewährte sich geschichtlich auch dadurch, daß nur sie im griechischen Texte sich erhielten, während das V., VI. und VII. Buch erst in der Mitte des XVII. S. aus einer arabischen Übersetzung bekannt wurden, das VIII. Buch sogar als ganz verloren wird betrachtet werden müssen.

[1]) Apollonius (ed. Heiberg) I, 4 lin. 13—17. [2]) Pappus (ed. Hultsch) II, 676—678. [3]) Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthume, siebenter und achter Abschnitt.

Das V. Buch läßt die vorhergehenden weit hinter sich. Apollonius erhebt sich bewußtermaßen hoch über seine Zeit, indem er Sätze über die längsten und kürzesten Linien, die von einem Punkte an den Umfang eines Kegelschnittes gezogen werden können, hier vereinigt. Es hätten, so erklärt Apollonius in einleitenden an Attalus gerichteten Worten, Mathematiker, welche vor ihm und zu seiner Zeit lebten, die Lehre von den kürzesten Linien gleichfalls behandelt, aber ihre Behandlungsweise muß nach Inhalt und Zweck eine andere als die des V. Buches der Kegelschnitte gewesen sein. Dem Inhalte nach begnügten sie sich mit einer geringeren Anzahl von Sätzen, und ihren Zweck fanden sie in dem Diorismus zu gestellten Aufgaben. Wir haben bei Euklid, bei Archimed Beispiele solcher Maximal- und Minimalwerte auftreten sehen, und die geringste Überlegung führt zum Bewußtsein, daß fast jeder Diorismus neben die Bedingung, unter welcher eine Aufgabe gelöst werden kann, den Grenzwert stellen wird, bis zu welchem eine in der Aufgabe vorkommende Größe wachsen oder abnehmen darf, ohne die Ausführbarkeit zu gefährden. Aufgaben größter und kleinster Werte mußten also vorkommen und wurden gelöst, ohne daß man darüber sich klar gewesen wäre, daß man hier eine eigenartige, auch außer ihrer zum Diorismus führenden Wirkung bedeutsame Gattung von Fragen behandelte. Apollonius dagegen schließt jene Einleitung zum V. Buche mit den Worten: „Das so Behandelte ist für die dieser Wissenschaft Beflissenen besonders notwendig, sowohl zur Einteilung und zum Diorismus, als zur Konstruktion der Aufgaben, abgesehen davon, daß dieser Gegenstand zu den Dingen gehört, welche würdig sind, um ihrer selbst willen betrachtet zu werden.“ Die Art vollends, in welcher Apollonius Einzelfälle dieses Gebietes unterscheidet und durch deren Zusammenfassung die Gesamtheit der Möglichkeiten erschöpft, die merkwürdige Verschlungenheit, man kann fast sagen Unnatürlichkeit der Beweise sind bewunderungswürdig nicht minder als wunderlich. Man kann kaum umhin zu argwohnen, was zu glauben man doch nicht wagen darf, daß Apollonius irgend geheime Methoden besaß, um diejenigen Sätze zu entdecken, deren künstliche Beweise er erst nachträglich aufsuchte. Was Apollonius aus der Lehre vom Größten und Kleinsten kennt, das sind, wie gesagt, insbesondere die längsten und kürzesten Linien, welche aus irgend einem Punkte der Ebene nach einem Kegelschnitte gezogen werden können, Linien, welche Apollonius zuerst für die Fälle bestimmt, in denen der gegebene Punkt auf der Achse liegt, und die Konstruktion durch Abschnitte erfolgen kann, die selbst auf der Achse des Kegelschnittes auftreten. Dann folgt eine Reihe von Sätzen, die etwa mit dem modernen Begriffe der Subnormalen sich beschäftigen. Die Konstanz dieser Strecke bei der Parabel wird bewiesen. Später gelangt Apollonius zu dem Nachweise, daß die am Anfange des Buches besprochenen größten und kleinsten Linien Normallinien zum Kegelschnitte sind, daß also auch die Aufgabe im Früheren zur Lösung vorbereitet ist: von irgend einem Punkte einer Ebene Normalen zu einem in der Ebene befindlichen Kegelschnitte zu zeichnen. Er geht an die Aufgabe selbst heran und findet eine Konstruktion, bei welcher von Durchschnitten mit Hyperbeln Gebrauch gemacht ist. Indem er nun sich bewußt wird, daß in der Zahl der Senkrechten, welche von einem Punkte aus nach einem Kegelschnitte gezogen werden können, keine Willkür herrscht, daß dieselbe vielmehr einesteils von der Art des Kegelschnittes, andernteils von der Lage des gegebenen Ausgangspunktes abhängt, findet er, daß in dieser Beziehung gewisse Punkte eine Ausnahmestellung einnehmen. Diese Punkte, aus welchen man nach dem gegenüberliegenden Teil des Kegelschnittes nur eine Normale ziehen kann, sind die Krümmungsmittelpunkte, deren Vorhandensein somit Apollonius bekannt war, so fremd ihm der Begriff der Krümmung geblieben ist. Möglicherweise ist es sogar nicht zu weit gegangen, wenn man annimmt, Apollonius habe die stetige Aufeinanderfolge der Krümmungsmittelpunkte geahnt, d. h. jene Kurve geahnt, wenn auch nicht untersucht, welche wegen anderer Eigenschaften den Namen der Evolute erhalten hat.

Das VI. Buch handelt von gleichen und ähnlichen Kegelschnitten, sofern dieselben auf geraden einander ähnlichen Kegeln auftreten. Am Schlusse wird sogar die Aufgabe behandelt, durch einen gegebenen Kegel eine Schnittfläche zu legen, welche eine gleichfalls gegebene Ellipse erzeugen soll.

Zwischen dem VII. und dem VIII. Buche scheint wieder ein engerer Zusammenhang stattgefunden zu haben, wie uns Apollonius

selbst versichert. In seiner Zuschrift sagt er, das VII. Buch beschäftige sich mit Sätzen, welche zu Bestimmungen führen, das VIII. Buch enthalte wirklich bestimmte Aufgaben über Kegelschnitte. Auch aus Pappus läßt sich eine solche Zusammengehörigkeit der beiden Bücher folgern. Derselbe teilt nämlich eine ziemlich beträchtliche Zahl von Lemmen zu den Kegelschnitten des Apollonius mit. Die Lemmen zu allen übrigen Büchern sind nach den Büchern gesondert; nur die Lemmen zum VII. und VIII. Buche sind vereinigt[1]). Auf diese Grundlage hin hat man sogar eine Wiederherstellung des verlorenen VIII. Buches versucht[2]), welche indessen doch zu unsicher scheint, um näher besprochen zu werden. Wir begnügen uns mit der Bezeichnung einiger interessanten Theorien aus dem erhaltenen VII. Buche. In ihm finden sich die Sätze über komplementäre Sehnen, welche konjugierten Durchmessern parallel laufen, in ihm die Sätze über die konstante Summe der Quadrate konjugierter Durchmesser, in ihm die Entwicklung des Flächenraumes jener Parallelogramme, deren zwei aneinanderstoßende Seiten die Hälften zweier konjugierter Durchmesser sind. Auch diese Sätze, begreiflicherweise geometrisch und nicht durch Rechnung abgeleitet, erfordern bei Apollonius die Unterscheidung zahlreicher Einzelfälle, bei welcher er wiederholt die Gewandtheit an den Tag legt, welche man schon in den früheren Büchern bewunderte.

Dieses in Kürze der Inhalt des merkwürdigen Werkes, wobei wir uns gegen die verlockende Versuchung, noch mehr hineinzulesen als Apollonius gesagt hat, zu wappnen gesucht haben. Auch der von uns angegebene nackte Inhalt ist sehr wohl geeignet, unsere Neugier anzuregen, inwieweit derselbe Mathematiker seinen erfinderischen Geist auch noch anderen Gebieten unserer Wissenschaft zuwandte. Leider können wir diese Neugier nicht vollauf befriedigen. Wir wissen von solchen anderen Arbeiten nur eben genug, um die Vielseitigkeit des Apollonius zu ahnen, aber bei weitem nicht so viel, um den Wert der Untersuchungen abschätzen zu können, deren Titel nur bei Pappus[3]) mehrenteils sich erhalten haben, und die Vermutung zu einer wahrscheinlichen machen, daß Anwendungen der Kegelschnitte auf bestimmte geometrische Aufgaben in denselben behandelt wurden. Die Titel dieser verloren gegangenen Schriften sind: Berührungen, περὶ ἐπαφῶν *(de tactionibus)*; ebene Örter, ἐπίπεδοι τόποι *(loci plani)*; Neigungen, περὶ νεύσεων *(de inclinationibus)*; Raumschnitt, περὶ

[1]) Pappus VII, 298—311, (ed. Hultsch) 990—1004. [2]) Halley S. 137 bis 169 der zweiten, mit dem V. Buche anfangenden, Abteilung seiner Ausgabe der Kegelschnitte. [3]) Pappus VII, *Prooemium*.

χωρίου ἀποτομῆς (sectio spatii); bestimmter Schnitt, *περὶ διωρισμένης τομῆς (sectio determinata)*. Hypsikles führt außerdem, wie wir im nächsten Kapitel zu besprechen haben, eine Schrift des Apollonius über die in dieselbe Kugel eingeschriebenen Dodekaeder und Ikosaeder an, Proklus eine *περὶ τοῦ κοχλίου*[1]) von gänzlich unbekanntem Inhalte und ein Schriftsteller, den wir im 24. Kapitel als Verfasser einer Schrift über Brennspiegel kennen lernen werden, nennt eine Abhandlung des Apollonius gleichen Titels[2]): Über Brennspiegel, *περὶ πυρίων*. Die Bedeutung einer solchen Schrift für die Geschichte der Geometrie ist nicht zu unterschätzen. Wir sahen (S. 339), daß Apollonius nur von den Brennpunkten derjenigen Kurven handelte, welche solche paarweise besitzen. Daß auch die Parabel einen Brennpunkt habe, konnte nicht wohl früher bemerkt werden, als bis man einer halben Ellipse, einer halben Hyperbel mit ihrem Brennpunkte ein gewisses Interesse abgewonnen hatte, und das war vielleicht bei Gelegenheit optischer Untersuchungen, d. h. eben in Abhandlungen über Brennspiegel. Damit soll freilich weder ausgesprochen, noch schlechtweg geleugnet werden, daß Apollonius bereits diesen Fortschritt vollzog. Gewiß ist vielmehr fürs erste nur, daß Pappus[3]) gegen Ende des III. nachchristlichen Jahrhunderts den Brennpunkt der Parabel kannte.

Nur eine einzige Schrift, die zwei Bücher vom Verhältnisschnitt, *περὶ λόγου ἀποτομῆς (de sectione rationis)* ist in arabischer Sprache der Neuzeit überblieben und aus dieser übersetzt worden[4]). Die Aufgabe des Verhältnisschnittes ist folgende: Es sind zwei unbegrenzte Gerade in derselben Ebene der Lage nach gegeben, entweder gegenseitig parallel oder einander schneidend, und in jeder derselben ist ein Punkt gegeben, auch ist ein Verhältnis und überdies ein Punkt außerhalb der Linien gegeben; man soll durch den gegebenen Punkt eine Gerade ziehen, welche von den der Lage nach gegebenen Geraden Stücke abschneide, deren Verhältnis dem gegebenen gleich sei. Man erkennt leicht, daß diese Aufgabe durch einen großen Reichtum an Fällen sich auszeichnet, je nach der Lage des Punktes außerhalb der beiden Geraden zu diesen Geraden selbst und zu der

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 105. [2]) Vgl. die Zeitschrift Hermes, Bd. XVI, S. 271—72. [3]) Pappus VII, 318 (ed. Hultsch pag. 1012, lin. 24 sqq.). [4]) Edw. Bernard fand die ziemlich verderbte Handschrift am Ende des XVII. S. und begann dieselbe ins Lateinische zu übersetzen. Als er kaum den zehnten Teil bewältigt hatte, gab er die Arbeit auf. Nun vollendete der des Arabischen vorher unkundige Halley die Übersetzung, des von Bernard hinterlassenen Bruchstückes als Grammatik und Wörterbuch sich bedienend. Halleys Ausgabe von 1706; eine deutsche Ausgabe von Aug. Richter. Elbing 1836.

durch die beiden auf den Geraden gegebenen Punkten gezogenen Transversalen, und ferner je nach der Richtung, in welcher jene in Verhältnis tretenden Stücke von den gegebenen Punkten aus liegen sollen. Das ist dem geometrischen Charakter des Apollonius so recht angemessen.

Wir nannten oben eine ganze Reihe von Schriften als verloren, ohne daß man erheblich mehr als deren Titel kenne. Bei dem Raumschnitte war die Aufgabe dahin gestellt, daß während eben dieselben Geraden und derselbe Punkt wie beim Verhältnisschnitte gegeben waren, die zu ziehende Gerade Stücke abschneiden mußte, welche ein der Fläche nach gegebenes Rechteck bildeten[1]). Die allgemeinste Aufgabe der Neigungen[2]), von welcher Apollonius die leichteren Fälle behandelte, bestand darin: zwischen zwei der Art und der Lage nach gegebenen Linien eine gegebene Strecke so einzuzeichnen, daß sie verlängert durch einen gegebenen Punkt ging. Eine geometrische Auflösung dieser Aufgabe ist mittels Anwendung von Kegelschnitten möglich. Ihr Vorkommen bei Aristoteles, dem die Kegelschnittlehre sicherlich noch fremd war, führt zur Vermutung, man habe die Aufgabe ursprünglich versuchsweise durch Bewegungsgeometrie gelöst[3]). In den Berührungen war die sogenannte Berührungsaufgabe des Apollonius behandelt, d. h. die Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, der drei Bedingungen genüge, deren jede darin bestehen kann, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, oder eine gegebene Gerade, oder einen gegebenen Kreis zu berühren[4]). Aus der Schrift von den Berührungen kennen wir ferner möglicherweise eine Tatsache, welche interessant genug ist, da sie das, was wir früher (S. 249 und 256) von Spuren kombinatorischer Betrachtungen bei griechischen Schriftstellern anmerken durften, zu ergänzen geeignet ist. Bei der über den eigentlichen Urheber herrschenden Unsicherheit ziehen wir indessen vor, den Gegenstand im 22. Kapitel bei Pappus zur Rede zu bringen.

Auch dem rechnenden Teile der Mathematik hat Apollonius, wie wir durch Eutokius wissen, seine Aufmerksamkeit zugewandt. Eutokius sagt uns nämlich in dem mehrfach bereits benutzten Kommentare zur archimedischen Kreismessung: Soviel in meinen Kräften stand, habe ich nun die von Archimedes angegebenen Zahlen einigermaßen erläutert. Wissenswert ist aber noch, daß auch Apollonius von Pergä in seinem Okytokion dasselbe durch andere Zahlen be-

[1]) Pappus VII ed. Hultsch p. 640. [2]) Ebenda p. 670. [3]) So die scharfsinnige Vermutung von Oppermann. Vgl. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum S. 252 Note 1 und Heiberg in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XVIII, 16. [4]) Pappus VII ed. Hultsch p. 611.

wiesen hat, wodurch er sich der Sache noch mehr näherte"[1]). Wir haben hier die Lesart *ὠκυτόκιον* aufgenommen, welche durch zwei Pariser Handschriften verbürgt auffallend genug lange Zeit durch das sprachlich ganz rätselhafte Wort *ὠκυτόβοον* verdrängt war. Vollständigen Einblick in die Art, wie Apollonius seine Kreismessung vollzog, die noch genauer als die des Archimed gewesen sein muß, erhalten wir freilich auch durch den Namen Okytokion keineswegs. Dem Wortlaute nach übersetzt sich dieser Titel als Mittel zur Schnellgeburt, es handelte sich also höchst wahrscheinlich um raschere Rechnungsverfahren, aber wie dieselben zu dem oben genannten Ziele führten, darüber sind wir doch nicht besser aufgeklärt. Die Mutmaßung[2]), Apollonius habe den Näherungswert $\pi = 3{,}1416$ herausgerechnet, der, wie wir im 30. Kapitel sehen werden, in Indien bekannt war, schwebt ziemlich in der Luft.

Eine dem gewöhnlichen griechischen Verfahren gegenüber einfachere und dadurch abgekürzte Multiplikation des Apollonius, welche daher möglicherweise einen Abschnitt des Okytokion bildete, kennen wir aus Pappus. In dem auf uns gekommenen Bruchstücke des zweiten Buches seiner Sammlung[3]) berichtet Pappus von zwei zusammenhängenden, aber doch begrifflich zu trennenden Gegenständen.

Erstens entnehmen wir seinem Berichte, daß Apollonius in ähnlicher Weise wie Archimed die Zahlen in Gruppen zu teilen wußte, welche eine leichtere Aussprache und zugleich eine größere Übersichtlichkeit gewährten, als sie ohne Gruppierung zu erreichen gewesen wäre. Es ist derselbe Gedanke, der beiden Schriftstellern gleichmäßig vorschwebte, ja es ist eigentlich dieselbe Gruppierung, welche wir von beiden gelehrt finden. Denn wenn auch Archimed (S. 320) Oktaden bildete, während Apollonius sich mit Tetraden begnügte, so ist doch die Gleichheit des Prinzips dadurch hergestellt, daß zwei Tetraden des Apollonius nebeneinander geschrieben nach moderner Bezeichnung der Zahlen einer Oktade des Archimed gleichkommen, daß Archimed also nur eine höhere Gruppeneinheit annahm als Apollonius, aber eine Einheit, aus welcher die des Apollonius, als in jener enthalten, sich leicht ableiten ließ, ebenso wie es denkbar ist, daß beide Gruppierungen unabhängig voneinander aus dem

[1]) Archimedes (ed. Torelli) 216 und 452, die Varianten der Pariser Handschriften. Torelli benutzte sie in seiner Übersetzung. Neuerdings wurde dann durch Knoche und Maerker im Herforder Gymnasialprogramm für 1854 auf diese Lesart hingewiesen, sowie von M. Schmidt in Mützells Zeitschrift für die Gymnasialwissensch. 1855, S. 805. Vgl. auch Archimedes (ed. Heiberg) III, 300. [2]) Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne par Paul Tannery. Paris 1893, pag. 67—68. [3]) Pappus II (ed. Hultsch) 2—29.

griechischen Sprachgebrauche hervorgehen konnten, welchem die Myriade das letzte unzusammengesetzte Zahlwort, die Myriade der Myriaden das letzte einfach zusammengesetzte Zahlwort war. Die Namen, welche Apollonius für seine Tetraden benutzt, sind für die erste Tetrade, welche von 1 bis 9999 sich erstreckt, der Name der Einheiten; dann folgt die Tetrade der Myriaden; auf diese die der doppelten Myriaden, der dreifachen, vierfachen usw. Myriaden, bis zur $\varkappa$ten Myriade als allgemeine Bezeichnung einer beliebigen Höhe[1]), wobei wir freilich dahingestellt sein lassen müssen, ob diese an sich hochbedeutsame Allgemeinheit Apollonius oder dem Berichte des Pappus eigentümlich ist.

Mit diesen Zahlen werden nun zweitens Multiplikationen ausgeführt, und dabei ist die Vorschrift gegeben, die Multiplikation irgend welcher Zahlen auf die ihrer Wurzelzahlen, *πυθμένες*, zurückzuführen. Das Wort Pythmen findet sich in einer arithmetischen Bedeutung schon bei Platon[2]), ob aber genau in derselben wie bei Apollonius, ist bei dem vielbestrittenen Sinne der platonischen Stelle nicht zu erhärten. Bei Pappus[3]) bedeuten Pythmenes die kleinsten Zahlen, in welchen ein Verhältnis angegeben ist. Apollonius verstand unter der Wurzelzahl die Anzahl der Zehner oder der Hunderter, die in einer nur aus Zehnern, beziehungsweise nur aus Hundertern bestehenden Zahl enthalten sind. So ist 5 der Pythmen von 50 wie von 500, 7 der Pythmen von 70 wie von 700 usw. Wurzelzahlen von Tausendern, Zehntausendern usw. kommen wenigstens unter den miteinander zu vervielfachenden Zahlen nicht vor. Der Grund dafür, wie für das Hervorheben der anderen Pythmenes liegt in der uns bekannten griechischen alphabetischen Bezeichnung der Zahlen (S. 127). Die moderne Ziffernschrift läßt sofort 3 als die Wurzelzahl von 30, von 300, von 3000 erkennen. Ebenso war dem Griechen ein leicht ersichtlicher Zusammenhang zwischen γ und ,γ, nicht aber zwischen γ und λ, zwischen γ und τ geboten, letzterer mußte erst gezeigt werden. Vielleicht haben wir unseren Lesern durch die Wahl des Wortes zeigen einen Hinweis gegeben, wie der Gedanke an die Pythmenes bei einem Griechen entstehen konnte: nicht wenn er die schriftliche Aufzeichnung der Zahlen vor sich sah, wohl aber wenn er ihren Wortlaut hörte. Der Ähnlichklang von *τρεῖς, τριάκοντα, τριακόσιοι* sagte ihm, was an γ, λ, τ erst gezeigt werden mußte, und so glauben wir nicht irre zu gehen, wenn wir

[1]) Pappus (ed. Hultsch) 4. *διπλῆ μυρίας*; 6. *τριπλῆ μυρίας*; 20. *ἐννεαπλῆ μυρίας*; 18. *μυριάδες ὁμώνυμοι τῷ* $\varkappa$, für die $\varkappa$fache (nicht die 20fache) Myriade oder für 10 000 auf die $\varkappa$te Potenz. [2]) Platon, Staat VIII, 546 C *ὧν ἐπίτριτος πυθμήν*. [3]) Pappus III (ed. Hultsch) pag. 80.

in den Pythmenes eine Frucht des mündlichen Rechenunterrichtes, nicht schriftlicher Erörterung erblicken. Sei dem, wie da wolle, jedenfalls vollzog Apollonius die Multiplikation nunmehr an den Pythmenes, und die Ordnung des jedesmaligen Produktes wird aus der Anzahl der Faktoren unter besonderer Berücksichtigung, wie viele derselben Zehner, wie viele Hunderter waren, abgeleitet. Eine Unterscheidung von zahlreichen Einzelfällen, die dabei vorkommen, kann uns bei Apollonius am wenigsten überraschen; wir bemerken sie auch nur mit der ausgesprochenen Absicht gelegentlich wieder daran zu erinnern.

Endlich müssen wir noch einer Arbeit des Apollonius über Irrationalgrößen gedenken, von welcher schwache Spuren in einer arabischen Handschrift entdeckt worden sind[1]). Wir haben (S. 268—270) über das X. Buch der euklidischen Elemente und über die dort unterschiedenen Irrationalitäten, die Medialen, die Binomialen und die Apotomen berichtet. Zu diesem X. Buche hat ein griechischer Schriftsteller Erläuterungen geschrieben, deren Übersetzung in das Arabische aufgefunden worden ist. Wer der Verfasser war, darüber ist volle Bestimmtheit nicht vorhanden, wenngleich die Wahrscheinlichkeit dafür spricht, man habe es hier mit dem überliefertermaßen gleich dieser Übersetzung aus zwei Büchern bestehenden Kommentare zum X. Buche der Elemente von Vettius Valens, einem byzantinischen Astronomen aus dem II. S. n. Chr., zu tun. Dieser Kommentator erzählt, die Irrationalgrößen hätten ihren Ursprung in der Schule des Pythagoras gehabt. Theaetet habe, nach den Mitteilungen des Eudemus, die Lehre vervollkommnet, indem er Irrationalgrößen unterschied, die durch Multiplikation, durch Addition und durch Subtraktion untereinander verbunden eine verwickeltere Form besaßen. Euklid habe vollends Ordnung in den Gegenstand gebracht durch genaue Bestimmung und Scheidung der verschiedenen Gattungen der Irrationalitäten. Dieser Bericht stimmt soweit durchaus mit unseren aus anderen Quellen geschöpften Mitteilungen überein und bestätigt dieselben, wie andererseits ihm selbst dadurch eine um so größere Glaubwürdigkeit erwächst. Der Kommentator fährt fort: „Apollonius war es, welcher neben den geordneten (τεταγμένος des Proklus) Irrationalgrößen das Vorhandensein der ungeordneten (ἄτακτος) nachwies und durch genaue Methoden

[1]) Woepcke, *Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles d'après les indications tirées d'un manuscrit arabe* in den *Mémoires présentés à l'académie des sciences* XIV, 658—720. Paris 1856. Vgl. auch den Bericht von Chasles über diese Abhandlung in den Compt. Rend. XXXVII, 553—568 (17. Oktober 1853).

eine große Anzahl derselben herstellte." Jetzt folgt der eigentliche Kommentar, dem freilich die Klarheit, welche man von einem derartigen Werke zu fordern berechtigt ist, gar sehr abgeht. Selbst der Versuch aus ihm herauszulesen, worin die bedeutende Erweiterung bestand, welche Apollonius zu verdanken ist, mit anderen Worten, was man unter ungeordneten Irrationalgrößen zu verstehen habe, ist trotz allen aufgewandten Scharfsinnes nur Versuch geblieben und hat eine bloße Vermutung zutage gefördert. Eine Erweiterung meint man demgemäß, könne nach zwei Richtungen hin stattgefunden haben; es könne statt der aus zwei Teilen bestehenden Binomialen oder Apotomen eine additive, beziehungsweise subtraktive Verbindung von mehr als zwei Quadratwurzeln in Untersuchung genommen worden sein; es könne auch um Ausziehung von Wurzeln mit höheren Wurzelexponenten als 2 sich gehandelt haben, oder anders ausgesprochen, um die Einschaltung von $2, 3, \ldots n$ mittleren geometrischen Proportionalen zwischen zwei gegebenen Größen, d. h. um Aufgaben, von welchen das delische Problem den einfachsten Fall darstellt.

17. Kapitel.

Die Epigonen der großen Mathematiker.

In den fünf letzten Kapiteln haben wir uns mit den großen Mathematikern, welche das Jahrhundert von 300 bis 200 etwa durch ihre Tätigkeit erfüllten, bekannt zu machen gesucht. Zusammenfassende Übersichten, wie wir sie anderen Kapiteln wohl als Schluß dienen ließen, waren hier nicht zu geben Haben wir doch überhaupt auf das Notwendigste und Wichtigste uns beschränken müssen, so daß unsere ganze Darstellung gewissermaßen als die vielleicht vermißte Zusammenfassung zu gelten hat. Nur das sei noch besonders hervorgehoben, daß Euklid, Archimed, Eratosthenes und Apollonius die Mathematik auf eine Stufe förderten, von welcher aus mit den alten Hilfsmitteln, insbesondere ohne Erweiterung der Infinitesimalbetrachtungen zu einer allgemeinen Methode, was die Exhaustion nicht war, wenn sie es auch hätte sein können, ein Höhersteigen nicht möglich war. Zur Infinitesimalmethode, wie zur mathematischen Allgemeinheit überhaupt war der griechische Geist mit vereinzelten Ausnahmen, zu welchen vermutlich Apollonius gerechnet werden darf, nicht angetan. Das ist ein Erfahrungssatz, welcher wesentlich auf dem Fehlen allgemeiner Methoden beruht. War aber ohne sie ein weiteres Steigen nicht möglich, so war der erreichte

Gipfel nach allen Richtungen hin gar bald durchforscht. Es blieb nur ein Abwärtsgehen und bei dem Abwärtsgehen ein Anhalten da und dort, ein Umsichschauen nach Einzelheiten übrig, an welchen man beim jähen Aufwärtsklimmen vorher vorübergeeilt war. Damit ist die Zeit gekennzeichnet, zu deren Betrachtung wir in diesem Kapitel übergehen.

Die Elemente der Planimetrie waren erschöpft. Sie blieben, was Euklid aus ihnen gemacht hatte, abgesehen von Zutaten, die der Lehre von den größten und kleinsten Werten entstammten. Auch die Lehre von den Kegelschnitten konnte nach Apollonius eine wesentliche Ergänzung nicht finden. In der Stereometrie blieb dagegen nach Euklid und selbst nach Archimed noch manches zu tun. Am meisten war von theoretisch Neuem in der Lehre von den von Kegelschnitten verschiedenen Kurven zu finden, einem Gebiete, zu dessen Bearbeitung Archimeds Spiralen entschieden aneifern mußten. Und endlich war die rechnende Geometrie ein Gegenstand, an welchem Archimeds Kreisrechnung auch verwöhnten Geistern Geschmack beigebracht haben mochte. Das sind die Felder, auf denen die Epigonen sich tummelten, deren Bewegungen wir uns zu vergegenwärtigen haben.

Die meisten Schriftsteller freilich, die wir hier nennen werden, sind ihrer Lebenszeit nach höchst unbestimmt. Von einigen ist es, wie wir selbst erklären, zweifelhaft, ob sie mit Recht gerade in diesem Kapitel zur Rede kommen. Am sichersten ist dieses wohl für Nikomedes und Diokles anzunehmen, die Erfinder der Konchoide und der Cissoide, mithin zweier Kurven, deren Namen Geminus um das Jahr 70 v. Chr. kannte[1]), die also zu dieser Zeit jedenfalls vorhanden waren, während andererseits Nikomedes nach dem Berichte des Eutokius[2]) sich im Vergleiche zu Eratosthenes mit seiner Erfindung brüstete, also sicherlich auch nicht früher als um das Jahr 200 etwa gelebt haben kann.

Die Konchoide oder Muschellinie des Nikomedes ist der geometrische Ort eines Punktes, dessen geradlinige Verbindung mit einem gegebenen Punkte durch eine gleichfalls gegebene Gerade so geschnitten wird, daß das Stück zwischen der Schneidenden und dem Orte eine gegebene Länge besitzt. Je nach dem Größenverhältnisse des Abstandes des gegebenen Punktes von der gegebenen Geraden und der Konchoide besitzt letztere drei verschiedene Formen, doch ist kaum anzunehmen, daß die Griechen diese Formen kannten, deren wesentlichste Verschiedenheit auf dem Zweige der Kurve beruht, welcher von der festen Schneidenden aus gesehen auf derselben Seite

---

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 177. [2]) Archimedes (ed. Heiberg) III, 114.

wie der feste Punkt liegt, und von diesem Zweige ist überhaupt nicht die Rede. Allerdings wird, falls diese Meinung als richtig gilt, vollends unverständlich, was Pappus in seinem IV. Buche die zweite, dritte und vierte Konchoide genannt haben mag, die zu anderen Zwecken als die erste benutzt worden seien[1]). Nikomedes nannte, wie wir durch Eutokius und Pappus wissen, den festen Punkt Pol, πόλον. Er erfand auch, wie beide Berichterstatter uns melden, eine Vorrichtung zur Zeichnung der Konchoide, die aus der Figur sofort verständlich ist (Fig. 59). Sie bestand aus drei miteinander verbundenen Linealen. Zwei derselben waren senkrecht zueinander fest vereinigt, und während das eine fast seiner ganzen Länge nach durch eine Ritze durchbrochen war, trug das andere ein kleines rundes Zäpfchen. Das durchbrochene Lineal stellte die feste Gerade, das Zäpfchen auf dem anderen stellte den Pol der Muschellinie vor. Das dritte Lineal trug unweit des spitzen Endes ein Zäpfchen ähnlich dem Pole, etwas weiter davon entfernt eine Ritze ähnlich der auf der festen Geraden; die Entfernung des Zäpfchens von der Spitze stellte den gleichbleibenden Abstand vor. Offenbar mußte nun die Spitze dieses dritten Lineals eine Muschellinie beschreiben, wenn das Lineal selbst alle möglichen Lagen annahm, deren es fähig war, während sein Zäpfchen in der Ritze der festen Geraden sich befand und seine Ritze das als Pol dienende Zäpfchen einschloß.

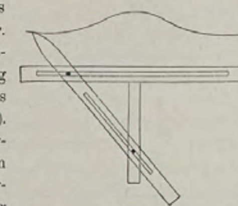
Fig. 59.

Nikomedes hat gezeigt: 1. daß die Muschellinie der festen Geraden sich mehr und mehr nähert[2]); 2. daß jede zwischen der festen Geraden und der Muschellinie gezogene Gerade die Muschellinie schneiden muß; 3. daß mittels der Muschellinie die Aufgabe der Würfelverdoppelung gelöst werden kann.

Den Ideengang seiner Auflösung und seines Beweises lassen wir hier folgen, wobei wir nur diejenigen geringfügigen Abänderungen vornehmen, welche notwendig sind, um statt eines Rechnens mit Proportionen das uns geläufigere Rechnen mit Gleichungen einzuführen. Aus den Strecken $\alpha\lambda = 2a$ und $\alpha\beta = 2b$ wird (Fig. 60) das Rechteck $\alpha\beta\gamma\lambda$ gebildet und $\beta\gamma$ um weitere $2a$ nach η verlängert. Außerdem wird in der Mitte ε von $\beta\gamma$ die $\varepsilon\zeta$ senkrecht zu $\beta\gamma$ errichtet und

---

[1]) Pappus (ed. Hultsch) 244. [2]) Proklus (ed. Friedlein) 177 ist geradezu von der Asymptote der Konchoide die Rede.

deren Endpunkt ζ durch $\gamma\zeta = \beta\delta = b$ bestimmt. Somit ist auch $\eta\zeta$ gegeben, und ihr parallel wird durch γ die $\gamma\theta$ gezogen Diese letztere wird als feste Gerade, ζ als Pol, b als Abstand benutzt und die Muschellinie konstruiert, welche die Verlängerung von $\beta\gamma$ in $\varkappa$ schneidet, d. h. welche $\theta\varkappa = b$ werden läßt. Verbindet man nun endlich $\varkappa$ mit λ und verlängert $\varkappa\lambda$ bis zum Durchschnitte μ mit der verlängerten $\alpha\beta$, setzt man dabei

$$\alpha\mu = x,\ \gamma\varkappa = y,$$

so ist

$$2a : x = x : y = y : 2b,$$

und die Aufgabe, zwischen $2a$ und $2b$ zwei mittlere Proportionalen einzuschalten, ist gelöst. Aus den Dreiecken $\alpha\lambda\mu$, $\gamma\varkappa\lambda$ folgt nämlich $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{y}$ und $x = \frac{4a \cdot b}{y} = \frac{\eta\gamma \cdot \theta\varkappa}{\gamma\varkappa}$. Daraus erkennt man $\zeta\theta = x$ und folglich $\zeta\varkappa = x + b$. Nun ist $\varepsilon\zeta$ Kathete zweier rechtwinkliger Dreiecke $\gamma\zeta\varepsilon$ und $\varkappa\zeta\varepsilon$. Das erstere hat $\gamma\zeta = b$ als Hypotenuse, $\gamma\varepsilon = a$ als zweite Kathete. Das zweite hat $\varkappa\zeta = x + b$ als Hypotenuse, $\varkappa\varepsilon = y + a$ als zweite Kathete. Mithin ist $b^2 - a^2 = (x+b)^2 - (y+a)^2$ oder $x(x+2b) = y(y+2a)$ und $\frac{x}{y} = \frac{y+2a}{x+2b}$. Man kennt ferner denselben Bruch $\frac{y+2a}{x+2b} = \frac{\beta\varkappa}{\beta\mu} = \frac{\gamma\varkappa}{\gamma\lambda} = \frac{y}{2b}$ wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\beta\varkappa\mu$ und $\gamma\varkappa\lambda$. Man weiß also auch $\frac{x}{y} = \frac{y}{2b}$, $2bx = y^2$. Diese Gleichung abgezogen von dem vorher gefundenen $x(x+2b) = y(y+2a)$ läßt $x^2 = 2ay$ zum Reste, und die Umstellung der beiden Gleichungen $x^2 = 2ay$, $y^2 = 2bx$ in Proportionen liefert das verlangte $2a : x = x : y = y : 2b$. Auflösung und Beweis sind gleichmäßige Zeugnisse für den Scharfsinn des Erfinders, der schon um des oben beschriebenen Konchoidenzeichners willen einen rühmlichen Platz in der Geschichte der Mathematik verdient.

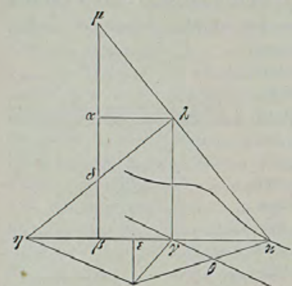

Fig. 60.

Der Zirkel, als Hilfsmittel geometrischen Zeichnens wurde von den Alten auf den **Neffen des Dädalus** zurückgeführt[1]), wohl denselben **Talus**, auf welchen schon (S. 163) für andere Erfindungen verwiesen worden ist, d. h. auf einen mythischen Ursprung. Die

[1]) **Ovid**, Metam. VIII, 247—49: Primus et ex uno duo ferrea brachia nodo
Vinxit, ut, aequali spatio distantibus illis,
Altera pars staret, pars altera duceret orbem.

Vorrichtungen des **Platon** und des **Eratosthenes** zur Würfelverdoppelung beruhen auf Geschicklichkeit des Benutzers, der versuchsweise gewisse Lagenverhältnisse der Teile der Apparate hervorbringen mußte. Etwaige Mittel die Kegelschnitte zu zeichnen sind, wenn **Menächmus** wirklich dergleichen besaß (S. 244), nicht zu unserer Kenntnis gelangt. Die Quadratrix, die Hippopede, die Spirale mechanisch zu zeichnen gab es kein Mittel. So ist die Muschellinie des Nikomedes neben der Geraden und dem Kreise die älteste Linie, von deren mechanischer Konstruktion in einem fortlaufenden Zuge wir genügenden Bericht besitzen.

Dieselbe Muschellinie hat auch zur Auflösung einer anderen Aufgabe, nämlich zur Dreiteilung des Winkels Anwendung gefunden. Soll man den Worten des Pappus Glauben schenken, so hätte dieser sich jene Anwendung zuzuschreiben[1]). Dagegen sagt Proklus ausdrücklich, Nikomedes habe mit Hilfe der Muschellinie jeden Winkel in drei gleiche Teile zerlegt[2]), und so glauben wir es gerechtfertigt hier von dieser Anwendung zu reden.

Wir wissen, daß Archimed (S. 300) die Dreiteilung des Winkels auf die Zeichnung einer Geraden von einem gegebenen Punkte aus zurückführte, welche einen Kreis und eine Gerade so schneiden sollte, daß die zwischen beiden Schnittpunkten liegende Strecke einer gegebenen gleich werde. Konnte man hier den Kreis durch noch eine Gerade ersetzen, so war die Aufgabe nur noch: von einem Punkte aus durch eine gegebene Gerade hindurch bis zum Durchschnitte mit einer zweiten gegebenen Geraden eine Gerade zu zeichnen, welche zwischen beiden Durchschnittspunkten einen bekannten Abstand zeige, und das gelingt mit Hilfe der Muschellinie, deren Pol der gegebene Punkt, deren feste Gerade die erste gegebene Gerade, deren gleichbleibender Abstand die gegebene Strecke ist. Pappus hat uns eine derartige Umformung überliefert[3]). Es sei (Fig. 61) $\alpha\beta\gamma$ der in drei gleiche Teile zu teilende spitze Winkel. Von α aus wird $\alpha\gamma$ senkrecht zu $\beta\gamma$ gezogen und das Rechteck $\alpha\gamma\beta\zeta$ vollendet. Die $\beta\varepsilon$ dritteilt nun den gegebenen Winkel, wenn die Strecke $\delta\varepsilon$ zwischen ihren Durchschnitten mit der $\alpha\gamma$ und der Verlängerung der $\zeta\alpha$ doppelt so groß ist wie $\alpha\beta$. Weil nämlich $\alpha\delta\varepsilon$ ein rechtwinkliges Dreieck, so wird,

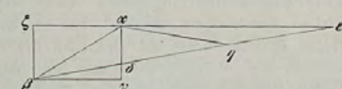

Fig. 61.

[1]) **Pappus** IV, 27, (ed. **Hultsch**) 246. [2]) **Proklus** (ed. **Friedlein**) 272.
[3]) **Pappus** IV, 38, (ed. **Hultsch**) 274.

wenn η der Mittelpunkt der Hypotenuse $\delta\varepsilon$ ist, $\frac{\delta\varepsilon}{2} = \delta\eta = \eta\varepsilon = \eta\alpha$ sein. Folglich sind zwei gleichschenklige Dreiecke $\alpha\beta\eta$ und $\alpha\eta\varepsilon$ in der Figur vorhanden. Da überdies $\sphericalangle\, \alpha\eta\beta$ Außenwinkel des Dreiecks $\alpha\eta\varepsilon$ ist, und $\beta\varepsilon$ als Transversale mit den Parallelen $\zeta\varepsilon$, $\beta\gamma$ gleiche Wechselwinkel bildet, so ist $\sphericalangle\, \alpha\beta\varepsilon = \alpha\eta\beta = \eta\varepsilon\alpha + \eta\alpha\varepsilon = 2\eta\varepsilon\alpha = 2\varepsilon\beta\gamma$, d. h. $\varepsilon\beta\gamma = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}$.

Ist die Annahme wirklich gerechtfertigt, daß diese Auflösung, oder eine ihr alsdann jedenfalls sehr ähnliche, bereits dem Nikomedes zuzuschreiben sei, so bietet es ein eigentümliches Interesse, daß hier die Aufgabe der Würfelverdoppelung und die der Dreiteilung des Winkels mit Hilfe derselben Kurve bewältigt werden, wie sie, modern ausgedrückt, beide auf Gleichungen dritten Grades sich zurückführen lassen. Sollte ein dunkles Gefühl der Zusammengehörigkeit beider Probleme bei den griechischen Mathematikern nach Archimed zu den Möglichkeiten gehören? Müssen wir doch auch eine ideelle Zusammengehörigkeit zwischen der allgemeinen Teilung des Kreisbogens und seiner Rektifikation zugestehen, welche beide, wie wir wissen, mittels der Quadratrix vollzogen wurden.

Der Zeit nach nur wenig von Nikomedes entfernt dürfen wir Diokles setzen, den gleichfalls oben genannten Erfinder der Cissoide oder Efeulinie. Er muß früher gelebt haben als Geminus, der diese seine Kurve neben der Muschellinie nennt; er muß aber auch später als Archimed angesetzt werden, mit dessen Aufgabe von der Durchschneidung einer Kugel durch eine Ebene zu gegebenem Verhältnisse der beiden Kugelabschnitte er sich beschäftigte in der Annahme, Archimed selbst habe sein auf diese Aufgabe bezügliches Versprechen nicht eingelöst[1]) (S. 309). Er hat die Aufgabe mit Hilfe zweier Kegelschnitte in seinem Werke περὶ πυρείων gelöst, aus welchem Eutokius sie entnahm[2]) und aus demselben Werke teilt der gleiche Berichterstatter die Definition der Cissoide und deren Anwendung zur Würfelverdoppelung uns mit[3]). Der Name jenes Werkes läßt den Inhalt erkennen. Das Wort πύριον bedeutet, wie wir (S. 344) gesehen haben, Brennspiegel, und in einem Buche über Brennspiegel konnte es auf die Größe sphärischer Abschnitte, sowie auf deren Vergrößerung unter Beibehaltung der Gestalt ankommen. Was über eine arabische Übersetzung des Werkes des Diokles in einer Handschrift des Escorial angegeben ist[4]), dürfte auf den Bericht des Eutokius sich beschränken[5]).

[1]) Archimed (ed. Heiberg) III, 152. [2]) Ebenda III, 188. [3]) Ebenda III, 78—80. [4]) Wenrich, *De auctorum Graecorum versionibus et commentariis Syriacis, Arabicis, Armenicis, Persicisque.* Leipzig 1842, pag. 197. [5]) Heiberg

Diokles läßt seine Cissoide in durchaus anderer Weise entstehen, als es gegenwärtig gebräuchlich ist. Man soll (Fig. 62) in einem Kreise zwei zueinander senkrechte Durchmesser $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ ziehen. Werden symmetrisch zu $\alpha\beta$ zwei Gerade $\eta\zeta$, $\varkappa\varepsilon$ senkrecht auf $\gamma\delta$ errichtet und δ mit dem Endpunkte ε der einen Senkrechten verbunden, so liegt der Durchschnittspunkt θ dieser Verbindungslinie mit der anderen Senkrechten, gleichwie der ähnlich ermittelte Punkt o usw. auf der Cissoide. Zugleich findet die fortlaufende Proportion statt $\gamma\eta : \eta\zeta = \eta\zeta : \eta\delta = \eta\delta : \eta\theta$.

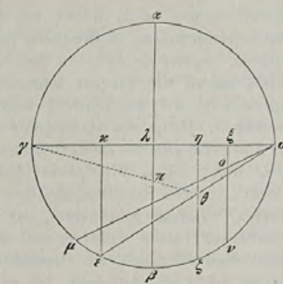

Fig. 62.

Der erste Teil dieser Proportion ist augenscheinlich richtig, weil $\eta\zeta$ als Senkrechte von einem Peripheriepunkt auf den Durchmesser das geometrische Mittel der Teile, in welche sie den Durchmesser teilt, ist. Weil auch $\varkappa\varepsilon$ eine solche Senkrechte ist, muß ebenso $\gamma\varkappa : \varkappa\varepsilon = \varkappa\varepsilon : \varkappa\delta$ sein. Ferner sind die Dreiecke $\varkappa\varepsilon\delta$, $\eta\theta\delta$ ähnlich und darum $\varkappa\varepsilon : \varkappa\delta = \eta\theta : \eta\delta$, folglich auch $\gamma\varkappa : \varkappa\varepsilon = \eta\theta : \eta\delta$ und nicht minder $\varkappa\varepsilon : \varkappa\gamma = \eta\delta : \eta\theta$. Berücksichtigt man endlich $\varkappa\varepsilon = \eta\zeta$, $\gamma\varkappa = \eta\delta$, so nimmt die letztgeschriebene Proportion die Form $\eta\zeta : \eta\delta = \eta\delta : \eta\theta$ an, und die zu Anfang behauptete fortlaufende Proportion ist nachgewiesen, d. h. zwischen $\gamma\eta$ und $\eta\theta$, die in der Figur senkrecht zueinander gezogen erscheinen, sind die $\eta\zeta$ und $\eta\delta$ als die beiden mittleren Proportionalen eingeschaltet.

Nun kann man auch zwischen irgend zwei Strecken a, b zwei mittlere Proportionalen einschalten. Man zeichnet einen beliebigen Kreis mit zugehöriger Cissoide. Man sucht auf dem vertikalen Durchmesser $\alpha\beta$ den Punkt π nach Maßgabe der Proportion $\gamma\lambda : \lambda\pi = a : b$ und zieht die $\gamma\pi$, welche bis zum Durchschnitte θ mit der Cissoide verlängert wird. Sofort zeigt sich, daß auch $\gamma\eta : \eta\theta = a : b$ ist. Es brauchen daher nur die Strecken $\eta\zeta$ und $\eta\delta$, welche zwischen $\gamma\eta$, $\eta\theta$ als mittlere Proportionalen bekannt geworden sind, in dem Verhältnisse $\gamma\eta : a$ verändert zu werden, um die Lösung der Aufgabe zu erhalten.

in Zeitschrift Math. Phys. XXVIII, Historisch-literarische Abteilung S. 128, Note.

Ein dritter Geometer der gleichen Zeit etwa dürfte Perseus gewesen sein. Wir werden ihn nicht leicht für älter als die alexandrinische Schule halten, weil Proklus, der seiner gedenkt, dieses wohl irgend bemerkt haben würde, um die Lücke in dem alten Mathematikerverzeichnisse, in welchem sein Name nicht vorkommt, auszufüllen. Später als zwischen 200 und 100 kann er aber auch nicht gelebt haben, wie wir aus folgendem Umstande entnehmen. Eine Spire war, wie wir (S. 242) besprochen haben, eine wulstartige Oberfläche. Heron von Alexandria definiert sie, wie wir damals sahen, als Umdrehungsfläche erzeugt durch Drehung eines Kreises um eine nicht durch seinen Mittelpunkt hindurchgehende Achse[1]) und setzt hinzu: „Aus den Schnitten derselben entstehen gewisse eigentümliche Kurven.“ Daraus geht hervor, daß zu Herons Zeit Schnitte jener Oberflächen bereits vorgenommen worden waren, und Geminus ergänzt diese Mitteilung zur Brauchbarkeit für unseren gegenwärtigen Zweck durch die Angabe[2]), die spirischen Schnitte seien von Perseus erdacht. Es ist bis zu einem gewissen Grade wahrscheinlich, daß damit jene Schnitte gemeint sind, die wir an der oben angeführten Stelle im Zusammenhange mit der Hippopede des Eudoxus beschrieben haben, Schnitte also, welche auf dem Wulste durch eine der Durchgangsachse parallele Ebene hervorgebracht wurden, wobei die Entfernungen des Schnittes und des Mittelpunktes des die Spire erzeugenden Kreises von der Drehungsachse die unterscheidenden Merkmale für die einzelnen spirischen Kurven lieferten. Bemerken wir noch, daß eine Untersuchung solcher Kurven der Zeit, in welche wir Perseus setzen, angemessen erscheint, so ist damit das Wenige erschöpft, was wir über diesen Schriftsteller sagen können, dessen Heimat und sonstige persönliche Verhältnisse uns genau ebenso unbekannt sind, wie die des Nikomedes, des Diokles.

Ebenso verhält es sich mit Zenodorus[3]), dem Verfasser eines höchst interessanten Buches über Figuren gleichen Umfanges. Die Grenzen, in welche sein Leben eingeschlossen werden kann, sind als feststehende obere Grenze die Zeit des Archimed, dessen Name

[1]) Heron, Definit. 98 (ed. Hultsch) 27, bestätigt durch Proklus (ed. Friedlein) 119. [2]) Proklus (ed. Friedlein) 111—112. [3]) Vgl. Nokk, Programm des Freiburger Lyceums von 1860 und unsere Besprechung des II. Bandes des Pappus (ed. Hultsch) in der Zeitschr. Math. Phys. XXII (1877), Histor.-literar. Abtlg. 173—174. Eine Verwechslung des Zenodorus mit einem bei Proklus genannten Zenodotus, welche, so lange die Friedleinsche Proklusausgabe noch nicht vorhanden war, zu entschuldigen gewesen sein dürfte, veranlaßte uns früher zu gegenwärtig ganz unhaltbaren Zeitbestimmungen für Zenodorus.

bei ihm vorkommt, als mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit anzugebende untere Grenze die Zeit des Quintilian, der von den Dingen redet, welche in der Abhandlung des Zenodorus vorkommen, wenn auch ohne ihn selbst zu nennen. Quintilian, mit welchem wir es im 26. Kapitel zu tun haben werden, lebte 35—95 n. Chr. Demgemäß würde die Tätigkeit des Zenodorus etwa zwischen 200 v. Chr. und 90 n. Chr. fallen. Man hat aber wohl mit Recht darauf aufmerksam gemacht, daß seine etwas breite Schreibart ihn als nicht allzuweit nach Euklid lebend betrachten lasse[1]), und demzufolge nehmen wir keinen Anstand ihn hier zu behandeln. Die Abhandlung des Zenodorus ist uns in mehrfacher Überlieferung erhalten. Einmal finden sich die Sätze über Figuren gleichen Umfanges ohne Angabe ihres Erfinders bei Pappus im V. Buche seiner mathematischen Sammlung[2]), zweitens stehen dieselben in dem Kommentare des Theon von Alexandria[3]) zum 1. Buche des ptolemäischen Almagestes. Bei Theon ist ausdrücklich Zenodorus als Verfasser der auszugsweise mitgeteilten Abhandlung genannt, und Proklus bestätigt mittelbar diese Namensnennung. Er sagt uns nämlich, das Viereck mit einspringendem Winkel heiße hohlwinklig, *κοιλογώνιον*, nach Zenodorus[4]), und dieses Wort in der angegebenen Bedeutung kommt wirklich in Theons Auszuge vor. Wir können drittens auf eine Abhandlung in griechischer Sprache über die Figuren gleichen Umfanges hinweisen, welche den Namen keines Verfassers als Überschrift trägt und in wesentlicher Übereinstimmung mit, wahrscheinlich in einem Abhängigkeitsverhältnisse zu Zenodorus steht[5]), von Nachbildungen in anderen Sprachen zu schweigen. Von den vierzehn Sätzen des Zenodorus, welche fast gleichlautend bei Pappus und bei Theon sich erhalten haben, mögen der 1., 2., 6., 7. und 14. hier einen Platz finden: 1. Unter regelmäßigen Vielecken von gleichem Umfange hat dasjenige den größeren Inhalt, welches mehr Winkel hat. 2. Der Kreis hat einen größeren Inhalt als jedes ihm isoperimetrische regelmäßige Vieleck. 6. Zwei ähnliche gleichschenklige Dreiecke auf ungleichen Grundlinien sind zusammen größer als zwei auf den nämlichen Grundlinien gleichschenklige Dreiecke zusammen, welche unter sich unähnlich sind, aber mit jenen ähnlichen gleichen Gesamtumfang haben. 7. Unter den isoperimetrischen n-Ecken hat das regelmäßige den größten Inhalt. 14. Unter den Kreisabschnitten, welche gleich große

[1]) Pappus (ed. Hultsch) 1190. [2]) Pappus V, pars 1 (ed. Hultsch), 308 sqq. [3]) *Théon d'Alexandrie* (ed. Halma. Paris 1821) 33 sqq. Zum besseren Vergleich mit der Wiedergabe durch Pappus auch abgedruckt bei Pappus (ed. Hultsch) 1190—1211. [4]) Proklus (ed. Friedlein) 165. [5]) Pappus (ed. Hultsch) 1138—1165.

Bogen haben, ist der Halbkreis der größte. Im Raume hat die Kugel bei gleicher Oberfläche den größten Inhalt. Die theoretische Bedeutsamkeit dieser Sätze, welche einen durchaus neuen geometrischen Gegenstand behandeln, der nach rückwärts nur an die Vielecke wachsender Seitenzahl in der Kreisrechnung des Archimed und an die Lehre von den größten und kleinsten Werten bei Apollonius anknüpft, liegt auf der Hand, und es ist nur um so mehr zu bedauern, daß unser Wissen von ihrem Erfinder so dürftig ist.

Wir nennen weiter immer noch auf bloße Wahrscheinlichkeitsgründe uns stützend im Jahrhunderte zwischen 200 und 100: Hypsikles von Alexandria[1]). Seine Leistungen liegen auf verschiedenen Gebieten. Die Handschriften des Euklid enthalten mehrfach nach den 13 Büchern der Elemente noch zwei Bücher stereometrischen Inhaltes, welche als XIV. und XV. Buch der Elemente, oder als die beiden Bücher des Hypsikles von den regelmäßigen Körpern benannt zu werden pflegen. Neuere Untersuchungen[2]) haben einen solchen Gegensatz im Wert und Inhalt der beiden Bücher aufgedeckt, daß sie notwendig verschiedenen Verfassern überwiesen werden müssen, und zwar das erste dem Hypsikles, das zweite einem mehrere Jahrhunderte n. Chr. lebenden Schriftsteller. Wir haben es demgemäß hier mit dem ersten Buch allein zu tun, welches aus folgenden sechs Sätzen über die regelmäßigen Körper[3]) besteht: 1. Die vom Mittelpunkt eines Kreises auf die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Fünfecks gefällte Senkrechte ist die halbe Summe des Halbmessers und der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks. 2. Einerlei Kreis faßt des in einerlei Kugel beschriebenen Dodekaeders fünfseitige und Ikosaeders dreiseitige Grenzfläche. 3. Die Oberfläche des Dodekaeders sowie des Ikosaeders sind beide dem 30fachen Rechtecke gleich, welches aus der Seite des Körpers und der aus dem Mittelpunkte einer Grenzfläche auf die Seite gefällten Senkrechten gebildet wird. 4. Die Oberfläche des Dodekaeders verhält sich zur Oberfläche des Ikosaeders, wie die Seite des Würfels zur Seite des Ikosaeders. 5. Die Seite des Würfels verhält sich zur Seite des Ikosaeders, wie sich die Hypotenusen zweier

[1]) W. Crönert (Sitzungsber. der Berliner Akad. 1900 S. 942—950) setzt die Lebenszeit des Hypsikles auf 150 bis 120. [2]) Der Erste, welcher die Verschiedenheit beider Bücher erörternd sie zwei verschiedenen Autoren beilegte, war Friedlein im Bulletino Boncompagni 1873, 493—529. Ihm folgte Th. H. Martin ebenda 1874, 263—266. [3]) Gewöhnlich werden 7 Sätze angenommen, aber der 7. Satz (Zwei nach stetiger Proportion geschnittene Gerade verhalten sich wie ihre größeren Abschnitte) ist offenbar kein Satz für sich, sondern nur Teil des Beweises des 6. Satzes.

rechtwinkligen Dreiecke verhalten, welche eine Kathete gemeinschaftlich und als andere Kathete den größeren beziehungsweise den kleineren Abschnitt besitzen, der entsteht, indem die gemeinschaftliche Kathete nach stetiger Proportion geschnitten ist. 6. Der Körper des Dodekaeders verhält sich zum Körper des Ikosaeders wie die Seite des Würfels zur Seite des Ikosaeders. Diese Sätze, deren Wortlaut wir bei dem 1., 3., 5. Satze etwas mundgerechter zu fassen uns erlaubt haben als in den gewöhnlichen Übersetzungen, bilden ein einheitliches Ganzes, welches seinem Verfasser wohl Ehre macht, und lassen nicht zu, daß man jenes andere früher gleichfalls Hypsikles zugeschriebene Buch damit in Verbindung setze, welches aus sieben Aufgaben besteht, die Konstruktion eines Tetraeders in einen Würfel, eines Oktaeders in ein Tetraeder, eines Oktaeders in einen Würfel, eines Würfels in ein Oktaeder, eines Dodekaeders in ein Ikosaeder zu vollziehen, die Zahl der Ecken und der Seiten, endlich die gegenseitigen Neigungen der Grenzflächen in den fünf regelmäßigen Körpern zu finden. Über den Verfasser des ersten Buches gibt dessen Einleitung einige Auskunft. Ihr Wortlaut ist[1]):

„Basylides von Tyrus, mein lieber Protarch, kam einst nach Alexandria, war an meinen Vater wegen beider gemeinschaftlicher Liebe zur Mathematik empfohlen, und brachte die meiste Zeit seines Aufenthaltes in dem Umgange mit ihm zu. Als sie eines Tages des Apollonius Schrift über Vergleichung des in einerlei Kugel beschriebenen Dodekaeders und Ikosaeders und deren Verhältnisse zueinander durchgingen, so schien ihnen der Vortrag des Apollonius nicht ganz richtig zu sein, und sie schrieben, wie mir mein Vater gesagt hat, ihre Verbesserungen nieder. Nach der Zeit fiel mir jedoch eine andere von Apollonius herausgegebene Schrift in die Hände, welche eine richtige Auflösung der erwähnten Aufgabe enthält, deren Untersuchung mir ein ausnehmendes Vergnügen gewährt hat. Das von Apollonius herausgegebene Werk kann jeder selbst nachsehen, da es überall zu haben ist, weil man es für eine sorgsame Arbeit hielt. Dasjenige aber, was ich nachher aufgesetzt habe, glaube ich Dir wegen Deiner vorzüglichen Einsicht in allen Wissenschaften, besonders aber in der Geometrie, als einem kundigen Beurteiler meines Vortrags zuerst vorlegen zu müssen: in der gewissen Erwartung, daß Du sowohl aus Freundschaft für meinen Vater, als aus Wohlwollen gegen mich, geneigt sein wirst meinem Versuche Deine Aufmerksamkeit zu schenken. Doch es ist Zeit, daß ich meine Vorrede schließe und zur Sache selbst komme.

[1]) Vgl. z. B. Euklids Elemente fünfzehn Bücher aus dem Griechischen übersetzt von Johann Friedrich Lorenz. Halle. S. 425—426.

Es war offenbar eine Jugendarbeit, welche Hypsikles mit diesen Worten dem noch lebenden Freunde seines Vaters widmete. Seine Mitteilungen geben uns Auskunft über eine sonst unbekannte Schrift des Apollonius und wurden in diesem Sinne von uns (S. 344) benutzt. Araber haben, so lange das Buch noch als von Euklid herrührend betrachtet wurde, aus den Anfangsworten herausgelesen, Euklid stamme aus Tyrus (S. 260). Man hat aber aus derselben Vorrede auch, wie uns scheint, richtige Folgerungen auf die Lebenszeit des Hypsikles gezogen[1]). Der Vater des Hypsikles, welcher eine Abhandlung des Apollonius noch nicht kannte, welche dem Sohne nachher bekannt war und zu dessen Lebzeiten „überall zu haben" war, muß ein älterer Zeitgenosse des Apollonius gewesen und gestorben sein, bevor dessen verbesserte zweite Abhandlung zur Veröffentlichung gelangte. Da nun Apollonius etwa 170 gestorben ist, so mag Hypsikles nicht vor dieser Zeit seine Abhandlung geschrieben haben, eine Zeitbestimmung, zu welcher uns gleich nachher noch eine kleine Bestätigung zugut kommen wird.

Eine zweite Abhandlung des Hypsikles, welche sich erhalten hat, ist das Buch von den Aufgängen der Gestirne, ἀναφορικός[2]). Auf den astronomischen Inhalt dieses äußerst dürftigen Werkchens von nur sechs Sätzen, auf dessen etwaige Verschlimmbesserung durch einen Astrologen haben wir nicht einzugehen, es sei denn um zu bemerken, daß die Methode desselben Berechtigung nur zu einer Zeit hatte, zu welcher trigonometrische Betrachtungsweisen noch nicht erdacht waren, und daß andererseits als wichtige Neuerung in den Aufgängen des Hypsikles die Einteilung des Kreisumfanges in 360 Grade benutzt ist. Autolykus, ein astronomischer Schriftsteller kurz vor Euklid (S. 293), hat diese Gradeinteilung noch nicht. Ebensowenig scheint sie Eratosthenes gekannt zu haben, wenn es richtig ist[3]), daß er sich eines so unbequemen Ausdruckes wie „$\frac{11}{83}$ des Kreisumfanges" bediente, während andererseits die Tatsache seiner vollzogenen Gradmessung (S. 328) uns wieder stutzig machen kann. Starb nun Eratosthenes um 194 und ist seine Benutzung jener unbequemen $\frac{11}{83}$ richtig auf das Jahr 220 bestimmt,

[1]) Vossius, *De scientiis mathematicis* pag. 328 (Amsterdam 1650). Bretschneider 182. Falsche Ansichten bei Fabricius, *Bibliotheca Graeca* (edit. Harless) IV, 20, bei Montucla, *Histoire de mathématiques* I, 315, bei Nesselmann, Algebra der Griechen 246 flgg. [2]) Des Hypsikles Schrift Anaphorikos ist im Osterprogramm 1888 des Gymnasiums zum heiligen Kreuz in Dresden von K. Manitius herausgegeben worden. [3]) Montucla, *Histoire de mathématiques* I, 304. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 130.

schrieb dann Hypsikles um 170, so ist die Zeit der Einführung der Gradeinteilung des Kreises, also mutmaßlich auch des davon untrennbaren babylonischen Sexagesimalsystems in Alexandria in sehr enge Grenzen gebracht. Von den sechs Sätzen des Anaphorikos sind die drei ersten arithmetischen Inhalts und rechtfertigen unser auch nur beiläufiges Verweilen bei dem Schriftchen. In moderner Aussprache sagen sie, daß in einer arithmetischen Reihe von gerader Gliederzahl die Summe der zweiten Hälfte der Glieder die der ersten Hälfte um ein Vielfaches des Quadrates der halben Gliederzahl übertreffe[1]), daß die Summe einer arithmetischen Reihe bei ungerader Gliederzahl gleich dem Produkte der Gliederzahl in das mittlere Glied, bei gerader Gliederzahl gleich dem Produkte der halben Gliederzahl in die Summe der beiden mittleren Glieder sei.

Bei so elementaren Kenntnissen blieb aber Hypsikles nicht stehen. Vielmehr war ihm die allgemeine Definition der Vieleckszahlen bekannt, welche er in die Worte kleidete: „Wenn beliebig viele Zahlen von der Einheit an von gleichem Unterschiede sind, und dieser Unterschied 1 ist, so ist die Summe eine dreieckige Zahl; ist der Unterschied 2, so ist die Summe eine viereckige Zahl, für 3 eine fünfeckige; die Anzahl ihrer Winkel ist um 2 größer als der Unterschied, und ihre Seiten sind der Anzahl der vorgelegten Zahlen gleich." So berichtet Diophant im 8. Satze seiner Schrift über die Polygonalzahlen, von welcher im 23. Kapitel die Rede sein wird. Diophant nennt als seine Quelle: Hypsikles ἐν ὅρῳ. Die Übersetzer dürften mit Recht diesen Ausdruck deutsch durch „in einer Definition" übertragen haben, da ὅρος neben der Bedeutung Grenze (lateinisch: *terminus* oder *limes*) oder Reihenglied unzweifelhaft auch die Bedeutung der Begrenzung eines Begriffes, d. h. einer Definition besitzt; so bei Euklid z. B. und schon vor diesem bei Platon heißen die Definitionen regelmäßig ὅροι, wobei vielleicht, wie bemerkt, an eine „Begrenzung der Begriffe" zu denken ist. Bei welcher Gelegenheit Hypsikles sich jener Definition der Vieleckszahlen bedient haben mag, wissen wir durchaus nicht.

Wir schließen dieses Kapitel mit der Nennung des einzigen Schriftstellers, für dessen Leben etwas genauere Angaben bekannt sind. Wir meinen Hipparch, der zwischen 161 und 126 v. Chr. astronomische Beobachtungen anstellte[2]). Er ist in Nicäa in Bithynien

[1]) Ist a das erste Glied, d die Differenz, $2n$ die Gliederzahl, so sind die beiden Summen $na + \frac{(3n-1)nd}{2}$ und $na + \frac{(n-1)nd}{2}$, deren Unterschied dn^2 ist. [2]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 45, Anmerkung 1. Das Werk

geboren. Er beobachtete auf der Insel Rhodos, vielleicht auch in Alexandria. Seine hervorragendsten Verdienste rühmt die Geschichte der Astronomie, welcher er als Schöpfer einer wissenschaftlichen Sternkunde gilt. Er war aber auch der Urheber eines Teiles der Wissenschaft, welche das Grenzgebiet zwischen Astronomie und Geometrie bildet, der Trigonometrie, und berechnete eine Sehnentafel[1]). Leider wissen wir von dieser Leistung nur durch Zitate des Heron von Alexandria, in welchen das Werk *περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν*, über die Geraden im Kreise, nicht aber dessen Verfasser genannt ist, und durch ein berichtigendes Wort eines späten Schriftstellers, des Theon von Alexandria, der um 365 schrieb, und können also dieses Kapitel griechischer Mathematik nicht in seinen Ursprüngen verfolgen. Wenn Hipparch in seinen erhaltenen Erläuterungen zu den Sternbeschreibungen des Eudoxus und Aratus erklärt, er habe sich graphischer Methoden bedient — *διὰ τῶν γραμμῶν* — so bot dieser Ausdruck zwar Anlaß zu geistreichen Vermutungen über die betreffenden Methoden[2]), welche aber gesicherter Stützen entbehrend später Vorhandenes zurückdatieren. Was dagegen Hipparch mittels seiner Sehnentafel leistete, ist besser verbürgt, da uns von einer Art von Triangulation berichtet wird, die er zur Berechnung der Oberfläche der bewohnten Erde anwandte, und da Polybius (203 bis 121), ein Zeitgenosse des Hipparch, die Möglichkeit erwähnt, die Höhe einer Mauer aus der Ferne zu messen[3]). Jedenfalls stimmt die Erfindung trigonometrischer Betrachtungen etwa 150 v. Chr. mit der Notwendigkeit überein, zu welcher wir weiter oben aus anderen Gründen gelangt waren, dem Anaphorikos des Hypsikles kein späteres Datum als das von 180 beilegen zu dürfen. Von Hipparchs Verdiensten um Einführung der geographischen Länge und Breite[4]) reden wir im nächsten Kapitel[5]).

Wir sind einem Hipparch „der zu den Arithmetikern gehörte" begegnet (S. 256), von welchem kombinatorische Berechnungen uns mitgeteilt wurden. Wir haben keinen Grund in diesem Schriftsteller, der nach Chrysippus (282—209) lebte, einen anderen als den Astronomen zu vermuten. Wir glauben ebenso auch an die Richtigkeit arabischer Angaben, denen zufolge Hipparch als Schriftsteller

des Hipparch: *In Arati Phaenomena Commentaria* hat K. Manitius mit deutscher Übersetzung herausgegeben (Leipzig 1894).

[1]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 111. [2]) Ad. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 10—14 (1900). [3]) G. Berger, Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen 3. Abteilg. S. 135 flgg. und 4. Abteilg. S. 29—31. [4]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 153. [5]) G. Berger, Die geographischen Fragmente des Hipparch. Leipzig 1870.

über quadratische Gleichungen aufgetreten wäre[1]). Eine Sehnentafel setzt zu ihrer Berechnung arithmetische wie algebraische Gewandtheit geradezu voraus.

Wir haben dieses Kapitel mit Nennung der Gebiete begonnen, auf welchen wir die Tätigkeit der Schriftsteller im Jahrhunderte von 200 bis 100 ungefähr entfaltet sehen würden. Unsere Darstellung ist mit unserer Ankündigung in Einklang geblieben. Nikomedes, Diokles, Perseus waren für uns die Männer, welche der Kurvenlehre sich widmeten. Zenodorus widmete den planimetrischen Lehren vom Größten und Kleinsten seine Kräfte. Hypsikles vervollkommnete die Stereometrie und führte durch das, was wir aus der Arithmetik von ihm wissen, den Beweis, daß auch dieser Teil der Mathematik in dem Jahrhunderte, welches auf das des Euklid folgte, nicht vernachlässigt wurde. Hipparch bestätigte uns in dieser letzten Überzeugung, der rechnende Astronom, welcher den naturgemäßen Übergang zu dem rechnenden Feldmesser bildet, der nunmehr unsere Aufmerksamkeit auf sich zieht.

18. Kapitel.

Heron von Alexandria.

In das erste vorchristliche Jahrhundert setzen wir Heron von Alexandria[2]). Die Form unserer Aussage läßt erkennen, daß wir in ihr keine allgemein als wahr angenommene Tatsache behaupten.

[1]) Vgl. *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmi* (ed. Woepcke) Paris 1851, *Préface* XI und *Journal Asiatique série* 5, T. V, pag. 251—253. Suter in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik VI, 54 (1892) und X, 71 und 213 Anmerkung 36 (1900) hält allerdings das Zitat für unrichtig und durch falsche Lesung entstanden. [2]) Über Heron vgl. Venturi, *Commentari sopra la storia e le teorie dell' ottica*, tomo I. Bologna 1814. Th. H. Martin, *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie etc.* im IV. Bande der *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des inscriptions et belles-lettres.* Série I. *Sujets divers d'érudition.* Paris 1854. W. Schmidt, Heron von Alexandria (in den Neuen Jahrbüchern f. d. klass. Altertum, Geschichte und deutsche Literatur. Leipzig 1899). K. Tittel, Heron und seine Fachgenossen (in Rhein. Museum für Philologie. Bd. LVI S. 404—415). Edm. Hoppe, Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandrien. Programmbeilage Nr. 815. Hamburg 1902. Rudolf Meier, *De Heronis aetate.* Leipzig 1905. Die geometrischen griechischen Texte herausgegeben von Hultsch (Berlin 1864), teilweise auch von Vincent in den *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale.* Tome XIX. Partie 2. (Paris 1858). Gesamtausgabe der Werke des Heron von W. Schmidt, L. Nix, Herm. Schöne in der Bibliotheca Teubneriana seit 1899 mit deutschen Übersetzungen.

Die Meinungen weichen vielmehr sehr erheblich voneinander ab, und man müßte, um allen gerecht zu werden, sich damit begnügen als mögliche Grenzen von Herons Wirksamkeit die Jahre 200 vor und 200 nach dem Beginne der christlichen Zeitrechnung anzugeben. Die Heimat des berühmten Mathematikers und Physikers wird von niemand angezweifelt. Sie geht aus der Überschrift mehrerer seiner uns erhaltenen Abhandlungen hervor, wird auch durch Pappus und durch einen Anonymus, der um das Jahr 938 in Byzanz lebte, bestätigt, welche beide von einem Heron von Alexandria zu reden wissen. Herons Lehrer war nach dem Berichte jenes Anonymus von Byzanz Ktesibius. Man hat eine Stütze dieses Berichtes darin gefunden, daß Proklus den Heron zugleich mit Ktesibius als Erfinder wunderbarer auf Luftdruck beruhender Vorrichtungen rühmt und auch darin, daß die beste Pariser Handschrift eines Buches des Heron die Überschrift führt „Über Anfertigung von Geschützen des Heron des Ktesibius" (*Ἥρωνος Κτησιβίου Βελοποιϊκά*). Aber hier setzen schon Zweifel ein, ob bei fehlendem Artikel *τοῦ* vor *Κτησιβίου* die Übersetzung „Schüler des Ktesibius" berechtigt sei, ob der Vermutung, jenes *τοῦ* sei bei Herstellung der Handschrift weggefallen, nicht das Bedenken im Wege stehe, dann könne irgend ein anderes Wort z. B. ἢ = oder weggefallen sein, wofür man sich auf eine jüngere Wiener Handschrift beruft, welche diesen Wortlaut aufzeigt. Endlich behauptet man, selbst wenn man Heron Schüler des Ktesibius nenne, sei damit nicht viel geholfen, weil das Zeitalter jenes Ktesibius keineswegs feststehe. Mit Gewißheit steht nur fest, daß Heron in einer seiner Schriften sich auf Philon von Byzanz beruft, während dieser Ktesibius nennt, so daß die Zeitfolge: Ktesibius, Philon, Heron gesichert ist, ohne damit den Zeitraum festzulegen, der zwischen den Trägern dieser Namen liegt[1]). Man hat also andere bei Heron auftretende Zitate zu suchen, welche seine Lebenszeit zu bestimmen sich eignen, und wir glauben dazu vorzugsweise eine mathematische Schrift „Die Vermessungslehre" (*Μετρικά*) benutzen zu sollen[2]). In ihr kommt Archimed vor, in ihr der Verfasser des Raumschnittes, in ihr der Verfasser der Geraden im Kreise, beide letztere ohne Namensnennung, mithin als durch diese Bezeichnung für den Leser hinlänglich deutlich gemacht. Der Raumschnitt rührt (S. 345) von Apollonius her, die Geraden im Kreise (S. 362) von Hipparch; folglich muß Heron nach der Mitte des II. vorchristlichen Jahrhunderts gelebt

---

[1]) Wilh. Schmidt in der Einleitung zum I. Bande der Gesamtausgabe des Heron (Leipzig 1899). [2]) Herm. Schöne, Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra. III. Band der Gesamtausgabe (Leipzig 1903).

haben. Nun werden wir aber im 20. Kapitel erfahren, daß auch Menelaus von Alexandria um das Jahr 100 nachchristlicher Zeit Bücher unter dem Titel die Geraden im Kreise verfaßt hat. Wäre dieses vor Heron gewesen, so hätte die Nennung des Titels allein Mißverständnis erzeugen können, und darauf gestützt halten wir zunächst für erwiesen, daß Heron zwischen Hipparch und Menelaus fällt. Zur näheren Einschränkung der Zeitgrenzen führt ein anderes Werk des Heron, seine Mechanik, welche in arabischer Übersetzung des Kustâ ibn Lûkâ (um 900) auf uns gekommen ist[1]). In dieser Mechanik kommt ein Posidonius vor, welchem eine physikalische Definition entnommen ist. Derselbe gehöre der Stoa an. Es ist nicht anzunehmen, daß Posidonius von Alexandria (S. 198) ein Werk verfaßt habe, in welchem jene Definition vorkommen konnte, dagegen ist dieses wohl möglich, wenn Heron den Stoiker Posidonius von Rhodos meinte, den Lehrer Ciceros, den Freund des Pompejus, der frühestens um das Jahr 90 als Schriftsteller auftrat. Zu noch weiterer Einschränkung der Grenzen, welche jetzt 90 vor und 100 nach Christus heißen, hat man sich einer anderen Stelle der Mechanik bedient[2]). Gegen Schluß des dritten Buches der Mechanik steht die Beschreibung einer kleinen einschraubigen Olivenpresse, und eben diese soll nach Plinius seit dem Jahre 55 n. Chr. die früher gebräuchlichen großen Pressen mit langen Hebeln verdrängt haben. Damit im Einklange stehe[3]), daß bei römischen Schriftstellern, insbesondere bei Vitruvius im Jahre 14 v. Chr., keine Einwirkung Herons nachweisbar sei. Heron müßte demzufolge zwischen 50 und 100 nachchristlicher Zeitrechnung angesetzt werden. Das wäre nun sehr schön, wenn es sich so, wie angegeben, verhielte. Aber der entgegengesetzte Nachweis ist geliefert worden[4]). Die von dem an und für sich durch vielfach mangelnde Sachkenntnis unzuverlässigen Plinius geschilderte kleine Olivenpresse ist keineswegs die von Heron beschriebene, dagegen hat Vitruvius Heron benutzt, wie aus zwei fehlerhaften Angaben hervorgeht, die jener von diesem, natürlich ohne ihn zu nennen, entlehnt. Wir werden im 26. Kapitel hierauf zurückzukommen haben.

Jetzt sehen wir Heron, wie wir am Anfange des Kapitels sagten,

---

[1]) Curra de Vaux, *Les mécaniques de Héron d'Alexandrie.* Paris 1894 und L. Nix, Herons von Alexandria Mechanik. II. Band der Gesamtausgabe (Leipzig 1901). [2]) Wilh. Schmidt pag. XIX—XX der Einleitung zu Bd. I der Gesamtausgabe (Leipzig 1899). [3]) Wilh. Schmidt, Haben Vitruv und die römischen Feldmesser aus Heron geschöpft? Bibliotheca Mathematica 3. Folge, I, 297—318 (1900). [4]) Edm. Hoppe, Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandrien (Hamburg 1902).

auf das erste vorchristliche Jahrhundert beschränkt, und nun gewinnt eine vereinzelt dastehende späte Angabe erhöhten Wert. Wir werden im 26. Kapitel von einer Vermessung des Römischen Reiches erfahren, welche wahrscheinlich in den Jahren 37—20 v. Chr. stattfand. Um das Jahr 500 n. Chr. erzählt Cassiodorius von dieser Vermessung und sagt dabei[1]), ein Schriftsteller Heron metricus habe sich an ihrer Redaktion beteiligt. Nun ist allerdings richtig, daß die Handschriften nicht Heron, sondern Iron oder Yron überliefern, es ist auch richtig, daß Heron nirgend als metricus bezeichnet wird, wenn er auch, wie wir oben (S. 364) sagten, ein Werk μετρικά verfaßt hat, aber auffallend und, was wir besonders zu bedenken geben, zu der von uns vorher erschlossenen Lebenszeit Herons nicht in Widerspruch stehend bleibt jene Stelle immerhin. Auf eine letzte Stelle möchten wir noch hinweisen, welche zur Festlegung von Herons Lebenszeit benutzt worden ist[2]). Sie steht in der Schrift über die Dioptra[3]). Dort sind Beobachtungen an zwei weit voneinander entlegenen ihrer geographischen Länge nach sehr verschiedenen Standorten zu einem geodätischen Beispiele vereinigt, und als diese Standorte sind nicht etwa Alexandria und Athen, sondern Alexandria und Rom gewählt. Nun war aber Ptolemaeus XIII. Neos Dionysius der erste ägyptische König, welcher im Jahre 81 v. Chr. durch die Römer eingesetzt wurde. Von da an waren alle Augen in Alexandria nach Rom weit mehr als nach Athen gerichtet, und man darf die Entstehung der Abhandlung auf später als das Jahr 81 ansetzen. Dann werden auch die zahlreichen Latinismen erklärlich, welche das Griechisch des Heron entstellen. Wir wiederholen also, wir setzen Heron von Alexandria in das erste vorchristliche Jahrhundert, vielleicht sogar, wenn die Stelle des Cassiodorius für beweiskräftig gehalten werden sollte, in dessen letztes Drittel. Ein Grund läßt sich freilich für eine frühere Lebenszeit Herons beibringen, daß er nämlich, wenn von der Größe von Winkeln die Rede ist, sich niemals der Gradeinteilung (S. 360) bedient, sondern stets ausschließlich von Bruchteilen eines rechten Winkels spricht. Möglicherweise ist diesem Einwande damit zu begegnen, daß die Sexagesimalbrüche bei den Griechen dem gewöhnlichen Leben fremd blieben, daß sie von Anfang an waren, als was man sie später noch benannte, astronomische Brüche, daß überhaupt die Trigonometrie zunächst ein Kapitel der Astronomie bildete und keineswegs dazu diente, auch auf der Erde Dreiecke oder

[1]) Wilh. Schmidt pag. XVII—XVIII der Einleitung zu Bd. I der Gesamtausgabe (Leipzig 1899). [2]) Martin, *Recherches sur la vie etc.* pag. 91. [3]) Herm. Schöne, Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra. III. Band der Gesamtausgabe (Leipzig 1903).

aus Dreiecken zusammengesetzte Figuren einer Berechnung zu unterwerfen. Wir wollen schließlich nicht unterlassen zu bemerken, daß der Verfasser der letzten über Herons Zeitalter geführten Untersuchung[1]) nahezu zu der gleichen Zeitbestimmung des ersten vorchristlichen Jahrhunderts wie wir gelangt ist. Er teilt unsere Überzeugung, die in den Metrica erwähnte Sehnentafel sei die des Hipparch, und die ähnliche Tafel des Menelaus sei damals noch nicht vorhanden gewesen.

Ferner behauptet er Vitruvius habe später als Heron gelebt und stützt diese Behauptung darauf, daß die von Vitruvius beschriebene Wasserorgel wesentlich vollkommener als eine von Heron geschilderte sei; den von uns betonten Stellen der Mechanik legt er dagegen kein Gewicht bei. Ein weiter bei ihm verwerteter Umstand ist der, daß eine bei Proklus vorkommende Stelle, in welcher Archimed, Ktesibius, Heron als drei große Mechaniker genannt werden, für einen Auszug aus Geminus gilt, der, wie wir im 20. Kapitel sehen werden, etwa im Jahre 70 vorchristlicher Zeitrechnung lebte. Beiläufig erwähnen wir noch, daß die sogenannte Definitionen Herons, von welchen weiter unten die Rede sein wird, in der von uns hier erwähnten Abhandlung für unecht gehalten werden[2]), ebenso wie zahlreiche andere Fragmente.

Dieser Heron war allem Anscheine nach der einzige seines Namens, welcher in der Geschichte der Mathematik einen Platz verdient. Pappus, der an verschiedenen Stellen von Heron redet, nennt ihn Heron schlechtweg oder Heron von Alexandria. Proklus, pedantisch genau in Vermeidung der Verwechslungen von Schriftstellern, wo dieselben möglich wären, wie wir (S. 194) gesehen haben, redet zweimal von dem Mechaniker Heron, viermal vorher und nachher von Heron schlechtweg, und unter diesen vier Stellen ist gerade diejenige, in welcher Heron mit Ktesibius zusammen genannt ist, so daß Heron ohne Beinamen bei Proklus jedenfalls derselbe ist wie Heron der Mechaniker oder der dessen Leistungen sich mit Ktesibius begegnen. Eutokius in seinen Erläuterungen zur archimedischen Kreismessung (S. 318) redet gleichfalls nur von Heron, als wenn es eben nur einen solchen allbekannten mathematischen Schriftsteller gäbe.

Dazu kommt die Unmöglichkeit einen anderweitigen Mathematiker oder Mechaniker Heron irgendwie geschichtlich unterzubringen. Der Schriftsteller, welchen man ehedem als Heron den Jüngeren zu bezeichnen pflegte, ist der vorerwähnte Byzantiner des X. S., welcher selbst Heron von Alexandria zitiert, und dem den gleichen Namen

[1]) Rudolf Meier, *De Heronis aetate.* Leipzig 1905. [2]) Rud. Meier, *De Pseudo-Heronianis.* Rhein. Mus. f. Philol. Neue Folge LXI, 178—184.

beizulegen auch nicht der geringste Grund vorliegt. Heron, der Lehrer des Proklus, welcher in dem zweiten Viertel des V. S. lebte, hat überhaupt keine bekannt gewordene mathematische Schrift verfaßt; ihn hat Proklus insbesondere sicherlich bei keiner seiner Anführungen im Sinne gehabt, sonst würde der überaus pietätvolle Schüler für ihn eine andere Bezeichnung als das einfache Heron, oder Heron der Mechaniker gewählt haben. Heronas, der, wie Eutokius erzählt, einen Kommentar zu Nikomachus schrieb, mithin zwischen den von ihm erläuterten Schriftsteller und den, der seiner erwähnt, zwischen das II. und VI. S., fällt, ist eine im übrigen durchaus unbekannte Persönlichkeit, so daß es eine leichtfertige Vermutung wäre in ihm den Verfasser solcher Schriften erkennen zu wollen, welche als von Heron verfaßt bezeichnet sind.

So einfach sich demnach die sogenannte heronische Frage, d. h. die Frage nach dem Verfasser der mathematischen und physikalischen Schriften, welche einem Heron beigelegt werden, zu lösen scheint, so sind doch noch Schwierigkeiten vorhanden, wie nicht anders zu vermuten, da ja sonst wundernehmen dürfte, daß überhaupt jemals eine heronische Frage entstand. Die Handschriften der als heronisch bekannten Bücher sind ziemlich späten Ursprungs und verschiedenen Inhaltes. Kaum eine ist mit einer anderen zur vollen Deckung zu bringen. Bald fehlt eine, bald eine andere Abhandlung, und zum Ersatze findet sich wieder in der zweiten Handschrift, was man in der ersten vergeblich suchte. Schon dadurch ist vollgültige Gewißheit über die Echtheit aller Stücke erheblich erschwert. Dazu kommt die sichere Unechtheit mancher Stücke. Ein alle Spuren des Verfalles der Literatur an sich tragendes Griechisch, Maße eines späten Zeitalters, Erwähnungen von Schriftstellern, die wie Modestus und Patrikius am Ende des IV. S. n. Chr. gelebt haben, können unmöglich dem Heron von Alexandria aus dem ersten vorchristlichen Jahrhunderte angehören.

Wir möchten trotz mehrfachen Widerspruchs die Lösung der Schwierigkeit darin finden, daß wir die Schriften des Heron im großen und ganzen als echt in unserm Sinne, d. h. als dem früher sogenannten älteren Heron aus dem ersten vorchristlichen Jahrhunderte angehörig erkennen, daß wir aber annehmen, diese Schriften seien wesentlich verderbt worden. Sie seien, behaupten wir, ungemein verbreitet, in zahllosen Abschriften und Auszügen vorhanden gewesen. Nun habe bald dieser, bald jener Anfertiger später Exemplare Randbemerkungen der mannigfachsten Art, wie sie seiner Lebenszeit angemessen schienen, beigefügt und noch spätere unwissende Abschreiber haben bald solche Randbemerkungen in den Text hergezogen, bald ihnen unverständlich gewordene Stellen weggelassen. So sei die gegenwärtige Gestalt der Schriften Herons entstanden. Man sei berechtigt alle als echt, wie alle als unecht zu bezeichnen, als echt dem Ursprunge nach, als unecht vermöge ihrer keineswegs unbedeutenden Verschlimmbesserungen.

Die Schriften Herons sind teils physikalischen, teils mathematischen Inhaltes. Wenn wir uns auch bei Erörterung jener ersten Gruppe, soweit nicht Mathematisches in ihnen zur Rede kommt, hier grundsätzlich enthalten, so können wir doch nicht umhin auf eine schriftstellerische Eigentümlichkeit Herons hinzuweisen, welche in ihnen vorzüglich zutage tritt, und auch in den Schriften, welche unsere Auseinandersetzung fordern, sich nicht verleugnet. Heron begnügt sich niemals mit bloß theoretischen Erörterungen. Er schreitet von der wissenschaftlichen Grundlage aus zur Anwendung, und zwar meistens zu einer doppelten Anwendung: neben dem Nutzen für die menschliche Gesellschaft erscheint auch das Vergnügen des einzelnen ihm wert die Fürsorge des Gelehrten in Anspruch zu nehmen.

An der Grenze zwischen Physik und Mathematik liegen die drei mechanischen Bücher, welche Heron verfaßt hat, und welche, wie wir (S. 365) sahen, in arabischer Übersetzung erhalten sind. Pappus nennt in umfangreichen Auszügen, welche er davon gibt, jene Bücher bald Mechanik, bald Gewichtezieher, doch kann jetzt kein Zweifel mehr darüber herrschen, daß beide Namen nur das eine aus drei Büchern bestehende Werk bezeichnen. Das erste Buch ist vorzugsweise allgemein mechanischen Lehren gewidmet, und in ihm findet sich eine geometrische Aufgabe mit ihrer Lösung[1]). Ebendieselbe Aufgabe mit der gleichen Lösung hat aber Heron noch an einer anderen Stelle mitgeteilt, in einem Buche über angewandte Mechanik, welches den Titel führt: Von der Anfertigung von Geschützen[2]). Er lehrt, daß, wenn eine dreifach stärkere Kraft erzielt werden will, die den Geschossen ihre Bewegung erteilende Sehne dreifach stärkere Spannung erleiden muß. Diese ihr zu verschaffen, während die ganze Gestalt des Geschützes sich ähnlich bleibt, muß ein gewisser zylindrischer Teil desselben unter der gleichen geometrischen Bedingung, die für das Ganze gilt, dreimal größer werden. Nun verhalten sich ähnliche Zylinder wie die Kuben einer Abmessung, z. B. des Durchmessers, also muß sich hier verhalten $d_1^3 : d_2^3 = 1 : 3$ (allgemeiner wie $1 : n$). Das ist die delische Aufgabe der Würfelverdoppelung in verallgemeinerter Form. Heron löst deshalb hier in einem Buche prak-

[1]) L. Nix, Herons von Alexandria Mechanik im II. Bande der Gesamtausgabe S. 24. [2]) Ἥρωνος Κτησιβίου βελοποιικά abgedruckt in dem von Thevenot herausgegebenen Bande: *Veteres mathematici.* Paris 1693.

tischen Inhaltes die theoretische Aufgabe, zwischen zwei gegebene Längen zwei mittlere geometrische Proportionalen einzuschalten. Seine Auflösung ist eine vollkommen gesicherte, indem sie ausdrücklich als heronisch benannt und dessen Mechanik, wie wir jetzt wissen, entnommen, auch von Pappus aufbewahrt worden ist und an beiden Orten so genau zusammentrifft, daß sogar die Figur bei Pappus durchaus mit der in der heronischen Mechanik übereinstimmt, während unsere Zeichnung (Fig. 63) der Anfertigung von Geschützen entnommen ist[1]). Der einzige Unterschied besteht darin, daß bei Pappus die Gerade $\theta\eta$ fehlt und demzufolge der Punkt η gar nicht und Herons Punkt θ durch η als den im Alphabete auf ζ folgenden Buchstaben bezeichnet ist. In der Mechanik fehlt gleichfalls die Gerade $\theta\eta$, nur sind andere Buchstaben vorhanden, vielleicht infolge des Durchgangs durch eine arabische Übersetzung. Die zwei mittleren geometrischen Proportionalen sollen zwischen die beiden Strecken $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ eingeschaltet werden. Man bildet aus den gegebenen Strecken das Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$, dessen beide gleichen einander in θ halbierenden Diagonalen gezogen werden. Ein um die Ecke β sich drehendes Lineal wird alsdann empirisch in die Lage gebracht, daß seine Durchschnitte mit den Verlängerungen von $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$, nämlich ζ und ε, gleichweit von θ abstehen, so ist $\alpha\beta : \alpha\zeta = \alpha\zeta : \gamma\varepsilon = \gamma\varepsilon : \gamma\beta$. Die Zeichnung der Hilfslinien $\theta\varepsilon$, $\theta\zeta$, $\theta\eta$ (letztere senkrecht auf $\alpha\delta$) läßt erkennen $\theta\zeta^2 = \theta\eta^2 + (\eta\alpha + \alpha\zeta)^2 = \theta\eta^2 + \eta\alpha^2 + \alpha\zeta(2\eta\alpha + \alpha\zeta) = \theta\alpha^2 + \alpha\zeta \cdot \delta\zeta$. Entsprechend dieser ersten Gleichung $\theta\zeta^2 = \theta\alpha^2 + \alpha\zeta \cdot \delta\zeta$ muß zweitens $\theta\varepsilon^2 = \theta\gamma^2 + \gamma\varepsilon \cdot \delta\varepsilon$ sein. Nun ist $\theta\zeta = \theta\varepsilon$ vorausgesetzt, es ist ferner $\theta\alpha = \theta\gamma$, folglich muß auch $\alpha\zeta \cdot \delta\zeta = \gamma\varepsilon \cdot \delta\varepsilon$ sein und $\alpha\zeta : \gamma\varepsilon = \delta\varepsilon : \delta\zeta$. Nun ist weiter $\alpha\beta : \alpha\zeta = \delta\varepsilon : \delta\zeta$ und $\delta\varepsilon : \delta\zeta = \gamma\varepsilon : \beta\gamma$, also endlich $\alpha\beta : \alpha\zeta = \alpha\zeta : \gamma\varepsilon = \gamma\varepsilon : \beta\gamma$, was zu beweisen war.

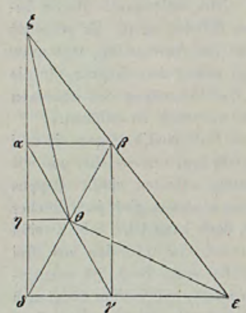

Fig. 63.

Wir gehen zu den eigentlich mathematischen Schriften des Heron über. An ihrer Spitze steht die Vermessungslehre, μετρικά, in 3 Büchern, welche Jahrhunderte lang verschollen waren, bis man eine dem XI. Jahrhunderte entstammende sehr schöne Handschrift des

[1]) Vgl. *Veteres mathematici* pag. 142 mit Nix pag. 24 und mit Pappus (ed. Hultsch) 63.

Werkes in Konstantinopel entdeckte, und nach ihr den Abdruck vollzog[1]). An der wir möchten sagen fleckenlosen Reinheit der Überlieferung kann kein Zweifel sein. Die unendlich klare Ausdrucksweise Herons, welche jeden Leser seiner physikalischen Schriften entzückt, verleugnet sich keinen Augenblick, und selbst die Überschrift, μετρικά, ist durch Eutokius[2]) beglaubigt. Bei der großen Wichtigkeit der Vermessungslehre fühlen wir uns gedrungen, deren Inhalt etwas genauer anzugeben.

Die Vermessungslehre gibt in ihrem 1. Buche Anweisungen, wie man ebene aber auch wie man gekrümmte Oberflächen ausmessen solle. Das 2. Buch lehrt die Ausmessung von Körpern, das 3. Buch Teilung von Flächen und Körpern. Das Maß der Fläche ist ein Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit ist, im gleichen Sinne ist das Körpermaß ein Würfel, dessen Kante die Längeneinheit ist, mag man als solche eine Elle oder einen Fuß wählen.

Zuerst wird im 1. Buche ein Rechteck ausgemessen, dann ein rechtwinkliges Dreieck als Hälfte eines Rechtecks, und bei dieser Gelegenheit wird der Pythagoräische Lehrsatz an dem Zahlenbeispiele $3^2 + 4^2 = 5^2$ erläutert. Das gleichschenklige Dreieck mit den Seiten 10, 10, 12 wird gleichfalls als Hälfte eines Rechtecks behandelt, dessen Höhe 8 aus $10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 8^2$ gefolgert ist. Das sich anschließende ungleichschenklige Dreieck gibt Gelegenheit den Satz zu benutzen, daß ein Winkel bei A spitz, recht oder stumpf sei, je nachdem $B\Gamma^2 \lesseqgtr AB^2 + A\Gamma^2$ (S. 209), und nun folgt die Berechnung der Höhe aus den Seiten bald unter Benutzung der Abschnitte, welche sie auf der Grundlinie hervorbringt, bald unter Benutzung der Verlängerung, welche die Grundlinie bis zum Eintreffen der Höhe erleidet. Aber auch ohne die Höhe läßt die Dreiecksfläche sich unmittelbar aus den Seiten herleiten, und nun folgt die heute als heronische Dreiecksformel bekannte Rechnung

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)}.$$

Da hierbei Quadratwurzelausziehungen vorkommen, z. B. für das Dreieck 7, 8, 9 die Quadratwurzel $\sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720} = 26\frac{5}{6}$, so lehrt Heron einschaltungsweise die Ausziehung angenäherter Quadrat-

[1]) Herm. Schöne, Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra. Bd. III der Gesamtausgabe (Leipzig 1903). [2]) Archimed (ed. Heiberg) III, 270 lin. 2—3: εἴρηται μὲν Ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς.

wurzeln[1]), und das ist die Stelle, auf welche Eutokius (S. 318) hingewiesen hat. Das durch Heron gelehrte Verfahren besteht in folgendem. Sei a eine schon nahe Quadratwurzel der Zahl $a^2 \pm b$, so ist näherungsweise

$$\sqrt{a^2 \pm b} \sim \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 \pm b}{a}\right).$$

Man sieht sofort, daß dieser Wert der gleiche ist, welchen wir

$$\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$$

schreiben, und daß, wenn $a \pm \frac{b}{2a} = a_1$ mithin $a^2 \pm b = a_1{}^2 \pm b_1$ gesetzt wird, eine bessere Annäherung erzielt werden kann, was Heron auch ausdrücklich sagt. In seinem Beispiele ist $720 = 27^2 - 9$, also $\sqrt{720} \sim \frac{1}{2}\left(27 + \frac{720}{27}\right) = \frac{1}{2}\left(27 + 26\frac{2}{3}\right) = 26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ mit $\left(26\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right)^2 = 720\frac{1}{36}$, und will man, sagt Heron, daß der Unterschied noch kleiner werde, so ersetze man das vorige $729 = 27^2$ durch $720\frac{1}{36} = \left(26\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right)^2$. Man erhielte alsdann, was Heron allerdings nicht ausrechnet:

$$\sqrt{720} \sim \frac{1}{2}\left(26\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{720}{26\frac{1}{2}\frac{1}{3}}\right) = 26\frac{1609}{1932}.$$

Wir bemerken beiläufig, daß die in Archimeds Kreismessung vorkommenden angenäherten Quadratwurzeln entgegen dem, was Eutokius zu verstehen gibt, nicht alle nach Herons Vorschrift gefunden werden. Es gelingt z. B. nicht die Grenzwerte $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ (S. 316) zu finden. Da ist nun ein sehr geistreicher Versuch gemacht worden, auf $\sqrt{3}$ eine Methode anzuwenden, welche allerdings in viel späterer Zeit den Namen der Methode des doppelten falschen Ansatzes erhalten hat[2]). Wir werden im 33. Kapitel das Auftreten der Methode bei solchen Aufgaben kennen lernen, welche zu Gleichungen ersten Grades führen. Hier handelt es sich um eine quadratische Aufgabe, und Zweifel daran, ob bereits Archimed dieses Verfahren ersonnen haben kann, sind vollauf gerechtfertigt. Eine Stütze findet die Vermutung lediglich in der Tatsache, daß nur mit ihrer Hilfe die archimedischen Näherungswerte für $\sqrt{3}$ erhalten werden.

Sei $\sqrt{a} = x$, und seien x_1 und x_2 zwei Näherungswerte von der Art, daß $x_1 < x < x_2$. Sei ferner $x^2 - x_1{}^2 = d_1$, $x_2{}^2 - x^2 = d_2$. Augen-

[1]) Heron III, 18—20. Vgl. P. Tannery, Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, Hist.-liter. Abtlg. pag. 13—15 und Curtza, Zeitschr. Math. Phys. XLII, Hist.-liter. Abtlg. pag. 113—120. [2]) G. Wertheim in Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Hist.-liter. Abtlg. pag. 1—3.

scheinlich ist $d_1 + d_2 = x_2{}^2 - x_1{}^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ und $d_1 x_2 + d_2 x_1 = x^2 x_2 - x_1{}^2 x_2 + x_1 x_2{}^2 - x^2 x_1 = (x_2 - x_1)(x^2 + x_1 x_2)$. Daraus folgt $\frac{d_1 x_2 + d_2 x_1}{d_1 + d_2} = \frac{x^2 + x_1 x_2}{x_1 + x_2}$, ein Ausdruck, der sich wegen $x_1{}^2 < x^2 < x_2{}^2$ als $> x_1$ und $< x_2$ erweist, welcher also als neuer Näherungswert für $\sqrt{a}$ benutzt werden kann.

Beispielsweise ist bei $a = 3$ leicht ersichtlich $x_1 = 1$, $d_1 = 2$; $x_2 = 2$, $d_2 = 1$ und der daraus folgende neue Näherungswert: $\frac{d_1 x_2 + d_2 x_1}{d_1 + d_2} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{5}{3}$. Zweitens sei $x_1 = \frac{5}{3}$, $d_1 = \frac{2}{9}$; $x_2 = 2$, $d_2 = 1$. Der neue Näherungswert wird $\frac{\frac{2}{9} \cdot 2 + 1 \cdot \frac{5}{3}}{\frac{2}{9} + 1} = \frac{19}{11}$. Drittens sei $x_1 = \frac{19}{11}$, $d_1 = \frac{2}{121}$; $x_2 = 2$, $d_2 = 1$. Der neue Näherungswert ist $\frac{\frac{2}{121} \cdot 2 + 1 \cdot \frac{19}{11}}{\frac{2}{121} + 1} = \frac{71}{41}$. Viertens endlich führt $x_1 = \frac{71}{41}$, $d_1 = \frac{2}{1681}$; $x_2 = 2$, $d_2 = 1$ zu dem archimedischen Näherungswerte $\frac{\frac{2}{1681} \cdot 2 + 1 \cdot \frac{71}{41}}{\frac{2}{1681} + 1} = \frac{245}{153}$.

Ist dagegen $\sqrt{a} = x < x_1 < x_2$, so kann unter der Annahme $x_1{}^2 - x^2 = d_1$, $x_2{}^2 - x^2 = d_2$ ein neuer Näherungswert für $\sqrt{a}$ als $\frac{d_2 x_1 - d_1 x_2}{d_2 - d_1} = \frac{x^2 + x_1 x_2}{x_1 + x_2} < \frac{x_1{}^2 + x_1 x_2}{x_1 + x_2}$ d. h. $< x_1 < x_2$ ermittelt werden, von welchem man auch noch behaupten kann, er sei $> x$. Es ist nämlich $\frac{x^2 + x_1 x_2}{x_1 + x_2} > x$ insofern $x_1 x_2 - (x_1 + x_2)x + x^2 = (x_1 - x)(x_2 - x) > 0$, wovon die Wahrheit einleuchtet. Ist neuerdings $a = 3$, $x_2 = 2$, aber $x_1 = \frac{7}{4}$, so berechnen sich die vier aufeinanderfolgenden Näherungswerte folgendermaßen:

$$x_1 = \frac{7}{4},\ d_1 = \frac{1}{16};\quad x_2 = 2,\ d_2 = 1;\ \frac{d_2 x_1 - d_1 x_2}{d_2 - d_1} = \frac{1 \cdot \frac{7}{4} - \frac{1}{16} \cdot 2}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{26}{15}$$

$$x_1 = \frac{26}{15},\ d_1 = \frac{1}{225};\quad x_2 = 2,\ d_2 = 1;\ \frac{d_2 x_1 - d_1 x_2}{d_2 - d_1} = \frac{1 \cdot \frac{26}{15} - \frac{1}{225} \cdot 2}{1 - \frac{1}{225}} = \frac{97}{56}$$

$$x_1 = \frac{97}{56},\ d_1 = \frac{1}{3136};\ x_2 = 2,\ d_2 = 1;\ \frac{d_2 x_1 - d_1 x_2}{d_2 - d_1} = \frac{1 \cdot \frac{97}{56} - \frac{1}{3136} \cdot 2}{1 - \frac{1}{3136}} = \frac{362}{209}$$

$$x_1 = \frac{362}{209},\ d_1 = \frac{1}{43681};\ x_2 = 2,\ d_2 = 1;\ \frac{d_2 x_1 - d_1 x_2}{d_2 - d_1} = \frac{1 \cdot \frac{362}{209} - \frac{1}{43681} \cdot 2}{1 - \frac{1}{43681}} = \frac{1351}{780}.$$

Der obere archimedische Näherungswert ist damit gleichfalls gefunden.

Nun wird aber eine ähnliche Benutzung zweier falschen Ansätze angewandt, um eine **angenäherte Kubikwurzel** zu finden. Sei $\sqrt[3]{a} = x$ und seien x_1 und x_2 zwei Näherungswerte von der Eigenschaft $x_1 < x < x_2$. Hier nennen wir $x^3 - x_1^3 = d_1$, $x_2^3 - x^3 = d_2$. Alsdann ist $\frac{x_2^2 d_1 + x_1^2 d_2}{x_2 d_1 + x_1 d_2}$ ein neuer Näherungswert. Soll $\sqrt[3]{100}$ ermittelt werden, so ist $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, weil $64 < 100 < 125$ und zugleich ist $100 - 64 = 36 = d_1$, $125 - 100 = 25 = d_2$. Da hier $x_2 = x_1 + 1$ angenommen ist, so wird der Näherungswert in die Gestalt $x_1 + \frac{x_2 d_1}{x_2 d_1 + x_1 d_2}$ gebracht werden können, in Zahlen also $4 + \frac{5 \cdot 36}{5 \cdot 36 + 4 \cdot 25} = 4 + \frac{180}{280} = 4 + \frac{9}{14}$ und das Merkwürdige ist nun, daß genau dieser Wert genau nach der angegebenen Formel $4 + \frac{5 \cdot 36}{180 + 100}$ ausgerechnet im 3. Buche der Metrika vorkommt[1]). Da kann kaum mehr gezweifelt werden, Heron habe sich die gleichen Zahlen auch als Übersetzung der gleichen Buchstabenformel, welche hier vermutet worden ist, verschafft.

Wir kehren nach dieser Zwischenbemerkung, welche dadurch veranlaßt wurde, daß wir die Ausziehung der Kubikwurzel bei Heron von der der Quadratwurzel nicht trennen wollten, zum 1. Buche der Vermessungslehre, und zwar zur heronischen Dreiecksformel zurück. Heron, sagten wir, wendet sie auf das Dreieck mit den Seiten 7, 8, 9 an. Er läßt dem Zahlenbeispiele den Beweis der Formel folgen[2]). Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ erweist sich (Fig. 64) bei Einbeschreibung des Kreises mit dem Halbmesser $\eta\varepsilon$ als gleich dem Doppelten eines Dreiecks mit diesem Halbmesser als Höhe und dem halben Umfang von $\alpha\beta\gamma$ oder mit $\gamma\theta$ als Grundlinie (sofern $\beta\theta = \alpha\delta$ genommen ist). Nun wird die Hilfskonstruktion $\eta\lambda$ senkrecht zu $\eta\gamma$, $\beta\lambda$ senkrecht zu $\beta\gamma$ und $\gamma\lambda$ von dem Durchschnittspunkte λ jener beiden Senkrechten nach γ vollzogen, nebst den Halbmessern $\eta\delta$, $\eta\varepsilon$, $\eta\zeta$ des eingeschriebenen Kreises und den Verbindungsgeraden $\eta\alpha$, $\eta\beta$, $\eta\gamma$ seines Mittelpunktes mit den Endpunkten des Dreiecks. Weil $\sphericalangle\, \gamma\eta\lambda = \gamma\beta\lambda = 90^0$, muß $\gamma\lambda$ der Durchmesser des umschriebenen Kreises für die beiden Dreiecke $\gamma\eta\lambda$ und $\gamma\beta\lambda$ sein, d. h. $\gamma\eta\beta\lambda$ ist ein Sehnenviereck und $\sphericalangle\, \gamma\eta\beta + \gamma\lambda\beta = 180^0$. Aber $\sphericalangle\, \gamma\eta\beta = \gamma\eta\varepsilon + \varepsilon\eta\beta = \frac{\zeta\eta\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon\eta\delta}{2}$ und

[1]) Heron III, 178. [2]) Ebenda III, 20—25.

addiert man dann noch $\alpha\eta\delta = \frac{\delta\eta\zeta}{2}$ und berücksichtigt $\zeta\eta\varepsilon + \varepsilon\eta\delta + \delta\eta\zeta = 360^0$, so zeigt sich auch $\sphericalangle\, \gamma\eta\beta + \alpha\eta\delta = 180^0$, folglich $\sphericalangle\, \gamma\lambda\beta = \alpha\eta\delta$; ferner ist

$$\sphericalangle\, \gamma\beta\lambda = 90^0 = \alpha\delta\eta,$$

folglich sind die Dreiecke $\beta\gamma\lambda$, $\delta\alpha\eta$ ähnlich und $\beta\gamma : \beta\lambda = \delta\alpha : \delta\eta$ oder, was dasselbe ist, $= \beta\theta : \eta\varepsilon$, somit

$$\frac{\gamma\beta}{\beta\theta} = \frac{\beta\lambda}{\eta\varepsilon}.$$

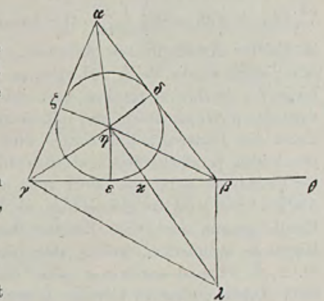

Fig. 64.

Aus der leicht ersichtlichen Ähnlichkeit der Dreiecke $\beta\lambda\varkappa$, $\varepsilon\eta\varkappa$ folgt auch

$$\frac{\beta\lambda}{\eta\varepsilon} = \frac{\varkappa\beta}{\varepsilon\varkappa}, \quad \text{mithin} \quad \frac{\gamma\beta}{\beta\theta} = \frac{\varkappa\beta}{\varepsilon\varkappa}.$$

Durch Addition der Einheit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens entsteht $\frac{\gamma\theta}{\beta\theta} = \frac{\varepsilon\beta}{\varepsilon\varkappa}$, und daraus folgt $\frac{\gamma\theta^2}{\gamma\theta \cdot \beta\theta} = \frac{\gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\beta}{\gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\varkappa}$ oder $\frac{\gamma\theta^2}{\gamma\theta \cdot \beta\theta} = \frac{\gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\beta}{\eta\varepsilon^2}$, und daraus $(\gamma\theta \cdot \eta\varepsilon)^2 = \gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\beta \cdot \beta\theta \cdot \gamma\theta$. Nun war der Flächeninhalt des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ (als des Doppelten des Dreiecks $\gamma\eta\theta$) $= 2 \cdot \frac{\gamma\theta \cdot \eta\varepsilon}{2} = \gamma\theta \cdot \eta\varepsilon$, und somit ist, wenn man die Fläche des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ durch Δ bezeichnet, $\Delta = \sqrt{\gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\beta \cdot \beta\theta \cdot \gamma\theta}$. Setzt man endlich $\alpha\beta = c$, $\alpha\gamma = b$, $\beta\gamma = a$, so lassen die Faktoren unter dem Wurzelzeichen sich leicht anders ordnen und schreiben, so daß

$$\Delta = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)}$$

entsteht, eben die Formel, die Herons Namen führt. Nach geliefertem Beweise erprobt Heron die Formel nochmals an dem Dreiecke mit den Seiten 13, 14, 15 und erhält $\Delta = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$. Noch ein weiteres Dreieck ist das aus den Seiten 8, 10, 12. Um dessen Fläche zu erhalten[1]) wird die Höhe auf die Seite $\beta\gamma = 10$ von α aus gezogen und der an die kleinere Seite $\alpha\beta = 8$ angrenzende Abschnitt $\beta\delta$ der Grundlinie dadurch gefunden, daß man von $2\beta\gamma \cdot \beta\delta = 20$ ausgeht. Es ist nämlich $\alpha\gamma^2 + 2\beta\gamma \cdot \beta\delta = \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2$, also $2\beta\gamma \cdot \beta\delta = \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 - \alpha\gamma^2 = 64 + 100 - 144 = 20$, was allerdings nicht besonders ausgerechnet ist. Vermöge $\beta\gamma = 10$ zeigt sich $\beta\delta = 1$, $\beta\delta^2 = 1$

[1]) Heron III, 26.

und $\alpha\delta^2 = \alpha\beta^2 - \beta\delta^2 = 64 - 1 = 63$, $\alpha\delta = \sqrt{63} = 7\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$, was offenbar mittels $\sqrt{64 - 1} = 8 - \frac{1}{16}$ gefunden ist. Die Fläche ist aber $\frac{\alpha\delta \cdot \beta\gamma}{2} = 5\sqrt{63} = 39\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$. Wir können unseren Bericht unmöglich in gleicher Ausführlichkeit fortsetzen. Nach dem Dreiecke kommt das Viereck an die Reihe und zwar, da das Rechteck gleich am Anfange des Buches besprochen war, das rechtwinklige Paralleltrapez, dann das gleichschenklige, das spitzwinklige und das stumpfwinklige. Unter den letzteren beiden Namen wird verstanden, daß, wenn eine der beiden parallelen Seiten als Grundlinie dient, beide Winkel an der Grundlinie spitz, oder einer spitz und einer stumpf sein sollen. Als Rhombus wird das gleichseitige, als Rhomboïd das ungleichseitige Parallelogramm bezeichnet. Zu ihrer Berechnung ist die Kenntnis der Diagonale erforderlich, welche aber hier als Diameter benannt ist (S. 218), während nur wenig später das Wort Diagonale gebraucht ist[1]). Zuletzt erscheinen Vierecke, in welchen keine Seite einer anderen parallel läuft. Der nächste Gegenstand der Untersuchung ist der Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke vom Dreieck bis zum Zwölfeck, welches letztere sich dem Kreise nähert[2]). Heißt a_n die Seite, F_n die Fläche des regelmäßigen Vielecks und c_n eine von einem Vieleck zum anderen sich ändernde Zahl, so findet Heron $F_n = c_n a_n^2$ und insbesondere:

$$F_5 = \frac{5}{3} a_5^2 \qquad F_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} a_3^2 .$$

Der Fünfecksinhalt stammt, wie Heron sagt, daher, daß

$$\sqrt{5} \sim \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$$

gesetzt wurde. Ein genauerer Wert sei auffindbar, wenn ein genauerer Wert von $\sqrt{5}$ in Rechnung gezogen werde.

$$F_6 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a_6^2 ,$$

weil das Sechseck das Sechsfache eines über a_6 beschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist.

Zur Auffindung der Siebenecksseite führt der ausgesprochene aber unbewiesene Hilfssatz, sie sei nahezu gleich der Senkrechten vom Kreismittelpunkt auf die Sechsecksseite. Das entspricht rechnungsmäßig der Gleichung $a_7^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$, $a_7 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Man könnte auch $r\sqrt{3} = a_3$

[1]) Vgl. Heron III, 36 lin. 12 mit 46 lin. 10. [2]) Heron III, 46 ἑξῆς δὲ περὶ τῶν ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων εὐθυγράμμων γράφομεν ἄχρι τοῦ δωδεκαγώνου, ἐπειδὴ τοῦτο συνεγγίζει μᾶλλον τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ.

benutzen und $a_7 = \frac{1}{2} a_3$ schreiben, eine, wie wir im 34. Kapitel sehen werden, den Arabern geläufige Ausdrucksweise, deren sich Heron jedoch nicht bedient. Da Heron die Näherungsformel $a_7 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ nicht begründet, so muß sie vor ihm zur Genüge bekannt gewesen sein. Wir weisen nur mit einiger Schüchternheit auf Archimeds Siebeneck im Kreise (S. 307) als mögliche Quelle hin. Rechnungsmäßig kleidet sich der Satz, die a_7 sei die Senkrechte aus dem Kreismittelpunkte auf a_6, wie wir schon sagten, in die Gleichung $a_7 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Heron schreibt dafür $a_7 = \frac{7}{8} r$, und dieses entspricht der Annahme $\sqrt{3} \sim 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{49}{16}}$. Dann wird weiter $\sqrt{207} = 14\frac{1}{3}$ angenommen und daraus schließlich gefolgert

$$F_7 = \frac{43}{12} a_7^2 .$$

Zur Auffindung von F_8 bedient sich Heron der Fig. 64a. K ist der Mittelpunkt des Umkreises, $K\Lambda$ ist senkrecht zu ΔE gezogen und ΔM bildet mit ΔK einen Winkel von der Größe $\frac{1}{4}$ Rechter. Ebenso groß ist $\angle \Delta K \Lambda$ und mithin $\angle M \Delta \Lambda = \frac{1}{2}$ Rechter nebst $\angle M \Lambda \Delta = 1$ Rechter, woraus $\angle \Delta M \Lambda = M \Delta \Lambda$ und $\Delta \Lambda = \Lambda M$, $\Delta M^2 = 2 M \Lambda^2$, $\Delta M = M\Lambda \sqrt{2}$ folgt, wofür $\frac{17}{12}$ $M\Lambda$ gesetzt wird. Wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks $\Delta M K$ hat man also $\frac{KM}{M\Lambda} = \frac{17}{12}$, $\frac{KM + M\Lambda}{M\Lambda} = \frac{K\Lambda}{M\Lambda} = \frac{K\Lambda}{\Delta\Lambda} = \frac{17 + 12}{12} = \frac{29}{12}$ und $K\Lambda = \frac{29}{12} \Delta\Lambda = \frac{29}{24} \Delta E$. Ferner sieht man $\frac{K\Lambda \cdot \Delta E}{2} = \frac{29}{48} \Delta E^2$ als Fläche des Dreiecks $\Delta E K$, welches $\frac{F_8}{8}$ ist. Somit zeigt sich

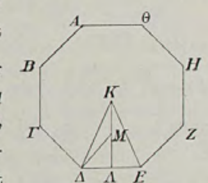

Fig. 64a.

$$F_8 = \frac{29}{6} a_8^2 .$$

Die Berechnung von F_9 geht von der der Schrift über die Geraden im Kreise, also Hipparch, entnommenen Formel aus, $3a_9$ sei annähernd der Durchmesser des Umkreises. Daraus folgt unter abermaliger Anwendung von $\sqrt{2} \sim \frac{17}{12}$, daß

$$F_9 = \frac{51}{8} a_9^2 .$$

Der Näherungswert $\sqrt{2} \sim \frac{17}{12}$ ist offenbar gewonnen, indem zuerst $\sqrt{2} \sim 1 + \frac{1}{2}$, dann $\sqrt{2} \sim \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$ gesetzt wurde.

Ausgehend von bei Berechnung von F_5 gewonnenen Werten gelangt Heron zu

$$F_{10} = \frac{15}{2} a_{10}^2.$$

Sei (Fig. 64b) $ZH = a_{11}$, $Z\Xi$ Durchmesser, NH Halbmesser des Umkreises. Die Dreiecke ZHN, ΞHN haben bei gleichen Grundlinien ZN, ΞN die gemeinschaftliche Spitze in H, sind also einander gleich, und ihre Summe $ZH\Xi$ ist das Doppelte des Dreiecks ZNH, welches selbst $\frac{F_{11}}{11}$ ist. Heron führt diesen Beweis nicht, zieht nicht einmal die Hilfslinie NH, sondern setzt sofort das Dreieck $ZH\Xi$ $= \frac{2}{11} F_{11}$ und bemerkt, es sei rechtwinklig, weil $\angle ZH\Xi$ ein Winkel im Halbkreise sei. Nun entnimmt er wieder der Schrift über die Geraden im Kreise $\Xi Z = \frac{25}{7} a_{11}$. Ist dieses richtig, so ist $\Xi H = \sqrt{\left(\frac{25}{7} a_{11}\right)^2 - a_{11}^2}$ $= a_{11} \sqrt{\frac{576}{49}} = \frac{24}{7} a_{11}$ und das Dreieck $ZH\Xi$ ist $\frac{12}{7} a_{11}^2$ sowie

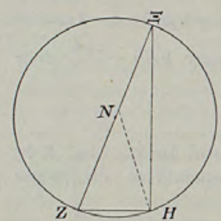

Fig. 64b.

$$F_{11} = \frac{66}{7} a_{11}^2.$$

Bei dem Nachweise von

$$F_{12} = \frac{45}{4} a_{12}^2$$

ist wieder geometrisch verfahren ohne auf Hipparch zurückzugreifen. Die dabei auftretende $\sqrt{3}$ ist ebenso wie bei der Aufsuchung von F_7 durch $\frac{7}{4}$ ersetzt. Wir erkennen also in dieser Gruppe von Sätzen die wiederholte Anwendung von

$$\sqrt{2} \sim \frac{17}{12} \qquad \sqrt{3} \sim \frac{7}{4}.$$

Auf die geradlinig begrenzten Figuren folgen die mit gekrümmter Begrenzung, bei welchen Heron ausdrücklich erklärt, er bediene sich von Archimed herrührender Sätze; insbesondere wird $\pi = \frac{22}{7}$ fortwährend benutzt. Den Kreisabschnitt, welcher kleiner als ein Halbkreis ist, und welcher die Sehne s als Grundlinie und Höhe h besitzt,

maßen die Alten ziemlich ungenau[1]), indem sie seinen Inhalt als $\frac{s+h}{2} \cdot s$ angaben. Heron fügt hinzu, diese Formel sei richtig beim Halbkreise, sofern $\pi = 3$, und davon hätten die Alten Gebrauch gemacht und die Formel auch noch verallgemeinert. In der Tat ist bei $\pi = 3$ die Fläche des Halbkreises $\frac{3r^2}{2} = \frac{2r+r}{2} \cdot r$, während $2r = s$, $r = h$ ist. Ein etwas genaueres Ergebnis fand man, fährt Heron fort, mittels der Formel $\frac{s+h}{2} \cdot s + \frac{1}{14}\left(\frac{s}{2}\right)^2$, und diese passe auf den Halbkreis bei $\pi = 3\frac{1}{7}$. In der Tat ist dann die Fläche des Halbkreises $\frac{3\frac{1}{7} r^2}{2}$ $= \frac{2r+r}{2} \cdot r + \frac{1}{14}\left(\frac{2r}{2}\right)^2$. Als dritte genauere Methode lehrt Heron ein der archimedischen Parabelquadratur (S. 304) nachgebildetes Verfahren, welches dahin mündet, daß man dem Kreisabschnitte ein gleichschenkliges Dreieck einzeichnet, welches sich dann zu dem Abschnitte nahezu wie $3:4$ verhält. Bei dieser Gelegenheit nennt Heron die Abhandlung Archimeds unter dem sonst nicht überlieferten Namen Ephodikon[2]). Ist der zu messende Kreisabschnitt größer als der Halbkreis, so wird er zum ganzen Kreise durch einen anderen Kreisabschnitt ergänzt, der als kleiner als der Halbkreis nach dem soeben gelehrten Verfahren berechnet wird; die ganze Kreisfläche kennt man auch; man hat also das Gesuchte als Unterschied zweier bekannter Größen. Heron lehrt weiter unter fortwährender Nennung des Archimed, als desjenigen, dem er folge, die Messung der Ellipse, der Parabel, der Oberfläche des Zylinders, des Kegels, der Kugel, des Kugelabschnittes. Er schließt das Buch mit der Vorschrift, eine unregelmäßig begrenzte ebene Figur durch eine nahezu ihr gleiche geradlinig begrenzte Figur zu ersetzen, deren Fläche man berechnen könne, eine unregelmäßig gekrümmte Oberfläche aber, wie z. B. die einer Statue, mit dünnem Papyrus zu belegen, welchen man loszulösen und eben auszustrecken vermöge, worauf er als unregelmäßig begrenzte ebene Figur gemessen werde.

Das 2. Buch wendet sich dem Rauminhalte der Körper zu. Die in Anwendung tretenden Formeln sind zumeist als von Archimed herrührend bezeichnet. Es handelt sich um gerade Zylinder, um Kegel, um schiefe Zylinder, um parallelepipedische Körper, um Prismen, um Pyramiden, um Pyramidenstumpfe, um Kegelstumpfe, um Kugeln,

[1]) Heron III, 72 τὸ δὲ τμῆμα τοῦ κύκλου τὸ ἔλαττον ἡμικυκλίου οἱ μὲν ἀρχαῖοι ἀμελέστερον ἐμέτρουν. [2]) Heron III, 80 lin. 12. Vgl. auch W. Schmidt, Archimedes' Ephodikon in der Bibliotheca Mathematica 3. Folge Bd. I, 13 bis 14 (1900).

um Kugelabschnitte, um spirische Körper (S. 242), um Zylinderhufe, um die fünf regelmäßigen Körper Platons. Bei Gelegenheit der spirischen Körper ist von einer Schrift des Dionysodor[1]) über die Spiren die Rede. Dieser aber ist, wie wir vermuten, Herons Zeitgenosse und wird uns im 20. Kapitel wieder begegnen. Den Schluß des 2. Buches bildet die Ausmessung des Körperinhaltes unregelmäßig begrenzter Gebilde nach einer Methode, welche, wie einige erzählen, von Archimed herrühre[2]). Bewegliche Körper werden in ein bis zum Rande mit Wasser gefülltes Gefäß geworfen, um Wasser zum Auslaufen zu bringen, dessen Menge man an dem Höhenunterschied der nach Herausziehung des Körpers noch übrigen Flüssigkeit erkennt. Unbewegliches wird durch einen Überzug von Wachs oder Lehm in ausmeßbare parallelepipedische Gestalt gebracht, und ebenso verfährt man mit dem abgekratzten Überzug, um den Unterschied zweier bekannter Körperinhalte als Antwort auf die gestellte Frage bilden zu können.

Das 3. Buch ist das von den Teilungen. Wir wissen von einer fast genau ebenso betitelten Schrift des Euklid (S. 287), von welcher aber die Bearbeitung Herons wesentlich abweicht. Die Aufgaben sind zwar vielfach die gleichen, z. B. ein gegebenes Dreieck durch eine der Grundlinie parallele Gerade in einem gegebenen Verhältnisse zu teilen, aber während Euklid sich mit allgemeinen Konstruktionsvorschriften begnügte, ist Heron bestrebt, mit den zahlenmäßig gegebenen Längen der einzelnen Dreiecksseiten zu rechnen. Er sucht sogar wie weit von der Dreiecksspitze entfernt die gesuchten Durchschnittspunkte der verlangten Parallelen mit beiden Dreiecksseiten sind, weil, wie er ausdrücklich hervorhebt[3]), es auf dem Felde wegen der Unregelmäßigkeiten des Bodens schwierig sei eine Parallele zu ziehen. Nur wo eine Rechnung anzustellen ihm nicht gelingt, begnügt er sich mit der Angabe von Konstruktionen teilweise auf andere Schriftsteller verweisend. In diesem Zusammenhange erscheint die oben (S. 364) von uns erwähnte Berufung auf den Raumschnitt[4]). Ferner geht Heron auch in der Beziehung über Euklid hinaus, daß er nach den Teilungen ebener Figuren auch solche von gekrümmten Oberflächen und solche von Körpern behandelt. So soll z. B. eine Pyramide durch eine der Grundfläche parallele Ebene geteilt werden, so daß zwischen der an der Spitze losgetrennten kleineren Pyramide und der ursprünglichen ein gegebenes Zahlenverhältnis obwalte. Diese Aufgabe führt[5]) zur näherungsweisen Ausziehung der $\sqrt[3]{100}$, von welcher

[1]) Heron III, 128 lin. 3. [2]) Ebenda III, 138. [3]) Ebenda III, 144 lin. 15 bis 16. [4]) Ebenda III, 162 lin. 2 und 166 lin. 14. [5]) Ebenda III, 178 lin. 3—16.

wir oben (S. 374) geredet haben. Den Schluß des Buches bildet die archimedische Aufgabe der Teilung einer Kugel bei gegebenem Verhältnisse der beiden durch den Schnitt gebildeten Kugelabschnitte.

Wollen wir nach dieser Inhaltsangabe der Vermessungslehre noch in Kürze eine Kennzeichnung des Werkes geben, so dürfen wir sagen, es seien Elemente der rechnenden Geometrie dort gelehrt. Verfasser der ersten derartigen Schrift war Heron wohl kaum, so wenig als Euklid der Verfasser der ersten Elemente der konstruierenden Geometrie war. Nur hat Euklid einen Proklus gefunden, welcher uns über die Vorgeschichte seines Werkes belehrt, während wir von einem Kommentare zu Heron nichts wissen. Dagegen sagt uns die übereinstimmende Überlieferung aller Völker, daß die praktische Feldmessung der eigentlichen wissenschaftlichen Geometrie, der theoretischen Raumlehre, vorausging und diese erfinden ließ. Mag auch in den griechischen Staaten im engeren Sinne des Wortes die Geometrie häufiger ihrer theoretischen als ihrer praktischen Richtung nach behandelt worden sein, wie schon daraus hervorgeht, daß das Wort Geodäsie überhaupt erst seit der Zeit des Aristoteles (S. 252) in der griechischen Literatur nachgewiesen werden kann, Herons Tätigkeit verweist nach Alexandria, auf ägyptischen Boden, wo seit Jahrtausenden die Kunst der Feldmessung blühte, wo die Harpedonapten, Seilspanner, wie der alte Grieche sie nannte (S. 104), ihr Handwerk übten, an welches wir uns bald erinnern müssen. Auch Euklids Aufenthalt in Ägypten ist verbürgt, und eine Spur feldmesserischer Vorschriften fanden wir in seiner Optik (S. 294). Die ägyptischen Feldmesser müssen dem erhaltenden Wesen ägyptischer Bildung entsprechend gewisse Vorschriften, wie man zu verfahren habe, mündlich oder wahrscheinlicher schriftlich unter sich vererbt haben. Ihr Erbe muß auf Heron gelangt sein. Ohne Zweifel hat er es verstanden dieses Erbe wuchern zu lassen. Ihm, wenn er nicht in Dikaearch und Eratosthenes Vorgänger hatte (S. 257), ist vielleicht die Erfindung der Dioptra zuzuschreiben, während man früher mit mangelhafteren Vorrichtungen sich begnügte, aber Vorrichtungen hatte man, z. B. den sogenannten Stern, und deren Gebrauch muß, wir wiederholen es, eine ältere mündlich oder schriftlich überlieferte Feldmeßkunst gelehrt haben. Der letzte geodätische Schriftsteller blieb Heron allerdings für lange Zeit. Euklid und Heron waren nachgerade ihrer Persönlichkeit beinahe entkleidet worden. Sie waren Titel von Schulbüchern geworden, welche auch zu Völkern drangen, die in anderen Sprachen als in der griechischen dachten und redeten. Mochten in diesen „Euklid" der Theoretiker, in diesen „Heron" der Praktiker Dinge eingedrungen sein, an welche der lebende Euklid, der lebende Heron nie gedacht hatte, für die Nachkommen blieb es der „Euklid", der „Heron". Ja, es ist gar nicht unmöglich, daß bei derartigem nebeneinander hergehendem Gebrauche aus dem „Euklid" dieses oder jenes, z. B. Definitionen, in den „Heron" überging; auch das Entgegengesetzte wäre möglich, wenn es gleich an Beispielen dafür uns fehlt, aber die heronische Dreiecksformel etwa hätte samt ihrem Beweise ganz gut in eine Handschrift des Euklid eindringen können.

Gehen wir nun zur Feldmeßkunst des Heron über, wie sie in der Abhandlung über die Dioptra[1]) beschrieben ist, und beginnen wir mit der Schilderung der Dioptra selbst. Sie bestand aus einem 4 Ellen langen Lineal, welches an beiden Enden Plättchen zum Hindurchvisieren, oder, wie man heute sagt, Dioptervorrichtungen trug. Sie ruhte auf einer kreisrunden Scheibe, auf welcher sie in Drehung versetzt werden konnte, und eine vertikale Drehung war mit der Scheibe auf einem die ganze Vorrichtung tragenden Fuße ermöglicht. Wir dürfen in der Dioptra den Keim des Theodoliths der neueren Feldmeßkunst erkennen. Sie diente zum Abstecken von Geraden in den mannigfachsten Richtungen, wenn auch eine Winkelmessung auf dem Felde nicht stattfand. Um eine Senkrechte zu einer gegebenen Richtung sich zu verschaffen, dienten senkrecht zueinander eingeritzte Gerade auf der Dioptrascheibe, von deren ersten bis zur zweiten die Dioptra gedreht werden mußte, um einen rechten Winkel zu erhalten. Den oben erwähnten vorheronischen Stern bildeten zwei in horizontaler Ebene sich rechtwinklig schneidende Lineale, also eine Art von Winkelkreuz. Die Vorrichtung zum Hindurchvisieren aber fehlte, und ebenso fehlten verschiedene Hilfsapparate, die mit der Dioptra in Verbindung standen. Bei ihr war die vertikale Stellung des Fußes verbürgt durch einen herabhängenden Bleisenkel, welcher längs einer auf dem Fuße eingeritzten Geraden seinen Verlauf nehmen mußte. Die Horizontalität der Scheibe entnahm man einer Wasserwage. Statt beider mußten bei dem Sterne Bleisenkel dienen, welche an den 4 Enden des Winkelkreuzes hingen, welche aber, wie Heron tadelnd hervorhebt, namentlich bei einigermaßen stark gehendem Winde, nicht leicht zur Ruhe kamen und somit die Brauchbarkeit des Apparates, welche von der gesicherten richtigen Aufstellung untrennbar ist, wesentlich verringerten. Mit Hilfe der Dioptra und abgeteilter selbst mit Bleisenkel versehener Signalstangen wurden die wichtigsten Aufgaben auf dem Felde gelöst. Nivellierungen; Ab-

[1]) *Ἥρωνος Ἀλεξάνδρεως περὶ διόπτρας* abgedruckt mit französischer Übersetzung von Vincent, mit den Anmerkungen von Venturi und Vincent in den *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale* XIX, 2 (Paris 1858) und mit deutscher Übersetzung von Herm. Schöne in Heron III, 187 sqq.

steckung einer Geraden zwischen zwei Punkten, deren keiner von dem anderen aus gesehen werden kann; Bestimmung der Entfernung eines sichtbaren aber unzugänglichen Punktes; Auffindung der Breite eines Flusses, ohne ihn zu überschreiten; Auffindung der Entfernung zweier Punkte, die beide sichtbar, beide unzugänglich sind; Absteckung einer Senkrechten zu einer unzugänglichen Geraden in einem unzugänglichen Punkte derselben; Bestimmung der Höhe eines entfernten Punktes über dem Standorte des Beobachters; Aufnahme eines Feldes; Wiederherstellung der mit Ausnahme von 2 oder 3 durch Grenzsteine gesicherten Punkten verloren gegangenen Umfriedigung eines Feldstückes unter Anwendung des vorhandenen Planes: das dürften etwa die interessantesten Aufgaben sein, welche Heron in seiner Schrift von der Dioptra behandelt hat, bei späteren Aufgaben stets früher gelehrte Operationen benutzend, wodurch das Einheitliche dieser Abhandlung sich erweist.

Es würde zu weit führen, wollten wir genau schildern, in welcher Weise Heron jedesmal verfährt. Nur die beiden letztgenannten Aufgaben müssen aus besonderen Gründen hier zur Rede kommen. Die Aufnahme eines Feldes erfolgt durch Absteckung eines Rechtecks, welches 3 seiner Eckpunkte auf der Umgrenzung selbst besitzt. Die Seiten dieses Rechtecks werden nun freilich mit den Grenzen des Feldes nicht zusammentreffen, aber die zwischenliegenden Grenzstrecken bestimmen sich durch die senkrechten Entfernungen einzelner Punkte derselben von den Rechtecksseiten unter genauer Bemerkung derjenigen Punkte der Rechtecksseiten, in welche jene meist kleinen Senkrechten eintreffen. Der geschickte Feldmesser wird, nach Herons ausdrücklicher Vorschrift, es so einzurichten wissen, daß die Grenze zwischen zwei zur Bestimmung ihrer Endpunkte dienenden Senkrechten leidlich geradlinig aussieht. Wenn wir noch so vorsichtig uns davor hüten wollen, neue Gedanken in alte Methoden hineinzulesen, hier müssen wir ein bewußtes Verfahren mit rechtwinkligen Koordinaten erkennen. Nicht als ob wir behaupten wollten, Heron habe nach einem gemeinsamen Gesetze gesucht, welchem die vertikalen und horizontalen Entfernungen zu bestimmender Punkte von gegebenen Linien gehorchen, das tut nicht einmal die moderne Feldmeßkunst, welche sehr wohl empirische Linien von geometrischen Kurven zu unterscheiden weiß. Aber denken wir daran, daß Hipparch (S. 362) die Erde mit Koordinaten überzog, welche die Lage jedes Punktes derselben bestimmen sollten, daß dieser die Breite von dem Äquator, die Länge von dem Meridiane von Rhodos, mithin von ganz genau definierten Anfangslagen beginnen und messen ließ, so werden wir in Herons Verfahren die Wiederholung auf kleinerem Felde finden von dem, was sein etwas älterer Zeitgenosse für die Erde in ihrer Gesamtoberfläche gelehrt hat, beide vielleicht abhängig von uralten Vorbildern, aber über jene hinausgehend. Wir erinnern daran, daß um 1400 die ägyptischen Bildhauer unter König Seti I. die mit Bildwerk zu versehenden Wände zunächst mit einem Netze kleiner Quadrate überzogen (S. 108). Das waren auch Koordinaten. Aber ob und wie Linien der beabsichtigten Figuren in diese Quadratchen hineinfielen, dürfte an sich unerheblich gewesen sein. Vermutlich sollten nur bei der Ausführung im großen dieselben Verhältnisse beibehalten werden, welche der Künstler in seiner Handskizze dem Augenmaße oder der Übung nach sich vorgezeichnet hatte. Jetzt entwarf Heron kleinere rechtwinklige Figuren zu bestimmtem Zwecke und wählte Zahl und Entfernung der Senkrechten in bewußter Beliebigkeit. Früher war es eine zufällige, jetzt eine absichtliche Bestimmung einzelner Punkte mittels senkrecht zueinander gezeichneter Strecken.

Nicht minder lehrreich ist für uns die Rückübertragung des gezeichneten Planes auf das Feld, wenn nur einige Punkte desselben gegeben sind. Erhalten seien (Fig. 65) die Grenzsteine α, β, deren Inschriften gestatten, sie auf dem Plane zu identifizieren; gesucht werden die beiden Hauptrichtungen auf dem Felde, welche zueinander senkrecht dem ganzen Plane als Grundlage dienen, so daß wenn z. B. $\alpha\gamma$ einer dieser Hauptrichtungen gleichlaufend und $\beta\delta$ zu ihr senkrecht wäre, die Längen $\alpha\delta$, $\beta\delta$ mit den Inschriften der beiden Grenzsteine in Einklang stehen.

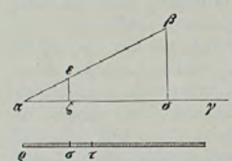

Fig. 65.

Jedenfalls kann man auf dem Felde $\alpha\beta$ abstecken und auf dieser Strecke einen Punkt ε ziemlich nahe bei α sich genau bemerken. Nun ist auf dem Plane das Dreieck $\alpha\beta\delta$ bekannt und vermöge der erfolgten Abmessung von $\alpha\beta$ auch das Verhältnis der Längen auf dem Plane zu denen auf dem Felde. Das Dreieckchen $\alpha\varepsilon\zeta$ muß dem $\alpha\beta\delta$ ähnlich sein, aus der gemessenen Länge $\alpha\varepsilon$ folgen daher durch Rechnung die Längen von $\alpha\zeta$ und $\zeta\varepsilon$, welche auf einem Seile $\varrho\sigma\tau$ durch Strichelchen angemerkt werden. Nun befestigt man dieses Seil mit ϱ in α, mit τ in ε und spannt es in σ an, so wird bei σ ein rechter Winkel entstehen und ζ gefunden sein und damit zugleich die Richtung $\alpha\zeta\delta\gamma$. Das geschichtlich Bedeutsame bei diesem Verfahren besteht darin, daß der rechte Winkel durch Anspannung eines Seiles gewonnen wird, welches mit zwei durch Striche oder Knoten bezeichneten Stellen an zwei Pflöcken im Boden befestigt wurde. Das ist ja nichts anderes als die ägyptische **Seilspannung** (S. 104—106) bei der Grundsteinlegung der Tempel, ein Verfahren, welches, wie wir wissen, vielleicht schon zur Zeit des Königs Amenemhat I. um das Jahr 2300 nicht wesentlich anders geübt worden war als 237 bei der Gründung des Tempels von Edfu. Damit gewinnt aber auch die Vermutung einigen Halt: im Jahre 237 werde man etwa so verfahren sein, wie im ersten vorchristlichen Jahrhunderte, und das letztere uns genau bekannte Verfahren sei mit einigen Abänderungen, wie wir früher auszusprechen wagten, in ältester Zeit bereits zur Erlangung rechter Winkel benutzt worden. Natürlich können die damals angenommenen Zahlen für die gegenseitigen Entfernungen der drei Knoten hier, wo es sich um Herstellung eines einem bestimmten rechtwinkligen Dreiecke ähnlichen Dreiecks handelt, nicht zur Bestätigung kommen. Noch eine Veränderung ergab sich, wie wir finden, im Laufe der Jahrhunderte. Demokritus nannte die Seilspanner Harpedonapten, das Seil selbst also Harpedon mit einem Worte, dessen Klang schon den ägyptischen Ursprung verrät. Zu Herons Zeit führte das aus Binsen geflochtene Seil den griechischen Namen Schoinion und wurde, wie es in einer Heron zugeschriebenen Schrift heißt[1]), abwechselnd mit dem Rohre, Kalamos, zu Messungen benutzt. Wir bemerken hierzu beiläufig, daß *κάλαμος* und das dem *σχοινίον* nahe verwandte *σχοῖνος* neben der allgemeinen Bedeutung Meßstab und Meßschnur auch die besonderer und zwar untereinander verschiedener Maße besitzen.

Wir haben noch bei einem Paragraphen der Schrift über die Dioptra zu verweilen, der den Beweis für die sogenannte heronische Dreiecksformel liefert und ganz genau mit der entsprechenden Stelle der Vermessungslehre[2]) übereinstimmt. Wir stehen hier einer ganz ähnlichen Erscheinung gegenüber wie bei der Einschaltung zweier mittleren geometrischen Proportionalen zwischen zwei gegebene Strecken. Heron hat sein Verfahren sowohl der Mechanik als der Vorschrift zur Anfertigung von Geschützen einverleibt, und Pappus hat uns sein Erfinderrecht ausdrücklich bestätigt. Für unser Gefühl, das betonen wir jetzt nachträglich, war jene Bestätigung überflüssig. Man kann wohl einen wichtigen Satz in zwei verschiedenen Werken zur Anwendung bringen, aber man verbindet nicht an beiden Stellen mit dem Satze auch seinen Beweis, wenn nicht ein gewisses Selbstgefühl uns dazu treibt. Ebenso beurteilen wir, wo uns zufällig keine Bestätigung durch einen Dritten vorliegt, die wiederholte Mitteilung der Formel für den Dreiecksinhalt samt ihrem Beweise. Sie ist und bleibt für uns die heronische Dreiecksformel, benannt nach ihrem geistvollen Erfinder.

[1]) Heron (ed. Hultsch) II, 43. [2]) Vgl. Heron III, 280 sqq. mit 20 sqq.