4. Kapitel.

Die Griechen. Zahlzeichen. Fingerrechnen. Rechenbrett.

Wir verlassen die Länder ältester, aber bis vor kurzem und teilweise bis auf den heutigen Tag weniger bekannter Kulturentwicklung. Wir gehen über zu dem Volke, von dessen Bildung wir selbst, der Schreiber wie der Leser, bewußt oder unbewußt, unmittelbar oder mittelbar die merkbarsten Spuren in uns tragen, dessen Schriftsteller uns schon wiederholt als willkommene Ergänzungen dienten, wenn für andere Länder die einheimischen Quellen allzu spärlich flossen, und wir sind geneigt zu erwarten, hier werde geschichtliche Gewißheit uns entgegentreten, jede bloße Vermutung überflüssig machend und darum ersparend. Aber diese Erwartung wird getäuscht. Die Geschichte der griechischen Mathematik, allerdings durch Schriften einzelner hervorragender griechischer Mathematiker selbst unserem Erkennen näher gerückt, ist doch nichts weniger als durchsichtig, als vollständig. Bald, und nicht bloß bei den ersten Anfängen, stehen wir an Lücken, an unvermittelten Übergängen, welche uns nötigen, um nur einigermaßen Bescheid zu erhalten, Schriftsteller zu befragen, deren Glaubwürdigkeit uns selbst nicht gegen jeden Zweifel geschützt ist, oder gar zu eigenen Vermutungen unsere Zuflucht zu nehmen, welche die gähnende Spalte uns überbrücken müssen. Wir glauben unter der Bedingung, daß wir unseren Lesern sagen, was gewiß, was nur möglich sei, eine solche hypothetische Darstellung nicht vermeiden zu sollen, wo der Mangel an sicherer Überlieferung uns dazu nötigt.

Einst flossen die Quellen ergiebiger. Es war eine Eigentümlichkeit der durch Aristoteles gegründeten peripatetischen Schule einen Urheber für jeden Gedanken ausfindig machen zu wollen. Dieser Hang verblieb auch den in Alexandria heimisch gewordenen, dort mit fremdartigen Elementen sich mengenden Peripatetikern. Man suchte allerdings von hier aus mit einer gewissen Vorliebe die Lehren griechischer Philosophen auf einen nichtgriechischen Ursprung zurückzuführen[1]), und mit dieser Neigung nimmt die Zuverlässigkeit solcher

---

[1]) Nietzsche, *De Laertii Diogenis fontibus* im Rheinischen Museum XXIV, 205. Frankfurt a. M. 1869.

Angaben wesentlich ab, sofern nicht andere Gründe obwalten, den Glauben an jene Aussagen wieder zu verstärken. Wir rechnen dazu vornehmlich zweierlei. Erstens erhöht es für uns die Bedeutung eines Ursprungszeugnisses aus fremdem Lande, wenn wir selbst dort Erzeugnissen begegnet sind, die dem, was als eingeführt bezeichnet wird, wesentlich gleichen. Zweitens vertrauen wir mit rückhaltloserer Hingebung den Aussprüchen eines Mannes, der als Sachverständiger, als Fachmann redet; ja wir benutzen lieber einen der Zeit nach späteren Mathematiker als Gewährsmann für früher Erdachtes als einen dem Ursprunge gleichaltrigen Laien, der die Jahre, um welche er den Ereignissen näher lebte, dadurch unwirksam macht, daß er dem Inhalte derselben fern stand.

Mit vollstem Vertrauen würden wir daher die Geschichte der Geometrie, der Sternkunde, der Arithmetik als Quelle benutzen, welche Theophrastus von Lesbos, der Schüler des Aristoteles, verfaßt haben soll[1]), wenn dieselben uns auch nur in Spuren erhalten wären. Gern würden wir den gleichaltrigen Xenokrates in seinen Büchern über die Geometer[2]) als Führer wählen — vorausgesetzt, daß dieser Titel und nicht der „über Geometrisches" die richtige Lesart bildet — wenn nicht auch sie durchaus verschollen wären. Mit Freuden bedienen wir uns der Bruchstücke historischer Schriften über Geometrie und Astronomie, die ein dritter Schriftsteller aus der Zeit der unmittelbarsten aristotelischen Schule verfaßt hat: Eudemus von Rhodos[3]). Es sind, wie wir es ausgesprochen haben, nur Bruchstücke dieser Bücher bekannt, welche von anderen Schriftstellern abgeschrieben und gelegentlich, teils mit Nennung des Verfassers, teils mit bloßer Andeutung desselben, ihren Werken einverleibt wurden, aber jedes einzelne Stückchen läßt den Wert des Verlorenen ermessen, seinen Verlust bedauern.

Neben diesen eigentlichen Geschichtsschreibern der Mathematik haben auch andere Fachmänner, Kompilatoren und Kommentatoren mathematischer Schriften, uns manche wertvolle Bemerkung hinterlassen, die wir dankbarst benutzen werden. Geminus von Rhodos, Theon von Smyrna, Porphyrius, Jamblichus, Pappus, Proklus, Eutokius sind die Namen solcher Verfasser, von denen wir mehr als nur einmal zu reden haben werden.

Die Überlieferungen nun in dem Sinne und Umfange benutzt, wie wir es vorausschickend erläutert haben, und unter fernerer Zuziehung auch nichtmathematischer Schriftsteller, wenn keine andere

[1]) Diogenes Laertius V, 48—50. [2]) Diogenes Laertius IV, 13. [3]) *Eudemi Rhodii Peripatetici fragmenta quae supersunt* ed. L. Spengel. Berlin 1870. Die mathematischen Bruchstücke S. 111—143.

Wahl uns bleibt, belehren uns darüber, daß in dem weiten Ländergebiete, in welchem griechisch gesprochen und griechisch gedacht wurde, und welches deshalb für die Kulturgeschichte Griechenland heißt, wenn es auch keineswegs geographisch mit dem Königreiche Griechenland unseres Jahrhunderts sich deckt, die Mathematik weder gleichzeitig auftrat noch ebenmäßig sich entwickelte. Die kleinasiatische Küstengegend südlich von Smyrna und die davor liegende Inselwelt waren der Schauplatz der ältesten ionischen Entwicklung. Süditalien und Sizilien mit ihrer dorischen Bevölkerung nahmen sodann in weit stärkerem Maßstabe an der Fortbildung Anteil. Jetzt erst als dritter Boden, auf welchem eine dritte Stufe erreicht ward, erscheint das eigentlich griechische Festland, erscheint namentlich Athen in der Geschichte der Mathematik. Aber auch von dort entfernt sich die Schule der vorzüglichsten Mathematiker. Auf ägyptischem Boden entsteht eine griechische Stadt, Alexandria, und dort blühen oder lernen doch wenigstens die großen Geometer eines Jahrhunderts, welchem an Bedeutsamkeit für die Entwicklung der Mathematik nur ein einziges an die Seite gestellt werden kann, sofern unsere Gegenwart geschichtlicher Betrachtung sich noch entzieht: das Jahrhundert von der Mitte des XVI. bis zur Mitte des XVII. S., das Jahrhundert der beginnenden Infinitesimalrechnung. Die großen Geisteshelden des euklidischen Zeitalters hatten ihre Epigonen, die, wenn sie teilweise auch an anderen Orten aufgesucht werden müssen, noch immer in Alexandria wurzeln. Dort zeigt sich in verschiedenen Jahrhunderten wiederholt eine Nachblüte unserer Wissenschaft, die edle Früchte hervorzubringen imstande ist. Männer wie Heron, wie Klaudius Ptolemäus, wie Pappus stehen keinem Mathematiker der euklidischen Zeit an persönlicher Geistesgröße nach, nur die Dichtigkeit ihres Auftretens in einander nahe liegenden Zeiträumen fehlt, und damit das eigentlich kennzeichnende Merkmal der großen alexandrinischen Epoche. Endlich kehrt die griechische Mathematik matt und absterbend nach Hellas zurück. Athen und die im ehemaligen Thrakien entstandene Welthauptstadt Byzanz sehen den Untergang unserer Wissenschaft, den Untergang derselben für die dortige Gegend. Weiter westlish wohnenden Völkern geht sie zur gleichen Zeit neu und strahlend auf[1]).

Wir haben mit wenigen Strichen den Rahmen uns entworfen, in welchen wir das Bild der griechischen Mathematik einzuzeichnen gedenken. Wir müssen mit dieser Einzelarbeit beginnen. Wir sind

[1]) Eine sehr umfassende Zusammenstellung gab G. Loria, Le scienze esatte nell' antica Grecia. Modena 1893—1902.

bei Babyloniern und Ägyptern von den niedrigsten Rechnungsverfahren und von der Bezeichnung der Zahlen ausgegangen als von Dingen, welche kein Volk auch nur in den Anfängen seiner geistigen Entwicklung entbehren kann, und welche die Vorstufe zu jedem mathematischen Denken bilden. Ähnlich werden wir hier verfahren. Wir werden das Zahlenschreiben, wir werden bis zu einem gewissen Grade das Rechnen der Griechen vorwegnehmen müssen.

Ob wir es eine Zahlenbezeichnung[1]) zu nennen haben, wenn in griechischen Inschriften die Zahlwörter ausgeschrieben gefunden werden, dürfte dahingestellt sein. Ebenso kann die Auflösung einer Zahl in lauter einzelne nebeneinander befindliche Striche, wie sie z. B. für die Zahl sieben noch in einer Inschrift von Tralles in Karien aus dem IV. vorchristlichen Jahrhunderte nachgewiesen ist, wie sie aber naturgemäß für eine nur noch etwas größere Zahl gar nicht denkbar ist, kaum als Zahlenbezeichnung gelten. Die älteste wirkliche Bezeichnung erfolgte durch Anfangsbuchstaben der Zahlwörter[2]). Ihre Spuren sollen hinaufrücken bis in die Zeit Solons, also etwa bis zum Jahre 600, während als untere Grenze das perikleische und nachperikleische Jahrhundert genannt wird, ja während Spuren bis auf die Zeit Ciceros hinabführen. Die benutzten Buchstaben sind folgende. Man schrieb Jota *Ι* für die Einheit, sei es nun, daß an eine altertümliche Form des Wortes für eins gedacht werden muß, sei es, daß nur ein gerader Strich gemacht wurde, der zufällig auch als Jota gedeutet werden kann. Für fünf wurde ein Pi *Π* geschrieben wegen *πέντε*, für zehn ein Delta *Δ* wegen *δέκα*. Hundert, *ἑκατόν*, bezeichnete man durch Eta *Η*, welches ursprünglich kein *e*-Laut, sondern wie später bei den Römern Aspirationszeichen war. Tausend *χίλια* und zehntausend *μύρια* endlich schrieb man mit Chi *Χ* und My *Μ*. Außerdem waren ebendieselben Buchstaben in- und aneinander geschrieben als Zusammensetzungen, durch welche die Produkte von fünf in Einheiten verschiedenen Ranges dargestellt werden sollten, in Gebrauch, und auch ein als „zehn mal tausend“ zusammengesetztes Zehntausend wird überliefert. Daß das Gesetz der Größenfolge stets gewahrt blieb, sei der Vollständigkeit wegen bemerkt. Wir bemerken ferner, daß diese Zeichen von Herodianus[3]), einem byzantinischen Grammatiker, der etwa 200 n. Chr. lebte, ge-

[1]) Ausführliches über Zahlenbezeichnung der Griechen in den Math. Beitr. Kulturl. 111—126. [2]) Außer den in den Math. Beitr. Kulturl. angeführten Quellen vgl. Koehler in den Monatsberichten der Berliner Akademie für 1865, S. 541 flgg. und Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen 1869, S. 9. [3]) Math. Beitr. Kulturl. 113.

schildert wurden und daß sie deshalb nicht selten herodianische Zeichen heißen.

Noch während der Jahrhunderte, durch welche jene Bezeichnung der Hauptsache nach verfolgt worden ist, bildeten sich zwei neue Methoden aus, beide zuverlässig nicht vor der sogenannten ionischen Schrift auftretend, deren sie sich bedienen, somit nicht vor 500. Näheres bringen wir weiter unten. Die eine dieser Methoden benutzt die 24 Buchstaben des ionischen Alphabets um die Zahlen 1 bis 24 dadurch auszudrücken. Nach ihr wurden die zehn Phylai der athenischen Richter mit fortlaufender Nummer versehen. Nach ihr gaben später die Alexandriner den Gesängen des Homer ihre Ordnungszahlen. Diese Methode so wenig wie die zweite Methode, welche wir dahin kurz erklären können, daß den einzelnen Buchstaben untereinander verschiedene aber in der natürlichen Zahlenreihe nicht immer unmittelbar sondern sprungweise aufeinanderfolgende Werte beigelegt werden, gehört den Griechen allein an. Wir müssen ihre Spuren auch anderwärts verfolgen und zu diesem Zwecke einschaltend von phönikischer, syrischer, hebräischer Zahlenbezeichnung reden.

Das eigentliche Handelsvolk der alten Welt waren die Phönikier, vielleicht die Fenchu ägyptischer Schriften. Sie durchfurchten als kühne Seefahrer und Seeräuber von ihren dicht an der Küste gegründeten Städten aus das Mittelmeer, welches ihnen Verkehrsstraße und Jagdgebiet war, überall Beziehungen unterhaltend, für welche Zahlenbekanntschaft unentbehrlich war. Dieselben Phönikier werden als Erfinder der eigentlichen reinen Buchstabenschrift gerühmt. Sie gingen mit dieser Erfindung weit hinaus über die Silben darstellenden Zeichen der Keilschrift wie auch über die Hieroglyphen, unter welchen eine Einheit der Bedeutung nicht herrschte, da unter ihnen wirkliche Buchstaben mit Silbenzeichen, mit Wortzeichen, ja mit solchen Zeichen wechselten, die selbst gar nicht ausgesprochen wurden, sondern als sogenannte Determinative die Aussprache anderer daneben geschriebener Zeichen regelten. Die phönikischen Buchstaben, 22 an der Zahl, sind aus hieratischen Zeichen der Ägypter, also ursprünglich aus Hieroglyphenbildern entstanden In dieser Annahme sind alle Sachkundige einig, höchstens daß einer den Durchgang durch hieratische Zeichen in Abrede stellend die phönikischen Buchstaben unmittelbar aus Hieroglyphen ableiten möchte. War nun diese Beschränkung auf einfachste Lautelemente in so geringer Anzahl schon ein ganz gewaltiger Schritt, so war es eine zweite wissenschaftliche Tat, wie man wohl sagen darf, den Buchstaben eine bestimmte Reihenfolge zu geben, aus ihnen ein Alphabet zu bilden. Die Ägypter scheinen allerdings auch hierin ein Vorbild gewesen zu sein[1]). Mariette hat versucht aus Inschriftsanfängen eine Reihenfolge ägyptischer Buchstaben herzustellen, aber wenn seinem Versuche mehr als bloße Vermutung zugrunde liegt, so war diese ägyptische Anordnung sicherlich eine andere als die der Phönikier und derjenigen Völker, die mit ihnen ein Alphabet besaßen. Phönikische Buchstaben in der späteren Ordnung scheinen bereits auf Tontafeln aus der Bibliothek des Assurbanipal (668—625) in Ninive vorzukommen. Bei den Hebräern ist die Ordnung für die Zeiten, in welchen verschiedene Psalmen[2]) gedichtet wurden, festgesichert, denn wenn auch nur eine nach unseren Begriffen zwecklose Spielerei mit Schwierigkeiten, Zufall kann es doch nicht sein, daß die Verse dieser Lieder der Reihe nach mit den Buchstaben des Alphabets beginnen, darin eine entfernte Ähnlichkeit mit der ersten Verwendung des griechischen Alphabets zur Numerierung der homerischen Gesänge bietend, auf welche wir oben anspielten. Noch eine andere Sicherung der Reihenfolge des hebräischen Alphabets gibt das sogenannte Athbasch, welches sicherlich der babylonischen Gefangenschaft angehört[3]). Es besteht darin, daß die 22 Buchstaben in zwei Reihen geordnet übereinander stehen, der letzte Buchstabe ת über dem ersten א, der vorletzte ש über dem zweiten ב usw. Diese vier Buchstaben je zwei und zwei zusammengelesen lauten eben Athbasch. Der Zweck dieser Anordnung war eine Geheimschrift zu liefern, indem jedesmal statt eines eigentlich anzuschreibenden Buchstabens der im Athbasch über beziehungsweise unter ihm stehende gesetzt wurde. Jedenfalls mußte also damals auch schon die gewöhnliche Ordnung der nämlichen Buchstaben erfunden sein. Wir sagen „erfunden", denn bei der vollendeten Prinziplosigkeit der Anordnung ist von einem inneren Gesetze derselben, welches nur entdeckt zu werden brauchte, gewiß keine Rede. Griechische Grammatiker haben sich zwar abgequält, Gründe dafür beizubringen, warum man die Buchstaben so, wie es geschah, und nicht anders ordnete, aber nur einer, Cheroboskos, dürfte das Richtige getroffen haben, wenn er sagt, niemand kenne den Grund der Anordnung[4]). War die Buchstabenfolge eine willkürliche, eine vielleicht

[1]) Für das Folgende vgl. insbesondere F. Lenormant, *Essai sur la propagation de l'alphabet phénicien.* Paris 1872. I, 101 flgg. [2]) Psalm 111, 112, 119, auch die Klagelieder des Jeremias fangen in aufeinanderfolgenden Versen mit den aufeinanderfolgenden Buchstaben des Alphabets an. [3]) Herzogs Realenzyklopädie für protestantische Theologie und Kirche VII, 205 und XIV, 17. [4]) *Grammatici Graeci III (Scholia in Dionysii Thracis Artem Grammaticam* ed. Alfred Hilgard. Leipzig 1901) pag. 485, 2 sqq. 492, 10 sqq. 496, 17 sqq. Die Stelle des Cheroboskos pag. 317, 15: *Αἰτίαν δὲ τῆς τάξεως ὄιδεν ὀυδὲ εἷς.*

erst nachträglich eingeführte, nachdem die Buchstaben als solche bereits bestanden, so ist vermutlich wieder ein besonderer Akt der Erfindung notwendig gewesen, um die geordneten Buchstaben mit Zahlenwerten zu versehen. Zwei Tatsachen stimmen namentlich zu dieser Vermutung. Die eine, daß auf keiner der zahlreichen phönikischen oder punischen Inschriften, auf keiner Papyrushandschrift sich eine Spur einer alphabetischen Zifferrechnung gefunden hat[1]); die andere, das notwendige Seitenstück zur ersten bildend, daß eine nichtalphabetische Zahlenbezeichnung der Phönikier bekannt ist.

Die Phönikier schrieben entweder die Zahlwörter aus, oder sie bedienten sich gewisser Zeichen, die den Grundgedanken der Juxtaposition, vielleicht wechselnd mit dem der Multiplikation, zur Anwendung brachten[2]). Eins bis neun wurde nämlich durch ebensoviele senkrechte Striche dargestellt. Zehn war meistens ein wagrechter Strich, der aber auch in mehr oder weniger nach oben gekrümmter oder einen Winkel bildender Form vorkommt. Die Zahlen 11 bis 19 wurden durch Juxtaposition eines Horizontalstriches mit Vertikalstrichen geschrieben, von welchen gemäß der von rechts nach links zu lesenden phönikischen Schrift dem Gesetze der Größenfolge gehorchend der Horizontalstrich am weitesten rechts sich befindet. Das nun folgende 20 ist durch zwei Horizontalstriche darzustellen, die aber nicht bloß parallel übereinander gezeichnet wurden, sondern auch schrägliegend und verbunden ⁄⁄, oder gar zu einer Gestalt N oder Λ sich veränderten. Jedenfalls trat es jetzt als einfaches neues Zeichen in Gebrauch, ein Vigesimalsystem in der Schrift einleitend. Ein letztes neues Zeichen kam, soweit die Inschriften bis jetzt ergeben haben, durch 100 hinzu |<| oder |ↄ|, was wohl als liegende Zehn zwischen zwei Einern zu denken ist, die in dieser Vereinigung eine verzehnfachende Wirkung üben, eine auffallende Erscheinung, welche aber auch nicht ganz vereinzelt dasteht, vielmehr in der römischen Zahlenbezeichnung ein Analogon besitzt.

Die phönikischen Inschriften, welchen diese Zeichen entnommen sind, reichen bis auf viele Jahrhunderte vor Christi Geburt zurück. Die Zeichen unterscheiden sich aber nicht sehr von anderen, welche vom Jahre 2 an bis zur Mitte des III. S. in Palmyra, dem heutigen Tadmor mitten in der syrischen Wüste, in Gebrauch waren[3]). Die

[1]) Diese Tatsache ist für Mathematiker zuerst bei Hankel S. 34 hervorgehoben und damit ein langezeit fortgeschleppter Irrtum beseitigt. [2]) Adalb. Merx, *Grammatica Syriaca.* Heft 1. Halle 1867. Tabelle zu pag. 17. [3]) Über palmyrenische Zahlzeichen vgl. Math. Beitr. Kulturl. S. 254. Zu den dort angegebenen Quellen tritt hinzu ein Aufsatz aus dem Nachlasse von E. F. F. Beer mit Erläuterungen von M. A. Levy in der Zeitschr. d. morgenl. Gesellsch. XVIII, 65—117, besonders S. 115.

Hauptverschiedenheit, abgesehen von Abweichungen in den Formen für 10 und 20, besteht darin, daß ein Zeichen für fünf in der Gestalt Y hinzugekommen ist und daß bei den Hunderten das multiplikative Verfahren durchgeführt ist. Das Zeichen für 10 wird nämlich hier zu 100, indem nur einseitig, und zwar rechts ein nach dem Gesetze der Größenfolge sonst unverständlicher Einheitsstrich ihm beigegeben ist, und gleicherweise werden 200, 300 usw. geschrieben, indem die Zeichen 2, 3 usw. sich rechts von dem für 10 befinden. Das eben beschriebene Zeichen von 100 nebst links folgendem 10 heißt dann natürlich 110, wird aber zum Zeichen von 1000, wenn noch ein horizontaler Deckstrich darüber kommt.

Wieder als Varianten der palmyrenischen Zeichen sind solche zu betrachten, welche in syrischen Handschriften des VI. und VII. S. aufgefunden worden sind[1]). Eine kleine Merkwürdigkeit bieten sie insofern dar, als hier eine Abweichung vom Gesetze der Größenfolge vorkommt. Während nämlich 1 durch einen Vertikalstrich, 2 durch zwei unten im Bogen zusammenhängende Vertikalstriche μ dargestellt wird, sollte 3 von rechts nach links so geschrieben werden, daß an die 2 eine 1 sich anfügte. Statt dessen steht rechts die 1 und links davon die 2, während im übrigen das oft genannte Gesetz befolgt wird.

Der Regel nach benutzten die Syrer allerdings die (S. 121) kurz erläuterte Buchstabenbezeichnung[2]). In einer freilich verhältnismäßig späten, jedenfalls so späten Zeit, daß von Anfängen einer Bezeichnungsweise unter keiner Bedingung die Rede sein kann, bedienten sie sich der 22 Buchstaben ihres Alphabetes, um der Reihe nach die neun Einer (1 bis 9), die neun Zehner (10 bis 90) und die vier ersten Hunderter (100 bis 400) zu bezeichnen. Die folgenden Hunderter wurden durch Juxtaposition gewonnen: $500 = 400 + 100$, $600 = 400 + 200$, $700 = 400 + 300$, $800 = 400 + 400$, $900 = 400 + 400 + 100$ oder durch die Buchstaben, welche vorher schon 50 bis 90 bezeichnet hatten und über die man zur Verzehnfachung ein Pünktchen setzte. Tausende schrieb man durch Einer mit unten rechts angefügtem Komma. Zehntausendfachen Wert erteilte den Einern und Zehnern ein kleiner darunter verlaufender Horizontalstrich. Vermillionfacht endlich wurde der Wert eines Buchstaben durch doppeltes Komma, d. h. also durch Vertausendfachung des schon Tausendfachen. Zur größeren Deutlichkeit pflegte man von diesen beiden Komma das eine von links nach rechts, das andere von rechts nach links zu

[1]) Auch diese Zeichen sind besprochen Math. Beitr. Kulturl. 256. [2]) Merx, *Grammatica Syriaca* pag. 14 flgg.

neigen. Auch Brüche kommen bei dieser Bezeichnung vor und zwar, wie es scheint, Stammbrüche, welche ähnlich wie bei den Ägyptern nur durch die Zahl des Nenners geschrieben wurden, während ein von links nach rechts geneigtes akzentartiges Strichelchen darüber sie als Brüche kenntlich machte.

Der syrischen Buchstabenbezeichnung der Zahlen ist wieder die der Hebräer sehr nahe verwandt. Wann dieselbe entstand, ist eine noch ziemlich offene Frage. Auf hebräisch geprägten Münzen ist nicht früher als 137 v. Chr. alphabetische Bezeichnung der Zahlen nachweisbar[1]). Eine derartige Zahlendarstellung findet sich ebenso wenig unmittelbar in den Büchern des Alten Testamentes. Nur ihre Anwendung zur Gematria bezeugt ihr Vorhandensein, und wenn diese wirklich bis zum VII. Jahrhundert hinaufreicht (S. 44), so ist das hebräische Volk dasjenige, bei welchem die älteste Spur des Zahlenalphabetes vorkommt, während im entgegengesetzten Falle Griechen auf die Priorität die gerechtesten Ansprüche haben und man alsdann anzunehmen hätte, es sei von den Griechen wieder nach Osten die Erfindung zurückgekehrt. So sehr diese Annahme der landläufigen vielleicht aus dem Alter der biblischen Schriften entstandenen Meinung widerspricht, wird man sich doch zu ihr bequemen müssen[2]). An jene durch Gematria zu erklärende Stelle bei Sacharja zu glauben, haben wir schon, als wir sie im 1. Kapitel erwähnten, Bedenken getragen. Gesicherte Spuren von Gematria finden sich nicht vor Philo von Alexandrien im ersten nachchristlichen Jahrhunderte. Das Wort Gematria ist kaum anders zu erklären als durch Buchstabenverstellung aus *γραμματεία*, und damit wäre der griechische Ursprung des Namens wenigstens gesichert. Benutzung des griechischen Zahlenalphabetes auf Münzen von Ptolemaeus II Philadelphus geht zurück bis 266 v. Chr., ist also um 130 Jahre älter als das älteste hebräische Vorkommen. Diese Umstände vereinigt sprechen dafür, die Erfindung des eigentlichen Zahlenalphabetes den Griechen zuzuschreiben. In der Tat wird als Ort dieser Erfindung von manchen Milet angenommen und als deren Zeitpunkt schon das VIII. vorchristliche Jahrhundert, weil damals in Milet gewisse nachmals außer Übung gekommene Buchstaben, deren später nur die Zahlenschreibung sich bediente (z. B. das Bau) in regelmäßigem Gebrauch waren. Jedenfalls sind beide Schreibweisen von Zahlen, die alphabetische und die herodianische, in einer Inschrift von Halikarnaß vor-

[1]) Nach einer Mitteilung von Dr. Euting an Hankel, die dieser S. 34 seines Geschichtswerkes angeführt hat. [2]) Gow, A short history of greek mathematics. Cambridge 1884, pag. 43—48, hat die Beweisgründe zusammengestellt.

handen, welche um 450 entstanden sein soll, wenn man sich mit diesem Zeitpunkt als ältest gesichertem befriedigt erklärt[1]). Das hebräische Alphabet von 22 Buchstaben reichte gleich dem syrischen bis zur Bezeichnung von 400. Für die höheren Hunderte half man sich wieder durch Zusammensetzungen. Später kam man auf eine andere Aushilfe. Fünf Buchstaben des hebräischen Alphabetes, diejenigen nämlich, welche den Zahlenwerten 20, 40, 50, 80, 90 entsprechen, besitzen zweierlei Gestalt, je nachdem sie am Anfange beziehungsweise in der Mitte eines Wortes auftreten, oder an dessen Ende, eine Eigentümlichkeit, welche mehrere orientalische Schriftarten mit der hebräischen teilen und wovon auch die sogenannte gotische Schrift in ſ und s ein Beispiel aufweist. Die fünf Finalbuchstaben nun benutzte man, um die Hunderte von 500 bis 900 darzustellen und hatte nun die Möglichkeit der Darstellung sämtlicher Zahlen bis zu 999. Bei einer Zahl, bei 15, benutzte man nicht die naturgemäße Bezeichnung $10 + 5$, sondern schrieb statt ihrer $9 + 6$. Der Grund davon war, daß die Buchstaben für 10 und 5 יה den Anfang des heiligen Namen Jehova bilden, der nicht entweiht werden darf durch unnötiges Aussprechen oder Schreiben[2]). Um die Tausende zu bezeichnen kehrte man wieder zum Anfange des Alphabetes zurück, indem jeder Buchstabe durch zwei über ihn gesetzte Punkte den tausendfachen Wert erhielt, und so war es möglich alle Zahlen unterhalb einer Million zu schreiben, womit die Schreibart in Zeichen überhaupt abschließen mochte, wie es unseren früheren Bemerkungen (S. 23) entsprechend auch mit dem genauen Zahlenbegriff der Fall war. Daß die Hebräer von rechts nach links schrieben, daß abgesehen von dem Falle geheimnisvoll erscheinen wollender Gematria, welche als Zahlenschreiben im eigentlichen Sinne des Wortes kaum betrachtet werden kann, das Gesetz der Größenfolge eingehalten wurde, braucht kaum gesagt zu werden. Eben dieses Gesetz gestattete die vertausendfachenden Pünktchen oft wegzulassen, wenn die Reihenfolge der Zahlen die Bedeutung derselben schon außer Zweifel stellte. Der Buchstabe für 1 א z. B. konnte dem für 5 ה in regelmäßiger Zahlenbezeichnung nicht vorhergehen, wohl aber umgekehrt. Deshalb schrieb man 5001 nur durch ה̈א, dagegen 1005 durch א̈ה oder durch אה. Da ferner מ = 40, ף = 800 war, so konnte 5845 = ה̈ףמה geschrieben werden. Die letztere Zahl, die Anzahl der Verse im ganzen Gesetze, wurde von den Masoreten, deren Tätigkeit freilich

[1]) Handbuch der klassischen Altertums-Wissenschaft herausgeg. v. Iwan von Müller. Band I: Griech. Epigraphik von Wilhelm Larfeld S. 541—547 (München 1891). [2]) Ist in dieser Schreibart von 15 die Veranlassung zur Gematria bei Alexandrinischen Juden, oder nur das einfachste Beispiel derselben zu erkennen?

erst im VIII. S. n. Chr. abschloß, sogar החמה geschrieben[1]), indem ח, das Zeichen für 8, einen höheren Rang als das nachfolgende מ, zugleich einen niedrigeren als das vorhergehende durch die Stellung selbst vertausendfachte ה besitzen mußte und daher nur 800 bedeuten konnte. Die Verwechslung von Zahlen mit Wörtern war in der hebräischen Schrift, die fast regelmäßig die Vokale wegließ und deren Ergänzung dem Leser übertrug, ungemein leicht. Sollte also eine Zahl als solche sofort erscheinen, so war ein Unterscheidungszeichen notwendig. Dasselbe bestand darin, daß man über den letzten Zahlbuchstaben zwei Häkchen machte, oder auch diese Häkchen zwischen dem letzten und vorletzten Zahlbuchstaben anbrachte. Bei vier- oder gar mehrstelligen Zahlen wurden die Häkchen öfter wiederholt.

Wir kehren nach diesen Einschaltungen nach Griechenland zurück, bei dieser Rückkehr beiläufig erwähnend, daß die Gematria, die symbolisierende Buchstabenverbindung zu Wörtern mit Zahlenwert, sich auch bei späteren Griechen einheimisch machte. Die Zahl 666 der Apokalypse z. B., welche, wie jetzt wohl kein Fachmann mehr bezweifelt, aus dem Hebräischen stammt und נְרוֹן קֵסַר (Nerun Kesar) bedeutet, wurde von Irenäus, dem berühmten Kirchenlehrer des II. S., als *Λατεινος* gelesen und erklärt.

Die Zahlenwerte der griechischen Buchstaben hier genauer zu erörtern, möchte so ziemlich allen unseren Lesern gegenüber überflüssig sein. Wir begnügen uns daran zu erinnern (S. 125), daß in dem zur Zahlenschreibung dienenden Alphabet altertümliche Buchstaben, die sogenannten Episemen, noch einen Platz einnehmen, welche unter den Buchstaben der Griechen als solchen abhanden gekommen waren[2]). Die Buchstaben alpha bis sanpi genügten in ihrer Verbindung zur Darstellung der Zahlen 1 bis 999, wobei ein darüber befindlicher Horizontalstrich die Zahlen als solche kennzeichnete und der Verwechslung mit Wörtern vorbeugen sollte. Die Tausende schrieb man mittels der 9 Einheitsbuchstaben, α bis ϑ, denen man zur Linken einen in Kommagestalt geneigten Strich beifügte. Mitunter wurde, ähnlich wie der vertausendfachende Punkt der Hebräer, das den gleichen Zweck erfüllende Komma der Griechen unter gleichen Voraussetzungen weggelassen, nämlich wenn die Stellung vor einem Buchstaben, dem an und für sich ein höherer Zahlenwert eigentümlich war, die Notwendigkeit ergab um des Gesetzes der Größenfolge willen das betreffende Zahlzeichen tausendfach zu lesen. Allerdings ist auch bei den Griechen ein Abweichen von dem Gesetze der Größenfolge

[1]) Nesselmann, Die Algebra der Griechen. Berlin 1842, S. 494. [2]) Vgl. A. Kirchhoff, Studien zur Geschichte des griechischen Alphabets. 3. Aufl. Berlin 1877.

nachgewiesen worden[1]). Nicht bloß daß in Sizilien der Sprachgebrauch die kleinere Zahl der größeren vorausgehen ließ [z. B. *τέσσαρα τετρακόσια ἑξακισχίλια πεντακισμύρια τάλαντα* = 56404 Talente], daß bei asiatischen Griechen die gleiche Übung herrschte, daß auf Münzen von Seleucidenkönigen der Berliner und Londoner Sammlungen, deren Prägung innerhalb 210 und 144 v. Chr. Geburt fällt, die Jahreszahlen $\Gamma P = 103$, $A\Xi P = 161$, $B\Xi P = 162$, $\Theta\Xi P = 169$ vorkommen[2]), man hat sogar Inschriften gefunden, bei welchen Größenfolge nach beiden Richtungen miteinander wechselt[3]), z. B. *ἔτους ζνφ ὑπερβερεταίου ιε* = am 15. des Monats Hyperberetaion im seleucidischen Jahre 557. Zehntausend wurde als Myriade durch *Mυ.* oder durch *M.* bezeichnet. Bei Vielfachen von 10000 konnte der vervielfachende Koeffizient eine dreifache Stellung einnehmen, links vor, rechts nach oder über dem *M.* Im ersten Falle wurde *M.* auch wohl durch einen einfachen Punkt vertreten, welcher aber nicht weggelassen werden durfte, weil die bloße Stellung, wie wir erst bemerkt haben, nur vertausendfachte. Es bedeutete demnach $\overline{\beta\omega\lambda\alpha}$ stets 2831, $\overline{\beta.\omega\lambda\alpha}$ dagegen 20831.

Man hat verschiedentlich die Behauptung aufzustellen versucht, den Griechen sei, und zwar in alter Zeit, ein Zahlzeichen für Nichts, mithin eine wirkliche Null zu eigen gewesen. Man hat zu diesem Zwecke auf astronomische Werke des Ptolemäus und des Theon von Alexandria, man hat auf eine Steininschrift der Akropolis zu Athen, man hat auf einen Palimpsest im Vatikan hingewiesen. Aber alle diese Hinweise sind durchaus nichtig; von einer Null ist an keiner dieser Stellen die Rede[4]).

Brüche kommen bei griechischen Schriftstellern, insbesondere bei Mathematikern, häufig vor. Die Bezeichnung erfolgt im allgemeinen so, daß man zuerst die Zähler hinschrieb und dieselben mit einem Akzente rechts oben versah, dann die Nenner, denen ein doppelter Akzent beigefügt wurde und die zweimal geschrieben wurden. Z. B. $\iota\zeta'\ \kappa\alpha''\ \kappa\alpha'' = \frac{17}{21}$. Hatte man es mit Stammbrüchen zu tun, so blieb der Zähler α' als selbstverständlich weg, und die einmalige Schreibung des Nenners genügte. Ohne weitere Bemerkung nebeneinander geschriebene Stammbrüche sollten durch Addition vereinigt

[1]) J. Woisin, De Graecorum notis numeralibus (Leipziger Doktordissertation in Kiel 1886) pag. 15—16. [2]) Briefliche Mitteilung des Herrn Adolf Richter in Riga. [3]) Corpus Inscriptionum Graecorum (ed. Boeckh) Vol. III. (Berlin 1853) No. 4516. Vgl. auch No. 4503, 4518, 4519. [4]) Math. Beitr. Kulturl. S. 121 flgg. Wichtige Ergänzungen zu unseren Angaben über den Palimpsest bei Hultsch, *Scriptores metrologici Graeci.* Leipzig 1864. Vorrede pag. V—VI.

werden. Z. B. $\delta'' = \frac{1}{4}$ und $\zeta''\ \kappa\eta''\ \varrho\iota\beta''\ \sigma\kappa\delta'' = \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224} = \frac{43}{224}$. Zwei besondere Bezeichnungen sind bemerkenswert: $\frac{1}{2}$ oder *ἥμισυ* wurde nicht durch β'' sondern durch das altertümliche sigma c angedeutet und dieses vereinigt sich mit $\varsigma'' = \frac{1}{6}$ zu einem neuen dem omega ähnlichen Zeichen ω″ um $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ anzuschreiben[1]).

Die Frage, wie man dazu kam an Stelle einer anderen schon vorhandenen Bezeichnungsweise von Zahlen die neue alphabetische Methode einzuführen, verdient wohl gestellt zu werden und ist auch, wenngleich nicht häufig, gestellt worden[2]). So mächtig wirkt bei den meisten Geschichtsschreibern die Gewohnheit das geschichtlich nacheinander Auftretende als Fortschritt aufzufassen, daß man auch hier einem Fortschritte gegenüberzustehen wähnte, und die Einführung eines solchen bedarf keiner besonderen Erklärung. Statt eines Fortschrittes haben wir es aber hier mit einem entschiedenen Rückschritte zu tun, insbesondere was die Fortbildungsfähigkeit der Ziffernschrift betrifft. Vergleichen wir die älteren herodianischen Zahlzeichen mit den späteren, für welche wir schon wiederholt den Namen alphabetischer Zahlzeichen gebraucht haben, so erkennen wir bei letzteren zwei Übelstände, die den ersteren nicht anhaften. Es mußten jetzt mehr Zeichen und deren Wert dem Gedächtnisse anvertraut werden, es mußte auch das Rechnen eine viel angespanntere Gedächtnistätigkeit in Anspruch nehmen. Die Addition ΔΔΔ + ΔΔΔΔ = 𐅄ΔΔ (30 + 40 = 70) konnte mit der HHH + HHHH = 𐅅HH (300 + 400 = 700) in einen Gedächtnisakt zusammenschmelzen, sofern drei und vier Einheiten derselben Art zu fünf und zwei Einheiten gleicher Art sich vereinigten. Dagegen war mit λ + μ = ο noch keineswegs τ + υ = ψ sofort mitgegeben! Nur einen einzigen Vorzug bot die neue Schreibweise der alten gegenüber, der sich zeigt, wenn man die schriftliche Darstellung nach ihrer Raumausdehnung vergleicht. Man beachte z. B. 849, welches herodianisch 𐅅HHHΔΔΔΔ𐅃IIII, alphabetisch ωμθ aussieht. Jenes ist durchsichtiger, gewährt beim Rechnen die wichtigsten Vorteile; dieses ist unverhältnismäßig viel kürzer, und so werden wir auf diesem den Vermutungen allein preisgegebenen dunkeln Gebiete wohl kaum einen Fehlgriff tun, wenn wir die Meinung aussprechen, nicht Rechner,

[1]) Über Brüche vgl. Hultsch, l. c., pag. 173—175. [2]) Heinr. Stoy, Zur Geschichte des Rechenunterrichtes I. Teil. Jenaer Inauguraldissertation 1876, S. 25.

sondern Schreiber haben die alte breite Zahlenbezeichnung um der neuen willen im Stich gelassen, und weil es in der großen Menge der Bevölkerung mehr Schreiber gab als Rechner, die zugleich auch Schreiber waren, hat die neue alphabetische Methode so rasch und allgemein sich Eingang verschafft.

Wir sind mit diesen Bemerkungen bereits über die Besprechung des Zahlenschreibens bei den Griechen hinausgegangen und zu deren Zahlenrechnen gelangt. Wieder begegnen uns hier die beiden Rechnungsverfahren, denen wir allgemein menschliche Verbreitung zuerkannt haben: das Fingerrechnen und das Rechnen auf einem Rechenbrette.

Spuren des ersteren sind mancherlei vorhanden[1]). Es mag ja zu weit gegangen sein für dasselbe auf eine Stelle des Herodot sich zu beziehen, wo einer an den Fingern die Monate abrechnet[2]). Auch daß in homerischer Sprache Rechnen *πεμπάζειν*, d. h. wörtlich „abfünfen" heißt, mag von geringerer Tragweite erscheinen. Aber eine Stelle der Wespen des Aristophanes[3]) bezeugt, daß man Überschlagsrechnungen an den Fingern auszuführen pflegte. Wie die Griechen alter Zeit dabei verfuhren, ist nicht bekannt. Die Wahrscheinlichkeit spricht dafür, daß ähnliche Grundsätze der Fingerbedeutung gegolten haben mögen wie in späterer Zeit, aber eine Sicherheit liegt keineswegs vor. Wir wünschen daher nicht durch Vorgreifen den Anschein einer solchen Sicherheit hervorzurufen, und versparen uns die Darstellung spätgriechischer Fingerrechnung bis zum Schlusse dieses ganzen griechischen Abschnittes, wo eine erhaltene byzantinische Schrift über den Gegenstand uns nötigende Veranlassung geben wird darauf einzugehen.

Das Rechnen auf einem Rechenbrette in Griechenland bezeugt uns Herodot durch dieselbe Stelle[4]), deren wir uns zum Beweise des gleichen Verfahrens in Ägypten schon bedient haben (S. 88). Wir hoben dort bereits hervor, daß die Kolumnen des Brettes gegen den Rechner senkrecht gezogen sein mußten und werden dafür noch anderweitige Gründe weiter unten angeben. Die auf dem Rechenbrette Verwendung findenden Steinchen hießen *ψῆφοι*. Sie wurden, wie aus der Stelle in den Wespen des Aristophanes hervorgeht, auch in dessen Zeit zum genauen Rechnen benutzt, und die Verbreitung dieses Verfahrens wird ersichtlich aus dem Worte *ψηφίζειν*, mit Steinchen hantieren, welches allgemein für das Rechnen eintritt. Auch das Brett, auf welchem gerechnet wurde, bekam einen besonderen Namen *ἄβαξ*.

[1]) Stoy, l. c., S. 35 Anmerkg. 4, S. 44 Anmerkg. 3. [2]) Herodot VI, 63 und 65. [3]) Aristophanis Vespae 656. [4]) Herodot II, 36.

Allein gleich bei diesem Namen Abax beginnen die Streitfragen, welche sich mehr und mehr häufen, je weiter die Geschichte der Entwicklung des Rechenbrettes fortschreitet. Man hat nämlich das Wort *ἄβαξ* bald dem semitischen אבק Staub verglichen und Staubbrett übersetzt, bald hat man den Stamm *βακ* mit verneinendem *α* zu einem Worte vereinigt, dem die Bedeutung des Nichtgehenkönnens, des Fußlosseins innewohnt[1]). Die letztere Ableitung stützt sich vorwiegend auf die nicht in Zweifel zu stellende Anwendung des Wortes *ἄβαξ* und ähnlich klingender Wörter in Bedeutungen, welche an Staub in keiner Weise zu denken gestatten. So hieß eine Art von Würfelbrett, ein rundes Körbchen ohne Untergestell, eine runde Platte *ἄβαξ* und dergleichen mehr. Noch eine dritte Ableitung läßt *ἄβαξ* durch verneinendes *α* von *βάζω* (ich spreche) abstammen; es sei ein Rechnen, bei welchem nicht gesprochen wird[2]). Die erste Ableitung dagegen weiß nur einen Grund für sich anzugeben, der durch ein Spiel sprachlichen Zufalles sich sehr wohl erklären läßt: der griechische Abax als Rechenbrett war nämlich, wenigstens in einer Form, ein wirkliches Staubbrett[3]). Wir wissen dieses aus einer Stelle des Jamblichus, in welcher dieser späte Pythagoräer erzählt, daß der Gründer ihrer Schule die Beweise der Arithmetik wie der Geometrie auf dem Abax geführt habe, was nur dann verständlich ist, wenn auf dem Abax Zahlzeichen und Linien leicht gezeichnet, leicht verwischt werden konnten; wir wissen es deutlicher aus einer zweiten Stelle desselben Jamblichus, die uns ausdrücklich sagt, der Abax der Pythagoräer sei ein mit Staub bedecktes Brett gewesen[4]). Auch eine Stelle des Eustathius ist damit in Übereinstimmung, welche den Abax als den Philosophen, die Figuren auf denselben zeichneten, nützlich rühmt[5]). Das letztere Zeugnis gehört freilich erst dem Ende des XII. S. an, aber bei der berühmten Gelehrsamkeit des Bischofs von Thessalonike, der sie niederschrieb und dem sicherlich noch Quellen

[1]) Für die erste Ableitung Nesselmann, Algebra der Griechen S. 107, Anmerkg. 5 und Vincent in Liouville's *Journal des Mathématiques* IV, 275 Note mit Berufung auf Etienne Guichart, *Harmonie des langues*. Für die letztere Th. H. Martin, *Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-age*. Rome 1864, pag. 34—35 mit zahlreichen Quellenangaben. [2]) E. Clive Bayley im Journal of the Royal Asiatic Society, new series, XIV, 369 (London 1882). [3]) Als Beispiel sprachlicher Zufälligkeiten erinnern wir an das englische *degree* und das arabische *daraga*. Beide bedeuten Grad (Winkeleinteilung), sind aber nicht entfernt verwandten Stammes trotz Gleichlautes und Bedeutungsgleichheit. [4]) Jamblichus, *De vita Pythagorica* cap. V, § 22 und desselben *Exhortatio ad philosophiam Symbol.* XXXIV. [5]) Eustathius in Odysseam zu Gesang I, vers. 107. Vgl. die römische Ausgabe dieses Kommentators pag. 1397 lin. 50.

zugänglich waren, die wir nicht mehr kennen, nehmen wir ebensowenig Anstand dasselbe zu verwerten, wie die oft angerufenen Zeugnisse späterer Lexikographen.

Sollte auf dem Abax gerechnet werden, so mußten, wie wir wissen, auf demselben Abteilungen gebildet werden, deren jede zwischen zwei Strichen verlief, oder durch einen einzelnen Strich sich darstellte. Die Abteilungen, Kolumnen nennt man sie gemeiniglich, und auch wir werden uns dieses Ausdruckes von jetzt an ausschließlich bedienen, waren gegen den Rechner senkrecht gezeichnet. Das geht nächst der Stelle bei Herodot, welche wir so deuteten, aus einem Vasengemälde hervor, das aus griechischer Vorzeit auf uns gekommen ist. Wir meinen diejenige Vase, welche den Altertumsfreunden als die große Dariusvase in Neapel wohl bekannt ist[1]). Auf dieser Vase ist ein Rechner gut erkennbar, der auf einer Tafel den Tribut zu buchen scheint, welcher dem Darius dargebracht wird. Die Tafel ist in zu dem Rechner senkrechte mit Überschriften versehene Kolumnen eingeteilt, und die Überschriften bestehen aus herodianischen Zahlzeichen. Eben dieses Vasengemälde ist es, welches einen zuverlässigen Beweis persischen, mithin mutmaßlich auch babylonischen Kolumnenrechnens uns liefern würde, wenn wir der Gewißheit uns hingeben dürften, daß der Künstler nicht aus freier Phantasie arbeitend griechische Gewohnheiten ins Ausland übertrug, ohne sich darum zu kümmern, ob er damit der Wahrheit widersprach.

Die Kolumnen hatten den Zweck, den zum Rechnen dienenden Marken einen in verschiedenen Kolumnen verschiedenen Stellungswert zu verleihen. Zwei Schriftsteller bezeugen uns dieses. Von Solon wird uns der Vergleich mitgeteilt, wer bei Tyrannen Ansehen besitze, sei wie der Stein bei der Rechnung; bald bedeute dieser mehr, bald weniger, und so achte der Tyrann jenen bald hoch, bald gar nicht[2]). Desselben Vergleiches bedient sich Polybios, der arkadische Geschichtsschreiber, welcher 203—121 lebte, und gebraucht dabei einen nicht unwichtigen Ausdruck. Er sagt nämlich, die Marken auf dem Abax gelten nach dem Willen des Rechnenden bald einen Chalkus, bald ein Talent[3]).

Die Bedeutsamkeit gerade dieser von Polybios genannten gegensätzlichen Werte erkennen wir in ihrer Übereinstimmung mit den Endwerten niedersten und höchsten Ranges, welche auf einem grie-

[1]) Vgl. eine Abhandlung von F. G. Welcker in dessen Alte Denkmäler V, 349 flgg. nebst Tafel XXIII. Der erste Abdruck in Gerhards Archäologischer Zeitung 1857, S. 49—55, Tafel 103. [2]) Diogenes Laertius I, 59. [3]) Polybios V, 26, 13.

chischen Denkmale, auf der Tafel von Salamis angegeben waren. Damit ist nämlich entweder eine annähernde Datierung jener ihrem Alter nach bis jetzt ganz unbestimmbaren Marmortafel, welche sich gegenwärtig im Nationalmuseum (Ethnikon) zu Athen befindet, ermöglicht oder man hat die für langdauernde Übung Zeugnis ablegende Erhaltung genau derselben Abteilungszahl vor sich. Die salaminische Tafel[1]) von Marmor 1,5 m lang, 0,75 m breit wurde zu Anfang des Jahres 1846 auf der Insel, deren Namen sie führt, aufgefunden. Sie war der Größe ihrer Abmessungen, dem Gewichte des Materials, der durch beide vereinigten Umstände erhöhten Unbeweglichkeit zufolge, sicherlich keine gewöhnliche Rechentafel. Wir haben vielmehr entweder an den Geschäftstisch eines öffentlichen Wechslers zu denken, deren es in Griechenland bereits gab, oder an eine Art von Spielbrett mit zur Verrechnung von Gewinn und Verlust vorgerichteten Kolumnen. Die Einrichtung war nämlich allem Anscheine nach die, daß jedem der beiden Spieler, beziehungsweise Rechner, fünf Hauptkolumnen, je zwischen zwei Striche eingeschlossen, und vier Nebenkolumnen zur Verfügung standen. Erstere dienten von links nach rechts im Werte abnehmend für Talente (6000 Drachmen), 1000, 100, 10 und 1 Drachmen, letztere für die Bruchteile der Drachmen Obolus $\left(\frac{1}{6}\text{ Drachme}\right)$, halber Obolus, viertel Obolus und achtel Obolus oder Chalkus[2]). Jede der Hauptkolumnen war durch einen durch alle Abteilungen gemeinschaftlich durchlaufenden Querstrich in zwei Hälften geteilt, deren eine, sei es die obere, sei es die untere, den eingelegten Marken den fünffachen Wert gab wie die anderen. Es ist dies ein tatsächlich vorhandenes Beispiel dessen, was wir (S. 42) bei den Babyloniern vermutungsweise annahmen, um die Entstehung des Wortes Ner uns zu verdeutlichen. Wir dürfen zugleich hervorheben, daß die 5 Hauptkolumnen ihrer Anzahl nach mit den fünf einfachen Grundzahlwörtern der Griechen von der Monas bis zur Myrias übereinstimmen, dürfen zugleich an das früher über Beschränkung volkstümlicher Zahlenbegriffe Gesagte erinnern. Daß unsere in allen wesentlichen Punkten von Letronne herstammende Erklärung der salaminischen Tafel richtig sein muß, beweisen insbesondere die auf der Tafel befindlichen selbst 13 mm hohen Zahlzeichen. Sie sind herodianische Zeichen, und es ist eben so fein

[1]) Math. Beitr. Kulturl. S. 132 und 136 flgg. die genaueren Quellenangaben. Vgl. ferner A. Nagl, Die Rechenmethoden auf dem griechischen Abakus in Abhndlgen. z. Gesch. d. Math. IX, 337—357. Kubitschek, Die salaminische Rechentafel in Numismatische Zeitschrift (Wien 1900) XXXI, 393—398. A. Nagl, Der griechische Abakus in Numism. Zeitschr. (Wien 1903) XXXV, 131—143. [2]) Der attische Obolus hatte 8 Chalkus. Vgl. Hultsch, Metrologie (2. Aufl.) S. 133.

als richtig hervorgehoben worden, es sei kein Zufall, wenn diese Bezeichnung, welche neben den einzelnen Grundzahlen auch deren Fünffache kürzer zu schreiben gestatte, auf einem nach demselben Gedanken abgeteilten Rechentische sich finde[1]). Ein Bruchstück einer der salaminischen vielleicht ähnlichen Tafel ist dann später (1886) auch in Akarnanien aufgefunden worden[2]).

Dürfen wir vielleicht den Rückschluß ziehen, das Rechenbrett ähnlicher Art müsse bei den Griechen mindestens so alt wie jene Zeichen gewesen sein? Dürfen wir das in einer Quelle berichtete Vorkommen herodianischer Zeichen in solonischer Zeit mit dem eben angeführten Ausspruche Solons, der für das Vorhandensein eines Rechenbrettes zwingend wäre, wenn er selbst als beglaubigt betrachtet werden könnte, in Verbindung bringen? Dürfen wir beide als gegenseitige Stützen betrachten und somit um 600 ein schon ziemlich ausgebildetes Rechnen auf dem Rechenbrett in Griechenland annehmen?

Wir wollen uns nicht soweit in Vermutungen einlassen, daß wir alle diese Möglichkeiten als Wahrheiten behaupteten. Nur eines sei bemerkt, daß auf dem Sandbrette sehr leicht mittels eines Stiftes Kolumnen bildende Linien gezogen werden konnten, daß somit durchaus kein Grund vorliegt einen Zweifel zu hegen, ob gleichzeitig mit der Herstellung der salaminischen Tafel und ähnlicher Tische auch die pythagoräische Benutzung des Sandbrettes zum Rechnen in Übung gewesen sei. Das Rechnen selbst beschränkte sich anfangs gewiß auf die einfachsten Grundverfahren des Zusammenzählens und Abziehens. Ein mathematisches Rechnen kam erst in Frage, als eine wirkliche Mathematik in Griechenland sich gebildet hatte, und wird erst in jener Zeit von uns behandelt werden dürfen.

Das mathematische Denken war in Griechenland vorzugsweise ein geometrisches. Der Geometrie gehören auch die Anfänge der Mathematik an, zu welchen wir uns jetzt wenden.

5. Kapitel.

Thales und die älteste griechische Geometrie.

Ein gelehrter Philosoph des V. S. Proklus Diadochus hat uns ein ungemein wertvolles Bruchstück eines älteren Schriftstellers aufbewahrt, welches uns ein Bild der ältesten griechischen Mathematik

[1]) Stoy, l. c., S. 26. [2]) Woisin, De Graecorum notis numeralibus pag. 4 mit Berufung auf Bulletin de Correspondence Hellénique, année X (1886) pag. 179.

in Ionien, in Unteritalien und in Athen den Umrissen nach erkennen läßt. Es stammt nach Proklus' Aussage von denen her, „die die Geschichte geschrieben haben", und man ist allgemein darin einig hier ein Fragment des Eudemus, oder wenigstens einen Auszug aus dessen historisch-geometrischen Schriften zu erkennen[1]). Wir werden dasselbe häufig zu nennen haben und ihm zu diesem Zwecke den seinem Inhalte wohl am meisten entsprechenden Namen des alten Mathematikerverzeichnisses beilegen. Chronologisch teilt es uns nämlich nach kurzer Einleitung die Namen derjenigen Männer mit, die nach der Meinung des Verfassers die Entwicklung der Mathematik vorzugsweise gefördert haben. Chronologisch, wie wir sie brauchen, werden wir die einzelnen Sätze abdrucken. Sie bilden gewissermaßen die Überschrift einzelner Paragraphen, in welche wir unterzubringen haben werden, was in bezug auf die einzelnen Persönlichkeiten aus anderen Quellen bekannt geworden ist. Die einleitenden Worte lauten folgendermaßen:

„Da es nun notwendig ist, auch die Anfänge der Künste und Wissenschaften in der gegenwärtigen Periode zu betrachten, so berichten wir, daß zuerst von den Ägyptern der Angabe der meisten zufolge die Geometrie erfunden ward, welche ihren Ursprung aus der Vermessung der Ländereien nahm. Denn letztere war ihnen nötig wegen der Überschwemmung des Nil, der die einem jeden zugehörigen Grenzen verwischte. Es hat aber nichts Wunderbares, daß die Erfindung dieser sowie der anderen Wissenschaften vom Bedürfnis ausgegangen ist, da doch alles im Entstehen Begriffene vom Unvollkommenen zum Vollkommenen vorwärtsschreitet. Es findet von der sinnlichen Wahrnehmung zur denkenden Betrachtung, von dieser zur vernünftigen Erkenntnis ein geziemender Übergang statt. Sowie nun bei den Phönikiern des Handels und des Verkehrs halber eine genaue Kenntnis der Zahlen ihren Anfang nahm, so ward bei den Ägyptern aus dem erwähnten Grunde die Geometrie erfunden."

Wir begnügen uns unter Abdruck dieser Sätze darauf aufmerksam zu machen, daß hier über die Erfindung der Geometrie dasselbe behauptet wird, was wir früher (S. 102—103) nach anderen Quellen als

[1]) Diese Stelle ist abgedruckt in *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii* (ed. Friedlein). Leipzig 1873, pag. 64 lin. 16—68 lin. 6. Der Urtext mit gegenüberstehender deutscher Übersetzung bei Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig 1870, S. 27—30. Wir zitieren dieses Werk künftig kurz als Bretschneider. Wir bedienen uns der Hauptsache nach der dort mitgeteilten Übersetzung, von der wir nur in wenigen Punkten, wo wir B's Auffassung nicht teilen können, uns entfernen.

die wenigstens in bezug auf den ägyptischen Ursprung wohlbegründete Meinung des griechischen Altertums mitgeteilt haben. Die Geometrie kam aus Ägypten nach Griechenland. Wie und durch wen, darüber belehrt uns das Mathematikerverzeichnis, wenn es fortfährt:

„Thales, der nach Ägypten ging, brachte zuerst diese Wissenschaft nach Hellas hinüber und vieles entdeckte er selbst, von vielem aber überlieferte er die Anfänge seinem Nachfolger; das eine machte er allgemeiner, das andere sinnlich faßbarer.“

Thales von Milet[1]), Sohn des Examios und der Kleobuline, aus einem ursprünglich phönikischen Geschlechte stammend, wurde um das 1. Jahr der 39. Olympiade[2]), also um 624, geboren und lebte noch im 1. Jahre der 58. Olympiade, d. h. 548. Er wurde also über 76 Jahre alt, eine Berechnung, welche in vollem Einklang mit anderen Angaben ist, die ohne genaue Jahrgänge festzustellen ihn ein hohes Alter erreichen lassen. Eine ganze Menge von mehr unterhaltenden als wichtigen Geschichten knüpfen sich an seinen Namen. Aus denselben scheint hervorzugehen, daß Thales Kaufmann war, bald einen Salzhandel trieb, bald in Ölgeschäfte sich einließ, und daß er vermutlich auf diese Weise nach Ägypten kam. Einen ägyptischen Aufenthalt bezeugt ferner die Bemerkung, niemand sei dem Thales Lehrer gewesen, nur während seines Verweilens in Ägypten habe er mit den Priestern verkehrt[3]). Ein drittes Zeugnis ist das der Pamphile, einer Geschichtsschreiberin zur Zeit Neros, welche weiß, daß Thales in Ägypten Geometrie erlernte[4]). Die Belege könnten noch weiter bis zu fast beliebiger Anzahl vermehrt werden, so daß an der Tatsache, Thales sei in Ägypten gewesen, und dort mit Geometrie bekannt geworden, nicht wohl zu zweifeln ist[5]), wenn auch zugegeben werden

[1]) Bretschneider S. 35—55. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid* (1889) pag. 7—17. Eine Monographie von Decker, *De Thalete Milesio*, Halle 1865, ist uns nur dem Titel nach bekannt. Hauptquelle ist Diogenes Laertius. Die Familie des Thales I, 1 nach Herodot, Duris und Demokrit; seine Lebenszeit I, 10 nach Apollodor und Sosikrates und I, 3, wo bezeugt ist, daß Thales beim Ausbruche des Vernichtungskampfes zwischen Krösus und Kyrus (548) noch lebte. [2]) Vgl. Diels im Rheinischen Museum für Philologie, Neue Folge XXXI, 16 (1876). [3]) Diogenes Laertius I, 27. [4]) Diogenes Laertius I, 24. [5]) Eine vortreffliche Zusammenstellung der Beweisstellen bei Zeller, Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung I, 169, Anmerkung 1 (3. Auflage, Leipzig 1869). Wenn in diesem Werke — wir werden es künftig nur als Zeller I zitieren — dessen scharfe, mitunter vielleicht allzu skeptische Kritik mit Recht anerkannt ist, aus allen diesen Stellen die Überzeugung gewonnen wird, der ägyptische Aufenthalt des Thales sei möglich, sogar wahrscheinlich, aber allerdings nicht vollständig erwiesen, so dürfen wir diesen Ausspruch für unsere Meinung deuten.

muß, daß keines der Zeugnisse älter als das Mathematikerverzeichnis zu sein scheint, und dieses eine höher liegende Quelle außer für eine einzige Angabe überhaupt nicht angibt. Nach seiner Heimat Milet kehrte Thales in vorgeschrittenen Jahren zurück. „Er befaßte sich erst später und gegen das Greisenalter hin mit Naturkunde, beobachtete den Himmel, musterte die Sterne und sagte öffentlich allen Miletern voraus, daß am Tage Nacht eintreten, die Sonne sich verbergen und der Mond sich davor legen werde, so daß ihr Glanz und ihre Lichtstrahlen aufgefangen werden würden.“ So der wörtliche Bericht eines Schriftstellers, welcher in seiner Einfachheit sehr glaubwürdig erscheint[1]). Offenbar ist in ihm von derselben Sonnenfinsternis die Rede, von der neben anderen auch Herodot weiß, daß Thales sie den Ioniern angesagt hatte mit Vorausbestimmung des Jahres, in welchem die Umwandlung von Tag in Nacht erfolgen sollte[2]). Nur im Vorbeigehen bemerken wir, auf die Aussage eines unverwerfbaren Fachgelehrten gestützt[3]), daß in so weiten Grenzen wie die eines Jahres die Verkündigung einer Sonnenfinsternis unter allen Umständen möglich war. Trat nun gar diese Finsternis zur Zeit einer Schlacht zwischen Medern und Lydern — wie man jetzt ziemlich allgemein annimmt am 28. Mai 585[4]) — ein und erhielt dadurch eine gewisse erhöhte historische Bedeutung, so begreift man, wie damit zugleich der Ruhm des Verkündigers unter seinen Landsleuten steigen mußte. Um so glaublicher wird der von der Erzählung der Sonnenfinsternisvoraussagung unabhängige Bericht, Thales habe unter dem Archontat des Damasias (zwischen 585 und 583) den Beinamen des „Weisen“ erhalten[5]). Mit ihm zugleich erhielten denselben Beinamen bekanntlich noch 6 andere Männer, die uns aber insgesamt hier gleichgültig sein können, weil nur eine politische Bedeutung der 7 Männer, eine Staatsweisheit, durch jene ehrende Bezeichnung anerkannt wurde, worin wir rückwärts eine Bestätigung dafür finden können, daß die Sonnenfinsternis von 585 und deren Verkündigung erst nachträglich zur Bedeutung wuchs, als die leichtgläubige Bevölkerung in ihr eine Vorbedeutung erkennen mochte. Wir übergehen Einmengungen in das Staatsleben Milets, welche von Thales berichtet werden. Wir übergehen die ihm zugeschriebenen Ansichten über das Weltall und über vorzugsweise astronomische Dinge. Es muß uns genügen, Thales als

[1]) Themistios Orat. XXVI, pag. 317. [2]) Herodot I, 74. [3]) Rud. Wolf, Geschichte der Astronomie. München 1877, S. 10. [4]) Vgl. G. Hofmann, Die Sonnenfinsterniss des Thales vom 28. Mai 585 v. Chr. (Triest 1870). Gelzer im Rheinischen Museum für Philologie, Neue Folge XXX, 264 (1875). Ed. Mahler in Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wissensch. 4. III. 1886. Mathem.-naturw. Klasse, II. Abtlg., Bd. XCIII, S. 455—469. [5]) Diogenes Laertius I, 1.

der Zeit nach ersten ionischen Naturphilosophen zu kennzeichnen. Wir gelangen zu den mathematischen Dingen, mit welchen der Name des Thales in Verbindung gebracht wird.

Proklus nennt Thales, abgesehen von jener dem Mathematikerverzeichnisse angehörenden Stelle, viermal[1]). Dem alten Thales gebührt, so lautet die erste Stelle, wie für die Erfindung so vieles anderen, so auch für die dieses Theorems Dank; er soll nämlich zuerst gewußt und gesagt haben, daß die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleich seien, die gleichen Winkel nach altertümlicher Ausdrucksweise als ähnliche benennend.

Die zweite Stelle besagt: Dieser Satz lehrt, daß, wenn zwei Gerade sich schneiden, die am Scheitel liegenden Winkel gleich sind. Erfunden ist dieses Theorem, wie Eudemus angibt, zuerst von Thales. Eines wissenschaftlichen Beweises aber achtete der Verfasser der Elemente (Euklid) es wert.

Zum dritten sagt Proklus bei Erörterung des Bestimmtseins eines Dreiecks durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel: Eudemus führt in seiner Geschichte der Geometrie diesen Lehrsatz auf Thales zurück. Denn bei der Art, auf welche er die Entfernung der Schiffe auf dem Meere gefunden haben soll, sagt er, bedürfe er dieses Theorems ganz notwendig.

Die vierte Erwähnung ist die Angabe: daß die Kreisfläche von dem Durchmesser halbiert wird, soll zuerst jener Thales bewiesen haben.

Zu diesen vier Erwähnungen bei einem und demselben mathematischen Schriftsteller kommen noch zwei andere. Pamphile erzählt, daß als Thales bei den Ägyptern Geometrie erlernte, er zuerst dem Kreise das rechtwinklige Dreieck eingeschrieben und deshalb einen Stier geopfert habe[2]). Endlich ist es die sogenannte Schattenmessung, welche auf Thales zurückgeführt zu werden pflegt. Hieronymus von Rhodos, ein Schüler des Aristoteles, erzählt, Thales habe die Pyramiden mittels des Schattens gemessen, indem er zur Zeit, wenn der unsrige mit uns von gleicher Größe ist, beobachtete[3]). Entsprechend berichtet auch Plinius: das Höhenmaß der Pyramiden und aller ähnlichen Körper zu gewinnen erfand Thales von Milet, indem er den Schatten maß zur Stunde, wo er dem Körper gleich ist[4]). Etwas darüber hinausgehend ist die Erzählung des Plutarch, der in seinem Gastmahle Thales mit anderen über den König Amasis von

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 250, 299, 352, 157. [2]) Diogenes Laertius I, 24—25. [3]) Diogenes Laertius I, 27. [4]) Plinius, *Historia naturalis* XXXVI, 12, 17.

Ägypten sich unterhalten läßt. Niloxenus äußert sich bei dieser Gelegenheit: Obschon er auch um anderer Dinge willen Dich bewundert, so schätzt er doch über alles die Messung der Pyramiden, daß Du nämlich ohne alle Mühe und ohne eines Instrumentes zu bedürfen, sondern indem Du nur den Stock in den Endpunkt des Schatten stellst, den die Pyramide wirft, aus den durch die Berührung des Sonnenstrahls entstehenden zwei Dreiecken zeigest, daß der eine Schatten zum andern dasselbe Verhältnis hat wie die Pyramide zum Stock[1]).

Aus diesen der Zahl und der unmittelbaren Bedeutung nach geringfügigen Angaben ein vollständiges Bild von dem, was Thales aus Ägypten mitbrachte, von dem, was er selbst dazu erfunden hat, zu gewinnen ist schwer, und war doppelt schwer, solange die ägyptische Mathematik in tiefes Dunkel gehüllt war. So kam es, daß dem einen bewiesen schien, die Ägypter hätten von Winkeln nichts gewußt, und Thales sei der Erste gewesen, der eine Winkelgeometrie ersann; daß ein zweiter ein Verdienst des Thales darin fand, daß er eine Liniengeometrie in dem Sinne schuf, daß er das Verhältnis der Linien einer Figur ins Auge faßte, während den Ägyptern nur die praktische Geometrie der Flächenausmessung bekannt gewesen sei; daß ein dritter nicht Anstand nahm Thales und die älteren Griechen überhaupt fast jeden Erfinderrechtes für verlustig zu erklären und ihr ganzes geometrisches Wissen für Ägypten zurückzufordern; daß ein vierter an die entgegengesetzte Grenze streifend es für gleichgültig hielt, ob Thales überhaupt Ägypten besucht habe oder nicht, weil er Geometrisches in nennenswerter Menge von dort nicht habe mitbringen können. Diese eine weite Kluft zwischen den Streitenden offen lassenden Gegensätze, welche wir hier erwähnen, welche aber nicht bei den Untersuchungen über Thales allein sich zeigten, sondern überall, wo es um durch bestimmte Persönlichkeiten vermittelte Übertragung orientalischer Wissenschaft nach Griechenland sich handelte, müssen gegenwärtig sich einander wesentlich nähern, nachdem das Übungsbuch des Ahmes uns zugänglich gemacht ist. Man wird nicht mehr leugnen wollen, daß vieles von dem, was die Anfänge der griechischen Geometrie bildet, ägyptischen Lehren verdankt sein kann; man wird von der anderen Seite des gewaltigen Unterschiedes sich bewußt bleiben, der zwischen ägyptischem und griechischem Denken auch bei Gleichheit des Gegenstandes des Denkens obwaltete.

Wird z. B. irgendwer, der an das Seqt genannte Verhältnis, an das Ähnlichmachen der Ägypter (S. 99) sich erinnert, der dieses selbe

[1]) Plutarch Vol. 2, III, pag. 174 ed. Didot.

Verhältnis mit Notwendigkeit in gleicher Größe entstehen sieht, ob man von dem einen Endpunkte der Grundfläche, ob von dem entgegengesetzten aus die betreffenden Messungen vornimmt, wird ein solcher zweifeln können, daß die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks den Schülern des Ahmes bekannt sein konnte, wenn nicht bekannt sein mußte? Thales wußte und sagte es zuerst, d. h. er zuerst sagte es seinen Landsleuten, und mutet uns die altertümliche Ausdrucksweise „ähnliche Winkel" statt gleicher Winkel, deren er sich dabei bediente, nicht an wie eine Übersetzung von Seqt?

Wir fragen weiter: Kann nach Betrachtung der vielfach geteilten Kreise auf ägyptischen Wandgemälden ein Zweifel daran obwalten, daß auch die Wahrheit, daß der Durchmesser die Kreisfläche zu Hälften teile, in Ägypten gelernt werden konnte? Ja sogar einen Beweis dieser Wahrheit, der, wie uns gerühmt wird, von Thales zuerst geführt worden sei, möchten wir den Ägyptern nicht gerade absprechen, wenn auch die Art des Beweises dort eine andere gewesen sein mag als in dem Munde von Thales.

Wir stehen hier an dem Punkte, von welchem aus die Verschiedenheit ägyptischen und griechischen Denkens, welche wir oben betonten, uns deutlicher bemerkbar wird. Das Mathematikerverzeichnis sagt uns von Thales, das eine habe er allgemeiner, das andere sinnlich faßbarer gemacht. Es will uns scheinen, als sei damit gerade die griechische und zugleich ägyptisierende Form seiner Leistungen gekennzeichnet. Als Grieche hat er verallgemeinert, als Schüler Ägyptens sinnlich erfaßt, was er dann den Griechen wieder faßbar gemacht hat. Es war eine griechische Stammeseigentümlichkeit den Dingen auf den Grund zu gehen, vom praktischen Bedürfnisse zu spekulativen Erörterungen zu gelangen. Nicht so den Ägyptern. Wir glauben zwar nicht, daß die Ägypter jegliche Theorie entbehrten, wir haben schon früher (S. 113) das Gegenteil dieser Annahme ausgesprochen; aber wir haben dort auch gesagt, wie wir ägyptische Theorie uns denken: als wesentlich induktive, während die Geometrie der Griechen deduktiver Natur ist. Der Ägypter könnte einen Beweis des Satzes, daß der Durchmesser den Kreis halbiere durch die bloße Figur, oder vielleicht durch Berechnung der Flächen beider Halbkreise nach derselben möglicherweise unverstandenen Vorschrift als vollständig geführt erachtet haben. Der Grieche würde sich allenfalls mit der Figur begnügt haben, wenn auch der Beweis des Thales uns in keiner Andeutung bekannt ist. So zeigt sich, auch in den Beweisen, eine Abhängigkeit der griechischen Geometrie von der ägyptischen, die sich lange erhielt. Die griechische Deduktion war bei ihrem Beginne selbst induktiv. Sie

war gewohnt von dem Vielen zum Einen, von der Unterscheidung zahlreicher Fälle zum allgemein gültigen Satze überzugehen. Sie blieb deduktiv, sofern sie nicht unterließ jeden Einzelfall aus sich heraus zu gestalten, ihn nicht der Erfahrung, der sinnlichen Anschauung zu entnehmen.

Fassen wir mit Bezug auf Thales zusammen, was wir hier in allgemeinerer Erörterung, deren nur persönliche Gültigkeit wir behaupten, die also Andersmeinenden eine eigentliche Beweiskraft kaum besitzen dürften, zu begründen suchten, so gelangen wir dahin, die wissenschaftliche Bedeutung des Thales nicht in der Anzahl der Sätze zu finden, welche er selbst entdeckte, sondern in dem Anstoß zu geometrischen Studien, den er gab, nebst den Anfängen deduktiver Behandlung, welche er lehrte. Daß wir übrigens von so wenigen Sätzen nur wissen, deren Urheberschaft in mehr oder weniger bestimmter Weise auf Thales zurückgeführt wird, kann auf zwei verschiedenen Umständen beruhen. Einmal ist nur über das erste Buch der euklidischen Elemente ein fortlaufender Kommentar des Proklus auf uns gekommen. Wir können also nur erwarten durch denselben über die Urheberschaft von Sätzen jenes ersten Buches mit Bestimmtheit aufgeklärt zu werden, während Thales gar wohl Sätze der folgenden Bücher gekannt haben könnte, ohne daß wir berechtigt wären Proklus das Stillschweigen darüber in dem auf uns gelangten Kommentare zu verübeln. Zweitens aber mag in der Tat das, was Thales in Ägypten sich anzueignen imstande war, nicht alles umfaßt haben, was die Ägypter selbst wußten, er, dem, wie die Berichte uns sagten[1]), niemand Lehrer war, bevor er mit den ägyptischen Priestern verkehrte, der sich erst später und gegen das Greisenalter hin mit Naturkunde befaßte.

Man hat aus den Sätzen, welche als thaletisch überliefert sind, Schlußfolgerungen auf solche, die Thales bekannt gewesen sein müssen, gezogen. Der letzte Forscher auf diesem Gebiete[2]) insbesondere hat mit großem Aufwande von Scharfsinn entwickelt, die Summe der Dreieckswinkel müsse dem Thales bekannt gewesen sein. Wenn nämlich Thales den Satz von den Winkeln eines gleichschenkligen Dreiecks und den vom rechtwinkligen Dreiecke im Kreise kannte, wenn ihm, wie dieser selbe Satz und der von der Halbierung des Kreises durch den Durchmesser bezeugen, die Definition des Kreises bekannt war, so mußte ihm, meint Allman, etwa folgende Betrachtung gelingen. Er werde von dem Kreismittelpunkt O aus (Fig. 16) eine

[1]) Diogenes Laertius I, 27 und Themistios, Orat. XXVI, pag. 317.
[2]) G. J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid* (1889) pag. 11.

Linie OC nach der Spitze des rechten Winkels im Halbkreise gezogen haben. Aus den beiden gleichschenkligen Dreiecken ACO und BCO sei die Gleichheit der Winkel $CAO = ACO$ und $CBO = BCO$, mithin auch der Summe $CAO + CBO = ACO + BCO = ACB$ hervorgegangen; er habe aber gewußt, daß ACB ein rechter Winkel sei und demgemäß die Summe der Winkel bei A, bei B und bei C als zwei Rechten gleich gefunden. Wir haben dem Scharfsinne des Wiederherstellers unsere Anerkennung gezollt, wir sind auch geneigt von seinen Schlüssen einige uns anzueignen, allein wir möchten die umgekehrte Reihenfolge für richtiger halten. Wir nehmen an und wollen nachher begründen, auf welche Überlieferung hin wir zu dieser Annahme uns bekennen, Thales habe gewußt, daß die Dreieckswinkel zusammen zwei Rechte betragen, er habe auch gewußt, daß die Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks einander gleich sind, dann mag ihn höchst wahrscheinlich eine Zeichnung wie Figur 16 zur Erkenntnis geführt haben, daß der Winkel bei C so groß sein müsse als die Summe der Winkel bei A und B, mithin so groß als die halbe Winkelsumme des Dreiecks ABC, oder gleich einem rechten Winkel.

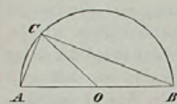

Fig. 16.

Unsere Beweggründe sind folgende. An und für sich sind beide Sätze, der von der Winkelsumme des Dreiecks, der vom rechten Winkel im Halbkreise, schon ziemlich künstlicher Natur, nicht auf den ersten Anblick einleuchtend. Der eine wie der andere bedurfte einer wirklichen Entdeckung und eines Beweises; wenn also eine gegenseitige Abhängigkeit beider Sätze stattzufinden scheint, so ist es von vornherein ebensogut möglich dem einen als dem andern das höhere Alter zuzuschreiben. Nun findet sich aber ein Beweis des Satzes vom rechten Winkel im Halbkreise bei Euklid Buch III Satz 31 vor, welcher dem von uns vermuteten sehr ähnlich ist. Eine Zusammenstellung wie die euklidischen Elemente ist aber, so genial, so gedankenreich ihr Verfasser sein mag, durch ihren Inhalt selbst darauf hingewiesen wesentlich kompilatorisch zu sein, und so ist es gar nicht unmöglich, daß auch bei diesem Satze Euklid der altertümlichen Beweisführung treu blieb, ohne daß wir davon unterrichtet sind, weil ein alter Kommentar zum III. Buche nicht vorhanden ist. Dazu kommt als weitere Tatsache, daß wir über die älteste Beweisführung des Satzes von der Winkelsumme im Dreiecke Bescheid wissen, und daß diese auch nicht entfernt den Schlußfolgerungen gleicht, welche nach Allmans Meinung Thales gezogen haben soll.

Geminus, ein Mathematiker des letzten Jahrhunderts vor Christus,

erzählt in einem bei einem noch späteren Schriftsteller, Eutokius von Askalon, erhaltenen Bruchstücke, daß „von den Alten für jede besondere Form des Dreiecks das Theorem der zwei Rechten besonders bewiesen ward, zuerst für das gleichseitige, sodann für das gleichschenklige, und endlich für das ungleichseitige, während die Späteren das allgemeine Theorem bewiesen: die drei Innenwinkel jedes Dreiecks sind zweien Rechten gleich"[1]).

Wir werden nun bald sehen, daß die Späteren, von welchen Geminus redet, nicht gar lange nach Thales gelebt haben, daß also die Alten im Gegensatze zu jenen auf die thaletische Zeit, wenn nicht gar auf die ägyptischen Lehrer des Thales gedeutet werden müssen. Die Andeutungen des Geminus über diesen ältesten Beweis haben dem Scharfblicke Hankels die Möglichkeit gegeben, den älteren Beweis wiederherzustellen[2]). Seine Gedanken darüber sind, nur wenig abgeändert, folgende. Den Figuren gemäß, welche wir bei den Ägyptern fanden, war dort, vielleicht aus asiatischer Quelle, seit dem XVII. S. v. Chr. die Zerlegung der Kreisfläche in sechs gleiche Ausschnitte bekannt. An diese Figur dachten wir oben, als wir die Kenntnis des Satzes, daß ein Durchmesser den Kreis halbiere, für die Ägypter in Anspruch nahmen und die Figur selbst als Beweis dienen ließen. Verband man die Endpunkte der Halbmesser miteinander, so entstand das regelmäßige Sechseck, oder vielmehr sechs um den Mittelpunkt geordnete gleichseitige Dreiecke, die den ebenen Raum um jenen Mittelpunkt herum vollständig ausfüllten. Drei dieser Winkel bildeten vereinigt einen gestreckten Winkel, wie der Augenschein lehrte, und vertraute man weiter dem Augenscheine für die Tatsache, daß jeder Winkel des gleichseitigen Dreiecks dem anderen gleich war, so hatte man jetzt den ersten Fall des Berichtes von Geminus erledigt: die Winkel des gleichseitigen Dreiecks betrugen zusammen zwei Rechte. Demnächst mochte man (Fig. 17) die Zerlegbarkeit des gleichschenkligen Dreiecks in zwei Hälften, welche zu einem Rechtecke sich ergänzen, erkennen und wieder lehrte der Augenschein, daß bei einem derartigen Vereinigen der zwei Dreieckshälften vier rechte Winkel erschienen, von welchen zwei aus den ursprünglichen Winkeln des gleichschenkligen Dreiecks, von denen nur einer in Gestalt zweier Hälften auftrat, sich zusammensetzten. Jetzt fehlte nur noch der dritte und letzte Schritt. Ein beliebiges Dreieck wurde (Fig. 18) als Summe der Hälften zweier Rechtecke gezeichnet, so


Fig. 17.

[1]) Apollonii Pergaei Conica (ed. Halley), Oxford 1710, pag. 9.
[2]) Hankel S. 95—96.

erschienen drei den ursprünglichen Dreieckswinkeln gleiche Winkel an der Spitze des Dreiecks zu einem gestreckten Winkel vereinigt.

Eine Spur dieses ältesten Beweisverfahrens, wie es Geminus uns schildert, hat sich auf griechischem Boden bei einem sehr späten Praktiker erhalten. Ein anonymer Feldmesser des X. S., der nachweislich sein Buch aus ungefähr 1000 Jahre alten Musterwerken zusammenschrieb, sagt ausdrücklich: Daß aber jedes durch Einbildung oder Wahrnehmung zugängliche Dreieck die drei Winkel in der Größe von zwei Rechten besitzt, ist daher offenbar, daß jedes Viereck seine Winkel vier Rechten gleich besitzt und durch die Diagonale in zwei Dreiecke mit sechs Winkeln geschieden wird[1]).

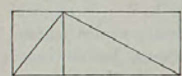
Fig. 18.

Eigentliche Beweisführung wird man solche Zeichnungen gewiß nicht nennen. Sie bewirkten nichts, als daß der Augenschein induktiv wirkend eine Überzeugung herbeiführte. War die Überzeugung gebildet, so begnügte sich damit die ältere Zeit, die spätere suchte nach weiterer Begründung. Noch für andere Sätze, welche in Verbindung mit dem Namen des Thales auftreten, möchten wir den Augenschein als damals einzigen Beweis auffassen. Der Augenschein wird dem Satze von den Winkeln an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks, wird dem von den Scheitelwinkeln den Ursprung gegeben haben; und eine Unterstützung dieser Behauptung dürfte in der Angabe des Eudemus liegen, daß Thales den Satz von den Scheitelwinkeln erkannt, Euklid ihn eines Beweises wert geachtet habe[2]).

Wir gehen in der Durchsprechung der Dinge, welche aus den Überlieferungen der thaletischen Geometrie zu folgern sind, weiter. Man hat[3]) aus der Kenntnis des Satzes vom rechten Winkel im Halbkreise auf das damals schon vorhandene Bewußtsein dessen, was man später geometrischen Ort nannte, geschlossen. Wir begnügen uns solches zu erwähnen, ohne es uns aneignen zu können. Wir verbinden dagegen zu einem einheitlichen Gedanken die Schattenmessung und die Bestimmung eines Dreiecks durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. Beides waren praktische Ausführungen, sofern das Dreieck, wie uns gesagt ist, zur Bestimmung von Schiffsentfernungen dient. Beide beruhten auf der Anwendung eines rechtwinkligen Dreiecks. Das eine Mal wurden die Katheten jenes Dreiecks gebildet durch den Stab und seinen Schatten, das

[1]) *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque Impériale de Paris*, Tom. XIX, Partie 2, pag. 368. [2]) Proklus (ed. Friedlein), pag. 299. [3]) Allman, l. c., pag. 13—14.

andere Mal (Fig. 19) durch die Warte, von welcher aus die Beobachtung angestellt wurde, und die Entfernung des Schiffes[1]). Trennend ist zwischen beiden Aufgaben der Umstand, daß in dem einen Falle die Schattenlänge selbst gemessen, in dem anderen die Schiffsentfernung aus dem beobachteten Winkel erschlossen werden mußte. Beide Aufgaben waren einem Schüler ägyptischer Geometrie zugänglich. Sie sind nahe verwandt dem Finden des Seqt aus gegebenen Seiten, dem Finden der einen Seite aus der anderen mit Hilfe des Seqt.

Zu einer Früheres ergänzenden notwendigen Bemerkung gibt übrigens die Schattenmessung des Thales, welche ihm in zu wiederholter Beglaubigung zugeschrieben wird, als daß wir Zweifel in sie setzen könnten, Anlaß. Mag die Schattenmessung nach der einfacheren oder nach der dem Gedanken nach zusammengesetzteren von den beiden berichteten Methoden erfolgt sein, mag sie ein bloßes Messen der


Fig. 19.

gesuchten Höhe gleichen Schattenlänge oder das Berechnen eines Verhältnisses gegebener Zahlen nötig gemacht haben, eines setzt sie unter allen Umständen voraus: die Übung, den von einem senkrecht aufgestellten Gegenstande geworfenen Schatten wirklich abzumessen. Damit vervollständigen sich unsere früheren Mitteilungen (S. 50) über den Gnomon, seine Erfindung und Übertragung. Wir haben damals erwähnt, daß der eigentliche Gnomon nach Herodot in Babylon zu Hause war, daß gleichfalls nach Osten der Name des Berosus hinweist, daß die Bekanntschaft der Hebräer mit dem Stundenzeiger alt verbürgt ist. Neu tritt jetzt hinzu, daß auch in Ägypten Schatten gemessen wurden, eine Überlieferung, welche mit jener ersteren keineswegs in Widerspruch steht. Wir haben mehrfach schon mathematische Zeugnisse alter Verbindungen zwischen Nil- und Euphratländern anführen dürfen; hier ist vielleicht wieder ein solches, und überdies ist es noch immer nicht das Gleiche, wenn an einem Orte der Schatten zu geometrischen Zwecken gemessen wurde, am anderen zu Herstellung einer Schattenuhr diente.

Wir haben auch schon den Mann genannt, der die Schattenuhr den Griechen bekannt machte. Anaximander von Milet war es, welcher Favorinus zufolge[2]) zuerst eine solche in Lakedämon aufstellte; während wohl durch ein Mißverständnis genau dasselbe durch

[1]) Bretschneider S. 43—46. [2]) Diogenes Laertius II, 1.

Plinius[1]) dem Anaximenes, dem Schüler des Anaximander nachgerühmt wird. Anaximander war 611 geboren und wurde Schüler des Thales, als dieser in der Heimat sich niederließ, wofür wir etwa das Jahr 586 anzunehmen durch die vorausgesagte Sonnenfinsternis Veranlassung haben. Anaximander starb kurz nachdem er 64 Jahre alt geworden war, also etwa 545. Ein Lexikograph Suidas berichtet von ihm, er habe nächst der Einführung des Gnomon vollständig eine Hypotyposis der Geometrie gezeigt[2]). Wir begnügen uns mit der Wiedergabe des griechischen Wortes, mit welchem wir bei dem Fehlen jeder deutlicheren Angabe nichts anzufangen wissen. Es ist ja richtig, daß Hypotyposis durch „bildliche Darstellung" übersetzt werden darf, ohne daß eine sprachliche Einrede erhoben würde; es ist auch möglich, daß die Meinung sei, Anaximander habe eine „Reißkunst" geschrieben, d. h. eine Angabe geometrischer Konstruktionen ohne Begründung derselben[3]); aber mehr als eine schwache Möglichkeit liegt nicht vor. Am wahrscheinlichsten klingt die Übersetzung Hypotyposis = Abriß, Grundzüge, in welcher Bedeutung das Wort auch anderwärts vorkommt[4]).

Jedenfalls hat das alte Mathematikerverzeichnis von dieser geometrischen Tätigkeit des zweiten ionischen Naturphilosophen nicht Notiz genommen. Es fährt nämlich fort:

„Nach ihm (Thales) wird Mamerkus, der Bruder des Dichters Stesichorus, als ein eifriger Geometer erwähnt; auch berichtet Hippias der Eleer von ihm, daß er sich als Geometer Ruhm erworben habe."

Diese Persönlichkeit ist ein so untrügliches Zeugnis für die Vergänglichkeit irdischen Ruhmes, wie kaum eine zweite, denn wir kennen heute von dem gerühmten Geometer nicht einmal mehr den Namen mit einiger Sicherheit. Wir haben hier Mamerkus nach der Lesart der gegenwärtig allgemein benutzten letzten Ausgabe des Proklus geschrieben[5]). Andere nennen den Bruder des Stesichorus Mamertinus, noch andere Ameristus. Ein wegen seiner Ungenauigkeit berüchtigter mathematischer Historiker des XVII. S., Milliet Dechales, macht sogar zwei berühmte Geometer aus ihm, einen Mamertinus und einen Amethistus. Wir begnügen uns mit dem Eingeständnisse

[1]) Plinius, *Historia naturalis* II, 76. [2]) Suidas s. v. Anaximandros: *γνώμονά τ' εἰσήγαγε καὶ ὅλως γεωμετρίας ὑποτύπωσιν ἔδειξεν.* [3]) Bretschneider S. 62 teilweise nach Röth, Geschichte der abendländischen Philosophie II, 132. Friedlein, Beiträge zur Geschichte der Mathematik II, Hof 1872, S. 15, übersetzt: er gab eine bildliche Darstellung der ganzen Geometrie heraus. [4]) W. Schmidt (Bericht über griechische Mathematiker und Mechaniker 1890—1901) verweist dafür auf Proklos (*ὑποτύπωσις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων* = Abriß der astronomischen Voraussetzungen) und auf Sextus Empiricus (*Πυρρώνειοι ὑποτυπώσεις* = Grundzüge des Pyrro). [5]) Proklus (ed. Friedlein) p. 65, lin. 12.

gar nichts von ihm zu wissen. Der Bruder Stesichorus ist eine bekanntere Persönlichkeit. Er starb um 560 im Alter von 85 Jahren und stammte aus Himera in Sizilien. Jedenfalls weist also die geometrische Tätigkeit des Bruders des Dichters uns darauf hin, daß der Geschmack an Wissenschaft, an Geometrie insbesondere, seit Thales die Anfänge aus Ägypten mitgebracht hatte, weitere Verbreitung gewann, daß die Zeit jetzt nahte, wo in Sizilien und in Unteritalien eine schulmäßige Beschäftigung mit unserer Wissenschaft ihre gedeihliche Wirkung äußern konnte unter der Leitung eines Mannes, der eben dort seine Studien machte, wo auch Thales in die Geometrie eingeweiht worden war.

Thales hat also nebst seinen nächsten ionischen Nachfolgern für uns die Bedeutung, daß man durch ihn in Erfahrung gebracht hatte, wo Geometrie zu Hause sei; daß von ihm die ersten der Zahl nach geringen, der Anwendung nach schon wertvollen Sätze der Geometrie bekannt gemacht wurden; daß von ihm eine etwas strengere Beweisführung ausging; daß er endlich eine Schule gründete, die der Wissenschaft diente und nicht Staatsleben und Geldverdienst allein als die Dinge ehrte, denen ein Mann seine Kräfte widmen konnte. In allen diesen Richtungen können wir den Mann als seinen Nachfolger betrachten, dem wir jetzt uns zuwenden: Pythagoras von Samos.

6. Kapitel.

Pythagoras und die Pythagoräer. Arithmetik.

„Nach diesen verwandelte Pythagoras die Beschäftigung mit diesem Wissenszweige in eine wirkliche Wissenschaft, indem er die Grundlage derselben von höherem Gesichtspunkte aus betrachtete und die Theoreme derselben immaterieller und intellektueller erforschte. Er ist es auch, der die Theorie des Irrationalen und die Konstruktion der kosmischen Körper erfand."

Pythagoras von Samos, über welchen wir soeben das alte Mathematikerverzeichnis haben reden lassen, war Sohn des Mnesarchus. Er gründete in den dorisch bevölkerten Städten von Süditalien, in dem sogenannten Großgriechenland, eine Schule, die zahlreiche Anhänger versammelte und so geschlossen auftrat, eine solche auch politische Bedeutung gewann, daß sie die Feindschaft der außerhalb der Schule Stehenden auf sich zog und gewaltsam zersprengt wurde.

Diese Tatsachen stehen nach den Aussprüchen sämtlicher alten Berichterstatter allzu fest, als daß sie auch nur von einem einzigen neueren Geschichtsschreiber angefochten würden. In jeder anderen Beziehung aber herrschen über das Leben des Pythagoras, über seine Lehre, über das was man ihm, was man seinen Schülern zuzuschreiben habe, die allergrößten Meinungsverschiedenheiten. Greifen wir nur einige gewiß wichtige Punkte heraus: das Geburtsjahr des Pythagoras, das Jahr seiner Ankunft in Italien, sein Todesjahr, die Zeit, zu welcher die Schule zersprengt wurde, das alles liegt im Widerstreite der Meinungen. Wenn ein Forscher[1]) Pythagoras 569 geboren, 510 in Italien aufgetreten, 470 bei dem gegen die Schule entbrannten Aufstande umgekommen sein läßt, sagt uns ein anderer Forscher[2]), die Geburt habe um 580, die Ankunft in Italien um 540 stattgefunden, Pythagoras sei um 500 gestorben, die Schule erst ein halbes Jahrhundert später zersprengt worden. Ähnliche Gegensätze treten in allen Äußerungen derselben Gelehrten über Pythagoras und die Pythagoräer hervor, und wir können diese Gegensätze so ziemlich auf einen einzigen grundsätzlichen zurückführen. Der erste Gelehrte, dessen Datierungen wir angaben, ging von dem Bestreben aus, die überreichen Mitteilungen, welche erst in nachchristlichen Jahrhunderten von griechischen Schriftstellern in Form spannender aber romanartiger mit Wundergeschichten reichlich durchsetzter Bücher zusammengestellt wurden, nach Ausscheidung dessen, was augenscheinlich sagenhafte Erfindung war, zu benutzen. Der zweite verwirft jene Romane ganz und gar, läßt höchstens die Benutzung einiger weniger Stellen derselben zu, wo die Gewährsmänner ausdrücklich genannt sind und ihre Nennung selbst Vertrauen verdient. Beide gehen wohl in ihren polemisch erprobten und dadurch nur um so stärker befestigten Meinungen zu weit, wenn wir auch heute gern erklären, daß wir uns in den meisten Punkten den Ansichten des Vertreters derjenigen Auffassung, die man als skeptische bezeichnen könnte, nähern, wenn nicht anschließen. Für uns gibt es aber noch einen Mittelweg, den wir vielfach an der Hand des letzten Bearbeiters[3]) unseres Gegenstandes zu gehen lieben, so weit überhaupt die Geschichte der Mathematik uns die Pflicht auferlegt über die Streitpunkte ein Urteil auszusprechen.

Ein derartiger Streitpunkt ist der **Aufenthalt des Pythagoras in Ägypten**, der von größter Bedeutung für die ganze Entwicklungsgeschichte der griechischen Mathematik ist, wenn man an ihn glaubt, jene Geschichte noch rätselhafter macht, als sie vielfach be-

[1]) Röth, Geschichte der abendländischen Philosophie. Bd. II. [2]) Zeller I. [3]) A. Ed. Chaignet, *Pythagore et la philosophie Pythagoricienne contenant les fragments de Philolaus et d'Archytas. Ouvrage couronné par l'institut.* Paris 1873. Wir zitieren dieses Werk kurz als Chaignet.

reits erscheint, wenn man ihn verwirft. Der älteste Bericht über diesen Aufenthalt, um dessen Glaubwürdigkeit oder Unglaubwürdigkeit es sich begreiflicherweise in erster Linie handelt, stammt von dem Redner Isokrates, dessen schriftstellerische Tätigkeit auf 393, also höchstens etwa 100 Jahre nach dem Tode des Pythagoras und bevor die Mythenbildung sich seiner Persönlichkeit bemächtigt hatte, fällt. Isokrates sagt von den ägyptischen Priestern[1]): Man könnte, wenn man nicht eilen wollte, viel Bewunderungswürdiges von ihrer Heiligkeit anführen, welche ich weder allein noch zuerst erkannt habe, sondern viele der jetzt Lebenden und der Früheren, unter denen auch Pythagoras der Samier ist, der nach Ägypten kam und ihr Schüler wurde und die fremde Philosophie zuerst zu den Griechen verpflanzte. Dieser Stelle ist mit entschiedenem Zweifel begegnet worden[2]), der auf den Inhalt der Rede des Isokrates sich gründet. Busiris war eine ägyptische Stadt mitten im Nildelta, in der große Isisfeste gefeiert wurden. In Erinnerung an die frühere Abgeschlossenheit Ägyptens Fremden gegenüber hatte die griechische Sage aber auch einen König gleichen Namens mit der Stadt erdacht, der jeden Fremden schlachten ließ. Zur Zeit der Sophisten liebten die griechischen Rhetoren sich mit Redestückchen gegenseitig zu überbieten, Lobreden auf Tadelnswerte, Anklagen gegen Vortreffliche zu verfassen. So hatte Polykrates eine Apologie jenes Busiris geschrieben, und nun wollte Isokrates dem Nebenbuhler zeigen, wie er sein Thema eigentlich hätte behandeln müssen. Polykrates, meint er, habe darin gefehlt, daß er dem Busiris ganz unglaubliche Dinge zugeschrieben habe, einerseits die Ableitung des Nils, andererseits das Auffressen der Fremden; dergleichen werde man bei ihm nicht finden. Wir lügen zwar beide, sagt er aufrichtig genug, aber ich mit Worten, welche einem Lobenden, Du mit solchen, welche einem Scheltenden geziemen. Aus diesem Geständnisse hat man die Folgerung gezogen, daß Angaben, die sich selbst als rednerische Erfindung geben, nicht den geringsten Wert haben. Diese Folgerung ist aber nur da richtig, wo es um rednerische Erfindung sich überhaupt handeln kann. Hätte also Busiris, dem Isokrates lobend nachlügt, er sei der Urheber der ganzen ägyptischen Kultur gewesen, wirklich gelebt, wir würden doch von jenem Lobe nichts halten. Sind wir deshalb berechtigt, auch von der ägyptischen Kultur nichts zu halten, nichts von den ägyptischen Priestern als Trägern dieser Kultur? Das wünscht wohl der Zweifelsüchtigste nicht. Und wenn die allgemein anerkannte Tat-

[1]) Isokrates, Busiris cap. 11. [2]) Die Zweifel sind hier teilweise wörtlich aus Zeller I, 259 Note 1 entnommen.

sache ägyptischer hoher Bildung nur den unwahren Zwecken des Isokrates mittelbar dienen soll, so hat es für ihn auch nur mittelbare Bedeutung, wenn er jener Tatsache eine Stütze gibt, wenn er sich darauf beruft, Pythagoras sei Schüler dieser hochgebildeten Priester gewesen. Der falsche Satz: Busiris sei der Urheber aller Bildung, wird dadurch in keiner Weise wahr, wenn die Bildung vorhanden war, wenn sie auf fremde Persönlichkeiten sich übertrug. Überdies bedurfte Isokrates zu diesem letzteren Erweise keiner Unwahrheit. Er konnte auf die Reisen, auf die Berichte anderer Männer sich beziehen, eines Thales, eines Herodot, eines Demokritos. Wenn er es vorzog, statt ihrer nur Pythagoras zu nennen, so wird man das dadurch erklären müssen, daß das Ansehen, in welchem Pythagoras schon zur Zeit des Isokrates stand, doch ein anderes war, als das der eben genannten wenn auch berühmten Persönlichkeiten. Isokrates, wir können es nur immer stärker betonen, log nicht um zu lügen, er log nur in den Lobsprüchen, die er seinem um jeden Preis zu erhebenden Helden zollte, und die erfundenen Verdienste des Busiris konnten eine gewisse Scheinbarkeit, auf deren Erlangung es bei dem rednerischen Kunststücken allein ankam, nur dann gewinnen, wenn alles Beiwerk der Wahrheit entsprach, wenn nicht auch nebensächliche Dinge den Hörer sofort kopfscheu machten. Wir zweifeln daher keinen Augenblick, daß der Aufenthalt des Pythagoras in Ägypten, daß der Unterricht, welchen er bei den dortigen Priestern genoß, zu den Dingen gehört, die landläufige Wahrheit waren, als Isokrates sie aussprach, die niemand neu, niemand absonderlich oder gar unwahrscheinlich vorkamen[1]).

Der Aufenthalt des Pythagoras in Ägypten, den wir jetzt schon für durchaus gesichert halten, wird weiter durch eine Menge anderer Schriftsteller behauptet. Freilich sind es Schriftsteller, die insgesamt später, teilweise viel später als Isokrates gelebt haben. Strabon meldet uns in nüchternem, einfachem und dadurch um so glaubwürdigerem Tone: Die Geschichtsschreiber teilen mit, Pythagoras sei aus Liebe zur Wissenschaft nach Ägypten und Babylon gegangen[2]). Antiphon, allerdings der Lebenszeit nach nicht genauer bestimmt, aber von späteren Schriftstellern unter Namensnennung mit großer Zuversicht benutzt, hat in seinen Lebensbeschreibungen von durch Tugend sich auszeichnenden Männern Ausführliches über den ägyptischen

[1]) **Chaignet** pag. 43 hält die ägyptische Reise auch für erwiesen, läßt sich aber auf eine Verteidigung des Ausspruches des Isokrates, wie wir sie geliefert haben, nicht ein. Dagegen sind bei ihm die Zitate anderer Schriftsteller, welche über jene Reise berichten, in großer Vollständigkeit gesammelt.
[2]) Strabo, XIV, 1, 16.

Aufenthalt des Pythagoras erzählt[1]). Viel weniger Gewicht legen wir — von anderen Zeugnissen zu schweigen — dem bei, was ägyptische Priester ruhmredig dem Diodor erzählten und was er uns mit folgenden Worten wiederholt: Die ägyptischen Priester nennen unter den Fremden, welche nach den Verzeichnissen in den heiligen Büchern vormals zu ihnen gekommen seien, den Orpheus, Musäus, Melampus und Dädalus, nach diesen den Dichter Homer und den Spartaner Lykurg, ingleichen den Athener Solon und den Philosophen Platon. Gekommen sei zu ihnen auch der Samier Pythagoras und der Mathematiker Eudoxus, ingleichen Demokritos von Abdera und Oinopides von Chios. Von allen diesen weisen sie noch Spuren auf[2]). Diese altägyptischen Matrikellisten mitsamt den aufgewiesenen Spuren sind an sich recht sehr verdächtig, doppelt verdächtig durch Namen wie Orpheus und Homer, die dort eingetragen sein sollen. Wir haben die Stelle überhaupt nur aus einem, wie uns scheint, erheblichen Grunde mitgeteilt. Sie beweist nämlich, daß zu Diodors Zeiten um die dort genannten Männer ein ziemlich gleicher Strahlenkranz von Berühmtheit sich gebildet hatte, der von ihnen auf die Lehrer, die sie hatten oder gehabt haben sollten, zurückstrahlt.

Die von uns angeführte Stelle des Strabon gibt auch Auskunft über eine Studienreise des Pythagoras nach Babylon. Offenbar genoß diese zur Zeit von Christi Geburt, das ist zur Zeit Strabons, einer hinreichend guten Beglaubigung, um als geschichtliche Tatsache kurz erwähnt zu werden. Als sichergestellt erscheint uns damit so viel, daß Pythagoras in Babylon hätte gewesen sein können. Drücken wir uns deutlicher aus. Wir meinen, es müssen innerhalb der pythagoräischen Schule Lehren vorgetragen worden sein, welche überraschende Ähnlichkeit mit solchen Dingen besaßen, denen das Griechentum seit dem Alexanderzuge an dem zweiten Mittelpunkte ältester Kulturverbreitung neben Ägypten, in Babylon wiederbegegnete. Eine gegenteilige Annahme würde das Entstehen des Glaubens an die Sage von dem Aufenthalte bei den Chaldäern jeder Grundlage berauben. Wir nennen den Aufenthalt eine Sage, weil auch uns jetzt ein erstes Zeugnis Strabons ohne Kenntnis des Alters seiner Quellen zur vollen geschichtlichen Wahrheit nicht ausreicht. Immerhin bleibt die Art, wie babylonische Elemente, deren wir auf mathematischem Gebiete einige erkennen werden, in die pythagoräische Lehre eindrangen, und die Rolle, welche sie darin spielten, in hohem Grade rätselhaft, wenn wir ganz verwerfen wollten, Pythagoras selbst oder einer seiner

[1]) Als Bruchstück erhalten bei Porphyrius, *De vita Pythagorae* cap. 7, auch bei Diogenes Laertius VIII, 3. [2]) Diodor I, 96.

nächsten Schüler sei unmittelbar an die Quelle geraten, aus welcher dieselben zu schöpfen waren.

Mit dem Ausdrucke Pythagoras selbst oder einer seiner nächsten Schüler haben wir eine unleugbare Schwierigkeit bezeichnet, einen Gegenstand wissenschaftlichen Zweifels berührt, welcher hier im Wege liegt und zu dessen Wegräumung uns keine Mittel gegeben sind. Die pythagoräische Schule war, wie schon oben erwähnt wurde, eine eng geschlossene. Mag es Wahrheit oder Übertreibung genannt werden, daß unverbrüchliches Stillschweigen überhaupt den Pythagoräern zur Pflicht gemacht war, daß ihnen unter allen Umständen das verboten war, was wir sprichwörtlich aus der Schule schwatzen nennen, sicher ist, daß über den oder die Urheber der meisten pythagoräischen Lehren kaum irgendwelche Gewißheit vorliegt. *Ἐκεῖνος ἔφα* oder *Αὐτὸς ἔφα*, ER, der Meister, hat's gesagt, war die vielbenutzte Redensart, und welcher Zeit dieselbe auch angehört, sie läßt, je später sie aufgekommen sein mag, um so deutlicher die ganz ungewöhnliche, durch viele Jahrhunderte in der Überlieferung sich erhaltende geistige Überlegenheit des Pythagoras, der alles, was von Wert war, selbst gefunden und gelehrt haben sollte, läßt aber auch die Unmöglichkeit erkennen scharf zu sondern, was wirklich von Pythagoras selbst, was von seinen Schülern herrührte. Vielleicht ist es dabei gestattet aus den erwähnten inneren Gründen anzunehmen, daß, wo ein Pythagoräer als Entdecker bestimmt genannt ist, die Richtigkeit der Angabe nicht leicht zu bestreiten sei, daß dagegen, wo Pythagoras selbst der Urheber gewesen sein soll, sehr wohl eine Namensverschiebung stattgefunden haben könne.

Einige von den Dingen, welche ganz besonders der Geschichte der Mathematik angehören, werden wir allerdings nicht verzichten Pythagoras selbst zuzuschreiben. Dazu gehört der pythagoräische Lehrsatz, den wir unter allen Umständen ihm erhalten wissen wollen. Sei es darum, daß man den Zeugnissen des Vitruvius, des Plutarch, des Diogenes Laertius, des Proklus, so bestimmt sie auch lauten[1]), wegen ihres späten Datums kein Gewicht beilegen dürfe. Schwerer fallen doch die in die Wagschale, welche Proklus als seine Gewährsmänner anführt: „Die welche Altertümliches erkunden wollen"[2]), sei damit, wie man gewöhnlich annimmt, Eudemus gemeint oder nicht. Am überzeugendsten vollends ist uns die mittelbare Bestätigung in dem alten Mathematikerverzeichnisse. Pythagoras, heißt es dort ausdrücklich, erfand die Theorie des Irrationalen. Eine solche Theorie war aber ganz unmöglich, eine Beschäftigung mit dem Irrationalen undenkbar, wenn nicht der Satz von den Quadraten der drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks vorher bekannt war, und man würde, wollte man Pythagoras nicht als seinen Urheber gelten lassen, in die noch schwierigere Lage versetzt, ihn älter als Pythagoras annehmen zu müssen.

[1]) Diese Zeugnisse zusammengestellt bei Allman l. c. pag. 26. k. [2]) Proklus ed. Friedlein 426 *τῶν μὲν ἱστορεῖν τὰ ἀρχαῖα βουλομένων*. Das Wort *ἱστορεῖν* besitzt bei Proklus nirgend eine spöttische Nebenbedeutung, man darf also nicht, wie es geschehen ist, übersetzen „die alte Geschichten erzählen wollen".

Auf Grundlage des Mathematikerverzeichnisses sehen wir ferner in Pythagoras selbst wirklich den Erfinder der Konstruktion der kosmischen Körper, d. h. der regelmäßigen Vielflächner in einem Sinne, der nachher noch auseinandergesetzt werden soll.

Glaubwürdig ist uns auch, was der bekannte Musikschriftsteller Aristoxenus, einer der zuverlässigsten Gelehrten der peripatetischen Schule, berichtet, daß Pythagoras vor allen die Zahlenlehre[1]) in Achtung gehabt und dadurch gefördert habe, daß er von dem Bedürfnisse des Handels weiter schritt alle Dinge den Zahlen vergleichend[2]). Wir glauben an die Berechtigung der Verbindung des Namens des Pythagoras mit der musikalischen Zahlenlehre, mag das Monochord von ihm herrühren oder nicht, wir glauben, daß er hauptsächlich um die arithmetische Unterabteilung der Geometrie sich bemüht habe[3]).

Ja wir gehen noch weiter und schreiben dem Pythagoras den Besitz einer mathematischen Erfindungsmethode zu, des mathematischen Experimentes, wie wir dieses Verfahren anderwärts genannt haben[4]), womit freilich ebensowenig gesagt sein soll, daß das Bewußtsein ihm innewohnte darin eine wirkliche Methode zu besitzen, als daß er ihr Erfinder war, die er aus den in Ägypten gewonnenen Anschauungen jedenfalls leicht abstrahieren konnte, wenn er sie nicht fertig von dort mitbrachte.

Auf die persönliche Zuweisung sonstiger Dinge verzichten wir und werden im folgenden von der Mathematik der Pythagoräer, nicht des Pythagoras reden. Freilich vergrößert sich dadurch der Zeitraum, dessen wissenschaftliches Bild wir zu gewinnen trachten, erheblich. Wenn auch nicht bis zu den letzten eigentlichen Pythagoräern, deren Tätigkeit auf 366 angesetzt wird[5]), so doch bis vor Platon, etwa bis zum Jahre 400 erstreckt sich unserer Meinung nach die mathematische Tätigkeit des Pythagoräismus als solchem. Von

[1]) Diogenes Laertius VIII, 14. [2]) Stobaeus, Ecloga phys. I, 1, 6. [3]) Diogenes Laertius VIII, 12: *μάλιστα δὲ σχολάσαι τὸν Πυθαγόραν περὶ τὸ ἀριθμητικὸν εἶδος αὐτῆς* (sc. *γεωμετρίας*) *τόν τε κάνονα τὸν ἐκ μιᾶς χορδῆς εὑρεῖν*. [4]) Math. Beitr. Kulturl. 92. [5]) Zeller I, 288, Note 5.

seinen meistens namenlosen, mitunter an bestimmte Persönlichkeiten geknüpften Leistungen wissen wir aus verschiedenen teilweise späten, uns jedoch in den Dingen, für welche wir sie gebrauchen wollen, als zuverlässig geltenden Quellen.

Als solche Quelle betrachten wir vor allen Dingen den „Timäus“ überschriebenen Dialog des Platon. Timäus von Lokri war ein echter Pythagoräer, Platon dessen Schüler. Soll man nun annehmen, Platon habe diesem seinem Lehrer wissenschaftliche Äußerungen in den Mund gelegt, die er nicht ganz ähnlich von ihm gehört hatte, er habe ihm insbesondere Mathematisches untergeschoben? Wir können einem solchen Gedanken uns nicht hingeben, können es um so weniger, als Platons eigene Abhängigkeit von den Pythagoräern in vielen Dingen durch einen so unverdächtigen Zeugen wie Aristoteles bestätigt wird. Die Philosophie Platons, sagt er[1]), kam nach der pythagoräischen, in vielem ihr folgend, anderes eigentümlich besitzend. Eine zweite wichtige Quelle liefert uns ein Werk des Theon von Smyrna[2]). Dieser Schriftsteller lebte zwar erst um 130 n. Chr., also in einer Zeit, wo die Mythenbildung, die Pythagorassage, wie man einigermaßen schroff sich ausgedrückt hat, in dem Leben des Pythagoras von Apollonius von Tyana, in den unglaublichen Dingen jenseits Thule von Antonius Diogenes, schon romanhafte Gestalt gewonnen hatte. Aber für die Dinge, für welche wir Theon gebrauchen wollen, war in einem Roman blutwenig zu schöpfen. Man lese doch das Leben des Pythagoras von Porphyrius, das ähnliche teilweise daran sich anlehnende Buch von Jamblichus, man lese was Diogenes Laertius von dem Leben des Pythagoras aufgespeichert hat, und man wird zwar unterhaltende Geschichtchen genug finden, Mathematisches aber nur insoweit als Laien mit mathematischen Wörtern um sich zu werfen imstande sind, es sei denn, daß ältere Fachleute wie der Musiker Aristoxenus, der Rechenmeister Apollodorus als Gewährsmänner auftreten, zu welchen als Fachmann Jamblichus selbst hinzutritt, der uns in dieser Gestalt im 23. Kapitel begegnen wird. Was also Theon von Smyrna als pythagoräische mathematische Lehren hervorhebt, das muß aus ganz anderen nicht mythischen Schriften geschöpft sein, von welchen Porphyrius, Jamblichus in ihren Biographien des Pythagoras wenigstens in diesem Sinne keinen Gebrauch gemacht haben.

Wer freilich solche Schriften verfaßte, und wie sie hießen, das dürfte ein unlösbares Rätsel bleiben, wenn man auch versucht hat

[1]) Aristoteles Metaphys. I, 6. [2]) *Theonis Smyrnaei philosophi Platonici expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium.* Edid. Ed. Hiller. Leipzig 1878.

die zweite Frage zu beantworten[1]). Bei Jamblichus findet sich folgendes[2]): „Die Pythagoräer erzählen, die Geometrie sei so in die Öffentlichkeit gelangt. Einer von den Pythagoräern habe sein Vermögen verloren, und da habe man ihm gestattet, die Geometrie als Erwerbszweig zu benutzen.“ Daran schließt sich die fast unverständliche Stelle: *'Εκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία*, welche unser Gewährsmann übersetzt: „Die Geometrie wurde aber Überlieferung von Pythagoras genannt.“ So ansprechend die Vermutung an sich klingt, wobei an dem fehlenden zu *ἱστορία* gehörenden Artikel kein Anstoß genommen zu werden braucht, da Plato eine ganz ähnliche Wendung benutzt hat[3]), so ist doch vielleicht die Übersetzung *ἱστορία* = Forschung noch richtiger. Der Satz hieße dann auf deutsch: „Es wurde aber die Geometrie Forschung von seiten des Pythagoras genannt“[4]).

Die Benutzbarkeit des Theon von Smyrna gründet sich wesentlich auf dem ausgesprochenen Zwecke seines Werkes. Er will die zum Verständnis Platons und der Platoniker nötigen Vorkenntnisse mitteilen. Er will dabei der Reihe nach die Arithmetik mit Inbegriff der musikalischen Zahlenverhältnisse, die Geometrie, die Stereometrie, die Astronomie, die Musik der Welten behandeln. Hier finden wir also hauptsächlich dasjenige in der Sprache des II. nachchristlichen Jahrhunderts vorgetragen, was von mathematischen Kenntnissen für das Studium Platons notwendig ist. Das können aber vermöge der selbstverständlichen Tatsache, daß wissenschaftliche Anspielungen eines früheren Jahrhunderts nicht mit Hilfe der Errungenschaften eines späteren Jahrhunderts sich erklären, nur solche Kenntnisse sein, die nach Theons bestem Wissen den platonischen Schriften selbst geschichtlich vorausgingen, in ihnen zur Verwertung kommen konnten. Da ferner Theon von Platon selbst sagt, er folge oft den Pythagoräern[5]), so wird seine Brauchbarkeit für uns hier vollends erhöht. Diese beiden Werke sind also unsere Hauptquellen. Wir werden zu ihnen auch noch aus anderen Schriftstellern da und dort einen geringen Zufluß erhalten, die sich, wie wir sehen wollen, zu einem ganz stattlichen Ganzen vereinigen.

[1]) La géométrie Grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique par Paul Tannery (Paris 1887) pag. 81. [2]) De pithagorica vita (ed. Kiessling) 89 und Ansse de Villoison, Anecdota Graeca II, 216, lin. 22—25, sowie Jamblichus, De communi mathematica (ed. Festa) 78, 1—5. [3]) Platon, Phädon 96[a] *τῆς σοφίας ἣν δὴ καλοῦσι περὶ φύσεως ἱστορίαν* ohne Artikel. [4]) So die Meinung von W. Schmidt, der auch auf die Parallelstelle im Phädon hingewiesen hat. [5]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller), pag. 12.

Theon hat, sagten wir, zuerst die Arithmetik behandelt. Damit ist uns Gelegenheit geboten, eine ungemein wichtige Zweispaltung der Lehre von den Zahlen ins Auge zu fassen. Die ganze Mathematik zerfiel, nach Geminus[1]), in zwei Hauptteile, deren Unterschied er darin erkannte, daß der eine Teil sich mit dem geistig Wahrnehmbaren, der andere sich mit dem sinnlich Wahrnehmbaren beschäftige. Geistigen Ursprungs ist ihm Arithmetik und Geometrie, sinnlichen Ursprungs dagegen Mechanik, Astronomie, Optik, Geodäsie, Musik, Logistik. Von den übrigen Teilen und dem, was Geminus des weiteren über sie bemerkt, sehen wir ab. Arithmetik und Logistik erklärt er dahin, daß die erstere die Gestaltungen der Zahl an und für sich betrachte, die letztere aber mit Bezug auf sinnliche Gegenstände. Arithmetik ist ihm also eine theoretische, Logistik eine praktische Wissenschaft. Arithmetik ist ihm, um die heute gebräuchlichen Wörter anzuwenden, das was seit Gauß höhere Arithmetik, seit Legendre Zahlentheorie genannt wird. Logistik ist ihm die eigentliche Rechenkunst.

Diese strenge Unterscheidung war allerdings in den Zeiten pythagoräischer Mathematik noch nicht zum Durchbruch gelangt. Die Pythagoräer stellten die beiden Fragen: Wie viel? und Wie groß?[2]) In der Beantwortung beider trennten sie aufs neue. Das eine Mal wurde die Vielheit an sich in der Arithmetik, die Vielheit bezogen auf anderes in der Musik behandelt. Das andere Mal bildete die ruhende Größe den Gegenstand der Geometrie, die bewegte Größe den Gegenstand der Sphärik.

Bei manchem Wechsel der sonstigen Systematik blieb die eigentliche Arithmetik vom VI. bis zum I. vorchristlichen Jahrhundert, von den Pythagoräern bis zu Geminus fast mit gleichem Inhalte ausgestattet, und dieser gleichartige Inhalt wahrte sich weiter, solange überhaupt in griechischer Sprache über diesen Teil der Mathematik geschrieben wurde. Einiges kam natürlich im Laufe der zeitlichen Entwicklung hinzu. In die griechische Arithmetik drang ein, was wir jetzt Algebra oder Lehre von den Gleichungen nennen, soviel davon bekannt war. Ihr gehörte die Lehre von den nach bestimmten Gesetzen gebildeten Reihen und deren Summierung, ihr die Proportionenlehre an, wie sie nach und nach in weiterem und weiterem Umfang sich bildeten, aber niemals begriff die Arithmetik das eigentliche Rechnen unter sich.

Wir werden uns wohl der Wahrheit nähern, wenn wir annehmen,

[1]) Proklus ed. Friedlein, pag. 38. Vgl. auch Nesselmann, Algebra der Griechen, S. 40flgg. [2]) Proklus ed. Friedlein, pag. 35—36.

die Logistik, die Rechenkunst, sei erst allmählich als Gegenstand schriftlicher Unterweisung in Büchern behandelt worden. Sie verdankte vorher ihre unentbehrliche Verbreitung vorwiegend dem mündlichen Unterricht. Sie war allgemeines Bedürfnis, nicht Wissenschaft, und es mag lange gedauert haben, bevor es einem Rechenmeister einfiel, über den Inhalt seines Unterrichts sich schriftlich auszusprechen. Zu dieser Annahme gelangen wir von der Erwägung aus, daß eine Logistik bestand und uns quellenmäßig gesichert ist, lange bevor wir von Büchern über dieselbe hören. Ihr Name kommt schon in einem platonischen Dialoge vor, wo die Logistik der Arithmetik gegenübergestellt ist[1]), und in einem anderen Dialoge des gleichen Verfassers ist von den Logistikern[2]) die Rede.

Wenn wir bei der Betrachtung der pythagoräischen Mathematik von den arithmetischen Dingen ausgehen, so folgen wir nur der Aussage, welche in dieses Gebiet die wesentlichsten Leistungen des Pythagoras verlegt, und welche, selbst wenn ihr kein Gewährsmann von der Bedeutung des Aristoxenus Gewicht verliehe, in dem allgemeinen Bewußtsein, daß die der Arithmetik nächststehende Zahlensymbolik so recht eigentlich altpythagoräisch war, ihre Rechtfertigung finden könnte. Wir haben ein Beispiel pythagoräischer Zahlenmystik an früherer Stelle (S. 42) verwertet. Ein anderes mag hier Platz finden, welches gleichfalls Plutarch uns aufbewahrt hat: Es haben sich aber wohl die Ägypter die Natur des Weltalls zunächst unter dem Bilde des schönsten Dreiecks gedacht; auch Platon in der Schrift vom Staate scheint das Bild gebraucht zu haben, da wo er ein Gemälde des Ehestandes entwirft. Das Dreieck enthält eine senkrechte Seite von 3, eine Basis von 4 und eine Hypotenuse von 5 Teilen, deren Quadrat denen der Katheten gleich ist. Man kann nun die Senkrechte mit dem Männlichen, die Basis mit dem Weiblichen, die Hypotenuse mit dem aus beiden Geborenen vergleichen und somit den Osiris als Ursprung, die Isis als Empfängnis und den Horus als Erzeugnis denken[3]). Mit dem Vorbehalte auf diese nicht unwichtige Stelle zurückzukommen, benutzen wir sie hier nur als freilich spätes Beispiel pythagoräischer Zahlenspielerei, dem eine übergroße Menge ähnlicher Dinge, Vergleichungen von Zahlen mit einzelnen Gottheiten oder Vergleichungen von Zahlen mit gewissen sittlichen Eigenschaften usw. aus älterer und ältester Zeit zur Seite gestellt werden könnte[4]), wenn die Geschichte der Mathematik neben dem allgemeinen Vergleiche mit babylonischen Gedankenfolgen einen besonderen unmittel-

[1]) Platon, Gorgias 451, B. [2]) Platon, Euthydemus 290, B. [3]) Plutarch, *De Iside et Osiride* 56. [4]) Eine reiche Sammlung von Stellen bei Zeller I, 334—345, namentlich in den Anmerkungen.

baren Nutzen daraus zu ziehen imstande wäre. Allenfalls könnte dieses für einen Satz zutreffen, welcher, wie sich zeigen wird, durch Jahrhunderte sich forterbte, den Satz: daß die Einheit Ursprung und Anfang aller Zahlen, aber nicht selbst Zahl sei[1]).

Wir werden bald sehen, daß die Pythagoräer es liebten auf Gegensätze ihr Augenmerk zu richten, und ein solcher Gegensatz war der zwischen Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen. Ein alter Pythagoräer, Thymaridas von Paros[2]) war es vermutlich, der den Primzahlen den Namen der geradlinigen Zahlen, ἀριθμοὶ εὐθυγραμμικοί, beilegte[3]), jedenfalls im Gegensatze zu Flächenzahlen, von welchen auch noch in diesem Kapitel die Rede sein wird. Derselbe Thymaridas aber hat sich ein außerordentlich viel größeres Verdienst dadurch erworben, daß er ein Verfahren zur Auflösung gewisser Aufgaben erfand, welches von hoher Tragweite ist, und welches wir nach Jamblichus auseinandersetzen[4]). Das Verfahren muß sehr verbreitet gewesen sein. Dafür bürgt außer Gründen, welche im 29. Kapitel auf indischem Boden sich ergeben werden, der doppelte Umstand, daß Jamblichus es geradezu als eine Methode, ἔφοδος, bezeichnet und es mit einem bestimmten Namen nennt, welcher demselben schon früher eigentümlich gewesen zu sein scheint. Das Epanthem, d. h. die Nebenblüte des Thymaridas, besteht in folgendem[5]): „Wenn gegebene (ὡρισμένα) und unbekannte Größen (ἀόριστα) sich in eine gegebene teilen und eine von ihnen mit jeder anderen zu einer Summe verbunden wird, so wird die Summe aller dieser Paare nach Subtraktion der ursprünglichen Summe bei drei Zahlen der zu den übrigen addierten ganz zuerkannt, bei vier deren Hälfte, bei fünf deren Drittel, bei sechs deren Viertel und so fort.“ Damit ist gemeint, daß, wenn n Unbekannte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ heißen, und wenn außer ihrer Gesamtsumme $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = s$ die Summe der ersten Unbekannten x_1 mit jeder der folgenden Unbekannten einzeln gegeben ist, also $x_1 + x_2 = a_1$, $x_1 + x_3 = a_2$, $\cdots x_1 + x_n = a_{n-1}$, daß alsdann $x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - s}{n-2}$ sein muß. Das ist,

[1]) Vgl. Aristoteles, Metaph. XIII, 8, ferner Nicomachus, Eisagoge arithmet. II, 6, 3 (ed. Hoche pag. 84) und am deutlichsten bei Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) pag. 24: οὔτε δὲ ἡ μονὰς ἀριθμὸς, ἀλλὰ ἀρχὴ ἀριθμοῦ. [2]) Paul Tannery, Pour l'histoire de la science Hellène (Paris 1887) pag. 382 bis 386 über die Persönlichkeit des Thymaridas. [3]) Jamblichus Chalcidensis in Nicomachi Geraseni arithmeticam introductionem (ed. Tennulius 1668) pag. 36, (ed. Pistelli 1894) pag. 27, 4. [4]) Ebenda (ed. Tennulius) pag. 89, (ed. Pistelli) pag. 62, 19. Diese verderbte und darum ungemein schwierige Stelle hat zuerst Nesselmann, Algebra der Griechen S. 232 flgg. richtig erklärt. [5]) Wir benutzen die Übersetzung Nesselmanns.

wie man sieht, vollständig gesprochene Algebra, welcher nur Symbole fehlen, um mit einer modernen Gleichungsauflösung durchaus übereinzustimmen, und insbesondere ist mit Recht auf die beiden Kunstausdrücke der gegebenen und unbekannten Größe aufmerksam gemacht worden.

Genug die Pythagoräer, seit Gründung der Schule, beachteten die Zahlen und wußten verschiedene Gattungen derselben, so namentlich die geraden und ungeraden Zahlen, erstere als ἄρτιοι, letztere als περισσοί, zu unterscheiden[1]). Diese Unterscheidung war so landläufig, daß zu Platons Zeit das Spiel „Grad oder Ungrad“ schon in Übung war[2]). Wir erinnern uns, daß auch den Ägyptern dieser Unterschied nicht entgangen war, wie wir aus der Einrichtung ihrer Zerlegungstabelle für Brüche schließen durften (S. 64). Ob sie freilich bestimmte Namen für das Gerade und für das Ungerade hatten, was zum vollen Bewußtsein dieser Zahlengattungen gehört, das schwebt so lange im Dunkel, als nicht ein ägyptisches theoretisches Werk entdeckt ist, dessen Notwendigkeit zur Ergänzung des Übungsbuches wir eingesehen haben. Letzteres enthält jedenfalls solche Namen nicht.

Die Pythagoräer sahen überdies in den geraden und ungeraden Zahlen Glieder von Reihen, nannten solche Reihenglieder ὅροι und besaßen vermutlich in dem Worte ἔκθεσις auch einen Namen für den Begriff von Reihe selbst[3]). Auch diese Tatsache kann uns nicht in Erstaunen setzen, nachdem die Kenntnis der arithmetischen wie der geometrischen Reihe bei Ägyptern und Babyloniern, die Kenntnis der Summenformel für arithmetische Reihen mit Gewißheit, für geometrische Reihen als Möglichkeit bei den Ägyptern festgestellt werden konnte.

Mit den Reihen der geraden und ungeraden Zahlen wurden bei den Griechen — wir behaupten bei den Pythagoräern — nach den Zeugnissen des Theon von Smyrna mannigfache Summierungen vorgenommen. Man addierte die sämtlichen aufeinanderfolgenden Zahlen der natürlichen Zahlenfolge von der 1 bis zu einem beliebig gewählten Endgliede und fand $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ die Dreieckszahl[4]). Man addierte die ungeraden Zahlen für sich und

[1]) ὅ γε μὰν ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ἴδεα εἴδη περισσὸν καὶ ἄρτιον heißt es in einem Fragmente des Philolaus. Vgl. Zeller I, 299, Anmerkg. 1 und Chaignet I, 228. [2]) Platon, Lysis pag. 206. [3]) Vgl. Bienaymé in einer Notiz über zwei Stellen des Stobäus in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie der Wissenschaften vom 3. Oktober 1870. [4]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 31.

fand $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ die **Quadratzahl**, zu deren Erklärung man eben diese Entstehungsweise benutzte[1]). Man addierte die geraden Zahlen für sich und fand $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ die **heteromeke Zahl**[2]), d. h. das Produkt zweier Faktoren, deren einer um die Einheit größer ist als der andere, und welches eben dieses Größersein der einen Zahl in seinen Namen aufnahm.

Wir haben hier arithmetische Erklärungen und Lehrsätze den Pythagoräern überwiesen, welche trotz ihres Vorkommens bei Theon von Smyrna, trotz der von uns vorausgeschickten allgemeinen Rechtfertigung der Benutzbarkeit seines Werkes für diese weit zurückliegende Zeit, einigermaßen stutzig machen könnten. Da wir in unseren Folgerungen noch weiter zu gehen gedenken, so dürfte es nicht unzweckmäßig sein, andere Beweisgründe für die Richtigkeit unserer Annahme hier einzuschalten, welche ein bedeutend älterer Schriftsteller von allseitig anerkannter Zuverlässigkeit, mit einem Worte, welche **Aristoteles** uns liefert. In dessen Metaphysik[3]) finden wir die sogenannte **pythagoräische Kategorientafel**, in welcher zehn Paar Grundgegensätze aufgezählt werden, die der pythagoräischen Schule angehört haben. Diese heißen 1. Grenze und Unbegrenztes; 2. Ungerades und Gerades; 3. Eines und Vieles; 4. Rechtes und Linkes; 5. Männliches und Weibliches; 6. Ruhendes und Bewegtes; 7. Gerades und Krummes; 8. Licht und Finsternis; 9. Gutes und Böses; 10. Quadrat und Heteromekie. Wir dürfen vielleicht annehmen, daß unter dem 3. Paare die Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen inbegriffen sind. Wir erkennen in den beiden mit 2. und 10. bezeichneten Paaren die Zusammengehörigkeit des Ungeraden mit dem Quadrat, des Geraden mit der Heteromekie, und sollte diese Zusammengehörigkeit nicht in der Entstehungsweise der Quadrate und der Heteromeken ihre vollgültige Begründung finden? Allerdings hat man, wie wir sehen werden, eine andere Erklärung gesucht, weshalb das 10. Paar, dessen Vorhandensein unter allen Umständen einer Rechtfertigung bedarf, weil seine Gegensätze nicht so scharf und natürlich sind, wie die der neun anderen Paare, Aufnahme gefunden habe. Wir sind nicht gewillt, jene andere Erklärung schon jetzt geradezu zu verwerfen, aber noch weniger auf die unsrige zu verzichten. Konnte es doch in der Tafel der Grundgegensätze, auf welche alle Erscheinungen zurückzuführen sind, nur erwünscht sein, durch ein Paar sofort zwei wesentlich verschiedene Beziehungen dargestellt zu wissen. Ist doch überdies mindestens die Entstehung des Quadrats als Summe der mit der Einheit beginnen-

[1]) **Theon Smyrnaeus** (ed. **Hiller**) 28. [2]) Ebenda 27 und 31. [3]) **Aristoteles**, **Metaphys.** I, 5, 6, vgl. **Zeller**, 5. Aufl. I, 354, Anmerkg. 3.

den ungeraden Zahlen wieder durch Aristoteles als echt pythagoräisch bezeugt[1]).

Aristoteles bedient sich dabei eines Wortes, welches für uns von großer und vielfacher Wichtigkeit ist, des Wortes **Gnomon**. Was ist ein Gnomon? Wörtlich genommen ein **Erkenner**, und zwar bedeutete es zunächst einen Erkenner der Zeit, dann der senkrechten Stellung, welche der Stab, um als Schattenwerfer und Stundenzeiger Anwendung finden zu können, einnehmen mußte. So wurde das Wort allmählich aus einem Kunstausdrucke der praktischen Astronomie zu einem solchen der Geometrie, und man sagte „die nach dem Gnomon gerichtete Linie“[2]), wenn man von einer Senkrechten reden wollte. Der Sinn des Wortes veränderte sich aber nun noch weiter. Ein mechanisch herzustellender rechter Winkel (Fig. 20) wurde so genannt oder geometrisch ausgedrückt: Gnomon war das, was von einem Quadrat übrig blieb, wenn aus dessen einer Ecke ein kleineres Quadrat herausgeschnitten wurde. Diese Bedeutung des Wortes war bei den Pythagoräern gang und gebe. Den untrüglichen Beweis dafür liefert ein erhaltenes Bruchstück des **Philolaus**[3]), eines Pythagoräers, dessen Lebenszeit so ziemlich gleichmäßig von den Grenzen des Jahrhunderts zwischen 500 und 400 abstehen möchte. Ebendemselben Philolaus dürfte auch der Begriff des zusammengesetzten Verhältnisses schon bekannt gewesen sein, welcher uns im 12. Kapitel begegnen wird. In noch späterer Zeit verschob sich die Bedeutung des Wortes Gnomon noch weiter. **Euklid** stellte um 300 die Definition auf, in einem Parallelogramme heiße ein jedes der um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme mit den beiden Ergänzungen zusammen ein Gnomon[4]). Der Sinn dieser im Wortlaute nicht allzu deutlichen Erklärung ist folgender. Werden in einem Parallelogramme durch einen und denselben Punkt der Diagonale Parallellinien zu den beiden Seiten gezogen, so entstehen (Fig. 21) zwei in unserer Figur wagerecht schraffierte Parallelogramme, und zwei in unserer Figur schräg schraffierte Ergänzungsdreieckchen. Diese vier kleinen

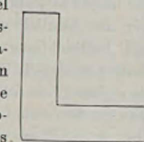

Fig. 20.

Fig. 21.

[1]) **Aristoteles**, **Physic.** III, 4. Vgl. **Zeller** I, 300, Anmerkung und **Chaignet** II, 61—62. [2]) **Proklus** ed. **Friedlein** 283, 9. [3]) Philolaus, des Pythagoreers Lehren nebst den Bruchstücken seines Werkes von Aug. **Böckh**. Berlin 1819, Fragment 18, S. 141. — **Chaignet** I, 240. — **Wm. Romaine Newbold**, Philolaus. Archiv für Geschichte der Philosophie XIX, 176—217 (Berlin 1905). [4]) **Euklid**, Elemente II, Definition 2.

Figuren zusammen bilden das euklidische Gnomon, eine Verallgemeinerung des älteren Begriffes insofern, als ein Stück aus einem Parallelogramme statt aus einem Quadrate herausgeschnitten wird, um es hervorzubringen. Noch etwas allgemeiner wird die Erklärung, welche nachmals Heron von Alexandria gab: Alles was zu einer Zahl oder Figur hinzugefügt das Ganze dem ähnlich macht, zu welchem hinzugefügt worden war, heißt Gnomon[1]). Doch auch diese letzte Verallgemeinerung knüpft wieder an alte Begriffe an, indem schon Aristoteles sagt, wenn man ein Gnomon um ein Quadrat herumlege, werde zwar die Größe, aber nicht die Art der Figur verändert[2]).

Nachdem wir erörtert haben, was ein Gnomon in der Geometrie bedeute, ist der Zusatz wohl leicht verständlich, daß in alten Zeiten die ungerade Zahl auch wohl Gnomonzahl genannt wurde. Denken wir uns nämlich ein Quadrat, dessen Seite n Längeneinheiten mißt, und beabsichtigen wir dieses Quadrat zum nächstgrößeren mit der Seite von $n+1$ Längeneinheiten durch Hinzufügung eines Gnomon zu ergänzen, so ist klar, daß dieses Gnomon bestehen wird aus einem Quadratchen von der Seite 1 und aus zwei Rechtecken von den Seiten 1 und n, daß es also $1+2\times n$ Flächeneinheiten besitzen wird, welche in der Tat die vorhandenen n^2 Flächeneinheiten des früheren Quadrates zu den $(n+1)^2$ Flächeneinheiten des neuen Quadrates ergänzen. Das heißt in Zahlen: die Quadratzahl n^2 wird zur nächsten Quadratzahl $(n+1)^2$, wenn man ihr die Gnomonzahl $2n+1$ beifügt. So sind wir zum Verständnis der vorher angedeuteten Stelle der aristotelischen Physik gelangt[3]), einem Verständnis, in welchem wir uns mit allen alten und neuen Erklärern zusammenfinden. Die Pythagoräer, sagt dort Aristoteles, hätten die Quadratzahlen gebildet, indem sie die Gnomonen allmählich zur Einheit hinzufügten. Das will eben nichts anderes heißen als (Fig. 22) die Pythagoräer haben die Summierung $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ vollzogen, haben dieses Verfahren mit klarer Einsicht in den darin zutage tretenden Gedanken ausgeübt.

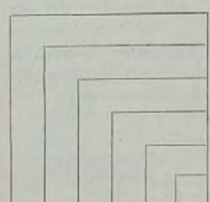
Fig. 22.

Sehen wir einen Augenblick von der arithmetischen Wichtigkeit des Satzes, der uns beschäftigt hat, ab, so ist er uns auch für die älteste Geometrie ein später noch zu verwertendes Zeugnis.

[1]) Heron Alexandrinus (ed. Hultsch) Definit. 59, pag. 21. [2]) Aristoteles, Categor. XIV, 5 und XI, 4. Vgl. Chaignet II, 62, Note 2. [3]) Aristoteles, Physic. III, 4.

Er läßt uns erkennen, daß die Pythagoräer den Zusammenhang, welcher zwischen den Seiten eines Quadrates, eines Rechteckes und deren Flächeninhalt stattfindet, mehr als nur ahnten, was freilich bei Schülern einer aus Ägypten eingewanderten Geometrie nicht verwundern kann. Er läßt uns ferner die Kenntnis der eigentümlichen Figur des Gnomon beachten. Einen mechanisch herzustellenden rechten Winkel nannten wir oben diese Figur, und in der Tat ist das Alter dieses Werkzeugs geradezu sagenhaft. In Ägypten sind wir ihm (S. 105) auf der bildlichen Darstellung einer Schreinerwerkstätte begegnet, und bei Plinius hat sich die Überlieferung erhalten, die Werkzeuge der Architekten, wie Axt, Säge, Bohrer, Setzwage rührten von Dädalus und dessen Neffen Talus her, welche vor dem trojanischen Kriege lebten, der rechte Winkel von Theodorus von Samos, einem der Erbauer des Tempels von Ephesus um das Jahr 600 etwa[1]).

Und noch etwas lernen wir aus der pythagoräischen Begründung des Satzes von der Entstehung der Quadratzahlen: die Neigung zur geometrischen Versinnlichung von Zahlengrößen und deren Verknüpfungen, welche wir für griechische Eigentümlichkeit halten, entsprechend dem viel und mit Recht gerühmten plastischen Sinne der Hellenen. Der erste Anstoß könnte ja, wenn man für alles eine äußere Veranlassung suchen wollte, in der ägyptischen uns aus dem Übungsbuche des Ahmes bekannten Gewohnheit den Figuren die Maßzahlen ihrer Längen, ihrer Flächen beizuschreiben gefunden werden, aber immerhin läßt das griechische Verfahren sich als einen Gegensatz zu diesem ägyptischen bezeichnen. Bei dem einen handelt es sich um die Möglichkeit geometrische Gebilde in Rechnung zu bringen, bei dem anderen um die Möglichkeit das Ergebnis rechnender Überlegung den Sinnen erfaßbar zu machen. Die Gnomonzahlen waren unter den bis hierher besprochenen nicht die einzigen, deren Versinnlichung die Pythagoräer sich angelegen sein ließen. Die Quadratzahlen selbst bilden ein anderes Beispiel, ein anderes die Heteromeken. Auf die Versinnlichung führen auch die Namen Flächen- und Körperzahlen zurück, zu deren pythagoräischem Vorkommen wir uns nunmehr wenden.

Im platonischen Timäus findet sich eine Stelle, welche etwa folgendermaßen heißt: Um mit zwei Flächen eine geometrische Proportion zu bilden, deren äußere Glieder sie sein sollen, genüge es eine dritte Fläche als geometrisches Mittel anzusetzen; sollen aber zwei Körper die äußeren Glieder einer geometrischen Proportion sein, so

[1]) Plinius, Histor. natural. VII, 56.

müsse man zwei voneinander verschiedene innere Glieder annehmen, weil ein geometrisches Mittel nicht vorhanden sei[1]).

Flächen und Körper können hier nur als Zahlen und zwar als Produkte von zwei beziehungsweise von drei Faktoren angesehen werden. Das heißt man wußte damals, daß im allgemeinen das Maß einer Fläche, eines Körpers gefunden werde, indem man zwei, drei Abmessungen miteinander vervielfältigte. Die Erklärung von Flächen- und Körperzahlen als solcher Produkte ist ausgesprochen bei Euklid[2]), sie ist ausgesprochen bei Theon von Smyrna[3]). Beide bedienen sich der Namen *ἀριθμοὶ ἐπίπεδοι* für die Flächen-, *ἀριθμοὶ στερεοί* für die Körperzahlen, und der pythagoräische Ursprung derselben beweist sich aus der eben hervorgehobenen Tatsache, daß nur mit ihrer Hilfe die Timäusstelle zur Klarheit gelangt. Denken wir uns $p_1 p_2 p_3$ $q_1 q_2 q_3$ als sechs Primzahlen und jedenfalls keine von den Primzahlen p einer Primzahl q gleich. Nun ist $p_1 p_2$ eine Flächenzahl, $q_1 q_2$ eine zweite. Deren geometrisches Mittel läßt sich bilden, d. h. $\sqrt{p_1 p_2 q_1 q_2}$ ist rational ausziehbar, sofern $p_1 = p_2$ und zugleich $q_1 = q_2$. Die gefundene Proportion heißt unter Weglassung der in diesem Falle unnötig gewordenen Indices $p^2 : pq = pq : q^2$ und es genügte wirklich eine dritte Fläche als geometrisches Mittel anzusetzen, um mit den angegebenen beiden Flächen eine geometrische Proportion zu bilden, deren äußere Glieder sie sein sollten. Körperzahlen werden ferner sowohl $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ als $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$. Deren geometrisches Mittel $\sqrt{p_1 p_2 p_3 q_1 q_2 q_3}$ ist aber nie rational, wenn die Vorschrift kein p einem q gleich werden zu lassen eingehalten wird, mögen die p und die q je unter sich gleich oder verschieden sein. Durch zwei Mittelglieder dagegen läßt sich die Proportion in mannigfaltiger Weise ergänzen z. B. $p_1 p_2 p_3 : p_1 p_2 q_1 = q_2 q_3 p_3 : q_1 q_2 q_3$ oder $p_1 p_2 p_3 : p_1 p_3 q_2 = q_1 q_3 p_2 : q_1 q_2 q_3$ usw. Im Timäus heißt das so: Sollten zwei Körper die äußeren Glieder einer geometrischen Proportion sein, so mußte man zwei voneinander verschiedene innere Glieder annehmen, weil ein geometrisches Mittel nicht vorhanden ist. Werden hier die p und die q wieder alle als unter sich gleich betrachtet und läßt man deshalb die Indices wieder weg, so entsteht $p^3 : p^2 q = pq^2 : q^3$ oder $p^3 : pq^2 = p^2 q : q^3$. Eine andere Auswahl von Mittelgliedern gibt es in diesem besonderen Falle nicht. Gerade er hat sich auch anderweitig erhalten. Euklid beweist, daß zwischen zwei Quadratzahlen eine, zwischen zwei Kubikzahlen zwei

[1]) *Études sur le Timée de Platon par* Th. H. Martin I, 91 und 337—345 und Hultsch in Fleckeisen und Masius, Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik. Jahrgang 1873. Bd. 107, 493—501. [2]) Euklid VII, Definitionen 16 und 17. [3]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller), pag. 36—37 und häufiger.

mittlere Proportionalen fallen[1]) und Nikomachus nennt diese beiden Sätze ausdrücklich platonisch[2]), ohne Zweifel in Berücksichtigung der damals allgemein bekannten Timäusstelle.

Eben diese Stelle hat bei der ausführlicheren Besprechung noch erhöhte Bedeutsamkeit für uns gewonnen. Zwei wichtige Tatsachen gelangten dadurch zu unserem Bewußtsein, die eine daß der Begriff des Irrationalen der Schule des Pythagoras angehörte, die andere daß dieselbe Schule sich viel mit Verhältnissen beschäftigte. Auf den ersteren Gegenstand kommen wir im nächsten Kapitel bei Gelegenheit des pythagoräischen Lehrsatzes zu reden. Von den Verhältnissen handeln wir sogleich.

Schon die Beziehung zwischen zwei Zahlen, welche wir heute als einen Bruch bezeichnen, gehört hierher. Die Griechen hatten für solche Beziehungen die verschiedensten Namen. Jedes $\frac{n}{n+1}$ hieß z. B. *ἐπιμόριον*, und Archytas hat schon den Satz ausgesprochen und bewiesen[3]), daß wenn ein Epimorion $\frac{\alpha}{\beta}$ auf seine kleinste Benennung gebracht werde, welche etwa $\frac{\mu}{\nu}$ heiße, immer $\nu = \mu + 1$ sein müsse. Da nämlich $\alpha : \beta = \mu : \nu$, so ist $\alpha = \gamma\mu$, $\beta = \gamma\nu$. Ferner folgt aus $\mu : \nu = n : (n + 1)$, daß $\nu = \mu + \frac{\mu}{n}$ und bei $\frac{\mu}{n} = \delta$, daß $\mu = n\delta$, $\nu = (n + 1)\delta$. Nun kann $\frac{\mu}{\nu} = \frac{n\delta}{(n+1)\delta}$ nur dann als auf die kleinste Benennung gebracht erscheinen, wenn $\delta = 1$, d. h. wenn $\mu = n, \nu = n + 1$ oder $\nu = \mu + 1$ ist. Satz und Beweis haben sich in musikalischen Schriften von Euklid (*Κατατομὴ κανόνος*) und Boethius, von welchen im 13. und im 27. Kapitel die Rede sein wird, erhalten, doch ist dort der Beweis für heutige Leser vielleicht nicht ganz so durchsichtig wie in unserer Wiedergabe, weil er nach griechischer Gewohnheit an Strecken geführt ist, welche bald durch einen einfachen Buchstaben, bald durch zwei Buchstaben (den Endpunkten der betreffenden Strecken zugehörend) bezeichnet sind. Bei Boethius ist auch beachtenswert, daß er, dem die Einheit keine Zahl war, zwischen Zahl und Einheit unterscheidet.

Wir sind nicht auf die Timäusstelle allein angewiesen, um die Analogien und Mesotäten, das sind die griechischen Namen für Verhältnisse und dabei auftretende Mittel, für die Pythagoräer in

[1]) Euklid VIII, 11 und 12. [2]) Nicomachus, Eisagoge arithm. II, 24, 6 (ed. Hoche), pag. 129. [3]) P. Tannery in der Bibliotheca Mathematica 3. Folge, Bd. VI, 225—229 unter Berufung auf Musici Scriptores (ed. v. Jan pag. 152) und Boethius, De institutione musica III, 11 (ed. Friedlein pag. 285).

Anspruch zu nehmen. Ein bei Nikomachus aufbewahrtes Bruchstück des Philolaus[1]) läßt den Würfel die geometrische Harmonie genannt werden, weil seine sämtlichen Abmessungen völlig gleich untereinander und somit in vollständigem Einklange seien. Dementsprechend habe man den Namen harmonisches Verhältnis wegen der Ähnlichkeit mit der geometrischen Harmonie eingeführt. In der Tat spiegle sich dieses Verhältnis in jedem Würfel mit seinen 12 Kanten, 8 Ecken und 6 Flächen ab. Wir haben kaum notwendig diese Stelle noch zu erläutern und zu bemerken, daß 6, 8, 12 in stetigem harmonischen Verhältnisse stehen, weil $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$.

Ein bei Porphyrius erhaltenes Bruchstück des soeben erwähnten Pythagoräers Archytas[2]) spricht nicht nur von dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel, er definiert sie geradezu, und zwar die beiden ersten in der heute noch gebräuchlichen Weise. Bei dem harmonischen Verhältnisse, fährt er fort, übertrifft das erste Glied das zweite um den gleichen Teil seiner selbst, wie dieses mittlere Glied das dritte um den Teil des dritten. In Buchstaben geschrieben heißt das: b ist harmonisches Mittel zwischen a und c, wenn $a = b + \frac{a}{n}$ und zugleich $b = c + \frac{c}{n}$. Wirklich folgt aus diesen beiden Gleichungen $\frac{a - b}{b - c} = \frac{a}{c}$ und daraus $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$.

Jamblichus[3]) führt die Kenntnis der drei stetigen Proportionen, der arithmetischen, geometrischen und harmonischen, auf Pythagoras und seine Schule zurück und läßt die musikalische Proportion, welche aus zwei Zahlen, deren arithmetischem und harmonischem Mittel sich bilde $\left(a : \frac{a + b}{2} = \frac{2ab}{a + b} : b\right.$, z. B. $6 : 9 = 8 : 12)$, durch Pythagoras aus Babylon, wo sie erfunden worden sei, zu den Hellenen bringen.

Es fällt nicht schwer das Auftreten der harmonischen Proportion auch von ägyptischen Anfängen aus zu erklären. War doch in der Bezeichnung der Stammbrüche durch ein Pünktchen über der den Nenner bildenden Zahl die Zumutung, möchten wir sagen, mit enthalten, neben solchen Zahlen a, b, c, welche eine arithmetische Reihe

1) Nicomachus, Eisagoge arithm. II, 26, 2 (ed. Hoche), pag. 135. Vgl. Boeckh, Philolaus fragm. 9, S. 87. Chaignet I, 233. 2) Porphyrius ad Ptolemaei Harmonica. Vgl. Gruppe, Ueber die Fragmente des Archytas und der älteren Pythagoreer. Berlin 1840, S. 94. Chaignet I, 282—283. 3) Jamblichus, Introductio in Nicomachi arithmeticam (ed. Tennulius), Arnheim 1668, pag. 141—142 und 168 (ed. Pistelli) pag. 100 und 118.

darstellen, auch eben dieselben punktiert zu betrachten, und dann hatte man die harmonische Reihe, deren musikalische Bedeutung bei der Entstehung der Töne auf dem Monochorde wohl erst in zweiter Linie bemerkt worden sein mag. Allerdings ist andererseits nicht zu vergessen, daß im alten Ägypten eine Proportionenlehre noch nicht nachgewiesen hat werden können, daß arithmetische und geometrische Reihen wie in Ägypten so auch in Babylon bekannt waren, daß nach dem letzteren Orte Quadratzahlen und Kubikzahlen hinweisen. Wir erinnern ferner daran, daß Jamblichus sich genauer mit Chaldäischem beschäftigte (S. 51) und sind darum trotz der späten Zeit, in welche seine schriftstellerische Tätigkeit fällt, sehr geneigt diesen seinen Worten soweit Glauben zu schenken, als sie alte gräkobabylonische Beziehungen betreffen. Auch mehr oder weniger auf Zahlenspielerei herauskommende Zahlenverknüpfungen, Vergleichung von Zahlen mit einzelnen Götterfiguren, das sind lauter Dinge, die den Babyloniern, die den Pythagoräern eigen sind. Dafür aber, daß wir alles in der pythagoräischen Schule von solchen Dingen Vorgetragene auch in ihr erfunden lassen sein sollten — der einzige Ausweg, wenn jede Verbindung mit Babylon verworfen wird — dafür erscheinen uns dieselben zu entwickelt. Solche arithmetische Kenntnisse setzen eine ganze lange Vorgeschichte voraus. Die Überzeugung davon würde nun ungemein befestigt, wenn es wahr sein sollte, daß auch die befreundeten und vollkommenen Zahlen bereits der pythagoräischen Schule angehörten.

Befreundete Zahlen sind solche, wie 220 und 284, von welchen jede gleich der Summe der aliquoten Teile der anderen ist: $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$ und $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$. Jamblichus führt deren Kenntnis auf Pythagoras selbst zurück[1]). Man habe ihn befragt, was ein Freund sei, und er habe geantwortet: „Einer der ein anderes Ich ist, wie 220 und 284." Wir möchten freilich auf diese Behauptung wenig Gewicht legen und kein größeres darauf, daß im IX. S. ein arabischer Gelehrter Tâbit ibn Kurra für die Kenntnis der befreundeten Zahlen auf die Pythagoräer verwies[2]). Letzterer kann sehr wohl seine Wissenschaft dieses Umstandes aus Jamblichus geschöpft haben, ersterem kann vorgeschwebt haben, daß die Innigkeit der Freundschaften unter den Pythagoräern von jeher als kennzeichnend für diese Schule galt[3]).

Vollkommene Zahlen sind solche, welche wie 6, 28, 496 der

1) Jamblichus in Nicomach. arithm. ed. Tennulius pag. 47—48 ed. Pistelli pag. 35. 2) Vgl. Woepke im *Journal Asiatique*, IV. Série, T. 20 (Jahrgang 1852), pag. 420. 3) Vgl. Zeller I, 271, Anmerkung 3.

Summe ihrer aliquoten Teile gleich sind: $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$; $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$. Daneben unterscheidet man überschießende und mangelhafte Zahlen, wenn die aliquoten Teile eine zu große beziehungsweise zu kleine Summe liefern, wie z. B. $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$; $8 > 1 + 2 + 4$. Euklid hat sich ausführlich mit den vollkommenen Zahlen beschäftigt[1]). Theon von Smyrna hat den drei verschiedenen Gattungen seine Aufmerksamkeit zugewandt und dieselben als *ἀριθμοὶ τέλειοι, ὑπερτέλειοι, ἐλλιπεῖς* benannt[2]). Man könnte demzufolge geneigt sein diese Begriffe als vorplatonische anzuerkennen, wenn nicht ein kaum zu beseitigender Gegengrund vorhanden wäre. Plato versteht nämlich in einer berühmten Stelle seines Staates den Ausdruck vollkommene Zahl ganz anders[3]) und Aristoteles bezeichnet mutmaßlich aus pythagoräischer Quelle die Zehn als vollkommene Zahl[4]) wiederum notwendig von einer ganz anderen Erklärung ausgehend. Diese beiden Gegenstände arithmetischer Grübelei werden wir daher am sichersten zwar Pythagoräern aber nicht solchen der alten Schule zuschreiben, sondern solchen, die in viel späterer Zeit den Namen und zum Teil auch die Forschungsweise derselben erneuerten.

Die Dreieckszahlen, sagten wir (S. 159) gestützt auf Theon von Smyrna, wurden von den Pythagoräern gebildet, indem sie versuchsweise die aufeinanderfolgenden Zahlen der mit 1 beginnenden natürlichen Zahlenreihe addierten. In diesem Namen Dreieckszahl zeigt sich aufs neue der Hang zur figürlichen Versinnlichung der nach unserer heutigen Auffassung abstrakten Zahlenbegriffe. Die aufeinanderfolgenden Zahlen nämlich durch gleich weit voneinander entfernte Punkte reihenweise untereinander zur Darstellung gebracht bildeten Dreiecke, und daß man diese Versinnlichung wirklich vornahm, mag man zu ihr gelangt sein wie man wolle, dafür bürgt eben der Name Dreieckszahl, *ἀριθμὸς τρίγωνος*. Es ist vielleicht wünschenswert noch von anderer Seite her zu bestätigen, daß wir hier wirklich Altertümliches vor uns haben, und dazu sind wir in der Lage. Wenig Gewicht freilich legen wir für diese Rückdatierung auf den an sich interessanten von Plutarch uns erhaltenen Lehrsatz, daß die mit 8 vervielfachten und um 1 vermehrten Dreieckszahlen Quadratzahlen gaben[5]) d. h. daß $8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = (2n+1)^2$. Erheblicher

[1]) Euklid IX, 36. [2]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 45. [3]) Plato Republ. VIII, pag. 546. Vgl. einen Aufsatz von Th. H. Martin in der *Revue Archéologique* T. XIII. [4]) Aristoteles, Metaphys. I, 5. [5]) Plutarch, Platonicae Quaestion. V, 2, 4.

ist schon das, was Lucian uns erzählt[1]). Pythagoras habe einen zählen lassen. Dieser sagte: „1, 2, 3, 4“, worauf Pythagoras dazwischen fuhr: Siehst du? Was du für 4 hältst, das ist 10 und ein vollständiges Dreieck und unser Eidschwur! Hierin ist die Kenntnis der Dreieckszahl 10 mit echt pythagoräischen Dingen in Verbindung gesetzt. Weit älter und dadurch noch überzeugender ist das Vorkommen des Begriffes wenn nicht des Wortes bei Aristoteles: Die einen führen die Zahlen auf Figuren wie das Dreieck und Viereck zurück[2]). Kommt nun endlich noch hinzu, daß einem Schüler des Sokrates und des Platon, dem Philippus Opuntius, bereits eine Schrift über vieleckige Zahlen zugeschrieben wird, welche er nebst einer anderen über Arithmetik bei Philipp von Mazedonien verfaßt haben soll[3]), so scheint uns damit der Beweis geliefert, daß wie die Quadratzahl und ihre Entstehung aus den ungeraden, wie die heteromeke Zahl und ihre Entstehung aus den geraden, so auch die Dreieckszahl und ihre Entstehung aus den unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen bereits pythagoräisch gewesen sein müsse.

Bei diesen drei Summierungen von nach einfachen Gesetzen fortschreitenden Zahlen blieb man aber, wie uns berichtet wird, nicht stehen. Man schrieb die Reihe der Quadratzahlen, von der 1 an, man schrieb darunter aber erst von der 3 anfangend die ungeraden Zahlen, und wenn man nun jede solche ungerade Zahl der zugehörigen Quadratzahl als Gnomon zufügte, so entstanden wieder Quadratzahlen[4]). Für uns heute fällt freilich diese Entstehungsweise:

$$\begin{array}{llll} 1 & 4 & 9 & \ldots\ldots n^2 \\ 3 & 5 & 7 & \ldots\ldots 2n+1 \\ \hline 4 & 9 & 16 & \ldots\ldots (n+1)^2 \end{array}$$

mit der ersterläuterten Bildung der Quadratzahlen zusammen, aber den Alten war sie besonderer Hervorhebung wert. Nikomachus, ungefähr Zeitgenosse des Theon von Smyrna, und ihm geistesverwandt, hat ein Beispiel ähnlichen Verfahrens bei Dreieckszahlen uns bewahrt[5]). Jede Dreieckszahl, sagt er, mit der nächstfolgenden Dreieckszahl vereinigt gibt eine Quadratzahl, und wirklich ist $\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$. Hier wagen wir nun, gestützt auf alle diese einander ähnlichen Verfahren, eine unmittelbar nicht auf Überlieferung sich stützende Vermutung[6]). Wir nehmen an, es sei auch die Addi-

[1]) Lucian *Βίων πρᾶσις*, 4. Vgl. Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclid* pag. 28 r. [2]) Aristoteles, Metaphys. XIV, 4. [3]) *Βιογράφοι, vitarum scriptores Graeci minores* edit. Westermann. Braunschweig 1845, pag. 446. [4]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 32. [5]) Nicomachus, Eisagog. arithm. II, 12 (ed. Hoche), pag. 96. [6]) Math. Beitr. Kulturl. 105—107.

tion von je zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen vorgenommen worden, um wie in den vorher erwähnten Beispielen einmal zuzusehen, ob dabei etwas Bemerkenswertes sich enthülle. In der Tat fand sich ein höchst auffallendes Ergebnis: Die Quadratzahlen 9 und 16 lieferten als Summe die nächste Quadratzahl 25, und nur bei ihnen zeigte sich diese Erscheinung. Dem heutigen Mathematiker ist solches freilich nicht auffallend. Wir erkennen sofort, daß die Gleichung $(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2$ nur die Wurzeln $x = 4$ und $x = 0$ besitzt, daß also nur $3^2 + 4^2 = 5^2$ auftreten kann, wenn man $(-1)^2 + 0^2 = 1^2$ oder anders geschrieben $0 + 1 = 1$ nicht beachten will. Aber der Grieche jener alten Zeit konnte diese Überlegung nicht anstellen, konnte, wenn sie ihm möglich gewesen wäre, die zweite Gleichung nicht denken. Wir kommen auf den Zahlenbegriff der Griechen noch zurück. Gegenwärtig wissen wir nur, daß die Null, für welche sie kein Zeichen hatten, ihnen auch keine Zahl war. Wir sind darüber aufs deutlichste durch einen der schon genannten Arithmetiker unterrichtet. Nikomachus sagt uns, jede Zahl sei die halbe Summe der zu beiden Seiten gleich weit von ihr abstehenden Zahlen; nur die Einheit bilde eine Ausnahme, weil sie keine zwei Nachbarzahlen besitze; sie sei darum die Hälfte der einen unmittelbar benachbarten Zahl[1]).

So mußten die Zahlen 9, 16, 25 und mit ihnen die Zahlen 3, 4, 5, deren Quadrate sie waren, welche ihre Ordnungszahlen in der Reihe der Quadratzahlen bildeten, der Aufmerksamkeit empfohlen sein, um so dringender empfohlen sein, wenn dieselben Zahlen schon anderweitig als mit merkwürdigen Eigenschaften versehen bekannt waren. Daß dem so war, darüber müssen wir uns jetzt zu vergewissern suchen, ohne zu vergessen, daß $3^2 + 4^2 = 5^2$ den Ägyptern bekannt war.

7. Kapitel.

Pythagoras und die Pythagoräer. Geometrie.

Wir sind an dem Punkte angelangt, wo wir die nur im Bilde geometrische Arithmetik der Pythagoräer mit ihrer eigentlichen Geometrie in Verbindung treten sehen. Wir haben demgemäß auch auf diesem Gebiete abzusuchen, was unmittelbare oder mittelbare Überlieferung dem Pythagoras und seiner Schule zuweist.

Zunächst können wir eine ganze Gruppe von geometrischen Kenntnissen zusammenfassen unter dem gemeinsamen Namen der Anlegung der Flächen. „Altertümlich, so sagen die Schüler des Eudemus, und Erfindungen der pythagoräischen Muse sind diese Sätze, die Anlegung der Flächen, ihr Überschießen, ihr Zurückbleiben,“ *ἥ τε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις*[1]). So lautet der erläuternde Bericht des Proklus zu der euklidischen Aufgabe an einer gegebenen Geraden unter gegebenem Winkel ein Parallelogramm zu entwerfen, welches einem gegebenen Dreieck gleich sei. Desselben Wortes *ἐλλείπειν* bei Anlegung von Flächen bedient sich Platon in seinem Menon[2]), und Plutarch läßt an einer Stelle das Anlegen von Flächen, *παραβάλλειν τοῦ χωρίου*, von Pythagoras selbst herstammen[3]), während er an einer anderen Stelle sich folgendermaßen ausdrückt: „Eines der geometrischsten Theoreme oder vielmehr Probleme ist das, zu zwei gegebenen Figuren eine dritte anzulegen — *παραβάλλειν* —, die der einen gleich und der anderen ähnlich ist. Pythagoras soll, als er die Lösung gefunden, ein Opfer gebracht haben. Und wirklich ist es auch feiner und wissenschaftlicher als das, daß das Quadrat der Hypotenuse denen der beiden Katheten gleich ist“[4]). Über die genauere Bedeutung der drei Wörter Parabel, Ellipse, Hyperbel bei Flächenanlegungen werden wir bei Besprechung der euklidischen Geometrie im 13. Kapitel zu reden haben. Fürs erste genügt die allgemeine aus den angeführten Stellen leicht zu schöpfende Überzeugung, daß es um die Zeichnung von Figuren gegebener Art und gegebener Größe sich handelt. Solche Zeichnung ist aber unmöglich, wofern man nicht mit den Haupteigenschaften der Parallellinien und ihrer Transversalen, mit den hauptsächlichen Winkelsätzen der Planimetrie vertraut ist, wofern man nicht die Auffindung von Flächeninhalten, deren Abhängigkeit von den die betreffende Figur bildenden Seiten in richtiger Weise kennt.

In der ersteren Beziehung sind wir wieder in der günstigen Lage, unsere Behauptung bestätigen zu können. Die Pythagoräer verwandten die Parallellinien zum Beweise des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks. Wir sahen (S. 143), daß die thaletische Zeit, vielleicht Thales selbst, den Satz von der Winkelsumme in dreifacher Abstufung an dem gleichseitigen, an dem gleichschenkligen, an dem unregelmäßigen Dreiecke behandelte. Eudemus läßt durch die Pythagoräer den Satz für jedes beliebige Dreieck so bewiesen werden, daß durch die Spitze des Dreiecks die Parallele zur Grundlinie gezogen und daraus die Gleichheit der Winkel an der

---

[1]) Nicomachus, Eisagog. arithm. I, 8 (ed. Hoche), pag. 14.

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 419. [2]) Platon, Menon pag. 87. [3]) Plutarch, *Non posse suaviter vivi secundum Epicur.* cap. 11. [4]) Plutarch, *Convivium* VIII, cap. 4.

Grundlinie mit ihren an jener Parallelen hervortretenden Wechselwinkeln gefolgert wurde. Einer jener Wechselwinkel wurde sodann mit dem ursprünglichen Dreieckswinkel an der Spitze zu einem einzigen Winkel vereinigt, welcher selbst wieder den anderen Wechselwinkel als Nebenwinkel besaß und mit ihm zusammen zwei Rechte ergab[1]).

Aus dieser Darstellung zeigt sich so recht deutlich an einem besonders merkwürdigen, in der Stufenfolge der Beweisführungen uns glücklich erhaltenen Beispiele, wie die Wissenschaft der Geometrie sich entwickelte. Von dem Zerlegen des Satzes in drei Fälle stieg man auf zur Behandlung des allgemeinen Falls, aber in diesem Aufwärtsstreben hielt man wieder ein. Man erhob sich noch nicht zu dem Ausspruche, die drei Winkel an der früheren Dreiecksspitze besäßen als Winkel, die je einen Schenkel gemeinsam für zweie haben, und die einfach auftretenden äußersten Schenkel zu einer und derselben Geraden sich verlängern lassen, die Winkelsumme von zwei Rechten. Man mußte vielmehr erst zwei Winkel zu einem neuen, diesen alsdann mit dem dritten verbinden. Freilich ist der letzterwähnte Fortschritt, den man noch nicht wagte, nach unserem Gefühle, auch wohl nach dem Gefühle des Proklus, welcher wenigstens von dessen Urheber uns nichts sagt, ein weit geringerer, als der, den man wirklich vollzog, und wir erkennen hier bewundernd den „höheren Gesichtspunkt, von welchem aus Pythagoras, dem Mathematikerverzeichnisse (S. 147) zufolge, die Grundlage unserer Wissenschaft betrachtete".

Wir haben auch die Notwendigkeit betont, den Flächeninhalt einer Figur aus den dieselbe bildenden Seiten in richtiger Weise finden zu können. Unseren mathematischen Lesern dürfte diese Betonung überflüssig erscheinen, aber sie ist es nicht so ganz. Bei einem Volke von überwiegend geometrischer Begabung, wie es unstreitig das griechische war, konnte noch um das Jahr 400 v. Chr., also zur Zeit Platons, einer der geistreichsten, tiefsten Geschichtsschreiber aller Jahrhunderte, konnte noch ein Thukydides so wenig Bescheid wissen, daß er Inhalt und Umfang als proportional dachte, daß er infolgedessen die Fläche der Insel nach der zum Umfahren nötigen Zeit abschätzte[2]). Diese Unkenntnis auch hochgebildeter Laien in einem theoretisch so einfachen, praktisch so wichtigen Kapitel der Planimetrie läßt sich dann weiter und weiter verfolgen. Um 130 v. Chr. erzählt Polybius, daß es Leute gebe, die nicht begreifen könnten, daß Lager bei gleicher Umwallungslänge verschiedenes Fassungsvermögen besitzen[1]). Quintilian, der römische Schriftsteller über Beredsamkeit in der zweiten Hälfte des ersten nachchristlichen Jahrhunderts, gibt als dem Laien leicht aufzudrängenden Trugschluß den an, daß gleicher Umfang auch gleichen Inhalt beweise[2]). Vielleicht hatte Quintilian bei diesem Vorwurfe seinen Zeitgenossen Plinius im Auge, welcher die Größenverhältnisse der Erdteile durch Addieren ihrer Länge zu ihrer Breite verglich[3]). Proklus erzählt mit offenbarer Beziehung auf Vorkommnisse seiner Zeit, also des V. S., daß manche schon bei der Teilung von Flächen ihre Gesellschafter übers Ohr gehauen haben, indem sie eine größere Fläche mit Bezugnahme auf die Gleichheit des Umfanges für sich beanspruchten[4]). Steuerbeamte in Palästina ließen sich gleichfalls um das V. S. in solcher Weise täuschen, indem sie einem Gemeindevorsteher, welchem als Steuer der Ertrag einer mit Weizen zu besäenden Fläche von 40 Ellen im Quadrat auferlegt war, verwilligten, er könne in zwei Abteilungen jedesmal eine Fläche von 20 Ellen im Quadrat besäen, in der Meinung, dann sei er seiner Verpflichtung nachgekommen[5]), und ganz Ähnliches wird von einem Araber des X. S. erzählt[6]). Wir haben diese fehlerhafte Auffassung absichtlich durch einen längeren Zeitraum und durch Völker hindurch verfolgt, welche einer Stetigkeit der Geistesrichtung als Beispiel dienen können, denn das mathematische, insonderheit das geometrische Denken der Römer, der späteren Juden, der Araber war nicht anders als griechisch. Wir haben sie verfolgt, um uns über einen allgemeinen geschichtlichen Lehrsatz klar zu werden, dem wir eine nicht geringe Tragweite besonders bei geschichtlich vergleichenden Forschungen beilegen. Die Unwissenheit, so lautet unser Satz, und das noch schlimmere falsche Wissen sind erblich, es gibt eine konservative Kraft der Unwissenheit. Was an unrichtigen Ergebnissen einmal gewonnen ist, das wird so leicht nicht zerstört, das wird mit um so größerer Zähigkeit festgehalten, je mehr es unverstanden ist. Nur die Menge der Unwissenden und Halbwissenden wechselt, und in ihrer Beschränkung liegt das, was man Fortschritt der Durchschnittsbildung nennt.

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 379. [2]) Thukydides VI, 1 (ed. Rothe), pag. 95.

[1]) Polybius IX, 21 (ed. Hultsch), pag. 686. [2]) Quintilianus, *Institutio oratoria* I, 10, 39 flgg. (ed. Halm) pag. 62. [3]) Detlefsen, Die Maasse der Erdtheile nach Plinius. Programm des Glückstädter Gymnasiums für 1883, S. 6—7 mit Berufung auf Plinius, Histor. natur. VI, 208. [4]) Proklus (ed. Friedlein), pag. 237. [5]) Jerusalem. Talmud Sota 20a nach Zuckermann, Das Mathematische im Talmud. Breslau 1878, S. 43, Note 58. [6]) Dieterici, Die Propädeutik der Araber im X. Jahrhundert, S. 35.

Der Flächenanlegung nahe verwandt und mit ihr den Pythagoräern eigen ist die Lehre von den regelmäßigen Vielflächnern, angedeutet in den Worten des Mathematikerverzeichnisses: „Pythagoras ist es auch, der die Konstruktion der kosmischen Körper erfand.“ Der Name der kosmischen Körper bedarf der Erklärung. Wie Aristoteles uns berichtet, war Empedokles von Agrigent in Sizilien, ein Philosoph, der um 440, jedenfalls später als Pythagoras lebte, der erste, der vier Elemente, Erde, Wasser, Luft und Feuer, annahm, aus denen alles zusammengesetzt sei[1]). Vitruvius und andere Gewährsmänner wollen, Pythagoras habe schon vorher das Gleiche ausgesprochen[2]). Wir haben eine Wahl zwischen beiden Meinungen hier nicht zu treffen. Jedenfalls übernahm Timäus von Lokri aus der einen oder anderen Quelle die Lehre, wie der nach ihm benannte platonische Dialog erkennen läßt. Timäus erläutert die Entstehung der Welt, setzt das Vorhandensein der vier Grundstoffe auseinander, gibt denselben besondere Gestalten[3]). Das Feuer trete als Tetraeder auf, die Luft bestehe aus Oktaedern, das Wasser aus Ikosaedern, die Erde aus Würfeln, und da noch eine fünfte Gestaltung möglich war, so habe Gott diese, das Pentagondodekaeder benutzt, um als Umriß des Weltganzen zu dienen[4]). Diese fünf Körper heißen dem entsprechend kosmische Körper als zum Kosmos in notwendiger Beziehung stehend.

Die Geschichte der Mathematik entnimmt den atomistischen Versuchen jener ältesten Lehren dieser Art die wichtige Wahrheit, daß Timäus die fünf regelmäßigen Körper kannte. Ob er ahnte, daß es wirklich keinen sechsten regelmäßigen Körper gebe, ob er ohne auch nur die Frage nach einem solchen zu erheben sich mit Verwertung der nun einmal bekannten Körperformen begnügte, wissen wir nicht. Wahrscheinlicher deucht uns das letztere, und nun gar einen Beweis der Unmöglichkeit eines sechsten regelmäßigen Körpers in so früher Zeit anzunehmen, würden wir aufs entschiedenste ablehnen müssen. Dagegen hat es keine Schwierigkeit diejenigen Kenntnisse, welche wir als Timäus geläufig bezeichneten, d. h. die Gestalt der fünf regelmäßigen Körper bis in jene Zeit, auch wohl darüber hinaus zu verfolgen[5]).

Körper wie der Würfel, das Tetraeder, welches nichts anderes

---

[1]) Aristoteles, Metaphys. I, 4. [2]) Vgl. Chaignet II, 164flgg. [3]) Vgl. Th. H. Martin, *Études sur le Timée de Platon* I, 145flgg. und II, 234—250. [4]) Zeller I, 350, Anmerkung 1 nimmt an, das Dodekaeder sei nicht die Gestalt des Weltganzen, sondern des Ätheratoms, d. h. des kleinsten Teiles der das Weltganze umgebenden äußeren Schichten. [5]) Das hier Folgende wesentlich nach Bretschneider S. 86 und 88.

als eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, das Oktaeder, welches eine Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche ist, müssen noch weit über das Zeitalter des Pythagoras zurück sich als den Ägyptern bekannt vermuten lassen. Wer bei ihnen jahrelang verweilte, ja wer nur kurze Zeit die Baudenkmäler ihres Landes in Augenschein nahm, dem ist die Kenntnis auch jener Körper mit Notwendigkeit zuzusprechen, und daß die Pythagoräer kein Bedenken trugen, was ihr Lehrer wußte, als seine Erfindung zu verehren, wurde schon erwähnt. Auch das Ikosaeder und nicht minder das Dodekaeder muß wohl oder übel den Pythagoräern bekannt gewesen sein. Sonst könnte nicht Philolaus schon von den fünf Körpern in der Kugel reden[1]), sonst würde nicht das alte Mathematikerverzeichnis nebst anderen übereinstimmenden Berichten[2]) so deutlich sämtliche kosmische oder regelmäßige Körper als pythagoräisch bezeichnen. Möglicherweise haben wir den Verlauf der Entdeckung jener Körper so zu denken, daß man zuerst nur von Würfel, Tetraeder, Oktaeder wußte, daß dann das Ikosaeder, zuletzt erst, wenn auch jedenfalls noch vor Timäus, das Dodekaeder hinzutrat. Mit dieser Annahme würde die Schwierigkeit sich lösen, daß die ursprünglich jedenfalls in Vierzahl angenommenen Grundstoffe mit den fünf Körpern nur sehr künstlich in Verbindung zu bringen sind. Es würden nämlich zunächst vier Körper mit vier Elementen durch einen naturgemäßen Gedanken sich gepaart haben, und zu dem nachträglich gefundenen fünften Körper würde dann eine kosmische Bedeutung erst gesucht worden sein.

Mit dieser Annahme würde auch die Erzählung des Jamblichus[3]) sich decken, daß Hippasus, ein Pythagoräer, der das Pentagondodekaeder der Kugel zuerst einschrieb und veröffentlichte, wegen dieser Gottlosigkeit im Meer umgekommen sei. Er habe den Ruhm der Entdeckung davongetragen, „aber es sei das Eigentum JENES, so bezeichnen sie nämlich den Pythagoras und nennen ihn nicht bei Namen“.

Man würde vielleicht eine größere Sicherheit in der Beantwortung dieser Fragen erlangen, wenn man Alter und Herkunft eines noch vorhandenen Bronzedodekaeders zu bestimmen imstande wäre[4]). Dabei sind zahlreiche andere Dodekaeder zu vergleichen, welche auf keltischem Boden[5]), welche auch in Oberitalien[6]) aufgefunden worden sind.

---

[1]) Boeckh, Philolaus fragm. 21, S. 160. Chaignet I, 248. [2]) Vgl. Wyttenbach, Ausgabe von Platons Phädon. Leiden 1810, pag. 304—307. [3]) Jamblichus, *Vita Pythagorica* 88. [4]) Vgl. verschiedene Notizen von Graf Leopold Hugo in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie der Wissenschaften. Bd. LXXVII. [5]) Conze, Über ein Bronzegerät in Dodekaederform. Westdeutsche Zeitschrift für Geschichte und Kunst (1892) XI, 204. [6]) F. Linde-

Man hat diese Funde für sehr alt und um Jahrhunderte über Pythagoras hinausreichend erklärt, und, wenn diese Zeitbestimmung richtig sein sollte, so dürfte auch gegen gewisse Folgerungen aus denselben[1]) wenig einzuwenden sein. Unter den Eisenerzen kommt der Pyrit (Schwefelkies) auf Elba und in den südlichen nach dem Piemont ausmündenden Alpentälern, sonst aber nirgend, in Kristallen vor, welche von 20 Dreiecken, und in anderen, welche von 12 Fünfecken begrenzt sind. Regelmäßige Ikosaeder und Dodekaeder sind das nicht, ähneln denselben aber, und als in der anfangenden Eisenzeit jenes Metall an Wichtigkeit gewann, können jene Kristallformen Verehrung und Nachbildung gefunden haben. Wenn nun[2]) berichtet wird, Pythagoras habe auch von den Galliern gelernt, ein Bericht, den wir, weil wir ihm nicht zu sehr trauen, bei unseren Angaben über das Leben des Pythagoras übergingen, so könnte das auf das Kennenlernen jener Körperformen von Norden her sich beziehen. Pythagoras hätte dann in der Tat alle regelmäßigen Körper oder denselben einigermaßen ähnelnde gekannt, und dem Hippasus blieb als lohnende Aufgabe das mathematische Erkennen des vor ihm nur erfahrungsmäßig Vorhandenen.

Mit den Angaben über die fünf Körper im engsten Zusammenhange stehen die über die Kugel, in welche jene beschrieben gedacht sind, und welche demzufolge nebst einigen ihrer Eigenschaften gleichfalls den Pythagoräern bekannt gewesen sein muß.

In demselben Zusammenhange erscheinen Angaben, welche sich auf die Grenzflächen jener Körper, auf die regelmäßigen Vielecke, als Dreiecke, Vierecke, Fünfecke beziehen, und denen wir uns nunmehr zuzuwenden haben. Wir kehren damit zur Flächenanlegung zurück, deren Verwandtschaft zur Lehre von den Vielflächnern wir oben zunächst unerwiesen behauptet haben. Platon läßt seinen Timäus über die Entstehung der regelmäßigen Dreiecke und Vierecke sich aussprechen. Er sagt[3]), diese Figuren setzten ihre Fläche immer aus rechtwinkligen Dreiecken zusammen, und zwar entweder aus solchen, welche zugleich gleichschenklig sind, oder aus solchen, deren spitze Winkel, der eine einem Dritteil, der andere zwei Dritteilen des rechten Winkels gleich sind. Das hat nun offenbar seine Richtigkeit, indem das Quadrat in zwei oder vier Dreiecke der ersten Art (Fig. 23), das gleichseitige Dreieck in zwei oder sechs

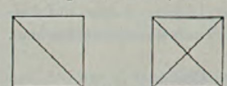

Fig. 23.

mann, Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen. Sitzungsberichte der mathem. physik. Klasse der k. bayer. Akad. der Wissensch. (1897) XXVI, 625—758.

[1]) Lindemann l. c. [2]) Zeller I, 277. [3]) Platon, Timaeus 54 B und 54 D.

Dreiecke der zweiten Art (Fig. 24) zerlegt werden kann. Übereinstimmend damit, aber sicherlich einer anderen Quelle als dem platonischen Timäus, über dessen Angaben er hinausgeht, folgend sagt Proklus, es sei ein pythagoräischer Lehrsatz, daß die Ebene um einen Punkt herum durch sechs gleichseitige Dreiecke, vier Quadrate oder drei regelmäßige Sechsecke vollständig erfüllt werde, so daß nur diese Figurengattungen zur gänzlichen Zerlegung einer Ebene in lauter identische Stücke Benutzung finden[1]). Wir wollen daran anknüpfend nur erinnern, daß wir schon (S. 143) die Kenntnis solcher um einen Punkt herumliegenden sechs gleichseitigen Dreiecke wahrscheinlich zu machen suchen mußten, und daß folglich rückwärts die Angabe des Proklus unsere dortigen Behauptungen zu stärken imstande ist.

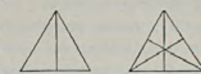

Fig. 24.

Wie verhält es sich aber gegenüber der Zerfällung der Grenzflächen der vier ersten Körper mit der Grenzfläche des fünften und letzten, mit dem regelmäßigen Fünfecke? Das Fünfeck ist, wie leicht ersichtlich, mittels der beiden rechtwinkligen Dreieckchen, die wir nach der Vorschrift des Timäus für die Herstellung von Dreieck und Viereck benutzten, nicht zusammenzusetzen, eine Zerlegung in eben solche kann mithin nie gelungen sein. Wohl aber dürfen wir erwarten, Spuren verfehlter Versuche anzutreffen, und diese fehlen nicht. Plutarch hat an zwei Stellen von der Zerlegung der das Dodekaeder begrenzenden Fläche in 30 Elementardreiecke gesprochen, hat das eine Mal hervorgehoben, daß somit alle 12 Flächen 360 Dreieckchen liefern, gleich an Zahl mit den Zeichen des Tierkreises[2]), hat das andere Mal bemerkt, es solle, wie man sage, das Elementardreieckchen des Dodekaeders von dem des Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders verschieden sein[3]). Ein anderer Schriftsteller des II. S., Alkinous, hat in seiner Einleitung zum Studium des Platon gleichfalls von den 360 Elementen gesprochen, welche erzeugt werden, indem jedes Fünfeck in 5 gleichseitige Dreiecke, jedes von diesen in 6 ungleichseitige zerfalle[4]). Nimmt man nun diese Zerlegung wirklich vor (Fig. 25), so tritt aus dem Gewirre der

Fig. 25.

Fig. 26.

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 304—305. Vgl. auch Heron (ed. Hultsch) pag. 22 Definitio 74. [2]) Plutarchus, Quaest. Platon. V. [3]) Plutarchus, *De silentio oracul.* cap. 33. [4]) Alcinous, *De doctrina Platonis* (ed. Lambinus). Paris 1567, cap. 11.

Linien am deutlichsten das Sternfünfeck heraus, welches demnach für sich schon ein Zeugnis der versuchten Zerlegung des Fünfecks in Elementardreiecke ablegt. Das Sternfünfeck (Fig. 26) soll aber den Pythagoräern Erkennungszeichen gewesen sein. Lucian und der Scholiast zu den Wolken des Aristophanes berichten darüber gleichmäßig[1]). Briefe pflegten mit irgend einer ständigen Anfangsformel eingeleitet zu werden. Die einen schrieben: Freue Dich, *χαίρειν*, die anderen mit Platon: Sei glücklich in Deinen Handlungen, *εὖ πράττειν*, die Pythagoräer: Sei gesund, *ὑγιαίνειν*. Gesundheit heißt auch bei ihnen das dreifache Dreieck, das durch gegenseitige Verschlingung das Fünfeck erzeugt, das sogenannte Pentagramm, dessen sich die Glieder des Bundes als Erkennungszeichen bedienen. Freilich kommt das Pentagramm auf der sogenannten Aristonophosvase aus Caere, welche dem 7. vorchristlichen Jahrhunderte angehören soll, kommen fünfeckige Ornamente in mykenischen Funden, kommen fünfspeichige Räder auf oberitalienischen Fundstücken vor[2]), und wieder unter der Annahme richtiger Zeitbestimmung für die Entstehung hätten wir alsdann das Fünfeck als vorpythagoräisch anzuerkennen, und nur die mathematische Betrachtung desselben gehörte der Schule an.

Unter allen Umständen ist die seltsame Bedeutung, welche die freilich auch seltsame Figur des Sternfünfecks bei den Pythagoräern besaß, eine Unterstützung der kaum mehr bestrittenen Vermutung, daß das regelmäßige Fünfeck von den Pythagoräern der Beachtung unterzogen, wenn nicht erfunden worden sei. Daß diejenigen, welche dasselbe als Grenzfläche eines Körpers verwerteten, es gekannt haben müssen, bedarf keines Beweises, aber woher sollten sie es entnommen haben? Wir erinnern daran, daß wenigstens unter den Abbildungen aus chaldäischer, wie aus ägyptischer Vorzeit, welche wir vergleichen konnten, ein regelmäßiges Fünf- oder Zehneck, eine Zerlegung der Kreisfläche in Ausschnitte nach irgend einer durch fünf teilbaren Anzahl nicht vorkommt (S. 49 und 109). Wir machen ferner darauf aufmerksam[3]), daß die Einzeichnung des Fünfecks in den Kreis geometrisch genau erst dann erfolgen konnte, als der Satz von den Quadraten der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, als zugleich auch der goldne Schnitt bekannt geworden war.

Der goldne Schnitt spielte in der griechischen Baukunst der perikleischen Zeit eine nicht zu verkennende Rolle. Das ästhetisch wirksamste Verhältnis, und das ist das stetige, ist in den athenischen

[1]) Beide Stellen sind vielfach abgedruckt, z. B. bei Bretschneider S. 85 bis 86. [2]) Lindemann l. c. S. 730—733. [3]) Bretschneider S. 87 hat diese gewiß richtige Bemerkung mutmaßlich zuerst gemacht.

Bauten aus den Jahren 450—430 aufs schönste verwertet[1]). Wir können bei solcher Regelmäßigkeit des Auftretens nicht an ein instinktives Zutreffen glauben, am wenigsten, wenn wir des eben berührten geistigen Zusammenhangs zwischen goldnem Schnitte, regelmäßigem Fünfecke und pythagoräischem Lehrsatze gedenken.

Bevor wir zu diesem letzteren uns wenden, müssen wir[2]) noch einem längere Zeit viel verbreiteten Irrtume begegnen. Diogenes Laertius berichtet: „Unter den körperlichen Gebilden, sagen die Pythagoräer, sei die Kugel, unter den ebenen der Kreis am schönsten“[3]). Man hat daraus entnehmen wollen, Pythagoras oder doch seine Schule hätten auch die Grundlage zu der Lehre von den isoperimetrischen Raumgebilden gelegt. Man ist dabei gewiß von der richtigen Deutung jenes Satzes abgewichen. Es sollte damit ein eigentlicher geometrischer Lehrsatz überhaupt nicht ausgesprochen werden. Nur die gleichmäßige Rundung erhielt in den gemeldeten Worten das gebührende Lob.

Den gemeinsamen, für Arithmetik und Geometrie gleichmäßig bedeutsamen Schlußstein unserer Untersuchungen über Pythagoras und seine Schule bildet nunmehr der nach dem Lehrer selbst benannte Satz vom rechtwinkligen Dreiecke. Nicht als ob wir in ihm auch den Schlußstein des von den Pythagoräern aufgeführten mathematischen Gebäudes vermuteten. Keineswegs. Wir haben vielmehr schon gesehen und werden noch weiter sehen, daß unter den schon besprochenen geometrischen Dingen einige nicht gut anders als infolge des Satzes vom rechtwinkligen Dreieck aufgetreten sein können. Die Beziehung des regelmäßigen Fünfecks zu diesem Satze ist erst erwähnt. Die Elementardreieckchen des Timäus dienen als Beweis, daß die Pythagoräer denjenigen sonderbaren rechtwinkligen Dreiecken ihre Aufmerksamkeit zuwandten, welche in dieser physikalisch-geometrischen Eigenschaft Verwertung fanden. Das war einmal dasjenige Dreieck, dessen beide Katheten je eine Längeneinheit als Maß besitzen, das war zweitens dasjenige, dessen Hypotenuse doppelt so groß ist, als die kleinere Kathete, so daß also 1 und 2 die Maße dieser beiden Seiten bezeichnen.

Wir haben uns (S. 152) schon darüber ausgesprochen, daß wir für den Satz vom rechtwinkligen Dreieck Pythagoras selbst als den Entdecker betrachten, und uns wesentlich auf den Bericht bezogen,

[1]) Vgl. Zeisings verschiedene Schriften, über welche mit für den mathematischen Leser genügender Ausführlichkeit S. Günther in der Zeitschr. Math. Phys. XXI, histor.-literar. Abtlg. S. 157—165 berichtet hat. [2]) Auch hier rührt die richtige Ansicht von Bretschneider S. 89—90 her. [3]) Diogenes Laertius VIII, 19.

diejenigen, welche Altertümliches erkunden wollten, führten den Satz auf Pythagoras zurück[1]). Der in Euklids Elementen vorgetragene Beweis dagegen, derselbe Beweis, der auch heute noch der bekannteste ist, bei welchem die Quadrate über die drei Dreiecksseiten nach außen hin gezeichnet werden und das Quadrat der Hypotenuse durch eine von der Spitze des rechten Dreieckswinkels auf die Hypotenuse gefällte gehörig verlängerte Senkrechte in zwei Rechtecke zerfällt, von denen jedes dem ihm benachbarten Kathetenquadrate flächengleich ist, dieser Beweis rührt nach Proklus' ausdrücklicher Aussage von Euklid selbst her. Daß Plutarch[2]) den Satz vom rechtwinkligen Dreieck als Satz des Pythagoras kennt, wissen wir (S. 171). Der Rechenmeister Apollodotus oder Apollodorus, wie Diogenes Laertius denselben nennt[3]), erzählt in Versen von dem Stieropfer, welches Pythagoras gebracht habe, als er den Satz von den Quadraten der Hypotenuse und der Katheten entdeckt hatte. Nicht wenige Schriftsteller sind in ihren Angaben bezüglich des Satzes in einer wesentlichen Beziehung genauer, indem sie den Namen des Pythagoras mit demjenigen rechtwinkligen Dreiecke in Verbindung bringen, dessen Seiten die Maßzahlen 3, 4, 5 besitzen. Am deutlichsten ist in dieser Beziehung Vitruvius, in dessen im Jahre 14 n. Chr. verfaßter Architektur ausdrücklich berichtet wird, daß Pythagoras einen rechten Winkel mit Hilfe der drei Längenmaße 3, 4, 5 zu konstruieren lehrte, und daß eben derselbe erkannte, daß die Quadrate von 3 und von 4 dem von 5 gleich seien[4]). Eine Plutarchstelle, in welcher dasselbe Dreieck besprochen wird[5]), ist uns (S. 157) schon vorgekommen. Dasselbe Dreieck spielt in Platons Staate eine Rolle. Und wenn wir auf ganz späte Zeiten zu dem Zwecke herabgehen dürfen, um mindestens zu zeigen, daß die Überlieferung der Überlieferung sich erhalten hat, so möchten wir als letzten Gewährsmann einen Glossator vom Anfange des XII. S. nennen, der vom pythagoräischen Dreiecke redend das mit den Seiten 3, 4, 5 unter diesem Namen versteht[6]).

Wir glauben nun, daß die Wahrheit, welche jener Überlieferung zugrunde liegt, darin besteht, daß Pythagoras an dem Dreiecke 3, 4, 5 seinen Satz kennen lernte. „Schwerlich leitete den Pythagoras das nach ihm benannte geometrische Theorem auf seine arithmetischen Sätze, sondern umgekehrt mögen ihn die Beispiele zweier Quadrat-

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 426. [2]) Plutarchus, *Convivium* VIII, 4. [3]) Diogenes Laertius VIII, 12. [4]) Vitruvius IX, 2. [5]) Plutarchus, *De Iside et Osiride* 56. [6]) Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst. Leipzig 1875, S. 156 und Note 288. Wir verweisen künftig auf dieses Buch unter dem Titel „Agrimensoren".

zahlen, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist, auf die Relation zwischen den Quadraten der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aufmerksam gemacht haben"[1]). So drückte sich ein deutscher Gelehrter bereits 1833 aus, welcher aber keineswegs zuerst diese, wie wir glauben, richtige Anschauung von dem Entwicklungsgange sich aneignete. Die gleiche Ansicht ist schon in der Euklidausgabe des Clavius (1574) ausgesprochen mit dem Zusatze, es sei dieses die Meinung verschiedener[2]). Pythagoras bemerkte, meinen wir, daß von aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ausschließlich $9 + 16 = 25$ (S. 170). Als er diese unter allen Umständen interessante Bemerkung machte, kannte er bereits, gleichviel aus welcher Quelle, die Erfahrungstatsache, daß ein rechter Winkel durch Annahme der Maßzahlen 3, 4, 5 für die Längen der beiden Schenkel und für die Entfernung der Endpunkte derselben konstruiert werde. Wir haben (S. 105) darauf hingewiesen, daß die Ägypter, (S. 49) daß die Babylonier vielleicht die gleiche Kenntnis besaßen, daß die Chinesen ihrer sicherlich teilhaftig waren. Ein chinesischer Schriftsteller hat nämlich gesagt: „Zerlegt man einen rechten Winkel in seine Bestandteile, so ist eine die Endpunkte seiner Schenkel verbindende Linie 5, wenn die Grundlinie 3 und die Höhe 4 ist"[3]). Die geometrische und die arithmetische Wahrheit vereinigten sich nun in dem Bewußtsein des Pythagoras zu einem gemeinschaftlichen Satze. Der Wunsch lag nahe zu prüfen, ob auch bei anderen rechtwinkligen Dreiecken die Maße der Seiten zu Quadratzahlen erhöht das gleiche Verhalten bieten. Die einfachste Voraussetzung war die des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, wo Höhe und Grundlinie gleich der Längeneinheit waren. Die Hypotenuse wurde gemessen. Sie war größer als eine, kleiner als zwei Längeneinheiten. Die mannigfaltigsten Versuche mögen darauf angestellt, andere und andere Zahlenwerte für die gleichen Katheten eingesetzt worden sein, um eine Zahl für die Hypotenuse zu erhalten. Vergebens. Man erhielt wahrscheinlich Zahlen, die dem gesuchten Maße der Hypotenuse nahe kamen, Näherungswerte von $\sqrt{2}$ würden wir heute sagen, aber es war noch ein Riesenschritt, von der Fruchtlosigkeit der angestellten Versuche auf die aller Versuche überhaupt zu schließen, und diesen Schritt vollzog Pythagoras.

Er fand, daß die Hypotenuse des gleichschenkligen rechtwinkligen

[1]) So Jul. Fr. Wurm schon 1833 in Jahns Jahrbüchern IX, 62. Meine denselben Grundgedanken einzeln durchführende Darstellung in den Math. Beitr. Kulturl. ist 1863 entstanden, ohne daß ich Wurms Aufsatz oder die Stelle bei Clavius kannte. [2]) ut nonnulli volunt. [3]) Vgl. Biernatzki, Die Arithmetik der Chinesen in Crelles Journal. Bd. 52.

Dreiecks mit meßbaren Katheten selbst unmeßbar sei, daß sie durch keine Zahl benennbar, durch keine aussprechbar sei[1]); er entdeckte das Irrationale, worauf das alte Mathematikerverzeichnis ein so sehr berechtigtes Gewicht legt. Er entdeckte es gerade an der Hypotenuse des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, wie aus mehr als nur einem Umstande wahrscheinlich gemacht werden kann.

So erzählt uns Platon, der Pythagoräer Theodorus von Kyrene, der ihn selbst in der Mathematik unterrichtet hatte, habe bewiesen, daß die Quadratwurzel aus 3, aus 5 und anderen Zahlen bis zu 17 irrational sei[2]). Von der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 ist dabei keine Rede; diese muß also vorher bekannt gewesen sein. Aristoteles weiß dagegen an vielen Stellen von der Irrationalität der Diagonale des Quadrates von der Seite 1 zu reden, und sagt einmal geradezu, der Grund dieser Irrationalität liege darin, weil sonst Gerades und Ungerades gleich sein müßte[3]). Den Sinn dieser Worte erläutert aber Euklid. Er gibt nämlich folgenden Beweis, den wir nur so weit abgeändert haben, daß wir Euklids Worte in moderne Zeichensprache umsetzten[4]). Es sei $\varDelta\Gamma$ zu $\varDelta B$ (Fig. 27) kommensurabel

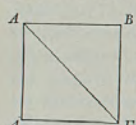

Fig. 27.

und verhalte sich in kleinsten Zahlen wie α zu β; folglich muß wegen $\varDelta\Gamma > \varDelta B$ auch $\alpha > \beta$ und sicherlich >1 sein. Weiter folgt $\varDelta\Gamma^2 : \varDelta B^2 = \alpha^2 : \beta^2$ und wegen $\varDelta\Gamma^2 = 2\,\varDelta B^2$ auch $\alpha^2 = 2\beta^2$, folglich α^2 und mit dieser Zahl zugleich auch α eine gerade Zahl. Die zu α teilerfremde β muß daher ungerade sein. Die gerade α sei $= 2\gamma$, so folgt $\alpha^2 = 4\gamma^2$. Es war $\alpha^2 = 2\beta^2$, mithin ist $2\beta^2 = 4\gamma^2$, $\beta^2 = 2\gamma^2$ gerad und auch β gerad, was mit dem eben bewiesenen Gegenteil einen Widerspruch bildet, der zur Aufhebung der Annahme führt, als könne die Diagonale mit der Quadratseite in einem rationalen Zahlenverhältnisse stehen. Man sieht, das muß der Beweis gewesen sein, an welchen Aristoteles bei seiner Äußerung dachte. Es ist also ein Beweis, dessen Altertum über Aristoteles hinaufreicht, und der, nach der kurzen Weise, in welcher dieser ihn andeutet, zu schließen, den Lesern des Aristoteles zur Genüge bekannt sein mußte. Wir gehen deshalb vielleicht nicht zu weit, wenn wir gerade diesen Beweis als einen hergebrachten ansehen, als denjenigen, der in der alten pythagoräischen Schule geführt wurde, mag ihn Pythagoras selbst oder einer seiner unmittelbaren Schüler und Nachfolger ersonnen haben.

[1]) *ῥητόν* und *ἄλογον* sind die griechischen Namen für Rationalzahl und Irrationalzahl; *ἄλογον* heißt sowohl ohne Verhältnis als ohne Wort d. h. nicht aussprechbar. [2]) Platon, Theaetet 147, D. [3]) Aristoteles, Analytica prot. I, 23, 11. [4]) Euklid X, 117.

War in der Tat die Diagonale des Quadrates als irrational, die Diagonale des Rechteckes mit den um eine Längeneinheit verschiedenen Seiten 3 und 4 als rational, nämlich mit der Länge 5, bekannt, dann war es möglich, daß man auch Quadrat und Heteromekie als diejenigen Gegensätze in die pythagoräische Kategorientafel, welche uns durch Aristoteles bekannt geworden ist, aufnahm, die den sonst dort fehlenden Gegensatz des Rationalen und Irrationalen ersetzen sollten[1]). Wir haben eine solche von der unsrigen zunächst abweichende Erklärung angekündigt (S. 160) und nicht ganz von der Hand gewiesen. Allein sie vollkommen uns anzueignen, auch in der Verbindung mit unserer eigenen Vermutung, die wir dort als notwendig betonten, vermögen wir trotz eines unterstützenden Grundes, auf welchen wir im 11. Kapitel zu reden kommen, doch nicht. Es könnte nämlich gerade das Fehlen des Gegensatzes des Rationalen und des Irrationalen in der Kategorientafel als bezeichnend betrachtet werden müssen.

Nach einem alten Scholion zum X. Buche der euklidischen Elemente, welches man in neuerer Zeit dem Proklus zuzuschreiben pflegt[2]), dürfte diese Annahme eine nicht ungerechtfertigte sein. „Man sagt, daß derjenige, welcher zuerst die Betrachtung des Irrationalen aus dem Verborgenen in die Öffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sei, und zwar weil das Unaussprechliche und Bildlose immer verborgen werden sollte, und daß der, welcher von ungefähr dieses Bild des Lebens berührte und aufdeckte, an den Ort der Entstehung[3]) versetzt und dort von ewigen Fluten umspült wurde. Solche Ehrfurcht hatten diese Männer vor der Theorie des Irrationalen."

Das Mystische dieser Erklärungen stimmt allerdings durchaus zu den übrigen philosophischen Floskeln des Proklus und sie sind offenbar pythagoräischer Überlieferung entnommen. Mystisch war, das ist wieder einer der allseitig anerkannten Punkte, der ganze Pythagoräismus, und wir dürfen vielleicht hier als an dem geeignetsten Orte darauf hinweisen, daß Philolaus schon die Winkel von

[1]) So die Meinung Hankels S. 110, Anmerkung. [2]) Knoche, Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklids Elementen. Herford 1865, S. 17—28, besonders S. 23. [3]) Dr. P. Hohlfeld machte uns brieflich aufmerksam, die griechische Stelle heiße *εἰς τὸν τῆς γενέσεως τόπον* = an den Ort der Entstehung, womit die Übersetzung des Commandinus *in generationis hoc est profundi locum* übereinstimme; wenn Hankel übersetze „in den Ort der Mütter", so beruhe dieses wahrscheinlich auf unbewußter Erinnerung an eine bekannte Stelle in Goethes Faust, zweiter Teil.

Figuren bestimmten Göttern weihte[1]), daß Platon umgekehrt die Gottheit immer geometrisch zu Werke gehen ließ[2]).

War einmal die Irrationalität als solche, und zwar an der Diagonale des Quadrates erkannt, war man sich bewußt geworden, daß die Diagonale des Rechtecks von den Seiten 3 und 4 genau in 5 Einheiten sich darstellte, die des Rechtecks von gleichen Seiten aber nicht angebbar war, welche Länge man auch den beiden Seiten beilegte, so mußte man wohl auch andere Rechtecke prüfen, z. B. von der Voraussetzung ausgehen, daß die Diagonale zur einen Seite im einfachsten Zahlenverhältnisse von 2 zu 1 stehe, und nun die andere Rechtecksseite zu messen suchen. Wir sehen hier das zweite Elementardreieckchen vor uns, dessen Benutzung neben dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke zur Flächenbildung wir aus Platons Timäus kennen, und dessen somit nachgewiesener pythagoräischer Ursprung den hier ausgesprochenen Vermutungen eine immer breitere Grundlage gewähren dürfte.

Wieder weiterschließend war die Untersuchung an einem Punkte angelangt, wo der Weg sich spaltete. Man konnte, wo die Zahl ihren Dienst versagte, geometrische Beweise für den Satz von den Quadraten über den Seiten rechtwinkliger Dreiecke suchen. Man konnte solche Zahlen suchen, die als Seiten rechtwinkliger Dreiecke auftreten konnten. Man schlug beide Wege ein.

Hier ist vielleicht der geeignete Ort, auf die Bedeutung des Wortes Hypotenuse (*ὑποτείνουσα*) einzugehen[3]). Man hat *χορδή*, die Saite, als zu ergänzendes Hauptwort vermutet, also die von unten nach oben gespannte Saite. Die Meinung ist durch ägyptische Abbildungen von Harfen dreieckiger Gestalt gestützt. Ob der der Hypotenuse gegenüberliegende Winkel ein rechter ist oder nicht, darauf kommt es nicht an. Musikalische Versuche werden Pythagoras ohnehin nacherzählt, und mit diesen in Verbindung könnte die Beachtung der dreieckigen Harfe an Wahrscheinlichkeit gewinnen.

Wir haben oben gesagt, daß der heute gebräuchlichste Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes von Euklid herrühre. Der in der pythagoräischen Schule selbst geführte muß von diesem verschieden ge-

[1]) Böckh, Philolaus S. 155. Chaignet I, 245—247. [2]) Plutarchus, Convivia VIII, 2 *Πῶς Πλάτων ἔλεγε τὸν Θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν.* Die Stelle bei Platon selbst ist nicht bekannt. Wenn Vossius in seiner Geschichte der Mathematik dafür auf den Dialog „Philebus" verweist, so dürfte dieses Zitat auf einem Irrtum beruhen; sagt doch schon Plutarch an der angegebenen Stelle ausdrücklich, jener Ausspruch finde sich nicht in Platons Schriften, könne aber ganz wohl platonisch sein. [3]) Max C. P. Schmidt, Philologische Beiträge, zweites Heft. Terminologische Studien. *Ὑποτείνουσα* pag. 9—45 (Leipzig 1905).

wesen sein. Er dürfte seiner Altertümlichkeit entsprechend viele Unterfälle unterschieden haben und gerade vermöge dieser Weitläufigkeit aufs gründlichste beseitigt worden sein, wie wir daraus schließen dürfen, daß Proklus auch mit keiner Silbe des Ganges des voreuklidischen Beweises gedenkt. Waren Unterfälle unterschieden, so ist die Wahrscheinlichkeit vorhanden, die Beweisführung sei von dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke ausgegangen[1]) und habe die Zerlegung des Quadrates durch seine Diagonalen (Fig. 28) zur Grundlage gehabt[2]), wenigstens hat sich in Platons Menon dieser Beweis des Sonderfalles erhalten. Wie der weitere Fortschritt zum Beweise des allgemeinen Satzes vollzogen wurde, darüber ist man in keiner Art unterrichtet. Die verschiedenen Wiederherstellungsversuche, so geistreich manche derselben sind, schweben alle so ziemlich in der Luft[3]).

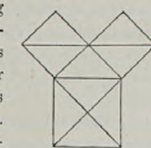

Fig. 28.

Die arithmetische Aufgabe Zahlen zu finden, welche als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gezeichnet werden können, löste Pythagoras gleichfalls, und hier sind wir in der günstigen Lage, daß Proklus uns seine Auflösungsmethode aufbewahrt hat[4]). Er sei von irgend einer ungeraden Zahl $2\alpha + 1$ ausgegangen, welche er als kleinere Kathete betrachtete. Die Hälfte des um 1 verminderten Quadrates derselben gab die größere Kathete $2\alpha^2 + 2\alpha$, diese wieder um 1 vermehrt die Hypotenuse $2\alpha^2 + 2\alpha + 1$. Wie kam Pythagoras zu dieser Auflösung? Ein möglicher Weg ist folgender, welchen wir nur wenig gegen die Art, wie er zuerst vermutungsweise geschildert worden ist[5]), verändert der Prüfung unterbreiten. Ist $a^2 = b^2 + c^2$, so ist $c^2 = a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$. Die Aufgabe der erstgeschriebenen Gleichung zu genügen läßt sich also erfüllen, wenn nur $a + b$ und $a - b$ beide gerad oder beide ungerad und zudem solche Zahlen sind, welche miteinander vervielfacht eine Quadratzahl liefern. Solche Zahlen kannte höchstwahrscheinlich bereits die vorplatonische Zeit, da sie unter dem Namen ähnlicher Zahlen bei Theon von Smyrna erklärt sind[6]). Die andere von uns

[1]) Hankel S. 98. [2]) Allman l. c. S. 29. [3]) Vgl. Camerers Euklidausgabe I, 444 mit Bretschneider 82, sowie Zeuthen, Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter (Kopenhagen 1896) S. 50, wo die Meinung ausgesprochen ist, der alte Beweis sei mittels Ähnlichkeit von Dreiecken, also unter Ziehung der Senkrechten von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse geführt worden. [4]) Proklus (ed. Friedlein) 428. [5]) Röth, Geschichte der abendländischen Philosophie II, 527. [6]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 36.

hervorgehobene Bedingung beruht darauf, daß a und b ganzzahlig zu erhalten nur dann möglich ist, wenn Summe und Differenz von $a+b$ und $a-b$ beide gerad sind. Der einfachste Fall ähnlicher Zahlen ist nun selbstverständlich der der Einheit und einer Quadratzahl c^2, und weil 1 ungerad ist, muß hier auch c^2 und somit c selbst ungerad sein, etwa $c = 2\alpha + 1$. So kam die Formel des Pythagoras darauf hinaus $(2\alpha+1)^2 = (2\alpha+1)^2 \cdot 1$ zu setzen, und danach aus $(2\alpha+1)^2 = a+b$ und $1 = a-b$ die Werte $b = \frac{(2\alpha+1)^2-1}{2}$ und $a = \frac{(2\alpha+1)^2-1}{2} + 1$ zu ermitteln, welche zusammen mit $c = 2\alpha + 1$ die gestellte Aufgabe lösen. Die Formen, in welchen b und a auftreten, entsprechen, wie man sofort erkennt, genau dem Wortlaute der Angabe des Proklus, was immer ein günstiges Vorurteil für die Richtigkeit eines Wiederherstellungsversuches gewährt, und da überdies in Ägypten, wie wir aus dem Übungsbuche des Ahmes wissen, Aufgaben von algebraischer Natur zu lösen nicht ungebräuchlich war, so scheitert der Versuch auch nicht an der Frage, ob es für Pythagoras möglich gewesen sei, schon derartige Schlüsse zu ziehen, wie sie hier verlangt wurden.

Fassen wir den Inhalt dieses und des zunächst vorhergehenden Kapitels in Kürze zusammen. Pythagoras hat, so suchten wir zu erweisen, sicherlich in Ägypten, vielleicht in den Euphratländern mathematisches Wissen sich angeeignet. Ersteres geht wie aus den ausdrücklichen Überlieferungen, so auch aus dem ägyptischen Gepräge mancher geometrischer Entwicklungen, letzteres aus den babylonisch anmutenden Zahlendifteleien der Pythagoräer hervor. Die Summe des geometrischen Wissens, welches von Pythagoras und seiner Schule den Griechen vor dem Jahre 400 zugänglich gemacht wurde, ist eine nicht ganz geringfügige. Sie umfaßte die Kenntnis von den Parallellinien und den durch dieselben beweisbaren Winkelsätzen, insbesondere den Satz von der Summe der Dreieckswinkel. Sie umfaßte Kongruenzsätze des Dreiecks und Sätze über Flächengleichheit, deren Anwendung die sogenannte Anlegung von Flächen bildete. Sie ließ umgekehrt Figuren als Summe anderer Figuren entstehen, wobei vielleicht das Sternfünfeck entdeckt wurde, wenn wir auch für dieses nicht mit gleicher Sicherheit wie für die anderen Dinge die alten Pythagoräer als Urheber behaupten möchten. Sie umfaßte den pythagoräischen Lehrsatz und den goldnen Schnitt. Sie enthielt endlich auch Anfänge einer Stereometrie, insbesondere die Kenntnis der fünf regelmäßigen Körper und der Kugel, welche dieselben umfaßt. Die Sätze waren mit Beweisen versehen. Allerdings ließen die Beweise vermutlich nicht gleich die Strenge erkennen, welche man geradezu

geometrische Strenge zu nennen pflegt, und legten erst nach und nach den Charakter eines Erfahrungsbeweises ab, nahmen noch später jene allgemeineren Fassungen an, welche in einheitlicher Betrachtung die Notwendigkeit der Unterscheidung von Sonderfällen verbannt. Noch unvergleichbar mehr leistete die pythagoräische Schule in der Arithmetik, gerade durch die Größe der Leistungen die Wahrscheinlichkeit fremden Ursprunges auch für diesen Zweig griechischer Mathematik bezeugend. Arithmetische, geometrische, harmonische Verhältnisse und Reihen, unter den arithmetischen Reihen auch solche, welche die Sprache heutiger Wissenschaft arithmetische Reihen höherer Ordnung nennt, sind Dinge, die man am Anfange einer Entwicklung nicht zu finden erwarten darf, noch weniger die freilich auch weniger gut beglaubigten befreundeten und vollkommenen Zahlen. Die Überlieferung läßt wirklich einige dieser Gegenstände aus Babylon eingeführt sein. Fremdländisch war vielleicht auch die Methode des mathematischen Experimentes d. h. der Zerlegung von Figuren in andersgestaltete, der Vereinigung von Reihengliedern derselben oder verschiedener Reihen zu Summen, zunächst nur in der unbestimmten Absicht zu versuchen, ob dabei etwas geometrisch, etwas arithmetisch Merkwürdiges sich offenbaren möchte. Für griechisch dagegen hielten wir die eigentümliche Verquickung von Geometrie und Arithmetik, die geometrische Versinnlichung der Zahlenlehre, wie sie in der Ebenen- und Körperzahl, in der Dreiecks- und Quadratzahl, in der Vielecks- und Gnomonzahl zutage tritt. Pythagoräisch war nach unserer durch mannigfache Überlieferung gestützten Darstellung die Erfindung des Satzes von den Quadraten der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks als eines arithmetischen ausgehend von dem bestimmten Zahlenbeispiele $3^2 + 4^2 = 5^2$. Pythagoräisch war endlich eine Regel zur Ermittelung anderer Zahlen als 3, 4, 5, welche als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks dienen können, pythagoräisch die Lehre vom Irrationalen. Vom Irrationalen sagen wir und müssen wir sagen, nicht von der Irrationalzahl, denn das Irrationale war den Griechen keine Zahl. War den Pythagoräern doch sogar die Einheit noch keine Zahl, sondern erst eine Vielheit von Einheiten. Brüche mögen dem **Rechner** vorgekommen sein, sei es als wirkliche Brüche mit Zähler und Nenner, sei es als Unterabteilungen von Münzen, von Gewichten, von Feldmaßen, jedenfalls immer als konkrete Brüche. Der abstrakte Bruch war für den **Arithmetiker** nicht vorhanden. Er kannte Brüche nur mittelbar als Verhältnis zweier Zahlen. Um so weniger konnte ihm das Irrationale eine Zahl sein, welchem nicht einmal ein aussprechbares Verhältnis den Eintritt in die Zahlenreihe gestattete. Diese wichtige Beschränkung des Begriffes der Zahl erhielt sich über die Zeit der Pythagoräer weit hinaus. Sie blieb, was den Ausschluß der Irrationalen betrifft, so lange, als überhaupt von griechischer Arithmetik die Rede ist.

8. Kapitel.

Mathematiker außerhalb der pythagoräischen Schule.

Die Mathematik nahm, wie wir weitläufig gesehen haben, einen mächtigen Aufschwung durch die pythagoräische Schule. Es war wohl eng damit verbunden, sei es als Ursache, sei es als Folge, daß, wie uns berichtet wird, die Mathematik den Pythagoräern als erstes und wichtigstes Lehrelement diente[1]). Damit ist aber nicht ausgeschlossen, daß auch andere Schriftsteller sich noch verdient machten. Hören wir, wie das alte Mathematikerverzeichnis fortfährt:

„Nach ihm (dem Pythagoras) lieferte der Klazomenier Anaxagoras vieles über Geometrie, ingleichen Oinopides von Chios, der etwas jünger ist als Anaxagoras. Beider gedenkt Platon in den Nebenbuhlern als berühmter Geometer.“

Anaxagoras von Klazomene[2]) wurde vermutlich 500 geboren und starb 72 Jahre alt 428. Er gehörte einem vornehmen und reichen Hause an, achtete aber aus Liebe zur Wissenschaft weder auf die Verwaltung seines Vermögens, noch auf eine ihm leicht erringbare politische Stellung. Seinen verwahrlosten Besitz soll er schließlich seinen Angehörigen überlassen, die Nichteinmengung in staatliche Verhältnisse aber damit erklärt haben, daß ihm der Himmel Vaterland und die Beobachtung der Gestirne seine Bestimmung sei. Um 464 etwa dürfte er nach Athen gekommen sein, wenn anders der Bericht der Wahrheit entspricht, daß sein dortiger Aufenthalt 30 Jahre gedauert habe. Er verließ nämlich diese Stadt um 434, wenige Jahre vor dem Beginne des peloponnesischen Krieges. Anaxagoras lehrte in Athen als einer der ersten Philosophie, und unter seinen Schülern waren zwei Männer von verschieden begründetem, aber gleich hohem Ruhme: Euripides und Perikles. Perikles insbesondere blieb zu seinem Lehrer in fortwährend freundschaftlichem Verhältnisse, und als in der angegebenen Epoche, wenige Jahre vor 431, die Gegner des großen athenischen Staatsmannes ihrer Feindschaft gegen ihn in Gestalt von Verfolgung seiner Freunde Luft zu machen begannen, war gerade Anaxagoras eine zur Eröffnung des

[1]) Porphyrius, *De vita Pythagor.* 47. Jamblichus, *De philosophia Pythagor.* lib. III, abgedruckt bei Ansse de Villoison, *Anecdota Graeca.* Venedig 1781, pag. 216. [2]) Schaubach, *Fragmenta Anaxagorae.* Leipzig 1827. Zeller I, 783—791.

Angriffes geeignete Persönlichkeit. Lehren eines Philosophen zu verdächtigen, eines Denkers, welchen nicht jeder aus dem großen Haufen versteht, ist bei einigem guten Willen niemals unmöglich, und das mußte Anaxagoras erfahren. Er wurde ins Gefängnis gebracht und entkam diesem, sowie der Stadt Athen, man weiß nicht genau wie. Die einen berichten von Flucht aus dem Gefängnisse, die anderen von Verbannung, die dritten von Freisprechung und darauf folgendem nichterzwungenem Verlassen der ihm zuwider gewordenen Stadt. Sicher ist, daß Anaxagoras die letzte Zeit seines Lebens in Lampsakus zubrachte. Wir haben über den eigenen Bildungsgang des Anaxagoras nichts gesagt. Die Nachrichten aus dem Altertume schweigen entweder über einen Lehrer, dem er gefolgt wäre, oder sie nennen ihn Schüler des Anaximenes. Wieder andere wissen von einer Studienreise nach Ägypten zu erzählen. Die erstere Angabe läßt sich mit dem gemeiniglich auf 499 angesetzten Todesjahr des Anaximenes nicht vereinigen. Die zweite ist an sich nicht unwahrscheinlich, da, wie wir bei Thales und Pythagoras gezeigt haben, ein Handelsverkehr zwischen den ionischen Städten und Ägypten stattfand und selbst Studienreisen wohl beglaubigt sind.

Von dem, was Anaxagoras als Mathematiker leistete, sind wir so ziemlich, davon, wie er es leistete, gar nicht unterrichtet. Daß es etwas Hervorragendes gewesen sein muß, läßt sich zum voraus erwarten. Da in den Nebenbuhlern, einem Gespräche in Platons Art, wenn auch nach heutiger Annahme nicht von Platon verfaßt, ein Streit über astronomische und mathematische Dinge kurzweg als Streit über Anaxagoras oder über Oinopides bezeichnet wird[1]), so geht schon aus dieser Redeweise hervor, daß zur Zeit, als jenes Gespräch entstand, beide hochberühmt in ihrem Fache waren.

Plutarch erzählt, Anaxagoras habe im Gefängnisse, das wäre also um 434, die Quadratur des Kreises gezeichnet[2]). So fraglich dieser Bericht früher erscheinen mochte, jetzt ist er sehr glaubwürdig geworden, nachdem wir wissen, daß die Ägypter mehr als ein Jahrtausend vor Anaxagoras die Quadratur des Kreises zeichneten, d. h. eine Figur konstruierten, welche als Quadrat die Fläche des Kreises mehr oder weniger genau darstellte. Daß Anaxagoras der mangelnden Genauigkeit sich voll bewußt gewesen sein sollte, ist nicht anzunehmen. Er wird wohl, wie viele nach ihm, die volle Quadratur zu erreichen gesucht haben. Aber auch darin liegt ein Verdienst, eine Aufgabe an die Tagesordnung gebracht zu haben, welche später als fruchtbringend sich erwies.

[1]) Platon, Rivales 132 A. [2]) Plutarchus, *De exilio* cap. 17 *ἀλλ' Ἀναξαγόρας μὲν ἐν τῷ δεσμωτηρίῳ τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν ἔγραφε.*

Ein anderes Verdienst schreibt Vitruvius dem Anaxagoras zu. Als Aeschylus in Athen Dramen aufführen ließ, also um etwa 470, habe ein gewisser Agatharchus die Schaubühne hergerichtet und eine Abhandlung darüber geschrieben. Daraus haben sodann Anaxagoras und Demokrit Veranlassung genommen den gleichen Gegenstand zu erörtern, wie man die gezogenen Linien den aus den Augen kommenden Sehstrahlen bei Annahme eines bestimmten Mittelpunktes entsprechend ziehe, so daß z. B. Gebäude auf Dekorationen dargestellt werden konnten, und was in einer Ebene gezeichnet war bald zurückzutreten, bald vorzurücken schien[1]). Das ist wenn auch in ungenügender so doch in nicht mißzuverstehender Weise beschrieben eine Perspektive. Deren Erfindung oder Ausbildung ist sicherlich nicht ohne Bedeutung, namentlich wenn die Reise des Anaxagoras nach Ägypten als wahr gelten darf, da er dort sein Auge nur an unperspektivisch entworfene Gemälde zu gewöhnen imstande war, und die gewohnte Darstellung ihn ebensowenig gehindert haben wird als Tausende, die vor ihm, die nach ihm bewundernd die bemalten Tempelwände anstaunten.

Der andere durch die erwähnte Stelle in den Nebenbuhlern als allbekannt erwiesene Geometer war Oinopides von Chios. Er sei etwas jünger als Anaxagoras, meldet das uns in jeder Beziehung glaubwürdige Mathematikerverzeichnis. Eine annähernde Gleichaltrigkeit beider bestätigt Diogenes Laertius[2]). Oinopides soll gleichfalls in Ägypten gewesen sein. Gekommen sei zu ihnen ingleichen Demokritos von Abdera und Oinopides von Chios[3]), meldet Diodor an einer früher (S. 151) von uns angeführten Stelle. Geometrisches wissen wir von Oinopides nur, was Proklus in seinem Kommentare zum ersten Buche der euklidischen Elemente ihm zuschreibt[4]), daß er nämlich die beiden Aufgaben gelöst habe[5]), von einem Punkte außerhalb einer unbegrenzten Geraden ein Lot auf letztere zu fällen und an einem in einer Geraden gegebenen Punkte einen Winkel anzulegen, der einem gegebenen Winkel gleich sei. Bei ersterer Aufgabe bedient sich Oinopides des „altertümlichen“ Wortes (S. 161) einer nach dem Gnomon gerichteten Linie. Aus dem ungemein elementaren Gegenstande der ihm zugeschriebenen Aufgaben einen Schluß auf die Verdienste des Oinopides ziehen zu wollen, hieße seinen griechischen Verehrern jede Urteilsfähigkeit absprechen. Er muß noch Anderes und Bedeutenderes geleistet haben, was wir

[1]) Vitruvius VII, praefat. 11. [2]) Diogenes Laertius IX, 37 und 41. [3]) Diodor I, 96. [4]) Proklus (ed. Friedlein) 283 und 333. [5]) Euklid I, 12 und 23.

aber nicht kennen. Seine Beziehung zu den beiden Aufgaben des Lotes und der Winkelanlegung ist gewiß dahin richtig gedeutet worden[1]), Proklus wolle nur sagen, die bei Euklid gelehrten Auflösungen rührten von Oinopides her, während andere Auflösungen derselben dem Praktiker auf Weg und Steg vorkommenden Aufgaben längst vorher in Ägypten wie in Griechenland bekannt gewesen sein müssen.

Im Zusammenhang mit beiden Geometern, mit Anaxagoras wie mit Oinopides, haben wir einen dritten genannt: Demokritus. Abdera, jenes thrakische Krähwinkel des Altertums, von dessen Bewohnern die schnurrigsten Geschichten erzählt werden, war die Heimat des Demokritus, dessen Ruhm, so bedeutend er war, nicht hinreichte, das Abderitentum in Schutz zu nehmen. Nach eigener Aussage 40 Jahre jünger als Anaxagoras[2]) muß er um 460 geboren sein. Nach Diodor sei er dagegen im 1. Jahre der 94. Olympiade, das ist 404 auf 403, im Alter von 90 Jahren gestorben[3]), was einen unlösbaren Widerspruch herstellt. Beglaubigt ist, daß Demokritus ein hohes Alter von mindestens 90 Jahren erreichte; manche Berichte lassen ihn sein Leben sogar auf 100, auf mehr als 100, auf 109 Jahre bringen[4]). Vereinigen wir seine Geburtsangabe als mutmaßlich glaubwürdigste mit dieser Lebensdauer, so wird der Irrtum keinesfalls sehr groß sein, wenn man sein Leben etwa von 460—370 ansetzt, den Mittelpunkt seiner Tätigkeit in die Jahre 420—400 verlegt. Demokritus gehörte, wie aus der Diodorstelle hervorgeht, zu den Fremden, deren Namen in den Matrikellisten der ägyptischen Priester aufgeführt wurden. Nach einem weiteren Berichte des Diodor verweilte er fünf Jahre in Ägypten[5]), und wenn in einem bei Clemens von Alexandria erhaltenen Bruchstücke des Demokrit selbst von 80jährigem Aufenthalte die Rede ist[6]), so dürfte die Erklärung stichhaltig sein, hier habe einfach eine Verwechslung der älteren Zahlbezeichnung $\Pi = 5$ mit der jüngeren $\pi' = 80$ stattgefunden. Auch Vorderasien und Persien bereiste Demokrit, wie allgemein berichtet und geglaubt wird[7]). Wir glauben diesen Umstand betonen zu sollen, da er je nach den persönlichen Ansichten des einen oder des andern entweder dazu führen kann ähnlichen Reisen, welche Pythagoras etwa 100 Jahre früher unternommen haben soll, einen gewissen Wahrscheinlichkeitshalt zu gewähren, oder eine Erklärung uns darbietet, auf welche Weise ungefähr durch andere Reisende schon im V. S.

[1]) Bretschneider S. 65. [2]) Diogenes Laertius IX, 41. [3]) Diodor XIV, 11. [4]) Vgl. Zeller I, 686. [5]) Diodor I, 98. [6]) Clemens Alexandr. Stromata I, 304 A. [7]) Zeller I, 688.

vorchristlicher Zeitrechnung babylonische Lehren in das fast vollendete Gebäude pythagoräischer Schulweisheit Eingang finden konnten.

In Erinnerung an seinen ägyptischen Aufenthalt gebrauchte Demokrit das stolze Wort: „Im Konstruieren von Linien nach Maßgabe der aus den Voraussetzungen zu ziehenden Schlüsse hat mich keiner je übertroffen, selbst nicht die sogenannten Harpedonapten der Ägypter", dessen wir (S. 104) gedachten, als von jenen Seilspannern die Rede war. Auch Cicero rühmt Demokrit als gelehrten, in der Geometrie vollkommenen Mann[1]). Mathematische Schriften des Demokrit nennt uns Diogenes Laertius[2]), doch ist es leider nicht möglich, aus diesen Büchertiteln mehr als nur allgemeinste Kenntnis ihres Inhalts, und das nicht immer, zu gewinnen. Über Geometrie; Zahlen, das sind Titel allgemeinster Art, und ob wir unter der Geometrie etwa Feldmessung in unmittelbarer Beziehung zur Tätigkeit jener Harpedonapten zu verstehen haben, wagen wir kaum in Gestalt einer Frage zu äußern. Was mag aber der Titel *περὶ διαφορῆς γνώμονος ἢ περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης* (wörtlich: über den Unterschied des Gnomon oder über die Berührung des Kreises und der Kugel) bedeuten? Als mögliche Erklärung ist vorgeschlagen worden[3]), Demokrit habe einen rechten Winkel so mit dem Kreise beziehungsweise der Kugel in Verbindung gesetzt, daß der eine Schenkel durch den Mittelpunkt ging, die Spitze des Winkels auf die Kreislinie (Kugeloberfläche) fiel, weil alsdann der andere Schenkel zur Berührungslinie wurde. Besser sagt uns die Erklärung zu[4]), welche auf ältere Handschriften des Diogenes Laertius zurückgreifend den Titel *περὶ διαφορῆς γνώμης κ. τ. λ.* liest, d. h. über einen Meinungsunterschied oder über die Berührung des Kreises und der Kugel. Der Meinungsunterschied beziehe sich auf den Winkel, welchen die Berührungslinie mit dem Kreise bilde, einen Winkel, von welchem, wie wir im 12. Kapitel sehen werden, Euklid im III. Buche seiner Elemente handelte, und bestehe in der Größenvergleichung dieses Winkels mit geradlinigen Winkeln. Ein weiterer durch Diogenes Laertius überlieferter Titel ist: *περὶ ἀλόγων γραμμῶν καί ναστῶν β'* (zwei Bücher von irrationalen Linien und den dichten Dingen)?[5]). Auch dafür ist eine Erklärung versucht worden[6]). Der Titel sei nämlich verderbt aus *περὶ ἀλόγων γραμμῶν κλαστῶν* d. h. über irrationale gebrochene

[1]) Cicero, *De finibus bonorum et malorum* I, 6, 20. [2]) Diogenes Laertius IX, 47. [3]) Allman, Greek geometry from Thales to Euclid, pag. 80. [4]) Briefliche Mitteilung von T. L. Heath. [5]) Daß *γραμμαὶ ἄλογαι* nicht Asymptoten bedeuten kann, wie in einer sonst brauchbaren Programmabhandlung gesagt ist, versteht sich von selbst. [6]) Hultsch in den Neuen Jahrbüchern für Philol. u. Pädagog. (1881) Bd. 123, S. 578—579.

Linien, und unter dieser Überschrift habe die Untersuchung sich teils mit solchen Irrationalitäten beschäftigen können, welche Summen von rationalen und irrationalen Teilen waren, teils mit Zerbrechung, d. h. Teilung von irrationalen Linien nach gegebenen Verhältnissen. Jedenfalls können wir, mag das letzte Wort des Titels geheißen haben, wie es will, seinen ersten Worten die nicht unwichtige Tatsache entnehmen, daß Name und vermutlich auch Begriff des Irrationalen trotz der mystischen Scheu der Pythagoräer verhältnismäßig frühzeitig außerhalb der Schule in Anwendung kam. Wichtig wäre uns vielleicht noch ganz besonders eine Stelle bei Plutarch, Demokrit habe den Kegel parallel zur Grundfläche geschnitten[1]), wenn über Art und Zweck der Schnittführung nur irgend Genaues gesagt wäre. Wir würden Einzelangaben etwa im Mathematikerverzeichnisse oder bei Proklus mit Freuden begrüßen. Da wie dort kommt der Name des Demokrit nicht einmal vor!

Das Schweigen des Proklus läßt allerdings als absichtliches sich auffassen. Proklus gehörte zu den begeistertsten Spätplatonikern. Platon war Gegner des Demokritus, dessen Werke er vernichtet wissen wollte, dessen Namen er in seinen zahlreichen Schriften niemals nennt[2]). Proklus mochte nach Platons Beispiel handeln. Aber das Mathematikerverzeichnis? Aristoteles, Theophrastus, Eudemus schätzten Demokritus und beschäftigten sich eingehend mit ihm. Daß das Mathematikerverzeichnis ihn, den vielgerühmten Geometer, nicht nennt, kann nur in doppelter Weise erklärt werden. Entweder ließ Proklus aus dem Verzeichnisse den ihm mißliebigen Namen weg, oder der Verfasser des Verzeichnisses hat ihn mit Unrecht vergessen, eine Vergeßlichkeit, welche uns einen der zahlreichen Belege für den Satz liefert, daß aus dem zufälligen Schweigen eines Schriftstellers Schlüsse nicht gezogen werden dürfen[3]).

Der Vollständigkeit entbehrt das Mathematikerverzeichnis auch in einer anderen Beziehung, indem es über die Sophisten, welche der Mathematik sich befleißigten, insbesondere über Hippias von Elis in halbes Schweigen sich hüllt. Wir nennen es ein halbes Schweigen, weil der Name dieses Mannes, wie wir uns erinnern (S. 146), einmal bereits vorkam. Es handelte sich um den geometrischen Ruhm des Mamerkus, für welchen Hippias von Elis als Gewährsmann angerufen wurde, und diese Anrufung selbst genügt zum Nachweise, daß Hippias nach der Meinung des Verfassers des Verzeichnisses wohl fähig war über geometrische Tüchtigkeit ein Urteil

[1]) Plutarchus, *De communibus notitiis adversus Stoicos* cap. 39, § 3. [2]) Diogenes Laertius IX, 40. [3]) Vgl. Zeller I, 690.

zu fällen. Allein der eigentliche Ort, des Hippias von Elis und seiner Verdienste um die Mathematik zu gedenken, würde doch erst neben oder nach Anaxagoras und Oinopides gewesen sein, und hier vermissen wir seine Erwähnung.

Proklus spricht dafür von ihm an zwei anderen Stellen[1]). Man hat freilich mehrfach Zweifel dagegen erhoben, daß der bei Proklus genannte Hippias wirklich Hippias von Elis sei[2]), aber sicherlich mit Unrecht. Proklus besitzt nämlich in seinem Kommentare eine Gewohnheit, von der er nie abgeht. Er schildert einen Schriftsteller, welchen er anführt, sofern Mißverständnisse möglich wären, mit deutlicher Benennung, läßt aber später die Beinamen weg, wenn er es unbeschadet der Deutlichkeit tun darf. So nennt er einen Zenon von Sidon später nur Zenon den früher erwähnten oder kurzweg Zenon; Leodamas heißt beim ersten Vorkommen von Thasos, später nur Leodamas; Oinopides von Chios wird später zum einfachen Oinopides, Theätet von Athen zum Theätet usw. Hippokrates der Arzt wird an einer Stelle, Hippokrates von Chios an einer späteren genannt, und wo noch später der letztere wieder auftritt, heißt er wieder Hippokrates von Chios, weil eben vorher zwei des Namens genannt waren, und damit zum Mißverständnisse Gelegenheit geboten war. Wenn also Proklus uns einen Hippias schlechtweg nennt, so muß das Hippias von Elis sein, der schon vorher einmal in demselben Kommentare deutlich bezeichnet war. Aber sehen wir sogar von dieser Gewohnheit des Proklus ab. Bei jedem Schriftsteller, insbesondere bei jedem, der den Werken Platons ein eingehendes Studium gewidmet hatte, konnte Hippias ohne jedwede andere Bezeichnung nur Hippias von Elis sein, eine viele Jahrhunderte lang teils um seiner Persönlichkeit willen, teils um seines mit zwei Dialogen verknüpften Namens wegen weit und breit bekannte Figur. Hippias von Elis war ein wegen seiner Eitelkeit, die selbst für einen Sophisten etwas hochgradig gewesen zu sein scheint, berüchtigter älterer Zeitgenosse des Sokrates. Seine Geburt dürfte auf 460 etwa anzusetzen sein[3]). Die Geistesrichtung und die Tätigkeit der Sophisten ist bekannt. Den eignen Vorteil über alles stellend lehrten sie auch andere gegen mitunter recht hohe Bezahlung ihres Vorteils wahrnehmen und durch Künste der Beredsamkeit, durch Schlüsse, welche Trugschlüsse sein durften, wenn sie nur wirksam sich erwiesen, im

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 272 und 356. [2]) F. Blaß in den Neuen Jahrbüchern für Philologie und Pädagogik Bd. 105 in einem Referate über Bretschneiders Geometrie und Geometer vor Euklid. Hankel S. 151; aber auch schon im *Bulletino Boncompagni* 1872, pag. 297. Friedlein, Beiträge III, S. 8 (Programm für 1873). [3]) Zeller I, 875.

Staatswesen und vor Gericht Einfluß und Geltung sich erwerben. Sittlichkeit kann die berufsmäßigen Rechthaber nicht ausgezeichnet haben, aber Scharfsinn, Schlagfertigkeit, umfassendes Wissen den Sophisten im allgemeinen und dem Hippias als einem ihrer Hauptvertreter insbesondere abzusprechen ist man in keiner Weise befugt. So darf es gewiß nicht als Ironie aufgefaßt werden, wenn der Verfasser eines gleichviel ob mit Recht oder Unrecht Platon zugeschriebenen Gespräches sich zu den Worten veranlaßt sieht: Was du am besten verstehst, was die Sterne betrifft und was am Himmel sich zuträgt? ... Aber etwas über Geometrie hören sie gern[1]). Ironisch klingt es auch nicht, wenn gesagt wird: Hippias sei des Rechnens und der Rechenkunst kundig vor allen anderen und kundig auch der Meßkunst[2]). Am allerwenigsten vollends kann ein solcher Beischmack in der Rede gefunden werden, welche Platon dem Protagoras in den Mund legt: Die anderen Sophisten beeinträchtigen die Jünglinge. Sie führen dieselben, die von den Künsten sich abwendeten, den Künsten wider deren Willen zu, indem sie Rechenkunst und Sternkunde und Meßkunst und Musik sie lehren — und dabei warf er einen Blick auf Hippias — kommt er aber zu mir, wird er über nichts anderes Etwas lernen, als weshalb er zu mir kam[3]). Nach allen diesen Äußerungen glauben wir uns berechtigt anzunehmen, daß Hippias von Elis als Lehrer der Mathematik mindestens in gleichem Range wie als eigentlicher Sophist gestanden haben muß, daß er in naturwissenschaftlichem, mathematischem und astronomischem Wissen auf der Höhe der Bildung seiner Zeit sich befand[4]).

Damit stimmt nun vollkommen überein, was von Hippias als Mathematiker uns mitgeteilt wird. Proklus spricht, wie erwähnt, zweimal von ihm. Die erste Stelle heißt: Nikomedes hat jeden geradlinigen Winkel gedritteilt mittels der konchoidischen Linien, deren eigentümlicher Natur Entdecker er ist, und von denen er Entstehung, Konstruktion und Eigenschaften auseinandergesetzt hat. Andere haben dieselbe Aufgabe mittels der Quadratricen des Hippias und Nikomedes gelöst, indem sie sich der gemischten Kurven bedienten, die eben den Namen Quadratrix (τετραγωνίζουσα) führten; wieder andere teilten einen Winkel nach gegebenem Verhältnisse, indem sie von den Archimedischen Spirallinien ausgingen[5]). Die zweite Stelle lautet: Ganz auf die nämliche Weise pflegen auch die übrigen Mathematiker die Kurven zu behandeln, indem sie das jeder Eigentümliche ausein-

[1]) Platon, Hippias major 285. [2]) Hippias minor 367—368. [3]) Platon, Protagoras 318. [4]) So Karl Steinhart in seiner Einleitung zum größeren Hippias. [5]) Proklus (ed. Friedlein) 272.

andersetzen. So zeigt Apollonius das Eigentümliche jedes Kegelschnittes, Nikomedes dasselbe für die Konchoiden, Hippias für die Quadratrix, Perseus für die Spiren[1]). Eine dritte Stelle eines anderen mathematischen Gewährsmannes allerersten Ranges, des Pappus von Alexandria, sagt uns dagegen: Zur Quadratur des Kreises wurde von Dinostratus, Nikomedes und einigen anderen Neueren eine Linie benutzt, welche eben von dieser Eigenschaft den Namen erhielt. Sie wird nämlich von ihnen Quadratrix genannt[2]).

Aus der Zusammenfassung dieser drei Stellen[3]) dürfte kaum ein anderer Sinn zu entnehmen sein, als der folgende. Hippias, und zwar Hippias von Elis, hat um 420 etwa eine Kurve erfunden, welche zu doppeltem Zwecke dienen konnte, zur Dreiteilung eines Winkels und zur Quadratur des Kreises. Von letzterer Anwendung erhielt sie ihren Namen, Quadratrix, wie er in lateinischer Übersetzung zu lauten pflegt, aber dieser Name scheint nicht über Dinostratus hinaufzureichen, dessen Zeitalter als Bruder des Menächmus, eines Schülers des Eudoxus von Knidos, etwa in die zweite Hälfte des IV. S. gesetzt werden muß. Ob die Kurve früher einen anderen Namen führte, ob sie überhaupt mit Namen genannt wurde, wissen wir nicht. Der erste ganz gesicherte Name einer von der Kreislinie verschiedenen krummen Linie wird uns am Anfang des zweiten Drittels des IV. S., annähernd 20 bis 30 Jahre vor Dinostratus begegnen, wo Eudoxus seine Hippopede erfand. Ist aber der Name Quadratrix erst nachträglich der Kurve des Hippias beigelegt worden, so schwindet die Notwendigkeit anzunehmen, sie sei zum Zwecke der Kreisquadratur erfunden worden, und man darf ihren ursprünglichen Zweck in dem suchen, was nach Proklus durch sie zu verwirklichen war, in der Dreiteilung des Winkels.

Daß diese Aufgabe selbst auftauchte, kann uns nicht in Verwunderung setzen. Wir haben im vorigen Kapitel gesehen, daß die Konstruktion regelmäßiger Vielecke eines der geometrischen Lieblingsgebiete der Pythagoräer bildete. Die Teilung des ganzen Kreisumfanges in sechs, in vier, in fünf gleiche Teile wurde gelehrt, und namentlich letztere als bedeutend schwieriger erkannt als die anderen längst bekannten Teilungen. Eine überwundene Schwierigkeit reizt zur Besiegung anderer, und so mag das Verlangen wach geworden sein nicht mehr den ganzen Kreis, sondern einen beliebigen Kreisbogen in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen. Schon bei

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 356. [2]) Pappus, Collectio Lib. IV, cap. XXX (ed. Hultsch). Berlin 1876–1878, pag. 250. [3]) Vgl. Bretschneider 96 und 153–154.

der Dreiteilung traten unbesiegbare Schwierigkeiten auf. Versuche diese Aufgaben mit Hilfe des Zirkels und des Lineals zu lösen mögen angestellt worden sein. Es ist uns nichts von ihnen bekannt geworden. Sie mußten erfolglos bleiben. Aber das zweite große Problem der Geometrie des Altertums neben der Quadratur des Kreises, deren wir bei Anaxagoras gedenken mußten, war gestellt, und wie in der Geschichte der Mathematik fast regelmäßig zunächst unlösbaren Aufgaben zuliebe neue Methoden sich entwickelten und kräftigten, so führte die Dreiteilung des Winkels, τριχοτόμια γωνίας, die Trisektion, wie man gewöhnlich sagt, zur Erfindung der ersten von der Kreislinie verschiedenen, durch bestimmte Eigenschaften gekennzeichneten und in ihrer Entstehung verfolgbaren krummen Linie.

Die Linie des Hippias entsteht durch Verbindung zweier Bewegungen, einer drehenden und einer fortschreitenden. „In ein Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 29) ist um α als Mittelpunkt und mit der Seite des Quadrats $\alpha\beta$ als Halbmesser ein Kreisquadrant $\beta\varepsilon\delta$ beschrieben. Die Gerade $\alpha\beta$ bewegt sich dabei so, daß ihr einer Endpunkt α fest bleibt, der andere β längs des Bogens $\beta\varepsilon\delta$ fortschreitet. Andererseits soll die $\beta\gamma$ immer der $\alpha\delta$ parallel bleibend mit dem Endpunkte β auf der $\beta\alpha$ fortrücken, und zwar sollen die beiden selbst gleichmäßigen Bewegungen der Zeit nach so erfolgen, daß sie zugleich beginnen und zugleich endigen, daß also $\alpha\beta$ in seiner Drehung, $\beta\gamma$ in seinem Fortgleiten im selben Moment in der Lage $\alpha\delta$ eintreffen. Die beiden bewegten Geraden werden in jedem Augenblicke einen Durchschnittspunkt gemein haben, der selbst im Fortrücken begriffen eine gegen $\beta\varepsilon\delta$ hin gewölbte krumme Linie $\beta\zeta\eta$ erzeugt, welche geeignet erscheint ein der gegebenen Kreisfläche gleiches Quadrat finden zu lassen. Ihre beherrschende Eigenschaft besteht jedoch darin, daß eine beliebige Gerade $\alpha\zeta\varepsilon$ bis zum Kreisquadranten gezogen das Verhältnis dieses Quadranten zum Bogen $\varepsilon\delta$ gleich dem Verhältnisse der beiden Geraden $\beta\alpha$ und $\zeta\theta$ zueinander macht. Das ist nämlich klar aus der Entstehung der krummen Linie." So Pappus, der hier getreuer Berichterstatter über die alte Erfindung zu sein scheint. Die Kreisquadratur mit Hilfe der Quadratrix schließt sich bei Pappus unmittelbar an. Wir werden diese Anwendung erst in Verbindung mit dem Namen Dinostratus zur Rede bringen[1]).

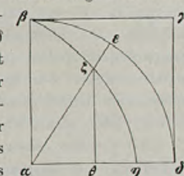

Fig. 29.

[1]) Diese ganze Stelle schließt sich eng an Bretschneider l. c. an.

Noch von einer anderen Persönlichkeit müssen wir hier einschaltend einiges sagen, von Zenon von Elea. Dieser Erfinder[1]) der eigentlichen Dialektik dürfte noch um 20 Jahre älter als Demokritus, um 30 bis 40 Jahre älter als Hippias gewesen sein und seine geistige Blüte in der Zeit gefeiert haben, als letzterer kaum geboren war. Nach der als Stoa bezeichneten Halle, in welcher Zenon in Athen seine Vorträge hielt, nannte man seine Schüler die Stoiker. Zu diesen unmittelbaren Schülern gehörte Posidonius von Alexandria. Würde Zenon als Mathematiker eine Bedeutung haben, so könnte man uns mit Recht den Vorwurf machen, seiner hier an unrichtiger Stelle zu gedenken, der weiter oben behandelt werden mußte. Aber Zenon war nicht Mathematiker. Man wäre fast versucht, ihn das Gegenteil eines solchen zu nennen. Wenigstens versuchte er mit philosophischem Scharfsinne die mathematischen Meinungen zu stürzen statt sie zu stützen. Die Zeit brachte das so mit sich. Die Atomistiker hatten die Teilbarkeit der Körperwelt in Frage gestellt, indem sie unteilbar kleine Urteilchen annahmen. Noch ungeheuerlicher war der Bruch mit dem Gewohnten als die Pythagoräer den Begriff des Irrationalen unter die Denker warfen. Beabsichtigt oder nicht, dieser Begriff drang, wie wir bei Demokritus (S. 193) gesehen haben, in weitere und weitere Kreise. Das Unaussprechliche war ausgesprochen, das Undenkbare in Worte gekleidet, das Unenthüllbare den Augen preisgegeben. Und wer nüchternerer Auffassung diese pythagoräische Scheu nicht teilte, dem war wenigstens eine ganz neue Schwierigkeit unterbreitet, welche strengen Schlüssen nicht standhielt. Zahl und Raumgröße, bisher als zur gegenseitigen Messung oder Versinnlichung als unbedingt tauglich erachtet, zeigten plötzlich einen Widerspruch. Jeder Zahl entsprach noch immer eine Länge, aber nicht jeder Länge entsprach eine Zahl. Stetigkeit und Unstetigkeit waren damit entdeckt und den Philosophen als neues Denkobjekt vorgelegt. Kann man sich wundern, wenn letztere, um des Widerspruches, der in jenem Gegensatze enthalten ist, sich zu erwehren, zu weit gingen, wenn sie dabei zur Leugnung der Vielheit, zur Leugnung der Bewegung gelangten?

Man kennt ja die eigentümlichen Schlüsse Zenons[2]). Jede Vielheit ist eine Anzahl von Einheiten, eine wirkliche Einheit aber nur das Unteilbare. Jedes von den vielen muß also selbst eine unteilbare Einheit sein, oder aus solchen Einheiten bestehen. Was aber unteilbar ist, das kann keine Größe haben, denn alles, was eine Größe hat, ist ins Unendliche teilbar. Die einzelnen Teile, aus denen das Viele besteht, haben mithin keine Größe. Es wird also auch nichts dadurch größer werden, daß sie zu ihm hinzutreten, und nichts dadurch kleiner, daß sie von ihm hinweggenommen werden. Was aber zu anderem hinzukommend dieses nicht vergrößert, und von ihm weggenommen es nicht verkleinert, das ist nichts. Das Viele ist mithin unendlich klein, denn jeder seiner Bestandteile ist so klein, daß er nichts ist. Andererseits aber müssen diese Teile auch unendlich groß sein. Denn da dasjenige, was keine Größe hat, nicht ist, so müssen die Vielen, um zu sein, eine Größe haben, ihre Teile müssen mithin voneinander entfernt sein, d. h. es müssen andere Teile zwischen ihnen liegen. Von diesen gilt aber das Gleiche: auch sie müssen eine Größe haben und durch weitere von den anderen getrennt sein, und so fort ins Unendliche, so daß wir demnach unendlich viele Größen, oder eine unendliche Größe erhalten. Man kennt den Ausspruch des Zenon gegen Protagoras, ein Scheffel Frucht könne beim Ausschütten ein Geräusch nicht hervorbringen, wenn nicht jedes einzelne Korn und jeder kleinste Teil eines Kornes ein Geräusch hervorbrächte. Man kennt seine Beweise für die Unmöglichkeit einer Bewegung. Ehe der bewegte Körper am Ziele ankommen kann, muß er erst in der Mitte des Weges angekommen sein, ehe er an dieser ankommt in der Mitte seiner ersten Hälfte, ehe er dahin kommt in der Mitte des ersten Viertels, und so fort ins Unendliche. Jeder Körper müßte daher, um von einem Punkte zum anderen zu gelangen, unendlich viele Räume durchlaufen. Es ist mithin unmöglich von einem Punkte zu einem anderen zu gelangen, die Bewegung ist unmöglich. Ebenso folgt die Unmöglichkeit, daß die Schildkröte, wenn sie nur einen Vorsprung hat, durch den schnellen Achilleus eingeholt werden könne, weil während Achilleus den ersten Vorsprung durchläuft, die Schildkröte bereits einen zweiten Vorsprung gewonnen hat, und so fort ins Unendliche.

Der mathematisch sein sollenden Form wegen ist ein letzter Einwurf Zenons gegen die Bewegungslehre erwähnenswert. Eine Reihe von Gegenständen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ist räumlich mit zwei anderen Reihen von Gegenständen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ in Beziehung gesetzt, so daß sie nachfolgende gegenseitige Lage besitzen:

$$\begin{array}{lllllll} & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & & & \\ & & & & & & \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4 . \end{array}$$

[1]) Diogenes Laertius XI, 25 φησὶ δ' Ἀριστοτέλης ἐν τῷ Σοφιστῇ εὑρετὴν αὐτὸν γενέσθαι διαλεκτικῆς. Ebenso derselbe VIII, 57. [2]) Vgl. Zeller I, 497 bis 507, woher wir unsere Auszüge meistens wörtlich entnehmen. Ferner Gerling, Ueber Zeno des Eleaten Paradoxen über die Bewegung (Marburg 1846). E. Raab, Die Zenonischen Beweise (Schweinfurt 1880) und P. Tannery, Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et G. Cantor, im Oktoberheft 1885 der Revue philosophique pag. 385—410.

Die α sind in Ruhe, die β und die γ sind in entgegengesetzter Bewegung, jene von links nach rechts, diese von rechts nach links. Wenn β_1 bei α_4 angelangt ist, ist γ_1 bei α_1 angelangt, und zu derselben Zeit β_4 bei α_1, γ_4 bei α_4. Demgemäß ist β_1 sowohl an α_3 und α_4 als an $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ vorbeigekommen, hat in einer und derselben Zeit an zwei und an vier Gegenständen von genau gleicher Entfernung sich vorbeibewegen können und folglich zugleich eine einfache und eine doppelte Geschwindigkeit besessen, was unmöglich ist.

Wir haben dem Zenon weiter oben die Eigenschaft als Mathematiker abgesprochen. Gerade dieser letzte Trugschluß rechtfertigt uns, denn hier sind irrigerweise absolute und relative Bewegungsgrößen einander gleichgesetzt, was einem Mathematiker kaum begegnet wäre. Anders dagegen verhält es sich mit den vorher hervorgehobenen Schlüssen und ihren sich widersprechenden Ergebnissen. Zenon suchte darzutun, daß ein Körper nicht eine Summe von Punkten, ein Zeitraum nicht eine Summe von Augenblicken, eine Bewegung nicht eine Summe einfacher Übergänge von einem Punkte des Raumes zum anderen sei. Dieser ganze in geistreich erfundenen Widersprüchen geführte Streit richtete sich gegen die Pythagoräer[1]), welchen der Punkt eine *μονὰς ἔχουσα θέσιν*, eine Einheit an bestimmtem Platze hieß. War diese Erklärung richtig, dann war der Körper als Vielheit eine Summe von Einheiten, d. h. von Punkten, und dagegen erhob Zenon seine Stimme. Er sah hier, was vor ihm vielleicht noch nicht gesehen, jedenfalls nicht in gleich scharfer Betonung bemerklich gemacht worden war: Schwierigkeiten, denen in der Tat weder der Philosoph noch der Mathematiker in aller Strenge gerecht werden kann, wenn auch der Mathematiker dazu gelangte durch Einführung bestimmter Zeichen die Stetigkeit zu einer definierbaren Eigenschaft zu machen, und mit den Grenzen zugleich den Übergang zu den Grenzen der Untersuchung zu unterwerfen. Zwei Jahrtausende und mehr haben an dieser zähen Speise gekaut, und es wäre unbillig von den Griechen des fünften vorchristlichen Jahrhunderts zu verlangen, daß sie in Klarheit gewesen seien über Dinge, welche, freilich anders ausgesprochen, noch Streitfragen unserer Gegenwart bilden.

---

[1]) Die Gegnerschaft Zenons gegen die Pythagoräer ist von Tannery l. c. hervorgehoben worden.

9. Kapitel.

Mathematiker außerhalb der pythagoräischen Schule. Hippokrates von Chios.

Den Mathematikern scheint nächst dem Irrationalen bei Gelegenheit der Kreisquadratur der erste Anlaß geboten worden zu sein, Fragen des stetigen Überganges zu behandeln, und dieses führt uns zurück zu dem Mathematikerverzeichnisse, welches mit den Worten fortfährt:

„Nach diesen wurde Hippokrates von Chios, der die Quadratur des Mondes fand, und Theodorus von Kyrene in der Geometrie berühmt. Unter den hier Genannten hat zuerst Hippokrates Elemente — *στοιχεῖα* — geschrieben."

Von dem Leben des Hippokrates von Chios sind uns nur wenige Züge bekannt[1]). Ursprünglich Kaufmann kam er durch einen unglücklichen Zufall um sein Vermögen. Die einen erzählen, die Zolleinnehmer von Byzanz, gegen welche er sich leichtgläubig erwies, hätten ihn darum geprellt, die anderen lassen ihn durch Seeräuber geplündert worden sein. Man hat beide Angaben so zu vereinigen gesucht, daß man mutmaßte, athenische Seeräuber hätten aus Veranlassung eines Krieges gegen Byzanz das Schiff des Hippokrates weggenommen. Jener Krieg sei der sogenannte Samische Krieg um das Jahr 440 gewesen, an welchem tatsächlich die Byzantiner gegen die Athener teilnahmen, und um diese Zeit sei also Hippokrates nach Athen gekommen. Ohne die Möglichkeit in Abrede zu stellen, daß es sich so verhalten haben könne, bedürfen wir jedoch dieser Vermutung nicht, um die wichtigste Folgerung zu ziehen, welche sie für uns enthält, nämlich den Aufenthalt des Hippokrates in Athen zu begründen und zeitlich zu bestimmen. Die ungefähre Lebenszeit des Hippokrates geht schon aus seiner Stellung innerhalb des Mathematikerverzeichnisses hervor, sein Aufenthalt in Athen, der Stadt, welche gerade damals mit Recht begann als erste Stadt Griechenlands zu gelten, hat eine besondere Veranlassung nicht notwendig gehabt. Jedenfalls war Hippokrates von Chios in der zweiten Hälfte des V. S. in Athen und kam dort mit Pythagoräern, d. h. offenbar mit versprengten Mitgliedern der italischen Schule zusammen, in deren

---

[1]) Die betreffenden Stellen des Aristoteles (*Ethic. ad Eudem.* VII, 14) und des Johannes Philoponus (*Comment. in Aristotel. phys. auscult.* f. 18) sind abgedruckt bei Bretschneider 97, wo die im Texte dargestellte Vereinigung der beiden Angaben versucht ist.

Gesellschaft er geometrisches Wissen sich aneignete. Es wird sogar erzählt, er habe es sehr bald dahin gebracht, selbst Unterricht in der Mathematik erteilen zu können und habe dafür Bezahlung angenommen. Von da an hätten die Pythagoräer ihn gemieden[1]).

Diese Geschichte erscheint, insbesondere was den durch Hippokrates gewohnheitsmäßig erteilten mathematischen Unterricht betrifft, sehr glaubwürdig. Damit stimmt nämlich vortrefflich überein, was das Mathematikerverzeichnis uns meldet, daß Hippokrates das erste Elementarlehrbuch der Mathematik verfaßt habe. Weit hervorragender aber sind die eigentlichen geometrischen Erfindungen des Hippokrates, welche auf zwei Probleme sich beziehen: auf die Quadratur des Kreises und auf die Verdoppelung des Würfels.

Die Quadratur des Kreises, von Anaxagoras zuerst versucht, hat auch unter den Sophisten wenige Jahrzehnte vor Hippokrates wenn nicht bis zu seiner Zeit herab Bearbeiter gefunden. Es ist kaum wahrscheinlich, daß die Wortklauberei so alt sei, mit welcher man nach einer Quadratzahl suchte, die zugleich zyklisch sei[2]), d. h. mit derselben Endziffer schließe wie ihre Wurzel z. B. $25 = 5^2$, $36 = 6^2$. Diese Spitzfindigkeit ist erst bei Alexander von Aphrodisias (um 200 nach Christus) nachweisbar[3]). Aber die Versuche von Antiphon und Bryson sind sehr bemerkenswert.

Antiphon, ein Zeitgenosse des Sokrates, mit welchem er über verschiedene Dinge in Hader lag[4]), schlug den Weg ein, daß er in den Kreis ein regelmäßiges Vieleck, etwa ein Quadrat oder ein regelmäßiges Dreieck, einzeichnete[5]). Von diesem ging er zu dem Vielecke doppelter Seitenzahl über. So soll man fortschreiten bis dem Kreise ein Vieleck werde eingeschrieben werden, dessen Seiten ihrer Kleinheit halber mit dem Kreise zusammenfallen würden. Nun könne

[1]) Jamblichus, *De philosoph. Pythagor.* lib. III, bei Ansse de Villoison, *Anecdota Graeca*, pag. 216. [2]) So berichtet Simplicius in einer unter anderen bei Bretschneider 106—107 abgedruckten Stelle. [3]) Vgl. über das Alter der Stelle P. Tannery in der Bibliotheca Mathematica 1900 (3. Folge I, 266). [4]) Diogenes Laertius II, 46. [5]) Der Bericht des Simplicius abgedruckt bei Bretschneider, der das große Verdienst sich erworben hat, diese sämtlichen Untersuchungen zuerst für die Geschichte der Mathematik nutzbringend gemacht zu haben. Bedeutend vertieft haben sich die Forschungen über das, was Simplicius berichtet, seit der Ausgabe von Simplicii in Aristotelis physicorum libros quatuor priores durch Herm. Diels (Berlin 1882), in deren Vorrede auch Arbeiten von Usener und P. Tannery verwertet sind. Noch neuer ist Tannery, Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules (Mémoires de la Société de sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 2e Série T. V und Heiberg im Philologus XLIII, 336—344. Abschließend ist Ferd. Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates in der Bibliotheca Mathematica 1902 (3. Folge III, 7—62).

man, wie man in den Elementen gelernt habe, zu jedem Vielecke ein gleichflächiges Quadrat zeichnen, folglich auch zu dem Kreise mittels des Vielecks, welches an seine Stelle getreten sei. So der Bericht des Simplicius, eines Erklärers des Aristoteles aus dem VI. S., in seinem Kommentare zur Physik des Stagiriten als Einleitung in den selbst aus Eudemus geschöpften Bericht über den Quadrierungsversuch des Hippokrates, der uns nachher zu beschäftigen hat. Ein anderer Kommentator des Aristoteles, Themistius (ungefähr 317—387), weiß die Sache ganz ähnlich[1]). Die Übereinstimmung beider Berichte spricht für eine gleiche Quelle, wahrscheinlich den Eudemus.

Ein anderer Geometer der gleichen Zeit etwa wie Antiphon war der Sophist Bryson aus Herakläa, der Sohn des Herodorus. Er wird auch wohl als Pythagoräer bezeichnet. Er ging in seinem Versuche die Quadratur des Kreises zu finden, von welchem wir wieder durch einen anderen Erklärer des Aristoteles, durch Johannes Philoponus unterrichtet sind[2]), um einen sehr bedeutsamen Schritt über Antiphon hinaus. Er begnügte sich nicht damit ein Kleineres als den Kreis zu finden, welches sich nur wenig von ihm unterschied, er verschaffte sich auch ein der gleichen Forderung genügendes Größeres. Er zeichnete neben den eingeschriebenen Vielecken auch umschriebene Vielecke von immer größerer Seitenzahl und beging bei Ausführung dieses vollständig richtigen Gedankens nur einen damals freilich verzeihlichen Fehler, indem er meinte, die Kreisfläche sei das arithmetische Mittel zwischen einem eingeschriebenen und einem umschriebenen Vielecke. Es ist nicht wahr, sagte später Proklus diesen Versuch vornehm zurückweisend, daß die Stücke, um welche jene Vielecke größer und kleiner als der Kreis sind, sich gleichen. Aber auch welche Entwicklung der Geometrie zwischen Bryson und Proklus! Wir glauben über das Irrige an Brysons Folgerung hinweggehen zu dürfen, den Tadel irgend einen Mittelwert mit dem arithmetischen Mittel verwechselt zu haben, ersticken zu müssen unter dem Lobe in der Erkenntnis des Grenzbegriffes weiter gekommen zu sein als alle Vorgänger.

So weit freilich wie Aristoteles, wenn wir dieses vorgreifend hier erwähnen dürfen, ist auch Bryson nicht gegangen. Aristoteles wußte und sagte[3]) in Worten, deren wir heute uns noch vielfach

[1]) Themistii in Aristotelis physica paraphrasis (ed. H. Schenkl, Berlin 1900). [2]) Bretschneider 126. [3]) Aristoteles, Physic. III, 4. Die Zusammenstellung der auf den Grenzbegriff und auf das Unendliche bezüglichen Stellen des Aristoteles usw. bildet eines der schönsten Kapitel bei Hankel 115—127. Vgl. auch Görland, Aristoteles und die Mathematik (Marburg 1899) S. 162 bis 183.

bedienen, ohne das Bewußtsein zu haben seine Schüler zu sein: „Stetig — *συνεχές* — sei ein Ding, wenn die Grenze eines jeden zweier nächstfolgender Teile, mit der dieselben sich berühren, eine und die nämliche wird und, wie es auch das Wort bezeichnet, zusammengehalten wird.“ Aristoteles wußte, daß es ein anderes ist unendlich vieles zu zählen, oder durch unendlich viele nicht voneinander zu scheidende Punkte sich bewegen. Er löste das Paradoxon der Durchlaufung dieser unendlich vielen Raumpunkte in endlicher Zeit durch das neue Paradoxon, daß innerhalb der endlichen Zeit unendlich viele Zeitteile von unendlich kleiner Dauer anzunehmen seien. Es gibt für ihn kein reales Unendliches in zusammenhangloser Unbeschränktheit des Begriffes, so daß Größeres oder Kleineres nicht möglich ist, sondern nur Endliches von beliebiger Größe, von beliebiger Kleinheit. Das Unendliche bleibt nicht, es wird.[1] Aber man vergesse nicht, daß Aristoteles schon um ein weiteres Jahrhundert nach der Zeit lebte, welche uns in diesem Augenblicke beschäftigt, und daß er Aristoteles war, einer jener Geister, die für alle Zeiten lebend der eigenen Zeit meist unverstanden bleiben.

Bis zu einem gewissen Grade darf man letzteres vielleicht auch für Antiphon und Bryson behaupten. Die Mitte des V. S. konnte sich mit Schlußfolgerungen, wie diese beiden Männer sie zogen, nicht befreunden. Sie konnte nicht über den Widerspruch hinaus, noch um den Widerspruch herum kommen, der darin liegt, die krumme Kreisfläche durch eine geradlinig begrenzte Vielecksfläche erschöpfen zu lassen. Eine mathematische Begründung irgendwelcher Art, am naturgemäßesten ein selbst auf einen Widerspruch gebauter Beweis der Unmöglichkeit der entgegengesetzten Annahme, mußte vorausgehen und das bilden, was man die geometrische Exhaustion nennt.

Aller Wahrscheinlichkeit nach versuchte Hippokrates von Chios zuerst oder als einer der Ersten eine solche Schlußfolgerung um zu dem Satze zu gelangen, daß Kreisflächen den Quadraten ihrer Durchmesser proportional seien, ein Satz, den er, wie Eudemus ausdrücklich sagt[2]), bewiesen hat.

Die Wiederherstellung dessen, was in der Tat Hippokrates angehört, ist allerdings schwierig. Der Bericht im ganzen stammt, wie wir (S. 202) sagten, von Simplicius her. Manches hat dieser von Alexander von Aphrodisias entnommen, anderes und zwar wörtlich (*κατὰ λέξιν*) von Eudemus. Er selbst hat es an erläuternden Bemerkungen auch nicht fehlen lassen, deren Erkennungszeichen zum

[1]) Aristoteles, Physic. III, 7 *οὐδὲ μένει ἡ ἀπειρία ἀλλὰ γίγνεται*. [2]) *Eudemi fragmenta* (ed. Spengel) pag. 128, lin. 29.

Teil ein plötzlicher Übergang der Redeweise aus der dritten in die erste Person bildet. Wie ist aus diesem Gemenge das herauszuschälen, was Eudemus sagte, wie daraus wieder was in der Abhandlung des Hippokrates stand? Wir folgen in unserer Darstellung dem letzten Bearbeiter der Frage[1]) und verweisen für die nähere Begründung auf dessen umfangreiche Studie.

Zunächst ist von der Form zu reden. Es ist wohl nicht daran zu zweifeln, daß Eudemus, daß vor ihm Hippokrates Figuren zeichnete und an die einzelnen Punkte derselben Buchstaben schrieb. Wir haben früher gesehen, daß die Ägypter ihren Figuren teilweise die Längenmaße beischrieben, welche den Linien derselben zukamen. Wir haben darin vielleicht die Anregung gefunden, infolge deren Zahlengrößen durch Linien zur Versinnlichung gebracht wurden (S. 163). Die Ägypter gingen über diese messende Bezeichnung hinaus. Eine gewisse Allgemeinheit gab sich kund, wenn die Scheitellinie mit *merit*, die Grundlinie der Pyramide mit *uchatebt* usw. bezeichnet wurde, indem hierdurch die von Figur zu Figur unveränderliche Lage gegen die jedesmal wechselnde Länge als das wichtigere in den Vordergrund trat. Aber Punkte nun gar durch Buchstaben zu benennen, welche nicht Zahlenwerte, nicht Abkürzungen von Wörtern, welche etwa so anfingen, sein sollten, sondern nur Buchstaben als solche, damit die Möglichkeit zu geben eine Figur auch ziemlich verwickelter Art nur zu denken und doch mit dem Texte in verständlichen Einklang zu bringen: das ist eine Art von allgemeiner Symbolik, ist die bei Geometern erkennbare Vorläuferin der algebraischen Bezeichnung der Unbekannten durch einen Buchstaben, oder wenigstens durch ein Wort. Und innerhalb dieser Symbolik selbst ist ein Fortschritt nachweisbar: die älteren Geometer, wie Eudemus, wie vor ihm vermutlich Hippokrates, sprechen von einer Linie, „an welcher AB (steht)“, von einem Punkte, „an welchem K (steht)“, während es bei den Späteren, bei Euklid usw. kurzweg heißt „die Linie AB“ oder „der Punkt K“.

Ob Hippokrates der erste war, welcher die geometrischen Figuren mit zur Bezeichnung dienenden Buchstaben versah, das wissen wir nicht. Wahrscheinlich ist es uns nicht, weil Eudemus sonst vermutlich in seinem Berichte auf diese Neuerung hingewiesen haben würde. Wir neigen weit eher der Meinung zu, Hippokrates werde die geometrische Anwendung der Buchstaben von den Pythagoräern gelernt haben, denen er ja auch sein mathematisches Wissen

[1]) F. Rudio in der Bibliotheca mathematica 1902, 3. Folge III, 7—62 und in der Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang L (1905).

überhaupt verdankt haben soll. Dafür spricht, daß das Sternfünfeck, welches den Pythagoräern als Erkennungszeichen, auch wohl als Briefüberschrift diente (S. 178), an seinen Ecken die Buchstaben geführt haben soll, welche das Wort Gesundheit bildeten. So wird wenigstens allgemein die Stelle aufgefaßt, daß jene Figur Gesundheit genannt worden sei.

Bei Hippokrates bestand dagegen eine Sitte noch nicht, welche bei Euklid mit der Regelmäßigkeit eines Gesetzes herrschend geworden ist: die Sitte nämlich unter die zur Bezeichnung von Figuren benutzten Buchstaben niemals das I zu begreifen, sondern nach Θ sofort zu K überzugehen. Offenbar wollte man dadurch der leicht möglichen Verwechslung des Buchstaben I mit einem einfachen Vertikalstriche vorbeugen[1]). Der Bericht des Eudemus über Hippokrates, also wahrscheinlich auch Hippokrates selbst, übersprang das I noch nicht[2]), und auch bei der eben erwähnten pythagoräischen Bezeichnung der Ecken des Pentalpha spielt I eine Rolle.

Wir kommen nach diesen die Form betreffenden Vorbemerkungen zu dem eigentlichen Inhalte der Abhandlung des Hippokrates, dessen Verständnis wesentlich davon beeinflußt ist, wie man das in dem Berichte vorkommende Wort *τμῆμα* übersetzt, welches jedenfalls ein durch Schneiden aus dem Kreise hervorgegangenes Flächenstück bedeutet. Wie der erzeugende Schnitt beziehungsweise die erzeugenden Schnitte geführt werden, ist nicht gesagt. An und für sich kann also ebensogut das gemeint sein, was man nachmals einen Kreisabschnitt, Segment, als das, was man nachmals einen Kreisausschnitt, Sektor, nannte. Der neueste Herausgeber[3]) ist der Ansicht, man habe in früher Zeit bald das eine, bald das andere *τμῆμα* genannt, und man müsse meistens Segment als Übersetzung gelten lassen, was aber nicht ausschließe, daß in vereinzelten Fällen die Übersetzung Sektor richtig sei. Ein anderes offenbar von Hippokrates eingeführtes Wort *μηνίσκος* Mondchen (lateinisch *lunula*) bedarf kaum einer besonderen Erklärung; es ist eine Mondsichel gebildet durch zwei Kreisbögen, welche verschiedenen Kreisen angehörend nach der gleichen Richtung gekrümmt sind und mit ihren Endpunkten zusammentreffen.

Grundlage der ganzen Untersuchung ist der Satz, daß ähnliche Segmente dasselbe Verhältnis zueinander haben wie die Grundlinien in der Potenz. Ähnliche Sektoren sind nämlich solche, welche gleiche Untervielfache der betreffenden Kreise sind, und wie die Kreise selbst

[1]) Nach Professor Studemund. Vgl. Zeitschr. Math. Phys. XXI, Historisch-literarische Abteilung S. 183. [2]) Rudio l. c. S. 24. [3]) Rudio, Anmerkung 67 auf S. 41—46.

den Potenzen ihrer Durchmesser oder auch ihrer Halbmesser proportional sind, so verhält es sich auch mit ähnlichen Sektoren derselben. Der Sektor besteht aber aus einem Dreiecke und einem Segmente. Ähnlichen Sektoren entsprechen ähnliche Dreiecke, welche ebensogut den Potenzen der Halbmesser als der Grundlinien proportional sein müssen, und die ähnlichen Segmente werden wieder in dem gleichen Verhältnisse stehen müssen. Ähnliche Segmente nehmen gleiche Winkel auf, und zwar sind die aller Halbkreise Rechte und die der größeren kleiner als Rechte und die der kleineren größer als Rechte.

Wir halten einen Augenblick ein, um festzustellen, daß demnach Hippokrates mit der Gleichheit von auf demselben Bogen aufstehenden Peripheriewinkeln bekannt war.

Allein auch das von ihm benutzte Wort *δύναμις*, Vermögen, lateinisch *potentia* gibt zu Bemerkungen Anlaß. Daß aus der lateinischen Übersetzung nachmals unsere Potenzgrößen entstanden sind, liegt auf der Hand. Ursprünglich war unter *δύναμις* nur die zweite Potenz verstanden und das Vorkommen des Wortes als Kunstausdruck bei Hippokrates, den Eudemus hier wörtlich ausgenutzt haben dürfte, ist das erste nachweisbare. Später kommt das Wort sowohl in mathematischem als in nichtmathematischem Sinne ungemein häufig vor. Platon hat es benutzt[1]), Aristoteles nicht minder an unzähligen Stellen, wo auch von dem dynamischen Auftreten dieser oder jener Eigenschaft — wir sagen gewöhnlich in einer lateinischen Wortform deren virtuelles Auftreten — die Rede ist, der Kunstausdruck der einen Wissenschaft zum Kunstausdrucke einer anderen wurde. Es scheint fast, als läge in den Wörtern *δύναμις* und *τετράγωνος* ein ähnlicher Gegensatz wie in unseren Ausdrücken „zweite Potenz“ und „Quadrat“. Das eine Wort bezieht sich auf die arithmetische Entstehung als Zahl, das andere auf die geometrische Deutung als Fläche, und somit wäre bei Hippokrates von einer rechnenden Vergleichung der Kreisflächen, wie sie aus ihren Durchmessern sich ermitteln lassen, die Rede. Damit soll freilich, wie wir im 11. Kapitel sehen werden, keineswegs gesagt sein, Hippokrates habe die Proportionalität von Kreisfläche und zweiter Potenz des Durchmessers rechnend erkannt.

Das Verfahren des Hippokrates wird nun in der Weise geschildert, daß dessen erster Versuch dahin ging, die Quadratur eines Mondchen zustande zu bringen, dessen äußerer Bogen ein Halbkreis wäre (Fig. 30). Zu diesem Zweck beschrieb er um ein sowohl recht-

[1]) Platon, Theaetet pag. 147.

winkliges als gleichschenkliges Dreieck einen Halbkreis und über der Basis ein Kreissegment ähnlich denen, die von den Seiten abgeschnitten werden. Das Segment über der Basis ist gleich den beiden über den anderen Dreiecksseiten und so wird, wenn der Teil des Dreiecks, der außerhalb des über der Basis beschriebenen Segmentes liegt, beiderseits hinzugefügt ist, das Mondchen gleich dem Dreiecke sein.

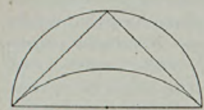

Fig. 30.

Der zweite Versuch gilt einem Mondchen, dessen äußerer Bogen größer als ein Halbkreis ist (Fig. 31). Hippokrates beschreibt in das durch den erwähnten größeren Bogen und dessen Sehne gebildete Segment ein Paralleltrapez mit drei gleichen Seiten; er bestimmt dabei, daß das Quadrat der Grundlinie so groß sein solle wie die Summe der Quadrate der drei anderen Seiten[1]). Wird alsdann über der Grundlinie ein Segment ähnlich den drei anderen gezeichnet, so ist das hierdurch entstehende Mondchen quadrierbar[2]). Daß der äußere Bogen des Mondchen größer als ein Halbkreis sei, wird von Eudemus, vielleicht schon von Hippokrates, bewiesen und zwar mit Hilfe des Satzes, daß der Winkel, welchen eine Seite des Trapezes mit einer Diagonale desselben bildet, ein spitzer Winkel sei. Diese Tatsache folgt ihm aber selbst wieder daraus, daß das Quadrat der Grundlinie des Trapezes, dessen Beziehung zu den anderen Seiten des Trapezes bekannt ist, kleiner als die Summe des Quadrates einer kleinen Trapezseite und des Quadrates einer Trapezdiagonale ist, welches selbst, weil die Diagonale einem von zwei kleinen Trapezseiten gebildeten stumpfen Winkel gegenüberliegt, größer als das doppelte Quadrat einer kleinen Trapezseite ist.

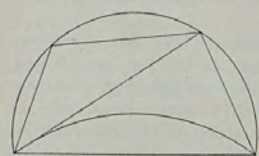

Fig. 31.

Eine sprachliche und eine sachliche Bemerkung sei hier eingeschaltet. Was hier als Diagonale übersetzt wurde, heißt bei Eudemus und auch sonst häufig Diameter. In den beiden ersten Quadrierungsversuchen ist der wichtige Satz benutzt, daß das Quadrat einer

[1]) Das tritt ein, wenn die kleine Seite $a = r\sqrt{3 - \sqrt{3}}$. Vgl. über die Mondchen des Hippokrates einen Aufsatz von Clausen (Crelles Journal XXI, 375) und Hankel 127. [2]) Das Mondchen ist, wie Simplicius beweist, gleich dem Trapeze, welches entsteht, wenn von dem großen Segmente die drei kleinen Segmente abgezogen werden, während das Mondchen durch Abziehen jenes den drei kleinen Segmenten ähnlichen Segmentes über der Grundlinie übrig bleibt.

Dreiecksseite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Dreiecksseiten, größer als diese Summe, kleiner als diese Summe ist, je nachdem ihr ein rechter, ein stumpfer, ein spitzer Winkel gegenüberliegt.

Der dritte Versuch beschäftigt sich mit einem Mondchen, dessen äußerer Bogen kleiner als ein Halbkreis ist (Fig. 32). Hippokrates verschafft sich dasselbe folgendermaßen. Um K als Mittelpunkt und mit AB als Durchmesser wird ein Halbkreis gezeichnet, ferner die Gerade $\Gamma\Delta$, welche die KB senkrecht halbiert. Von B aus wird die BZE derartig gezeichnet, daß das Quadrat des zwischen der $\Gamma\Delta$ und der Kreisperipherie liegenden Stückes ZE anderthalbmal so groß sei als das Quadrat von $K\Delta$. Von E aus wird EH parallel zu AB bis zum Durchschnitt mit der verlängerten KZ gezogen. Mittels der an Länge einander gleichen KE und BH entsteht das Trapez $EKBH$, um welches ein Kreis beschrieben wird[1]), der seinen Mittelpunkt in Δ besitzt. Auch um das Dreieck EZH wird ein Kreis beschrieben und nun ist das Mondchen gebildet, dessen innerer Bogen EZH, dessen äußerer Bogen $EKBH$ ist. Sein Flächeninhalt ist gleich dem der Summe der drei Dreiecke BZH, BZK, EKZ, sein äußerer Bogen ist kleiner als der Halbkreis. Letzteres folgt aus der Stumpfheit des Winkels EKH, der Flächeninhalt aus der Ähnlichkeit der Kreisabschnitte über EZ, ZH, EK, KB, BH in Verbindung mit der Proportion $EZ^2 : EK^2 = 3 : 2$[2]).

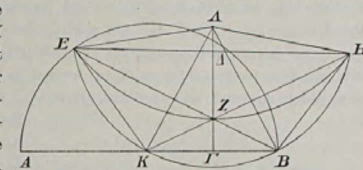

Fig. 32.

Wir möchten auf die Einzeichnung des Stückes ZE zwischen die Gerade $\Gamma\Delta$ und die Kreisperipherie AEB in vorgeschriebener Länge besonders hinweisen. Sie konnte nur empirisch erfolgen, indem man um B eine Gerade BZE in Drehung versetzte und mit dieser Drehung innehielt, sobald ZE die gewünschte Länge besaß. Das ist das erste Beispiel einer Bewegungsgeometrie, die in späteren Zeiten geradezu den Charakter einer Methode annahm[3]).

Wir gelangen zu einem vierten Versuche, bei welchem es auf die Quadrierung eines Kreises zusammen mit einem Mondchen ankam

[1]) Simplicius hat die Gleichheit von KE mit BH bewiesen und ebenso auch die Möglichkeit eines Umkreises um das Trapez $EKBH$. [2]) Auch hier hat Simplicius die notwendigen Beweise geliefert. [3]) Wöpcke, L'algèbre d'Omar Alkhayâmî (Paris 1851) pag. 120.

(Fig. 33). Um K als Mittelpunkt sind zwei Kreise mit je einem eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecke gezeichnet, die als kleiner und großer Kreis, als kleines und großes Sechseck unterschieden werden mögen. Dabei sind die Halbmesser so gewählt, daß $HK^2 = 6\,AK^2$. Augenscheinlich folgt daraus $HI^2 = 3\,HK^2 - 2\,HK^2 + 6\,AK^2$, indem HI Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen andere Kathete eine große Sechsecksseite und dessen Hypotenuse der große Durchmesser ist. Wird über HI mittels eines neugezeichneten Kreisbogens ein kleineres Kreissegment hergestellt ähnlich sowohl dem über $H\Theta$ als dem über AB, so muß es dreimal so groß wie das über $H\Theta$ sein, oder so groß wie das über $H\Theta$, das über ΘI und die sechs Segmentchen im kleinen Kreise über den kleinen Sechsecksseiten. Das Mondchen $I\Theta H$ ist aber gleich dem Dreiecke $H\Theta I$ und den Segmenten über $H\Theta$ und ΘI weniger dem kleineren Kreissegment über HI. Es ist leicht einzusehen, daß alsdann das Mondchen nebst dem kleinen Kreise dem Dreiecke $H\Theta I$ nebst dem kleinen Sechsecke flächengleich sind, wodurch die Quadratur gegeben ist.

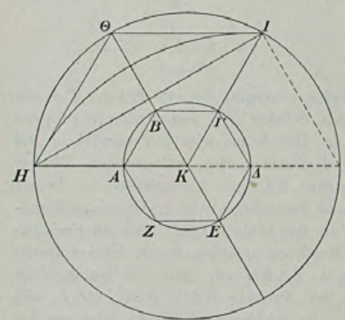

Fig. 33.

Dieses sind die vier von Hippokrates gemachten Versuche krummlinig begrenzte Figuren in ihnen flächengleiche Quadrate zu verwandeln, so wie sie von Eudemus berichtet werden, aus welchem dann später Simplicius seinen durch sachgemäße Erläuterungen ergänzten Auszug veranstaltete. Man muß sicherlich zugestehen, daß Hippokrates bei der Auswahl der von ihm untersuchten Mondchen eine weit mehr als gewöhnliche Erfindungsgabe an den Tag legte, und daß er bereits über einen achtungswerten Vorrat an geometrischem Wissen verfügte. Hat er, wie vermutet worden ist[1]), beim Niederschreiben seiner ihrem Hauptinhalte nach sicherlich ganz neuen Abhandlung die Überzeugung gewonnen, es sei an der Zeit ein Elementarlehrbuch zusammenzustellen, auf welches man für notwendige Hilfssätze sich berufen könne, oder aber hatte er, als er die Abhand-

[1]) Bretschneider 131.

lung schrieb, sein Elementarwerk (S. 201) schon veröffentlicht und deswegen sich über manches weniger ausfürlich verbreitet als es späteren Lesern und Erklärern wünschenswert erschien, das ist eine Frage, auf die wir keine endgültige Antwort zu geben vermögen.

Hippokrates beschäftigte sich, wie wir (S. 202) ankündigend bemerkten, auch noch mit einem anderen mathematischen Probleme, mit der Würfelverdoppelung. Das ist die letzte uns hier begegnende von den drei großen Aufgaben der griechischen Mathematiker, welche ihnen Gelegenheit gaben ihre Kräfte zu üben und das zu erfinden, was man die höhere Mathematik jenes Zeitraumes zu nennen berechtigt ist. Über die Geschichte der Würfelverdoppelung sind wir durch namhafte Überbleibsel aus alter Zeit ziemlich gut berichtet, und selbst der sagenhafte Anstrich des Ursprungs der Aufgabe wird im 30. Kapitel sich als erheblich ausweisen. Ein griechischer Mathematiker Eratosthenes im III. S. schrieb an Ptolemäus Euergetes den ägyptischen König einen Brief über diesen Gegenstand, der sich bei Eutokius von Askalon, einem späten Kommentator des Archimed, erhalten hat und dessen Anfang wir hier beifügen[1]). Trotzdem er ziemlich weit jenseits der gegenwärtig allein zu behandelnden Zeit hinabführt, glaubten wir doch eine Trennung des zusammengehörigen Textes nicht vornehmen zu sollen und werden lieber später, wo es nötig ist, auf dieses Kapitel hier zurückverweisen.

„Dem Könige Ptolemäus wünscht Eratosthenes Glück und Wohlsein. Von den alten Tragödiendichtern, sagt man, habe einer den Minos, wie er dem Glaukos ein Grabmal errichten ließ, und hörte, daß es auf allen Seiten 100 Fuß haben werde, sagen lassen:

Zu klein entwarfst Du mir die königliche Gruft,
Verdopple sie; des Würfels doch verfehle nicht.

Man untersuchte aber auch von seiten der Geometer, auf welche Weise man einen gegebenen Körper, ohne daß er seine Gestalt veränderte, verdoppeln könnte, und nannte die Aufgabe der Art des Würfels Verdoppelung; denn einen Würfel zugrunde legend suchte man diesen zu verdoppeln. Während nun langezeit hindurch alle ratlos waren, entdeckte zuerst der Chier Hippokrates, daß, wenn man herausbrächte

[1]) Zur Geschichte der Würfelverdoppelung vgl. N. T. Reimer, *Historia problematis de cubi duplicatione.* Göttingen 1798. J. H. Dresler, Eratosthenes von der Verdoppelung des Würfels. Osterprogramm 1828 für die herzogl. Nassauischen Pädagogien zu Dillenburg, Hadamar und Wiesbaden. Ch. H. Biering, *Historia problematis cubi duplicandi.* Kopenhagen 1844. Teilweise Neues auch an Stellenmaterial in der Dissertation von C. Blass, *De Platone mathematico.* Bonn 1861, pag. 22—30. Unsere Übersetzung des Briefes des Eratosthenes nach. Dresler l. c. S. 8—10.

zu zwei gegebenen geraden Linien, wo die größere der kleineren Doppelte wäre, zwei mittlere Proportionalen von stetigem Verhältnisse zu ziehen, der Würfel verdoppelt werden könnte; wonach er dann seine Ratlosigkeit in eine andere nicht geringere Ratlosigkeit verwandelte. Nach der Zeit, erzählt man, wären die Delier, weil sie von einer Krankheit befallen waren, einem Orakel zufolge geheißen worden einen ihrer Altäre zu verdoppeln und in dieselbe Verlegenheit geraten. Sie hätten aber die bei Platon in der Akademie gebildeten Geometer beschickt und gewünscht, sie möchten ihnen das Verlangte auffinden. Da sich nun diese mit Eifer der Sache unterzogen und zu zwei Gegebenen zwei Mittlere suchten, soll sie der Tarentiner Archytas vermittelst der Halbzylinder aufgefunden haben, Eudoxus aber vermittelst der sogenannten Bogenlinien. Es widerfuhr ihnen aber insgesamt, daß sie zwar ihre Zeichnungen mit geometrischer Evidenz nachgewiesen hatten, sie aber nicht leicht mit der Hand ausführen und zur Anwendung bringen konnten, außer etwa einigermaßen die des Menächmus, doch auch nur mühsam."

Der alte Tragiker, auf dessen Verse Eratosthenes sich beruft, ist kein anderer als Euripides, in dessen verloren gegangenem Poleidos sie vorkommen, wie sehr wahrscheinlich gemacht worden ist[1]). Da nun Euripides 485—406 lebte, seine dichterische Wirksamkeit also etwa in die gleiche Zeit fällt, in die wir die wissenschaftliche Tätigkeit des Hippokrates verlegen, so geht hieraus hervor, daß eben damals die Sage von dem Grabmale des Glaukos bekannt war. Ob damals die Sage schon alt gewesen; ob Euripides ihrer gedachte, weil die Gelehrten des Tages sich bereits mit Würfelverdoppelung beschäftigten, die Anspielung also einen gewissen Eindruck auf die feiner gebildeten Zuhörer machen mußte; ob man den entgegengesetzten Tatbestand annehmen soll, daß die Volkstümlichkeit der Verse des Euripides die Mathematiker auf die eigentümlich gestellte Aufgabe aufmerksam machte; ob wir daran erinnern dürfen, daß Euripides der Dichter selbst ein Gelehrter, daß er ein Schüler des Anaxagoras war, das alles gehört in das Bereich gewagtester Vermutung, oder wenigstens noch unerledigter Forschung. Als gesichert ist gemäß dem Berichte des Eratosthenes nur so viel zu betrachten, daß nach fruchtlosen Versuchen anderer über die Aufgabe der Würfelverdoppelung Herr zu werden, Hippokrates von Chios auf die Bemerkung fiel, daß die Aufgabe auch in anderer Gestalt sich aussprechen lasse. Findet die fortlaufende Proportion $a:x = x:y = y:b$

[1]) Valkenarius, *Diatribe de fragm. Eurip.* pag. 203. Vgl. Reimer, *De cubi duplicatione* pag. 20.

statt, so ist $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, mithin $x^4 = a^2y^2 = a^2bx$ und $x^3 = a^2b$ oder, wenn $b = 2a$, wie es bei der Würfelverdoppelung notwendig erscheint, $x^3 = 2a^3$. Die Seite des doppelten Würfels ist in der Tat die erste von zwei mittleren Proportionalen, welche zwischen der einfachen und der doppelten Seite des ursprünglichen Würfels eingeschaltet werden. Diese Erkenntnis, welche auch Proklus[1]) dem Hippokrates nachrühmt, war ein Schritt weiter auf dem richtigen Wege, aber allerdings ein verhältnismäßig kleiner Schritt. Hippokrates verwandelte nur, wie Eratosthenes in fast scherzhaftem Tone sagt, seine Ratlosigkeit in eine andere nicht geringere Ratlosigkeit. Wie sollten jene beiden mittleren Proportionalen gefunden werden? Die Männer, welche der Lösung dieser Aufgabe sich gewachsen fühlten, sind es, die uns im folgenden entgegentreten werden.

Auf ihre Gemeinschaft führt auch das Mathematikerverzeichnis uns hin, wenn es neben Hippokrates von Chios noch Theodorus von Kyrene in der Geometrie berühmt nennt. Von diesem wissen wir an geometrischen Tatsachen nur, daß er die Irrationalität der Quadratwurzeln von Zahlen zwischen 3 und 17 bewies[2]) (S. 182). Wir wissen von ihm außerdem, daß er der Schule der Pythagoräer angehörte[3]), und daß er Lehrer des Platon in mathematischen Dingen war[4]).

Platon und die Akademie nehmen jetzt, wie in der Geschichte der griechischen Philosophie, so in der Geschichte der griechischen Mathematik, die leitende Stellung ein. Mit ihnen müssen wir uns beschäftigen.

10. Kapitel.

Platon.

Zwei Kriege von schwerwiegender Bedeutung für die Gestaltung staatlicher Verhältnisse, wie für die Entwicklung der Wissenschaften wurden auf griechischem Boden innerhalb eines Menschenlebens gekämpft. Der peloponnesische Krieg, welcher die Macht Athens vernichtete, welcher den Staat des Perikles von seiner geistigen, wissenschaftlichen wie künstlerischen Höhe herabstürzte, begann 431. Der sogenannte heilige Krieg, in welchem die Thebaner durch ein kurzes Übergewicht erschöpft, König Philipp von Mazedonien zu Hilfe riefen und ihm so den ersten willkommenen Anlaß gaben in griechische Dinge sich einzumengen, endete 346. Dieselben Jahreszahlen

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 213. [2]) Platon, Theaetet 147, D. [3]) Jamblichus, *Vita Pythagor* 267. [4]) Diogenes Laertius II, 103.

begrenzen fast genau das Leben Platons. Seine Geburt fällt in das Jahr 429, in das Schreckensjahr, in welchem die durch die Schilderung des Thukydides in gräßlicher Wahrheit bekannte Pest Athen in Trauer hüllte, in welchem Perikles starb. Sein Tod erfolgte 348 an demselben Tage, an welchem er 81 Jahre früher geboren war.

In Platons Lebenszeit fallen auch zwei Künstler, deren die Geschichte der Mathematik Erwähnung tun darf: Pheidias und Polyklet, die Verfertiger des Olympischen Zeus, der Argivischen Here. Von Pheidias erzählt Lucian in dem Dialoge über die philosophischen Sekten[1]), er sei imstande gewesen aus der Klaue eines Löwen anzugeben, wie groß der ganze Löwe war, woher die griechische Redensart *ἐξ ὀνύχων λέοντα*[2]), lateinisch *ex ungue leonem* stammt, welche sich bis zu unseren Tagen erhalten hat. Von Polyklet meldet Galen[3]), er habe in einer Schrift, die Kanon überschrieben war, die Lehre von allen Verhältnissen des Körpers aufgestellt. Wer denkt dabei nicht an die vorgezeichneten Quadrate im Grabmale Seti I (S. 108), wer nicht an die Notwendigkeit einer in weite Kreise eingedrungenen Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren?

Platon gehörte einer der angesehensten athenischen Familien an. Bis auf König Kodrus führte der Stammbaum des Vaters, bis auf Solon der der Mutter zurück[4]). Platons erste Jugend fiel, wie wir wissen, in eine für Athen trübe und bewegte Zeit, aber bald lächelte das Glück der Stadt, welche es liebgewonnen, aufs neue. Die Knabenjahre Platons fallen mit der Glanzzeit des Alkibiades zusammen, und der Freund des Alkibiades, Sokrates, war Platons Lehrer. Im Verkehre mit den geistig bedeutendsten Männern seiner Vaterstadt entwickelte der Knabe sich zum Manne. Bei Sokrates insbesondere wird Platon jene Methode erlernt haben, welche als eigentlich sokratische gerühmt wird, und welche darin bestand, durch fortgesetztes Fragen immer schärfer umgrenzte Definitionen, aber auch das Eingeständnis von Widersprüchen infolge ungenügender Begriffsbestimmungen hervorzulocken. Um das Jahr 400 etwa, nachdem Sokrates den Giftbecher hatte leeren müssen, verließ Platon die Heimat, in welcher es für den nächsten Schüler des gleichviel ob gerechtem oder ungerechtem Volkshasse zum Opfer Gefallenen nicht mehr sicher war, und verwandte eine längere Reihe von Jahren zu Reisen, welche seine wissenschaftliche Ausbildung vollendeten. Nach Kyrene, wo an der Nordküste Afrikas griechische Bildung schon eine Pflanzstätte

[1]) Lucian, *Ἑρμότιμος ἢ περὶ αἱρέσεων* cap. 55 pag. 147 ed. Sommerbrodt. [2]) Diogenes Laertius V, 15. [3]) Galen, *Περὶ τῶν καθ' Ἱπποκράτην καὶ Πλάτωνα.* [4]) Diogenes Laertius III, 1.

geschaffen hatte, lockte es ihn. War doch dort die Heimat jenes Theodorus, welcher, wie wir im Theätet erfahren, bei Lebzeiten des Sokrates in Athen verweilte, und welchen wir am Schlusse des vorigen Kapitels Platons Lehrer in der Mathematik genannt haben. Ägypten sah ihn jedenfalls zu längerem Aufenthalte, wenn auch Strabons Berichterstatter sehr übertrieben haben dürften. Bei der Beschreibung der alten Priesterstadt Heliopolis in Ägypten sagt nämlich dieser geographische Schriftsteller: Hier nun zeigt man die Häuser der Priester und auch die Wohnungen des Platon und Eudoxus. Denn letzterer kam mit Platon hierher, und sie lebten daselbst mit den Priestern dreizehn Jahre zusammen, wie einige angeben.[1]) Dann wird ein großes Gewicht auf einen Aufenthalt Platons in Großgriechenland zu legen sein, wo er mit Archytas von Tarent und mit Timäus von Lokri im engsten Verkehre stand[2]). Weiter führte ihn sein Weg nach Sizilien, wo er im 40. Lebensjahre, also im Jahre 389 eintraf[3]). Diese durch ihn selbst bezeugte Zeitangabe nötigt uns auf alle Reisen bis nach Sizilien etwa 11 Jahre zu verteilen und widerlegt somit die 13jährige Dauer des Aufenthalts in Ägypten. Platons Freimütigkeit scheint bei dem Gewaltherrn von Syrakus, bei Dionysius, Anstoß erregt zu haben, so daß dieser ihn gefangen nehmen ließ und ihn als Athener dem lakedämonischen Abgesandten auslieferte, welcher ihn als Sklaven nach Ägina verkaufte. Ein Kyrenaiker zahlte das erforderliche Lösegeld, um Platon wieder frei zu machen, und nun kehrte dieser nach Athen zurück, wo er in den schattigen Spaziergängen der durch Kimon einst verschönerten Akademie nordwestlich vor der Stadt seine die Philosophie umgestaltenden Vorträge hielt, deren Bedeutung auch für die Geschichte der Mathematik nicht hoch genug angeschlagen werden kann[4]).

Eigentlich mathematische Schriften hat Platon zwar nicht verfaßt, aber einiges wird doch auf ihn als Entdecker zurückgeführt, und vielleicht noch wichtiger ist seine Vorliebe für die Mathematik dadurch geworden, daß er auf fähige Schüler sie forterbte. Platon war ja ein Schüler der Pythagoräer in vielen Dingen, in so vielen, daß Aristoteles es ausdrücklich bezeugt hat[5]), daß Asklepius zu dieser Stelle der aristotelischen Metaphysik jedenfalls übertreibend hinzufügte: nicht vieles, alles habe Platon von den Pythagoräern ent-

[1]) Strabo XVII, ed. Meinicke pag. 1124. [2]) Cicero, *De finibus* V, 19, 50. *Tusculan.* I, 17, 39. *De republica* I, 10, 15. [3]) Platons Briefe: *Epistola* VII, 324, a. [4]) Über Platon in seinen Beziehungen zur Mathematik vergl. C. Blass, *De Platone mathematico.* Bonn 1861, und B. Rothlauf, Die Mathematik zu Platons Zeiten und seine Beziehungen zu ihr. München 1878. [5]) Aristoteles, Metaphys. I, 6.

nommen. Wie nun die Pythagoräer Mathematik als den ersten Gegenstand eines wirklich wissenschaftlichen Unterrichts betrachteten, wie die Ägypter ihre Kinder zugleich mit den Buchstaben in den Anfangsgründen der Lehre von den Zahlen, von den auszumessenden Räumen und von dem Umlaufe der Gestirne unterrichteten, so wollte auch Platon verfahren haben [1]). Kein Unkundiger der Geometrie trete unter mein Dach, *μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην*, war die Ankündigung, mit welcher der angehende Akademiker empfangen wurde [2]), und Xenokrates, der nächst Speusippus als zweiter Nachfolger Platons die Akademie leitete [3]), blieb ganz in den Fußstapfen seines Lehrers, wenn er einen Jüngling, der die verlangten geometrischen Vorkenntnisse noch nicht besaß, mit den Worten zurückwies: Gehe, Du hast die Handhaben noch nicht zur Philosophie, *πορεύου λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας* [4]).

Platon war in dieser Beziehung so sehr Pythagoräer geworden, daß er den Gegensatz nicht scheute, in welchen er seinen ältesten und verehrtesten Lehrer Sokrates scheinbar zu sich selbst setzte. Sokrates, wie Xenophon in seinen Erinnerungen ihn schildert [5]), wollte die Geometrie nur so weit getrieben wissen, bis man Land mit dem Maßstabe in Besitz nehmen oder übergeben könne. Der Sokrates in Platons Dialogen, dem dieser stets die Gesinnungen in den Mund zu legen liebt, die ihn selbst erfüllen, erklärt dagegen [6]), daß die ganze Wissenschaft doch nur der Erkenntnis wegen betrieben werde. Es ist bekanntlich, sagt er auch, in bezug auf jedes Lernen, um besser aufzufassen, ein himmelhoher Unterschied zwischen einem, der sich mit Geometrie befaßt hat, und dem, der es nicht getan hat.

Wir verzichten darauf alle Stellen zu sammeln, an welchen Plato ähnliche Gesinnungen über die Mathematik äußert, und zu welchen auch der Ausspruch (S. 184) gehört, daß Gott allezeit geometrisch verfahre, nur eine Bemerkung über das Wort Mathematik wollen wir hier einschalten. Von einer Wissenschaft der Mathematik wußte Platon so wenig wie seine Zeitgenossen [7]). Wohl besaßen sie das Wort *μαθήματα* (Lehrgegenstände), aber es umfaßte alles, was im wissenschaftlichen Unterrichte vorkam. Erst bei den Peripatetikern bekam das allgemeine Wort die besondere Bedeutung, welche wir ihm gegenwärtig noch beilegen und umfaßte fortan Rechenkunst und Arithmetik, Geometrie der Ebene und Stereometrie, Musik und Astro-

[1]) Die bezüglichen Stellen aus Platons Staat vergl. bei Rothlauf l. c. S. 12. [2]) Tzetzes, Chil. VIII, 972. [3]) Diogenes Laertius I, 14. [4]) Diogenes Laertius IV, 10. [5]) Xenophon, Memorabil. IV, 7 und ihm folgend Diogenes Laertius II, 32. [6]) Die Stellen aus Platons Staat bei Rothlauf S. 2 und 7. [7]) Rothlauf S. 18—19.

nomie, während zugleich auch der Name der Philosophie, welcher für Platon erst die wörtliche Bedeutung der Weisheitsliebe besaß, einer besonderen Wissenschaft zuerteilt wurde.

Die Vorliebe Platons für mathematische Dinge äußert sich neben den schon berührten Vorschriften über Jugenderziehung in seinem idealen Staatswesen, wo ein Schulzwang innerhalb der einfachsten Lehrgegenstände obwalten, wo Lesen, Schreiben und Rechnen allen Mädchen wie Knaben beigebracht werden soll [1]), auch darin, daß er in vielen seiner in Gesprächsform geschriebenen Abhandlungen mathematische Beispiele zur Verdeutlichung philosophischer Gedanken benutzt. Meistens sind diese Beispiele für Laien berechnet und darum laienhaft einfach, so daß dieselben kaum ein Recht haben in einer Geschichte der Mathematik aufzutreten. Wir machen eine Ausnahme zugunsten der früher geradezu berüchtigten Kapitel des Menon [2]). Nicht als ob es sich mit deren Inhalt anders verhielte, aber weil wir früher (S. 185) auf diese Kapitel uns berufen haben. Sie blieben den Erklärern platonischer Gespräche solange unverstanden, als man in ihnen wunder welche tiefsinnige Dinge suchte. Sie wurden kinderleicht und klar, sobald der Wortlaut mit den Figuren in Zusammenhang gebracht wurde, welche zwar in den Handschriften wie in den Druckausgaben fehlen, von welchen man aber dem Texte gemäß annehmen muß, daß sie im Laufe des Gespräches in den Sand gezeichnet worden waren. Diese Figuren dürften zwei an der Zahl gewesen sein, ein einfacher Kreis und eine einigermaßen zusammengesetzte Vereinigung mehrerer geradliniger Figuren in eine einzige (Fig. 34), die wir uns als nach und nach entstehend zu denken haben. Den Kreis zeichnet Sokrates, um als Beispiel des Runden zu dienen, welches eine Figur, aber nicht die Figur überhaupt sei [3]). Im weiteren Verlaufe des Gespräches [4]) zeichnet Sokrates, die leitende Persönlichkeit der Abhandlung, ein Quadrat von der Seitenlänge 2 mit seinen Mittellinien, welche die Mittelpunkte je gegenüberstehender Seiten verbinden. Er erweitert die Figur zur vierfachen Größe, d. h. zum Quadrat mit

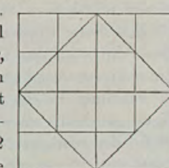
Fig. 34.

[1]) Platon, Gesetze pag. 805. [2]) Vergl. Benecke, Ueber die geometrische Hypothesis in Platons Menon. Elbing 1867 und unsere Besprechung Zeitschr. Math. Phys. XIII, Literaturzeitung 9—13. Friedleins Programm von 1873: Beiträge zur Geschichte der Mathematik III pflichtet im ganzen denselben Ansichten bei. Rothlauf S. 64 huldigt, trotzdem er Beneckes Programm kennt, einer künstlichen, wie wir überzeugt sind, falschen Meinung. [3]) Platon, Menon 73 E. [4]) Platon, Menon 82 B bis 85 B.

der Seitenlänge 4, und innerhalb dieses großen Quadrates zum Quadrat mit der Seitenlänge 3, das aus neun Feldern besteht; endlich zeichnet er das Quadrat von der Fläche 8, dessen Seiten die Diagonalen, oder, wie die Sophisten und mit ihnen Platon immer sagten, die Diameter der vier kleineren Quadrate sind, in welche das größte Quadrat von der Seitenlänge 4 zerfällt. Dieses schrägliegende Quadrat von der Fläche 8 ist doppelt so groß, als das ursprünglich gegebene Quadrat von der Fläche 4, und es kam Platon gerade darauf an zu zeigen, daß ein solches Quadrat von doppelter Größe als ein gegebenes genau und leicht gezeichnet werden könne. Es war, wie ganz richtig bemerkt worden ist[1]), der Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes für den Fall des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, der hier geliefert wurde, möglicherweise, wie wir (S. 185) andeuteten, der älteste von Pythagoras selbst herrührende Beweis dieses ersten und einfachsten Falles, vorausgesetzt daß wirklich beim Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes ursprünglich verschiedene Fälle unterschieden wurden. Nachdem mit dieser ersten und zweiten geometrischen Exemplifikation vollständig abgeschlossen ist, kehrt Sokrates an einer späteren Stelle[2]) wieder zur Geometrie zurück, um ihr ein passendes in die Sinne fallendes Beispiel für die eben zwischen ihm und Menon erörterte Frage, ob Tugend lehrbar sei oder nicht, zu entnehmen. Er will erörtern, daß das Tunliche im allgemeinen sich selten behaupten lasse, daß es Fälle der Möglichkeit wie der Unmöglichkeit gebe. Er will ein recht zutreffendes Beispiel dafür wählen, und da bleibt sein ringsum suchendes Auge an den im Sande noch erkennbaren Figuren haften. Ist es, fragt er, möglich dieses Quadrat als gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck in diesen Kreis auf dem Durchmesser als Grundlinie genau einzuzeichnen? Unter diesem Quadrate versteht er das von der Seitenlänge 2, dessen Verwandlung in ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck aus der Figur gleichfalls zu erkennen war, wo das gewünschte Dreieck als Hälfte des schräggezeichneten Quadrates erscheint. Sokrates hat die Frage gestellt, er gibt auch die Antwort. Sie lautet ja und nein! Es wird möglich sein, das Verlangte zu tun, wenn die Seite des Quadrates dem Kreishalbmesser gleich ist, oder, was dasselbe heißt, wenn sie auf dem Durchmesser aufgetragen ein ihr gleiches Stück übrig läßt, sonst nicht. Der Wortlaut ist freilich ein einigermaßen

[1]) Rothlauf S. 61. Es ist nicht ohne Interesse, daß auch Leibniz den gleichen Beweis verwertet hat, um den algebraischen Zusammenhang zwischen der Seite und der Diagonale eines Quadrates zu erörtern. Vgl. dessen *Nova algebrae promotio* in der durch C. J. Gerhardt besorgten Ausgabe der mathematischen Schriften von Leibniz VII, 155 (Halle 1863). [2]) Platon, Menon 86.

dunkler, aber auch seine philologische Übereinstimmung mit diesem hier frei erläuterten Sinne hat nachgewiesen werden können.

Die Stelle des Menon ihrer einstigen Schwierigkeit entkleidet enthält freilich nicht mehr den Beweis, daß Platon mit dieser oder jener feinen geometrischen Theorie bekannt war, aber sie enthüllt uns noch immer einen ungemein wichtigen methodischen Fortschritt[1]), der um diese Zeit sich vollzog. Sokrates leitet die letzte Auseinandersetzung durch die Worte ein: „Unter der Untersuchung von einer Voraussetzung aus verstehe ich das Verfahren, welches die Geometer oft im Auge haben; wenn sie jemand fragt, z. B. über eine Fläche, ob in diesen Kreis die Fläche als Dreieck eingezeichnet werden könne usw." Es war mithin damals schon oft von Geometern geschehen, was, wie wir im vorigen Kapitel (S. 208) sahen, Hippokrates von Chios noch unterließ. Es war die Frage aufgeworfen worden, ob eine Konstruktion möglich sei oder nicht.

In der Akademie unter Platons Leitung wurden sicherlich diese und ähnliche Fragen erörtert[2]). Die Philosophie der Mathematik ist in der Akademie entstanden, wenn ihre Wurzeln auch schon aus den Lehren des Sokrates Nahrung sogen. So führte nach Berichten bei Aristoteles, aber auch nach bestimmt nachweisbaren platonischen Stellen Platon geometrische Definitionen ein, welche in dem von ihm gebrauchten Wortlaut ein Alter von mehr als zwei Jahrtausenden erreicht haben. Die Figur ist die Grenze des Körpers, heißt es im Menon[3]). Gerade ist doch, wessen Mitte dem beiderseitigen Äußersten im Wege ist, heißt es im Parmenides[4]), und ebenda wird der Kreis definiert: rund ist doch wohl das, dessen äußerste Teile nach allen Seiten hin gleichweit von der Mitte abstehen. Der Punkt sei die Grenze der Linie, die Linie die Grenze der Fläche, die Fläche die Grenze des Körpers genannt worden, sagt uns Aristoteles; der Körper sei das, was drei Ausdehnungen besitze; die Linie sei Länge ohne Breite. Daß auch Grundsätze, wie der häufig bei Aristoteles erwähnte, daß Gleiches von Gleichem abgezogen Gleiches übrig lasse, schon der Akademie angehört haben werden, ist nicht in Zweifel zu ziehen. Wohl aber dürfte es in ähnlicher Weise wie bei

[1]) Blass in seiner Dissertation *De Platone mathematico* pag. 20 scheint zuerst die große methodische Bedeutung der Stelle Menon 86 erkannt zu haben. [2]) Zusammenstellungen bei Friedlein, Beiträge zur Geschichte der Mathematik III, S. 9 flgg., bei Hankel S. 135—136, bei Rothlauf S. 51, von denen jede irgend etwas eigentümlich hat, was in den anderen fehlt. [3]) Platon, Menon 76. [4]) Platon, Parmenides 137 E. Wie diese Stelle zu verstehen sei, kann man bei Proklus (ed. Friedlein) pag. 109 lin. 21 bis pag. 110 lin. 4 nachlesen. Vgl. Majers Programm des Kön. Gymnasiums in Stuttgart für 1880—81, S. 14.

den Pythagoräern schwer sein, innerhalb der Akademie eine Sonderung des geistigen Besitzes von Platon und seinen Schülern vorzunehmen, zu ermitteln, was von den Definitionen, von den Grundsätzen dem einen, was den anderen angehört.

Auf dem Gebiete mathematischer Methodik ist es noch eine einen gewaltigen Fortschritt eröffnende Erfindung, welche Platon zugeschrieben wird: die Erfindung der **analytischen Methode**. Wir haben darüber eine ganz kurze Notiz des Diogenes Laertius: Platon führte zuerst die analytische Methode der Untersuchung für Leodamas von Tasos ein[1]), und eine ausführlichere des Proklus: Es werden auch Methoden angeführt, von denen die beste die analytische ist, die das Gesuchte auf ein bereits zugestandenes Prinzip zurückführt. Diese soll Platon dem Leodamas mitgeteilt haben, der dadurch zu vielen geometrischen Entdeckungen soll hingeleitet worden sein. Die zweite Methode ist die trennende, die, indem sie den vorgelegten Gegenstand in seine einzelnen Teile zerlegt, dem Beweise durch Entfernung alles der Konstruktion der Aufgabe Fremdartigen einen festen Ausgangspunkt gewährt; auch diese rühmte Platon sehr als eine für alle Wissenschaften förderliche. Die dritte Methode ist die der Zurückführung auf das Unmögliche, welche nicht das zu Findende selbst beweist, sondern das Gegenteil desselben bestreitet und so die Wahrheit auf Seite des mit der Behauptung Übereinstimmenden findet[2]). Endlich gehören hierher die beiden bei Euklid erhaltenen Definitionen: Analysis ist die Annahme des Gesuchten als zugestanden durch Folgerungen bis zu einem als wahr Zugestandenen. Synthesis ist die Annahme des Zugestandenen durch Folgerungen bis zu dem Erschließen und Wahrnehmen des Gesuchten[3]) und die dem Sinne nach damit übereinstimmenden im Wortlaute viel ausführlicheren Erörterungen des Pappus[4]).

Die Sache verhält sich folgendermaßen[5]). Soll die Wahrheit eines Satzes D bewiesen oder widerlegt werden — beides kann man verlangen — so sagt der Analytiker: Wenn D stattfindet ist C wahr; wenn C stattfindet ist B wahr; wenn B stattfindet ist A wahr; aus D folgt also endlich A; nun ist A wahr oder nicht wahr, also ist

---

[1]) Diogenes Laertius III, 24. [2]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 211, lin. 18—pag. 212, lin. 4. A. Sturm in der Bibliotheca Mathematica 1903, 3. Folge II, 283. [3]) Euklid XIII, 1. Anmerkung. [4]) Pappus, VII Praefatio (ed. Hultsch) pag. 634 flgg. [5]) Hübsche Entwicklungen über die analytische Methode der Alten bei Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik. Ulm 1860. Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.* Paris 1865—1866. Besonders T. I, chap. 10. *De l'analyse et de la synthèse chez les anciens.* Hankel 137—150.

auch D wahr oder ist es nicht. Der Synthetiker dagegen beginnt mit der Behauptung der Wahrheit von A, welche ihm auf irgend eine Weise bekannt ist. Daran knüpft er die Folgerung, es werde B stattfinden, folglich sei auch C wahr, und folglich sei D wahr — oder möglicherweise ein Satz, der das Gegenteil von D bezeichnet, und den man deshalb Nicht-D zu nennen pflegt. Es ist einleuchtend, daß **der synthetische Beweis unter allen Umständen richtig ist, der analytische aber nicht.** Zur Richtigkeit desselben gehört nämlich, daß die in dem analytischen Beweise aufgestellten gleichzeitigen Wahrheiten auch in umgekehrter Reihenfolge sich gegenseitig bedingen, mathematisch ausgedrückt, daß man lauter umkehrbare Sätze aussprach. Von der Notwendigkeit diese Umkehrbarkeit selbst zu erweisen ist man nur in einem Falle befreit, wenn nämlich das aus D geschlossene A nicht wahr ist. Dann freilich kann D nun und nimmermehr stattfinden. Das heißt: die Beweisform der Zurückführung auf das Unmögliche ist eine immer gestattete Unterart des analytischen Beweises; der direkte analytische Beweis dagegen erfordert stets eine Ergänzung, welche rückwärts gehend die Sätze synthetisch auseinander ableitet, deren Behauptungen die vorausgehende analytische Methode kennen lehrte. Aus diesen Betrachtungen gehen nun mehrere Folgerungen hervor.

Erstlich die, daß die analytische Methode, vermöge der Notwendigkeit ihr, falls sie direkt zu Werke ging, eine Synthese folgen zu lassen, weniger für die Beweisführung von Sätzen, dagegen vortrefflich für die Auflösung von Aufgaben sich eignet, bei welchen die analytisch gefundene Auflösung meistens die notwendige Voraussetzung zur Entdeckung ihres synthetischen Beweises bildet, und in der Tat spielt die Analysis ihre Hauptrolle in dem sogenannten **aufgelösten Orte**, d. h. bei Aufgaben, die einen geometrischen Ort oder eine Aufeinanderfolge von Punkten betreffen, deren jeder sich einer gewissen Eigenschaft erfreut, welche ihrerseits keinem anderen Punkte außerhalb des Ortes zukommt.

Zweitens scheint die indirekte Methode der Zurückführung auf das Unmögliche, die sogenannte **apagogische Beweisführung**[1]) wegen ihrer unbedingten Gültigkeit vorzuziehen. In der Tat haben die Alten sich derselben wenn auch nicht gerade überwiegend doch viel häufiger als die modernen Geometer bedient. Namentlich bei den Sätzen, in welchen eine sogenannte **Exhaustion** vorgenommen wird, wo also der Grenzbegriff das unmittelbare Erreichen des Zieles ausschließt und nur die synthetische Hypothese des Unendlichkleinen

---

[1]) *ἀπαγωγὴ εἰς ἀδύνατον*, lateinisch *reductio ad absurdum* oder *demonstratio e contrario.*

als Ersatz zu dienen vermag, wird man bei griechischen Schriftstellern stets Beweisen aus dem Gegenteil begegnen. Wir haben zugleich angedeutet, daß in neuerer Zeit die indirekten Beweise nicht beliebt sind. Der Grund liegt darin, daß bei aller zwingenden Strenge für den Verstand der indirekte Beweis der Einbildungskraft keine vollständige Befriedigung zu gewähren pflegt. Ungezügelt umherschweifend sucht sie noch immer dritte Fälle ausfindig zu machen, welche neben der Existenz von Nicht-D eine Koexistenz von D zulassen, und nur schwer gibt sie sich gefangen, daß wirklich die Einteilungsteile des Einteilungsganzen vollständig erschöpft wurden, daß wirklich zwei sich ausschließende Tatsachen vorliegen, die nicht gleichzeitig gesetzt werden können.

Drittens liegt, wie wir gesehen haben, jedem Beweise, werde er analytisch oder synthetisch, direkt oder indirekt geführt, die Wahrheit eines gewissen Satzes A zugrunde, deren man sich versichert halten muß. In vielen Fällen wird dieses A Ergebnis früherer Lehrsätze und gehörigen Ortes streng erwiesen sein. Allein immer ist dieses nicht der Fall und kann es nicht der Fall sein, da eine unendliche Kette von Rückschlüssen nicht denkbar ist. Irgend einmal muß man stehen bleiben und eine Grundwahrheit als von selbst einleuchtend oder erfahrungsmäßig gegeben zum Ausgangspunkte der Beweisführung annehmen. Wer also wie Platon auf das Wesen der Beweisführung selbst einging, mußte auf dem Wege dieser Untersuchung das tun, was wir oben von Platon berichtet haben. Er mußte Definitionen geben, welche der unendlichen Spaltung der Begriffe zugunsten einfacher Begriffe ein Ziel setzten; er mußte auch Axiome, Grundsätze und Annahmen, anerkennen, welche man nicht weiter beweist, sei es daß sie als von unmittelbarer Gewißheit nicht mehr bewiesen zu werden brauchen, oder daß sie nicht bewiesen werden können.

Wir kehren von dieser das Wesen antiker geometrischer Beweisführung berührender Auseinandersetzung, zu welcher die mathematischen Kapitel im Menon uns fast mehr Gelegenheit als Veranlassung boten zu einer anderen Schrift Platons und einer nicht minder übelberüchtigten Stelle derselben zurück. Wir meinen den Anfang des VIII. Buches vom Staate[1]). Auch diese Stelle hat eine ganze Literatur hervorgerufen[2]), welche jedoch unserem Gefühle

[1]) Platon, Staat 546 B, C. [2]) Vgl. Th. Henri Martin, *Le nombre nuptial et le nombre parfait de Platon* im XIII. Bande der *Revue archéologique* und Rothlauf S. 29 flgg. Bei Martin insbesondere finden sich zahlreiche Verweisungen auf ältere Abhandlungen. Seitdem sind noch zahlreiche Arbeiten von Adam, Demme, Dupuis, Gow, Hultsch, Tannery veröffentlicht worden.

nach noch nicht vermochte, die Schwierigkeiten der sehr dunkeln Anspielungen, in welchen Platon sich hier gefällt, endgültig zu lösen. Gehen doch die Ansichten so weit auseinander, daß nicht bloß über den Sinn der sogen. platonischen Zahl, sondern über ihre Größe selbst ein Einverständnis nicht herrscht. Nur ein wie beiläufig eingeschalteter kleiner Satz dieser Stelle gibt uns Anlaß zu einer, wie wir glauben, geschichtlich wichtigen Bemerkung. Es ist unserer Meinung nach von der Länge der Diagonale des Quadrates über der Seite 5 die Rede, welche rational ausfalle, wenn 1 fehle, irrational wenn 2 fehlen[1]), und wir können das nicht anders verstehen, als daß jene Diagonale oder $\sqrt{50}$ in den rationalen Wert 7 übergehe, wenn die Zahl 50 um 1 verringert werde, dagegen irrational $\sqrt{48}$ bleibe, wenn man 2 von den 50 abziehe. Wir haben, wo von der Entdeckung des Irrationalen durch Pythagoras (S. 181) die Rede war, hervorgehoben, man werde wohl Versuche angestellt haben, die Diagonale eines Quadrates dadurch aussprechbar, also rational, zu machen, daß man andere und andere Seitenlängen wählte, man werde so zwar das wirklich angestrebte Ziel natürlich nicht erreicht, aber doch Näherungswerte von $\sqrt{2}$ gefunden haben. Die eben angeführte platonische Stelle bringt uns diesen Gegenstand ins Gedächtnis zurück. — Wir möchten einschalten, daß von Architekten bei Nachmessungen an den Bauwerken der Akropolis das häufige Vorkommen der Verhältnisse $1:3$ sowie $7:12$ und $7^2:12^2$ bemerkt worden ist[2]). Uns scheint das letztere dem ersten als gleichwertig gedacht worden zu sein, so daß $\frac{12}{7}$ einen Näherungswert von $\sqrt{3}$ darstellte, und Platon, meinen wir, hat auch gewußt, daß $\sqrt{50}$ oder $5\sqrt{2}$ nur wenig von 7 sich unterscheidet. Ist er so weit gegangen in der Praxis des Rechnens $\sqrt{2}$ annähernd gleich $\frac{7}{5}$ zu setzen? Darüber fehlt uns die Sicherheit, aber das steht fest, daß jenes Bewußtsein bei Platonikern und deren Schülern sich fortwährend erhalten hat. Proklus sagt uns ausdrücklich, es gebe keine Quadratzahl, welche das Doppelte einer Quadratzahl anders als nahezu sei; so sei das Quadrat von 7 das Doppelte des Quadrates von 5, an welchem nur 1 fehle[3]). Es wird uns später gelingen, den Näherungswert $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ noch bestimmter nachzuweisen und damit die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, daß die Nutzbarmachung jener bei Platon nachgewiesenen Kenntnis in der Tat statt-

[1]) *ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀῤῥήτων δὲ δυεῖν.* [2]) Hultsch in Fleckeisen u. Masius, Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik Bd. 123, S. 586—587. [3]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 427, lin. 21—24.

gefunden habe. Daß nämlich Platon sich mit rationalen und mit irrationalen Quadratwurzeln überhaupt beschäftigt hat, geht aus einer anderen Nachricht hervor, von der jetzt die Rede sein soll.

Heron von Alexandria[1]) und ebenso auch Proklus[2]) teilen uns eine Methode zur Auffindung rationaler rechtwinkliger Dreiecke mit, welche sie ausdrücklich als Erfindung des Platon bezeichnen, und wenn auch eine unter dem gefälschten Namen des Boethius umlaufende Geometrie von dieser Angabe abweichend einen Architas als Erfinder nennt[3]), so tragen wir doch kein Bedenken, dem älteren griechischen Berichterstatter den Vorzug der Glaubwürdigkeit vor dem jüngeren Schriftsteller zu gewähren. Schon Pythagoras fand, wie wir uns erinnern (S. 185), rationale rechtwinklige Dreiecke, indem er wohl davon ausging, den Unterschied zwischen der Hypotenuse a und der größeren Kathete b der Einheit gleich zu setzen, wodurch er genötigt war die Summe der Hypotenuse und derselben Kathete in Form einer sonst beliebigen ungeraden Quadratzahl zu wählen. War solches in der Tat der Weg, auf welchem Pythagoras zu seinen Werten gelangte, so mußte ein nächster Versuch jene Differenz $a - b = 2$ setzen, und die ihr ähnliche Flächenzahl $a + b$ mußte dann das Doppelte einer Quadratzahl oder $2\alpha^2$ sein, beziehungsweise die Hälfte einer geraden Quadratzahl $\frac{(2\alpha)^2}{2}$. Dann wurde von selbst $c = 2\alpha$, $b = \alpha^2 - 1$, $a = \alpha^2 + 1$, und genau so verfuhr Platon. Proklus sagt uns mit einer Deutlichkeit, die nichts zu wünschen übrig läßt: Platons Methode geht von der geraden Zahl aus; man nimmt nämlich eine gerade Zahl an und setzt sie gleich einer der beiden Katheten; wird diese halbiert, die Hälfte quadriert und zu diesem Quadrate die Einheit addiert, so ergibt sich die Hypotenuse; wird aber die Einheit vom Quadrate subtrahiert, so erhält man die andere Kathete.

So dienen beide Methoden, die des Pythagoras und die des Platon, einander zur Ergänzung und rechtfertigen gegenseitig die Vermutungen, welche wir darüber aussprachen, wie man dieselben gefunden haben mag. Platon erscheint uns dabei nicht sowohl erfindungsreich, als daß er vorher betretene Wege umsichtig zu gehen wußte. Er muß jedenfalls auf der Höhe des mathematischen Wissens seiner Zeit gestanden haben, mag ihn im mathematischen Können dieser oder jener übertroffen haben. Seine für die damalige Zeit große mathematische Gelehrsamkeit wird durch alles, was wir von ihm wissen, bestätigt. Wir erinnern uns des reichen für die Ge-

[1]) Heron (ed. Hultsch) *Geometria* pag. 57. [2]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 428. [3]) Boethius (ed. Friedlein) *Geometria* pag. 408.

schichte der Mathematik bei den Pythagoräern von uns ausgenutzten Inhaltes des platonischen Timäus. Die Zusammensetzung regelmäßiger ebener Figuren aus rechtwinkligen Dreiecken, die Bildung der fünf regelmäßigen Körper waren ihm bekannt. Wenn auch Pappus diese letzteren geradezu als solche bezeichnet, von denen bei Platon die Rede sei[1]), so wissen wir doch, daß Platon keineswegs der Erfinder war. Die eigentliche Stereometrie scheint übrigens, trotz der Kenntnis der regelmäßigen Körper, damals noch recht im argen gelegen zu haben. „Hinsichtlich der Messungen von allem, was Länge, Breite und Tiefe hat, legen die Griechen eine in allen Menschen von Natur vorhandene ebenso lächerliche als schmähliche Unwissenheit an den Tag“, sagt Platon[2]) und fährt in wenig gewählter Ausdrucksweise fort, es sei in dieser Beziehung bestellt „nicht wie es Menschen, sondern wie es Schweinen geziemt, und ich schämte mich daher nicht bloß über mich selbst, sondern für alle Griechen“. Am weitesten entwickelt war die Arithmetik. Daß Platon über die Proportionenlehre, über die Begriffe von Flächenzahlen und Körperzahlen Herr war, wissen wir aus dem Timäus. Wir erinnern uns auch, daß (S. 165) ein besonderer Fall der pythagoräischen Sätze über geometrische Mittel zwischen Flächenzahlen und zwischen Körperzahlen als platonisch genannt wird[3]). Wir können noch zwei andere Stellen platonischer Schriften anführen, welche für seine Kenntnisse in der Arithmetik von Wichtigkeit sind. Im Phädon sagt Platon, die ganze eine Hälfte der Zahlen sei gerad, die andere sei ungerad[4]). In den Gesetzen weiß er, daß die Zahl 5040 durch 59 verschiedene Zahlen teilbar ist, unter welchen sämtliche Zahlen von 1 bis 10 sich befinden[5]). Das sind in der Tat ganz anständige Kenntnisse, wenn wir auch natürlich annehmen, daß die Teiler von 5040 empirisch gefunden und gezählt wurden. Vielleicht kann das Aufsuchen der Teiler doch in Zusammenhang mit einer Bekanntschaft mit befreundeten und mit vollkommenen Zahlen gedeutet werden müssen, wenn wir auch (S. 168) uns sträubten, diese in so frühe Zeit zu verlegen. Aber wie kam man dazu, die Zahl 5040, das Produkt der aufeinander folgenden Zahlen von 1 bis 7, zur Untersuchung zu wählen? Auf diese Frage wissen wir keine Antwort.

Eine Erfindung Platons wird uns berichtet, welche ihm als Geometer alle Ehre macht, und welche somit den ersten Teil dessen, was das Mathematikerverzeichnis von Platon zu sagen weiß, ebenso

[1]) Pappus V, 19 (ed. Hultsch) pag. 352. [2]) Platon, Gesetze pag. 805. [3]) Nicomachus, Eisagoge arithm. II, 24, 6 (ed. Hoche) pag. 129. [4]) Platon, Phaedon pag. 104. [5]) Platon, Gesetze pag. 737.

voll bestätigt, wie der zweite Teil jener Charakteristik in unserer seitherigen Darstellung zur Geltung kam. Wir müssen nachholend diese Schilderung hier einschalten.

„Platon, der auf diese (Hippokrates und Theodorus) folgte, verschaffte sowohl den anderen Wissenschaften als auch der Geometrie einen sehr bedeutenden Zuwachs durch den großen Fleiß, den er bekanntlich auf sie verwandte. Seine Schriften füllte er stark mit mathematischen Betrachtungen und hob überall hervor, was von der Geometrie sich in bemerkenswerter Weise an die Philosophie anschließt.“

Vielleicht ist unter dem bedeutenden Zuwachse, der durch Platons Fleiß der Geometrie verschafft wurde, seine Auflösung der Aufgabe von der Würfelverdoppelung verstanden, welcher wir uns hiermit zuwenden. Freilich steht es schlimm mit derselben, wenn die Meinung derer sich als richtig erweisen sollte, welche den ganzen darüber uns zugekommenen Bericht anzweifeln. Wir wollen die schwerwiegenden Bedenken derselben nachträglich erörtern und fürs erste dem Berichte selbst hier einen Platz einräumen.

Eutokius von Askalon hat im VI. S. einen Kommentar zu des Archimed Schrift über Kugel und Zylinder verfaßt und in diesen Kommentar sehr wichtige Mitteilungen über die Aufgabe der Würfelverdoppelung eingeflochten. Dorther kennen wir den Brief des Eratosthenes über jenes Problem (S. 211), dorther eine ganze Anzahl von untereinander verschiedenen Auflösungen, darunter solche von Platon, von Menächmus, von Archytas. Die Auflösung des Archytas hat Eutokius dem Eudemus entnommen, und bei der unbedingten Zuverlässigkeit dieses Gewährsmannes ist an der Genauigkeit des Berichtes nie der leiseste Zweifel erhoben worden. Woher stammen die übrigen Auflösungen? Eutokius sagt es uns nicht, aber er leitet den ganzen Bericht damit ein, er wolle die Gedanken der Männer, welche auf uns gekommen sind, ersichtlich machen. Sollte in Zusammenhang mit dieser Erklärung sein Schweigen nicht beredt genug sein? Sollte es nicht zu verstehen geben, daß, wo eine zweite Quelle nicht genannt wurde, die Originalschriften selbst von Eutokius benutzt wurden, oder doch solche, welche er für die Originalschriften hielt? Sollte der Umstand, daß die Auflösungen als solche richtig sind und somit die Unverletztheit des Gehaltes der Schriften, von welchen Eutokius Gebrauch machte, verbürgen, nicht auch bei Prüfung der Richtigkeit der Namen, unter welchen die Auflösungen mitgeteilt sind, von Gewicht sein? Unter den von Eutokius mitgeteilten Auflösungen steht die Platons an der Spitze, mutmaßlich wegen der großen Berühmtheit des Verfassers. Jedenfalls ist eine

Zeitfolge der Auflösungen aus der Anordnung, in welcher sie bei Eutokius erscheinen, in keiner Weise zu entnehmen. Sie sind vielmehr bunt durcheinander gewürfelt, und um nur solche Männer zu nennen, deren Zeitalter durch Jahrhunderte getrennt liegen, bei denen also ein Zweifel unmöglich ist, kommt Heron vor Apollonius, Pappus vor Menächmus zu stehen.

Das Verfahren des Platon[1]) beruht auf einer Vorrichtung, welche sich (Figur 35) als Rechteck $A\Delta EZ$ mit zwei festen und zwei in paralleler Lage verschiebbaren Seiten $E\Delta$ und $A\Delta$ bezeichnen läßt. Mittels gehöriger Verschiebung der beweglichen Seiten nebst entsprechender Drehung der ganzen Vorrichtung soll unter vorheriger Annahme der Länge von zwei zueinander senkrechten Linien $AB = b$, $B\Gamma = a$ folgendes bewirkt werden: A soll in den Durchschnitt der festen ZA mit der beweglichen $A\Delta$, Γ auf die zweite feste Seite ZE, zugleich der Eckpunkt E des Rechtecks auf die Verlängerung von AB und endlich der zweite Durchschnittspunkt der beweglichen $A\Delta$ mit der beweglichen $E\Delta$ auf die Verlängerung von ΓB fallen. Nennen wir nun $BE = x$, $B\Delta = y$, so ist im rechtwinkligen Dreiecke $\Gamma\Delta E$ die BE senkrecht aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt, und die gleiche Rolle spielt die $B\Delta$ im rechtwinkligen Dreiecke $A\Delta E$. Folglich ist $a : x = x : y$ und $x : y = y : b$. Mithin sind x und y die beiden mittleren Proportionalen, welche zwischen a und b eingeschaltet werden mußten, $x = a \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ und unter der Voraussetzung $b = 2a$ endlich $x = a\sqrt[3]{2}$.

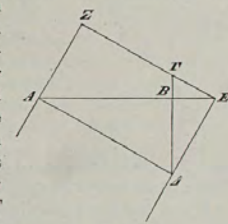

Fig. 35.

Wir bemerken[2]), daß dieses Verfahren, sofern es von Platon herrührt, uns ein Zeugnis dafür ist, daß damals griechische Geometer den Satz kannten, daß die Senkrechte aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks das geometrische Mittel zwischen den Stücken ist, in welche sie die Hypotenuse zerlegt. Wir bemerken ferner, daß hier ein Beispiel einer Bewegungsgeometrie vorliegt (S. 209).

Wir stellen neben dieses Verfahren sofort dasjenige, welches Eutokius uns nach Eudemus von Archytas berichtet[3]). Es stimmt,

---

[1]) Archimedis Opera ed. Heiberg. Leipzig 1880—81. III, 66 sqq.
[2]) Vgl. Bretschneider 142. [3]) Archimedes (ed. Heiberg) III, 98 sqq.

15*

wie wir sehen werden, vollkommen zu den Worten im Briefe des Eratosthenes: „Der Tarentiner Archytas soll sie vermittelst der Halbzylinder aufgefunden haben.“ Es seien (Fig. 36) $A\Delta = b$ und $AB = a$ die beiden Geraden, zwischen welche zwei mittlere Proportionalen einzuschalten sind. Die größere $A\Delta$ wird als Durchmesser eines Halbkreises benutzt, in welchen die kleinere AB als Sehne eingezeichnet wird. Aber auch senkrecht zu diesem ersten Halbkreise wird über $A\Delta$ ein zweiter Halbkreis errichtet, der in A befestigt über die Ebene $AB\Delta$ weggeschoben werden kann. Er bildet dabei auf dem über dem Halbkreis $AB\Delta$ errichteten Halbzylinder eine krumme Linie. Andererseits ist das Dreieck $A\Delta\Pi$ gegeben durch die $A\Delta$, die AB und die Berührungslinie $\Delta\Pi$ an den Halbkreis in Δ. Dieses Dreieck liefert um $A\Delta$ als Achse in Drehung versetzt eine Kegeloberfläche, welche gleichfalls den Halbzylinder und die vorher auf ihm erzeugte Kurve schneidet, letztere in einem Punkte K, der als dem Halbzylinder angehörend senkrecht über einem Punkte I des Halbkreisbogens $AB\Delta$ liegen muß. Während $A\Pi$ die Kegeloberfläche beschreibt, beschreibt endlich auch das Stück AB dieser Geraden eine Fläche gleicher Art, beziehungsweise der Punkt B einen Halbkreis BMZ, der senkrecht zur Horizontalebene $AB\Delta Z$ steht. Da zu dieser Ebene auch $AK\Delta'$ senkrecht steht, so ist zu ihr auch $M\Theta$ senkrecht, die Durchschnittsgerade der beiden genannten Ebenen, beziehungsweise $M\Theta \perp BZ$ als Durchschnittsgeraden der BMZ mit der $AB\Delta Z$. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Eigenschaft von BMZ als Halbkreis und von BZ als dessen Durchmesser, daß $M\Theta^2 = B\Theta \times \Theta Z$. Aber $B\Theta \times \Theta Z = A\Theta \times \Theta I$, weil BZ und AI zwei in Θ sich schneidende Sehnen desselben Kreises sind. Also $M\Theta^2 = A\Theta \times \Theta I$, also der Winkel AMI ein Rechter, d. h. ebenso groß wie $AK\Delta'$, welcher Winkel im Halbkreise ist, und folglich MI parallel zu $K\Delta'$. Damit ist die Ähnlichkeit des Dreiecks $\Delta' AK$ mit IAM, aber auch mit KAI bewiesen, und damit die Proportion $AM : AI = AI : AK = \Delta K : \Delta' A$. Setzt man endlich $AM = AB = a$, $\Delta' A = A\Delta = b$, $AI = x$, $AK = y$, so ist wieder $a : x = x : y = y : b$, wie es verlangt wurde. Aus diesem Verfahren geht, was wir zu bemerken nicht versäumen wollen, die Kenntnis mehrerer wichtiger Sätze von seiten des Erfinders hervor. Nicht bloß die beiden plani-

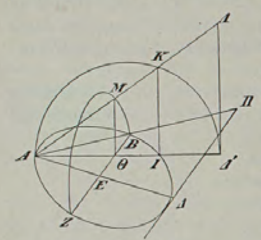

Fig. 36.

metrischen Lehrsätze, daß die Berührungslinie an den Kreis senkrecht zum Durchmesser steht und daß Kreissehnen einander in umgekehrt proportionalen Stücken schneiden, mußten ihm geläufig sein, auch von der durch Platon beklagten allgemeinen Unwissenheit auf stereometrischem Gebiete bildete er eine rühmliche Ausnahme. Archytas wußte, daß die Durchschnittsgerade zweier zu einer dritten Ebene senkrechten Ebenen gleichfalls senkrecht auf dieser und insbesondere senkrecht auf deren Durchschnittsgeraden mit einer der senkrechten Ebenen steht. Er besaß, was wir noch weit höher anschlagen, über die Entstehung von Zylindern und Kegeln, über gegenseitige Durchdringung von Körpern und dabei auf ihrer Oberfläche entstehenden Kurven vollständig klare Anschauungen. Sollte Archytas ein Modell sich angefertigt haben, an welchem er sein Verfahren sich ausbildete? Wir stellen die Frage, ohne eine Antwort darauf zu wissen und finden eine solche auch nicht in den Worten des Diogenes Laertius, der uns erzählt: „Archytas zuerst behandelte die Mechanik methodisch, indem er sich dabei geometrischer Grundsätze bediente; auch führte er zuerst die organische Bewegung in die Konstruktion geometrischer Figuren ein, indem er durch den Schnitt des Halbzylinders zwei mittlere Proportionalen zur Verdoppelung des Würfels zu erhalten suchte“[1]. In dem durch Eutokius überlieferten Text kommt auch das Wort τόπος vor[2]. Dieses Wort hat in späterer Zeit den Sinn „geometrischer Ort“ angenommen. Hier bedeutet es aber nur die Stelle[3]. Man kann also keinerlei Schlüsse aus dem Auftreten des Wortes ziehen, mag es selbst in dem Urtexte des Archytas schon vorgekommen sein, soviel derselbe sonst von Eudemus im übrigen verändert worden zu sein scheint. Selbstverständlich nehmen wir aber nur an, Eudemus habe den Wortlaut des Archytas einigermaßen frei behandelt. Den Sinn muß er getreu wiedergegeben haben, und so bleiben die Folgerungen, welche wir auf stereometrische Kenntnisse des Archytas gezogen haben, unberührt.

Wir lassen auch die Würfelverdoppelungen des Menächmus gleich folgen. Eutokius teilt uns zwei voneinander verschiedene Verfahren dieses Schriftstellers mit[4]. Das eine Mal wird die Aufgabe durch eine Parabel in Verbindung mit einer Hyperbel gelöst, das andere Mal werden zwei Parabeln benutzt. Hier kann, wie wir betonen müssen, ein wörtlicher Auszug aus Menächmus unter keiner Bedingung vorliegen, da diese Namen Hyperbel und Parabel, wie wir

---

[1]) Diogenes Laertius VIII, 83. [2]) Archimedes (ed. Heiberg) III, 100 lin. 10. [3]) Gow, A short history of Greek mathematics, pag. 187, Note 1. [4]) Archimedes (ed. Heiberg) III, 92 sqq.

noch sehen werden, viel späteren Ursprunges sind. Der Bericht des Eutokius über die Würfelverdoppelungen des Menächmus unterscheidet sich in wesentlicher Art von dem über die Methode des Archytas. Während bei Archytas nur die Synthese mitgeteilt, die Analyse aber verschwiegen ist[1]), ist bei Menächmus über Analyse und Synthese gleichmäßig berichtet und uns dadurch ein vortreffliches Beispiel zur Kenntnis jener beiden Schlußarten der Alten in die Hand gegeben. Mögen a, x, y, b wieder die vorige Bedeutung haben, mithin

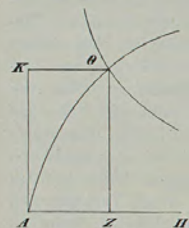

Fig. 37.

$$a : x = x : y = y : b$$

zu konstruieren sein. Weil $a : x = x : y$ wird (Fig. 37) ein Punkt Θ, von dem aus die Senkrechte $\Theta Z = x$ auf eine Gerade AH gefällt ist, auf der von einem gegebenen Anfangspunkte A aus die Länge $AZ = y$ genannt wird, notwendig auf einer durch A hindurchgehenden Parabel liegen. Zieht man ferner $AK \parallel \Theta Z$ und $\Theta K \parallel AZ$, so ist das Rechteck $AK\Theta Z$ gemessen durch $x \times y$ d. h. wegen $a : x = y : b$, gemessen durch $a \times b$, oder gegeben. Demzufolge liegt Θ auch auf einer Hyperbel, deren Asymptoten die AK und AZ sind. Das ist die Analyse. Sie geht aus von der Annahme, der Punkt Θ, welcher durch die Linien x, y erst festgelegt werden soll, sei schon vorhanden, und zieht daraus Folgerungen, welche für die Lage von Θ anderweitige Merkmale liefern. Nun kommt die Synthese, d. h. hier die Konstruktion der genannten Kurven. In einem Punkte A läßt man zwei Senkrechte zusammentreffen. Dann zeichnet man eine Parabel mit A als Scheitelpunkt, der einen der gezogenen Geraden AH als Achse und a als Parameter. Ferner zeichnet man zwischen den beiden Geraden AH und AK als Asymptoten eine Hyperbel unter der Bedingung, daß das Rechteck der mit KA, AH bis zum Durchschnitte mit diesen Geraden in umgekehrter Folge von jedem Hyperbelpunkte gezogenen Parallelen dem Rechtecke aus a und b gleich sei. Dann schneiden sich Parabel und Hyperbel in dem Punkte Θ,

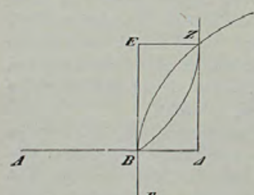

Fig. 38.

[1]) Bretschneider 152 hat versucht, die Analyse des Archytas zu erraten und, wie uns scheint, mit ziemlichem Glück. Vgl. auch Flauti, *Geometria di sito.* Neapel 1821, pag. 173—174.

dessen senkrechter Abstand von AH das gesuchte x ist. Die zweite Methode des Menächmus (Fig. 38) folgert wieder aus $a : x = x : y$, daß der gesuchte Punkt auf einer Parabel liege, ebenso aber aus $x : y = y : b$, daß er auf einer zweiten Parabel liege, deren beiderseitige Achsen sich in dem beiden Parabeln gemeinschaftlichen Scheitelpunkte B senkrecht durchschneiden, was alsdann in der Synthese benutzt wird. Eutokius schließt den Bericht über die Auflösungen des Menächmus mit den Worten: „Die Parabel zeichnet man mittels eines von dem Mechaniker Isidorus von Milet, unserem Lehrer, erfundenen Zirkels, der von ihm in seinem Kommentare zu der Gewölblehre des Heron beschrieben worden ist." Daß die von Eutokius angewandte Form nicht die des Menächmus selbst gewesen sein kann, haben wir berührt. Auf die Glaubwürdigkeit des Inhalts fällt dadurch kein Schatten. Menächmus muß also die Kurven gekannt haben, welche eine spätere Zeit Parabel und Hyperbel genannt hat; er muß die Asymptoten der Hyperbel gekannt haben, muß diejenigen Grundeigenschaften beider Kurven gekannt haben, welche die analytische Geometrie durch die Gleichungen $y^2 = ax$ und $xy = c^2$ auszudrücken weiß.

Im Briefe des Eratosthenes ist, wie wir uns erinnern, auch von einer Würfelverdoppelung des Eudoxus mittels der sogenannten Bogenlinien (S. 212) die Rede. Über diese berichtet Eutokius absichtlich gar nicht. Er setzt sich vielmehr in strengsten Gegensatz gegen eine unter diesem Titel überlieferte Arbeit[1]). Er habe, sagt er etwa, die dem Eudoxus zugeschriebene Abhandlung vernachlässigt, weil sie erstlich die Bogenlinien, von deren Benutzung er in der Einleitung rede, beim Beweise gar nicht anwende und zweitens eine unstetige Proportion gleich einer stetigen verwerte, was von jenem Schriftsteller nur zu denken nicht am Orte sei. Man hat hieraus, wie wir glauben berechtigterweise, den Schluß gezogen[2]), es werde dem Eutokius nur ein bis zur Unverständlichkeit verstümmelter Text des Eudoxus vorgelegen haben, da weder dem Eudoxus so grobe Fehler zuzutrauen seien, noch auch Eratosthenes eine durchaus verfehlte Lösung der Erwähnung würdig gefunden haben würde, jedenfalls nicht ohne auf das Irrige derselben hinzuweisen. Fügen wir diesen Schlüssen noch hinzu, daß das Verfahren des Eutokius diesem einen Schriftsteller gegenüber uns die Klarheit und Reinheit der Quellen, welche ihm für die Würfelverdoppelungen der anderen dienten, verbürgt.

[1]) Archimedes (ed. Heiberg) III, 66 lin. 11—17. [2]) Bretschneider 166 und besonders Ambr. Sturm, Das Delische Problem S. 33 Note 4 (Programm des k. k. Gymnasiums zu Seitenstetten 1895).

Wir haben bei dieser Aufzählung von Würfelverdoppelungen nach Eutokius uns allzusehr von unserer Gewohnheit, die Schriftsteller, mit denen wir uns gerade beschäftigen, auch ihrer Persönlichkeit nach wenigstens einigermaßen zu schildern, entfernt, um nicht schon hierdurch zu zeigen, daß wir mit Platon noch nicht abgeschlossen haben. Diese Einschaltungen — mögen wir auch später uns auf dieselben zu beziehen haben — bezwecken an dieser Stelle nur das Urteil bei Besprechung der Streitfrage zu leiten, ob das, was Eutokius als platonische Würfelverdoppelung gibt, wirklich echt sein kann. Stellen wir dazu die Einwendungen, welche man gemacht hat, zusammen.

Wir haben aus dem Briefe des Eratosthenes ersehen, daß, nachdem jene Aufgabe schon geraume Zeit die Geometer vergeblich beschäftigt hatte, nachdem eine Ratlosigkeit an die Stelle einer anderen getreten war, eine neue Veranlassung neue Bemühungen hervorrief, indem die Delier, welche einem Orakelspruche folgend um einer Seuche ein Ziel zu setzen einen Altar verdoppeln sollten, sich an Platon und seine Akademie um Rat wandten. Theon von Smyrna berichtet nach einer uns unbekannten Schrift des Eratosthenes, welche den Titel „Der Platoniker" geführt zu haben scheint, ganz ähnlich[1]). Platon habe den Deliern, welche der Seuche halber den Altar ihres Gottes verdoppeln sollten und die Ausführung zu betreiben ihn befragten, die Antwort erteilt: Nicht die Verdoppelung des Altars wünsche der Gott, er habe den Ausspruch nur als Tadel gegen die Hellenen verstanden, welche um die Wissenschaften sich nicht kümmerten und die Geometrie gering achteten. Plutarch ist ein dritter Schriftsteller, der in seinen Werken sogar zweimal auf den Gegenstand zu reden kam[2]), ihn auch in einem Nebenumstande etwas abweichend angibt. Er fügt nämlich der Antwort Platons, die Gottheit habe ihre Mißbilligung der allzu geringen Beschäftigung mit Geometrie bezeugen wollen, noch bei: um einen Körper so zu verdoppeln, daß er der ursprünglichen Gestalt durchaus ähnlich bleibe, bedürfe man der Auffindung zweier geometrischer Mittel, und das werde ihnen Eudoxus von Knidos oder Helikon der Kyzikener leisten, der letztere ein Schüler des Eudoxus, der in der Geschichte der Astronomie genannt zu werden pflegt. Johannes Philoponus endlich läßt diese Verweisung auf andere in der Antwort des Platon an die Delier wieder weg, während er der Notwendigkeit zwei geometrische Mittel

[1]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) pag. 2 *Ἐρατοσθένης μὲν γὰρ ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ Πλατωνικῷ κ. τ. λ.* [2]) Plutarchus, *De genio Socratis* cap. 7 und *De εἰ apud Delphos* cap. 6.

zu finden gedenkt[1]). Aus allen diesen Angaben folgt, daß über die Frage der Würfelverdoppelung ein Meinungsaustausch zwischen Deliern und Platon stattgefunden hat, und daher rührt der Name der delischen Aufgabe, unter welchem die der Würfelverdoppelung vielfach vorkommt. Aber auch einen anderen Umstand kann man mit einigem Erstaunen bemerken. Eratosthenes, der doch von den erfolgreichen Bemühungen zur Auffindung der Seite des verdoppelten Würfels besonders redet, erwähnt den Namen Platon und erwähnt nicht, daß er das Vertrauen, welches die Delier in seine Geschicklichkeit setzten, durch Lösung der Aufgabe rechtfertigte. Diesem Schweigen schließt sich Theon von Smyrna an, der freilich aus Eratosthenes schöpfte, und Johannes Philoponus. Plutarch ergänzt es nun gar dadurch, daß Platon von vornherein die Erwartung, als könne er die Frage lösen, unter Verweisung an andere Geometer von sich abzulenken wußte. Man muß zugeben, daß dieses Schweigen, daß dieser Zusatz sehr eigentümlich, sehr schwer zu verstehen sind, wenn jene Schriftsteller das Verfahren Platons kannten, daß es noch staunenswerter wäre, wenn Platon den Würfel verdoppelt hätte und jene Schriftsteller von seiner Abhandlung, die doch zur Kenntnis des Eutokius gelangt sein muß, nichts gewußt hätten. Es wäre danach möglich, daß die Quelle des Eutokius eine jener gefälschten Abhandlungen gewesen wäre, wie sie zur Zeit des Neuplatonismus zu Dutzenden erschienen und auf Rechnung alter Lehrer gesetzt wurden.

Dazu kommt eine ganz bedenkliche Notiz, welche Plutarch zweimal mitgeteilt hat[2]). Platon, sagt er, tadelte den Eudoxus und Archytas und Menächmus, welche die Verdoppelung des Körperraumes auf instrumentale und mechanische Verfahrungsweisen zurückführen, gleich als ob sie hierdurch zwei mittlere Proportionalen auf unerlaubte Weise zu erhalten versuchten. Denn auf solche Art werde der Vorzug der Geometrie aufgehoben und verdorben, sofern man sie wieder auf den sinnlichen Standpunkt zurückführt, sie, die in die Höhe gehoben werden und sich an ewige und körperlose Gedankenbilder halten sollte, wie dies bei Gott der Fall ist, der deshalb immer Gott ist. So die eine Stelle Plutarchs. Wo er aber an einer zweiten Stelle die gleiche Angabe wiederholt, verbindet er damit die Bemerkung, infolge von Platons Unwillen über die Würfelverdoppelung durch Werkzeuge sei die Mechanik von der Geometrie vollständig getrennt worden und dadurch auf lange Zeit zu einer bloßen Hilfswissenschaft der Kriegskunst herabgesunken. Konnte, sagt man, Platon einen derartigen Tadel gegen Eudoxus, gegen Archytas, gegen

[1]) Johannes Philoponus ad Aristotelis Analyt. post. I, 7. [2]) Plutarchus, *Quaest. conviv.* VIII, 92, 1 und *Vita Marcelli* 14, 5.

Menächmus aussprechen, wenn er selbst ein mechanisches Verfahren zur Würfelverdoppelung erdachte? Ist damit nicht der Beweis geliefert, daß der Bericht des Eutokius soweit irrig sein muß, als ihm Platon für den Erfinder einer Vorrichtung gilt, die von irgend einem anderen herrührte?

Wir gestehen zu, daß diese Einwürfe sehr gefährlicher Natur sind, um so mehr als nicht zu bezweifeln ist, daß die Platon durch Plutarch beigelegte Meinung mit dem ganzen philosophischen Charakter dessen, der die Ideen einführte, im vollsten Einklange steht. Es ist ferner nicht zu bezweifeln, daß langezeit, ob auf Platons Einfluß hin, wie behauptet worden ist[1]), lassen wir dahingestellt, nur die Geometrie des Zirkels und Lineals als eigentliche Geometrie betrachtet worden ist. Die Nachricht in der Form, wie Plutarch sie mitteilt, lautet überdies so bestimmt, daß es doch wohl allzu gewagt wäre, ein Mißverständnis anzunehmen[2]). Es wird demnach nur die Wahl zwischen folgenden Möglichkeiten bleiben. Entweder, und das dürfte dem Vorwurfe der Künstlichkeit ausgesetzt sein, wird man annehmen, Platon habe, indem er jenen Tadel gegen Eudoxus, Archytas, Menächmus aussprach, zugleich beigefügt, es sei ja keine Kunst eine Würfelverdoppelung mechanisch vorzunehmen, dazu genüge eine einfache Vorrichtung, wie wir sie oben nach Eutokius geschildert haben, aber das sei keine Geometrie, denn diese solle und müsse an ewige und körperlose Gedankenbilder sich halten. Oder aber, und das ist entschieden das Bequemste, man hält sich nur an die Notiz des Plutarch, an das Schweigen des Eratosthenes und schiebt die ganze Mitteilung des Eutokius, wie oben bemerkt, vornehm beiseite, soweit sie wenigstens auf Platon Bezug hat. Oder endlich, und das ist wenigstens das Ehrlichste, wenn kein anderer Vorzug noch Vorwurf an dieser Möglichkeit haftet, man gesteht zu, daß hier ein Widerspruch vorliege, den aus dem Wege zu räumen gegenwärtig keine genügenden Mittel zur Hand sind.

11. Kapitel.

Die Akademie. Aristoteles.

Wir folgen weiter dem Mathematikerverzeichnisse, welches im nächsten Satze drei Namen vereinigt, indem es sagt:

[1]) Hankel S. 156 spricht mit apodiktischer Gewißheit, aber durch kein Zitat unterstützt den Satz aus: Wir verdanken Platon die für die Geometrie so wichtige Beschränkung der geometrischen Instrumente auf Zirkel und Lineal. [2]) So haben wir selbst Zeitschr. Math. Phys XX, histor.-literar. Abteilung 133 den Widerspruch zu beseitigen gesucht.

„In diese Zeit gehört auch Leodamas von Thasos und Archytas von Tarent und Theätet von Athen, durch welche die Theoreme vermehrt wurden und zu einer strengen wissenschaftlichen Darstellung gelangten.“

Von Leodamas von Thasos haben wir im vorigen Kapitel erzählt, was allein von ihm bekannt ist, nicht vieles aber ein Großes, daß für ihn (S. 220) Platon die analytische Methode ersann, beziehungsweise sie ihm mitteilte. Nennt, wie man wohl annehmen darf, das Mathematikerverzeichnis die darin vorkommenden Namen ihrer Zeitfolge nach, so war Leodamas etwas älter als Archytas, mithin auch als Platon, was aber einer Beeinflussung durch jenen keinen Abbruch tut[1]).

Archytas von Tarent[2]) mag etwa 430—365 gelebt haben, fast gleichzeitig mit Platon geboren, an welchen ihn auch, wie wir wissen, während dessen Aufenthalt in Großgriechenland (S. 215) ein enges Freundschaftsverhältnis band. Archytas war seiner Heimat wie seinem Bildungsgange nach Pythagoräer. Er war Staatsmann und Feldherr und versah wiederholt die höchsten Ämter in seiner Vaterstadt. Seinen Tod fand er, wie wir durch Horaz wissen[3]), durch Schiffbruch am Vorgebirge Matinum, vielleicht beim Antritt einer Reise nach Griechenland. Das Mathematikerverzeichnis nennt ihn, wie wir soeben gesagt haben, vermutlich aus Gründen der Zeitfolge gerade hier und nicht schon einige Zeilen früher. Möglicherweise aber soll durch seine Stellung mitten unter Männern der Akademie der mittelbare Einfluß bezeugt werden, den er durch seine früheren nahen Beziehungen zu Platon auf diese Schule ausübte. Über die Echtheit oder Unechtheit von Bruchstücken philosophischen, ethischen, musikalischen Inhaltes, welche unter dem Namen des Archytas auf uns gekommen sind, herrschen die entgegengesetztesten uns glücklicherweise nicht kümmernden Meinungen. Während die einen jene Bruchstücke anerkennen, gehen die andern so weit, sie fast insgesamt für Fälschungen eines alexandrinischen Juden um das Jahr 39 n. Chr. zu halten[4]). Fast insgesamt, die mathematischen Bruchstücke nämlich bleiben vom Zweifel unbehelligt. Wir haben

[1]) Susemihl in dem Rheinischen Museum für Philologie. Neue Folge LIII, 626 Anmerkung 2 (1898). [2]) Jos. Navarro, *Tentamen de Archytae Tarentini vita atque operibus* (Kopenhagener Doktordissertation 1819). Gruppe, Ueber die Fragmente des Archytas und der älteren Pythagoräer (Preisschrift der Berliner Akademie 1840). L. Boeckh, Ueber den Zusammenhang der Schriften, welche der Pythagoräer Archytas hinterlassen haben soll (Karlsruher Lyzeumsprogramm 1841). Chaignet I, 255—331. [3]) Horatius, Lib. I, Ode 28. [4]) So besonders Gruppe, der diese These zuerst aufstellte.

ihrer übrigens schon gedacht. Die Würfelverdoppelung des Archytas und die wichtigen Folgerungen, welche aus ihr für seine stereometrischen Kenntnisse zu ziehen sind, haben uns im vorigen Kapitel, die Leistungen des Archytas auf dem Gebiete der Proportionenlehre schon früher (S. 166) beschäftigt, und auf letztere kommen wir gleich nachher noch einmal bei Gelegenheit des Eudoxus zu reden. Ein letztes, was, wiewohl oben (S. 229) gesagt, hier besonders betont werden mag, ist, daß Archytas die Mechanik zuerst methodisch behandelte, indem er sich dabei geometrischer Grundsätze bediente.

Theätet von Athen, der Platon nahe genug stand, daß dieser ihn zur namengebenden Persönlichkeit eines auch mathematisch lesenswerten Gespräches macht, ist seiner Lebenszeit nach nicht genauer zu bestimmen, als es durch diese eine Angabe geschieht. Seine Arbeiten müssen der Lehre von dem Irrationalen gewidmet gewesen sein. Er teilte sämtliche Zahlen in zwei Klassen, in die der Quadratzahlen, welche durch Vervielfältigung einer Zahl mit einer ihr gleichen entstehen, und in die Rechteckszahlen, bei welchen die zu vervielfältigenden Zahlen ungleich gewählt werden müssen[1]). Das einteilende Unterscheidungsmerkmal ist hier demnach Rationalität, beziehungsweise Irrationalität bei der Ausziehung der Quadratwurzel, und man kann hier eine früher (S. 183) von uns angekündigte Bestätigung derjenigen Vermutung finden, welche Quadrat und Heteromekie in der pythagoräischen Kategorientafel des Aristoteles einfach als Ersatzwörter für Rationalität und Irrationalität erklärt. Wenn Theätet sodann fortfährt „in betreff der festen Körper machten wir es ähnlich“, so ist der Sinn dieses Satzes verschiedener Deutung fähig. Es kann hier auf irrationale Kubikwurzeln angespielt sein[2]), möglicherweise auch auf die Ausziehbarkeit oder Nichtausziehbarkeit von Quadratwurzeln aus Produkten aus je drei Faktoren. Letzteres ist uns namentlich um deswillen wahrscheinlicher, als jede andere Notiz darüber, daß der Begriff der Kubikwurzel damals schon bekannt gewesen sein sollte — die Aufgabe der Würfelverdoppelung schließt ihn noch keineswegs ein — uns fehlt, während von der Einschaltung eines oder zweier geometrischen Mittel zwischen Körperzahlen im platonischen Timäus (S. 163) die Rede war. Eine weitere Bestätigung dieser unserer Ansicht liegt in einer mutmaßlich von Proklus herrührenden Anmerkung zum X. Buche des Euklid. Der 9. Satz des X. Buches dieses Schriftstellers heißt: Quadrate kommen-

[1]) Platon, Theaetet pag. 147—148. Vgl. Rothlauf S. 24 flgg. [2]) So die Meinung Rothlaufs l. c.

surabler Linien verhalten sich wie Quadratzahlen, inkommensurabler Linien nicht wie Quadratzahlen und umgekehrt. Dazu bemerkt nun der Scholiast: „Dies Theorem ist eine Erfindung des Theätet, und Platon gedenkt desselben in dem Dialoge Theätet; nur wird es dort speziell auseinandergesetzt, hier aber allgemein“[1]). Noch eine letzte Angabe über Theätet liefert uns Suidas, er habe zuerst über die fünf Körper geschrieben[2]). Offenbar ist hier an ein zusammenhängendes Ganzes zu denken, was nicht ausschließt, daß schon vorher Hippasos oder irgend ein anderer über das Dodekaeder besonders geschrieben haben könnte. Ob auch diese Schrift des Theätet, wie man behauptet hat[3]), den Untersuchungen über Irrationales verwandt war, ob insbesondere über das Verhältnis der Kanten dieser Körper zum Halbmesser der umschriebenen Kugel Betrachtungen von der Art, wie sie im XIII. Buche des Euklid vorkommen, angestellt wurden, überlassen wir einzelnem Ermessen. Bestimmtere Angaben gibt es darüber nicht.

Unser Verzeichnis fährt fort: „Jünger als Leodamas ist Neokleides und dessen Schüler Leon, welche zu dem, was vor ihnen geleistet worden war, vieles hinzufügten; es hat auch Leon Elemente geschrieben, die in bezug auf Umfang und das Bedürfnis der Anwendung des Bewiesenen sorgfältiger verfaßt sind. Ebenso erfand er den Diorismus, wann das vorgelegte Problem möglich ist und wann unmöglich.“

Diese Sätze ergänzen früher (S. 208 und 219) von uns Erwähntes. In Platons Akademie entstand die Frage, ob eine Aufgabe, welche gestellt war, überhaupt möglich sei, ob man nicht zuverlässig vergebliche Mühe anwende, wenn man ihre Lösung versuche. Diese Frage mußte gestellt werden, sobald die analytische Methode entstand, die, wie wir gleichfalls sahen, nicht an sich zu jedesmal richtigen Ergebnissen führte, sondern erst einer Bestätigung durch die Synthesis bedurfte. Platon hat im Menon eine derartige Frage gestellt und beantwortet. Leon dürfte die Notwendigkeit der Fragestellung ein für allemal dargetan und vielleicht den Kunstausdruck Diorismus eingeführt haben, dessen lateinische Übersetzung determinatio lautet. Über Neokleides wissen wir den Worten des Mathematikerverzeichnisses nichts hinzuzufügen. Höchstens können wir den Umstand als besonders bemerkenswert erachten, wonach er Leons Lehrer gewesen sei, dieser also nicht als ausschließlicher Schüler Platons unmittelbar betrachtet werden darf.

[1]) Knoche, Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklids Elementen. Herford 1865, S. 24—25. [2]) Suidas s. v. Θεαιθήτος. [3]) Bretschneider S. 148.

„Eudoxus von Knidos um wenig jünger als Leon und ein Genosse der Schule Platons war der erste, welcher die Menge der Lehrsätze überhaupt vermehrte und zu den drei Proportionen noch drei hinzufügte; er führte auch weiter aus, was von Platon über den Schnitt begonnen worden war, wobei er sich der Analyse bediente."

Eudoxus[1]) lebte um 390—337. Man weiß, daß er in Knidos geboren ist, daß er Schüler des Archytas, in seinem 23. Lebensjahre auch während zwei Monaten Schüler Platons in Athen war. Zur Zeit des Königs Nectanabis II um 358 oder 357 verweilte Eudoxus ein Jahr und vier Monate in Ägypten, wo er mit Platon verkehrte, wie Strabon nach ägyptischer Überlieferung uns erzählt. Wenig später stiftete Eudoxus selbst eine Schule in Kyzikus, dem heutigen Panorma am Marmarameere, kam er mit zahlreichen Schülern nach Athen, wo er wieder mit Platon enge verkehrte. Dann aber kehrte er nach Knidos zurück und starb dort im Alter von 53 Jahren. Astronom, Geometer, Arzt, Gesetzgeber nennt ihn Diogenes Laertius, dem die wesentlichsten biographischen Angaben[2]) über Eudoxus entstammen. Wir haben es hier nur mit dem Geometer zu tun und wollen zunächst von den zwei bestimmten Tatsachen reden, welche das Mathematikerverzeichnis hervorhebt.

Eudoxus fügte zu den drei Proportionen drei weitere hinzu. Wir haben (S. 165—166) die Analogien und Mesotäten für die Pythagoräer in Anspruch genommen, wir haben gesehen, daß der Ursprung einer bestimmten Proportion nach Babylon verlegt wird, von wo Pythagoras sie mitgebracht habe, woraus für uns mindestens das folgt, daß man zur Zeit des Jamblichus wie in Griechenland, so in den Euphratländern jener sogenannten musikalischen Proportion Beachtung schenkte. Wir wollen hier über den Unterschied von Analogie und Mesotät einiges einschalten. Die Erklärungen der griechischen Schriftsteller gehen freilich einigermaßen auseinander, aber faßt man die verschiedenen Stellen alle zusammen, so kommt man zu folgender Auffassung[3]). Ursprünglich hieß die geometrische Pro-

[1]) Über Eudoxus vgl. die bahnbrechende Abhandlung von Ludw. Ideler in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1828 (S. 189—212) und 1829 (S. 49—88). Dann hauptsächlich Schiaparelli, Ueber die homocentrischen Sphären des Eudoxus, des Kallippus und des Aristoteles (Abhandlg. des lombard. Instituts von 1874, deutsch von W. Horn in dem Supplementheft zu Zeitschr. Math. Phys. Bd. XXII). Zwei Programmabhandlungen der Realschule Dinkelsbühl für 1888 und 1890 von Hans Künssberg geben eine erschöpfende Übersicht. Zuletzt beschäftigte sich mit Eudoxus Susemihl, Die Lebenszeit des Eudoxos von Knidos (Rheinisches Museum für Philologie. Neue Folge LIII, 626—628. 1898). [2]) Diogenes Laertius VIII, 86—90. [3]) Nesselmann, Algebra der Griechen Seite 210, Anmerkung 49.

portion ἀναλογία, die Proportion im allgemeinen, nämlich die arithmetische, die geometrische, die harmonische und sämtliche noch dazu kommende hießen μεσότητες. Der spätere Sprachgebrauch dagegen verwischte diesen Unterschied und ließ zuletzt unter Mesotät nur irgend etwas verstehen, was zwischen gegebenen Äußersten lag. Diese Darstellung schließt zugleich in sich, daß es ursprünglich nur drei solcher Proportionen gab, für welche wir die von Archytas gegebenen Definitionen kennen gelernt haben. Es war die arithmetische, die geometrische, die entgegengesetzte Proportion, welche diesen ihren Namen, ὑπεναντία, mit dem durch Archytas und Hippasos, wie wir von Jamblichus erfahren, eingeführten Namen der harmonischen vertauschte. Als selbstverständlich ist dabei zu bemerken, daß nur Proportionen, die aus drei Zahlen gebildet wurden, in Betracht kamen und mit jenen Namen belegt wurden, also nur stetige Proportionen sind Mesotäten. Zu den drei alten Mesotäten kamen drei neue. Das Mathematikerverzeichnis sagt uns Eudoxus habe dieselben erfunden. Jamblichus berichtet, Archytas und Hippasos hätten sie eingeführt, Eudoxus und seine Schüler nur die Namen verändert[1]). Endlich traten noch vier Mesotäten hinzu und brachten die Gesamtzahl auf zehn, welche Nicomachus im II. S. n. Chr. gekannt hat. Durch die Einführung der vier letzten machten sich, wieder Jamblichus zufolge, Temnonides und Euphranor verdient, Persönlichkeiten, die wir nur aus diesem einzigen Zitate kennen. An bestimmten Zahlenbeispielen können wir am deutlichsten mit dem Wesen der zehn Proportionen uns bekannt machen. Es bilden die drei Zeilen α, β, γ

die 1. Proportion	$\alpha - \beta = \beta - \gamma$	wenn $\alpha = 3\beta = 2\gamma = 1$
2.	$\alpha : \beta = \beta : \gamma$	$\alpha = 4\beta = 2\gamma = 1$
3.	$\alpha : \gamma = (\alpha - \beta) : (\beta - \gamma)$	$\alpha = 6\beta = 4\gamma = 3$
4.	$\alpha : \gamma = (\beta - \gamma) : (\alpha - \beta)$	$\alpha = 6\beta = 5\gamma = 3$
5.	$\beta : \gamma = (\beta - \gamma) : (\alpha - \beta)$	$\alpha = 5\beta = 4\gamma = 2$
6.	$\alpha : \beta = (\beta - \gamma) : (\alpha - \beta)$	$\alpha = 6\beta = 4\gamma = 1$
7.	$\alpha : \gamma = (\alpha - \gamma) : (\beta - \gamma)$	$\alpha = 9\beta = 8\gamma = 6$
8.	$\alpha : \gamma = (\alpha - \gamma) : (\alpha - \beta)$	$\alpha = 9\beta = 7\gamma = 6$
9.	$\beta : \gamma = (\alpha - \gamma) : (\beta - \gamma)$	$\alpha = 7\beta = 6\gamma = 4$
10.	$\beta : \gamma = (\alpha - \gamma) : (\alpha - \beta)$	$\alpha = 8\beta = 5\gamma = 3$

Beim ersten Anblick vermißt man in dieser Liste, so umfangreich sie ist, zwei Proportionen, welche der 3. gegenüber eine ähn-

[1]) Jamblichus in Nicomachi Arithmeticam ed. Tennulius pag. 141 flgg., 159, 163, ed. Pistelli pag. 101, 113, 116.

liche Berechtigung zu haben scheinen, wie 5. und 6. neben 4., nämlich

$$3\text{a.}\quad \beta : \gamma = (\alpha - \beta) : (\beta - \gamma)$$

$$3\text{b.}\quad \alpha : \beta = (\alpha - \beta) : (\beta - \gamma).$$

Bei näherem Zusehen ergibt sich aber, weshalb sie fortblieben. Sie werden erfüllt, sofern $\alpha\gamma = \beta^2$, sind also in 2. bereits mit eingeschlossen, beziehungsweise werden durch die gleichen Werte α, β, γ erfüllt, welche 2. befriedigen.

Andererseits erscheint es uns Neueren gar verwunderlich, daß die Griechen alle diese Fälle unterschieden, mit deren sieben letzten im großen und ganzen gar nichts geleistet ist, daß sie in der Erfindung derselben etwas hinlänglich Bedeutendes erkennen, um die Namen derer aufzubewahren, von welchen jene Leistung herrührt. Wir werden in die griechische Stufenleiter der Wertschätzung uns hineinfinden können, wenn wir zweierlei erwägen. Erstens, daß eine große Zahlengewandtheit dazu gehörte sämtliche zehn Verhältnisse ganzzahlig zu erfüllen, zweitens, daß die aus vier voneinander verschiedenen Zahlen gebildete geometrische Proportion mit den aus ihr abzuleitenden für die Griechen bis zu einem gewissen Grade die Gleichungen und deren Umformung ersetzte. Die Folgerung von

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \quad \text{auf} \quad (\alpha + \beta) : \beta = (\gamma + \delta) : \delta$$

z. B. spielt bei den Griechen fortdauernd die allerbedeutsamste Rolle. Stetige Proportionen hatten zur Kenntnis der arithmetischen, der geometrischen Reihen, jene wieder zur Kenntnis der vieleckigen Zahlen geführt. Was Wunder, daß man weiter experimentierte, daß man immer neue Verbindungen gleicher Verhältnisse zwischen Zahlen aufsuchte, welche selbst aus drei gegebenen Zahlen additiv oder subtraktiv zusammengesetzt waren? Solche neue Proportionen konnten zu neuen wichtigen Entdeckungen Gelegenheit geben, und taten sie es nicht, so boten sie nur ein Beispiel, wie es deren in der Geschichte aller Wissenschaften gibt, daß Untersuchungen mit hochgespannten Hoffnungen und Erwartungen begonnen sich allmählich als unfruchtbar erwiesen.

Eudoxus, sagt uns das Verzeichnis noch, führte weiter aus, was von Platon über den Schnitt begonnen worden war, wobei er sich der analytischen Methode bediente. Der Schnitt, ἡ τομή, über welchen Untersuchungen von Platon begonnen worden waren, muß, wie in richtigem Verständnis dieses lange für unerklärbar dunkel gehaltenen Ausspruches erkannt worden ist[1]), ein ganz bestimmter

[1]) Bretschneider S. 167—168.

gewesen sein, ein solcher, dem die damalige Zeit die größte Bedeutung beilegte. Das aber war der Fall mit dem Schnitt der Geraden nach stetiger Proportion, mit dem sogenannten goldenen Schnitt, wie die spätere Zeit ihn genannt hat. Der goldene Schnitt tritt nun gerade in Verbindung mit Anwendung der analytischen Methode in den fünf ersten Sätzen des XIII. Buches der euklidischen Elemente auf, nachdem er schon im II. Buche als Satz 11. gelehrt worden war. Die Annahme, jene fünf Sätze seien Eigentum des Eudoxus und von Euklid in ihrem Zusammenhange pietätsvoll erhalten, hat sonach eine große Wahrscheinlichkeit für sich. Es sei ergänzend nur hinzugefügt, daß Eudoxus bei Untersuchungen über die Proportionenlehre fast mit Notwendigkeit auch zu solchen Verhältnissen geführt werden mußte, für welche Zahlenbeispiele nicht möglich waren, und deren Behandlung nur geometrisch gelang. Wir sagen, er mußte dahin geführt werden, weil, wie wir (S. 163) im Vorbeigehen bemerkt haben, der Grieche die Zahl vorzugsweise in räumlicher Versinnlichung zu betrachten pflegte, und hat Eudoxus sie ebenso betrachtet, dann verstehen wir, warum das Mathematikerverzeichnis die Leistungen des Eudoxus in der Proportionenlehre und um den goldenen Schnitt in einem Atemzuge ausspricht. Auch das Letztgesagte läßt eine weitere Beglaubigung zu. Eudoxus hat die Proportionenlehre geometrisch betrachtet, denn ihm gehört nach der Behauptung eines vermutlich von Proklus verfaßten Scholion das ganze V. Buch des Euklid, das ist eben das der Proportionenlehre gewidmete, in allen seinen wesentlichen Teilen an[1]).

Eine ganz andere Gattung von Untersuchungen des Eudoxus, welche nicht minder gut verbürgt sind, hatte stereometrische Ausmessungen zum Gegenstande. Archimed sagt uns mit ausdrücklicher Bestimmtheit[2]), Eudoxus habe gefunden, daß jede Pyramide der dritte Teil eines Prisma sei, welches mit ihr die gleiche Grundfläche und Höhe habe, ferner, daß jeder Kegel der dritte Teil eines Zylinders von der Grundfläche und Höhe des Kegels sei. Archimed deutet dabei den Weg an, welchen Eudoxus bei den Beweisen einschlug. Die griechischen Philosophen nannten λῆμμα, Einnahme, den Vordersatz, von welchem der Dialektiker bei seinen Schlüssen ausgeht. Dasselbe Wort bedeutete dem Mathematiker einen zum Gebrauche für das Nächstfolgende notwendigen, aber den Zusammenhang einigermaßen unterbrechenden Lehnsatz. Von einem Lemma, welches Eudoxus

[1]) Knoche, Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus. Herford 1865, S. 10—13. [2]) Archimedes (ed. Heiberg) I, 4 lin. 11—14 und II, 296 lin. 9—20.

hier anwandte, sagt uns auch Archimed. Es lautet wie folgt: „Wenn zwei Flächenräume ungleich sind, so ist es möglich, den Unterschied, um welchen der kleinere von dem größeren übertroffen wird, so oft zu sich selbst zu setzen, daß dadurch jeder gegebene endliche Flächenraum übertroffen wird.“ Archimed setzt hinzu, mit Hilfe des gleichen Lemma hätten auch die Alten die Proportionalität des Kreises zum Quadrat des Durchmessers bewiesen, so daß möglicherweise der Beweis des Hippokrates von Chios schon dieses Lemma voraussetzte. Daran dachten wir (S. 207), als wir die Vermutung preisgaben, Hippokrates könne von rechnenden Betrachtungen Gebrauch gemacht haben, als er jene Proportionalität bewies. Jedenfalls war, wenn auch die erste Kenntnis des Lemma als solchem dem Eudoxus entrückt werden zu müssen scheint, seine Leistung eine sachlich wie methodisch hervorragende, und wir haben ihn als einen der ersten Bearbeiter des Exhaustionsverfahrens unter allen Umständen zu nennen.

Noch eine dritte Gruppe von geometrischen Untersuchungen des Eudoxus darf nicht schweigend übergangen werden. Eudoxus ist Erfinder einer Kurve, welche zwar in der Astronomie ihre wesentliche Anwendung gefunden hat, aber darum nicht weniger der Geometrie angehört[1]). Sie wurde von ihm selbst Hippopede, das heißt Pferdefessel, genannt, und Xenophon beschreibt sie in seinem Buche über die Reitkunst als die Art des Laufes, welche beide Seiten des Pferdes gleichmäßig ausbilde und jegliche Wendung zu machen gestatte. Auch heutigen Tages sucht man durch das sogenannte Achterreiten die gleiche Wirkung hervorzubringen, und so wird sehr wahrscheinlich, daß es eine schleifenartige Kurve war, welche Eudoxus so benannte. Damit stimmen Stellen des Proklus überein, welche die Hippopede eine spirische Linie nennen, und welche bezeugen, daß sie einen Winkel bilde, indem sie sich selbst schneide[2]). Wir werden von dem Erfinder der spirischen Linien noch später zu reden haben. Jetzt dürfen wir aber schon bemerken, daß man unter Spire, σπεῖρα, einen sogenannten Wulst versteht, d. h. einen ringförmigen Rotationskörper, welcher durch die Drehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende aber nicht durch den Mittelpunkt gehende Gerade erzeugt wird[3]), einen Körper, dessen Hälfte in der Würfel-

[1]) Über diese Kurve vgl. den V. Abschnitt des vorher erwähnten Aufsatzes von Schiaparelli, deutsche Übersetzung S. 137—155 und Knoche und Maerker (*Ex Procli successoris in Euclidis elementa commentariis definitionis quartae expositionem quae de recta est linea et sectionibus spiricis commentati sunt Knoche et Maerker*). Herford 1856. [2]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 127, 128, 112. [3]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 119. Heron Alexandrinus (ed. Hultsch) pag. 27, Definit. 98.

verdoppelung des Archytas (S. 228) vorkommt, erzeugt durch die Verschiebung eines senkrechten Halbkreises über einem wagrechten. Schneidet man diesen Wulst durch eine der Drehungsachse parallele Ebene, so entsteht eine spirische Linie, deren Gestalt je nach der Entfernung der Schnittebene von der Drehungsachse eine dreifache sein kann (Fig. 39). Ist die schneidende Ebene von der Drehungsachse weiter entfernt als der Kreismittelpunkt, so entsteht eine ovale in sich zurücklaufende Linie, welche Proklus als in der Mitte am breitesten und gegen die Enden sich verengernd schildert. Geht die Ebene von der Achse aus gesehen diesseits des Mittelpunktes des erzeugenden Kreises, aber immer noch durch den ganzen Wulst, so ist die Kurve nach den Worten desselben Schriftstellers länglich, in der Mitte eingedrückt und breiter an den beiden Enden. Die Schleifenlinie entsteht, wenn die Schnittebene der Achse noch näher rückt, so daß sie den Wulst an einem inneren Punkte berührt, welcher alsdann der Doppelpunkt der Kurve ist. Die genaueren Eigenschaften der Hippopede des Eudoxus auseinanderzusetzen ist hier um so weniger der Ort, als dieselben in den Quellen nicht angegeben sind, man also in vollständiger Ungewißheit sich befindet, wie viel oder wie wenig von dem, was man auseinandersetzt, dem Eudoxus selbst bekannt gewesen sein kann.

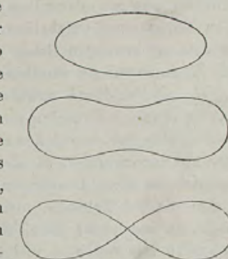

Fig. 39.

Das letzte, worüber wir noch zu berichten hätten, wären die Bogenlinien, καμπύλαι γραμμαί, mittels deren Eudoxus die Würfelverdoppelung vollzog. Eudoxus den Gottähnlichen nennt ihn Eratosthenes mit Rücksicht auf diese Leistung in einem Epigramm, welches den Schluß seines Briefes an König Ptolemäus über die Würfelverdoppelung bildet. Es muß also gewiß eine hervorragende Arbeit gewesen sein. Welcher Art aber jene Bogenlinien gewesen sein mögen, darüber fehlt auch die dürftigste Angabe, so daß wir keinerlei Vermutung Ausdruck zu geben imstande sind.

Das Mathematikerverzeichnis vereinigt nun wieder drei Namen, von welchen zwei uns schon bekannt geworden sind: „Amyklas von Heraklea, einer von Platons Gefährten, und Menächmus, der Schüler des Eudoxus und auch mit Platon zusammenlebend, und sein Bruder Dinostratus machten die gesamte Geometrie noch vollkommener.“

Über Amyklas und seine Verdienste wissen wir gar nichts.

Menächmus[1]) war jener Würfelverdoppler, welcher Parabel und Hyperbel bei der Lösung seiner Aufgabe benutzte. Wir haben seine Auflösungen durch Eutokius kennen gelernt (S. 230) und uns aus denselben klar zu machen gesucht, wieviel Kenntnisse aus der Lehre von den Kegelschnitten Menächmus bereits besessen haben muß. Wir erinnern uns aus demselben Berichte des Eutokius, daß Isidorus von Milet einen Parabelzirkel erfunden hat. Nun kommt allerdings in dem oft benutzten Briefe des Eratosthenes der Satz vor (S. 212), die Zeichnungen der verschiedenen Würfelverdoppler hätten sich nicht leicht mit der Hand ausführen und in Anwendung bringen lassen „außer etwa einigermaßen die des Menächmus, doch auch nur mühsam". Man hat daraus den Schluß gezogen, Menächmus habe bereits gewisse Vorrichtungen zur Zeichnung seiner Kurven gekannt, und unmöglich ist diese Deutung nicht. Einen eigentlichen Widerspruch gegen die bei Eutokius vorkommende Bemerkung bildet sie gewiß nicht, da erstens die Vorrichtungen des Menächmus keine Zirkel gewesen zu sein brauchen und zweitens Eutokius nicht sagt, daß man vor der Erfindung, die er seinem Lehrer nachrühmt, Parabel und Hyperbel nicht mechanisch habe zeichnen können. Daß die Namen Parabel und Hyperbel jüngeren Datums als Menächmus sind, haben wir betont. Sie gehören dem Apollonius von Pergä an. Die Namen, welche vorher in Übung waren, gehen ebenso wie die Entstehung jener Kurven aus einer durch Eutokius in seinem Kommentare zu Apollonius uns erhaltenen Stelle des Geminus hervor[2]). Die Alten kannten nur gerade Kreiskegel und definierten dieselben als durch die Umdrehung eines rechtwinkligen Dreiecks um die eine seiner Katheten entstanden. Sie unterschieden aber drei Gattungen solcher Kegel, je nachdem die Umdrehungsachse mit der Hypotenuse des den Kegel erzeugenden Dreiecks einen Winkel machte, der kleiner, gleich oder größer als die Hälfte eines rechten Winkels war. Der Winkel an der Spitze des Kegels wurde natürlich doppelt so groß, also in den drei Fällen spitz, recht oder stumpf. Nun schnitt man jeden Kegel durch eine zur Kegelseite, d. h. zur Hypotenuse des erzeugenden Dreiecks senkrechte Ebene und erhielt so die dreierlei Kurven, welche ihrer Hervorbringung gemäß Schnitt des spitzwinkligen, des rechtwinkligen und des stumpfwinkligen Kegels genannt wurden. Schon Demokritus von Abdera (S. 193) scheint Kegel durch dem Grundkreise parallele Ebenen durchschnitten

[1]) Max C. P. Schmidt, Die Fragmente des Mathematikers Menächmus in der Zeitschrift „Philologus" (1882) Bd. 1, 2, S. 72—81. [2]) Apollonii Conica (ed. Heiberg). Leipzig 1891—1893. II, 168.

zu haben. Die bei sonstigen Schnitten auf der Kegeloberfläche hervortretenden Kurven hat er indessen wohl kaum beobachtet, da wieder Geminus in einer anderen durch Proklus uns aufbewahrten Stelle versichert, Menächmus habe die Kegelschnitte erfunden[1]). Eben dasselbe geht auch aus einer Bemerkung des Eratosthenes hervor. In jenem Epigramme nämlich, mit welchem er seinen Brief über die Würfelverdoppelung beschließt, und in welchem er Eudoxus den Göttlichen nennt, wie wir oben sagten, spricht er von den aus dem Kegel geschnittenen Triaden des Menächmus.

Menächmus, der Entdecker der Kegelschnitte und einiger ihrer Haupteigenschaften, scheint aber nicht im Zusammenhange von denselben gehandelt zu haben. Wenigstens sagt uns Pappus, daß ein gewisser Aristäus der Ältere zuerst über die Elemente der Kegelschnitte fünf Bücher herausgab. An einer zweiten Stelle erzählt er uns, daß Euklid dem Aristäus nachgerühmt habe, daß er sich durch die Herausgabe der Kegelschnitte verdient gemacht habe. Eine dritte Stelle des Pappus bestätigt endlich, was wir vorher nach Geminus über die Namen sagten, indem es dort heißt, Aristäus und alle anderen Mathematiker vor Apollonius nannten die drei Kegelschnittlinien den Schnitt des spitzwinkligen, rechtwinkligen und stumpfwinkligen Kegels[2]). Demselben Aristäus rühmt Pappus an der gleichen Stelle auch noch nach, daß er die bis jetzt einzig vorhandenen fünf Bücher körperlicher Örter in Zusammenhang mit den Kegelschnitten verfaßt habe, und Hypsikles weiß im zweiten vorchristlichen Jahrhundert, daß er eine Vergleichung der fünf regelmäßigen Körper verfaßte[3]). Das Zeitalter des Aristäus des Älteren läßt sich aus diesen Angaben ziemlich genau ableiten. Er muß mit seinem Werke über die regelmäßigen Körper später als Theaetet, der zuerst über diesen Gegenstand schrieb, mit seinem Werke über die Kegelschnitte später als Menächmus, der diese Kurven entdeckte, früher als Euklid, der das Werk lobte, aufgetreten sein. Man wird folglich keinenfalls weit fehlgehen, wenn man die schriftstellerische Tätigkeit des Aristäus auf die Jahrzehnte um 320 bestimmt. Das Mathematikerverzeichnis schweigt auffallenderweise über diesen ohne allen Zweifel hervorragenden Mann, und auch die anderen Quellen lassen uns im Stiche, wenn wir die Frage aufwerfen, wer wohl der Aristäus der Jüngere war, in Gegensatz zu welchem Pappus von dem Älteren redet?

Menächmus muß, wie wir soeben begründet haben, vor Aristäus

[1]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 111. [2]) Alle drei Stellen bei Pappus, VII, Praefatio (ed. Hultsch) 672, 676 und wieder 672. [3]) Hypsikles, Buch von den fünf regelmäßigen Körpern, Satz 2.

gesetzt werden. Der Zeit nach könnte er mithin leicht Mathematiklehrer Alexanders des Großen gewesen sein, wie in einem allerdings an sich wenig glaubwürdigen Geschichtchen erzählt wird[1]).

Dinostratus[2]), der Bruder des Menächmus, bediente sich Pappus zufolge zur Quadrierung des Kreises jener krummen Linie, deren Erfindung wir für Hippias von Elis in Anspruch nehmen mußten, und welche mutmaßlich nur von ihrer neuen Anwendung den Namen der Quadratrix erhielt (S. 197). Auch über das dabei eingeschlagene Verfahren gibt Pappus uns erwünschte Auskunft[3]). Es wird nämlich zunächst die Länge des Kreisquadranten gesucht und alsdann der Inhalt des Kreises als Hälfte des Rechtecks berechnet, welches die Kreisperipherie, oder das Vierfache des Quadranten, zur Grundlinie und den Kreishalbmesser zur Höhe hat. Jene Länge des Quadranten aber ist erstes Glied einer stetigen geometrischen Proportion, deren Mittelglied der Halbmesser und deren letztes Glied die Entfernung des Kreismittelpunktes von dem Endpunkte der Quadratrix ist (Fig. 40). Wäre nicht, wie behauptet wird, $BE\Delta : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma\Theta$, so wäre etwa $BE\Delta : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma K$ und $\Gamma K > \Gamma\Theta$. Man beschreibe mit Γ als Mittelpunkt und ΓK als Halbmesser einen zweiten Quadranten ZHK, welcher die Quadratrix in H schneidet. Da die Proportionalität der Quadranten und ihrer Halbmesser $BE\Delta : ZHK = \Gamma\Delta : \Gamma K$ zur Folge hat, so verbindet sich dieses Verhältnis mit dem vorhergehenden zu $ZHK = \Gamma\Delta = B\Gamma$. Wegen der Grundeigenschaft der Quadratrix ist auch Bogen $BE\Delta$: Bogen $E\Delta = B\Gamma : H\Lambda$ und, weil die konzentrischen Quadranten $BE\Delta$, ZHK durch den Halbmesser ΓHE geschnitten sind, ist ferner Bogen $BE\Delta$: Bogen $E\Delta$ = Bogen ZHK : Bogen $HK = B\Gamma$: Bogen HK. Daraus folgt wieder durch Verbindung zweier Verhältnisse Bogen $HK = H\Lambda$, was unmöglich ist. Die Annahme, daß der Punkt K zwischen Γ und Θ fiele, mithin $\Gamma K < \Gamma\Theta$ wäre (Fig. 41), führt gleichfalls zu Widersprechendem. Man beschreibt wieder mit Γ als Mittelpunkt und ΓK als Halbmesser einen Quadranten, so muß wieder $BE\Delta : ZMK = B\Gamma : \Gamma K$ sich verhalten. Voraussetzungsmäßig ist $BE\Delta : B\Gamma = B\Gamma : \Gamma K$, mithin $ZMK = B\Gamma$.

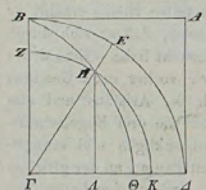

Fig. 40.

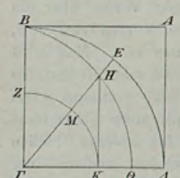

Fig. 41.

[1]) Vgl. Bretschneider 162—163. [2]) Hultsch in Pauly-Wisowa, Encyklopädie IV, 2396—2398. [3]) Pappus IV, 26 (ed. Hultsch) pag. 256.

Ferner findet das Verhältnis statt Bogen ZMK : Bogen MK = Bogen $BE\Delta$: Bogen $E\Delta$ und, weil $BH\Theta$ Quadratrix ist, auch Bogen $BE\Delta$: Bogen $E\Delta = B\Gamma : HK$, folglich Bogen ZMK : Bogen $MK = B\Gamma : HK$. In dieser Proportion ist, wie oben gezeigt wurde, das erste und dritte Glied übereinstimmend, also muß das Gleiche für das zweite und vierte Glied stattfinden, d. h. es muß Bogen $MK = HK$ sein, und das ist nicht möglich. Der Punkt K, dessen Entfernung vom Mittelpunkte Γ das Schlußglied der Proportion bildet, deren Anfangsglied die Quadrantenlänge und deren Mittelglied der Halbmesser ist, kann also weder rechts noch links von Θ fallen und muß deshalb Θ selbst sein. Warum *arc* $MK = HK$ unmöglich sei, verrät uns der Berichterstatter Pappus nicht. Er sagt nur *ὅπερ ἄτοπον*. Vielleicht ist der Beweis so zu denken, daß die Flächen des Kreisausschnittes ΓMK und des größeren Dreiecks ΓHK sich wie *arc* $MK : HK$ verhalten. Diese Beweisführung setzt freilich voraus, daß Dinostratus die Ausmessung des Kreises in Gestalt eines Rechtecks, welche, wie wir sagten, der Zielpunkt seiner Untersuchung war, schon als bekannt annahm.

Dieser Beweis ist nächst dem (S. 182) angeführten auf Pythagoras zurückgehenden Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ der erste indirekte Beweis, welchem wir begegnet sind, wenn wir auch keineswegs annehmen, hier sei wirklich zuerst die Zurückführung auf Widersprüche vorgenommen worden. Die analytische Methode, das haben wir ja gesehen, mußte den Beweis aus dem Gegenteil bevorzugen, als denjenigen, der eine nachfolgende Synthese entbehrlich machte (S. 221), und so wird auch wohl spätestens mit dieser Methode der apagogische Beweis entstanden sein — spätestens, denn es ist keineswegs unmöglich, daß er zum Zwecke der dem Hippokrates schon nicht fremden Exhaustion erfunden worden wäre. Zu dem bewiesenen Satze selbst wollen wir noch besonders hervorheben, was wir oben gelegentlich gesagt haben. Der Name der Quadratrix darf uns nicht irren, als ob es hier wirklich um eine Quadratur sich handelte. Diese folgt erst in zweiter Linie. Eine Rektifikation des Kreisquadranten ist vielmehr vorgenommen, und zwar dürfte es das erste Mal gewesen sein, daß diese Aufgabe behandelt wurde, um welche von jetzt an die Zahl der großen Probleme der Geometrie vermehrt ist.

„Theydius von Magnesia scheint sowohl in der Mathematik als auch in der übrigen Philosophie bedeutend zu sein; er schrieb auch sehr gute Elemente, wobei er vieles Spezielle verallgemeinerte. Ganz ebenso war Kyzikenus von Athen oder Athenaeus von Kyzikus, denn die griechische Form *ὁ Κυζικηνὸς Ἀθήναιος* kann beide Bedeutungen haben und ist bald so, bald so übersetzt worden[1]), um die nämliche Zeit lebend, sowohl in den anderen Wissenschaften als ganz besonders auch in der Geometrie berühmt. Alle diese verkehrten in der Akademie miteinander, indem sie ihre Untersuchungen gemeinschaftlich anstellten. Hermotimus von Kolophon führte das früher von Eudoxus und Theaetet Gefundene weiter aus, entdeckte vieles zu den Elementen Gehörige und schrieb einiges über die Örter. Philippus von Mende, des Platon Schüler und von ihm den Wissenschaften zugeführt, stellte nach Platons Anleitung Untersuchungen an und nahm sich das zur Bearbeitung, wovon er glaubte, daß es mit Platons Philosophie zusammenhänge. Die nun die Geschichte geschrieben haben, führten bis zu diesem Punkte die Entwicklung der Wissenschaft fort."

So der Schluß des alten Mathematikerverzeichnisses. Von den vier Männern, welche hier genannt sind, ist einer uns schon bekannt: Philippus von Mende. Es ist kaum einem Zweifel unterworfen, daß er derselbe ist, wie Philippus Opuntius (von Opus)[2]), daß er ein bedeutender Astronom war, zuerst wahrscheinlich mit optischen Untersuchungen sich beschäftigte und insbesondere den Regenbogen als Brechungserscheinung erkannte. Von den Arbeiten über Vieleckszahlen war (S. 169) die Rede. Auch die Literaturgeschichte ist unserem Philippus zu Dank verpflichtet, als demjenigen, der die 12 Bücher Gesetze des Platon herausgab und ein 13. Buch, die sogenannte Epinomis, als Anhang verfaßte. Von den drei übrigen Persönlichkeiten dagegen wissen wir so gut wie nichts. Es ist freilich mit hoher Wahrscheinlichkeit vermutet worden, die elementargeometrischen Sätze, welche bei voreuklidischen Schriftstellern, z. B. bei Aristoteles, vorkommen, müßten dem Elementenwerke des Theydius entnommen sein[3]). Von Hermotimus hieß es, er habe über die Örter geschrieben. Ein geometrischer Ort im allgemeinen ist der Inbegriff von Punkten, welche insgesamt gewisse Bedingungen erfüllen, die hinwiederum durch keinen Punkt außerhalb des geometrischen Ortes erfüllt werden. Pappus sagt uns weiter, daß man verschiedene Arten von Örtern unterschied[4]). Ebene Örter, *τόποι ἐπίπεδοι*, wurden die genannt, welche gerade Linien oder Kreislinien sind; körperliche Örter, *τόποι στερεοὶ*, die, welche Kegelschnitte sind; lineare Örter, *τόποι γραμμικοὶ*, die weder gerade Linien, noch Kreislinien, noch Kegelschnitte sind.

[1]) Bretschneider hat die erste, Friedlein die zweite Übersetzung angenommen. [2]) Aug. Böckh, Ueber die vierjährigen Sonnenkreise der Alten (Berlin 1863) S. 34—40. [3]) Heiberg in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XVIII, 4 (Leipzig 1904). [4]) Pappus VII, Praefatio (ed. Hultsch) pag. 662 und 672.

Es muß dabei einigermaßen auffallen, daß nach einer Nachricht, die wir ebendemselben Pappus verdanken, Aristäus der Ältere in zwei verschiedenen Schriften über Kegelschnitte und über körperliche Örter geschrieben haben soll. Man muß wohl annehmen, daß das eine Mal sein Zweck dahin ging, Eigenschaften der Kegelschnitte auseinanderzusetzen, das andere Mal Aufgaben zu lösen, bei denen Kegelschnitte als Mittel zur Auflösung dienten.

Wenn von allen zugleich behauptet wird, sie hätten in der Akademie verkehrt, so kann dieser Verkehr auch stattgefunden haben, nachdem der Stifter dieser Schule gestorben war. Platons unmittelbarer Nachfolger war Speusippus, Sohn der Potone, der Schwester Platons. Er schrieb über die pythagoräischen Zahlen, und ein Bruchstück dieses artigen Büchleins — *βιβλίδιον γλαφυρόν* — hat sich nebst dieser lobenden Benennung bei einem späten Schriftsteller erhalten[1]). Es ist darin von linearen Zahlen, von vieleckigen Zahlen, von Dreiecken, von Pyramiden die Rede, so daß dadurch der altpythagoräische Ursprung aller dieser arithmetischen Begriffe immer unzweifelhafter wird. Zweiter Nachfolger Platons war dann Xenokrates (geboren um 397, gestorben um 314), der wahrscheinlich 339 v. Chr. die Leitung der Akademie übernahm. Wir haben (S. 216) dessen bekannten Ausspruch über die Mathematik als Handhabe der Philosophie angeführt. Wir haben (S. 118) erwähnt, daß er möglicherweise eine historische Schrift über die Geometer verfaßt hat, welche, wie wir jetzt nach Diogenes Laertius ergänzen, aus fünf Büchern bestand. Noch andere vielleicht mathematische Schriften von ihm werden uns durch den gleichen Gewährsmann genannt[2]). Leider sind es nur Überschriften, die auf uns gelangt sind, ohne selbst die leiseste Andeutung über den Inhalt. Nur über eine Leistung des Xenokrates ist uns eine kurze Notiz erhalten, welche bedauern läßt, daß sie so kurz ist. Er habe auch gezeigt, sagt Plutarch, daß die Anzahl der aus allen Buchstaben zusammensetzbaren Silben 1002000000000 betrage[3]). Die Frage ist eine wesentlich kombinatorische. Kombinatorisch ist, wenn man will, bis zu einem gewissen Grade die Bemerkung Platons von den 59 Teilern, welche in 5040 enthalten seien (S. 225). Allein dort schien es notwendig zuzugeben, daß eine empirische Zählung zu diesem Ergebnisse ge-

[1]) Theologumena Arithmeticae (ed. Ast). Leipzig 1817, pag. 61—62. Eine mit Erläuterungen versehene Übersetzung der ganzen Stelle bei P. Tannery, Pour l'histoire de la science Hellène, pag. 386—390. [2]) Diogenes Laertius IV, 13. [3]) Plutarchus, *Quaest. Conviv.* VIII, 9, 13: *Ξενοκράτης δὲ τὸν τῶν συλλαβῶν ἀριθμὸν ὃν τὰ στοιχεῖα μιγνύμενα πρὸς ἄλληλα παρέχει μυριάδων ἀπέφηνεν εἰκοσάκις καὶ μυριάκις μυρίων.*

führt haben werde. Bei der Aufgabe des Xenokrates schließt die Größe der Zahl jede Zählung, ihre Abweichung von einer runden Zahl jede allgemein hingeworfene Abschätzung aus. Xenokrates muß gerechnet, nach einer kombinatorischen Formel gerechnet haben, und wenn dieselbe auch offenbar unrichtig gewesen sein muß, so wäre es nicht weniger wissenswert, die Formel und ihre Ableitung zu kennen. Eine Wiederherstellung derselben aus jener Zahl ist uns nicht gelungen.

Suchen wir ganz kurz zusammenfassend unserem Gedächtnisse einzuprägen, welcherlei Bedeutung Platon, seine außerhalb des Pythagoräismus stehenden Vorgänger und seine eigenen Schüler für die Entwicklung der Mathematik besaßen. Die Mathematik gewinnt in dieser Zeit an Umfang in einem zweifachen Sinne dieses Ausdrucks. Der Umfang nimmt zu durch neu entdeckte Sätze und Methoden. Der Umfang nimmt zu durch die Zahl der Persönlichkeiten, die mit Mathematik sich beschäftigen. Die letztere Zunahme begründet sich durch die Notwendigkeit, durch die Mathematik hindurch zur Philosophie zu gelangen. Die Neuentdeckungen gehören zu einem Teile den Elementen an, welche seit Hippokrates in wiederholter Ausarbeitung durch Leon und durch Theydius sich wesentlich vervollkommnen. Die philosophisch begründenden Kapitel der Mathematik bilden sich. Definitionen werden ausgesprochen. Methoden werden erfunden. Fragen nach der Möglichkeit des Geforderten, an die man früher kaum dachte, bilden jetzt eine unbedingte Voraussetzung. Aber diese Methoden, vornehmlich die Analyse und der Diorismus, äußern ihre hauptsächliche Wichtigkeit in der Lehre von den Örtern, in der höheren Mathematik des Altertums, welcher der andere Teil der Neuentdeckungen angehört. Es sind der Hauptsache nach drei Probleme, durch welche die höhere Mathematik, der Zirkel und Lineal nicht genügen, hervorgerufen wird: die Quadratur des Kreises, in der Form, wie Dinostratus sie behandelt, die Rektifikation mit einschließend, die Dreiteilung des Winkels, die Verdoppelung des Würfels. Die beiden letzten Probleme führen zur Erfindung mannigfacher Kurven, unter welchen die Kegelschnitte durch die später gewonnene Ausbildung ihrer Lehre an Wichtigkeit hervorragen. An sich aber sind sie kaum merkwürdiger als jene anderen krummen Linien, von denen eine, durch Archytas zum Zwecke der Würfelverdoppelung ersonnen, sogar eine Linie doppelter Krümmung ist. Die Kreisquadratur hat noch eine besondere Seite, mittels deren die höhere Mathematik des Altertums mit der der Neuzeit sich berührt. Sie erfordert Infinitesimalbetrachtungen. Das Unendlichgroße wie das Unendlichkleine sind dem Altertume keineswegs fremd. Nur wagte man nicht — zunächst vielleicht aus Scheu vor Angriffen, wie die eleatische Schule sie übte — eine unmittelbare Benutzung des Unendlichen sich zu gestatten. Die mittelbare Methode der Zurückführung auf das Unmögliche, später für diese Gattung von Aufgaben unter dem Namen der Exhaustion bekannt, diente zum Ersatze und zeigte sich als so wirksam, daß von nun an ein anderes Beweisverfahren gar nicht mehr gestattet worden wäre. So bleibt der Form nach die gesamte Mathematik einheitlich gestaltet als Geometrie, ohne daß ein äußerer Unterschied der Beweisführung zwischen niederer und höherer Geometrie obwaltete. Auch die Arithmetik fügt sich diesem einheitlichen Zusammenhange, sie nimmt mehr und mehr ein geometrisches Gewand an, dessen sie auch in dem nun folgenden Jahrhunderte, in der Glanzperiode griechischer Mathematik, sich nicht entkleiden wird.

Mit diesem Überblicke könnten wir füglich dieses Kapitel schließen. Wir sollten es vielleicht. Ganz äußerliche Gründe bestimmen uns einen kurzen Anhang nachzuschicken und in demselben Dinge zur Sprache zu bringen, die zur Bildung eines eigenen Kapitels stofflich nicht ausreichend den einheitlichen Charakter des folgenden Kapitels nur noch viel mehr entstellen würden, wenn wir vorzögen sie dorthin zu verweisen. Wir meinen die mathematische Bedeutung von Aristoteles und seinen nächsten Schülern.

Aristoteles[1]) ist 384 geboren, 322 gestorben. Seine Vaterstadt Stagira lag in der thrakischen, aber größtenteils von Griechen bewohnten Landschaft Chalkidike; sein Vater war Leibarzt des Königs Amyntas von Makedonien. Diese beiden Erbüberlieferungen beeinflußten sein Leben. Griechenland hat ihn gebildet, durch Makedoniens Könige hat er einen wesentlichen Teil seiner großartigen Kulturmission ausgeübt. Aristoteles war im 18. Jahre seines Lebens in die platonische Schule in Athen eingetreten, wo er Mitschüler des Xenokrates war, und verließ diese Stadt, in welcher er übrigens auch selbst eine Rednerschule im Gegensatze zur Akademie eröffnete, im Jahre 347 nach Platons Tode. Von 343 bis 340 etwa war er als Erzieher Alexanders des Großen am makedonischen Hofe, verwandte dann die nächsten Jahre zur Abfassung von für seinen Zögling bestimmten Schriften und eröffnete etwa 334 in Athen bei dem Tempel des Apollo Lykeios seine Vorträge. Lustwandelnd in den Baumgängen des anstoßenden Gartens wurden die Peripatetiker die zahlreichste Philosophenschule. Die Beziehungen des Aristoteles zu Alexander blieben auch aus der Ferne die besten, bis 328 die Leidenschaftlichkeit des aufbrausenden Fürsten einen unheilvollen Riß her-

[1]) Vgl. Zeller, Die Philosophie der Griechen. Bd. II, 2, S. 1 flgg.

vorbrachte. Das hinderte freilich nicht, daß die nach Alexanders Tode 322 sich aufraffenden Athener Aristoteles mit ihrem Hasse bedrohten. Er floh nach Chalkis und starb dort innerhalb Jahresfrist.

Wir haben von den Leistungen des großen Stagiriten hier nur einen kleinsten Bruchteil zu besprechen. Seine astronomischen, seine physikalischen, seine naturbeschreibenden Schriften kümmern uns als solche nicht. Seine eigentlich philosophischen Werke haben für uns nur mittelbare Bedeutung. So haben wir dessen, was er in seiner Physik über das Unendlichgroße und das Unendlichkleine sagt, schon früher (S. 204) gedacht, und mit Bewunderung bei ihm eine Auffassung erkannt, welche den Anschauungen unserer eigenen Zeit recht nahe kommt.

Man könnte vielleicht erwarten, daß wir in den Schriften des Aristoteles die zahlreichen Beispiele absuchten, welche der Geometrie und der Arithmetik entnommen sind[1]. Wir werden uns dieser Mühe nicht unterziehen, denn nur verhältnismäßig wenige dieser Stellen besitzen eine geschichtliche Bedeutsamkeit. Auf einiges durften wir hinweisen, als wir mit der Mathematik der Pythagoräer uns beschäftigten, so insbesondere auf die Erklärung des Gnomon (S. 162), auf das Vorkommen des Wortes Dreieckszahl (S. 168), auf den Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ (S. 182), welche uns wertvoll waren. Auf anderes wollen wir jetzt die Aufmerksamkeit lenken, an den viel häufigeren uns unwichtig scheinenden Stellen mit Schweigen vorübergehend. Wir erwähnen als aristotelisch den Satz, daß die Außenwinkel eines geradlinigen ebenen Vielecks die Winkelsumme von vier Rechten besitzen, wo die Außenwinkel so gemeint sind, daß jede Vielecksseite einseitig, und an jedem Eckpunkte nur eine Vielecksseite verlängert ist[2]. Aus diesem Satze geht zweifellos hervor, daß über die Winkelsumme des Dreiecks hinaus jetzt auch die Winkelsumme des nach außen konvexen Vielecks von n Seiten bekannt gewesen sein muß. Wir erwähnen ferner, daß, während bei Platon der Gegensatz der Rechenkunst und der Zahlenlehre, Logistik und Arithmetik, scharf und bestimmt vorhanden war, erst bei Aristoteles ein ähnlicher Gegensatz zwischen der Feldmeßkunst und der wissenschaftlichen Raumlehre, Geodäsie und Geometrie, nachweisbar ist[3]. Wir

[1]) Eine derartige wenn auch nicht vollständige Zusammenstellung hat ein bologneser, dem Jesuitenorden angehöriger Professor der Mathematik Biancani (Blancanus) unter dem Titel *Aristotelis loca mathematica* 1615 veröffentlicht. Neuen Ursprungs sind Görland, Aristoteles und die Mathematik (Marburg 1899), sowie Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles (Leipzig 1904 in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XVIII, 1—49). [2]) Aristoteles, Analyt. post. γ, 94, 8 und δ, 14, 9. Vgl. Blancanus l. c. pag. 61—62. [3]) Aristoteles, Metaphys. II, 2 *ἅμα δὲ οὐδὲ τοῦτο ἀληθές, ὡς ἡ γεωδαισία τῶν αἰσθητῶν ἐστι μεγεθῶν καὶ φθαρτῶν.*

können anführen, daß Aristoteles weiß, daß eine zylindrische Rolle, welche durch eine Ebene parallel oder geneigt zur Endfläche geschnitten wird, im aufgerollten Zustande das eine Mal eine gerade Linie, das andere Mal eine Kurve zeigt[1], daß ihm somit der Zylinderschnitt neben dem Kegelschnitte schon bis zu einem gewissen Grade merkwürdig war. Wir müssen wohl eines eigentümlichen, vielleicht aus dem Elementenwerke des Theydius (S. 247) stammenden Beweises der Winkelgleichheit an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks gedenken[2]. Aus der Spitze K des Dreiecks als Mittelpunkt (Fig. 41a) wird der Kreis $ABA'B'$ beschrieben, der AA' und BB' als Durchmesser besitzt. Nun sind alle Winkel, welche ein Kreisdurchmesser mit der Peripherie bildet, einander gleich, also $\angle KAE = KBE$. Ferner sind die Winkel Γ, Δ (oder BAE, ABE) einander gleich, welche eine Sehne mit dem von ihr bespannten Bogen bilden. Zieht man diese beiden Gleichungen zwischen je zwei gemischtlinigen Winkeln voneinander ab, so bleibt die Gleichung zwischen den beiden geradlinigen Winkeln A, B übrig. Wir können hinweisen auf Aristoteles als vermutlich den ersten, der die so bedeutsame Frage sich vorlegte, warum wohl nahezu alle Menschen nach der Grundzahl 10 zählen, und der in der Fingerzahl unserer Hände den Grund erkannte[3]. Wir finden auch bei Aristoteles den Keim zu einem Gedanken, der der fruchtbarsten einer für die ganze Mathematik geworden ist.

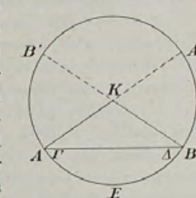

Fig. 41a.

Aristoteles bezeichnete nämlich unbekannte Größen, und zwar nicht bloß Längen, durch einfache Buchstaben des Alphabetes[4]. Eine Stelle lautet z. B.: Wenn A das Bewegende, B das Bewegtwerdende, Γ aber die Länge, in welcher es bewegt worden ist, und Δ die Zeit ist, in welcher es bewegt worden ist, so wird die gleiche Kraft wie A in der gleichen Zeit auch die Hälfte des B doppelt so weit als Γ bewegen, oder auch in der Hälfte der Zeit Δ gerade so weit als Γ. Man hat in diesen und ähnlichen Sätzen der Physik des Aristoteles die Ahnung des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit gefunden[5].

[1]) Aristoteles Problem. XVI, 6. [2]) Blancanus l. c. pag. 38. Heiberg l. c. S. 25—26. [3]) Aristoteles Problem. XV. [4]) Aristoteles, Physic. VII und VIII passim z. B. Bd. I, pag. 240 bis 250 der Aristoteles-Ausgabe der Berliner Akademie. [5]) Poggendorff, Geschichte der Physik. Leipzig 1879, S. 242.

Andere mechanische Betrachtungen hat Aristoteles in einem besonderen Werke[1]) niedergelegt, bei welchem wir einen Augenblick verweilen müssen. Die Echtheit der Mechanik des Aristoteles ist allerdings mehrfach geleugnet worden, und unter den Zweiflern befinden sich Männer, die, wenn auch dem Inhalte jenes Werkes gegenüber Laien, jedenfalls mit der Ausdrucksweise des vermuteten Verfassers aufs genaueste bekannt waren[2]). Wir besitzen selbst die sprachlichen Kenntnisse nicht in dem Maße, welches erforderlich wäre um über die Berechtigung oder Nichtberechtigung der Ausscheidung der Mechanik zu entscheiden. Soviel dürfte indessen zu behaupten sein, daß die Mechanik im aristotelischen Geiste verfaßt ist, daß ein innerer Widerspruch gegen andere Schriften des großen Gelehrten nicht nachgewiesen ist[3]). Behaupten darf man auch, daß die Möglichkeit einer aristotelischen Mechanik ebensowenig geleugnet werden kann als die geistige Bedeutsamkeit der unter diesem Titel auf uns gekommenen Schrift.

Eine Mechanik konnte Aristoteles schreiben. Es war zu seiner Zeit schon eine solche von Archytas von Tarent vorhanden (S. 236), der sich bei dieser seiner methodischen Behandlung der Mechanik geometrischer Grundsätze bediente[4]). Es waren auch von der eleatischen Schule aus gegen die ganze Bewegungslehre Angriffe erfolgt (S. 199), die es nicht unwahrscheinlich machen, daß Aristoteles, der seine allgemeinen Abweisungen jener Zenonischen Lehren in einer besonderen Schrift über unteilbare Linien weitläufiger ausführte, ergänzend auf positive Weise zeigen wollte, wie die als möglich und als wirklich behauptete Bewegung vor sich gehe. Dazu kam aber ein anderer Zweck, welcher den mechanischen Problemen des Aristoteles — so lautet der eigentliche Titel der Schrift — eine besondere dialektische Bedeutung gibt und damit deren Echtheit

[1]) *Aristotelis Quaestiones mechanicae* ed. J. P. van Cappelle. Amsterdam 1812. Vgl. auch eine Abhandlung von Burja, *Sur les connaissances mathématiques d'Aristote* in den *Mémoires de l'académie de Berlin* für 1790 und 1791 und besonders Fr. Th Poselger: Ueber Aristoteles mechanische Probleme, eine in der Berliner Akademie am 9. April 1829 gelesene Abhandlung (Berlin 1831). [2]) Vgl. z. B. Brandis, Geschichte der Entwicklungen der griechischen Philosophie und ihrer Nachwirkungen im römischen Reiche. Berlin 1862. I, 396. [3]) Genau die gleiche Ansicht auch bei P. Duhem, *Les origines de la statique* I, 5—9 (Paris 1905). Heiberg l. c. S. 31 flg. bezweifelt die Echtheit des aristotelischen Ursprunges aus sprachlichen Gründen, namentlich wegen des Vorkommens des Wortes τετράπλευρον für Viereck, welches erst Euklid eingeführt habe. Er gibt aber S. 32 selbst zu, daß diese S. 15 behauptete Einführung durch Euklid „nur eine Vermutung, wenn auch eine sehr wahrscheinliche" sei. [4]) Diogenes Laertius VIII, 83.

gewährleistet. Es sollten Aporien aufgestellt werden, d. h. Fragen der Mechanik gesammelt werden, welche Widersprüche zu enthalten scheinen, und deren Behandlung erweisen sollte, wie solche scheinbare Widersprüche sich lösen lassen[1]).

Die sogenannte Mechanik des Aristoteles würde, sagen wir, seines Namens nicht unwürdig sein. Ein Schriftsteller des XVIII. S. hat zwar darüber so ziemlich das entgegengesetzte Urteil gefällt[2]), dürfte jedoch damit vermutlich allein stehen. Ein Werk, in welchem die Zusammensetzung rechtwinklig zueinander wirkender Kräfte gelehrt ist[3]), in welchem ausdrücklich die an dem Hebel anzubringenden sich im Gleichgewicht haltenden Lasten den Längen der Hebelarme umgekehrt proportional gefunden werden[4]), in welchem als Grund dafür der größere Kreisbogen genannt ist, durch welchen die vom Stützpunkte des Hebels weiter entfernte Last sich bewegen muß: ein solches Werk ist wahrlich keines antiken Schriftstellers unwürdig, mögen auch einige Fragen in demselben nicht richtig beantwortet sein.

Zu diesen nicht richtig beantworteten Fragen gehört eine, welche schon überhaupt gestellt zu haben einen feinen mathematischen Geist verrät. Es seien (Fig. 42) zwei konzentrische Kreise $\varepsilon\beta\eta$ und $\delta\gamma\zeta$. Rollt der kleinere Kreis allein auf der Geraden $\eta\theta$, so wird $\eta\varkappa$ seinem Quadranten gleich; mithin, wenn β nach $\varkappa$ gekommen ist, wird die $\beta\alpha$ senkrecht auf $\eta\theta$ stehen. Rollt der größere Kreis allein auf der Geraden $\zeta\iota$, so wird $\zeta\iota$ seinem Quadranten gleich; mithin steht die $\gamma\alpha$ senkrecht auf $\zeta\iota$, wenn γ nach ι gekommen ist. Nun seien die beiden konzentrischen Kreise zu einem Rade verbunden. Jetzt stellen $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ eine starre Linie vor, die nicht getrennt werden kann, und es muß folglich

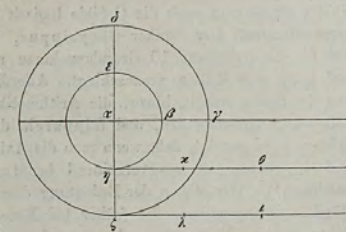

Fig. 42.

[1]) Poselger l. c. S. 6. [2]) Montucla, *Histoire des mathématiques* (II. édition) I, 187. [3]) Der Satz von dem Parallelogramm der Kräfte in der hier angegebenen Beschränkung blieb bekannt. So führt ihn beispielsweise Proklus (ed. Friedlein pag. 106 lin. 3—6) an. Vgl. Majer, Programm des Stuttgarter Gymnasiums für 1880—81, S. 13 und 24. [4]) *Quaest. mechan.* cap. IV, pag. 29. Burja hat l. c. diese Stelle mißverstanden, wie van Cappelle in seinen Anmerkungen S. 183 mit Recht bemerkte.

beim Rollen des inneren Radkreises längs $\eta\theta$ schon, wenn β in $\varkappa$ angekommen ist, γ in λ angekommen sein, also der Bogen $\zeta\gamma$ einmal der Strecke $\zeta\iota$, einmal der Strecke $\zeta\lambda$ gleich sein. Dieses Paradoxon wußte allerdings Aristoteles nicht zu lösen, und er hatte darin Nachfolger bis in das XVII. S. n. Chr. Erst rationelle Zerlegung der zusammengesetzten Kreisbewegung konnte zur richtigen Erkenntnis führen, daß in der Tat das Wälzen einer Kurve auf einer Geraden nicht immer die Gleichheit des krummlinigen und des geradlinigen Stückes zur Folge haben müsse, die nacheinander zur Deckung kommen [1].

Bei Aristoteles sind wir auch wohl berechtigt Kenntnisse jenes Kapitels der allgemeinen Wissenschaftslehre vorauszusetzen, von welchem wir bei Xenokrates die ersten uns zur Kenntnis gekommenen Spuren bemerkten. Wir meinen die Kombinatorik. Aristoteles hat die Dialektik der Sophisten zur eigentlichen Syllogistik ausgebildet, und die verschiedenen Arten von Schlüssen, welche er in Auseinandersetzung dieser Lehre unterscheidet, erschöpfen in der Tat sämtliche Möglichkeiten. Es ist somit hier tatsächlich eine Aufzählung der Kombinationen gewisser Elemente in ihrer Vollständigkeit gegeben. Später zählte man auch die Gebilde logisch möglicher Begriffszusammenstellungen. Der Stoiker Chrysippus, welcher 282—209 lebte, hat die Zahl der aus 10 Grundannahmen möglichen Vereinigungen auf über eine Million veranschlagt. Allerdings setzt Plutarch, der uns die Sache erzählt, hinzu, die Arithmetiker seien mit Chrysippus keineswegs einverstanden, und Hipparch, der zu den Arithmetikern gehöre, habe gezeigt, daß, wenn man die Axiome bejahend ausspreche 103049, wenn man sie verneinend benutze 310952 Verbindungen entstehen [2]. Wir stehen der Bedeutung dieser Zahlen gerade so verständnislos gegenüber, wie früher bei Xenokrates seiner Zahl möglicher Silben. Wir ziehen aber aus den Zahlen selbst die gleiche Folgerung, daß den Griechen kombinatorische Fragen nicht vollständig fremdartig waren, und daß sie auf irgend eine Weise Formeln, mit größter Wahrscheinlichkeit falsche Formeln, zu deren Beantwortung benutzten.

Bei einem Schüler des Aristoteles begegnen wir gleichfalls praktischer Kombinatorik in der Gestalt einer vollständigen Aufzählung aller Möglichkeiten der Vereinigung gewisser Elemente. Wir denken

[1]) Über das Rad des Aristoteles vgl. auch Heron, Mechanik I, 7 (Opera II, 1 S. 16 ed. Nix). Ferner s. Klügel, Mathematisches Wörterbuch (fortgesetzt von Mollweide) Bd. IV, S. 171—174 unter: Rad, aristotelisches. [2]) Plutarchus, *Quaestion. Convivial.* VIII, 9, 11 und 12 sowie auch *De Stoicorum repugnantiis* XXIX, 3 und 5.

dabei an Aristoxenus von Tarent, den Erfinder der aus Längen und Kürzen zusammengesetzten Versfüße.

Ein anderer Schüler des Aristoteles, Dikaearchus, hat sich möglicherweise schon der Dioptra bedient, einer feldmesserischen Vorrichtung, von welcher im 18. Kapitel ausführlich die Rede sein wird. Die Worte des Theon von Smyrna [1]): „Der Höhenunterschied der höchsten Berge von den tiefsten Orten der Erde beträgt nach der Senkrechten 10 Stadien, wie Eratosthenes und Dikaearch gefunden zu haben behaupten, und so bedeutende Größen werden durch Werkzeuge untersucht mit Hilfe von Dioptern, welche aus den Abständen die Größen messen“ [2]), lassen wenigstens die Deutung zu, als ob die Bemerkung der zweiten Hälfte des Satzes auch schon auf die Zeit der genannten Geodäten, und nicht erst auf die Gegenwart des Schriftstellers sich bezöge.

Unter den anderen ältesten Peripatetikern nennen wir Theophrastus von Lesbos und Eudemus von Rhodos, deren ersteren Aristoteles selbst zu seinem Nachfolger ernannte. Beide haben, wie im 4. Kapitel erzählt worden ist, historisch-mathematische Schriften angefertigt, deren Inhalt wir jetzt annähernd schätzen können, da er gerade so weit reichen konnte, als wir in unseren bisherigen auf Griechenland bezüglichen Auseinandersetzungen erörtert haben. Mit der Schätzung dieses Inhaltes steigert sich das Bedauern über den Verlust jener umfangreichen Schriften. Theophrast und Eudemus waren für Jahrhunderte die Letzten, welche der Geschichte der Mathematik eigene Werke zuwandten, oder es haben doch ihre Nachfolger, wenn sie welche hatten, nicht gewagt weiter als sie in der Zeit des Berichteten hinabzusteigen. Das liegt in den Worten, die uns (S. 248) den Schluß des Mathematikerverzeichnisses bildeten: „Die nun die Geschichte geschrieben haben, führten bis zu diesem Punkte die Entwicklung der Wissenschaft fort.“ Mag dieser Ausspruch dem Verfasser jenes Verzeichnisses angehören, mag er ein Zusatz des Proklus sein, jedenfalls nahm dieser ihn unverändert auf und bezeugt damit die Tatsache selbst. Zugleich hat man aber in jenen Worten einen Beweggrund gefunden das Mathematikerverzeichnis als von Eudemus herrührend anzusehen, eine Meinung, zu welcher auch wir uns bekennen.

[1]) Theo Smyrnaeus (ed. Hiller, Leipzig 1879) pag. 124—25. Ob die Zahlenangabe „10 Stadien“, welche auf einer Einfügung von Hiller beruht, richtig ist oder nicht, ist für unsere Verwendung des Satzes unerheblich. [2]) *καὶ ὀργανικῶς δὲ ταῖς τὰ ἐξ ἀποστημάτων μεγέθη μετρούσαις διόπτραις τηλικαῦτα θεωρεῖται.* Auf diese Stelle und die in ihr vielleicht enthaltene frühe Datierung der Dioptra hat P. Tannery aufmerksam gemacht.