VORLESUNGEN

ÜBER

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

MORITZ CANTOR.

ERSTER BAND.

VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS ZUM JAHRE 1200 N. CHR.

MIT 114 FIGUREN IM TEXT UND 1 LITHOGR. TAFEL.

DRITTE AUFLAGE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

Vorwort.

Als ich im Dezember 1893 der zweiten Auflage dieses 1. Bandes meiner Vorlesungen über Geschichte der Mathematik ein Vorwort zur Begleitung gab, äußerte ich mich in einer Weise, die heute Wiederholung finden könnte. Abermals liegt ein Zwischenraum von 13 Jahren zwischen dem Erscheinen der vorigen und der neuen Auflage. Abermals habe ich gesucht, die Ergebnisse zu verwerten, welche neue Bearbeiter des geschichtlichen Bodens, die sich von Jahr zu Jahr mehren, gewonnen haben oder gewonnen zu haben wähnen. Abermals spreche ich die Überzeugung aus, daß jener Boden noch lange nicht erschöpft ist, daß es immer noch offene Fragen gibt, über deren Beantwortung man uneinig sein kann, und daß es die Pflicht des gewissenhaften Geschichtschreibers ist, seine Leser auf die Streitpunkte aufmerksam zu machen. Ich hoffe dieser Pflicht genügt zu haben.

Heidelberg, Dezember 1906.

Moritz Cantor.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Längst war der Erdball so weit erkaltet, daß auf der festgewordenen Oberfläche Organismen sich entwickeln konnten. In Zeiträumen, deren jeder weitaus die Spanne übertrifft, welche wir mit dem stolzen Namen der Geschichte belegen — als ob nur durch den Menschen etwas geschehen könnte! — hatten neue und neue Arten lebender Wesen sich abgelöst. Jetzt erschien der Mensch, ausgezeichnet durch Entwicklungsfähigkeit vor allen anderen Geschöpfen, hilflos wie keines in das Leben tretend, mächtig wie keines auf dem Gipfel seiner Ausbildung.

Der einzelne Mensch liefert nur das verkleinerte Bild des Menschengeschlechtes. Die Entwicklung des Menschengeistes hat in den, Völker genannten, Gesamtheiten stattgefunden, und ihre aufeinanderfolgenden Stufen zu vergleichen ist von spannender Anziehung.

Eines dürfen wir freilich bei Anerkennung der Ähnlichkeit der Entwicklung des Einzelmenschen mit der des Menschengeschlechtes nicht außer Augen lassen. Das Kind lernt vom Tage seiner Geburt an durch Menschen. Das Menschengeschlecht begann damit, von niedrigeren Geschöpfen lernen zu müssen. Werden doch wohl Tiere sein Vorbild gewesen sein, aus deren Beispiel er entnahm, wie man den Durst, den Hunger stille, wie man in Höhlen Schutz suche vor der Unbill der Witterung, wie man zur Wehr sich setze gegen feindlichen Angriff. Aber der Mensch war schwächeren Körpers als seine Lehrmeister. Ihm war nicht eine dichtere Behaarung während der kälteren Jahreszeiten gegeben. Er konnte nicht mit Händen und Zähnen des Bären oder der Hyäne Herr werden, denen er, die ihm den Aufenthalt streitig machten. Und seine Schwäche wurde seine Stärke. Er mußte denken! Er mußte erfinden, wenn er leben wollte. Er mußte von der ihm äußerlich gebotenen Erfahrung weiter schreiten. Das Tier führte ihn zum Baume der Erkenntnis, die Frucht desselben pflückte er selbst.

Mit dem Gedanken war das Bedürfnis der Mitteilung desselben erwacht, die Sprache entstand. Der Mensch lernte den Menschen verstehen, nicht nur in dem Sinne wie das Tier das Tier versteht, nicht nur, wo es den Ausdruck besonders starker Empfindungen durch Tonbildung galt, sondern wo bestimmte Ereignisse oder gar Begriffe zur Kenntnis des anderen gebracht werden sollten. Freilich begann die Sprachbildung nicht erst, als die Begriffsbildung abgeschlossen war. Ist doch erstere wie letztere bis auf den heutigen Tag noch im Flusse. Die beiden Tätigkeiten gingen offenbar nebeneinander einher, und selbst Begriffe, welche einer und derselben Gedankenreihe entstammen, sind mit ihrer lautlichen Versinnlichung als zu verschiedenen Zeiten entstanden zu denken. Für das Sprachliche an dieser Behauptung ist es nicht schwer den Beweis zu führen, auch nur unter Zuziehung solcher Wörter, die dem Mathematiker von ältester und hervorragendster Wichtigkeit sind; wir meinen die Zahlwörter.

Zählen, insofern damit nur das bewußte Zusammenfassen bestimmter Einzelwesen gemeint ist, bildet, wie scharfsinnig hervorgehoben worden ist[1]), keine menschliche Eigentümlichkeit; auch die Ente zählt ihre Jungen. Diesem niedersten Standpunkte ziemlich nahe bleibt das, was von einem südafrikanischen Stamme berichtet wird[2]), daß während wenige weiter zählen können als zehn, dessenungeachtet ihre Vorstellung von der Größe einer Herde Vieh so bestimmt ist, daß nicht ein Stück daran fehlen darf, ohne daß sie es sogleich merkten. „Wenn Herden von 400 bis 500 Rindern zu Hause getrieben werden, sieht der Besitzer sie hereinkommen und weiß bestimmt ob einige fehlen, wieviel und sogar welche. Wahrscheinlich haben sie eine Art zu zählen, bei welcher sie keine Worte brauchen und wovon sie nicht Rechenschaft zu geben wissen, oder ihr Gedächtnis erlangt für diesen einzelnen Gegenstand durch die Übung eine so ungemeine Stärke.“ Ohne nach so fernen Gegenden unseren Blick zu richten, können wir ähnliche Erfahrungen täglich an ganz kleinen Kindern machen, welche sofort wissen, wenn von Dominosteinen etwa, mit denen sie zu spielen gewohnt sind, ein einzelner fehlt, während sie sich und anderen über die Anzahl ihrer Steine noch nicht Rechenschaft zu geben wissen. Sie kennen eben die Einzel-Individuen als einzelne, nicht als Teile einer Gesamtheit, und ihr Gedächtnis ist

[1]) H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874. S. 7. Wir zitieren dieses Buch künftig immer als Hankel. Einen ganz ähnlichen Gedanken hat (nach Kaestner, Geschichte der Mathematik I, 242) auch schon Pietro Bongo (oder Bungus) in seinem Werke *Numerorum mysteria* (1599, II. Auflage 1618) ausgesprochen. [2]) Pott, Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Welttheile, Halle 1847. S. 17. Dieses Buch zitieren wir in der ganzen Einleitung als Pott I, während Pott II die Schrift desselben Verfassers: Pott, Die Sprachverschiedenheit in Europa an den Zahlwörtern nachgewiesen, sowie die quinäre und vigesimale Zählmethode. Halle 1868, bedeuten soll.

für die Erinnerung an Angeschautes um so treuer, je weniger andere Eindrücke es zu bewahren hat. In der Sprache drückt sich diese Individualisierung nicht selten dadurch aus, daß dieselbe Anzahl je nach den gezählten Dingen einen anderen Namen führt, wie es bei manchen ozeanischen Völkerstämmen, aber auch für Sammelwörter im Deutschen vorkommt, wenn man von einem Koppel Hunde oder, wenn deren mehrere sind, von einer Meute Hunde, von einer Herde Schafe, von einem Rudel Hirsche, von einer Flucht Tauben, von einer Kette Feldhühner, von einem Zug Schnepfen, von einem Schwarm Bienen zu reden pflegt[1]).

Das eigentliche Zählen, das menschliche Zählen, wenn man so sagen darf, setzt voraus, daß die Gegenstände als solche gleichgültig geworden sind, daß nur das getrennte Vorhandensein unterschiedener Dinge begrifflich erfaßt, dann sprachlich bezeichnet werden soll. Es liegt darin bereits eine keineswegs unbedeutende Äußerung der Fähigkeit zu verallgemeinern, zugleich auch eine ihrer frühesten Äußerungen, denn die Zahlwörter gehören zu den ältesten Teilen des menschlichen Sprachschatzes. In ihnen lassen sich oft noch Ähnlichkeiten, mithin Beweise alter Stammesgemeinschaft später getrennter Völker auffinden, während kaum andere Wörter auf die gleiche Zeit eines gemeinsamen Ursprunges zurückdeuten. Und was war nun der ursprüngliche Sinn dieser ältesten, der Entstehungszeit wie dem Inhalte nach ersten Zahlwörter? Die Annahme hat gewiß viel für sich, daß sie anfänglich nicht Zahlen, sondern ganz bestimmte Gegenstände bedeuteten, sei es nun, daß man von der eigenen, von der angeredeten, von der besprochenen Persönlichkeit, also von den Wörtern: ich, du, er ausging, um aus ihnen den Urklang für: eins, zwei, drei zu gewinnen[2]), sei es, daß man von Gliedmaßen seines Körpers deren Anzahl entnahm[3]): „Es war dem Menschen ohne Zweifel ein eben so interessantes Bewußtsein fünf Finger als zwei Hände oder zwei Augen zu haben; und das Interesse an dieser Kenntnis, welche einmal einer Entdeckung bedurfte, war ihm die Schöpfung eines zu deren Zählung eigens verwendbaren Ausdruckes wohl wert; von hier aus mag der Gebrauch auf andere zu zählende Dinge übertragen worden sein, zunächst auf solche, bei denen es auffallen mochte, daß sie in ebenso großer Zahl vorhanden waren, als die Hand Finger hat.“ Wir wiederholen es, solche Annahmen haben viel für sich, sie tragen ihre beste Empfehlung in sich selbst, aber leider auch ihre einzige. Die Sprachforschung hat nicht vermocht deren Bestätigung zu liefern,

[1]) Pott I, S. 126. [2]) Pott I, S. 119. [3]) L. Geiger, Ursprung und Entwickelung der menschlichen Sprache und Vernunft. 1868. Bd. I, S. 319.

oder vielmehr jeder, der mit der Deutung der Zahlwörter sich befaßte, hat aus ihnen diejenigen Zusammenhänge zu erkennen gewußt, welche seiner Annahme entsprachen, lauter vollgelungene Beweise, wenn man den einen hört, sich gegenseitig vernichtend, wenn man bei mehreren sich Rat holt, und dieser mehreren sind obendrein recht viele. Sind demnach die eigentlichen Fachmänner über Ursprung der ältesten einfachen Zahlwörter im Hader, so müssen wir um so mehr darauf verzichten, auf die noch keineswegs erledigten Fragen hier einzugehen. Einige Sicherheit tritt erst bei Besprechung der abgeleiteten, also jüngeren Zahlwörter hervor.

Es ist leicht begreiflich, daß auch die regste Einbildungskraft, das stärkste Gedächtnis es nicht vermochten, für alle aufeinander folgenden Zahlen immer neue Wörter zu bilden, zu behalten. Man mußte mit Notwendigkeit sehr bald zu gewissen Zusammensetzungen schreiten, welchen die Entstehungsweise einer Zahl aus anderen zugrunde liegt, welche uns aber damit auch schon einen unumstößlichen Beweis für die hochwichtige Tatsache liefern: daß zur Zeit, als die meisten Zahlwörter erfunden wurden, der Mensch von dem einfachsten Zählen bereits zum Rechnen vorgeschritten war.

Das älteste Rechnen dürfte durch ein gewisses Anordnen vermittelt worden sein, sei es der Gegenstände selbst, denen zuliebe man die Rechnung anstellte, sei es anderer leichter zu handhabender Dinge. Kleine Steinchen, kleine Muscheln können die Vertretung übernommen haben, wie sie es noch heute bei manchen Völkerschaften tun, und diese Marken, diese Rechenpfennige würde man heute sagen, werden in kleinere oder größere Häufchen gebracht, in Reihen gelegt das Zusammenzählen ebenso wie das Teilen einer gegebenen Menge wesentlich erleichtert haben. So lange man es nur mit kleinen Zahlen zu tun hatte, trug man sogar das leichteste Versinnlichungsmittel stets bei sich: die Finger der Hände, die Zehen der Füße. Man reichte freilich unmittelbar damit nicht weit, und Völkerschaften des südlichen Afrika zeigen uns gegenwärtig noch, wie genossenschaftliches Zusammenwirken die Schwierigkeit besiegt, mit nur zehn Fingern größere Anzahlen sich zu versinnlichen[1]): „Beim Aufzählen, wenn es über Hundert geht, müssen in der Regel immer drei Mann zusammen diese schwere Arbeit verrichten. Einer zählt dann an den Fingern, welche er einen nach dem andern aufhebt und damit den zu zählenden Gegenstand andeutet oder womöglich berührt, die Einheiten. Der zweite hebt seine Finger auf (immer mit dem kleinen

[1]) Schrumpf in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft XVI, 463.

Finger der linken Hand beginnend und fortlaufend bis zum kleinen Finger der Rechten) für die Zehner, so wie sie voll werden. Der dritte figuriert für die Hunderte.“

Die hierbei festgehaltene Ordnung der Finger mag man nun erklären wollen, wie es auch sei[1]), sie findet statt und wird uns im Verlaufe der Untersuchungen als Grundlage des sogen. Fingerrechnens noch mehr als einmal begegnen. Sie wird sogar abwechselnd mit der entgegengesetzten Ordnung benutzt, um einem einzelnen zu ermöglichen beliebig viele Gegenstände abzuzählen. Ist nämlich mit dem kleinen Finger der rechten Hand die Zehn erfüllt worden, so beginnt mit eben demselben allein aufgehoben die nächste Zehnzahl, um dieses Mal nach links sich fortzusetzen, d. h. der kleine Finger der linken Hand vollendet die Zwanzig und wird zugleich auch wieder Anfang der nächsten Zehnzahl usf. Natürlich muß bei dieser Zahlenangabe, wenn es nicht um ein allmähliches Entstehen, sondern um ein einmaliges Ausdrücken einer Zahl sich handelt, besonders angedeutet werden, daß und wie oft Zehn vollendet wurde, was etwa so geschehen kann wie bei den Zulukaffern[2]), die in solchem Falle beide Hände mit ausgestreckten Fingern wiederholt zusammenschlagen.

Es ist wohl zu beachten, daß diese letztere Methode der Versinnlichung einer Zahl, einfacher insoweit als sie nur die Hände eines einzigen beschäftigt, begrifflich weit unter jener anderen Methode steht, die unmittelbar vorher gekennzeichnet wurde und drei oder gar noch mehrere Darsteller einer Zahl erfordert. Der einzelne kommt durch die Zehnzahl der menschlichen Finger allerdings dazu, die Gruppe Zehn als eine besonders hervortretende zu erkennen, aber wie oft diese Gruppe selbst auch erzeugt werde, jede Neuerzeugung ist für ihn der anderen ebenbürtig. Ganz anders bei der Methode stufenmäßiger Darstellung durch mehrere Personen. Wie der Erste so hat der Zweite, der Dritte nur je zehn Finger, und so erscheint die Gruppierung von zehn Einern zwar zunächst, aber in gleicher Weise auch die von zehn Zehnern, von zehn Hundertern. Das scheinbar umständlichere Verfahren führt zu dem einfacheren Gedanken, zum Zahlensystem. Wenn von einem Schriftsteller[3]) darauf hingewiesen worden ist, daß die Wiederholung der Zehnzahl bis zu 10 mal 10 sich bei Erfüllung der nächsten 10 ebensowohl zu 11 mal 10 als zu 10 mal 10 und 10, in Worten ebensowohl zu elfzig als zu hundertzehn fortsetzen konnte, und daß es ein besonders glücklicher Griff war, der fast allen Völkern der Erde gelang, soweit

[1]) Pott II, S. 46, aber auch S. 31 und 42. [2]) Pott II, S. 47. [3]) Hankel, S. 10—11.

ihre Fassungskraft überhaupt bis zum Bewußtwerden bestimmter höherer Zahlen ausreicht, gerade die Wahl zu treffen, welche dem Zahlensystem seine Grundlage gab, so ist diese feine Bemerkung vielleicht dahin zu ergänzen, daß auf eine der hier erörterten nahestehende Weise jene glückliche Wahl eingeleitet worden sein mag.

Über die Grundzahlen solcher Zahlensysteme werden wir sogleich noch reden. Fürs erste halten wir daran fest, daß Zahlensysteme eine allgemein menschliche Erfindung darstellen, in allen bekannt gewordenen Sprachen zu einer Grundlage der Bildung von bald mehr bald weniger Zahlwörtern benutzt, indem höhere Zahlen durch Vervielfältigung von niedrigeren zusammengesetzt werden und bei Benennung der Zwischenzahlen auch Hinzufügungen noch notwendig erscheinen. Multiplikation und Addition sind also zwei Rechnungsverfahren so alt wie die Bildung der Zahlwörter.

Das Zahlensystem, welches wir in seinem Entstehen uns zu vergegenwärtigen suchten, wurde, sofern es auf der Grundzahl Zehn fußte, zum Dezimalsystem, heute wie unserem Zifferrechnen so auch in unseren Maßen, Gewichten, Münzen fast der ganzen gebildeten Erdbevölkerung unentbehrlich. Wir haben als wahrscheinlich erkannt, daß es nach der Zahl der Finger sich bildete, aber eben vermöge dieses Ursprunges war es nicht das allein mögliche. Wie man sämtliche Finger durchzählen konnte, um eine Einheit höheren Ranges zu gewinnen, so konnte man Halt machen nach den Fingern nur einer Hand, man konnte neben den Fingern der Hände die Zehen der Füße benutzen. In dem einen Falle blieb man beim Quinarsysteme, in dem anderen ging man zum Vigesimalsystem über.

Ein strenges Quinarsystem würde, wie leicht ersichtlich, 5 mal 5 oder 25, 5 mal 5 mal 5 oder 125 usw. als Einheiten höheren Ranges nächst der 5 selbst besitzen müssen, welche durch einfache oder auch zusammengesetzte Namen bezeichnet mit den Namen der Zahlen 1, 2, 3, 4 sich vereinigen, um so alle zwischenliegende Zahlen zu benennen. Ein solches strenges Quinarsystem gibt es nicht[1]. Dagegen gibt es Quinarsysteme in beschränkterem Sinne des Wortes, wenn zur Benutzung dieses Wortes schon der Umstand als genügend erachtet wird, daß die Fünf bei allmählicher Zahlenbildung einen Ruhepunkt gewähre, von dem aus eine weitere Zählung wieder anhebt.

Was dementsprechend von einem strengen Vigesimalsysteme zu verlangen ist, leuchtet gleichfalls ein: ein solches muß die Grundzahl 20 durchhören lassen, muß die Einheit höheren Ranges 20 mal

---

[1]) Pott II, S. 35 und 46 in den Anmerkungen.

20 oder 400, vielleicht auch noch höhere Einheiten unter besonderen Namen besitzen. Sprachen, in welchen dieses System maßgebend ist, hat man mehrfach gefunden. Die Mayas in Yukatan[1]) haben eigene Wörter für 20, 400, 8000, 160000. Die Azteken in Mexiko[2]) hatten wenigstens besondere Wörter für 20, 400, 8000 mit der Urbedeutung: das Gezählte, das Haar, der Beutel, wobei auffallend erscheinen mag, daß das Haar eine verhältnismäßig niedrige Zahlenbedeutung hat, während es in karaibischen Sprachen[3]) weit übereinstimmender mit der Wirklichkeit eine sehr große Zahl auszudrücken bestimmt ist. Noch andere Beispiele eines bemerkbaren mehr oder minder durchgeführten Vigesimalsystems hat vornehmlich Pott, dem wir hier fast durchweg folgen, in Fülle gesammelt. Wir erwähnen davon nur als den meisten unserer Leser zweifellos bekannt die Überreste eines keltischen Vigesimalsystems in der französischen Sprache in Wörtern wie *quatrevingts, sixvingts, quinzevingts*[4]). Von dänischen Überresten eines Systems, in welchem Vielfache von 20 eine Rolle spielen, ist weiter unten in etwas anderem Zusammenhange die Rede.

Den Ursprung der drei Systeme, deren Grundzahlen 5, 10, 20 heißen, haben wir oben in die Finger und Zehen des Menschen verlegt. Auch dafür sind sprachliche Anklänge vorhanden. Zwischen den Wörtern für 5 und für Hand ist in manchen Sprachen völlige Gleichheit, in anderen nahe Verwandtschaft[5]). Alsdann darf man aber wohl annehmen, daß es früher wünschenswert war die Glieder des eigenen Körpers zu benennen, als Zahlwörter zu bilden, daß also 5 von Hand abgeleitet wurde, nicht umgekehrt. Das Wort für 10 heißt in der Korasprache[6]) (einem amerikanischen Idiome) so viel wie Darreichung der Hände, und daß ein und dasselbe Wort 20 und Mensch bedeutet kommt mehrfach vor[7]). Ob freilich, wie manche wollen, auch das deutsche zehn mit den Zehen, das lateinische *decem* mit *digiti* in Verbindung gebracht werden darf, darüber gehen die Meinungen weit auseinander, und Pott, unser Gewährsmann, steht auf der Seite der Verneinenden. Jedenfalls ist aber schon durch die erwähnten Beispiele ein innerer Zusammenhang der drei genannten Systeme untereinander und mit den menschlichen Extremitäten hinlänglich unterstützt. Gibt es nun Sprachen, in welchen auch andere Grundzahlen als 5, 10 oder 20 sich nachweisen lassen?

---

[1]) Pott I, S. 93. [2]) Pott I, S. 97—98. [3]) Pott II, S. 68. [4]) Pott I, S. 88. [5]) Pott I, S. 27 flgg. und S. 128 flgg. führt Beispiele aus ozeanischen Sprachen, aus dem Sanskrit und dem Hebräischen an, wenn er auch den letzteren gegenüber, die von Benary und Ewald herrühren, sich ziemlich skeptisch verhält. [6]) Pott I, S. 90. [7]) Pott I, S. 92.

Wenn man gesagt hat[1]), daß kein Volk auf der ganzen Erde je von einer anderen Grundzahl, als einer der genannten aus, sein Zahlensystem mit einiger Konsequenz ausgebildet habe, so ist dieser Ausspruch entschieden allzu verneinend, selbst wenn man einen besonderen Nachdruck auf das Wort Konsequenz legt, dem gegenüber die Frage erhoben werden möchte, wo denn folgerichtige Anwendung des Quinarsystems sich finde?

Allerdings hat man einige Gattungen von Zahlensystemen nur mit Unrecht nachweisen zu können geglaubt. Falsch war es, wenn Leibniz bei den Chinesen ein Binarsystem annahm[2]). Falsch scheint Kohl den Osseten im Kaukasus ein Oktodezimalsystem zugeschrieben zu haben[3]). Dagegen sind andere Angaben doch zu wohl beglaubigt, um sie ohne weiteres leugnen oder totschweigen zu dürfen. Die Neuseeländer mit ihrem merkwürdigen Undezimalsysteme[4]), welches besondere Wörter für 11, für 11 mal 11 oder 121, für 11 mal 11 mal 11 oder 1331 besitzt, welches 12 durch 11 mit 1, 13 durch 11 mit 2, 22 durch 2 mal 11, 33 durch 3 mal 11 usw. ausdrückt, lassen sich nicht vornehm beiseite schieben. Ob der Zeitraum von 110 Jahren, nach welchen, wie Horaz im 21. und 22. Verse seines *Carmen saeculare* berichtet, die römische Erinnerungsfeier wiederkehrte, der man den Namen der saecularen beilegte, mit einer Vermengung dezimaler und undezimaler Zählweise zusammenhängt, bleibe dahingestellt. Das Wort *triouech* oder 3 mal 6 für 18 in der Sprache der Niederbretagner ist neben dem *deunaw* oder 2 mal 9 der Welschen[5]) für eben dieselbe Zahl nun einmal vorhanden. Die Bolaner oder Buramaner an der Westküste Afrikas[6]) lassen, wenn sie 6 und 1 für 7, wenn sie 2 mal 6 für 12, wenn sie 4 mal 6 für 24 sagen, die Grundzahl 6 gleichfalls durchhören. Einige assyrische Zahlwörter (7 und 8), auf welche wir im 1. Kapitel zurückkommen werden, zeigen dieselbe Abhängigkeit von 6. Und wenn der Altfriese 120 mit dem Worte *tolftich* benannte[7]), so ist das sogar ein Hinweis darauf, daß auch das vorhin als menschlichem Geiste im allgemeinen fremdverpönte elfzig seine Analogien besitzt, ist es zugleich ein Beispiel für ein eigentümlich gemischtes System mit Dezimal- und Duodezimalstufen wie Skandinaven und Angelsachsen es teilweise besaßen[8]), wie eine verhältnismäßig spätere Wissenschaft es in Babylon einbürgerte, von wo es als Sexagesimalsystem das astronomische Rechnen aller

[1]) Hankel, S. 19. [2]) M. Cantor, Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Halle 1863. S. 48 flgg., auch S. 44. Wir zitieren dieses Buch künftig immer als: Math. Beitr. Kulturl. [3]) Kohl, Reisen in Südrußland. Bd. II, S. 216 und Pott I, S. 81. [4]) Pott I, S. 75 flgg. [5]) Pott II, S. 33. [6]) Pott II, S. 30. [7]) Pott II, S. 38. [8]) Math. Beitr. Kulturl. S. 147.

Völker durch Jahrhunderte beherrscht. Die Vermengung dezimalen und duodezimalen Zählens könnte auch als Stütze der Möglichkeit dienen, welche oben für dezimale und undezimale Zahlen beansprucht wurde.

Das Vorhandensein von Zahlensystemen, deren Grundzahl nicht 5 oder Vielfaches von 5 ist, dürfte damit nachgewiesen sein. Aber allerdings bilden dieselben nur Ausnahmen von seltenem vereinzeltem Vorkommen. Auch eine andere Gattung von Ausnahmen gegen früher Erwähntes müssen wir kurz berühren. Wir haben hervorgehoben, daß die Zwischenzahlen zwischen den Einheiten aufeinanderfolgenden Ranges multiplikativ und additiv gebildet werden; wir haben daraus auf das hohe Alter dieser Rechnungsverfahren geschlossen. Es gibt nun Sprachen, welche die Bildung der Zahlwörter auf Subtraktionen und Divisionen stützen, wodurch das hohe Alter auch dieser Rechnungsverfahren wenigstens bei den Völkern, denen jene Sprachen angehören, gleichfalls zur Möglichkeit gelangt.

Die Subtraktion wird am häufigsten bezüglich der Zahlwörter eins und zwei geübt[1]). Dieses entspricht z. B. in der lateinischen Sprache durchweg dem Gebrauch bei den Zehnern. Man sagt *duodeviginti*, d. h. 2 von 20 für 18, ebenso *undecentum* 1 von 100 für 99 usw. Auch im Griechischen werden 1 und 2 bei den Zehnern zuweilen abgezogen, wozu das Zeitwort *δεῖν* in seiner transitiven wie in seiner intransitiven Bedeutung als bedürfen und als fehlen angewandt wird. So drückt man 58 aus durch *δυοῖν δέοντες ἑξήκοντα* = 60 welche 2 bedürfen, 49 durch *ἑνὸς δέοντος πεντήκοντα* = 50 woran 1 fehlt, und ein vereinzeltes Vorkommen von 9700 = 10000, welche 300 bedürfen *τριακοσίων ἀποδέοντα μύρια* wird aus den Schriften des Thukydides angeführt[2]). Auch im Gotischen findet subtraktive Bildung von Zahlwörtern statt. In der gemeinsamen Stammsprache, im Sanskrit, ist gleichfalls eine Subtraktion mittels des Wortes *una* (vermindert, weniger) im Gebrauch. Sei es nun, daß das *una* selbst allein einem Zahlwort vorgesetzt wird, und man im Gedanken *eka* eins hinzuhören muß, z. B. *unavingsati*, vermindertes 20 statt 19, oder daß das *eka* wirklich ausgesprochen wird und sich dabei mit *una* zu *ekona* zusammensetzt, z. B. *ekonaschaschta*, um 1 vermindertes 60 statt 59, oder daß andere Zahlen als 1 abgezogen werden, z. B. *pantschonangsatam*, um 5 vermindertes 100 statt 95. Ob die babylonische Benutzung von *lal* = weniger hierher gehört[3]) oder als eigentliche Subtraktion aufzufassen ist, sei dahingestellt.

[1]) Math. Beitr. Kulturl. S. 157. [2]) Pott I, S. 181, Anmerkung. [3]) Reisner in Berl. Akad. Ber. 1896, S. 425—426 mit Berufung auf Tontafeln von Ur.

Am seltensten dient die Division zur sprachlichen Bildung der Zahlwörter. Hier kommen neben den sofort verständlichen Teilungen: ein viertel Hundert, ein halbes Tausend usw., namentlich solche Wörter in Betracht, welche eine nicht voll vorhandene Einheit zur Teilung bringen. Anderthalb, dritthalb, sechsthalb besagen, daß das Andere, d. h. Zweite, daß das Dritte, daß das Sechste halb zu nehmen sei, die Existenz des Ersten, der 2, der 5 Vorhergehenden als selbstverstanden vorausgesetzt. Verwandte Bildungen sind in lateinischer und in griechischer Sprache *sesquialter* = ἐπιδεύτερος = $1\frac{1}{2}$, *sesquitertius* = ἐπίτριτος = $1\frac{1}{3}$, *sesquioctavus* = ἐπόγδοος = $1\frac{1}{8}$ usw. Besonderer Hervorhebung scheint es wert, daß die dänische Sprache in Europa und im fernen Süden und Osten die Sprache der Dajacken und Malaien auf den nächsten Zwanziger beziehungsweise Zehner übergreift, um ihn hälftig vorweg zu nehmen[1]). Ein altes Vigesimalsystem in deutlichen Spuren verratend (S. 9) sagt die dänische Sprache nicht bloß *tresindstyve* oder 3 mal 20 für 60, *firesindstyve* oder 4 mal 20 für 80, sondern auch *halvtredsindstyve, halvfirdsindstyve* für 50 und 70, d. h. der dritte, der vierte Zwanziger, welcher bei 60, bei 80 voll vorhanden ist, kommt hier nur zur Hälfte in Rechnung. Ja man hat sogar *halvfemsindstyve* oder fünfthalb Zwanziger für 90, während 100 nur durch *hundrede* und nie durch *femsindstyve* ausgedrückt wird. Bei den Malaien heißt halb dreißig, halb sechzig es solle von dem letzten, also hier von dem dritten, sechsten Zehner nur die Hälfte genommen werden, man meine also 25, 55. Im Alttürkischen wird das Vorgreifen auf den nächsten Zehner noch weiter ausgedehnt[2]). „Vier dreißig“ bedeutet „vier von dem dritten Zehner“ also 24. Endlich im Äthiopischen findet sich ein merkwürdiger Ausnahmefall[3]). Die Äthiopen besitzen besondere Zeichen für die Einer, die Zehner, die Hunderter, mittels deren sie die Zwischenzahlen zusammensetzen. Sie schreiben also z. B. 59 durch die Zeichen „fünfzig neun“. Einzig und allein 99 wird anders geschrieben, nämlich nicht „neunzig neun“, sondern „neunzig hundert“, d. h. also etwa „ein Neunziger nahe bei Hundert“. Der Grund dieser Ausnahme ist unermittelt.

Alle diese Teilungen in sich schließende Ausdrücke sind gewiß merkwürdig, eine genaue Einsicht in das Alter der Division verglichen mit dem Alter der Sprachbildung geben sie uns deshalb doch nicht. Es sind eben Wörter mit Zahlenbedeutung, aber es sind nicht die Zahlwörter! Neben ihnen und statt ihrer sind auch andere mög-

[1]) Pott I, S. 103 und II, S. 88. [2]) J. Marquart, Die Chronologie der alttürkischen Inschriften. Leipzig 1898. [3]) C. Bezold, Kebra Nagast. München 1905. S. XV, Note 3.

licherweise viel ältere Ausdrücke in Gebrauch und lassen die Entstehungszeit der jüngeren Benennung im dichtesten Dunkel. Nicht anders verhält es sich mit den vorerwähnten subtraktiven Bildungen, zu welchen als weiteres Beispiel bestimmter Grenzpunkte, auf welche Vorhergehendes ebenso wie Folgendes bezogen wird, die Kalenderbezeichnung der Römer mit ihren Calenden, Nonen und Iden treten mag. Entscheidend dagegen sind die subtraktiven Zahlwörter einiger Sprachen, z. B. der Krähenindianer in Nordamerika[1]). Bei ihnen heißen 8 und 9 nie anders als *nópape, amátape*, d. h. wörtlich 2 davon, 1 davon, und das Wort Zehn, d. h. die Anzahl, von welcher 2, beziehungsweise 1 weggenommen werden sollen, ist als selbstverständlich weggelassen. Hier kann ein Zweifel kaum walten: die Namen der 8 und 9 sind erst entstanden, nachdem der Begriff der 10 sich gebildet hatte, nachdem das Rechnungsverfahren der Subtraktion erfunden war. Mit dieser Bemerkung kehren wir zu unserer früheren Behauptung zurück (S. 4), zu deren Begründung wir die ganze Erörterung über Zahlwörter und über die ersten Anfänge des Rechnens gleich hier anknüpfen durften. Die Sprache hielt in ihrer Entstehung nicht immer gleichen Schritt mit der Entstehung der Begriffe. Das aufeinanderfolgende Zählen wurde unterbrochen durch das Bewußtsein notwendiger Zahlenverknüpfungen, Sprünge in der Erfindung der Zahlwörter sind nahezu sicher.

Und wieder machte der menschliche Erfindungsgeist einen Schritt vorwärts, einen Schritt, zu welchem er auch nicht die geringste Anregung von außen erhielt, der ganz aus eigenem Antriebe erfolgend mindestens ebenso sehr wie die künstliche Entfachung des Feuers als wesentlich menschlich, als keinem anderen Geschöpfe möglich anerkannt werden muß: er erfand die Schrift. Bilderschrift, so nimmt man gegenwärtig wohl ziemlich allgemein an, war die erste, welche dem Spiegel der Rede (wie bei einem Negervolke das Geschriebene heißt)[2]) den Ursprung gab. Aber mit Bildern allein kam man nicht aus. Neben wirklichen Gegenständen mußten Tätigkeiten, Eigenschaften, Empfindungen dem künftigen Wissen aufbewahrt werden. Die Notwendigkeit symbolischer oder willkürlich eingeführter Zeichen für diese nicht gegenständlichen Begriffe zwang zur Abhilfe. So müssen Begriffszeichen entstanden sein, gemeinsam mit den früheren Bildern eine Wortschrift herstellend. Jetzt erst — aber wer weiß in wie langer Zeit? — konnte man dahin gelangen in dem Gesprochenen nicht nur den ganzen Klang, sondern die einzelnen Laute, aus welchen er sich zusammensetzt, zu verstehen, und diese Einzel-

[1]) Pott II, S. 65. [2]) Pott I, S. 18.

laute dem Auge zu versinnlichen. Die Silben- und Buchstabenschrift entstand. Für die Zahlen behielt man allgemein das Verfahren bei, welches in anderer Beziehung sich überlebt hatte. Inmitten der Silben-, der Buchstabenschrift treten Zahlzeichen, d. h. Wortzeichen auf, und wer ein Freund philosophischen Grübelns ist, mag darüber sinnen, warum gerade hier eine Ausnahme sich aufdrängte. Warum hat gerade das mathematische Denken von jeher durch Wortzeichen, sei es durch Zahlzeichen, sei es durch andere sogenannte mathematische Zeichen, Unterstützung, Erleichterung und Förderung gefunden? Wir stellen die Frage, wir wagen nicht sie zu beantworten. Aber die Tatsache, an welche wir die Frage knüpften, steht fest, ebenso wie es feststeht, daß ein Zahlenschreiben in älteste Kulturzeiten hinaufreicht, wo dessen Zeichen inmitten geschichtlicher Inschriften vorkommen.

Die Verschiedenheit der Zahlzeichen ist eine gewaltige. Wir werden in mannigfachen Kapiteln dieses Bandes von solchen zu reden haben und wünschen nicht vorzugreifen. Aber ein Prinzip der Zahlenschreibung hat sich fast überall Bahn gebrochen, dessen Entdeckung dem Scharfsinne Hankels[1]) um so größere Ehre macht, als es trotz seiner großen Einfachheit stets übersehen worden war. Es ist das Gesetz der Größenfolge, wie wir, um eine kürzere Redeweise zu besitzen, es künftig nennen wollen, und besteht darin, daß bei allen additiv vereinigten Zahlen das Mehr stets dem Weniger vorausgeht[2]). Natürlich ist die Richtung der Schrift bei Prüfung dieses Gesetzes wohl zu beachten, und wenn bei der von links nach rechts gehenden Schrift des Abendlandes der Hauptteil der Zahl links auftreten muß, so ist die Stellung bei Zahlendarstellungen semitischen Ursprunges entgegengesetzt, und wieder eine andere, wenn, wie bei den Chinesen, die Schrift in von oben nach unten gerichteten Reihen verläuft.

Die mathematischen Begriffe, bei denen wir in unserer flüchtigen Betrachtung der Anfänge menschlicher Kulturentwicklung, Anfänge, welche selbst Jahrtausende in Anspruch genommen haben mögen, zu verweilen Gelegenheit nahmen, gehören sämtlich dem einen Zweige der Größenlehre an, welcher über das Wieviel? der nebeneinander auftretenden Dinge das Was? derselben vernachlässigt. Es ist aber wohl keinem Zweifel unterworfen, daß neben Kenntnis und einfachster Verbindung der Zahlen einfache astronomische wie geometrische Begriffe wach geworden sein müssen.

[1]) Hankel, S. 32. [2]) Über Abweichungen von diesem Gesetze vergl. Kapitel 4.

Wir werden der Geschichte der Astronomie grundsätzlich fern bleiben, um nicht den schon so für uns fast unbezwingbar sich gestaltenden Gegenstand unserer Darstellung ohne Not zu vergrößern, aber zwei Bemerkungen können wir hier nicht unterdrücken. Aufgang und Untergang der Sonne waren gewiß schon in den Zeiten nomadischen Wanderns die beiden Marksteine, die Zeit und Raum in Grenzen schlossen. Morgen und Abend, Ost und West waren Begriffepaare, deren Entstehung wohl nicht früh genug angenommen werden können. Und als beim Ansässigwerden der Völker die Sonne zwar immer noch ihre Uhr, aber nicht ihren täglichen Wegweiser bildete, nach deren Stande sie sich zu richten pflegten, war das Orientierungsgefühl doch noch geblieben, hatte womöglich an Genauigkeit noch zugenommen. Am Südende des Pfäffiker-Sees in der Schweiz sind Pfahlbauten beobachtet worden, welche genau nach den Himmelsgegenden gerichtet sind[1]), und jene Bauten reichen jenseits der sogenannten Bronzezeit in eine Periode hinauf, welche nach geologischer Schätzung etwa 4000 Jahre vor Christi Geburt lag. Wir stellen in keiner Weise in Abrede, daß man bei der Orientierung der Wohnhäuser an praktische Rücksichten, an Besonnung, Wind und Wetter dachte, aber man dachte doch, man übte nicht Zufälliges und Unbeabsichtigtes. Von ähnlichen Orientierungen werden wir verschiedentlich zu reden haben. Die Richtung nach den Himmelsgegenden selbst wird uns niemals als Beweis der Übertragung von Begriffen von einem Volke zum andern gelten dürfen. Nur die Ermittlungsweise dieser Richtung wird zum genannten Zweck tauglich erscheinen.

Auch geometrische Begriffe, sagten wir, müssen frühzeitig entstanden sein. Körper und Figuren mit geradliniger, mit krummliniger Begrenzung müssen dem Auge des Menschen aufgefallen sein, sobald er anfing nicht bloß zu sehen, sondern um sich zu schauen. Die Zahl der Ecken, in welchen jene Flächen, jene Linien aneinanderstoßen, wird ihm der Bemerkung wert gewesen sein, wird ihn herausgefordert haben jenen Gebilden Namen zu geben. Vielleicht ist auch in ältesten Zeiten und in gegenseitiger Unabhängigkeit an vielen Orten zugleich beachtet worden, daß der Arm beim Biegen am Ellenbogen, das Bein beim Biegen am Knie, daß die beiden Beine beim Ausschreiten einen Winkel bilden, und der Name jeder von zwei einen Winkel bildenden Linien als σκέλος bei den Griechen, *crus* bei den Römern, Schenkel bei den Deutschen, *leg* bei den Engländern, *jambe* bei den Franzosen, *bâhu*, d. h. Arm bei den Indern, *kou*, d. h.

[1]) Diese Beobachtung rührt von Professor Quincke her, der uns freundlichst gestattete, von dieser seiner mündlichen Mitteilung Gebrauch zu machen.

Hüfte bei den Chinesen, der Zusammenhang γῶνος Winkel mit γόνυ Knie, dieses und ähnliches braucht nicht in allen Fällen Übertragung zu sein. Die genannten modernen Namen werden allerdings kaum anders als durch Übersetzung aus dem Lateinischen, wenn nicht aus dem Griechischen entstanden sein, aber die antiken Wörter können sehr wohl uraltes Ergebnis mehrfacher Selbstbeobachtung sein, uraltes Wissen.

Ist nun uraltes Wissen auch uralte Wissenschaft? Muß eine Geschichte der Mathematik so weit zurückgreifen, als sie noch hoffen darf mathematischen Begriffen zu begegnen?

Wir haben unsere Auffassung, unsere Beantwortung dieser Fragen darzulegen geglaubt, indem wir diese Einleitung vorausschickten. Kein Erzähler hat das Recht das Brechen, das Zusammentragen der ersten Bausteine, aus welchen Jahrhunderte dann ein stolzes Gebäude aufgerichtet haben, ganz unbeachtet zu lassen; aber die Bausteine sind noch nicht das Gebäude. Die Wissenschaft beginnt erzählbar erst dann zu werden, wenn sie Wissenschaftslehre geworden ist. Erst von diesem Zeitpunkte an kann man hoffen wirkliche Überreste von Regeln und Vorschriften zu finden, welche es erlauben mit einiger Sicherheit und nicht in allem und jedem dem eigenen Gedankenfluge vertrauend Bericht zu erstatten. Mögen Schriftsteller früherer Jahrhunderte ihre eigentlichen historisch-mathematischen Untersuchungen mit der Schöpfung begonnen haben den Worten der Schrift folgend: Aber du hast alles geordnet mit Maß, Zahl und Gewicht [1]). Uns beginnt eine wirkliche Geschichte der Mathematik mit dem ersten Schriftdenkmal, welches auf Rechnung und Figurenvergleichung Bezug hat.

[1]) Weisheit Salomos XI, 22.

I. Babylonier.

1. Kapitel.

Die Babylonier.

Es wird die älteste menschliche Erfahrung sein, welche sich zurzeit an das vorderasiatische Zweistromland knüpft, in welchem bestimmte Königsnamen bis auf eine Zeit zurückweisen, die fünfthalbtausend Jahre vor dem Beginne der christlichen Zeitrechnung liegt[1]). Wenn wir auch von der politischen Geschichte der, wie wir gleich sehen werden, sich dort ablösenden Reiche nicht genauer berichten dürfen, so ist uns die Geschichte ihrer Kulturentwicklung um so wichtiger, insoweit sie Mathematisches betrifft, und diese wieder nötigt uns weniges von den mindestens zwei Volksstämmen vorauszuschicken, die dort in engste Verbindung traten und zu einem Mischvolke sich vereinigten, dessen Bildung nur Wahrscheinlichkeitsschlüsse dafür gestattet, welchem der Urstämme wir diesen oder jenen Bestandteil des später gemeinsamen Wissens gutschreiben sollen.

Neuere Völkerkunde hat die Gegend der Hochebene Pamir[2]), etwa unter dem 38. Grade nördlicher Breite und dem 90. Grade östlicher Länge gelegen, als das in Wirklichkeit freilich nichts weniger als paradiesische Paradies der orientalischen Sagen erkannt. Vier Gewässer fließen von ihr nach den vier Himmelsrichtungen ab, der Indus, der Helmund, der Oxus, der Yaxartes. Von dort zunächst, mutmaßlich noch weiter von Nordosten, von den Abhängen des erzreichen Altaigebirges, drangen Skythenvölker turanischen Stammes, ihrem Hauptbestandteile nach Sumerier[3]), herab, eine bereits ziemlich entwickelte mathematische Bildung mit sich bringend, wie wir nachher sehen wollen. Sie setzten sich fest auf dem Hochlande von Iran, besonders in dem nördlichsten Teile, der später Medien genannt

---

[1]) G. Maspero, Geschichte der morgenländischen Völker im Alterthum nach der 2. Auflage des Originals und unter Mitwirkung des Verfassers übersetzt von Dr. Rich. Pietschmann. Leipzig 1877. C. Bezold, Niniveh und Babylon. Bielefeld und Leipzig 1903. [2]) Maspero-Pietschmann S. 128. [3]) Diesen Namen erkannt zu haben gehört zu den zahlreichen Verdiensten von J. Oppert. Über die Wanderung der Sumerier vergl. Maspero-Pietschmann S. 131.

wurde. Die Sumerier drangen dann weiter südlich bis nach Chaldäa vor. Und ein zweites Volk kam ebendahin[1]). Es war, wie man früher annahm, aus dem Lande Kusch aufgebrochen, welches man gleichfalls im Osten aber weiter südlich, etwa in Baktrien, suchte. Von seiner Heimat führte es den Namen der **Kuschiten** und hatte, wie man glaubte, den eigenen Namen bei seiner Wanderung auf das Gebirge des Hindukusch übertragen, welches das Hochland von Iran, wo wir die Turanier Niederlassungen gründend fanden, von den Ebenen der Bucharei trennt. Heute ist man bezüglich der Wanderrichtung der Kuschiten der entgegengesetzten Meinung. Man nimmt an, sie seien von Westen gekommen und hätten ihre Heimat in Afrika, genauer gesprochen in Ägypten, gehabt. Die Sumerier sprachen eine jener sogenannten agglutinativen Sprachen, in welchen alle möglichen Beziehungen vermittels neuer Bestandteile bezeichnet werden, die sich mit den Wurzeln nie verschmelzen, also nie das hervorbringen, was man Beugung zu nennen pflegt. Die Sprache der Kuschiten dagegen war dem Hebräischen und Arabischen sehr nahe verwandt, sie war eine semitische Sprache, und die meisten nehmen auch geradezu an, Semiten und Kuschiten seien nur zwei zu verschiedenen Zeiträumen zur Gesittung gelangte Teile ein und derselben Rasse.

Die erste Begegnung von Sumeriern und Kuschiten auf chaldäischem Boden gehört in die vorgeschichtliche Zeit, ein Wort, dessen Geltungsgebiet gegen früher weit zurückverlegt ist, seitdem die Entzifferungskunde alter Denkmäler gestattet hat, selbst als mythisch geltende Zustände und Ereignisse näher zu beleuchten. Aber so weit man auch die Ziele der Geschichtswissenschaften stecken mag, sie reichen nicht weiter als schriftliche Aufzeichnung, und solche sind uns in Chaldäa nur aus der Zeit der erfolgten Vereinigung jener Volkselemente erhalten, geben über die Vereinigung selbst keinen Aufschluß. Dagegen wissen wir aus einheimischen und fremden schriftlichen Denkmälern mancherlei über die Schicksale des Mischvolkes. Sein staatlicher Verband blieb keineswegs unverändert, Hauptstädte und Fürstengeschlechter wechselten. Auf Ninive folgte Babylon, auf dieses wieder Ninive als Herrschersitz. Das altassyrische, das babylonische, das zweite assyrische Reich lösten einander in geschichtlicher Bedeutung ab, in bald siegreichen, bald ungünstig verlaufenden Kämpfen untereinander und mit den Nachbarvölkern, den Hebräern, den Phönikern, den Ägyptern, bis endlich das Perserreich alles verschlang.

Wir haben einheimische Schriftdenkmäler erwähnt. Deren Schrift

[1]) Maspero-Pietschmann S. 141 flgg. Bezold S. 22—23.

war, wie man annimmt, ursprünglich eine Bilderschrift, welche aber vermöge der gewählten Unterlage eine eigentümliche Umbildung erfuhr. Man ritzte die Schriftzüge mittels eines Griffels in eine gleichviel wie zur nachträglichen Erhärtung gebrachte Tonmasse ein, und dadurch entstanden in Winkeln aneinander stoßende Eindrücke, welche man bei der Wiederauffindung nicht unglücklich als keilförmig bezeichnet hat; es entstand die **Keilschrift**. Die meisten Fachgelehrten glauben, die Keilschrift sei bereits den Sumeriern eigentümlich gewesen, doch mag sie entstanden sein, wo sie wolle, darüber ist kein Zweifel, daß sie in Chaldäa einer semitischen Sprache dienstbar wurde, die somit wundersam genug von links nach rechts, statt wie in allen anderen Fällen von rechts nach links zu lesen ist, eine Erscheinung, auf welche wir gleich jetzt bei Erörterung der Zahlzeichen der Keilschrift hinweisen müssen[1]). Das Prinzip der Größenfolge wird nämlich ihr entsprechend, wo es zur Geltung kommt, veranlassen, daß wir die Zahlzeichen, welche den höheren Wert besitzen, stets links von denen zu suchen haben, welche mit niedrigerem Werte behaftet durch Addition mit jenen verbunden sind.

Unter den vielfältigen Vereinigungen, welche aus keilförmigen Eindrücken sich bilden lassen, sind es vornehmlich drei, welche beim Anschreiben ganzer Zahlen benutzt wurden, der Vertikalkeil 𒁹, der Horizontalkeil 𒀸, der aus zwei mit dem breiten Ende verschmolzenen, die Spitzen nach rechts oben und unten neigenden Keilen zusammengesetzte Winkelhaken 𒌋. Der Vertikalkeil stellt die Einheit, der Winkelhaken die Zehnzahl dar, und diese Elemente addierten sich durch Nebeneinanderstellung. Teils aus Gründen der Raumersparung, teils aus solchen der besseren Übersehbarkeit wurden oft mehrere Keile oder Winkelhaken übereinander in zwei bis drei Reihen abgebildet, stets höchstens drei Zeichen in einer Reihe. Blieb bei dieser Art der Zerlegung ein einzelnes Element übrig, so wurde dasselbe meistens in breiterer Form unter den übrigen beigefügt. Vielleicht kam auch die Beifügung eines solchen einzelnen Zeichens rechts von den übrigen vor, wie es durch das Gesetz der Größenfolge gestattet war, während ein additives Einzelelement links neben anderen in Reihen verbundenen gleichartigen Elementen jenem Gesetze wider-

[1]) Wir haben diesen Gegenstand ausführlich und mit Verweisung auf Quellenschriften schon früher behandelt: Math. Beitr. Kulturl. S. 28 flgg. Unsere gegenwärtige teilweise wörtlich übereinstimmende Darstellung dürfte dem heutigen etwas veränderten Standpunkte des Wissens über diese Dinge entsprechen. Mit den assyrischen Zahlwörtern beschäftigt sich **George Bertin**, The Assyrian Numerals, abgedruckt in den Transactions of the Society of Biblical Archaeology Vol. VII, pag. 370—389.

sprochen haben würde. Mit diesen Bemerkungen erledigt sich die schriftliche Wiedergabe sämtlicher ganzer Zahlen unter 100, aber von dieser Zahl an, deren Zeichen ein Vertikalkeil mit rechts folgendem Horizontalkeile 𒁹𒀸 ist, tritt eine wesentliche Veränderung ein. Zwar die Richtung der Zeichen im großen und ganzen, also der Hunderter, Zehner, Einer, bleibt wie vorher von links nach rechts abnehmend, aber neben der Juxtaposition der Zahlteile verschiedener Ordnung erscheint plötzlich ein vervielfachendes Verfahren, indem links vor das Zeichen von 100 die kleinere Zahl gesetzt wird, welche andeutet, wie viele Hundert gemeint sind. Die Vermutung wird dadurch sehr nahe gelegt, es sei infolge dieses multiplikativen Gedankens, daß 1000 durch Vereinigung des Winkelhakens, des Vertikal- und Horizontalkeils 𒌋𒁹𒀸 als 10 mal 100 dargestellt werde. Aber dieses 1000 wird dann selbst wieder als neue Einheit benutzt, welche kleinere multiplizierende Koeffizienten links vor sich nimmt. Gemäß der Deutung unserer Assyriologen kam sogar „ein mal tausend“ vor, d. h. multiplikatives Vorsetzen eines einzelnen Vertikalkeils links von dem Zeichen für 1000, und jedenfalls erscheint 10 mal 1000 als die gesicherte Bedeutung von 𒌋𒌋𒁹𒀸, welches man nicht etwa 20 mal 100, d. i. 2000 lesen darf. Vielfache von 10000 werden als Tausender bezeichnet, mithin 30000 als 30 mal 1000, 100000 als 100 mal 1000, indem 30, beziehungsweise 100 links von 1000 geschrieben sind. Eine höchst bedeutsame Tatsache tritt dabei zutage, diejenige nämlich, daß die Babylonier das Bewußtsein der Einheiten verschiedener dekadischer Ordnungen in viel höherem Maße hatten, als ihre Bezeichnungsweise der Zehntausender vermuten läßt. Wer besondere Zeichen für 10000, für 100000 zur Verfügung hat, wird natürlich 127000 in $100000 + 2 \cdot 10000 + 7 \cdot 1000$ zerlegen, von den Babyloniern dagegen, denen solche besondere Zeichen fehlten, wäre mit höherer Wahrscheinlichkeit ein Anschreiben in der Form $127 \cdot 1000$ zu erwarten. Nichtsdestoweniger bedienten sie sich jener für sie viel umständlicheren, aber mathematisch durchsichtigeren Schreibweise. Wenigstens ist 36000 in der Form $30 \cdot 1000 + 6 \cdot 1000$ wahrscheinlich gemacht und 120000 in der Form $100 \cdot 1000 + 20 \cdot 1000$ sichergestellt. Bis zur Million scheint die Zahlenschreibung der Keilschrift sich nicht erstreckt zu haben; zum mindesten sind keine Beispiele davon bekannt[1]).

Von Brüchen ist eine Bezeichnung der verschiedenen Sechstel,

[1]) Ménant, *Exposé des éléments de la grammaire assyrienne.* Paris 1868, pag. 81: *Les inscriptions ne nous ont pas donné, jusqu'ici du moins, de nombre supérieur aux centaines de mille; le signe qui représente un million nous est encore inconnu.*

also $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ nachgewiesen worden, deren Entstehung nicht ersichtlich ist[1]). Von den wichtigen Sexagesimalbrüchen müssen wir nachher in anderem Zusammenhange reden.

Wir haben soeben gesagt, die Million sei bisher noch nicht aufgefunden worden. Müssen wir bei diesem Ausspruche das Wort „bisher“ besonders betonen oder dürfen wir in der Tat eine solche Beschränkung des Zahlbegriffes annehmen? Für die große Menge der Bevölkerung scheint uns die letztere Annahme nicht bloß keine Schwierigkeit zu haben, sondern allgemein verbreitete Notwendigkeit zu sein. Bis auf den heutigen Tag, wo doch mit den Wörtern Million und sogar Milliarde nicht gerade haushälterisch umgegangen wird, ist der Begriff, wie viele Einheiten zu einer Million gehören, keineswegs vielen Menschen geläufig. Mancherlei Verdeutlichungen müssen diesen Begriff erst klarstellen. So hat z. B. am 13. Juni 1864 die Direktion des Londoner Kristallpalastes den 10jährigen Bestand jenes Gebäudes feierlich begangen. Damals wurde bekannt gemacht, daß in jenem ersten Jahrzehnt der Palast von 15266882 Menschen besucht worden war, und um eine Veranschaulichung der Massenhaftigkeit der Zahl zu gewähren, ließ man auf weißes Baumwollzeug eine Million schwarzer Punkte drucken. Jeder Punkt war $\frac{3}{16}$ Zoll breit und nur $\frac{1}{8}$ Zoll von dem nächsten Punkte entfernt und doch bedeckten jene Punkte einen Flächenraum von 225 Fuß Länge auf 3 Fuß Breite, den Fuß zu 12 Zoll gerechnet. Daß in den jedenfalls weit geringfügigeren Verkehrsverhältnissen einer um Jahrtausende zurückliegenden Zeit die Höhe der Zahlen noch viel früher zu einer Vergleichungslosigkeit verschwimmen mußte, welche wir eine dunkle Ahnung des mathematischen Unendlichgroßen nennen würden, wenn wir nicht befürchteten dadurch die Meinung zu erwecken, als solle dadurch diesem Unendlichgroßen selbst ein solches Uralter verschafft werden, ist nur selbstverständlich.

Vielfache Stellen biblischer Schriften, die nach dem Exile unter der Einwirkung babylonischer Kultur entstanden zu sein scheinen, geben der Vermutung Raum, daß nur die beiden großen Zahlen 1000 und 10000, sowie deren Vervielfältigung zur Schätzung allergrößter Vielheiten benutzt wurden. Saul hat Tausend geschlagen, David aber Zehntausend[2]), heißt es in bewußter Steigerung. Tausend mal tausend dieneten ihm, und Zehntausend mal zehntausend standen vor ihm[3]), heißt es an anderer Stelle, und noch auffallender bei dem

[1]) Oppert, *Étalon des mesures assyriennes.* Paris 1875, p. 35. [2]) I. Samuel 18, 7. [3]) Daniel 7, 10.

Psalmisten: Der Wagen Gottes ist Zehntausend mal tausend [1]). Auch steht nicht im Widerspruche, wenn der sterbende König David seine Schätze aufzählend erklärt: Siehe ich habe in meiner Armut verschafft zum Hause des Herrn hunderttausend Zentner Goldes und tausend mal tausend Zentner Silbers [2]), denn die Unmöglichkeit diese konkreten Zahlen buchstäblich zu nehmen, zwingt zur Auffassung, nur das unfaßbar Große seines Reichtums sei gemeint. Sollte eine noch größere Zahl bezeichnet werden, so mußten Vergleichungswörter dienen. Ich will Deinen Samen machen wie den Staub auf Erden; kann ein Mensch den Staub auf Erden zählen, der wird auch Deinen Samen zählen [3]). Oder: Wer kann zählen den Staub Jakobs? [4]) Und unter Anwendung eines anderen Bildes: Siehe gen Himmel und zähle die Sterne, kannst Du sie zählen? Also soll Dein Same werden [5]). Ja es wird unter Anwendung desselben Gedankens die Vollführung der unmöglichen Aufgabe nur dem Höchsten vorbehalten: Er zählet die Sterne und nennet sie alle mit Namen [6]).

Auch anderswo finden wir, wenn wir Umfrage halten, außergewöhnliche Vielheiten durch die dritte und vierte Einheit des dekadischen Zahlensystems angedeutet. In China wünscht das Volk, wenn es einen Großen des Reiches leben läßt, ihm 1000 Jahre, während der dem Kaiser allein zukommende Heilruf sich auf 10000 Jahre erstreckt [7]). Das altslavische Wort *tma* bedeutete sowohl 10000 als dunkel, während es im Russischen nur die letztere Bedeutung noch beibehalten hat [8]).

Jedenfalls gehören Zahlzeichen, mag ihre Anwendung sich erstrecken so weit oder so wenig weit als sie will, zu Zeichen, welche niemals ganz entbehrt werden konnten, welche sicherlich dem Volke bekannt gewesen sein müssen, das die betreffende Schrift, hier die Keilschrift, überhaupt erfand. War dieses, wie man annimmt, das Volk der Sumerier, so mußte demnach ihm diejenige Bezeichnung der Zahlen, von der wir gesprochen haben, und die, wie wir nochmals hervorheben, einen durchaus dezimalen Charakter trägt, bekannt gewesen sein. Um so auffallender ist es, daß in sumerischen Schriftdenkmälern, die von eigentlichen Mathematikern und Astronomen herzurühren scheinen, mit der dezimalen Schreibweise eine andere wechselt, beruhend auf dem Sexagesimalsysteme.

Es wurde von einem englischen Assyriologen Hincks entdeckt [9]).

[1]) Psalm 68, 18. [2]) I. Chronik 23, 14. [3]) I. Mose 13, 16. [4]) IV. Mose 23, 10. [5]) I. Mose 15, 5. [6]) Psalm 147, 4. [7]) De Paravey, *Essai sur l'origine unique et hiéroglyphique des chiffres et des lettres de tous les peuples.* Paris 1826, pag. 111. [8]) Mündliche Mitteilung von H. Schapira. [9]) E. Hincks in den *Transactions of the R. Irish Academy. Polite Litterature* XXII 6. pag. 406 flgg.

In dem von ihm entzifferten Denkmale handelt es sich darum anzugeben, wieviele Mondteile an jedem der 15 Monatstage, die vom beginnenden Mondscheine bis zum Vollmonde verlaufen, beleuchtet seien. Es seien, heißt es, an diesen 15 Tagen der Reihe nach sichtbar:

5	10	20	40	1.20
1.36	1.52	2. 8	2.24	2.40
2.56	3.12	3.28	3.44	4

Hincks erläuterte die rätselhaften Zahlen mit Hilfe der Annahme, die Mondscheibe sei als aus 240 Teilen bestehend gedacht worden, es bedeuten die weiter nach links gerückten Zeichen für 1, 2, 3, 4 je 60 der Einheiten, denen die rechts davon stehenden Zahlen angehören, und die Beleuchtungszunahme folge nach Angabe der Tabelle an den fünf ersten Tagen einer geometrischen, an den folgenden Tagen einer arithmetischen Reihe.

Daß diese Erklärung Licht über die betreffende Tabelle verbreitet, ist unzweifelhaft. Unzweifelhaft ist es auch, daß sie dem Gesetze der Größenfolge Rechnung trägt, denn eine 60 bedeutende 1 kann links von 20, von 36, von 52 auftreten, während eine Eins gleichen Ranges mit jenen Zahlen zu ihrer Linken nicht geschrieben werden durfte. Gleichwohl bedurfte es zur vollen Bestätigung der Auffindung neuer Denkmäler, und solche sind die Tafeln von Senkereh. Ein Geologe W. K. Loftus fand 1854 bei Senkereh am Euphrat, dem alten Larsam, zwei kleine auf beiden Seiten mit Keilschriftzeichen bedeckte leider nicht ganz vollständige Täfelchen [1]). Solche Täfelchen sind, allerdings nicht entfernt vergleichbaren Inhaltes, vielfach gesammelt worden. Die eine konkave Seite ist immer als Vorderseite, die andere konvexe als Rückseite zu betrachten. Läuft der Text auf beiden Seiten fort, so muß zum Weiterlesen ein Umwenden über Kopf stattfinden. Die Täfelchen, aus Ton gebildet, wie fast überflüssigerweise bemerkt sein soll, sind in der Mitte am stärksten und verdünnen sich alsdann gleichmäßig gegen die Ecken. Diese Eigenschaft, vereinigt mit dem Umstande, daß der Rand bei der Zerbrechbarkeit des Stoffes nicht unter einen gewissen Grad von Dünne abnehmen durfte, gestattet bei Bruchstücken von einiger Beträchtlichkeit, wie z. B. die erste der beiden Täfelchen von Senkereh uns darstellt, Schlüsse auf die Größe des abgebrochenen und ver-

[1]) Eine photographische Abbildung des einen Täfelchens ist der Abhandlung von R. Lepsius, Die babylonisch-assyrischen Längenmaße nach der Tafel von Senkereh (Abhandlungen der Berliner Akademie für 1877) beigegeben. In eben dieser Abhandlung finden sich genaue Zitate der verschiedenen Gelehrten, welche bei der Entzifferung beteiligt waren. Ebendort S. 111—112 Bemerkungen von Fr. Delitzsch über Gestalt und Anordnung solcher Täfelchen.

mutlich nicht wieder aufzufindenden Teiles zu ziehen, welche zur Ergänzung des Inhaltes von erheblichem Nutzen sein können. Das eine Täfelchen, und zwar das zweite nach der Bezeichnung, welche den Täfelchen bei der Veröffentlichung beigelegt wurde, enthielt auf Vorder- und Rückseite zusammen 60 Zeilen, die ein fortlaufendes Ganzes bilden. Jede einzelne Zeile enthält links und rechts Zahlen, zwischen denselben sumerische Wörter, unter welchen eines *ibdi* zu lesen ist. Rawlinson erkannte zuerst, daß hier die Tabelle der ersten 60 Quadratzahlen vorliegt, und daß *ibdi* Quadrat bedeutet. Die Anordnung ist eine solche, daß es zu Anfang heißt:

1 ist das Quadrat von 1
4 ist das Quadrat von 2
9 ist das Quadrat von 3
16 ist das Quadrat von 4
25 ist das Quadrat von 5
36 ist das Quadrat von 6
49 ist das Quadrat von 7.

Diese sieben Zeilen waren vermöge der schon früher erworbenen Kenntnis der Zahlzeichen der Keilschrift verhältnismäßig leicht zu lesen und aus ihnen der Inhalt der Tabelle zu entnehmen. Nun war selbstverständlich als folgende Zeile zu erwarten:

64 ist das Quadrat von 8.

Aber so fand es sich nicht, sondern statt dessen

$1 \cdot 4$ ist das Quadrat von 8

und dann setzten sich die weiteren Zeilen fort

$1 \cdot 21$ ist das Quadrat von 9
$1 \cdot 40$ ist das Quadrat von 10
. . . .
$58 \cdot 1$ ist das Quadrat von 59
1 ist das Quadrat von 1.

Diese ganze Fortsetzung konnte nur verstanden werden, wenn man den vereinzelt links auftretenden Zahlen eine sexagesimale Wertsteigerung beilegte, mithin $1 \cdot 4$ als $60 + 4$, $1 \cdot 21$ als $60 + 21$, $58 \cdot 1$ als $58 \times 60 + 1$ las und die letzte Zeile als 1×60^2 ist das Quadrat von 1×60. So war die Vermutung von Hincks bestätigt. Zur vollen Gewißheit wurde sie bei Entzifferung des ersten Täfelchens von Senkereh erhoben. Dessen Vorderseite ist für die Geschichte der Metrologie von unschätzbarer Wichtigkeit, indem sie eine freilich lückenhafte Vergleichung zweier Maßsysteme enthält, deren eines jedenfalls vollständig nach dem Sexagesimalsysteme eingeteilt ist. Die Rückseite gibt uns in ihrem erhaltenen Teile die Kubikzahlen der aufeinanderfolgenden Zahlen von 1 bis 32, und

es ist mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß auf dem seitlich fehlenden Stücke der Tafel auch die Kuben der Zahlen 33 bis 60 gestanden haben werden. Die Anordnung ist durchaus der der Quadratzahlentabelle nachgebildet. Auch hier treten regelmäßig wiederkehrende Wörter in jeder Zeile auf, deren eines *badie* gelesen und Kubus übersetzt worden ist. Auch hier stehen am linken Anfang jeder Zeile höhere Werte als nach rechts zu, und zwar in den drei ersten Zeilen 1, 8, 27 links neben 1, 2, 3 rechts, von vornherein die Vermutung erweckend, daß man es mit einer Kubikzahlentabelle zu tun habe. Auch hier ist die Schreibweise eine sexagesimale, indem gleich die vierte Zeile 64 oder den Kubus von 4 durch $1 \cdot 4$ darstellt. Von der 16. Zeile an geht diese Tabelle noch über die Sechziger hinaus. Ist doch $16^3 = 4096 = 1 \times 60^2 + 8 \times 60 + 16$, und so steht zu erwarten, daß in dieser Zeile $1 \cdot 8 \cdot 16$ als Kubus von 16 angegeben sein werde, eine Erwartung, die sich vollständig erfüllt. Die weiteren Zeilen liefern die Kubikzahlen der folgenden Zahlen bis dahin, wo es heißt: $7 \cdot 30$ ist der Kubus von 30, womit gemeint ist: $7 \times 60^2 + 30 \times 60 = 30^3$. Dann stehen noch in zwei aufeinanderfolgenden Zeilen rechts erhalten 31 und 32, während deren links zu suchende Kuben und alles weitere fehlt. Ganz ähnliche Tafeln wurden in Kujundschik aufgefunden[1]). Die Schreiber der Tafeln von Senkereh und Kujundschik waren demnach im Besitz der an sich bedeutsamen Kenntnis von Quadrat- und Kubikzahlen, waren zugleich im Besitz eines folgerichtig ausgebildeten Sexagesimalsystems mit wahrem Stellungswerte der einzelnen Rangordnungen, da die Punkte, welche wir zur größeren Deutlichkeit zwischen Einern und Sechzigern anbrachten, in der Urschrift nicht vorhanden sind. Welcher Stufe des Sexagesimalsystems die geschriebenen Zahlen angehörten, wurde in den uns bekannt gewordenen Beispielen dem Sinne entnommen. Dem Sinne nach verstand man offenbar, daß

1 ist das Quadrat von 1

gelesen werden wollte: 1×60^2 ist das Quadrat von 1×60; dem Sinne nach, daß

$7 \cdot 30$ ist der Kubus von 30

heißen sollte: $7 \times 60^2 + 30 \times 60$ ist der Kubus von 30 Einheiten.

Wir müssen hier einen Augenblick verweilen. Die Wörter *ibdi* und *badie* bedeuten, sagten wir mit Rawlinson, Quadrat und Kubus. Damit ist die Beziehung gemeint, welche zwischen den rechts und links von diesen Wörtern stehenden Zahlen obwaltet. An und für sich könnte also

81 *ibdi* 9

[1]) Bezold S. 96.

ebenso wie

81 ist das Quadrat von 9

auch bedeuten

81 die Quadratwurzel davon ist 9,

und vielleicht wäre diese Übersetzung vorzuziehen. Die wörtliche Bedeutung des Stammes *di*, welcher sowohl dem *ibdi* als dem *badie* zugrunde liegt, ist unbekannt. Man weiß bis jetzt nur, daß *di* auf anderen Tafeln in Verbindung mit der bei Tieropfern wichtigen Untersuchung der Leber des geschlachteten Tieres vorkommt, dort also einer mathematischen Bedeutung entbehrt[1]). Dort kann nur von dem die Rede sein, was in dem Tiere steckt, und erwägen wir, daß die Quadratwurzel in der Zahl steckt, so wäre damit ein Vergleichungspunkt der beiden Arten des Vorkommens gefunden.

Eine fernere Frage ist die nach dem Zwecke, welchen die bereits in zwei Exemplaren bekannten Zahlentafeln erfüllen sollten. Man hat sie Hilfstafeln bei der Vermessung von Feldern und Grundstücken genannt. Das mag ja zutreffen, aber in welchem Sinne? Quadratzahlen und Kubikzahlen eine unmittelbare Brauchbarkeit bei Vermessungen zuzuweisen, fällt schwer. Felder in Gestalt von Quadraten gab es nur in den seltensten Fällen. Nicht der menschliche Wille allein gibt den Grundstücken ihre Umgrenzung, die Bodenbeschaffenheit tut dazu das meiste. Wir können diese an sich schon einleuchtende Behauptung noch näher belegen. Pater Scheil hat einen Felderplan veröffentlicht, welcher aus der Zeit des Königs Ine Sin aus der zweiten Dynastie von Ur etwa 2400 v. Chr. stammt. Kein einziges von den dort gezeichneten Feldern ist quadratisch, und wenn auch über die genaue Erklärung der auf dem Plane vorkommenden Zahlenangaben eine ziemlich weitgehende Meinungsverschiedenheit obwaltet[2]), soviel ist doch gesichert, daß die Felder bald dreieckig, bald unregelmäßig viereckig aussehen, daß man deren Flächeninhalt durch Vervielfachung von untereinander verschiedenen Zahlen zu ermitteln suchte.

Solche Vervielfachungen wurden ebenfalls um 2400 v. Chr. durch damals vorhandene Tabellen unterstützt. Professor H. V. Hilprecht[3]) hat bei den unter seiner Leitung vorgenommenen Ausgrabungen in

---

[1]) Mündliche Mitteilung von Herrn Bezold. [2]) Aug. Eisenlohr, Ein altbabylonischer Felderplan nach Mitteilungen von F. V. Scheil. Leipzig 1896. Jul. Oppert, *L'administration des domaines, les comptes exacts et les faux au cinquième millenium avant l'ère chrétienne.* Paris 1899. *Comptes Rendus des séances de l'Académie des inscriptions et des belles-lettres.* [3]) Die Ausgrabungen der Universität von Pennsylvania im Bêltempel zu Nippur. Ein Vortrag von H. V. Hilprecht. Leipzig 1903. Vergl. besonders S. 59—60.

Nippur außer dem Stufentempel des Bêl (dem babylonischen Turm) auch das damit verbundene Schulgebäude und die Bibliothek der Priesterschule bloßgelegt, welche letztere viele Tausende von Tafeln enthielt. In Beziehung auf diese heißt es: „Besondere Aufmerksamkeit wandte man dem Gebiete der Arithmetik, Mathematik und Astronomie zu. Zunächst wurde der Schüler im Gebrauche des Sexagesimalsystems eingedrillt. Da heißt es $60 + 7 \times 10 = 2 \times 60 + 10$, $60 + 8 \times 10 = 2 \times 60 + 20$ usw. In geradezu phänomenaler Weise wurde das Einmaleins geübt. Wir haben eine ganze Menge dieser nach Serien eingeteilten Multiplikationstafeln, darunter mehrere Duplikate. Eine Tafel enthält das Einmalsechs (bis 60), eine zweite das Einmalneun. Ich habe derartige Tafeln bis 1 mal 1350 in den Händen gehabt." Wenn solche umfassende Rechenknechte, wie wir unter Benutzung eines unserer Gegenwart angehörenden Wortes uns ausdrücken wollen, vorhanden waren, dann muß eine nur Quadratzahlen, nur Kubikzahlen enthaltende gleichfalls in Duplikaten vorhandene Tafel ganz besonderer Zwecke wegen hergestellt worden sein, und als einen solchen Zweck glauben wir die Erkennung einer Zahl als Quadratzahl, als Kubikzahl uns denken zu dürfen.

Man hatte beispielsweise durch Vervielfachung $9 \times 361 = 3249$ gewonnen und fand nun in der Tafel von Senkereh, das Quadrat von 57 sei gleichfalls 3249. Damit wäre die vorhin von uns vorgeschlagene Übersetzung

3249 die Quadratwurzel davon ist 57

in zweckentsprechender Übereinstimmung.

Jene gewünschte Verwandlung einer anders beschaffenen Figur in ein Quadrat, denn das ist doch am letzten Ende das hier vorausgesetzte Verfahren, konnte möglicherweise darin begründet sein, daß irgend eine Besteuerung von Feldern nicht nach Maßstab ihrer Fläche, sondern nach Maßstab der Seite des flächengleichen Quadrates vorgenommen worden wäre, eine Vermutung, welche wir allerdings vorläufig nicht zu stützen imstande sind.

Hatten die Zahlentafeln von Senkereh den hier als denkbar geschilderten arithmetischen Zweck, dann konnten sie auch zu einer Interpolation dienen. Man sah, daß 3249 der Wurzelzahl 57, daß 3364 der Wurzelzahl 58 entsprach, also mußte z. B. der Feldinhalt 3300 einer Wurzelzahl entsprechen, welche zwischen 57 und 58 lag. Im Verlaufe von Jahrhunderten konnte sich dieses Wissen zu immer genauerer Abschätzung irrationaler Quadratwurzeln entwickeln.

Die andere Tafel von Senkereh stand aber, wir sind wohl oder übel zu dieser unausweichlichen Folgerung gezwungen, in ähnlicher Beziehung zu der Lehre von den Kubikwurzeln wie die erste zu der von den Quadratwurzeln.

Wir kommen noch zu einer dritten Frage. Wir sagten oben, man habe

$$7 \cdot 30 \quad \textit{badie} \quad 30$$

so gedeutet, daß $7 \times 60^2 + 30 \times 60^1$ als Kubus von 30 erscheine, daß man dem Sinne nach verstand, daß so und nicht etwa $7 \times 60^1 + 30 = 30^3$ zu lesen war. Genügte der Sinn auch zum Verständnis, wenn Einheiten irgend einer Stufe zwischen den anzuschreibenden fehlten? Wurde z. B. $7248 = 2 \times 60^2 + 48$ nur $2 \cdot 48$ geschrieben und überließ man es dem Leser aus dem Sinne zu entnehmen, daß in der Tat 7248 und nicht $168 = 2 \times 60 + 48$ gemeint war? Die Tafeln beantworten uns diese Frage nicht, würden sie auch nicht beantworten, wenn die ganze erste Tafel unzerbrochen auf uns gekommen wäre, da unter sämtlichen Kubikzahlen bis zu $59^3 = 57 \times 60^2 + 2 \times 60 + 59$ keine einzige vorkommt, welche sich nur aus Einheiten der ersten und der dritten Stufe zusammensetzte. Und doch leuchtet die hohe geschichtliche Wichtigkeit dieser Frage, ob man das Fehlen von Einheiten einer mittleren Stufe besonders andeutete, sofort ein, wenn man ihr die nur der Form nach verschiedene Fassung gibt, ob, als die Tafeln von Senkereh entstanden, die Babylonier eine Null besaßen? Eine Null, das ist ja ein Symbol fehlender Einheiten! Ohne ein solches besaßen die Babylonier eine immerhin interessante, aber vereinzelte systemlose Benutzung des Stellenwertes. Mit einem solchen war von ihnen schon eine ausgebildete Stellungsarithmetik erfunden. Von dem einen zu dem andern führt ein dem Anscheine nach kleiner, in Wahrheit unermeßlicher Schritt. Schon der Wunsch auf diese eine Frage eine Antwort zu erhalten, läßt die Veranstaltung weiterer Ausgrabungen in Senkereh, zu einem wissenschaftlichen Bedürfnisse heranwachsen. Dort war allem Anscheine nach eine größere Bibliothek. Dort vermuten Assyriologen wie A. H. Sayce eine erhebliche Menge von Tontafeln mathematischen Inhaltes [1]). Dort würde die Geschichte der Mathematik möglicherweise wertvolle Ausbeute gewinnen. Fast mit Sicherheit läßt sich mindestens das Eine erwarten, daß Ausgrabungen zu Senkereh Datierungen liefern würden, welche es möglich machten, den Zeitpunkt, dem die Anfertigung jener Täfelchen entspricht, annähernd zu bestimmen. Gegenwärtig ist nur aus den Wörtern für Quadrat und für Kubus der Schluß zu ziehen, daß diese Werte, daß auch das Sexagesimalsystem den Sumeriern bekannt gewesen sein

[1]) Briefliche Mitteilung des genannten Gelehrten.

muß [1]). Es ist dann weiter vielleicht die Folgerung erlaubt, daß jene Täfelchen vor der Regierung des Königs Sargon I. entstanden, weil damals das Sumerische bereits außer Übung geraten war. Sargon selbst ist „Saryukin, der mächtige König von Agana“ nach inschriftlich erhaltenem Titel [2]). Auf ihn folgte sein Sohn Naramsin, auf diesen die Königin Ellatbau und diese wurde durch Chammuragas, König der Kassi im Lande Elam, entthront, von welchem die Kassiterdynastie gestiftet wurde. Hier gewinnt die Forschung soweit festeren Boden, als es unter den Assyriologen sicher scheint, daß die Kassiterdynastie bis etwa zu dem Jahre 1700 v. Chr. zurückgeht. Sayce folgert auf diese Wahrscheinlichkeitsrechnung gestützt, daß die Täfelchen von Senkereh etwa zwischea 2300 und 1600 v. Chr. entstanden sein dürften [3]).

Für eine wesentlich spätere Zeit können wir die Frage, ob die Babylonier eine Null in dem angegebenen Sinne, d. h. ein Mittel zur Kenntlichmachung einer Lücke in einer sexagesimal geschriebenen Zahl besaßen, allerdings bejahen. In astronomischen Schriften, welche den drei letzten vorchristlichen Jahrhunderten entstammen, und in welchen fast Zeile für Zeile sexagesimal mit Stellungswert versehene Zahlenangaben vorkommen, findet man häufig Beispiele wie

$$10 \quad \frac{4}{60} \qquad \frac{11}{60^3} \quad \frac{32}{60^4}.$$

Mitunter wird die Tatsache, daß der Bruch, welcher 60^2 im Nenner hätte, fehlt, dadurch angedeutet, daß, wie wir es in unserer Nachbildung nachahmten, die Brüche $\frac{4}{60}$ und $\frac{11}{60^3}$ etwas weiter voneinander entfernt abgebildet sind, als es der Fall wäre, wenn keine Lücke in den Sexagesimalbrüchen anzudeuten gewesen wäre. Mitunter ist aber ein die Lücke ausfüllendes aus zwei kleinen Winkelhaken bestehendes Zeichen vorhanden [4]), ein Zeichen, welches auch in nicht mathematischen Texten vorkommt und dort mancherlei Zwecken dient, z. B. andeutet, ein Wort, welches auf einer Zeile nicht vollständig angeschrieben werden kann, setze sich auf der nachfolgenden Zeile fort.

Die soeben erwähnten Beispiele bestätigen, daß, wie Oppert schon früher gezeigt hat, das Sexagesimalsystem auch nach abwärts führte, daß es Sexagesimalbrüche erzeugte, deren Nenner durch die nach rechts vorrückende Stellung der allein geschriebenen Zähler erkenn-

[1]) Delitzsch, Soss, Ner und Sar. Zeitschr. Ägypt. 1878. [2]) Maspero-Pietschmann S. 194. [3]) Briefliche Mitteilung. [4]) Fr. Xav. Kugler, Die Babylonische Mondrechnung. Keilinschriftliche Beilagen Tafel IV und öfter (Freiburg i. Br. 1900).

bar sind. Dahin gehören die Unterabteilungen des sexagesimalen Maßsystems auf der Vorderseite des ersten Täfelchens von Senkereh, von welchem oben im Vorbeigehen die Rede war.

Solchen Tatsachen gegenüber gehörte ein gewisser Mut dazu, die auf keinerlei urkundlicher Grundlage beruhende Meinung auszusprechen[1]), die Sumerier hätten ursprünglich ein Siebenersystem besessen und nachträglich das Sechzigersystem hinzuerfunden, weil 60 vielfach teilbar, 7 dagegen teilerlos war. Weit anmutender ist die Annahme[2]), es habe von den beiden großen Volksbestandteilen, welche in dem Zweistromlande ihre schon weit entwickelte Geistesbildung vermischten, der eine ursprünglich ein Zehnersystem, der andere ein Sechsersystem besessen, und bei dem Zusammenwachsen beider Stämme habe sich das Sechzigersystem bilden können, welches enge Beziehungen zu beiden Grundzahlen, zu 10 und zu 6, an den Tag lege. Manches bleibt allerdings auch bei dieser Annahme recht rätselhaft, z. B. welchem Volke man die Erfindung des Sechsersystems zuschreiben und wie man diese Erfindung sich denken soll. Die von dem Urheber der Vermischungstheorie ($60 = 10 \times 6$) vorgeschlagene Erklärung, man habe an den Fingern gezählt und nach Erschöpfung der Finger einer Hand diese Hand zum Zeichen eines Ruhepunktes im Zählen geschlossen, führt unseres Ermessens zum Fünfersysteme (S. 8) und nicht zum Sechsersysteme.

Weitere Bestätigung durch die Überlieferung ist zwar nicht erforderlich, wo bestimmte Inschriften so deutlich reden. Gleichwohl lohnt es bei ihr Umfrage zu halten, was sie bezüglich babylonischen Rechnens überhaupt, was sie über das babylonische Sexagesimalsystem insbesondere uns zu sagen weiß.

Strabo läßt in Phönikien die Rechenkunst entstehen[3]); Josephus hat deren Erfindusg den Chaldäern zugewiesen[4]), von welchen sie durch Abraham den Weg nach Ägypten gefunden habe, und Cedrenus, ein byzantinischer Geschichtsschreiber der Mitte des XI. S., nennt sogar Phönix, den Sohn des Agenor, der selbst Sohn des Neptun war, als Verfasser des ersten Buches über Philosophie der Zahlen (*περὶ τὴν ἀριθμητικὴν φιλοσοφίαν*) in phönikischer Sprache[5]). Theon von Smyrna im II. S. n. Chr. lebend sagt: bei Untersuchung der Planetenbewegung hätten sich die Ägypter konstruktiver Methoden bedient,

[1]) H. von Jacobs, Das Volk der Siebener-Zähler. Berlin 1896. [2]) G. Kewitsch, Zweifel an der astronomischen und geometrischen Grundlage des 60-Systems. Zeitschrift für Assyriologie XVIII, 73—95. Straßburg 1904. [3]) Strabon XVI, 24 und XVII, 3 (ed. Meineke pag. 1056 und 1099). [4]) Josephus, Antiquit. I cap. 8 § 2. [5]) Cedrenus, Compendium Historiarum (ed. Xylander). Paris 1647, pag. 19.

hätten gezeichnet, während die Chaldäer zu rechnen vorzogen, und von diesen beiden Völkern hätten die griechischen Astronomen die Anfänge ihrer Kenntnisse geschöpft[1]). Porphyrius, selbst in Syrien geboren und am Ende des III. S. schreibend, erzählt: von alters her hätten die Ägypter mit Geometrie sich beschäftigt, die Phönikier mit Zahlen und Rechnungen, die Chaldäer mit den Lehrsätzen, die sich auf den Himmel beziehen[2]).

Diese Überlieferungen bezeugen, daß man von einem hohen Alter der Rechenkunst in Vorderasien die Erinnerung bewahrt hatte. Ein Widerspruch gegen eine andere Sage, die neben der Geometrie auch die Rechenkunst in Ägypten entstehen ließ, kann uns in der Bedeutung, die wir solchen Überlieferungen beilegen, nicht irre machen. War doch in der Tat auch dort eine Rechenkunst vielleicht gleich hohen Alters zu Hause, und steht doch der Sage, Abraham habe Rechenkunst und Astronomie aus Chaldäa nach Ägypten gebracht, die andere gegenüber, Belos, der Ahne eines lydischen Königsgeschlechtes, sei Führer ägyptischer Einwanderer gewesen[3]). Beide Bildungen, die des Nillandes, die des Euphratlandes, waren uralt; beide standen in uralter Berührung; beide beeinflußten das spätere Griechentum sei es unmittelbar, sei es mittelbar, und das Erfinderrecht, welches griechische Schriftsteller, je weiter wir aufwärts gehen, um so ausschließlicher den Ägyptern zuweisen, hängt wohl damit zusammen, daß Griechen in größerer Zahl weit früher nach den Hauptstädten von Ägypten, als nach denen von Vorderasien gelangten. Diese letztere Gegend kann kaum vor dem Alexanderzuge als genügend bekannt betrachtet werden.

Spuren des babylonischen Sexagesimalsystems in den Überlieferungen aufzufinden, wird uns gleichfalls gelingen, wenn wir nur richtig suchen. Wir werden nämlich hier nicht auf Äußerungen ganz bestimmter Natur fahnden dürfen, die Babylonier oder die Phönikier oder dieses oder jenes dritte Nachbarvolk seien Erfinder eines Zahlensystems gewesen, welches nach der Grundzahl 60 fortschritt; wir werden uns begnügen müssen, der Zahl 60 und ihren Vielfachen als Zahlen unbestimmter Vielheit zu begegnen. Von Sammelwörtern zur Bezeichnung unbestimmter Vielheiten war in der Einleitung (S. 5), von gewissen Zahlen als Vertretern einer unübersehbar großen Vielheit in diesem Kapitel (S. 23—24) schon die Rede. Allein neben den Ausdrücken unbestimmter Zusammenfassung, neben den Zahlen

[1]) Theo Smyrnaeus (ed. Ed. Hiller). Leipzig 1878, pag. 177. [2]) Porphyrius, *De vita Pythagorica* s. 6 (ed. Kiessling, pag. 12). [3]) Diodor I, 28, 29.

außergewöhnlicher Vielheit bilden kleinere ganz bestimmte Zahlen in dem Sinne einer nicht genau abgezählten oder abzuzählenden Menge ein ganz regelmäßiges Vorkommen[1]).

Die Zahlen 5, 10, 20 als in den menschlichen Gliedmaßen begründet vertreten oftmals solche unbestimmte Vielheiten. Die Zahl 3 ist unbestimmte Vielheit in *τρισάθλιος* sowie in *ter felix* (dreifach unglücklich, dreifach glücklich). Eben dahin gehört es, wenn der Chinese „die vier Meere“ statt alle Meere sagt, wenn wir von „unseren sieben Sachen“ statt von allen unseren Sachen reden, indem dort die vier Weltgegenden den Vergleichungspunkt zeigten, hier die weit und breit besonders geachtete Zahl 7 mutmaßlich den 7 Tagen der Schöpfungswoche, die selbst mit den 7 Wandelsternen der alten Babylonier zusammenhängen dürften, ihre Heiligkeit und ihre häufige Anwendung verdankt. An diesen wenigen Beispielen erkennen wir bereits, daß nicht jede beliebige Zahl als unbestimmte Vielheit gewählt wird, sondern, daß Gründe, die freilich nicht immer am Tage liegen, den Anlaß gaben, bald dieser bald jener Zahl die genannte Rolle zuzuweisen. So bildet 40 die unbestimmte Vielheit sämtlicher Völker ural-altaischer Abkunft[2]) bis auf den heutigen Tag. So waren es 40 Amazonen, von denen die skythische Sage berichtet. So ist im Märchen Ali Baba mit 40 Räubern zusammengetroffen. So brachten die Hebräer 40 Jahre in der Wüste, Mose 40 Tage und 40 Nächte auf dem Berge Sinai zu. So dauerte der Regen, der die Sintflut einleitete, 40 Tage und 40 Nächte, und so sind noch viele andere biblische Stellen des alten wie des neuen Bundes, letztere wohl meistens bewußte Nachahmungen der ersteren, durch die Annahme zu erklären, die in ihnen vorkommende Zahl 40 sei eine unbestimmte Vielheit. Wie aber 40 zu dieser Rolle kam, und zwar in ältester Zeit kam, denn es sind gerade die ältesten Bibelstellen, welche ein unbestimmtes 40 benutzen, das ist heute nicht bekannt.

Ähnlicherweise kommt nun 60 mit seinen Vielfachen und einigen in ihm enthaltenen kleineren Zahlen als unbestimmte Vielheit vor, aber immer und ausschließlich in solchen Verhältnissen, wo eine Beeinflussung von Babylon aus nachweisbar oder wenigstens möglich ist. Wir haben vor wenigen Zeilen von ältesten Bibelstellen gesprochen. Theologische Kritik hat nämlich aus Eigentümlichkeiten

[1]) Über solche unbestimmte Vielheiten vergl. Math. Beitr. Kulturl. 146—148 und 361—362, wo auf verschiedene Quellen hingewiesen ist. Zu diesen kommt noch: Pott I, 119; dann Himly, Einige rätselhafte Zahlwörter (Zeitschr. d. morgenl. Gesellsch. XVIII, 292 und 381); Kaempf, Die runden Zahlen im Hohenliede (ebenda XXIX, 629—632) und der Artikel: Zahlen von Kneucker in Schenkels Bibellexikon. [2]) Briefliche Mitteilung von Herrn Berth. Laufer.

der Sprache, der Glaubenssätze, der Vorschriften usw. ein verschiedenes Alter der in den 5 Büchern Mose vereinigten Erzählungen nachzuweisen gewußt. Sie hat beispielsweise festgestellt, daß der Sintflutsbericht der Bibel ein doppelter ist. Der älteren Erzählung gehört der vorerwähnte 40tägige Regen an. In dem jüngeren Berichte, der erst nach 535, d. h. nach der Rückkehr aus der babylonischen Gefangenschaft niedergeschrieben sein soll, sind die Maße der Arche angegeben, 300 Ellen sei die Länge, 50 Ellen die Weite und 30 Ellen die Höhe[1]). Die Länge und Weite der Arche in Berichten der Keilschrift scheinen auf 600 und auf 60 zu lauten[2]). Das goldene Götterbild, welches König Nebukadnezar errichten ließ, war 60 Ellen hoch und 6 Ellen breit[3]). Um das Bett Salomos her stehen 60 Starke aus den Starken in Israel, und 60 ist die Zahl der Königinnen[4]). Anderweitige Parallelstellen gewährt die außerbiblische hebräische und chaldäische Literatur, von welchen wir nur der Reimzeile: „In des einen Hause 60 Hochzeitbälle, in des andern Kreise 60 Sterbefälle“[5]) gedenken. Auch die griechische Literatur läßt uns keineswegs im Stiche. Den ionischen Truppen wird von dem Perserkönige der Befehl erteilt, an der Brücke über den Ister 60 Tage zu warten; Xerxes läßt dem Hellesponte 300 Rutenstreiche geben; Kyrus läßt den Fluß Gyndes, in welchem eines seiner heiligen Rosse ertrunken war, zur Strafe in 360 Rinsel abgraben. So nach Herodot[6]). Entsprechend berichtet Strabo: Man sagt, es gebe ein persisches Lied, in welchem die 360 Nutzanwendungen der Palme besungen würden[7]). Stobäus läßt durch Oinopides und Pythagoras ein großes Jahr von 60 Jahren einrichten[8]), und wir werden später sehen, daß diese Philosophen als Schüler morgenländischer Weisheit betrachtet wurden. Vielleicht ist damit die freilich von unserem Berichterstatter, Pausanias, anders begründete Sitte in Zusammenhang zu bringen, daß das Fest der großen Dädala mit den Platäern auch von den übrigen Böotern alle 60 Jahre gefeiert wurde: denn so lange war nach der Sage das Fest zur Zeit der Vertreibung der Platäer eingestellt[9]).

[1]) I. Mose 6, 5. [2]) Le poème Chaldéen du déluge traduit de l'assyrien par Jules Oppert (Paris 1885) pag. 8: Le navire que tu bâtiras, mesurera un *ner* d'empans en longueur, un *soss* d'empans sera le compte de sa hauteur et de sa largeur. Es ist nicht ohne Interesse, daß diese Angaben mit denen der Bibel zusammentreffen, sobald man annimmt, die babylonische Einheit sei die Hälfte der biblischen Elle gewesen. [3]) Daniel 3, 1. [4]) Hohes Lied 3, 7 und 6, 8. [5]) Dieses Beispiel und mehrere andere namentlich bei Kaempf in dem obenerwähnten Aufsatze Zeitschr. d. morgenl. Gesellsch. XXIX. [6]) Herodot IV, 98; VII, 35; I, 189 und 202. [7]) Strabo XVII, 1, 14. [8]) Stobaeus, Eclog. Phys. I, 9, 2. [9]) Pausanias, IX, 3.

Endlich gehört sicherlich eine Stelle des Hesychios hierher, Saros sei eine Zahl bei den Babyloniern[1]). Mit dieser Stelle haben wir den Rückweg zu den Schriftdenkmälern der Babylonier gewonnen, aus welchen unser Gewährsmann unmittelbar oder mittelbar geschöpft haben muß. Die Sprache der Babylonier enthielt nämlich nicht bloß das Wort Sar mit einer Zahlenbedeutung, welche allseitig als 3600 verstanden wird, sondern auch noch Ner mit der Bedeutung 600 und Soss mit der Bedeutung 60.

Wir sagen ausdrücklich Soss, Ner, Sar haben diese Zahlenbedeutung, weil wir vermeiden wollen sie Zahlwörter zu nennen. Sie gehören eben zu den Wortformen, deren es in anderen Sprachen auch gibt, welche mit Zahlenwert versehene Nennwörter sind, wie unser Dutzend = eine Anzahl von 12, Mandel = eine Anzahl von 15, Schock = eine Anzahl von 60, aber beim eigentlichen Zählen, insbesondere beim Bilden größerer Zahlen, nicht anderen Zahlwörtern gleich benutzt werden. Ganz in derselben Weise wie das wohl nur zufällig lautverwandte Schock bezeichnet Soss eine Anzahl von 60 irgendwelcher als Einheit gewählter Gegenstände. Das Ner ist so viel wie 10 Soss, der Sar so viel wie 60 Soss, aber immer unter Voraussetzung konkreter Einheiten. So stellt uns der Soss, der Sar die nächsthöheren Stufen des aufsteigenden Sexagesimalsystems vor, welche auf die Einheiten folgen, und die Frage bleibt eine offene, ob es noch Namen über diese hinausgab, ob es etwa ein Wort gab für 60 Sar, d. h. für eine Anzahl von 216 000. Was über die den Babyloniern in ihrer Allgemeinheit wohl anhaftende Beschränkung des Zahlenbegriffes S. 23 gesagt wurde, genügt keineswegs diese Frage beiseite zu schieben, denn wir stellen sie nicht mit Bezug auf bürgerliche, sondern auf wissenschaftliche Rechenkunst. Der Soss freilich, und wohl auch der Ner, sind zum gemeinsamen Volkseigentume geworden. Ersterer in mathematischen Schriften, wie z. B. in den Tafeln von Senkereh, durch einen Einheitskeil bezeichnet, welchem die Stellung den Rang erteilte, scheint auch sonstigen Inschriften in der Weise sich eingefügt zu haben, daß der Vertikalkeil links von Winkelhaken stehend, zu welchen er dem Gesetze der Größenfolge halber nicht einfach addiert werden konnte, und welche er als Einheit vervielfachen zu sollen keine Veranlassung besaß, die Bedeutung von

[1]) Auf diese Stelle hat J. Brandis in seinem vortrefflichen Werke: Das Münz-, Maß- und Gewichtswesen in Vorderasien bis auf Alexander d. Großen, Berlin 1866, aufmerksam gemacht. Für den Mathematiker von besonderem Interesse sind S. 9, 15, 595. Parallelstellen zu Hesychios bei Suidas und Synkellos vergl. in dem Aufsatze von Fr. Delitzsch, Soss, Ner, Sar. Zeitschr. Ägypt. 1878, S. 56—70.

Soss, d. i. also von 60 gewann, wie in mathematischen Schriften und so sich addierte[1]). Freilich ist auch diese Behauptung, wie so manche andere, die sich auf Entzifferung von Keilschrift bezieht, noch bestritten, und der einzelne links von Winkelhaken befindliche Vertikalkeil wurde von Oppert und Lenormant als 50 gelesen, eine Auffassung, an welcher aber Oppert jedenfalls nicht mehr hartnäckig festgehalten hat.

Wir haben oben (S. 32) uns der Ansicht angeschlossen, das Sexagesimalsystem sei aus der Vermischung eines Sechsersystems mit einem Zehnersystem entstanden, welche beide dem Sechzigersysteme sich ein- und unterordnen konnten. Damit fällt die Annahme, der wir selbst früher huldigten, die Grundzahl 60 sei durch Sechsteilung der 360 Grade des Kreises entstanden, und diese hätten den 360 Tagen eines alten Sonnenjahres entsprochen. Man hat den sehr richtigen Einwand erhoben[2]), man habe doch das Zählen und Anschreiben der kleineren Zahlen gekannt und benutzt, bevor man zu 360 gelangte, man bilde kein Zahlensystem durch Verkleinerung, sondern allenfalls durch Vergrößerung einer vorhandenen Grundzahl, man könne also nicht den Gedankengang eingeschlagen haben, daß man zuerst 360 und dann 60 als rechnerischen Ruhepunkt benutzte. Man hat den ferneren Einwand erhoben, die Mangelhaftigkeit einer Sonnenbahn von nur 360 Tagen müsse sehr frühzeitig erkannt worden sein und müsse die Notwendigkeit von mindestens 5 Zusatztagen erzeugt haben; das Jahr von 360 Tagen sei nur ein Rechnungsjahr gewesen, und zwar deshalb gewesen, weil man $6 \times 10 = 60$ als Grundzahl besaß, wodurch ebensowohl $6^2 \times 10 = 360$ als $6 \times 10^2 = 600$ in den Vordergrund arithmetischen Denkens treten mußten.

Damit fallen auch die anderen Versuche, welche gemacht worden sind[3]) das Sexagesimalsystem astronomisch herzuleiten. Aber nicht als hinfällig können wir betrachten, was wir ein Eindringen des Sexagesimalsystems in die Astronomie und Geometrie der Babylonier nennen möchten.

Das Sexagesimalsystem der Babylonier hängt, glauben wir, mit astronomisch-geometrischen Dingen zusammen. So ungern wir von unserer Absicht der Geschichte der Astronomie in diesem Werke fern zu bleiben abweichen, hier müssen wir eine kleine Ausnahme insoweit eintreten lassen, als wir von dem Altertum babylonischer Stern-

[1]) Lepsius, Babylonisch-assyrische Längenmaße (Abhandl. Berlin. Akademie 1877) S. 142—143. [2]) Kewitsch in der Zeitschrift für Assyriologie Bd. XVIII. Straßburg 1904. [3]) F. Ginzel, C. Lehmann, H. Zimmern haben solche Versuche angestellt.

kunde wenigstens einiges berichten[1]). Mag man die Hunderttausende von Jahren, durch welche hindurch Plinius anderen Berichterstattern folgend babylonische Beobachtungen angestellt sein läßt, belächeln; mag man zunächst auch den 31000 Jahren vor Alexander dem Großen mit ungläubigster Abwehr gegenüberstehen, aus welchen nach Porphyrius eine Beobachtungsreihe durch Kallisthenes an Aristoteles gelangte; folgende Dinge stehen fest: Klaudius Ptolemäus, der Verfasser des Almagest, wußte von einer babylonischen Liste von Mondfinsternissen seit 747. Die Sonnenfinsternis vom 15. Juni 763 ist in den assyrischen Reichsarchiven angegeben. Für König Sargon, der etwa 3700 v. Chr. gelebt haben mag, ist ein astrologisches Werk verfaßt, welches der englische Assyriologe Sayce entziffert und übersetzt hat. Für eine sehr bedeutende Anzahl von Jahrestagen ist in diesem Werke, welches wir am deutlichsten als Vorbedeutungskalender bezeichnen, erörtert, welche Folge eine gerade an diesem Tage eintretende Verfinsterung haben werde. Man überlege nun, welches statistische Material an Verfinsterungen und ihnen folgenden Ereignissen nötig war, um ein solches Wahrscheinlichkeitsgesetz, welches man selbstverständlich für unfehlbare Wahrheit hielt, herzustellen; selbst wenn manche Ereignisse nicht der Erfahrung sondern der Einbildungskraft des Verfassers des Kalenders entstammten, so wird man so viel zuzugeben geneigt sein, daß wahrscheinlich mehrere tausend Jahre vor Alexander eine babylonische Astronomie bestand, daß es unter allen Umständen zur Zeit von König Sargon eine beobachtende Sternkunde der Babylonier gab, die damals das Kalenderjahr längst besaßen. Babylonisch und zwar aus ähnlich alter Zeit dürfte auch die 7 tägige Woche sein, welche, wie wir schon gelegentlich bemerkt haben, in der biblischen Schöpfungswoche sich widerspiegelt, während sie der Anzahl der bekannten Wandelsterne ihren eigentlichen Ursprung verdankt. Auf die babylonische Heimat weisen die 7 Stufen verschiedenen Materials hin, welche den Tempel des Nebukadnezar bildeten, dessen Trümmer in Birs Nimrud begraben wurden, und der, wie manche glauben, der Sprachenturm der Bibel war. Ebendahin weisen uns die 7 Wälle von Ekbatana[2]), und die Macht der Planetengötter über das menschliche Geschlecht und dessen Schicksale bildete einen Teil der babylonischen Vorbedeutungswissenschaft[3]). Babylonisch ist dann weiter die Einteilung des Tages in Stunden. Hier freilich ist eine ganz

[1]) Eine sehr übersichtliche Zusammenstellung aller Quellen bei A. H. Sayce, *The astronomy and astrology of the Babylonians with translations of the tablets relating to these subjects* in den *Transactions of the society of biblical Archaeology*. Vol. III, Part. 1. London 1874. Vergl. auch das Programm von A. Häbler, Astrologie im Alterthum, 1879. [2]) Herodot I, 98. [3]) Diodor II, 30.

bestimmte Kenntnis des Sachverhaltes nicht vorhanden, denn wenn Herodot uns ausdrücklich sagt, die Babylonier hätten den Tag in zwölf Teile geteilt[1]), so sprechen andere Gründe für eine Teilung des Tages in 60 Stunden, und man hat versucht sich damit zu helfen, daß man die 12 bürgerlichen Stunden, welche den Tag ohne die Nacht ausfüllten, von einer wissenschaftlichen Einteilung zu astronomischen Zwecken unterschied[2]). Die Vermutung, man habe in Babylon den Tag in 60 Stunden geteilt, beruht vornehmlich auf zwei Gründen. Erstlich wendet Ptolemäus bei der auf Hipparch und auf die Chaldäer Bezug nehmenden Berechnung der Mondumläufe die Sechzigteilung des Tages an[3]), und zweitens teilten die Vedakalender der alten Inder gleichfalls den Tag in 30 *muhúrta*, deren jeder aus 2 *nâdikâ* bestand, so daß 60 Teile gebildet wurden[4]). Indische Astronomie weist aber vielfach mit zwingender Notwendigkeit auf babylonische Beeinflussung zurück. Die Dauer des längsten Tages z. B. wurde in dem Vedakalender auf 18 *muhúrta*, d. h. also auf $\frac{18}{30}$ Tageslängen oder $14^h\,24^m$ angegeben. Ptolemäus in seiner Geographie bezeichnet sie zu $14^h\,25^m$ für Babylon. In chinesischen Quellen erscheint dieselbe Dauer in Gestalt von 60 *Khe*, deren jeder $14^m\,24^s$ beträgt[5]). Die Dauer des längsten Tages ist aber selbstverständlich als von der Polhöhe abhängig nicht aller Orten gleich; ferner waren in so weit zurückliegenden Zeiten die Beobachtungen wie die daran sich knüpfenden Rechnungen nicht so feiner Natur, daß fast identische Ergebnisse an verschiedenen Orten zu erwarten wären. Die Wahrscheinlichkeit ist daher nicht zu unterschätzen, daß die Zahlenangabe für den längsten Tag sich von einem der drei Punkte nach den beiden anderen verbreitet haben werde und zwar so, daß Babylon als Verbreitungsmittelpunkt zu gelten hätte[6]). In Indien haben übrigens Zeitmesser, welche auf der Einteilung des Tages in 60 Teile beruhen, bis auf die heutige Zeit sich erhalten, und der deutsche Reisende Herm. Schlagintweit war in der Lage der Münchner Akademie eine solche Uhr vorzuzeigen. Sie besteht aus einem Abschnitte einer Hohlkugel aus dünnem Kupferblech, welcher unten fein wie mit einem

[1]) Herodot II, 109. [2]) Lepsius, Chronologie der Ägypter S. 129, Note 1. [3]) Ptolemäus, Almagestum IV, 2. [4]) Lassen, Indische Altertumskunde pag. 823. A. Weber, Über den Veda-Kalender genannt Jyotischam (Abhandl. Berlin. Akad. 1862), S. 105. [5]) Biot, *Précis de l'astronomie Chinoise*. Paris 1861, pag. 29. [6]) A. Weber in den Monatsber. Berlin. Akad. 1862, S. 222 und in der vorzitierten Abhandlung S. 14—15 und 29—30. Vergl. auch desselben Verfassers: Vedische Nachrichten von den Naxatra II. Teil (Abhandl. Berlin. Akad. 1862), S. 362. Entgegengesetzter Meinung sind Whitney und G. Thibaut. Vergl. des letzteren: *Contributions to the explanation of the Jyotisha-Vedánga*, pag. 13.

Nadelstich durchlöchert ist. Setzt man diese Vorrichtung auf Wasser, so füllt sich die Kugelschale allmählich an und sinkt nach bestimmter Zeit, etwa nach anderthalb *muhûrta*, unter hörbarem Zusammenklappen des Wassers über ihr, unter[1]).

Aus dieser ganzen Erörterung geht soviel hervor, daß die Astronomen Babylons die Zahl 60 mehrfach benutzten, und daß, wenn ihnen eine Einteilung des Kreises in 360 Grade geläufig war, diese Einteilung von Laien so gedeutet werden konnte, daß jeder Grad den Weg zu versinnlichen bestimmt war, welchen die Sonne bei ihrem vermeintlichen Umlaufe um die Erde jeden Tag zurücklegte[2]). Wollte man nun von dieser Kreisteilung, von diesen Graden, wieder größere Mengen zusammenfassen, so lag es nahe, den Halbmesser auf dem Kreisumfang herumzutragen. Man erkannte, wie wir fürs erste uns zu glauben bitten, die Begründung uns bis zum Schlusse des Kapitels versparend, wo wir uns mit baylonischer Geometrie beschäftigen müssen, daß ein sechsmaliges Herumtragen des Halbmessers als Sehne den Kreis vollständig bespannte und zum Ausgangspunkte zurückführend dem regelmäßigen Sechsecke den Ursprung gab. Dann aber enthielt jeder dieser größeren von einem Halbmesser bespannten Bögen genau 60 Teile und faßte man sie besonders ins Auge, so war damit wieder die Sechzigteilung, war zugleich die Sechsteilung gewonnen. Letztere klingt in den Wörtern *šiba* großes sechs = 7 und *šam-na* = 6 + 2 = 8 wieder[3]) und könnte auch in den so häufig wiederkehrenden Sechsteln (S. 23) sich erhalten haben. Der Ursprung der Sechzigteilung kann dabei sehr leicht in Vergessenheit geraten sein, so daß man beispielsweise in jener Mondbeleuchtungstheorie (S. 25) den vierten Teil der Mondscheibe in 60 Teile zerlegte, während man den Graden entsprechend 90 solcher Teile im Quadranten angenommen hätte, wenn nicht, wie wir sagten, der Ursprung der Sechzigteilung bereits vergessen gewesen wäre.

Wir haben (S. 37) angedeutet, das Ner von $600 = 6 \times 10^2$ habe leicht in das Sexagesimalsystem der Babylonier Eingang finden können. Wie mag man sich seiner bedient haben? Wollen wir unsere Vermutung über diesen Gegenstand erörtern, so müssen wir über das Rechnen der Babylonier einiges vorausschicken. Daß sie rechneten, viel und gut rechneten, wissen wir bereits. Daß die Ergebnisse ihres

[1]) Sitzungsbericht der math. phys. Klasse d. bair. Akad. d. Wissenschaft. in München für 1871, S. 128 flgg. [2]) Diese Hypothese über den Ursprung der Kreiseinteilung in 360 Grade ist zuerst von Formaleoni, Saggio sulla nautica antica dei Veneziani (Venedig 1788) ausgesprochen worden, wie S. Günther, Handbuch der mathematischen Geographie (Stuttgart 1890), S. 173, Note 1 berichtet. [3]) Bertin l. c. p. 383.

wissenschaftlichen Rechnens im Sexagesimalsysteme niedergeschrieben wurden, wissen wir gleichfalls. Aber wie gelangte man zu diesen Ergebnissen? Nach dem, was wir in der Einleitung (S. 6) auseinandergesetzt haben, werden unsere Leser sich nicht erstaunen, wenn wir für die vorderasiatischen Völker der alten Zeiten ein Fingerrechnen und ein instrumentales Rechnen in Anspruch nehmen, allerdings mehr auf allgemeine Notwendigkeit als auf besondere Zeugnisse uns stützend. Für das Fingerrechnen steht eine vereinzelte Notiz zu Gebote, der Perser Orontes behaupte, der kleine Finger bedeute sowohl eine Myriade als Eins[1]), sowie die Erwähnung dieses Verfahrens bei Schriftstellern, welche mit der Geschichte jüdischer Wissenschaft sich beschäftigt haben[2]). Noch schlimmer vollends steht es mit der äußeren Begründung des babylonischen Rechenbrettes, für welches nur der einzige Umstand geltend gemacht werden kann, daß bei den Stämmen Mittelasiens bis nach China hinüber ein Rechenbrett mit Schnüren zu allen Zeiten in Übung gewesen zu sein scheint, während gerade in jener Gegend eine Veränderung der Sitten und Gebräuche wenigstens in geschichtlich genauer bekannter Zeit so gut wie nicht vorgekommen ist, während andererseits für babylonisch-chinesische Beziehungen ältester Vergangenheit neben dem, was vorher von der Dauer des längsten Tages gesagt wurde, noch eine andere bedeutungsvolle Ähnlichkeit uns nachher beschäftigen wird. Gibt man uns auf diese ziemlich unsichere Begründung, deren einzige Unterstützung wir im 4. Kapitel in einem griechischen Vasengemälde erlangen werden, zu, daß die Babylonier eines Rechenbrettes sich bedient haben müssen, weil diese Annahme schließlich immer noch naturgemäßer ist, als wenn man voraussetzen wollte, es seien alle Rechnungen von ihnen ohne dergleichen Hilfsmittel vollzogen worden, so schließen wir folgendermaßen weiter[3]). Das Rechenbrett, auf dessen Schilderung wir im 2. Kapitel zurückkommen werden, muß naturgemäß dem herrschenden Zahlensystem sich anschließen, und wo es zwei Zahlensysteme gibt, ein Dezimal- und ein Sexagesimalsystem, da müssen auch zweierlei Bretter existiert haben, oder aber es muß die Möglichkeit geboten worden sein auf demselben Brette bald so, bald so zu rechnen. Die Veränderung bestand im letzteren Falle z. B. darin, daß man bald mehrerer bald weniger Rechenmarken sich bediente. So forderte das Rechenbrett des Dezimalsystems für jede Rangordnung höchstens 9 Marken, während dasjenige des Sexagesimalsystems

[1]) Pott II, 36 nach Suidas. [2]) Friedlein in der Zeitschr. Mathem. Phys. IX, 329. [3]) Vergl. unsere Rezension von Opperts *Étalon des mesures assyriennes* in der Zeitschr. Math. Phys. XX, Histor. literar. Abtlg. 161.

die Notwendigkeit in sich schloß bis zu 59 Einheiten jeder Rangordnung anlegen zu können. Ebensoviele Marken auf dem Raume, welcher für je eine Rangordnung bestimmt war, unmittelbar zur Anschauung zu bringen ist geradezu unmöglich. Alle Übersichtlichkeit und mit ihr die Brauchbarkeit des Rechenbrettes ging verloren, wenn nicht auf ihm in diesem Falle innerhalb des Sexagesimalsystems das Dezimalsystem zu Hilfe gezogen wurde. Das aber hatte so wenig Schwierigkeit, daß ähnliche Vorrichtungen, wie wir sie jetzt beschreiben wollen, nur in etwas veränderter Anwendung uns wiederholt begegnen werden. Wir denken uns in jeder Stufenabteilung des Rechenbrettes zwei Unterabteilungen, eine obere und eine untere. Jene etwa sei für die Einer, diese für die Zehner der betreffenden Ordnung bestimmt. Jene bedarf zur Bezeichnung aller vorkommenden Zahlen 9, diese 5 Marken. Um nun die obere Abteilung der ersten Stufe von der unteren in der Sprache zu unterscheiden, hatte man die althergebrachten Namen Einer und Zehner. In der folgenden Stufe stand für die Marken der oberen Abteilung der Name Soss, für die der unteren der Name Ner zur Verfügung, beziehungsweise diese Namen wurden zum Zwecke der Benennung der Abteilungen erfunden. In der dritten Stufe ist uns nur Sar als Name der oberen Abteilung bekannt. Für die untere Abteilung, deren Einheit 10 Sar oder 36 000 betrug, müßte, wenn unsere Annahmen richtig sind, gleichfalls ein Wort erfunden worden sein. Freilich ist ein solches noch nicht bekannt geworden, aber auch Rechnungen sind noch nicht bekannt geworden, in welchen innerhalb des Rahmens des Sexagesimalsystems Zahlen über 36 000 sich ergaben und schriftlich aufgezeichnet werden mußten; solche Rechnungen dürften überhaupt zu den Seltenheiten gehört haben. Eine Zeitdauer von 36 000 Jahren scheint Berosus allerdings den Babyloniern als besonders hervorgehobenen Zeitraum zuzuschreiben[1]).

Wir haben die Besprechung einer bedeutungsvollen Ähnlichkeit zugesagt, welche auf babylonisch-chinesische Beziehungen deute. Eigentlich ist es eine Ähnlichkeit zwischen Zahlenträumereien der Griechen und der Chinesen. Bei Plutarch wird den Pythagoräern nacherzählt, die sogenannte Tetraktys oder 36 sei, wie ausgeplaudert worden ist, ihr höchster Schwur gewesen; man habe dieselbe auch das Weltall genannt als Vereinigung der vier ersten Geraden und Ungeraden[2]), d. h. $36 = 2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 3 + 5 + 7$. Diese heilige Vierzahl läßt Plutarch an einer zweiten Stelle durch Platon

[1]) Brandis, Das Münz-, Maß- und Gewichtssystem in Vorderasien S. 11.
[2]) Plutarch, *De Iside et Osiride.* 75.

zu 40 ergänzt werden[1]). Gewiß ist dieses eine unfruchtbare und darum nicht naturgemäß sich wiederholende Spielerei. Um so auffallender muß es erscheinen, wenn in China das erstere System dem Kaiser Fu hi, das zweite vollkommenere dem Où wâng, dem Vater des Kaisers Où wâng, der um 1200 v. Chr. regiert haben soll, als Erfinder zugewiesen wird[2]). Chinesische Rückdatierungen sind zwar, wie wir seinerzeit erörtern müssen, von Zuverlässigkeit weit entfernt. Wir legen den Jahreszahlen als solchen deshalb hier keinen sonderlichen Wert bei, aber um so mehr der Übereinstimmung sinnloser Träumereien in so weit entlegener Gegend. Selbst die nicht zu vernachlässigende Tatsache, daß die vervollkommnete Tetraktys mit jener runden Zahl 40 übereinstimmt (S. 34), die den ältesten hebräischen Sagen vorzugsweise anzugehören schien, kann uns in der Vermutung nicht irre machen, daß wir es hier mit einem Stücke babylonischer Zahlensymbolik zu tun haben, welches nach Westen und nach Osten sich fortgepflanzt hat.

Babylonische Zahlensymbolik selbst ist über allen Zweifel gesichert. Träumereien über den Wert der Zahlen nahmen unter den religions-philosophischen Begriffen der Chaldäer einen bedeutsamen Platz ein. Jeder Gott wurde durch eine der ganzen Zahlen zwischen 1 und 60 bezeichnet, welche seinem Range in der himmlischen Hierarchie entsprach. Eine Tafel aus der Bibliothek von Ninive hat uns die Liste der hauptsächlichsten Götter nebst ihren geheimnisvollen Zahlen aufbewahrt. Es scheint sogar, als sei gegenüber dieser Stufenleiter ganzer Zahlen, die den Göttern beigelegt wurden, eine andere von Brüchen vorhanden gewesen, welche sich auf die Geister bezogen und gleichfalls ihrem jeweiligen Range entsprachen[3]).

Als weitere Stütze mögen die zahlensymbolischen Träumereien im VII. und VIII. Kapitel des Buches Daniel angeführt sein, eines Buches, das unter dem ersichtlichen Einflusse babylonischer Denkart geschrieben ist. Ähnliches erhielt sich auf dem Boden Palästinas Jahrhunderte lang, wobei wir nur auf die Offenbarung Johannes als Beispiel hinweisen wollen. Wir könnten aber auch auf die jüdische Kabbala einen Fingerzeig uns gestatten, die, so spät auch das Buch Jezirah und andere kabbalistische Schriften verfaßt sein mögen, der Überlieferung nach bis in die Zeit des Exils hinaufzureichen scheint. Kabbalistisch ist die sogenannte Gematria, wenn ein Wort durch

[1]) Plutarch, *De animae procreatione in Timaeo Platonis* 14. [2]) Montucla, *Histoire des mathématiques* I, 124, wo auch auf die Ähnlichkeit mit den Stellen bei Plutarch aufmerksam gemacht ist. [3]) F. Lenormant, *La magie chez les Chaldéens.* Paris 1874, pag. 24.

das andere ersetzt wurde unter der Voraussetzung, daß die Buchstaben des einen Wortes als Zahlzeichen betrachtet dieselbe Summe gaben, wie die des anderen Wortes. Über diese Zahlenbedeutung hebräischer Buchstaben und ihr vermutliches Alter werden wir zwar erst im vierten Kapitel im Zusammenhange mit ähnlichem Gebrauche der Syrer, der Griechen handeln und können um einiger Beispiele willen unseren Gang nicht unterbrechen; es sei trotzdem gestattet hier die Kenntnis jener Bezeichnungsart für einen Augenblick vorauszusetzen. Gematrie ist es, wenn das jüdische Jahr 355 Tage zählte und damit in Verbindung gebracht wurde, daß die Buchstaben des uralten ursprünglich eine Wiederholung bedeutenden Wortes Jahr שנה = 5 + 50 + 300 genau 355 ausmachen. Gematrie macht sich in den Bibelkommentaren breit. Als nun Abram hörte, heißt es in der Heiligen Schrift, daß sein Bruder gefangen war, wappnete er seine Knechte, 318 in seinem Hause geboren und jagte ihnen nach bis gen Dan [1]). Die Erklärer wollen, der Überlieferung folgend, 318 sei hier statt des Namens Elieser gesetzt, der in der Tat אליעזר = 200 + 7 + 70 + 10 + 30 + 1 = 318 gibt, wenn man von dem Gesetze der Größenfolge Umgang nimmt und nur den Zahlenwert der einzelnen Buchstaben, wie sie auch durcheinander gewürfelt erscheinen mögen, beachtet. Im Propheten Jesaias verkündet der Löwe den Fall Babels [2]). Die Erklärer haben wieder die Buchstaben des Wortes Löwe אריה = 5 + 10 + 200 + 1 = 216 addiert. Die gleiche Summe geben die Buchstaben חבקוק = 100 + 6 + 100 + 2 + 8 = 216 und somit sei Habakuk mit diesem Löwen gemeint. Ja eine Spur solcher Gematrie will man bereits in einer Stelle des Propheten Sacharja erkannt haben [3]), und wäre die uns einigermaßen gekünstelt vorkommende Erklärung richtig, so wäre damit schon im VII. vorchristlichen Jahrhundert ein arithmetisches Experimentieren, wäre zugleich, was vielleicht noch wichtiger ist, für eben jene Zeit die Benutzung der hebräischen Buchstaben in Zahlenbedeutung nachgewiesen. Wir ziehen zunächst nur den Schluß, um dessenwillen wir alle diese Dinge vereinigt haben, daß die Babylonier in ältester Zeit Zahlenspielereien sich hinzugeben liebten, die bei ihnen einen allerdings ernsten magischen Charakter trugen, und daß von ihnen ähnliches zu anderen Völkern übergegangen ist.

Es ist keineswegs unmöglich, daß aus den magischen Anfängen sich die Beachtung von merkwürdigen Eigenschaften der Zahlen entwickelte, daß eine Vorbedeutungsarithmetik bei ihnen sich zur Kenntnis zahlentheoretischer Gesetze erhob. Wissen wir doch, woran wir hier zusammenfassend erinnern wollen, von dem Vorkommen eines ausgebildeten Sexagesimalsystems, von der Benutzung arithmetischer und geometrischer Reihen, von der Bekanntschaft mit Quadrat- und Kubikzahlen in alt-babylonischer Zeit, und auch gewisse Teile der Proportionenlehre sollen, wie wir vorgreifend erwähnen, griechischer Überlieferung gemäß aus Babylon stammen.

[1]) I. Mose 14, 14. [2]) Jesaias 21, 8. [3]) Vgl. Hitzig, Die zwölf kleinen Propheten S. 378 flgg. zu Sacharja 12, 10.

Mit der Lehre von den Vorbedeutungen ist überhaupt die babylonische Wissenschaft aufs engste verknüpft gewesen. Vorbedeutungen zu suchen war, wie wir an jenem zu König Sargons Zeiten verfertigten Kalender gesehen haben, ein wesentlicher Zweck der Beobachtungen von Himmelsvorgängen. Neben dem Aufsuchen von Vorbedeutungen widmete sich die Priesterschaft des Landes dem Hervorbringen von Ereignissen; sie trachtete das Böse abzuwenden und teils durch Reinigungen, teils durch Opfer oder Zauberei zum Guten zu verhelfen [1]). Die Priesterschaft des medischen Nachbarvolkes bestand ebenfalls aus gewerbmäßigen Hexenmeistern, und sie, die Magusch, vererbten ihren Namen auf die Magie [2]), wie in Rom der Name Chaldäer gleichbedeutend war mit Sterndeuter, Wahrsager, gelegentlich auch mit Giftmischer. Schon im Jahre 139 v. Chr. wurden deshalb nach der genauen Angabe des Valerius Maximus die Chaldäer aus Rom verwiesen [3]). Die Wahrsagung beschränkte sich keineswegs auf die Beobachtung der Gestirne, deren Einfluß auf das menschliche Geschick man zu kennen wähnte. Die Punktierkunst [4]) der persischen Zauberer, vielfach erwähnt in den Märchen der Tausend und eine Nacht und darin bestehend, daß auf ein mit Sand überdecktes Brett Punkte und Striche gezeichnet wurden, deren Verschiebungen und Veränderungen infolge eines Anstoßes an den Rand des Brettes beobachtet wurden, diese Kunst, die sich erhalten hat in dem Wahrsagen aus dem Kaffeesatze, die verwandt ist dem Bleigießen in der Neujahrsnacht, welches da und dort noch heute geübt wird, sie dürfte selbst bis in die babylonische Zeit hinaufragen. Wenigstens ist es sicher, daß es eine Vorbedeutungsgeometrie in Babylon gab. Wir besitzen die Übersetzung einer solchen [5]), und wenn

[1]) Diodor II, 29, 3. [2]) Maspero-Pietschmann, S. 466. [3]) Fischer, Römische Zeittafeln (Altona 1846) S. 134 mit Beziehung auf Valerius Maximus lib. I, cap. 3, § 2. [4]) Alex. von Humboldt in seinem Aufsatze über Zahlzeichen usw. (Crelles Journal IV, 216 Note) nennt diese Kunst *raml* und verweist dafür auf Richardson und Wilkins, *Diction. Persian and Arabic* 1806, T. I, pag. 482. Vgl. über die Punktierkunst auch Steinschneider, Zeitschr. d. morgenl. Gesellsch. XXV, 396 u. XXXI, 762 flgg. [5]) *Babylonian augury by means of geometrical figures by* A. H. Sayce in den *Transactions of the society of biblical archaeology* IV, 302—314.

uns schon die Neigung bemerkenswert erscheint Vorbedeutungen aus allem zu entnehmen, was in irgendwie wechselnden Verbindungen auftritt, so müssen wir andererseits auch die vorkommenden Figuren prüfen, deren Kenntnis die Babylonier somit sicherlich besaßen, eine Kenntnis, die als Anfang der Geometrie gelten darf, so wie wir bei den Ägyptern zu ähnlichem Zwecke alte Wandzeichnungen durchmustern werden. In jener Vorbedeutungsgeometrie sind insbesondere folgende Figuren hervorzuheben. Ein Paar Parallellinien (Fig. 1), welche als doppelte Linien benannt werden; ein Quadrat (Fig. 2);

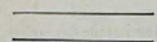
Fig. 1.


Fig. 2.

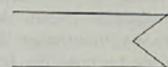
Fig. 3.

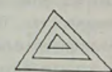
Fig. 4.

eine Figur mit einspringendem Winkel (Fig. 3); eine nicht ganz vollständig vorhandene Figur, welche der Übersetzer zu drei einander umschließenden Dreiecken (Fig. 4) zu ergänzen vorschlägt[1]). Ob auch ein rechtwinkliges Dreieck vorkommt, ist nicht mit ganzer Sicherheit zu erkennen, aber wahrscheinlich. Von Interesse ist im verbindenden Texte das sumerische Wort *tim*, welches Linie, ursprünglich aber Seil bedeutete, so daß es nicht zu dem Unmöglichkeiten gehört, es habe eine Art von Seilspannung, vielleicht freilich nur ein Messen mittels des Seiles, wofür Vermutungsgründe uns sogleich bekannt werden sollen, in Babylon stattgefunden. Von hoher Wichtigkeit ist ferner ein in jenem Texte benutztes, aus drei sich symmetrisch durchkreuzenden Linien bestehendes Zeichen ⚹, welches der Herausgeber durch „Winkelgrad" übersetzt hat. Diese Übersetzung ist gerechtfertigt durch anderweitiges Vorkommen und gestattet selbst weitgehende Folgerungen.

Im britischen Museum befindet sich ein als K 162 bezeichnetes Bruchstück, welches einem babylonischen Astrolabium oder ähnlichem angehört hat und welches in vier Fächern mit Inschriften in Keilschrift bedeckt ist. Die Bedeutung dieser Inschriften kann nicht anders lauten[2]) als daß in zwei Monaten, deren Name angegeben ist, der Ort von vier Sternen, zwei Sterne in dem einen, zwei in dem anderen Monate, aufgezeichnet ist, und diese Örter heißen 140 Grad, 70 Grad, 120 Grad, 60 Grad nach Sayces Übersetzung. Der Grad ist auch hier in allen vier Fällen durch das Zeichen der drei ein-

[1]) Privatmitteilung von H. Sayce ebenso wie die nachfolgende Bemerkung über das rechtwinklige Dreieck. [2]) Privatmitteilung von H. Sayce.

ander schneidenden Linien ausgedrückt. Nehmen wir aber diese Übersetzung einmal als richtig an, so ist in ihr eine Bestätigung unserer Meinung über geometrische Benutzung des Sexagesimalsystems enthalten. Bei der Zählung der Winkelgrade, deren 360 auf der Kreisperipherie zu unterscheiden sind, faßte man, meinen wir, je 60 in eine neue Bogeneinheit zusammen, welche man erhielt, indem man den Halbmesser sechsmal auf dem Umkreise herumtrug. Für die erste Hälfte unserer Behauptung gibt es keine bessere Stütze als jenes Gradzeichen. Die drei symmetrisch gezeichneten Linien teilen ja den um den gemeinsamen Schnittpunkt befindlichen Raum in sechs gleiche Teile und lassen damit jeden dieser sechs Teile als besonders wichtig hervortreten!

Auch an weiterer Bestätigung dafür, daß den Babyloniern die Sechsteilung des Kreises bekannt war, fehlt es nicht. Wir werden im 3. Kapitel sehen, daß auf ägyptischen Wandgemälden es gerade asiatische Tributpflichtige sind, welche auf ihren überbrachten Gefäßen Zeichnungen haben, bei welchen der Kreis durch sechs Durchmesser in zwölf Teile geteilt ist. Übereinstimmend zeigen ninivitische Denkmäler in ihren Abbildungen des Königswagens dessen Räder mit sechs Speichen versehen[1]) (Fig. 5). Endlich ist damit in Einklang die Dreiteilung eines rechten Winkels, welche auf einer assyrischen Tontafel geometrischen Inhaltes durch G. Smith entdeckt worden ist, bevor er seine letzte Reise, von welcher er nicht mehr heimkehren sollte, nach den Euphratländern antrat; eine Entdeckung, aus welcher weitere Folgerungen zu ziehen nicht gestattet ist, bevor der ganze Text der Öffentlichkeit übergeben ist. Darauf aber wird man, wie zu befürchten steht, noch lange warten müssen, da die betreffende Tafel seit der Abreise ihres Entdeckers nicht wieder gesehen worden ist, also vermutlich durch ihn in irgend eine Ecke für künftiges Studium beiseite gestellt, eines Zufalles harret, der gerade auf sie unter den zahllos vorhandenen Tafeln die Aufmerksamkeit lenkt.

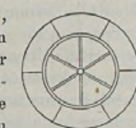
Fig. 5.

Ist aber nunmehr die Sechsteilung des Kreises als bewußte geometrische Arbeit der Babylonier außer Zweifel gesetzt, so wird man auch unsere Behauptung, die Sechsteilung sei durch Herumtragen des Halbmessers erfolgt, habe also die Kenntnis des Satzes von der Seite des regelmäßigen Sechsecks mit eingeschlossen, in den Kauf

[1]) *Niniveh and its remayns by* A. H. Layard. London 1849. I, 337. Weitere Abbildungen von sechsspeichigen Rädern bei Bezold, Ninive und Babylon Fig. 17, 46, 52, 98 auf Seite 22, 58, 66, 128.

nehmen müssen. Es ist nun einmal, außer im Zusammenhang mit diesem Satze, ein Grund zur geometrischen Sechsteilung des Kreises nicht vorhanden. Außerdem sind wir imstande eine Bestätigung aus biblischer Nachahmung anzuführen. Wenn man, ohne mathematische Kenntnisse zu besitzen, sah, daß der Halbmesser 6mal auf dem Kreisumfange als Sehne herumgetragen nach dem Ausgangspunkte zurückführt, so lag es sehr nahe Sehne und Bogen zu verwechseln und zur Annahme zu gelangen, der Kreisumfang selbst sei 6mal der Halbmesser, beziehungsweise 3mal der Durchmesser. Das gab die erste, freilich sehr ungenaue Rektifikation einer krummen Linie, mit $\pi = 3$.

Diese Formel findet sich nun angewandt bei der Schilderung des großen Waschgefäßes, das unter dem Namen des ehernen Meeres bekannt eine Zierde des Tempels bildete, welchen Salomo von 1014 bis 1007 erbauen ließ [1]). Von diesem Gefäße heißt es: Und er machte ein Meer, gegossen, 10 Ellen weit von einem Rande zum andern, rund umher, und 5 Ellen hoch, und eine Schnur 30 Ellen lang war das Maß ringsum [2]). Dabei ist offenbar $30 = 3 \times 10$. Mögen nun die Bücher der Könige erst um das Jahr 500 v. Chr. abgeschlossen worden sein, so ist doch unbestritten, daß in dieselben ältere Erinnerungen, wohl auch ältere Aufzeichnungen Aufnahme fanden, und so kann insbesondere die Erinnerung an eine Schnur, mit deren Hilfe Längenmessungen vorgenommen wurden, kann die Erinnerung an die Maße des ehernen Meeres, an den Durchmesser 10 bei einem Kreisumfange 30, eine sehr alte sein. Die letztere hat sich auch nach abwärts durch viele Jahrhunderte fortgeerbt, und der Talmud wendet in der Mischna die Regel an: Was im Umfang 3 Handbreiten hat, ist 1 Hand breit [3]). Zugleich aber liefert die angeführte Bibelstelle den Beweis, daß der Umfang von 30 Ellen wirklich aus 3mal 10 berechnet und nicht etwa infolge ungenauer Messung gefunden worden ist. Eine messende Schnur mußte jedenfalls um den äußeren Rand des ehernen Meeres herumgelegt werden und wäre etwa $31\frac{1}{2}$ Ellen lang gewesen, wenn der Durchmesser von 10 Ellen sich gleichfalls auf die Ausdehnung bis zur äußeren Randgrenze bezog. War aber, was bei tatsächlicher Messung fast wahrscheinlicher ist, der innere Durchmesser 10 Ellen lang, so konnte eine Meßschnur ringsherum leicht eine Länge von 32 Ellen und mehr erfordern.

[1]) Die Datierung nach Oppert: *Salomon et ses successeurs* in den *Annales de philosophie chrétienne* T. XI u. XII 1876. [2]) I. Könige 7, 23 und II. Chronik 4, 2. [3]) Zuerst berücksichtigt in unserer Besprechung von Oppert, *Étalon des mesures assyriennes* in der Zeitschr. Math. Phys. XX, histor.-literar. Abtlg. 164.

Es ist daher unmöglich, daß es dann 30 Ellen hieße, wie es der Fall ist.

Nachdem wir für die geometrischen Kenntnisse der Babylonier auf Schriftsteller zweiter Überlieferung einmal eingegangen sind, wollen wir noch einige ähnlich verwertbare Stellen aufsuchen. Eine solche Stelle führen wir nur an, um sie sogleich zu verwerfen. Bei der Beschreibung des Salomonischen Tempelbaues heißt es nach Luthers Übersetzung: Und am Eingange des Chors machte er zwei Türen von Ölbaumholz mit fünfeckigen Pfosten [1]). Danach wäre an eine Kenntnis des Fünfecks, mutmaßlich des regelmäßigen Fünfecks in Vorderasien in sehr alter Zeit zu denken. Da die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks eine verhältnismäßig bedeutende Summe geometrischer Sätze als Vorbedingung enthält, so wäre diese Tatsache um so überraschender, als nirgend auf asiatischen Denkmälern bei eifrigstem Suchen in den betreffenden Kupferwerken ein Fünfeck von uns aufgefunden worden ist. Die Stelle selbst ist aber von Luther falsch übersetzt, und so dunkel ihr Sinn ist, die Bedeutung, daß von einem Fünfecke irgendwie die Rede sei, hat sie sicherlich nicht [2]).

Um so häufiger ist von viereckigen Figuren in der Bibel die Rede und zwar von Quadraten sowie von Rechtecken. Es ist vielleicht zum Vergleiche mit noch zu erwartenden Entzifferungen babylonischer Texte nützlich das Augenmerk auf die Maßzahlen dieser biblischen Rechtecke [3]) zu richten. Das Verhältnis 3 zu 4 für zwei senkrecht zueinander zu denkende Abmessungen, oder auch 10 mal 3 zu 4, 3 zu 5 mal 4 kommt wiederholt vor, und wenn wir nicht verschweigen wollen noch dürfen, daß ein Rechteck von 3 zu 5 ebenfalls an häufigeren Stellen sich bemerklich macht, so ist doch nicht ausgeschlossen, daß jene ersterwähnten Maßzahlen 3 zu 4 dazu dienten, einen rechten Winkel mittels des Dreiecks von den Seiten 3, 4, 5 zu sichern. Wenigstens wird die Kenntnis dieses letzteren Dreiecks in China von uns nachgewiesen werden.

Dafür aber, daß die Babylonier den rechten Winkel kannten, und zwar nicht bloß als in der Baukunst zur Anwendung kommend, sondern als der Geometrie, der Astronomie dienstbar, sind Beweisgründe zur Genüge vorhanden. Wir erinnern an das wahrscheinlich gemachte Vorkommen des rechten Winkels in jener von Sayce über-

[1]) I. Könige 6, 31. [2]) Wir berufen uns für diese Behauptung auf mündliche Mitteilungen von Prof. Dr. A. Merx. Allioli hat die Stelle übersetzt „mit Pfosten von fünf Ecken“ und die Erklärung beigefügt, die Türpfosten bildeten dadurch fünf Ecken, daß über der viereckigen Türe noch ein dreieckiger Giebel angebracht war. [3]) II. Mose 36, 15 und 21; 37, 10; 39, 9—10. I. Könige 7, 27 und häufiger.

setzten Vorbedeutungsgeometrie. Wir erinnern an die den rechten Winkel selbst voraussetzende Dreiteilung desselben. Wir haben ferner den ausdrücklichen Bericht Herodots, daß von Babylon her die Hellenen mit dem Polos und dem Gnomon bekannt geworden seien[1]). Mag man auch nicht mit aller Sicherheit wissen, welcherlei Vorrichtungen unter diesen Namen verstanden wurden, soviel ist gewiß, daß es bei ihnen um Zeiteinteilung mittels der Länge des von der Sonne erzeugten Schattens sich handelte, daß also ein Stab senkrecht zu einer Grundfläche aufgerichtet werden mußte. Der Übergang des Gnomon zu den Griechen fand von Babylon aus statt, wann, ist zweifelhaft. Ein Berichterstatter nennt Anaximander als den, der um 550 den Gnomon einführte[2]); ein anderer nennt uns dafür Anaximenes[3]); ein dritter nennt gar erst Berosus als Erfinder der Sonnenuhr[4]), womit nur jener Chaldäer gemeint sein kann, welcher unter Alexander dem Großen geboren um 280 v. Chr. seine Blütezeit hatte und als Historiker am bekanntesten ist, wenn auch das Altertum ihn vorzüglich als Astrologen und um seiner auf der Insel Kos gegenüber von Milet gegründeten und stark besuchten Schule wegen rühmte[5]). Älterer Zeit als diese Angaben gehört der biblische Bericht an, welcher von einer Sonnenuhr zu erzählen weiß. Er geht hinauf bis auf König Ahas von Juda, dessen Regierung von 743—727 währte[6]). Wenn in jenem Berichte der Schatten am Zeiger Ahas 10 Stufen (oder Grade) hinter sich zurückging, die er war niederwärts gegangen, so ist diese Beschreibung von größter Deutlichkeit, mag man über das beschriebene Ereignis selbst denken, wie man will. Wir könnten auf eben diese Stelle zum Überflusse noch hinweisen, um sie als Beleg altasiatischer Kreiseinteilung zu benutzen, wenn ein solcher Beleg noch irgend erwünscht scheinen sollte.

Fassen wir wieder zusammen, was auf geometrischem Gebiete den Babyloniern bekannt gewesen ist, so haben wir Gewißheit für die Teilung des Kreises in 6 Teile, dann in 360 Grade, Gewißheit für die Kenntnis von Parallellinien, von Dreiecken, Vierecken, Gewißheit für die Herstellung rechter Winkel. Wahrscheinlich ist die Kenntnis der Gleichheit zwischen Halbmesser und Seite des dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks, wahrscheinlich die

[1]) Herodot II, 109. [2]) Suidas s. v. Ἀναξίμανδρος. [3]) Plinius *Historia naturalis* II, 76. [4]) Vitruvius IX, 9. [5]) Die von Bailly, *Histoire de l'astronomie ancienne.* Paris 1775, Livre IV, § 35 und 36 ausgehende Meinung, als seien zwei Berosus zu unterscheiden, der von Kos und der Historiker, ist von neueren Fachgelehrten entschieden verworfen. Vgl. Häbler, Astrologie im Alterthum (1879), S. 14—16. [6]) Jesaia 38, 8 und II. Könige 20, 11. Die Datierung nach Oppert, *Salomon et ses successeurs.*

Benutzung des Näherungswertes $\pi = 3$ bei Bemessung des Kreisumfanges. Möglich endlich ist die Prüfung rechter Winkel durch die Seitenlängen des ein für allemal bekannten Dreiecks 3, 4, 5.

Die Hoffnung bleibt für Babylon wie für Ägypten nicht ausgeschlossen, daß Auffindung und Entzifferung neuer Denkmäler es noch gestatten werden, die kaum erst seit wenigen Jahrzehnten fester gestützte Geschichte der Geistesbildung jener Länder umfassender zu gestalten. Für die Geschichte der Mathematik in den Euphratländern bergen, wie wir schon gesagt haben, vielleicht die Schutthügel von Senkereh noch Unschätzbares. Es muß wohl die Mathematik dort eine erzählenswerte Geschichte erlebt haben, wenn wir auch nur daraus schließen, daß sie alten Schriftstellern würdig däuchte sich mit ihr zu beschäftigen. So wird berichtet, ein gewisser Perigenes habe über die Mathematiker von Chaldäa geschrieben[1]), wenn diese Lesart der an sich viel weniger wahrscheinlichen „über die Mathematiker von Chalcidien" vorzuziehen ist, und Mathematisches enthielt jedenfalls auch das umfassende Werk des Jamblichus von Chalcis über Chaldäisches, aus dessen 28. Buche eine Notiz sich erhalten hat[2]). Nur um Mißverständnissen vorzubeugen, welche auch bei sonst zuverlässigen Schriftstellern sich vorfinden, sei hier bemerkt, daß mit diesem wissenschaftlichen Werke des Jamblichus von Chalcis über Chaldäisches, welches gegen Ende des IV. S. n. Chr. geschrieben sein muß, der Roman, welcher unter dem Titel „Babylonisches" in der zweiten Hälfte des II. S. n. Chr. auch von einem Jamblichus[3]) verfaßt worden ist, ja nicht verwechselt werden darf.

[1]) Nesselmann, Die Algebra der Griechen, S. 1—2. [2]) Zeller, Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung. III. Teil, 2. Abtlg. 2. Aufl. Leipzig 1868, S. 615. [3]) Erw. Rohde, Der griechische Roman und seine Vorläufer. Leipzig 1876, S. 364 flgg.

II. Ägypter.

2. Kapitel.

Die Ägypter. Arithmetisches.

Die älteste einigermaßen ausgiebige mathematische Literatur, über welche man zurzeit verfügt, ist die ägyptische. Mag man die vorhandenen Schriften als Handbücher oder als Schülerhefte betrachten, für den Nutzen, den sie uns gewähren, gilt das gleich. Sie sind einmal vorhanden, und wir haben uns mit ihnen zu beschäftigen, haben vorher weniges über ägyptische Kultur vorauszuschicken. Ägypten sei ein Geschenk des Nils, sagt Herodot [1]), und derselbe Schriftsteller leitet an einer anderen Stelle [2]), die uns noch beschäftigen wird, die Erfindung der Geometrie aus der Notwendigkeit her, die infolge der Nilüberschwemmungen verloren gegangenen Begrenzungen wieder herzustellen. Wirklich ist die Kultur des Landes, wie das Land selbst ohne jenen Strom, der das Erdreich herabgeschwemmt hat aus den Hochlanden des inneren Afrikas, nicht denkbar. Die alljährlich wiederkehrende Wasserfülle bringt in gleicher Regelmäßigkeit große Schlammmassen mit sich, die sie dort, wo der Absturz des Stromes an Steilheit abnimmt, wo das Bett der Überflutung offener ist, fallen läßt. Die Wasser verlaufen sich, und die Sonne Afrikas härtet den neuen Boden. Auf das mögliche Altertum des bewohnten und angebauten Schwemmlandes wirft es ein gewisses Licht, daß man aus dem gegenwärtig noch wahrnehmbaren und meßbaren Schlammabsatze berechnet hat, daß unter gleichen Bedingungen weit über 70 Jahrtausende notwendig wären, um die Entstehung Ägyptens in seiner jetzigen Ausdehnung zu erklären [3]). Nehme man immerhin an, daß ehemals eine viel schnellere Vergrößerung stattfand, es bleibt unter allen Umständen eine Zahl übrig, welche nur mit der sagenmäßigen Vergangenheit chaldäischer und chinesischer Astronomie in Vergleich zu bringen ist.

Das so alte Land gewann seine Bevölkerung nach der durch Diodor [4]) überlieferten Meinung von Süden her aus Äthiopien, wäh-

---

[1]) Herodot II, 5. [2]) Herodot II, 109. [3]) Maspero-Pietschmann S. 7. [4]) Diodor III, 3—8.

rend der biblische Berichterstatter Mizraim[1]) den Stammvater der Ägypter, einen Enkel Noahs, aus Chaldäa einwandern läßt. Die neuere Forschung[2]), welche ihre wesentliche Grundlage in ägyptischen Denkmälern besitzt, hat noch immer keine Entscheidung gebracht, ob die eine oder die andere Sage mehr Glauben verdient. Sichergestellt ist nur, daß in ältesten Zeiten in Ägypten ein Südland von einem Nordlande sich unterschied. Vielleicht kam dann von Süden her der erste König, der die beiden Gebiete beherrschend die weiße Krone des Südens mit der roten Krone des Nordens auf seinem Haupte vereinigte. Bildung, Kunst und Wissenschaft dagegen sind jedenfalls in nordsüdlicher Richtung vorgedrungen. Die ägyptische Sprache hält man gegenwärtig für eine ältere Schwester der semitischen Sprachen. Freilich muß die Trennung erfolgt sein, als beide in ihrer Entwicklung noch sehr zurück waren, und der semitische Stamm muß als der für Sprachbildung befähigtere angesehen werden.

Das ägyptische Reich wurde durch XXX aufeinanderfolgende Dynastien beherrscht. Der Gründer der I. Dynastie Mena, Menes der Griechen, wird auf das Jahr 4455 vor Christi Geburt etwa gesetzt, wobei allerdings nicht unbemerkt bleiben darf, daß bei diesen ältesten Datierungen eine Unsicherheit von 100, auch von 200 Jahren als selbstverständlich gilt und als Abweichung in den Angaben der verschiedenen Gelehrten, welche sich daran versucht haben, kenntlich wird. Menas Sohn Teta wird schon als Gelehrter, als Verfasser anatomischer Schriften[3]), genannt, und Nebka, griechisch Tosorthros, der zweite König der III. Dynastie um 3800, trat in Tetas Fußstapfen und verfaßte medizinische Abhandlungen, welche vier Jahrtausende nach seiner Regierung noch bekannt waren und ihn mit dem griechischen Gotte der Heilkunst, mit Asklepios, in eine Persönlichkeit vereinigen ließen[4]). Die Könige der IV. Dynastie, seit 3686 am Ruder, sind die bekannten Pyramidenbauer Chufu, Chafrä, Menkarä. Schon in ihrer Zeit muß es Baumeister gegeben haben, deren Ausbildung nicht zu unterschätzen ist. Wie in den ältesten monumentalen Grabesräumen der Ägypter stets nach Osten zu eine Denksäule steht[5]), so sind insbesondere die Pyramiden so scharf orientiert, daß man unter den mannigfachen Vermutungen, welche frühere und spätere Schriftsteller über diese riesigen Königsgräber auszusprechen sich bemüßigt fanden, auch derjenigen begegnet, die Pyramiden seien in der Absicht erbaut worden mittels ihrer Grundlinien die Himmels-

[1]) I. Moses 10, 6. [2]) Maspero-Pietschmann S. 13 und 16. Steindorff, Die Blütezeit des Pharaonenreichs S. 7. [3]) Maspero-Pietschmann S. 54. [4]) Ebenda S. 59. [5]) Ebenda S. 60.

richtungen festzuhalten. Zufall ist es jedenfalls nicht gewesen, wenn der Orientierungsgedanke damals bereits so genau zur Ausführung gebracht wurde. Zufall möchten wir ebensowenig in dem Umstande erkennen, daß in fast allen alten Pyramiden der Winkel, welchen die Seitenwand der Pyramide mit der Grundfläche bildet, wenig oder gar nicht von 52° abweicht[1]). Das setzt, wie gesagt, ausgebildete Baumeister, das setzt mathematische Hilfswissenschaften der Baukunst voraus, sei es, daß die Regeln von Mund zu Mund sich fortpflanzten, sei es sogar, daß man sie niederschrieb. Steht es doch fest, daß die Aufbewahrung vererbten Wissens, daß das Sammeln von Bücherrollen zu den Sitten der ältesten Dynastien gehört haben muß, wenn bereits am Anfange der VI. Dynastie eigene Beamten ernannt wurden, deren Titel „Verwalter des Bücherhauses" in ihren Grabschriften sich erhalten hat[2]). Ein Jahrtausend etwa überspringend, nennen wir aus der XII. Dynastie Amenemhat III., einen Fürsten von 42jähriger wohlbeglaubigter Regierung, wenn auch ihre Datierung weniger gesichert ist als ihre Dauer[3]). Er war der Erbauer des großartigen Tempelpalastes unweit vom Mörissee, aus dessen Namen Lope-ro-hunt = Tempel am Eingang zum See das Wort Labyrinth entstand. Man hat für Amenemhat III. verschiedene Beinamen in Anspruch genommen[4]), nämlich Petesuchet = Gabe der Suchet, Aasuchet = Sprößling der Suchet und Sasuchet = Sohn der Suchet. Wäre diese Annahme gesichert, so könnte man in ihm die Persönlichkeiten erkennen, welche unter verwandten Namen bei mehreren Schriftstellern auftretend bei anderen Ägyptologen als unserem Gewährsmanne nicht verschmolzen zu werden pflegten. Amenemhat III. wäre alsdann der Gesetzgeber Asychis des Herodot[5]), der König Petesuchis, der das Labyrinth erbaute, des Plinius[6]), endlich der durch Verstand hervorragende König Sasyches, der die Geometrie erfand, des Diodor[7]). Bereits während der XII. Dynastie begannen von Osten über die Landenge von Suez her die Einfälle plünderungssüchtiger Wüstenstämme, welche sich selbst als Shus, Shasu bezeichneten. Aber 200 Jahre und mehr waren nötig bis Asses, ein Hik-Shus, d. h. ein Fürst

[1]) Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (Papyrus Rhind des British Museum), übersetzt und erklärt von Aug. Eisenlohr. Leipzig 1877, S. 137. Wir zitieren künftig diese Hauptquelle für ägyptische Mathematik als Eisenlohr, Papyrus. [2]) Maspero-Pietschmann S. 74. [3]) Nach Lepsius regierte Amenemhat III. von 2221 bis 2179; nach Lauth dagegen (vgl. dessen Aufsatz „Der geometrische Papyrus" in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung vom 20. September 1877, Nr. 263) von 2425 bis 2383. Nach Steindorff füllte die ganze XII. Dynastie die Zeit von 1996 bis 1783. [4]) Vgl. Lauth l. c. Seine Gründe hängen mit seinen chronologischen Annahmen aufs engste zusammen. [5]) Herodot II, 136. [6]) Plinius, Histor. natur. XXXVI, 13. [7]) Diodor I, 94.

jener Shus genannten Wüstenstämme, die XV. ägyptische Dynastie stürzen und sich an deren Stelle setzen konnte. Die zwei folgenden Dynastien gehören gewissermaßen den Hiksoskönigen an, wie man in Nachbildung jenes eben erläuterten Titels zu sagen sich gewöhnt hat, und erst mit Ahmes, dem Gründer der XVIII. Dynastie um 1600, gelang es einem Sohne uralter ägyptischer Abstammung die Eindringlinge zu vertreiben. Unter den Hiksoskönigen war es, daß das mathematische Handbuch niedergeschrieben wurde, zu dessen genauer Inhaltsangabe wir uns nun wenden müssen.

Die Anfangsworte lauten[1]): „Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge .... aller Geheimnisse, welche enthalten sind in den Gegenständen. Verfaßt wurde dieses Buch im Jahre 33, Mesori Tag .. unter dem König von Ober- und Unterägypten Ra-ā-us Leben gebend, nach dem Vorbild von alten Schriften, die verfertigt wurden in den Zeiten des Königs [Ra-en-m]āt' durch den Schreiber Ahmes verfaßt diese Schrift."

Aus dieser Angabe, daß an einem ursprünglich angegebenen, jetzt durch einen Riß verloren gegangenen Tage des Monats Mesori des 33. Regierungsjahres Königs Ra-ā-us' der Schreiber Ahmes das Buch verfaßt habe, ist eine so bestimmte Datierung möglich, als sie überhaupt für so weit zurückliegende Zeiten tunlich ist. Ra-ā-us ist nämlich, wie aus einem dem ägyptischen Süden, dem sogenannten Fayum, entstammenden Holzfragmente des Berliner ägyptischen Museums erkannt worden ist[2]), niemand anders als der Hiksoskönig Apepa, der Apophis der Griechen. Alle Zweifel, welche an die Zeit und Dauer der Hiksosherrschaft sich knüpfen, in Rechnung gebracht irrt man gewiß nicht, wenn man Ra-ā-us zwischen die Jahre 2000 und 1700 v. Chr. setzt, und da überdies das Äußere des Papyrus, die Schrift usw. dieser Zeit genau entspricht, so ist damit eine Vermutung über dessen Alter gewonnen, in welcher die sonst nicht immer übereinstimmenden Kenner ägyptischer Sprache sich sämtlich begegnen. Wenn auch nicht ganz das Gleiche mit Bezug auf den Namen jenes Königs stattfindet, unter welchem die alten als Vorbild dienenden Schriften verfaßt worden waren, so ergänzt man doch meistens diese Lücke durch Raenmat[3]), und das ist kein anderer

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 27—29. [2]) Die Entdeckung stammt von Herrn Dr. Ludwig Stern, dessen brieflichen Mitteilungen wir diese Tatsache entnehmen. [3]) G. Ebers in einer Rezension von Eisenlohr, Papyrus im Literarischen Zentralblatt vom 12. Oktober 1878 hält diese Ergänzung für zweifelhaft. Dagegen stimmt er durchaus damit überein, der Papyrus könne nach allen äußeren Anzeichen nur in der Zeit zwischen der XVII. und der XVIII. Dynastie geschrieben sein.

als König Amenemhat III. Ist diese Ergänzung richtig, und hat man in Amenemhat wirklich auch Sasyches zu erkennen, so könnte Diodors Angabe über den Erfinder der Geometrie in Beziehung auf unsern Papyrus gedeutet werden. Das Original zu der Bearbeitung des Ahmes würde dann viele Jahrhunderte hindurch in der Überlieferung fortlebend sich mythisch mit der Erfindung der Geometrie vereinigt haben[1]). Und wenn diese genaue Beziehung sich nicht festhalten ließe, so ist doch merkwürdigerweise die Zeit der XII. Dynastie auch durch ein anderes Schriftstück als Blütezeit ägyptischer Rechenkunst bestätigt. In Kahun, südlich von der Pyramide von Illahun, die auf Usertesen II. aus der XII. Dynastie zurückgeht, wurden 1889 und 1890 zwei mathematische Papyri aufgefunden[2]), welche, ohne mit dem Papyrus des Ahmes übereinzustimmen, hochbedeutsame Ähnlichkeiten mit demselben aufweisen. So ist dort eine Anzahl von Bruchzerlegungen vorhanden, wie z. B. $\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$ und ähnliche, von denen wir gleich zu reden haben werden. Auf andere Bestandteile zurückzugreifen werden wir da und dort in der Lage sein.

Ein weiterer mathematischer Papyrus, von dessen Inhalt leider nicht einmal Andeutungen bekannt sind, gehört Herrn Wladimir Golenischeff an, Konservator der kaiserlichen Sammlung in der Eremitage in Petersburg. Unbedeutende Papyrusteile mit Hau-Rechnungen — wir werden bald sehen, was das ist — sind im Besitze des Ägyptischen Museums in Berlin[3]).

Über einen in einem koptischen Grabe aufgefundenen Papyrus in griechischer Sprache berichten wir im 24. Kapitel. Von vollständigen alten Schriften ist bisher nur das Rechenbuch des Ahmes der Öffentlichkeit übergeben, und zu ihm kehren wir zurück.

„Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge", so lauten die Anfangsworte des Papyrus. Später spricht Ahmes von einer „Vorschrift der Ergänzung", von einer „Vorschrift zu berechnen ein rundes Fruchthaus", von einer „Vorschrift zu berechnen Felder", von einer „Vorschrift zu machen einen Schmuck" und dergleichen mehr. Wer aber aus diesen Überschriften den Schluß ziehen wollte, es seien hier überall wirkliche Vorschriften gegeben, Regeln gelehrt,

[1]) Vgl. Lauth l. c. [2]) W. M. Flinders Petrie, Illahun, Kahun and Gurob. London 1891, pag. 486. Die Herausgabe der Fragmente erfolgte 1897 in London durch F. Ll. Griffith. Über einzelne Stellen vgl. Cantor, Die mathematischen Papyrusfragmente von Kahun in der Orientalischen Literaturzeitung 1898, Nr. 10. [3]) Alle Notizen über mathematische Papyri verdanken wir Herrn Prof. August Eisenlohr.

wie man zu verfahren habe, der würde in einem gewaltigen Irrtume befangen sein. Einzelne Vorschriften in unserem heutigen Sinne des Wortes kommen allerdings vor, aber weitaus in einer überwiegenden Zahl von Fällen begnügt sich Ahmes damit mehrere Aufgaben gleicher Gattung nacheinander zu behandeln. Eine Induktion aus diesen Aufgaben und ihrer Lösung auf allgemeine Regeln ist nicht gerade schwierig, allein Ahmes vollzieht sie nicht. Er überläßt diese Folgerungen dem Leser oder dem mündlichen Unterrichte des Lehrers, ohne welchen die Benutzung des Handbuches kaum gedacht werden kann. Das häufige Auftreten des Wortes „Vorschrift" entspricht nur der ägyptischen Gewohnheit der Gedächtnisübung, wie sie geradezu als Grundlage jeder Unterweisung beigeblieben ist[1]). Lassen sich doch regelmäßig wiederkehrende Ausdrücke am leichtesten einprägen. Gewiß entstammen noch andere gleichfalls unaufhörlich sich wiederholende Redensarten bei Ahmes derselben Rücksicht auf das Gedächtnis des Schülers. So heißt es bei ihm: „gesagt ist dir", oder „wenn dir sagt der Schreiber", oder „wenn dir gegeben ist" und „mache, wie geschieht", oder „mache es also", wo ein Schriftsteller unserer Zeit: Aufgabe und Auflösung sagen würde.

Wir haben den sogleich genauer zu besprechenden Papyrus das Rechenbuch des Ahmes genannt. Andere[2]) sind, wie wir in den ersten Worten dieses Kapitels andeuteten, der Meinung, man dürfe nicht von einem Rechenbuche reden, es sei nur das Heft eines Schülers, und zwar eines sich mitunter recht ungeschickt anstellenden Schülers, welches sich erhalten habe. Für unsere Kenntnis der ägyptischen Mathematik ist es gleichgültig, ob die eine, ob die andere Bezeichnung für richtig gehalten wird, wir möchten jedoch auf die seinerzeit von uns nach reiflicher Überlegung in Gemeinschaft mit dem Übersetzer des Papyrus gewählte Bezeichnung nicht verzichten. Wir geben zu, daß in den Rechnungen Irrtümer vorkommen, daß manchmal Verbesserungen angebracht sind, allein wir sehen nicht ein, daß ein solches Vorkommen den Papyrus zu einem Schülerhefte stemple. Irrtümer kommen vermutlich in jedem Manuskripte vor und gehen nicht selten als Druckfehler in die vollendetsten Werke der berühmtesten Verfasser über. Um so weniger kann man Anstoß daran nehmen, wenn ein Abschreiber sich einen Irrtum zuschulden kommen läßt. Zudem sind keineswegs alle Irrtümer verbessert, der Vorwurf der Minderwertigkeit würde also von dem Schüler auf den Lehrer

[1]) Herodot II, 77. [2]) Max Simon, Über die Mathematik der Ägypter (Verhandlungen des III. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904, S. 526—535) im Anschluß an eine früher von Eugène Revillout ausgesprochene Meinung.

übergehen. Ferner sind die Anfangsworte des Papyrus, welche wir S. 59 zum Abdruck gebracht haben, weit ungezwungener auf ein sorgfältig oder nicht niedergeschriebenes oder abgeschriebenes Buch als auf ein Schülerheft zu deuten. Endlich berufen wir uns auf die Fragmente von Kahun, welche mit dem, was wir nicht aufhören das Rechenbuch des Ahmes zu nennen, in vielen Beziehungen so sehr übereinstimmen, daß wir anzunehmen genötigt wären, auch jene seien die Überreste eines um Jahrhunderte älteren Rechenheftes eines Schülers, wozu wir uns nicht entschließen können.

Die Zahlen, mit welchen gerechnet wird, sind teils ganze Zahlen, teils und zwar größtenteils Brüche, woraus sich von selbst ergibt, daß der Leserkreis, für welchen Ahmes schrieb, als ein in der Rechenkunst schon vorgeschrittener gedacht werden muß. Ein Handbuch für Anfänger müßte und mußte zu allen Zeiten sich namentlich am Anfange auf den Gebrauch ganzer Zahlen beschränken. Über die Zeichen, deren Ahmes sich für ganze und für gebrochene Zahlen bedient, werden wir zwar noch in diesem Kapitel aber in einem anderen Zusammenhange reden. Für jetzt muß eine Bemerkung über die Art der vorkommenden Brüche und über deren Bezeichnung unter Voraussetzung gegebener Zeichen für ganze Zahlen genügen. Ahmes benutzt nämlich nicht Brüche in dem allgemeinsten Sinne des Wortes, d. h. angedeutete Teilungen, wobei der Zähler wie der Nenner von beliebiger Größe sein können, sondern nur Stammbrüche, d. h. solche, die bei ganzzahligem Nenner die Einheit als Zähler haben und die er dadurch anzeigte, daß er die Zahl des Nenners hinschrieb und ein Pünktchen darüber setzte. Brüche mit anderem Zähler konnte er wohl denken, wie aus dem ganzen Charakter seiner Aufgaben zur Genüge hervorgeht, er konnte sie aber nur dann schreiben, wenn mehrere derselben mit gemeinsamem Nenner in Zwischenrechnungen auftraten. Er begnügte sich sonst jeden beliebigen Bruch als Summe von Stammbrüchen anzuschreiben, z. B. $\frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$ statt $\frac{2}{5}$, wenn das bloße Nebeneinandersetzen zweier Stammbrüche deren additive Zusammenfassung bezeichnen soll. Eine einzige Ausnahme bildet von dem hier Ausgesprochenen der Bruch $\frac{2}{3}$. Ahmes weiß ganz genau, daß derselbe eigentlich $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$ ist und versteht diese Zerlegung vortrefflich zu benutzen, aber daneben hat er ein eigenes Zeichen für $\frac{2}{3}$, so daß auch dieser Bruch in seinen Rechnungen mitten unter Stammbrüchen vielfältig vorkommt und uneigentlich zu denselben gezählt werden mag.

Nach dieser Bemerkung läßt sich sofort erkennen, daß es eine Aufgabe gab, welche Ahmes unbedingt an die Spitze stellen mußte, mit deren Lösung der Schüler vertraut sein mußte, bevor er an irgend eine andere Rechnung ging, die Aufgabe: einen beliebigen Bruch als Summe von Stammbrüchen darzustellen. Das scheint uns denn auch die Bedeutung einer Tabelle zu sein, deren Entwicklung die ersten Blätter des Papyrus füllt. Allerdings ist diese Bedeutung nicht unmittelbar aus dem Wortlaute zu erkennen. Dieser heißt vielmehr zuerst [1]): „Teile 2 durch 3", dann „durch 5", später wieder z. B. „teile 2 durch 17", kurzum es handelt sich um die Darstellung von

$$\frac{2}{2n+1}$$

(wo n der Reihe nach die ganzen Zahlen von 1 bis 49 bedeutet, als Divisoren mithin alle ungeraden Zahlen von 3 bis 99 erscheinen), als Summe von 2, 3 oder gar 4 Stammbrüchen. Tabellarisch geordnet unter Weglassung aller Zwischenrechnungen gewinnt Ahmes folgende Zerlegungen [2]):

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}\;\frac{1}{15}$$
$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}\;\frac{1}{28}$$
$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}\;\frac{1}{18}$$
$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}\;\frac{1}{66}$$
$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}\;\frac{1}{52}\;\frac{1}{104}$$
$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}\;\frac{1}{30}$$
$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}\;\frac{1}{51}\;\frac{1}{68}$$
$$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}\;\frac{1}{76}\;\frac{1}{114}$$
$$\frac{2}{21}=\frac{1}{14}\;\frac{1}{42}$$
$$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}\;\frac{1}{276}$$
$$\frac{2}{25}=\frac{1}{15}\;\frac{1}{75}$$
$$\frac{2}{27}=\frac{1}{18}\;\frac{1}{54}$$
$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}\;\frac{1}{58}\;\frac{1}{174}\;\frac{1}{232}$$
$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}\;\frac{1}{124}\;\frac{1}{155}$$
$$\frac{2}{33}=\frac{1}{22}\;\frac{1}{66}$$
$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}\;\frac{1}{42}$$
$$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}\;\frac{1}{111}\;\frac{1}{296}$$
$$\frac{2}{39}=\frac{1}{26}\;\frac{1}{78}$$
$$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}\;\frac{1}{246}\;\frac{1}{328}$$
$$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}\;\frac{1}{86}\;\frac{1}{129}\;\frac{1}{301}$$
$$\frac{2}{45}=\frac{1}{30}\;\frac{1}{90}$$
$$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}\;\frac{1}{141}\;\frac{1}{470}$$
$$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}\;\frac{1}{196}$$
$$\frac{2}{51}=\frac{1}{34}\;\frac{1}{102}$$
$$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}\;\frac{1}{318}\;\frac{1}{795}$$

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 36—45. [2]) Ebenda S. 46—48.

$$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}\;\frac{1}{330}$$
$$\frac{2}{57}=\frac{1}{38}\;\frac{1}{114}$$
$$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}\;\frac{1}{236}\;\frac{1}{531}$$
$$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}\;\frac{1}{244}\;\frac{1}{448}\;\frac{1}{610}$$
$$\frac{2}{63}=\frac{1}{42}\;\frac{1}{126}$$
$$\frac{2}{65}=\frac{1}{39}\;\frac{1}{195}$$
$$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}\;\frac{1}{335}\;\frac{1}{536}$$
$$\frac{2}{69}=\frac{1}{46}\;\frac{1}{138}$$
$$\frac{2}{71}=\frac{1}{40}\;\frac{1}{568}\;\frac{1}{710}$$
$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}\;\frac{1}{219}\;\frac{1}{292}\;\frac{1}{365}$$
$$\frac{2}{75}=\frac{1}{50}\;\frac{1}{150}$$
$$\frac{2}{77}=\frac{1}{44}\;\frac{1}{308}$$
$$\frac{2}{79}=\frac{1}{60}\;\frac{1}{237}\;\frac{1}{316}\;\frac{1}{790}$$
$$\frac{2}{81}=\frac{1}{54}\;\frac{1}{162}$$
$$\frac{2}{83}=\frac{1}{60}\;\frac{1}{332}\;\frac{1}{415}\;\frac{1}{498}$$
$$\frac{2}{85}=\frac{1}{51}\;\frac{1}{255}$$
$$\frac{2}{87}=\frac{1}{58}\;\frac{1}{174}$$
$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}\;\frac{1}{356}\;\frac{1}{534}\;\frac{1}{890}$$
$$\frac{2}{91}=\frac{1}{70}\;\frac{1}{130}$$
$$\frac{2}{93}=\frac{1}{62}\;\frac{1}{186}$$
$$\frac{2}{95}=\frac{1}{60}\;\frac{1}{380}\;\frac{1}{570}$$
$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}\;\frac{1}{679}\;\frac{1}{776}$$
$$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}\;\frac{1}{198}$$

Es ist einleuchtend, daß unter wiederholter Anwendung dieser Tabelle ein Bruch, dessen Zähler auch die 2 übersteigt, wenn er nur seinem Nenner nach in der Tabelle sich findet, in Stammbrüche zerlegt werden kann. Zeigen wir versuchsweise an $\frac{7}{29}$, wie wir dieses Verfahren uns denken. Zunächst ist $7 = 1 + 2 + 2 + 2$,

also $$\frac{7}{29}=\frac{1}{29}+\left(\frac{1}{24}\;\frac{1}{58}\;\frac{1}{174}\;\frac{1}{232}\right)+\left(\frac{1}{24}\;\frac{1}{58}\;\frac{1}{174}\;\frac{1}{232}\right)+\left(\frac{1}{24}\;\frac{1}{58}\;\frac{1}{174}\;\frac{1}{232}\right)$$
$$=\frac{1}{29}\;\frac{1}{24}\;\frac{1}{58}\;\frac{1}{174}\;\frac{1}{232}+\left(\frac{2}{24}\;\frac{2}{58}\;\frac{2}{174}\;\frac{2}{232}\right)$$
$$=\frac{1}{29}\;\frac{1}{24}\;\frac{1}{58}\;\frac{1}{174}\;\frac{1}{232}\;\frac{1}{12}\;\frac{1}{29}\;\frac{1}{87}\;\frac{1}{116}$$
$$=\frac{2}{29}\;\frac{1}{24}\;\frac{1}{58}\;\frac{1}{174}\;\frac{1}{232}\;\frac{1}{12}\;\frac{1}{87}\;\frac{1}{116}$$
$$=\frac{1}{24}\;\frac{1}{58}\;\frac{1}{174}\;\frac{1}{232}\;\frac{1}{24}\;\frac{1}{58}\;\frac{1}{174}\;\frac{1}{232}\;\frac{1}{12}\;\frac{1}{87}\;\frac{1}{116}$$
$$=\frac{2}{24}\;\frac{2}{58}\;\frac{2}{174}\;\frac{2}{232}\;\frac{1}{12}\;\frac{1}{87}\;\frac{1}{116}$$
$$=\frac{1}{12}\;\frac{1}{29}\;\frac{1}{87}\;\frac{1}{116}\;\frac{1}{12}\;\frac{1}{87}\;\frac{1}{116}$$
$$=\frac{2}{12}\;\frac{2}{87}\;\frac{2}{116}\;\frac{1}{29}$$

$$=\frac{1}{6}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{29}$$
$$=\frac{2}{58}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{29}$$
$$=\frac{1}{29}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{29}$$
$$=\frac{2}{29}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{174}$$
$$=\frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{232}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{174}$$
$$=\frac{2}{174}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{232}\ \frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{87}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{232}\ \frac{1}{6}$$

oder besser geordnet $\frac{7}{29}=\frac{1}{6}\,\frac{1}{24}\,\frac{1}{58}\,\frac{1}{87}\,\frac{1}{232}$. Niemand wird behaupten wollen, diese Zerlegungsweise sei besonders elegant, oder sie führe besonders schnell zum Ziele. Aber sie führt doch dazu, sie ist ausreichend, vorausgesetzt wenigstens, daß im Verlaufe der Rechnung kein mit dem Zähler 2 versehener Bruch auftrete, dessen ungerader Nenner die Zahl 100 überschreitet, widrigenfalls von einer größeren Ausdehnung der Tabelle nicht abgesehen werden könnte.

Drei Bemerkungen drängen sich von selbst auf. Die eine geht dahin, daß es nicht bloß eine Zerlegung eines Bruches gibt, sondern daß man die Auswahl zwischen man kann fast sagen beliebig vielen Zerlegungen hat. So ist z. B. auch $\frac{7}{29}=\frac{1}{5}\,\frac{1}{29}\,\frac{1}{145}$ neben der oben erhaltenen Zerlegung. So ist $\frac{2}{29}=\frac{1}{15}\,\frac{1}{435}=\frac{1}{16}\,\frac{1}{232}\,\frac{1}{464}$ neben dem in der Tabelle angegebenen Werte usw. Daran knüpft sich die zweite Bemerkung, daß für die komplizierteren Fälle allmählicher Zerlegung, deren wir einen $\left(\frac{7}{29}\right)$ behandelt haben, es sich als zweckdienlich erweist, wenn die Nenner der in der Tabelle als erste Zerlegungsergebnisse vorhandenen Stammbrüche gerade Zahlen sind, weil dadurch ein Aufheben durch 2 vielfach ermöglicht wird. Der ägyptische Rechner war nämlich, und das ist unsere dritte Bemerkung, gewöhnt wenn auch mutmaßlich nicht die Teilbarkeit einer Zahl durch irgend eine andere, doch jedenfalls ihre Teilbarkeit durch 2 sofort zu erkennen. Das geht ohne die Möglichkeit eines Zweifels aus der Tabelle selbst hervor. Nur wenn die Verwandlungen $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ usw. von vornherein klar waren, ist deren folgerichtige Ausschließung aus der Tabelle erklärlich.

Aber auch eine Frage drängt sich auf: wie ist die Tabelle entstanden[1]? Wie wäre ihre Fortsetzung zu beschaffen, welche doch, wie wir sahen, bei Zerlegung von Brüchen, deren Zähler die 2 übersteigen, unter Umständen notwendig wird? Die Vermutung dürfte eine nicht allzugewagte sein, daß die Tabelle, ein altes Erbstück schon zur Zeit des Ahmes, wohl niemals auf einen Schlag gebildet worden ist. Eine allmähliche Entstehung, so daß die Zerlegung bald dieses bald jenes Bruches, bald dieser bald jener Gruppe von Brüchen gelang, daß die gewonnenen Erfahrungen aufbewahrt und gesammelt wurden, dürfte der Wahrheit so nahe kommen, daß man sich berechtigt fühlen möchte, die Mathematik ihrem geschichtlichen Ursprunge nach und ohne in die Streitfragen nach der philosophischen Begründung ihrer einfachsten Begriffe einzutreten eine Erfahrungswissenschaft zu nennen. Wie wir oben (S. 59) sagten, sind die Zerlegungen des Ahmes schon in den Fragmenten von Kahun vorhanden, oder, um uns deutlicher auszudrücken, wo in den Fragmenten von Kahun richtige Zerlegungen vorkommen — einige wenige sind irrig oder lückenhaft — stimmen sie Zahl für Zahl mit Ahmes überein. Jedenfalls kann man auch mit Bezug auf die uns gegenwärtig beschäftigende Tabelle nicht Vorsicht genug gegen die Versuchung üben, allgemeine Methoden aus gegebenen Fällen herauszudeuten, damit man sie nicht vielmehr hineindeute.

Eine allgemeine Methode weist allerdings der Text des Papyrus selbst durch eine der seltenen Stellen, in welchen eine wirkliche Vorschrift gegeben ist, auf. Wir meinen die Aufgabe 61 nach der Numerierung, mit welcher der Herausgeber des Papyrus die auf die Tabelle folgenden Aufgaben versehen hat. Dort heißt es[2]: „$\frac{2}{3}$ zu machen von einem Bruch. Wenn dir gesagt ist: was ist $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{5}$? so mache du sein Doppeltes und sein Sechsfaches, das ist sein zwei Drittel. Also ist es zu machen in gleicher Weise für jeden gebrochenen Teil, welcher vorkommt.“

Um diese Vorschrift zu verstehen, müssen wir uns erinnern, daß zum Anschreiben eines Stammbruches (S. 61) der mit einem Pünktchen versehene Nenner genügte. „Sein Doppeltes“ von einem Bruche gesagt heißt demnach: der doppelte Nenner, selbst mit einem Punkte darüber, und ist dem Werte nach nicht ein Doppeltes sondern ein

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 30—34 hat sich eingehend mit dieser Frage beschäftigt. Unsere Auseinandersetzung trifft in vielen Punkten mit der dort gegebenen überein, weicht aber auch in einigen nicht ganz nebensächlichen Dingen davon ab. [2]) Ebenda S. 150.

Halbes. Die erwähnte Vorschrift zeigt also erstlich, daß, wie wir früher vorgreifend gesagt haben, die Zerlegung $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$ bekannt war, wenn sie auch in der Tabelle nicht enthalten ist. Sie zeigt ferner, daß man „für jeden gebrochenen Teil, welcher vorkommt", für jedes $\frac{1}{a}$ in gleicher Weise $\frac{2}{3} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2\,a}\,\frac{1}{6\,a}$ rechnete. Aber ein anderes ist immerhin $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{a}$ zu nehmen, ein anderes 2 durch $3\,a$ zu teilen! Wir sind nicht berechtigt ohne weiteres vorauszusetzen, daß man gewußt habe, es sei $\frac{2}{3} \times \frac{1}{a} = \frac{2}{3\,a}$, also auch $\frac{2}{3\,a} = \frac{1}{2\,a}\,\frac{1}{6\,a}$. Die Tabelle beweist uns das Vorhandensein dieser Kenntnis, denn sie liefert ausnahmslos bei jedem durch 3 teilbaren Nenner gerade diese Zerlegung $\frac{2}{9} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{18}$, $\frac{2}{45} = \frac{1}{30}\,\frac{1}{90}$, $\frac{2}{93} = \frac{1}{62}\,\frac{1}{186}$ usw.

Bezieht sich etwa das „also ist es zu machen für jeden gebrochenen Teil, welcher vorkommt" wie auf den Bruch $\frac{1}{a}$ so auch auf $\frac{2}{3}$, oder mit anderen Worten ist auch, wenn p eine von 3 verschiedene Primzahl bedeutet, in der Tabelle eine Verwertung der Zerlegung von $\frac{2}{p}$ bei der Zerlegung von $\frac{2}{p\,a}$ ersichtlich? Gibt es ferner eine Zerlegung von $\frac{2}{p}$ selbst, welche zur Zerlegung $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$ eine geistige Verwandtschaft besitzt?

Die zweite dieser Fragen läßt sich sofort bejahend beantworten. Wenn p eine Primzahl ist (und zwar selbstverständlich eine von 2 verschiedene Primzahl), so muß $\frac{p+1}{2}$ eine ganze Zahl sein. Nun ist $\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2} \times p}$, und dieser Zerlegungsformel, deren geschichtliche Berechtigung freilich erst im 41. Kapitel im folgenden Bande dieses Werkes zur Sprache kommen kann, entspricht $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$. Ihr folgen ebenso die Zerlegungen der Tabelle unter Annahme von $p = 5, 7, 11, 23$ mit $\frac{2}{5} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{15}$, $\frac{2}{7} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{28}$, $\frac{2}{11} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{66}$, $\frac{2}{23} = \frac{1}{12}\,\frac{1}{276}$, aber $p = 13, 17, 19, 29, 13, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$, oder eine Mehrheit von neunzehn Primzahlen gegen fünf beweist, daß es irrig wäre anzunehmen, diese Zerlegungsart sei als Gesetz vorhanden gewesen. Noch weniger fügt sich die Zerlegung der Brüche $\frac{2}{p\,a}$ einem Gesetze. Wie $\frac{2}{3\,a} = \frac{1}{2\,a}\,\frac{1}{6\,a}$, hätte man $\frac{2}{5\,a} = \frac{1}{3\,a}\,\frac{1}{15a}$ zu erwarten. Diese Erwartung erfüllt sich nur bei $a = 5, 13, 17$.

Die Zerlegung $\frac{2}{7\,a} = \frac{1}{4\,a}\,\frac{1}{28\,a}$ findet nur statt bei $a = 7, 11$. Die Zerlegung $\frac{2}{11\,a} = \frac{1}{6\,a}\,\frac{1}{66\,a}$, sollte man vermuten, könne nur bei $a > 11$ eintreten, also die Ausdehnung der Tabelle überschreiten. Statt dessen gilt sie für $a = 5$, so daß 55 als Vielfaches seines größeren Faktors 11, nicht seines kleineren Faktors 5 behandelt ist. Noch auffallender ist die Ausnahmestellung, welche $\frac{2}{35} = \frac{1}{30}\,\frac{1}{42}$ und $\frac{2}{91} = \frac{1}{70}\,\frac{1}{130}$ einnehmen. Die erstere Zerlegung kümmert sich, nach unserer bisherigen Auffassung betrachtet, weder um den Faktor 5 noch um den Faktor 7 von 35, die letztere um keinen der Faktoren 7 oder 13 von 91. Und doch lassen sich diese Zerlegungen in unter sich gleicher Weise aus jenen Faktoren herleiten. Wenn p und q zwei ungerade Zahlen sind, $\frac{p+q}{2}$ demnach ganzzahlig ausfallen muß, so ist $\frac{2}{p \times q} = \frac{1}{q \times \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{p \times \frac{p+q}{2}}$, und setzt man nun $p = 7$, $q = 5$ beziehungsweise $p = 13$, $q = 7$, so erhält man obige Zerlegungen. Und dieses Zusammentreffen scheint kein Zufall zu sein. Wenigstens läßt sich in byzantinischer Zeit die hier ausgesprochene Entstehung mit aller Bestimmtheit nachweisen, wie im 24. Kapitel sich zeigen wird.

Aber gerade das Vorhandensein der beiden Zerlegungsformeln, welche wir mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit zu enthüllen imstande waren, nötigt uns die gleiche Folgerung wiederholt auszusprechen, die vorgreifend an die Spitze gestellt ward. Nur eine allmähliche Entstehung der Tabelle läßt sich denken! Es will nicht in Abrede gestellt werden, daß an einem guten Teile der Zerlegungen mehr oder weniger bewußt gewisse Regeln zur Ausübung gelangten, aber gerade deren ebenmäßiges, gleichberechtigtes Vorhandensein schließt wieder rückwärts jede Möglichkeit eines einheitlichen Grundgedankens aus, und sei es nur auch eines solchen wie der, daß wenn tunlich Stammbrüche mit geradem Nenner erscheinen sollen[1]).

Wir schalten noch eine Bemerkung ein, deren Bedeutung erst im 33. Kapitel uns hervortreten wird. Die Aufgabe „teile 2 durch 3" beziehungsweise durch 5, durch 17 usw. lautet ägyptsich *nas* 2 *χent* 3,

[1]) Wenn Herr Gino Loria in der Bibliotheca mathematica 1892 pag. 97 bis 109 sich in scharfsinnigen Vermutungen ergeht, wie die Zerfällung in 2, 3, 4 Stammbrüche stattgefunden haben möge, so bleibt er doch jede Antwort auf die Frage schuldig, an welcher wir auch gescheitert sind, und die wir für die wichtigste halten: warum im Einzelfalle die Zerlegung gerade in diese Anzahl von Stammbrüchen stattfand?

oder wie der Divisor heißen mag. Von den beiden Kunstwörtern[1]) *nas* und *χent* bedeutet das letztere so viel wie in, unter, zwischen. Das erstere *nas* mit dem Determinativ eines die Hand ausstreckenden Mannes bedeutet anrufen, beten. Ahmes hat aber als Determinativ einen den Finger an den Mund legenden Mann benutzt. Dadurch könnte die Bedeutung „aussprechbar machen" gerechtfertigt werden und es hieße *nas* 2 *χent* 17 soviel wie „mache 2 aussprechbar in 17". Damit wäre mittelbar behauptet, der Ägypter habe leicht aussprechbare Formen nur für Stammbrüche besessen, während ein Bruch wie $\frac{2}{17}$ oder allgemeiner $\frac{m}{n}$ ihm Schwierigkeiten sogar grammatikalischer Natur bereitete; eine Vermutung, welche noch ihrer Bestätigung harret.

Wir haben die Anwendung der Tabelle zur Zerlegung von Brüchen, deren Zähler größer als 2 sind, deutlich zu machen gesucht, haben erkannt, daß diese Anwendung begrifflich leicht in der Ausführung mißlich ist. Um so wünschenswerter mußte es sein, die Zerlegung von Brüchen mit einem besonders oft vorkommenden Nenner ein für allemal vorrätig zu haben. Ein solcher Nenner war die bei den Fruchtmaßen und der Feldereinteilung der Ägypter sehr beliebte Zahl 10, und deshalb wohl ist der großen Tabelle eine zweite kleinere angeschlossen gewesen, aus deren allerdings sehr lückenhaften Überresten[2]) man die Zerlegung der verschiedenen Zehntel in Stammbrüche entziffert hat.

Wir kehren nochmals zur großen Tabelle zurück. Wenngleich eine Anleitung zu ihrer Herstellung von uns vermißt wurde, so ist doch ein Beweis der Richtigkeit der einzelnen angegebenen Zerlegungen unter dem Namen *Smot*, **Ausrechnung**, geführt. Ist etwa die Zerlegung von $\frac{2}{A}$ in die beiden Stammbrüche $\frac{1}{\alpha_1}\frac{1}{\alpha_2}$ angegeben, so zeigt die Ausrechnung, daß $\frac{1}{\alpha_1}\cdot A + \frac{1}{\alpha_2}\cdot A$ oder mit anderen Worten der $\alpha_1$te und der $\alpha_2$te Teil von A zusammen die 2 geben. Der Grundgedanke von dieser Ausführung besteht darin, daß zuerst allmählich die immer kleineren aliquoten Teile von A ermittelt werden, und daß ein kleiner Strich, im Drucke durch den Herausgeber übersichtlicher durch ein Sternchen ersetzt, diejenigen Zahlen hervorhebt, welche zusammen die 2 liefern sollen.

---

[1]) Die hier ausgesprochene Vermutung ist Eigentum des Herrn Léon Rodet, der sie uns brieflich unter dem 10. Juli 1879 mitteilte und deren Benutzung in diesem Werke gütigst gestattet hat. [2]) Eisenlohr, Papyrus S. 49—53.

So heißt z. B. bei $\frac{2}{7} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{28}$ die Ausrechnung[1]):

$$\begin{array}{lllll} & \frac{1}{2} & 3\frac{1}{2} & 1 & 7 \\ * & \frac{1}{4} & 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} & 2 & 14 \\ * & 4 & 28\quad\frac{1}{4} & 4 & 28. \end{array}$$

Der Sinn dieser Ausrechnung besteht darin, daß man mit dem Umwege über die Erkenntnis, daß die Hälfte von sieben $3\frac{1}{2}$ beträgt, zu $\frac{1}{4} \times 7 = 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ gelangt. Nicht als ob der Ägypter nicht imstande gewesen wäre sofort den vierten Teil von 7 zu erkennen, aber die Absicht war offenbar in erster Linie zu zeigen, daß die Hälfte von 7 mehr als 2 beträgt, daß also der Stammbruch $\frac{1}{2}$ bei der Zerlegung von $\frac{2}{7}$ nicht vorkommen kann. Dagegen liefert $\frac{1}{4} \times 7$ nicht die ganzen 2, sondern nur $1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$. Im Kopfe wird jetzt die Subtraktion $2 - 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ vollzogen und erwogen, daß dieser Rest durch 7 mal einem zweiten Stammbruche erzeugt werden muß, dessen Nenner folglich 7 mal 4 oder 4 mal 7 sein muß. Das ist die Bedeutung der an zweiter Stelle auftretenden Multiplikation $1 \times 7 = 7$, $2 \times 7 = 14$, $4 \times 7 = 28$.

Man könnte freilich, namentlich mit Beziehung auf die von uns als im Kopfe ausgeführt behauptete Subtraktion $2 - 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ zweifelhaft sein, ob wir hier nicht Dinge hineinlesen, an welche Ahmes nicht dachte, wenn nicht die Zerlegungen von $\frac{2}{17}, \frac{2}{19}, \frac{2}{37}, \frac{2}{41}, \frac{2}{53}$ als Bestätigungen unserer Darstellung erschienen. Dort wo die Zerlegung der Tabelle drei Stammbrüche gibt, enthält die Ausrechnung ganz ähnliche Subtraktionen mit ausdrücklicher Erwähnung derselben. Überzeugen wir uns bei $\frac{2}{17} = \frac{1}{12}\,\frac{1}{51}\,\frac{1}{68}$. Die Ausrechnung hat folgende Gestalt[2]):

$$\begin{array}{llcllll} & 1 & 17 & \qquad\qquad & & 1 & \frac{1}{17} \\ & \frac{2}{3} & 11\frac{1}{3} & & & 2 & \frac{1}{34} \\ & \frac{1}{3} & 5\frac{2}{3} & & * & 3 & \frac{1}{51}\quad\frac{1}{3} \end{array}$$

---

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 36. [2]) Ebenda S. 37.

	$\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$	$\cdot$ 4	$\frac{1}{68}\ \frac{1}{4}$
$\cdot$	$\frac{1}{12}$	$1\frac{1}{4}\ \frac{1}{6}$ Rest $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$,		

wo die Worte „Rest $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$" bedeuten, daß $\frac{1}{12} \times 17$ von den verlangten 2 abgezogen noch $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ zum Reste lassen.

Statt des so beseitigten Einwurfes droht uns ein zweiter, der die Ausrechnung selbst, den auftretenden Rest, die durch denselben erzwungenen ergänzenden Stammbrüche in Widerspruch setzen möchte gegen unsere Behauptung, eine Ableitungsmethode der Tabelle sei nicht ersichtlich. Und dennoch können wir diese Behauptung aufrecht erhalten. Mag immerhin, wenn der erste Teilbruch der Zerlegung gegeben war, auf den oder die anderen Teilbrüche durch eine Restrechnung geschlossen worden sein, die Wahl des ersten Teilbruches selbst war davon unbeeinflußt, und auf sie kam alles an. So gibt z. B. die Tabelle $\frac{2}{43} = \frac{1}{42}\ \frac{1}{86}\ \frac{1}{129}\ \frac{1}{301}$. Wollte man zum ersten Teilbruche nur einen solchen wählen, dessen 43faches unterhalb der 2, aber nahe bei ihr lag, so hinderte nichts folgende Rechnung anzustellen, der wir zum Vergleiche mit den übrigen eine ganz ägyptische Anordnung geben:

	1	43	1	43
	$\frac{2}{3}$	$28\frac{2}{3}$	2	86
	$\frac{1}{3}$	$14\frac{1}{3}$	3	129
	$\frac{1}{6}$	$7\frac{1}{6}$	$\cdot$ 6	258
	$\frac{1}{12}$	$3\frac{1}{2}\ \frac{1}{12}$	12	516
$\cdot$	$\frac{1}{24}$	$1\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{24}$ Rest $\frac{1}{6}\ \frac{1}{24}$	$\cdot$ 24	1032

und man hätte $\frac{2}{43} = \frac{1}{24}\ \frac{1}{258}\ \frac{1}{1032}$ gefunden. Der Rechner muß doch irgend eine Veranlassung gehabt haben mit $\frac{1}{42}$ statt etwa, wie es hier gezeigt wurde, mit $\frac{1}{24}$ zu beginnen, und welches diese Veranlassung war, wissen wir eben nicht. Das heißt wir kennen nicht die Ableitung der Tabelle.

Man fasse übrigens die Ausrechnung auf, wie immer man wolle, der Umstand bleibt jedenfalls bemerkenswert, daß ein Rest bei ihr

zur Rede kommt, daß also eine gegebene Zahl von einer anderen (hier von der Zahl 2) abgezogen wurde, daß man diesem Rest entsprechend eine Ergänzung durch Vervielfachung wieder einer gegebenen Zahl (des Nenners des zu zerlegenden Bruches $\frac{2}{A}$) mit zu suchenden Stammbrüchen zu beschaffen hatte. So sehen wir die Möglichkeit, wenn nicht die Notwendigkeit einer eigentlichen Ergänzungs- oder Vollendungsrechnung, und eine solche unter dem ägyptischen Namen *Seqem* schließt sich mit 17 Beispielen unmittelbar an die große und die auf letztere folgende kleine Zerlegungstabelle an[1]). Die Seqemrechnung hat es mit multiplikativen und additiven Ergänzungen zu tun, d. h. es wird in den ersten Beispielen gelehrt, womit eine bald aus Brüchen allein, bald aus mit Brüchen verbundenen Ganzen bestehende gegebene Zahl vervielfacht werden muß, es wird in späteren Beispielen gelehrt, wieviel zu einer ähnlichen gegebenen Zahl hinzugefügt werden muß, um einen gegebenen Wert hervorzubringen. Wir könnten kürzer sagen: es wird mit einer gegebenen Zahl in eine andere dividiert, oder aber sie wird von einer anderen subtrahiert, wenn nicht dadurch der Zweck wie die Verfahrungsweise des Ägypters durchaus verwischt würde.

Das Verfahren besteht wesentlich in einer Zurückführung der gegebenen Brüche auf einen gemeinsamen Nenner, die als Hilfsrechnung durch andersfarbige (rote) Schriftzüge sich hervorhebt, und wobei gewissermaßen über unsere moderne Anwendung von Generalnennern hinausgegangen wird, indem man sich nicht versagt, auch solche gemeinsame Nenner zu wählen, in welchen die Nenner der gegebenen Stammbrüche nicht eine ganzzahlige Anzahl von Malen enthalten sind. Maßgebend ist nur, daß jener Generalnenner zur Aufgabe selbst oder zu der bis dahin geführten Rechnung in Beziehung stehe, und nicht etwa Scheu vor zu großen Generalnennern bestimmt die Wahl desselben. Eine solche Scheu kannte man tatsächlich nicht, wie Aufgabe No. 33 beweist, in welcher 5432 als Generalnenner vorkommt[2]). Zwei von den Seqemrechnungen, No. 23. und No. 13., mögen jene die additive, diese die multiplikative Ergänzung erkennen lassen.

In No. 23. soll $\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{45}$ additiv zu 1 ergänzt werden. Generalnenner wird 45, allerdings ohne daß ein Wort davon verlautete. Es werden eben nur die genannten Stammbrüche durch die Zahlen $11\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$, $4\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 1 ersetzt, und damit ist für den Sachkundigen

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 53—60. [2]) Ebenda S. 73.

hinlänglich erklärt, daß Fünfundvierzigstel gemeint sind. Deren Summe $23\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ Fünfundvierzigstel bedarf zur Ergänzung auf $\frac{2}{3}$ noch $\frac{6\frac{1}{8}}{45} = \frac{5}{45}\,\frac{1\frac{1}{8}}{45} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{40}$; dann fehlt noch $\frac{1}{3}$, mithin ist die ganze Ergänzung $\frac{1}{3}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{40}$.

In No. 13. soll $\frac{1}{16}\,\frac{1}{112}$ multiplikativ zu $\frac{1}{8}$ ergänzt werden. Wohl mit Rücksicht darauf, daß $112 = 7 \times 16$, wird ein gerades Vielfaches von 7, nämlich 28, zum Generalnenner gewählt, also $\frac{1}{16} = \frac{1\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{28}$, $\frac{1}{112} = \frac{\frac{1}{4}}{28}$ und deren Summe $= \frac{2}{28}$ gesetzt. Diese soll zu $\frac{1}{8} = \frac{3\frac{1}{2}}{28}$ gemacht werden, und das geschieht, indem man die $\frac{2}{28}$ selbst, deren Hälfte $\frac{1}{28}$ und die Hälfte dieser Hälfte $\frac{\frac{1}{2}}{28}$ vereinigt. Mit anderen Worten $\frac{1}{16}\,\frac{1}{112}$ wird durch Vervielfachung mit $1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ zu $\frac{1}{8}$ vollendet.

Unsere Darstellung des letzten Beispieles gibt uns nicht bloß einen Einblick in eine Seqemaufgabe, sondern in das Dividieren der Ägypter überhaupt, wie es im ganzen Papyrus an den verschiedensten Stellen wiederkehrt, stets den Weg mittelbarer Vervielfältigung wählend, in verwickelteren Fällen zunächst mit einem angenäherten Ergebnisse sich begnügend, welches dann selbst noch nachträglich eine Ergänzung notwendig macht.

Wenn es in No. 58. heißt[1]): „Mache du vervielfältigen die Zahl $93\frac{1}{3}$ um zu finden 70. Vervielfältige die Zahl $93\frac{1}{3}$, ihre Hälfte $46\frac{2}{3}$, ihr Viertel $23\frac{1}{3}$. Mache du $\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$", so ist die Meinung keine andere, als die, daß jene Hälfte mit $46\frac{2}{3}$ und jenes Viertel mit $23\frac{1}{3}$ zusammen die verlangten 70 geben.

Wenn No. 32. verlangt $1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$ zu 2 zu machen[2]), so vervielfältigt Ahmes die gegebene Zahl zunächst mit $\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}$ (wobei der Umweg erst $\frac{2}{3}$ und dann noch $\frac{1}{3}$ der Zahl statt dieser selbst zu nehmen nur durch den Wunsch erklärt werden kann, bei der weiteren Arbeit möglich viele Multiplikationsergebnisse von $1\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$ zu kennen) und bringt die Summe aller dieser Teilprodukte in die Form $1\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12} \times 1\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 144. [2]) Ebenda S. 70.

$= \frac{285}{144}$. Er will aber $2 = \frac{288}{144}$ erhalten, zu deren Ergänzung noch $\frac{3}{144} = \frac{1}{72}\,\frac{1}{144}$ erforderlich sind. Nun war bei der Gewinnung des angenäherten Produktes $1\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$ in die Form $\frac{228}{144}$ gebracht worden. Daraus geht hervor, daß $\frac{1}{228} \times 1\frac{1}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{144}$ sein muß und $\frac{1}{114} \times 1\frac{1}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{72}$. Der gesamte gesuchte Quotient ist daher $\frac{2}{1\frac{1}{3}\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{114}\,\frac{1}{228}$.

Wir sind fast unverantwortlich ausführlich in der Darstellung dieser Rechnungsverfahren und ihrer tabellarischen Hilfsmittel gewesen. Möge es uns gelungen sein dem Leser die Denkweise eines ägyptischen Rechners einigermaßen zu vergegenwärtigen. Das wäre freilich unmöglich, wenn unsere Auffassung eine so durchaus irrige wäre, als behauptet worden ist[1]). Zunächst soll in den Seqemrechnungen von einem gemeinschaftlichen Nenner keine Rede sein. Das ist vollständig wahr, wenn man den Nachdruck auf das Wort selbst legt. Ahmes hat dem Nenner, auf welchen die vorkommenden Brüche zurückgeführt werden, keinen Namen gegeben. Die Operation der Zurückführung als solche ist auch nicht geschildert. Aber als Mittel zur Hauptrechnung, welche *Seqem* heißt, wird sie fortwährend geübt, wie wir an der Hand der Beispiele gezeigt haben.

Ferner soll auch der Zweck der Seqemrechnungen nicht der von uns angegebene sein. Ahmes beweise vielmehr unter dem Namen Seqem den Satz, daß wenn man verschiedene Zahlengrößen dem gleichen Rechnungsverfahren unterwerfe, die Ergebnisse im gleichen Verhältnisse sich ändern, wie die Zahlengrößen, von denen man ausging. Indem wir unsere Leser auch mit dieser Auffassung bekannt machen, verschweigen wir allerdings nicht, daß unserer Meinung nach hier Dinge in Ahmes hineingelesen werden, an die er nie dachte. Ein Wort, welches mit Verhältnis übersetzt werden könnte, kommt überhaupt nicht vor. Richtig ist nur das eine, und das war übersehen worden, bis unser Herr Gegner darauf aufmerksam machte, daß in den Seqemrechnungen die zu erreichende Zahl meistens das Siebenviertelfache der Ausgangszahl ist, so daß diese ganz, zur Hälfte und zum Viertel genommen und so vereinigt werden muß.

Wir sind sogar in der Lage ähnliches aus weit älterer Zeit anzugeben. H. Brugsch hat 1891 im Museum von Gizeh zwei mit

[1]) Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur Égyptien (Papyrus Rhind) par M. Léon Rodet im Journal Asiatique für 1882. Die 122 Seiten starke Abhandlung ist auch im Separatabdruck erschienen.

Gips überzogene Tafeln entdeckt[1]), welche zum Rechnen benutzt wurden und noch mit Zahlzeichen bedeckt sind. Schriftcharakter und beigefügte Namen wie Amenemhat, Usertesen weisen auf die XII., wenn nicht auf die XI. Dynastie hin. Die vollzogenen Rechnungen bestehen darin, daß Zahlen angegeben werden, deren erste das 7fache, 10fache, 11fache, 13fache der zweiten sind. Das 7fache ist beispielsweise durch die Zahlenreihe erläutert

$$\begin{array}{ll} 7 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{28} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{14} \\ 1 & \frac{40}{320}\ \frac{5}{320}\ \frac{1}{640} \end{array}$$

usw., wo allerdings die letzte Angabe nur näherungsweise richtig ist, da $\frac{1}{7}$ nicht $\frac{91}{640}$ ist, sondern $\frac{91\frac{3}{7}}{640}$, also etwa $\frac{1}{1280}$ mindestens fehlt.

Sei aber bei dem Umstande, daß Ahmes nur das Wort Seqem gebraucht, ohne es irgend zu erklären, ein Zweifel über Sinn und Absicht gestattet, sei darum die eine oder die andere Deutung vorzuziehen, oder gar eine dritte, deren Enthüllung die Zukunft bringen könnte, die eine Wahrheit wird wohl sicherlich genügend zutage getreten sein, daß Ahmes dieses Handbuch nicht für den ersten besten, sondern nur für die ersten und besten der Rechnungsverständigen seiner Zeit schrieb. Sein Werk setzt das gemeine Rechnen mit ganzen Zahlen durchaus voraus. Es schließt nicht aus, daß die Zwischenrechnungen unter Anwendung von Hilfsmitteln ausgeführt wurden, von welchen Ahmes nicht redet. Wenden wir uns nunmehr zu den eigentlichen Aufgaben des Papyrus, welchen wir gleichfalls den Stempel eines verhältnismäßig höheren Wissens aufgeprägt finden.

An der Spitze dieser Aufgaben stehen die *Hau*-Rechnungen[2]), die dem Inhalte nach nichts anderes sind, als was die heutige Algebra Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten nennt. Die unbekannte Größe heißt *Hau*, der Haufen, und mit diesem Worte wird nicht bloß bis zu einem gewissen Grade gerechnet, es kommen sogar mathematische Zeichen vor, welche von den gegenwärtig gebräuchlichen sich nur insoweit unterscheiden, als sie ohne Anwendung von zugleich mit ihnen auftretenden Wörtern nicht ausreichen einen nicht mißzuverstehenden Sinn herzustellen. Als solche

[1]) H. Brugsch-Pascha, Aus dem Morgenlande (Reclams Universal-Bibliothek No. 3151 und 3152) S. 35—40. [2]) Eisenlohr, Papyrus S. 60—88.

mathematische Hieroglyphen dürfen wir ausschreitende Beine für Addition und Subtraktion nennen. Die Addition wird durch dieselben bezeichnet, wenn die Beine der Zeichnung der Füße gemäß eben nach der Richtung gehen, wohin auch die Köpfe der Vögel, der Menschen usw. in den dergleichen darstellenden Hieroglyphen schauen, die Subtraktion im entgegengesetzten Falle. Wir nennen ferner ein aus drei horizontalen parallelen Pfeilen bestehendes Zeichen für Differenz. Wir nennen endlich das Zeichen $<$ in der Bedeutung „das macht zusammen" oder „gleich". Stellen wir einige dieser Aufgaben in ihrem Wortlaute zusammen, welchen wir die Schreibweise als Gleichungen folgen lassen.

No. 24. Haufen, sein Siebentel, sein Ganzes, es macht 19. D. h. $\frac{x}{7} + x = 19$.

No. 28. $\frac{2}{3}$ hinzu, $\frac{1}{3}$ hinweg bleibt 10 übrig. D. h. $\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10$.

No. 29. $\frac{2}{3}$ hinzu, $\frac{1}{3}$ hinzu, $\frac{2}{3}$ hinweg (?) bleibt 10 übrig. D. h. $\left(x + \frac{2}{3}x\right) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{2}{3}\left[\left(x + \frac{2}{3}x\right) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right)\right] = 10$.

No. 31. Haufen, sein $\frac{2}{3}$, sein $\frac{1}{2}$, sein $\frac{1}{7}$, sein Ganzes, es beträgt 33. D. h. $\frac{2}{3}x + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} + x = 33$.

Das Wesen einer Gleichung besteht nun allerdings weit weniger in dem Wortlaute als in der Auflösung, und so müssen wir, um die Berechtigung unseres Vergleichs zu prüfen, zusehen, wie Ahmes seine Haurechnungen vollzieht. Er geht dabei ganz methodisch zu Werke, indem er die Glieder, welche, wie man heute sagen würde, links vom Gleichheitszeichen stehen, zunächst in eins vereinigt. Freilich tut er das in doppelter Weise, bald so, daß die Vereinigung im Nebeneinanderschreiben der betreffenden Stammbrüche bestehend nur eine formelle ist, z. B. No. 31.: $1\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{7}\,x = 33$; bald so, daß durch Zurückführung auf einen Generalnenner wirkliche Addition vorgenommen ist, z. B. No. 24.: $\frac{8}{7}x = 10$; No. 28.: $\frac{10}{9}x = 10$; No. 29.: $\frac{20}{27}x = 10$. Im erstgenannten Falle wird sofort durch den Koeffizienten der unbekannten Größe in die gegebene Zahl dividiert, wie eben der Ägypter zu dividieren pflegt, d. h. bei No. 31. man vervielfältigt $1\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{7}$ solange bis 33 herauskommen und findet so den freilich nichts weniger als übersichtlichem Wert des Haufens $14\frac{1}{4}\,\frac{1}{97}\,\frac{1}{56}\,\frac{1}{679}\,\frac{1}{776}\,\frac{1}{194}\,\frac{1}{388}$, bei welchem wir nur zu bemerken geben, daß $\frac{1}{56}\,\frac{1}{679}\,\frac{1}{776}$ der aus der Tabelle herrührende Wert von $\frac{2}{97}$ ist. Der zweite Fall eröffnet wieder zwei Möglichkeiten. Entweder man löst $\frac{a}{b}x = C$ indem die Division $\frac{C}{a}$ vollzogen und deren Quotient mit b vervielfacht wird; so in No. 24, wo zuerst 8 in 19 als $2\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ mal enthalten und dann 7 mal $2\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ als $16\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$ gefunden wird. Oder aber man dividiert mit $\frac{a}{b}$ in 1 und vervielfacht diesen Quotienten mit C; so wahrscheinlich in den Aufgaben No. 28. und 29. In No. 28. wird nämlich $\frac{1}{10}$ von 10 gesucht und von 10 abgezogen um den Haufen 9 zu finden; wir fassen das so auf, es sei $\frac{1}{\frac{10}{9}} = \frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{10}$ gewonnen und dann $1 - \frac{1}{10}$ mal 10 ermittelt worden. Bei No. 29. wird $\frac{1}{\frac{20}{27}}$ oder $\frac{27}{20}$ im Werte von $1\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{10}$ berechnet und dieses 10 mal genommen, so daß $13\frac{1}{2}$ als der Haufen erscheint.

Auch hier sollen wir[1]) eine durchaus irrige Darstellung gegeben haben. Nicht als Gleichungen seien die Haurechnungen aufzufassen, sondern als Anwendungen der hier erstmalig auftretenden Methode des falschen Ansatzes. Ahmes wähle, wenn eine Aufgabe von der Form $\frac{a}{b}x = C$ vorgelegt sei, für x zunächst den bequemen, wenn auch falschen Wert b. Durch ihn wird freilich $\frac{a}{b}x$ nicht C, sondern a, und der richtige Wert von x wird sodann gefunden, indem man von b zu ihm dasselbe Verhältnis obwalten läßt, wie von a zu C. Der Sache nach stimmt diese Methode des falschen Ansatzes und die der Gleichungsauflösung offenbar überein, und bei fehlendem Zwischentexte ist es beinahe Geschmackssache, ob man das eine, ob man das andere erkennen will.

Daß die Vorstellung eines Hindurchgehens durch einen falschen Ansatz den Ägyptern nicht fremd war, haben wir immer behauptet, wie sich bei der Besprechung der Aufgabe No. 40. zeigen wird.

---

[1]) Rodet, Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur Égyptien.

Daß aber die Ägypter auch mit dem Gleichungsbegriffe vertraut waren, und daß ihnen also Fremdartiges nicht untergeschoben wird, wenn man, wie wir es getan haben, die Haurechnungen Gleichungsauflösungen nennt und als solche behandelt, das zeigen vorzugsweise andere Aufgaben, welche im Papyrus räumlich von den Haurechnungen getrennt von No. 62. an auftreten[1]). Diese Aufgaben würden in modernen Übungsbüchern, in welchen sich regelmäßig verwandte Dinge behandelt finden, unter dem Namen der Gesellschaftsrechnungen erscheinen. Die deutlichste derselben, No. 63., hat nach zweifellos richtig hergestelltem Text folgenden Wortlaut: „Vorschrift zu verteilen 700 Brote unter vier Personen, $\frac{2}{3}$ für einen, $\frac{1}{2}$ für den zweiten, $\frac{1}{3}$ für den dritten, $\frac{1}{4}$ für den vierten". Als Gleichung geschrieben wäre hier $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 700$ oder $1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}x = 700$. Nun wird zwar nicht in ägyptischer Weise mit $1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ in 1 dividiert, aber doch das Ergebnis $\frac{1}{2}\,\frac{1}{14}$ sofort hingeschrieben, ein Ergebnis, welches der Seqemaufgabe No. 9. entnommen sein kann[2]), woraus zugleich ein weiterer Nutzen dieser Ergänzungsrechnungen und damit eine weitere Begründung der Notwendigkeit ihrer besonderen frühzeitigen Einübung hervorgeht. Der Wortlaut ist nämlich anknüpfend an den der Aufgabe: „Addiere du $\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$, das gibt nun $1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$. Teile du 1 durch $1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$, das gibt nun $\frac{1}{2}\,\frac{1}{14}$. Mache du $\frac{1}{2}\,\frac{1}{14}$ von 700, das ist 400." Wie könnte man bei dieser Rechnung von einem falschen Ansatze reden? Nein, es ist vollständige Gleichungsauflösung. Von $\frac{a}{b}x = C$ ist weiter geschlossen auf $x = \left(1 : \frac{a}{b}\right) C$, genau so wie wir oben es auch für die Aufgaben No. 28. und 29. wahrscheinlich zu machen versuchten.

Unter den Aufgaben der letzterwähnten Gruppe ist No. 66. nicht ohne sachliches Interesse, wo aus dem Fettertrage eines Jahres der tägliche Durchschnittsertrag mit Hilfe der Teilung durch 365 ermittelt wird. Die Länge des Jahres zu 365 Tagen führt in Ägypten auf eine sagenhafte Urzeit noch vor König Mena zurück[3]). Der Gott Thot soll der Mondgöttin im Brettspiele 5 Tage abgewonnen haben,

---

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 151—174; insbesondere S. 159 für die Aufgabe No. 63. und S. 165—166 für die Aufgabe No. 66. [2]) Ebenda S. 55. [3]) Maspero-Pietschmann S. 76—77.

die er den bis dahin in der Zahl von 360 üblichen Tagen des Jahres zulegte. Und wie die Ägypter mindestens als Mitbewerber zu anderen ältesten Kulturvölkern um den Vorrang der Kenntnis der Jahreslänge von 365 Tagen auftreten, so gebührt ihnen ganz gewiß das Erstlingsrecht in der Einführung des Schaltjahres von 366 Tagen, welches je nach drei gewöhnlichen Jahren eintretend eine Ausgleichung der Jahresdaten mit den wirklichen Jahreszeiten zum Zwecke hat. Das Edikt von Kanopus vom 7. März 238 v. Chr. führte diese Einrichtung ein, wenn sie auch bald wieder in Vergessenheit geriet[1]).

Dem Inhalte und der Art des Auftretens nach hochbedeutsam sind die Aufgaben No. 40., 64., 79. des Papyrus. Ihr getrenntes Vorkommen scheint darauf hinzuweisen, daß der mathematische Zusammenhang derselben für Ahmes nicht deutlich, oder nicht erheblich genug war um die Anordnung der Aufgaben zu beeinflussen. Ihr Gegenstand ist der Lehre von den arithmetischen und den geometrischen Reihen entnommen.

No. 40. „Brote 100 an Personen 5; $\frac{1}{7}$ von 3 ersten das von Personen 2 letzten. Was ist der Unterschied?"[2]) Ahmes will eine arithmetische Reihe von 5 Gliedern gebildet haben, deren größtes Anfangsglied a, deren negative Differenz $-d$ sei, und welche der Bedingung entspricht, daß $\frac{a+(a-d)+(a-2d)}{7}=(a-3d)+(a-4d)$, oder $11(a-4d)=2d$, beziehungsweise $d=5\frac{1}{2}\times(a-4d)$ sei. Mit anderen Worten: der Unterschied der Glieder muß das $5\frac{1}{2}$ fache des niedersten Gliedes betragen, damit der einen ausgesprochenen Bedingung genügt werde, und Ahmes kleidet dieses ohne jede Begründung in die Worte: „Mache wie geschieht, der Unterschied $5\frac{1}{2}$", worauf er die Reihe hinschreibt, welche die 1 als letztes Glied besitzt: 23, $17\frac{1}{2}$, 12, $6\frac{1}{2}$, 1. Allein die Summe s dieser Reihe ist nur 60, während sie nach der anderen ausgesprochenen Bedingung 100 sein soll. Nun ist 100 das $1\frac{2}{3}$ fache von 60, man braucht also nur jedes Reihenglied $1\frac{2}{3}$ mal zu nehmen um beiden Bedingungen zugleich gerecht zu werden. Bei Ahmes heißt dieses wieder ohne weitere Begründung „mache du vervielfältigen die Zahl $1\frac{2}{3}$ mal", wo-

[1]) Über das im April 1866 aufgefundene Edikt von Kanopus vgl. R. Lepsius, Das bilingue Dekret von Kanopus. Berlin 1866. Bd. I. [2]) Eisenlohr, Papyrus S. 90—92.

durch er zu der richtigen Reihe $38\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{6}$, 20, $10\frac{2}{3}\frac{1}{6}$, $1\frac{2}{3}$ gelangt. Hier hat Ahmes in der Tat zuerst einen falschen Ansatz versucht, um ihn nachträglich zu verbessern, und wir werden uns dieses Verfahren für später zu merken haben.

No. 64. „Vorschrift des Abteilens Unterschiede. Wenn gesagt dir Getreide Maß 10 an Personen 10. Der Unterschied von Person jeder zu ihrer zweiten beträgt an Getreide Maß $\frac{1}{8}$, ist er."[1]) Hier ist aus der Summe s, der wieder negativ gewählten Differenz $-d$ und der Gliederzahl n das Anfangsglied a der fallenden arithmetischen Reihe zu suchen. Nun ist $a+(a-d)+\cdots+(a-(n-1)d)=s=na-\frac{n(n-1)}{2}d$ und daraus $a=\frac{s}{n}+(n-1)\cdot\frac{d}{2}$ und genau nach dieser Formel läßt Ahmes rechnen. Der Wortlaut mag diese Behauptung begründen. Ahmes schreibt vor: „Ich teile in der Mitte $\left[\text{d. h. ich bilde den mittleren Durchschnitt } \frac{s}{n}\right]$ d. i. 1 Maß. Ziehe ab 1 von 10 Rest 9 [d. h. bilde $n-1$]. Mache die Hälfte des Unterschiedes $\left[\text{d. h. mache } \frac{d}{2}\right]$ d. i. $\frac{1}{16}$. Nimm es mal 9 $\left[\text{d. i. nimm } \frac{d}{2}\times(n-1)\right]$, das gibt bei dir $\frac{1}{2}\frac{1}{16}$. Lege es hinzu zur Teilung mittleren $\left[\text{d. h. vollziehe die Addition } \frac{s}{n}+\frac{d}{2}\times(n+1)\right]$. Ziehe ab du Maß $\frac{1}{8}$ für Person jede um zu erreichen das Ende."

Eine höchst merkwürdige Parallelstelle findet sich in den Fragmenten von Kahun, nämlich:

110

$13\frac{3}{4}$

$12\frac{11}{12}$

$12\frac{1}{12}$

$11\frac{1}{4}$

$10\frac{5}{12}$

$9\frac{7}{12}$

$8\frac{3}{4}$

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 159—162.

$$7\frac{11}{12}$$

$$7\frac{1}{12}$$

$$6\frac{1}{4}.$$

Die 10 letzten Zahlenangaben bilden eine fallende arithmetische Reihe mit der Differenz $\frac{5}{6}$ und der Summe 100. Mit der als Überschrift dienenden Zahl 110 ist nichts anzufangen, es sei denn daß man annähme, zwischen dem Zeichen für 10 und dem für 100 sei beim Schreiben irgend etwas vergessen worden. Man hätte alsdann als Überschrift zu denken: 100 in 10 Glieder zu zerlegen, und nach dieser Überschrift fände sich die Auflösung der Aufgabe.

In den beiden Aufgaben No. 40. und No. 64. bedurfte es von uns der Erläuterungen, um die betreffenden Auflösungsmethoden zu rechtfertigen. Ahmes setzt kein Wort von dieser Art hinzu. Das beweist doch mit aller Bestimmtheit, daß die notwendigen Formeln aus einem anderen Lehrbuche hergenommen sein mußten, oder aber, daß der mündliche Unterricht für die nötige Erklärung bei solchen Schülern sorgte, die zur Frage: warum macht man das so? reif waren. Keinenfalls konnte der ägyptische Mathematiker, wenn die Anwendung dieses Wortes gestattet ist, in seinem Wissen von arithmetischen Reihen auf die unbewiesenen, ungerechtfertigten Formeln beschränkt gewesen sein, von denen in No. 40. und 64. Gebrauch gemacht ist. Dafür spricht noch weiter das Vorhandensein eines besonderen Ausdruckes Tunnu, die Erhebung, für den Unterschied zweier aufeinander folgender Glieder der Reihe.

Wir haben uns auch noch auf die Aufgabe No. 79. für Kenntnisse in der Lehre von den geometrischen Reihen bezogen. Wie weit sich diese erstreckten, ist freilich viel zweifelhafter als bei den arithmetischen Reihen. In der genannten Aufgabe[1]) ist von einer Leiter, Sutek, die Rede, welche aus den Gliedern 7, 49, 343, 2401, 16807 bestehe. Neben diesen Zahlen, offenbar neben den 5 ersten Potenzen von 7, stehen Wörter, die auf deutsch Bild, Katze, Maus, Gerste, Maß heißen. Der Sinn dieser Aufgabe war durch die mehrerwähnte Eigentümlichkeit des Handbuches, nirgend verbindende oder erklärende Worte zwischen die Zahlenangaben einzuschieben, unverständlich und mußte es bleiben, bis es gelang bei einem Schriftsteller, der fast 3000 Jahre nach Ahmes lebte, eine Aufgabe aufzufinden, von welcher im 41. Kapitel im folgenden Bande die Rede sein wird,

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 202—204.

und welche den Schlüssel lieferte[1]). Der fehlende Wortlaut der Aufgabe No. 79. ist demnach folgendermaßen herzustellen: 7 Personen besitzen je 7 Katzen; jede Katze vertilgt 7 Mäuse; jede Maus frißt 7 Ähren Gerste; aus jeder Ähre können 7 Maß Getreidekörner entstehen; wie heißen die Glieder der nach diesen Angaben zu bildenden Zahlenreihe, und wie groß ist ihre Summe? Ahmes bildet die Glieder wirklich. Er addiert sie zu 19607 und findet in einer Nebenrechnung die gleiche Zahl 19607 als Produkt von 7 mal 2801. Allerdings ist nicht gesagt, wie Ahmes gerade zu dem Faktor 2801 gelangte, aber andererseits ist auch nicht in Abrede zu stellen, daß $2801 = \frac{16807 - 1}{7 - 1}$, daß also möglicherweise, vielleicht wahrscheinlicherweise hier die Kenntnis der Summierungsformel für die geometrische Reihe $a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^n - 1}{a - 1} \times a$ durchschimmert, wenn auch von einer Gewißheit keine Rede sein kann.

Das wäre etwa der Inhalt des Übungsbuches des Ahmes, soweit er für die Rechenkunst von Wichtigkeit ist. Bevor wir den geometrischen Teil der Aufgaben zur Sprache bringen und des Metrologischen im Vorbeigehen gedenken, schalten wir hier Erörterungen ein, die sich auf die schriftliche Bezeichnung der Zahlen bei den Ägyptern und auf das Rechnen derselben beziehen.

Daß die Schrift der Ägypter ihren ursprünglichen Charakter als Bilderschrift in den Zeichen, welche zur monumentalen Anwendung kamen, am reinsten bewahrt hat, braucht gewiß kaum gesagt zu werden. Die Hieroglyphen, eingehauen in die Obelisken und Gedenksteine, aufgemalt auf die Wände der Tempel und der Grabeskammern, lassen auf den ersten Blick sich als Zeichnungen von Menschen, von Tieren, von Gliedmaßen, von Gegenständen des täglichen Gebrauches erkennen, wenn sie auch allmählich mit Silben- oder Buchstabenaussprache versehen wurden, welche mit dem dargestellten Bilde oft nur lautlich zusammenhängen. Bei rascherem Schreiben veränderten sich selbstverständlich die Zeichen. Absichtlich oder zufällig abgerundet verschwammen sie bis zur Unerkennbarkeit ihres Ursprunges in rasch hinzuwerfende Züge der hieratischen Schrift. Endlich ist als letzte Erscheinungsweise dieses Abhandenkommens der ersten Umrisse die demotische Schrift zu erwähnen, heute noch die meisten Schwierigkeiten bereitend, bei denen wir uns glücklicherweise nicht aufzuhalten brauchen, da diejenigen Schriftstücke, von denen allein die Rede sein muß, teils in

[1]) Rodet, Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur Égyptien pag. 111—113 der Sonderausgabe.

Hieroglyphen an verschiedenen noch zu nennenden Tempelwänden, teils in hieratischer Schrift — so besonders das bisher besprochene Werk des Ahmes — erhalten sind.

Die Richtung der Schrift ist bei Hieroglyphen wechselnd. Man pflegte nämlich auf die Richtung, in welcher der Lesende vorüberschreitend gedacht war, Rücksicht zu nehmen, und so mußte bei Inschriften auf zwei Parallelwänden notwendigerweise auf der Wand zur Rechten des Hindurchgehenden die Schrift von rechts nach links fortschreiten, auf der anderen Wand von links nach rechts. Sämtliche Hieroglyphen kommen daher bald in einer Form vor, bald in der durch Spiegelung aus jener entstehenden zweiten Form. Man hat sich gewöhnt bei der Wiedergabe der Hieroglyphen im Drucke stets die Form anzuwenden, welche dem Lesen von links nach rechts entspricht. Die hieratische Schrift dagegen führt immer von rechts nach links [1]).

Sollten in hieroglyphischen Inschriften Zahlen dargestellt werden, so standen dazu verschiedene Mittel zu Gebote [2]). Bald wiederholte man das zu Zählende, wie z. B. in einer Inschrift von Karnak, wo „9 Götter" in der Weise geschrieben ist, daß das Zeichen für Gott neunfach nebeneinander abgebildet ist. Bald schrieb man die Zahlwörter alphabetisch aus, ein höchst wichtiges Vorkommen, da hieraus die Kenntnis des Wortlautes wenigstens in einigen Fällen zu gewinnen war, wozu alsdann Ergänzungen teils aus der Benutzung von Zahlzeichen in Silbenbedeutung, teils aus der koptischen Sprache usw. kamen, so daß man gegenwärtig über eine ziemliche Menge von ägyptischen Zahlwörtern verfügt [3]). Bei weitem am häufigsten gebrauchten aber die Ägypter bestimmte Zahlzeichen, denen der Franzose Jomard schon während der ägyptischen Expedition 1799 auf die Spur kam, und die er 1812 bekannt machte. Sie stammen meistens aus dem sogenannten „Grabe der Zahlen", das Champollion unweit der Pyramiden von Gizeh auffand, und in welchem dem reichen Besitzer seine Herden mit Angabe der einzelnen Tiergattungen vorgezählt werden, als 834 Ochsen, 220 Kühe, 3234 Ziegen, 760 Esel, 974 Schafe.

Die Zeichen sind ihrer Bedeutung nach 1 (𓏺), 10 (𓎆), 100 (𓍢), 1000 (𓆼), 10000 (𓂭); auch ein Zeichen für 100000 (𓆐), für Million (𓁨), sogar für 10 Million (◯) ist bekannt geworden [4]). Was

[1]) Maspero-Pietschmann S. 590. [2]) Mathem. Beitr. Kulturl. S. 15. [3]) Eisenlohr, Papyrus S. 13—21. [4]) Hieroglyphische Grammatik von H. Brugsch. Leipzig 1872, S. 33.

die Zeichen darstellen, ist nicht bis zur vollen Sicherheit klar. Daß 1 durch einen senkrechten Stab, 10000 durch einen deutenden Finger, 100000 durch eine Kaulquappe, Million durch einen sich verwundernden Mann zu erklären sei, darin mögen wohl alle einig sein. Die vier übrigen Zeichen dagegen für 10, 100, 1000, 10 Million sind bald so, bald so gedeutet worden. So hat man beispielsweise in dem Zeichen für 100 bald einen Palmstengel, bald einen Priesterstab, in dem für 1000 bald eine Lotusblume, bald eine Lampe erkennen wollen. Wir sehen von dieser Einzeldeutung als uns nicht berührend ab und schildern nur die Methode, nach welcher mittels dieser Zeichen die Zahlen geschrieben wurden.

Sie ist eine rein additive durch Nebeneinanderstellung oder Juxtaposition, indem das Zeichen der Einheit einer jeden Ordnung so oft wiederholt wird als sie vorkommen sollte. Der leichteren Übersicht wird dadurch Vorschub geleistet, daß Zeichen derselben Art, wenn mehr als vier derselben auftreten sollten, in Gruppen zerlegt zu werden pflegten, so daß nicht mehr als höchstens vier Zeichen derselben Art dicht nebeneinander geschrieben wurden. Eine derartige Gruppierung scheint übrigens fast allerorten sich frühzeitig eingebürgert zu haben, selbst bei solchen Völkern, die in ihren mit lauter einfachen Strichen versehenen Kerbhölzern zu der niedrigsten Form eines schriftlichen Festhaltens einer Zahl allein sich aufzuschwingen vermochten [1]). Die Reihenfolge der Zeichen überhaupt und, bei Zeichen derselben Art, der Gruppen gehorcht dem Gesetze der Größenfolge, welches wir in der Einleitung erläutert haben. Bei den von links nach rechts verlaufenden Hieroglyphentexten steht demnach das Zeichen, beziehungsweise die Gruppe höchster Zahlenbedeutung immer links von den anderen, und umgekehrt verhält es sich bei den Texten entgegengesetzten Verlaufs. Kamen neben den Ganzen auch Brüche vor, so wurden diese selbstverständlich nach den Ganzen geschrieben. Die Bezeichnung der Stammbrüche findet so statt, daß der Nenner in gewöhnlicher Weise geschrieben wird, darüber aber das Zeichen Platz findet, welches *ro* ausgesprochen wird. Nur statt $\frac{1}{2}$ schreibt man und statt des uneigentlichen Stammbruches $\frac{2}{3}$ oder .

Die hieratischen Zahlzeichen wurden fast ebenso frühzeitig wie die hieroglyphischen bekannt, indem Champollion zwischen 1824 und 1826 aus der überaus reichen ägyptischen Sammlung zu Turin und den Papyrusrollen des Vatikan die Grundlage zu ihrer Entzifferung

[1]) Pott I, S. 8—9; II, S. 53.

gewann. Daß auch hier das Gesetz der Größenfolge für ganze Zahlen wie für Brüche maßgebend ist, daß der Richtung der hieratischen Schrift entsprechend das Größere ausnahmslos rechts von dem Kleineren steht, braucht kaum gesagt zu werden. Zum Schreiben der ganzen Zahlen benutzt die hieratische Schrift beträchtlich mehr Zeichen als die hieroglyphische, weil sie von der Juxtaposition unter sich gleicher Zeichen Abstand nimmt, vielmehr für die neun möglichen Einer, für die ebensovielen Zehner, Hunderter, Tausender sich lauter besonderer voneinander leicht unterscheidbarer Zeichen bedient. Sie spart an Raum und stellt dafür höhere Anforderungen an das Wissen des Schreibenden oder Lesenden. Nicht als ob jene Zeichen insgesamt voneinander unabhängig wären. Ein Blick auf die Tafel am Schlusse dieses Bandes genügt, um zu erkennen, daß die Einer mit geringen Ausnahmen sich aus der Vereinigung der betreffenden Anzahl von Punkten zu Strichen und aus der Verbindung solcher Striche zusammengesetzt haben[1]), daß die Hunderter und Tausender aus den Zeichen für 100 und 1000 mit den sie vervielfachenden Einern entstanden sind, daß jene Zeichen für 1000, für 100, auch für 10 den Hieroglyphen entstammen, unter Beachtung des Gegensatzes zwischen einer rechtsläufigen und einer linksläufigen Schrift. Die übrigen Zehner fordern jedoch den Scharfsinn des Erklärers so weit heraus, daß wir darauf verzichten auch nur einen Versuch in dieser Beziehung anzustellen.

Die Hieroglyphe für 10 hat sich, wie man bemerken wird, bei der hieratischen Schrift oben zugespitzt, und so bestätigt sich der Bericht eines wahrscheinlich in Ägypten geborenen griechischen Schriftstellers aus dem Anfange des V. Jahrhunderts n. Chr., Horapollon, welcher mitteilt[2]), die 10 werde durch eine gerade Linie dargestellt, an welche eine zweite sich anlehne. Derselbe Schriftsteller sagt auch[3]), die 5 werde durch einen Stern dargestellt, wie gleichfalls von der neueren Forschung bestätigt worden ist, wenn auch dieses Zeichen weniger Zahlzeichen als eigentliche Worthieroglyphe gewesen zu sein scheint.

Bei der hieratischen Schreibweise der Brüche hat das hieroglyphische *ro* sich zu dem Punkte verdichtet, der, wie wir schon wissen, über die ganze Zahl des Nenners gesetzt den Stammbruch erkennen ließ. (S. 61.) Den Hieroglyphen von $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$ entsprechen gleichfalls aus ihnen abgeleitete Zeichen. Außerdem gibt es noch beson-

[1]) R. Lepsius, Die altägyptische Elle und ihre Eintheilung (Abhandlungen der Berliner Akademie 1865) S. 42. [2]) Horapollon, Hieroglyphica Lib. II, cap. 30. [3]) Horapollon, Hieroglyphica Lib. I, cap. 13.

dere hieratische Zeichen für $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$, deren Ursprung nicht wohl ersichtlich ist, es müßte denn bei dem Zeichen für $\frac{1}{4}$ an die Vierteilung der Ebene durch zwei sich kreuzende Linien gedacht worden sein?

Die hieratische Schreibweise der ganzen Zahlen insbesondere war nicht systemlos. Sie konnte das Rechnen, namentlich das Multiplizieren bedeutend unterstützen, vorausgesetzt, daß man nur eine Kenntnis dessen besaß, was als Ergebnis der Vervielfachung der Einer untereinander und der Einheiten verschiedener Ordnung erscheint. Aber eine solche Einmaleinstabelle haben die Ägypter mutmaßlich nie besessen. Der Beweis dafür liegt in der Tatsache, daß sie Multiplikationen so gut wie nie auf einen Schlag vollzogen und auch bei der Ermittlung der Teilprodukte den Multiplikator keineswegs nach dekadisch unterschiedenen Teilen zu zerlegen pflegten. Wollte man z. B. das 13fache einer Zahl bilden, so suchte man nicht etwa das 3fache und 10fache, sondern das 1fache, 2fache, 4fache, 8fache durch wiederholte Verdopplung und vereinigte dann das 1fache, 4fache, 8fache zum gewünschten Produkte. Der gleiche Kunstgriff reichte aus, wenn Stammbrüche mit Stammbrüchen vervielfacht werden sollten, da vermöge der Schreibart der Brüche hier die Gleichartigkeit mit der Vervielfachung ganzer Zahlen untereinander auf der Hand lag, so daß wir in dieser Bezeichnung der Brüche selbst entweder eine geniale Erfindung oder einen glücklichen Griff, wahrscheinlich das letztere, zu rühmen haben.

Wir haben an den früher besprochenen Beispielen die Methoden allmählicher Vervielfachung ganzer und gebrochener Zahlen sowohl zum Zwecke eigentlicher Multiplikation, als indirekter Division zur Genüge kennen gelernt. Wir haben (S. 74) hervorgehoben, daß das Handbuch des Ahmes nur für Geübtere geschrieben sein kann, und mögen auch seine Schlußworte[1]): „Fange Ungeziefer, Mäuse, Unkraut frisches, Spinnen zahlreiche. Bitte Ra um Wärme, Wind, Wasser hohes“ sich an einen Landmann wenden, mögen die Aufgaben selbst vielfach an die Beschäftigungen eines Landmannes erinnern, niemand wird deshalb glauben wollen, daß ein gewöhnlicher Landmann Hau- und Tunnurechnungen zu bewältigen imstande gewesen sei. Neben dem höheren, dem wissenschaftlichen Rechnen kann daher und muß vielleicht an ein Elementarrechnen gedacht werden, dessen Spuren wir anderwärts als in dem Papyrus des Ahmes aufzusuchen haben. Das meiste, was die Wissenschaft erfand, sickert im Laufe der Jahre,

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 223—225.

wenn nicht der Jahrhunderte durch die verschiedenen Volksklassen hindurch, allgemeine Verbreitung erst dann erlangend, wenn höhere Bildung schon weit darüber hinaus gegangen ist, oder gar es als falsch erkannt hat. So muß es auch mit dem Rechnen gegangen sein in dem Lande, wo es vielleicht zuhause war.

Auf die ägyptische Herkunft der Rechenkunst weisen Volkssagen hin, welche von griechischen Schriftstellern uns aufbewahrt wurden. „Die Ägypter“, so sagt uns der eine[1]), „erzählen, sie hätten das Feldmessen, die Sternkunde und die Arithmetik erfunden.“ Ein anderer hat gehört[2]), der Gott Thot der Ägypter habe zuerst die Zahl und das Rechnen und Geometrie und Astronomie erfunden. Ein dritter[3]) führt die ganze Mathematik auf Ägypten zurück, denn dort, meint er, war es dem Priesterstande vergönnt Muße zu haben. Und wenn Josephus, sei es seinem Nationalstolze eine Genugtuung verschaffend, sei es zum Teil wenigstens der Wahrheit die Ehre gebend, behauptet, die Ägypter hätten die Arithmetik von Abraham erlernt, der sie gleich der Astronomie aus Chaldäa nach Ägypten mitbrachte, so fügt er doch hinzu, die Ägypter seien die Lehrer der Hellenen in dieser Wissenschaft gewesen[4]).

Die Frage ist nun, wie das älteste elementare Rechnen der Ägypter beschaffen war, dasjenige, welches nach unserer Auffassung auch zur Zeit des Ahmes und später noch das allgemein übliche war? Zur Beantwortung dieser Frage stehen uns teils Vermutungen, teils eine bestimmte Aussage eines zuverlässigen Berichterstatters zu Gebote, und bald auf die einen, bald auf die andere uns stützend glauben wir an ein Fingerrechnen, wissen wir von einem instrumentalen Rechnen der Ägypter.

Das Rechnen an den Fingern, nicht nur so wie es unwillkürlich das Kind schon ausführt, welches zu addierende Zahlen durch ebensoviele ausgestreckte Finger sich versinnlicht, um die Summe vor Augen zu haben, sondern unter einigermaßen künstlicher Ausbildung mit bestimmtem Werte der einzelnen Finger ist (S. 6—7) bei Völkern nachgewiesen worden, für die wir kaum mehr als die ersten Anfänge von Bildung in Anspruch nehmen dürfen. Wir wollen keinerlei Gewicht darauf legen, daß die Völker, von denen an jener Stelle die Rede war, dem Inneren und dem Süden Afrikas angehören, daß somit bei der nordsüdlichen Richtung, welche auf jenem Erdteile die Bildung eingehalten zu haben scheint, bei der geringen geistigen Begabung der Negerrassen hier ein solches Durchsickern altägyptischer

[1]) Diogenes Laertius prooem. s. 11. [2]) Platon, Phaedros pag. 274 m. [3]) Aristoteles, Metaphys. I, 1 in fine. [4]) Josephos, Antiquit. I, cap. 8, § 2.

Methoden, wie wir es eben als naturgemäß schilderten, so langsam vonstatten gegangen sein könnte, daß sie erst nach Jahrtausenden in sehr viel südlicheren Breiten ankamen. Derartige Vermutungen auszusprechen, ist nicht ohne Reiz, sie können ein vereinzeltes Mal glücken, aber sie haben darum noch keine Berechtigung. Dagegen war in Ägypten selbst in der ersten Hälfte des V. nachchristlichen Jahrhunderts die Überlieferung von einer Zahlenbedeutung des Ringfingers noch vorhanden. Allein umgebogen, während alle anderen Finger gestreckt blieben, habe er den Wert 6 dargestellt, die erste vollkommene Zahl[1]), sei darum auch selbst der Vollkommenheit teilhaftig worden und habe das Vorrecht erhalten, Ringe zu tragen[2]). Zu dieser Sage kommen noch alterhaltene Denkmäler. In einer Pariser Sammlung ägyptischer Altertümer[3]) findet sich eine rechte Hand, an welcher die zwei letzten Finger umgelegt sind. Das kann wenigstens eine Zahlenbedeutung gehabt haben. Über die Möglichkeit hinaus bis beinahe zur Gewißheit führen aber Bezeichnungen altägyptischer Ellen[4]), welche in mehreren Exemplaren vorhanden sind. Die Zahlen von 1 bis 5 sind durch die fünf Finger der linken Hand, welche allmählich vom kleinen Finger anfangend ausgestreckt werden — wenigstens wird der Daumen zuletzt ausgestreckt — dargestellt. Zur Bezeichnung der Zahl 6 dient alsdann die rechte Hand mit ausgestrecktem Daumen bei im übrigen geschlossenen Fingern, allerdings eine fast überraschende Übereinstimmung mit der oben berührten Sitte jener von links nach rechts an den Fingern zählenden Negerstämme. Dagegen dürfen wir nicht verschweigen, daß nach diesen sechs Bildern, die an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig lassen, wieder an verschiedenen Exemplaren sich bestätigend zwei weitere Bilder auftreten, jedes 4 ausgestreckte Finger ohne Daumen darstellend, welche unserer Deutung nicht ferner zu Hilfe kommen, wenn sie derselben auch nicht geradezu widersprechen. Dieser letzten Bilder wegen sahen wir uns zu dem behutsameren „beinahe“ veranlaßt, welches die Gewißheit des Fingerrechnens als durch die Fingerzahlen auf den Ellen bezeugt einschränken mußte.

Mit aller Gewißheit ist uns von dem instrumentalen Rechnen der Ägypter Nachricht zugegangen. „Die Ägypter“, so erzählt uns

[1]) Über den Begriff der vollkommenen Zahl vgl. im 6. Kapitel [2]) Macrobius, Convivia Saturnalia Lib. VII, cap. 13. [3]) Claude du Molinet, *le cabinet de la bibliothèque de St. Geneviève.* Paris 1692. Tab. 9 p. 16. Auf diese sehr interessante Andeutung hat Heinr. Stoy, Zur Geschichte des Rechenunterrichtes 1. Teil, S. 40, Note 3 (Jenaer Habilitationsschrift von 1876) zuerst hingewiesen. [4]) Die Abbildungen bei R. Lepsius, Die altägyptische Elle und ihre Eintheilung (Abhandlungen der Berliner Akademie 1865).

Herodot[1]), der Land und Leute aus eigener Anschauung genau kannte, und der stets unterscheidet, wenn er nur ihm selbst Berichtetes und nicht Erlebtes mitteilt, „schreiben Schriftzüge und rechnen mit Steinen, indem sie die Hand von rechts nach links bringen, während die Hellenen sie von links nach rechts führen.“ Diese Erzählung ist nicht mißzuverstehen. Als richtig von uns erkennbar, wo sie der hieratischen Schriftfolge der Ägypter von rechts nach links gedenkt, gewährleistet sie ein Rechnen mit Steinen mutmaßlich auf einem Rechenbrette etwa für das Jahr 460 v. Chr. Sie gewährleistet es, was wir in einem späteren Kapitel in Erinnerung bringen werden, für die Griechen mit derselben Sicherheit wie für die Ägypter.

Der Begriff des Rechenbrettes, auf welchem mit Steinen gerechnet wird, ist, wenn auch unter bedeutsamen Veränderungen, ein räumlich und zeitlich ungemein verbreiteter. Man kann das Gemeinsame desselben darin finden, daß auf irgend eine Weise unterschiedene Räume hergestellt werden, welche auf irgend eine Weise bezeichnet werden, worauf jedes Zeichen einen Erinnerungswert erhält, abhängig sowohl von dem Zeichen selbst als von dem Orte, wo es sich findet. Es ist, kann man sagen, ein mnemonisches Benutzen zweier Dimensionen.

In dieser weitesten Bedeutung kann man schon die Quipu oder Knotenschnüre der alten Peruaner[2]) dem Begriffe unterordnen. Die Schnüre waren oft von verschiedener Farbe. Die rote Schnur bedeutete alsdann Soldaten, die weiße Silber, die grüne Getreide usw., und die Knoten an den Schnüren bedeuteten, je nachdem sie einfach, doppelt, oder noch mehrfach verschlungen waren, 10, 100, 1000 usw. Mehrere Knoten nebeneinander auf derselben Schnur wurden addiert. Ähnlicher Knotenschnüre bedienten sich die Chinesen, und ihre durch Zeichnung auf Papier übertragene Gestalt bildete die oft mißverstandenen Kua's[3]). Sollen wir alten Einrichtungen, in welchen das genannte Prinzip zur Erscheinung kam, ganz neue an die Seite stellen, so haben wohl manche unserer Leser eigentümlich zurechtgeschnittene Kärtchen oder Holztäfelchen gesehen, deren man besonders in Frankreich sich bedient, um bei gewissen Spielen, die auf einem Zählen beruhen und folglich voraussetzen, daß die bei jeder einzelnen Tour erlangten Zahlen aufgeschrieben (markiert) werden, dieses Geschäft

[1]) Herodot II, 36. [2]) Pott II, S. 54. [3]) Duhalde, Ausführliche Beschreibung des chinesischen Reiches und der großen Tartarei; übersetzt von Mosheim. Rostock 1747 Bd. II, S. 338. Ferner vgl. *Le Chouking un des livres sacrés chinois traduit par le P. Gaubil revu et corrigé par M. de Guignes.* Paris 1770, an sehr verschiedenen Stellen, die im Register s. v. Koua zu entnehmen sind; die Abbildung S. 352.

durch Umklappen betreffender Abteilungen zu besorgen[1]). Wirkliche Rechenbretter sind freilich jene Schnüre und Kärtchen noch nicht.

Das Rechenbrett im engeren Sinne des Wortes setzt voraus, daß der Wert, welchen eine einheitliche Bezeichnung, sei es ein Strich oder ein Steinchen oder was auch immer, an unterschiedenen leicht erkennbaren Stellen erhält, sich nach den aufeinanderfolgenden Stufen des zugrunde gelegten Zahlensystems verändert, daß also im Dezimalsysteme bei wagrechter oder senkrechter Anordnung der Reihen, in welchen die Steinchen gelegt werden, jedes solches Steinchen einer Verzehnfachung unterworfen wird, sofern es von einer Horizontalreihe, beziehungsweise von einer Vertikalreihe, in die benachbarte Reihe gleicher Art verschoben wird. Nur bei Horizontalreihen kann ein Hinauf- oder Herunterrücken, nur bei Vertikalreihen eine Verrückung nach rechts oder nach links diese Wirkung üben, und diese auf der Hand liegende Notwendigkeit lehrt uns der erwähnten Äußerung Herodots den Beweis entnehmen, daß die Griechen wie die Ägypter sich Rechenbretter mit senkrechten Reihen bedienten. Wie wir die Wertfolge dieser senkrechten Reihen uns zu denken haben, ob in dem Ausspruche Herodots auch darüber nicht mißzuverstehende Andeutungen enthalten sind oder nicht, das ist eine Frage höchst untergeordneter Bedeutung gegenüber von der gegen den Rechner senkrechten Gestalt der Reihen, die von geschichtlich großer Tragweite sich erweisen wird. Es ist klar, daß bei einem eigentlichen Rechenbrette auf dekadischer Grundlage in jeder Reihe höchstens 9 Steinchen Platz finden können, da deren 10 durch 1 Steinchen in der folgenden Reihe ersetzt werden mußten. Danach ist wohl nicht ganz mit Recht zur festeren Begründung der Tatsache, daß die Ägypter eines Rechenbrettes sich bedienten, auf eine alte Zeichnung Bezug genommen worden. Auf einem bekannten Papyrus hat sich eine Rechnung aus der Zeit des Königs Menephtah I.[2]) erhalten, bei welcher die nachfolgende Fig. 6 abgebildet ist[3]). Der erste Anblick scheint ja dafür zu sprechen, daß ein Rechenbrett mit seinen Steinchen dargestellt werden sollte, wenn nicht der Umstand, daß wiederholt 10 Pünktchen in einer Vertikalreihe (ebenso wie auch

[1]) Auf die Analogie solcher Zählkärtchen zu Rechenbrettern hat wohl zuerst Vincent in der *Revue archéologique* III, 204 hingewiesen. [2]) Er gehörte der XIX. Dynastie an und regierte Lepsius zufolge 1341 bis 1321. Nach Steindorff umfaßte die ganze XIX. Dynastie die Zeit von 1350 bis 1200. [3]) Die Figur stammt von der Rückseite des Papyrus Sallier IV. Aufsätze über den begleitenden Text von Goodwin (Zeitschrift für ägyptische Sprache und Alterthumskunde, Jahrgang 1867 S. 57 flgg.) und von De Rougé (ebenda Jahrgang 1868 S. 129 flgg.) enthalten kein Wort über die Figur.

in einer Horizontalreihe) auftreten, die bedenklichsten Zweifel wachrufen müßte. Abbildungen von Rechnern finden sich unter den fast unzähligen ägyptischen Wandgemälden unseres Wissens nicht. Man stößt wiederholt auf Leute, die sich mit dem Moraspiele beschäf-

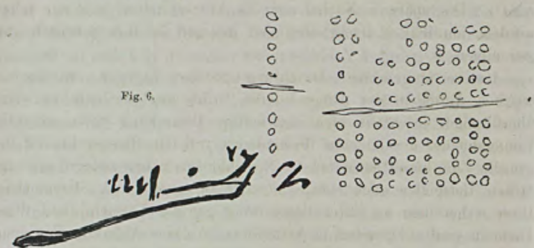
Fig. 6.

tigen[1]) und zu diesem Zwecke Finger beider Hände in die Höhe heben, aber weder das Fingerrechnen, noch das Tafelrechnen scheint veröffentlichende Wiedergabe gefunden zu haben, dürfte also wohl kaum auf bisher entdeckten Gemälden erkannt worden sein.

3. Kapitel.

Die Ägypter. Geometrisches.

Wir kehren zu dem Papyrus des Ahmes zurück. Er hat sich als unschätzbare Fundgrube nicht bloß für die Kenntnis des algebraischen Wissens der Ägypter bewährt, auch vieles andere hat aus ihm geschöpft werden können, worüber hier, wenn auch nicht in gleicher Ausführlichkeit aller Berichte, gesprochen werden muß. Nur mit kurzen Worten können wir das Metrologische berühren. Die vergleichende Untersuchung der Maßsysteme, welche den einzelnen Völkern des Altertums gedient haben, ist gewiß ein Gegenstand von hoher Wichtigkeit und auch dem Mathematiker bis zu einem gewissen Grade sympathisch, allein wie wir Astronomisches von unserer Aufgabe ausgeschlossen haben, so auch verwahren wir uns gegen die Verpflichtung Metrologisches aufzunehmen. Wir müssen uns daran genügen lassen im Vorübergehen zu bemerken, daß nicht bloß die Rechnungsbeispiele vielfache Angaben enthalten, aus welchen das Ver-

[1]) Wilkinson, *Manners and customs of the ancient Egyptians.* London 1837. Vol. I pag. 44 fig. 3 und Vol. II pag. 417 fig. 292.

hältnis der ägyptischen Maße in nicht anzuzweifelnder weil durch allzu zahlreiche Beispiele zu prüfender Gewißheit sich ergeben hat, daß sogar in zwei aufeinanderfolgenden Paragraphen, Nr. 80 und 81, die Umrechnung von einem Maßsysteme in ein anderes geradezu gelehrt wird[1]). Die späteren Nachahmer des Ahmes haben, wie wir sehen werden, ähnliche Maßvergleichungen jederzeit in ihre Schriften aufgenommen.

Unsere eingehendste Beachtung gebührt dagegen den geometrischen Aufgaben des Ahmes, deren Erörterung wir eine vielleicht überflüssige, jedenfalls nicht unwichtige Bemerkung vorausschicken. Übungsbücher der höheren Rechenkunst von der ältesten bis auf die neueste Zeit herab enthalten fast ausnahmslos neben anderen mannigfachen Beispielen auch solche aus der Geometrie und Stereometrie. Diese erheischen zu ihrer Berechnung gewisse Formeln, und diese Formeln sind als gegeben zu betrachten. An eine Ableitung derselben zu denken, oder gar weil die Ableitung nicht mitgeteilt ist zu argwöhnen, es habe eine solche überhaupt nicht gegeben, als das Übungsbuch verfaßt wurde, fällt niemand ein. Wir dürfen dem Handbuche des Ahmes mit keiner Anforderung gegenübertreten, die wir sonst unbillig fänden. Wenn Ahmes sich geometrischer Regeln bedient, so müssen wir auch zu ihm das Zutrauen haben, er werde sie irgendwoher genommen haben, wo auch seine Schüler sich Rats erholen konnten, wir werden also an ein anderes geometrisches Buch glauben, das uns unmittelbar nicht bekannt ist, dessen einstmaliges Vorhandensein aber gerade durch jene Formeln mittelbar erwiesen ist, gleichwie die Formeln für Summierung arithmetischer und vielleicht geometrischer Reihen, deren Ahmes sich bedient, uns einen Rückschluß auf in seinem Papyrus übergangene Ableitungsverfahren gestatteten.

Die geometrischen Beispiele des Ahmes lassen zunächst den Flächenraum von Feldstücken finden, deren einschließende Seiten gegeben sind. Solcher Aufgaben konnte man am ersten von einem ägyptischen Schriftsteller sich versehen, da, wie wir weiter unten zu zeigen haben, gerade die eigentliche Feldmessung in Ägypten zuhause gewesen sein soll. Damit ist aber freilich nicht gesagt, daß jede Feldmessung von vornherein eine geometrische gewesen sein muß.

Mag die Notwendigkeit die Gleichwertigkeit oder Ungleichwertigkeit von Feldstücken zu schätzen mit den ersten Streitigkeiten über das Mein und Dein des urbar gemachten Bodens, also mit der Einführung individuellen Grundbesitzes sich ergeben haben, diese Wertvergleichung konnte in mannigfacher Weise erfolgen. Man konnte

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 204—211.

die Zeit messen, welche zur Bebauung eines Feldstückes nötig war, das Getreide wägen, welches auf demselben wuchs oder zur Einsaat in dasselbe zu verwenden war, und unsere deutschen Benennungen Morgen[1]) und Scheffel[2]) als Feldmaße sind Zeugnisse dafür, daß man solche Methoden nicht immer verschmäht hat. Dem Wunsche einer Feldervergleichung mag in anderen Gegenden die Sitte entsprungen sein, den einzelnen Äckern stets die gleiche Form, die gleiche Größe zu geben, und ein weiterer Schritt auf diesem Wege der Geistesentwicklung war es, wenn man der Gestalt der Äcker entsprechend Flächenmaße einführte, die, soviel uns bekannt ist, nirgend eine andere Figur darstellten als die eines Vierecks mit vier rechten Winkeln und in einem einfachen Zahlenverhältnisse zueinander stehenden, wenn auch nicht notwendig gleichen Seiten, wiewohl an sich ein dreieckiges Maß z. B. ebensogut zu denken war. Auch aus Ägypten wird uns allerdings aus der verhältnismäßig späten Zeit von mindestens drei Jahrhunderten nach Ahmes ähnliches gemeldet. Herodot erzählt[3]), der König Sesostris habe die Äcker verteilt und jedem ein gleich großes Viereck überwiesen, auch danach die jährliche Abgabe bestimmt. Sesostris ist niemand anders als König Ramses II. aus der XIX. Dynastie, der etwa 1324 bis 1258 lebte.

Aber eine irgendwie gestaltete Bodenfläche als Raumgebilde zu betrachten, sie unmittelbar aus ihren Grenzlinien messen zu wollen, das setzte schon geradezu mathematische Gedanken voraus, das war selbst eine mathematische Tat. In Ägypten hat man diese Tat vollzogen, wenn nicht zuerst vollzogen, und im Gefolge dieser Tat muß notwendig eine mehr oder weniger entwickelte Kenntnis der Eigenschaften der verschiedenartigen Figuren, gewissermaßen eine theoretische Geometrie, entstanden sein, mag auch für lange Zeit nur die praktische Feldmessung ihr eigentliches Endziel gewesen sein.

Die Feldstücke, welche Ahmes ausmessen läßt, sind geradlinig oder kreisförmig begrenzt, und die ihrer Genauigkeit nach nicht ganz aus freier Hand, sondern mit Benutzung eines Lineals aber ohne Zirkel angefertigten Figuren lassen deutlich erkennen, daß an geradlinigen Figuren nur gleichschenklige Dreiecke, Rechtecke und gleichschenklige Paralleltrapeze in Betracht gezogen werden sollen.

Das Rechteck bietet in seiner Ausrechnung am wenigsten Ausbeute. Es ist mehr als nur wahrscheinlich, daß, wie die Fläche des Quadrates von 10 Einheiten im Beispiele No. 44. zu 100 Flächen-

[1]) Pott I, S. 124. [2]) R. Lepsius, Ueber eine hieroglyphische Inschrift am Tempel von Edfu (Abhandlungen der Berliner Akademie 1855) S. 77. [3]) Herodot II, 109.

einheiten erkannt war[1]), auch bei ungleichen Seiten des Rechtecks eine Vervielfältigung der beiden Ausmessungen stattfinden mußte, aber das Beispiel No. 49., welches auf ein Rechteck von 10 Ruten zu 2 Ruten Bezug hat, läßt solches nicht erkennen, da wie es scheint durch ein Versehen des Ahmes zu dieser Aufgabe die Auflösung einer ganz anderen sich gesellt hat[2]).

Ein gleichschenkliges Dreieck von 10 Ruten an seinem Merit, von 4 Ruten an seinem Tepro bildet den Gegenstand des Beispiels No. 51. Die Hälfte von 4 oder 2 wird mit 10 vervielfältigt. „Sein Flächeninhalt ist es"[3]). Auffallend ist hier die Lage des beigezeichneten gleichschenkligen Dreiecks, auffallend sind die gebrauchten Kunstausdrücke, nicht am wenigsten auffallend ist die Rechnung. Während wir die Gewohnheit haben die Figuren dem sie Anschauenden so symmetrisch als möglich vorzulegen, also bei einem gleichschenkligen Dreiecke die eine ungleiche Seite als Grundlinie unten, die beiden gleichen Schenkel nach aufwärts gerichtet zu zeichnen, hat Ahmes die Strecke 4 vertikal gezeichnet und von deren Endpunkten aus die beiden gleichen Schenkel in der Länge 10 gegen die Richtung der Schriftzeilen, also mit der Spitze nach rechts, zusammentreffen lassen. Die Seite von 4 Ruten heißt ihm, wie schon angeführt, Tepro, die von 10 Ruten Merit. Tepro oder der Mund für die Weite der Entfernung der Endpunkte zweier an der Feder des Schreibenden vereinigten, von da aus sich öffnenden Geraden ist einleuchtend. Ob aber der Name Merit oder der Hafen auf die Gleichheit der beiden anderen Schenkel, ob er auf die durch die Zeichnung gegebene Lage als obere Linie der Figur, als Scheitellinie sich beziehen soll, kann als ausgemacht hier wenigstens nicht gelten, da weder die eine noch die andere Beziehung eine Erklärung der Wahl gerade dieses Wortes liefert. Wir werden indessen später sehen, daß vermutlich die Scheitellage mit Merit bezeichnet werden soll. Rücksichtlich der Figur haben wir noch zu bemerken, daß in No. 51. wie in anderen Aufgaben die Zahlen, welche die Längen der auftretenden Strecken messen, an diese, der Inhalt mitunter in die Figur geschrieben erscheint. Das Rechnungsverfahren besteht darin, daß, wenn wir den Dreiecksinhalt $\triangle$, die Dreiecksseiten a, a, b nennen wollen, hier

$$\triangle = \frac{b}{2} \times a$$

gesetzt ist. Das ist nun allerdings nicht richtig; es müßte vielmehr

$$\triangle = \frac{b}{2} \times \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 110. [2]) Ebenda S. 122 bis 123. [3]) Ebenda S. 125.

heißen, aber mehrere Dinge fordern unsere Überlegung heraus. Einmal hat man unter der Annahme, die Figuren seien grundfalsch gezeichnet, und die Dreiecke seien nicht als gleichschenklige, sondern als rechtwinklige aufzufassen[1]), die bei Ahmes geführte Rechnung in Schutz genommen; der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks sei in der Tat das halbe Produkt der beiden Katheten. Kann man sich mit uns nicht entschließen, die mit dem Lineal gezeichneten Figuren für so falsch zu halten, so ist erstlich zu erwägen, daß die Ausziehung einer Quadratwurzel bei Ahmes nirgend vorkommt; zweitens dann auch, daß der Fehler, welcher begangen wird, sofern b gegen a nur einigermaßen klein ist, kaum in Anschlag kommt. Im Beispiele No. 51. ist die Dreiecksfläche mit 20 Quadratruten angesetzt. Der richtige Wert ist fast genau 19,6 Quadratruten. Der Fehler beträgt nicht mehr als 2 Prozent. Dieses dürfte, natürlich nicht dem Ahmes und seiner Zeit, aber einer späteren Nachkommenschaft wohl als genügende Entschuldigung erschienen sein an einem Verfahren festzuhalten, welches in der Rechnung so ungemein bequem und leicht, im Ergebnis kaum als falsch zu bezeichnen war. Wenn der ägyptische Feldmesser, wie wir in diesem Kapitel noch sehen werden, selbst anderthalb Jahrtausende nach Ahmes sich der altfränkische Flächenformel fortwährend bediente, so konnte er der nicht ganz unbegründeten Meinung sein sich ihrer bedienen zu dürfen.

Die vorhin ausgesprochene Behauptung, eine Quadratwurzel komme bei Ahmes nicht vor, ist nicht in dem Sinne zu verstehen, als sei der Begriff der Quadratwurzel den Ägyptern überhaupt fremd gewesen. Höchstens kann man Zweifel darein setzen, ob die Ägypter mit irrationalen Quadratwurzeln umzugehen wußten. Die erste ägyptische Quadratwurzel ist in den in London befindlichen Fragmenten von Kahun aufgefunden worden. Ihr Zeichen ist ein rechter Winkel, dessen horizontaler Schenkel beträchtlich länger als der links vertikal nach unten sich erstreckende Schenkel ist. Wie das Zeichen auszusprechen ist, erscheint fraglich. Während einige Ägyptologen die Aussprache *tm* für richtig halten, entscheiden sich andere für *knb*, beidemal unter Verzicht auf die Bestimmung der noch einzuschaltenden Selbstlaute. Für *knb* spricht, daß dieses Wort durch „Winkel" oder „Ecke" zu übersetzen ist, was mit der Gestalt des Zeichens im Einklang steht[2]). Benutzen wir diese Lesung, so ist die von der Zahl 40 ausgehende und ihrem mathematischen Zwecke nach noch unverstandene Rechnung folgende: $3 \times 40 = 120$, $120 : 10 = 12$,

[1]) M. Simon, Über die Mathematik der Ägypter im Anschlusse an E. Revillout. [2]) Briefliche Mitteilung des Grafen H. Schack-Schackenburg.

$1 : \frac{3}{4} = 1\frac{1}{3}$, $12 \times 1\frac{1}{3} = 16$; suche davon den *knb*, er ist 4. Man sieht deutlich, daß *knb* oder wie das Wort ausgesprochen worden sein mag, nur Quadratwurzel bedeuten kann.

Eine willkommene Bestätigung lieferte der Papyrus 6619 des Berliner Museums[1]), welcher gleichfalls in Kahun gefunden worden ist und der Zeit nach dem mittleren Reiche entstammt, zu welchem auch die Regierung der Amenemhate gehört. In ihm ist der *knb* von $1\frac{9}{16}$ als $1\frac{1}{4}$, der *knb* von $6\frac{1}{4}$ als $2\frac{1}{2}$ angegeben, während $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$, $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ ist. Die Berliner Fragmente haben vor den Londoner Fragmenten den großen Vorzug, daß man in ihnen deutlich erkennt, was der Sinn der angestellten Rechnung war. Eine gegebene Fläche, etwa von der Größe von 100 Flächeneinheiten, soll als Summe zweier Quadrate dargestellt werden, deren Seiten sich wie 1 zu $\frac{3}{4}$ verhalten. In Buchstaben lautet also die Aufgabe:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$x : y = 1 : \frac{3}{4} \quad \text{oder} \quad y = \frac{3}{4}x.$$

Die Auflösung erfolgt nach der Methode des falschen Ansatzes und bestätigt mithin was wir (S. 79) zu No. 40. des Handbuches des Ahmes über die Bekanntschaft der Ägypter mit dieser Methode gesagt haben. Versuchsweise wird $x = 1$, $y = \frac{3}{4}$ gesetzt, wodurch $x^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ entsteht, und $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$. Aber $\sqrt{100} = 10$ und $10 : \frac{5}{4} = 8$. Die nicht mehr zu entziffernde Fortsetzung wird vermutlich gelautet haben: also ist richtig $x = 8 \times 1 = 8$, $y = 8 \times \frac{3}{4} = 6$.

Eine andere Aufgabe auf einem kleineren Fragmente des Berliner Papyrus läßt mit Sicherheit die Gleichung $\sqrt{6\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}$ erkennen. Aus anderen auf diesem kleinen Fragmente vorkommenden Zahlen hat man geschlossen, hier sei die Aufgabe gestellt gewesen, 400 in zwei Quadrate zu zerlegen, deren Seiten sich wie 2 zu $1\frac{1}{2}$ verhalten. In Buchstaben lautet diese Aufgabe:

$$x^2 + y^2 = 400$$

$$x : y = 2 : 1\frac{1}{2}.$$

[1]) H. Schack-Schackenburg, Der Berliner Papyrus 6619. Zeitschrift für ägyptische Sprache Bd XXXVIII (1900) und XL (1902).

Danach wird $x^2 : y^2 = 4 : 2\frac{1}{4}$, und mittels des versuchsweisen Ansatzes $x^2 = 4$, $y^2 = 2\frac{1}{4}$ entsteht $x^2 + y^2 = 6\frac{1}{4}$. Aber $\sqrt{6\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}$ und $\sqrt{400} = 20$ nebst $20 : 2\frac{1}{2} = 8$. Mithin ist $x = 8 \times 2 = 16$, $y = 8 \times 1\frac{1}{2} = 12$ und $16^2 + 12^2 = 20^2$.

Sind alle diese Vermutungen richtig, worauf ihr geistiger Zusammenhang schließen läßt, so enthüllen sich als den Ägyptern des mittleren Reiches bekannt die beiden Gleichungspaare

$$1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2 \quad \text{und} \quad 8^2 + 6^2 = 10^2$$

$$2^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(2\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad 16^2 + 12^2 = 20^2.$$

Es ist unverkennbar, daß hier

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

zugrunde liegt, wenn auch diese Gleichung selbst nicht vorkommt. Es ist möglich, daß sie auf einem verlorengegangenen Papyrusfragmente stand, es ist auch möglich, daß sie so allgemein bekannt war, daß man sich damit begnügte, nur solche Fälle zur Rede zu bringen, die aus der als selbstverständlich vorausgesetzten Grundformel sich herleiteten. Wir möchten bitten diese ganze Untersuchung, welche ihrem algebraischen Inhalte nach schon in das vorige Kapital gehören könnte, nicht als hier an unrichtigem Platze stehend bemängeln zu wollen. Sind doch die behandelten quadratischen Gleichungen aus geometrischen Aufgaben entsprungen.

Die Dreiecksformel $\triangle = \frac{b}{2} \times a$ einmal vorausgesetzt ließ mit mathematischer Strenge eine zweite Formel für die Fläche eines gleichschenkligen Paralleltrapezes folgen, welche Figur allerdings von anderen als rechtwinkliges Paralleltrapez gedeutet wird. Waren dessen beide unter sich gleiche nicht parallele Seiten je a, die parallelen Seiten b_1 und b_2, so mußte die Fläche

$$\frac{b_1 + b_2}{2} \times a$$

sein, und dies ist die Formel, nach welcher in No. 52. die Rechnung geführt ist[1]). Sie setzt nur voraus, daß das Trapez als abgeschnittenes Dreieck beziehungsweise als Unterschied zweier Dreiecke entstanden gedacht ist, und mit dieser Entstehungsweise stimmt die Zeichnung wie die Benennung der einzelnen Strecken überein. Wieder liegt

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 127—128.

das Trapez so, daß ein a Scheitellinie ist und den Namen Merit führt; wieder heißt die größere links befindliche Parallele Tepro; und die kleinere Parallele, welche rechts vertikal die Figur abschließt, führt den unsere Voraussetzung bestätigenden Namen Hak oder Abschnitt.

Wir müssen, um nicht mißverstanden zu werden, hier eine kleine Bemerkung einschalten. Wir sagten, die Formel für die Fläche des gleichschenkligen Paralleltrapezes folge mit mathematischer Strenge aus $\triangle = \frac{b}{2} \times a$. Wir meinen das nicht etwa so, daß wir Ahmes das Bewußtsein dieser Folgerung zutrauten. Die alten Ägypter werden wohl eine vollständige Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren, welche zur Führung des Beweises für den Zusammenhang der beiden Inhaltsformeln unentbehrlich ist, kaum besessen haben. Ihnen war vielleicht ein enger Zusammenhang der beiden Formeln, welche sie selbständig für richtig hielten, nie in Gedanken gekommen. Nur den späten Nachkommen soll mit jener Ableitbarkeit der Trapezformel aus der Dreiecksformel wieder eine Entschuldigung dafür verschafft werden, daß sie im einen Falle so wenig als im anderen von der Gewohnheit der Väter abwichen.

Die im Papyrus sich nun anschließenden Aufgaben[1]) No. 53., 54., 55. beziehen sich auf die Teilung von Feldern, stimmen aber mit der einzigen beigegebenen Figur so absolut nicht überein, daß wir ein Erraten der eigentlichen Meinung des Verfassers für ein sehr schwieriges Problem halten, dessen Lösung noch nicht gelungen ist. Von Interesse dürfte, falls die Enträtselung überhaupt möglich ist, die Richtung des in der Figur gezeichneten Dreiecks sein, dessen Spitze nach links hin steht, während sie in den früheren Beispielen rechts war. Außerdem werden sicherlich die zwei vertikal gezogenen Parallelen von Wichtigkeit sein, welche das ursprüngliche Dreieck in ein Dreieck und zwei Paralleltrapeze zerlegen.

Die Ausmessung des Kreises wird schon in No. 50. vorgenommen[2]). Sie ist eine wirkliche Quadratur zu nennen, indem sie lehrt ein Quadrat zu finden, welches dem Kreise flächengleich sei, und zwar wird als Seite des Quadrates der um $\frac{1}{9}$ seiner Länge verminderte Kreisdurchmesser gewählt. Wie man zu dieser Vorschrift gekommen sein mag ist nicht entfernt zu erraten. Gesichert ist sie durch wiederholtes Auftreten, gesichert ist auch ihre ziemlich gute Anwendbarkeit, denn sie entspricht einem Werte

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 130—133. [2]) Ebenda S. 124, vgl. aber auch die Aufgaben No. 41., 42., vielleicht 43., endlich 48. auf S. 100—109 und S. 117.

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604\ldots.$$

für die Verhältniszahl der Kreisperipherie zum Durchmesser, der weitaus nicht der schlechteste ist, dessen Mathematiker sich bedient haben.

Neben den geometrischen Aufgaben hat Ahmes seinen Lesern auch stereometrische vorgelegt. Es handelt sich dabei um den **Rauminhalt von Fruchtspeichern** und deren Fassungsvermögen für Getreide[1]). Diese Aufgaben stehen noch vor den eben besprochenen geometrischen und geben dadurch deutlich zu erkennen, was wir einleitend in diesem Kapitel berührt haben: daß das Geometrische im Übungsbuche des Ahmes niemals selbst Zweck der Darstellung, sondern nur Einkleidungsform von Rechenaufgaben ist, denn sonst würde unmöglich die Flächenausmessung des Kreises später erscheinen als die Berechnung des Rauminhaltes eines runden Fruchthauses, bei welcher jene bereits Anwendung findet. In diesen körperlichen Inhaltsaufgaben ist manches noch unklar. Die eigentliche Gestalt der Fruchthäuser, welche der Berechnung unterworfen werden, ist nichts weniger als genau bekannt, und wenn auch bienenkorbartige Zeichnungen von Fruchthäusern in ägyptischen Wandgemälden etwas zur Verdeutlichung beitragen, sie genügen keineswegs, so lange eine geometrische Interpretation jener Zeichnungen fehlt. Soll der Bienenkorb als Halbkugel auf einen Zylinder aufgesetzt, soll er als eine Art von Umdrehungsparaboloid gedacht sein? Ist seine Grundfläche überhaupt kein Kreis sondern eine Ellipse? Das sind Fragen, deren Beantwortung aus den genannten Abbildungen nicht entnommen werden kann und doch auf die Rechnungsweise einen entscheidenden Einfluß ausüben muß. Hier ist also wieder zukünftiger Forschung noch manches Rätsel aufbewahrt, kaum zu lösen, wenn es nicht gelingt, weiteres Material aufzufinden. Bis dahin besteht der Vorteil, den wir aus diesen Beispielen zu ziehen vermögen, nur in den von uns schon angerufenen Bestätigungen der gewonnenen Ansichten über Inhaltsbestimmung des Rechteckes und des Kreises und in der Kenntnisnahme von Wörtern, welche den Ägyptologen auch sonst mannigfach begegnet sind. Eine der Abmessungen, welche bei den Fruchthäusern in Rechnung treten, heißt nämlich Qa, eigentlich die Höhe, wofür auch die Hieroglyphe — ein den Arm hochstreckender Mann — zeugt, dann aber in zweiter abgeleiteter Bedeutung die Richtung größter Ausdehnung[2]); die Breite, beziehungsweise die

[1]) **Eisenlohr, Papyrus** S. 101—116. [2]) Diese abgeleitete Bedeutung hat **Brugsch** erkannt: Hieroglyphisch-demotisches Wörterbuch S. 1435 und deutlicher

kleinere Abmessung, heißt Useχ. Nennen wir diese beiden Abmessungen q und u, so erfolgt in No. 43. die Berechnung des Inhaltes nach der Regel, daß erst ein $q_1 = \left(1 - \frac{1}{9}\right) q$ gebildet wird und dann $\left(\frac{4}{3} q_1\right)^2 \cdot \frac{2}{3} u$. Auch hier ist wieder eine interessante Übereinstimmung mit den Fragmenten von Kahun nachzuweisen. Dort ist nämlich ausgehend von bestimmten Zahlen $q_1 (= 12)$ und $u (= 8)$ die Rechnung $\left(\frac{4}{3} q_1\right)^2 \cdot \frac{2}{3} u = \left(\frac{4}{3} \cdot 12\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 = 256 \cdot 5\frac{1}{3} = 1365\frac{1}{3}$ vollzogen, und letztere Zahl steht im Inneren einer gezeichneten Rundung, über welcher die Zahlen 8 und 12 angebracht sind. Wenn man versucht hat[1]), in der Rechnung des Kahuner Fragmentes die Inhaltsberechnung einer Halbkugel vom Durchmesser 8 zu erkennen und dabei eine Anwendung des Wertes $\pi = 3{,}2$ fand, so kann schon diese letztere Behauptung als Gegengrund gegen den jeder unmittelbaren Stütze entbehrenden Versuch genügen. Bei der soeben nachgewiesenen wenigstens teilweisen Übereinstimmung mit No. 43. des Ahmes müßte auch von diesem einmal $\pi = 3{,}2$ in Anwendung gebracht worden sein, während alle anderen Beispiele $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ benutzen, und das erscheint durchaus unglaublich.

Endlich bietet der Papyrus noch eine Gruppe von 5 geometrischen Aufgaben[2]), No. 56. bis 60., welche dem heutigen Leser am überraschendsten sein dürften, wenn er in ihnen die Vergleichung von Liniengrößen erkennt, soweit sie zu einem und demselben Winkel gehören, also eine Art von **Ähnlichkeitslehre**, wenn nicht ein Kapitel aus der Trigonometrie. Es handelt sich um Pyramiden, aber keineswegs um deren körperlichen Inhalt, sondern um den Quotienten der Hälfte einer an der Pyramide vorgenommenen Abmessung geteilt durch eine zweite, und dieser Quotient heißt Seqt, nach aller Wahrscheinlichkeit eine kausative Ableitung von Qet, Ähnlichkeit, also wohl Ähnlichmachung. Was das aber für Abmessungen an den Pyramiden waren, die so in Rechnung gezogen wurden, war von vornherein aus den bloßen Namen **Uchatebt**, Suchen der Fußsohle, und **Piremus**, Herausgehen aus der Säge, keineswegs klar. Der Uchatebt mußte zwar offenbar irgendwo am Boden, der Piremus (dessen Name augenscheinlich in dem Munde der Griechen zum Namen des ganzen Körpers wurde)[3]), irgendwo ansteigend gesucht werden, aber

betont in der Zeitschrift für ägypt. Sp. u. Alterth. (Jahrgang 1870) Bd. VIII, S. 160. Vgl. auch **Eisenlohr, Papyrus** S. 280. [1]) **L. Borchardt** in der Zeitschr. für ägypt. Sprache Bd. XXXV, S. 150 (1897). [2]) **Eisenlohr, Papyrus** S. 134—149. [3]) Eigentlich sollte man daher die Orthographie „Piramide“ der „Pyramide“ vor-dabei gab es noch immer eine gewisse Auswahl. Die richtige Wahl zu treffen gelang dem Herausgeber des Papyrus, nachdem er den glücklichen Gedanken gefaßt hatte, den Umstand zu berücksichtigen, daß die noch erhaltenen großen ägyptischen Pyramiden wesentlich gleiche Winkel besitzen (S. 57), und daß Ahmes wohl auch ihnen ähnliche Körper bei seinen Rechnungen gemeint haben muß. Der von Ahmes errechnete Seqt muß also einem Winkel von etwa 52° zwischen der Seitenwand und der Grundfläche des Körpers entsprechen, und das findet nur dann statt, wenn der Piremus die Kante der Pyramide, der Uchatebt die Diagonale der quadratischen Grundfläche bedeutet, wenn also der Seqt das war, was wir gegenwärtig den Kosinus des Winkels nennen, den jene beiden Linien miteinander bilden. War die Größe dieses Verhältnisses Seqt bekannt, so kannte man damit auch die Winkel, welche an der Pyramide sich zeigen. Man kannte sie freilich nur mittelbar, aber mittelbar ist auch jede andere Ausmessung von Winkeln, ist auch die nach Graden und Minuten, welche zunächst nicht dem Winkel selbst, sondern dem Kreisbogen gilt, der ihn als Mittelpunktswinkel gedacht bespannt. Diese bisherige Auseinandersetzung gilt allerdings nur für die 4 ersten Aufgaben der Gruppe. In der 5. Aufgabe, No. 60., ist nicht von einer Pyramide, sondern von einem Grabmale die Rede, welches viel steiler als die Pyramide, mit der es die quadratische Gestalt der Grundfläche übrigens teilt, sich zuspitzt. Die durcheinander zu teilenden Strecken heißen hier ganz anders. Als Zähler ist Qaienharu, als Nenner die Hälfte des Senti angegeben, und das müssen doch wohl andere Linien sein als diejenigen, welche die Namen Uchatebt und Piremus führten. Insbesondere die Verwandtschaft zwischen Qaienharu und dem (S. 98) erwähnten Qa nötigt dazu, diesen Zähler als die senkrechte Höhe der Pyramide zu deuten. Vielleicht ist folgender Erklärungsversuch gestattet.

Man weiß, daß die ägyptischen Pyramiden zunächst staffelförmig mit parallelepipedischen, aufeinander ruhenden, sich verjüngenden Stockwerken angelegt wurden, und daß dann erst die Ausfüllung der Winkelräume bis zur Herstellung einer glatten Oberfläche erfolgte. Dem Arbeiter machte die Herstellung dieser Ausfüllsteine zuverlässig am meisten Schwierigkeit, und es wäre keineswegs unmöglich, daß der Baumeister, um seinem Arbeiter die Aufgabe zu erleichtern, Mo-

ziehen, und wir bedienen uns in diesem Werke der landläufigen Schreibart nur mit dem Bewußtsein ihrer Mangelhaftigkeit. Beiläufig sei bemerkt, daß Piremus von anderen Ägyptologen, z. B. Brugsch als Heraustreten aus der Breite übersetzt worden ist. Uns steht ein Urteil über die Richtigkeit der einen oder der anderen Übersetzung nicht zu.

delle hätte anfertigen lassen. Deren brauchte man aber zwei, von der in Fig. 7a und 7b gezeichneten Gestalt. Das einfachere Modell (Fig. 7a) diente zur Ausfüllung der Breitseiten, das andere (Fig. 7b), an der Ebene DCF mit einem symmetrisch gleichen zusammentreffend, diente die Ecken zu bilden, beide Modelle paßten mit der Ebene DCE aneinander. Das zweite Modell stellt sich als achter Teil einer der großen Pyramide ähnlichen Modellpyramide dar; dabei ist DF die Kante, DC die senkrecht von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Höhe, CF die halbe Diagonale der Grundfläche, EF und die ihr gleiche CE [$\sphericalangle CEF = 90^0$, $\sphericalangle CFE = 45^0$, also auch $\sphericalangle ECF = 45^0$ und $EF = CE$] die halbe Seite der quadratischen Grundfläche. Bei dem ersten Modell kommt es wesentlich auf $\sphericalangle DEC$ an, bei dem zweiten auf eben diesen und auf $\sphericalangle DFC$; folglich genügte auch das zweite Modell allein, um beide Arten von Ausfüllsteinen nach ihm behauen zu können.

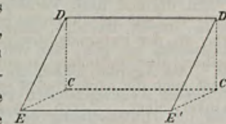

Fig. 7a.

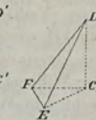

Fig. 7b.

Nennen wir nun die vier erwähnten Längen, beziehungsweise ihre Verdoppelung, $DF = $ *pir em us*, $DC = $ *qai en haru*, $2CF = $ *uχa tebt*, $2CE = $ *senti*, so treten alle vier an einem Raumgebilde auf und müssen naturgemäß selbständige Namen führen. Seqt aber „die Verhältniszahl" ist in der einen Ebene $\frac{\frac{1}{2}\,\textit{uχa tebt}}{\textit{piremus}} = \frac{CF}{DF} = \cos DFC$, in der anderen Ebene $= \frac{\textit{qai en haru}}{\frac{1}{2}\,\textit{senti}} = \frac{CD}{CE} = \operatorname{tng} DEC$. Allerdings würde diese Hypothese die zweite in sich schließen, daß das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck CEF als solches erkannt gewesen wäre.

Auch hier hat man eine andere Erklärung vorgeschlagen[1]) und den *seqt* als Kotangente des Böschungswinkels DEC (Fig. 7c), also als $\frac{EC}{DC}$ aufgefaßt, indem die Höhe DC bald *pir em us* bald *qai en haru* und die Grundlinie $AB = 2CE$ bald *ucha tebt* bald *senti* genannt worden sei.

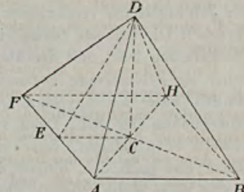

Fig. 7c.

Haben wir nun die Geometrie der Ägypter, soweit sie aus den Rechnungsbeispielen des Ahmes rückwärts erschlossen werden kann,

[1]) Revillout in der Revue égypt. II, 308 flgg. und G. Borchardt, Wie wurden die Böschungen der Pyramiden bestimmt? in der Zeitschr. f. ägypt. Sprache XXXI, 9—17 (1893).

erörtert, so beabsichtigen wir in ähnlicher Weise, wie es für die Rechenkunst geschehen ist, zu sammeln, was die Überlieferung insbesondere griechischer Schriftsteller, was auch sonstige Denkmäler zur Ergänzung uns bieten. Herodot erzählt[1]), wie schon oben teilweise verwertet worden ist, Sesostris (also Ramses II.) habe das Land unter alle Ägypter so verteilt, daß er jedem ein gleich großes Viereck gegeben und von diesem seine Einkünfte bezogen habe, indem er eine jährlich zu entrichtende Steuer auflegte. Wem aber der Fluß von seinem Teile etwas wegriß, der mußte zu ihm kommen, und das Geschehene anzeigen; er schickte dann die Aufseher, die auszumessen hatten, um wieviel das Landstück kleiner geworden war, damit der Inhaber von dem übrigen nach Verhältnis der aufgelegten Abgabe steuere. Hieraus, meint Herodot, scheint mir (*δοκέει δέ μοι*) die Geometrie entstanden zu sein, die von da nach Hellas kam. Isokrates gibt an[2]), die Ägypter hätten die älteren unter ihren Priestern über die wichtigsten Angelegenheiten gesetzt, die jüngeren dagegen überredeten sie mit Hintansetzung des Vergnügens, sich mit Sternkunde, Rechenkunst und Geometrie zu beschäftigen. Platon hat häufig von der Mathematik der Ägypter gesprochen und einmal[3]) besonders hervorgehoben, daß bei jenem Volke schon die Kinder in den Messungen unterrichtet würden zur Bestimmung von Länge, Breite und Tiefe. Eine andere platonische Stelle[4]), in welcher gleichzeitig der Rechenkunst gedacht ist, und einen allgemein gehaltenen Ausspruch des Aristoteles[5]) haben wir im vorigen Kapitel unter den Belegen für das hohe Alter ägyptischer Rechenkunst angeführt. Heron von Alexandria läßt, was Herodot als ihm eigentümliche Vermutung äußert, vielleicht im Hinblick auf eben diesen damals schon seit etwa vier Jahrhunderten verstorbenen Schriftsteller zur alten Überlieferung werden[6]): Die früheste Geometrie beschäftigt sich, wie uns die alte Überlieferung lehrt, mit der Messung und Verteilung der Ländereien, woher sie Feldmessung genannt ward. Der Gedanke einer Messung nämlich ward den Ägyptern an die Hand gegeben durch die Überschwemmung des Nil. Denn viele Grundstücke, die vor der Flußschwelle offen dalagen, verschwanden beim Steigen des Flusses und kamen erst nach dem Sinken desselben wieder zum Vorschein, und es war nicht mehr möglich über das Eigentum eines jeden zu entscheiden. Dadurch kamen die Ägypter auf den Gedanken der Messung des vom Nil bloßgelegten Landes. Diodor stimmt gleichfalls

[1]) Herodot II, 109. [2]) Isokrates, Busiris cap. 9. [3]) Platon, Gesetze pag. 819. [4]) Platon, Phaedros pag. 274. [5]) Aristoteles, Metaphys. I, 1 in fine. [6]) Heron Alexandrinus (ed. Hultsch). Berlin 1864, pag. 138.

überein[1]). Die Ägypter, sagt er, behaupten, von ihnen sei die Erfindung der Buchstabenschrift und die Beobachtung der Gestirne ausgegangen; ebenso seien von ihnen die Theoreme der Geometrie und die meisten Wissenschaften und Künste erfunden worden. An einer etwas späteren ausführlicheren Stelle fährt er fort: Die Priester lehren ihre Söhne zweierlei Schrift, die sogenannte heilige und die, welche man gewöhnlich lernt. Mit Geometrie und Arithmetik beschäftigen sie sich eifrig. Denn indem der Fluß jährlich das Land vielfach verändert, veranlaßt er viele und mannigfache Streitigkeiten über die Grenzen zwischen den Nachbarn; diese können nun nicht leicht ausgeglichen werden, wenn nicht ein Geometer den wahren Sachverhalt durch direkte Messung ermittelt. Die Arithmetik dient ihnen in Haushaltungsangelegenheiten und bei den Lehrsätzen der Geometrie; auch ist sie denen von nicht geringem Vorteile, die sich mit Sternkunde beschäftigen. Denn wenn bei irgend einem Volke die Stellungen und Bewegungen der Gestirne sorgfältig beobachtet worden sind, so ist es bei den Ägyptern geschehen; sie verwahren Aufzeichnungen der einzelnen Beobachtungen seit einer unglaublich langen Reihe von Jahren, da bei ihnen von alten Zeiten her die größte Sorgfalt hierauf verwendet worden ist. Die Bewegungen und Umlaufszeiten und Stillstände der Planeten, auch den Einfluß eines jeden auf die Entstehung lebender Wesen und alle ihre guten und schädlichen Einwirkungen haben sie sehr sorgfältig beachtet. Die gleiche Überlieferung finden wir bei Strabon[2]). Es bedurfte aber einer sorgfältigen und bis auf das genaueste gehenden Einteilung der Ländereien wegen der beständigen Verwischung der Grenzen, die der Nil bei seinen Überschwemmungen veranlaßt, indem er Land wegnimmt und zusetzt und die Gestalt verändert und die anderen Zeichen unkenntlich macht, wodurch das fremde und eigene Besitztum unterschieden wird. Man muß daher immer und immer wieder messen. Hieraus soll die Geometrie entstanden sein.

Wir haben unsere Gewährsmänner, deren Lebenszeit etwa von 460 v. Chr. bis auf Christi Geburt sich erstreckt, chronologisch geordnet, woraus erschlossen werden kann, wieviel etwa die späteren derselben von ihren Vorgängern entnommen haben mögen ohne aus dem lebenden Quell fortdauernder volkstümlicher Sage zu schöpfen. Anderen späteren Schriftstellern werden wir an anderer Stelle das Wort geben, wo es um die Übertragung der Geometrie nach Griechenland sich handeln wird. Nur einen der frühesten griechischen Zeugen für das Alter und für die Bedeutsamkeit ägyptischer Geometrie müssen

[1]) Diodor I, 69 und die Hauptstelle I, 81. [2]) Strabon Lib. XVII, cap. 3.

wir jetzt noch nachträglich hören, den wir oben zwischen Herodot und Isokrates, wohin er seiner Lebenszeit nach gehörte, absichtlich zurückstellten, weil seine Aussage von so hervorragender geschichtlicher Wichtigkeit ist, daß sie einer besonderen Erörterung bedarf.

Demokrit sagt[1]) nämlich um das Jahr 420: „Im Konstruieren von Linien nach Maßgabe der aus den Voraussetzungen zu ziehenden Schlüsse hat mich keiner je übertroffen, selbst nicht die sogenannten Harpedonapten der Ägypter.“

Daß Harpedonapten ein griechisches Wort mit der Bedeutung Seilspanner oder wörtlicher übersetzt Seilknüpfer sei, ist merkwürdigerweise von dem Verfasser des besten griechischen Wörterbuches übersehen worden[2]). Allein auch die richtige Übersetzung reicht zum Verstehen jenes Satzes nicht aus, wenn man nicht weiß, wer jene Seilspanner waren, denen Demokrit in seinem ruhmredigen Vergleiche ein hochehrendes Zeugnis geometrischer Gewandtheit ausstellt, und worin ihre Obliegenheiten bestanden. Beides ist bis zu einem gewissen Grade aus ägyptischen Tempelinschriften zu erkennen, welche von geschätzten Ägyptologen veröffentlicht worden sind[3]). Die Tempel mußten in gleicher Weise wie die Pyramiden orientiert werden, und die Richtung nach Norden, deutlicher ausgedrückt nach dem Eintrittspunkte des Siebengestirnes um eine gegebene Zeit wurde beobachtungsweise festgestellt. „Ich habe gefaßt den Holzpflock (*nebi*) und den Stiel des Schlägels (*semes*), ich halte den Strick (χa) gemeinschaftlich mit der Göttin *Safech*. Mein Blick folgt dem Gange der Gestirne. Wenn mein Auge an dem Sternbilde des großen Bären angekommen ist und erfüllt ist der mir bestimmte Zeitabschnitt

[1]) Clemens Alexandrinus, Stromata ed. Potter I, 357: *γραμμέων συνθέσιος μετὰ ἀποδείξιος οὐδείς κώ με παρήλλαξεν, οὐδ' οἱ Αἰγυπτίων καλεόμενοι Ἀρπεδονάπται.* [2]) Cantor, Gräkoindische Studien (Zeitschr. Math. Phys. Bd. XXII. Jahrgang 1877. Histor.-literar. Abteilung S. 18 und Note 68). [3]) Brugsch, Ueber Bau und Maasse des Tempels von Edfu (Zeitschr. f. ägypt. Spr. u. Alterth. Bd. VIII) und hieroglyphisch-demotisches Wörterbuch S. 327 und 967. An letzterer Stelle ist übrigens nur bemerkt, daß das ägyptische *hunu* = Feldmesser, Geometer sei. Von einem Seilspannen oder gar von einer Erinnerung an das griechische *ἀρπεδονάπται* ist dabei keine Rede. Ferner vgl. Dümichen in der Zeitschr. f. ägypt. Spr. u. Alterth. Bd. VIII und besonders dessen umfangreiche Schrift: Baugeschichte des Denderatempels und Beschreibung der einzelnen Theile des Bauwerkes nach den an seinen Mauern befindlichen Inschriften. Straßburg 1877. Endlich vgl. Brugsch, Steininschrift und Bibelwort (Berlin 1891), wo ausdrücklich darauf hingewiesen ist, daß in allen bildlichen Darstellungen der Grundsteinlegung eines Tempels die neben dem Könige auftretende Göttin stets den Meßstrick halte und durch eingeschlagene Pflöcke die Endpunkte des Heiligtums festlege. Die Endpunkte Brugschs sind jedenfalls als die Eckpunkte zu verstehen.

der Zahl der Uhr, so stelle ich auf die Eckpunkte Deines Gotteshauses.“ Das sind die Worte, unter denen der König auf den Inschriften der Tempel die genannte Handlung vollzieht. Er schlägt mit der in seiner rechten Hand befindlichen Keule einen langen Pflock in den Erdboden und ein gleiches tut ihm gegenüber *Safech*, die Bibliotheksgöttin, die Herrin der Grundsteinlegung. Es ist klar, daß die diese beiden Pflöcke verbindende Gerade die Richtung nach Norden, den Meridian des Tempels, bezeichnet, daß durch sie die gewünschte Orientierung des Grundrisses zur Hälfte vollzogen ist. Allerdings nur zur Hälfte! Die Wandungen des Tempels sollen senkrecht zueinander stehen, und demgemäß ist es nicht weniger notwendig in einer zweiten Handlung diese mehr geometrische als astronomische Bestimmung zu treffen.

Man kann nun leicht mit der Antwort bereit sein, die ägyptischen Zimmerleute hätten gleich ihren heutigen Handwerksgenossen massive rechte Winkel besessen. Ein solcher ist z. B. auf einem Wandgemälde eine Schreinerwerkstätte darstellend[1]) deutlich abgebildet. Wohl. Aber die Richtigkeit dieses Werkzeuges mußte doch selbst verbürgt, mußte irgend einmal irgendwie geprüft sein, und das scheint immerhin in letzter Linie eine geometrische Konstruktion vorauszusetzen, die vermutlich bei so feierlichen Gelegenheiten wie die Gründung eines Tempels stets aufs neue vollzogen wurde. Daß es so geschah liegt vielleicht in der Mehrzahl „die Eckpunkte Deines Gotteshauses“ angedeutet, welche der König, wie wir gehört haben, aufstellt. Die Art der Bestimmung freilich verschweigt, soviel wir wissen, die Gründungsformel. Gerade dazu diente nun, wenn uns ein Analogieschluß, dessen Ausführung wir auf einige ziemlich späte Kapitel dieses Bandes verschieben müssen, nicht irre leitet, das Seil, das um die Pflöcke gezogen war, das das eigentliche Geschäft der Seilspanner bezeichnend ihnen den Namen verlieh und an welches wir dachten, als wir im 1. Kapitel (S. 46) auf die Möglichkeit einer Seilspannung bei den Babyloniern hinwiesen.

Fig. 8.

Denken wir uns, gegenwärtig allerdings noch ohne jede Begründung, den Ägyptern sei bekannt gewesen, daß die drei Seiten von der Länge 3, 4, 5, deren grundlegende Eigenschaft $4^2 + 3^2 = 5^2$ ihnen (S. 96) nicht entgangen war, zu einem Dreiecke verbunden ein solches mit einem rechten Winkel zwischen den beiden kleineren Seiten bilden, und denken wir uns die Pflöcke auf dem Meridian um

[1]) Wilkinson, *Manners and customs of the ancient Egyptians*. Vol. III, pag. 144.

4 Längeneinheiten voneinander entfernt. Denken wir uns ferner das Seil von der Länge 12 und durch Knoten in die entsprechenden Abteilungen 3, 4, 5 geteilt, so leuchtet ein (Fig. 9), daß das Seil an dem einen Knoten gespannt, während die beiden anderen an den Pflöcken anlagen, notwendigerweise einen genauen rechten Winkel zum Meridiane an dem einen Pflocke hervorbringen mußte.

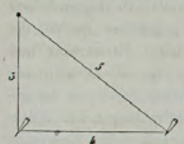

Fig. 9.

War dieses die Hauptaufgabe der Harpedonapten, zu deren Amtsgeheimnis es gehören mochte, die Pflöcke wie die Knoten an den richtigen Stellen anzubringen, wodurch wenigstens eine zweckdienliche Erklärung für das Stillschweigen der Inschriften über ihre Verfahrungsweise gegeben wäre, so konnte in der Tat ihnen der Ruhm „der Konstruktion von Linien“ zugesprochen werden, so waren sie im Besitz der Mysterien der Geometrie, die nicht jedem sich enthüllten, so wird es begreiflich, wie ihre Handlungen in den Wandgemälden dem Könige selbst in Verbindung mit einer Göttin beigelegt wurden.

Die Operation des Seilspannens ist eine ungemein alte. Man hat deren Erwähnung auf einer auf Leder geschriebenen Urkunde des Berliner Museums gefunden, wonach sie bereits unter Amenemhat I. stattfand[1]). Vielleicht ist es gestattet, hier nochmals daran (S. 58) zu erinnern, daß Ahmes in den einleitenden Worten seines Papyrus sich darauf beruft, er arbeite nach dem Muster älterer Schriften, und daß es vielleicht König Amenemhat III. war, unter dessen Regierung jene älteren Schriften verfaßt wurden. Ist diese Annahme wirklich richtig, so würden wir wenigstens keinen Anstand nehmen die Möglichkeit solcher Kenntnisse, wie wir sie soeben für die Harpedonapten in Anspruch nahmen, schon in der XII. Dynastie, welcher die Amenemhat angehörten, zuzugestehen. Einer Zeit, welche die Winkellehre so weit ausgebildet hatte, daß sie den Seqt berechnete, können wir auch die Kenntnis des rechtwinkligen Dreiecks von den Seiten 3, 4, 5 zutrauen, die wesentlich erfahrungsmäßig gewonnen worden sein wird, ohne daß irgendwie an einen strengen geometrischen Beweis in unserem heutigen Sinne des Wortes gedacht werden müßte.

Überhaupt zerfällt, wie wir meinen, gerade dem Seqt gegenüber jeder Versuch, die Geometrie der Ägypter auf eine bloße Flächenabschätzung zurückzuführen, während Winkeleigenschaften oder Verhältnisse von Strecken ihr fremd gewesen seien, von selbst, ohne daß

[1]) Dümichen, Denderatempel S. 33.

es mehr nötig wäre, gegen diese Zweifel eines überwundenen Wissensstandpunktes mit eingehender Widerlegung sich zu wenden. Dagegen ist um so erklärlicher, was ein später griechischer Schriftsteller von den Schülern des Pythagoras sagt[1]), was aber gewiß richtig auch auf seine Lehrer, die Ägypter gedeutet worden ist, daß sie die Winkel als bestimmten Göttern geweiht ansahen, und daß der dreiartige Gott die erste Ursache zur Reihe der geradlinigen Figuren in sich begreife.

Eine mindestens nicht ganz zu verwerfende Bestätigung uralter geometrischer Kenntnisse bei den Ägyptern können wir noch beifügen[2]). Wenn aus den ältesten Zeiten auf Wandgemälden Figuren von geometrischer Entstehung sich erhalten haben, so spricht deren Vorhandensein gewiß dafür, daß man mit solchen Zeichnungen sich damals beschäftigte. Ja man kann es wohl einleuchtend nennen, daß ein wirklicher Mathematiker, welcher dieselben, vielleicht Jahrhunderte nach ihrer Anfertigung, häufig, täglich zu Gesicht bekam, fast notwendig darauf hingewiesen werden mußte, über Eigenschaften dieser Figuren, die ihm noch nicht bekannt waren, nachzudenken. Glücklicherweise besitzen wir nun in einem mit Recht wegen seiner Treue und Zuverlässigkeit berühmten Bilderwerke[3]) eine überreiche Menge von Figuren der genannten Art, von denen nur einige wenige, und zwar der leichteren Herstellung wegen ohne die bunten Farben des Originals und in anderem Maßstabe, hier wiedergegeben werden mögen. Schon zur Zeit der V. Dynastie, der unmittelbaren Nachfolger der Pyramidenkönige, wurde in der Totenstadt von Memphis eine aus ineinander gezeichneten verschobenen Quadraten (Fig. 10) gebildete Verzierung angewandt. Das Quadrat mit seinen zu Blättern ergänzten Diagonalen (Fig. 11) findet sich von der XII. bis zur XXVI. Dynastie vielfach. Das gleichschenklige Paralleltrapez kommt in Varianten, welche auf die Zerlegung in anderweitige Figuren sich

[1]) Proclus Diadochus, Commentar zum I. Buche der euklidischen Elemente ed. Friedlein. Leipzig 1873, pag. 130 und 155. Auf diese Stellen hat allerdings in der Absicht sie gegen eine wissenschaftliche Geometrie der Ägypter zu verwerten Friedlein aufmerksam gemacht: Beiträge zur Geschichte der Mathematik II. Hof 1872, S. 6. [2]) Zur Anstellung der hier folgenden Untersuchung regten uns einige Bemerkungen von G. J. Allman an: *Greek Geometry from Thales to Euclid* im V. Bd. der Hermathena. Dublin 1877, pag. 169, Note 20 und pag. 186, Note 81. Diese Abhandlung ist mit anderen, die gleichfalls ursprünglich in der Hermathena erschienen, 1889 zu einem Bande vereinigt worden. Dort finden sich die betreffenden Stellen pag. 12, Note 16 und pag. 29, Note 47. [3]) Prisse d'Avennes, *Histoire de l'art Égyptien d'après les monuments.*

beziehen (Fig. 12 und 13), als Zeichnung von unteren Teilen eines Ständers für Waschgefäße und dergleichen fast zu allen Zeiten vor. Ein höchst

Fig. 10.

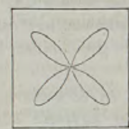

Fig. 11.

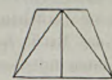

Fig. 12.

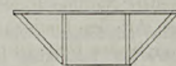

Fig. 13.

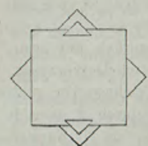

Fig. 14.

merkwürdiges Gewebemuster (Fig. 14) kann als Vereinigung zweier sich symmetrisch durchsetzender Quadrate definiert werden. Unterbrechen wir hier die Angabe geometrischer Figuren aus ägyptischen Wandgemälden und schalten wir zunächst den Bericht über eine für uns ungemein wertvolle Entdeckung ein.

Die Ägypter pflegten die Wände, auf welchen sie Reliefarbeiten anbringen wollten, in lauter einander gleiche Quadrate zu zerlegen und mit deren Hilfe die Umrisse des Einzuhauenden zu zeichnen. Eine unvollendet gebliebene Kammer in dem sogenannten Grabe Belzoni, das ist in dem Grabe Seti I., des Vaters Ramses II. aus der XIX. Dynastie, zeigt dieses ganz deutlich[1]). Es wäre töricht hierin bewußte Anfänge eines Koordinatensystems erkennen zu wollen, aber ebenso töricht wäre es zu verkennen, daß in dieser ausgeprägten Gewohnheit eine geometrische Proportionenlehre so weit enthalten ist, daß wir den verkleinernden, unter Umständen, wo es um Götterfiguren sich handelte, auch den vergrößernden Maßstab angewandt finden. Es kann fast auffallen, daß die Ägypter nicht noch einen Schritt weitergingen und die Perspektive erfanden. Bekanntlich ist von dieser bei ägyptischen Gemälden keine Spur vorhanden, und mag man religiöse oder was immer sonst für Gründe dafür in Anspruch nehmen, immer bleibt geometrisch ausgedrückt die Tatsache: die Ägypter übten nicht die Kunstfertigkeit die zu bemalende Wand als zwischen dem sehenden Auge und dem abzubildenden Gegenstande eingeschaltet zu denken und deren Durchschnittspunkte mit den Sehstrahlen nach jenem Gegenstande durch Linien zu vereinigen.

[1]) Wilkinson, *Manners and customs* III, pag. 313 und ebendesselben *Thebes and Egypt* pag. 107.

Gehen wir in der Zeit tief herunter bis zur Regierung des Königs Ptolemaeus IX. (um 150 v. Chr. G.), so finden wir auf dem großen Pylon vor dem auf der Insel Phylae von jenem Könige errichteten Isistempel eine erhaltene in den Stein eingeritzte Zeichnung, welche allerdings das Recht hat uns in Staunen zu versetzen, und welche wir am besten an dieser Stelle erwähnen. Es ist[1]) der Grundriß einer bei Erbauung des Isistempels zur Verwendung gelangten Säule, und weitere Nachforschungen haben ergeben, daß die hier entgegentretende Art des Einritzens von Zeichnungen in natürlicher Größe dem ägyptischen Baumeister auf Phylae regelmäßige Gewohnheit war. Er hat, wie die Ausgrabungen zeigen, vor dem Beginne des Baues alle seine Grundrisse in Naturgröße auf dem Pflaster, da wo die Mauer hinkommen sollte, aufgerissen.

Wir kehren zu den Figuren geometrischer Art zurück, und zwar zu solchen, bei welchen die Kreislinie vorkommt. Durch Durchmesser in gleiche Kreisausschnitte geteilte Kreise kommen vielfach vor, und zwar ist bei Zieraten die häufigste Teilung die durch 2 oder 4 Durchmesser in 4 oder 8 Teile, während, wie wir im 1. Kapitel (S. 47) erwähnt haben, auf Gefäßen, welche von asiatischen Tributpflichtigen Königen der XVIII. Dynastie, etwa den Zeitgenossen des Schreibers Ahmes, überbracht werden, die Teilung des Kreises durch 6 Durchmesser in 12 Teile (Fig. 15) ausnahmslose Regel ist. Wagenräder haben insbesondere seit Ramses II. aus der XIX. Dynastie fast regelmäßig 6 Speichen, und Räder mit 4 Speichen kommen ganz selten vor. Ergänzend ist zu erwähnen, daß den Ägyptern des alten und des mittleren Reiches Wagen

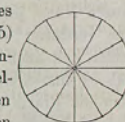

Fig. 15.

und Pferde noch unbekannt waren. Beide wurden erst unter den Hyksoskönigen von Syrien her eingeführt[2]). Damit ist aber zugleich wahrscheinlich gemacht, daß den Ägyptern vor der Zeit der Hyksoskönige z. B. unter den Amenemhats, unter welchen das Muster zum Handbuche des Ahmes entstand, die mit den 6 speichigen Rädern und dem regelmäßigen Sechsecke in enger Verbindung stehende Verhältniszahl $\pi = 3$ nicht bekannt wurde, und daß diese auch späterhin trotz anhaltend enger Beziehungen zu Vorderasien sich nicht einbürgern konnte, weil die Ägypter damals schon mit $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ zu rechnen gewohnt waren. Eine Teilung des Kreises in 10 gleiche Teile durch 5 Durchmesser oder in 5 Teile durch 5 vom Mittelpunkte ausgehende Strahlen ist unserem danach suchenden Auge nicht begegnet. Der

[1]) L. Borchardt, Altägyptische Werkzeichnungen. Zeitschr. f. ägypt. Spr. XXXIV, 69—76 (1896). [2]) Steindorff, Die Blütezeit der Pharaonen S. 44.

von Horapollon als Zeichen für 5 beschriebene fünfstrahlige Stern (S. 84) kann kaum als Gegenbeispiel aufgefaßt werden, so auffallend er sein mag.

Wollen wir über wirklich geometrische Überbleibsel in ägyptischer Sprache, nicht über Zeichnungen, aus welchen mehr oder minder gewagte Rückschlüsse auf geometrisches Wissen gezogen werden müssen, berichten, so haben wir plötzlich ungemein tief in die Zeitfolge hinabzugreifen bis zu den Inschriften des Tempels des Horus zu Edfu in Oberägypten[1]), in welchen der Grundbesitz der Priesterschaft dieses Tempels vermessen und angegeben ist. Die Pflocklegung dieses Tempels wurde nach altertümlicher Sitte am 23. August 237 v. Chr. vollzogen[2]). Die aufgezeichneten Grundstücke und deren Schenkung beziehen sich auf König Ptolemäus XI., Alexander I., dessen Regierung durch Gewalttätigkeiten an Bruder und Mutter errungen und bewahrt von 107 bis 88 dauerte, in welch letzterem Jahre er selbst durch den mit Waffengewalt zurückkehrenden Bruder zur Flucht genötigt wurde. Um das Jahr 100 v. Chr. wurden also die betreffenden Messungen angestellt, nicht weniger als 200 Jahre nachdem in Alexandria auf ägyptischem Boden und unter dem Schutze eines Königs von Ägypten Euklid gelebt und gelehrt hatte, dessen Name jedem Gebildeten bis zu einem Grade bekannt ist, der uns verstattet seiner als Maßstab für das mathematische Wissen seiner Zeit auch in diesem Kapitel schon uns zu bedienen. Damals gab es unzweifelhaft eine weit vorgeschrittene theoretische Geometrie, aber die Praxis der Feldmessung ließ sich an den altherkömmlichen Formeln genügen. Wir haben dieses Festhalten an gewohnten, bequemen, eine Wurzelausziehung vermeidenden Methoden schon früher (S. 94) angekündigt. Wir haben es bis zu einem gewissen Grade gerechtfertigt und die Unbedeutendheit des begangenen Fehlers in Betracht gezogen. Es ist möglich gewesen aus den sich aneinander anschließenden Maßen der Edfu-Inschrift eine sehr wahrscheinliche Zeichnung der dort beschriebenen Ländereien anzufertigen[3]), und dieser Plan läßt erkennen, wie wenig die durch Hilfslinien hergestellten viereckigen Abteilungen von Rechtecken sich unterscheiden, bis zu welchem Grade der Genauigkeit trotz Anwendung der alten Formeln man gelangte. In der Häufung jener Hilfslinien, in der Zerlegung des zu messenden Feldes in immer zahlreichere, immer kleinere Teile lag die Verbesserung, welche ein Festhalten der Regeln der Urahnen

[1]) R. Lepsius, Ueber eine hieroglyphische Inschrift am Tempel von Edfu (Abhandlungen der Berliner Akademie 1855, S. 69—114). [2]) Dümichen in der Zeitschr. f. ägypt. Spr. u. Alterth. Bd. VIII, S. 7. [3]) R. Lepsius l. c. Tafel VI.

gestattete, und diese Verbesserung war selbst keine Neuerung, sie hatte ihr Vorbild schon in dem Werke des Ahmes. Wir können die Ehrenrettung der Feldmesser zur Zeit von Ptolemäus XI. gewissermaßen vollenden, indem wir an die Scheu vor Wurzelausziehungen erinnern, welche heute noch untergeordneten Beamten des Katasterwesens anzuhaften pflegt und sie wenigstens für vorläufige Flächenschätzung die sogenannten verglichen abgenommenen Maße anwenden läßt, d. i. eben das altägyptische Verfahren seinem Hauptgedanken nach.

Wenn wir sagten, in den Edfu-Inschriften seien die Formeln angewandt, welche uns aus dem Übungsbuche des Ahmes bereits bekannt sind, so müssen wir diese Aussage dahin ergänzen, daß eine weitere theoretisch noch mißbräuchlichere Ausdehnung jener Formeln hinzugekommen und eine nicht ganz unbedeutende Gedankenverschiebung bei ihnen eingetreten ist.

Die Formeln des Ahmes waren $\frac{b}{2} \times a$ und $\frac{b_1 + b_2}{2} \times a$ für die Flächeninhalte des gleichschenkligen Dreiecks und des gleichschenkligen Paralleltrapezes. Die erstere Formel blieb in Geltung, und wenigstens in den im Drucke veröffentlichten Edfu-Inschriften sind andere als gleichschenklige Dreiecke nicht genannt. Bei den Vierecken aber ist die Bedingung, daß es gleichschenklige Paralleltrapeze seien, deren Fläche man berechnen wolle, abhanden gekommen. Die Anzahl so gestalteter Vierecke überwiegt allerdings auch in Edfu, aber neben ihnen kommen ganz willkürliche Vierecke mit den Seiten a_1, a_2, b_1, b_2 vor, wo die beiden durch a und desgleichen die beiden durch b benannten Seiten einander gegenüberliegen sollen, und deren Fläche berechnet sich auf

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \times \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

So z. B. 16 zu 15 und 4 zu $3\frac{1}{2}$ macht $58\frac{1}{8}$; $45\frac{1}{4}$ zu $33\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ und 17 zu 15 macht 632; $9\frac{1}{2}$ zu $10\frac{1}{2}$ und $24\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ zu $22\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ macht $236\frac{1}{4}$ usw.

Die angekündigte Gedankenverschiebung besteht aber in folgendem. Ahmes, das suchten wir aus der mutmaßlichen Entstehung der Formeln, aus dem beim Vierecke gebrauchten Namen Hak, Abschnitt, für die eine Seite zu begründen, ging aus vom Dreiecke und ließ das Trapez durch Abstumpfung jener ursprünglichen Figur entstehen. Jetzt hat die Sache sich umgekehrt. Das Viereck ist die zugrunde liegende Figur geworden, das Dreieck entsteht aus ihm als besonderer Fall, indem eine Vierecksseite verschwindet. Nicht von Dreiecken mit den Seiten 5, 17, 17 oder 2, 3, 3 ist in Edfu die Rede, sondern von Figuren mit den Seiten 0 zu 5 und 17 zu 17, beziehungsweise

0 zu 2 und 3 zu 3, deren Flächen alsdann $42\frac{1}{2}$ und 3 sind[1]). Das Wort Null wird, wie wir wohl zum Überflusse bemerken, nicht etwa durch ein besonderes Zahlzeichen, sondern durch eine aus zwei Bildchen sich zusammensetzende hieroglyphische Gruppe mit der Aussprache Nen dargestellt, welche gewöhnlich verneinende Beziehungen ausdrückt, hier die als Dingwort ausgesprochene Verneinung, das Nichts. An eine Zahl Null ist in keiner Weise zu denken.

Fassen wir in eine ganz kurze Übersicht den Hauptinhalt der beiden von ägyptischer Mathematik handelnden Kapitel zusammen. Die Ägypter besaßen, wie wir quellenmäßig belegen konnten, schon im Jahre 1700 v. Chr., wahrscheinlich sogar bereits ein halbes Jahrtausend früher eine ausgebildete Rechenkunst mit ganzen Zahlen und Brüchen, wobei letztere stets als Stammbrüche geschrieben wurden, wenn auch der Begriff gewöhnlicher Brüche, wie aus der Zurückführung auf Generalnenner hervorgeht, nicht fremd war. Die Aufgaben, welche so der Rechnung unterbreitet wurden, gehören dem Gebiete der Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten an, wobei die Worteinkleidung eine von einer Aufgabengruppe zur anderen wechselnde ist. Als Gipfelpunkte erscheinen nach moderner Auffassung Beispiele aus dem Gebiete der arithmetischen, vielleicht der geometrischen Reihen. Beispiele aus der Geometrie und Stereometrie gewählt lassen erkennen, daß in jener frühen Zeit die Ägypter einen nicht ganz unglücklichen Versuch gemacht hatten den Kreis in ein Quadrat zu verwandeln, daß ihre Berechnung des Flächeninhalts von gleichschenkligen Dreiecken und von als Abschnitte von ersteren erhaltenen gleichschenkligen Paralleltrapezen von Näherungsformeln Gebrauch machte, ohne daß wir freilich irgend eine Auskunft darüber zu geben vermochten, ob man beim Kreise, ob man bei jenen geradlinig begrenzten Figuren sich bewußt war nur Angenähertes zu erhalten, oder ob man an die genaue Richtigkeit der Ergebnisse glaubte, und wie man zu denselben gelangt war. Zur weiteren Untersuchung dieser hochwichtigen Frage wird es unentbehrlich sein die Tatsache zu berücksichtigen, daß rationale Quadratwurzeln den Ägyptern in sehr alter Zeit bekannt waren. Des weiteren haben wir gesehen, daß man es liebte, wohl auch für notwendig hielt, gegebene Figuren zum Zwecke der Ausmessung durch Hilfslinien in andere Figuren von einfacherer Begrenzung zu zerlegen, und diese Übung zu allen Zeiten beibehielt, gleichwie es mit den alten Näherungsformeln für die Flächen von Dreiecken und Vierecken der Fall war. Endlich ist festgestellt, daß in gleich grauem Altertume, bis zu welchem aufwärts wir die Flächenberechnung verfolgen können, auch eine Vergleichung von Strecken zum Zwecke des Ähnlichmachens, d. h. zur Wiederholung desselben Winkels an verschiedenen Raumgebilden stattfand. Neben dieser quellenmäßig gesicherten Wissenschaft lernten wir die Überlieferung kennen, welche Geometrie und Rechenkunst heimatlich auf Ägypten zurückführt, welche das bürgerliche Rechnen der Ägypter uns mutmaßlich als Fingerrechnen, mit aller Bestimmtheit als Rechnen mit Steinchen kennen lehrt. Auch aus Figuren des täglichen Gebrauches durften wir geometrische Schlüsse ziehen, Handlungen die mit der Tempelerbauung verbunden waren, durften wir erörtern und gelangten so zu der wahrscheinlichen Folgerung, daß neben jenen geometrischen Vorschriften, welche den Rechnungen dienten, auch solche bestanden, die auf Konstruktionen sich bezogen und namentlich die Zeichnung eines rechtwinkligen Dreiecks durch die gegebenen Längen seiner drei Seiten ermöglichten. Eine deutliche Darlegung dieser von uns vermuteten Vorschriften ist ebensowenig bekannt wie die vorher vermißte Ableitung der Flächenformeln, ebensowenig wie die Begründung der von Ahmes angewandten Formel für Auffindung des Anfangsgliedes einer arithmetischen Reihe aus ihrer Summe, ihrer Gliederzahl und ihrer Differenz. So kommt man unabweislich zur Annahme eines noch nicht wieder aufgefundenen theoretischen Lehrbuches der Ägypter neben dem neuerdings bekannt gewordenen Übungsbuche. Nicht als ob wir an eine Theorie im modernen Sinne dächten. Beweise werden meistens induktiv, wohl auch auf Grund sehr ungenügender Induktion geführt worden sein, wenn man nicht gar den Augenschein für hinreichend hielt jeglichen Beweis zu ersetzen. Dagegen vermuten wir, wie hier vorgreifend bemerkt werde, eine regelmäßig wiederkehrende Form des Lehrbuches, unterschieden von der des Übungsbuches und nur darin mit letzterer zusammentreffend, daß auch sie sich forterbte, gleichwie die Form des Übungsbuches so gut wie ohne jede Veränderung in griechischer Nachbildung sich erhielt. Wir werden in späteren Kapiteln auf diese Meinung, auf diese Behauptung zurückkommen müssen, um die letztere zu beweisen und dadurch der ersteren eine Stütze zu verleihen.

[1]) Die hier erwähnten Beispiele vgl. bei Lepsius l. c. S. 75, 79, 82. Auf letzterer Seite findet sich die Rechtfertigung der Null.

III. Griechen.