ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR.

ACHTZEHNTES HEFT.

MIT 34 FIGUREN IM TEXT.

INHALT:

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR.

18

ACHTZEHNTES HEFT.

MIT 34 FIGUREN IM TEXT.

INHALT:

BG

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1904.

MATHEMATISCHES ZU ARISTOTELES.

VON

J. L. HEIBERG.

MIT 30 FIGUREN IM TEXT.

Mathematisches zu Aristoteles.

I.

Von dem regen Leben, das in Athen im IV. Jahrhundert auf dem Gebiete der Mathematik herrschte, gibt das Mathematikerverzeichnis bei Proklos *in Eucl.* S. 66 ff., das bekanntlich auf Eudemos zurückgeht (Spengel, *Eudemi fragmenta* no. LXXXIV), ein klares Bild. Der sachkundige Verfasser hat dabei auch besonders auf die Fortschritte geachtet, die das Lehrgebäude der Elementargeometrie, die *στοιχεῖα*, in diesem Zeitraum gemacht hat. Nachdem Hippokrates von Chios das erste Lehrbuch herausgegeben hatte, erschien schon in der nächsten Generation ein neues von Leon, erweitert und sorgfältiger (*τῷ τε πλήθει καὶ τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον*). Seine Zeit läßt sich dadurch bestimmen, daß Eudoxos S. 67, 2 *Λέοντος μὲν ὀλίγῳ νεώτερος* heißt; Leon ist also nur wenig jünger als Platon, und mit diesem Ansatze lassen die übrigen chronologischen Angaben des Eudemos sich einigermaßen vereinigen. Leon ist Schüler von Neokleides, der jünger ist als Leodamas (S. 66, 18 bis 19); dieser wird S. 66, 15 in einer Linie mit Archytas und Theaitetos genannt, aber als erster, und alle drei werden *nach* Platon aufgeführt mit der ganz unbestimmten Übergangsformel *ἐν δὲ τούτῳ τῷ χρόνῳ*. Wenn ein Schüler des etwas jüngeren Neokleides zwischen Platon und Eudoxos zeitlich in der Mitte steht, muß Leodamas etwas älter sein als Platon; daß er ihm nachgestellt wird, hat ohne Zweifel darin seinen Grund, daß er durch Platon auf die analytische Methode gebracht wurde (Proklos S. 211, Diogenes Laert. III 24). Weder er noch Neokleides und Leon gehören unter die direkten Schüler Platons, deren Reihe im Mathematikerverzeichnis S. 67, 2 Eudoxos eröffnet und auch er noch als ein von außen her hinzugetretener Gelehrter (*ἑταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλάτωνος γενόμενος*). Das geometrische Lehrbuch der Akademie schrieb Theudios *ὁ Μάγνης*, der mit Amyklas *ὁ Ἡρακλεώτης*, Menaichmos, dem Schüler des Eudoxos, seinem Bruder Deinostratos und Athenaios aus Kyzikos zu denen gehörte, die *διῆγον μετ' ἀλλήλων ἐν Ἀκαδημίᾳ κοινὰς ποιούμενοι τὰς* *ζητήσεις* (S. 67, 19). Von ihm heißt es S. 67, 12 ff.: *ἔν τε τοῖς μαθήμασιν ἔδοξεν εἶναι διαφέρων καὶ κατὰ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν· καὶ γὰρ τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξεν καὶ πολλὰ τῶν μερικῶν καθολικώτερα ἐποίησεν.* Nach Theudios nennt Eudemos kein Lehrbuch mehr; denn von Hermotimos, der mit Philippos ὁ *Μενδαῖος* eine jüngere Generation der Platonschüler repräsentiert, etwa die des Aristoteles, und, wie Proklos S. 68, 4 ausdrücklich bezeugt, die Grenze der Eudemischen Geschichte der Mathematik war, heißt es nur S. 67, 22: *τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε.* Seine Entdeckungen auf dem Gebiete der elementaren Mathematik hat wohl also erst Euklid in das Lehrgebäude der *στοιχεῖα* eingefügt.

Theudios, dessen Lehrbuch ohne Zweifel, wie es auf diesem Gebiete der Literatur zu gehen pflegt, bald das Werk Leons als veraltet aus dem Gebrauch verdrängte, ist also der unmittelbare Vorgänger Euklids, und man wüßte gern Näheres über sein Buch. Direkt ist nichts überliefert, und die Elemente Euklids bieten nur spärliche Handhaben für Rückschlüsse auf die Vorarbeiten. Dagegen geben die mathematischen Stellen bei Aristoteles einige Aussicht auf sichere Aufschlüsse. Der Begriff der *στοιχεῖα* ist ihm vollkommen vertraut (Diels, *Elementum* S. 26 ff.; vgl. 163^{b} 23: *ἐν γεωμετρίᾳ πρὸ ἔργου τὸ περὶ τὰ στοιχεῖα γεγυμνάσθαι*). Was er von der elementaren Mathematik als bekannt voraussetzt, muß doch einem seinen Zuhörern geläufigen Lehrbuche entstammen, und das kann nach den Zeitverhältnissen sowie nach den Lobsprüchen des Eudemos gerade auf dieses Werk nur das von Theudios sein. Es lohnt sich daher vielleicht, die mathematischen Stellen des Aristoteles daraufhin zu prüfen, eine Aufgabe, die sowohl Cantor (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I^{2} S. 239) als Görland (*Aristoteles und die Mathematik*, Marburg 1899 S. 93) als undankbar ablehnen; die Hauptsachen hat allerdings schon Hankel in seinem geistreichen Buch *Zur Geschichte der Mathematik* (Leipzig 1874) S. 135 ff. klar und scharf herausgehoben. Blancanus, *Aristotelis loca mathematica ex universis ipsius operibus collecta et explicata* (Bononiae 1615), der das Material ziemlich vollständig, wenn auch für diese Anwendung unübersichtlich, gesammelt hat, verfolgt ganz andere Zwecke. Es wird also nicht überflüssig sein, die Stellen noch einmal zu durchmustern mit dem besonderen Ziel, sie über das System der Elementarmathematik, wie es zu Aristoteles' Zeit ausgebildet vorlag, zu befragen, um so in die Genesis der Elemente Euklids einen Einblick zu gewinnen.

Vor allen Dingen ist es klar, wie Hankel a. O. richtig erkannt hat, daß der strenge Aufbau des Systems auf Definitionen und Axiomen schon in den Lehrbüchern zu Aristoteles' Zeit vorlag. Nicht nur spricht er

1005^{a} 20 von *τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι καλουμένων ἀξιωμάτων*, sondern er führt auch eins an, 1061^{b} 19 ff.: *ὅτι γὰρ ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσων ἀφαιρεθέντων ἴσα τὰ λειπόμενα, κοινὸν μέν ἐστιν ἐπὶ πάντων τῶν ποσῶν, ἡ μαθηματικὴ δ' ἀπολαβοῦσα περί τι μέρος τῆς οἰκείας ὕλης ποιεῖται τὴν θεωρίαν οἷον περὶ γραμμὰς ἢ γωνίας ἢ ἀριθμοὺς ἢ τῶν λοιπῶν τι ποσῶν* = Euklid I *κοιν. ἔνν.* 3: *ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.* Ebenso 41^{b} 21: *ἐὰν μὴ λάβῃ ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσων ἀφαιρουμένων ἴσα λείπεσθαι.* Wie in der zuerst angeführten Stelle wird dieses Axiom ebenfalls unter die *κοινά* gerechnet 77^{a} 30: *τὰ κοινά, οἷον ὅτι ἅπαν φάναι ἢ ἀποφάναι ἢ ὅτι ἴσα ἀπὸ ἴσων ἢ τῶν τοιούτων ἄττα*, und den speziell mathematischen Definitionen entgegengestellt 76^{a} 40: *ἴδια μὲν οἷον γραμμὴν εἶναι τοιανδὶ καὶ τὸ εὐθύ, κοινὰ δὲ οἷον τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἂν ἀφέλῃ, ὅτι ἴσα τὰ λοιπά· ἱκανὸν δ' ἕκαστον τούτων ὅσον ἐν τῷ γένει· ταὐτὸ γὰρ ποιήσει, κἂν μὴ κατὰ πάντων λάβῃ ἀλλ' ἐπὶ μεγεθῶν μόνον, τῷ δ' ἀριθμητικῷ ἐπ' ἀριθμῶν*; die *κοινά* werden als allgemein verständlich nicht definiert, s. 76^{b} 20: *ὥσπερ οὐδὲ τὰ κοινά, οὐ λαμβάνει, τί σημαίνει τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἀφελεῖν, ὅτι γνώριμον.* Hieraus hat sich die mit Unrecht als stoisch angefochtene Bezeichnung der Axiome in unseren Euklidhandschriften als *κοιναὶ ἔννοιαι* entwickelt; Proklos, der sie *ἀξιώματα* nennt, bemerkt S. 194, 8, daß nach dem genaueren Sprachgebrauch des Aristoteles und der Mathematiker *ταὐτόν ἐστιν ἀξίωμα καὶ ἔννοια κοινή.* Auch sagt Aristoteles 76^{b} 14: *τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων ἀποδείκνυσι*, und 996^{b} 27: *λέγω δὲ ἀποδεικτικὰς τὰς κοινὰς δόξας, ἐξ ὧν ἅπαντες δεικνύουσιν*, 997^{a} 20: *τὰ καθ' αὑτὰ συμβεβηκότα ἐκ τῶν κοινῶν δοξῶν* in demselben Sinne. Von den Euklidischen Postulaten (*αἰτήματα*) dagegen findet sich keine Spur bei Aristoteles, bei dem *αἴτημα* eine andere Bedeutung hat (ungefähr gleich *πρότασις* oder *ὑπόθεσις*, s. 76^{b} 32: *ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ ἢ ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμβάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας*). Es ist daher nicht unwahrscheinlich, daß die Aufstellung der *αἰτήματα* oder wenigstens die Trennung der *αἰτήματα* und *ἀξιώματα* von Euklid selbst herrührt. Sie steht jedenfalls mit der in der Akademie geführten Verhandlung über Theorem und Problem in Verbindung, von der Proklos S. 77 ff. interessante Nachrichten gibt (die Gegner waren Speusippos und Menaichmos); S. 182, 1 ff. parallelisiert Proklos das Verhältnis zwischen *αἴτημα* und *ἀξίωμα* mit dem zwischen Problem und Theorem.

An den soeben angeführten Stellen 76^{a} 31 ff. und 996^{b} 26 ff. setzt Aristoteles auseinander, daß alle *ἐπιστῆμαι ἀποδεικτικαί* von gewissen festen Grundlagen ausgehen müssen (997^{a} 10 *πᾶσαι γὰρ αἱ ἀποδεικτικαὶ χρῶνται τοῖς ἀξιώμασι*, 997^{a} 7 *περὶ πάντων γὰρ ἀδύνατον ἀπόδειξιν εἶναι*), und sowohl hier als sonst (s. besonders 41^{b} 13: daß, um einen *συλλογισμός* zustande zu bringen, allgemeine Sätze notwendig sind, *μᾶλλον γίνεται φανερὸν ἐν τοῖς διαγράμμασιν*, d. h. in der Mathematik, wie 175^{a} 27, 1051^{a} 22; *διάγραμμα* ist so viel als Theorem, 14^{a} 39, 998^{a} 25) benutzt er die Mathematik in solcher Weise als typisches Beispiel, daß sein Begriff einer *ἐπιστήμη ἀποδεικτική* geradezu als aus ihr abgeleitet erscheint; vgl. 71^{a} 1: *πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ ἐκ προυπαρχούσης γίνεται γνώσεως· φανερὸν δὲ τοῦτο θεωροῦσιν ἐπὶ πασῶν· αἵ τε γὰρ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου τοῦ τρόπου παραγίνονται καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη τεχνῶν*; 153^{a} 7: *πρῶτον μὲν εἰδέναι δεῖ, ὅτι οὐδεὶς ἢ ὀλίγοι τῶν διαλεγομένων ὅρον συλλογίζονται, ἀλλὰ πάντες ἀρχὴν τὸ τοιοῦτον λαμβάνουσιν, οἷον οἵ τε περὶ γεωμετρίαν καὶ ἀριθμοὺς καὶ τὰς ἄλλας τὰς τοιαύτας μαθήσεις*; 1025^{b} 4: *καὶ τῶν μαθηματικῶν εἰσιν ἀρχαὶ καὶ στοιχεῖα καὶ αἴτια, καὶ ὅλως δὲ πᾶσα ἐπιστήμη διανοητικὴ ἢ μετέχουσά τι διανοίας περὶ αἰτίας καὶ ἀρχάς ἐστιν.* Auch das indirekte Beweisverfahren (*ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπόδειξις* 77^{a} 22) hat wohl wesentlich die Mathematik aufgebracht. Ohne Zweifel ist die Anwendung von Buchstaben zur Bezeichnung der Glieder des Syllogismus ebenfalls aus der Mathematik entlehnt, wie überhaupt die Beigabe von Figuren, also die Anfänge der Illustration, von dieser Seite herstammt; vgl. 279^{b} 33: *ὁμοίως γάρ φασι τοῖς τὰ διαγράμματα γράφουσι καὶ σφᾶς εἰρηκέναι περὶ τῆς γενέσεως οὐχ ὡς γενομένου ποτέ, ἀλλὰ διδασκαλίας χάριν ὡς μᾶλλον γνωριζόντων ὥσπερ τὸ διάγραμμα γιγνόμενον θεασαμένους*; 450^{a} 1: *συμβαίνει γὰρ τὸ αὐτὸ πάθος ἐν τῷ νοεῖν, ὅπερ καὶ ἐν τῷ διαγράφειν· ἐκεῖ τε γὰρ οὐθὲν προσχρώμενοι τῷ τὸ ποσὸν ὡρισμένον εἶναι τοῦ τριγώνου ὅμως γράφομεν ὡρισμένον κατὰ τὸ ποσόν*; 375^{b} 18: *ἐκ τοῦ διαγράμματος ἔσται θεωροῦσι δῆλον*; 76^{a} 39: *οὐδ' ὁ γεωμέτρης ψευδῆ ὑποτίθεται, ὥσπερ τινὲς ἔφασαν λέγοντες, ὡς οὐ δεῖ τῷ ψευδεῖ χρῆσθαι, τὸν δὲ γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. ὁ δὲ γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τήνδε εἶναι γραμμήν, ἣν αὐτὸς ἔφθεγκται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα*; vgl. 1089^{a} 22.

Wenn das System der Elementarmathematik zur Schärfe der Aristotelischen Darstellung der Logik beigetragen hat, so ist damit nur zurückgezahlt, was die Mathematik der Philosophie schuldig war. Denn daß die Grundlage des mathematischen Lehrgebäudes auf Platon zurückgeht, ist wenigstens für die Definitionen direkt bezeugt (s. Hankel a. O. S. 135) und wird dann auch für die Axiome gelten.

Zu den unbeweisbaren Grundlagen (*ἀρχαί*) der *ἀποδεικτικαὶ ἐπιστῆμαι* rechnet nämlich Aristoteles außer den Axiomen auch die Definitionen (*ὅροι*), und wiederum gibt ihm hier wie bei jenen die Mathematik den Grundtypus; s. 76^{b} 3: *ἔστι δ' ἴδια μὲν καὶ ἃ λαμβάνεται εἶναι, περὶ ἃ ἡ ἐπιστήμη θεωρεῖ τὰ ὑπάρχοντα καθ' αὑτά, οἷον μονάδας ἡ ἀριθμητική, ἡ δὲ*

γεωμετρία σημεῖα καὶ γραμμάς· ταῦτα γὰρ λαμβάνουσι τὸ εἶναι καὶ τοδὶ εἶναι. τὰ δὲ τούτων πάθη καθ' αὑτά, τί μὲν σημαίνει ἕκαστον, λαμβάνουσιν, οἷον ἡ μὲν ἀριθμητική, τί περιττὸν ἢ ἄρτιον ἢ τετράγωνον ἢ κύβος, ἡ δὲ γεωμετρία, τί τὸ ἄλογον ἢ τὸ κεκλάσθαι ἢ νεύειν; 76^{a} 31: *λέγω δ' ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει ταύτας, ἃς ὅτι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι. τί μὲν οὖν σημαίνει καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ ἐκ τούτων, λαμβάνεται, ὅτι δ' ἔστι, τὰς μὲν ἀρχὰς ἀνάγκη λαμβάνειν, τὰ δ' ἄλλα δεικνύναι, οἷον τί μονὰς ἢ τί τὸ εὐθὺ καὶ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὴν μονάδα λαβεῖν καὶ μέγεθος, τὰ δ' ἕτερα δεικνύναι*; 90^{b} 31: *αἱ δ' ἀποδείξεις φαίνονται πᾶσαι ὑποτιθέμεναι καὶ λαμβάνουσαι τὸ τί ἐστιν, οἷον αἱ μαθηματικαί, τί μονὰς καὶ τί τὸ περιττόν, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως*; 92^{b} 12: *εἶτα καὶ δι' ἀποδείξεώς φαμεν ἀναγκαῖον εἶναι δείκνυσθαι ἅπαν ὅτι ἔστιν, εἰ μὴ οὐσία εἴη· τὸ δ' εἶναι οὐκ οὐσία οὐδενί· οὐ γὰρ γένος τὸ ὄν. ἀπόδειξις ἄρ' ἔσται, ὅτι ἔστιν. ὅπερ καὶ νῦν ποιοῦσιν αἱ ἐπιστῆμαι. τί μὲν γὰρ σημαίνει τὸ τρίγωνον, ἔλαβεν ὁ γεωμέτρης, ὅτι δ' ἔστιν, δείκνυσιν*; 93^{b} 29: *ὁρισμὸς δ' ἐπειδὴ λέγεται εἶναι λόγος τοῦ τί ἐστι, φανερόν, ὅτι ὁ μέν τις ἔσται λόγος τοῦ τί σημαίνει τὸ ὄνομα ἢ λόγος ἕτερος ὀνοματώδης, οἷον τὸ τί σημαίνει τί ἔστιν ᾗ τρίγωνον*; 96^{b} 15: *χρὴ δέ, ὅταν ὅλον τι πραγματεύηταί τις, διελεῖν τὸ γένος εἰς τὰ ἄτομα τῷ εἴδει τὰ πρῶτα, οἷον ἀριθμὸν εἰς τριάδα καὶ δυάδα, εἶθ' οὕτως ἐκείνων ὁρισμοὺς πειρᾶσθαι λαμβάνειν, οἷον εὐθείας γραμμῆς καὶ κύκλου καὶ ὀρθῆς γωνίας*; 141^{b} 5: *ἁπλῶς μὲν οὖν γνωριμώτερον τὸ πρότερον τοῦ ὑστέρου, οἷον στιγμὴ γραμμῆς καὶ γραμμὴ ἐπιπέδου καὶ ἐπίπεδον στερεοῦ, καθάπερ καὶ μονὰς ἀριθμοῦ· πρότερον γὰρ καὶ ἀρχὴ παντὸς ἀριθμοῦ*; 198^{a} 17: *οἷον ἐν τοῖς μαθήμασιν· εἰς ὁρισμὸν γὰρ τοῦ εὐθέος ἢ συμμέτρου ἢ ἄλλου τινὸς ἀνάγεται ἔσχατον.*

So wird durchgehend auch der Begriff der Definition durch mathematische Beispiele erläutert. Von den einzelnen Definitionen nun, die Aristoteles als seinen Zuhörern geläufig voraussetzt, sind folgende als Platonisch bezeugt:

73^{a} 38: *οἷον τὸ εὐθὺ ὑπάρχει γραμμῇ καὶ τὸ περιφερές* = Platon, *Phileb.* 51 c: *εὐθύ τι λέγω, φησὶν ὁ λόγος, καὶ περιφερές.*

148^{b} 26: *οἷον, εἰ ὡρίσατο γραμμὴν πεπερασμένην εὐθεῖαν πέρας ἐπιπέδου ἔχοντος πέρατα, οὗ τὸ μέσον ἐπιπροσθεῖ τοῖς πέρασιν, εἰ τῆς πεπερασμένης γραμμῆς ὁ λόγος ἐστὶ πέρας ἐπιπέδου ἔχοντος πέρατα, τοῦ εὐθέος δεῖ εἶναι τὸ λοιπόν· οὗ τὸ μέσον ἐπιπροσθεῖ τοῖς πέρασιν* = Platon, *Parmenid.* 137 e: *καὶ μὴν εὐθύ γε (ἐστι τοῦτο), οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ.*

141^{b} 19: *εἰσὶ δὲ τῶν τοιούτων ὁρισμῶν ὅ τε τῆς στιγμῆς καὶ ὁ τῆς γραμμῆς καὶ ὁ τοῦ ἐπιπέδου· πάντες γὰρ διὰ τῶν ὑστέρων τὰ πρότερα δηλοῦσιν· τὸ μὲν γὰρ γραμμῆς, τὸ δ' ἐπιπέδου, τὸ δὲ στερεοῦ φασι πέρας εἶναι* = Platon, *Menon* 76 a: *ἐπίπεδον καλεῖς τι καὶ ἕτερον αὖ στερεόν, οἷον* ταῦτα τὰ ἐν γεωμετρίαις; . . . . κατὰ γὰρ παντὸς σχήματος τοῦτο λέγω, εἰς ὃ τὸ στερεὸν περαίνει, τοῦτ' εἶναι σχῆμα· ὅπερ ἂν συλλαβὼν εἴποιμι στερεοῦ πέρας σχῆμα εἶναι, = Euklid, *Elem.* I def. 3: γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα, 6: ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί, XI def. 2: στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

Für Punkt sagt Aristoteles gewöhnlich στιγμή, seltener σημεῖον (76^b 5, 141^b 12, 373^a 4 usw.; beides 317^a 11: οὐ γάρ ἐστιν ἐχόμενον σημεῖον σημείου ἢ στιγμὴ στιγμῆς); die Mathematiker seit Euklid haben nur dieses. Nach 992^a 19 nannte Platon στιγμή eine geometrische Fiktion (δόγμα γεωμετρικόν) und sagte lieber ἀρχὴ γραμμῆς. Es liegt daher nahe, zu vermuten, daß die Bezeichnung σημεῖον, wobei man zunächst an eine konventionelle Marke (*nota*) denkt, durch Platons Einfluß das Wort στιγμή verdrängt hat, das gleichsam mehr Realität für den Punkt beansprucht.

Proklos *in Eucl.* S. 116, 17 ff. bemerkt, daß Platon und Aristoteles ἐπίπεδον und ἐπιφάνεια nicht unterscheiden. Platon hat nur ἐπίπεδον, aber allerdings bald in der Bedeutung Fläche (*Leges* 817e, *Menon* 76a, *Phileb.* 51c), bald für Plan (*Theaitet.* 173e, *Respubl.* 528a—d, auf welche letztere Stelle Proklos S. 116, 21 ff. sich irrtümlich für die Bedeutung ἐπιφάνεια zu berufen scheint). Aristoteles kennt schon ἐπιφάνεια im mathematischen Sinne (209^a 8, 1020^a 14, 1060^b 15), sagt aber auch noch ἐπίπεδον für Fläche (141^b 7, 22; 268^a 8, 1016^b 27), und zwar beides durcheinander 5^a 2: ἔστι γὰρ λαβεῖν κοινὸν ὅρον, πρὸς ὃν τὰ μόρια αὐτῆς συνάπτει, στιγμὴν καὶ τῆς ἐπιφανείας γραμμήν· τὰ γὰρ τοῦ ἐπιπέδου μόρια πρός τινα κοινὸν ὅρον συνάπτει. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ σώματος ἔχοις ἂν λαβεῖν κοινὸν ὅρον, γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν, πρὸς ἃ τὰ τοῦ σώματος μόρια συνάπτει. Noch bei Euklid (XI def. 11) kommt einmal ἐπιφάνεια statt ἐπίπεδον vor in einer Definition, die wahrscheinlich aus einem älteren Lehrbuch stammt (s. *Euclidis opp.* V S. LXXXIX), während er sonst genau unterscheidet I def. 5: ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει, def. 7: ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται. Letztere Definition ist offenbar der Definition der Geraden (I def. 4: εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται) nachgebildet, und da diese von der Platonischen (s. oben) abweicht, die noch Aristoteles als die gangbare voraussetzt, stammen sie wahrscheinlich alle beide von Euklid selbst. Dieser Tatbestand spricht nicht für die Richtigkeit der Notiz bei Diogenes Laertios III 24: (Πλάτων) πρῶτος ἐν φιλοσοφίᾳ . . . ὠνόμασε . . . τῶν περάτων τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν.

Von den bei Aristoteles erwähnten Definitionen stimmen mit Euklid die folgenden sachlich oder zugleich sprachlich:

231^a 25: ἡ στιγμὴ δὲ ἀδιαίρετον, vgl. 241^a 7: οὔτε στιγμὴν οὔτ' ἄλλο ἀδιαίρετον οὐθέν = Euklid I def. 1: σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

143^b 11: καθάπερ οἱ τὴν γραμμὴν ὁριζόμενοι μῆκος ἀπλατὲς εἶναι = Euklid I def. 2: γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

1035^b 6: ὁ δὲ τῆς ὀρθῆς λόγος οὐ διαιρεῖται εἰς ὀξείας λόγον, ἀλλὰ τῆς ὀξείας εἰς ὀρθήν· χρῆται γὰρ ὁ ὁριζόμενος τὴν ὀξεῖαν τῇ ὀρθῇ· ἐλάττων γὰρ ὀρθῆς ἡ ὀξεῖα (vgl. 1034^b 28, 1084^b 8), 107^a 16: γωνία δὲ ὀξεῖα ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς = Euklid I def. 12: ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

286^b 13: ἅπαν δὴ σχῆμα ἐπίπεδον ἢ εὐθύγραμμόν ἐστιν ἢ περιφερόγραμμον, καὶ τὸ μὲν εὐθύγραμμον ὑπὸ πλειόνων περιέχεται γραμμῶν, τὸ δὲ περιφερόγραμμον ὑπὸ μιᾶς (vgl. 414^b 20: εἷς ἂν εἴη λόγος ψυχῆς τε καὶ σχήματος· οὔτε γὰρ ἐκεῖ σχῆμα παρὰ τὸ τρίγωνόν ἐστι καὶ τὰ ἐφεξῆς, οὔτ' ἐνταῦθα ψυχὴ παρὰ τὰς εἰρημένας. γένοιτο δ' ἂν καὶ ἐπὶ τῶν σχημάτων λόγος κοινός, ὃς ἐφαρμόσει μὲν πᾶσιν, ἴδιος δ' οὐδενὸς ἔσται σχήματος; 90^b 34: ἐν δὲ τῷ ὁρισμῷ οὐδὲν ἕτερον ἑτέρου κατηγορεῖται, οἷον οὔτε τὸ ζῷον κατὰ τοῦ δίποδος οὔτε τοῦτο κατὰ τοῦ ζῴου, οὐδὲ δὴ κατὰ τοῦ ἐπιπέδου τὸ σχῆμα· οὐ γάρ ἐστι τὸ ἐπίπεδον σχῆμα οὐδὲ τὸ σχῆμα ἐπίπεδον) = Euklid I def. 15: σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον, darauf def. 15: κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον usw., def. 18: ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα usw., def. 19: σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα. Zu bemerken ist, daß Aristoteles 188^a 25: σχήματος (γένη) γωνία εὐθὺ περιφερές das Wort in etwas weiterer Bedeutung nimmt. Durch Einführung des Begriffs ὅρος (I def. 13: ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας) hat Euklid gerade γωνία ausgeschlossen; wahrscheinlich gehört also diese Definition (13) und die entsprechende Änderung von def. 14 ihm selbst.

1023^b 12: μέρος λέγεται ἕνα μὲν τρόπον, εἰς ὃ διαιρεθείη ἂν τὸ ποσὸν ὁπωσοῦν· ἀεὶ γὰρ τὸ ἀφαιρούμενον τοῦ ποσοῦ, ᾗ ποσόν, μέρος λέγεται ἐκείνου, οἷον τῶν τριῶν τὰ δύο μέρος λέγεταί πως. ἄλλον δὲ τρόπον τὰ καταμετροῦντα τῶν τοιούτων μόνον· διὸ τὰ δύο τῶν τριῶν ἔστι μὲν ὡς λέγεται μέρος, ἔστι δ' ὡς οὔ (vgl. 218^a 6: μετρεῖ τε γὰρ τὸ μέρος) = Euklid V def. 1: μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον, VII def. 3: μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα (vgl. VII def. 4: μέρη δέ, ὅταν μὴ καταμετρῇ).

99^a 11: τοῦ δ' ὅμοιον εἶναι χρῶμα χρώματι καὶ σχῆμα σχήματι ἄλλο ἄλλῳ· ὁμώνυμον γὰρ τὸ ὅμοιον ἐπὶ τούτων. ἔνθα μὲν γὰρ ἴσως τὸ ἀνάλογον ἔχειν τὰς πλευρὰς καὶ ἴσας τὰς γωνίας = Euklid VI def. 1: ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον. Aus ἴσως bei Aristoteles 99^a 13 scheint zu folgen, daß die Definition zu seiner Zeit in den Lehrbüchern noch nicht feststand. Vgl. 1054^b 3: ὅμοια δέ, ἐὰν μὴ ταὐτὰ ἁπλῶς ὄντα μηδὲ κατὰ τὴν οὐσίαν ἀδιάφορα τὴν συγκειμένην κατὰ τὸ εἶδος ταὐτὰ ᾖ, οἷον τὸ μεῖζον τετράγωνον τῷ μικρῷ ὅμοιον.

1039^a 12: εἴπερ ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς σύνθεσις μονάδων, ὥσπερ λέγεται ὑπό τινων, 1057^a 2: ἔστι γὰρ ἀριθμὸς πλῆθος ἑνὶ μετρητόν = Euklid VII def. 2: ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

142^b 8: περιττὸν τὸ μονάδι μεῖζον ἀρτίου = Euklid VII def. 7: περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ. Also hat Euklid hier wie XI def. 11 (s. oben) die ältere Definition beibehalten neben der wahrscheinlich von ihm selbst gebildeten, die der Definition des ἄρτιος ἀριθμός entspricht (VII def. 6: ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος).

209^a 5: τρία, μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος, οἷς ὁρίζεται σῶμα πᾶν, 142^b 23: ἐν ἅπασι δὲ τὸ τοιοῦτον ἁμάρτημά ἐστιν, ἐν οἷς οὐ πρόκειται τοῦ λόγου τὸ τί ἐστιν, οἷον ὁ τοῦ σώματος ὁρισμὸς τὸ ἔχον τρεῖς διαστάσεις ... οὐ γὰρ εἴρηται, τί ὂν τρεῖς ἔχει διαστάσεις. Trotz diesem Tadel des Aristoteles hat Euklid diese Definition beibehalten, XI def. 1: στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον, wahrscheinlich wegen der Analogie mit den Definitionen von Linie und Fläche (I def. 2 und 5). Die Drei-Dimensionalität bezeichnet Aristoteles auch sonst als Definitionseigenschaft des σῶμα im Gegensatz zu Linie und Fläche, s. 268^a 7: τὸ μὲν ἐφ' ἓν γραμμή, τὸ δ' ἐπὶ δύο ἐπίπεδον, τὸ δ' ἐπὶ τρία σῶμα; 1016^b 25: τὸ δὲ πάντῃ (sc. ἀδιαίρετον) καὶ θέσιν ἔχον στιγμή, τὸ δὲ μοναχῇ (sc. διαιρετόν) γραμμή, τὸ δὲ διχῇ ἐπίπεδον, τὸ δὲ πάντῃ καὶ τριχῇ διαιρετὸν κατὰ τὸ ποσὸν σῶμα; 1020^a 11: μεγέθους δὲ τὸ μὲν ἐφ' ἓν συνεχὲς μῆκος, τὸ δ' ἐπὶ δύο πλάτος, τὸ δ' ἐπὶ τρία βάθος. τούτων δὲ πλῆθος μὲν τὸ πεπερασμένον ἀριθμός, μῆκος δὲ γραμμή, πλάτος δὲ ἐπιφάνεια, βάθος δὲ σῶμα. Neben σῶμα benutzt Aristoteles auch das bei Euklid allein gebräuchliche στερεόν (so στερεὰ σχήματα 286^b 12: περὶ τῶν σχημάτων, τὸ ποῖόν ἐστι πρῶτον, καὶ ἐν ἐπιπέδοις καὶ ἐν στερεοῖς; vgl. 306^b 7), besonders wo es sich von mathematischen Körpern handelt; der Unterschied ist deutlich 193^b 24: καὶ γὰρ ἐπίπεδα καὶ στερεὰ ἔχει τὰ φυσικὰ σώματα καὶ μήκη καὶ στιγμάς, περὶ ὧν σκοπεῖ ὁ μαθηματικός; 304^a 13: ὅτι τὰ μὲν σώματα πάντα σύγκειται ἐκ τοῦ λεπτομερεστάτου, τὰ δὲ σχήματα τὰ στερεὰ ἐκ τῶν πυραμίδων. Eine andere Definition des σῶμα wird angedeutet 204^b 5: εἰ γάρ ἐστι σώματος λόγος τὸ ἐπιπέδῳ ὡρισμένον; 1066^b 23: εἰ γὰρ σώματος λόγος τὸ ἐπιπέδοις ὡρισμένον. Sie hängt offenbar zusammen mit den 141^b 19 ff. (s. oben) getadelten Definitionen von Punkt, Linie und Fläche, die Euklid (I def. 3 und 6) nicht als eigentliche Definitionen aufführt; dementsprechend hat er auch für das στερεόν diese ältere Definition der eigentlichen untergeordnet XI def. 2: στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια, und dieses Kompromiß wird ihm selbst gehören. Vgl.

noch 1090^b 5: εἰσὶ δέ τινες, οἳ ἐκ τοῦ πέρατα εἶναι καὶ ἔσχατα τὴν στιγμὴν μὲν γραμμῆς, ταύτην δ' ἐπιπέδου, τοῦτο δὲ τοῦ στερεοῦ usw., und für diese Reihe von Definitionen überhaupt 141^b 5: ἁπλῶς μὲν οὖν γνωριμώτερον τὸ πρότερον τοῦ ὑστέρου, οἷον στιγμὴ γραμμῆς καὶ γραμμὴ ἐπιπέδου καὶ ἐπίπεδον στερεοῦ, καθάπερ καὶ μονὰς ἀριθμοῦ ... ἡμῖν δ' ἀνάπαλιν ἐνίοτε συμβαίνει· μάλιστα γὰρ τὸ στερεὸν ὑπὸ τὴν αἴσθησιν πίπτει, τὸ δ' ἐπίπεδον μᾶλλον τῆς γραμμῆς, γραμμὴ δὲ σημείου μᾶλλον.

Von den bei Euklid definierten mathematischen Begriffen werden, von den landläufigen abgesehen (wie τμῆμα κύκλου 1034^b 25, 1035^a 9), außerdem die folgenden von Aristoteles als bekannt vorausgesetzt:

τρίγωνον ἰσοσκελές, ἰσόπλευρον, σκαληνόν Euklid I def. 20 — 224^a 4: οὐδὲ τρίγωνα τὰ αὐτὰ τὸ ἰσόπλευρον καὶ τὸ σκαληνές (vgl. 74^a 27, 84^b 6); 1016^a 31: τὸ ἰσοσκελὲς καὶ τὸ ἰσόπλευρον ταὐτὸ καὶ ἓν σχῆμα.

τετράγωνον, ἑτερόμηκες Euklid I def. 22 — 11^a 10: οὐδὲν γὰρ μᾶλλον τὸ τετράγωνον τοῦ ἑτερομήκους κύκλος ἐστίν. ἑτερόμηκες kommt bei Euklid nur in der Definition vor; durch Aristoteles wird die Annahme Tannerys (s. *Euclidis opp.* V S. LXXXIX) bestätigt, daß diese Definition sowie mehrere andere aus älteren Lehrbüchern herübergenommen sind als στοιχεῖα des mathematischen Sprachgebrauchs. ἑτερόμηκες ist wie γνώμων (und καμπύλος) pythagoreische Erbschaft (986^a 26).

γνώμων Euklid II def. 2 — 15^a 30: τὸ τετράγωνον γνώμονος περιτεθέντος ηὔξηται μέν, ἀλλοιότερον δὲ οὐδὲν γεγένηται (von Zahlen als pythagoreisch angeführt 203^a 13 ff.).

ἐναλλάξ Euklid V def. 12—99^a 8: διὰ τί καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον (vgl. 74^a 18). Die von Eudoxos aufgestellte allgemeine Proportionslehre (Euklid V) ist natürlich dem Aristoteles bekannt, s. 85^a 36: ἔστι δ' ἡ μὲν καθόλου (sc. ἀπόδειξις) τοιαύτη· προιόντες γὰρ δεικνύουσιν, ὥσπερ περὶ τοῦ ἀνὰ λόγον, οἷον ὅτι, ὃ ἂν ᾖ τι τοιοῦτον, ἔσται ἀνὰ λόγον, ὃ οὔτε γραμμὴ οὔτ' ἀριθμὸς οὔτε στερεὸν οὔτ' ἐπίπεδον, ἀλλὰ παρὰ ταῦτά τι; und zwar als eine Neuerung, s. 74^a 17: καὶ τὸ ἀνὰ λόγον ὅτι ἐναλλάξ, ᾗ ἀριθμοὶ καὶ ᾗ γραμμαὶ καὶ ᾗ στερεὰ καὶ ᾗ χρόνοι, ὥσπερ ἐδείκνυτό ποτε χωρίς, ἐνδεχόμενόν γε κατὰ πάντων μιᾷ ἀποδείξει δειχθῆναι· ἀλλὰ διὰ τὸ μὴ εἶναι ὠνομασμένον τι πάντα ταῦτα ἓν ἀριθμοὶ μήκη χρόνος στερεὰ καὶ εἴδει διαφέρειν ἀλλήλων χωρὶς ἐλαμβάνετο· νῦν δὲ καθόλου δείκνυται. Vgl. 1131^a 30: τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον, ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ.

ἀριθμὸς ἄρτιος, περισσός Euklid VII def. 6—7, τετράγωνος, κύβος Euklid VII def. 19—20 — 76^b 6: τὰ δὲ τούτων πάθη καθ' αὑτά, τί μὲν σημαίνει ἕκαστον, λαμβάνουσιν, οἷον ἡ μὲν ἀριθμητική, τί περιττὸν ἢ ἄρτιον ἢ τετράγωνον ἢ κύβος; 1055^b 24: ἀλλ' ἀνάγκη εἶναι ἢ περιττὸν ἢ ἄρτιον; 73^b 20: ἀριθμῷ (sc. ὑπάρχει) τὸ περιττὸν ἢ τὸ ἄρτιον; vgl. 96^a 29. —

1092^{b} 11: *ὥσπερ οἱ τοὺς ἀριθμοὺς ἄγοντες εἰς τὰ σχήματα τρίγωνον καὶ τετράγωνον*; 1093^{a} 6: *ἐνίους μὲν τούτων τετραγώνους εἶναι, ἐνίους δὲ κύβους, καὶ ἴσους, τοὺς δὲ διπλασίους.*

ἀρτιάκις ἄρτιος, ἀρτιάκις περισσός Euklid VII def. 8—9; der Sache nach angedeutet 1084^{a} 3: *ἡ δὲ γένεσις τῶν ἀριθμῶν ἢ περιττοῦ ἀριθμοῦ ἢ ἀρτίου ἀεί ἐστιν, ὡδὶ μὲν τοῦ ἑνὸς εἰς τὸν ἄρτιον πίπτοντος περιττός, ὡδὶ δὲ τῆς μὲν δυάδος ἐμπιπτούσης ὁ ἀφ' ἑνὸς διπλασιαζόμενος, ὡδὶ δὲ τῶν περιττῶν ὁ ἄλλος ἄρτιος.* Vgl. Euklid IX 32.

πρῶτος, σύνθετος Euklid VII def. 12 und 14, *ἐπίπεδος, στερεός* Euklid VII def. 17—18 — 1020^{b} 3: *ὥσπερ οἱ ἀριθμοὶ ποιοί τινες, οἷον οἱ σύνθετοι καὶ μὴ μόνον ἐφ' ἓν ὄντες, ἀλλ' ὧν μίμημα τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ στερεόν· οὗτοι δ' εἰσὶν οἱ ποσάκις ποσοὶ ἢ ποσάκις ποσάκις ποσοί*; 73^{a} 39: *τὸ περιττὸν καὶ ἄρτιον ἀριθμῷ* (sc. *ὑπάρχει*) *καὶ τὸ πρῶτον καὶ σύνθετον καὶ ἰσόπλευρον καὶ ἑτερόμηκες* (die beiden letzten Termini nicht von Zahlen bei Euklid, der von der Arithmetik nur gibt, was für Buch X nötig ist, s. meine *Studien über Euklid* S. 30 ff.). Zu bemerken ist noch, daß 2 als Primzahl gilt nach 157^{a} 39: *καθάπερ ἡ δυὰς τῶν ἀρτίων μόνος ἀριθμὸς πρῶτος*, was ebenfalls nach der Euklidischen Definition (VII def. 12: *πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος*) der Fall ist, wie Jamblichos *in Nikomach.* S. 30, 27 ff. *ed. Pistelli* tadelnd hervorhebt. Diese Abweichung von der Pythagoreischen Lehre (*Nikomach.* I 11, 2) ist also älter als Euklid. Vgl. Aristoteles 1052^{a} 8: *ἄρτιον ἀριθμὸν πρῶτον εἶναι μηθένα*, was mit der obigen Äußerung verglichen einiges Schwanken verrät.

ἄλογον Euklid X def. 4 — 76^{b} 9: *ἡ δὲ γεωμετρία* (sc. *λαμβάνει, τί σημαίνει*) *τί τὸ ἄλογον.* Auch *δύναμις* Quadrat ist natürlich dem Aristoteles bekannt, s. 1019^{b} 33: *κατὰ μεταφορὰν δὲ ἡ ἐν τῇ γεωμετρίᾳ λέγεται δύναμις*; vgl. 1046^{a} 7.

In allen diesen Fällen liegt kein Grund vor, bei Aristoteles eine andere Fassung der Definition anzunehmen als die Euklidische. Anders verhält es sich mit folgenden.

Eine genauere Einteilung der Linien — Euklid I def. 2—4 berücksichtigt neben dem Gattungsbegriff *γραμμή* nur die Spezies *εὐθεῖα* — wird vorausgesetzt 73^{b} 19: *οἷον γραμμῇ* (sc. *ὑπάρχει*) *τὸ εὐθὺ ἢ τὸ καμπύλον*; 402^{b} 19: *ὥσπερ ἐν τοῖς μαθήμασι, τί τὸ εὐθὺ καὶ καμπύλον ἢ τί γραμμὴ καὶ ἐπίπεδον*; 73^{a} 38: *οἷον τὸ εὐθὺ ὑπάρχει γραμμῇ καὶ τὸ περιφερές* (vgl. 268^{b} 20), was dem Platonischen Sprachgebrauch entspricht (*Parmenid.* 137 e: *οὔτε ἄρα εὐθὺ οὔτε περιφερές ἐστιν*; *Phileb.* 51 c: *εὐθύ τι λέγω, φησὶν ὁ λόγος, καὶ περιφερές*). Auch gebrochene Linien waren in den voreuklidischen Lehrbüchern, doch wohl bei der Definition der *γραμμαί*, berücksichtigt, s. 1016^{a} 2: *καὶ γραμμή, κἂν κεκαμμένη ᾖ συνεχὴς δέ, μία λέγεται*; 1016^{a} 12: *ἡ εὐθεῖα τῆς κεκαμμένης μᾶλλον ἕν*; 76^{b} 9: *ἡ δὲ γεωμετρία* (sc. *λαμβάνει*), *τί τὸ ἄλογον ἢ τὸ κεκλάσθαι*; 228^{b} 23: *ἡ τῆς κεκλασμένης κίνησις.* Spuren dieses Sprachgebrauchs haben sich noch bei Euklid erhalten, *Elem.* III 20 S. 220, 6 *κεκλάσθω δὴ πάλιν* und *Data* 89 *ἐὰν . . . κλασθῇ τις εὐθεῖα δεδομένην γωνίαν ποιοῦσα.* Euklid hat also das Wort *κλᾶσθαι* als gemeinverständlich nicht definieren wollen und gegen sein sonstiges Verfahren technische Termini der früheren Lehrbücher weggelassen, weil sie nur für die vollständige Gliederung des Begriffs, nicht aber für die *στοιχεῖα* notwendig waren (wie schon Proklos *in Elem.* S. 74, 24 ff. bemerkt). Archimedes hat daher den Begriff der *καμπύλη γραμμή* wieder aufnehmen und erläutern müssen *De sph. et cyl.* I S. 6, 14 ff., und in den Heronischen Definitionen hat das alte Definitionssystem wider Gewohnheit den Sieg über das Euklidische davongetragen, s. Heron deff. 4: *τῶν γραμμῶν αἱ μέν εἰσιν εὐθεῖαι, αἱ δὲ οὔ· καὶ τῶν μὴ*[1]) *εὐθειῶν αἱ μέν εἰσι κυκλικαὶ περιφέρειαι ὀνομαζόμεναι, αἱ δὲ ἑλικοειδεῖς, αἱ δὲ καμπύλαι* (5: *τίς εὐθεῖα γραμμή*, 6: *τίνες αἱ κυκλικαὶ γραμμαί*, 7: *τίνες αἱ καμπύλαι γραμμαί*, 8: *τίνες αἱ ἑλικοειδεῖς γραμμαί*); die gebrochenen Linien werden Def. 14 bei Gelegenheit des Winkels nachgetragen: *κεκλασμένη δὲ λέγεται γραμμή, ἥτις ἐκβαλλομένη οὐ συμπίπτει αὐτῇ καθ' αὑτήν.* Es ist im Vergleich mit Heron bemerkenswert, daß die Schraubenlinie auch bei Aristoteles (neben der *κεκλασμένη*) auftritt, s. 228^{b} 24: *οἷον ἡ τῆς κεκλασμένης κίνησις ἢ ἡ τῆς ἕλικος ἢ ἄλλου μεγέθους, ὧν μὴ ἐφαρμόττει τὸ τυχὸν ἐπὶ τὸ τυχὸν μέρος.*

Freilich ist es sehr wenig wahrscheinlich, daß die alte Einteilung der *γραμμαί* im einzelnen bei Heron erhalten wäre. Proklos *in Elem.* S. 103—4 behauptet, daß Platon und Aristoteles die *γραμμαί* in *εὐθεῖαι, περιφερεῖς* und *μικταί* teilen; das ist aber nicht ganz richtig. Aristoteles (*de caelo* I 2, 268^{b} 17 ff.) sagt, daß *ἡ εὐθεῖα* und *ἡ περιφερής* als *ἁπλαῖ* zu betrachten sind, und daß daher *πᾶσα κίνησις ὅση κατὰ τόπον, ἣν καλοῦμεν φοράν, ἢ εὐθεῖα ἢ κύκλῳ ἢ ἐκ τούτων μικτή* sei, was mit der mathematischen Einteilung der *γραμμαί* nicht zusammenfällt. Platon spricht allerdings (*Parmenid.* 137 e: *στρογγύλον γέ πού ἐστι τοῦτο, οὗ ἂν τὰ ἔσχατα πανταχῇ ἀπὸ τοῦ μέσου ἴσον ἀπέχῃ*), als ob es neben der *εὐθεῖα* nur die Kreislinie gäbe, und dazu stimmen die angeführten Stellen des Aristoteles 73^{a} 38, 268^{b} 20 (*αἱ ἴσαι γραμμαὶ εὐθεῖαι* 1054^{b} 1). Das kann aber unmöglich in den mathematischen Lehrbüchern so gestanden haben. Nach Aristoteles 73^{b} 19 (s. oben) möchte man vermuten, daß die *γραμμαί*, nach Ausscheidung der *κεκλασμέναι*, nach dem pythagoreischen Schema (986^{a} 25) in *εὐθεῖαι* und *καμπύλαι* eingeteilt wurden; von letzteren müßte dann die *περιφερής* (*κύκλου γραμμή* 373^{a} 5) eine Spezies

1) *μέν* bei Hultsch ist Schreibfehler.

gewesen sein, definiert wie στρογγύλον in der Parmenidesstelle als Vorbereitung zur Definition des Kreises (etwa σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ γραμμῆς περιφεροῦς περιεχόμενον). Doch bleibt das unsicher, und 1407^b 27: τὸ λόγῳ χρῆσθαι ἀντ' ὀνόματος, οἷον μὴ κύκλον ἀλλ' ἐπίπεδον τὸ ἐκ τοῦ μέσου ἴσον scheint die Euklidische Definition des Kreises vorauszusetzen; 1020^a 35: κύκλος ποιόν τι σχῆμα ὅτι ἀγώνιον lehrt nichts. Das Wort περιφέρεια kam schwerlich in der Definition des Kreises vor. Platon kennt es noch nicht, Aristoteles verwendet es bald im allgemeinen Sinne (350^a 11, 492^a 31, 494^b 14, 498^a 7, 502^b 2, 542^a 16, 656^b 28, 680^b 22, 704^a 19, 758^b 10), bald im engeren mathematischen (vom Regenbogen 372^a 3, 375^a 2, ^{b} 4, als Gegensatz zu εὐθύτης 385^b 30, στρογγύλα καὶ περιφέρειαν ἔχοντα 559^a 29) und zwar sowohl für Kreisbogen (217^b 3, 240^b 2, 264^b 25, 1102^a 31) als für Umkreis (340^b 35). Euklid war also vollkommen berechtigt, das Wort als gemeinverständlich, ohne besondere mathematische Bedeutung, undefiniert zu lassen. Von den beiden Interpolationen ἣ καλεῖται περιφέρεια und πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν I def. 15 abgesehen, die in vielen Quellen fehlen (*Euclidis opp.* V S. XCI, hinzugekommen ein Papyrus aus Herculanum, *Oversigt over Vidensk. Selskabs Forhandlinger* 1900 S. 161), und nur aus Rücksicht auf die folgenden Definitionen entstanden sind, tritt das Wort unvermittelt auf I def. 17—18 und wird dann öfters verwendet sowohl für Kreisbogen (III def. 6—10, III 26—32, 36) als für (den ganzen) Umkreis (III 2, 8, 16, 37), beides sogar dicht nebeneinander (III 20, 21).

In der Proportionslehre kennt Aristoteles die Bezeichnung ὅρος für Glied 1131^b 5, 9, die Euklid V def. 8: ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν unvermittelt einführt. Diese Definition lautet 1131^a 31: ἡ γὰρ ἀναλογία ... ἐν τέτταρσιν ἐλαχίστοις (so auch cod. V im Euklid), aber der Unterschied ist nur formell, wie Z. 33 ff. zeigt (τῷ γὰρ ἑνὶ ὡς δυσὶ χρῆται καὶ δὶς λέγει, οἷον, ὡς ἡ τοῦ α̅ πρὸς τὴν τοῦ β̅, οὕτως καὶ ἡ τοῦ β̅ πρὸς τὴν τοῦ γ̅· δὶς οὖν ἡ τοῦ β̅ εἴρηται· ὥστ' ἐὰν ἡ τοῦ β̅ τεθῇ δίς, τέτταρα ἔσται τὰ ἀνάλογα). Ein reeller Unterschied liegt in der Beibehaltung der Termini ἡ μὲν οὖν διῃρημένη (ἀναλογία) ὅτι ἐν τέτταρσι, δῆλον· ἀλλὰ καὶ ἡ συνεχής 1131^a 32 und καλοῦσι δὲ τὴν τοιαύτην ἀναλογίαν γεωμετρικὴν οἱ μαθηματικοί 1131^b 12, während Euklid diese pythagoreische (*Nikomachos* II 22, 1; 23, 3, wo συνημμένη statt συνεχής) Erbschaft nicht berücksichtigt (διῃρημένα bei ihm anders V 18). Derselben Quelle entstammt vermutlich ἡ γὰρ ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγων 1131^a 31; eine ähnliche Definition, ἀναλογία δὲ ἡ τῶν λόγων ταυτότης oder ὁμοιότης, ist in vielen Hss. bei Euklid interpoliert (s. *Opp.* II S. 2, 5 und 4, 6 not.).

Eine Definition der Kugel, die der Euklidischen Definition des Kreises

(und der angeführten 1407^b 27) entspricht, wird vorausgesetzt 1033^b 14: εἰ δή ἐστι σφαῖρα τὸ ἐκ τοῦ μέσου σχῆμα ἴσον, 287^a 19: εἴ τι ἄλλο σχῆμα (als die Kugel) γένοιτο, μὴ ἴσας ἔχον τὰς ἐκ τοῦ μέσου γραμμάς. Die Euklidische (XI def. 14), die eigentlich eine Beschreibung ihrer Entstehung ist, wird wohl von ihm selbst herrühren. Dasselbe muß dann auch von den ganz analogen Definitionen des Kegels (XI def. 18) und des Zylinders (XI def. 21) gelten, was dadurch bestätigt wird, daß die Bezeichnung ἄξων, die von den Euklidischen Definitionen nicht getrennt werden kann, dem Aristoteles[1]) noch nicht im mathematischen Sinne geläufig ist, s. 375^b 21: ἐὰν αἱ ἀπὸ τοῦ Κ γραμμαὶ κατὰ κῶνον ἐκπίπτουσαι ποιῶσιν ὥσπερ ἄξονα τὸν ἐφ' ᾗ ἡ ΗΚ (nachher ohne weiteres ἄξων 376^b 30), mit der richtigen Bemerkung Olympiodors (Ideler, *Meteorol.* II S. 150): καλῶς δ' εἶπεν οἷον ἄξονα, ἐπειδὴ οὐ κυρίως ἐστὶν οὗτος ἄξων, ἀλλὰ νοεῖται, ἐπειδὴ κατὰ περιαγωγὴν τῶν τριγώνων γίνεται οὗτος ἄξων, ἐπειδὴ κυρίως ἡ κάθετός ἐστιν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐπὶ τὸ νέφος πεμπομένη. Von βάσις (und κορυφή) eines Kegels (Euklid XI def. 20) spricht Aristoteles 362^b 2 ff.

τετράγωνον ist schon bei den Pythagoreern Quadrat (986^a 26) und so auch meist bei Aristoteles (z. B. 11^a 10, 15^a 30, 306^b 6, zweifelhaft 272^b 19), aber 414^b 31 scheint es Viereck zu bedeuten, und 1054^a 2: τὰ ἴσα καὶ[2]) ἰσογώνια τετράγωνα muß es Viereck sein, wenn ἰσογώνια einen Sinn haben soll (1054^b 5 ist an und für sich beides möglich). Wahrscheinlich hat Euklid dieses Schwanken beseitigt, wenigstens im mathematischen Sprachgebrauch, durch Einführung des Terminus τετράπλευρον I def. 19, dessen Schluß: τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα ohne Zweifel ihm selbst gehört. Weder Platon noch Aristoteles kennt die drei hier definierten Wörter (wohl aber die *Mechanik* 848^b 20 und die *Probleme* 911^b 3 τετράπλευρον).

Bei der Definition der μονάς (VII def. 1: μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται) hat Euklid jede Erinnerung an die pythagoreische Spielerei mit Punkt und Monade weggeworfen, die noch bei Aristoteles spukt, s. 72^a 21: τίθεται γὰρ ὁ ἀριθμητικὸς μονάδα τὸ ἀδιαίρετον εἶναι κατὰ τὸ ποσόν, 1089^b 35: καὶ ἡ μονάς, εἰ μὴ μέτρον, ὅτι τὸ κατὰ τὸ ποσὸν ἀδιαίρετον und deutlicher 1016^b 24: τὸ μὲν οὖν κατὰ τὸ ποσὸν καὶ ᾗ ποσὸν ἀδιαίρετον τὸ μὲν πάντῃ καὶ ἄθετον λέγεται μονάς, τὸ δὲ πάντῃ καὶ θέσιν ἔχον στιγμή, 29: τὸ δὲ μηδαμῇ διαιρετὸν κατὰ τὸ ποσὸν στιγμὴ καὶ μονάς,

---

1) Dagegen Περὶ κόσμου 391^b 24: καλοῦνται δ' οὗτοι πόλοι, δι' ὧν εἰ νοήσαιμεν ἐπεζευγμένην εὐθεῖαν, ἥν τινες ἄξονα καλοῦσι, διάμετρος ἔσται τοῦ κόσμου.

2) καὶ τά die Hss., das richtige *Alexandros* S. 615, 30 *ed. Hayduck*.

ἡ μὲν ἄθετος μονάς, ἡ δὲ θετὸς στιγμή, 87^a 36: μονὰς οὐσία ἄθετος, στιγμὴ δὲ οὐσία θετός; jedoch bekämpft er die Identifikation der beiden Begriffe bei den Pythagoreern, s. 1084^b 23 ff. (26: ἡ γὰρ μονὰς στιγμὴ ἄθετός ἐστιν, vgl. Proklos *in Elem.* S. 95, 21: οἱ Πυθαγόρειοι τὸ σημεῖον ἀφορίζονται μονάδα προσλαβοῦσαν θέσιν, Aristot. 88^a 23: αἱ μονάδες ταῖς στιγμαῖς οὐκ ἐφαρμόττουσιν· αἱ μὲν γὰρ οὐκ ἔχουσι θέσιν, αἱ δὲ ἔχουσιν), vgl. 227^a 27: εἰ ἔστι στιγμὴ καὶ μονάς, οἵας λέγουσι κεχωρισμένας, οὐχ οἷόν τε εἶναι μονάδα καὶ στιγμὴν τὸ αὐτό, 1069^a 12: ὥστ' οὐκ ἔστι στιγμὴ μονάδι ταὐτόν. Hervorgegangen ist die Euklidische Definition aus Stellen wie 1057^a 4: ἀντίκειταί πως τὸ ἓν καὶ ἀριθμός, οὐχ ὡς ἐναντίον, ἀλλ' ὥσπερ εἴρηται τῶν πρός τι ἔνια· ᾗ γὰρ μέτρον, τὸ δὲ μετρητόν, ταύτῃ ἀντίκειται. διὸ οὐ πᾶν, ὃ ἂν ᾖ ἕν, ἀριθμός ἐστιν (daher τῶν ὄντων bei Euklid).

Es ist auffallend, daß Aristoteles 76^b 9 (ἡ δὲ γεωμετρία, τί τὸ ἄλογον ἢ τὸ κεκλάσθαι ἢ νεύειν, sc. λαμβάνει) neben Definitionen der Elementarmathematik auch die des νεύειν als geläufiges Beispiel anführt; denn die νεύσεις sind von den Elementen ausgeschlossen und werden, später wenigstens, durch Kegelschnitte gelöst. Es liegt nahe, hierin eine Bestätigung der Ansicht von Oppermann und Zeuthen (*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* S. 261 ff.) zu sehen, daß die νεύσεις früher auf mechanischem Wege bewerkstelligt wurden und so auch in der elementaren Mathematik eine Rolle spielen konnten; von den Kegelschnitten, die sein Mitschüler Menaichmos entdeckt hatte, verrät Aristoteles nicht die geringste Kenntnis, und daß er mehrfach die Versuche der Kreisquadratur berücksichtigt (69^a 30, 75^b 40, 171^b 15, 185^a 16; über die Natur des Problems ist er sich nicht im klaren, s. 7^b 31, vgl. 248^a 18—25), darf bei der Berühmtheit des Problems nicht so verallgemeinert werden, als ob er überhaupt in der höheren Mathematik zu Hause wäre und das gleiche bei seinen Hörern und Lesern voraussetzen dürfte. Ebensowenig beweist die Erwähnung der Analysis (175^a 27: καθάπερ ἐν τοῖς διαγράμμασιν· καὶ γὰρ ἐκεῖ ἀναλύσαντες ἐνίοτε συνθεῖναι πάλιν ἀδυνατοῦμεν); denn die von Platon inaugurierte analytische Methode konnte auch in den Elementen zur Verwendung kommen (*Euclidis opp.* V S. LXXXIV).

Ein paar längere mathematische Stellen (373^a 4—17, 375^b 19 bis 376^b 22) gestatten uns einen Einblick in die mathematische Redeweise der Zeit im allgemeinen; sie stimmt in Form und Wortschatz wesentlich mit der Euklidischen, so ἐπεζεύχθω 373^a 10, 375^b 23, 376^a 17, 27; ἐπ' ἴσης (sc. βεβηκέναι) 373^a 10; ἤχθωσαν κάθετοι ἐπί .. ἀπό 373^a 11, αἱ κάθετοι πεσοῦνται 376^b 19, aber πρὸς ὀρθάς 373^a 14; κύκλον γράφειν 373^a 16 und κ. γρ. διαστήματι 376^b 8; προσπίπτειν πρὸς περιφέρειαν 375^b 25; ἀποληφθήσεται 27; ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω 31, 376^b 1; τομή 375^b 32, 376^a 7;

συσταθήσονται 376^a 2, 9, ^{b} 2 und τρίγωνα συνεστήκασιν ἐπί ^{b} 17—18; ἐκκείσθω ^{a} 10; τετμήσθω ὡς ^{a} 10; πεποιήσθω ^{a} 17; μὴ γὰρ ἔστω ἀλλ' ^{a} 21 (ἔστω pflegt bei Euklid zu fehlen); ὅπερ ἀδύνατον ^{b} 3, 12; γωνίαν ποιεῖν ^{b} 9—10, 15, 16; ὁμοίως δειχθήσεται ^{b} 10; πιπτέτωσαν ἐπὶ τὸ Ο ^{b} 20; ἐπεὶ οὖν ἡ Δ οὔτε πρὸς ἐλάττω τῆς ΠΜ οὔτε πρὸς μείζω· ὁμοίως γὰρ δείξομεν· δῆλον, ὅτι πρὸς αὐτήν ^{b} 3 ff.; λόγον ἔχειν ^{a} 23 usw. — alles leicht aus Euklid zu belegen. Abweichend ist außer ἐφάπτεσθαι für ἅπτεσθαι (376^a 6, ^{b} 8), ein Unterschied, der selbst in den Euklidhandschriften zuweilen verwischt wird (*Euclidis opp.* I S. 217, 23 adnot. crit., V S. LVII), eigentlich nur die Formel für die Proportion: ὥστ' εἶναι, ὅπερ (für ὡς) τὴν Δ πρὸς τὴν Β, (οὕτως gewöhnlich bei Euklid, doch kann es auch fehlen) τὴν ΒΖ πρὸς τὴν Δ 376^a 15, 16, 19, 25, ^{b} 6, 1131^b 14 (aber ὡς 1131^b 1, 5, 6). Un-Euklidisch ist ferner πρὸς ὀρθήν 272^b 25, 363^b 2, 709^a 16 (das richtige πρὸς ὀρθάς 373^a 14) und πρὸς ὁμοίας γωνίας 296^b 20, 311^b 34 statt πρὸς ἴσας γ., s. *Simplikios de caelo* S. 538, 21: ὁμοίας δὲ ἐκάλουν τὰς ἴσας γωνίας οἱ τὴν γωνίαν ὑπὸ τὸ ποιὸν ἀνάγοντες (wie Eudemos, βιβλίον περὶ γωνίας γράψας ποιότητα αὐτὴν εἶναι συνεχώρησεν, Proklos *in Elem.* S. 125, 7 ff.). Vgl. 1021^a 11: ὅμοια δ', ὧν ἡ ποιότης μία, ἴσα δέ, ὧν τὸ ποσὸν ἕν.

Weit bedeutender ist der Unterschied in der Bezeichnung der Buchstaben auf der Figur; hier scheint Euklid mit der alten schwerfälligen Weise, die z. B. auch im Hippokratesfragment des Eudemos vorkommt (Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides* S. 114 Anm.), gründlich aufgeräumt und der Inkonsequenz ein Ende gemacht zu haben. Es kommen vor: für den Punkt neben τὸ Α (373^a 6, 9, 15, 17, 375^b 20 usw.) ἐφ' ᾧ τὸ Α 373^a 6, 375^b 9, 10, 20, 21, 376^b 7, 14, 377^a 1, ἐφ' οὗ τὸ Β 363^b 1, 34, 377^a 6, οὗ τὸ Η 375^b 30, ἐφ' ᾧ Α 363^a 34, 376^b 32, ἐφ' οὗ Η 363^b 2, 3, 4, 5, 6, ähnlich 94^b 13; für die Gerade neben ἡ Δ (376^a 11, 14, 16, 20, 24, ^{b} 4) und ἡ ΑΒ (373^a 8, 9, 10, 11, 15, 375^b 31, 34 usw.) ἡ τὸ ΑΒ oder ἡ τὸ Δ 373^a 7, 12, 13, 376^a 16, 18, 26, ^{b} 1, 6, 7, ähnlich 94^a 32, ἡ ἐφ' ᾗ ἡ ΗΚ 375^b 22, ἐφ' ἧς τὸ Ζ 376^a 15, ^{b} 29, ἐφ' ᾧ τὸ ΗΠ 376^b 30, ἐφ' ᾗ ΜΠ 376^b 5, 8, 13, vgl. noch ἡ ΒΖ für αἱ Β, Ζ (Β + Ζ) 376^a 15, 25 und ähnlich γραμμή ἡ ΔΒ 376^a 10; ebenso κύκλος ὁ ἐφ' ᾧ Α 375^b 33, τοῦ ἐφ' ᾧ Α ἡμικυκλίου 376^a 2, aber 376^b 13 ἡμικύκλιον τὸ ἐφ' ᾧ τὸ Α, 377^a 7 τμῆμα ἡμικυκλίου τὸ ἐφ' ᾧ ΨΥΩ, τοῦ ΜΗ κύκλου 376^b 10, vgl. ὁρίζοντος τοῦ ἐφ' ᾧ τὸ ΑΓ 376^b 32, 377^a 3, περιφέρεια ἐφ' ἧς τὰ ΝΜ 376^a 7, ἡ περὶ τὸ ΓΖΔ περιφέρεια 373^a 17, ἡ ΜΝ περιφέρεια 376^b 2; für den Winkel (Euklid ἡ ὑπὸ ΑΒΓ) γωνία ἡ Γ 373^a 12, 13, 376^a 29, 41^b 17, 20, ἡ ΑΓ γωνία (d. i. Α + Γ) 41^b 16, γωνία ἡ ΚΜΗ 376^b 16, ἐφ' ἧς Α 94^a 29, 30; für das Dreieck neben τρίγωνον τὸ ΚΜΗ (376^a 1, 13, 30, ^{b} 18) τρίγωνον ἐν ᾧ τὸ ΗΚΜ 375^b 32, vgl. ἐπίπεδον ἐν ᾧ τὸ Α 375^b 31.

Noch sei bemerkt, daß *I* verwendet wird 363^{b} 28, 31, und daß nach *πρός* der Artikel einigemal fehlt (376^{a} 22, 25, ^{b} 7). Daß die Reihenfolge der Buchstaben bei derselben Größe sich nicht gleich bleibt, ist auch später Regel.

Von Sätzen, die bei Euklid stehen, kommen vor, meist nur angedeutet oder vorausgesetzt:

Elem. I 8: *ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴ ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην* — 373^{a} 8: *ἴσαι δ' αὗταί τε αἱ ΑΓ ΑΖ ΑΔ ἀλλήλαις καὶ αἱ πρὸς τὸ Β ἀλλήλαις οἷον αἱ ΓΒ ΖΒ ΔΒ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕΒ· ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα· καὶ γὰρ ἐπ' ἴσης τῆς ΑΕΒ.* Die Form der Schlußfolgerung spricht dafür, daß die dem Aristoteles vorliegende Gestaltung des Satzes nicht nur die Gleichheit der Winkel, sondern auch die der Dreiecke behauptete, welch letzteres Euklid fortläßt, weil er vorläufig in I 9 nur jenes braucht und weil es aus I 4 unmittelbar folgt. Wir sehen also hier an einem klaren Beispiel, wie ältere Bausteine von Euklid für den straffen Bau seiner *στοιχεῖα* umgemodelt wurden (vgl. Proklos *in Elem.* S. 269, 26 ff.). Daß Aristoteles so wenig wie Euklid ein Wort für kongruent hat, ist selbstverständlich; beide sagen dafür *ἴσος καὶ ἰσογώνιος* (1054^{b} 2: *τὰ ἴσα καὶ ἰσογώνια τετράγωνα*, Euklid VI 14: *τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων*).

I 12: *ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν* — 373^{a} 11: *ἤχθωσαν δὴ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΕΒ ἐκ τῶν γωνιῶν.*

I 19: *παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει* — 376^{a} 11: *μείζων δὲ ἡ ΜΗ τῆς ΜΚ . . . ὑπὸ γὰρ τὴν μείζω γωνίαν ὑποτείνει τοῦ*[1]) *ΚΜΗ τριγώνου.* Hier stimmen auch die Worte genau.

I 20: *παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι* — 709^{a} 32: *εἰ μὴ αἱ δύο τῆς μιᾶς μείζους ἦσαν.*

I 28: *ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι* — 74^{a} 13: *εἰ οὖν τις δείξειεν, ὅτι αἱ ὀρθαὶ* (senkrechte Geraden) *οὐ συμπίπτουσι, δόξειεν ἂν τούτου εἶναι ἡ ἀπόδειξις διὰ τὸ ἐπὶ πασῶν εἶναι τῶν ὀρθῶν. οὐκ ἔστι δέ, εἴπερ μή, ὅτι ὡδὶ ἴσαι* (sc. *αἱ γωνίαι, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός*), *γίνεται τοῦτο, ἀλλ' ᾗ ὁπωσοῦν ἴσαι*; 66^{a} 11: *ἐπεὶ ταὐτό γε ψεῦδος συμβαίνειν διὰ πλειόνων ὑποθέσεων οὐδὲν ἴσως ἄτοπον, οἷον τὰς παραλλήλους συμπίπτειν, καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ἐντὸς τῆς ἐκτός, καὶ εἰ τὸ τρίγωνον ἔχει πλείους ὀρθὰς δυεῖν.* Der erste Bedingungssatz zeigt, daß 74^{a} 13 auf *Elem.* I 28, nicht

1) So eine Hs., die übrigen *τὴν τοῦ*.

auf I 27, bezogen werden muß, der zweite, daß auch I 27 dem Aristoteles bekannt war; denn nur in diesem Satz kann die Summe der Dreieckswinkel eine Rolle spielen. Bei Euklid wird nur I 16 benutzt (*παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν*); seine Vorgänger scheinen aber unvorsichtig gewesen zu sein, s. 65^{a} 4: *ὅπερ ποιοῦσιν οἱ τὰς παραλλήλους οἰόμενοι γράφειν· λανθάνουσι γὰρ αὐτοὶ ἑαυτοὺς τοιαῦτα λαμβάνοντες, ἃ οὐχ οἷόν τε ἀποδεῖξαι μὴ οὐσῶν τῶν παραλλήλων.* Unter den *τοιαῦτα* ist wohl eben der Satz von der Summe der Dreieckswinkel. Die ältere Theorie der Parallelen muß also einen Zirkelschluß verschuldet haben. Leider sind die Worte des Aristoteles so unbestimmt (*παραλλήλους γράφειν!*), daß Näheres daraus nicht zu ermitteln ist; es läßt sich aber vermuten, daß diese Unklarheit der früheren Lehrbücher Euklid veranlaßt hat, das berühmte Parallelaxiom (*αἴτ.* 5) aufzustellen und I 16 vorauszuschicken vor dem vollständigen Satz (I 32). Vgl. noch 77^{b} 22: *τὸ δὲ τὰς παραλλήλους συμπίπτειν οἴεσθαι γεωμετρικόν πως καὶ ἀγεωμέτρητον ἄλλον τρόπον.*

I 31: *διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν* — 1051^{a} 25: *εἰ οὖν ἀνῆκτο ἡ παρὰ τὴν πλευράν.*

I 32: . . . *αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν* — *τὸ τρίγωνον ἔχει δυσὶν ὀρθαῖς ἀεὶ τὰς γωνίας ἴσας* 252^{b} 2, *τὰς τοῦ τριγώνου ὅτι δύο ὀρθαῖς ἴσαι* 449^{b} 20, *πᾶν τρίγωνον ἔχει δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας* 71^{a} 19, ähnlich 76^{a} 6, 200^{a} 17, 643^{a} 29, 742^{b} 26; *πρὸς τὸ κατιδεῖν, πόσαις ὀρθαῖς αἱ τοῦ τριγώνου γωνίαι ἴσαι* 402^{b} 20. Dieser Satz ist Lieblingsbeispiel des Aristoteles[1]), wo er eine allgemein angenommene Wahrheit bezeichnen will, und wird oft verkürzt, ja bis ins sinnlose verunstaltet angeführt, s. 67^{a} 15: *πᾶν τρίγωνον ἔχει δύο ὀρθάς*, ähnlich 281^{b} 5, 1025^{a} 32, 1026^{b} 12, 1052^{a} 6; *τὸ δὲ τρίγωνον κατὰ τὴν δυάδα, ἐπειδὴ δύο ὀρθαί* 287^{a} 1; *πᾶν τρίγωνον ὅτι δύο ὀρθαῖς* 67^{a} 17, ähnlich 1086^{b} 34; *δύο ὀρθαὶ τὸ τρίγωνον* 1051^{a} 24; *καὶ τῷ τριγώνῳ ᾗ τρίγωνον δύο ὀρθαί· καὶ γὰρ καθ' αὑτὸ τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαῖς ἴσον* 73^{b} 30, *ὑπάρχει παντὶ τριγώνῳ τὸ δύο* 85^{b} 11. Daß der Beweis schon zu Aristoteles' Zeit derselbe war als bei Euklid, beweist die Stelle 1051^{a} 24: *διὰ τί δύο ὀρθαὶ τὸ τρίγωνον; ὅτι αἱ περὶ μίαν στιγμὴν γωνίαι ἴσαι δύο ὀρθαῖς· εἰ οὖν ἀνῆκτο ἡ παρὰ τὴν πλευράν, ἰδόντι ἂν ἦν εὐθὺς δῆλον*, wo *ἀνῆκτο* nur mit Fig. 1 vereinbar ist, nicht mit Fig. 2. Alexandros S. 596, der Fig. 3 voraus-

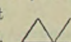
Fig. 1.

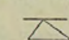
Fig. 2.

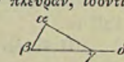

Fig. 3.

1) Schon von Proklos bemerkt, *in Elem.* S. 384, 7: *Ἀριστοτέλης πρόχειρον ἔχει τὸ παράδειγμα τοῦτο ἐν ταῖς ἀποδεικτικαῖς πραγματείαις τὸ ᾗ αὐτὸ θεωρῶν*, s. 85^{b} 12, vgl. 73^{b} 83, 84^{b} 7 und besonders 74^{a} 30 ff.

setzt, versteht (Z. 14—15) *ἀνῆκτο* von der Verlängerung der Geraden *βγ*, was ganz unmöglich ist. Mit beiden Figuren vereinbar ist 200^a 16: *ἐπεὶ γὰρ τὸ εὐθὺ τοδί ἐστιν, ἀνάγκη τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν*; denn daß die Summe der Winkel an einer Geraden 2R ist (Euklid I 13—14), kommt in beiden Fällen zur Verwendung. Den Beweis der Pythagoreer, mittels einer Parallelen durch den Scheitelpunkt wie in Fig. 2, hat Proklos *in Elem.* S. 379 aus Eudemos. Wenn also Geminos (bei Eutokios *in Apollonium* II S. 170) mit Recht behauptet, die alten (*οἱ ἀρχαῖοι*) hätten den Satz für jede der drei Arten von Dreiecken einzeln bewiesen, und erst später wäre ein allgemeiner Beweis gefunden, so müßte das für die vorpythagoreische Mathematik gelten. Das widerspricht aber dem Bericht des Eudemos (Proklos S. 379, 2: *Εὔδημος δὲ ὁ Περιπατητικὸς εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀναπέμπει τὴν τοῦδε τοῦ θεωρήματος εὕρεσιν, ὅτι τρίγωνον ἅπαν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας*; selbst wenn man hier das *ἅπαν* pressen wollte, ist es doch klar, daß Eudemos von einer Vorstufe des pythagoreischen Beweises nichts berichtete), und ich fürchte, daß die ganze Nachricht des Geminos auf Mißdeutung einer Aristotelesstelle beruht. 74^a 25 heißt es nämlich: *διὰ τοῦτο οὐδ' ἄν τις δείξῃ καθ' ἕκαστον τὸ τρίγωνον ἀποδείξει ἢ μιᾷ ἢ ἑτέρᾳ, ὅτι δύο ὀρθὰς ἔχει ἕκαστον, τὸ ἰσόπλευρον χωρὶς καὶ τὸ σκαληνὲς καὶ τὸ ἰσοσκελές, οὔπω οἶδε τὸ τρίγωνον ὅτι δύο ὀρθαῖς*; aus diesem Beispiel eines logischen Satzes konnte bei einiger Unkritik leicht ein historisches Faktum werden.

Der pythagoreische Lehrsatz (I 47) ist zitiert 708^b 31: *καὶ ὀρθὸν δεῖ εἶναι τὸ ὑφεστὸς τῷ βάρει, οἷον κάθετον πρὸς τὴν γῆν. ὅταν δὲ προβαίνῃ, γίνεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ δυναμένη τὸ μένον μέγεθος καὶ τὴν μεταξύ*; 709^a 19: *δυνήσεται γὰρ τοῦτο τό τ' ἠρεμοῦν καὶ τὴν ὑποτείνουσαν* (d. i. *τὴν μεταξύ*).

II 14: *τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι* — ein spezieller Fall 413^a 17: *οἷον τί ἐστι τετραγωνισμός; τὸ ἴσον ἑτερομήκει ὀρθογώνιον εἶναι ἰσόπλευρον. ὁ δὲ τοιοῦτος ὅρος λόγος τοῦ συμπεράσματος, ὁ δὲ λέγων, ὅτι ἐστὶν ὁ τετραγωνισμὸς μέσης εὕρεσις, τοῦ πράγματος λέγει τὸ αἴτιον*; 996^b 20: *οἷον τί ἐστι τὸ τετραγωνίζειν, ὅτι μέσης εὕρεσις.* Also wurde das Problem in den Aristoteles vorliegenden Lehrbüchern demnach mittels Proportionen gelöst (vgl. Euklid VI 17), was in II 14 nicht der Fall ist.

III 9: *ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου* — 373^a 11: *ἤχθωσαν δὴ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΛΕΒ ἐκ τῶν γωνιῶν, ἀπὸ μὲν τῆς Γ ἡ τὸ ΓΕ, ἀπὸ δὲ τῆς Ζ ἡ τὸ ΖΕ, ἀπὸ δὲ τῆς Δ ἡ τὸ ΔΕ. ἴσαι δὴ αὗται … κύκλος ἄρα ἔσται ἡ γραφομένη, κέντρον δὲ τὸ Ε.* Wenn der Kreis oder Kreisbogen hier als geometrischer Ort

behandelt wird (373^a 4: *ἀπὸ γὰρ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον αἱ ἴσαι κλασθήσονται ἐπὶ κύκλου γραμμῆς ἀεί*), wird man daran erinnert, daß der etwa gleichaltrige Mitschüler des Aristoteles Hermotimos *τῶν τόπων τινὰ συνέγραψεν* (Proklos *in Elem.* S. 67, 23).

III 15: *ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἡ διάμετρος* — 363^a 32: *πλεῖστον δ' ἀπέχει κατὰ τόπον τὰ κείμενα πρὸς ἄλληλα κατὰ διάμετρον*, 363^b 8: *πλεῖστον δ' ἀπέχει τὰ κατὰ διάμετρον.*

III 31: *ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν* — 94^a 28: *διὰ τί ὀρθὴ ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ ἢ τίνος ὄντος ὀρθή; ἔστω δὴ ὀρθὴ ἐφ' ἧς Α, ἡμίσεια δυοῖν ὀρθαῖν ἐφ' ἧς Β, ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ ἐφ' ἧς Γ. τοῦ δὴ τὸ Α τὴν ὀρθὴν ὑπάρχειν τῷ Γ τῇ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ αἴτιον τὸ Β· αὕτη μὲν γὰρ τῇ Α ἴση, ἡ δὲ τὸ Γ τῇ Β· δύο γὰρ ὀρθῶν ἡμίσεια. τοῦ Β οὖν ὄντος ἡμίσεος δύο ὀρθῶν τὸ Α τῷ Γ ὑπάρχει· τοῦτο δ' ἦν τὸ ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθὴν εἶναι.* Der hier flüchtig angedeutete Beweis des Satzes wird klar durch 1051^a 26: *διὰ τί ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθὴ καθόλου; διότι, ἐὰν ἴσαι τρεῖς ἥ τε βάσις δύο καὶ ἡ ἐκ μέσου ἐπισταθεῖσα ὀρθή, ἰδόντι δῆλον τῷ ἐκεῖνο εἰδότι·* Unter *ἐκεῖνο*, das Alexandros S. 596, 26 und 597, 11 mißverstanden hat, ist der Satz *ὅτι δύο ὀρθαὶ τὸ τρίγωνον* 1051^a 24 zu verstehen. Der Beweis, der vom Euklidischen ganz verschieden ist, ist dieser. Die Winkel a sind je $\frac{1}{2}$R, weil die kleinen Dreiecke rechtwinklig und gleichschenklig sind; der Winkel im Halbkreis $2a$ ist also die Hälfte der Winkelsumme $4a$ des großen Dreiecks, folglich R.

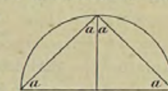

Fig. 4.

Dieser Beweis, offenbar der damals rezipierte, setzt außer I 32 auch I 5 (*τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*) und III 21 (*ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*) voraus.

Mit den Hauptsätzen der Proportionslehre zeigt sich Aristoteles 376^a 10 ff. durchaus vertraut; zur Anwendung kommen stillschweigend: VI 10 (Z. 10—11), V 14 (Z. 11 und 14, aber in anderer Form; Euklid schließt aus $a:b=c:d$ und $a>c$ auf $b>d$, Aristoteles aus $a:b=c:d$ und $a>b$ auf $c>d$), VI 11 kombiniert mit V 7 coroll. (Z. 14—16), VI 12 (Z. 16—17), V 22 kombiniert mit V 16 (Z. 22—24; statt *αἱ ΔΒΖ* an erster Stelle Z. 24 wäre *αἱ ΖΒΔ* genauer), V 18 kombiniert mit V 11 (Z. 25—26); außerdem V 16: *ἔσται ἄρα, ὡς ὁ* $\bar{\alpha}$ *ὅρος πρὸς τὸν* $\bar{\beta}$, *οὕτως ὁ* $\bar{\gamma}$ *πρὸς τὸν* $\bar{\delta}$· *καὶ ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ὁ* $\bar{\alpha}$ *πρὸς τὸν* $\bar{\gamma}$, *ὁ* $\bar{\beta}$ *πρὸς τὸν* $\bar{\delta}$ 1131^b 5, und V 12: *ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται, ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα* in der konventionell verkürzten Fassung: *ὥστε καὶ τὸ ὅλον πρὸς τὸ ὅλον* 1131^b 7, näher erklärt ibid. 9: *ἡ ἄρα τοῦ* $\bar{\alpha}$ *ὅρου τῷ* $\bar{\gamma}$ *καὶ ἡ τοῦ* $\bar{\beta}$ *τῷ* $\bar{\delta}$ *σύζευξις*, 13: *ἐν γὰρ τῇ γεωμετρικῇ συμβαίνει καὶ τὸ ὅλον* πρὸς τὸ ὅλον, ὅπερ ἑκάτερον πρὸς ἑκάτερον. Die Form der arithmetischen Proportion hat der Syllogismus 116^b 29 ff.

Daß **Aristoteles** die allgemeine Proportionslehre des **Eudoxos** schon kannte, haben wir oben S. 11 gesehen. Darauf bezieht sich die Bemerkung 158^b 29: *ἔοικε δὲ καὶ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον καὶ ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον* (d. i. ein Parallelogramm) *ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν* (die Seite) *καὶ τὸ χωρίον. τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον· τὴν γὰρ αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί, ἔστι δ' ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος.* Denn, so lange man die pythagoreische Definition der Proportion hatte, die nur für kommensurable Größen Geltung besaß, konnte man den angedeuteten Satz nicht exakt beweisen; das wurde erst durch die von **Eudoxos** gegebene allgemeine Definition ermöglicht, die bei **Euklid** lautet: *ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.* Das ist eben eine sorgfältige und exakte Umschreibung der *ἀνταναίρεσις*, und sie scheint dem **Euklid** selbst zu gehören, da **Aristoteles** ausdrücklich versichert, die Definition der Proportion (*ὁ αὐτὸς λόγος*) sei *τὴν αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχειν*; vgl. **Alexandros** *in Top.* S. 545, 15 ed. **Wallies**: *ἔστι δὲ ὁρισμὸς τῶν ἀναλόγων, ᾧ οἱ ἀρχαῖοι ἐχρῶντο, οὗτος· ἀνάλογον ἔχει μεγέθη πρὸς ἄλληλα, ὧν ἡ αὐτὴ ἀνθυφαίρεσις.* Übrigens setzt der Beweis des Aristotelischen Satzes (für Parallelogramme) nicht nur den Transversalsatz (*Elem.* VI 2) voraus, sondern auch VI 1: *τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.* Ein spezieller Fall von diesem Satz in geänderter Form (mit Vertauschung von *ὕψος* und *βάσις*) ist 373^a 13: *ἴσαι δὴ αὗται* (sc. *αἱ κάθετοι* = *τὰ ὕψη*)*· ἐν ἴσοις γὰρ τριγώνοις* (und mit gleichen Grundlinien). Das Wort *ὕψος* in mathematischem Sinne (**Euklid** VI def. 4) kennt **Aristoteles** noch nicht.

VI 4: *τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι*; VI 6: *ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν* — 376^a 27 ff., wo die Schlußfolgerung diese ist: gegeben ist (Z. 25 bis 26) $H\Pi : \Pi P = \Pi P : K\Pi$, d. h., da $\angle H\Pi P$ den Dreiecken $HP\Pi$, $KP\Pi$ gemeinsam ist,

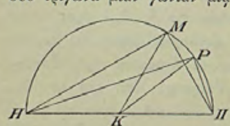

Fig. 5.

die Dreiecke sind *ἰσογώνια* und $\angle HP\Pi = PK\Pi$ (VI 6; 376^a 29: *περὶ γὰρ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν Π ἀνάλογον αἵ τε τοῦ ΗΠΡ τριγώνου καὶ τοῦ ΚΡΠ*); also (VI 4): $HP : KP = H\Pi : \Pi P$ (Z. 30: *ὥστε καὶ ἡ ΗΡ*[1]) *πρὸς τὴν ΚΡ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ ἡ ΗΠ πρὸς τὴν ΠΡ*). Mehr als dieser Satz und etwa *Elem.* VI 2 scheint auch in der unklaren Stelle 452^b 17 ff. nicht enthalten zu sein; namentlich ergibt der Zusammenhang, daß **Aristoteles** hier keinen besonderen Satz aus den Elementen im Sinne hat, sondern nur mathematisch exemplifiziert.

IX 4: *ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται* — 75^b 12: *διὰ τοῦτο τῇ γεωμετρίᾳ οὐκ ἔστι δεῖξαι, ὅτι τῶν ἐναντίων μία ἐπιστήμη, ἀλλ' οὐδ', ὅτι οἱ δύο κύβοι κύβος, οὐδ' ἄλλῃ ἐπιστήμῃ τὸ ἑτέρας.* Der Zusammenhang ergibt, daß der Satz *δύο κύβοι κύβος* nicht geometrisch aufzufassen ist, also muß er arithmetisch sein; daher *ἀλλ' οὐδ'*: ja nicht einmal einen Satz aus der so eng verwandten Wissenschaft der Arithmetik darf die Geometrie beweisen wollen.

Die Grundlage des Exhaustionsbeweises spricht **Aristoteles** aus 266^b 2: *πρὸς πεπερασμένον γὰρ ἀεὶ προστιθεὶς ὑπερβαλῶ παντὸς ὡρισμένου καὶ ἀφαιρῶν ἐλλείψω ὡσαύτως.* Die erstere Hälfte formuliert **Archimedes** in der Vorrede zur Parabelquadratur (II S. 296, 9) so: *τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου*; die letztere Hälfte in engerer Fassung **Euklid** X 1: *δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους*; mit dem Corollar dieses Satzes (*Euclidis opp.* III S. 6, 9): *ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα* ist zu vergleichen **Aristoteles** 207^b 10: *ἐπὶ δὲ τὸ πλεῖον ἀεὶ ἔστι νοῆσαι· ἄπειροι γὰρ αἱ διχοτομίαι τοῦ μεγέθους*; 203^b 17: *ἐκ τῆς ἐν τοῖς μεγέθεσι διαιρέσεως· χρῶνται γὰρ καὶ οἱ μαθηματικοὶ τῷ ἀπείρῳ* (vgl. 204^a 34: *ἴσως αὕτη μέν ἐστι καθόλου ἡ ζήτησις μᾶλλον, εἰ ἐνδέχεται τὸ ἄπειρον καὶ ἐν τοῖς μαθηματικοῖς εἶναι καὶ ἐν τοῖς νοητοῖς*). Von hier aus widerlegt er die Annahme von *ἄτομοι γραμμαί*, s. 206^a 16: *τὸ δὲ μέγεθος ὅτι μὲν κατ' ἐνέργειαν οὐκ ἔστιν ἄπειρον, εἴρηται, διαιρέσει δ' ἐστίν· οὐ γὰρ χαλεπὸν ἀνελεῖν τὰς ἀτόμους γραμμάς*; 233^b 15: *φανερὸν οὖν ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς οὔτε γραμμὴ οὔτε ἐπίπεδον οὔτε ὅλως τῶν συνεχῶν οὐθὲν ἔσται ἄτομον κτλ.*; 237^b 8: *ἐπ' ἄπειρον γὰρ ἡ διαίρεσις, καθάπερ ἐπὶ τῶν αὐξανομένων καὶ καθαιρουμένων γραμμῶν*; 271^b 9: *οἷον εἴ τις ἐλάχιστον εἶναί τι φαίη μέγεθος·*

---

1) So ist zu lesen. Eine Hs. hat *καὶ ἡ Ρ*, die übrigen sinnlos *καὶ ἡ ΠΡ*. **Alexandros** u. a. haben das Richtige, s. **Ideler**, *Meteorol.* II S. 310.

οὗτος γὰρ τοὐλάχιστον εἰσαγαγὼν τὰ μέγιστ' ἂν κινήσειε τῶν μαθηματικῶν (vgl. 303^{a} 20); 220^{a} 30: *ἀεὶ γὰρ διαιρεῖται πᾶσα γραμμή*; vgl. noch 121^{b} 19, 299^{a} 12, 994^{b} 24, 1085^{b} 34. Damit wendet er sich nicht nur gegen Xenokrates wie das jüngere Schriftchen *περὶ ἀτόμων γραμμῶν*, sondern auch gegen Platon, s. 992^{a} 21 ff., Alexandros *in Metaphys.* S. 120, 6 ff. ed. Hayduck

Daß Seite und Diagonal des Quadrats inkommensurabel sind, bei Euklid in dem allgemeineren Satz X 9 mit enthalten, ist das zweite (s. oben S. 19) Lieblingsbeispiel des Aristoteles, s. 71^{b} 25: *οὐκ ἔστι τὸ μὴ ὂν ἐπίστασθαι, οἷον ὅτι ἡ διάμετρος σύμμετρος*; 222^{a} 4: *οἷον τὸ ἀσύμμετρον εἶναι τὴν διάμετρον ἀεί ἐστι*; 742^{b} 27: *τὸ τὴν διάμετρον ἀσύμμετρον εἶναι πρὸς τὴν πλευρὰν ἀίδιον* (sonst immer ohne den Zusatz *πρὸς τὴν πλευράν*, s. 46^{b} 29, 65^{b} 17, 281^{a} 6, ^{b} 5, 430^{a} 31, 983^{a} 15, 1012^{a} 32, 1017^{a} 35, 1019^{b} 24, 1024^{b} 19, 1047^{b} 6, 1051^{b} 20, 1392^{a} 18). Der Beweis wird angedeutet 41^{a} 24: *τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν, ὅταν ἀδύνατόν τι συμβαίνῃ τῆς ἀντιφάσεως τεθείσης, οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης*; 50^{a} 37: *οἷον τεθείσης τῆς διαμέτρου συμμέτρου τὸ τὰ περιττὰ ἴσα εἶναι τοῖς ἀρτίοις*. Und eben dieser Beweis ist, wie Hankel S. 102 hervorgehoben hat, in einer Interpolation bei Euklid erhalten (*Elem.* III S. 408 app. nr. 27). Wenn dieser alte pythagoreische Beweis noch zu Aristoteles' Zeit einen festen Bestand der mathematischen Lehrbücher bildete, können diese für die systematische und umfassende Behandlung der Irrationalen nichts Wesentliches getan haben. Im einzelnen war dieser Gegenstand außer von Theaitetos auch von Eudoxos (Proklos S. 67, 6) und Hermotimos (ib. S. 67, 21 bis 22) gefördert worden; aber das klare und erschöpfende System des X. Buchs der *Elemente* bleibt eine persönliche Leistung Euklids (vgl. *Studien über Euklid* S. 34).

Aus der Stereometrie ist äußerst wenig nachweisbar.

Der Satz, daß die Senkrechten auf dieselbe Gerade in demselben Punkte in einer Ebene liegen (373^{a} 14: *καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ πᾶσαι· πρὸς ὀρθὰς γὰρ πᾶσαι τῇ ΑΕΒ καὶ ἐφ' ἓν σημεῖον τὸ Ε συνάπτουσιν*, vgl. Euklid XI 5: *ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ*), setzt zwar eine Definition der Senkrechten auf die Ebene (wie *Elem.* XI def. 3) voraus oder wenigstens ein klares Verständnis der Sache, aber auch nicht mehr. Und daß ein Schnitt durch das Zentrum einer Kugel einen größten Kreis erzeugt (375^{b} 32: *κύκλος οὖν ἡ τομὴ ἔσται τῆς σφαίρας ὁ μέγιστος*, vgl. *Elem.* XII 17 S. 228, 17 ff.), hatte die Astronomie ohne Zweifel längst als selbstverständlich angenommen. Ebendaher stammt wohl auch, was von der Teilung der Kugel gesagt wird 286^{b} 28: *μόνην γὰρ τῶν στερεῶν οὐ διαιροῦσι* (Platon

und seine Schule) *τὴν σφαῖραν ὡς οὐκ ἔχουσαν πλείους ἐπιφανείας ἢ μίαν· ἡ γὰρ εἰς τὰ ἐπίπεδα διαίρεσις οὐχ, ὡς ἂν τέμνων τις εἰς τὰ μέρη διέλοι τὸ ὅλον, τοῦτον διαιρεῖται τὸν τρόπον, ἀλλ' ὡς εἰς ἕτερα τῷ εἴδει*. Die Bemerkung endlich 306^{b} 5: *ἐν μὲν γὰρ τοῖς ἐπιπέδοις τρία σχήματα δοκεῖ συμπληροῦν τὸν τόπον, τρίγωνον καὶ τετράγωνον καὶ ἑξάγωνον, ἐν δὲ τοῖς στερεοῖς δύο μόνα, πυραμὶς καὶ κύβος* ist in ihrem ersteren, nicht stereometrischen Teil der pythagoreischen Mathematik entlehnt (Proklos *in Elem.* S. 304, 14: *κἀκείνῳ τῷ παραδόξῳ θεωρήματι τῷ δεικνύντι μόνα τρία ταῦτα πολύγωνα πληροῦν δυνάμενα τὸν περὶ ἓν σημεῖον ὅλον τόπον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ἑξάγωνον τὸ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον κτλ.*, S. 305, 3: *καί ἐστι τὸ θεώρημα τοῦτο Πυθαγόρειον*), im stereometrischen Teil (= Euklid XIII S. 336, 24—26; 338, 5—6) aus der Beschäftigung mit den platonischen Körpern entstanden, wie es sich aus dem Zusammenhang ergibt; die Bemerkung ist gegen Platon gerichtet (306^{a} 3).

Von einem Lehrgebäude der Stereometrie gibt es also bei Aristoteles keine Spur.

Abweichungen von der Euklidischen Fassung der Sätze und Beweise haben wir gelegentlich schon mehrfach festgestellt. Bei weitem aber die wichtigsten Aufschlüsse über solche gibt die Stelle 41^{b} 14: *οἷον ὅτι τοῦ ἰσοσκελοῦς ἴσαι αἱ πρὸς τῇ βάσει. ἔστωσαν εἰς τὸ κέντρον ἠγμέναι αἱ Α, Β. εἰ οὖν ἴσην λαμβάνοι τὴν Α, Γ γωνίαν τῇ Β, Δ μὴ ὅλως ἀξιώσας ἴσας τὰς τῶν ἡμικυκλίων καὶ πάλιν τὴν Γ τῇ Δ μὴ πᾶσαν προσλαβὼν τὴν τοῦ τμήματος, ἔτι δ' ἀπ' ἴσων οὐσῶν τῶν ὅλων γωνιῶν καὶ ἴσων ἀφῃρημένων ἴσας εἶναι τὰς λοιπὰς τὰς Ε, Ζ κτλ.* Also[1]): $\angle A+\Gamma=B+\Delta$, weil die Winkel der Halbkreise gleich sind, $\angle \Gamma=\Delta$, weil die (gemischten) Winkel eines Segments gleich sind, folglich $\angle E=Z$.

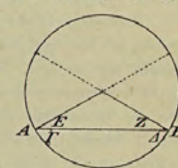

Fig. 6.

Dieser Beweis, der von dem Euklidischen (I 5) gänzlich verschieden ist, operiert also wesentlich mit gemischten Winkeln. Diese kommen in den Elementen Euklids nur III 16 und 31 vor, werden aber nicht nur bei der Definition des Winkels (I def. 8: *ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις*; def. 9: *ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία*) berücksichtigt, sondern

1) Die Stelle ist nicht nur von Zell, sondern auch von Waitz (*Aristotelis Organon* I S. 434 ff.) mißverstanden; das richtige haben Johannes Philoponos und, von einiger Unklarheit abgesehen, Alexandros S. 268 ed. Wallies, s. *Oversigt over Vidensk. Selskabs Forh.* 1888 S. 1 ff. Richtig auch Jul. Pacius und Blancanus S. 38.

auch bei den Kreissegmenten, s. III def. 7: *τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας* (aber III def. 8: *ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν* usw.). Daß Euklid hier nur den Sprachgebrauch seiner Vorgänger befolgt, wird durch Aristoteles bestätigt, der 41^b 17 bis 18 *αἱ τῶν ἡμικυκλίων* (*γωνίαι*) und *ἡ τοῦ τμήματος* (*γωνία*) im Sinne der Euklidischen Definition sagt. Überhaupt sind die gemischten Winkel bei Euklid nicht anzuzweifeln (vgl. *Euclidis opp.* V S. LXXXVIII) als Rudimente älterer Zustände; die Stelle aus Aristoteles beweist, daß sie in den voreuklidischen Lehrbüchern eine bedeutende Rolle spielten, und daß wenigstens folgende zwei Sätze über sie ganz am Anfang des Systems aufgeführt waren: in allen Halbkreisen sind die gemischten Winkel gleich, und: die gemischten Winkel eines Segments sind gleich. Erwähnt sind sie noch bei Aristoteles 375^b 24: *ἐπὶ τὴν μείζω γωνίαν*; denn darunter ist der gemischte Winkel zwischen Sehestrahl und Kreisbogen gemeint. Von Nutzen waren sie, wie letztere Stelle zeigt, in der Katoptrik (und Astronomie), und deshalb hat wohl Euklid sie nicht ganz gestrichen. Der Satz von den Winkeln der Halbkreise kommt in der pseudoeuklidischen Katoptrik vor prop. 5 S. 294, 17: *ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς σημείοις τοῖς* A, Δ, Γ *γωνίαι· ἡμικυκλίου γάρ*; vgl. 24 S. 326, 12—13.

Die Stelle 41^b 14 ist in Form und Terminologie ganz euklidisch (*ἰσοσκελές, αἱ πρὸς τῇ βάσει*); selbst die sonderbare Bezeichnung der Durchmesser als *αἱ* A, B (ebenso 452^b 19: *ἡ τὸ* Θ *πρὸς τὴν* M) findet bei Euklid wenigstens eine Parallele (s. *Elem.* I S. 281 not.). Nur für *ἔστωσαν εἰς τὸ κέντρον ἠγμέναι* würde Euklid *ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ κέντρον* gesagt haben (vgl. 363^b 6—7). Von der Bezeichnung der Winkel durch Buchstaben war schon oben die Rede; hier ist nur zu bemerken, daß Aristoteles dieselben Winkel bald durch E, Z, bald ungenau durch A, B bezeichnet.

Von Sätzen, die bei Euklid gar nicht vorkommen, hat Aristoteles noch folgende:

Die Außenwinkel eines Polygons sind gleich 4R, 85^b 38: *ὅταν μὲν οὖν γινώσκωμεν, ὅτι τέτταρσιν αἱ ἔξω ἴσαι, ὅτι ἰσοσκελές, ἔτι λείπεται, διὰ τί τὸ ἰσοσκελές, ὅτι τρίγωνον, καὶ τοῦτο, ὅτι σχῆμα εὐθύγραμμον*; 99^a 19: *οἷον τὸ τέτταρσιν ἴσας τὰς ἔξω ἐπὶ πλέον ἢ τρίγωνον ἢ τετράγωνον, ἅπασι δὲ ἐπ' ἴσον.* Simplikios zur Physik 200^a 15 (I S. 390, 33 ed. Diels: *ἰστέον, ὅτι δέδεικται παντὸς εὐθυγράμμου τὰς ἐκτὸς πάσας γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι*) führt den Satz an ohne Veranlassung der betreffenden Aristotelesstelle (s. oben S. 19). Proklos *in Elem.* S. 383, 1—16 setzt die Sache ausführlich auseinander.

376^a 1: *αἱ οὖν ἀπὸ τῶν* H, K *ἀναγόμεναι γραμμαὶ ἐν τούτῳ τῷ λόγῳ*

οὐ συσταθήσονται τοῦ ἐφ' ᾧ A *ἡμικυκλίου πρὸς ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον*; ^{a}7: *πρὸς ἄλλῃ δὲ ἢ πρὸς τῇ* MN *περιφερείᾳ*[1]) *ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων ὁ αὐτὸς λόγος ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὐ συνίσταται*; ^{b}1: *ὥστ' ἀπὸ τῶν* H, K *σημείων οὐ μόνον πρὸς τῇ* MN *περιφερείᾳ συσταθήσονται τὸν αὐτὸν ἔχουσαι λόγον, ἀλλὰ καὶ ἄλλοθι· ὅπερ ἀδύνατον*; ^{b}10: *εἰ δὲ μή, ὁμοίως δειχθήσονται τὸν αὐτὸν ἔχουσαι λόγον αἱ ἄλλοθι καὶ ἄλλοθι τοῦ ἡμικυκλίου συνιστάμεναι· ὅπερ ἦν ἀδύνατον.* D. h. es kann nicht sein $HM:MK = H\Lambda:\Lambda K$, wie Olympiodoros S. 246 ed. Stüve[2]) und Alexandros (S. 165 ed. Hayduck) richtig erklären und durch Euklid III 7 beweisen. Die Form des Satzes klingt an *Elem.* I 7 an: *ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ κτλ.*

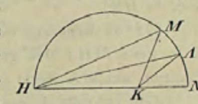

Fig. 7.

287^a 27: *ἀλλὰ μὴν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ αὐτὸ* (geschlossene Linien) *ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου γραμμή* (nämlich bei demselben Flächenraum) setzt Untersuchungen über Isoperimetrie voraus, wie sie für uns erst bei Zenodoros und Pappos (V S. 308 ff.) vorliegen, für Kreis und Kugel aber den Pythagoreern besonders nahe lagen.

In 271^a 13: *ἀεὶ γὰρ ἕκαστον ἀπέχειν τὴν εὐθεῖαν τίθεμεν* könnte man versucht sein, das von Archimedes (*De sphaera et cyl.* I S. 8, 23) formulierte Axiom: *τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν* suchen zu wollen, das Proklos *in Elem.* S. 109, 8 ff. vergeblich in die Euklidische Definition der Geraden hinein zu interpretieren versucht. Es ist aber eigentlich nur eine Definition des *ἀπέχειν*, entsprechend der Euklidischen III def. 4 für Geraden in dem Kreise.

Daß Aristoteles auch die Formulierung der Sätze der *στοιχεῖα* als *δεδομένα* kennt, kann nicht wundernehmen, da diese Fassung mit der analytischen Methode eng verknüpft ist (*Studien über Euklid* S. 39 ff.). Zur Anwendung kommen folgende Sätze:

Data 26: *ἐὰν εὐθείας γραμμῆς τὰ πέρατα ᾖ δεδομένα τῇ θέσει, δέδοται ἡ εὐθεῖα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει* — 376^a 3: *ἐπεὶ γὰρ τά τε* H, K *σημεῖα*

1) *ἄλλῃ δὲ τῇ πρὸς τῇ* MN *περιφερείᾳ* Bekker mit den Hss., *πρὸς ἄλλο δέ γε τῆς* MN *περιφερείας* Ideler mit einigen alten Ausgaben, und so hat Alexandros S. 167, 6—7 es paraphrasiert (*πρὸς ἄλλῳ σημείῳ τῆς* MN *περιφερείας*). Aber 376^b 2 beweist, daß *πρὸς τῇ* MN *περιφερείᾳ* bedeutet: so daß ein Bogen MN abgeschnitten wird.

2) Nach ΛK S. 246, 6 fehlt etwa: *εἰ γὰρ δυνατόν, συσταθήτωσαν ὡς αἱ* HM, MK (nach dem Wortlaut des Aristoteles wären M und Λ durchgehend zu vertauschen mit Ideler). *ἐν γὰρ τῇ* HK *ἐστίν* S. 246, 11 ist unbegreiflich.

δέδοται καὶ ἡ KH, δεδομένη[1]) ἂν εἴη καὶ ἡ MH, nach Alexandros S. 166,17 weil HK, KM und $\angle HKM$ gegeben sind, ein Satz, der bei Euklid nicht steht (s. Figur 7, nur ist K Zentrum).

Data 1: τῶν δεδομένων μεγεθῶν ὁ λόγος ὁ πρὸς ἄλληλα δέδοται — 376^{a} 5: ὥστε καὶ ὁ λόγος τῆς MH πρὸς τὴν MK (denn MK ist gegeben, weil $= HK$).

376^{a} 5: δεδομένης οὖν περιφερείας ἐφάψεται τὸ M (nicht bei Euklid), d. h. wenn $MH : MK$ gegeben ist, ist der Kreisbogen durch M (dessen Zentrum auf HK liegt) gegeben.

376^{a} 7: ὥστε ἡ τομὴ τῶν περιφερειῶν δέδοται (nämlich des der Lage nach gegebenen Kreisbogens HMN und des ebenfalls der Lage nach gegebenen Regenbogens) — Data 25: ἐὰν δύο γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι τέμνωσιν ἀλλήλας, δέδοται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας, τῇ θέσει.

Noch bleibt ein Punkt zu erörtern. Aristoteles spricht öfters von mathematischen Trugschlüssen. Solche, wie die rein sophistische Kreisquadratur Brysons oder die auf einem wirklichen Fehlschluß beruhenden des Antiphon und Hippokrates, hat er natürlich aus den Schriften dieser Männer geschöpft, und solche unfreiwillige παραλογισμοί sind gemeint 132^{a} 32: ἀπατᾶται γὰρ ὁ γεωμετρικὸς ἐν τῷ ψευδογραφεῖσθαι, vgl. 160^{b} 36, 161^{a} 34, 170^{a} 32. Aber 157^{a} 1: ἔτι τὸ μηκύνειν καὶ παρεμβάλλειν τὰ μηδὲν χρήσιμα πρὸς τὸν λόγον, καθάπερ οἱ ψευδογραφοῦντες ist von böswilligen Trugschlüssen die Rede, und 101^{a} 6 ff. (οἱ ἐκ τῶν περί τινας ἐπιστήμας οἰκείων γινόμενοι παραλογισμοί, καθάπερ ἐπὶ τῆς γεωμετρίας καὶ τῶν ταύτῃ συγγενῶν συμβέβηκεν ἔχειν ... ἐκ τῶν οἰκείων μὲν τῇ ἐπιστήμῃ λημμάτων, οὐκ ἀληθῶν δέ, τὸν συλλογισμὸν ποιεῖται· τῷ γὰρ ἢ τὰ ἡμικύκλια περιγράφειν μὴ ὡς δεῖ ἢ γραμμάς τινας ἄγειν μὴ ὡς ἂν ἀχθείησαν τὸν παραλογισμὸν ποιεῖται) werden Beispiele angeführt, die in der unten gedruckten byzantinischen Abhandlung nach Alexandros *in Topica* S. 23 ff. ganz ansprechend erläutert werden; ähnliche sophistische ἐνστάσεις gegen Euklid I 12 führt Proklos *in Elem.* S. 286, 13 ff. an. Es liegt nahe, bei den ψευδογραφοῦντες des Aristoteles an die Angriffe des Protagoras auf die Mathematik zu denken (998^{a} 3: ὥσπερ Πρωταγόρας ἔλεγεν ἐλέγχων τοὺς γεωμέτρας, Zeller^{5} I^{2} S. 1109).

Bekanntlich hat Euklid gegen solche Trugschlüsse eine besondere Schrift geschrieben, die Ψευδάρια (*Studien über Euklid* S. 38), wahrscheinlich nach dem Vorbild der σοφιστικοὶ ἔλεγχοι des Aristoteles, der 160^{b} 33 ff. den Gedanken an eine solche Arbeit nahe legt (λέλυκε μὲν οὖν πάντως ὁ ἀνελών, παρ' ὃ γίνεται τὸ ψεῦδος, οἶδε δὲ τὴν λύσιν ὁ εἰδώς, ὅτι παρὰ τοῦτο

1) Vor δεδομένη ist ein Komma zu setzen.

ὁ λόγος, καθάπερ ἐπὶ τῶν ψευδογραφουμένων· οὐ γὰρ ἀπόχρη τὸ ἐνστῆναι, οὐδ' ἂν ψεῦδος ᾖ τὸ ἀναιρούμενον, ἀλλὰ καί, διότι ψεῦδος, ἀποδεικτέον).

II.

Bei der bisherigen Untersuchung sind nur unzweifelhaft echte Schriften des Aristoteles berücksichtigt. Der Vollständigkeit halber will ich noch kurz die mathematischen Stellen der übrigen Bestandteile des *corpus Aristotelicum* besprechen.

In den beiden späteren Bearbeitungen *der Ethik*, der μεγάλα ἠθικά und der Eudemischen, die wohl noch voreuklidisch sind, ist der Befund ungefähr der bisherige. Die Geometrie dient als Beispiel des Verhältnisses der ἀρχαί 1187^{a} 35: ἐναργέστερον δ' ἔστι κατιδεῖν τοῦτο ἐν τοῖς κατὰ γεωμετρίαν· καὶ γὰρ ἐκεῖ, ἐπειδή τινες λαμβάνονται ἀρχαί, ὡς ἂν αἱ ἀρχαὶ ἔχωσιν, οὕτω καὶ τὰ μετὰ τὰς ἀρχάς. Lieblingsbeispiel ist auch hier *Elem.* I 32: τὸ τρίγωνον δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχον 1183^{b} 2, 1187^{a} 38, 1189^{b} 11, auch in der Form τὸ δύο ὀρθὰς ἔχειν τὸ τρίγωνον 1222^{b} 32 ff. und εἴ ἐστι τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαί 1227^{b} 31. Damit ist öfters der Satz verbunden, daß die Winkelsumme des τετράγωνον (des Vierecks) 4R ist (vgl. Euklid I 34, Proklos S. 382), und zwar als Folge von I 32: ἐν μὲν γὰρ γεωμετρίᾳ, ὅταν φῇ τὸ τετράγωνον τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν καὶ ἐρωτᾷ διὰ τί, ὅτι, φησί, καὶ τὸ τρίγωνον δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει 1189^{b} 9; εἰ γὰρ ἔχοντος τοῦ τριγώνου δύο ὀρθὰς ἀνάγκη τὸ τετράγωνον ἔχειν τέτταρας ὀρθάς, φανερόν, ὡς αἴτιον τούτου τὸ δύο ὀρθὰς ἔχειν τὸ τρίγωνον. εἰ δέ γε μεταβάλλοι τὸ τρίγωνον, ἀνάγκη καὶ τὸ τετράγωνον μεταβάλλειν, οἷον, εἰ τρεῖς, ἕξ, εἰ δὲ τέτταρες, ὀκτώ 1222^{b} 31, vgl. 1187^{a} 38. Auch das Beispiel πολλὰ καὶ τῶν οὐκ ὄντων ἐφ' ἡμῖν, οἷον τὴν διάμετρον σύμμετρον kommt vor 1226^{a} 3.

Euklid III 1: τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν wird angeführt 1186^{b} 37: κύκλον μὲν γράψαι παντός ἐστι, τὸ δὲ μέσον τὸ ἐν αὐτῷ ἤδη λαβεῖν χαλεπόν.

Euklid VII def. 19: τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος — 1182^{a} 14: οὐ γάρ ἐστιν ἡ δικαιοσύνη ἀριθμὸς ἰσάκις ἴσος (gegen die Pythagoreer), woraus folgt, daß die erstere Fassung der Definition bei Euklid die alte der Pythagoreer ist, die zweite wohl seine eigene.

Bloße Wiederholung aus der Nikomacheischen Ethik ist 1193^{b} 37: τὸ δ' ἀνάλογον ἐν τέτταρσι γίνεται ἐλαχίστοις· ὡς γὰρ τὸ A πρὸς τὸ B, τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, und die stillschweigende Anwendung von *Elem.* V 16 (ἐναλλάξ) 1194^{a} 4—6. Dagegen bezeichnet die Eudemische Ethik 1226^{a} 28 (διὸ οὐ βουλευόμεθα περὶ τῶν ἐν Ἰνδοῖς οὐδέ, πῶς ἂν ὁ κύκλος τετραγωνισθείη· τὰ *μὲν γὰρ οὐκ ἐφ' ἡμῖν, τὸ δ' ὅλως οὐ πρακτόν*) die Kreisquadratur geradezu als eine Unmöglichkeit, im Gegensatz zu 7^{b} 31.

Die *Mechanik* bietet nicht viel Material an vorausgesetzten elementaren Sätzen. 848^{b} 19: *ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τῷ λόγῳ τὸ μικρὸν τετράπλευρον τῷ μείζονι, ὥστε καὶ ἡ αὐτὴ διάμετρος αὐτῶν* setzt als Umkehrung *Elem.* VI 24 voraus, 851^{a} 23: *ἐλάττων γὰρ ἡ ΒΖ τῆς ΑΔ, ὥστε καὶ ἡ ΘΖ τῆς ΔΘ· ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα* *Elem.* VI 4 und V 14, 849^{b} 14: *ἔστι δέ, ὡς τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΒ, τὸ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΧ. φανερὸν δέ, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν ἀπὸ τῶν Β, Χ ἐπὶ τὰ Η, Θ* wiederum *Elem.* VI 4. In der sehr unklaren Stelle 856^{b} 20 ff. wird *Elem.* I 5 mit I 32 kombiniert verwendet Z. 24: *καὶ ἡ μὲν Β ἐστιν ἡμίσεια ὀρθῆς· ἡ γὰρ ΖΒ ἴση τῇ ΖΑ καὶ γωνία* [*δὲ*] *ἡ κατὰ τὸ Ζ ὀρθή*; *Elem.* I 34 wird angewandt Z. 20: *ἡ μὲν γὰρ ΑΒ τῇ ΕΘ ἴση· ἴσαι γάρ εἰσιν αἱ πλευραὶ τοῦ ΒΗΚΑ χωρίου*, und Z. 28: *ταύτῃ δὲ ἡ ΚΘ* (sc. *ἴση*)*· παράλληλος γάρ*; *Elem.* I 29 wahrscheinlich Z. 23: *ἡ γὰρ Β γωνία ἴση τῇ Η· ἐν ἴσοις γὰρ ἡ μὲν ἐκτός, ἡ δὲ ἐντός*; denn statt *ἴσοις* muß mit einer Hs. *παραλλήλοις* gelesen werden. Z. 26: *ἡ γὰρ κατὰ τὸ Β* (so zu schreiben statt Z) *ὀρθή, ἐπειδὴ διπλασιόπλευρον τὸ ἑτερόμηκες καὶ πρὸς μέσον κέκλασται* benutzt die *κεκλασμένη εὐθεῖα* in einer so speziellen Weise, daß ein eigener Satz von diesem Inhalt kaum angenommen werden kann. 849^{a} 31 wird *Elem.* I 12, 849^{a} 33 *Elem.* I 31 benutzt.

Gemischte Winkel werden erwähnt 857^{b} 25: *διὸ καὶ φέρεται* (die Senkrechte) *πρὸς ὁμοίας γωνίας τῇ περιφερείᾳ τῆς γῆς· οὐ γὰρ ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὴν ἔσται τῷ ἐπιπέδῳ.*

Über Kreise kommen einige spezielle Sätze vor, die aber nicht den Anschein haben, aus den mathematischen Lehrbüchern entnommen zu sein; sie scheinen eher für den Fall gebildet zu sein; so 849^{a} 34: *αἱ δὴ ἐφ' ὧν ΩΥ καὶ ΘΖ ἴσαι· ἡ ἄρα ΒΥ ἐλάττων τῆς ΧΖ· αἱ γὰρ ἴσαι εὐθεῖαι ἐπ' ἀνίσους κύκλους ἐμβληθεῖσαι πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ἔλαττον τμῆμα ἀποτέμνουσι τῆς διαμέτρου ἐν τοῖς μείζοσι κύκλοις*; 851^{b} 38: *διὰ τὸ ῥοπήν τινα ἔχειν τὴν γωνίαν τὴν τοῦ μείζονος κύκλου πρὸς τὴν τοῦ ἐλάττονος καὶ εἶναι, ὅπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον* scheint den Satz zu enthalten, daß ähnliche Kreisbogen sich wie die Durchmesser verhalten (sofern man nämlich *ἡ γωνία τοῦ κύκλου* als Zentriwinkel der ähnlichen Sektoren auffaßt); 855^{a} 30: *χωρὶς δὲ ἐκκυλιόμενοι* (die ungleichen Kreise), *ὥσπερ τὸ μέγεθος αὐτῶν πρὸς τὸ μέγεθος ἔχει, οὕτως καὶ αἱ γραμμαὶ αὐτῶν γίνονται πρὸς ἀλλήλας* enthält, wenn man *ὥσπερ . . . ἔχει, οὕτως* von einer Proportion in streng mathematischem Sinne versteht, eine Unrichtigkeit; die Peripherien verhalten sich ja nicht wie die Kreisflächen (*Elem.* XII 2). 851^{a} 13: *διὰ τὸ τὴν ἴσην γωνίαν ἐπὶ μείζονα καθῆσθαι καὶ ὅσῳ*

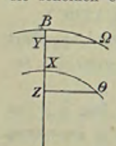

Fig. 8.

ἂν μείζους ὦσιν αἱ περιέχουσαι besagt nur, daß, je länger die Beine eines Winkels werden, desto größer wird der Kreisbogen oder die Gerade zwischen den Endpunkten; ein solcher Satz hat schwerlich in einem mathematischen Lehrbuch gestanden.

Viel interessanter ist die Mechanik in bezug auf die Terminologie. Gegen aristotelischen Ursprung der Schrift spricht nur *τετράπλευρον* 848^{b} 20 (s. oben S. 15). *ῥόμβος* (854^{b} 16, 855^{a} 5), das ebensowenig bei Aristoteles vorkommt, hat Euklid nur I def. 22, also aus älteren Lehrbüchern herübergenommen. *ἑτερόμηκες* kommt hier wie bei Aristoteles und Euklid vor 849^{a} 25, 856^{b} 27, an letzterer Stelle mit dem Beiwort *διπλασιόπλευρον* (vgl. 856^{a} 39, ^{b} 4). *χωρίον* 856^{b} 22 vom Parallelogramm ist ebenfalls euklidisch, und zwar gerade in dieser Verbindung (*Elem.* I 34). Überhaupt ist die Übereinstimmung mit der Euklidischen Terminologie etwas ausgedehnter, als bei Aristoteles selbst nachweisbar ist. Es findet sich nicht nur wie bei ihm *ἐπιζευχθῶσιν ἀπὸ — ἐπί* 849^{b} 16, *κύκλον γράφειν* 848^{b} 8, 10, 35; 849^{a} 11, 15, 21, 26; 850^{b} 4; 852^{b} 34, *λόγον ἔχειν* 848^{b} 19, *λόγος ὃν ἔχει* 848^{b} 14, 17; 849^{a} 4, *κάθετος ἀπὸ — ἐπὶ* 849^{a} 32, 34, ^{b} 14, *πρὸς ὀρθάς* 849^{a} 36, *τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον δειχθήσεται* 848^{b} 21, *ὁμοίως δὲ δειχθήσεται* 854^{b} 35; sondern auch folgende Euklidische Termini: *ἐκβεβλήσθωσαν* (verlängern) 849^{a} 23, 850^{a} 11, 854^{b} 28, *ἐπ' εὐθείας* 848^{b} 11, *πλέον ἀπέχειν τοῦ κέντρου* 849^{b} 20 usw. (*ἐκ τοῦ κέντρου?* 850^{b} 4), *ἡ ἐκ τοῦ κέντρου* 849^{a} 10, 852^{a} 17, 21, ^{b} 8, 21, 33, *ἤχθω παρά* 849^{a} 33, *ὀρθὴ πρός* 855^{b} 10, 11, 22, *γωνίαν ποιεῖν πρός* 858^{a} 2, *αἱ περιέχουσαι* (*γωνίαν*) 851^{a} 14. Aber auf der anderen Seite hat die Mechanik auch Abweichungen vom Euklidischen Sprachgebrauch mit Aristoteles gemeinsam, so *κύκλος κύκλου ἅπτεται* statt *ἐφάπτεται* 848^{a} 26 (vgl. *Elem.* III def. 3: *κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους*; aber 851^{b} 22, 25, 26, 28 ist *ἅπτεσθαι* korrekt), *στιγμή* 851^{b} 22, 28 neben *σημεῖον* 849^{b} 13, 20, 854^{b} 17, 855^{a} 9 usw., *πρὸς ὁμοίας γωνίας* 857^{b} 25, *πρὸς ὀρθήν* 857^{b} 26, 33 (sogar *πρὸς ὄρθιον τῷ ἐπιπέδῳ* 851^{b} 27), *ὅπερ* statt *ὡς* 851^{b} 39 (aber *ὡς* 849^{b} 15), *I* auf der Figur 856^{b} 11, 855^{b} 7, 20, 23, 854^{a} 28. Der Mechanik eigentümlich sind folgende Differenzen: *δίχα διαιρεῖν* 850^{a} 9, 14, 25, mit *κατά* 856^{b} 11 (Euklid sagt *τέμνειν*, aber nach ihm kommt auch *διαιρεῖν* vor), *κάθετος πρός* statt *ἐπί* 857^{b} 28 (merkwürdig *κάθετος καὶ ὀρθὴ πρός* 855^{b} 19), *ἐμβληθεῖσαι* statt *ἐναρμοσθεῖσαι* 849^{a} 36, *ἐπὶ μείζονα καθῆσθαι* statt *ἐπὶ μείζονος βεβηκέναι* 851^{a} 13, *ὅμοιον τῷ λόγῳ* 848^{b} 19. *παραπληρωθῆναι* und noch mehr *τὸ παραπληρωθέν* 854^{b} 29 stimmt zu *παραπληρώματα* *Elem.* II def. 2, aber für *τὸ ἑτερόμηκες παραπεπληρώσθω* 849^{a} 25 sagt Euklid *Elem.* VI 16 S. 118, 18 und VI 23 S. 146, 17 *συμπεπληρώσθω*, und *παραπληρωθέντος οὖν ἀπὸ τοῦ Η* 854^{b} 37 (vgl. *ἀπὸ τοῦ Ε πεπληρώσθω* 854^{b} 29) sowie *παραπληρωθεισῶν τῶν πλευρῶν* 848^{b}28 fällt gänzlich aus dem gewöhnlichen Sprachgebrauch heraus. *ὃ οὖν τὸ κινούμενον βάρος πρὸς τὸ κινοῦν, τὸ μῆκος πρὸς τὸ μῆκος ἀντιπέπονθεν* 850^{a}39 (zu vergleichen mit *ὅπερ* statt *ὡς* 851^{b}39) würde Euklidisch heißen: *ἀντιπέπονθε τὰ βάρη τοῖς μήκεσι.* Die geringe Festigkeit und Konsequenz, die für diese Terminologie so charakteristisch ist (vgl. noch *ἥξει* 849^{a}27, aber *ἀφικνεῖται* 849^{a}3, *γραμμὴ τοῦ κύκλου* 851^{b}34, 855^{a}31, aber *περιφέρεια* 855^{a}37, ^{b}13, 16) tritt besonders hervor in der Buchstabenbezeichnung, wo die Mannigfaltigkeit ganz dieselbe ist wie bei Aristoteles selbst; für Punkt findet sich *τὸ Α* 848^{b}16, 17, 21, 849^{b}16 usw., *τὸ ἐφ' οὗ Β* 849^{a}2, ^{b}12, 850^{b}9, 851^{a}25, 854^{a}28, 857^{a}18, *ἐφ' οὗ τὸ Α* 855^{b}9, 857^{a}29, *ἐφ' ᾧ Κ* 854^{b}5, vgl. 853^{a}27, 856^{a}2, *ἐφ' ᾧ τὸ Δ* 850^{b}7, 8, 854^{a}26, *οὗ τὸ Α* 850^{a}26, 27, 856^{b}15, 16, für Linie *ἡ ΑΒ* 848^{b}14, 15, 18, 849^{a}4, 25, 26, 28, 29 usw., *ἡ ἐφ' ᾗ ΑΒ* 848^{b}16, 849^{a}5, 6, 850^{a}16, 854^{a}27, vgl. *ἐν ᾧ ΦΠ* 850^{a}17 und *ἐν ᾧ τὸ Κ* 850^{a}29, *ἡ ἐφ' ἧς ΑΒ* 849^{a}24, 34, 850^{a}11, 17, 24, ^{b}6, 855^{b}7, 8, 13, *ἐφ' ἧς τὰ Γ, Ζ* 857^{b}37, *ἐφ' ἧς ἡ ΑΔΜ* 850^{a}12, *ἡ τὸ ΕΓ* 854^{b}4, für Winkel *ἡ Β γωνία* 856^{b}23, 24, 26, *ἡ κατὰ τὸ Ζ γωνία* 856^{b}25, 26, und sehr auffallend *τῆς γωνίας τῶν Α* 854^{b}10 (*τοῦ Α* eine Hs., ebenso ungewöhnlich), für den Kreis *ὁ ΑΒ κύκλος* 848^{a}26, *κύκλος ὁ ΑΒΓ* 849^{a}2, *κύκλος ἐφ' οὗ ΓΔ* 848^{a}26, 27, 30, 31, 849^{a}22, 23, *ἐφ' οὗ Α* 848^{a}29, *ἐφ' οὗ τὸ ΑΒ* 848^{a}31, *ἐφ' οὗ τὰ Δ, Ζ, Γ* 855^{b}5, 6.

Hieraus könnte man schließen wollen, daß die Mechanik entstanden sei, ehe Euklid die mathematische Terminologie konsequenter und bequemer machte, und eine solche Annahme bleibt möglich; denn daß *τετράπλευρον* erst von Euklid geschaffen sei, ist nur eine Vermutung, wenn auch eine sehr wahrscheinliche. Aber die Tatsachen der Terminologie lassen sich ebensogut durch die Annahme erklären, daß das Werkchen nach Euklid in Kreisen verfaßt worden, die von der älteren, bezw. der Aristotelischen, Terminologie beherrscht nur teilweise sich der Euklidischen anbequemt hatten.

In der großen Sammlung der *Probleme* kommt, wie schon bemerkt, ebenfalls *τετράπλευρον* vor 911^{b}3 (*τραπέζιον* 911^{a}7, bei Euklid nur I def. 22, nicht bei Aristoteles). Das unechte Axiom *Elem.* I *κοιν. ἐνν.* 9 (s. auch zu S. 8, 19): *καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν* wird 911^{a}26: *εἰ δὲ μή, εὐθεῖα εὐθείας διχῇ ἅψεται* in anderer Fassung benutzt. *Elem.* I 32 dient als Beispiel 956^{a}15: *τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας*, VI 20 (der spezielle Fall des Quadrats) ebenso 917^{b}24: *ἡ γραμμὴ ἡ δίπους οὐ διπλάσιον ἀλλὰ τετραπλάσιόν τι γράφει.* *Elem.* I 15 ist in ganz Euklidischer Form angewandt 911^{a}29: *καὶ ⟨αἱ⟩*[1] *ἐν τῷ τριγώνῳ* (sc. *γωνίαι*

1) *αἱ* fehlt in den Hss. Überhaupt ist der Text bei Bekker etwas verunstaltet.

ἴσαι)· κατὰ κορυφὴν γὰρ ταύταις, ebenso *Elem.* III 27 sowohl 911^{a}15: *ὅτι ἴσαι γίνονται αἱ γωνίαι πρὸς τὰ ὁρώμενα αἱ ὑπὸ*[1]) *τῶν ἀκτίνων ὑπὸ ταῖς ἴσαις περιφερείαις* und deutlicher 911^{a}27: *ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, καὶ αἱ γωνίαι αἱ ὑπὸ ταύτῃ*[2]) *αἱ πρὸς τῷ Δ ἴσαι ἔσονται· πρὸς τῷ κέντρῳ γάρ;* *Elem.* XI 1: *εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ* ziemlich genau 914^{a}38: *τῆς γὰρ εὐθείας οὐκ ἔστι τὸ μὲν ἐν ἄλλῳ τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ ἐπιπέδῳ.*

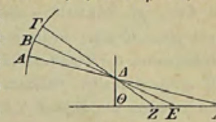

Fig. 9.

Elem. XI 6: *ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι* kommt vor 913^{b}28: *καθέτους δὲ πλείους πρὸς ταὐτὸ ἐπίπεδον μὴ γίνεσθαι τεμνούσας αὐτάς* (nicht *αὐτάς*). XVI 5 handelt von rollenden Zylindern und Kegeln, lehrt aber nichts eigentlich Mathematisches; 913^{b}38 ist von *τοῖς ὁρίζουσιν αὐτὸν* (den Zylinder) *κύκλοις* die Rede, ebenso 914^{a}11: *τοῦ δὲ κυλίνδρου πάντων ἴσων ὄντων τῶν κύκλων καὶ περὶ ταὐτὸ κέντρον*, 913^{b}39 von der *κορυφή* des Kegels, 914^{a}1 heißt dessen Basis *ὁ ὁρίζων κύκλος* (zu lesen mit einer Hs. *τῷ ὁρίζοντι κύκλῳ· κύκλῳ*), während 914^{a}26 von einem Schnitt *παρὰ τὴν βάσιν* des Zylinders gesprochen wird; daß ein solcher einen Kreis erzeugt, wird 914^{a}28 ff. gesagt.

910^{b}11: *διὰ τί διάμετρος καλεῖται μόνη τῶν δίχα διαιρουσῶν τὰ εὐθύγραμμα ἡ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν ἀχθεῖσα γραμμή* (vgl. 910^{b}19—21) befolgt den Sprachgebrauch des Aristoteles und Euklid, die Durchmesser des Kreises und Diagonal des Vierecks nicht unterscheiden (ebensowenig die Mechanik, s. 848^{b}12, 23, 28, 854^{b}32, 33, 35 usw.). Euklid definiert nur den Kreisdurchmesser I def. 17; beim Parallelogramm tritt *ἡ διάμετρος* ohne Vorbereitung auf I 34: *καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει*; doch hat er dafür auch *διαγώνιος* XI 28 S. 84, 15, 19, vgl. Proklos *in Elem.* S. 156, 11—19.

Die Bemerkungen über *ἡ δεκάς* XV 3 (910^{b}31: *πότερον ὅτι τὰ δέκα τέλειος ἀριθμός; ἔχων γὰρ πάντα τὰ τοῦ ἀριθμοῦ εἴδη, ἄρτιον περιττόν, τετράγωνον κύβον, μῆκος ἐπίπεδον, πρῶτον σύνθετον. ἢ ὅτι ἀρχὴ ἡ δεκάς; ἓν γὰρ καὶ δύο καὶ τρία καὶ τέτταρα γίνεται δεκάς*) sind pythagoreischen Ur-

1) 911^{a}16 steht *ἀπὸ τῶν ἀκτίνων* gegen die Hss. Z. 17 ist zu schreiben: *εἶτ' αὗται* (die *γωνίαι τῶν ἀκτίνων* oder vielleicht eher die *ἀκτῖνες*) *καὶ ἐκβαλλόμεναι ποιοῦσιν ἀκτῖνας ἐν τῷ τριγώνῳ, ὃ περιέχεται ὑπὸ* usw., wie sich aus der obenstehenden Figur ergibt. Dieselbe zeigt ebenfalls, daß Z. 24 und 25 *ΘΛ* statt *ΘΑ* zu schreiben, Z. 24 *Λ* statt *Α*, Z. 31 *ΛΕ* statt *ΔΕ*. Z. 31 ist *τῇ ΔΘ* zu streichen. Z. 29 *εἰ δὲ τῇ τοῦ Δ* ist unverständlich, vermutlich wegen einer Lücke; es muß heißen: wenn sie durch *Δ* verlängert werden.

2) Z. 28 steht in den Hss. *ὑπὸ ταύτης* statt *ὑπὸ ταύτῃ*.

sprungs; das meiste, so die Bezeichnung *τέλειος*, das sonst bei den Mathematikern eine andere Bedeutung hat (*Elem.* VII def. 23), findet sich bei Speusippos, der es dem Philolaos entlehnt hatte (*Theolog. arithm.* S. 61 ff. ed. Ast, vgl. Anatolios ebenda S. 63). Die Worte 910^b 36: *ἢ ὅτι ἐν δέκα ἀναλογίαις τέτταρες κυβικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται, ἐξ ὧν φασιν ἀριθμῶν οἱ Πυθαγόρειοι τὸ πᾶν συνεστάναι* enthalten den Satz *Elem.* IX 8; unter den 10 proportionalen Gliedern $1 : n : n^2 : n^3 : n^4 : n^5 : n^6 : n^7 : n^8 : n^9$ sind 4 Kubikzahlen, die Einheit mitgerechnet. *ὅρος* Glied 920^a 28.

Die Terminologie hat die Aristotelischen Eigentümlichkeiten *ὁμοίας γωνίας* 913^b 8, *πρὸς ὀρθήν* 913^b 9, 34, auch in der Buchstabenbezeichnung (*ἐφ' ᾧ ΑΔ* 912^b 7, *ἡ τὸ ΔΖ* 912^b 8, 9, *ἐφ' ἧς τὸ ΓΖ* 912^a 40, *οὗ τὸ Γ* 912^a 39, 40); doch überwiegt hier die Euklidische Weise (*ἡ ΘΑ* 911^a 25, 31, 912^b 1, von einem Kreisbogen 911^a 27, 28, ähnlich *τὸ ΘΑ* 911^a 24, 912^a 39, ^{b} 10, *τὸ Α* 911^a 23, 24, 25, 26, 912^a 40, *γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ* 911^a 28; uneuklidisch die Weglassung des Artikels 912^b 7, 8). *στιγμή* kommt nicht vor, *σημεῖον* 912^a 38, 913^b 8 usw.; *ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια* 911^b 37, vgl. 911^b 30, 32. Abweichend von Euklid ist *ὑπὸ περιφερείᾳ* 911^a 17, 28 statt *βεβηκυῖα ἐπὶ περιφερείας*, und *διαιρεῖν* für *τέμνειν* 911^a 21, 31, 913^b 28, *κάθετος πρός* 913^b 28, diese beiden Wendungen in Übereinstimmung mit der *Mechanik*.

Die Abhandlung *περὶ ἀτόμων γραμμῶν* behandelt zwar ein mathematisches Thema, das auch Aristoteles selbst beschäftigt hat (s. oben S. 23 f.), bietet aber für unsere Zwecke verhältnismäßig wenig. Benutzt werden folgende Sätze:

970^a 10: *ἐν ἅπαντι δὲ ἰσοπλεύρῳ ἡ κάθετος ἐπὶ μέσην πίπτει*, mit einbegriffen in *Elem.* I 10.[1])

970^a 8: *ἔτι εἰ ἐκ τριῶν δοθεισῶν ⟨ἴσων⟩*[2]) *εὐθειῶν συνίσταται τρίγωνον* = *Elem.* I 22.

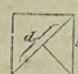

Fig. 10.

970^a 11: *ἔτι εἰς*[3]) *τὸ τετράγωνον τῶν ἀμερῶν διαμέτρου*[4]) *ἐμπεσούσης καὶ καθέτου ἀχθείσης ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τὴν κάθετον δύναται καὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς διαμέτρου* = *Elem.* I 47.

1) Es ist bemerkenswert, daß Proklos (*in Elem.* S. 279, 4 ff.) diesen Satz gegen Xenokrates' Lehre von den *ἄτομοι γραμμαί* verwendet, wahrscheinlich nach Geminus (ib. S. 278, 12).

2) Fehlt in den Hss. Aber das Dreieck wird Z. 10 als *ἰσόπλευρον* bezeichnet, und aus drei *beliebigen* Geraden kann nicht immer ein Dreieck konstruiert werden.

3) *εἰ* die Hss.

4) So einleuchtend für *διὰ μέσου* Apelt, der in seiner Ausgabe (Lips. 1888) S. XVI die Stelle richtig erklärt.

Derselbe Satz liegt auch den folgenden, durch Kürze etwas unklaren Worten[1]) zu Grunde:

970^a 14: *οὐδὲ διπλάσιον τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου χωρίον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς ἀτόμου· ἀφαιρεθέντος γὰρ τοῦ ἴσου ἡ λοιπὴ ἔσται ἐλάσσων τῆς ἀμεροῦς· εἰ γὰρ ἴση, τετραπλάσιον ἂν ἀνέγραφεν ἡ διάμετρος.*

969^a 4: *πᾶσαν δὲ τμηθῆναι δυνατὸν τὴν μὴ ἄτομον τὸν ἐπιταχθέντα λόγον*[2]) = *Elem.* VI 10: *τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν* (zu *ἐπιταχθέντα* vgl. *Elem.* VI 9 S. 104, 19).

Als bekannt wird vorausgesetzt *ἀποτομή* (*Elem.* X 73), *ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων* (*Elem.* X 36), s. 968^b 18: *οὐκ ἔσται οὔτε ῥητὴ οὔτ' ἄλογος οὔτε τῶν ἄλλων οὐδεμία, ὧν νῦν δὴ εἴρηται*[3]), *οἷον ἀποτομὴ ἢ ἐκ δυοῖν ὀνομάτοιν*, und überhaupt die Lehre von den irrationalen Größen, s. 968^b 6: *εἰ σύμμετροί εἰσιν αἱ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμεναι* = *Elem.* X def. 1, 968^b 15: *πάντα γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ῥητῶν γραμμῶν σύμμετρα ἀλλήλοις* = *Elem.* X def. 4, 969^b 33: *ἔπειτα πᾶσαι αἱ γραμμαὶ σύμμετροι ἔσονται· πᾶσαι γὰρ ὑπὸ τῶν ἀτόμων μετρηθήσονται αἵ τε μήκει σύμμετροι καὶ αἱ δυνάμει· αἱ δὲ ἄτομοι σύμμετροι πᾶσαι μήκει· ἴσαι γάρ· ὥστε καὶ δυνάμει* = *Elem.* X 9 coroll., 969^b 7: *τὸ δ' ἐπὶ τῶν συμμέτρων γραμμῶν, ὡς ὅτι αἱ πᾶσαι τῷ αὐτῷ τινι καὶ ἑνὶ μετροῦνται, κομιδῇ σοφιστικὸν καὶ ἥκιστα κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν· οὔτε γὰρ ὑποτίθενται οὕτως οὔτε χρήσιμον αὐτοῖς ἐστιν. ἅμα δὲ καὶ ἐναντίον πᾶσαν μὲν γραμμὴν σύμμετρον γίνεσθαι, πασῶν δὲ τῶν συμμέτρων κοινὸν μέτρον εἶναι ἀξιοῦν*, s. *Elem.* X def. 3: *τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι*, mit dem Scholium nr. 21. Ferner die Operation des *παραβάλλειν* (*Elem.* I 44, VI 28 und 29) 970^a 4: *ἔτι εἰ παρὰ τὴν μείζω ⟨ἔλαττον⟩ τὸ πλάτος ποιεῖ παραβαλλόμενον τὸ ἴσον, τὸ ὑπὸ τῆς ἀτόμου καὶ τῆς ποδιαίας παραβαλλόμενον παρὰ τὴν δίπουν ἔλαττον ποιήσει τὸ πλάτος τῆς ἀμεροῦς· ἔσται ἄρα ἔλαττόν τι τῆς ἀτόμου.*[4])

1) Wenn man die *ἄτομος γραμμή* als Quadratseite nimmt, wird nicht (wie es nach I 47 sein muß) $d^2 = 2s^2$. Denn (wenn $d^2 = 2s^2$, ist $d < 2s$, also) $d - s < s$. Wenn nämlich $d - s = s$, wird $d^2 = 4s$. Vgl. Apelt a. a. O. S. XVI, der richtig mit einer Hs. *ἴση* statt *ἴσως* geschrieben hat. *ἀνέγραφεν* ist meine Vermutung statt *ἔγραψεν*, vgl. *Elem.* vol. III S. 4, 2—3.

2) So Apelt mit einer Hs. und ed. pr.; *λόγον* fehlt in den Hss.

3) Apelts Konjektur für diese korrupten Worte: *ὧν δυνάμεις ῥηταί* kann nicht richtig sein; denn die *ἀποτομή* und *ἐκ δύο ὀνομάτων* sind *ἄλογοι*, nicht *δυνάμει ῥηταί*. *ἀποτομὴν ἐκ* die Hss., *ἀποτομὴ ἢ ἡ* Apelt.

4) So glaube ich die verdorbene Stelle richtiger und einfacher als Apelt S. XIV ff. hergestellt zu haben; *ἡ παραβαλλομένη* bei Apelt S. 147, 8—9 ist überhaupt nichts. *ἔλαττον* fehlt in den Hss., statt *τὸ ὑπὸ* haben sie *τὸ ἀπό*, *ἄρα* fehlt, und statt *τι* haben die Hss. *τὸ περὶ* oder *τὸ παρά*, statt *παρὰ τὴν δίπουν* eben-

972^{a}21: *γραμμῆς δ' ἦν ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας στιγμή*, vgl. 970^{b}10, 23 ff., entspricht *Elem.* I def. 3: *γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα*.

971^{b}15: *ἔτι καὶ ἡ τοῦ κύκλου* (sc. *στιγμή*) *τῆς εὐθείας ἅψεται κατὰ πλείω . . . εἰ δὲ τοῦτο μὴ δυνατόν* — wegen *Elem.* III def. 2.

971^{b}11: *εὐθεῖα εὐθείας ἅψεται κατὰ δύο στιγμάς* ist das unechte Axiom *Elem.* I *κοιν. ἔνν.* 9 in einer an 911^{a}26 erinnernden Fassung (oben S. 32).

Als Definitionen des Punktes werden erwähnt und widerlegt *τὸ ἐλάχιστον τῶν ἐν γραμμῇ* 972^{a}31, ^{b}24 und *ἄρθρον ἀδιαίρετον* 972^{b}25. Es wird immer *στιγμή*, nie *σημεῖον* gesagt.

969^{b}31: *οὔτε γὰρ ὁ τῆς γραμμῆς οὔτε ὁ τῆς εὐθείας ὅρος ἐφαρμόσει τῇ ἀτόμῳ διὰ τὸ μήτε μεταξύ τινων εἶναι μήτ' ἔχειν μέσον* setzt für die *γραμμή* die Definition als Grenze voraus (Apollonios bei Proklos *in Elem.* S. 100, 6 ff.), für *εὐθεῖα* die Platonische: *ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ* (Proklos S. 109, 21 ff., oben S. 7). 971^{b}21: *ἔτι πῶς ποτε ἔσται εὐθεῖα γραμμὴ καὶ περιφερής* tritt die Aristotelische (oben S. 12 ff.) Einteilung der *γραμμαί* wieder auf. *περιφέρεια* kommt vor in der noch nicht überzeugend geheilten Stelle (vgl. Apelt S. XII ff.) 969^{b}10—21, wo von der Erzeugung eines Halbkreises und eines Kreises durch eine sich drehende Gerade die Rede ist (*τὴν τῆς εὐθείας εἰς τὸ ἡμικύκλιον κίνησιν* Z. 19 und *τὴν εἰς τὸν κύκλον* Z. 21 hat Apelt sicher richtig hergestellt). Ebenda Z. 21 *διάστημα*, wie *Elem.* I *αἴτ.* 3 und oft, vom Radius. Für Fläche ist *ἐπίπεδον* das gewöhnliche (968^{a}13, ^{b}14, 970^{b}31, 971^{a}2, 10, 972^{a}2, 8, 29, 30, ^{b}3, 9, 11, 28), aber 972^{b}14 steht in genau derselben Bedeutung *ἐπιφάνεια* wie *Elem.* I def. 5. Ebenso herrscht nach philosophischem Sprachgebrauch *σῶμα* vor (z. B. 969^{a}25, 970^{b}31, 971^{a}2, 972^{a}7, 11, ^{b}10, 970^{b}33: *σῶμα οὐκ ἔσται ἀδιαίρετον διὰ τὸ εἶναι ἐν αὐτῷ βάθος καὶ πλάτος*), aber das *στερεόν* der Mathematiker (*Elem.* XI def. 1) kommt auch vor (972^{a}29, 30, ^{b}9, 14). Dasselbe Schwanken zeigt sich im Gebrauch von *τέμνειν* und *διαιρεῖν*, so 970^{a}29, 30: *δίχα τέμνειν*, 970^{b}7: *εἰς ἴσα καὶ ἄνισα τέμνειν*, 969^{a}4: *λόγον τμηθῆναι*, alles ganz Euklidisch (vgl. noch 970^{a}31, ^{b}6, 972^{a}3), aber 970^{a}31: *δίχα διαιρεῖν* (neben *τέμνειν*), *εἰς ἄνισα δίαιρεῖν* 970^{a}33, *καὶ ἴσα καὶ ἄνισα διαιρεῖσθαι* 970^{a}27 usw. Nicht Euklidisch ist 971^{b}5: *ἐὰν οὖν ἐκ τοῦ K ἐκβληθῇ ἡ AB*. Dagegen sind die wenigen Buchstabenbezeichnungen wie bei Euklid (*τὸ K* 971^{b}5, 6, 8, *ἡ AB* 971^{b}6, 12, 13).[1])

---

falls *περὶ τὴν δ.* (dies hat schon Apelt berichtigt). Alles übrige hat handschriftliche Gewähr; denn daß das erste *παραβαλλόμενον* nur in der Verunstaltung *παραλαμβανόμενον* in der besten Hs. überliefert ist (die übrigen *περιβαλλομένη*), wie auch an der zweiten Stelle, wo die übrigen Hss. das richtige haben, verschlägt natürlich nichts.

1) Ich benutze die Gelegenheit, um zu der von Hayduck und Apelt sehr

Auch für diese Schrift bestätigt sich also, wie für die *Mechanik* und die *Probleme*, daß die etwas veraltete und inkonsequemte Terminologie der Schule sich gegen die Fortschritte der Mathematiker zähe behauptet.

III.

Die mathematischen Stellen des Aristoteles werden zwar von den antiken Kommentatoren sorgfältig mit erläutert unter Herbeiziehung sowohl von Euklid als von älterer Literatur aus Eudemos; aber eine Schrift wie Theon aus Smyrna *τὰ κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρήσιμα εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν* scheint es im Altertum für Aristoteles nicht gegeben zu haben. Dagegen haben die Byzantiner solche Zusammenstellungen gemacht. Eine im *cod. Magliab.* XI 53 erhaltene unter dem Namen des Psellos habe ich kurz erwähnt in meiner Abhandlung über die Scholien zu Euklids *Elementen* (in den Schriften der dänischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1888, S. 252); eine zweite, die wenigstens für byzantinische Verhältnisse nicht ohne Interesse ist, folgt hier. Sie steht im *cod. Vindobon. philos.* 150 f. 199^{r}—205^{v} und entstammt einer Vorlesung des Joannes Pachymeres über das *Organon*. Die Überschrift[1]) lautet nämlich: *τοῦ σοφωτάτου πρωτεκδίκου τῆς ἁγιωτάτης τοῦ θεοῦ μεγάλης ἐκκλησίας καὶ δικαιοφύλακος διδασκάλου μου τοῦ Παχυμερῆ ἐξήγησις συντομωτάτη καὶ λίαν λαμπρὰ εἰς ὅλον τὸ ὄργανον.* fol. 1—10^{v} enthalten allgemeine Definitionen (*inc. φιλοσοφία ἐστὶν ἐξ ὑποκειμένου*), f. 10^{v}—26^{v} den Kommentar zu den Kategorien, f. 26^{v}—38^{v} zu *Περὶ ἑρμηνείνς*, f. 39—73^{r} zu *Anal. pr.* I (f. 58^{v} *τέλος τῶν μίξεων*, f. 59^{r} *τοῦ σοφωτάτου πρωτεκδίκου τῆς ἁγιωτάτης τοῦ θεοῦ μεγάλης ἐκκλησίας καὶ διδασκάλου μου τοῦ Παχυμερῆ ἐξήγησις τῶν ὑποθετικῶν συλλογισμῶν Ἀριστοτέλους*), f. 73^{r}—86^{v} zu *Anal. pr.* II, f. 86^{v}—105^{r} zu *Anal. post.* I, f. 105^{r}—116^{r} zu *Anal. post.* II, f. 116^{r}—177^{v} zur *Topik* (*des. τέλος τῆς διαλεκτικῆς*), f. 177^{v}—198^{v} zu *Περὶ σοφιστικῶν ἐλέγχων* (*des. ὥστε καὶ παρὰ τούτου εὑρέθη καὶ παρ' αὐτοῦ τετελείωται, ᾧ δὴ πάντας ἡμᾶς οὐ πολλήν, ὡς αὐτὸς ἔφησεν, ἀλλ' οὐδ' ὅσην εἰπεῖν ἔχειν προσήκει χάριν:* †*τῷ συν-*

---

geförderten Textkritik des verwahrlosten Büchleins ein paar Kleinigkeiten beizutragen. 969^{a}18 *τοὔλαττον*] *οὐκ ἔλαττον*? 21 *δὲ τῶν*] *δὲ* ⟨*ἐπὶ*⟩ *τῶν*? 970^{a}31 *ὅσα*] *ὁσαοῦν* Apelt mit Hayduck, eher ⟨*εἰς ἄν*⟩*ισα*. 971^{a}28 *ὅλως*] *ὅλης* einige Hss., *ὅλως ἄν* Apelt mit Hayduck, eher *ὅλη ἄν*. 29 *ἤ*] *ἦ*? ^{b}23 *καὶ οὐκ ἔστιν ὅλως*] *καὶ οὐκ ἔστιν ἄλλως* Apelt mit Hayduck, eher *ἢ οὐκ ἔστιν ὅλως*.

1) Sie ist zwar von *μεγάλης* an sehr verwischt, aber die oben gegebene Lesung Nessels wird bestätigt durch eine teilweise Wiederholung auf einem Pergamentblatt, das als Umschlag von zwei Papierblättern mit einigen Versen vorn eingeheftet ist.

τελεστῇ τῶν καλῶν θεῷ χάρις. ἀμήν.† Darauf rot als Lemma: ἔχειν προσήκει χάριν, und dann: ἡμεῖς δὲ ἀλλ' οὐχ ὅπως συγγνώμην ἔχειν σοι τῶν ἐλλελειμμένων ὀφείλομεν ἀλλὰ καὶ συγγνώμην ζητοῦμεν, ἐφ' οἷς οὐκ ἀξίως χάριν τῶν εὑρημένων ἀνελ⟨λ⟩ιπῶς τὴν χάριν σοι ἔχομεν), f. 199r—205v das hier herausgegebene Stück[1]), f. 206r leer, f. 206v Definitionen der Philosophie, f. 207 bis 212r exegetische Notizen, f. 212r Schluß Berechnung der Zahl der möglichen προτάσεις (γκδ) mit der Überschrift τοῦ *Πλανούδη*, f. 212v zwei kleine Stücke logischen Inhalts, Überschrift τοῦ *Πλανούδη*. Die Planudesstücke sind von einer besonderen Hand, wahrscheinlich autograph wie die Planudes-Scholien im *cod. Laur.* 28, 2 (s. meine oben angeführte Abhandlung S. 272 ff.), das übrige ist wahrscheinlich von *einer* Hand geschrieben, obgleich Schrift und Tinte ziemlich ungleich sind. Es ist ein Kollegienheft des 14. Jahrhunderts. Demgemäß habe ich nur ganz offenkundige Schreibfehler des Schülers berichtigt.

Σημείωσαι καὶ ταῦτα συντελοῦντα εἰς τὸ Ὄργανον, ὧν σποραδὴν ἐν τῇ αὐτῇ πραγματείᾳ ὁ Ἀριστοτέλης ἐμνήσθη·

Euklid Elem. I 13.

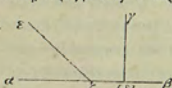

Fig. 11.

ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθῇ, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἢ δύο ὀρθὰς ἔχει ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ἐπ' εὐθεῖαν γὰρ τὴν αβ ἡ γδ εὐθεῖα ἐμπέπτωκε, καί ἐστιν ἡ ὑπὸ αδγ ἴση τῇ ὑπὸ γδβ, καὶ ὀρθαὶ ἀμφότεραι· κατὰ κάθετον γάρ. ἢ πάλιν ἐπὶ τὴν αβ εὐθεῖαν εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ εζ, καί ἐστιν ἡ ὑπὸ αζε καὶ ἡ ὑπὸ εζβ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· οὐ γὰρ κατὰ κάθετον, ἀλλὰ πλαγία ἐνέπεσεν.

Euklid I 29.

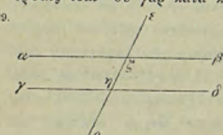

Fig. 12.

ἐὰν εἰς παραλλήλους εὐθεῖα ἐμπέσῃ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ. εἰς παραλλήλους γὰρ τὰς αβ, γδ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ εζηθ, καί ἐστιν ἡ ὑπὸ αζη γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ζηδ, καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· ἀντιστρόφως γὰρ κεῖνται ἐντὸς τῶν παραλλήλων γραμμῶν· διὰ τοῦτο γὰρ καὶ ἐναλλὰξ κέκληνται. ὁμοίως καὶ αἱ ζ καὶ η γωνίαι ἴσαι καὶ αὐταί εἰσιν, ὅτι καὶ αὐταὶ ἐναλλάξ εἰσιν.

---

1) f. 199—206 ist *eine* Lage, numeriert oben ιθ, unten κζ aus ιθ korrigiert. Die Lagen α—η haben nur diese Numerierung (oben und unten, ε hat 6 Blätter, η 4, die übrigen 8), von da an doppelte Zählung, unten θ—ιβ (θ steht f. 59r), oben, wie es scheint, α—γ, auf Lage ιβ nur diese Zahl; auf den beiden folgenden nur ε, ϛ (unten), dann oben und unten ζ, η usw. bis ιη, unten korrigiert in ιε, ιϛ usw. bis κϛ. Die Lage ιη = κϛ hat nur 4 Blätter. Der Schluß ist nicht numeriert.

---

6 ἡ] supra scr. αδγ] αγδ.

ἐὰν εἰς παραλλήλους εὐθεῖα ἐμπέσῃ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. εἰς παραλλήλους γὰρ τὰς αβ, γδ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ εζηθ, καί ἐστιν ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ εζβ ἴση τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ζηδ· ἔστι γὰρ καὶ ἡ ζ γωνία ἐντός, ἀλλ' οὐκ ἀπεναντίον· ἔστι καὶ ἡ ἀντικειμένη τῇ η γωνίᾳ καὶ τῇ ζ ἐντός, ἀλλ' οὐδ' αὗται ἀπεναντίον. Euklid I 29.

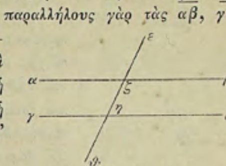

Fig. 13.

Euklid I 32.

διὰ τῶν τριῶν τούτων θεωρημάτων κατασκευάζεται, ὅτι αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. λέγω, ὅτι αἱ τρεῖς τούτου γωνίαι, ἡ ὑπὸ αβγ καὶ ἡ ὑπὸ βγα καὶ τρίτη ἡ ὑπὸ γαβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

προσεκβεβλήσθω γὰρ ἡ βγ εὐθεῖα ἐπὶ τὸ δ, καὶ γενέσθω γωνία ἔξω τοῦ τριγώνου ἡ ὑπὸ αγδ· καὶ ἐνέπεσεν ἡ αγ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν τὴν βγδ, καί εἰσιν αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἥ τε ὑπὸ αγβ καὶ ἡ ὑπὸ αγδ ἢ δύο ὀρθαὶ ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αγβ ἡ μία γωνία τοῦ τριγώνου ἐστίν. ἐὰν οὖν δειχθῇ καὶ ἡ ἔξω γωνία ἡ ὑπὸ αγδ ὅλη ἴση ταῖς ἑτέραις δυσὶ τοῦ τριγώνου γωνίαις, ἔχομεν τὸ ζητούμενον· ὡς γὰρ ἡ μία γωνία τοῦ τριγώνου μετὰ ταύτης τῆς ἔξω δυσὶν ὀρθαῖς ἦσαν ἴσαι, οὕτω καὶ πάλιν ἡ μία αὕτη τοῦ τριγώνου γωνία σύναμα ταῖς ἑτέραις δυσὶ τοῦ τριγώνου γωνίαις δύο ὀρθὰς ποιήσουσι. τετμήσθω ὅλη ἡ ὑπὸ αγδ γωνία διὰ τῆς εὐθείας τῆς εγ εἰς δύο γωνίας τήν τε ὑπὸ αγε καὶ τὴν ὑπὸ εγδ, καὶ ἔστω παράλληλος ἡ εγ τῇ αβ· καὶ ἐνέπεσεν εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ αγ, καί ἐστιν ἡ ὑπὸ αγε γωνία ἴση τῇ ὑπὸ βαγ· ἐναλλὰξ γάρ· ἡ δὲ ὑπὸ εγδ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. εἰ γοῦν ἡ μία τοῦ τριγώνου γωνία ἡ ὑπὸ αγβ μετὰ τῶν ἔξω δύο γωνιῶν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας γωνίας ἐποίει, καὶ μετὰ τῶν λοιπῶν δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου τῶν ἴσων ταῖς ἔξω τὸ αὐτὸ ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

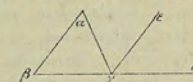

Fig. 14.

ὅτι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, οὕτω δὴ κατὰ τὸ πρῶτον διάγραμμα ὁ Εὐκλείδης καὶ κατασκευάζει καὶ ἀποδείκνυσιν.

ὁ μὲν στοιχειωτὴς Εὐκλείδης ἄλλως δείκνυσιν, ὅτι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. προσεκβάλλει γὰρ τὰς Euklid I 5.

---

4 εζβ] post ε del. β. 13 τό] τήν. 22 ἡ] om. 24 ἔστω] ἔστι. 31 πρῶτον] immo πέμπτον τοῦ πρώτου; cf. Alexander *in Anal. pr.* p. 268, 6 sqq. (ed. Wallies).

---

1 ff. vgl. *Anal. pr.* II p. 66 a 13 (s. oben S. 18). 9 ff. vgl. *Anal. pr.* II p. 67 a 15 usw. (s. oben S. 19).

εὐθείας τοῦ τριγώνου τὰς αβ, αγ καὶ τέμνει ἴσας τῇ αβ καὶ αγ τήν τε βδ καὶ τὴν γε καὶ κοινὴν λαμβάνει τὴν βγ καὶ δύο τρίγωνα ποιεῖ ὑποκάτω τοῦ

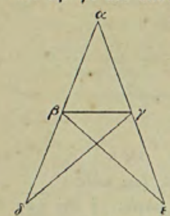

Fig. 15.

τριγώνου τὸ βγδ καὶ βγε. καί εἰσιν αἱ βάσεις αὐτῶν αἱ γδ, βε ἴσαι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γβδ τῇ ὑπὸ βγε ἴση. καὶ αὖθις ποιεῖ τρίγωνα μεγάλα τὸ αγδ καὶ τὸ αβε· καί ἐστιν ἡ αδ τῇ αε ἴση καὶ ἡ αβ τῇ αγ, καὶ γωνία κοινὴ τῶν δύο τριγώνων μία ἡ ὑπὸ βαγ, καὶ βάσις ἡ βε βάσει τῇ γδ ἴση, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβε τῇ ὑπὸ αγδ ἴση, καὶ ἡ πρὸς τῇ δ λοιπὴ λοιπῇ τῇ πρὸς τῇ ε ἴση. ἀλλ' ἐδείχθη καὶ ἡ ὑπὸ εβγ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση· ἐὰν οὖν ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσα ἀφέλῃς, τὰ καταλειπόμενά εἰσιν ἴσα· ἀπὸ γοῦν τῶν ἴσων γωνιῶν τῆς τε ὑπὸ αβε καὶ τῆς ὑπὸ αγδ ἴσαι γωνίαι ἀφῃρέθησαν αἱ ὑπὸ γβε καὶ ὑπὸ βγδ· ὥστε καὶ αἱ καταλειπόμεναι γωνίαι ἥ τε ὑπὸ αβγ καὶ ἡ ὑπὸ αγβ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ αβγ τριγώνου. καὶ οὕτω μὲν ὁ Εὐκλείδης· ὁ δέ γε Ἀριστοτέλης διὰ τοῦ κύκλου τὸ τοιοῦτον θεώρημα ἀποδείκνυσιν.

Anal. pr. I 41 b 14 sqq.

ἔστω γὰρ κύκλος ὁ αβγ καὶ κέντρον τούτου τὸ δ· αἱ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἠγμέναι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἴση ἄρα ἡ δβ τῇ δγ, καί ἐστιν ἰσοσκελὲς

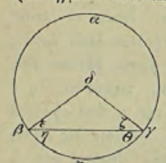

Fig. 16

τρίγωνον τὸ δβγ, καί ἐστιν ὡς τομεὺς κύκλου τὸ δβκγ σχῆμα, καί εἰσιν αἱ γωνίαι τούτου ἥ τε ὑπὸ δβκ καὶ ἡ ὑπὸ δγκ ἴσαι. ἐμπεσοῦσα δὲ ἡ βγ εὐθεῖα τέμνει τήν τε πρὸς τῷ β γωνίαν εἰς τὴν ε καὶ τὴν η γωνίαν τήν τε πρὸς τῷ γ εἰς τὴν πρὸς τῷ ζ καὶ εἰς τὴν πρὸς τῷ θ. καί ἐστιν ἡ πρὸς τῷ η γωνία τῇ πρὸς τῷ θ ἴση· παντὸς γὰρ τμήματος κύκλου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἔστι δὲ τμῆμα κύκλου τὸ βκγ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ ε γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἐστίν· ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσα ἀφέλῃς, τὰ καταλειπόμενα ἴσα εἰσίν. καί εἰσιν αἱ γωνίαι αὗται ἥ τε πρὸς τῷ ε καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου τοῦ δβγ πρὸς τῇ βάσει τῇ βγ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Aristoteles anal. pr. I 41 a 26.

πῶς ἡ διάμετρος ἀσύμμετρος τῇ πλευρᾷ;

τετραγώνου τοῦ αβγδ ἡ διάμετρος ἡ αγ τῇ πλευρᾷ τῇ αδ ἐστιν ἀσύμ-

1 καὶ αγ] τῇ αγ. 13 καὶ ὑπό] καὶ αἱ ὑπό. 24 η] e corr. 28 ἀφέλῃς] ἀφέλῃ.

Euklid nimmt nur $αδ = αε$, nicht $βδ = αβ = αγ = γε$. Daß $βε = γδ$, wird durch die Kongruenz der Dreiecke $αγδ$, $αβε$ bewiesen. Daraus folgt wieder die Kongruenz der Dreiecke $βγδ$, $βγε$ und aus dieser $\angle δβγ = \angle βγε$. In unserem Text ist die Schlußfolgerung auf den Kopf gestellt. 17 sqq. vgl. Alexander *in Anal. pr.* S. 268, 9 ff. (oben S. 25). 32 sqq. vgl. Alexander S. 260, 20 ff.

μετρος· εἰ γὰρ σύμμετρός ἐστι, ἔστι δὲ σύμμετρα μεγέθη τὰ ἔχοντα λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἔστω ἡ διάμετρος τέσσαρα, ἡ δὲ πλευρὰ τρία, καὶ τετραγωνιζέσθω ταῦτα, καὶ γίνεται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ιϛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς θ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· καὶ ὁ ιϛ ἄρα τοῦ θ διπλάσιος. ἀλλὰ καὶ τοῦ η· ὥστε ὁ περιττὸς ὁ θ ἴσος ἔσται τῷ ἀρτίῳ τῷ η· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρος ἀλλ' ἀσύμμετρος.

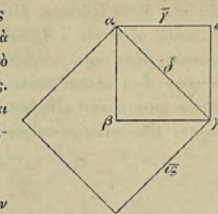

Fig. 17.

Aristoteles Anal. pr. II 69 a 30 sqq.

πῶς ὁ κύκλος τετραγωνίζεται;

τετραγωνισθῆναι τὸν κύκλον πάντη χαλεπόν ἐστιν· οὐδὲ γὰρ εὐθύγραμμον ἀλλὰ περιφερόγραμμόν ἐστι· τὰ δὲ εὐθύγραμμα εὐκολώτερον τετραγωνίζονται, ἤγουν τὸ πρόμηκες γίνεται τετράγωνον· τετραγωνισμὸς γάρ ἐστι τὸ εὑρεῖν τὴν πλευράν, ἐξ ἧς τὸ σχῆμα τετραγωνίζεται. οἷον τὰ λϛ, εἰ μὲν ἐκ τοῦ τετράκις τὰ θ γίνονται, προμήκης ἐστί· τὸ μὲν γὰρ πλάτος τούτου δ, τὸ δὲ μῆκος θ. εἰ γοῦν θέλομεν τετραγωνίσαι τὸν λϛ, ζητήσομεν τὴν πλευράν, ἥτις εὕρηται κατὰ γεωμετρικὴν ἀναλογίαν μέσον τοῦ δ καὶ τοῦ θ, καί ἐστιν ὁ ϛ· ὃν γὰρ λόγον ἔχει ὁ θ πρὸς τὸν ϛ, ὁ ϛ πρὸς τὸν δ· ἡμιόλιος γάρ. καὶ ἑξάκις τὰ ϛ λϛ γίνονται. τοῦτό ἐστιν ὁ τετραγωνισμὸς καὶ ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σχημάτων. ἐπὶ γοῦν τοῦ κύκλου, ἐπεὶ οὐκ εὐθυγραμμίζεται, οὐκ ἔστι τὸ τετραγωνίσαι αὐτόν. ὅμως τινὲς καὶ τοῦτον ἐπειράθησαν τετραγωνίσαι, ἀλλ' οἱ μὲν ἀποστάντες τῶν οἰκείων γεωμετρικῶν ἀρχῶν, οἱ δὲ ἥψαντο μὲν τῶν ἀρχῶν, οὐ μὴν δὲ καὶ ἐς τέλος ἴσχυσαν ἀποδεῖξαι.

Aristoteles Anal. post. I 75 b 40 sqq. Pseudo-Alexander in Soph. elench. S. 90, 10 sqq. (ed. Wallies).

αὐτίκα ὁ μὲν Βρύσων ἀρχὰς ὑποθέμενος διαλεκτικὰς γεωμετρικῶς ἐπεχείρει δῆθεν τὸν τοῦ κύκλου ποιεῖν τετραγωνισμόν· ἐτίθει γὰρ κύκλον καὶ περὶ τοῦτον τετράγωνον καὶ ἄλλο ἐνέγραφεν ἐν αὐτῷ τετράγωνον, καὶ ἦν ὁ κύκλος μέσος τῶν δύο τετραγώνων, τοῦ μὲν ἐκτὸς μείων τοῦ δὲ ἐντὸς μείζων. ἐτίθει γοῦν καὶ μέσον τῶν δύο τετραγώνων ἄλλο τετράγωνον καὶ συνῆγεν, ὅτι, ἐπεὶ ὁ κύκλος τοῦ μὲν ἐκτὸς τετραγώνου μείων τοῦ δὲ ἐντὸς μείζων, καὶ τὸ μέσον τετράγωνον ὁμοίως ἔχει πρὸς τὰ τοιαῦτα τετράγωνα, ἄρα τὸ μέσον τετράγωνον καὶ ὁ κύκλος ἴσα εἰσίν.

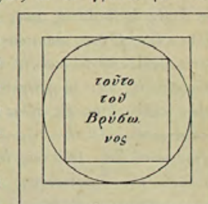

Fig. 18.

ἔστι δὲ ὁ λόγος πιθανὸς καὶ διαλεκτικὴ ἡ ἀρχή· οὐδὲ γὰρ ἐξ ἀνάγκης

4 ιϛ] ι'ϛ. 7 ὁ θ] θς (θ ἀριθμός?). 13 εὐκολώτερον] εὐκὸ^{τερ}. ἤγουν] ἠ^{γ}. 17 γεωμετρικὴν] -κ- corr. ex αν. 20 καὶ ἐπί] καί dubium. 25 Βρύσων] Βρ- in ras. 35 ἄρα] ἀρ$^{α'}$.

ἔστιν, ὅτι, εἰ δύο τινὰ εὕρηνται τοῦ μὲν ἑνὸς μείζονα τοῦ δὲ ἄλλου μείονα, τηνικαῦτα τὰ δύο ταῦτα ἴσα ἐστίν· τὰ ζ γὰρ καὶ τὰ η τῶν μὲν ἓξ πλείονά εἰσι τῶν δὲ ιε ἐλάττονα, ἀλλ' οὐ παρὰ τοῦτο τὰ ζ καὶ τὰ η ἴσα εἰσίν.

Aristoteles Soph. elench. 172 a 7. — Themistius in Phys. p. 4, 2 sqq. ed. Schenkl.

ἀλλ' οὕτω μὲν ὁ Βρύσων· ὁ δὲ Ἀντιφῶν πόρρω τῶν γεωμετρικῶν ἀρχῶν γεγονὼς ᾠήθη ποτὲ γενέσθαι τὸ εὐθύγραμμον ἴσον τῷ περιφερογράμμῳ καὶ δυνατὸν εἶναι ἐφαρμόζεσθαι θάτερον θατέρῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον καὶ παρὰ πᾶσαν γεωμετρικὴν μέθοδον. ἐποίει γὰρ κύκλον καὶ ἐν αὐτῷ ἐνέγραφε τρίγωνον, εἶτα πεντάγωνον καὶ ἑξάγωνον καὶ πεντεκαιδεκάγωνον, καὶ ἕως οὗ ἐνεχώρει διαστέλλεσθαι τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν τῆς περιφεροῦς γραμμῆς τοῦ κύκλου, πεντηκοντάγωνον καὶ ἑκατοντάγωνον καὶ μάλα ἐπὶ πλέον, ἕως οὗ δόξει ἐφαρμόζεσθαι τὴν εὐθεῖαν τῇ περιφερεῖ· ὃ ἀδύνατόν ἐστιν· εἰ γὰρ καὶ ἡ αἴσθησις πλανᾶται, ἡ ἐπιστήμη οὐ δίδωσι τοῦτο. ἀλλὰ ἐκεῖνος τῇ αἰσθήσει πιστεύων ἐδόκει ὁρᾶν ἐφαρμοζομένην εὐθεῖαν περιφερεῖ κἀντεῦθεν λαμβάνων ἀρχήν, ὡς τὸ περιφερὲς ἀπετελέσθη εὐθύγραμμον, ἐπεχείρει τετραγωνίζειν τὸν κύκλον. εἰ γοῦν ἦν τὸ ἡγούμενον, ὅτι γίνεταί ποτε τὸ εὐθὺ ἴσον τῷ περιφερεῖ, καὶ τὸ ἑπόμενον ἂν ἦν· ἀλλὰ σαθροῖς θεμελίοις τὸν λόγον ἐπεχείρει οἰκοδομεῖν.

Fig. 19.

ἀλλὰ ταῦτα μὲν καὶ ὁ Ἀντιφῶν, ὃς καὶ φορτικὸς ἐδόκει λέγων οὐκ ἐξ οἰκείων ἀρχῶν τῇ γεωμετρίᾳ.

Aristoteles Soph. elench. 171 b 15. — Philoponos in Phys. p. 31, 3—7 ed. Vitelli. — Simplicius in Phys. I p. 56, 1 sqq. ed. Diels.

τρίτος ἐπὶ τούτοις Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐπεχείρει τετραγωνίζειν τὸν κύκλον, ὃς ἁλοὺς ἐν θαλάσσῃ παρὰ τῶν Ἀθηναίων καὶ τῶν ἐνόντων αὐτῷ στερηθεὶς ἦλθεν εἰς Ἀθήνας ἀπαιτῶν τὰ ἀφαιρεθέντα, ὡς δὲ οὐκ ἐπετύγχανεν, ὧν ἐπεζήτει ἀφεὶς πάντα καὶ ἐς διδασκάλων φοιτήσας ἐξέμαθε τὴν γεωμετρίαν καὶ θαρρῶν τῇ ἕξει ἐκ γεωμετρικῶν ἀρχῶν ἐπεχείρει τετραγωνίζειν τὸν κύκλον. πλὴν οὐδὲ οὗτος εἰς τέλος ἐπετύγχανε τοῦ βουλήματος· ἐλάμβανε γὰρ ἀρχὴν γεωμετρικήν, ὅτι ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὁμοίως τούτοις καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης εἶδος οἱονεὶ ἡμικύκλιον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἡμικυκλίοις· ἐτίθει γοῦν γραμμὴν τὴν αβ καὶ ἐπ' αὐτῆς συνίστα ἅμα μὲν ἡμικύκλιον τὸ αβ ἅμα δὲ καὶ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ αγβ· καὶ τοῦτο γεωμετρικόν, ὅτι ἐν τοῖς ἡμικυκλίοις ὀρθογώνια συνίστανται τρίγωνα, ὥσπερ ἐν τοῖς ἐλάττοσι τῶν ἡμικυκλίων τμήμασιν ἀμβλυγώνια

Fig. 20.

15 ἐφαρμοζομένην] -ην e corr. 29 ὑποτεινούσης] ἀποτεινούσης. Fig. bis, in altera: τοῦ ἱπποκράτους. 33 ἐπ'] potest legi etiam ἀπ'. 36 ὀρθογώνια] ὀρθογόνια.

ἐν δέ γε τοῖς μείζοσι τῶν ἡμικυκλίων ὀξυγώνια τρίγωνα. ἐλάμβανε γοῦν τὸ ἡμικύκλιον εἶδος συνιστάμενον ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἀπὸ δὲ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου συνίστα δύο ἕτερα ἡμικύκλια, καὶ ἰδοὺ κατὰ μέθοδον γεωμετρικὴν ὅλον τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ἡμικύκλιον τοῖς δυσὶν ἡμικυκλίοις τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἴσον ἦν. διῄρει δὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἰς ἴσα δύο τρίγωνα διὰ τῆς εὐθείας τῆς γδ τὰ αγδ, γδβ. ἦν οὖν τὸ ὅλον ἡμικύκλιον ἴσον τοῖς δυσὶ τμήμασι τούτου, ἤγουν τὸ αγβ τῷ γαδ καὶ τῷ γδβ· ἦν δὲ τοῦτο τὸ ἡμικύκλιον ἴσον καὶ τοῖς ἡμικυκλίοις τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῷ τε γεα καὶ τῷ γζβ· ὥστε τό γε γκαδ τμῆμα ἴσον εἶναι τῷ γεα ἡμικυκλίῳ, τὸ δὲ γδβλ τμῆμα ἴσον τῷ γζβ ἡμικυκλίῳ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ κ τμῆμα ἀπό τε τοῦ γεαδ τμήματος καὶ ἀπὸ τοῦ γεα ἡμικυκλίου, καὶ τὸ λ τμῆμα αὖθις κοινὸν ἀφῃρήσθω ἀπό τε τοῦ γδβζ τμήματος καὶ τοῦ γζβ ἡμικυκλίου· ἐναπελείφθη ἄρα ὁ μὲν γεα μηνίσκος ἴσος τῷ εὐθυγράμμῳ τριγώνῳ τῷ γαδ, ὁ δὲ γζβ μηνίσκος τῷ εὐθυγράμμῳ τριγώνῳ ἴσος τῷ γδβ, καὶ εὕρηται εὐθύγραμμον τρίγωνον ἴσον περιφερογράμμῳ τῷ μηνίσκῳ. εἰ γοῦν εὕρηται ἴσον εὐθύγραμμον περιφερογράμμῳ, καὶ κύκλος εὑρεθήσεται ἴσος τῷ εὐθυγράμμῳ, τούτου δὲ γενομένου ῥᾳδίως ὁ κύκλος τετραγωνισθήσεται· ὡς γὰρ ὁ μηνίσκος πρὸς τὸ εὐθύγραμμον, ὅλος διόλου περιφερόγραμμος, ὧν καὶ ἅπας ὁ κύκλος, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον. τοῦτο δὲ οὐκ ἐξ ἀνάγκης· οὐ γάρ, εἰ ἐπὶ μέρους οὕτω, καὶ ἐπὶ παντός· βῶλον γὰρ μέρος γῆς δυνάμεθα φέρειν, οὐ μὴν δὲ καὶ ἅπασαν γῆν, καὶ μέρος ἀέρος ἀναπνέομεν, οὐ μὴν δὲ καὶ πάντα ἀέρα, ὡς Ἀριστοτέλης φησίν.

Topica V 135 a 32 sqq

Anal. post. I 75 b 13.

πῶς οἱ δύο κύβοι εἷς κύβος γενήσεται;

ἔστω κύβος ὁ αβγδεζηθ ιβ γραμμὰς ἴσας ἔχων, ἓξ ἐπίπεδα καὶ η στερεὰς γωνίας, ὃς καὶ ἁρμονία λέγεται, διότι τὰ τρία ταῦτα τὴν ἁρμονικὴν σώζουσιν ἀναλογίαν ιβ$^{\delta}$ η$^{\beta}$ ς· ὃν γὰρ λόγον ἔχει ὁ ιβ πρὸς τὸν ς ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάττονα, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος πρὸς τὸν μέσον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάττονα· ἔστι δὲ ὁ λόγος τοῦ ιβ πρὸς τὸν ἓξ διπλάσιος, ἔτι καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος πρὸς τὸν μέσον δ, ἡ δ' ὑπεροχὴ τοῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάττονα β, ὁ δ δὲ πρὸς τὸν δύο διπλάσιος, καὶ διὰ τοῦτο λέγεται ὁ κύβος ἁρμονία. ὅτι δὲ οἱ β κύβοι κύβος εἷς, αἰνίττεται τὴν πολυθρύλλητον ἱστορίαν· Ἀθηναίοις γὰρ λοιμώξασιν ἔχρησεν ὁ θεὸς ἀπαλλαγήσεσθαι τοῦ λοιμοῦ, εἰ τὸν βωμὸν αὐτοῦ διπλασιάσουσιν· ἦν δὲ οὗτος κύβος· οἱ δὲ λαβόντες ἕτερον κύβον ἴσον ἐπιτεθείκασι τῷ βωμῷ, τοῦ λοιμοῦ δὲ μὴ παυσαμένου

Nikomachos Arithm. II 29.

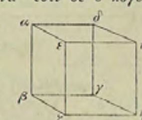

Fig. 21.

Pseudo-Psellus De quattuor disciplinis (Venetiis 1532) S. (61) sqq.

7 ἤγουν] ἤγ. γαδ] -δ corr. ex β, supra γα- add. κ (uoluit γκαδ). 8 γδβ] supra -β add. λ (h. e. γδβλ). 11 γεαδ] immo γκαδ. 12 γδβζ] immo γδβλ. 15 τρίγωνον] immo τὸ τρίγωνον. 18 διόλου] διό$^{\lambda}$. 19 οὐ] e corr. 24 αβγδεζηθ] αβγ'δ'εζη'θ'. 26 ι'β$^{\delta}$ η$^{\beta}$ ς'. 29 ιβ'. 30 δ] δ'. 31 β] β'. δ] δ'. 33 ἱστορ.'

ἔχρησεν ὁ θεὸς μὴ πεποιηκέναι αὐτοὺς τὸ προσταχθέν· ὁ μὲν γὰρ προσέταξε διπλασιάσαι τὸν βωμόν, οἱ δὲ κύβον ἐπὶ κύβῳ ἐπέθηκαν· καὶ ἦλθον πρὸς Πλάτωνα λέγοντες· πῶς ἂν τὸν κύβον διπλασιάσομεν; ὁ δὲ Πλάτων ἢ ὁ Σωκράτης κάλλιον πρὸς αὐτούς φησιν· ἔοικεν ἡμῖν ὀνειδίζειν ὁ θεὸς ὡς ἀμελοῦσι γεωμετρίας· τὴν δὲ τοῦ κύβου διπλασίασιν εὑρεθῆναί φησιν, εἰ δύο εὐθείαις δύο μέσαι ἀνάλογον εὑρεθῶσι, καὶ τοῦτο τὸ πρόβλημα τοῖς μαθηταῖς προυβάλετο, καί τινες τῶν μαθητῶν περὶ τῆς τούτων εὑρέσεως γεγράφασιν.

Euklid VI 20 coroll. 2. ὁ μὲν γὰρ γεωμέτρης ἔδειξεν, ὅτι τριῶν εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν, ὡς ἔχει ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ἀναγραφόμενον τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας.

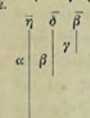

Fig. 22.

ἔστωσαν γοῦν τρεῖς εὐθεῖαι αἱ α, β, γ ὀκτώ, τέσσαρα, δύο μέτρα ἔχουσαι. ὁ γοῦν ὀκτὼ τῶν δύο τετραπλάσιος καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τετράγωνον· ὀκτάκις γὰρ ὀκτὼ ξδ· πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· τετράκις γὰρ δ ις· τετραπλάσιον.

οὕτω μὲν οὖν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἔδειξεν ὁ γεωμέτρης· ἀλλ᾽ ὀργανικώτερον ἐκθησόμεθα κατὰ γραφήν, καθά φησι Παρμενίων, Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου.

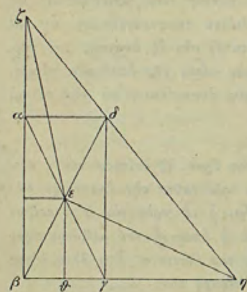

Fig. 23.

ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, καὶ ἔστω διπλασία ἡ αβ τῆς βγ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν.

καὶ συμπληρούσθω τὸ αγ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, καὶ ἤχθωσαν διαγώνιοι αἱ αγ, βδ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ αβ, βγ ἐπὶ τὰ ζ, η, καὶ διὰ τοῦ δ σημείου ἐφηρμόσθω ἡ ζη εὐθεῖα, ὡς ἴσην γενέσθαι τὴν εζ τῇ εη. λέγω οὖν, ὅτι τῶν αβ, βγ εὐθειῶν δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ γη, αζ.

ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν βγ εὐθεῖαν παράλληλος τῇ αβ ἡ εθ. καὶ ἐπεὶ ἰσοσκελές τρίγωνόν ἐστι τὸ βεγ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ βγ ἡ εθ, ἴση ἄρα ἡ βθ τῇ θγ.

7 προυβάλετο] corr. ex προυβάλλετο. 9 πρώτη] α΄. 11 α, β, γ] α΄β΄γ΄. 14 δ] δ΄. 17 βγ] β΄γ΄. 18 αβ] αβ΄. βγ] βγ΄. 20 αγ] α΄γ΄. 22 αγ, βδ] α΄γ΄βδ΄. 23 ἐφηρμόσθω] ἐφαρμόσθω. 25 αβ, βγ] αβ΄βγ΄. 27 βγ] β΄γ΄. 28 εθ] ε΄θ΄. 29 βεγ] β΄εγ΄. 30 θγ] θ΄γ΄.

16 Παρμενίων] vgl. Philoponos *in Anal. post.* I S. 24 (ed. Ald.) = *Apollonios* II S. 105 (ed. Heiberg), wo aber der Beweis ein anderer ist. Der hier vorliegende stimmt mit dem Herons (Eutokios *in Archimedem* III S. 70 ff.). Fig. 23, worauf εη unrichtig eine gebrochene Linie ist, deren erste Strecke die Seite δγ halbiert, folgt etwas weiter unten (f. 203r am Schluß) bei αὕτη ἐστὶν ἡ καταγραφή usw. (s. unten S. 45, 28); am Rande steht dabei: ζήτει ἔμπροσθεν τὴν

ἐπεὶ οὖν ἡ βγ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ θ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἡ γη, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βη, ηγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς θγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς θη. [Euklid II 6]. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς εθ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βηγ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν γθ, θε ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν εθ, θη. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν γθ, θε ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς γε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν εθ, θη ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς εη. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν βζ, ζα μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εα ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς εζ. ἴση δὲ καὶ ἡ εζ τῇ εη· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βη, ηγ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γε ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βζ, ζα καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αε. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς εγ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς εα· ἴσαι γάρ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βη, ηγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βζ, ζα. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἐν τῷ ιδ΄ τοῦ ϛ΄, ὅτι τῶν ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, Euklid VI 14. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ βζ πρὸς τὴν βη, οὕτως ἡ γη πρὸς τὴν αζ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ βζ πρὸς τὴν βη, οὕτως ἥ τε ζα πρὸς τὴν αδ καὶ ἡ γδ πρὸς τὴν γη· καὶ ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ γη πρὸς τὴν αζ καὶ ἡ αζ πρὸς τὴν αδ. καί ἐστι τῇ μὲν δγ ἴση ἡ αβ, τῇ δὲ αδ ἴση ἡ βγ· καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ ηγ πρὸς τὴν αζ καὶ ἡ αζ πρὸς τὴν βγ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθεῖων τῶν αβ, βγ εὕρηνται δύο μέσαι ἀνάλογον αἱ γη, ζα.

πῶς δεῖ στερεὸν στερεῷ πολλαπλασιάσαι.

ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ α, β, καὶ ἔστω διπλασίων ἡ α τῆς β, καὶ εἰλήφθωσαν τῶν α, β δύο μέσαι ἀνάλογον αἱ γ, δ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν α πρὸς τὴν γ, οὕτως καὶ τὴν γ πρὸς τὴν δ καὶ τὴν δ πρὸς τὴν β. λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γ τὸ ἀπὸ τῆς α.

ἐπεὶ ἡ α πρὸς τὴν β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ α πρὸς τὴν γ· τὰ γὰρ ὅμοια στερεὰ πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· [Euklid XI 33]. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ. διπλασίων δὲ ἡ α τῆς β· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α τοῦ ἀπὸ τῆς γ.

αὕτη ἐστὶν ἡ καταγραφὴ τοῦ θεωρήματος, ἐν ᾗ δείκνυται, ὅτι, ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γη, ἡ γη πρὸς τὴν ζα καὶ αὕτη πρὸς τὴν βγ. καὶ ὡς ἡ αβ

2 τῷ] τό. 3 τῶν] τῆς?*) 4 γθ] εθ. 5 τῶν (pr.)] τῆς? τοῖς] e corr. τῶν (alt.)] τῆς? 6 Post εη desunt: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βη, ηγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εη. τῶν] τῆς? 7 εζ (pr.)] αζ. ηγ] inc. f. 203r. 9 τῷ] corr. ex τό. 10 τῷ (pr.)] τό. ὑπό] ἀπό. τῶν] τῆς? ϛ΄] ϛ. 17 δοθεισῶν] -ῶν e corr. εὕρηνται] εὕρηται. 23 τοῦ ἀπὸ τῆς γ] sc. στερεοῦ ($γ^3$), und so im folgenden. 28 Hier Figur 23.

καταγραφήν, und fol. 203v wird nebst anderen Figuren (s. unten) diese vergrößert wiederholt; nur sind εζ und εη in derselben Weise falsch gezeichnet wie hier εη, und auf βζ und βη sind zwei Rechtecke hinzugefügt; bei αζ steht: ἡ τρίτη, bei αβ: ἡ πρώτη, bei βγ: ἡ τετάρτη, bei γη: ἡ δευτέρα, beim Rechteck auf βζ oben: αὕτη ἡ ζα, bei dem auf βη rechts: αὕτη ἡ γη.

*) Die Kompendien für τῆς und τῶν sind nicht zu unterscheiden.

πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γη. ἀλλ' ἡ αβ πρὸς τὴν βγ διπλασίων· καὶ ὁ ἀπὸ τῆς αβ ἄρα κύβος διπλασίων τοῦ ἀπὸ τῆς γη κύβου. τοῦ γοῦν παρόντος κύβου ἔχοντος πλευρὰν τὴν γη οὕτω διπλασιασθήσεται ὁ τοιοῦτος κύβος, εἴπερ δέξεται πλευρὰν τὴν αβ. ὡς γὰρ ἐν ἐπιπέδοις κατὰ τρεῖς ὅρους γίνεται τὸ τοιοῦτον· οἷον ἔστωσαν γραμμαὶ τρεῖς α, β, γ ἔχουσαι ιβ ς γ, ὡς ὁ ιβ πρὸς τὸν γ· τετραπλάσιος γάρ· οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς α ἐπίπεδον τοῦ ἀπὸ τῆς β ἐπιπέδου· δωδεκάκις γὰρ τὰ ιβ ρμδ καὶ ἑξάκις τὰ ς λς· τετραπλάσιον ἄρα· ὡς γοῦν οὕτω ἐν ἐπιπέδοις διὰ τριῶν ὅρων, οὕτω διὰ τῶν δ ἐν στερεοῖς, ὡς ἡ πρώτη γραμμὴ πρὸς τὴν δ', οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας στερεόν. ὡς γοῦν ἐπὶ τοῦ διπλασίου οὕτως, οὕτω χάριν παραδείγματος καὶ ἐπὶ τοῦ ὀκταπλασίου τὸ τοιοῦτον· ἔστωσαν δ γραμμαὶ αἱ α, γ, δ, β ἔχουσαι ἀριθμοὺς ις η δ β, ὡς ἡ α πρὸς τὴν β· ὀκταπλάσιος γάρ· οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς α στερεόν, ἤγουν ὁ κύβος, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ στερεόν, ἤγουν τὸν κύβον· ἐν γὰρ τῇ αὐτῇ ἀναλογίᾳ αἱ δ εἰσι γραμμαί· κατὰ γὰρ τριπλασίονα λόγον· καὶ γίνεται τὸ ἀπὸ τῆς α στερεὸν ὀκταπλάσιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ· ἡ γὰρ α πρὸς τὴν β ὀκταπλασίων· ἑξακαιδεκάκις γὰρ τὰ ις σνς, καὶ πάλιν ἑξακαιδεκάκις τὰ σνς κύβος ὁ ͵δϙς· οὕτω γὰρ ὁ κύβος ἀναδιπλασιάζεται. καὶ αὖθις ὀκτάκις τὰ η ξδ καὶ ὀκτάκις τὰ ξδ κύβος ὁ φιβ· ἔστι δὲ ὁ ͵δϙς κύβος ὀκταπλάσιος τοῦ φιβ κύβου. ὡς γοῦν ἐπὶ τοῦ ὀκταπλασίου, οὕτω λάμβανε καὶ ἐπὶ τοῦ τετραπλασίου καὶ διπλασίου καὶ ἐπὶ πάντων.

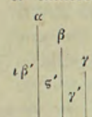

Fig. 24.

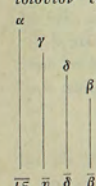

Fig. 25.

εἰς τὴν αὐτὴν καταγραφὴν καὶ ταῦτα.

ὡς ἡ ζβ ὅλη πρὸς τὴν βη ὅλην, οὕτω καὶ ἡ ηγ πλευρὰ πρὸς τὴν ζα πλευράν· καὶ γὰρ ἴσα καὶ ὅμοιά εἰσι παραλληλόγραμμα τὸ ὑπὸ τῶν ζβ, βα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βη, ηγ. ἔστω γὰρ ἐν τοῖς ὀκταπλασίοις στερεοῖς διὰ τῶν

2 καί] inc. f. 203ᵛ. 5 τοιοῦτον] hier ɕ, die Figur mit demselben Zeichen unten (dabei: ἐν τοῖς ἐπιπέδοις). 13 τοιοῦτον] τοιοῦτον ∾. δ (pr.)] δ'. ις] ις'. 14 α] α'. β] β⁶ (h. e. δευτέραν). 15 ἤγουν] ἤγ. ἤγουν] ἤγ. 16 δ] δ'. 19 ͵δϙς] ͵δ corr. ex γ. 21 ὀκταπλάσιος] ὀκταπλα. 23 τετραπλασίον] τετραπλ α/. διπλασίου] διπλασ. 25 ηγ] γ. 26 τὸ ὑπό] postea insertum. τῶν] τῆς. 27 τῶν] τῆς. στερεοῖς—πλευρῶν] in mg. postea additum.

Die Figur unten mit dem Zeichen ∾ (vgl. zu Z. 5). Mit ἀνα- Z. 16 schließt f. 203ᵛ medio. Der übrige Teil der Seite enthält die beiden letzten Figuren und die S. 45 erwähnte mit der Beischrift: ἀποδείκνυται διὰ γραμμῆς τμηθείσης δίχα καὶ προσκειμένης ἐπ' εὐθείας ἑτέρας, διὰ τῆς νύμφης, διὰ τῆς ἀντιπεπονθήσεως τῶν ἴσων ὀρθογωνίων καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως (corr. ex διαιρετικῆς) τῶν ζβ, βη. Daneben nebenstehende Figur mit Beischrift: ἐν τοῖς στερεοῖς ἐπὶ διπλασίου. 24 καταγραφήν] s. oben S. 45, 28 ff.).

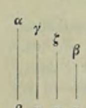

Fig. 26.

διπλασίων πλευρῶν ἡ ζβ μοιρῶν κ· καὶ τετράκις τὴ κ π· ἡ δὲ βη μοιρῶν ι, ἡ δὲ ηγ μοιρῶν η· καὶ ὀκτάκις τὰ ι π. λοιπὸν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ τῶν τοιούτων, ὡς ἡ ζβ ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν βη τὴν μείζονα πλευρὰν τοῦ ἑτέρου ὀρθογωνίου καὶ τούτου ἡ ἐλάττων πλευρὰ ἡ γη πρὸς τὴν ἐκείνου ἐλάττονα πλευρὰν τὴν ζα, ὡς τὰ κ πρὸς τὰ ι, τὰ η πρὸς τὰ δ. καὶ διαιροῦντι ἄρα, ὡς ἡ ζβ πρὸς τὴν βη, τὰ κ πρὸς τὰ ι, καὶ ἡ αβ πρὸς τὴν γη τὰ ις πρὸς τὰ η, καὶ ἡ ζα τὰ δ πρὸς τὴν βγ τὰ δύο· καὶ γέγονεν ἡ τῶν δ μεγεθῶν ἀναλογία. ἔστι δὲ ἐν ὀκταπλασίοις στερεοῖς· ὡσαύτως ἄρα καὶ ἐν τοῖς διπλασίοις στερεοῖς.

Topica I 1 101 a 15.

περὶ τῶν ἐν τῇ διαλεκτικῇ κατ' ἀρχὰς ψευδογραφημάτων.

Euklid I 20. Proklos in Elem. p. 322, 4 ff.

φησὶν ὁ γεωμέτρης· παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς μιᾶς μείζους εἰσὶ πάντη μεταλαμβανόμεναι· τὸ δὲ θεώρημα τοῦτο καὶ ὄνον καλοῦσιν, ὅτι δῆλον τοῦτο καὶ τῷ ὄνῳ· εἴ τις θήσει χόρτον ἐν μιᾷ γωνίᾳ τοῦ τριγώνου καὶ στήσει τὸν ὄνον ἐν τῇ ἑτέρᾳ κατ' ἀντικρύ, ἐκεῖνος κατ' εὐθὺ τὴν μίαν γραμμὴν ὡς μικροτέραν κινηθήσεται ἢ τὰς δύο γραμμὰς τοῦ τριγώνου. ὁ γοῦν ψευδογράφος χρᾶται μὲν ταῖς ἀρχαῖς τῆς γεωμετρίας, τέως δὲ ψευδογραφῶν τὸ σχῆμα διὰ τῶν τοιούτων ἀληθινῶν ἀρχῶν τὸ ἐναντίον τῇ γεωμετρίᾳ συνάγει, ὡς ἐνταῦθα διὰ ἀρχῆς γεωμετρικῆς, ὅτι αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ψευδογραφῶν καὶ χρώμενος τῇ αὐτῇ ἀρχῇ δεικνύει ταῖς δυσὶ πλευραῖς τοῦ τριγώνου τὴν μίαν ἴσην ἢ καὶ μείζονα τούτων.

Aristoteles Top. 101 a 15—16.

ἢ ἐν τῷ γράφειν μὴ ὡς δεῖ τὰ ἡμικύκλια ἢ ἐν τῷ γραμμὰς ἄγειν οὐχ ὡς ἂν ἀχθείησαν.

Alexander in Top. p. 24 ed. Wallies.

τὰ μὲν ἡμικύκλια οὐχ ὡς δεῖ γράφει, εἴπερ θήσει ἡμικύκλιον τὸ αδκε καὶ ἕτερον ἡμικύκλιον τὸ εκζβ καὶ γραμμὴν θήσει ὡς διάμετρον αὐτῶν τὴν

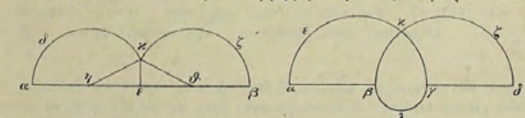

Fig. 27.

αεβ, κέντρον δὲ τό τε η καὶ ϑ, καὶ λέγει τὴν ηκ ἴσην τῇ ϑκ, τὴν δὲ ηε ἴσην τῇ εϑ· ἐκ τοῦ κέντρου γάρ· καὶ σύναμα ἄρα ἡ ηεϑ, ἥτις ἐστὶ μία

1 μοιρῶν κ] deinde deest: ἡ δὲ ζα μοιρῶν δ. ι] ι'. 8 δ] δ'. 10 κατ' ἀρχάς] supra scr. 14 στήσει] στήσῃ. 15 μικροτέραν] μικρο^{τε}ρ'. 16 χρᾶται] sic. δέ] om. 26 ηε] corr. ex εη.

9 Mit στερεοῖς schließt f. 204ʳ med., der Rest der Seite leer. 10 ff. f. 204ᵛ. Der Figur 27 links ist beigeschrieben: τοῦτό ἐστι τὸ θεώρημα, ὃ καλεῖται ὄνος. Im Anfang des Kommentars zur *Topik* findet sich folgende Stelle: δεικνύων

ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου, σύναμα ταῖς ἑτέραις δυσὶ πλευραῖς τοῦ τριγώνου ταῖς $\overline{\eta\kappa}$, $\overline{\kappa\vartheta}$ ἴση· ὥστε ἡ μία ταῖς δυσὶν ἴση. ἄγει δὲ γραμμὰς οὐχ ὡς ἂν ἀχθείησαν ἐν τῷ περιγράψαι μὲν ὡς δεῖ τὰ ἡμικύκλια τό τε $\overline{\alpha\varepsilon\gamma}$ καὶ τὸ $\overline{\beta\zeta\delta}$ καὶ κατάγειν μὲν ἐκ τοῦ $\overline{\kappa}$ ἐπὶ τὰ $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ τὰς δύο τοῦ τριγώνου πλευράς, τὴν δὲ γραμμὴν τὴν $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ μὴ ὡς δεῖ γράφειν, ἀλλ' ὡς τὴν $\overline{\alpha\beta\lambda\gamma\delta}$· καὶ ἔσται ἡ $\overline{\alpha\lambda\gamma}$ ἡ περιφερὴς ὡς εὐθεῖα καὶ ἢ ἴση ταῖς δύο $\overline{\beta\kappa}$, $\overline{\gamma\kappa}$ ἢ καὶ μείζων ἡ μία τῶν δύο.

πῶς αἱ παράλληλοι οὐ συμπίπτουσιν.

Aristoteles Anal. pr. II 65 a 4 sqq. οἱ τὰς παραλλήλους γράφοντες διάλληλον δεῖξιν ποιοῦσι· τὸ γὰρ τρίγωνον διὰ τῶν παραλλήλων ἀποδεικνύουσι καὶ τὰς παραλλήλους πάλιν, ὅτι οὐ συμπίπτουσι, διὰ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου δεικνύουσιν ἐν τῇ δι' ἀδυνάτου δείξει. εἰ γὰρ συμπεσοῦνται αἱ παράλληλοι, ἕξει τὸ τρίγωνον δύο ὀρθὰς καὶ πλέον τὰς $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ καὶ τὴν πρὸς τῷ $\overline{\gamma}$ γωνίαν πρὸς ταύταις. ἀλλὰ μὴν τὸ ἑπόμενον ἀδύνατον· τὸ ἡγούμενον ἄρα ἄτοπον, ὅτι συμπίπτουσί ποτε αἱ παράλληλοι.

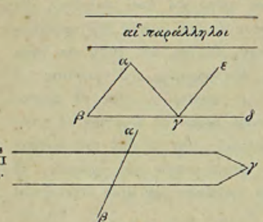

Fig. 29.

ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς.

Aristoteles Anal. pr. II 67 a 21 sqq. μὴ δώσομεν, ὅτι, ὅ πως ἐπίσταταί τις, τοῦτό πως ἀγνοεῖ; ἐπίσταται γὰρ ἴσως κατὰ τὴν καθόλου ἐπιστήμην, ἀγνοεῖ δὲ κατὰ τὴν μερικήν· οἷον ὅτι πᾶσα ἡμίονος ἄτοκος, καὶ ἀγνοεῖ, ὅτι αὕτη ἡ ἡμίονος ibid. 67 a 35. ἄτοκός ἐστιν. εἰ οὖν μὴ δώσομεν τοῦτο, τὸ ἐν τῷ Μένωνι ἀπόρημα συμ- Platon, Menon 85 a sqq. βήσεται· ζητεῖ γὰρ ἐκεῖσε ὁ Σωκράτης τὸν δοῦλον, εἴπερ ἐπίσταται, ὡς τὸ

---

2 ταῖς (pr.)] τῇ. ἴση] corr. ex ἴσαι. οὐχ] om. 6 $\overline{\alpha\lambda\gamma}$] immo $\overline{\beta\lambda\gamma}$. 13 τάς] τήν. 18 μεῖζον] immo διπλάσιον. 20 ἀγνοεῖ;] ἀγνοεῖ. 23 ὅτι] supra scr.

τάχα, ὡς αἱ δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου ἢ ἴσαι τῆς μιᾶς εἰσιν ἢ καὶ ἐλάττονες, τῶν γεωμετρῶν μείζους λεγόντων, ἢ ἐν τῷ γραμμὰς ἄγειν μὴ ὡς δεῖ ἢ ἐν τῷ γράφειν κακῶς τὰ ἡμικύκλια (vgl. Alexandros p. 23, 26 ff.). Dazu am Rande: ÷ ἔστω τάχα

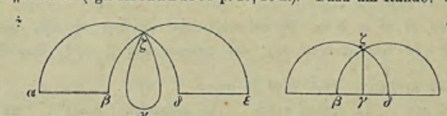

Fig. 28.

γραμμὴ εὐθεῖα ἡ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ καὶ τρίγωνον τὸ $\overline{\zeta\beta\delta}$, πλευραὶ δὲ ἡ $\overline{\beta\gamma\delta}$ καὶ ἡ $\overline{\zeta\beta}$ καὶ ἡ $\overline{\zeta\delta}$, und ./. ἡμικύκλιον τὸ $\overline{\gamma\beta\zeta}$ $\overline{\gamma\delta\zeta}$, τρίγωνον τὸ $\overline{\zeta\beta}$ $\overline{\beta\gamma\delta}$ $\overline{\delta\zeta}$, ἴση ἡ $\overline{\zeta\beta}$ τῇ $\overline{\beta\gamma}$ καὶ τῇ $\overline{\gamma\delta}$.

ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ τετραγώνου τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· τοῦ δὲ ἀποφηναμένου μαιεύει τοῦτον ὁ Σωκράτης καὶ καθ' ἕκαστον ἐρωτᾷ, καὶ συγκατατίθεται ἐκεῖνος, καὶ οὕτως, ὃ οὐκ ἠπίστατο, φαίνεται ἐπιστάμενος διὰ τῆς καθ' ἕκαστον ἀγωγῆς καὶ μεθόδου· ζητεῖ γάρ, εἴπερ ἴσα ἐστὶ τὰ ἐν τῷ τετραγώνῳ δύο τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῆς διαμέτρου γινόμενα ἴσα, καὶ ὁμολογεῖ ἐκεῖνος· ὥστε τὰ δύο τρίγωνα τοῦ ἑνὸς τριγώνου διπλάσια. καταγράφει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, καὶ εὑρίσκεται τὸ ἓν τρίγωνον, οὗ διπλάσια ἦσαν τὰ δύο τρίγωνα, τέταρτον τοῦ γεγονότος ἐκ τῆς διαμέτρου τριγώνου· ὥστε τὰ $\overline{\delta}$ τρίγωνα τοῦ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετραγώνου τῶν δύο τριγώνων τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τετραγώνου διπλάσια, ταὐτὸν δ' εἰπεῖν καὶ τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τετραγώνου διπλάσιον. ὥστε, ὅ πως ἠγνόει, ἄλλως πως ἐπίσταται, καὶ οὕτω λύει τὸ σόφισμα καὶ οὐ, καθὼς ἄλλοι λύουσιν ἐρωτηθέντες περὶ τῆς δυάδος, εἴπερ ἐπίστανται, καὶ καταφήσαντες, ἀρνούμενοι δὲ περὶ τῆς ἐν τῇ χειρὶ μὴ φαινομένης δυάδος· λέγουσι γάρ, ὅτι, ἣν ἐπιστάμεθα δυάδα, ταύτην ὡμολογήσαμεν εἰδέναι· εἰ γοῦν ἦν, φησίν, αὕτη ἱκανὴ λύσις, ἥρμοζεν ἂν ἐπὶ πᾶσι τοῖς τοιούτοις σοφίσμασιν, ἄλλως τε οὐδὲ λέγει τις ἀπολογούμενος, ὅτι, ὃ οἶδα, τοῦτο ἀπολογοῦμαι.

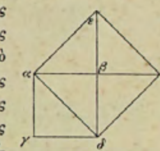

Fig. 30.

Anal. post. I 71 a 30 sqq.

---

9 τά] corr. ex δ'. $\overline{\delta}$] δ'. 10 τετραγώνου] des. f. 205r. In mg. inf.: τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τετράγωνον $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$, τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου $\overline{\alpha\delta\varepsilon\zeta}$. In figura: τοῦτο τὸ τοῦ Μένωνος. 11 τετραγώνου] τριγώνου. 17 ἦν] ἥν.

Kopenhagen, März 1902.