九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

戦略の集合の組の安定性と正当性

大石, 英貴

https://doi.org/10.15017/3000078

出版情報：経済論究. 88, pp.27-35, 1994-03-31. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

戦略の集合の組の安定性と正当性

大　石　英　貴

1. 序

ゲームにおいて，プレイヤーの合理的な行動を記述する概念を解という．最も一般的なものは均衡である．これは，どのプレイヤーにとっても相手の戦略を固定したとき，自分の行動が最適となっている戦略の組である．しかし，戦略集合や効用関数がある条件を満たさない限り，必ずしも均衡は存在しない．そこで，戦略集合上の確率分布である混合戦略を導入し，元の戦略集合を混合戦略の集合に置き換えることを許容すると，均衡の存在のための条件は幾分緩くなる．特に，有限戦略形ゲームでは混合戦略の範囲で必ず均衡が存在する．

しかし，混合戦略への拡張に対しては幾つかの批判がある．正確に言うと混合戦略はある確率空間上の確率変数である．実際に遂行される選択肢を戦略と見なす立場からは，混合戦略は受け入れ難い．また，相手の戦略に関する信念を固定した時の混合戦略による期待効用は，そこで正の確率を割り当てている純戦略による期待効用の凸結合である．ゆえに，期待効用最大化のためには混合戦略は不必要である．

ここでは，混合戦略を許容しない状況において，均衡に代わる概念を定義する．均衡は各プレイヤーに戦略を１つ規定する戦略の組であるが，各プレイヤーに戦略の集合を規定する戦略の集合の組を考える．この方向で解を定義することは大石（1993）で提案されているが、この稿では特に，均衡の概念が満たしている２つの性質，安定性と正当性を戦略の集合の組に関して定義することに焦点を当てて論じる．これらの性質は一種の双対性を持つことが示される．

以下では，まず２節で基本的な概念と均衡を定義する．３節で戦略の集合の

組への拡張をして，安定性と正当性を定義する。4 節で双対性を示し，5 節でまとめと他の文献との関連を述べる．

2．均 衡

I を空でない有限のプレイヤー集合，S_i をプレイヤー i の空でない有限の戦略集合，$S = \times_{i \in I} S_i$ とし，$u_i : S \to \boldsymbol{R}$ をプレイヤー i の効用（利得）関数とする．i 以外のプレイヤーをあらわす添字を $-i$ とする．$S_{-i} = \times_{j \neq i} S_j$, $s_{-i} = (s_j)_{j \neq i}$ である．プレイヤー i にとって相手の戦略の組 $s_{-i} \in S_{-i}$ に対する最大効用を $\bar{u}_i(s_{-i})$ とする．すなわち，

$$\bar{u}_i(s_{-i}) := \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}).$$

戦略の組 $s \in S$ が，$\forall i \in I$, $u_i(s_i, s_{-i}) = \overline{u_i}(s_{-i})$ となるとき均衡といい，$\forall i \in I$, $\forall r_i \neq s_i$, $u_i(r_i, s_{-i}) < \overline{u_i}(s_{-i})$ となるとき狭義均衡という．均衡は，相手の戦略 s_{-i} に対して s_i を取ることが最適であり，逸脱しても効用を増加させることができない．狭義均衡は s_i 以外の戦略を取ることは最適ではない．すなわち，s_i が唯一の最適戦略であり，逸脱すると効用が減少する．

$\varDelta(X)$ を有限集合 X 上の確率分布の集合とする．すなわち，

$$\varDelta(X) = \{f : X \to \boldsymbol{R} \mid \forall x \in X, f(x) \geqq 0 \,;\, \Sigma_{x \in X} f(x) = 1\}.$$

プレイヤー i は他のプレイヤー j の取る戦略に関して主観的な予想をする．その集合は $\varDelta(S_j)$ である．自分以外のすべてのプレイヤーの取る戦略に関する予想の組をプレイヤー i の信念と呼ぶ．その集合は $\times_{j \neq i} \varDelta(S_j)$ である．プレイヤー i にとって，信念 $\sigma_{-i} \in \times_{j \neq i} \varDelta(S_j)$ に対して戦略 s_i を取るときの期待効用は，

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \Big(\prod_{j \neq i} \sigma_j(s_j) \Big) u_i(s)$$

である．これを表記を多少誤用して，$u_i(s_i, \sigma_{-i})$ と表す．信念 σ_{-i} に対する最大期待効用

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \sigma_{-i})$$

を同様に$\overline{u_i}(\sigma_{-i})$ と表す.

3．戦略集合の組の安定性と正当性

プレイヤー i の戦略集合 S_i の空でない部分集合を T_i とする．すなわち $\phi \neq T_i \subset S_i$. これらの集合の組 $T=(T_i)_{i\in I}$ とする．$T_{-i}=(T_j)_{j\neq i}$ とする．各プレイヤー j が T_j 内の戦略を取るとき，他のプレイヤーの予想は $\varDelta(S_j)$ の部分集合である，

$$\{\sigma_j \in \varDelta(S_j) \mid \forall s_j \notin T_j, \sigma_j(s_j)=0\}$$

に含まれる．この集合は $\varDelta(T_j)$ と同等と見なせるので，T_j に対する予想の集合を $\varDelta(T_j)$ と表記することにする．そのとき，プレイヤー i の信念の集合は $\times_{j\neq i}\varDelta(T_j)$ であり，これを T_{-i} から生成されるプレイヤー i の信念の集合という．

戦略の組に対して定義された均衡の概念を戦略の集合の組に対して拡張することを考える．T_{-i} を固定したときに，プレイヤー i は T_{-i} から生成される信念に対して期待効用を最大化する戦略を取るとする．そのとき，戦略の集合の組 $T=(T_i)_{i\in I}$ は次の 2 つの条件を満足しなければならない.

（安定性） 各 $i\in I$ で，T_{-i} から生成されるすべての信念に対して，T_i 内の戦略を取るのが最適である.

（正当性） 各 $i\in I$ で，T_i 内のすべての戦略は，T_{-i} から生成される信念に対する最適戦略として正当化できる.

安定性は逸脱が起こらないことを要求しており，定式化として次の 2 つが考えられる.

(α)　$\forall i\in I,\ \forall \tau_{-i}\in \times_{j\neq i}\varDelta(T_j),\ \exists t_i\in T_i, u_i(t_i, \tau_{-i})=\overline{u_i}(\tau_{-i})$

(β)　$\forall i\in I,\ \forall \tau_{-i}\in \times_{j\neq i}\varDelta(T_j),\ \forall s_i\notin T_i, u_i(s_i, \tau_{-i})<\overline{u_i}(\tau_{-i})$

(α) は T_{-i} から生成されるすべての信念に対して，ある最適な戦略が T_i 内にあることを意味する．ゆえに T_i から逸脱しても期待効用を増加させることはで

きない．(β) は T_{-i} から生成されるすべての信念に対して，T_i 外のすべての戦略は最適ではないことを意味している．ゆえに，T_i から逸脱すると必ず期待効用は減少する．強い意味で逸脱を阻止している．明らかに (β) は (α) を含意している．

単一の戦略の組 $(\{s_i\})_{i\in I}$ にとって，(α) を満たすための必要十分条件は，$(s_i)_{i\in I}$ が均衡であることであり，(β) を満たすための必要十分条件は，$(s_i)_{i\in I}$ が狭義均衡であることである．ゆえに (α) と (β) はそれぞれ均衡と狭義均衡を戦略の集合に拡張した条件となっている．また，元の戦略集合の組 $(S_i)_{i\in I}$ は (β) を満たす．このことは，(β)（かつ（α））を満たす組が必ず存在することを示す．

正当性は不必要な戦略を含まないことを要求しており，定式化としては次の2つが考えられる．

(γ)　$\forall i\in I,\ \forall t_i\in T_i,\ \exists\tau_{-i}\in\times_{j\neq i}\Delta(T_j),\ u_i(t_i,\ \tau_{-i})=\overline{u_i}\ (\tau_{-i})$

(δ)　$\forall i\in I,\ \forall t_i\in T_i,\ \exists\tau_{-i}\in\times_{j\neq i}\Delta(T_j),\ \forall s_i\neq t_i,\ u_i(s_i,\tau_{-i})<\overline{u_i}(\tau_{-i})$

(γ) は T_i 内のすべての戦略に対して，それが最適戦略となるような T_{-i} から生成される信念があることを意味している．T_i 内のすべての戦略は T_{-i} に対する何らかの最適戦略として正当化できる．(δ) は T_i 内のすべての戦略に対して，それが唯一の最適戦略となるような T_{-i} から生成される信念があることを意味している．一般に *1* つの信念に対する最適戦略は *1* つとは限らないが，(δ) は t_i が唯一の最適戦略になるような信念 τ_{-i} が存在することを要求している．T_i 内のすべての戦略を強い意味で正当化できる．(δ) は (γ) を含意する．狭義均衡は (δ) を満たす．しかし，(δ) を満たす組は必ずしも存在しない．実際，図 *1* のゲームで $T=(T_1, T_2)$ が (δ) を満たすとする．$T_1=\{U\}$ のときは $T_2=\{L\}$

	L	R
U	1，1	1，0
D	1，0	0，1

図1

となるが，U は L に対する唯一の最適戦略ではないので矛盾．$T_1=\{D\}$ あるいは $T_1=\{U, D\}$ のときは T_2 をどのように選んでも（δ）を満たすことはできない．以下では，（δ）に関しては論じないことにする．

4．双対性定理

元の戦略集合の組（$S_i)_{i\in I}$ が（β）（かつ（α））を満たすという事実は，これらの条件は緩すぎることを示唆している．この問題を解決するためには（α）や（β）を満たすできるだけ小さい組を求めることである．幾つかの予備的定義をする．$T=(T_i)_{i\in I}$，$T'=(T_i')_{i\in I}$，ただし $\phi\neq T_i$，$T_i'\subset S_i$ に対して，$T\subset T'$ を $\forall i\in I$，$T_i\subset T_i'$ と定義する．また，$T\cup T'=(T_i\cup T_i')_{i\in I}$，$T\cap T'=(T_i\cap T_i')_{i\in I}$ とする．さらに，$T\cap T'=\phi$ を $\exists i\in I$，$T_i\cap T_i'=\phi$ と定義する．この包含関係は，$\{T=(T_i)_{i\in I} \mid \forall i\in I,\ \phi\neq T_i\subset S_i\}$ 上の順序となり，極大元，極小元が存在する．そこで，（α）や（β）を満たす極小の組を考える．極小性は，解に精密さを要求することである．

次の定理は，安定性と正当性の間の関係を記述するものである．（α）（あるいは（β））を満たす極小の集合は，（γ）を満たすという意味で正当化できることを示している．

定理 1

（i）（α）を満たす極小の組は（γ）を満たす．

（ii）（β）を満たす極小の組は（γ）を満たす．

（証明）（i）（α）を満たす極小の組 T が（γ）を満たさないと仮定する．すなわち，

$$\exists i\in I,\ \exists t_i'\in T_i,\ \forall \tau_{-i}\in \times_{k\neq i}\Delta(T_k),\ u_i(t_i', \tau_{-i})<\overline{u_i}(\tau_{-i}).$$

ここで，$T'=(T_j')_{j\in I}$，ただし $T_i'=T_i-\{t_i'\}$；$\forall j\neq i$，$T_j'=T_j$ とする．

T が（α）を満たすことより，i について，

$$\forall \tau_{-i}\in \times_{k\neq i}\Delta(T_k),\ \exists t_i\in T_i,\ u_i(t_i, \tau_{-i})=\overline{u_i}(\tau_{-i}).$$

仮定より，$u_i(t_i, \tau_{-i})=\overline{u_i}(\tau_{-i})>u_i(t_i', \tau_{-i})$ なので，

$$\forall \tau_{-i} \in \times_{k \neq i} \Delta(T_k),\ \exists t_i \in T_i',\ u_i(t_i, \tau_{-i})=\overline{u_i}(\tau_{-i}).$$

$\forall j \neq i$ について，

$$\forall \tau_{-j} \in \times_{k \neq j} \Delta(T_k'),\ \exists t_j \in T_j',\ u_j(t_j, \tau_{-j})=\overline{u_j}(\tau_{-j}).$$

ゆえに，T' は (α) を満たす．$T' \subsetneq T$ なので，これは T が (α) を満たす極小の組であることに矛盾する．ゆえに，T は (γ) を満たす．

（ii） (β) を満たす極小の組 T が (γ) を満たさないと仮定し，上述のように T' を定義する．T が (β) を満たすことより，i について，

$$\forall \tau_{-i} \in \times_{k \neq i} \Delta(T_k),\ \forall r_i \notin T_i,\ u_i(r_i, \tau_{-i})<\overline{u_i}(\tau_{-i}).$$

仮定を加えると，

$$\forall \tau_{-i} \in \times_{k \neq i} \Delta(T'_k),\ \forall r_i \notin T_i',\ u_i(r_i, \tau_{-i})<\overline{u_i}(\tau_{-i}).$$

$\forall j \neq i$ について，

$$\forall \tau_{-j} \in \times_{k \neq j} \Delta(T_k'),\ \forall r_j \notin T_j',\ u_j(r_j, \tau_{-j})<\overline{u_j}(\tau_{-j}).$$

ゆえに，T' は (β) を満たす．$T' \subsetneq T$ なので，これは T が (β) を満たす極小の組であることに矛盾する．ゆえに，T は (γ) を満たす．◇

この定理の系として，(γ) を満たす組が必ず存在することが分かる．また，(α) かつ (γ) を満たす極小の組は，(α) を満たす極小の組であり，(β) かつ (γ) を満たす組は (β) を満たす極小の組であることが導かれる．さらに，均衡は，(α) かつ (γ) を満たし，狭義均衡は (β) かつ (γ) を満たすことも得られた．ゆえに，(α) や (β) を満たす極小の組は，解として望ましい性質を持っていることが分かった．

(α) を満たす極小の組は互いに素である．実際，(α) を満たす極小の組 T, T' が互いに素でない，すなわち，$T \cap T' \neq \phi$ と仮定する．$\forall i \in I$, $T_i \cap T_i' \neq \phi$ である．T, T' が (α) を満たすことより，

$$\forall i \in I,\ \forall \tau_{-i} \in \times_{j \neq i} \Delta(T_j \cap T_j'),\ \exists t_i \in T_i \cap T_i',\ u_i(t_i, \tau_{-i})=\overline{u_i}(\tau_{-i})$$

が導かれ，$T \cap T'$ は (α) を満たす．これは T, T' が (α) を満たす極小の組であることに矛盾する．しかし，(β) を満たす極小の組は必ずしも互いに素ではない．実際，図 2 のゲームでは (β) を満たす極小の組は（$\{U, M\}$, $\{L, C\}$）と

	L	C	R
U	1, 0	0, 1	1, 0
M	0, 1	1, 0	0, 1
D	0, 0	0, 0	0, 0

図2

$(\{U,M\},\ \{C,R\})$ である.

次に条件 (γ) について吟味する．まず，(γ) を満たす最大の組が存在することが分かる．実際，T，T' をそれぞれ (γ) を満たすとすると，

$$\forall i\in I,\ \ \forall t_i\in T_i\cup T_i',\ \ \exists\tau_{-i}\in\times_{j\neq i}\Delta(T_j\cup T_j'),\ \ u_i(t_i,\tau_{-i})=\overline{u_i}(\tau_{-i}).$$

ゆえに $T\cup T'$ も (γ) を満たす.

次の定理は，(γ) を満たす最大の組は逸脱が起こらないという意味で安定的であることを示す.

定理 2

(i) (γ) を満たす最大の組は (α) を満たす.

(ii) (γ) を満たす最大の組は (β) を満たす.

(証明) (i) (ii) より導かれる.

(ii) (γ) を満たす最大の組 T が (β) を満たさないと仮定する．すなわち，

$$\exists i\in I,\ \ \exists\tau_{-i}\in\times_{k\neq i}\Delta(T_k),\ \ \exists r_i\notin T_i,\ \ u_i(r_i,\tau_{-i})=\overline{u_i}(\tau_{-i}).$$

ここで，$T'=(T_j')_{j\in I}$，ただし $T_i'=T_i\cup\{r_i\}$，$\forall j\neq i$，$T_j'=T_j$ とする．T が (γ) を満たすことより，i について，

$$\forall t_i\in T_i,\ \ \exists\tau_{-i}\in\times_{k\neq i}\Delta(T_k),\ \ u_i(t_i,\tau_{-i})=\overline{u_i}(\tau_{-i}).$$

仮定を加えると，

$$\forall t_i\in T_i',\ \ \exists\tau_{-i}\in\times_{k\neq i}\Delta(T_k'),\ \ u_i(t_i,\tau_{-i})=\overline{u_i}(\tau_{-i}).$$

$\forall j\neq i$ について，

$$\forall t_j \in T_j{}',\quad \exists \tau_{-j} \in \times_{k \neq j} \Delta(T_k{}'),\quad u_j(t_j, \tau_{-j}) = \bar{u_j}(\tau_{-j}).$$

ゆえに，T' は (γ) を満たす．$T \subsetneq T'$ なので，これは T が (γ) を満たす最大の組であることに矛盾する．ゆえに，T は (β) を満たす．◇

この定理の系として，(γ) を満たす最大の組は (β) かつ (γ) を満たす最大の組であり，また，(α) かつ (γ) を満たす最大の組でもあることが導かれる．

以上，定理 1 と 2 より，(α) と (γ)，あるいは (β) と (γ) は一種の双対性をもつことが示された．

5．結　語

戦略の集合の組を均衡の拡張である解とするためには，逸脱しないという安定性と最適であるという正当性の両条件が必要である．固定した T_{-i} に対して，(α)（あるいは (β)）を満足するには T_i を大きく，(γ) を満足するためには逆に T_i を小さくする必要がある．ゆえに，これらは解の条件として互いに補完しあうものである．逸脱が起こらないことのみを要求するならば，(α) か (β) で十分であるが，T_i 内の戦略を正当化するためには (γ) が必要となる．(α) かつ (γ) を満たす組と (β) かつ (γ) を満たす組が解の候補であるが，一般に一意ではない．そのうち，最大のものは最も普遍的な解であり，極小のものは最も精密な解と解釈できる．

(γ) を満たす組は，Pearce (1984) で最適反応性を持つと定義されている．(β) かつ (γ) の条件は，Bernheim (1984) で提案されている．(α) かつ (γ) を満たす組は，大石 (1993) で部分最適反応性を持つと定義されている．また，これらは，コミュニケーションのあるゲームでの提案の満たすべき条件として，Farrell (1988)，Watson (1991) などで用いられている．(γ) を満たす最大の組（(β) かつ (γ) を満たす最大の組）は，Pearce (1984) と Bernheim (1984) による合理化可能戦略の集合の組であることがそれぞれの論文で示されている．（合理化可能性の定義は，前者では戦略集合の縮小の繰り返し，後者では整合的な信念のシステムを用いている．）

参 考 文 献

Bernheim, B. D. (1984). "Rationalizable Strategic Behavior," *Econometrica* 52, 1007–1028.

Farrell, J. (1988). "Communication, Coorination and Nash Equilibrium," *Economics Letters* 27, 209–214.

Pearce, D. G. (1984). "Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection" *Econometrica* 52, 1029–1050.

Watson, J. (1991). "Communication and Superior Cooperation in Two-Player Normal Form Games," *Economics Letters* 35, 267–271.

大石英貴 (1993).「戦略形ゲームの最適反応性について」,『経済論究』87 号, 29–43.