5分位階層データを用いた所得不平等の評価

横山, 佳充

https://doi.org/10.15017/3000074

出版情報：経済論究. 87, pp.271-291, 1993-11-30. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

5分位階層データを用いた所得不平等の評価

横　山　佳　充

1. 問題の所在

本論文の目的は，われわれの不平等に対する概念に合致するような尺度を用い，これを5分位階層データに適用することで，従来なされてきた以上に精密な分析を行うことである。ここにおける分析方法においては，ローレンツ曲線を推定する接近法を用いる。

ローレンツ曲線が交差しない場合には，社会的な厚生の立場からも不平等を評価するうえで，正当性を有していることが Atkinson〔2〕によって示された。ただし，この方法の問題点は，曲線が交差する場合に分布間の優劣の判定ができないことである。その判定に関して Gini 係数などの多くの不平等尺度が提示された。しかしながら，これらの尺度は人々によって容認できないような効用関数に基づいていることより，不平等尺度として安易に用いることは適切ではない。

Atkinson〔2〕は，まず人々の効用関数を誰もが受け入れられる形で明示し，不平等回避度一定に限定することで尺度を構成した。この尺度により人々の持つ価値判断を明示的に表わすことができる。

以上を基本的な前提として，不平等度を分析するためにローレンツ曲線の交差の状況について考える。実際のデータを用いてローレンツ曲線の交差について述べた論文に，豊田・和合〔18〕の論文があり，日本における1962年から1976年までの不平等の推移を5分位階層データと年間収入データを用いて考察を加えている。それによると，不平等度の時系列的な傾向をみる上では2つの計算結果は近似しており，5分位階層データを用いることで十分であるとの見解を

明らかにしている。

彼らの計算結果をみると，5分位階層データにより不平等尺度を計算する際，線形補間を行っているが，これは同じ階層値に属する人々はすべて均等な所得を受け取っているという暗黙の仮定をおいていることになる。けれども5分位階層データはきわめて階層幅が広く，それにたいして線形補間を用いることは問題を含んでいるであろう。そこでこの論文においては線形補間を用いるのではなく，ローレンツ曲線を推定することで，不平等の順序づけを考えることにする。

2. ローレンツ曲線による評価

2.1 ローレンツ曲線の特性

まずある集団に関して，所得または富に関する N 個のデータが与えられたとする。そしてこのデータにより，不平等の程度を以下の手法で図示することを考える。

与えられたデータを小さい順に並べる。並び終えたデータを順に $x_1, x_2, \ldots,$ x_N とする。このとき横軸に累積したデータの個数を百分率で表現したものをとり，縦軸に所得や富の累積百分率をとる。すなわちそれを数式で表現すると

$$\left(\frac{k}{N}, \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i}\right)$$

となり，これを $k=1,2,\cdots,N$ についてプロットし，その各点と (0,0) と (1,1) を直線で結ぶことによってローレンツ曲線が得られる。また所得や富がある正の数 x で表されているとして，それが連続な確率密度関数 $f(x)$ にしたがっているとした場合，そのローレンツ曲線は平均 μ が存在するとして

$$\mu=\int_0^{\infty} tf(t)dt$$

であり

$$\left(\int_0^x f(t)dt, \frac{1}{\mu}\int_0^x tf(t)dt\right)$$

の描く軌跡として表される。後に分布を考える上で，後者の表記法の方が便利であるのでそれを使用する。便宜上

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

$$F_1(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x tf(t)dt$$

とおくことにする。ここで $(F(x), F_1(x))$ の点の描く軌跡をローレンツ曲線という。

構成員全体に平等に所得が分配されたとき，ローレンツ曲線は (0,0) と (1,1) を結ぶ直線になる。その直線は所得が均等に与えられたことを示す直線で，ある平等概念を表現したものであるといえる。この直線を均等分布線と呼び一つの理想的な状態であると考えることができる。

2.2 ローレンツ曲線の推定

まず推定を始めるにあたって，ローレンツ曲線の関数は以下の条件を満たさねばならない。

(1) $F(x)=0$ かつ $F_1(x)=0$

(2) $F(x)=0$ かつ $F_1(x)=1$

(3) $F(x)>F_1(x)$

(4) 曲線は単調増加である。

これらのことを考慮した上で，Kakwani and Podder〔8〕は

$$F_1(x)=F(x)\exp(-\beta(1-F(x)))$$

という関数を提案し，それを α というパラメータを増やすことでさらに一般化した関数として

$$F_1(x)=(F(x))^{\alpha}\exp(-\beta(1-F(x)))$$

を提案している[1)]。Kakwani and Podder はこの関数を用いることで対数変換を用いて実際にパラメータの値を回帰分析を用いて推定した。ところが実際の推定において対数変換を用い強引に線形化したことより，計算は非常に簡単に

1) 後に彼らは座標系を変えることによって異なった推定方法を考案した。この方法はここでは扱わない。

なり通常の最小二乗法が使えるような形に変型できるものの，線形化する以前の式に対する残差平方和の値は大きく適合度は良くない。これを改善するためにわれわれの推定においては，強引に線形に修正して推定することを行わず，Newton 法もしくは DFP 法を用いて非線形による推定方法を用いることにする。また一方でローレンツ曲線の関数の型について，上記の四つの条件を満たすようなさまざまなものが提案されたが，その中において最近発表されかなりあてはまりの良い関数に，Ortaga 等〔12〕によって提案された

$$F_1(x)=(F(x))^{\alpha}[1-(1-F(x))^{\beta}]$$

という関数がある。われわれは彼らのこの関数型を用いることによって分析を行うことにしたい。より具体的には「貯蓄動向調査」によって与えられた5分位データを用いて

$$\Delta^2=\sum_{i=1}^{5}[F_1(x_i)-(F(x_i))^{\alpha}\{1-(1-F(x_i))^{\beta}\}]^2$$

を最小化するようなαとβの推定値を求めることにする[2)]。これらを計算した値は表1のようになる。これを図示したものが図1である。この結果をみると一見同じ様な値を示しているように見えるが，この推定値を用いて得られたローレンツ曲線が交わっているかどうかの判定を行うと表2の様な結果が得られる[3)]。

豊田・和合によって示されたローレンツ曲線の順序づけが図2であり，この方法を用いた計算結果を図示すると図3のようになる[4)]。

これら二つの図を比較してみると，単純に5分位階層データによって判定する以上に交差するケースが増加して，所得の順序付けがよりいっそう困難にな

2) 「貯蓄動向調査」はおよそ標本数5,000であって，勤労世帯と一般世帯に関して5分位に区切った各階層の平均所得額を表示している。ここでの分析においては一般世帯に対するデータを使用するが，この中には農家世帯が含まれていないことに注意する必要がある。

3) 交わっていないところは空白で，交わりが生じているときは交点の横軸の値を表示した。

4) 矢印によってつながっているのは順序づけが可能な場合を示し，矢印の順に平等であることを示している。

年　度	αの推定値	βの推定値
1962	.347232	.650507
1963	.345242	.647858
1964	.324929	.656738
1965	.323848	.634701
1966	.302683	.636068
1967	.298148	.644167
1968	.303151	.675605
1969	.296369	.682610
1970	.304378	.684435
1971	.304420	.669409
1972	.287159	.668773
1973	.290063	.664488
1974	.323902	.674896
1975	.339810	.688714
1976	.295754	.661095

表 1　1962年から1976年までのパラメータの推定値

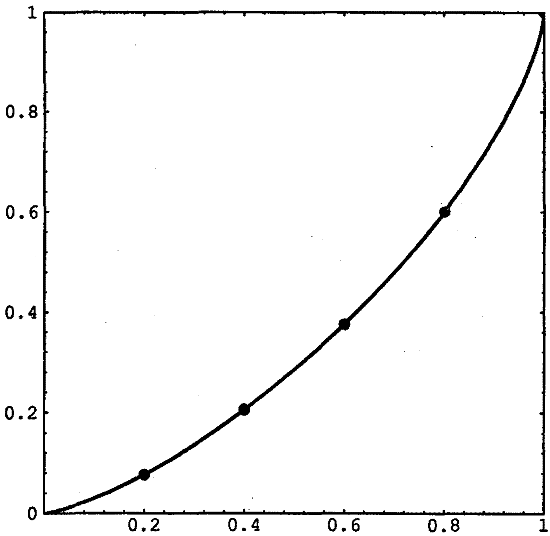

図 1　データに対するローレンツ曲線の当てはめ（1962年）

年 度	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
62		.15		.42	.73	.93									
63				.46	.78	.97									
64					.28	.59								.05	
65															
66													.07	.13	
67													.19	.24	
68										.55	.65	.34		.72	.06
69									.85		.12	.02		.94	
70											.31	.15		.95	.02
71											.99	.73	.79	.55	.28
72													.91	.70	
73													.77	.60	
74														.34	.59
75															.48
76															

表 2　1962年から1976年までのローレンツ曲線の交差

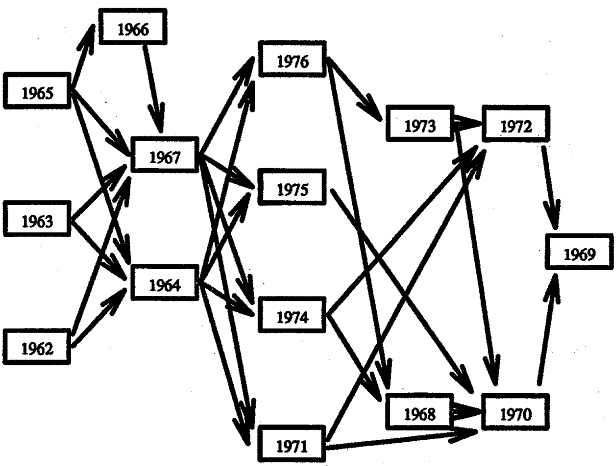

図 2　豊田・和合による順序づけ

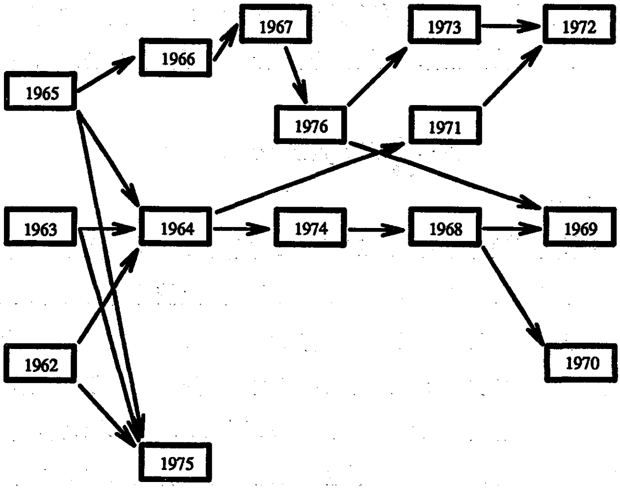

図3　1962年から1976年までの順序づけ

ったことがわかる。すなわち，従来の分析方法において，ローレンツ曲線が5分位階層データによって交わりが少ないというのは，同じ階層において同一の所得を得ているとして線形補間を用いたためであり，階層区分が多く連続型に近いデータにおいては，交差が生じる可能性が高いことが指摘できる。

3.　不平等尺度による評価

3.1　社会的厚生関数と Atkinson 尺度

ここまでのは，ローレンツ曲線を用いる方法を考えた。ここにおいては，人人の不平等が単に所得額の差異によって生じるのではなく，所得により生じる人々の効用の差異によって生じるのだといったことに着目して考える。そこにおいては，まず経済学において従来用いられてきた効用について考察することから始める。ただしここでは，効用の概念を限定して，人々の効用が所得のみに依存しているものとして考え社会的厚生関数を導出する。このとき一般に経済学において用いられているように，所得の増加に対して効用は増加するが限界効用逓減の法則を満たすものと仮定する。これは二階微分可能であると仮定

することにより，効用関数は $U'(x)>0$，$U''(x)<0$ を満たす関数族によって表現される。さらに社会全体の厚生を表す社会的厚生関数を，加法分離型の関数として

$$W=\int_0^\infty U(x)f(x)dx$$

の形で定義する[5)]。

この社会的厚生関数をもとに，Atkinson 尺度について考察する。

これまでの研究により指摘されてきたように，比較的妥当と考えられる尺度が実は人々が許容できない効用関数を有していることが生じる。Atkinson〔2〕は発想を逆転して，まず人々の効用関数を誰もが受け入れられる形で明示し，それによって尺度を構成しようと考えた。Atkinson は $U'(x)>0$，$U''(x)<0$ を満たす効用関数を用い，社会的厚生を考え，もし各人に均等に所得が分配されたとするならば各人の得られる所得は平均の μ であり，それによる効用は $U(\mu)$ によって表されることになると考え，そのときに社会的厚生関数が最大になることより尺度を構築した。

ここで依然として効用関数のクラスは広いままであるが，ここにおいて $U(x)$ は線形変換によって不変であるように限定して

$$\frac{\int_0^\infty U(x)f(x)dx}{U(\mu)}$$

により相対的な大きさを表現しようと考えた。

その上でこの社会において今と同じ社会的厚生を達成するためには，各人に均等にどの程度の所得を与えたら良いかを考察し，その各人に与えられる均等所得を x_{EDE} で表した。すなわち

$$U(x_{EDE})\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty U(x)f(x)dx$$

5) より一般的な形で社会的厚生関数は，社会の全体の構成員が n 人存在するとしてそれぞれが異なった効用関数を有しているとすると，$W=W(U_1(x_1), U_2(x_2), \ldots, U_n(x_n))$ で表される。この一般的な形と比べると加法分離型の社会的厚生関数は，各構成員の効用関数が同じであり，かつ社会的なその望ましさの程度は各人の効用の総和として表現されている。もちろんこれは仮定としては強いものであり，これに対する批判もある。この条件を緩和して考察したものに，Rothchild and Stigrits〔13〕がある。

を満たす x_{EDE} である。これによって Atkinson は新しい尺度として

$$A=1-\frac{x_{EDE}}{\mu}$$

を提案した。これによって社会における所得の不平等度を効用関数を用いて評価することが可能になるわけである。この考え方は不確実性のもとでの決定理論に深く影響されたものであり，Atkinson の提示した尺度はリスク回避の経済学の考え方を不平等尺度の構成に応用したものだということが理解できる。そして実際これを用いて尺度を構成するためには，効用関数である $U(x)$ の形状を限定することが必要である。

より具体的に Atkinson は人々の持つ効用関数を相対的な不平等回避度一定，すなわち $-xU''(x)/U'(x)$ が正の定数 ε を持つという条件をつけ加えることによって

$$U(x)=A+B\frac{x^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon},\ \varepsilon\neq1$$

$$U(x)=A+B\log x,\ \varepsilon=1$$

と効用関数が特定化されることを用いて

$$A(x)=1-\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{1/(1-\varepsilon)},\ \varepsilon\neq1$$

$$A(x)=1-\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)},\ \varepsilon=1$$

といった尺度が Atkinson によって提唱された[6)7)]。この尺度は従来の暗黙の内に価値判断を含んでいるような不平等尺度と異なり，社会的厚生関数の立場から人々の持つ価値判断を明示的にするように不平等尺度を構成したという点で注目に値するものである。

3.2 補間を用いた評価

まず Ortega によって提唱された関数を x で微分して

---

6) 数学注参照。

7) それは相対的な社会的厚生関数として

$$E=\int_0^{\infty}U(x/\mu)f(x)dx$$

の大きさによって評価を行おうとしたものと同じである。

$$\frac{x}{\mu}=\alpha(F(x))^{\alpha-1}[1-(1-F(x))^{\beta}]+\beta(F(x))^{\alpha}[1-(1-F(x))^{\beta-1}]$$

したがって

$$x=\alpha\mu(F(x))^{\alpha-1}+\alpha\mu(F(x))^{\alpha-1}[1-(1-F(x))^{\beta}]$$
$$+\beta\mu(F(x))^{\alpha}[1-(1-F(x))^{\beta-1}]$$

となる[8)]。

次に，5分位階層のデータから理論的に1,000分位のデータを形成することで，Atkinson 尺度を求めてみることにする。そうすると表3の様な結果が得られる[9)]。

これにたいして豊田・和合〔18〕にもとづき，もとの5分位階層データにたいして Atkinson 尺度を用いて計測したものは表4になる[10)]。

表3と表4を比較してみると大部分は同じであるもの，表3のほうが表4のものよりも変化が大きいという相違があることに気づく。しかしながらこの相違は表2で示した通りローレンツ曲線が交差するために評価が異なったものであり，ローレンツ曲線の交差を示す表2と矛盾するものにはなっていない。

---

8)
$$\frac{dF_1(x)}{dx}=\frac{xf(x)}{\mu}$$

であることより

$$\frac{dF_1(x)}{dF(x)}=\frac{dF_1(x)/dx}{dF(x)/dx}=\frac{xf(x)/\mu}{f(x)}=\frac{x}{\mu}$$

を用いている。

9) この表における ε は不平等回避度を示すパラメータで，ε が大きくなるにしたがって高所得者層にウェイトがかかる。表示されている ε の値は順序づけが変化したときの値であり1がもっとも望ましい状態を示し，数が大きくなるに従って好ましくない状態になる。

10) 彼らの論文においては豊田尺度を用いて計算しているが，ここでは Atkinson 尺度による考察を行っているので Atkinson 尺度による順序づけに修正した。なお豊田尺度とは $y=x/\mu$ とおいて効用関数 $U(y)$ を $(y^{\alpha}-1)/\alpha:\alpha>1, y\log y:\alpha=1, (1-y^{\alpha})/\alpha:0<\alpha<1, -\log y:\alpha=0, (1-y^{\alpha})/\alpha:\alpha<0$ に限定して尺度を構成したものであり，$\alpha<1$ のときには Atkinson 尺度において $\alpha=1-\varepsilon$ とおいた場合に相当する。

ε	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
.10	11	14	10	15	13	12	3	1	2	7	5	6	8	4	9
.12	11	14	10	15	13	12	3	1	2	7	4	6	8	5	9
.13	12	14	10	15	13	11	3	1	2	7	4	6	8	5	9
.39	12	14	10	15	13	11	4	1	2	7	3	6	8	5	9
.41	13	14	10	15	12	11	4	1	2	7	3	6	8	5	9
.59	13	14	10	15	12	11	4	1	2	7	3	5	8	6	9
.66	13	14	10	15	12	11	4	1	2	7	3	5	9	6	8
.67	13	14	11	15	12	10	4	1	2	7	3	5	9	6	8
.78	13	14	11	15	12	10	4	1	2	6	3	5	9	7	8
1.08	13	14	11	15	12	10	4	1	2	6	3	5	9	8	7
1.16	13	15	11	14	12	10	4	1	2	6	3	5	9	8	7
1.46	14	15	11	13	12	10	4	1	2	6	3	5	9	8	7
1.64	14	15	11	13	12	10	4	1	2	6	3	5	8	9	7
1.74	14	15	11	13	12	10	5	1	2	6	3	4	8	9	7
1.86	14	15	11	13	12	10	5	1	3	6	2	4	8	9	7
1.95	14	15	12	13	11	10	5	1	3	6	2	4	8	9	7
1.99	14	15	12	13	11	10	5	1	3	7	2	4	8	9	6
2.13	14	15	12	13	11	9	5	1	3	7	2	4	8	10	6
2.39	14	15	12	13	11	8	5	1	3	7	2	4	9	10	6
2.65	14	15	12	13	10	8	5	1	3	7	2	4	9	11	6
2.71	14	15	12	13	10	8	5	1	4	7	2	3	9	11	6
2.90	14	15	12	13	10	8	5	2	4	7	1	3	9	11	6
2.91	15	14	12	13	10	8	5	2	4	7	1	3	9	11	6
3.20	15	14	12	13	9	8	5	2	4	7	1	3	10	11	6
3.34	15	14	11	13	9	8	5	2	4	7	1	3	10	12	6
3.41	15	14	11	13	9	8	6	2	4	7	1	3	10	12	5
4.15	15	14	11	13	9	8	6	2	5	7	1	3	10	12	4
4.40	15	14	11	13	9	8	6	3	5	7	1	2	10	12	4
4.58	15	14	11	12	9	8	6	3	5	7	1	2	10	13	4
6.18	15	14	11	12	9	7	6	3	5	8	1	2	10	13	4

表 3 1962年から1976年までの Atkinson 尺度による順序づけ

結論として，直線補間を用いることにより5分位階層データを扱うと，ローレンツ曲線の交差をより過小に評価してしまい，実際には5分位階層データが示している以上にローレンツ曲線が交差する可能性があることがわかる。

ε	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
1.00	13	14	11	15	12	10	4	1	2	6	3	5	9	7	8
2.00	13	15	11	14	12	10	5	1	2	6	3	4	9	8	7
3.00	14	15	11	13	12	10	5	1	2	6	3	4	8	9	7
4.00	14	15	12	13	11	10	6	1	3	5	2	4	8	9	7
5.00	14	15	12	13	11	10	6	1	3	5	2	4	8	9	7
6.00	14	15	12	13	11	10	6	1	3	5	2	4	8	9	7
7.00	14	15	12	13	11	10	6	1	3	5	2	4	8	9	7
8.00	14	15	12	13	11	10	6	1	3	5	2	4	8	9	7
9.00	14	15	12	13	11	10	6	1	3	5	2	4	8	9	7
10.00	14	15	12	13	11	10	6	1	3	5	2	4	8	9	7

表 4　5分位階層データによる順序づけ

4. 現在までの所得の不平等度の動向について

それではそれ以降の1977年から1991年までの不平等度の動向をみてみよう。まずデータによって得られるパラメータの推定値は表5のようになる。それで

年　度	αの推定値	βの推定値
1977	.301478	.665956
1978	.285691	.677263
1979	.279825	.670040
1980	.303277	.697657
1981	.306490	.695030
1982	.273841	.681235
1983	.309155	.690300
1984	.361120	.703468
1985	.373851	.698230
1986	.360443	.685774
1987	.325650	.683710
1988	.331710	.695752
1989	.319851	.680712
1990	.335828	.681992
1991	.339459	.673840

表 5　1977年から1991年までのパラメータの推定値

は同様にローレンツ曲線の交差について考えてみよう。ローレンツ曲線は5分位データと比べてかなりの交差が生じることになり，それは表6のようになる。

年　度	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
77								.49	.64	.74	.41	.28	.36	.61	.87
78			.19	.22	.35		.55	.74	.85	.96	.92	.68	.96	.97	
79				.21	.30		.44	.68	.78	.88	.78	.60	.81	.86	.99
80						.55		.97							
81						.67		.93							
82							.83	.83	.91	.99		.84			
83								.84	.95			.85			
84											.55	.83	.56	.35	.16
85										.31	.79	.99	.76	.66	.43
86											.99		.95	.92	.53
87												.06	.58		
88													.18		
89														.98	
90															
91															

表 6　1977年から1991年までのローレンツ曲線の交差

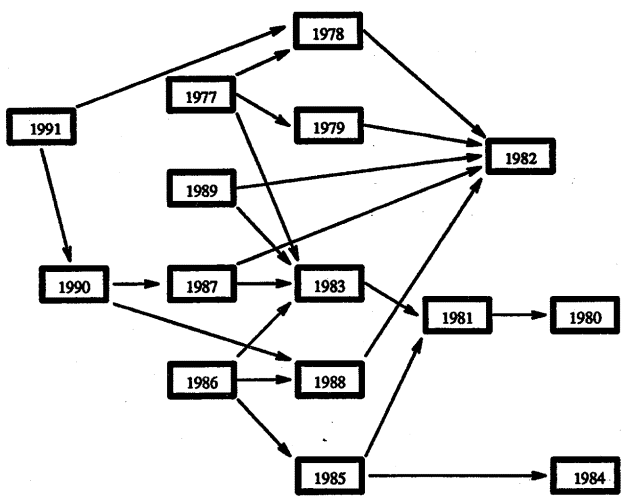

図 4　1977年から1991年までの順序づけ

このローレンツ曲線の交差の状況をみると，1977年及び1978年がほかの年とかなり交わっており判断が難しいことがわかる。それでもなおローレンツ曲線が交差しないことにより，順序づけが可能なものは存在しそれを図示してみると図４の様になる。そうして Atkinson 尺度による順序づけは表７のようになる。

ε	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
.11	8	6	9	1	2	3	4	7	12	14	10	5	11	13	15
.12	9	6	8	1	2	3	4	7	12	14	10	5	11	13	15
.17	9	5	8	1	2	3	4	7	12	14	10	6	11	13	15
.18	10	5	8	1	2	3	4	7	12	14	9	6	11	13	15
.19	11	5	8	1	2	3	4	7	12	14	9	6	10	13	15
.21	11	5	7	1	2	3	4	8	12	14	9	6	10	13	15
.23	11	5	7	1	2	3	4	8	13	14	9	6	10	12	15
.27	11	5	7	1	3	2	4	8	13	14	9	6	10	12	15
.60	11	5	6	1	3	2	4	8	13	14	9	7	10	12	15
.66	11	5	6	1	3	2	4	8	13	14	10	7	9	12	15
.71	11	5	6	1	3	2	4	9	13	14	10	7	8	12	15
.72	11	5	6	1	3	2	4	10	13	14	9	7	8	12	15
.82	11	4	6	2	3	1	5	10	13	15	9	7	8	12	14
.91	10	4	6	2	3	1	5	11	13	15	9	7	8	12	14
1.19	10	4	6	2	3	1	5	11	14	15	9	7	8	12	13
1.22	9	4	6	2	3	1	5	11	14	15	10	7	8	12	13
1.29	9	4	5	2	3	1	6	11	14	15	10	7	8	12	13
1.39	8	4	5	2	3	1	6	11	14	15	10	7	9	12	13
1.52	8	4	5	2	3	1	6	12	14	15	10	7	9	11	13
1.64	8	4	5	2	3	1	6	12	15	14	10	7	9	11	13
1.69	8	3	5	2	4	1	6	12	15	14	10	7	9	11	13
1.86	7	3	5	2	4	1	6	12	15	14	10	8	9	11	13
1.91	7	3	4	2	5	1	6	12	15	14	10	8	9	11	13
2.32	7	2	4	3	5	1	6	12	15	14	10	8	9	11	13
2.35	7	2	4	3	5	1	6	12	15	14	10	9	8	11	13
2.38	7	2	3	4	5	1	6	13	15	14	10	9	8	11	12
2.55	7	3	2	4	5	1	6	13	15	14	10	9	8	11	12
3.17	7	3	2	4	5	1	6	13	15	14	9	10	8	11	12
4.46	6	3	2	4	5	1	7	13	15	14	9	10	8	11	12

表７　1977年から1991年までの Atkinson 尺度による順序づけ

表7をみると，1970年代後半から1980年代の前半において，不平等度が解消方向に向っており，1980年代前半は全般的に不平等度が小さいものの1980年代の半ばごろからまた不平等度が拡大していったことがわかる。また不平等度が1990年の前半は ϵ の値が小さいとき順位がきわめて悪いので，高所得者層にウエイトをかける限り不平等度が最大になっているといえる。しかしながら一方，ϵ の値を大きくして低所得者にウエイトにおいて評価を行う限りでは，1980年の半ばにおいて不平等度がきわめて大きかったことがわかる。また，比較的評価がむずかしいのは，1979年と1984年であって，Atkinson 尺度における順位づけを見てもそれぞれ2位から9位，そして7位から13位とかなり変化がみられる。これは1979年に関しては，1970年代後半から1980年代の前半にかけて不平等度が大きい状態から小さい状態へと移行していく過渡期に，また1984年に関しては，1980年代前半の不平等度が小さい状態から1980年代半ばの不平等度が大きい状態へ移行していく過渡期に当たるので，所得の分配構造が従来とことなり評価が難かしいためではないかと考えられる。

5. おわりに

この論文においてはできるだけ特殊な価値概念に基づくことなく，弱い仮定のもとで所得不平等に関する分析方法を考察することに主眼をおいた。不平等尺度に関する研究は，おもに理論的側面から多くの研究がなされており，無数の不平等尺度が提案されている。それらの論文の中では，尺度自体の数学的な特性などについては詳しく検討がなされており，一方で提案した尺度についての計算結果をも示してはいるが，データの計算に関しての説明や分析方法に関して詳細な考察が欠けているように感じる。一方で実証的な立場からは，データ等に関する考察に関しては優れているが，しかしながら分析において用いられている尺度は Gini 係数や変動係数などが主であり，あまり Atkinson 尺度や豊田尺度などといった尺度は用いられていない。本論文においては，これらの欠点を補完する意味でひとつの分析方法を提示した。しかしながら所得の不平等度の分析にあたっては，まだまだ不十分な点や多くの問題が残されてい

る。そこで最後に本論文の分析による結果と今後の研究課題について，自分自身の所感を述べておくことにする。

まず本論文においては，ローレンツ曲線を描いて，それぞれの年度について交差しているかどうかの判定をするには煩雑な側面がある一方で，ローレンツ曲線が交わらないときには，きわめて緩やかな条件の下でも分布間の優劣の判断が下せるという優れた性質から，有用な手段として使用することにした。けれども，それはあくまで分割した部分のみで可能で，全体的な評価を行う上では実用的ではない。そこでローレンツ曲線が交差する場合に関しては，必ずしも有効な手段にならない。したがってデータ分析に関してはローレンツ曲線が交差しない場合のみ順序づけを行った。その点に関しては従来行われてきた研究と変りはない。ただこの論文の分析においては，ローレンツ曲線の推定を行い，その推定を行ったローレンツ曲線に関して交差を検証している。この適用法は，これまでなされてきたような直接計算する方法に比べ遠回りのように感じるが，従来のローレンツ曲線の交差に比べより繊細な分析を行うことができる。そこでは，低所得者層や高所得者層に関してローレンツ曲線が交わる可能性があることを指摘できる。すなわち，従来の分析方法は，線形補間という簡単な方法を用いたために，ローレンツ曲線が交わる可能性がかなり低くなり，本来順序づけをしてはならないものまで順序づけしているのである。

この結果によると，われわれの分析においては従来の分析以上にローレンツ曲線が交差してしまい，多くの順序づけできない関係が生じ，所得の不平等の順序づけを行うという目的に対して大きな障害となる可能性を示している。こういったように交差が多く生じていることに対して，分析をここで中断せず，より一層進めるために，社会的厚生関数の考え方によって導き出されたAtkinson 尺度を用いることにした。この尺度はパラメータの値で価値判断を明示的に表すことができるので，どの所得者層にウエイトをおいたかを示すことができる。この Atkinson 尺度を用いた分析に関しても，単純に計算を行うのではなく，先ほど推定したローレンツ曲線から理論的な所得分布のデータを1,000個生成し，そのデータを用いることで計算を行った。その結果は，従来なされてきた計算結果以上に順位の変動が激しいものであり，その変動の様子を詳細

に追うことで，各年度の評価が従来の分析法と比較してより詳細な水準で可能になるであろう。

以上の分析法より，5分位階層データのような集約されたデータを用いて，より精密な分析を行うことができる。しかしながらより精密な分析を行ったにも関わらず，得られた計算結果だけをみてみると，従来なされた所得不平等の順序づけよりも，さらに順序づけが複雑化したことがわかる。このことに関して，われわれの推定した各年度のローレンツ曲線の交差をみてみると，それらが交差する位置が0や1などにきわめて近い位置であったり，また Atkinson 尺度により計算された各年度の値に関しても，その差異はきわめて微妙なものであったりする。したがって，われわれが求めたローレンツ曲線の交差や Atkinson 尺度の差異の中に，統計的には有意でないものが存在することが考えられる。これについては与えられたデータを標本として，それから得られたローレンツ曲線の推定値や Atkinson 尺度を統計量として考え，どの程度統計的に有意であるのかを検定する必要があるであろう。だがこのことに関しては，検定するための統計量の性質を導くなどの点で多くの困難があり，考察を加えるまでにいたらなかった。このことに関しては今後の課題としたい。

またこの論文における分析においては，不平等度が所得のみによって生じると仮定した上で，その対象は世帯を単位とした所得についての不平等であった。これは公表されたデータを用いるという性格上その世帯の特性は捨象して分析を行わざるを得ないが，実際の不平等の観念は単に所得のみでなく，その世帯に付随する資産や世帯の構成に依存しているものと考えられる。したがって，もしこのことを考慮にいれて分析を行うためには，公表されたデータでは不十分であり分析の対象となる個別データを入手することに始まり，それに対応した尺度の構築をも考慮する必要があるであろう。

さらにこの論文においては，できるだけ人々の効用の概念にそった形で効用関数を導出し，社会的な厚生は同じ効用関数を持つ個人の効用の和によって表されるとした。しかしながら，単純な効用の和である加法分離型の社会的厚生を用いて，不平等尺度を考えることに問題がないとはいえない。このことに関してはより一般的な社会厚生関数を用いて考える必要があり，これらもあわせ

て今後の課題となるであろう。

A　数学注：ε が一定のとき導出される効用関数

$$\frac{-xU''(x)}{U'(x)}=\varepsilon$$

ここで ε は定数であるので

$$\frac{-U''(x)}{U'(x)}=\varepsilon x$$

両辺をそれぞれ積分すると

$$\int\frac{-U''(x)}{U'(x)}dx=\int\frac{\varepsilon}{x}dx$$

$$-\log U'(x)=\varepsilon\log x+a$$

$$-\log U'(x)=\log(x^{\varepsilon}e^{a})$$

$$\log\frac{1}{U'(x)}=\log a'x^{\varepsilon}\,(a'=e^{a})$$

$$U'(x)=\frac{1}{a'x^{\varepsilon}}$$

ここでもう一度積分して

$$\int U'(x)dx=\int\frac{1}{a'x^{\varepsilon}}dx$$

となり，ここで

$\varepsilon=1$ のとき

$$\int U'(x)dx=\int\frac{1}{a'x}dx$$

$$U(x)=\frac{1}{a'}\log x+b$$

$$U(x)=A+B\log x \qquad \left(A=b,\ B=\frac{1}{a'}\text{とおく}\right)$$

$\varepsilon\neq1$ のとき

$$\int U'(x)dx=\int\frac{1}{a'x^{\varepsilon}}dx$$

$$U(x)=\frac{1}{a'}\frac{x^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}+b$$

$$U(x)=A+B\frac{x^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \qquad \left(A=b,\ B=\frac{1}{a'}\text{とおく}\right)$$

$$U(x)=A+B\frac{x^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon},\ \varepsilon\neq1$$

$$U(x)=A+B\log x,\ \varepsilon=1$$

と効用関数が特定化される。

B 数学注：効用関数から Atkinson 尺度を導出

ここで所得分布のデータは $x_1, x_2, \ldots x_n$ のように離散的であり，$\varepsilon\neq1$ のとき $U(x)=A+B\frac{x^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$ であるので

$$W=\sum_{i=1}^{n}U(x_{EDE})=\sum_{i=1}^{n}\left(A+B\frac{x_{EDE}^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}\right)=An+Bn\frac{x_{EDE}^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$$

また一方で

$$W=\sum_{i=1}^{n}U(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(A+B\frac{x_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}\right)=An+Bn\frac{x_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$$

よって

$$An+Bn\frac{x_{EDE}^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}=An+Bn\frac{x_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$$

となり

$$x_{EDE}=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)}$$

したがって

$$A(x)=1-\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)}$$

$$=1-\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{1/(1-\varepsilon)}$$

同様に $\varepsilon=1$ のとき $U(x)=A+B\log x$ であるので

$$W=\sum_{i=1}^{N}U(x_{EDE})=\sum_{i=1}^{N}(A+B\log x_{EDE})=An+Bn\log x_{EDE}$$

また一方で

$$W = \sum_{i=1}^{N} U(x_i) = \sum_{i=1}^{N} (A + B\log x_i) = An + B\sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

よって

$$An + Bn\log x_{EDE} = An + B\sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

であり

$$x_{EDE} = \exp\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right]$$

$$= \exp\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n}\log x_i\right]$$

$$= \exp\left[\prod_{i=1}^{n} \log x_i^{1/n}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n}$$

したがって

$$A(x) = 1 - \frac{1}{n}\sqrt{\prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n}}$$

$$= 1 - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)}$$

以上より Atkinson 尺度は

$$A(x) = 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{1/(1-\varepsilon)},\ \varepsilon \neq 1$$

$$A(x) = 1 - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)},\ \varepsilon = 1$$

となる。

参 考 文 献

〔1〕 Ainger D. J. and Heins A. J., (1967) "A social welfare view of the measurement of income equality" *Review of Income and Wealth* 13, pp. 12–25.

〔2〕 Atkinson A. B., (1970) "On the measurement of inequality" *Journal of Economic Thory* 2, pp. 244–263.

〔3〕 Chakravarty S. R., (1988) "Extended Gini indices of inequality" *International Economic Review* 29, pp. 147–156.

〔4〕 Gastwirth J. L., (1971) "A general definition of the Lorenz curve" *Econometrica* 39, pp. 1037–1039.

〔5〕 Hanoch. G and Levy. H, (1969) "The efficiency analysis of choices involving risk" *Review of Economic Studies* 36, pp. 335–346.

〔6〕 Henderson J. M. and Quandt R. E., (1980) *Microeconomic Theory 3rd Edition.* McGrow–Hill.

〔7〕 Kakwani N. C., (1980) *Income, Inequality and Poverty.* Oxford University Press.

〔8〕 Kakwani N. C. and Podder N., (1973) "On the Estimation of Lorenz Curves from Groped Observations" *International Economic Review* 14–2, pp. 278–291.

〔9〕 Lambert P. J., (1989) *The Distribution and Redistribution of Income.* Blackwell.

〔10〕 Lambert P. J., (1985) "Social welfare and the Gini coefficient revisited" *Mathmatical Social Science* 9, pp. 19–26.

〔11〕 Newbery D., (1970) "A theorem on the measurement of inequality" *Journal of Economic Theory* 2, pp. 264–266.

〔12〕 Ortega P. Martin G. Ferenandes A. Ladoux M. and Garcia., (1991) "A New Functional Form for Estimating Lorenz Curves" *Review of Income and Wealth* 37, pp. 447–452.

〔13〕 Rothschild M. and Stiglitz J. E., (1973) "Some Further Results on the Measurement of Inequality" *Journal of Economic Theory* 6, pp. 188–204.

〔14〕 Sen. A. K., (1973) *On Economic Inequality.* Oxford Univ. Press.

〔15〕 Sheshinski E., (1972) "Relation between a social welfare function and the Gini index of income inequality" *Journal of Economic Theory* 4, pp. 98–100.

〔16〕 Shorrocks A. F., (1983) "Ranking Income Distributions" *Econometrica* 50, pp. 3–17.

〔17〕 豊田　敬, (1975) "所得分布の不平等度——不平等度の比較と尺度——" 国民経済 pp. 15–41.

〔18〕 豊田　敬, 和合　肇, (1978) "所得不平等の計測——ローレンツ曲線の交叉に関して——" 経済研究29, pp. 361–371.

〔19〕 綿貫伸一郎, (1977) "所得不平等の測定に関するノート——アトキンソンの命題をめぐって——" 季刊理論経済学28, pp. 155–159.