戦略形ゲームの最適反応性について

大石，英貴

https://doi.org/10.15017/3000064

出版情報：経済論究. 87, pp.29-43, 1993-11-30. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

戦略形ゲームの最適反応性について

大　石　英　貴

1．序

一般に，戦略形ゲームでは純戦略の範囲では均衡は必ずしも存在しない．解としての均衡の存在を保証するため，通常，戦略集合を純戦略からその確率分布である混合戦略へ拡張する．これにより，すべての有限戦略形ゲームにおいて均衡が存在する．

しかし，混合戦略への拡張は妥当であろうか．幾つかの批判が可能である．混合戦略とは，本来与えられている実行可能な選択肢としての戦略から，確率を利用した戦略への拡張である．その確率化に関して，もし，プレイヤーが自分の頭の中で確率を割り当てるならば，非常に不正確なものとなる．一方，正確さを求めてコンピュータなどの装置を利用するとすれば，本来定義されている選択肢としての戦略からは大きく異なる戦略となる．さらに，装置の利用には何らかの費用がかかり，そうならば，費用を払って混合するよりも純戦略を選好するはずである．また，相手の戦略に関する信念を固定すると，すべての混合戦略はその台にある正の確率を割り当てているすべての純戦略と無差別である．つまり，混合戦略への拡張は個人の立場での期待利得最大化の下では不必要である．まるで，均衡の存在のために，無差別な純戦略の中で混合するようであり，しかも，その比率は相手の利得にのみ依存している．

混合戦略は，本来の意味での戦略というよりも，純戦略均衡が存在しない場合の解を計算するための一つのテクニックであると考えられる．均衡の存在のために利用され，その後に様々な理由で正当化されている．（混合戦略に関する，より詳細な考察は Rubinstein（1991）などに見られる）．

解の非存在を回避するにはもう一つ方法がある．それは，解を単一の戦略の組から戦略の集合の組にすることである．単一の戦略の組の場合は，それ自身を各プレイヤーが取る唯一の戦略と考えたが，戦略の集合の場合は，その集合は許容される戦略の集合であり，その中からプレイヤーが自由に選択可能であると見なす．戦略の集合としての解の概念は，Bernheim（1984）と Pearce（1984）の合理化可能戦略集合が最初である．そこでは，主観的確率の下で期待利得を最大化するベイズ合理性が共有知識であるという仮定の下で，選択され得る戦略の集合を定義している．その結果，各プレイヤーの合理化可能戦略が単一の戦略になる場合もあるが，一般的には戦略の集合となる．

戦略の集合としての解にも，均衡の概念と同じように自己実施性が必要である．すなわち，相手がその集合の中から選択するならば，自分もその中から選択するという条件である．このような条件は幾つかの文献で様々な名前で定義されているが，一般に最適反応性と呼ばれており，Pearce（1984），Farrell（1988），Watson（1991），Börgers and Samuelson（1992）などに見られる．

この論文では，最適反応性を均衡概念の拡張として定義する．純戦略均衡と狭義均衡を戦略の集合に対して自然に拡張すると，それぞれ弱最適反応性と強最適反応性が得られる．上述の各文献では，それら2種類の最適反応性のうちのいずれか一つしか定義されていない．当然であるが，それらと合理化可能性との間には幾つかの密接な関係がある．また，それら2つの最適反応性は解として不適当であり，ここでは新たにその中間の概念である部分最適反応性を定義する．

2. 均　衡

有限の戦略形ゲームを扱う．N を有限のプレイヤー集合とする．各プレイヤー $i \in N$ は有限の（純）戦略集合 C_i を持っている．その直積を，$C = \bigtimes_{j \in N} C_j$ とする．プレイヤー i の利得関数は戦略の組から実数への関数 $u_i\colon C \to \mathbf{R}$ である．$-i$ を i 以外のプレイヤー $N-i$ を表す添字とする．$C_{-i} = \bigtimes_{j \in N-i} C_j$ である．なお，混合戦略への拡張は考えない．

プレイヤーiにとって，相手の戦略の組$c_{-i}\in C_{-i}$が与えられたとき，自分の利得を最大にする戦略の集合

$$B_i(c_{-i}):=\operatorname*{argmax}_{c_i\in C_i}\ u_i(c_i,c_{-i})$$

を，C_{-i}に対する最適反応の集合という．

各プレイヤーに１つ戦略を指定する戦略の組$c\in C$の性質について，次の定義を与える．

定義１　戦略の組$c\in C$が，各$i\in N$で　$c_i\in B_i(c_{-i})$となるとき，cを（純戦略）均衡という．

定義２　戦略の組$c\in C$が，各$i\in N$で　$\{c_i\}=B_i(c_{-i})$となるとき，cを狭義均衡という．

純戦略均衡では，各プレイヤーの戦略は他のプレイヤーがその均衡に従うときの最適反応である．狭義均衡では，各プレイヤーの戦略は他のプレイヤーがその狭義均衡に従うときの唯一の最適反応である．

戦略の組$c\in C$が純戦略均衡でなければ，あるプレイヤーiにとって戦略c_iは他のプレイヤーがその均衡に従うときの最適反応ではない．ゆえに他の利得の大きな戦略を取るはずであり，逸脱が起こる．したがって，純戦略均衡の条件は，合理的な解として戦略の組$c\in C$が満たすべき必要条件である．

与えられた戦略c_iは最適だが，他にも最適な戦略がある場合には，一般に，プレイヤーは逸脱はせずに指定された戦略を取るとされている．ゆえに，純戦略均衡は合理的な解としての十分条件でもある．一方，もし他の最適な戦略へ逸脱する可能性があるならば，純戦略均衡では不十分である．それを完全に排除するには，最適な戦略が唯一つである狭義均衡の条件が必要となる．

２種類の均衡の間の関係とそれぞれの存在について，次は自明である．

注意１　（ｉ）戦略の組が狭義均衡であるならば，純戦略均衡である．

	L	R
T	1, 1	0, 0
B	0, 0	0, 0

図 1

	L	R
T	1, −1	−1, 1
B	−1, 1	1, −1

図 2

	L	C	R
T	10, 9	9, 10	0, 0
M	9, 10	10, 9	0, 0
B	0, 0	0, 0	1, 1

図 3

（ii）純戦略均衡（狭義均衡）は必ずしも存在しない.

（i）は定義より明らかである. 図 1 のゲームでは, (T,L) と (B,R) が純戦略均衡であり, そのうち前者のみが狭義均衡である.（ii）は図 2 が反例である. しかし, 純戦略均衡（狭義均衡）は, たとえ存在してもゲーム全体の利得の構造からは直観的に受け入れ難いこともある. 図 3 のゲームでは, (B,R) が唯一の純戦略均衡かつ狭義均衡であるが, プレイヤー 1 が T や M, プレイヤー 2 が L や C を取る可能性は否定できない.

3. 最適反応性

前節の例より, 純戦略均衡は必ずしも存在が保証されず, また, たとえ存在しても非合理的なものに限定される場合があることが分かった. 我々は, 解として純戦略均衡を弱めた概念が必要である. その方法としては二通り考えられる. 一つは, 戦略集合をその上での確率分布の集合である混合戦略に拡張することである. 有限の戦略形ゲームにおいては, 混合戦略の範囲で均衡が存在することが示されている. もう一つは, 解を戦略の組から戦略の集合の組へ広げ

ることである．この論文では後者の方法を考察する．

純戦略均衡と狭義均衡は戦略の組に関して定義される．これらの性質を戦略の集合の組に拡張しよう．まず，予備的な定義が必要である．$\Delta(Z)$ を集合 Z 上の確率分布の集合とする．$\Delta(C_j)$ は，プレイヤー j の取る戦略に関して，j 以外のプレイヤーが持つ予想を表し，C_j 上の信念の集合である．プレイヤー i は他のすべてのプレイヤーの取る戦略に関して信念を持ち，その集合は $\bigtimes_{j\in N-i}\Delta(C_j)$ である．

プレイヤー i が，信念 $\sigma_{-i}\in\bigtimes_{j\in N-i}\Delta(C_j)$ を持ったときに，戦略 $c_i\in C_i$ を取るときの期待利得は，利得関数 u_i を利用すると

$$u_i(c_i,\sigma_{-i})=\sum_{c_{-i}\in C_{-i}}\Big(\prod_{j\in N-i}\sigma_j(c_j)\Big)u_i(c)$$

となる．ただし，$\sigma_j(c_j)$ は，信念 σ_{-i} によってプレイヤー j の戦略 c_j に割り当てられた確率を表す．この期待利得を最大にするプレイヤー i の戦略の集合

$$B_i(\sigma_{-i}):=\operatorname*{argmax}_{c_i\in C_i}\ u_i(c_i,\sigma_{-i})$$

を信念 σ_{-i} に対する最適反応集合という．

$D_i\subseteq C_i$ をプレイヤー i の戦略集合の部分集合とする．$D=\bigtimes_{j\in N}D_j$, $D_{-i}=\bigtimes_{j\in N-i}D_j$ である．他の各プレイヤーがそれぞれ集合 D_j から戦略を選ぶとき，プレイヤー i の信念 σ_{-i} は $\bigtimes_{j\in N-i}\Delta(D_j)$ 内にある．したがって，D_{-i} に対する最適反応集合とは，各信念 $\sigma_{-i}\in\bigtimes_{j\in N-i}\Delta(D_j)$ に対する最適反応集合の和集合

$$B_i(D_{-i}):=\bigcup_{\sigma_{-i}\in\bigtimes_{j\in N-i}\Delta(D_j)}B_i(\sigma_{-i})$$

である．前述の $B_i(c_{-i})$ は $B_i(\{c_{-i}\})$ の省略形と見なされる．なお，$B_i(D_{-i})$ は，D_{-i} の各戦略に対する最適反応の和集合ではなく，D_{-i} から生成される各信念に対する最適反応の集合であることを注意せねばならない．また，D_j のすべての戦略に正の確率を割り当てた信念に対する最適反応については，6節で考察する．

純戦略均衡と狭義均衡の定義を戦略の集合に拡張すると以下の定義となる．

定義3　戦略の集合の組 $D\subseteq C$ が，各 $i\in N$ で $D_i\subseteq B_i(D_{-i})$ となるとき，D は

弱最適反応性を満たすという.

定義 4　戦略の集合の組 $D \subseteq C$ が，各 $i \in N$ で $D_i = B_i(D_{-i})$ となるとき，D は強最適反応性を満たすという.

すなわち，戦略の集合の組 D が弱最適反応性を満たすとは，D_i 内のすべての戦略が D_{-i} に対する最適反応であるときである．弱最適反応性は，Pearce (1984) で最適反応性と呼ばれており，また，Farrell (1988) での，コミュニケーションが可能なゲームにおいて提案が「整合的」であることと同値である．また，戦略の集合の組 D が強最適反応性を満たすとは，D_i のすべての戦略が D_{-i} に対する最適反応であり，かつ，D_i が D_{-i} に対するすべての最適反応を含むときである．強最適反応性は，Börgers and Samuelson (1992) で最適反応性と呼ばれ，また，Watson (1991) での，コミュニケーションが可能なゲームにおける提案が「最適反応閉」であることと同値である.

定義より次は自明である.

注意 2　(ⅰ) 戦略の集合の組が強最適反応性を満たすならば，弱最適反応性を満たす.

(ⅱ) 純戦略均衡は弱最適反応性を満たす.

(ⅲ) 狭義均衡は強最適反応性（弱最適反応性）を満たす.

純戦略均衡が存在しない図 2 のゲームでは，弱最適反応性（強最適反応性）を満たす戦略集合の組（$\{T,B\}$, $\{L,R\}$）が唯一つ存在する．しかし，これはもとの戦略集合自身であり，このゲームでは弱最適反応性（強最適反応性）は効果的な概念ではない．図 3 のゲームでは，弱最適反応性（強最適反応性）を満たす戦略集合の組は 3 つある．純戦略均衡（狭義均衡）である（$\{B\}$, $\{R\}$）に加えて，（$\{T,M\}$, $\{L,C\}$）と（$\{T,M,B\}$, $\{L,C,R\}$）である．後者 2 組は，戦略の組としての純戦略均衡（狭義均衡）の概念では捕えられなかった解である．図 4 のゲームでは，純戦略均衡は存在しないが、弱最適反応性を満たす戦略集

	L	C	R
T	2, 0	0, 1	1, 0
M	1, 2	1, 0	2, 1
B	0, 1	2, 0	0, 0

図 4

合の組は $(\{T,M\},\{L,C\}),(\{T,B\},\{L,C\}),(\{T,M,B\},\{L,C\})$ の3組あり，そのうち，$(\{T,M,B\},\{L,C\})$ のみが強最適反応性を満たしている．

2種類の最適反応性のそれぞれを満たす戦略の集合の組の存在については，4節の合理化可能集合の存在の定理の系として与えられる．

4. 合理化可能性

この節では，前節で定義された2種類の最適反応性と，Bernheim (1984) と Pearce (1984) による合理化可能性の関係を考察する．

幾つかの予備的な定義をする．プレイヤー i が，他のプレイヤーのとる戦略に関して信念 $\sigma_{-i}\in \bigtimes_{j\in N-i}\Delta(C_j)$ を持つとき，戦略の集合 $D_i\subseteq C_i$ 内で最大利得を与える戦略の集合

$$A_i(\sigma_{-i},D_i):=\operatorname*{argmax}_{c_i\in D_i}\ u_i(c_i,\sigma_{-i})$$

を信念 σ_{-i} に対する D_i 内の最適反応集合という．また，プレイヤー i にとって，他のプレイヤー j が戦略 D_j から戦略を選ぶとき，$\bigtimes_{j\in N-i}\Delta(D_j)$ の各要素に対する D_i 内の最適反応集合の和集合

$$A_i(D_{-i},D_i):=\bigcup_{\sigma_{-i}\in \bigtimes_{j\in N-i}\Delta(D_j)} A_i(\sigma_{-i},D_i)$$

を，D_{-i} に対する D_i 内の最適反応集合という．なお，任意の $D_{-i}\subseteq C_{-i}$ に対して $B_i(D_{-i})=A_i(D_{-i},C_i)$ である．

これらを用いて，合理化可能戦略集合は次のように定義される．

定義 5 次のように帰納的に定義する．すべての $i \in N$ に対して，

$$C_i^0 := C_i$$

$$C_i^k := A_i(C_{-i}^{k-1}, C_i^{k-1}), k=1,2,....$$

そのとき，$R_i := \bigcap_{k=0}^{\infty} C_i^k$ をプレイヤー i の合理化可能戦略の集合という．また，$R := \bigtimes_{i \in N} R_i$ を合理化可能戦略の集合の組という．

合理化可能戦略の集合は，元の戦略集合から最適反応でない戦略を削除することを繰り返して得られる．プレイヤー i は，他の各プレイヤーの戦略集合 $C_j^0 = C_j$ 上に主観的な信念を作り，最適な戦略を選ぶ．ゆえに，$C_{-i}^0 = C_{-i}$ に対する最適反応戦略集合 C_i^1 内の戦略のみが実際に取られる可能性がある．つまり，元の戦略集合から決して選択されない戦略を削除したことになる．一方，他のプレイヤー j も同様に C_j^1 に制限できる．すると，プレイヤー i は，他の各プレイヤーの戦略集合 C_j^1 上に主観的な信念を作り，最適な戦略を選ばなければならない．ゆえに，C_i^1 の中でも，C_{-i}^1 に対する最適反応戦略集合のみが実際に取られる可能性があり，それが C_i^2 である．このように，残った戦略のうちで，相手の残った戦略の最適反応でないものを排除して次の段階の戦略集合とする．各プレイヤーでこの操作を繰り返し，その極限が合理化可能戦略の集合となる．なお，Pearce (1984) では，混合戦略集合上で合理化可能戦略の集合を定義している．ここでは純戦略上で定義しているが，本質的な差はないことが，Pearce (1984) の命題 1 より得られる．

図 5 のゲームでは，$C^1 = (\{T,M\}, \{L,C,R\})$，$C^2 = (\{T,M\}, \{L,C\})$，$C^3 = (\{T\}, \{L,C\})$，$C^4 = (\{T\}, \{L\})$，$C^5 = (\{T\}, \{L\})$，…となり，合理化可能戦略の集合 $R = (\{T\}, \{L\})$ である．このゲームでは単一の戦略になっている．一方，図 1 から図 3 のゲームでは，合理化可能戦略の集合は元の戦略集合に等しい．図 4 のゲームでは，$R = (\{T,M,B\}, \{L,C\})$ である．

合理化可能性について次の定理が得られる．

定理 1 すべての有限戦略形ゲームの合理化可能戦略の集合について次が成り立つ．

	L	C	R
T	1，1	2，0	1，0
M	0，2	1，2	2，1
B	0，1	1，0	1，2

図 5

（i）空でない.

（ii）強最適反応性（弱最適反応性）を満たす.

（iii）すべての弱最適反応性（強最適反応性）を満たす戦略の集合を含む.

証明　（i）定義より，すべての k で $C_i^k \neq \varnothing$ かつ $C_i^k \supseteq C_i^{k+1}$. また，$C_i$ は有限集合. ゆえに，ある m が存在して $C_i^m = C_i^{m+1} = \cdots$ となる. 定義より，$C_i^m = C_i^{m+1} = \cdots = R_i$. したがって $R_i \neq \varnothing$.

（ii）すべての k で，$C_i^k = B_i(C_{-i}^{k-1})$ が成り立つことを示せれば，（i）の証明の m の存在より $R_i = B_i(R_{-i})$. すなわち，R_i は強最適反応性を満たす. 帰納法を用いる. $k=0$ のとき，定義より $C_i^1 = A_i(C_{-i}, C_i) = B_i(C_{-i})$. 次に，$C_i^k = B_i(C_{-i}^{k-1})$ が成り立つと仮定する. $k+1$ について，$c_i \in B_i(C_{-i}^k)$ ならば，仮定より $B_i(C_{-i}^k) \subseteq B_i(C_{-i}^{k-1}) = C_i^k$ なので，$c_i \in C_i^k$. ゆえに，c_i は C_{-i}^k に対する C_i^k 内での最適反応でもある. すなわち $c_i \in A_i\ (C_{-i}^k, C_i^k) = C_i^{k+1}$. 逆に，$c_i \notin B_i(C_{-i}^k)$ ならば，すべての $\sigma_{-i} \in \bigtimes_{j \in N-i} \Delta(C_j^k)$ に対して，ある $d_i \in B_i(C_{-i}^k)$ が存在して，$u_i(\sigma_{-i}, d_i) > u_i(\sigma_{-i}, c_i)$ となる. 仮定より $B_i(C_{-i}^k) \subseteq B_i(C_{-i}^{k-1}) = C_i^k$ なので，$d_i \in C_i^k$. ゆえに c_i は C_{-i}^k に対する C_i^k 内での最適反応ではない. すなわち，$c_i \notin A_i(C_{-i}^k, C_i^k) = C_i^{k+1}$.

（iii）$D \subseteq C$ が弱最適反応性を満たすならば，各 i で $D_i \subseteq B_i(D_{-i}) \subseteq B_i(C_{-i}) = C_i^1$. 以下，各 i で帰納法を用いる. $D_i \subseteq C_i^k$ と仮定する. そのとき，$D_i \subseteq B_i(D_{-i}) \subseteq B_i(C_{-i}^k)$. ゆえに，$c_i \in D_i$ ならば，$c_i \in C_i^k$ かつ $c_i \in B_i(C_{-i}^k)$. このことは，c_i は C_{-i}^k に対する C_i^k 内の最適反応でもあることを示している. すなわち，$c_i \in A_i(C_{-i}^k, C_i^k) = C_i^{k+1}$. したがって，$D_i \subseteq C_i^{k+1}$. すべての k で $D_i \subseteq C_i^k$ なので，$D_i \subseteq R_i$.

前定理の(ⅰ)，(ⅱ)より，強最適反応性（弱最適反応性）の存在について次の結果が得られる．

系 1　すべての有限戦略形ゲームで，強最適反応性（弱最適反応性）を満たす戦略の集合が存在する．

5．部分最適反応性

一般に，戦略の集合の組 $D \subseteq C$ が，解として自己実施的であるためには，各 $i \in N$ について次の 2 つの安定性を満たす必要がある．

（ⅰ）内部安定性：D_i 内のすべての戦略は選択され得る．

（ⅱ）外部安定性：D_i 外のすべての戦略は決して選択されない．

戦略の集合の組 D が弱最適反応性を満たすとは，D_i のすべての戦略が，D_{-i} から生成されるある信念に対するある最適反応となるときである．内部安定性は満たされている．しかし，かならずしも外部安定性は満たされていない．各プレイヤー i は相手の戦略の集合 D_{-i} が固定されたときに，D_{-i} から生成される主観的な信念を自由に持つことができる．弱最適反応性は，D_i のすべての要素が，D_{-i} から作られる**ある**信念に対するある最適反応であることのみを要求している．もし，プレイヤー i が D_i のいかなる戦略も最適にはならないような D_{-i} 上の信念を持つと，D_i から逸脱する．

図 4 のゲームで弱最適反応性を満たす 3 つの集合の組のうちの一つ，$(\{T, M\}, \{L, C\})$ を考えよう．ここでは，D_1 は D_2 上の一部の信念に対する最適反応しか含んでいない．プレイヤー 2 の取る戦略に関するプレイヤー 1 の信念を $\sigma_1(L)=p$，$\sigma_1(C)=1-p$ とすると，D_1 内の戦略のうち T は $1/2 \leqq p \leqq 1$ に対しての最適反応，M は $p=1/2$ に対しての最適反応である．ゆえに，もしプレイヤー 1 が $0 \leqq p < 1/2$ の信念を持つならば，D_1 から逸脱して戦略 B を取る．したがって，D_2 内の主観的な信念の持ち方しだいで逸脱が起こる可能性があり，外部安定的でない．

強最適反応戦略の集合の組 D が強最適反応性を満たすとは，D_i のすべての

	L	R
T	1, 1	1, 1
B	1, 1	0, 0

図 6

戦略が，D_{-i} から生成されるある信念に対するある最適反応であり，かつ，D_i は D_{-i} から生成されるすべての信念に対するすべての最適反応を含むときである．内部安定性と外部安定性は共に満たされている．

しかし，強最適反応性は一般には強すぎる要求である．プレイヤー i は，相手の戦略の集合 D_{-i} 上に主観的な信念を抱くが，その信念の下で最適な戦略が一つでも D_i に含まれているならば，たとえ他にも最適な戦略があっても一般には逸脱はしない．強最適反応性は，D_i が D_{-i} から作られるすべての信念に対して**すべての**最適反応を含むことを要求している．無差別な最適反応をすべて考慮に入れることは，一般的な逸脱の解釈のもとでは強すぎるであろう．

図 4 のゲームでは，弱最適反応性を満たす 3 つの集合の組のうち，強最適反応性を満たすのは（$\{T,M,B\}$, $\{L,C\}$）だけである．信念 $p=1/2$ に対してすべての最適反応を含まなければならないので，（$\{T,B\}$, $\{L,C\}$）は強最適反応性を満たしていない．

また，無差別な最適反応があればすべて含めなけばならないということは，純戦略均衡と強最適反応性の関係について次の事実を導く．

注意 3　狭義均衡でないすべての純戦略均衡は強最適反応性を満たさない．

つまり，強最適反応性は純戦略均衡さえも満足できない強い概念である．これは，純戦略均衡の拡張からの方向からはそれる結果である．

図6のゲームでは，弱最適反応性を満たす集合の組は，（$\{T\}$, $\{L\}$），（$\{T\}$, $\{R\}$），（$\{B\}$, $\{L\}$），（$\{T\}$, $\{L,R\}$），（$\{T,B\}$, $\{L\}$），（$\{T,B\}$, $\{L,R\}$）の 6 組ある．このうち，前者 3 組は純戦略均衡でもあり，（$\{T,B\}$, $\{L,R\}$）以外の 5 組

はすべて利得（1,1）を与える．しかし，強最適反応性を満たすものは（$\{T, B\}$，$\{L, R\}$）だけである．他の5組は，すべての最適反応を含んでいないので，強最適反応性を満たしていない．

以上の考察より，新しい最適反応性の条件として次の部分最適反応性を定義しよう．

定義6　戦略の集合の組$D \subseteq C$が，各$i \in N$で，$D_i \subseteq B_i(D_{-i})$かつ，すべての$\sigma_{-i} \in \bigtimes_{j \in N-i} \Delta(D_j)$で$D_i \cap B_i(\sigma_{-i}) \neq \phi$となるとき，$D$は部分最適反応性を満たすという．

すなわち，戦略の集合の組Dが部分最適反応性を満たすとは，D_iのすべての戦略が，D_{-i}から生成されるある信念に対するある最適反応性となり，かつ，D_iがD_{-i}から作られる**すべての**信念に対して**ある**最適反応を含むことを要求している．

図4のゲームでは，部分最適反応性を満たす集合の組は，（$\{T, M\}$，$\{L, C\}$）と（$\{T, M, B\}$，$\{L, C\}$）である．これらでは，D_1はD_2上のすべての信念に対する最適反応を含んでいるので，プレイヤー1がD_2上のいかなる信念を持っても，D_1からは逸脱しない．逆もまたしかりである．なお，（$\{T, M\}$，$\{L, C\}$）では，プレイヤー2の戦略に関するプレイヤー1の信念$p=1/2$に対する最適反応としてTのみを含んでいる．もう一つの無差別な最適反応Mを含まなくても，プレイヤー1の逸脱はない．図6のゲームでは，6つの弱最適反応性を満たす集合の組はすべて，部分最適反応性を満たす．

前述の概念と部分最適反応性の間の関係について次の定理が成り立つ．

定理2　（i）戦略集合の組が強最適反応性を満たすならば，部分最適反応性を満たす．

（ii）戦略集合の組が部分最適反応性を満たすならば，弱最適反応性を満たす．

（iii）純戦略均衡は部分最適反応性を満たす．

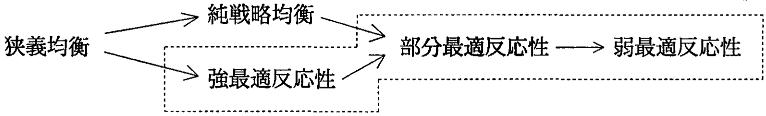

図　7

証明　(ⅰ) 部分最適反応性を満たさなければ，ある$i \in N$で，$D_i \not\subseteq B_i(D_{-i})$となるか，$B_i(\sigma_{-i}) \cap D_i = \varnothing$となる$\sigma_{-i} \in \bigtimes_{j \in N-i} \Delta(D_j)$が存在するかのいずれかである．前者の場合は明らかに強最適反応性を満たさない．後者の場合も$D_i \neq B_i(\sigma_{-i}) \subseteq B_i(D_{-i})$となり，強最適反応性を満たさない．

(ⅱ) 定義より自明．

(ⅲ) 純戦略均衡$c \in C$は，各iで$\{c_i\} \subseteq B_i(\{c_{-i}\})$を満たし，かつ，$\{c_{-i}\}$から生成されるすべての信念，すなわち$c_{-i}$自身に対して，$\{c_i\} \cap B_i(\{c_{-i}\}) \neq \varnothing$であるので部分最適反応性を満たす．

系１と定理２より部分最適反応性を満たす集合の組の存在について次が自明である．

系２　すべての有限の戦略形ゲームで，部分最適反応性をみたす戦略の集合の組が存在する．

6．結　　語

この論文で定義した５つの概念の間の関係が図７に示されている．戦略（の集合）の組が矢印の左側の定義を満たせば右側の定義を満たすことを表している．各々の戦略（の集合）の間に包含関係があることを示してはいないことに注意せよ．破線の内部は存在の保証されている概念である．合理化可能性はこれらの５つの定義を満たすすべての戦略（の集合）の組の和集合である．

解として戦略の組から戦略の集合の組にすることは，ゲームの結果を客観的

に一つに規定することを不可能にする．結果はある集合内にあることのみを言っている．これは欠点でもあるが，逆に集合としての解の特徴でもある．相手の戦略の可能な候補のみを規定し，そのうえでプレイヤーは自由に予想を立てる．その主観的な信念の下で期待利得を最大化する戦略を採る．混合戦略へ拡張した場合の混合戦略均衡では，混合の比率までも解に命令されている．集合としての解は，ある程度自由に選択させるルールとなっている．

我々は望ましい解の候補の一つとして部分最適反応性を定義したが，残念ながら部分最適反応性でも不十分な場合がある．図 1 のゲームでは，部分最適反応性を満たす集合の組は，$(\{T\},\{L\})$と$(\{T,M\},\{L,C\})$ の 2 組あり，それらは弱最適反応性かつ強最適反応性をも満たす．しかし，このゲームでは多くの人が直観的に前者が解として望ましいと考えるであろう．そうならば，部分最適反応性は解の必要条件に過ぎない．

この種の問題をある程度解決する方法の一つは，最適反応の定義を異なったものにすることである．我々はこの論文で，$B_i(D_{-i})$ の定義において，D_{-i} から生成される $\bigtimes_{j\in N-i}\Delta(D_j)$ 上のすべての信念に対する最適反応を考えた．一方，Pearce (1984) では，D_{-i} に台が一致する信念，すなわち，D_{-i} 内のすべての戦略に正の確率を割り当てる信念に対する最適反応の集合である慎重最適反応集合 $B_i'(D_{-i})$ を定義している．この概念を用いて，Börgers and Samuelson (1992) では，2 人ゲームで，各 i で $D_i=B_i'(D_{-i})$ となる戦略の集合の組 D を「慎重最適反応性」を満たすと呼んでいる．また，Samuelson (1992) における「整合的な」集合の組も同値の概念である．図 1 のゲームでは，慎重最適反応を満たす組は $(\{T\},\{L\})$ のみとなり，このゲームに関しては望ましい結果が得られる．しかし，慎重最適反応性を満たす集合の組は，すべてのゲームで必ずしも存在しないことが，二つの論文で例証されている．

慎重最適反応性は，ここでの定義に即して言うと慎重最適反応による強最適反応性である．ゆえに，当然の拡張として，慎重最適反応による弱最適反応性や部分最適反応性が考えられる．それらの正式な定義は大石 (1993) にある．前述の問題を解決し，しかも存在まで保証できることが示されている．

参 考 文 献

Bernheim, B. D. (1984). "Rationalizable Strategic Behavior," *Econometrica* 52, 1007–1028.

Börgers, T., and Samuelson, L. (1992). ""Cautious" Utility Maximization and Iterated Weak Dominance," *International Journal of Game Theory* 21, 13–25.

Farrell, J. (1988). "Communication, Coorination and Nash Equilibrium," *Economics Letters* 27, 209–214.

Pearce, D. G. (1984). "Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection" *Econometrica* 52, 1029–1050.

Rubinstein, A. (1991). "Comments on the Interpretation of Game Theory," *Econometrica* 59, 904–924.

Samuelson, L. (1992). "Dominated Strategies and Common Knowledge" *Games and Economic Behavior* 4, 284–313.

Watson, J. (1991). "Communication and Superior Cooperation in Two-Player Normal Form Games," *Economics Letters* 35, 267–271.

大石英貴 (1993)「ゲームにおける戦略と逸脱について」, 未発表.