資産市場均衡下の裁定評価理論

辻，聖二

https://doi.org/10.15017/2920794

出版情報：経済論究. 79, pp.229-243, 1991-03-26. 九州大学大学院経済学会
バージョン：

資産市場均衡下の裁定評価理論

辻　　聖　二

目　次

Ⅰ　はじめに
Ⅱ　資産市場均衡下の裁定評価理論
Ⅲ　CAPM 及び Ross の APT との比較
　(i)　CAPM との比較
　(ii)　Ross の APT との比較
Ⅳ　むすび

Ⅰ. は じ め に

1976年，S. A. Ross〔9〕は，資本資産評価モデル (Capital Asset Pricing Model; CAPM) にとって代わる理論として裁定評価理論 (Arbitrage Pricing Theory; APT) を提唱した。APT は，実証可能な理論の構築を前提に考察されたものであり，現実的・直観的モデルに経済学的解釈を加えた理論であると言うことができる。

Ross の APT は，CAPM の魅力である収益とリスクとの間の関係の明瞭性，モデルとしての扱い易さなどを残しつつ，資産収益の説明要因としてより多くのファクターを取り入れているという意味において，CAPM をより一般化した資産評価理論であると言える。しかし，CAPM が資本資産市場の均衡下における評価理論であるのに対して，Ross は資産市場の均衡問題を取り扱うことなしに APT を展開した。そこで，Grinblatt and Titman〔3〕，Jarrow〔7〕らは，資産市場の均衡条件を考慮に入れて裁定評価理論を展開したのである。本論文では，Jarrow〔7〕にしたがって資産市場均衡下の裁定評価理論（以下，均衡 APT と略）を導出し，CAPM 及び Ross の APT との比較

を行なうことによって均衡 APT の特徴と問題点を明確にすることにする。

以下第Ⅱ節では，Jarrow のモデルにしたがって均衡 APT を導出し，第Ⅲ節では，CAPM 及び Ross の APT との比較を通して均衡 APT の特徴を明らかにする。最後の第Ⅳ節では，均衡 APT のいくつかの問題点を指摘し今後の課題を述べる。

Ⅱ．資産市場均衡下の裁定評価理論

仮定を述べる。

〔仮定1〕 資本市場は，

(i) 投資家は，price taker である。

(ii) すべての資産は，完全に分割可能であり，流動的である。

(iii) 取引コストや税は存在しない。

という意味において完全市場である。

〔仮定2〕 すべての投資家は，$\mathrm{Prob}_i(H)$ と $x(\omega)$ について同質的信念を持つ。ただし，$\mathrm{Prob}_i(H)$ は事象 H に関する i 投資家の確率信念を表わし，$x(\omega)$ は状態 ω が発生した場合の $t=1$ における x 資産のキャッシュ・フローであって，有限の二次モーメントを持つと仮定される。

〔仮定3〕 $t=0$ における x 資産の価格関数 $p(x)$ は，価値加算性を満たし[1)]，かつ，

$$P(x)>0\ ,\forall x$$

とする。

これらの仮定のもとでは，x_j 資産の収益率は，一般的に次のようなマルチファクターモデルで表わすことができる[2)]。

$$r(x_j)=\sum_{k=0}^{\ell}\lambda_{jk}r(z_k)\qquad j=0,1,\cdots,n\qquad\cdots\cdots\cdots(1)$$

ただし，λ_{jk} は，第 k 番目のファクターポートフォリオの収益率 ($r(z_k)$) の変動に対する x_j 資産の反応度を示す係数であり，

$$\sum_{k=0}^{\ell} \lambda_{jk}=1$$

である。

いま，安全資産 X_Ω が存在し，$Z_0=X_\Omega$ とすると，(1)式は次のように表される。

$$r(x_j)=r(x_\Omega)+\sum_{k=1}^{\ell}\lambda_{jk}(r(z_k)-r(x_\Omega)) \qquad j=1,\cdots,n \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

さらに，ℓ 個のファクターを，すべての資産に対して共通に影響を及ぼすファクターと，ある資産に対して固有に影響を及ぼすファクターとに分類すると，すなわち，

$$r(z_k)=f_k \qquad k=1,\cdots,K$$

$$r(z_k)=u_{k-K} \qquad k=K+1,\cdots,\ell$$

とすると，(2)式は

$$r(x_j)=r(x_\Omega)+\sum_{k=1}^{K}\lambda_{jk}(f_k-r(x_\Omega))+\sum_{s=1}^{\ell-K}\lambda_{j,K+s}(u_s-r(x_\Omega))$$

$$j=1,\cdots,n \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

と書くことができる。

〔仮定4〕 x_j 資産の収益率，$r(x_j)$ は，次の収益生成過程にしたがうものとする。

$$r(x_j)=r(x_\Omega)+\sum_{k=1}^{K}\lambda_{jk}(f_k-r(x_\Omega))+\lambda_{j,K+j}(u_j-r(x_\Omega))$$

$$j=1,\cdots,n \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ただし，u_i，u_j，f_k は，すべての i,j,k に対して独立であり，

$$\mathrm{var}(\lambda_{j,K+j}(u_j-r(x_\Omega)))\leq\bar{\sigma}^2 \qquad j=1,\cdots,n \qquad \cdots\cdots(5)$$

とする。

〔仮定5〕 投資家の効用関数は，単調増加，狭義凹関数であり，連続二階偏導関数を持つ。

〔仮定6〕 すべての投資家の危険回避度は有界である。

以上の仮定から，まず最適消費—投資需要の特徴づけを行なうことにする。

定理Ⅰ $(c_0^i,\ c_1^i,\ N_j^i(m), j=0,\cdots,m)$ が最適消費—投資需要であるための

条件は，それらが以下の連立方程式の解になっているということである。

$$E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}(r(z_j)-r(x_\Omega))\Big/(1+\Pi)\right)=0$$

$$j=1,\cdots,m \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\frac{E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}\cdot\frac{1}{1+\Pi}\right)}{E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_0^i}\right)}=\frac{1}{1+r(x_\Omega)} \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\bar{c}_0^i+\sum_{j=0}^{m}\bar{N}_j^iP(z_j)/\rho_0=c_0^i+\sum_{j=0}^{m}N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

$$c_1^i=\bar{c}_1^i+\sum_{j=0}^{m}N_j^i(m)z_j(\omega)/\rho_1(\omega) \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

ただし，$\bar{N}_j^i$ はi投資家の Z_j 資産賦存量を表わしており，

$$\sum_{i\in I}\bar{N}_j^i>0 \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

と仮定される。c_0^i，c_1^i は，それぞれ $t=0$，$t=1$ でのi投資家の消費量を表わしており，$V^i(c_0^i,\ c_1^i)$ はi投資家の効用関数を表わしている。また，Πは $t=1$ でのインフレ率であり，

$$\Pi=\frac{\rho_1(\omega)-\rho_0}{\rho_0} \qquad \cdots\cdots\cdots(11)$$

と定義される。ここで，ρ_0，$\rho_1(\omega)$ はそれぞれ，$t=0$ での消費財の価格水準，状態 ω が発生した場合の $t=1$ での消費財の価格水準を表わす。

証明）(8)，(9)式を制約条件とした投資家の期待効用最大化問題を，ラグランジェ乗数法を用いて解くことにする。

$$L(c_0^i, c_1^i)=E(V^i(c_0^i, c_1^i))+\delta\left(\bar{c}_0^i+\sum_{j=0}^{m}\bar{N}_j^iP(z_j)\Big/\rho_0\right.$$

$$\left.-c_0^i-\sum_{j=0}^{m}N_j^i(m)P(z_j)\Big/\rho_0\right)$$

最適消費配分の存在を仮定し，制約式(9)に注意して，$c_0^i, N_j^i(m)$，$j=0,\cdots,m$ が最適消費—投資需要になるための条件を求めると次

のようになる[3)]。

$$\frac{\partial L(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_0^i}=E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_0^i}\right)-\delta=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

$$\frac{\partial L(c_0^i, c_1^i)}{\partial N_j^i(m)}=E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}\cdot z_j(\omega)\Big/\rho_1(\omega)\right)-\delta P(z_j)\Big/\rho_0=0$$

$$j=0,\cdots, m \qquad \cdots\cdots\cdots(13)$$

(13)式において $j=0$ とすると，$Z_0=X_\Omega$ なので，

$$\delta=E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}\cdot\frac{\rho_0}{\rho_1(\omega)}\cdot\frac{x_\Omega}{P(x_\Omega)}\right)$$

さらに，

$$r(x_\Omega)=\frac{x_\Omega-P(x_\Omega)}{P(x_\Omega)} \qquad \cdots\cdots\cdots(14)$$

と(11)式に注意すると，

$$\delta=E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}\cdot\frac{1+r(x_\Omega)}{1+\Pi}\right)$$

これを(12)式に代入すると(7)式を得る。また，(13)式に代入すると，

$$E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}\cdot z_j(\omega)\Big/\rho_1(\omega)\right)$$
$$-(P(z_j)/\rho_0)E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}\cdot\frac{1+r(x_\Omega)}{1+\Pi}\right)=0$$

(11)，(14)式に注意して整理すると，

$$E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}\cdot\frac{1+r(z_j)}{1+\Pi}\right)-E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}\cdot\frac{1+r(x_\Omega)}{1+\Pi}\right)=0$$

したがって，

$$E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}\cdot(r(z_j)-r(x_\Omega))\Big/(1+\Pi)\right)=0$$

となり，(6)式を得る。

（証明終）

この定理によって，i 投資家の最適消費―投資需要が特徴づけられている。つまり，(6)式は，安全利子率で追加的に1ドルを借入れて，その1ドルを j 資産に投資することから生じる最適期待効用水準の限界的変化がゼロであること

を意味している。また，(7)式は，安全利子率で借入れを行なうことによって，$t=0$ での消費を1単位だけ増やし，そのために $t=1$ での消費を減らすことから生じる最適期待効用水準の限界的変化がゼロになることを意味している。(8)式は，$t=0$ での予算制約式を表わしており，(9)式は，$t=1$ での最適消費の定義を示している。

次に，資産市場均衡[4)]についての定義を与え，資産市場が均衡している場合には消費財市場もまた均衡していることを示しておく。

定義　資産市場均衡とは，

(i) 最適資産需要 $N_j^i(m)$，$j=0,\cdots,m$

と

(ii) $\sum_{i\in I}\bar{N}_j^i=\sum_{i\in I}N_j^i(m)$，$j=0,\cdots,m$ を満たすような価格 $p(z_j)$，$j=0,\cdots,m$

の集合である。

すなわち，資産市場均衡においては，$N_j^i(m)$，$j=0,\cdots,m$ が(6)式及び(8)式を満たしており，かつ，各資産の総供給が総需要と一致しているのである。

定理Ⅱ　資産市場均衡が成立しているならば，

(i) $\sum_{i\in I}\bar{c}_0^i=\sum_{i\in I}c_0^i$

(ii) $\sum_{i\in I}\bar{c}_1^i+\sum_{i\in I}\left(\sum_{j=0}^{m}\bar{N}_j^i z_j(\omega)\Big/\rho_1(\omega)\right)=\sum_{i\in I}c_1^i$

が成り立つ。ただし，c_0^i と c_1^i は(7)式及び(9)式を満たしているものとする。

証明）$t=0$ での予算制約を表わす(8)式において，投資家 i に関して和をとると，

$$\sum_{i\in I}\bar{c}_0^i+\sum_{i\in I}\left(\sum_{j=0}^{m}\bar{N}_j^i P(z_j)\Big/\rho_0\right)=\sum_{i\in I}c_0^i+\sum_{i\in I}\left(\sum_{j=0}^{m}N_j^i(m)P(z_j)\Big/\rho_0\right)$$

$$\therefore \sum_{i\in I}\bar{c}_0^i-\sum_{i\in I}c_0^i=\sum_{i\in I}\sum_{j=0}^{m}N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0-\sum_{i\in I}\sum_{j=0}^{m}\bar{N}_j^i P(z_j)/\rho_0$$

$$=\sum_{j=0}^{m}P(z_j)/\rho_0\left[\sum_{i\in I}N_j^i(m)-\sum_{i\in I}\bar{N}_j^i\right]$$

$= 0$ （∵資産市場均衡の定義(ii)）

よって，(i)を得る。

また，t=1 での最適消費の定義を表わしている(9)式において，投資家 i に関して和をとると，

$$\sum_{i\in I}\bar{c}_1^i+\sum_{i\in I}\left(\sum_{j=0}^{m}N_j^i(m)z_j(\omega)\Big/\rho_1(\omega)\right)=\sum_{i\in I}c_1^i$$

したがって，資産市場均衡の定義の(ii)より，

$$\sum_{i\in I}\bar{c}_1^i+\sum_{i\in I}\left(\sum_{j=0}^{m}\bar{N}_j^i z_j(\omega)\Big/\rho_1(\omega)\right)=\sum_{i\in I}c_1^i$$

となり，(ii)を得る。

（証明終）

ここで，資産市場均衡下の裁定評価理論を導出する前に，ポートフォリオの分散化という概念を導入しておく。

定理Ⅲ　資産市場均衡が成立しているならば，すべての投資家の最適資産需要 $N_j^i(m)$ に関して

$$N_j^i(m)>0, \qquad j=1,\cdots,m,\ {}^\forall i$$

が成り立つ。

証明）(6)式より

$$E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i,c_1^i)}{\partial c_1^i}(r(z_j)-r(x_\Omega))\Big/(1+\Pi)\right)=0$$

$\mathrm{cov}(x,y)=E(xy)-E(x)E(y)$ を用いて変形すると，

$$E\left(\frac{\partial V^i(c_0^i,c_1^i)}{\partial c_1^i}\right)E(r(z_j)-r(x_\Omega))\Big/(1+\Pi)$$
$$=-\mathrm{cov}\left(\frac{\partial V^i(c_0^i,c_1^i)}{\partial c_1^i},(r(z_j)-r(x_\Omega))\Big/(1+\Pi)\right)$$
$$=-\mathrm{cov}\left(\frac{\partial V^i(c_0^i,c_1^i)}{\partial c_1^i},\frac{r(z_j)}{1+\Pi}\right)$$

〔仮定 5〕より，$E(\partial V^i(c_0^i,c_1^i)/\partial c_1^i)>0$ であり，(9)式を考慮に入

れて整理すれば，

$$E(r(z_j)-r(x_\Omega))=-\mathrm{cov}\left(\frac{\dfrac{\partial V^i\left(c_0^i,\bar{c}_1^i+\sum\limits_{k=0}^{m}N_k^i(m)z_k(\omega)/\rho_1(\omega)\right)}{\partial c_1^i}}{E\left(\dfrac{\partial V^i(c_1^0,c_1^i)}{\partial c_1^i}\right)},\ r(z_j)\right)\cdots\cdots\cdots (15)$$

さらに(14)式を使って変形すると，

$$E(r(z_j)-r(x_\Omega))=-\mathrm{cov}\left(\frac{\dfrac{\partial V^i\left((c_0^i,\bar{c}_1^i+\sum\limits_{k=1}^{m}N_k^i(m)P(z_k)(1+r(z_k))\Big/\rho_1(\omega)\right)}{\partial c_1^i}}{E\left(\dfrac{\partial V^i(c_0^i,c_1^i)}{\partial c_1^i}\right)},\ r(z_j)\right)\cdots (16)$$

と表わすことができる[5]。いま，$r(z_k)$ と $r(z_j)$ が $k\neq j$ の場合には統計的に独立であることに注意し，〔仮定 5〕を考え合わせることによって，次のことが明らかになる[6]。

$$\begin{aligned}
N_j^i(m)=0 &\Rightarrow E(r(z_j)-r(w_\Omega))=0 \\
N_j^i(m)>0 &\Rightarrow E(r(z_j)-r(x_\Omega))>0 \qquad \cdots\cdots\cdots (※) \\
N_j^i(m)<0 &\Rightarrow E(r(z_j)-r(x_\Omega))<0
\end{aligned}$$

ところで，$\Sigma_{i\in I}\bar{N}_j^i>0$ と仮定している（(10)式）ので，資産市場均衡においては

$$\sum_{i\in I}N_j^i(m)>0,\quad j=1,\cdots,m$$

すなわち，

$$\exists i\ ;\ N_j^i(m)>0,\quad j=1,\cdots,m$$

でなければならない。したがって，〔仮定 2〕より

$$N_j^i(m)>0,\quad \forall i,\ j=1,\cdots,m$$

が成り立つ。

（証明終）

この定理Ⅲは，投資家のポートフォリオ行動に対して非常に大きな意味を持っている。つまり，資産市場均衡においては，各投資家はすべての危険資産を正の額で保有しているが，そのポートフォリオに占める各危険資産の保有比率及び絶対額は，投資家ごとに異なり得るのである。

〔仮定 4〕の収益生成過程（(4)式）について両辺の期待値をとると，

$$E(r(x_j))=r(x_\Omega)+\sum_{k=1}^{K}\lambda_{jk}(Ef_k-r(x_\Omega))$$
$$+\lambda_{j,k+j}E(u_j-r(x_\Omega)) \qquad \cdots\cdots\cdots(4')$$

定理Ⅳ　資産市場均衡が成立しているならば，

$$0<|\lambda_{j,K+j}E(u_j-r(x_\Omega))|\leqq\phi/|\lambda_{j,K+j}|\cdot\frac{\sum_{i\in I}\overline{N}^i_j P(z_j)/\rho_0}{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i\in I}\overline{N}^i_j P(z_j)\Big/\rho_0\right)}$$
$$j=1,\cdots,(m-K)$$

が成立する。ただし，ϕ は定数とする。

証明）Taylor の定理を応用することにより[7]，

$$\frac{\partial V^i(c^i_0,c^i_1)}{\partial c^i_1}=\frac{\partial V^i(c^i_0,x)}{\partial c^i_1}+\frac{\partial^2 V^i(c^i_0,y)}{\partial c^{i\,2}_1}N^i_j(m)z_j(\omega)/\rho_1(\omega)$$

(11)，(14)式を用いて変形すると，

$$\frac{\partial V^i(c^i_0,c^i_1)}{\partial c^i_1}=\frac{\partial V^i(c^i_0,x)}{\partial c^i_1}$$
$$+\frac{\partial^2 V^i(c^i_0,y)}{\partial c^{i\,2}_1}[N^i_j(m)P(z_j)/\rho_0]\frac{1+r(z_j)}{1+\Pi} \qquad \cdots\cdots\cdots(17)$$

を得る。ただし，

$$x=\bar{c}^i_1+\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m}N^i_k(m)z_k(\omega)/\rho_1(\omega)$$

$$y\in[x,\ x+N^i_j(m)z_j(\omega)/\rho_1(\omega)]$$

とする。

(17)式を(15)式に代入すると，

$$E(r(z_j)-r(x_\Omega))=-\mathrm{cov}$$

$$\left(\frac{\dfrac{\partial V^i(c_0^i,x)}{\partial c_1^i}}{E\left(\dfrac{\partial V^i(c_0^i,c_1^i)}{\partial c_1^i}\right)}+\frac{\dfrac{\partial^2 V^i(c_0^i,y)}{\partial c_1^{i\,2}}}{E\left(\dfrac{\partial V^i(c_0^i,c_1^i)}{\partial c_1^i}\right)}[N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0]\frac{1+r(z_j)}{1+\Pi},\ r(z_j)\right)$$

x と $r(z_j)$ とは統計的に独立であり，〔仮定 6〕によって，

$$-\frac{\dfrac{\partial^2 V^i(c_0^i,y)}{\partial c_1^{i\,2}}}{E\left(\dfrac{\partial V^i(c_0^i\,c_1^i)}{\partial c_1^i}\right)}\leqq\psi^i\quad(\psi^i\text{は定数})$$

とすることができるので，

$$E(r(z_j)-r(x_\Omega))\leqq\psi^i\frac{N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0}{1+\Pi}\cdot\mathrm{var}(r(z_j))$$

また，

$r(z_j)=u_{j-K},\quad j=K+1,\cdots,m$

なので，

$$E(|\lambda_{j,k+j}|(u_j-r(x_\Omega)))\leqq\psi^i\frac{N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0}{1+\Pi}\cdot\frac{\mathrm{var}(\lambda_{j,K+j}u_j)}{|\lambda_{j,K+j}|}$$

〔仮定 4〕の(5)式を考慮して

$$\phi\equiv\frac{\bar{\sigma}^2}{1+\Pi}\cdot\max_{i\in I}\left[\psi^i\sum_{j=1}^{m}N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0\right]$$

と定義すると，

$$E(|\lambda_{j,K+j}|(u_j-r(x_\Omega)))\leqq\frac{\phi}{|\lambda_{j,K+j}|}\cdot\frac{N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0}{\sum_{j=1}^{m}N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0}$$

$$\therefore\left[\sum_{j=1}^{m}N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0\right]E(|\rho_{j,K+j}|(u_j-r(x_\Omega)))$$
$$\leqq\frac{\phi}{|\rho_{j,K+j}|}N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0$$

投資家 i について和をとって整理すると，

$$E(|\lambda_{j,K+j}|(u_j-r(x_\Omega)))\leqq\frac{\phi}{|\lambda_{j,K+j}|}\cdot\frac{\sum_{i\in I}N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0}{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i\in I}N_j^i(m)P(z_j)/\rho_0\right)}$$

$$=\frac{\phi}{|\lambda_{j,K+j}|}\cdot\frac{\sum_{i\in I}\overline{N}_j^i P(z_j)/\rho_0}{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i\in I}\overline{N}_j^i P(z_j)/\rho_0\right)}$$

を得る。一方，定理Ⅲの証明途中（※）より

$E(u_j-r(x_\Omega))>0$

したがって，

$0<|\lambda_{j,K+j}E(u_j-r(x_\Omega))|$

を得ることができる

（証明終）

この定理Ⅳにおいて，$(\sum_{i\in I}\overline{N}_j^i P(z_j)/\rho_0)/(\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i\in I}\overline{N}_j^i P(z_j)/\rho_0))$ なる項は，総資産価値に占める j 資産の割合を表わしているが，極限においては

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{i\in I}\overline{N}_j^i P(z_j)/\rho_0}{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i\in I}\overline{N}_j^i P(z_j)/\rho_0\right)}=0$$

と考えられる。したがって，はさみうちの定理により

$$\lim_{m\to\infty}|\lambda_{j,K+j}E(u_j-r(x_\Omega))|=0$$

が成立する。これと(4′)式を考え合わせると，資産市場均衡下の裁定評価理論は次のように定式化することができる。

$$\lim_{m\to\infty}\left|E(r(x_j))-r(x_\Omega)-\sum_{k=1}^{K}\lambda_{jk}(Ef_k-r(x_\Omega))\right|=0,\quad \forall j \quad \cdots\cdots\cdots(18)$$

$$\therefore E(r(x_j))\approx r(x_\Omega)+\sum_{k=1}^{K}\lambda_{jk}(Ef_k-r(x_\Omega)),\quad \forall j$$

Ⅲ．CAPM 及び Ross の APT との比較

(i) CAPM との比較

CAPM と均衡 APT は，ともに資産市場均衡下における資産評価理論であるが，それらの仮定には若干の違いがみられる。まず，〔仮定１〕～〔仮定３〕は双方に共通のものである。次に，〔仮定４〕は，均衡 APT に固有の仮定で

あり，この仮定こそが APT の特徴を最もよく表わしているものであると言うことができよう。また，〔仮定5〕，〔仮定6〕では，投資家の効用関数と危険回避度に関してかなり強い制約を課している。これに対して，CAPM は，いわゆる「2パラメーター・アプローチ」によって展開されることから

(1) 投資収益率の確率分布が，正規分布に従う。

あるいは

(2) 投資家の効用関数が，二次式でよく近似される。

ということを仮定している。

さらに，投資家のポートフォリオ行動にも大きな違いがみられる。CAPM は，市場ポートフォリオの平均—分散効率性に依存して展開された理論モデルであるが，APT は，市場ポートフォリオが平均—分散効率的であるかどうかということを問題にしていない。このことが，投資家のポートフォリオ行動に重大な影響を及ぼしているのである。つまり，定理Ⅲで明らかにされたように，均衡 APT においては，資産市場均衡下では投資家はすべての危険資産を正の額で保有しているが，そのポートフォリオに占める各危険資産の保有比率及び絶対額は，投資家ごとに異なり得るのである。これに対して，CAPM においては，投資家は，市場ポートフォリオと言われているある決まった危険資産ポートフォリオと安全資産との任意の組合わせを保有するのである。それゆえ，CAPMにおけるポートフォリオ選択は，均衡 APT におけるそれよりも制約的であると言うことができよう。

(ii) Ross の APT との比較

まず最初に，Ross の APT の主な結論を示しておく。

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(E(r(x_j))-r(x_\Omega)-\sum_{k=1}^{K}\lambda_{jk}(Ef_k-r(x_\Omega))\right)<+\infty \quad \cdots\cdots\cdots (19)$$

(18)式と(19)式を比較すれば容易にわかることだが，均衡 APT はすべての資産に対して一様に成立するが，Ross の APT は平均的にしか成り立たないのである。この意味において，均衡 APT は，Ross の APT よりも強い結果であると言うことができる。

次に，均衡 APT もまた，Ross の APT と同じように，あくまでも近似的に成立する線型関係であるということに注意しなければならない。確かに，Ross の APT と比べるとかなり線型近似は改善されているけれども，やはり近似の誤差評価を行ない，モデルの信頼性・検証可能性について検討を加える必要があると思われる。

さらに重要なことは，均衡 APT の導出にあたって，かなり多くの追加的な制約を課しているということである。特に，投資家の選好についての仮定（〔仮定 5〕及び〔仮定 6〕）が置かれたということは，APT にとって大きな意味を持つのである。というのは，S. A. Ross〔9〕が特に強調しているように，Ross の APT の導出にあたっては，投資家の効用関数の型及び資産収益率の確率分布の型について特別な制約を課していなかったからである。

Ⅳ. む す び

我々は，Jarrow〔7〕の所論に基づいて均衡 APT を検討してきた。均衡 APT は，CAPM の魅力である収益とリスクとの間の関係の明瞭性，経済学的解釈の容易さ，モデルとしての扱い易さなどを残しつつ，資産収益の説明要因としてより多くのファクターを取り入れているという意味においてより一般的である。そして，投資家のポートフォリオ行動に関しては，CAPM よりも制約がゆるいということが判った。一方，Ross の APT と比較した場合，投資家の信念と選好について追加的に制約を加えてはいるけれども，それによって線型近似を改善し，より強固な結論を導き出したという点において，相応の評価をすることができると思われる。

今後の展望としては，まず統計学上の問題を克服し，仮定をゆるめることが望まれる。特に，当面の課題としては，Ross の APT においては課されていなかった制約（〔仮定 2〕，〔仮定 5〕及び〔仮定 6〕）をゆるめていくことが挙げられよう。また，理論的展開のみならず，実証研究の立場からも均衡 APT について検討していく必要がある。というのも，APT は「現実への接近」という理論構築理念を持っており，常に現実との対応関係に留意し，モデルの現実

説明力を高めていくことが望まれているからである。

〔注〕

1) このとき，関数 $P(x)$ は

$$P(x_1+x_2) \leqq P(x_1)+P(x_2)$$

を満たす。

2) この点に関する詳しい導出過程等については，R. A. Jarrow〔7〕(pp. 89–109) を参照されたい。

3) ここでの証明においては必要条件だけを求めているが，〔仮定5〕によって十分条件は満足されていることに注意されたい。

4) 本論文では，資産市場均衡が存在するものと仮定して議論を進めているが，O. D. Hart〔4〕は，均衡解の存在について詳しい検討を行なっている。

5) $k=0$ のとき，$z_0(\omega)=x_\Omega$ なので，$r(z_j)$ との共分散はゼロになる。

6) ⒃式の共分散項に着目し，$k \neq j$ のとき $r(z_k)$ と $r(z_j)$ が統計的に独立であることに注意して

$$F(r(z_j)) \equiv \frac{\dfrac{\partial V^i(c_0^i, \bar{c}_1^i + N_j^i(m)P(z_j)(1+r(z_j))/\rho_1(\omega))}{\partial c_1^i}}{E\left(\dfrac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

と定義する。〔仮定5〕より，

$$\frac{\partial V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^i}<0, \quad \frac{\partial^2 V^i(c_0^i, c_1^i)}{\partial c_1^{i\,2}}<0$$

なので，(＊)式の両辺を $r(z_j)$ で微分すると，

$N_j^i(m)>0$ のとき，$F'(r(z_j))<0$

$N_j^i(m)<0$ のとき，$F'(r(z_j))>0$

また，$N_j^i(m)=0$ のとき，共分散項がゼロになることは明らかである。

7) この点については，W. Rudin〔10〕(pp. 110) を参照されたい。

参考文献

〔1〕 Connor, G., "A Unified Beta Pricing Theory," *Journal of Economic Theory,* Vol. 34, 1984, pp. 13–31.

〔2〕 Dybvig, P., "An Explicit Bound on Individual Assets' Deviations from APT Pricing in a Finite Economy", *Journal of Financial Economics,* Vol. 12, 1983, pp. 483–496.

〔3〕 Grinblatt, M, and S. Titman., "Factor Pricing in a Finite Economy", *Journal of Financial Economics,* Vol. 12, 1983, pp. 497–507.

〔4〕 Hart, O. D., "On the Existence of Equilibrium in a Securities Model", *Jour-*

nal of Economic Theory, Vol. 9, 1974, pp. 293-311.

〔5〕 Huberman, G., "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Economic Theory*, Vol. 28, 1982, pp. 183-191.

〔6〕 Ingersoll, J. E. Jr., "Some Results in the Theory of Arbitrage Pricing", *The Journal of Finance*, Vol. 39, No. 4, 1984, pp. 1021-1039.

〔7〕 Jarrow, R. A., *Finance Theory*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1988.

〔8〕 三浦良造『モダンポートフォリオの基礎』同文館, 1989.

〔9〕 Ross, S. A., "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, 1976, pp. 341-360.

〔10〕 Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976.