

Lagrangeの運動方程式を用いた波動伝搬理論による 固体音の建物内伝搬予測に関する研究

縄岡, 好人
大林組技術研究所 : 主任研究員

<https://doi.org/10.11501/3121415>

出版情報 : 九州芸術工科大学, 1996, 博士 (芸術工学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏名・本籍(国籍) 縄岡 好人 (鳥取県)

学位の種類 博士(芸術工学)

学位記番号 甲第10号

学位授与の日付 平成9年3月18日

学位授与の要件 学位規則第4条第1項該当

学位論文題目 Lagrange の運動方程式を用いた波動伝搬理論による固体音の
建物内伝搬予測に関する研究

審査委員会 幹事 教授 藤原 恭司

委員 教授 津村 尚志

委員 教授 鈴木 俊行

論文内容の要旨

近年、人口の都市への集中はますます加速され、都市部においては鉄道や地下鉄網の整備による輸送力の増強が図られてきた。また、音楽ホールや研究施設などに対するニーズも大きく、これらの文化施設の建設も盛んとなったが、土地の高度有効利用や交通の利便性のために、静寂が強く必要とされるこれらの諸施設が地下鉄や鉄道に近接して建設されることも増えてきている。鉄道や地下鉄は加振力として大きな振動源であるため、電車から発生した振動が建物内に伝搬して生じる固体音問題が固体音に関する新しい問題としてクローズアップされるようになってきた。建物を設計するに当たっては、これらの振動および固体音の影響を事前に予測し、必要であれば適切な防音・防振対策を検討する必要がある。

固体音の建物内伝搬性状に関する既往の予測手法は、実験式による予測、統計的エネルギー解析法による予測、波動伝搬理論による予測、多質点系モデルによる予測、FEMによる予測がある。

実験式による予測は、計算が容易であることから、実務に最も良く用いられている。しかし、幾何学的拡散による減衰を表す定数と材料減衰他による過剰減衰を表す量が、建物構造や振動の建物への入力仕方の違いによって、決定方法がまちまちとなっているのが現状である。また、この手法では、振動源の大きさや振動の建物への入力形態によっては建物内の減衰が距離に依存しない事例や、建物全体のモードや端部の反射による影響は表すことができない。

統計的エネルギー解析法(SEA法)は、船舶などの大型鋼構造物における固体音解析に対しては実用化も行われている。しかし、建築構造物は鋼構造物に比較して減衰が大きく要素間の結合も強いので拡散振動場となりにくいことから、SEA法の適用例は少ない。さらに、モード数が少ない周波数領域では精度が悪くなり、一般的には50Hz以下は適用範囲外となる。

波動伝搬理論による予測法は、要素交差部における変位、傾き、力およびモーメントなど系の個々の成分を別々に考える必要があり、建物全体へ適用していくときには複雑さが

増してくるため、実建物に対する適用検討例は未だ発表されていない。さらに、この波動伝搬理論による予測法は、板構造について現在のところ波動の入射条件や共振状態が明確に記述されていないので、複雑な実建物へ適用し精度の良い解を得ることは難しいと思われる。

多質点系モデルによる予測は、建物全体のモデル化が可能であり計算時間も比較的少ない利点があるが、計算可能な周波数範囲が建物モデルのモード数によって決定され、モデル最高次の固有振動数以上の周波数範囲は適用外となる。一般的には、100Hz 以下が適用範囲といえるであろう。

FEMによる予測は、地震応答解析などの構造分野で良く用いられており、また体感振動（50Hz以下の周波数）領域における鉄道振動の建物内伝搬予測に対する適用例はあるが、固体音領域の振動を対象とするには要素数が膨大となるため、現在の計算機の脳力では、建物全体を三次元の立体モデルとして計算を行うことは不可能に近い。

以上、固体音の建物内伝搬性状に関する既往の予測手法について見てきたが、現時点では、地下鉄や鉄道による固体音を対象とする周波数領域（オクターブバンド中心周波数で31.5～250Hz）へ適用し、精度の良い解を得ることができる予測手法は整っておらず、このことがこれらの固体音制御を困難にしている大きな要因となっている。

本研究は、地下鉄や鉄道による固体音の建物内伝搬性状に関して、少ない要素数で高精度な解が求められる手法を開発し、これを実用化することを目的としている。第1章においては、本研究の背景および目的について説明し、地下鉄や鉄道による固体音を対象とする周波数領域（オクターブバンド中心周波数で31.5～250Hz）へ適用し精度の良い解を得ることができる予測手法の確立が必要なことを記述している。

第2章においては、数値計算手法を導く際の基礎事項として、棒要素および平板要素内を伝搬する擬似縦波、曲げ波、剪断波、ねじれ波について説明し、それらの波動方程式を導いている。また、定式化の基礎となるLagrangeの運動方程式について解説を行っている。

第3章においては、棒要素と平板要素中を伝搬する波動について、建物を各要素の組合せでモデル化する場合に都合の良い境界条件を規定し、境界条件を満足する波動方程式の解を求めている。そして、その解とLagrangeの運動方程式を用いて波動に関する運動方程式を導いている。

第4章においては、第3章で求めた運動方程式を建物全体モデルへ適用していく場合に必要となる座標変換と各要素の集合としての運動方程式について説明している。第5章においては、建物モデルによる予測手法の検証を行っている。

検証は、先ず6層建物の骨組み構造模型について、模型実験結果と計算結果の比較を行っている。その際に、模型実験に必要となる模型相似則および材料の物性値、特に材料の損失係数の測定方法について説明を加えている。次に、11層建物の骨組み構造模型について模型実験結果と計算結果の比較を行い、オクターブバンド幅で予測結果を評価する場合には、入力波形の位相は無視しても実務的な範囲での精度は確保できる可能性があること

を示した。さらに、6層の床版付き骨組み構造模型について予測手法の検証を行い、予測手法が有用であることを示している。

第6章においては、鉄骨鉄筋コンクリート造の実建物と鉄骨造の実建物における地下鉄固体音の伝搬性状予測へ本手法を適用し、予測手法が実用性を有することを検証している。

第7章においては、本研究の内容と得られた知見をまとめ、残れした問題点を列挙し、今後の研究の展望について述べている。

論文審査の結果の要旨

建築物における騒音制御問題において近年注目されているのが固体伝搬音制御である。都市の過密化により静寂を必要とする建物と振動を発生しやすい交通機関などが近接して建設されるからである。問題となる固体音（振動）の周波数範囲は地下鉄振動を例にあげれば32Hz～250Hzである。従来からの建物内固体音予測手法としては高い周波数で有効な統計的エネルギー解析法に基づく手法や低周波数域に有効な有限要素法などがあるが、この地下鉄振動の全周波数範囲を扱える手法はなかった。本研究はこの点に着目し、建築物を梁、柱のような棒要素と床、壁のような板要素により構成されるものと解釈し、それぞれ要素の波動的な要素解を用い、エネルギーの次元で定式化されたLagrangeの運動方程式に代入することで建物全体としての運動方程式を定式化した。そしてその方程式を解析し、棒要素の交点における振動レベル予測手法を確立した。その手法による予測値と実際の建築物における実測値とはこの種の予測手法の精度以内でよく一致しており、手法の有効性も確認されている。その研究内容はまず、第1章においては、本研究の背景および目的について説明し、地下鉄や鉄道による固体音を対象とする周波数領域へ適用し、精度の良い解を得ることができる予測手法の確立が必要なことを述べた。

第2章においては、数値計算手法を導く際の基礎事項として、棒要素および平板要素内を伝搬する擬似縦波、曲げ波、剪断波、ねじれ波について説明し、それらの波動方程式を導いた。また、定式化の基礎となるLagrangeの運動方程式について解説を行った。

第3章においては、棒要素と板要素中を伝搬する波動について、建物を各要素の組合せでモデル化する場合に都合の良い境界条件を規定し、境界条件を満足する波動方程式の解を求めた。そして、その解とLagrangeの運動方程式を用いて、波動に関する運動方程式を導いた。

第4章においては、第3章で求めた運動方程式を建物全体モデルへ適用していく場合に必要となる座標変換と各要素の集合としての運動方程式について説明した。

第5章においては、建物模型による予測手法の検証を行った。検証は、まず6層建物の骨組み構造模型について、模型実験結果と計算結果の比較を行った。次に、11層建物の骨組み構造模型について模型実験結果と計算結果の比較を行い、オクターブバンド幅で予測結果を評価する場合には、入力波形の位相は無視しても実務的な範囲での精度は確保できる可能性があることを示した。さらに、6層の床版付き骨組み構造模型について予測手法の検証を行い、予測手法が有用であることを示した。

第 6 章においては、鉄骨鉄筋コンクリート造の実建物と鉄骨造の実建物における地下鉄固体音の伝搬性状予測へ本手法を適用し、予測手法が実用性を有することを検証した。

第 7 章においては、本研究の内容と得られた知見をまとめ、残された問題点を列挙し、今後の研究の展望について述べた。

以上のように、本研究は従来困難とされていた建物内固体音伝搬、特に地下鉄振動のような低周波数域から中周波数域などに分布する固体振動の伝搬予測手法を提案し、その有効性も実証した。よって、審査員全員が本論文は博士論文に値するものと認めた。

最終試験の結果の要旨

最終試験においては、各審査委員から建物構造の板要素に関するモデル化の妥当性、研究成果の設計への実用性等に関する質疑に対し著者から十分な回答が得られた。

また公開発表会には関連分野の専門家を含む多数の参加者を得、著者の発表に対して、基本方程式の定式化の妥当性、実験手法の妥当性、実験結果の信頼性、建築構造のモデル化の妥当性などに関する質疑があり、それぞれについて著者より納得のいく回答が得られた。

よって審査員合議の結果、試験は合格と決定した。

目次

第1章 序論

| | | |
|-----|--------|---|
| 1.1 | はじめに | 1 |
| 1.2 | 研究の目的 | 2 |
| 1.3 | 本研究の概要 | 8 |
| | 参考文献 | 9 |

第2章 予測手法の誘導で基礎となる事項の解説

| | | |
|-------|----------------------------------|----|
| 2.1 | はじめに | 12 |
| 2.2 | エネルギー保存則 | 13 |
| 2.3 | 仮想仕事の原理とD'Alembertの原理に基づく仮想仕事方程式 | 14 |
| 2.4 | 棒要素内を伝搬する波動に関する波動方程式 | 15 |
| 2.4.1 | 棒の変形 | 15 |
| 2.4.2 | 擬似縦波とその波動方程式 | 16 |
| 2.4.3 | 曲げ波とその波動方程式 | 17 |
| 2.4.4 | ねじれ波とその波動方程式 | 20 |
| 2.5 | 平板内を伝搬する波動に関する波動方程式 | 25 |
| 2.5.1 | 平板の変形 | 25 |
| 2.5.2 | 面内方向に変位振幅をもつ波動とその波動方程式 | 27 |
| 2.5.3 | 面外方向に変位振幅をもつ波動とその波動方程式 | 29 |
| 2.6 | Lagrangeの運動方程式 | 31 |
| 2.6.1 | Newtonの運動方程式の問題点 | 31 |

| | | |
|-------|----------------|----|
| 2.6.2 | 一般座標 | 33 |
| 2.6.3 | Lagrangeの運動方程式 | 34 |
| | 参考文献 | 36 |

第3章 境界条件を規定したときの運動方程式

| | | |
|-------|----------------------------|----|
| 3.1 | はじめに | 38 |
| 3.2 | 棒要素内を伝搬する波動に関する運動方程式の誘導 | 39 |
| 3.2.1 | 棒要素に関する座標軸 | 39 |
| 3.2.2 | 擬似縦波に関する運動方程式の誘導 | 39 |
| 3.2.3 | 曲げ波に関する運動方程式の誘導 | 41 |
| 3.2.4 | ねじれ波に関する運動方程式の誘導 | 49 |
| 3.3 | 平板要素内を伝搬する波動に関する運動方程式の誘導 | 51 |
| 3.3.1 | 平板要素に関する座標軸とそのモデル化 | 51 |
| 3.3.2 | 面内方向に変位振幅を持つ波動に関する運動方程式の誘導 | 53 |
| 3.3.3 | 面外方向に変位振幅を持つ波動に関する運動方程式の誘導 | 56 |
| 3.3.4 | 平板要素に関する運動方程式 | 60 |
| | 参考文献 | 63 |

第4章 各要素の建物全体モデルへの適用

| | | |
|-----|---------------------|----|
| 4.1 | はじめに | 64 |
| 4.2 | 建物全体のモデル化 | 65 |
| 4.3 | 要素の座標変換と座標変換後のエネルギー | 66 |
| 4.4 | 建物全体モデルにおける波動の運動方程式 | 69 |
| | 参考文献 | 73 |

第5章 建物模型による予測手法の検証

| | | |
|-------|--------------------------|-----|
| 5.1 | はじめに | 74 |
| 5.2 | 模型実験における相似則 | 74 |
| 5.3 | 材料物性値 | 77 |
| 5.3.1 | 残響法による損失係数の測定 | 77 |
| 5.3.2 | 半値幅法による損失係数の測定 | 78 |
| 5.4 | 6層骨組み構造模型における予測手法の検証 | 81 |
| 5.4.1 | 模型の概要 | 81 |
| 5.4.2 | 模型材料の物性値 | 82 |
| 5.4.3 | 模型実験方法 | 85 |
| 5.4.4 | 計算モデル | 86 |
| 5.4.5 | 計算結果と実験結果の比較 | 89 |
| 5.4.6 | 計算値に対する加振力の影響 | 93 |
| 5.5 | 11層骨組み構造模型における予測手法の検証 | 97 |
| 5.5.1 | 模型の概要 | 97 |
| 5.5.2 | 計算モデル | 98 |
| 5.5.3 | 計算結果と実験結果の比較 | 99 |
| 5.6 | 6層床版付き骨組み構造模型における予測手法の検証 | 105 |
| 5.6.1 | 模型の概要 | 105 |
| 5.6.2 | 計算モデル | 106 |
| 5.6.3 | 計算結果と実験結果の比較 | 107 |
| | 参考文献 | 107 |

第6章 実建物における予測手法の適用

| | | |
|-------|-------------------|-----|
| 6.1 | はじめに | 112 |
| 6.2 | 鉄骨鉄筋コンクリート造建物への適用 | 112 |
| 6.2.1 | 建物概要 | 112 |

| | | |
|-------|--------------|-----|
| 6.2.2 | 計算モデル | 115 |
| 6.2.3 | 固体伝搬音の測定方法 | 116 |
| 6.2.4 | 計算結果と実測結果の比較 | 117 |
| 6.3 | 鉄骨造建物への適用 | 121 |
| 6.3.1 | 建物概要 | 121 |
| 6.3.2 | 計算モデル | 124 |
| 6.3.4 | 計算結果と実測結果の比較 | 125 |
| | 参考文献 | 128 |

第7章 むすび

| | | |
|-----|-------|-----|
| 7.1 | まとめ | 129 |
| 7.2 | 今後の課題 | 130 |
| | 参考文献 | 132 |
| | 謝辞 | 133 |

記号一覧

| | |
|------------------|---------------------|
| B | 棒の曲げ剛性 |
| C | 定数 |
| E | Young率 |
| E_{pot} | ポテンシャルエネルギー |
| E_{kin} | 運動エネルギー |
| F | 力 |
| G | 剪断弾性率 |
| I | 棒の断面二次モーメント |
| M | モーメント |
| S | 棒の断面積 |
| T | 棒のねじれ剛性 |
| W | 仕事量 |
| f | 関数, ばねのHooke力 |
| h | 板の厚さ |
| j | $\sqrt{-1}$ |
| k | 波定数 |
| k_L | 擬似縦波の波定数 |
| k_B | 曲げ波の波定数 |
| k_T | 剪断波の波定数 |
| l | 棒の長さ |
| m | 質量 |
| m' | 棒の単位長さ当たりの質量 (線密度) |
| m'' | 平板の単位面積当たりの質量 (面密度) |
| s | ばねのステイフネス |
| x | 空間座標 |
| y | 空間座標 |
| z | 空間座標 |
| F | 外力のベクトル表示 |
| f | 力のベクトル表示 |
| i | X軸方向の単位ベクトル |
| j | Y軸方向の単位ベクトル |
| k | Z軸方向の単位ベクトル |
| Θ' | 棒の単位長さ当たりの慣性モーメント |
| γ | 剪断歪み |
| ε | 縦歪み |
| η | Y軸方向の変位 |
| θ | 角度 |
| ρ | 密度 (2.4) |
| σ | 垂直応力 |
| ξ | X軸方向の変位 (2.2) |
| ν | Poisson比 |
| τ | 剪断歪み |
| χ | 棒のねじり角 |

第 1 章 序 論

1.1 はじめに

建築における固体伝搬音（以下本論文では固体音と称す）とは、一般的には、ある外力が建築物に作用した場合に発生する振動が建物構造体中を伝搬し、その振動によって床や壁が振動することによって放射される音として定義されているが、狭義には、可聴周波数範囲の構造体を伝搬する振動として定義される¹⁾。この研究においては、建物内を伝搬する可聴周波数範囲の振動および放射された音を固体音と称す。

我が国における建築に関わる固体音の研究は、昭和40年代の高度成長期から建設されるようになった集合住宅における床衝撃音問題を中心として展開されてきた。その間に、人口の都市への集中はますます加速され、都市部においては鉄道や地下鉄網の整備による輸送力の増強が図られてきた。また、音楽ホールや研究施設などに対するニーズも大きく、これらの文化施設の建設も盛んとなったが、土地の高度有効利用や交通の利便性のために、静寂が強く必要とされるこれらの諸施設が地下鉄や鉄道に近接して建設されることも増えてきている。鉄道や地下鉄は加振力として大きな振動源であるため、電車から発生した振動が建物内に伝搬して生じる振動問題だけでなく、振動から二次的に励起される固体音が大きな問題となることも増加してきており、地下鉄や鉄道からの固体音問題が固体音に関する新しい問題としてクローズアップされるようになってきた。

建物を設計するに当たっては、これらの振動および固体音の影響を事前に予測し、必要であれば適切な防音・防振対策を検討する必要がある。振動源である電車から建物への振動伝搬経路は、(1)振動源（軌道，地下鉄構築），(2)地盤伝搬，(3)地盤から建物へ入力する際の損失，(4)建物内伝搬，(5)固体音放射の五ステップに大きく分けられる。各ステップにおける基本的なメカニズムと特性は、これまでの多数の研究によって、大まかには解明されて

きている²⁾。しかし、建物内の伝搬については、実際の建物は様々の大きさと異なる構造が採用されるため、境界条件や波動が伝搬する媒質は建物毎に異なってくる。さらに、建物構造体中を伝搬する波動は多種類であり、波動は構造体を伝搬している過程でその形態を変化させるので、固体音の建物内伝搬性状の予測は非常に複雑な問題である。また、縮尺模型を用いた模型実験は固体音に関しては実物との整合性に多くの問題が残されており、模型実験による建物内の固体音予測は実用的ではない。これらのことから、現状では、汎用性のある精度の良い予測手法は整っておらず³⁾、このことが、鉄道や地下鉄振動の建物に対する影響評価ならびに固体音の制御を困難にしている大きな要因となっている。

本論文では、地下鉄や鉄道による固体音を予測する上で、予測精度に大きく影響する項目の一つである建物内伝搬を取り上げ、伝搬性状の予測手法について述べる。

1.2 研究の目的

電車から建物への固体音の伝搬経路は、図1.2.1に示すように、

- (1)振動源（軌道，地下鉄構築）
- (2)地盤伝搬
- (3)地盤から建物へ入力する際の損失
- (4)建物内伝搬
- (5)床スラブなどの応答と固体音放射

の五ステップに大きく分けられる。

筆者等は、これまでに上記の各伝搬経路について研究を行い、地下鉄や鉄道からの固体音予測システムを構築してきた^{4),5),6),7)}。この固体音予測システムは、図1.2.2に示すフローで予測を行っている。

各ステップにおける予測は未だ万全なものではなく様々な問題点を抱えているが、特に建物内の伝搬については、予測できる周波数範囲に限界があり、このことが、鉄道や地下鉄振動の建物に対する影響評価ならびに固体音の制御を困難にしている大きな要因となっている。

そこで、本研究は、地下鉄や鉄道による固体音を予測する上で、予測精度に大きく影響する項目の一つである建物内伝搬の予測手法を対象として研究を行っている。

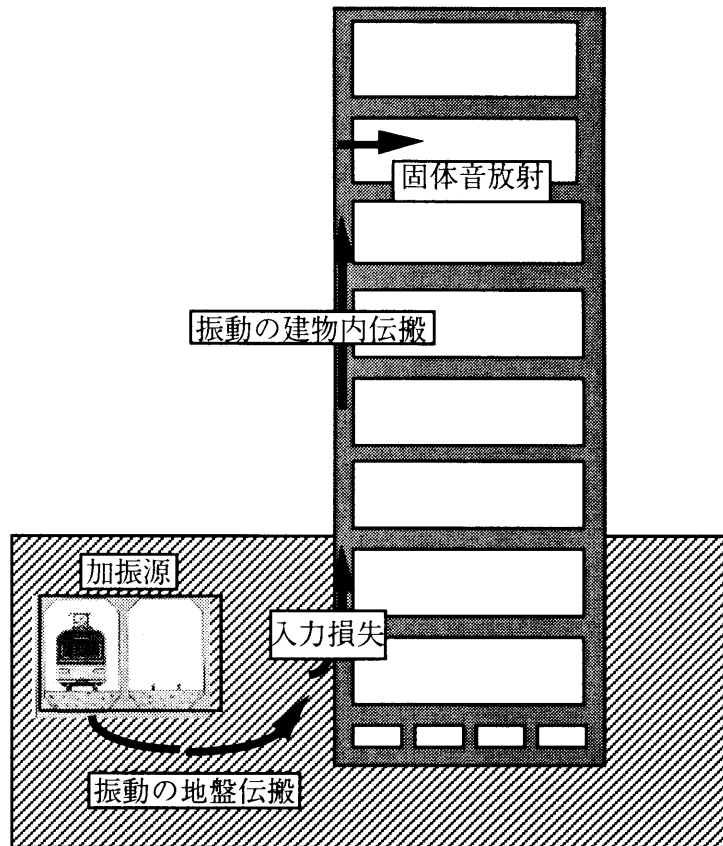


図1.2.1 固体音の伝搬経路

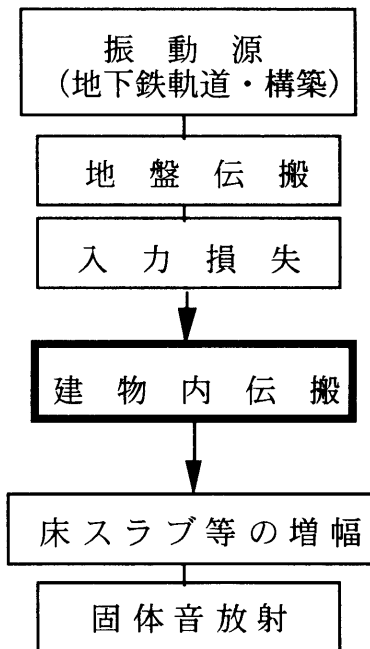


図1.2.2 予測システムのフロー

本研究の目的は、図1.2.2に示した固体音予測システムのフロー図において、固体音の建物内伝搬予測を行い、床スラブなどの応答と固体音放射の計算³⁾をするための入力特性を決定する手法を確立し、これを実用化することを目的とする。

図1.2.3は、地下鉄構築（土被り60cm）から水平距離2m, JR線から約70m離れた地表面における電車通過時のX方向（構築に直交方向）とZ方向（鉛直方向）の振動加速度レベルを1/3オクターブバンド分析した結果である^{4),7)}。データは、新宿方面行き電車、池袋方面行き電車およびJR線それぞれについて、測定した電車の中で加速度レベルが大きい電車5台のレベル幅を示している。図1.2.3から、鉛直方向の振動は水平方向の振動よりも大きく、鉛直方向の振動加速度レベルの卓越周波数は31.5～80Hzにあると言える。これらの特性は日本全国ほぼ共通の特性であるので、地下鉄や鉄道による固体音で取り扱う周波数は、オクターブバンド中心周波数で31.5～250Hzの周波数帯域が対象となる。

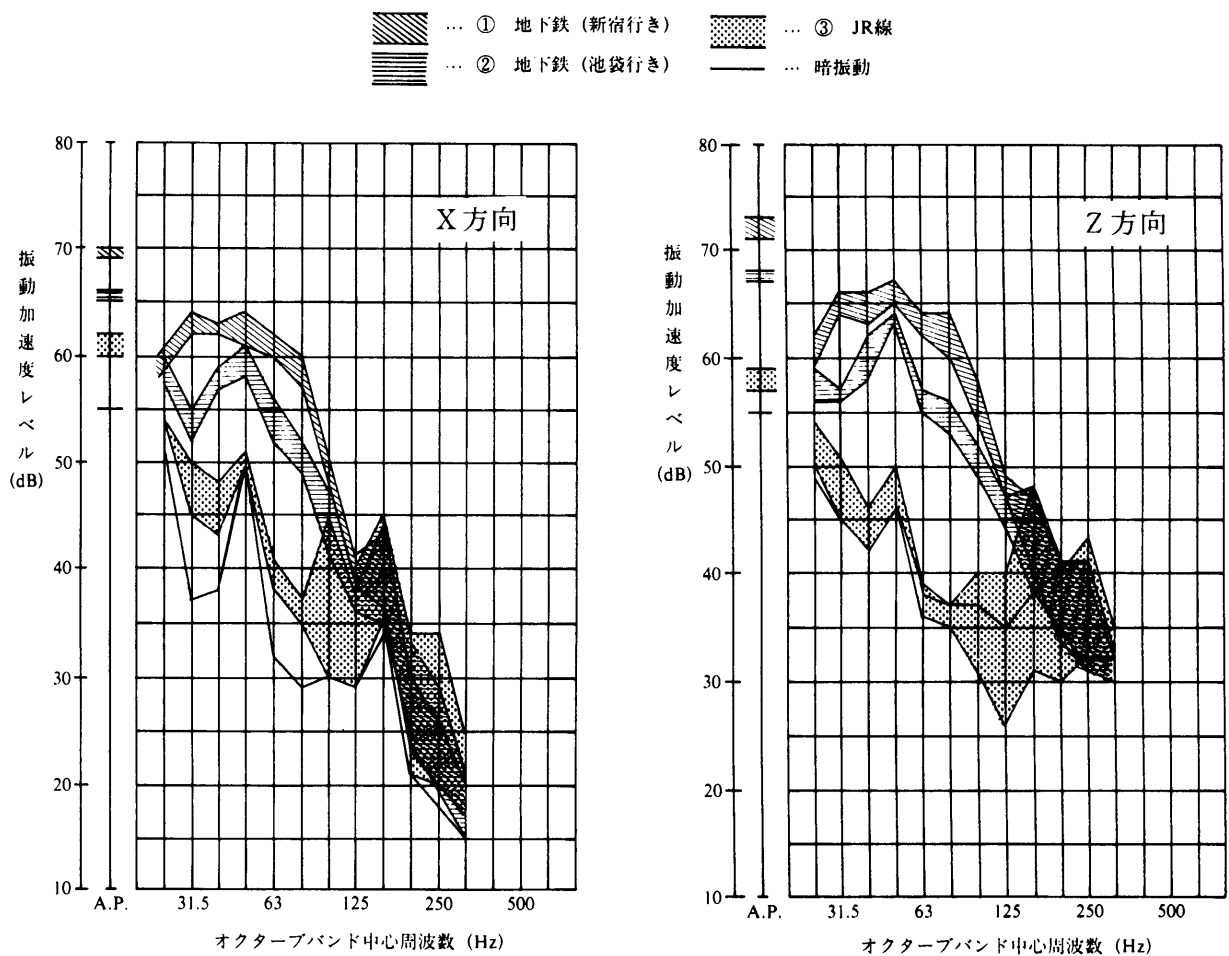


図1.2.3 地表面における地下鉄振動の振動加速度レベル

固体音の建物内伝搬性状に関する既往の予測手法を分類すると、表1.2.1のようである。

表1.2.1 建物内における固体音の予測に関する既往の手法

| 予測手法 | 手法の概要 | 出力情報 | 問題点 |
|------------------------|---|---|---|
| 実験式による予測 | <p>実験式</p> $L=W-20\log r+M$ <p>による予測</p> <p>L:振動加速度レベル</p> <p>W:振動源の出力</p> <p>r:振動源と測定点の距離</p> <p>M:構造体の内部損失などによる余剰減衰</p> | <p>相対減衰量または振動加速度レベル</p> <p>位相情報なし。</p> | <p>Mの建物構造および形状による違いについて、未だデータ蓄積および検討が不十分である。</p> <p>共振や端部の反射の影響などは考慮されない。</p> |
| 統計的エネルギー解析法(SEA法)による予測 | <p>建物の構成要素である床、壁、室を1要素として分割し、各要素間のエネルギー流を未知数とする連立方程式によって、各要素が所有するエネルギーを求める。</p> | <p>相対減衰量または振動加速度レベル</p> <p>位相情報なし。</p> <p>音圧レベル</p> | <p>モード数の少ない低周波数域の解析はできない。</p> <p>要素間の結合損失係数（エネルギー伝達率）に関するデータが蓄積されていない。</p> |
| 波動伝搬理論による予測 | <p>建物構造構成要素の交差部での波動の反射、透過現象の解析結果を利用。建物各交差部における波動の反射率および透過率を未知数とする連立方程式によって、波動の建物内伝搬の解析を行う。</p> | <p>相対減衰量または振動加速度レベル</p> <p>位相情報あり。</p> | <p>理想化された縮尺模型に対しての適用および実験結果との比較検討しか行われていない。実建物へ適用したときの予測精度は検証されていない。</p> |
| 多質点系モデルによる予測 | <p>柱、梁をバネとみなし、各階を質点としてモデル化して計算する手法。</p> | <p>相対減衰量または振動加速度レベル</p> <p>位相情報あり。</p> | <p>モデル化分割数によってその固有値の数が限定される。</p> <p>モデルの最高次数の固有振動数よりも高い周波数の応答は求められない。</p> |
| 有限要素法(FEM)による予測 | <p>建物構造体を微小要素に分割し、要素の運動方程式から全体の連立方程式を作成し、解析を行う手法。</p> | <p>相対減衰量または振動加速度レベル</p> <p>位相情報あり。</p> | <p>波長に比べて微小であるとみなせるまで要素を分割する必要がある、現時点では高周波数帯域の解析は計算機の性能上困難である。</p> |

実験式による予測は、松田他が提案した予測式⁸⁾を基にしている。松田他は、波動が伝搬する建物構造体の構成要素は床・壁の平面要素が支配的であるとみなして、点加振源によって発生した振動エネルギーは幾何減衰と材料減衰によって伝搬過程で減衰していくとして、振動源から r (m) 点の振動加速度レベル VAL (dB) は、式(1.2.1) で表されるとした。

$$VAL = W - N \log r - Mr = W - N \log r - \alpha \sqrt{fr} \quad (1.2.1)$$

式(1.2.1)において、 W は加振源の出力、 N は幾何学的拡散による減衰を表す定数である。また、 M は材料減衰他による過剰減衰を表す量であり、周波数 f に依存する。

この手法は、計算が容易であることから、実務に最も良く用いられており、実際に建設された建物における測定結果を式(1.2.1)を用いて整理した結果も多数報告されている。しかし、この手法は N と M もしくは α について汎用性のある決定方法が確立されていないことに問題点を残している。 N については、松田⁸⁾や井上⁹⁾は木槌による加振を行い $N=20$ で建物内の減衰を評価している。同様に、平松^{10),11)}は加振機によるスイープ加振を行い $N=20$ を用いてデータを整理している。それに対して、麦倉¹²⁾他は掛け矢による衝撃加振による建物内の減衰は $N=10$ で評価している。また、蓮田¹³⁾他は駅ビルにおいてボーリングのボールを用いた打撃加振を行い、 $N=10$ を用いて建物内の減衰性状を評価し、その結果を用いて駅ビルにおける列車振動伝搬の予測を行っている。以上のように、現時点では、 N の値は10とするものと20とするものの二派に分かれている。

α については、松田⁹⁾はSRC造の建物における測定から $\alpha=0.03$ であるとしている。麦倉¹²⁾はS造の建物での測定から $\alpha=0.05$ であるが63~80Hzでは0.05よりも大きいとしている。また蓮田¹³⁾は、 α は周波数によってかなりばらつくが、上下振動と水平振動では明らかに差があり、上下振動の α は水平振動の1/2となっており、16~125Hzでは概ね水平振動 $\alpha=0.08$ 、上下振動 $\alpha=0.04$ 程度であるとしている。

以上のように、 N と M もしくは α についてデータ蓄積が未だ十分でないため、建物構造や振動の建物への入力仕方の違いによって、その値の決定方法がまちまちとなっているのが現状である。また、この手法では、振動源の大きさや振動の建物への入力形態によっては建物内の減衰が距離に依存しない事例や、建物全体のモードや端部の反射による影響は表すことができない。

統計的エネルギー解析法 (SEA法) はLyon他によって提案された手法¹⁴⁾である。SEA法は、拡散振動場を仮定し、構造物を動的性状が一様であるとみなされる要素の集合として考え、要素内におけるパワーは以下の2法則に従うものとして取り扱い、系全体のパワー平衡条件を導

いている。(1)要素内で減衰するパワは要素のもつエネルギーに比例する。(2)要素間のパワ流は要素間のエネルギー差に比例するパワがモードエネルギーの高い方から低い方へ流れる。

SEA法は、船舶などの大型鋼構造物における固体音解析に対しては、入江他¹⁵⁾によってSEA法の適用と予測精度向上のための研究がなされ、実用化も行われた。しかし、建築物における固体音解析については、RC構造物は鋼構造物に比較して減衰が大きく要素間の結合も強いので拡散振動場となりにくいことから、SEA法の適用例^{16)・17)}は少ない。

峯村¹⁸⁾は、従来のSEA法に直接波振動成分を加えることによって、拡散状態にない系に対してもSEA法が適用できるように拡張し、建築物における固体音解析を行っている。その結果、拡張SEA法と従来のSEA法の差は最大10dB認められ、予測精度の向上が図られたとしている。

SEA法は1要素の大きさを大きくできるので、有限要素法に比べて小さい要素数で建物全多をモデル化することが可能である。しかし、モード数が少ない周波数領域では精度が悪くなり、一般的に50Hz以下は適用範囲外となる。

波動伝搬理論による予測法は、梁もしくは平板の交差部について変位および傾きの連続条件式、力およびモーメントの釣合条件式から、交差部における波動の透過・反射率を求める手法¹⁹⁾である。単体の基本的な交差部について、藤原²⁰⁾は波動が垂直入射した場合の解析結果を示し、田中²¹⁾は斜入射の場合について解析を行っている。田中²²⁾は、骨組み構造の建物模型について、波動伝搬理論を用いた解析結果と模型実験結果の比較を行っている。解析は、柱や梁などの理想化された交差部における波動の複素反射率および透過率をパラメータとして、波動（曲げ波、縦波、横波およびねじれ波）の形態変化と多重反射を導入することによって、各点の周波数応答関数を求めている。しかし、波動伝搬理論による予測は、要素交差部における変位、傾き、力およびモーメントなど系の個々の成分を別々に考える必要があり、建物全体へ適用していくときには複雑さが増してくるため、実建物に対する適用検討例は未だ発表されていない。さらに、この波動伝搬理論による予測法は、板構造について現在のところ波動の入射条件や共振状態が明確に記述されていないので、複雑な実建物へ適用し精度の良い解を得ることは難しいと思われる。

多質点系モデルによる予測は、建物の柱、梁をばねとみなし各階を質点として建物をモデル化し計算する手法である。中村他⁵⁾はバネ剛性として柱の軸剛性を用い、各階1質点（上下方向の1自由度モデル）の多質点系モデルで建物をモデル化し、地下鉄振動の建物内伝搬

予測おこない、実測値と良く対応している予測結果を示している。この手法は建物全体のモデル化が可能であり計算時間も比較的少ない利点があるが、計算可能な周波数範囲が建物モデルのモード数によって決定され、モデル最高次の固有振動数以上の周波数範囲は適用外となる。一般的には、100Hz以下が適用範囲といえるであろう。

FEMによる予測は、地震応答解析などの構造分野で良く用いられており、また体感振動（50Hz以下の周波数）領域における鉄道振動の建物内伝搬予測に対する適用例¹³⁾もある。しかし、固体音領域の振動を対象とするには要素数が膨大となるため、現在の計算機の能力では、建物全体を三次元の立体モデルとして計算を行うことは不可能に近い。

以上、固体音の建物内伝搬性状に関する既往の予測手法について見てきたが、現時点では、地下鉄や鉄道による固体音として対象とされる周波数領域（オクターブバンド中心周波数で31.5～250Hz）へ適用し精度の良い解を得ることができる予測手法は整っておらず、このことが、これらの固体音制御を困難にしている大きな要因となっている。

ここに本研究の意義があり、本研究の成果は予測システムの精度向上、ひいては固体音制御に大いに役立つものと思われる。

1.3 本研究の概要

本研究は、地下鉄や鉄道による固体音の建物内伝搬性状に関して、少ない要素数で高精度な解が求められる手法を開発し、これを実用化することを目的としている。

予測手法は、建物を梁要素と平板要素の集合としてモデル化し、各要素中を伝搬する擬似縦波、曲げ波、剪断波およびねじれ波を定式化している。定式化は、Lagrangeの運動方程式を用いてエネルギー平衡条件を満足する運動方程式をもとめ、これを境界条件として規定された変数を座標とする一般座標系に展開し、最終的にこれらの変数を未知数とする運動方程式を導いている。

建物の骨組み構造模型および床版付き骨組み構造模型について、本手法による解析結果と模型実験結果を比較し、予測手法の検証を行った。さらに、実建物について実測結果と予測結果の対比から、予測手法の実用性を確かめた。

第1章においては、本研究の背景および目的について説明し、地下鉄や鉄道による固体音として対象とされる周波数領域（オクターブバンド中心周波数で31.5～250Hz）へ適用し

精度の良い解を得ることができる予測手法の確立が必要なことを記述している。

第2章においては、数値計算手法を導く際の基礎事項として、梁要素および平板要素内を伝搬する擬似縦波、曲げ波、剪断波、ねじれ波について説明し、それらの波動方程式を導いている。また、定式化の基礎となるLagrangeの運動方程式について解説を行っている。

第3章においては、梁要素と平板要素中を伝搬する波動について、建物を各要素の組合せでモデル化する場合に都合の良い境界条件を規定し、境界条件を満足する波動方程式の解を求めている。そして、その解をLagrangeの運動方程式を用いて波動に関する運動方程式を導いている。

第4章においては、第3章で求めた運動方程式を建物全体モデルへ適用していく場合に必要となる座標変換と各要素の集合としての運動方程式について説明している。

第5章においては、建物模型による予測手法の検証を行っている。

検証は、先ず6層建物の骨組み構造模型について、模型実験結果と計算結果の比較を行っている。その際に、模型実験に必要となる模型相似則および材料の物性値、特に材料の損失係数の測定方法について説明を加えている。次に、11層建物の骨組み構造模型について模型実験結果と計算結果の比較を行い、オクターブバンド幅で予測結果を評価する場合には、入力波形の位相は無視しても実務的な範囲での精度は確保できる可能性があることを示した。さらに、6層の床版付き骨組み構造模型について予測手法の検証を行い、予測手法が有用であることを示している。

第6章においては、鉄骨鉄筋コンクリート造の実建物と鉄骨造の実建物における地下鉄固体音の伝搬性状予測へ本手法を適用し、予測手法が実用性を有することを検証している。

第7章においては、本研究の内容と得られた知見をまとめ、残された問題点を列挙し、今後の研究の展望について述べている。

参考文献

1)日本音響学会編：音響用語辞典,p.195,(1988)

2)日本建築学会環境工学委員会：固体音防止設計における予測法の現状と今後の課題,音環境運営委員会94-2資料,(1994)

- 3) 藤原恭司：建物内の固体音伝搬特性,日本音響学会誌,Vol.50,No.4,p.319~324,(1985)
- 4) 吉原醇一,縄岡好人 他：地下鉄振動の伝搬性状に関する研究(その1)地盤の振動伝搬性状について,大林組技術研究所報,No.42,p.27~36,(1991)
- 5) 吉原醇一,中村充 他：地下鉄振動の伝搬性状に関する研究(その2)建物への入力損失効果,建物内の伝搬について,大林組技術研究所報,No.43,p.21~28,(1991)
- 6) 縄岡好人,吉原醇一 他：地下鉄振動の伝搬性状に関する研究(その3)電車固体伝搬音の建物内伝搬性状と予測システム全体のまとめ,大林組技術研究所報,No.44,p.39~44,(1992)
- 7) 縄岡好人,平野滋 他：地下鉄振動の伝搬性状に関する研究(その4)地下鉄構築直上の建物における地下鉄固体伝搬音対策,大林組技術研究所報,No.49,p.51~54,(1994)
- 8) 松田由利,橘秀樹 他：建物構造体中における固体音の伝搬性状,日本音響学会誌,Vol.35,No.11,p.609~615,(1979)
- 9) 木村翔,井上勝夫 他：1/2縮尺構造体模型を用いた固体音伝搬特性に関する検討,日本建築学会大会学術講演梗概集,p.45~46,(1886年8月)
- 10) 平松友孝,坂本真也 他：梁を持つ床スラブにおける固体伝搬音の伝搬特性実測例,日本建築学会大会学術講演梗概集,p.373~374,(1888年10月)
- 11) 平松友孝,小堺裕司 他：梁を持たない床スラブにおける固体伝搬音の伝搬特性実測例,日本建築学会大会学術講演梗概集,p.375~376,(1888年10月)
- 12) 麦倉喬次,古澤隆彦 他：建物躯体中の固体音伝搬性状に関する研究(その2)固体音伝搬減衰特性と伝搬速度,鹿島建設技術研究所年報,Vol.31,p.191~196,(1983)
- 13) 蓮田常雄,藤井光治郎 他：線路上空利用建物の騒音振動予測,鉄道総研報告,Vol.7,No.10,p.39~46,(1993)
- 14) R.H.Lyon : Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems,MIT Press,1975
- 15) 入江良彦：SEA法による固体音解析法,三菱重工技報,Vol.21,No4,(1984)
- 16) 藤原恭司,杉木陽次：SEA法による建築物内における固体音伝搬特性の解析,日本音響学会講演論文集,p.635~636,(1988年10月)
- 17) 田辺修吾,真田政信：拡張SEAによるRC造多層建築構造物の躯体振動伝搬解析,日本音響学会講演論文集,p.663~664,(1985年10月)
- 18) 峯村敦雄：建物躯体内振動伝搬特性予測における拡張された統計的エネルギー解析法(SEA)の適用に関する研究,千葉工業大学博士学位論文,(1994年12月)
- 19) L.Cremer,M.Heckl : Structure-borne Sound,Springer-Verlag,p.342~370,(1988)

20)藤原恭司：ブロッキングマスを有する結合部での固体音伝搬,日本音響学会建築音響研究会資料81-11,(1981)

21)田中洪：壁体と床板の交叉部における斜入射曲げ波の伝搬について,日本音響学会建築音響研究会資料81-12,(1981)

22)田中治, 久我新一：3次元直交交差部における曲げ波, 縦波およびねじれ波の伝搬性状の解析,日本建築学会計画系論文集, No.389, p.10~19,(1989)

第 2 章 予測手法の誘導で基礎となる 事項の解説

2.1 はじめに

本章は、第 3 章以降で記述する予測手法の基礎となっている事項について解説する。

建築物は、柱・梁のような棒要素と壁・床のような平板要素の組み合わせで構成されているものが大部分である。したがって、建物は棒要素と平板要素の集合としてモデル化することが可能である。このような建築物内を伝搬する波動の種類は、棒要素では、擬似縦波、曲げ波そしてねじれ波が重要な波動である。また、平板要素では、擬似縦波、剪断波そして曲げ波が重要である^{1),2)}。擬似縦波は圧縮波であり、微小部分の変位の方向が波の伝搬方向と同じ波動である。建築物を構成する棒要素や平板要素は、少なくとも一方向の寸法が縦波の波長よりも小さいので、軸方向で引っ張りがあると断面方向では圧縮が生ずる。そのため、無限大の固体中の縦波と区別する目的で、擬似縦波と称する¹⁾。曲げ波は、棒や平板の曲げ変形が伝搬する波動であり、無限大の固体中には生じない波動である。曲げ波は面に垂直な方向に変位が生ずるので、固体音の放射に最も関係が深い波動である。ねじれ波は、棒材における剪断波の一種であり、ねじりモーメントが作用したときに生ずるねじれ変形が伝搬する波である。平板における剪断波(横波)は、剪断変形(形の変形)が伝搬する波動であり、体積変化は生じない。剪断波の変位の方向は、伝搬方向に垂直である。

本章では、これらの波動に関する波動方程式と境界条件は、仮想仕事方程式を用いて導かれることを解説している。そのため、まず 1 自由度の質点・ばね系を例として、エネルギー保存則と仮想仕事の原理について述べ、次に仮想仕事の原理から導かれる仮想仕事方程式について説明している。

また、第 3 章以降で波動に関する運動方程式を誘導するのに用いる Lagrange の運動方程式について解説している。そこでは、Newton の運動方程式についての問題点を挙げ、建物

を立体的なモデルとして取り扱う場合には、Lagrangeの運動方程式がNewtonの運動方程式よりも適していることを説明している。

2.2 エネルギー保存則

図2.2.1のような1自由度質点・ばね系を考える。

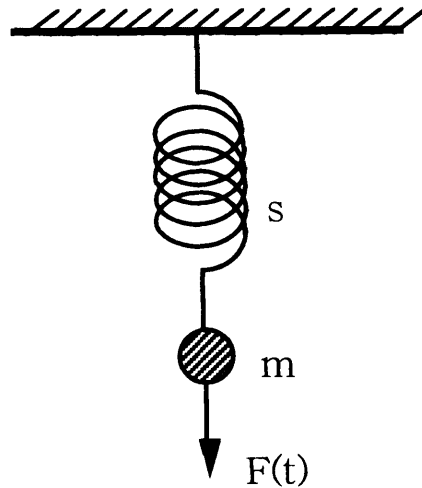


図2.2.1 1自由度質点・ばね系

質量 m の質点が外力 $F(t)$ の作用によって変位 $\xi(t)$ を受けているとする。ばねが線形であれば、Newtonの運動の第2法則とHookeの法則から、系の平衡条件式は式(2.2.1)で表される。

$$m\ddot{\xi} + s\xi = F(t) \quad (2.2.1)$$

式(2.2.1)の両辺に $\dot{\xi}$ を掛けて t で積分する。

$$\begin{aligned} m \int \ddot{\xi} \dot{\xi} dt + s \int \xi \dot{\xi} dt &= \int F(t) \dot{\xi} dt \\ \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} s \xi^2 &= \int F(t) \dot{\xi} dt + C \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

式(2.2.2)の左辺第1項は運動エネルギー、第2項はばねに蓄えられる歪みエネルギー(ポテンシャルエネルギー)である。また、右辺の第1項は $t=0$ からいままでに外力 $F(t)$ がなした仕事量を表している。

外力が作用しない場合は、 $F(t)=0$ であるから、運動エネルギーを E_{kin} 、ポテンシャルエネル

ギを E_{pot} で表すと、式(2.2.3)が得られる。Cは積分定数であり、 $t=0$ の時の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和である。

$$E_{kin} + E_{pot} = C \quad (2.2.3)$$

式(2.2.3)はエネルギーの保存則(外力の作用がない場合は運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は一定である)を表している^{1),2),3)}。

2.3 仮想仕事の原理とD'Alembertの原理 に基づく仮想仕事方程式

仮想仕事の原理は、力学における静的な平衡について、Bernoulliによって示された原理である³⁾。仮想仕事の原理には、仮想変位の概念が導入されている。仮想変位は、実際の変位ではなく、系がわずかに変位を受けた状態を想像して考えられた座標の微小変分であり、時間変化は生じない。仮想変位が生ずるときには時間は変化しないことを強調する目的で、仮想変位には記号 δ が用いられる。

前節と同様に、図2.2.1に示す線形ばねが外力 $F(t)$ の作用によって $\xi(t)$ だけ伸びて釣り合っている場合を考える。ある時刻 t におけるばねの静的な釣り合いは式(2.3.1)で示される。

$$F(t) - s\xi(t) = 0 \quad (2.3.1)$$

D'Alembertは、弾性体が物体力を受けて静的に釣り合っているときに、その平衡条件式が求められたならば、物体力に慣性力(質点の加速度と質量の積にマイナス符合を付けた量)を加えることによって、静的な平衡条件式を動的な平衡条件式として取り扱えることを提唱した⁴⁾。これをD'Alembertの原理という。

D'Alembertの原理に基づいて、静的な平衡条件式である式(2.3.1)に慣性力を加えると式(2.3.2)が得られ、式(2.2.1)と同様の結果となる。

$$m\ddot{\xi} + s\xi - F = 0 \quad (2.3.2)$$

式(2.3.2)の両辺に仮想変位 $\delta\xi$ を掛ける。

$$(m\ddot{\xi} + s\xi - F)\delta\xi = 0$$

あるいは、仮想変位 $\delta\xi$ に基づく仮想ポテンシャルエネルギーを δE_{pot} 、外力と慣性力の仮想仕事を δW とすると

$$\delta W = (F - m\ddot{\xi})\delta\xi$$

$$\delta E_{pot} = \delta \left(\frac{1}{2} s \xi^2 \right) = s \xi \delta \xi$$

であるから、式(2.3.3)は式(2.3.4)のように書き替えられる。

$$\delta E_{pot} - \delta W = 0 \quad (2.3.4)$$

式(2.3.4)は任意の時刻 t における質点の運動方程式と等価な方程式であり、仮想仕事方程式という⁴⁾。

2.4 棒要素内を伝搬する波動に関する波動方程式

2.4.1 棒の変形^{1),3)}

図2.4.1のような棒を考える。

棒は、断面積を S 、長さを l 、密度を ρ 、Young率を E 、Poisson比を ν で表す。座標軸は棒の片端に原点をとり、左手座標系にしたがって直角座標系を設定する。回転角については、各座標軸回りで反時計回りを正とする。

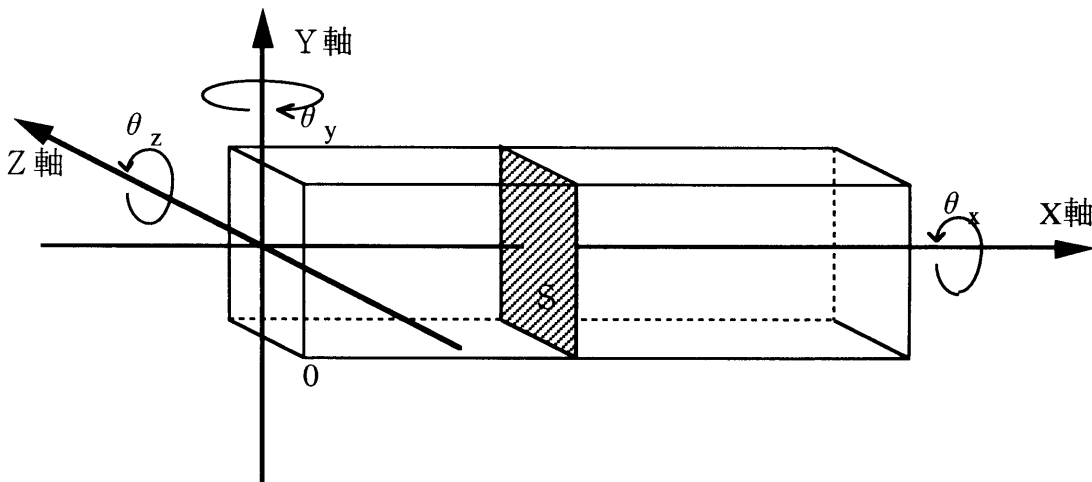


図2.4.1 棒に関する座標軸

棒の力学的変形は、軸方向(X軸方向)の引っ張りおよび圧縮変形、鉛直方向(Y軸方向)および水平方向(Z軸方向)の曲げ変形、そしてX軸回りのねじれ変形がある。これらの変形に

関連して、擬似縦波、曲げ波およびねじれ波が発生し伝搬して行く。

2.4.2 擬似縦波とその波動方程式^{1),2),3)}

棒は一次元要素であり、任意の点における X 軸方向の変位 ξ は同一断面内で一定である。

図2.4.2に示す棒の微小部分を考える。

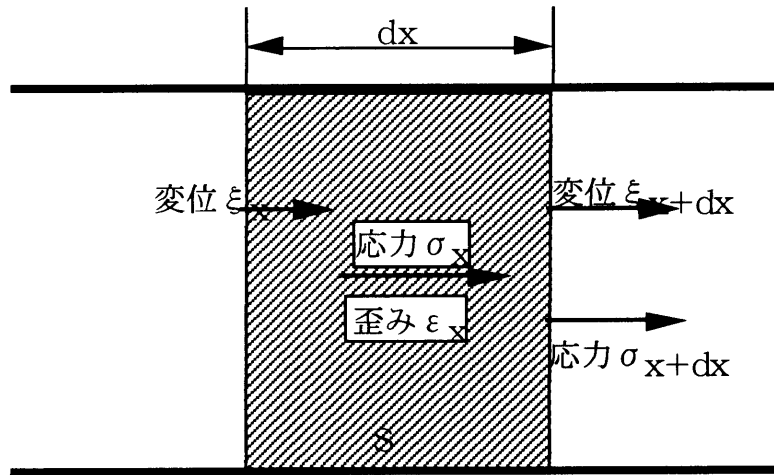


図2.4.2 棒の微小部分に働く変位と力

変位 ξ に対応する歪みは式(2.4.1)で表される。

$$\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.4.1)$$

この歪みに対応する応力は、棒材のYoung率 E を用いて、式(2.4.2)で与えられる。

$$\sigma_x = E\epsilon_x \quad (2.4.2)$$

棒の歪みエネルギーは式(2.4.3)で示され、慣性力による仮想仕事は式(2.4.4)で示されるので、仮想仕事方程式は式(2.4.5)で表される。

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2} \iiint \sigma_x \epsilon_x \, dx dy dz \\ &= \frac{ES}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

$$\delta W = - \int_0^l \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi \, dx \quad (2.4.4)$$

$$\begin{aligned}
\delta E_{pot} - \delta W &= \delta \left(\frac{ES}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx \right) + \int_0^l \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi dx \\
&= S \int_0^l \left(E \frac{\partial \xi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi \right) dx \\
&= \left[ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \delta \xi \right]_0^l - S \int_0^l \left(E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) \delta \xi dx = 0 \quad (2.4.5)
\end{aligned}$$

式(2.4.5)が常に成立するためには被積分関数が0である必要があるので、棒内を伝搬する擬似縦波の波動方程式は式(2.4.6)で示される。

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.4.6)$$

すなわち、擬似縦波は圧縮波であり、微小部分の変位の方向が波の伝搬方向と同じ波動である。建築物を構成する棒要素や平板要素は、少なくとも一方向の寸法が縦波の波長よりも小さいので、軸方向で引っ張りがあると断面方向では圧縮が生ずる。そのため、無限大の固体中の縦波と区別する目的で、擬似縦波と称する¹⁾。

要素両端における境界条件は式(2.4.7)で表される。

$$ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \delta \xi = 0 \quad (2.4.7)$$

境界条件は、下記の(1)または(2)が必要であることを意味している。

(1)両端の変位 ξ が定数として規定されている

$$d\xi = 0$$

(2)両端の断面に働く合力は釣り合っている

$$ES \frac{\partial \xi}{\partial x} = \sigma_x S = 0$$

2.4.3 曲げ波とその波動方程式^{1),2),3)}

図2.4.3のように曲げ波によってたわみが生じている棒の微小要素を考える。XX'は中立軸であり、応力はなく伸張圧縮は生じない。それに対して、ABは圧縮を受け、CDは伸張を受ける。

たわみ角 θ は微小であるから、Y 軸方向の変位を η とすると式(2.4.8)が成立する。

$$\tan \theta = \frac{\partial \eta}{\partial x} \approx \theta \quad (2.4.8)$$

したがって、 $d\theta$ は式(2.4.9)で表される。

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx \quad (2.4.9)$$

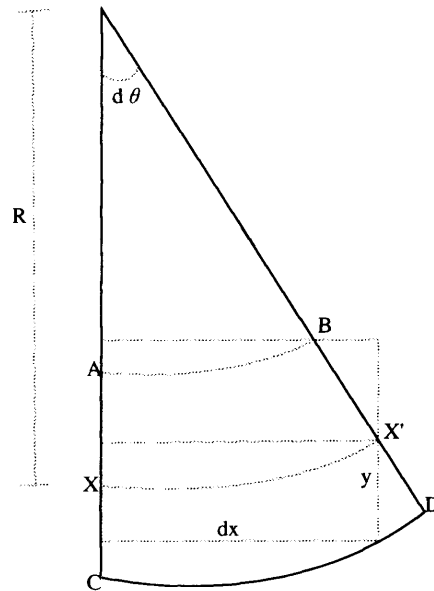


図2.4.3 棒の微小要素の曲げ波による変形

また、 $\overline{XX'}=dx$ とみなせるから曲率半径をRとすると式(2.4.10)が成立し、中立軸からy離れた層EFについてX軸方向の伸張を $d\varepsilon$ とすると式(2.4.11)が成立する。

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{\overline{XX'}} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.4.10)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{-d\varepsilon}{y dx} = -\frac{1}{y} \varepsilon_x \quad (2.4.11)$$

式(2.4.10)と(2.4.11)からX軸方向の歪みは式(2.4.12)で表されるので、応力は式(2.4.13)で表される。

$$\varepsilon_x = -y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.4.12)$$

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.4.13)$$

曲げ波による棒の歪みエネルギーは式(2.4.14)で示される。式(2.4.14)において、 I_y は棒の断面二次モーメントであり式(2.4.15)で与えられる。

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2} \iiint \sigma_x \varepsilon_x dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \iiint \left(y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} EI_y \int_0^l \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

$$I_y = \iint y^2 dy dz \quad (2.4.15)$$

慣性力による仮想仕事は、式(2.4.4)と同様にして式(2.4.16)で示されるので、仮想仕事方程式は式(2.4.17)で表される。

$$\delta W = - \int_0^l \rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta \eta dx \quad (2.4.16)$$

$$\begin{aligned} \delta E_{pot} - \delta W &= \delta \left(\frac{EI_y}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 dx \right) + \int_0^l \rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta \eta dx \\ &= \int_0^l \left(EI_y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta \eta \right) dx \\ &= \left[EI_y \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \delta \eta \right) \right]_0^l + \int_0^l \left(EI_y \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \delta \eta dx = 0 \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

式(2.4.17)が常に成立する条件は被積分関数 = 0 であるので、棒内を伝搬する曲げ波の波動方程式は式(2.4.18)で示される。すなわち、曲げ波は、棒や平板の曲げ変形が伝搬する波動であり、無限大の固体中には生じない波動である。曲げ波は面に垂直な方向に変位が生ずるので、固体音の放射に最も関係が深い波動である。

$$EI_y \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = -\rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (2.4.18)$$

また、要素両端における境界条件は式(2.4.19)で表される。

$$EI_y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{および} \quad EI_y \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \delta \eta = 0 \quad (2.4.19)$$

式(2.4.19)において、断面に作用するモーメント M および剪断力 F を用いると、

$$M = EI_y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$F = -\frac{\partial M}{\partial x} = EI_y \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$$

であるから、境界条件は下記の(1)および(2)で与えられる。

(1)断面のたわみ角が規定されているかまたは曲げモーメント $= 0$

$$M \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0$$

(2)断面のたわみが規定されているかまたは剪断力 $= 0$

$$F \delta \eta = 0$$

上記の二つの境界条件を組み合わせることによって下記の代表的な境界条件が導かれる。

(1)固定 : $\eta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$

(2)単純支持 : $\eta = 0, \quad M = 0$

(3)自由 : $M = 0, \quad F = 0$

2.4.4 ねじれ波とその波動方程式^{1),5)}

図2.4.4のように、長さ l の棒の一端が YZ 平面に固定されており、他端にねじれモーメント M が作用した場合について考える。

このねじれモーメントによって棒は螺旋状に変形し、棒の任意断面のねじり角 χ は、固定端からの距離に比例すると考えられるので、単位長さ当たりのねじれ角を θ とすると、式(2.4.20)で表される。

$$\chi = \theta x = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) x \tag{2.4.20}$$

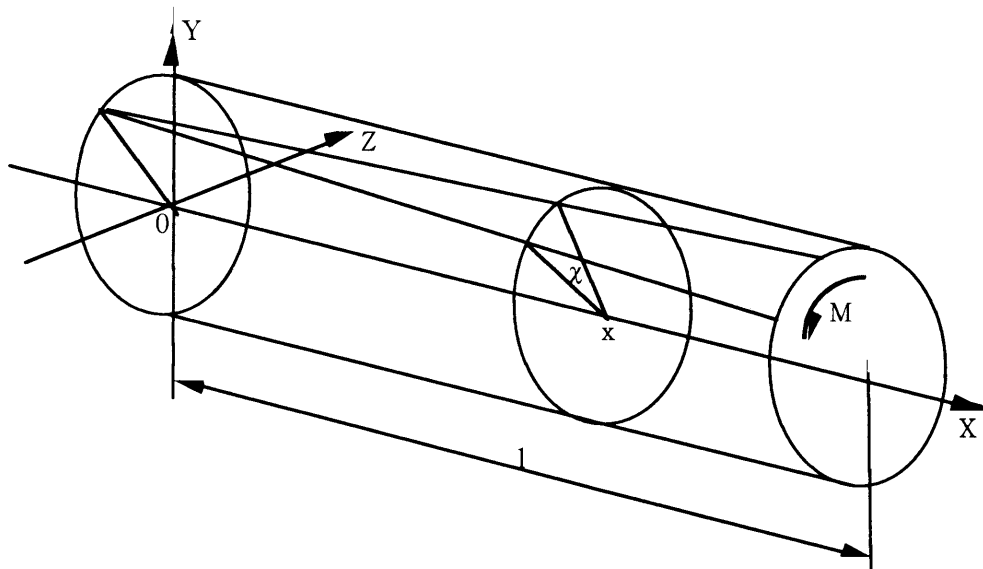


図2.4.4 棒のねじり変形

次に、固定端から x だけ離れた棒の断面を考える。断面内の点 $P(x, y, z)$ がねじれ変形によって $P'(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$ に回転変位を受けたとする。

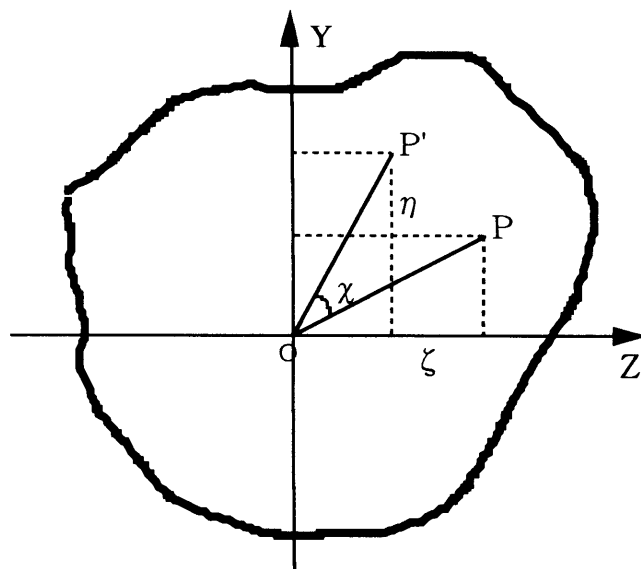


図2.4.5 任意断面内のねじれ変形

ここで、 $OP \doteq OP'$ とする。ねじり角 χ は微小であるので、式(2.4.21)および(2.4.22)が成立する。

$$\eta = z \sin \chi + y \cos \chi - y \approx \chi z = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) x z \quad (2.4.21)$$

$$\zeta = z \cos \chi - y \sin \chi - z \approx -\chi y = -\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) x y \quad (2.4.22)$$

ξ については、 ξ が y, z の関数であり、 x には無関係であるとする。 y, z の関数を $f(y, z)$ で表すと、 ξ は式(3.4.23)で与えられる。

$$\xi = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) f(y, z) \quad (2.4.23)$$

式(2.4.21)～(2.4.23)で表された回転変位に対応する歪み成分は式(2.4.24)のように表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + z \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial x} (x - x) = 0 \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - y \right) \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

以上の歪みに対応する応力は式(2.4.25)で与えられる。式(2.4.25)において、 G は剪断応力成分とそれに対応する剪断歪み成分の比を表し、剪断弾性率という。

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} &= 0 \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} + z \right) \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} = G \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial z} - y \right) \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

式(2.4.24)と式(2.4.25)から、ねじれ波による棒の歪みエネルギーは式(2.4.26)で表される。

$$\begin{aligned}
 E_{pot} &= \frac{1}{2} \iiint (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz \\
 &= \frac{1}{2} \iiint G \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial y} + z \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - y \right)^2 \right\} dx dy dz \\
 &= \frac{T}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 dx \tag{2.4.26}
 \end{aligned}$$

式(2.4.26)においてTは棒のねじれ剛性と称し、式(2.4.27)で与えられる。

$$T = G \iint \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial y} + z \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - y \right)^2 \right\} dy dz \tag{2.4.27}$$

回転慣性力の仮想仕事は、棒の単位長さ当たりの慣性モーメント Θ' を用いて式(2.4.28)で表される。

$$\delta W = - \int_0^l \Theta' \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \delta \chi dx \tag{2.4.28}$$

式(2.4.26)と式(2.4.28)から仮想仕事方程式は式(2.4.29)で表される。

$$\begin{aligned}
 \delta E_{pot} - \delta W &= \delta \left(\frac{T}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 dx \right) + \int_0^l \Theta' \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \delta \chi dx \\
 &= \int_0^l \left(T \frac{\partial \chi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + \Theta' \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \delta \chi \right) dx \\
 &= \left[T \frac{\partial \chi}{\partial x} \delta \chi \right]_0^l - \int_0^l \left(T \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \Theta' \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \delta \chi dx = 0 \tag{2.4.29}
 \end{aligned}$$

式(2.4.29)から、棒内を伝搬するねじれ波の波動方程式は式(2.4.30)で示される。

$$T \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \Theta' \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \tag{2.4.30}$$

また、両端における境界条件は式(2.4.31)で表される。

$$T \frac{\partial \chi}{\partial x} \delta \chi = 0 \tag{2.4.31}$$

すなわち、境界条件は、以下の(1)または(2)が成立することである。

(1)両端の回転変位が規定されている

$$\delta\chi = 0$$

(2)両端におけるねじりモーメントが釣り合っている

$$M_x = T \frac{\partial\chi}{\partial x} = 0$$

なお、ねじれ剛性と慣性モーメントは、例えば、断面が半径 r の円形の場合には式(2.4.32)および(2.4.33)で与えられ、二辺が b と h である長方形の場合には式(2.4.34)および(2.4.35)で与えられる。

$$T = \frac{\pi r^4}{2} \tag{2.4.32}$$

$$\Theta' = \frac{\pi}{2} \rho r^4 \tag{2.4.33}$$

$$T = b^3 h \left(\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{h} \tanh \frac{\pi h}{2b} \right) \tag{2.4.34}$$

$$\Theta' = \frac{\pi(bh^3 + hb^3)}{12} \tag{2.4.35}$$

また、図 2.4.6 に示したような薄い断面をもつ部材のねじれ剛性は、それぞれ式(2.4.36)~(2.4.38)で与えられる。

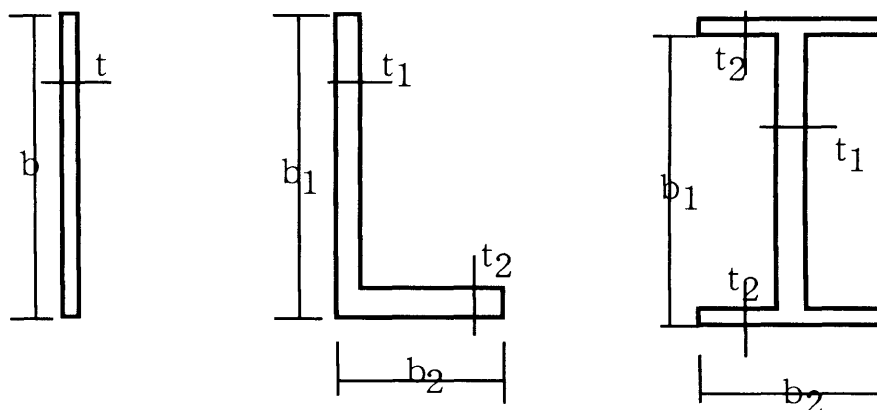


図2.4.5 薄い断面をもつ部材の例

$$T = \frac{Gbt^3}{3} \quad (2.4.36)$$

$$T = \frac{G(b_1t_1^3 + b_2t_2^3)}{3} \quad (2.4.37)$$

$$T = \frac{G(b_1t_1^3 + 2b_2t_2^3)}{3} \quad (2.4.38)$$

2.5 平板内を伝搬する波動に関する波動方程式

2.5.1 平板の変形^{3),6)}

図2.5.1のような平板について考える。

平板は、板厚が縦横長さに比べて小さい要素であり、薄肉平板ともいわれている。平板の厚さを h 、密度を ρ 、Young率を E 、Poisson比を ν で表す。平板の1隅に原点をとり、左F座標系にしたがって直角座標系を設定する。

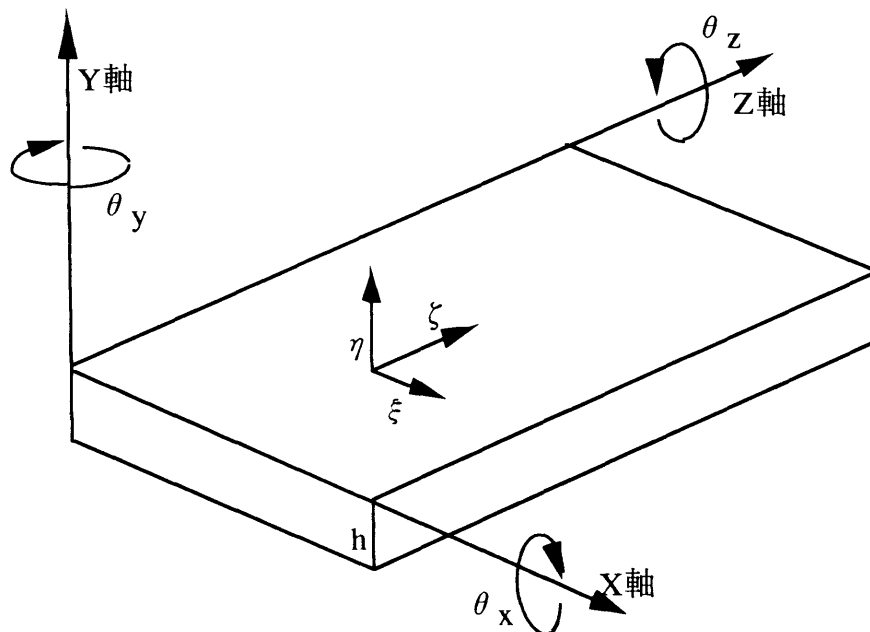


図2.5.1 薄肉平板とその座標軸

点(x,y,z)における変位の X, Y, Z 成分 (ξ, η, ζ) はそれぞれ座標(x,y,z)の関数で表されるが、板厚hが縦横の寸法に比べて小さいので、yに関する1次近似式として、式(2.5.1)のように書ける。

$$\begin{aligned}\xi(x,y,z) &= \xi(x,z) + y\xi'(x,z) \\ \eta(x,y,z) &= \eta(x,z) + y\eta'(x,z) \\ \zeta(x,y,z) &= \zeta(x,z) + y\zeta'(x,z)\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

したがって歪みの6成分は式(2.5.2)～(2.5.7)で表される。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + y \frac{\partial \xi'}{\partial x}\tag{2.5.2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \eta'\tag{2.5.3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} + y \frac{\partial \zeta'}{\partial z}\tag{2.5.4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \eta' + \frac{\partial \eta}{\partial x} + y \frac{\partial \eta'}{\partial x}\tag{2.5.5}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + y \frac{\partial \eta'}{\partial z} + \zeta'\tag{2.5.6}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + y \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} + y \frac{\partial \xi'}{\partial z}\tag{2.5.7}$$

ここで平板においては板厚方向の歪みは生じないものとする。

$$\varepsilon_y = \eta' = 0\tag{2.5.8}$$

$$\gamma_{xy} = \eta' + \frac{\partial \eta}{\partial x} + y \frac{\partial \eta'}{\partial x} = 0\tag{2.5.9}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + y \frac{\partial \eta'}{\partial z} + \zeta' = 0\tag{2.5.10}$$

式(2.5.8)～(2.5.10)を式(2.5.2)～(2.5.7)に代入する。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - y \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} - 2y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z}$$

$$\varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$$

次に、応力を求める。応力は、三次元等方性弾性体に関するHookeの法則にしたがって、Young率EおよびPoisson比 ν を用いて表すことができる。そして、平板に関しては板厚方

向の応力は板が薄肉であるとして無視する。平板に関する応力は下記のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z)}{1-\nu^2} \\ \sigma_z &= \frac{E(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_z)}{1-\nu^2} \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} = G\gamma_{xz}\end{aligned}$$

平板の歪みエネルギーは

$$\begin{aligned}E_{pot} &= \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz \\ &= \frac{E}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\iint \left\{ \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^2 + 2\nu\varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}^2 \right\} dx dz \right] dy \\ &= Eh \iint \left[\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{1}{4(1+\nu)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right) \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right)^2 \right\} dx dz\end{aligned}$$

で与えられる。

この式は、平板の歪みエネルギーは面内変形による歪みエネルギーと曲げ変形による歪みエネルギーの和となることを表している。

2.5.2 面内方向に変位振幅をもつ波動とその波動方程式³⁾

前節で述べたことから、平板中を伝搬する波動によって、面内方向に変位(ξ, ζ)が生じたとすると、その時の歪みエネルギーは式(2.5.11)で与えられる。

$$E_{pot} = Eh \iint \left[\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{1}{4(1+\nu)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz \quad (2.5.11)$$

その変分をとれば

$$\begin{aligned}\delta E_{pot} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \nu \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \nu \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right\} dx dz \\ &\quad + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \iint \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \left\{ \delta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \right\} dx dz\end{aligned}$$

グリーンの公式 $\iint uv' dx dy = \oint uv \bar{n} ds - \iint u' v dx dy$ を用いて

$$\begin{aligned}\delta E_{pot} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \oint \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \bar{n}_x + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \bar{n}_z \right\} \delta \xi ds \\ &\quad + \frac{Eh}{1-\nu^2} \oint \left\{ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \bar{n}_x + \left(\nu \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \bar{n}_z \right\} \delta \zeta ds \\ &\quad - \frac{Eh}{1-\nu^2} \iint \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \delta \xi dx dz \\ &\quad - \frac{Eh}{1-\nu^2} \iint \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \delta \zeta dx dz \\ &= h \oint \left\{ (\sigma_x + \nu \sigma_z) \bar{n}_x + \tau_{xz} \bar{n}_z \right\} \delta \xi ds + h \oint \left\{ \tau_{xz} \bar{n}_x + (\nu \sigma_x + \sigma_z) \bar{n}_z \right\} \delta \zeta ds \\ &\quad - \frac{Eh}{1-\nu^2} \iint \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \delta \xi dx dz \\ &\quad - \frac{Eh}{1-\nu^2} \iint \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \delta \zeta dx dz\end{aligned}$$

平板の境界面に作用する外力のX成分を F_x 、Z成分を F_z とすると、この外力と慣性力による仮想仕事は

$$\delta W = -h \oint (F_x \delta \xi + F_z \delta \zeta) ds - \rho h \iint \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta \zeta \right) dx dz$$

で与えられる。

したがって、仮想仕事方程式は式(2.5.12)で与えられる。

$$\delta E_{pot} - \delta W = h \oint \left\{ (\sigma_x + \nu \sigma_z) \bar{n}_x + \tau_{xz} \bar{n}_z - F_x \right\} \delta \xi ds$$

$$\begin{aligned}
& -h \iint \left\{ \frac{E}{1-v^2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right\} \delta \xi dx dz \\
& \quad + h \oint \left\{ \tau_{xz} \bar{n}_x + (v\sigma_x + \sigma_z) \bar{n}_z - F_z \right\} \delta \zeta ds \\
& -h \iint \left\{ \frac{E}{1-v^2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right\} \delta \zeta dx dz = 0 \quad (2.5.12)
\end{aligned}$$

式(2.5.12)から、平板要素内を伝搬する面内方向に変位振幅をもつ波動の波動方程式は式(2.5.13)および(2.5.14)で与えられる。

$$\frac{E}{1-v^2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.5.13)$$

$$\frac{E}{1-v^2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (2.5.14)$$

また、平板境界面における境界条件は、式(2.5.15)で与えられる。

$$\begin{aligned}
& (\sigma_x + v\sigma_z) \bar{n}_x + \tau_{xz} \bar{n}_z = F_x \quad \text{および} \quad \tau_{xz} \bar{n}_x + (v\sigma_x + \sigma_z) \bar{n}_z = F_z \\
& \text{または} \quad \delta \xi = 0 \quad \text{および} \quad \delta \zeta = 0 \quad (2.5.15)
\end{aligned}$$

2.5.3 面外方向に変位振幅をもつ波動とその波動方程式³⁾

本章1節で示したように、平板中を伝搬する波動によって、面外方向に変位 η が生じたすると、その時の歪みエネルギーは式(2.5.16)で与えられる。

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \left(\frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \right) \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 + 2v \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right)^2 + 2(1-v) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right)^2 \right\} dx dz \quad (2.5.16)$$

その変分をとれば

$$\begin{aligned}
\delta E_{pot} &= \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \right] dx dz \\
&+ \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \iint \left[v \left\{ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \right\} + 2(1-v) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right) \right] dx dz
\end{aligned}$$

グリーンの公式 $\iint uv' dx dy = \oint uv \bar{n} ds - \iint u' v dx dy$ を用いて

$$\begin{aligned} \delta E_{pot} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \oint \left[\left\{ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \right\} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \bar{n}_x + \left\{ \nu \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \right\} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \bar{n}_z \right] ds \\ &\quad + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \oint \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \left\{ \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \bar{n}_x + \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \bar{n}_z \right\} ds \\ &\quad - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \oint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \bar{n}_x + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \bar{n}_z \right\} \delta \eta ds \\ &\quad + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \iint \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} \right) \delta \eta dx dz \end{aligned}$$

ここで

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \right\}$$

$$M_{xz} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right)$$

$$F_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial z}$$

$$F_z = \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial x}$$

とおくと

$$\delta E_{pot} = \oint \left\{ M_n \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial n} \right) + M_{nr} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right) - F_n \delta \eta \right\} ds + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \iint \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} \right) \delta \zeta dx dy$$

であるから、平板の境界面に作用する面外方向外力を F_y とすると、この外力と慣性力による仮想仕事は

$$\delta W = -h \oint F_y \delta \eta ds - \rho h \iint \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta \eta dx dz$$

で与えられる。

したがって、仮想仕事方程式は式(2.5.17)で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta E_{pot} - \delta W &= \oint \left\{ M_n \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial n} \right) + M_{nr} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right) - (F_n - F_y) \delta \eta \right\} ds \\ &\quad + \iint \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} \right) + \rho h \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \right\} dx dz = 0 \quad (2.5.17) \end{aligned}$$

式(2.5.17)から、平板要素内を伝搬する面内方向に変位振幅をもつ波動の波動方程式は式(2.5.18)で与えられる。

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} \right) = -\rho h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (2.5.18)$$

また、平板境界面における境界条件は、式(2.5.19)、(2.5.20)で与えられる。

$$M_n = 0 \quad , \quad M_{nr} = 0 \quad \text{および} \quad F_n = F_y \quad (2.5.19)$$

または

$$\delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial n} \right) = 0 \quad , \quad \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{および} \quad \delta \eta = 0 \quad (2.5.20)$$

2.6 Lagrangeの運動方程式

2.6.1 Newtonの運動方程式の問題点⁷⁾

基本的な建物は、柱、梁および床、壁の組合せで造られている。したがって、建物を柱、梁の棒要素と床、壁の平板要素の組合せでモデル化することが可能である。この組合せは、図2.6.1のような質点・ばねの組み合わせで模式的に示される。

k番目の質点の質量を m_k 、座標を (x_k, y_k, z_k) 、作用する外力を F_k 、ばねのHooke力を f_k とする。外力とHooke力はベクトルであるから、単位ベクトルを用いて式(2.6.1)、(2.6.2)で表される。

$$\mathbf{F}_k = F_{xk} \mathbf{i} + F_{yk} \mathbf{j} + F_{zk} \mathbf{k} \quad (2.6.1)$$

$$\mathbf{f}_k = f_{xk} \mathbf{i} + f_{yk} \mathbf{j} + f_{zk} \mathbf{k} \quad (2.6.2)$$

Newtonの運動方程式から、式(2.6.3)が成立する。

$$F_{xk} + f_{xk} = m_k \ddot{x}_k$$

$$F_{yk} + f_{yk} = m_k \ddot{y}_k$$

$$F_{zk} + f_{zk} = m_k \ddot{z}_k \quad (k=1, 2, 3, \dots, N) \quad (2.6.3)$$

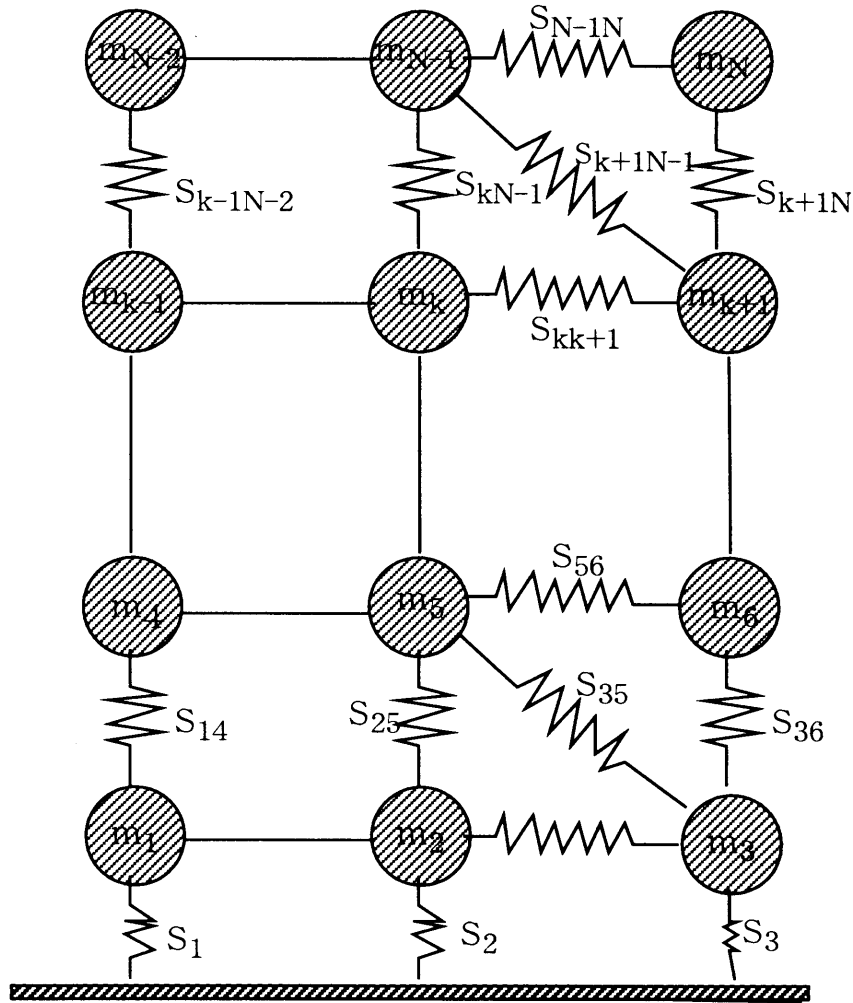


図2.6.1 建物をモデル化した模式図

Hooke力は、各ばねの伸び縮みに関する条件式から間接的に与えられるが、条件式は他のばねと連成しているので、質点の座標 (x_k, y_k, z_k) は他の座標から独立とはなり得ない。したがって、式(2.6.3)は質点 k のみに関連した方程式として解くことは無意味であり、他の全ての質点に関する方程式と連立させて解く必要がある。

また、式(2.6.3)は座標系が変わるとその表示は全く別の形となる。例えば、式(2.6.4)で変換される極座標を用いるとHooke力は r 方向成分 f_r 、 θ 方向成分 f_θ 、 ϕ 方向成分 f_ϕ を用いて式(2.6.5)で表され、運動方程式は全く別の形式で表される。

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta \cos \phi \\
 y &= r \sin \theta \\
 z &= r \cos \theta \sin \phi
 \end{aligned}
 \tag{2.6.4}$$

$$\begin{aligned}
 f_r &= m \left\{ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \frac{r}{2}(\dot{\phi}^2 + \cos 2\theta) \right\} \\
 f_\theta &= mr \left\{ 2\dot{r}\dot{\theta} + \frac{r}{2}(2\ddot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin 2\theta) \right\} \\
 f_\phi &= mr \cos \theta \left\{ 2\dot{\phi}\dot{r} \cos \theta + r(\ddot{\phi} \cos \theta - 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta) \right\} \quad (2.6.5)
 \end{aligned}$$

以上のように、Newtonの運動方程式は、建物内の固体音伝搬に関する運動方程式を導く際に利用するには、多少適用しづらい面をもっている。

2.6.2 一般座標⁷⁾

式(2.6.3)において、各質点の座標 (x_k, y_k, z_k) は他の座標から独立とはなり得ないが、座標に関する条件式が1つ与えられると、少なくとも、1つの座標変数は他の座標で記述できる。条件式が a 個与えられたとすると、 N 個の質点から構成される系の運動を記述するために必要な独立座標の数 n は式(2.6.4)で与えられる。このとき、系は n 自由度を有するという。

$$n = 3N - a \quad (2.6.6)$$

例えば、図2.6.2のようなXY平面内で運動する3質点を考えると、条件式として $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$ が与えられる。この系の自由度は、 $N=3$ 、 $a=3$ であるから、6である。図2.6.2の各質点の運動は、座標 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ の6変数で完全に記述できる。

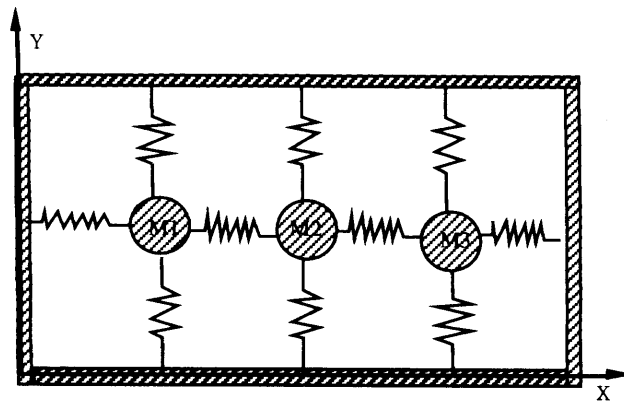


図2.6.2 自由度6の振動系

ある系の運動を完全に記述できる1組の座標 $(q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_n)$ を一般座標という。図2.6.2の場合には、一般座標 $q_1=x_1, q_2=y_1, q_3=x_2, q_4=y_2, q_5=x_3, q_6=y_3$ とすることができる。一般座標は、ある系に対して1つしか存在しないのではなく、その系の運動を完全に記述で

きる n 個の座標は 1 組の一般座標とすることができる。系の運動性状を完全に記述することができる座標であれば、直角座標、極座標その他いかなる座標系でもその系の一般座標として使用可能である。また、採用された座標系で表される運動方程式は、同じ運動が他の座標系で表されているとすれば、座標変換によって完全に導くことができる。一般座標は全ての座標系の代表という意味である。

一般座標を使用する利点は、もし Newton の運動方程式が一般座標系に変換できたとすると、あらゆる座標系に対して普遍的な表示形式の Newton の運動方程式を得ることができることである。一般座標系における Newton の運動方程式が得られたならば、採用する座標系で表示形式が異なってくるという前節で述べた Newton の運動方程式の問題点は補われることとなる。

2.6.3 Lagrange の運動方程式^{3),4),7)}

Newton の運動方程式を座標変換によって一般座標系で表示できれば、その運動方程式は、採用する座標系で表示形式が異なってくるという元来の Newton の運動方程式の欠点は持たない方程式となる。この一般座標系における運動方程式を Lagrange の運動方程式という。

以下に Newton の運動方程式から、第 2 章 3 節で述べた仮想仕事の原理と D'Alembert の原理に基づいて Lagrange の運動方程式を導く^{4),7)}。

2.6.1 で述べたように、図 2.6.1 に示した N 個の質点で構成される振動系に関する Newton の運動方程式は、ベクトル表示として式(2.6.7)で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k &= m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \\ \mathbf{r}_k &= x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k} \quad (k=1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

この系の自由度は n であるとする、直角座標 \mathbf{r}_k と n 個の一般座標 $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ の座標変換は式(2.6.8)で与えられる。

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.6.8)$$

式(2.6.8)において時間に関する全微分をとると、式(2.6.9)が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_k &= \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_n} \dot{q}_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

また、仮想変位 $\delta \mathbf{r}_k$ の全微分は

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{r}_k &= \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_3} \delta q_3 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_n} \delta q_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i\end{aligned}\quad (2.6.10)$$

で与えられるので、式(2.6.10)と式(2.6.7)から系に作用した力の仮想仕事は式(2.6.11)で与えられる。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k &= \sum_{k=1}^N m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^N m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^N m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_k \dot{\mathbf{r}}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) - m_k \dot{\mathbf{r}}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) \right\} \delta q_i\end{aligned}\quad (2.6.11)$$

ところで、 $\partial \mathbf{r}_k / \partial q_i$ は一般速度 \dot{q}_i の陽関数ではないから

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\quad (2.6.12)$$

となり、式(2.6.11)は式(2.6.12)の関係から式(2.6.13)のように書き替えられる。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_k \dot{\mathbf{r}}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_k \dot{\mathbf{r}}_k \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} \right\} \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k \dot{\mathbf{r}}_k \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k \dot{\mathbf{r}}_k \right) \right\} \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 \right) \delta q_i\end{aligned}\quad (2.6.13)$$

系全体の運動エネルギーを E_{kin} とすると、式(2.6.8)の変換から E_{kin} は式(2.6.14)で表される。

$$E_{kin} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 \right) = E_{kin}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n)\quad (2.6.14)$$

式(2.6.14)を式(2.6.13)に代入して、式(2.6.15)を得る。

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_{kin}}{\partial q_i} \right) \delta q_i\quad (2.6.15)$$

次に、式(2.6.15)の左辺について考える。式(2.6.15)に示した力は、系に対する負荷外力

F'とHooke力などの系のポテンシャルエネルギー E_{pot} から導かれる内力の和であるから、式(2.6.10)を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k &= -\delta E_{pot} + \sum_{i=1}^n F'_i \delta q_i = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n F'_i \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(F'_i - \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_i} \right) \delta q_i\end{aligned}\quad (2.6.16)$$

式(2.6.16)と式(2.6.15)から式(2.6.17)が得られる。

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_{kin}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_i} - F'_i \right) \delta q_i = 0 \quad (2.6.17)$$

一般座標の仮想変位 δq_i は独立で任意である。そこで、 $\delta q_i = 0$ 、 $\delta q_s \neq 0 (i \neq s)$ とおくと式(2.6.17)は δq_s の係数が0である場合に限って成立する。したがって、最終的に、一般座標によるNewtonの運動方程式の表示は、式(2.6.18)で表される。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial E_{kin}}{\partial q_s} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_s} = F'_s \quad (s=1,2,3,\dots,n) \quad (2.6.18)$$

式(2.6.18)で表される運動方程式をLagrangeの運動方程式という。

Lagrangeの運動方程式は、全ての運動方程式が運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの2個のスカラー関数と系への負荷外力の仮想仕事から得られることを示している。このことは、建物モデルのように系の自由度が大きいと予想される問題の運動方程式を得る場合に非常に有用である。

参考文献

- 1) L. Cremer, M. Heckl: Structure-borne Sound, Springer-Verlag, p.75~114, (1988)
- 2) F. Fahy: Sound and Structural Vibration, Academic Press, p.8~23, (1993)
- 3) 川井忠彦: マトリックス法振動および応答, 培風館, p.1~220, (1971)
- 4) L. Meirovitch (砂川恵訳): 電子計算機活用のための振動解析の理論と応用, ブレイン図書出版, p.249~333, (1984)
- 5) C. Wang (猪瀬寧雄訳): 応用弾性学, 森北出版, p.1~119, (1996)

6)谷資信 編著：板構造の解析,技報堂出版,p.5～76,(1976)

7)早坂壽雄, 吉川昭吉郎：音響振動論,丸善,p.55～68,(1974)

第 3 章 境界条件を規定したときの 運動方程式

3.1 はじめに

本研究は、地下鉄や鉄道による固体音の建物内伝搬性状の予測手法を確立し、固体音予測システムを構築し、これを実用化することを目的としている。固体音予測システムにおける本研究の位置付けは、建物に伝搬してきた固体音の特性が入力として与えられたときに、その建物内伝搬予測を行い、床スラブなどの応答・固体音放射を計算するためのデータを出力として求める部分を受け持っている。

本章は、建物は柱・梁などの棒要素と床スラブなどの平板要素の集合として、できるだけ少ない要素数でモデル化する場合に都合の良い境界条件を規定し、前章で記述した各要素について、その境界条件に適合する波動方程式の解を導く。境界条件を満足する方程式は、Newtonの運動方程式とBernoulliの定理を用いて解くことができる。しかし、この手法は、座標と力の方向によって運動をベクトル的に記述するので、系に含まれる成分個々について釣り合いを考える必要があるため、建物などのように座標が独立とならない多自由度系に適用する場合には煩雑さが増す。それに対して、Lagrangeの運動方程式は仕事量とエネルギーの二つのスカラ量を用いて運動を記述する手法であり、建物を立体的なモデルとして取り扱う場合には非常に都合がよいので、本論文はLagrangeの運動方程式を用いて要素内の波動の運動を記述していく。運動の記述は、Lagrangeの運動方程式を用いてエネルギー平衡条件を満足する条件式求め、これを境界条件として規定された変数を座標とする一般座標系に展開し、最終的にこれらの変数を未知数とする運動方程式を導いている。

3.2 棒要素内を伝搬する波動に関する 運動方程式の誘導

3.2.1 棒要素に関する座標軸

図3.2.1のような棒要素を考える。棒は断面積を S ，長さを l ，密度を ρ ，Young率を E ，Poisson比を ν で表す。座標軸は，棒の片端に原点をとり，左手座標系にしたがって直角座標系を設定する。回転角については，各座標軸回りで反時計回りを正とする。

一般座標の変数は棒の両端における三方向の振幅と三軸回りの回転角とし，棒の自由度は12である。三方向の振幅と三軸回りの回転角が境界条件として規定された場合の波動方程式の解を求め，Lagrangeの運動方程式を用いて，これらの変数を一般座標とする運動方程式を誘導する。

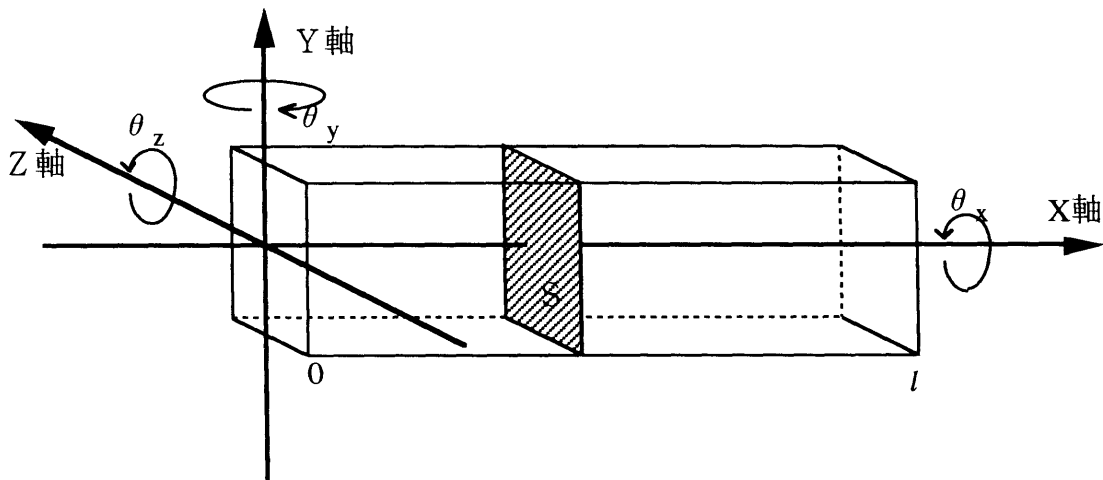


図3.2.1 棒要素に関する座標軸

3.2.2 擬似縦波に関する運動方程式の誘導

要素中をX軸方向に伝搬する擬似縦波に関する波動方程式は，第2章4節で導いたように，棒のYoung率を E ，密度を ρ として，式(3.2.1)で表される。

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.2.1)$$

式(3.2.1)の解として、要素中をX軸方向に伝搬する擬似縦波の変位は、 C_1 および C_2 を未定係数として、式(3.2.2)で与えられる。

$$\xi(x,t) = (C_1 e^{jk_L x} + C_2 e^{-jk_L x}) e^{j\omega t} \quad (3.2.2)$$

ただし、 ω は角周波数(rad/s)である。また、 k_L は擬似縦波の波定数 を表し、添字Lは擬似縦波の波定数であることを強調する目的で用いる。

擬似縦波の波定数は、材料の損失係数を η とすると、式(3.2.3)で与えられる¹⁾。

$$k_L = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E(1+j\eta)}} \quad (3.2.3)$$

要素に対する境界条件として、要素の両端 $x=0, l$ における擬似縦波の複素変位 x_1 および x_2 が規定されているとすると、境界条件は式(3.2.4)および(3.2.5)で示される。

$$x_1 = \xi(0,t) = (C_1 + C_2) e^{j\omega t} \quad (3.2.4)$$

$$x_2 = \xi(l,t) = (C_1 e^{jk_L l} + C_2 e^{-jk_L l}) e^{j\omega t} \quad (3.2.5)$$

式(3.2.4)および(3.2.5)を満足するような C_1 および C_2 を求め式(3.2.2)に代入する。要素中をX軸方向に伝搬する擬似縦波の変位は、要素の両端における擬似縦波の複素変位を用いて式(3.2.6)で表される。

$$\xi(x,t) = \frac{x_1 \sin k_L (l-x) + x_2 \sin k_L x}{\sin k_L l} \quad (3.2.6)$$

式(3.2.6)で表される擬似縦波について、運動エネルギーとポテンシャルエネルギー(歪みエネルギー)を求める。

運動エネルギーは、

$$E_{kin} = \frac{\rho}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dx$$

で与えられる。

また、ポテンシャルエネルギーは

$$E_{pot} = \frac{E}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx$$

で与えられる。

運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーをLagrangeの運動方程式(3.2.7)に代入する。ここで外力として、X軸方向外力 $F_x(x,t)$ が $x=x_0$ 点に作用していると想定している。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial \xi} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial \xi} = F' \quad (3.2.7)$$

ただし、 E_{kin} は運動エネルギー、 E_{pot} はポテンシャルエネルギー、 F' は外力の ξ 方向成分である。外力の ξ 方向成分は、仮想変位 $\delta\xi$ を想定した仮想仕事から求めることができる。仮想仕事は、以下のように表される。

$$\delta W = \int F_x \delta \xi dx$$

擬似縦波に関する運動方程式は、要素の両端における複素変位 x_1 、 x_2 および複素加速度 \ddot{x}_1 、 \ddot{x}_2 を未知数とする式(3.2.8)で表される。

なお、式(3.2.8)において、 $\delta(x-x_0)$ はデルタ関数を表す。

$$\begin{aligned} & \frac{\rho S}{4k_L \sin^2 k_L l} \begin{bmatrix} 2k_L l - \sin 2k_L l & 2(\sin k_L l - k_L l \cos k_L l) \\ 2(\sin k_L l - k_L l \cos k_L l) & 2k_L l - \sin 2k_L l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \\ & + \frac{k_L E S}{4 \sin^2 k_L l} \begin{bmatrix} 2k_L l + \sin 2k_L l & -2(\sin k_L l + k_L l \cos k_L l) \\ -2(\sin k_L l + k_L l \cos k_L l) & 2k_L l + \sin 2k_L l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & -\cot k_L l \\ 0 & \csc k_L l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \int_0^l F_x(x,t) \delta(x-x_0) \cos k_L x dx \\ \int_0^l F_x(x,t) \delta(x-x_0) \sin k_L x dx \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

ここで、波動は定常調和波動であるとすれば式(3.2.9)の関係が成立するので、擬似縦波に関する運動方程式は式(3.2.10)で表すことができる。

$$k_L E \xi = -\frac{k_L E}{\omega^2} \ddot{\xi} = -\frac{\rho}{k_L} \ddot{\xi} \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\rho S}{k_L} \begin{bmatrix} -\cot k_L l & \csc k_L l \\ \csc k_L l & -\cot k_L l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\cot k_L l \\ 0 & \csc k_L l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \int_0^l F_x(x,t) \delta(x-x_0) \cos k_L x dx \\ \int_0^l F_x(x,t) \delta(x-x_0) \sin k_L x dx \end{Bmatrix} \quad (3.2.10)$$

3.2.3 曲げ波に関する運動方程式の誘導

要素中をX軸方向に伝搬し、Z軸方向(水平方向)の振幅をもつ曲げ波の波動方程式は、第2章4節で示したように、式(3.2.11)で表される。

$$B \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = -m' \frac{\partial^4 \zeta}{\partial t^4} \quad (3.2.11)$$

式(3.2.11)において、Bは曲げ波が伝搬する構造体のZ軸方向の曲げ剛性であり、構造体のYoung率をE、断面二次モーメントをIとすると

$$B = EI$$

で与えられる。

また、m'は棒の単位長さ当たりの質量（線密度）であり、

$$m' = \rho S$$

で与えられる。

式(3.2.11)の解として、要素中をX軸方向に伝搬する曲げ波の変位は、 C_1, C_2, C_3, C_4 を未定係数として、式(3.2.12)で与えられる。

$$\zeta(x,t) = (C_1 e^{jk_B x} + C_2 e^{-jk_B x} + C_3 e^{k_B x} + C_4 e^{-k_B x}) e^{j\omega t} \quad (3.2.12)$$

ただし、 ω は角周波数 (rad/s)である。 k_B は曲げ波の波定数であり、添字Bは曲げ波の波定数を強調する目的で用いている。曲げ波の波定数は、損失係数を η とすると式(3.2.13)で与えられる¹⁾。

$$k_B = \sqrt[4]{\frac{m'}{B(1+j\eta)}} \sqrt{\omega} \quad (3.2.13)$$

要素に対する境界条件として、要素の両端 $x=0, l$ における曲げ波のZ軸方向の複素変位 z_1, z_2 と複素たわみ角 θ_{y1}, θ_{y2} が規定されているとすると、境界条件は式(3.2.14)～(3.2.17)で表される。

$$z_1 = \zeta(0,t) = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) e^{j\omega t} \quad (3.2.14)$$

$$\theta_{y1} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{\zeta(0,t)} = (jk_B C_1 - jk_B C_2 + k_B C_3 - k_B C_4) e^{j\omega t} \quad (3.2.15)$$

$$z_2 = \zeta(l,t) = (C_1 e^{jk_B l} + C_2 e^{-jk_B l} + C_3 e^{k_B l} + C_4 e^{-k_B l}) e^{j\omega t} \quad (3.2.16)$$

$$\theta_{y2} = - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{\eta(l,t)} = -(jk_B C_1 e^{jk_B l} - jk_B C_2 e^{-jk_B l} + k_B C_3 e^{k_B l} - k_B C_4 e^{-k_B l}) e^{j\omega t} \quad (3.2.17)$$

境界条件(3.2.14)～(3.2.17)を満足するように C_1, C_2, C_3, C_4 を求め(3.2.12)に代入する。要素中をX軸方向に伝搬する曲げ波の水平方向複素変位は、要素の両端における曲げ波の複素変位および複素たわみ角を用いて(3.2.18)で表すことができる。

$$\zeta(x,t) = \left\{ e^{jk_B x} \quad e^{-jk_B x} \quad e^{k_B x} \quad e^{-k_B x} \right\} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ \theta_{y1} \\ z_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (3.2.18)$$

ただし,

$$a_{11} = \frac{1 - \cos k_B l \cosh k_B l + \sin k_B l \sinh k_B l + j(\cosh k_B l \sin k_B l + \cos k_B l \sinh k_B l)}{4(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{12} = \frac{\cosh k_B l \sin k_B l - \cos k_B l \sinh k_B l - j(1 - \cos k_B l \cosh k_B l - \sin k_B l \sinh k_B l)}{4k_B(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{13} = \frac{\cos k_B l - \cosh k_B l - j(\sin k_B l + \sinh k_B l)}{4(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{14} = \frac{\sin k_B l - \sinh k_B l + j(\cos k_B l - \cosh k_B l)}{4k_B(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{21} = \frac{1 - \cos k_B l \cosh k_B l + \sin k_B l \sinh k_B l - j(\cosh k_B l \sin k_B l + \cos k_B l \sinh k_B l)}{4(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{22} = \frac{\cosh k_B l \sin k_B l - \cos k_B l \sinh k_B l + j(1 - \cos k_B l \cosh k_B l - \sin k_B l \sinh k_B l)}{4k_B(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{23} = \frac{\cos k_B l - \cosh k_B l + j(\sin k_B l + \sinh k_B l)}{4(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{24} = \frac{\sin k_B l - \sinh k_B l - j(\cos k_B l - \cosh k_B l)}{4k_B(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{31} = \frac{1 - (\cos k_B l - \sin k_B l)(\cosh k_B l - \sinh k_B l)}{4(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{32} = \frac{1 - (\cos k_B l + \sin k_B l)(\cosh k_B l - \sinh k_B l)}{4k_B(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{33} = \frac{-\cos k_B l + \cosh k_B l - \sin k_B l - \sinh k_B l}{4(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{34} = \frac{\cos k_B l - \cosh k_B l - \sin k_B l + \sinh k_B l}{4k_B(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{41} = \frac{1 - (\cos k_B l + \sin k_B l)(\cosh k_B l + \sinh k_B l)}{4(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{42} = \frac{-1 + (\cos k_B l - \sin k_B l)(\cosh k_B l + \sinh k_B l)}{4k_B(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{43} = \frac{-\cos k_B l + \cosh k_B l + \sin k_B l - \sinh k_B l}{4(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

$$a_{44} = \frac{-\cos k_B l + \cosh k_B l - \sin k_B l + \sinh k_B l}{4k_B(1 - \cosh k_B l \cos k_B l)}$$

式(3.2.18)で表される曲げ波について、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを計算し、Lagrangeの運動方程式(3.2.7)に代入する。

運動エネルギーは

$$E_{kin} = \frac{m'}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 dx$$

で与えられる。

また、ポテンシャルエネルギーは

$$E_{pot} = \frac{B}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 dx$$

で与えられる。

曲げ波に関する運動方程式は、要素両端における曲げ波の複素変位 z_1 と z_2 、複素加速度 \ddot{z}_1 と \ddot{z}_2 、複素たわみ角 θ_{y1} と θ_{y2} および複素たわみ角加速度 $\ddot{\theta}_{y1}$ と $\ddot{\theta}_{y2}$ を用いて式(3.2.19)で表される。ここで、外力として要素の $x=x_0$ 点に Z 軸方向の剪断力 F_z が作用していると想定している。式(3.2.17)において $\delta(x-x_0)$ はデルタ関数である。

$$m' \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{14} & m_{24} \\ m_{13} & m_{14} & m_{11} & m_{12} \\ m_{14} & m_{24} & m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{\theta}_{y1} \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{\theta}_{y2} \end{Bmatrix} + k_B^4 B \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{14} & k_{24} \\ k_{13} & k_{14} & k_{11} & k_{12} \\ k_{14} & k_{24} & k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ \theta_{y1} \\ z_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \int_0^l F_z(x,t) \delta(x-x_0) \cos k_B x dx \\ \int_0^l F_z(x,t) \delta(x-x_0) \sin k_B x dx \\ \int_0^l F_z(x,t) \delta(x-x_0) e^{k_B x} dx \\ \int_0^l F_z(x,t) \delta(x-x_0) e^{-k_B x} dx \end{Bmatrix} \quad (3.2.19)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{l(\cosh k_B l - \cos k_B l)^2}{4(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} + \frac{3(\cos k_B l \sinh k_B l + \sin k_B l \cosh k_B l)}{4k_B(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)} \\
m_{12} &= \frac{l(\sinh k_B l - \sin k_B l)(\cosh k_B l - \cos k_B l)}{4k_B(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} + \frac{\sin k_B l \sinh k_B l}{2k_B^2(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)} \\
m_{13} &= \frac{l \sin k_B l \sinh k_B l (\cos k_B l - \cosh k_B l)}{4(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} - \frac{3(\sin k_B l + \sinh k_B l)}{4k_B(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)} \\
m_{14} &= \frac{l \sin k_B l \sinh k_B l (\sin k_B l - \sinh k_B l)}{4k_B(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} + \frac{\cos k_B l - \cosh k_B l}{2k_B^2(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)} \\
m_{22} &= \frac{l(\sinh k_B l - \sin k_B l)^2}{4k_B^2(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} + \frac{\sin k_B l \cosh k_B l - \cos k_B l \sinh k_B l}{4k_B^3(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)} \\
m_{24} &= \frac{l\{2(\cosh k_B l - \cos k_B l) - \sin k_B l \sinh k_B l (\cosh k_B l + \cos k_B l)\}}{4k_B^2(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} \\
&\quad + \frac{\sin k_B l - \sinh k_B l}{4k_B^3(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} \\
k_{11} &= \frac{l(\cosh k_B l - \cos k_B l)^2}{4(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} - \frac{\cos k_B l \sinh k_B l + \sin k_B l \cosh k_B l}{4k_B(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)} \\
k_{12} &= \frac{l(\sinh k_B l - \sin k_B l)(\cosh k_B l - \cos k_B l)}{4k_B(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} - \frac{\sin k_B l \sinh k_B l}{2k_B^2(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)} \\
k_{13} &= \frac{l \sin k_B l \sinh k_B l (\cos k_B l - \cosh k_B l)}{4(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} + \frac{\sin k_B l + \sinh k_B l}{4k_B(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)} \\
k_{14} &= \frac{l \sin k_B l \sinh k_B l (\sin k_B l - \sinh k_B l)}{4k_B(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} + \frac{\cosh k_B l - \cos k_B l}{2k_B^2(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)} \\
k_{22} &= \frac{l(\sinh k_B l - \sin k_B l)^2}{4k_B^2(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} - \frac{3(\sin k_B l \cosh k_B l - \cos k_B l \sinh k_B l)}{4k_B^3(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)} \\
k_{24} &= \frac{l\{2(\cosh k_B l - \cos k_B l) - \sin k_B l \sinh k_B l (\cosh k_B l + \cos k_B l)\}}{4k_B^2(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} \\
&\quad - \frac{3(\sin k_B l - \sinh k_B l)}{4k_B^3(\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2} \\
f_{11} &= \frac{\cos k_B l \cosh k_B l - \sin k_B l \sinh k_B l - 1}{2(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}
\end{aligned}$$

$$f_{12} = \frac{\cos k_B l \sinh k_B l + \sin k_B l \cosh k_B l}{2(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{13} = \frac{(\cos k_B l - \sin k_B l)e^{-k_B l} - 1}{4(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{14} = \frac{(\cos k_B l + \sin k_B l)e^{k_B l} - 1}{4(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{21} = \frac{\cos k_B l \sinh k_B l - \sin k_B l \cosh k_B l}{2(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{22} = \frac{\cos k_B l \cosh k_B l + \sin k_B l \sinh k_B l - 1}{2(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{23} = \frac{(\cos k_B l + \sin k_B l)e^{-k_B l} - 1}{4(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{24} = \frac{(\sin k_B l - \cos k_B l)e^{k_B l} - 1}{4(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{31} = \frac{\cosh k_B l - \cos k_B l}{2(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{32} = -\frac{\sinh k_B l + \sin k_B l}{2(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{33} = \frac{\cos k_B l + \sin k_B l - e^{-k_B l}}{4(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{34} = \frac{\cos k_B l - \sin k_B l - e^{k_B l}}{4(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{41} = \frac{\sin k_B l - \sinh k_B l}{2(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{42} = \frac{\cosh k_B l - \cos k_B l}{2(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{43} = \frac{\cos k_B l - \sin k_B l - e^{-k_B l}}{4(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

$$f_{44} = -\frac{\cos k_B l + \sin k_B l - e^{k_B l}}{4(\cos k_B l \cosh k_B l - 1)}$$

ここで、波動は定常調和波動であるとすれば式(3.2.20)の関係が成立するので、曲げ波に関する運動方程式は式(3.2.21)で表すことができる。

$$k_B^4 B \zeta = -\frac{k_B^4 B}{\omega^2} \ddot{\zeta} = -m' \ddot{\zeta} \quad (3.2.20)$$

$$m' \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{14} & m_{23} \\ m_{13} & m_{14} & m_{11} & m_{12} \\ m_{14} & m_{23} & m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \int_0^l F_z(x,t) \delta(x-x_0) \cos k_B x dx \\ \int_0^l F_z(x,t) \delta(x-x_0) \sin k_B x dx \\ \int_0^l F_z(x,t) \delta(x-x_0) e^{k_B x} dx \\ \int_0^l F_z(x,t) \delta(x-x_0) e^{-k_B x} dx \end{Bmatrix} \quad (3.2.21)$$

ただし、

$$m_{11} = \frac{\cos k_B l \sinh k_B l + \sin k_B l \cosh k_B l}{k_B (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)}$$

$$m_{12} = \frac{-\sin k_B l \sinh k_B l}{k_B^2 (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)}$$

$$m_{13} = -\frac{\sin k_B l + \sinh k_B l}{k_B (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)}$$

$$m_{14} = \frac{-\cos k_B l + \cosh k_B l}{k_B^2 (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)}$$

$$m_{22} = \frac{\sin k_B l \cosh k_B l - \cos k_B l \sinh k_B l}{k_B^3 (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)}$$

$$m_{24} = \frac{\sin k_B l - \sinh k_B l}{k_B^3 (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2}$$

以上、要素中をX軸方向に伝搬し、Z軸方向(水平方向)の振幅をもつ曲げ波について運動方程式を導いた。Y軸方向(鉛直方向)の振幅をもつ曲げ波についても同様の過程によって式(3.2.22)で表される運動方程式が得られる。

$$m' \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{14} & m_{23} \\ m_{13} & m_{14} & m_{11} & m_{12} \\ m_{14} & m_{23} & m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \int_0^l F_y(x,t)\delta(x-x_0)\cos k_B x dx \\ \int_0^l F_y(x,t)\delta(x-x_0)\sin k_B x dx \\ \int_0^l F_y(x,t)\delta(x-x_0)e^{k_B x} dx \\ \int_0^l F_y(x,t)\delta(x-x_0)e^{-k_B x} dx \end{Bmatrix} \quad (3.2.22)$$

ここに、

$$m_{11} = \frac{\cos k_B l \sinh k_B l + \sin k_B l \cosh k_B l}{k_B (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)}$$

$$m_{12} = \frac{\sin k_B l \sinh k_B l}{k_B^2 (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)}$$

$$m_{13} = -\frac{\sin k_B l + \sinh k_B l}{k_B (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)}$$

$$m_{14} = \frac{\cos k_B l - \cosh k_B l}{k_B^2 (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)}$$

$$m_{22} = \frac{\sin k_B l \cosh k_B l - \cos k_B l \sinh k_B l}{k_B^3 (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)}$$

$$m_{24} = \frac{\sin k_B l - \sinh k_B l}{k_B^3 (\cosh k_B l \cos k_B l - 1)^2}$$

3.2.4 ねじれ波に関する運動方程式の誘導

棒要素中をX軸方向に伝搬するねじれ波に関する波動方程式は、第2章4節で導いたように、棒のねじれ剛性をT，単位長さ当たりの慣性モーメント Θ' として、式(3.2.23)で表される。

$$T \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} = \Theta' \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \quad (3.2.23)$$

式(3.2.23)の解として、要素中をX軸方向に伝搬するねじれ波の回転変位は、 C_1 および C_2 を未定係数として、(3.2.24)で与えられる。

$$\theta_x(x,t) = (C_1 e^{jk_T x} + C_2 e^{-jk_T x}) e^{j\omega t} \quad (3.2.24)$$

ただし、 ω は角周波数(rad/s)であり、 k_T はねじれ波の波定数である。ねじれ波の波定数は式(3.2.25)で表される。

$$k_T = \omega \sqrt{\frac{\Theta'}{T}} \quad (3.2.25)$$

、断面が円形の場合には式(3.2.26)のように剪断波の波定数と等しくなる。式(3.2.26)において、 ρ は密度、 ν はPoisson比、EはYoung率、 η は損失係数を表す。

以下の議論は断面が円形の場合について進める。

$$k_T = \omega \sqrt{\frac{2\rho(1+\nu)}{E(1+j\eta)}} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G(1+j\eta)}} \quad (3.2.26)$$

要素に対する境界条件として、要素の両端 $x=0, l$ におけるねじれ波の複素回転変位 θ_{x1} および θ_{x2} が規定されているとすると、境界条件は(3.2.27)および(3.2.28)で示される。

$$\theta_{x1} = \theta_x(0,t) = (C_1 + C_2) e^{j\omega t} \quad (3.2.27)$$

$$\theta_{x2} e^{j\omega t} = \theta_x(l,t) = (C_1 e^{jk_T l} + C_2 e^{-jk_T l}) e^{j\omega t} \quad (3.2.28)$$

境界条件(3.2.27)および(3.2.28)を満足するような C_1 および C_2 を求め式(3.2.24)に代入する。要素中をX軸方向に伝搬するねじれ波の回転変位は、要素の両端におけるねじれ波の複素回転変位を用いて(3.2.29)で表される。

$$\theta_x(x,t) = \frac{\theta_{x1} \sin k_T(l-x) + \theta_{x2} \sin k_T x}{\sin k_T l} \quad (3.2.29)$$

式(3.2.29)で表されるねじれ波について、運動エネルギーとポテンシャルエネルギー(歪みエネルギー)を求める。

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは、それぞれ式(3.2.30)，(3.2.31)で与えられる。

$$E_{kin} = \frac{\rho}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.2.30)$$

$$E_{pot} = \frac{T}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.2.31)$$

運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーを Lagrange の運動方程式(3.2.7)に代入する。
ここで外力として、ねじりモーメント $M_x(x, t)$ が $x=x_0$ 点に作用していると想定している。

ねじれ波に関する運動方程式は、要素の両端における複素回転変位 θ_{x1} , θ_{x2} および複素回転加速度 $\ddot{\theta}_{x1}$, $\ddot{\theta}_{x2}$ を未知数とする式(3.2.32)で表される。

式(3.2.32)において、 $\delta(x-x_0)$ はデルタ関数を表す。

$$\begin{aligned} & \frac{\rho S}{4k_T \sin^2 k_T l} \begin{bmatrix} 2k_T l - \sin 2k_T l & 2(\sin k_T l - k_T l \cos k_T l) \\ 2(\sin k_T l - k_T l \cos k_T l) & 2k_T l - \sin 2k_T l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_{x1} \\ \ddot{\theta}_{x2} \end{Bmatrix} \\ & + \frac{k_T G S}{4 \sin^2 k_T l} \begin{bmatrix} 2k_T l + \sin 2k_T l & -2(\sin k_T l + k_T l \cos k_T l) \\ -2(\sin k_T l + k_T l \cos k_T l) & 2k_T l + \sin 2k_T l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & -\cot k_L l \\ 0 & \csc k_L l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \int_0^l M_x(x, t) \delta(x-x_0) \cos k_T x dx \\ \int_0^l M_x(x, t) \delta(x-x_0) \sin k_T x dx \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

ここで、波動は定常調和波動であるとすれば式(3.2.33)の関係が成立するので、疑似縦波に関する運動方程式は式(3.2.34)で表すことができる。

$$k_T G \theta_x = -\frac{k_T G}{\omega^2} \ddot{\theta}_x = -\frac{\rho}{k_T} \ddot{\theta}_x \quad (3.2.33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{m'}{k_T} \begin{bmatrix} -\cot k_L l & \csc k_L l \\ \csc k_L l & -\cot k_L l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_{x1} \\ \ddot{\theta}_{x2} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & -\cot k_L l \\ 0 & \csc k_L l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \int_0^l M_x(x, t) \delta(x-x_0) \cos k_T x dx \\ \int_0^l M_x(x, t) \delta(x-x_0) \sin k_T x dx \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

3.3 平板要素内を伝搬する波動に関する 運動方程式の誘導

3.3.1 平板要素に関する座標軸とそのモデル化

図3.3.1のような平板を考える。平板は厚さ h ，両辺の長さ l_x ， l_z とし，密度を ρ ，複素Young率を E ，Poisson比を ν で表す。座標軸は，平板の1隅に原点をとり，左手座標系にしたがって直角座標系を設定する。回転角については，各座標軸回りで反時計回りを正とする。

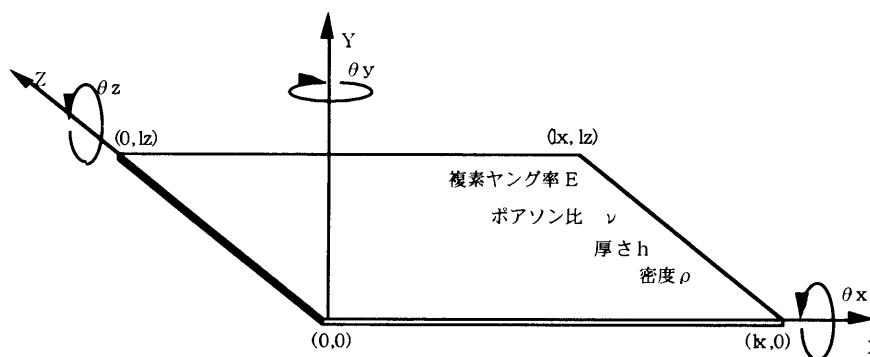


図 3.4.1 平板要素とその座標軸

平板要素の取り扱いを説明する前にここで改めて研究の流れを述べる。

本研究は，地下鉄や鉄道による固体音の建物内伝搬性状の予測手法を確立し，固体音予測システム²⁾を構築し，これを実用化することを目的としている。図1.2.2に示した固体音予測システムのフロー図において，本研究の目的は，固体音の建物内伝搬予測を行い，床スラブなどの応答と固体音放射の計算³⁾をするための入力特性を決定する手法を確立することである。予測システムのフロー図に見るように，この研究の次段階である床スラブなどの応答と固体音放射の計算は，床などが梁・柱と接合する点(平板の四隅)の振動加速度を入力として行う。したがって，本論文では平板要素の四隅の振動加速度ができるだけ少ない要素数で求められるようにモデル化を図った。

日本建築学会による鉄筋コンクリート構造計算基準および鉄骨鉄筋コンクリート構造計算基準では，床スラブから梁に加わる鉛直荷重に関して，等分布荷重を受ける長方形スラブを

支える梁は、梁の交点から描いた垂直2等分線および梁に平行な直線から造られる台形または三角形の部分の荷重を受けるものとみなすことができるとしている²⁾。

この考え方を参考として、平板は図3.4.2のように4分割し、4分割した要素は各々面積が等しい矩形平板に置き換えた。そして、分割された各矩形平板は、伝搬する波動の方向は1次元であるが、波動の種類として擬似縦波、曲げ波に加えて剪断波も存在する擬似"棒"要素であることとした。平板内の全エネルギーは四つの擬似"棒"要素が持つエネルギーの集合であると考えた。

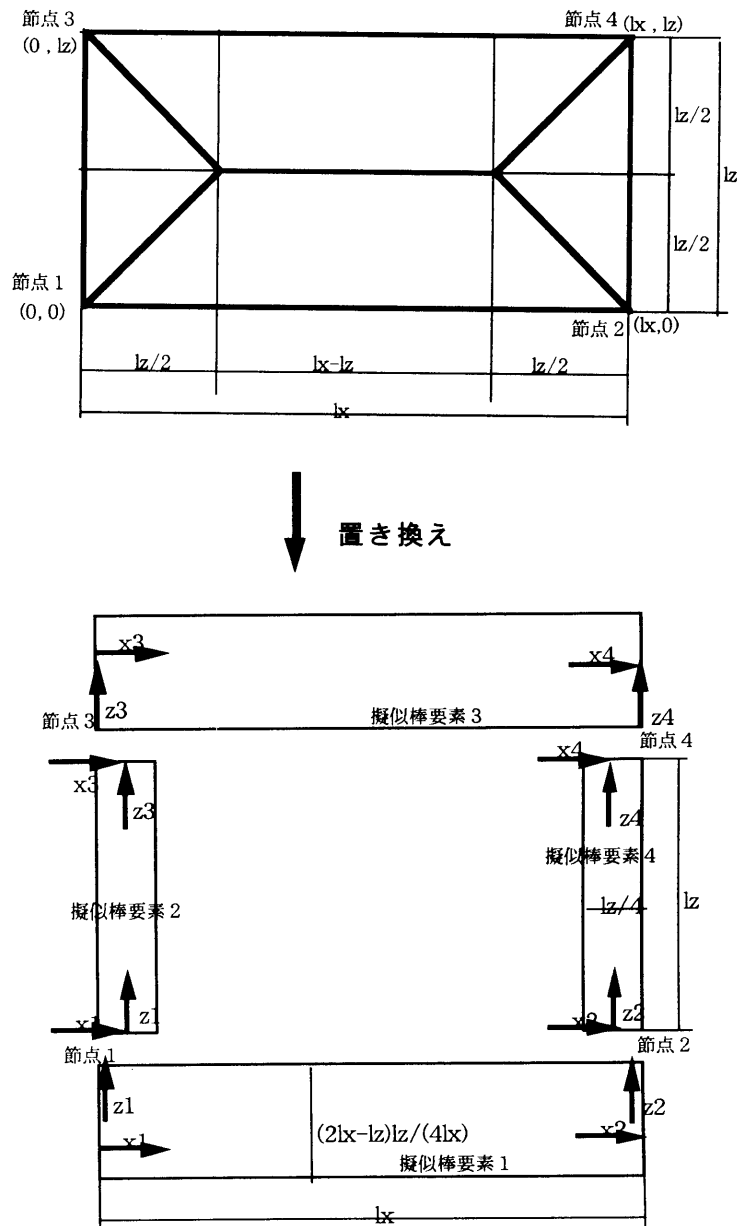


図3.4.2 平板のモデル

3.3.2 面内方向に振幅を持つ波動に関する運動方程式の誘導

平板要素中を伝搬する面内方向に変位振幅をもつ波動のX方向成分およびZ方向成分(ξ , ζ)に関する波動方程式は、第2章5節で記述したように、構造体の複素Young率をE、密度を ρ 、Poisson比を ν とすると、式(3.3.1)および(3.3.2)で表される。

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.3.1)$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (3.3.2)$$

平板中を伝搬する波動は平面進行波であるとし、式(3.3.1)、(3.3.2)の解として

$$\xi = \xi_0 e^{j(\omega t + k_x x + k_z z)}, \quad \zeta = \zeta_0 e^{j(\omega t + k_x x + k_z z)}$$

を設定する。ここで、 ω は角周波数(rad/s)であり、 k は波定数を表す。

想定した解を式(3.3.1)、(3.3.2)に代入すると、式(3.3.3)が得られる。

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \omega^2 = k_T^2 \quad \text{or} \quad k_x^2 + k_z^2 = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \omega^2 = k_L^2 \quad (3.3.3)$$

式(3.3.3)から、平板要素中を伝搬する波動による面内方向の変位振幅は、擬似縦波と剪断波の和として表されるといえる。

a. 擬似"棒"要素1内の波動

擬似"棒"要素中を伝搬する波動はX軸に平行な波動である。面内方向の変位振幅のX方向成分およびZ方向成分(ξ , ζ)は式(3.3.4)と(3.3.5)で表される。

$$\xi(x,t) = (C_1 e^{jk_L x} + C_2 e^{-jk_L x}) e^{j\omega t} \quad (3.3.4)$$

$$\zeta(x,t) = (C_3 e^{jk_T x} + C_4 e^{-jk_T x}) e^{j\omega t} \quad (3.3.5)$$

節点1における変位(x_1, z_1)と節点2における変位(x_2, z_2)が規定されているとすると、擬似"棒"要素1内を伝搬する波動に関する境界条件は式(3.3.6)~(3.3.9)で表される。

$$x_1 = \xi(0,t) = (C_1 + C_2) e^{j\omega t} \quad (3.3.6)$$

$$x_2 = \xi(l_x,t) = (C_1 e^{jk_L l_x} + C_2 e^{-jk_L l_x}) e^{j\omega t} \quad (3.3.7)$$

$$z_1 = \zeta(0,t) = (C_3 + C_4) e^{j\omega t} \quad (3.3.8)$$

$$z_2 = \zeta(l_x,t) = (C_3 e^{jk_T l_x} + C_4 e^{-jk_T l_x}) e^{j\omega t} \quad (3.3.9)$$

境界条件式(3.3.6)~(3.3.9)を満足するような $C_1 \sim C_4$ を求め式(3.3.4)と(3.3.5)に代入す

る。要素中をX軸方向に伝搬する波動の面内方向変位は、節点1および2の複素変位を用いて式(3.3.10)、(3.3.11)で表される。

$$\xi(x,t) = \frac{x_1 \sin k_L(l_x - x) + x_2 \sin k_L x}{\sin k_L l_x} \quad (3.3.10)$$

$$\zeta(x,t) = \frac{z_1 \sin k_T(l_x - x) + z_2 \sin k_T x}{\sin k_T l_x} \quad (3.3.11)$$

式(3.3.7)で表される擬似縦波について、運動エネルギーとポテンシャルエネルギー(歪みエネルギー)を求める。

運動エネルギーは、

$$E_{kin} = \frac{\rho h}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dz = \frac{\rho h(2l_x - l_z)l_z}{8l_x} \int_0^{l_x} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 \right\} dx$$

で与えられる。

また、ポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} E_{pot} &= Eh \iint \left[\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{1}{4(1+\nu)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz \\ &= \frac{Eh(2l_x - l_z)l_z}{8l_x(1-\nu^2)} \int_0^{l_x} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \end{aligned}$$

で与えられる。

運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーをLagrangeの運動方程式(3.2.7)に代入する。その結果、擬似"棒"要素1内の面内方向に変位振幅を有する波動に関する運動方程式は、節点1および2の複素加速度 \ddot{x}_1 , \ddot{x}_2 , \ddot{z}_1 および \ddot{z}_2 を未知数とする式(3.3.12)で表される。

$$\frac{\rho h(2l_x - l_z)l_z}{4l_x} \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & m_{24} \\ m_{13} & 0 & m_{11} & 0 \\ 0 & m_{24} & 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (3.3.12)$$

ただし、

$$m_{11} = -\frac{\cos k_L l_x}{k_L \sin k_L l_x}$$

$$m_{13} = \frac{1}{k_L \sin k_L l_x}$$

$$m_{22} = -\frac{\cos k_T l_x}{k_T \sin k_T l_x}$$

$$m_{24} = \frac{1}{k_T \sin k_T l_x}$$

b. 擬似"棒"要素 2 内の波動

擬似"棒"要素 2 に関する運動エネルギーは式(3.3.13)で表されとポテンシャルエネルギーは式(3.3.14)で表されるので、擬似"棒"要素 1 と同様の手順により、擬似"棒"要素 1 内の面内方向に変位振幅を有する波動に関する運動方程式は、節点 1 および 2 の複素加速度 \ddot{x}_1 , \ddot{x}_3 , \ddot{z}_1 および \ddot{z}_3 を未知数とする式(3.3.15)で表される。

$$E_{kin} = \frac{\rho h}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dz = \frac{\rho h l_z}{8} \int_0^{l_z} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 \right\} dz \quad (3.3.13)$$

$$\begin{aligned} E_{pot} &= Eh \iint \left[\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{1}{4(1+\nu)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz \\ &= \frac{Eh l_z}{8} \int_0^{l_z} \left\{ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

$$\frac{\rho h l_z}{4} \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & m_{24} \\ m_{13} & 0 & m_{11} & 0 \\ 0 & m_{24} & 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{z}_3 \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (3.3.15)$$

ただし、

$$m_{11} = -\frac{\cos k_L l_z}{k_L \sin k_L l_z}$$

$$m_{13} = \frac{1}{k_L \sin k_L l_z}$$

$$m_{22} = -\frac{\cos k_T l_z}{k_T \sin k_T l_z}$$

$$m_{24} = \frac{1}{k_T \sin k_T l_z}$$

3.3.3 面外方向に振幅を持つ波動に関する運動方程式の誘導

平板要素中を伝搬する面外方向に変位振幅をもつ波動に関する波動方程式は、第2章4節で導いたように、式(3.3.16)で表される。

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} \right) = -m'' \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (3.3.16)$$

式(3.3.16)において、 h は平板の厚さ、 m'' は面密度、 ν はPoisson比、 E は複素Young率である。

平板中を伝搬する波動は平面進行波であるとし、式(3.3.16)の解として

$$\eta = \eta_0 e^{j(\omega t + k_x x + k_z z)}$$

を設定する。ここで、 ω は角周波数(rad)であり、 k_x および k_z は波定数を表す。

想定した解を式(3.3.16)に代入すると、伝搬定数に関して式(3.3.17)が得られる。

$$k_x^2 + k_z^2 = \pm \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}} \omega^2 = \pm k_B^2 \quad (3.3.17)$$

式(3.3.17)から、平板要素の面外方向の変位振幅は、曲げ波によるものであることがわかる。

a. 擬似"棒"要素1内を伝搬する曲げ波

X軸方向に伝搬する曲げ波の変位は、式(3.3.16)の解として、 $C_1 \sim C_4$ を未定係数として、式(3.3.18)で与えられる。

$$\eta(x,t) = (C_1 e^{jk_B x} + C_2 e^{-jk_B x} + C_3 e^{k_B x} + C_4 e^{-k_B x}) e^{j\omega t} \quad (3.3.18)$$

節点1および2における複素変位 y_1 、 y_2 および複素たわみ角 θ_{z1} 、 θ_{z2} が規定されているとすると、境界条件は式(3.3.19)～(3.3.22)で表される。

$$y_1 = \eta(0,t) = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) e^{j\omega t} \quad (3.3.19)$$

$$\theta_{z1} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{(0,t)} = (jk_B C_1 - jk_B C_2 + k_B C_3 - k_B C_4) e^{j\omega t} \quad (3.3.20)$$

$$y_2 = \eta(l_x, t) = (C_1 e^{jk_B l_x} + C_2 e^{-jk_B l_x} + C_3 e^{k_B l_x} + C_4 e^{-k_B l_x}) e^{j\omega t} \quad (3.3.21)$$

$$\theta_{z2} = - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{(l_x, t)} = -(jk_B C_1 e^{jk_B l_x} - jk_B C_2 e^{-jk_B l_x} + k_B C_3 e^{k_B l_x} - k_B C_4 e^{-k_B l_x}) e^{j\omega t} \quad (3.3.22)$$

式(3.3.19)～(3.3.22)を満足する曲げ波の複素変位は、複素変位 y_1 , y_2 および複素たわみ角 θ_{z1} , θ_{z2} を用いて式(3.3.23)で表すことができる。

$$\eta(x, t) = \left\{ e^{jk_B x} \quad e^{-jk_B x} \quad e^{k_B x} \quad e^{-k_B x} \right\} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.3.23)$$

ただし、

$$a_{11} = \frac{1 - \cos k_B l_x \cosh k_B l_x + \sin k_B l_x \sinh k_B l_x + j(\cosh k_B l_x \sin k_B l_x + \cos k_B l_x \sinh k_B l_x)}{4(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{12} = \frac{\cosh k_B l_x \sin k_B l_x - \cos k_B l_x \sinh k_B l_x - j(1 - \cos k_B l_x \cosh k_B l_x - \sin k_B l_x \sinh k_B l_x)}{4k_B(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{13} = \frac{\cos k_B l_x - \cosh k_B l_x - j(\sin k_B l_x + \sinh k_B l_x)}{4(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{14} = \frac{\sin k_B l_x - \sinh k_B l_x + j(\cos k_B l_x - \cosh k_B l_x)}{4k_B(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{21} = \frac{1 - \cos k_B l_x \cosh k_B l_x + \sin k_B l_x \sinh k_B l_x - j(\cosh k_B l_x \sin k_B l_x + \cos k_B l_x \sinh k_B l_x)}{4(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{22} = \frac{\cosh k_B l_x \sin k_B l_x - \cos k_B l_x \sinh k_B l_x + j(1 - \cos k_B l_x \cosh k_B l_x - \sin k_B l_x \sinh k_B l_x)}{4k_B(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{23} = \frac{\cos k_B l_x - \cosh k_B l_x + j(\sin k_B l_x + \sinh k_B l_x)}{4(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{24} = \frac{\sin k_B l_x - \sinh k_B l_x - j(\cos k_B l_x - \cosh k_B l_x)}{4k_B(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{31} = \frac{1 - (\cos k_B l_x - \sin k_B l_x)(\cosh k_B l_x - \sinh k_B l_x)}{4(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{32} = \frac{1 - (\cos k_B l_x + \sin k_B l_x)(\cosh k_B l_x - \sinh k_B l_x)}{4k_B(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{33} = \frac{-\cos k_B l_x + \cosh k_B l_x - \sin k_B l_x - \sinh k_B l_x}{4(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{34} = \frac{\cos k_B l_x - \cosh k_B l_x - \sin k_B l_x + \sinh k_B l_x}{4k_B(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{41} = \frac{1 - (\cos k_B l_x + \sin k_B l_x)(\cosh k_B l_x + \sinh k_B l_x)}{4(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{42} = \frac{-1 + (\cos k_B l_x - \sin k_B l_x)(\cosh k_B l_x + \sinh k_B l_x)}{4k_B(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{43} = \frac{-\cos k_B l_x + \cosh k_B l_x + \sin k_B l_x - \sinh k_B l_x}{4(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

$$a_{44} = \frac{-\cos k_B l_x + \cosh k_B l_x - \sin k_B l_x + \sinh k_B l_x}{4k_B(1 - \cosh k_B l_x \cos k_B l_x)}$$

擬似"棒"要素 1 中の曲げ波に関する運動エネルギーは

$$E_{kin} = \frac{\rho h}{2} \iint \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx dz = \frac{\rho h (2l_x - l_z) l_z}{8l_x} \int_0^{l_x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx$$

で与えられる。

ポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2} \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right) \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right)^2 \right\} dx dz \\ &= \frac{\rho E h^4 (2l_x - l_z) l_z}{96l_x (1-\nu^2)} \int_0^{l_x} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 dx \end{aligned}$$

で与えられる。

式(3.3.23)で表される曲げ波について、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを計算し、Lagrangeの運動方程式(3.2.7)に代入する。その結果、擬似要素 1 内を伝搬する曲げ波に関する運動方程式は、節点 1 および 2 の複素加速度 \ddot{y}_1 , \ddot{y}_2 と複素たわみ角加速度 $\ddot{\theta}_{z1}$, $\ddot{\theta}_{z2}$ を用いて式(3.3.24)で表される。

$$m'' \left(\frac{(2l_x - l_z)l_z}{4l_x} \right) \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{14} & m_{23} \\ m_{13} & m_{14} & m_{11} & m_{12} \\ m_{14} & m_{23} & m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{\theta}_{z1} \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\theta}_{z2} \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (3.3.24)$$

ただし,

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{\cos k_B l_x \sinh k_B l_x + \sin k_B l_x \cosh k_B l_x}{k_B (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)} \\ m_{12} &= \frac{\sin k_B l_x \sinh k_B l_x}{k_B^2 (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)} \\ m_{13} &= -\frac{\sin k_B l_x + \sinh k_B l_x}{k_B (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)} \\ m_{14} &= \frac{\cos k_B l_x - \cosh k_B l_x}{k_B^2 (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)} \\ m_{22} &= \frac{\sin k_B l_x \cosh k_B l_x - \cos k_B l_x \sinh k_B l_x}{k_B^3 (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)} \\ m_{24} &= \frac{\sin k_B l_x - \sinh k_B l_x}{k_B^3 (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)^2} \end{aligned}$$

b. 擬似"棒"要素 2 中を伝搬する曲げ波

擬似"棒"要素 2 に関する運動エネルギーは式(3.3.25)で表され, ポテンシャルエネルギーは式(3.3.26)で表されるので, 擬似"棒"要素 1 と同様の手順により, 擬似"棒"要素 2 内の面外方向に変位振幅を有する波動に関する運動方程式は, 節点 1 および 3 における複素加速度 \ddot{y}_1 , \ddot{y}_3 と複素たわみ角加速度 $\ddot{\theta}_{x1}$, $\ddot{\theta}_{x3}$ を用いて式(3.3.27)で表される。

$$E_{kin} = \frac{\rho h}{2} \iint \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx dz = \frac{\rho h l_z}{8} \int_0^{l_z} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dz \quad (3.3.25)$$

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2} \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right) \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right)^2 \right\} dx dz \\ &= \frac{\rho E h^4 l_z}{96(1-\nu^2)} \int_0^{l_z} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right)^2 dz \quad (3.3.26) \end{aligned}$$

$$m'' \left(\frac{l_z}{4} \right) \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{14} & m_{23} \\ m_{13} & m_{14} & m_{11} & m_{12} \\ m_{14} & m_{23} & m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{\theta}_{x1} \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{\theta}_{x3} \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (3.3.27)$$

ただし,

$$m_{11} = \frac{\cos k_B l_z \sinh k_B l_z + \sin k_B l_z \cosh k_B l_z}{k_B (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)}$$

$$m_{12} = \frac{-\sin k_B l_z \sinh k_B l_z}{k_B^2 (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)}$$

$$m_{13} = -\frac{\sin k_B l_z + \sinh k_B l_z}{k_B (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)}$$

$$m_{14} = \frac{-\cos k_B l_z + \cosh k_B l_z}{k_B^2 (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)}$$

$$m_{22} = \frac{\sin k_B l_z \cosh k_B l_z - \cos k_B l_z \sinh k_B l_z}{k_B^3 (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)}$$

$$m_{24} = \frac{\sin k_B l_z - \sinh k_B l_z}{k_B^3 (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)^2}$$

3.3.4 平板要素に関する運動方程式

平板は矩形平板に4分割し、各矩形平板は伝搬する波動の方向は1次元であるが、波動の種類として擬似縦波、曲げ波に加えて剪断波も存在する擬似"棒"要素であるとみなし、平板内の全エネルギーは四つの擬似"棒"要素が持つエネルギーの集合であるとして、平板のモデル化を行った。

建物全体のモデル化を行う場合に、平板要素としての運動方程式が求められていた方が都合が良いので、ここでは擬似"棒"要素の運動方程式を用いて平板要素に関する運動方程式の表示を求める。

擬似"棒"要素各々が共有する節点においては、第4章で述べるように、共有する擬似"棒"要素の変位と回転角は等しい。したがって、各節点における変位と回転角に関する係数は、共有する擬似"棒"要素の変位と回転角に関する係数の和で与えられ、平板に関する運動方程

式は、式(3.3.28)で表される。

$$\frac{m''}{4} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \\ \mathbf{W}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.3.28)$$

$$\mathbf{W}_k = \{ \ddot{x}_k \quad \ddot{\theta}_{xk} \quad \ddot{y}_k \quad \ddot{\theta}_{yk} \quad \ddot{z}_k \quad \ddot{\theta}_{zk} \}^T$$

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{23} & m_{33} & 0 & 0 & m_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{45} & 0 \\ 0 & 0 & m_{63} & 0 & 0 & m_{66} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = - \left\{ \frac{(2l_x - l_z)l_z \cot k_L l_x}{k_L l_x} + \frac{l_z \cot k_T l_x}{k_T} \right\}$$

$$m_{22} = \frac{l_z (\sin k_B l_z \cosh k_B l_z - \cos k_B l_z \sinh k_B l_z)}{k_B^3 (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)}$$

$$m_{23} = \frac{-l_z \sin k_B l_z \sinh k_B l_z}{k_B^2 (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)}$$

$$m_{33} = \frac{(2l_x - l_z)l_z (\cos k_B l_x \sinh k_B l_x + \sin k_B l_x \cosh k_B l_x)}{l_x k_B (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)}$$

$$+ \frac{l_z (\cos k_B l_z \sinh k_B l_z + \sin k_B l_z \cosh k_B l_z)}{k_B (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)}$$

$$m_{36} = - \frac{(2l_x - l_z)l_z \sin k_B l_x \sinh k_B l_x}{l_x k_B^2 (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)}$$

$$m_{55} = - \left\{ \frac{(2l_x - l_z)l_z \cot k_T l_x}{k_T l_x} + \frac{l_z \cot k_L l_z}{k_L} \right\}$$

$$m_{66} = \frac{(2l_x - l_z)l_z (\sin k_B l_x \cosh k_B l_x - \cos k_B l_x \sinh k_B l_x)}{l_x k_B^3 (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)}$$

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & 0 & m_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} & 0 \\ 0 & 0 & m_{36} & 0 & 0 & m_{66} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = \frac{(2l_x - l_z)l_z}{l_x k_L \sin k_L l_x}$$

$$m_{23} = -\frac{(2l_x - l_z)l_z (\sin k_B l_x + \sinh k_B l_x)}{l_x k_B (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)}$$

$$m_{26} = \frac{(2l_x - l_z)l_z (\cos k_B l_x - \cosh k_B l_x)}{l_x k_B^2 (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)}$$

$$m_{55} = \frac{(2l_x - l_z)l_z}{l_x k_T \sin k_T l_x}$$

$$m_{66} = \frac{(2l_x - l_z)l_z (\sin k_B l_x - \sinh k_B l_x)}{l_x k_B^3 (\cosh k_B l_x \cos k_B l_x - 1)^2}$$

$$\mathbf{M}_{13} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{23} & m_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = \frac{l_z}{k_T \sin k_T l_x}$$

$$m_{22} = \frac{l_z (\sin k_B l_z - \sinh k_B l_z)}{k_B^3 (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)^2}$$

$$m_{23} = \frac{-l_z (\cos k_B l_z + \cosh k_B l_z)}{k_B^2 (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)}$$

$$m_{33} = -\frac{l_z (\sin k_B l_z + \sinh k_B l_z)}{k_B (\cosh k_B l_z \cos k_B l_z - 1)}$$

$$m_{55} = \frac{l_z}{k_L \sin k_L l_z}$$

参考文献

- 1)L.Cremer,M.Heckl : Structure-borne Sound, Springer-Verlag, p.199~203,(1988)
- 2)日本建築学会 : 鉄骨鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説,丸善,p.51,(1975)

第 4 章 各要素の建物全体モデルへの適用

4.1 はじめに

建物は、梁、柱、床そして壁から構成されている。梁や柱は棒要素としてモデル化でき、床や壁は平板要素としてモデル化できる。棒要素内を伝搬する擬似縦波、曲げ波ならびにねじり波に関する運動方程式は、第 3 章 2 節で誘導した。同様に、平板要素内を伝搬する擬似縦波、剪断波ならびに曲げ波についてもその運動方程式を第 3 章 3 節で導いた。

建物全体のエネルギーは構成要素がもつエネルギーの集合であるとして、これらの要素を組み合わせることで建物全体をモデル化する。各要素間のエネルギーのやりとりは、各要素の接合部で行われると考える。それによって、棒要素は自由度が 12 である系として取り扱い、運動方程式は要素両端における三方向の複素加速度振幅と三軸回りの回転角を一般座標とする方程式で表された。また、平板要素の運動方程式は、平板内の全エネルギーは平板を 4 分割して得られる擬似"棒"要素各々が持つエネルギーの集合であるとしてモデル化することによって、要素四隅における三方向の複素加速度振幅と三軸回りの回転角を一般座標とする方程式として得られている。

したがって、建物全体の運動方程式は、各要素の接合部における三方向の複素加速度振幅と三軸回りの回転角を未知数とする連立方程式で表される。建物に対する負荷外力を与えてこの運動方程式を解くことによって、建物内各節点における三方向の複素加速度振幅と三軸回りの回転角が得られる。

本章では、第 3 章で求めた各要素の運動方程式を建物全体モデルへ適用していく場合に必要となる座標変換と各要素の集合としての運動方程式について記述する。

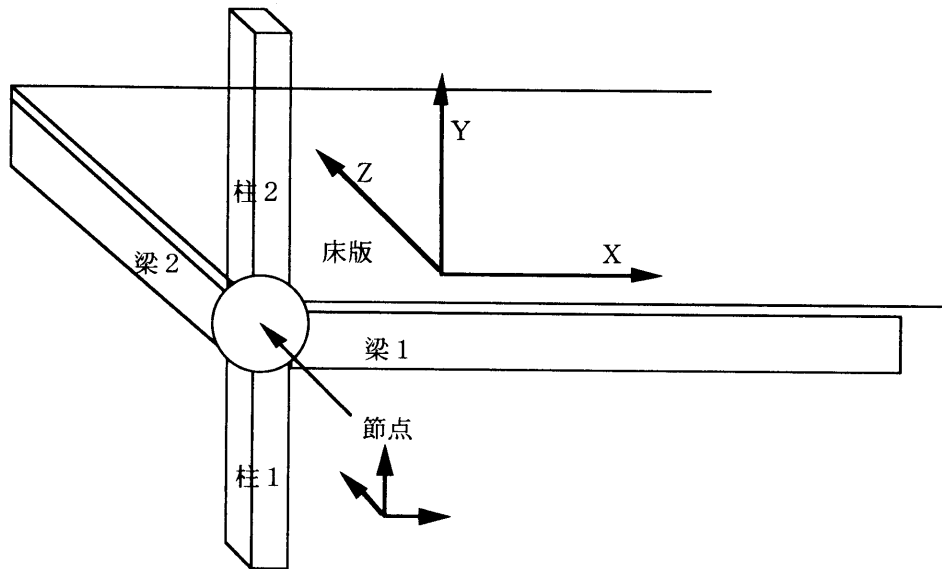
4.2 建物全体のモデル化

棒要素内を伝搬する波動は擬似縦波，曲げ波ならびにねじり波であり，平板要素内を伝搬する波動は擬似縦波，剪断波ならびに曲げ波である。建物全体のエネルギーは構成要素がもつエネルギーの集合であるとしてモデル化し，各要素間のエネルギーのやりとりは各要素の接合部で行われ，接合している要素の要素接合部における加速度振幅と回転角は互いに等しい。図4.2.1に示すように，建物全体の運動方程式は，各要素の接合部における三方向の複素加速度振幅と三軸回りの回転角を未知数とする連立方程式で表される。

この建物内における固体音の伝搬性状を要素接合部における変数で把握するというを実際の測定で見ると以下のように言えるであろう。現場測定による振動の建物内伝搬性状を追跡する方法としては，床スラブの中央点の振動加速度の測定値でその性状を把握する方法と，床スラブ上の柱脚部の振動加速度の測定値でその性状を把握する方法が，現在のところ行われている代表的な方法である。前者は，振動加速度値が大きくなるので，S/Nが得易いという利点はあるが，スラブ自体のモードの影響を受けるので，スラブの形状や厚さなどが変化するような建物では，スラブの増幅度の違いなどを補正しなければならない。それに対して，後者は，床スラブと柱や梁が構造的に最も結合度の高い点で評価しており，スラブによる増幅などの影響は少ないという利点がある。

また，本研究は，建物に伝搬してきた固体音の建物内伝搬予測を行い，出力として，床スラブなどの応答・固体音放射を計算するための特性を決定することを目的としている。

したがって，各節点の変数で伝搬性状のシミュレーションを行うことは，実測定との対応を見ることも可能であり，本研究で得られた手法を固体音予測システムへ組み込む場合においても都合がよい。



- ・ 節点の X 方向振幅 = 柱 1, 2 の曲げ波振幅
 = 梁 1 の擬似縦波振幅
 = 梁 2 の曲げ波振幅
 = 床版の縦波・剪断波振幅
- ・ 節点の Y 方向振幅 = 柱 1, 2 の縦波振幅
 = 梁 1, 2 の曲げ波振幅
 = 床版の曲げ波振幅
- ・ 節点の Z 方向振幅 = 柱 1, 2 の曲げ波振幅
 = 梁 1 の曲げ波振幅
 = 梁 2 の擬似縦波振幅
 = 床版の縦波・剪断波振幅

図4.2.1 建物のモデル化と節点の波動の方向

4.3 要素の座標変換と座標変換後のエネルギー

第3章において要素内の波動に関する運動方程式を導いたが、その際に座標軸は各要素毎に設定した。これは、要素を個別に考える時には都合がよいが、各要素を建物全体モデルへ適用していくときには、各要素に固有の座標系でなく建物に関して統一された座標系に各要素の座標を変換する必要がある。

例えば、図4.3.1のような要素が互いに直交している単純なモデルについて考えてみる

建物全体モデルの座標軸はY軸を上下方向とする左手座標系に設定する。梁1固有の座標軸は建物全体系の座標軸と一致しているが、梁2の座標軸はX軸が建物全体系のZ軸と一致するようにY軸回りに90°回転させたものである。また、柱はX軸が建物全体系のY軸と一致するようにZ軸の回りに90°回転させた座標軸となっている。

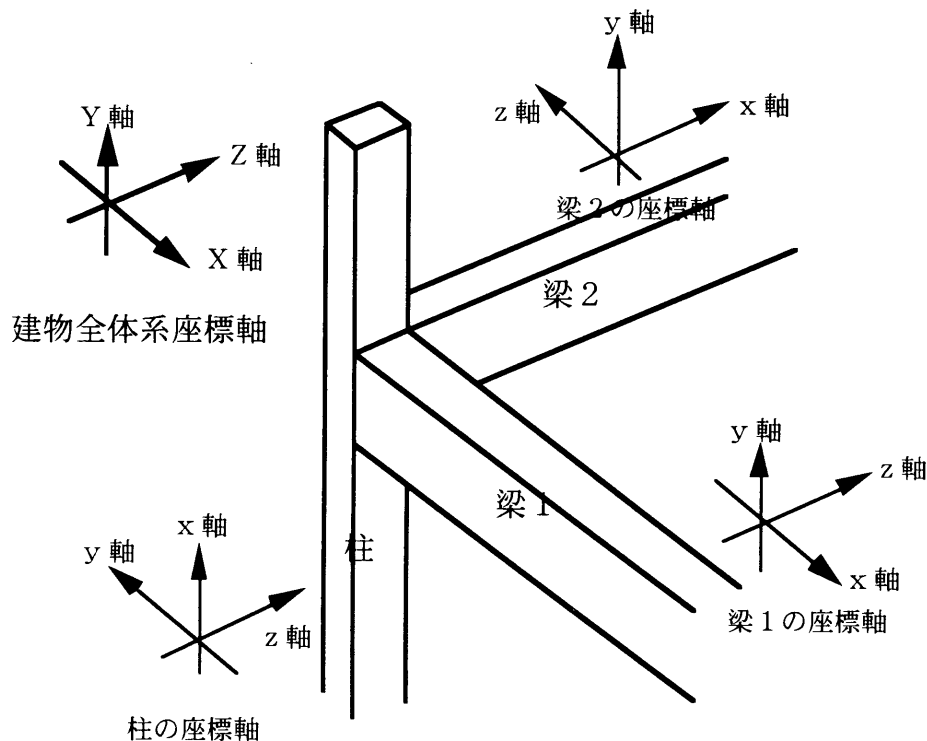


図 4.3.1 建物モデルに関する座標軸

それぞれの要素に固有な座標系の座標を(x,y,z)で表し、建物全体座標系の座標を(X,Y,Z)で表すと、要素固有の座標系から建物全体の座標系への座標変換は、一般に式(4.3.1)で示される。ただし、 $\cos\phi_{JK}$ はJ軸とK軸の方向余弦を表す。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_{xX} & \cos\phi_{xY} & \cos\phi_{xZ} \\ \cos\phi_{yX} & \cos\phi_{yY} & \cos\phi_{yZ} \\ \cos\phi_{zX} & \cos\phi_{zY} & \cos\phi_{zZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (4.3.1)$$

したがって、図4.3の柱および梁に関する座標変換は式(4.3.2)～(4.3.4)で与えられる。

a. 柱に関する座標変換

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (4.3.2)$$

b. 梁1に関する座標変換

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (4.3.3)$$

c. 梁2に関する座標変換

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (4.3.4)$$

ところで、ポテンシャルエネルギーおよび運動エネルギーは、一般に式(4.3.5)、(4.3.6)のようにマトリックス表示される。

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{x}}\}^T [\mathbf{m}] \{\dot{\mathbf{x}}\} \quad (4.3.5)$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{x}\} \quad (4.3.6)$$

要素に固有な座標系の座標(x,y,z)から建物全体座標系の座標(X,Y,Z)への座標変換を行ったときの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは、式(4.3.5)と(4.3.6)に座標変換(4.3.1)を代入して得られる。

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{x}}\}^T [\mathbf{m}] \{\dot{\mathbf{x}}\} \\ &= \frac{1}{2} ([\mathbf{L}] \{\dot{\mathbf{X}}\})^T [\mathbf{m}] [\mathbf{L}] \{\dot{\mathbf{X}}\} \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{X}}\}^T [\mathbf{L}]^T [\mathbf{m}] [\mathbf{L}] \{\dot{\mathbf{X}}\} \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{X}}\}^T [\mathbf{M}] \{\dot{\mathbf{X}}\} \\ E_{pot} &= \frac{1}{2} \{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{x}\} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}([\mathbf{L}]\{\dot{\mathbf{X}}\})^T [\mathbf{k}][\mathbf{L}]\{\dot{\mathbf{X}}\} \\
&= \frac{1}{2}\{\dot{\mathbf{X}}\}^T [\mathbf{L}]^T [\mathbf{k}][\mathbf{L}]\{\dot{\mathbf{X}}\} \\
&= \frac{1}{2}\{\dot{\mathbf{X}}\}^T [\mathbf{K}]\{\dot{\mathbf{X}}\} \tag{4.3.8}
\end{aligned}$$

式(4.3.7)と(4.3.8)から座標変換後の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは、変位の係数マトリックス(質量マトリックス $[\mathbf{M}]$ と剛性マトリックス $[\mathbf{K}]$)が座標変換マトリックス $[\mathbf{L}]$ を右から、座標変換マトリックスの転置マトリックス $[\mathbf{L}]^T$ を左から掛けたマトリックスに変換されることがわかる。

4.4 建物全体モデルにおける波動の運動方程式¹⁾

建物全体は各要素の集合としてモデル化するのであるが、各構成要素の建物全体におけるナンバリングをしておく必要がある。

いま、建物全体を N 個の要素でモデル化するとすると、変位を順に並べた建物全体の変位ベクトルを $\{\mathbf{X}\}$ 、 j 番目の要素の変位ベクトルを $\{\mathbf{X}\}_j$ で表すと、 $\{\mathbf{X}\}_j$ はマトリックス $[\mathbf{A}]_j$ を用いて $\{\mathbf{X}\}$ 内に式(4.4.1)のようにナンバリングされる。 $[\mathbf{A}]_j$ は長方形マトリックスであり、その行数は $\{\mathbf{X}\}_j$ の行数と等しく、列数は $\{\mathbf{X}\}$ の行数と等しい。

$$\{\mathbf{X}\}_j = [\mathbf{A}]_j \{\mathbf{X}\} \tag{4.4.1}$$

たとえば、図4.4.1のようなモデルについて考える。

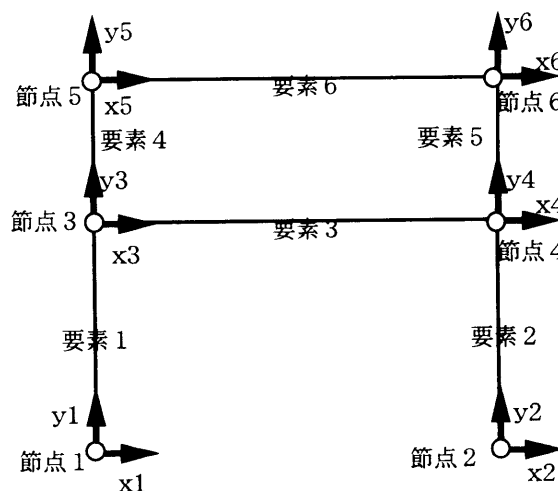


図4.4.1 モデルの例

$$\{\mathbf{X}\}_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{X}\}_2 = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{X}\}_3 = \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathbf{X}\}_4 = \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ x_5 \\ y_5 \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{X}\}_5 = \begin{Bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ x_6 \\ y_6 \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{X}\}_6 = \begin{Bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ x_6 \\ y_6 \end{Bmatrix}$$

であるからマトリックス $[\mathbf{A}]_j$ は以下のように表される。

$$[\mathbf{A}]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}]_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}]_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}]_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}]_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

建物全体の運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーは、各要素の持つエネルギーの集合として表されるので、式(4.4.2)と(4.4.3)が成立する。

$$E_{kin} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{X}}\}_j^T [\mathbf{M}]_j \{\dot{\mathbf{X}}\}_j \quad (4.4.2)$$

$$E_{pot} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \{\mathbf{X}\}_j^T [\mathbf{K}]_j \{\mathbf{X}\}_j \quad (4.4.3)$$

式(4.4.2)と(4.4.3)に式(4.4.4)を代入すると、建物全体における変数とエネルギーの関係が得られる。

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} ([\mathbf{A}]_j \{\dot{\mathbf{X}}\})^T [\mathbf{M}]_j [\mathbf{A}]_j \{\dot{\mathbf{X}}\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \{\dot{\mathbf{X}}\}^T [\mathbf{A}]_j^T [\mathbf{M}]_j [\mathbf{A}]_j \{\dot{\mathbf{X}}\} \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{X}}\}^T \sum_{j=1}^N [\mathbf{A}]_j^T [\mathbf{M}]_j [\mathbf{A}]_j \{\dot{\mathbf{X}}\} \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{X}}\}^T [\overline{\mathbf{M}}] \{\dot{\mathbf{X}}\} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} ([\mathbf{A}]_j \{\mathbf{X}\})^T [\mathbf{K}]_j [\mathbf{A}]_j \{\mathbf{X}\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \{\mathbf{X}\}^T [\mathbf{A}]_j^T [\mathbf{K}]_j [\mathbf{A}]_j \{\mathbf{X}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \{\mathbf{X}\}^T \sum_{j=1}^N [\mathbf{A}]_j^T [\mathbf{K}]_j [\mathbf{A}]_j \{\mathbf{X}\} \\
&= \frac{1}{2} \{\mathbf{X}\}^T [\bar{\mathbf{K}}] \{\mathbf{X}\}
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

式(4.4.4)と式(4.4.5)は、建物全体系における運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは、建物全体系のある節点変位の係数マトリックス(質量マトリックス $[\bar{\mathbf{M}}]$ と剛性マトリックス $[\bar{\mathbf{K}}]$)は、その節点に関係する要素の係数マトリックスの和となることを示している。

例えば、図4.5.1のような骨組み構造において、柱に外力(F_x, F_y, F_z)が作用した場合の柱および梁に関する個別の運動方程式が式(4.4.6)～(4.4.8)で表されているとすれば、節点の変位は式(4.4.9)で表される。

なお、式(4.4.6)～(4.4.8)において、 f はHooke力などの応力を表しているが、節点における f は各要素での作用反作用の原理から互いに消し合って合力として0となる。

a. 柱に関する運動方程式

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} + \{f_1\} \tag{4.4.6}$$

b. 梁1に関する運動方程式

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} = \{f_2\} \tag{4.4.7}$$

c. 梁2に関する運動方程式

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{z}_3 \end{Bmatrix} = \{f_3\} \tag{4.4.8}$$

d. 節点に関する運動方程式

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} + c_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} + c_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} + c_{1,3} \\ a_{2,1} + b_{2,1} + c_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} + c_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} + c_{2,3} \\ a_{3,1} + b_{3,1} + c_{3,1} & a_{3,2} + b_{3,2} + c_{3,2} & a_{3,3} + b_{3,3} + c_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \tag{4.4.9}$$

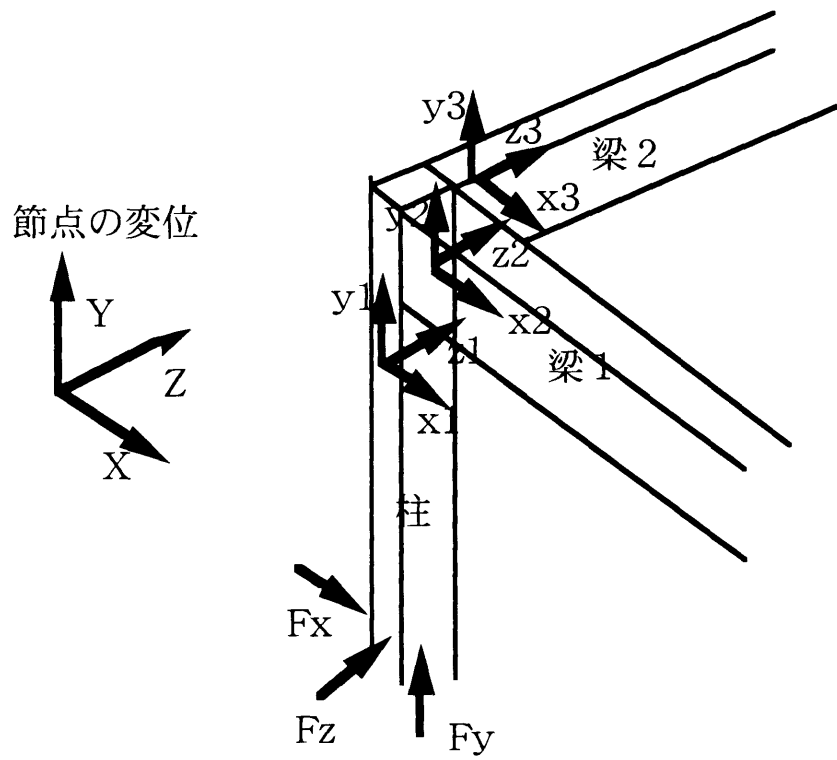


図4.5.1 骨組み構造の例

参考文献

- 1)L.Meirovitch (砂川恵訳) : 電子計算機活用のための振動解析の理論と応用, プレイン図書出版,
p.311~320,(1984)

第5章 建物模型による予測手法の検証

5.1 はじめに

第3章で建物を構成する各要素内の波動に関する運動方程式を導き、第4章においてこれらの各要素の集合として建物全体モデルにおける波動の運動方程式を得る手法を示した。建物全体モデルは各要素の接合部を節点とするモデルである。各節点の自由度は6であり、三方向の振動加速度と三軸回りの回転角を一般座標の変数とする。建物全体の運動方程式は、これらの節点変数を未知数とする連立方程式となる。

本章では、模型実験結果と本手法による計算結果との比較検討によって、予測手法の検証を行う。先ず模型実験手法に関する基礎的事項について記述し、次に建物の基本構造形式である骨組み構造について行った実験結果と計算結果の比較検討を行う。更に、棒要素と平板要素の組合せの基本モデルである骨組み構造形式に床版が付いた建物模型についての実験結果と計算結果との比較検討を行う。

5.2 模型実験における相似則¹⁾

模型実験で模型における現象と実物における現象との間に物理的相似関係が成立するためには、 $1/n$ スケールの模型に関する相似則として、長さ L および波長 λ に関して式(5.2.1)、(5.2.2)が成立することが必要である。ただし、添文字 M は模型を表し、 R は実物を表す。

$$L_M = \frac{L_R}{n} \quad (5.2.1)$$

$$\lambda_M = \frac{\lambda_R}{n} \quad (5.2.2)$$

模型スケールは $n=L_M/L_R$ とするとして、建物内を伝搬する波動の伝搬速度は第3章で示したように、式(5.1.3)～(5.1.5)で示される。ただし、 E は波動が伝搬する構造体のYoung率、 ρ は密度、 η は損失係数、 B は曲げ剛性、 m' は線密度、 ω は角周波数、 ν はPoisson比を表す。

a. 疑似縦波

| | | |
|--------|---|---------|
| ・ 棒要素 | $C_L = \sqrt{\frac{E(1+j\eta)}{\rho}}$ | |
| ・ 平板要素 | $C_L = \sqrt{\frac{E(1+j\eta)}{\rho(1-\nu^2)}}$ | (5.1.3) |

b. 曲げ波

| | | |
|--------|---|---------|
| ・ 棒要素 | $C_B = \sqrt{\omega^4 \frac{B(1+j\eta)}{m'}}$ | |
| ・ 平板要素 | $C_B = \sqrt{\omega^4 \frac{Eh^2(1+j\eta)}{12\rho(1-\nu^2)}}$ | (5.1.4) |

c. 剪断波

| | | |
|--------|--|---------|
| ・ 平板要素 | $C_T = \sqrt{\frac{E(1+j\eta)}{2\rho(1+\nu)}}$ | (5.1.5) |
|--------|--|---------|

式(5.2.2)の条件から、材料定数および周波数 f に関して式(5.1.6), ~ (5.1.8)の関係が導かれる。

a. 疑似縦波について

| | | |
|--------|--|---------|
| ・ 棒要素 | $f_M = nf_R \frac{C_{LM}}{C_{LR}} = n \sqrt{\frac{E_M(1+j\eta_M)}{E_R(1+j\eta_R)}} \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_M}} f_R$ | |
| ・ 平板要素 | $f_M = nf_R \frac{C_{LM}}{C_{LR}} = n \sqrt{\frac{E_M(1+j\eta_M)}{E_R(1+j\eta_R)}} \sqrt{\frac{\rho_R(1-\nu_R^2)}{\rho_M(1-\nu_M^2)}} f_R$ | (5.5.6) |

b. 曲げ波について

| | | |
|-------|--|--|
| ・ 棒要素 | $f_M = nf_R \frac{C_{BM}}{C_{BR}} = n^2 \sqrt{\frac{B_M(1+j\eta_M)}{B_R(1+j\eta_R)}} \sqrt{\frac{m_R}{m_M}} f_R = n \sqrt{\frac{E_M(1+j\eta_M)}{E_R(1+j\eta_R)}} \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_M}} f_R$ | |
|-------|--|--|

・平板要素

$$\begin{aligned}
 f_M &= n f_R \frac{C_{BM}}{C_{BR}} = n^2 \sqrt{\frac{E_M h_M^2 (1 + j\eta_M)}{E_R h_R^2 (1 + j\eta_R)}} \sqrt{\frac{\rho_R (1 - v_R^2)}{\rho_M (1 - v_M^2)}} f_R \\
 &= n \sqrt{\frac{E_M (1 + j\eta_M)}{E_R (1 + j\eta_R)}} \sqrt{\frac{\rho_R (1 - v_R^2)}{\rho_M (1 - v_M^2)}} f_R
 \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

c. 剪断波について

$$f_M = n f_R \frac{C_{TM}}{C_{TR}} = n \sqrt{\frac{E_M (1 + j\eta_M)}{E_R (1 + j\eta_R)}} \sqrt{\frac{\rho_R (1 + v_R)}{\rho_M (1 + v_M)}} f_R \tag{5.5.8}$$

ここで、実物と模型の損失係数とPoisson比が等しいとすると、式(5.5.6)～(5.5.8)は式(5.5.9)のようにまとめられる。

$$f_M = n \sqrt{\frac{E_M}{E_R}} \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_M}} f_R \tag{5.2.9}$$

上記の他に関係する物理量は、振動変位 x ，振動速度 \dot{x} ，振動加速度 \ddot{x} がある。これらも含めて、固体音に関する模型実験の相似則としてまとめると式(5.2.10)～(5.2.15)の関係が必要条件である。

$$(1) \text{長さ} \quad L_M = \frac{L_R}{n} \tag{5.2.10}$$

$$(2) \text{損失係数} \quad \eta_M = \eta_R \tag{5.2.11}$$

$$(3) \text{周波数} \quad f_M = n \sqrt{\frac{E_M}{E_R}} \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_M}} f_R \tag{5.2.12}$$

$$(4) \text{変位} \quad x_M = \frac{x_R}{n} \tag{5.2.13}$$

$$(5) \text{速度} \quad \dot{x}_M = \frac{f_M}{f_R} \frac{\dot{x}_R}{n} \tag{5.2.14}$$

$$(6) \text{加速度} \quad \ddot{x}_M = \left(\frac{f_M}{f_R}\right)^2 \frac{\ddot{x}_R}{n} \tag{5.2.15}$$

5.3 材料物性値

建物を構成する材料の物性値は，固体音が建物内を伝搬するときの性状に大きく影響する。材料の物性値は，密度，Young率，Poisson比，損失係数がある。これらの物性値のうち，損失係数以外は測定データも多く値もほぼ確定している。しかし，損失係数は比較的ばらつきが大きく，特に模型実験で良く用いられるビニール系の材料については損失係数の値は確定していないようである。従って，以下に損失係数の代表的な測定方法である残響法と半値幅法²⁾について記述しておくこととした。

5.3.1 残響法による損失係数の測定

損失係数とは，質点系モデルにおける系の固有振動数の減衰比の2倍の値として定義される。図5.2.1に示すような強制振動によって定常状態にある自由度1の質点系モデルについて， $t=0$ において外力がなくなった場合の系の動作を考える。

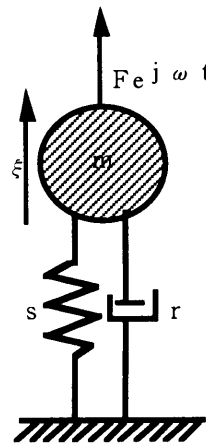


図5.3.1 1自由度質点系モデル

$t=0$ で外力がなくなった後の振動は自由振動状態となるので，動作方程式は式(5.3.1)で表され，その解は式(5.3.2)で表される。

$$m\ddot{\xi} + r\dot{\xi} + s\xi = 0 \quad (5.3.1)$$

$$\xi = A e^{-\delta\omega_0 t} e^{j\sqrt{1-\delta^2}\omega_0 t} \quad (5.3.2)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}} \quad \delta = \frac{r}{2\sqrt{ms}}$$

式(5.3.2)は、周波数 $\sqrt{1-\delta^2}\omega_0$ の正弦振動の振幅が、 $e^{-\delta\omega_0 t}$ で表される関数に従って時間の経過とともに図5.3.2に見られるような減衰性状であることを示している。

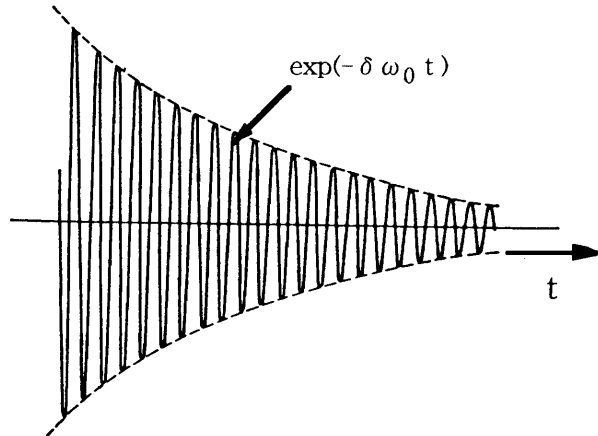


図5.3.2 減衰波形の性状

ここで図5.3.2の減衰波形と残響時間 T_0 の関係は、残響時間は振幅が60dB減衰するまでの時間であるから式(5.3.3)が成立する。

$$20 \log(Ae^{-\delta\omega_0 T_0}) = -60 \quad (5.3.3)$$

したがって、損失係数 η は残響時間を用いて式(5.3.4)で与えられる。

$$\eta = 2\delta = \frac{6}{\omega_0 T_0 \log e} = \frac{2.2}{f_0 T_0} \quad (5.3.4)$$

5.3.2 半値幅法による損失係数の測定

図5.3.1に示した1自由度振動系が定常状態にある時の質点の変位は式(5.3.5)で与えられる。また、周波数応答関数は式(5.3.6)で表され、その振幅は式(5.3.7)で与えられる。

$$\xi = \frac{F_0 e^{j(\omega t + \phi)}}{\sqrt{(s - m\omega^2)^2 + \omega^2 r^2}} \quad (5.3.5)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{s \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) + j \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right\}} \quad (5.3.6)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{s \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \quad (5.3.7)$$

周波数応答関数の振幅は $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ のときに最大となり、最大値は式(5.3.8)で与えられる。

$$|H(j\omega)|_p = \frac{1}{2s\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5.3.8)$$

式(2.2.8)において、 $\zeta \ll 1$ とすると $\omega_p = \omega_0$ となり、図5.3.3に示すように周波数応答関数は ω_p に関して対称となる。

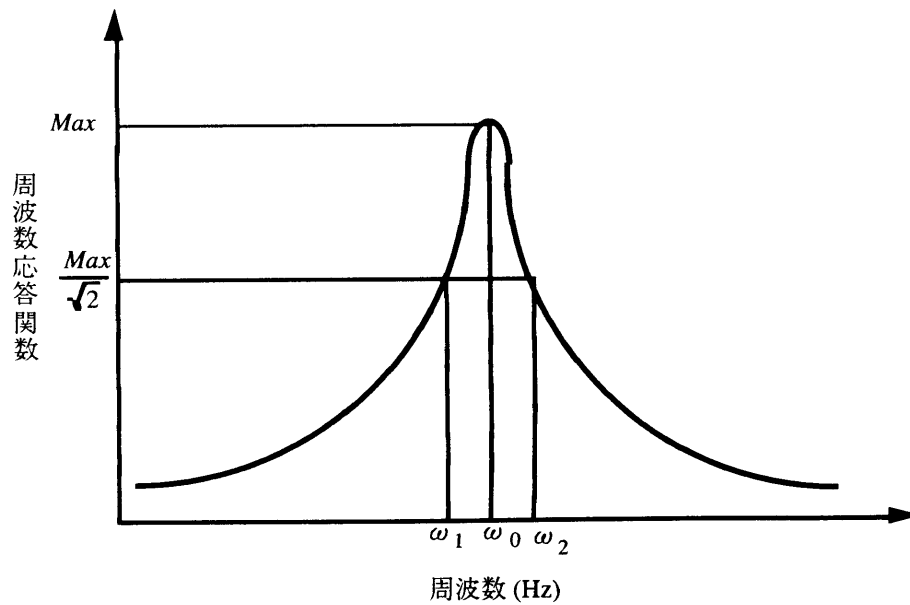


図5.3.3 周波数応答関数の共振点

ここで、周波数応答関数の振幅が最大値の $1/\sqrt{2}$ となる周波数を ω_1 、 ω_2 とおくと、

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

は式(5.3.9)で与えられる。

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \omega_0 \left(\sqrt{1 - 2\zeta^2 + 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} - \sqrt{1 - 2\zeta^2 - 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \quad (5.3.9)$$

$\zeta \ll 1$ の場合には、式(5.3.9)は更に式(5.3.10)のように書き替えられる。

$$\Delta\omega = \omega_0 \left(\sqrt{1 - 2\zeta^2 + 2\zeta} - \sqrt{1 - 2\zeta^2 - 2\zeta} \right) \quad (5.3.10)$$

式(5.3.10)をとについて解くと式(5.3.11)が得られる。

$$\zeta = \frac{\Delta\omega \sqrt{4 - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}{2\omega_0 \sqrt{4 + 2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (5.3.11)$$

式(5.3.11)から $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$ の場合には式(5.3.12)が得られる。

$$\zeta = \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \quad (5.3.12)$$

式(5.3.12)から、損失係数は周波数応答関数の振幅が共振点の最大値の $1/\sqrt{2}$ (-3 dB) となる周波数 ω_1 , ω_2 を測定することによって、 $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ から式(5.3.12)を用いて求めることができる。ただし、式(5.3.12)は

$$\zeta \ll 1, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$$

の場合に成立する。

$$\eta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (5.3.13)$$

ここで、 $\Delta\omega$ は小さい方が望ましいが、減衰が非常に小さい場合には、共振点付近の応答が極めて鋭くなるために、ピーク値から 3 dB 下がった点の周波数幅が非常に狭くなることによる読み取り誤差が大きくなることもある。

半値幅法はおおよそ損失係数が $10^{-3} \sim 10^{-1}$ 程度の材料を測定するのに適しており、小さい損失係数の材料を測定する場合には残響時間法が適している。また、半値幅法での測定は、周波数が高くなってくると高次の共振点を単独で取り出すことが難しくなってくる。それに対して、残響法は、周波数が低くなってくるとモードが少なくなってくるために、残響カーブの折れ曲がり等による測定誤差が大きくなっていく。

5.4 6層骨組み構造模型における予測手法の検証

5.4.1 模型の概要

6層の骨組構造模型を硬質塩化ビニルで製作した。建物の形状・寸法は、一般的な事務所ビルの1スパン12m×6.5mを想定し、その1/20スケールモデルを製作した。

写真5.4.1に模型の概要を示す。

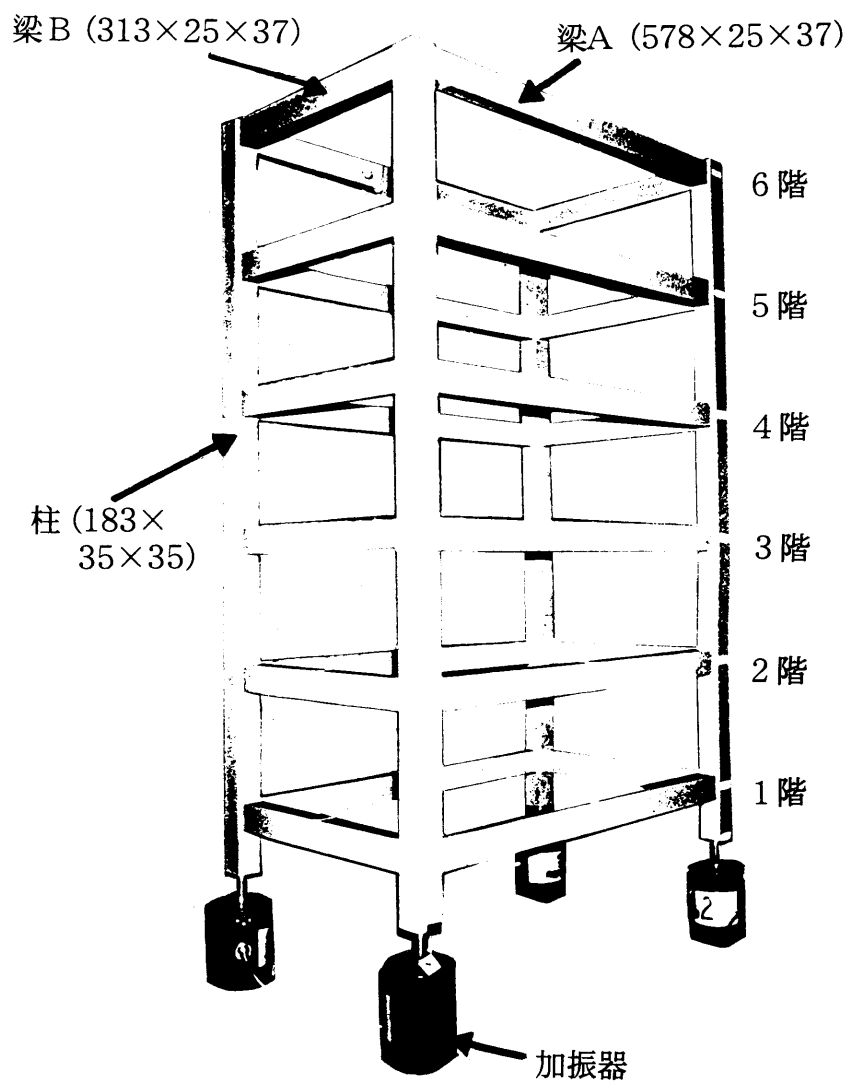


写真5.4.1 模型の概要

5.4.2 模型材料の物性値

製作模型の材料は、硬質塩化ビニルである。

硬質塩化ビニルの密度は $1,380\text{kg/m}^3$ 、Young率は $2.843 \times 10^9\text{N/m}^2$ であり、Poisson比は0.28である。ただし、密度は測定値であるが、Young率とPoisson値は参考文献³⁾から引用した値である。

損失係数については、一般にビニール系の損失係数は非常にばらつくことが多いといわれている。そのため、本実験でも損失係数の測定を数回に分けて行ってみた。損失係数の測定は、前節で述べた自由減衰波形から読み取る残響法と材料の共振ピークから読み取る半値幅法との2方法を用いて、100Hz～5kHzの各1/3オクターブバンドごとに求めた。

測定は、写真5.4.2に示すように、棒状の硬質塩化ビニル(35×35×2000)を糸で吊り下げ、その片端部に加振器を取り付け、もう一方の端部に振動加速度ピックアップを取り付けた。

残響時間法による測定は、M系列信号を用いて残響時間を測定し、式(5.3.4)の固有周波数は各1/3オクターブバンドの中心周波数に等しいとした。

半値幅法による測定は、残響法と同じように硬質塩化ビニルと振動加速度ピックアップを設置し、加振器を用いて塩化ビニルをホワイトノイズ加振したときの共振周波数をFFT分析器により測定した。

図5.4.1に残響法の測定ブロック図を示し、図5.4.2に半値幅法の測定ブロック図を示す。

図5.4.3は、硬質塩化ビニルの損失係数測定結果である。損失係数は、0.05～0.06程度となっている。

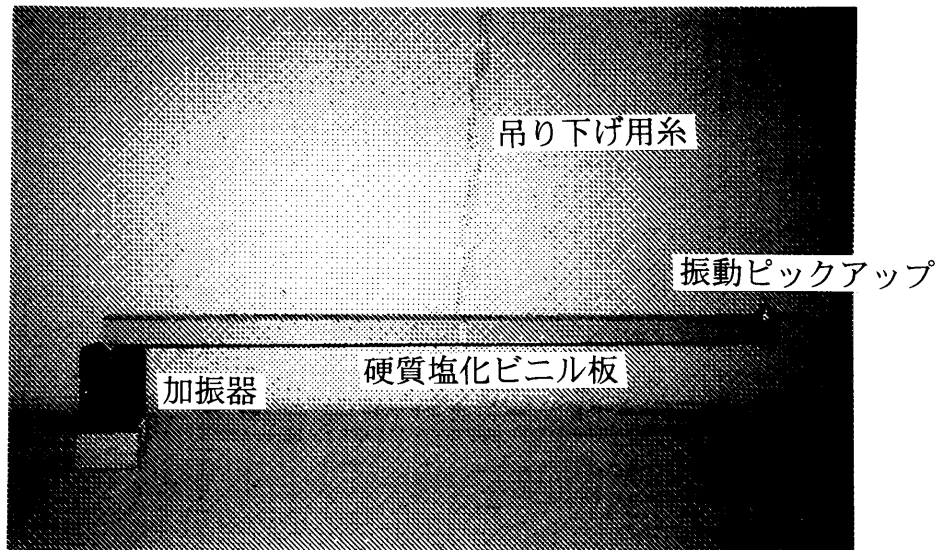


写真 5.4.2 損失係数の測定

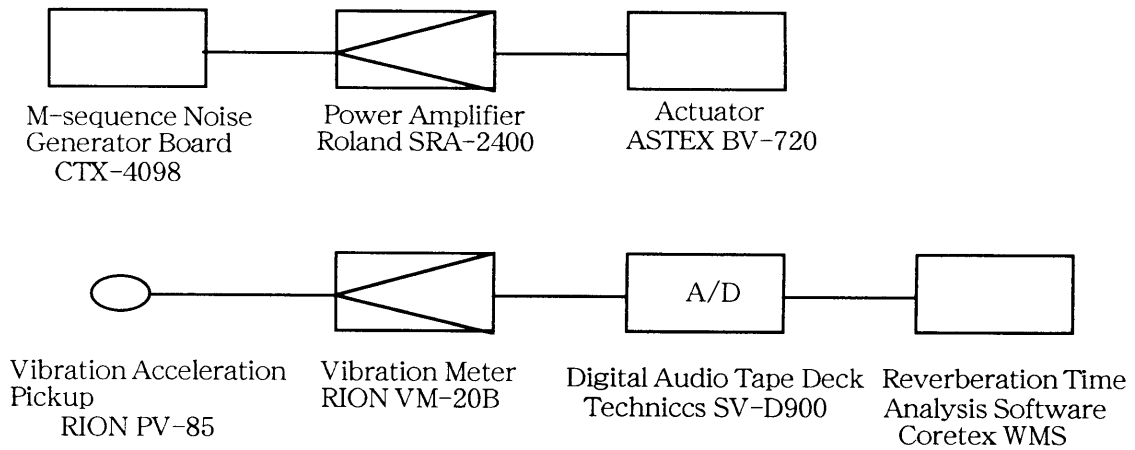


図 5.4.1 残響法による損失係数の測定ブロック図

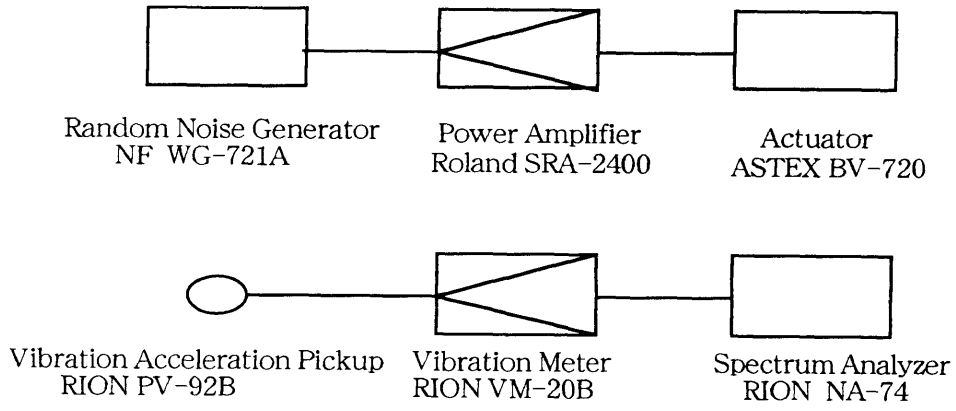


図 5.4.2 半値幅による損失係数の測定ブロック図

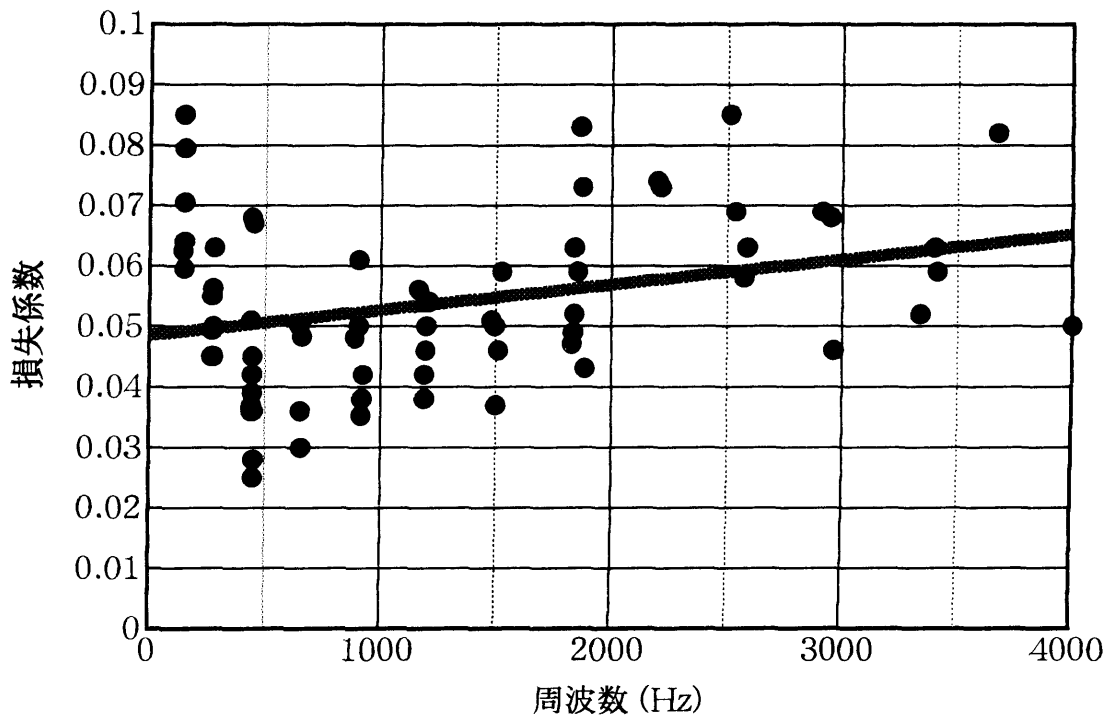


図 5.4.3 硬質塩化ビニルの損失係数

5.4.3 模型実験方法

表5.4.1はコンクリートと硬質塩化ビニルの物性値を比較したものである。建物模型は形状・寸法の縮尺が実物の1/20を想定しているので、損失係数を無視して表5.4.1の値を式(5.2.12)に代入すると、模型で対象となる周波数は実物の8倍の周波数が対応する。

表5.4.1 コンクリートと硬質塩化ビニルの物性値の比較

| | Young率 (N/m ²) | 密度 (Kg/m ³) | 損失係数 |
|----------|----------------------------|-------------------------|------------|
| 普通コンクリート | 2.7×10^{10} | 2300 | 0.005~0.03 |
| 硬質塩化ビニル | 2.843×10^9 | 1380 | 0.05~0.06 |

地下鉄や鉄道からの固体音に関して問題とされる周波数はオクターブバンドで中心周波数31.5Hz~250Hzであるので、模型実験では8倍の周波数である250~2kHzがそれに対応する。模型実験は、これらのオクターブバンド周波数帯域を含む100Hz~2.5kHzを対象として行った。

模型の底部に4個の加振器を設置し、模型と加振器を接着剤で接合した。4個の加振器は並列接続とし、ホワイトノイズによって模型全体を鉛直方向に加振したときの各測定点の振動加速度レベルを測定した。

図5.4.4に測定系統ブロック図を示す。

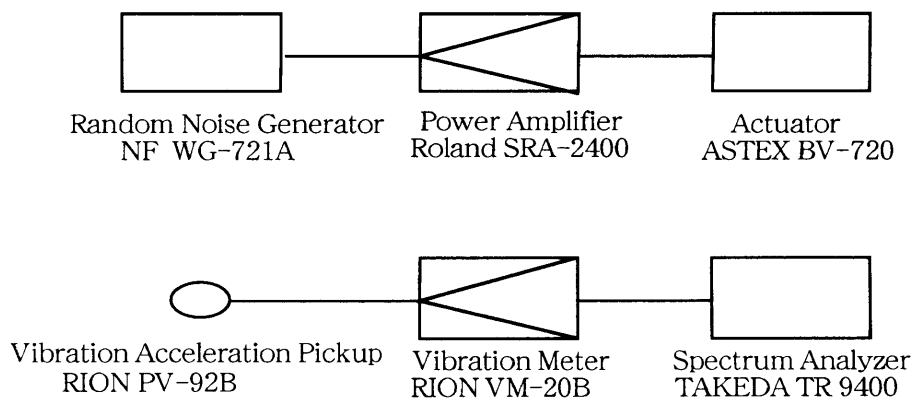


図5.4.4 測定系統ブロック図

5.4.4 計算モデル

建物模型について数値計算を行った。建物模型は図5.4.5に示すように要素数48，節点数28の骨組構造モデルでモデル化した。

材料物性値は表5.4.2に示す値を用いて計算を行った。

表 5.4.2 計算に用いた材料物性値

| 密度 (Kg/m ³) | Young率 (N/m ²) | Poisson比 | 損失係数 |
|-------------------------|----------------------------|----------|------|
| 1,380 | 2.843×10 ⁹ | 0.28 | 0.06 |

また，模型に対する加振力は，模型実験において加振器の加振力を実測することができなかったため，ここでは，建物模型と加振器の接合部(節点1～4)の振動加速度値が既知であるとして，他の節点の振動加速度値を求めた。

図5.4.6は，計算に用いた節点1を基準としたときの節点2～4の周波数応答関数の実験値である。図5.4.6から，実験は加振器を並列に接続し同振幅同位相で建物を加振するように努めたが，実際にはロッキング現象等が発生しているために，節点1と3における加速度はその対角にあたる節点2と4における加速度と実験した大部分の周波数帯域で逆位相に近い状態となっていたことがわかる。

また，加速度振幅は500Hzより高い周波数帯域では±5dB以内の差となっているが，500Hz以下では差が大きくなっている。

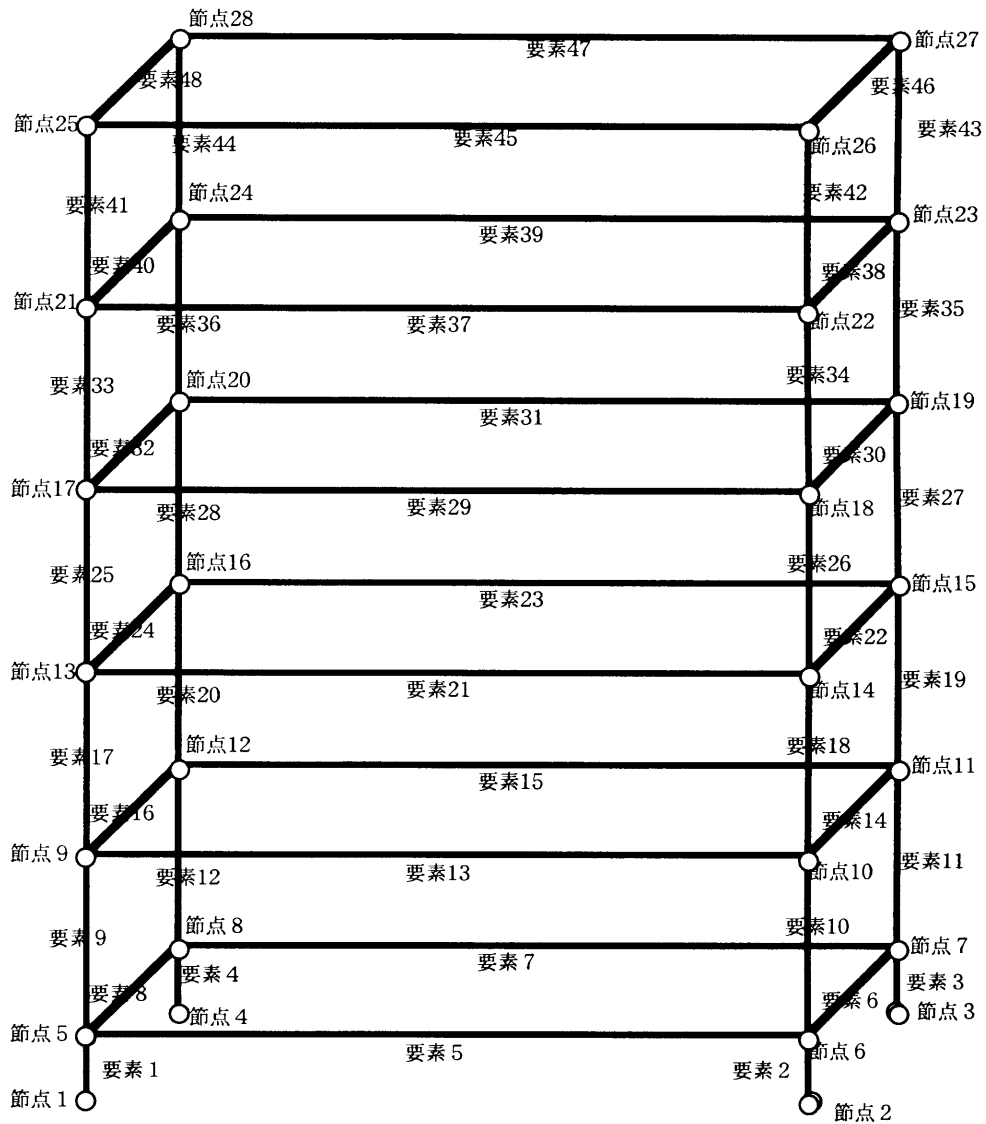


図 5.4.5 建物模型の計算モデル

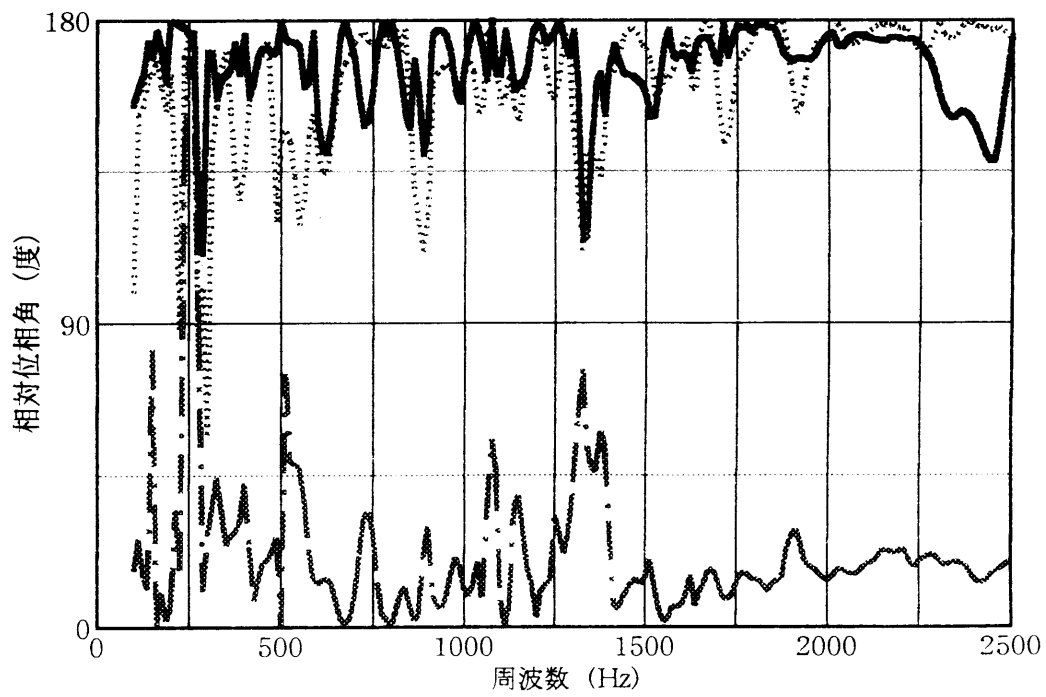
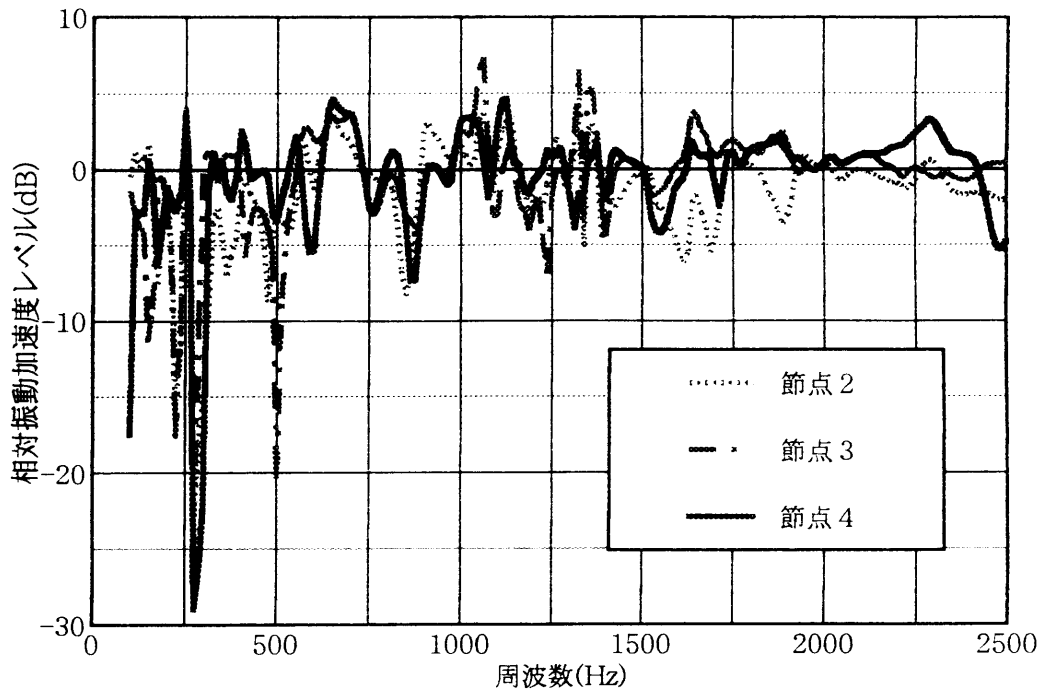


図5.4.6 節点2～4の節点1に対する振動加速度

5.4.5 計算結果と実験結果の比較

図5.4.7, 5.4.8は各階の周波数応答関数の模型実験結果と計算結果の比較を示したものである。周波数応答関数は、節点1～4の振動加速度レベルの平均値を基準として、各階の4節点の振動加速度レベルの平均値との差で表した。

計算値は1500Hz付近で周波数応答関数が小さくなっているのに対して、実験値は1250Hz付近で周波数応答関数が小さくなっていることなど細部は未だ十分な対応がとれていないが、全体的によく一致した傾向は示しており、本手法で固体音の建物内伝搬性状予測の可能性が示されたといえる。

図5.4.9は、模型実験値と計算値のオクターブバンド分析結果で、両者を比較したものである。250Hzでは、計算値と実験値の差が大きくなっているが、その他の周波数では両者は良く一致しており、実用的には問題ない対応が得られている。

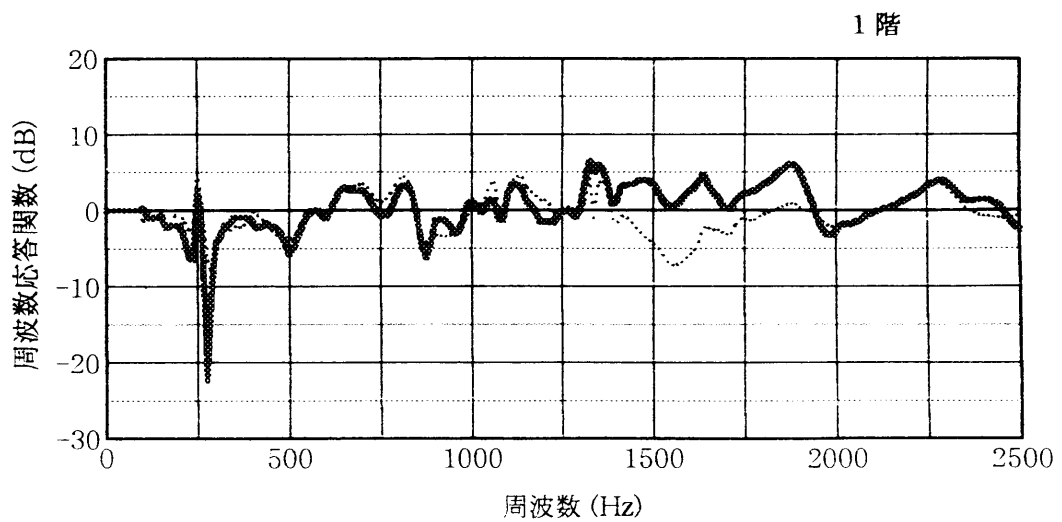
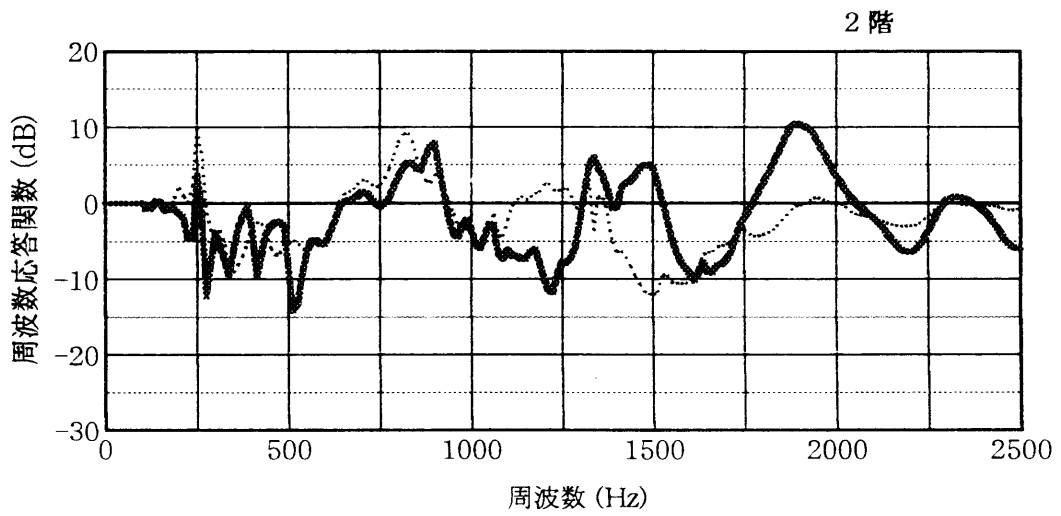
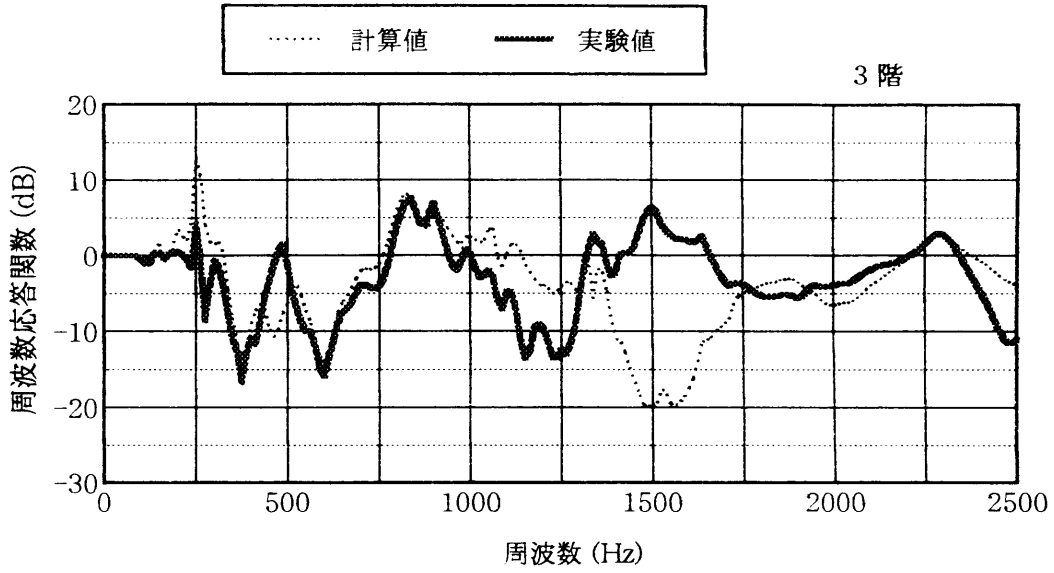


図5.4.7 6層骨組み構造模型による実験値と計算値の比較

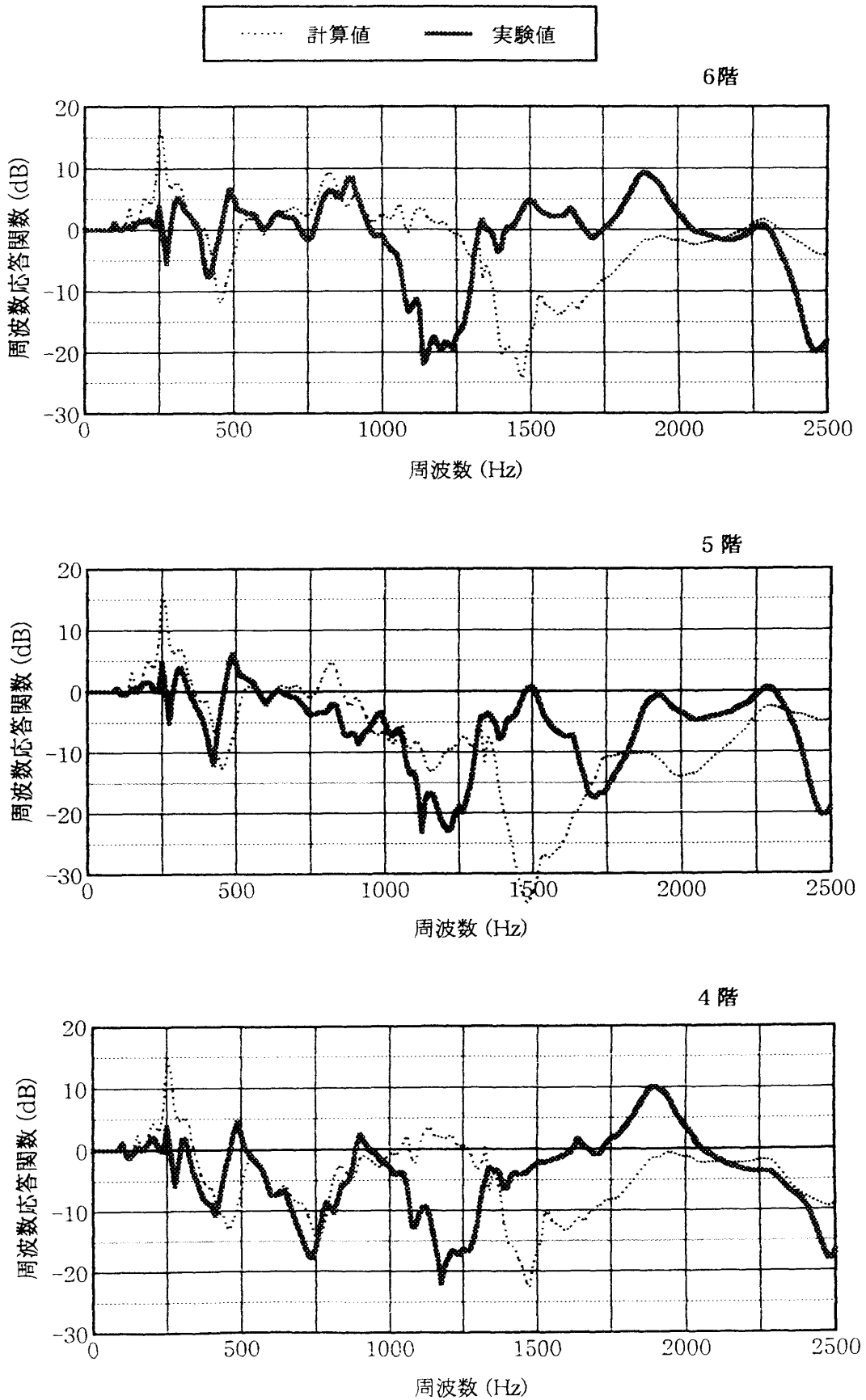


図5.4.8 6層骨組み構造模型による実験値と計算値の比較

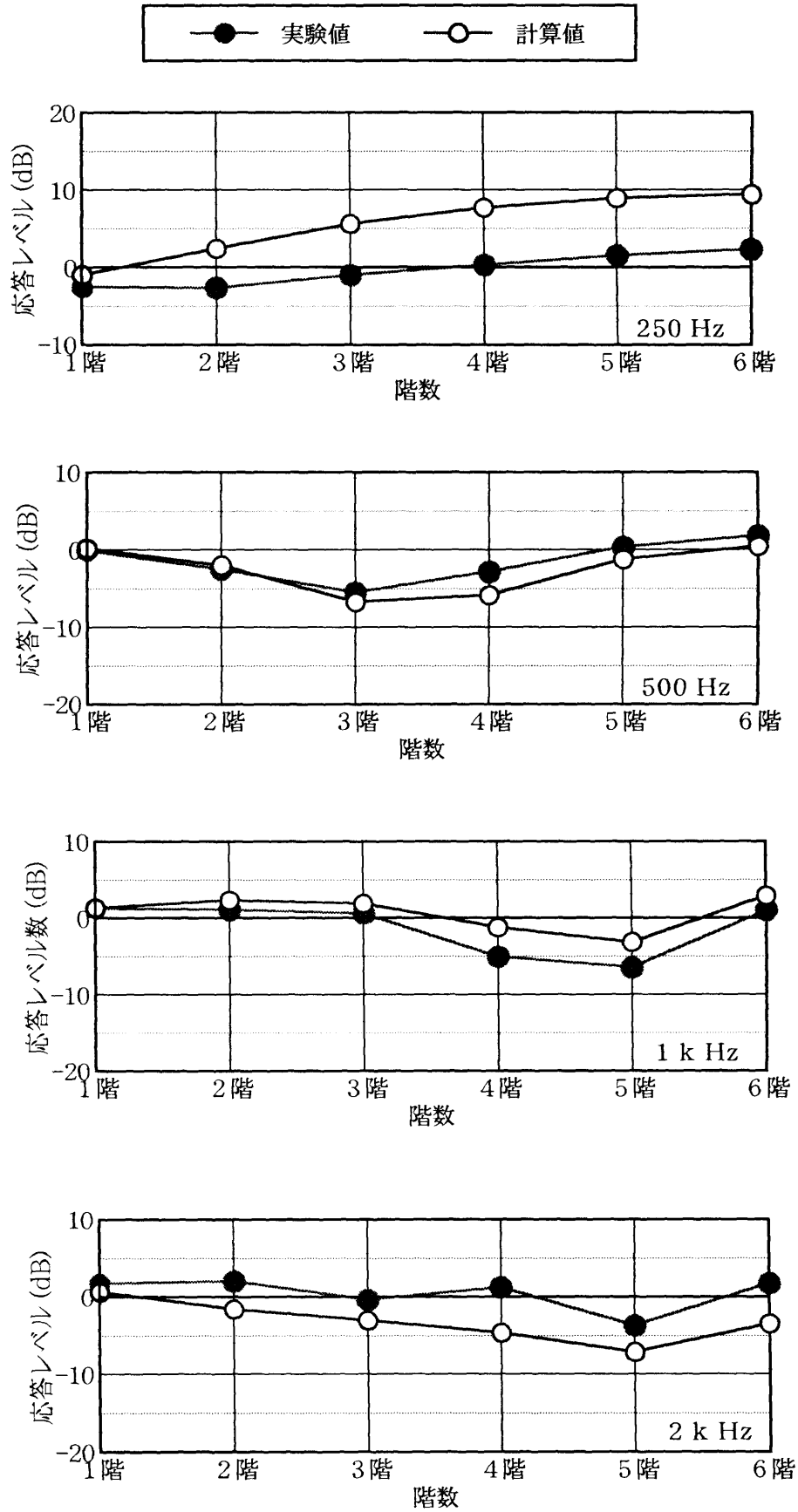


図5.4.9 オクターブバンド幅での実験値と計算値の比較

5.4.6 計算値に対する加振力の影響

前項の計算値と実験値の比較から、節点1～4の振動加速度測定値を入力として各節点の周波数応答関数を求めた計算値は実用上問題のない精度が得られることが分かった。しかし、実際の予測計算では、節点1～4の入力として位相も考慮した振動加速度を用いることは困難な場合も多い。

そこで、節点1～4に同位相の単位振幅鉛直方向外力が作用したときの各節点の周波数応答関数を求め、節点1～4の振動加速度測定値を入力とした計算結果との比較検討を行った。

図5.4.10と5.4.11は両者の計算結果を比較したものである。また、図5.4.12は、オクターブバンドで求めた結果を比較したものである。周波数応答関数は、各階の4節点の平均値で表している。

図5.4.10と5.4.11から、同位相同振幅入力の場合は上階になるにつれて位相干渉の影響が大きく現れてきており、周波数応答関数の落ち込みが強くなってきていることがわかる。しかし、オクターブバンドで示した図5.4.12は両者が良く一致している結果を示している。

以上のことから、固体音の建物内伝搬性状において入力波の振幅と位相差は重要なパラメータであり、完全な予測を行うためには加振力各々の振幅比と位相差を考慮に入れる必要がある。しかしながら、固体音の評価はオクターブバンド分析値による評価が一般的に行われているので、その場合はこれらを見殺した計算を行っても実用的な予測評価は本手法で可能であるといえる。

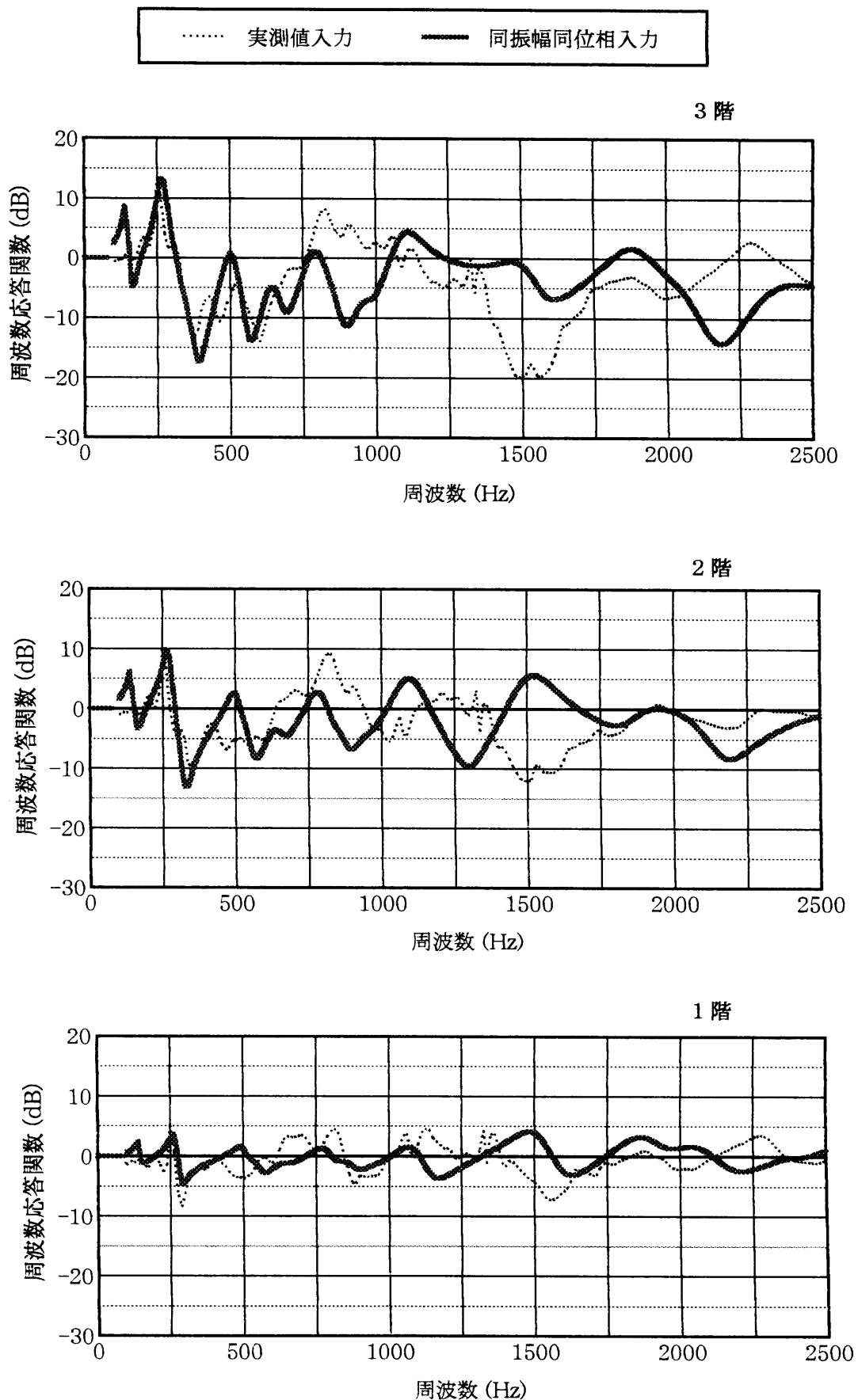


図5.4.10 計算値に対する入力波の位相の影響比較

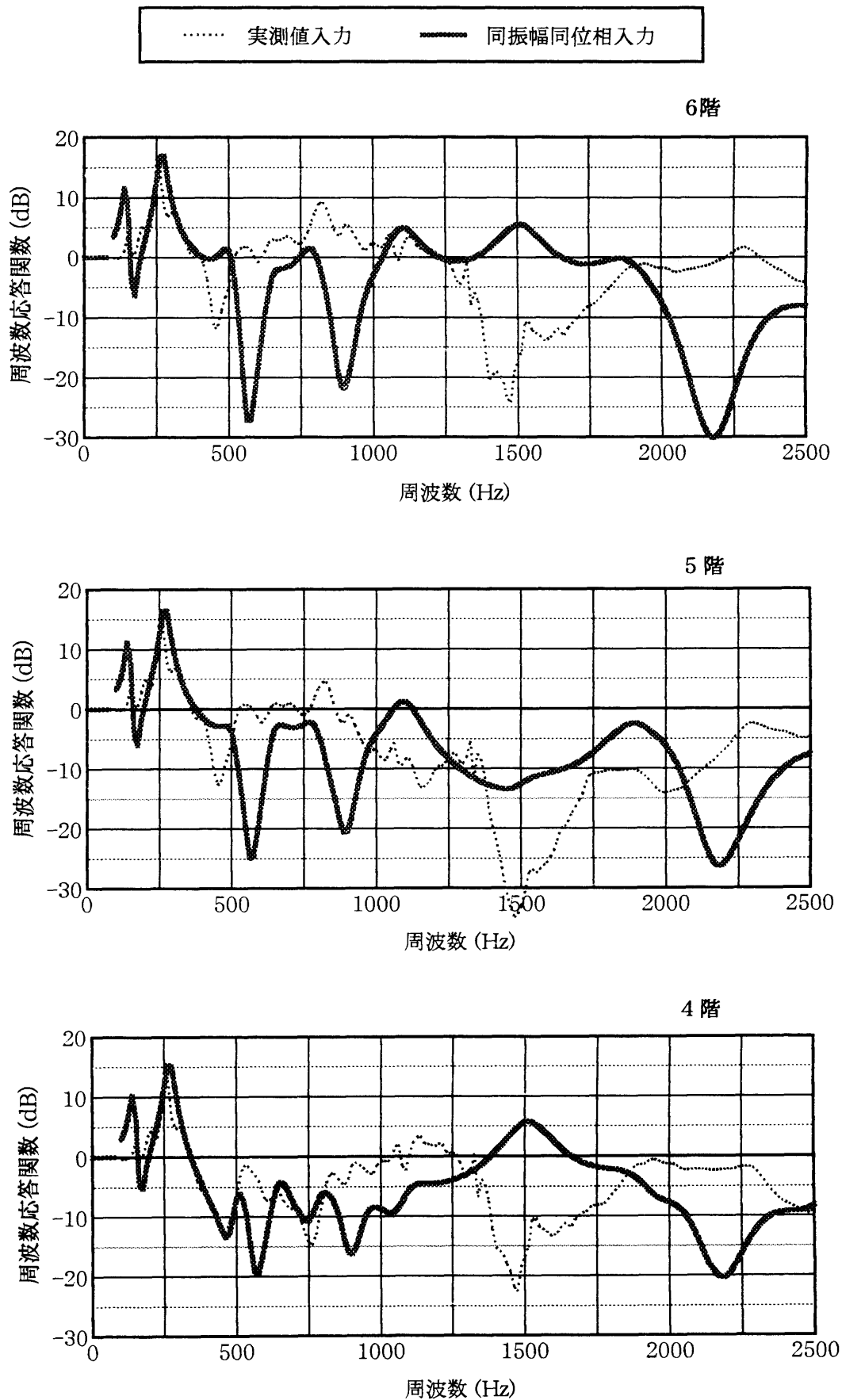


図5.4.11 計算値に対する入力波の位相の影響比較

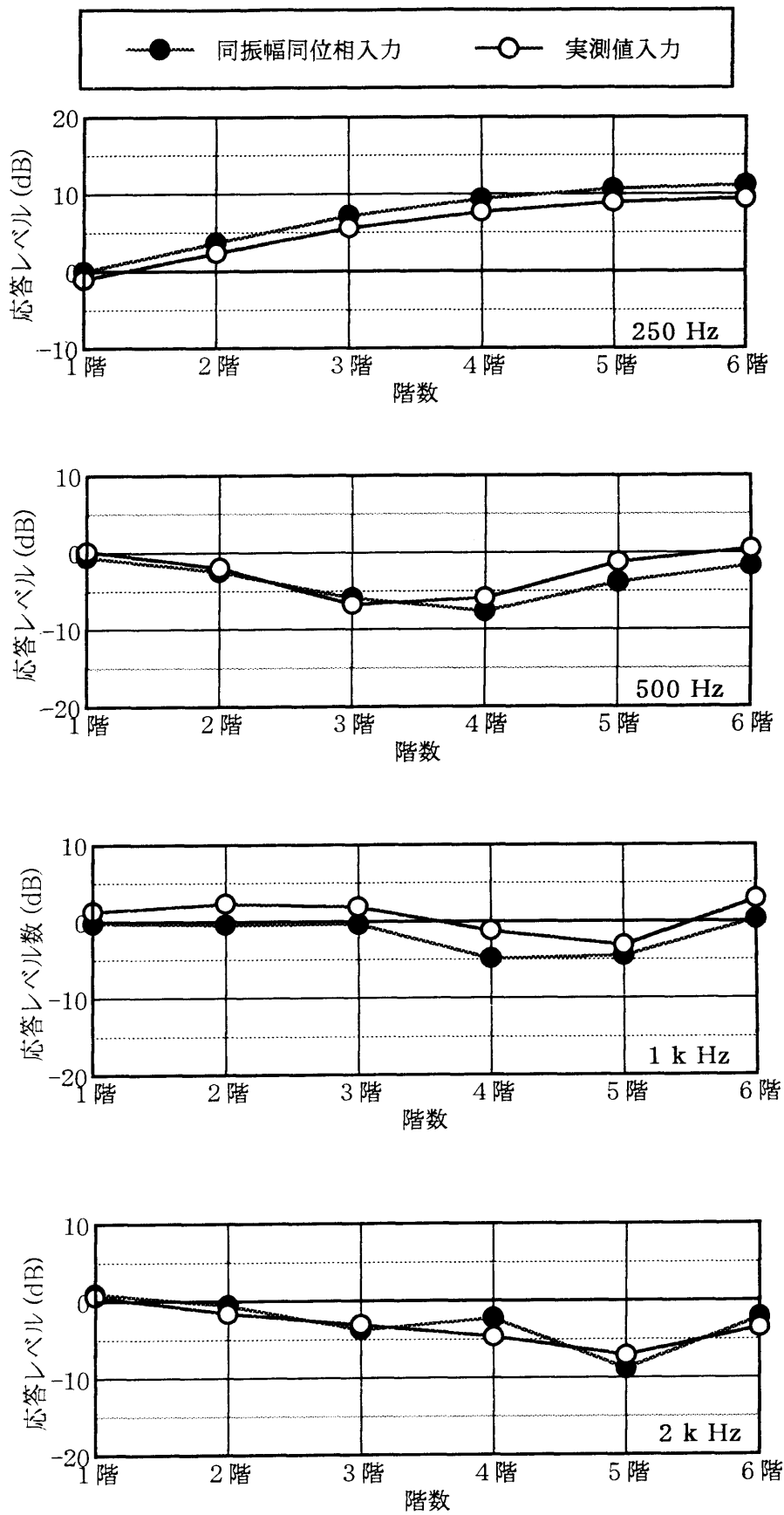


図5.4.12 計算値に対する入力波の位相の影響比較

5.5 11層骨組み構造模型における予測手法の検証

5.5.1 模型の概要

模型は、第5章4節で述べた6層の骨組構造模型と同じ材料である硬質塩化ビニルを用いて、11層の床版付き骨組構造模型を製作した。

写真5.5.1に模型の概要を示す。

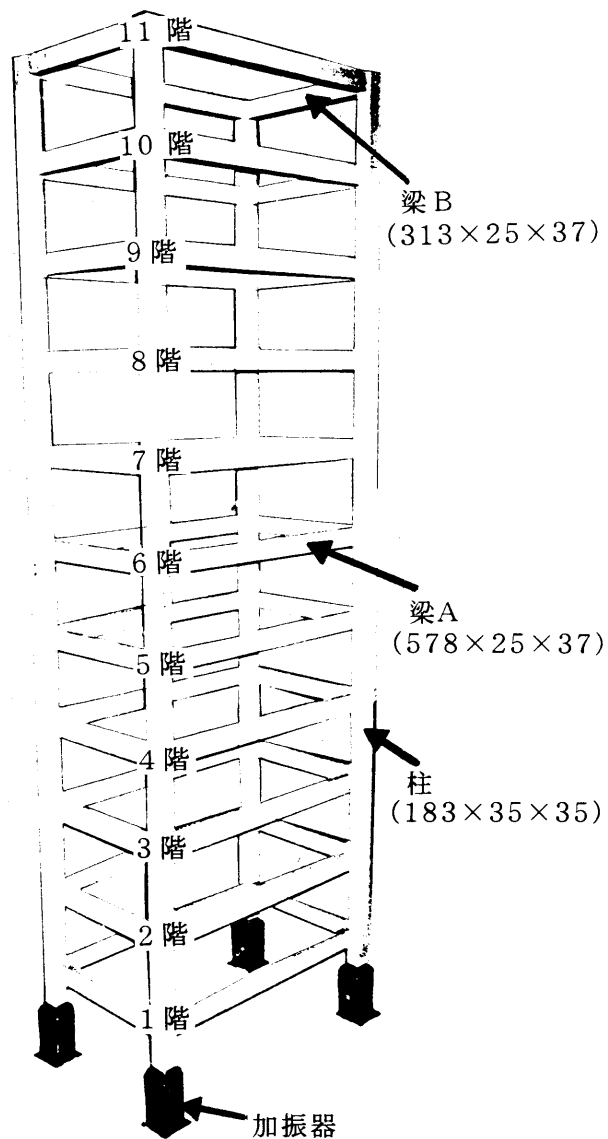


写真5.5.1 模型の概要

5.5.2 計算モデル

建物模型は図5.5.1に示すように梁要素数88，節点数48のモデルとした。材料物性値は表5.4.2に示した値を用いた。

前節で，6層骨組み構造模型において，入力波の位相を考慮しなくても本計算方法による計算値は実用上問題のない精度が得られることを示した。

従って，本節においては，節点1～4に同位相の単位振幅鉛直方向外力が作用したときの各節点の周波数応答関数を求め，実験結果との比較検討を行うこととした。

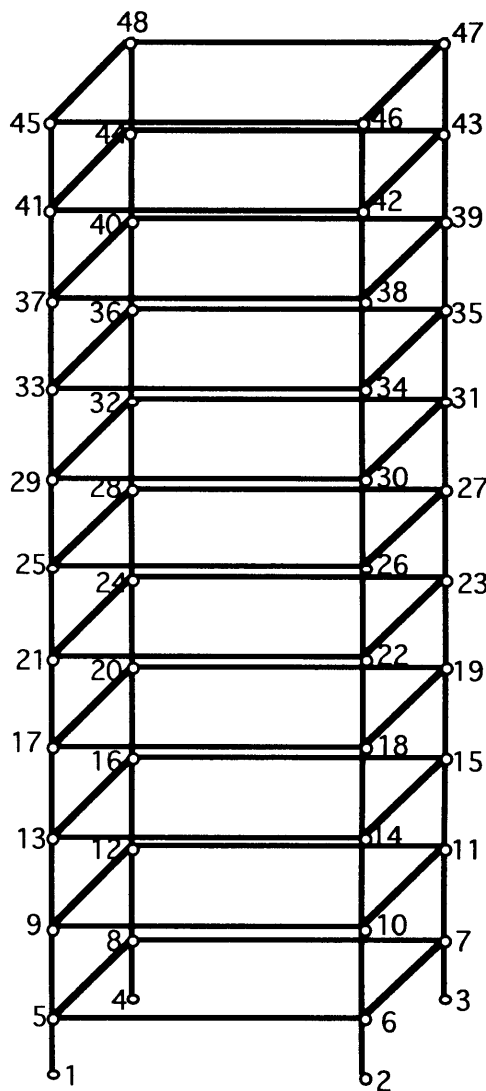


図5.5.1 計算モデル

5.5.3 計算結果と実験結果の比較

図5.5.2～5.5.5は各階の周波数応答関数の模型実験結果と計算結果の比較を示したものである。周波数応答関数は、各階の4質点の平均値で表している。

計算値は上階になるにつれて位相干渉の影響が大きく現れてきており、周波数応答関数の落ち込みが強くなってきている。特に10階11階では50dB程度の落ち込みがみられる。

図5.5.6は、模型実験値と計算値のオクターブバンド分析結果を、両者を比較したものである。計算値と実験値は全体的な傾向は極めて良く一致しており、また、実験値と計算値の差も5dB以内となっている。また、振動加速度レベルが最上階で上昇すること、500Hz以下の帯域では建物全体のモードの影響が大きく現れているのに対して、1kHz以上の帯域では上階となるに従って単調に減衰する性状を示すことなど良く表している結果となっている。

これらの結果から、固体音をオクターブバンド分析値による評価する限りにおいては、入力波を単位振幅同位相した計算によって周波数応答関数を求めても十分な予測評価は本手法で可能であるといえる。

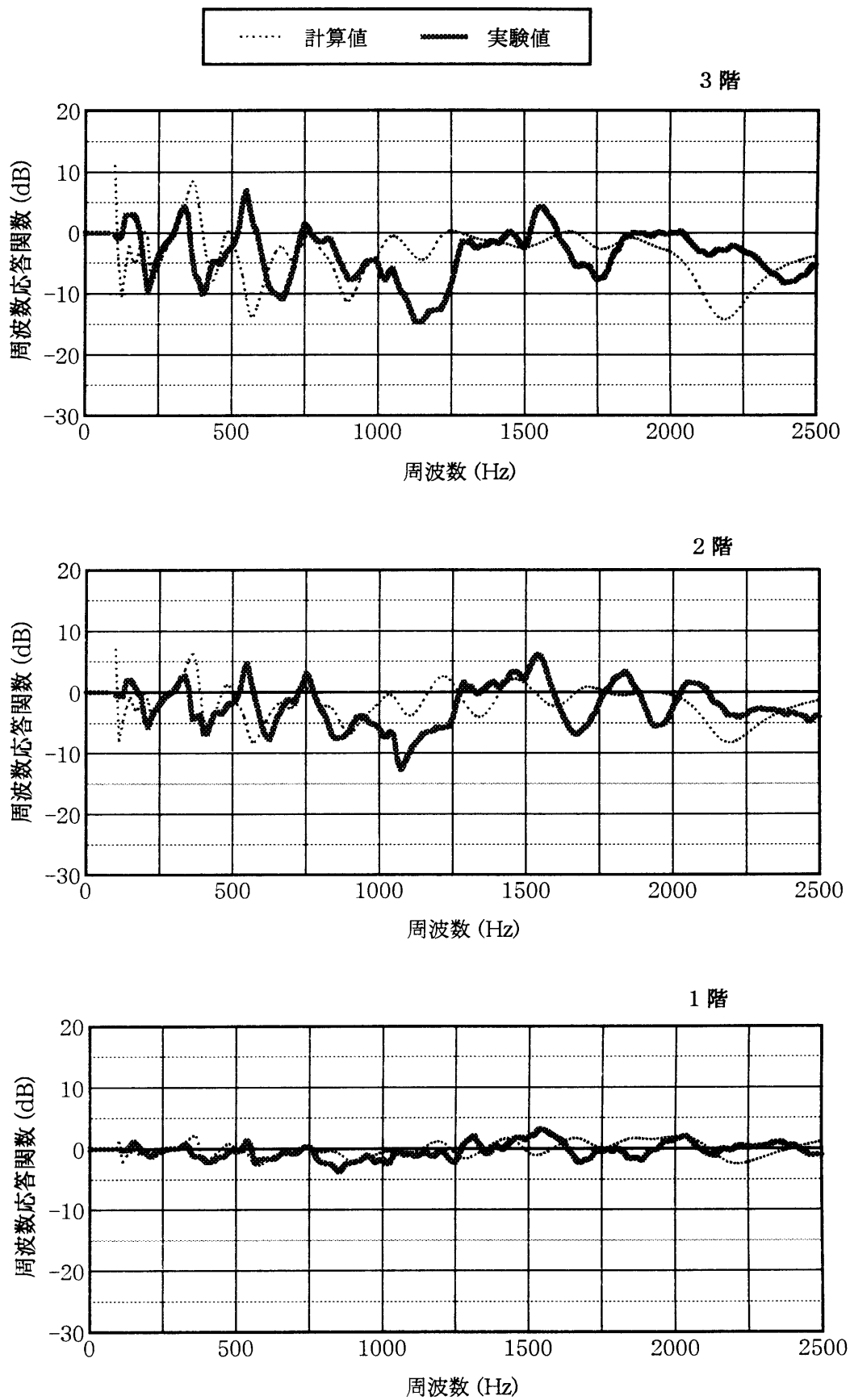


図5.5.2 11層骨組み構造模型による実験値と計算値の比較

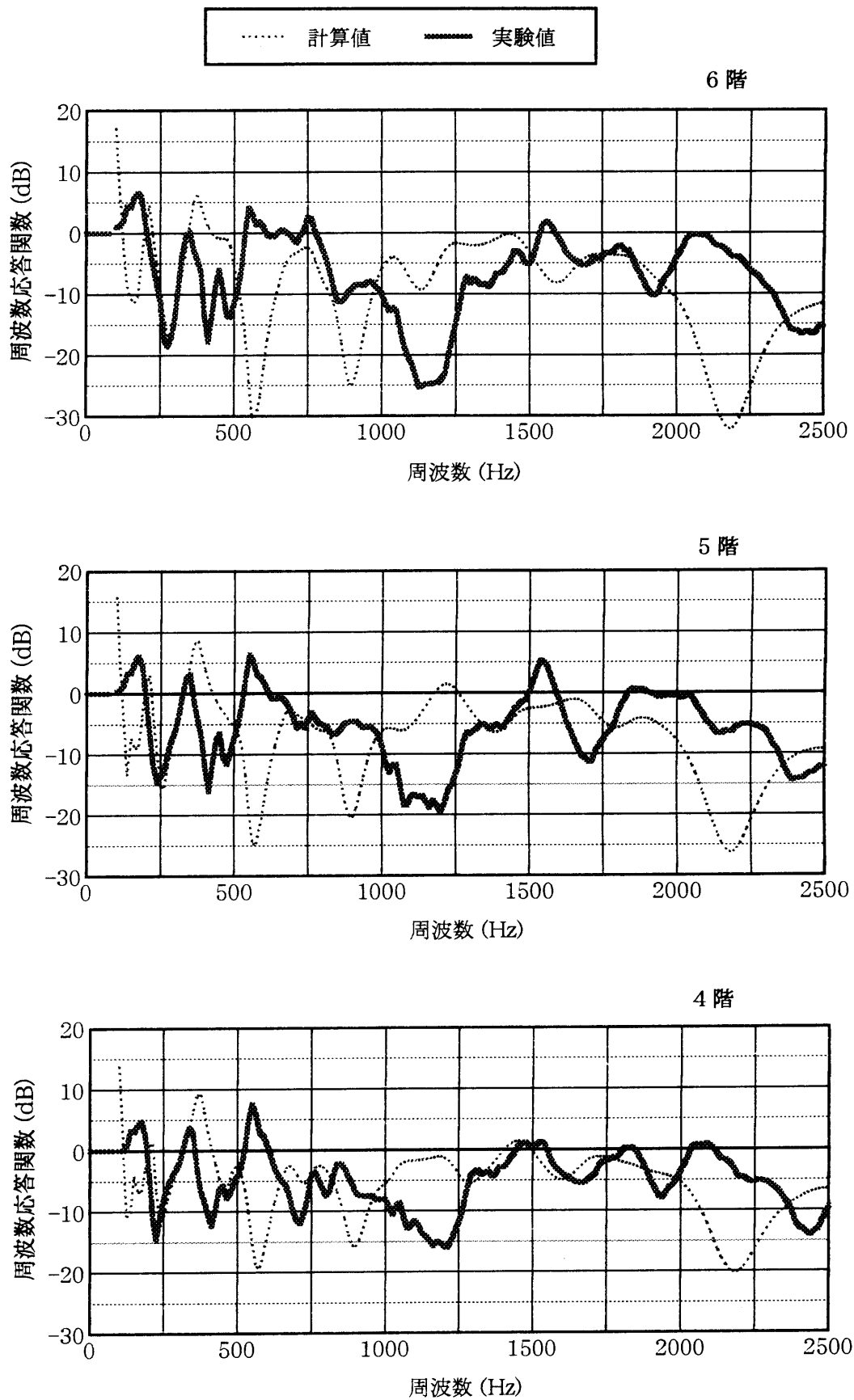


図5.5.3 11層骨組み構造模型による実験値と計算値の比較

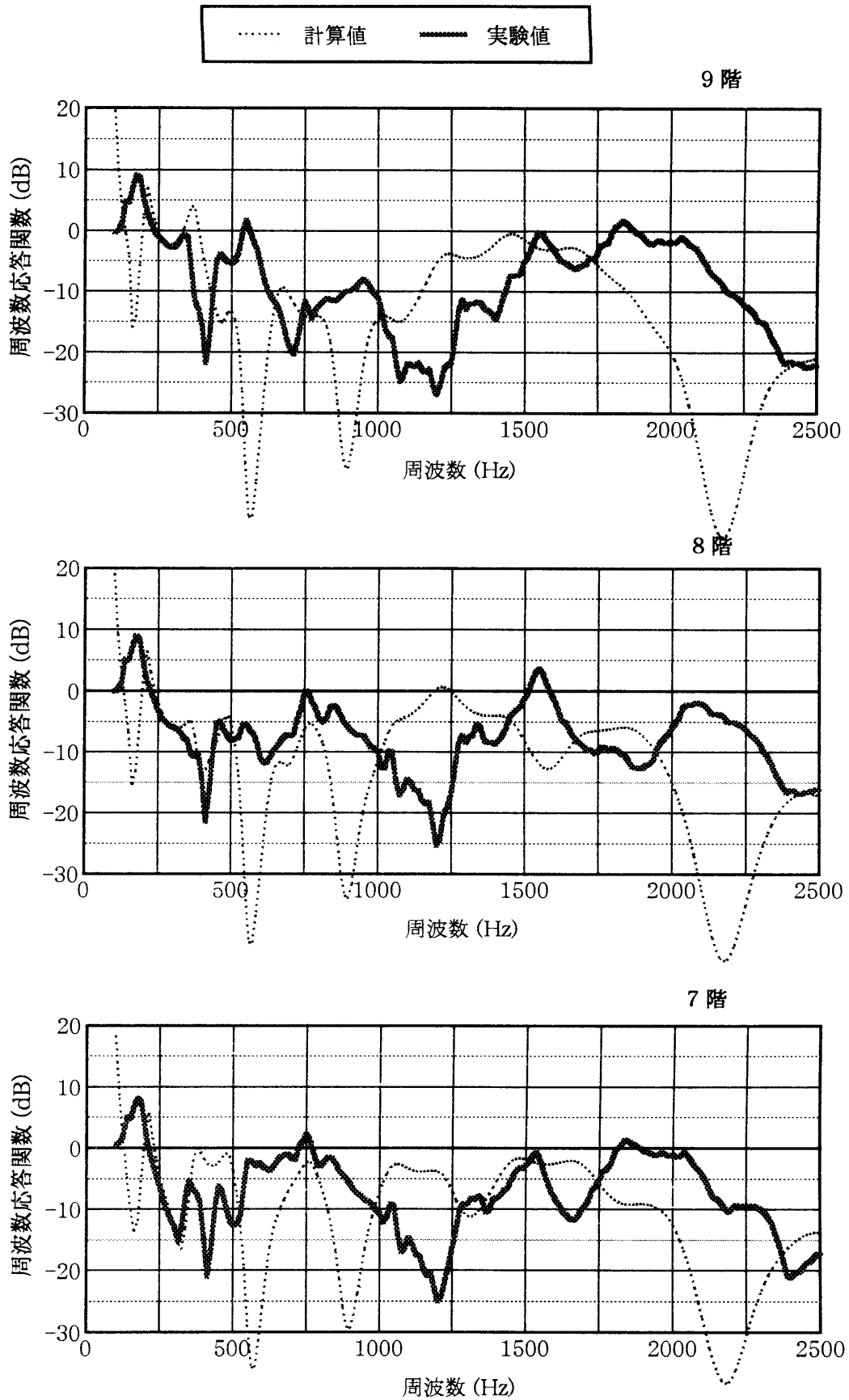


図5.5.4 11層骨組み構造モデルによる実験値と計算値の比較

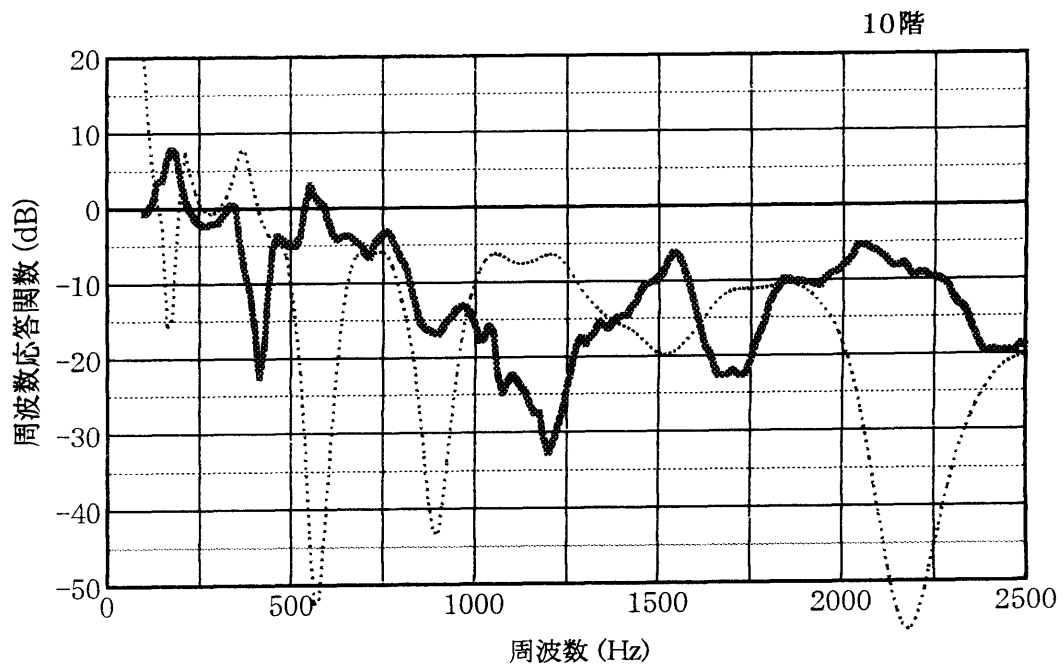
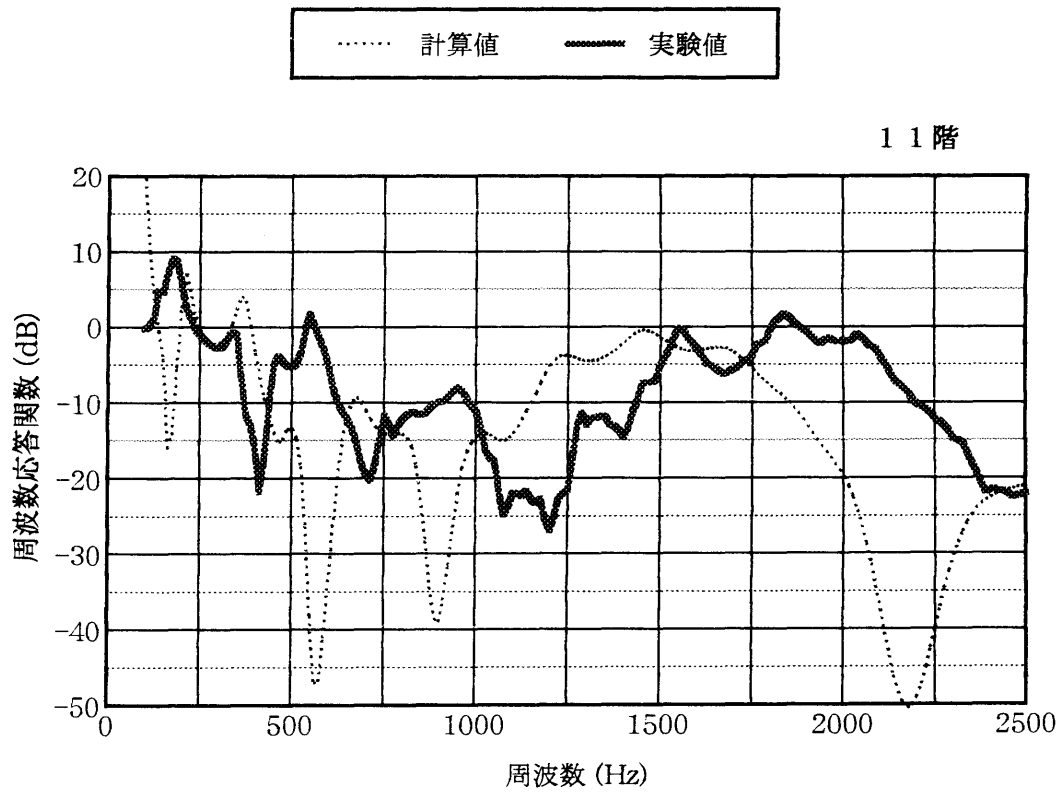


図5.5.5 11層骨組み構造模型による実験値と計算値の比較

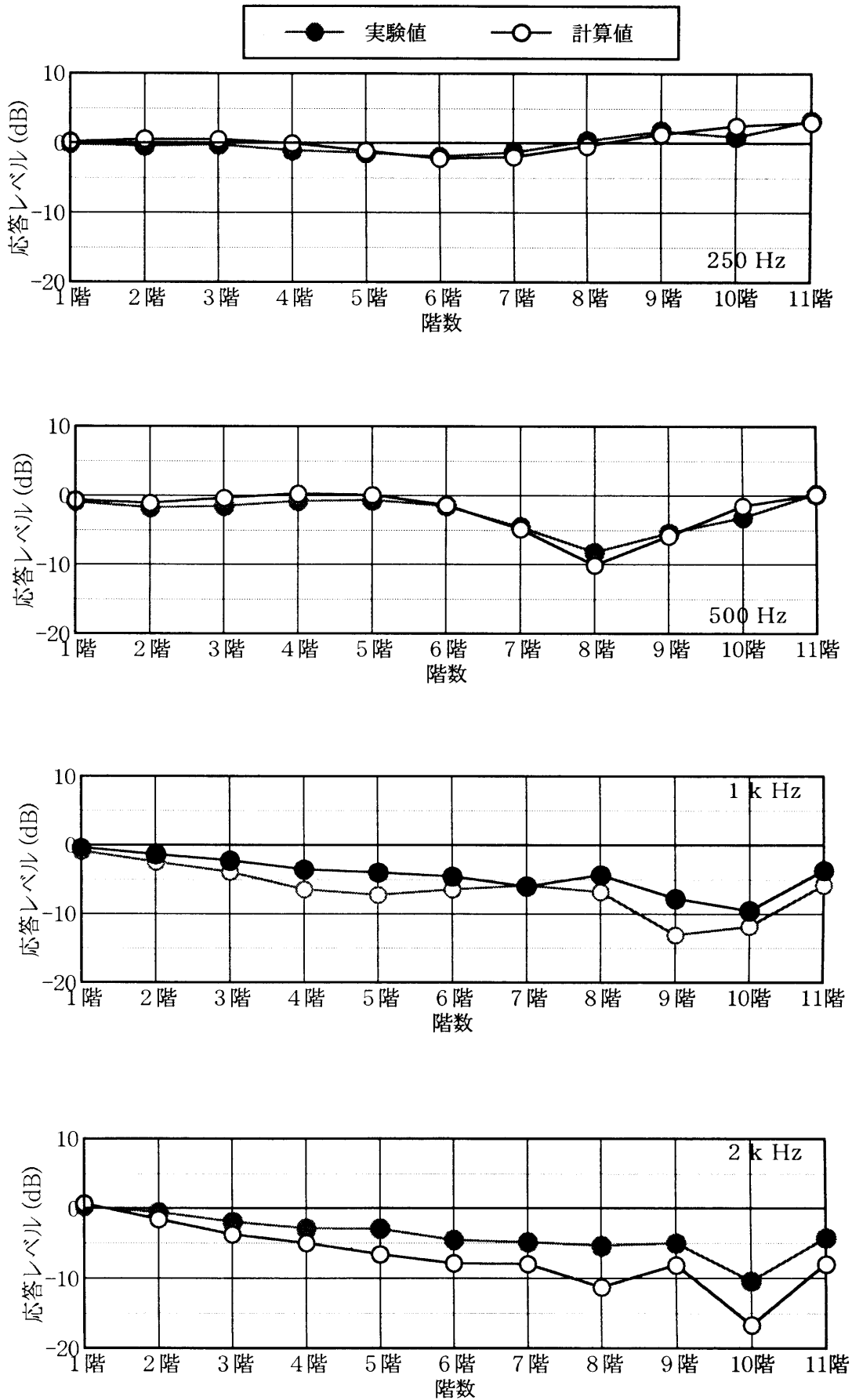


図5.5.6 オクターブバンド幅での実験値と計算値の比較

5.6 6層床版付き骨組み構造模型における 予測手法の検証

5.6.1 模型の概要

模型は、第5章4節で述べた6層の骨組構造模型に厚さ6mm硬質塩化ビニル板を床版として貼り足して、6層の床版付き骨組構造模型を製作した。

写真5.6.1に模型の概要を示す。

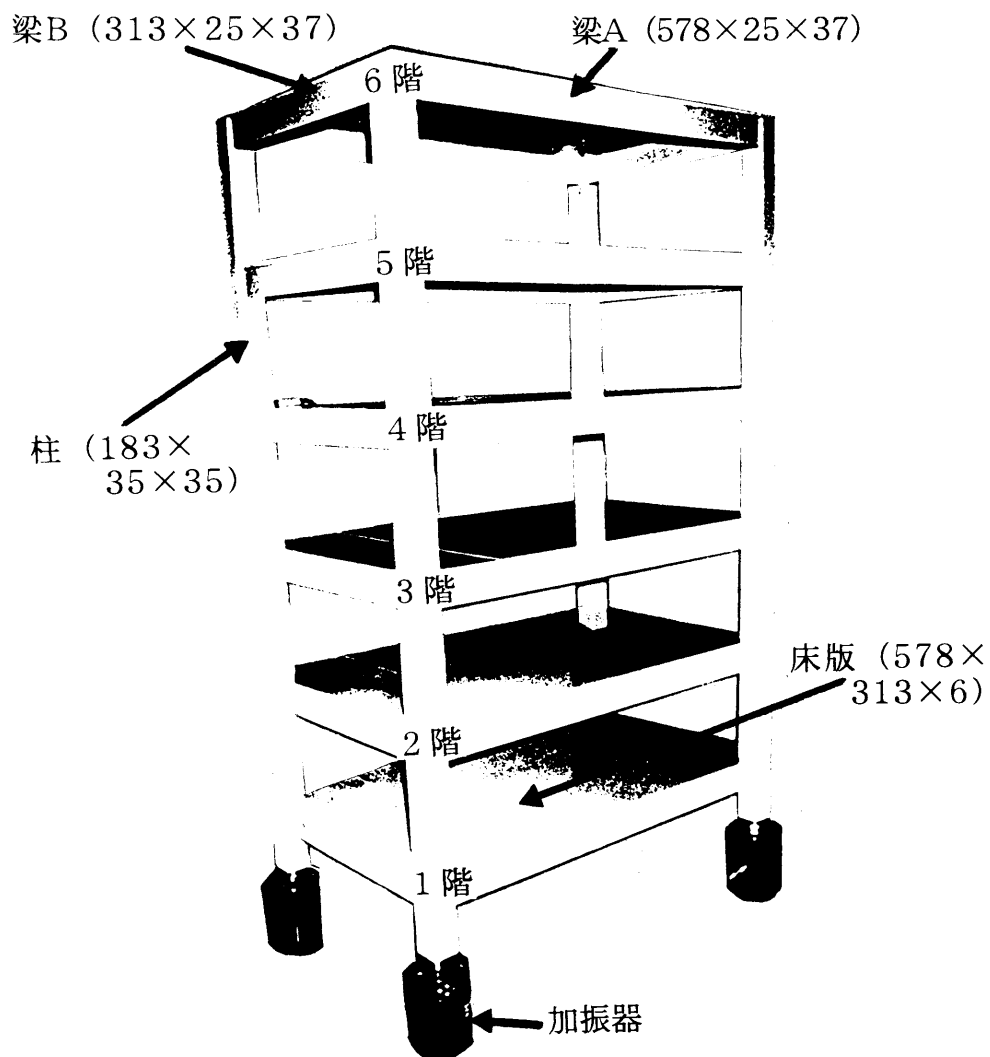


写真5.6.1 模型の概要

5.6.2 計算モデル

建物模型は図5.6.1に示すように梁要素数48，平板要素数6，節点数28のモデルとした。
材料物性値は表5.4.2に示した値を用いた。

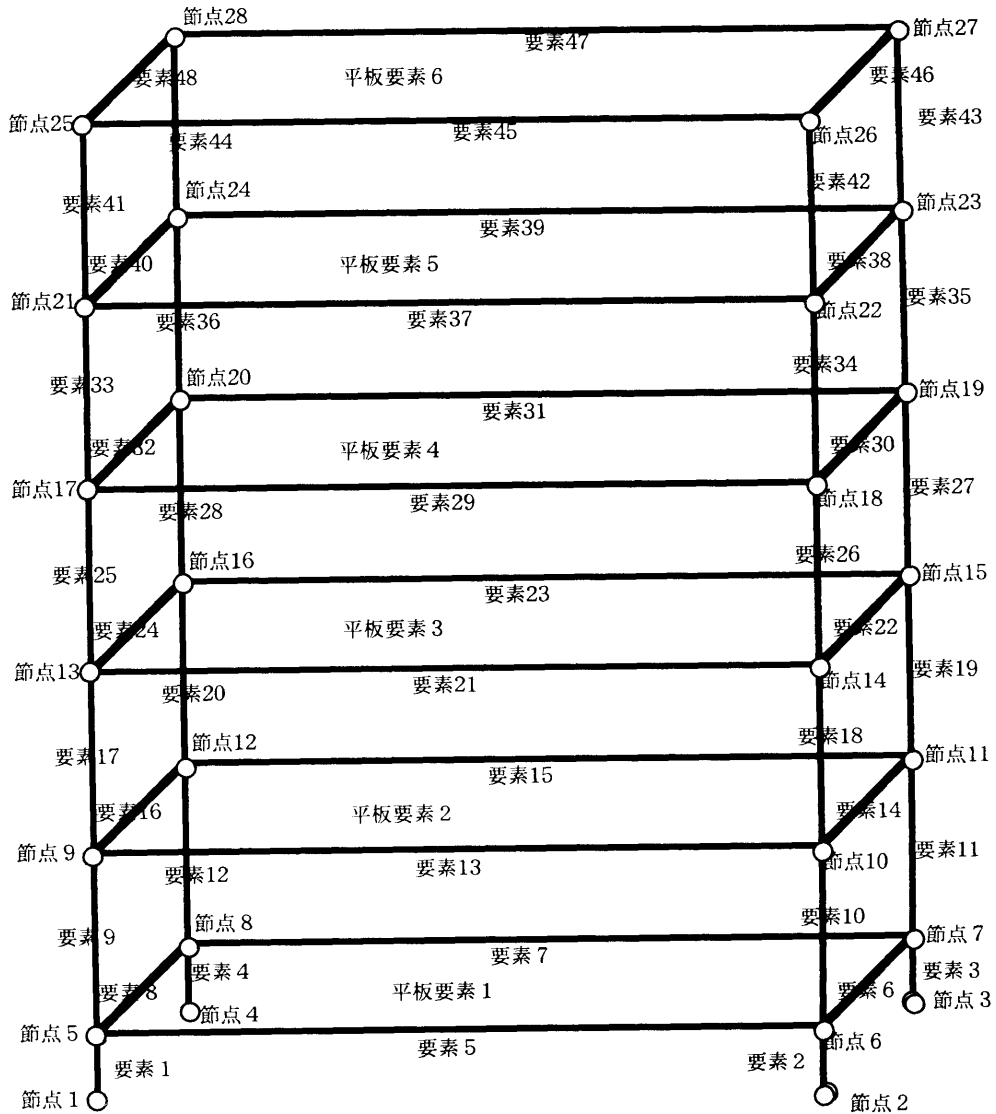


図5.6.1 建物模型の計算モデル

5.6.3 計算結果と実験結果の比較

計算は、節点1および図5.6.2に示す節点2～4の振動加速度を入力波としたときの各節点の振動加速度レベルを求めた。

図5.6.2から、節点1～4の加速度振幅は相当ばらついており、また節点1と3はその対角にあたる節点2と4と逆位相に近い状態で動作していることがわかる。

図5.6.3, 5.6.4は各階の周波数応答関数の模型実験結果と計算結果の比較を示したものである。周波数応答関数は、節点1～4の振動加速度レベルの平均値を基準として、各階の4質点の振動加速度レベルの平均値との差で表した。

計算値は4階と6階の2000Hz付近で実験値との対応が悪くなっているが、全体的によく一致した傾向は示している。

図5.6.5は、模型実験値と計算値のオクターブバンド分析結果で、両者を比較したものである。

250Hzが他の周波数に比較して一致がやや悪くなっているが、その差は5dB以内となっており、実用的には問題ない対応が得られているといえるであろう。

参考文献

1) 橘秀樹, 日高新人 他: 建築音響における模型実験法に関する研究, 東京大学生産技術研究所報告, Vol.35, No.4, p.33~37, (1990)

2) L.Cremer, M.Heckl: Structure-borne Sound, Springer-Verlag, p.215~230, (1988)

3) 安藤啓: 模型実験による固体音伝搬特性把握(その1.骨組構造模型の上下方向伝搬特性), 日本建築学会大会学術講演梗概集, p.1527~1528, (1994年9月)

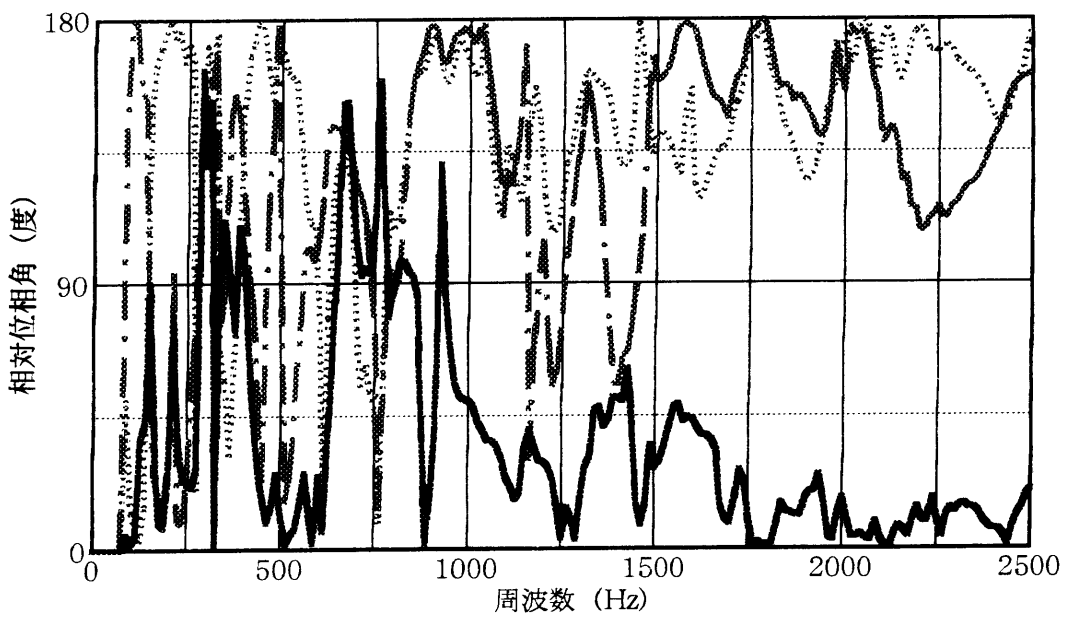
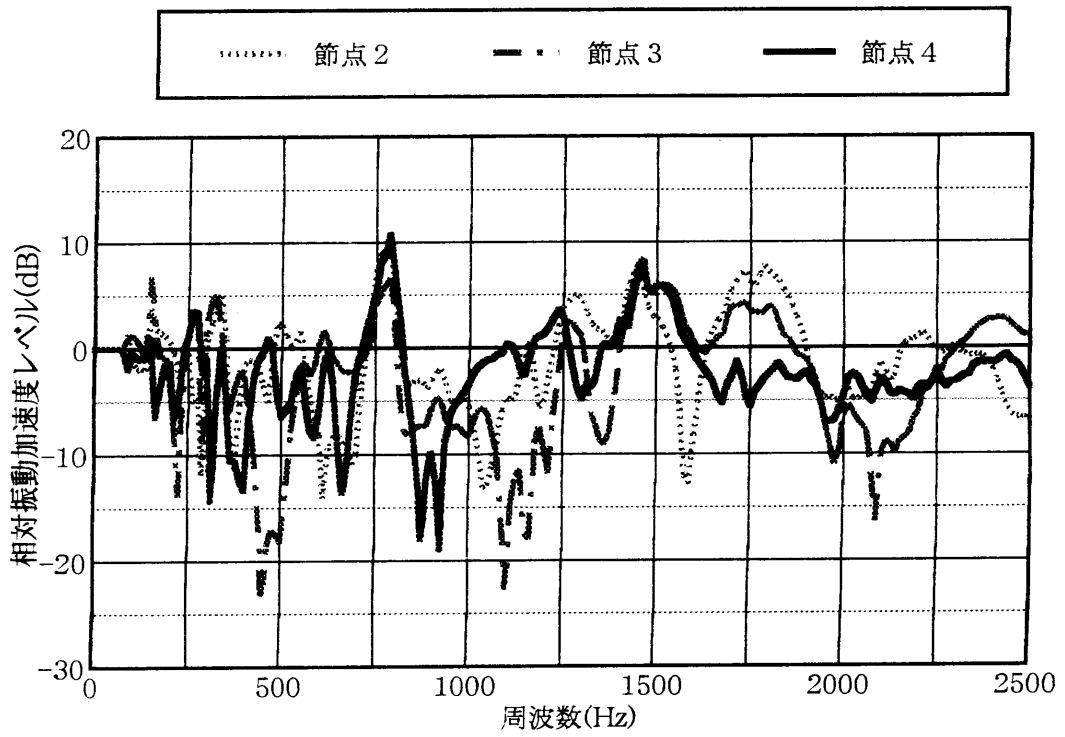


図5.6.2 節点 2～4 の節点 1 に対する振動加速度

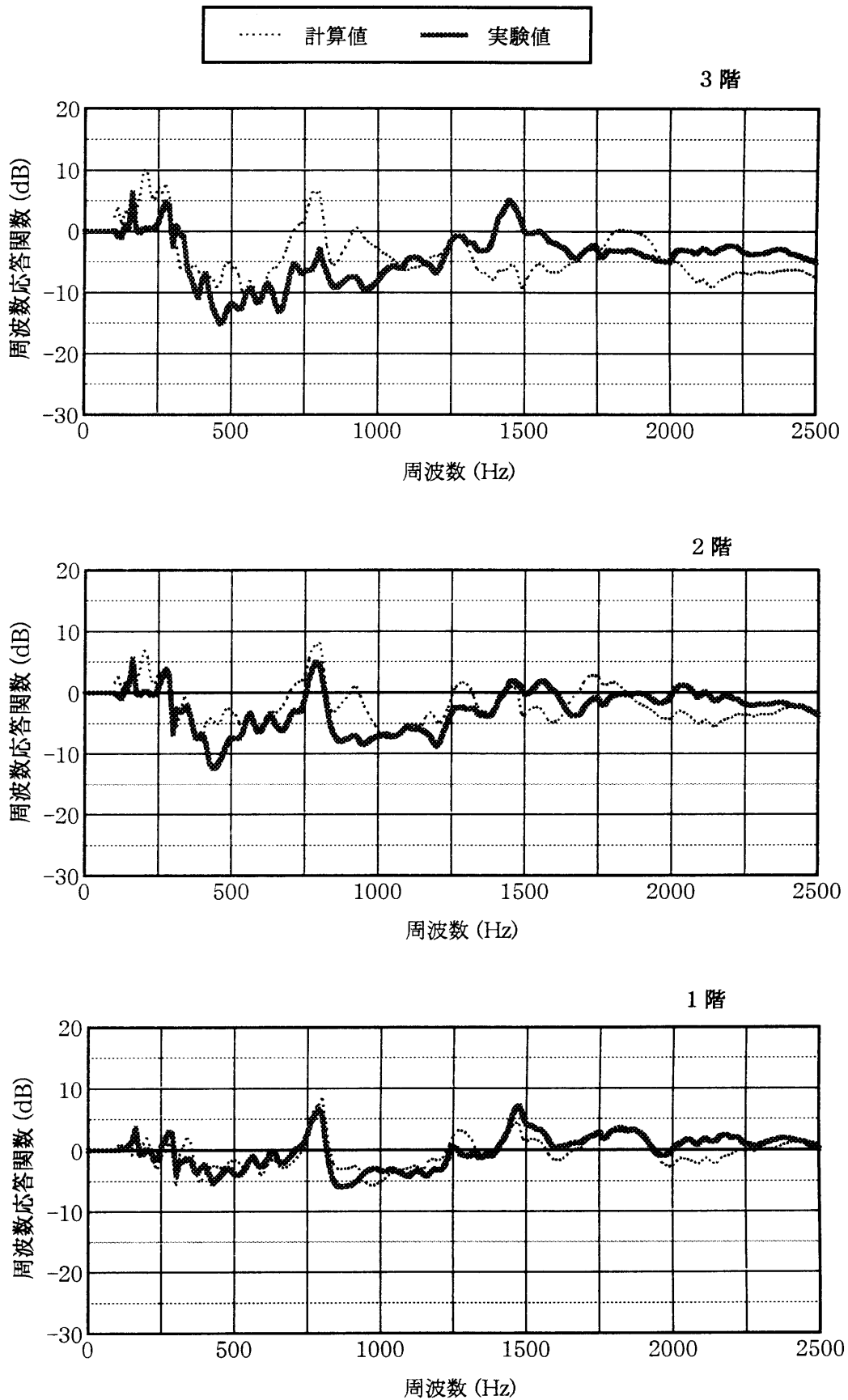


図 5.6.3 6 層床版付き骨組み構造模型による実験値と計算値の比較

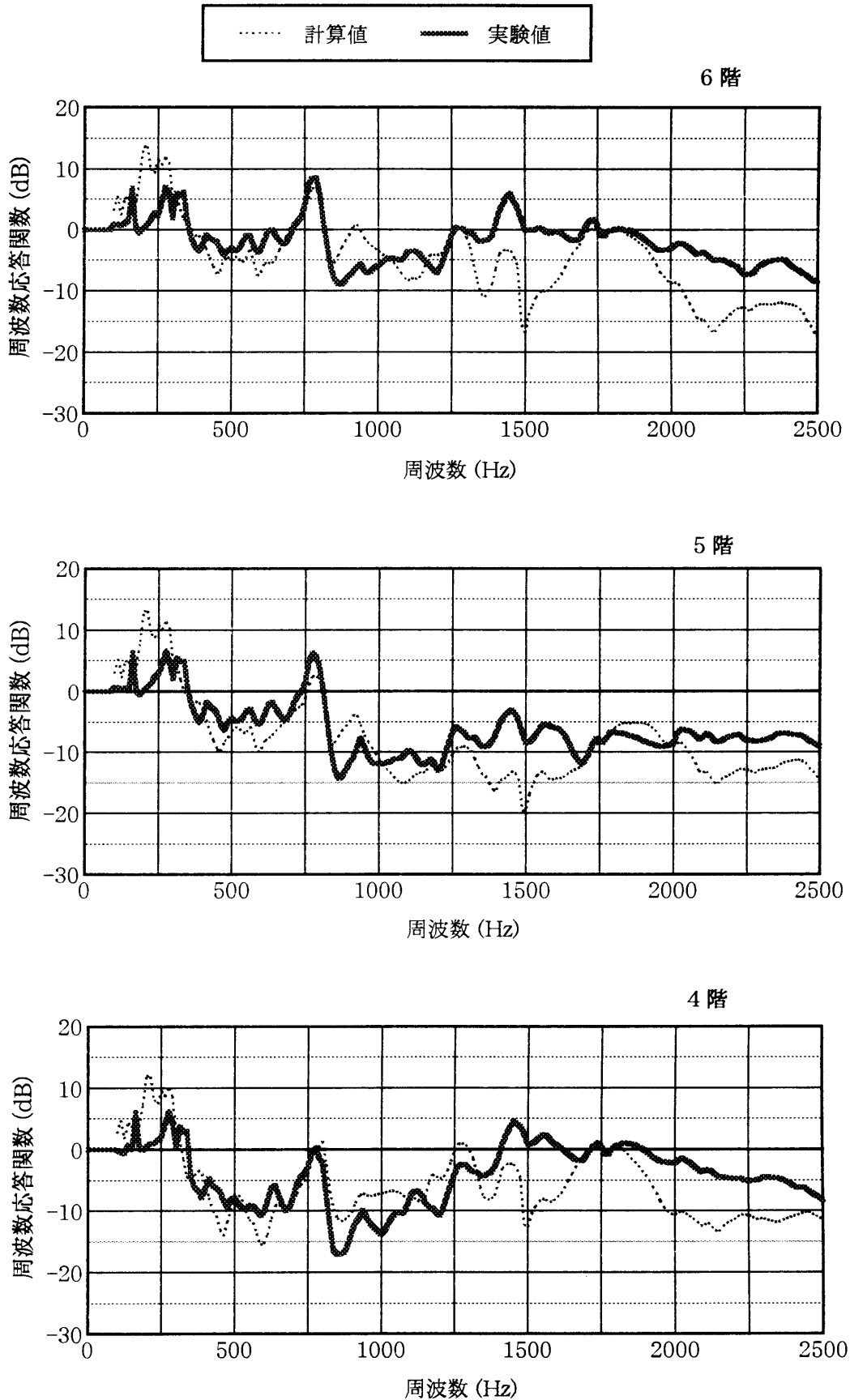


図5.6.4 6層床版付き骨組み構造模型による実験値と計算値の比較

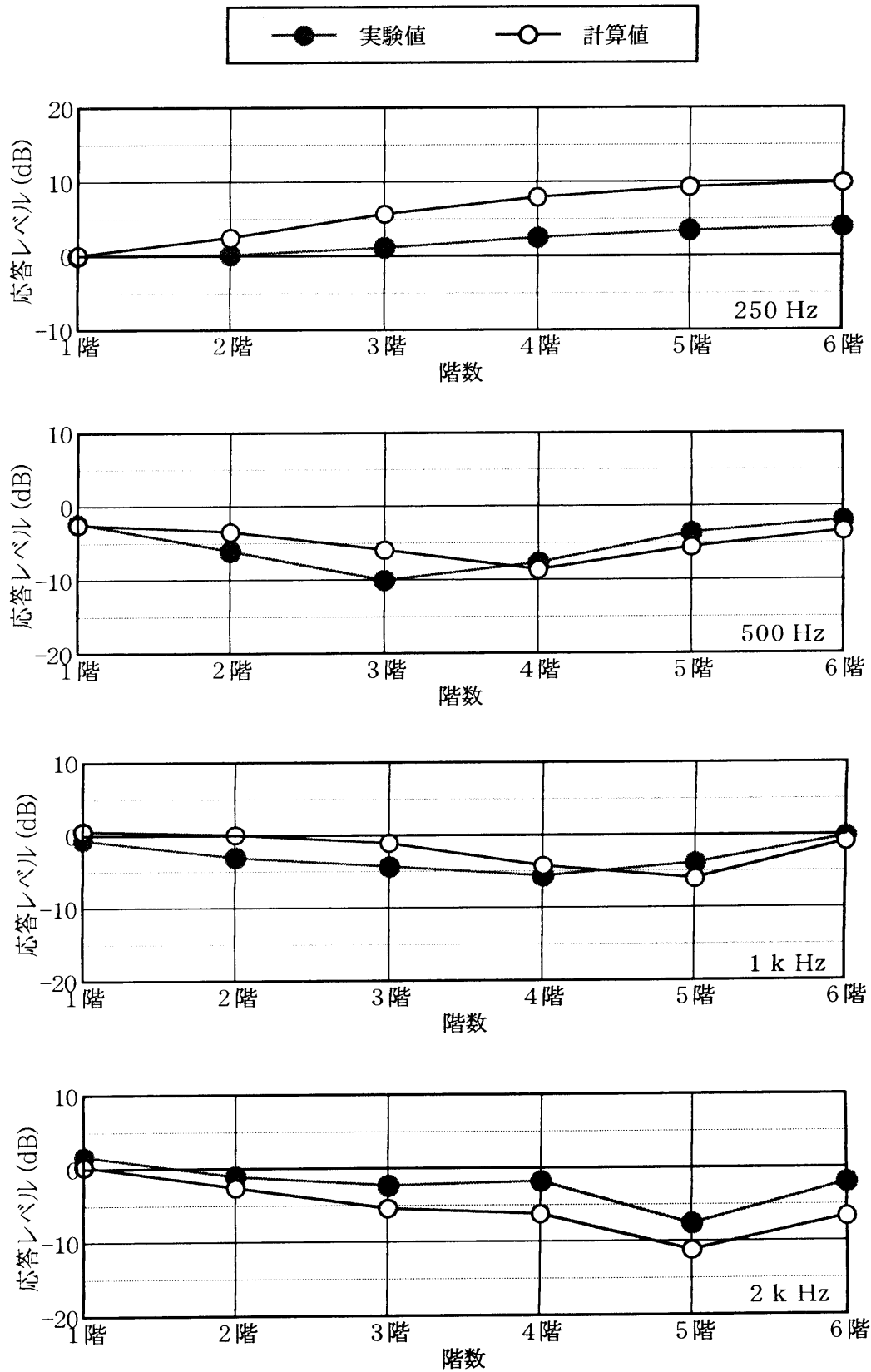


図5.6.5 オクターブバンド幅での実験値と計算値の比較

第 6 章 実建物における予測手法の適用

6.1 はじめに

第 5 章において、固体音の建物内伝搬性状をオクターブバンドで評価する限りにおいては、予測手法は実験結果と極めて良い対応が得られていることを示した。

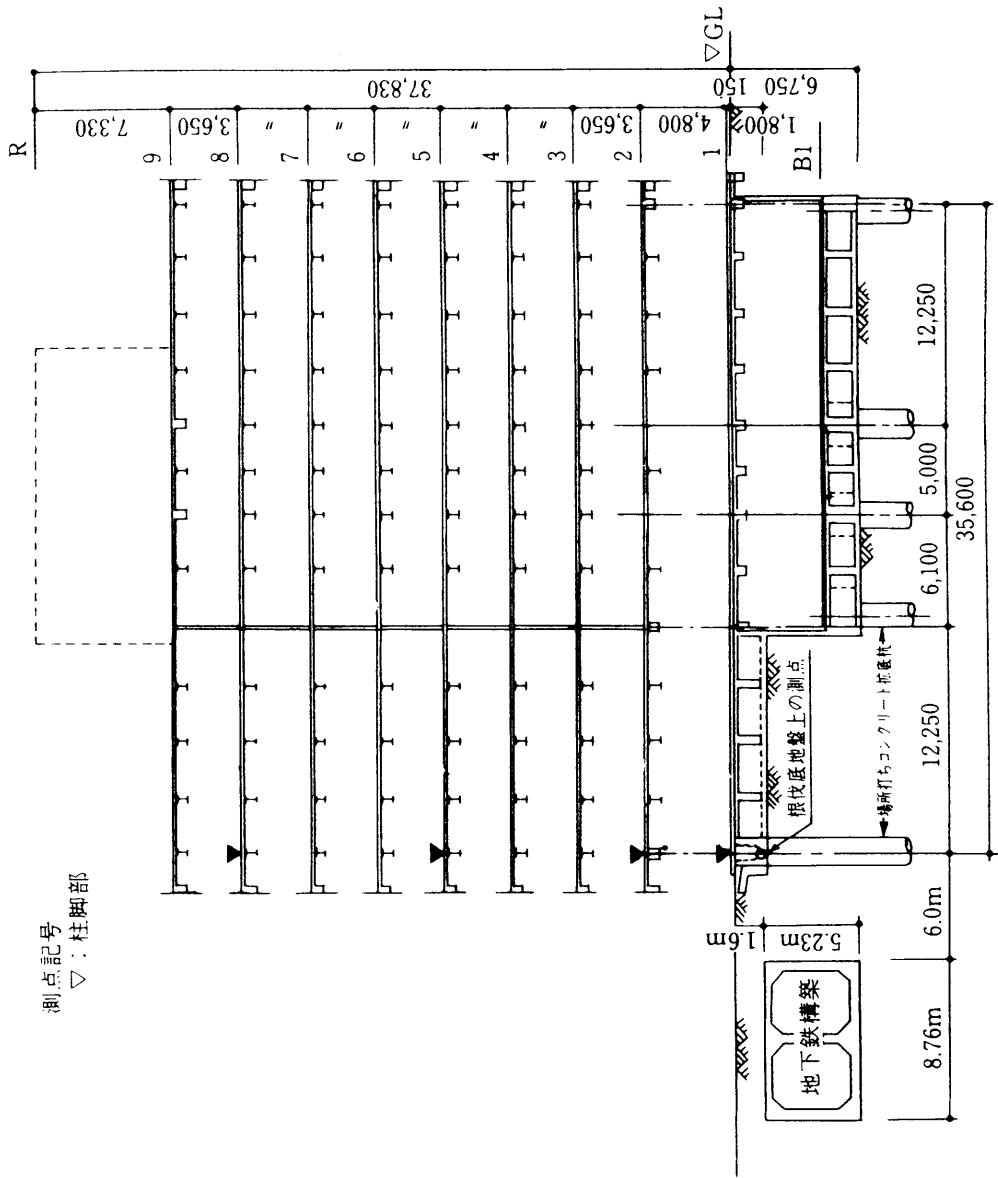
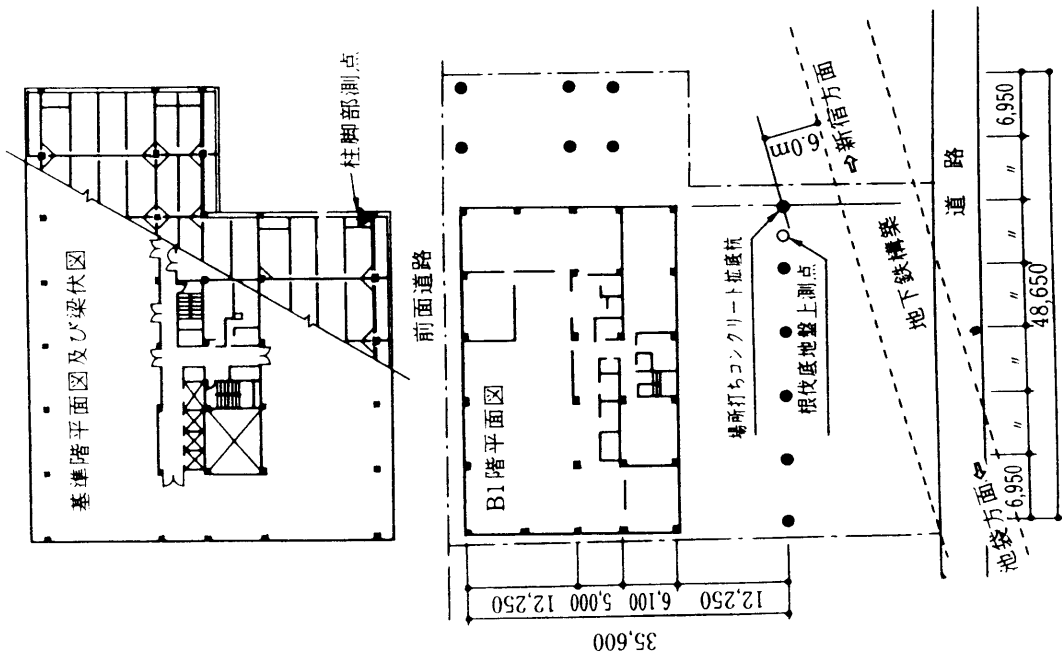
本章においては、予測手法の実用性を検証する目的で、鉄骨鉄筋コンクリート造と鉄骨造の実建物における固体音の伝搬性状の予測に適用した例について記述する。

6.2 鉄骨鉄筋コンクリート造建物における予測

6.2.1 建物概要

予測計算を行った建物は、地上 8 階、地下 1 階の事務所ビルであり、建物構造は、地階は鉄筋コンクリート造、地上階の柱は鉄骨鉄筋コンクリート造、梁は鉄骨造である。地下鉄構築の土被りは 1.6m であり、建物から最寄りの点で 6m の点に位置する。

図 6.2.1 に建物と地下鉄の位置関係を示し、図 6.2.2 と 6.2.3 に地上階の軸組図を示す。また、写真 6.2.1 に建物の外観を示す。



測点記号
▽：柱脚部

図6.2.1 建物と地下鉄の位置関係

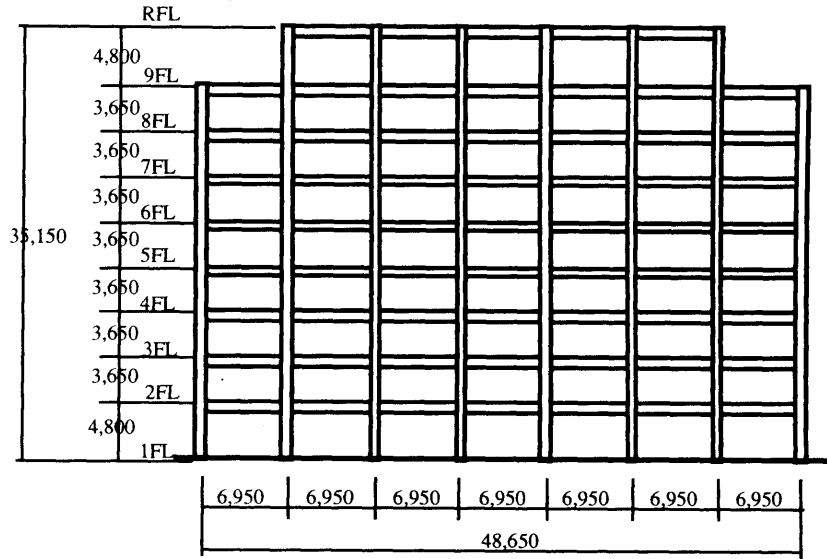


図6.2.2 地上階の軸組図（断面）

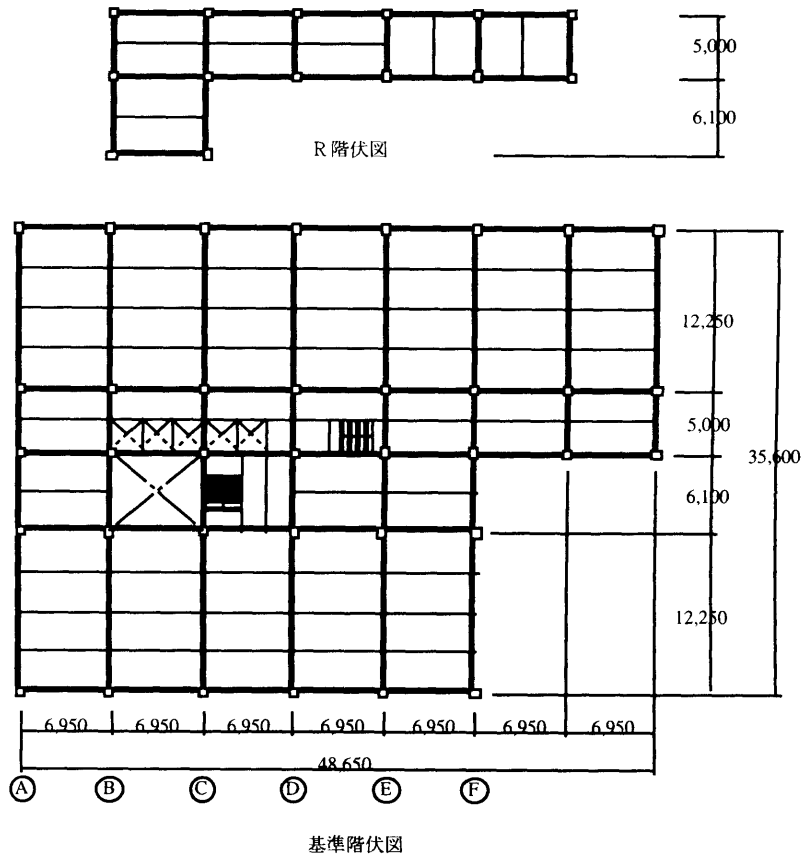


図6.2.3 地上階の軸組図（平面）

計算に用いた材料物性値¹⁾を表6.2.1に示す。

表6.2.1 材料物性値

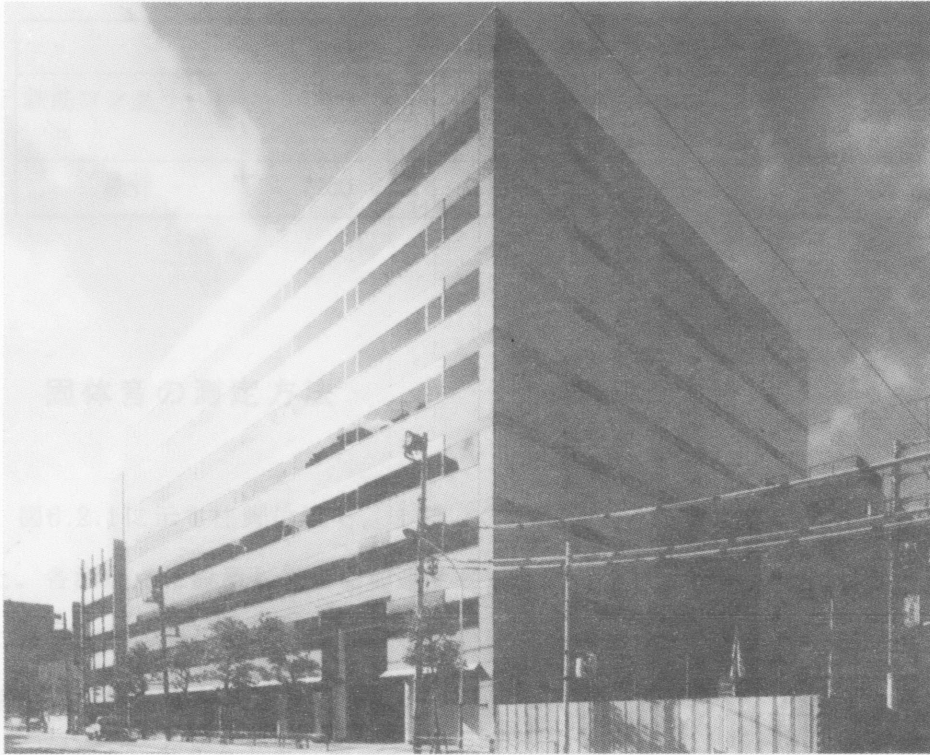


写真6.2.1 建物の外観

6.2.2 計算モデル

建物は、建物の地上階について、要素数852、節点数338でモデル化した。モデルは、建物骨組み構造は棒要素でモデル化し、床スラブおよび構造壁は平板要素でモデル化した。また、軽量間仕切りや窓などは質量として床に加えた。

柱断面は、1および2階の柱が850mm×850mm、3階の柱が750mm×750mm、4階以上の柱は700mm×700mmの鉄骨鉄筋コンクリート柱とした。また、床スラブは、床荷重として400kg/m²を設定し、厚さ140mmのコンクリート床版でモデル化した。

計算は、1階地下鉄に最寄りの杭で支持されている6節点に同振幅、同位相の鉛直方向単位加振力が作用したとして各点の振動加速度レベルを求めた。

計算に用いた材料物性値^{1),2)}を表6.2.1に示す。

表6.2.1 材料物性値

| | 密度 (kg/m ³) | Young率 (N/m ²) | Poisson比 | 損失係数 |
|----------|-------------------------|----------------------------|----------|---------------------------------|
| 鉄筋コンクリート | 2500 | 2.1×10^{10} | 1/6 | 0.03 (<100Hz) 0.005 (>100Hz) |
| 鉄骨 | 7900 | 2.1×10^{11} | 0.3 | 0.001 |

6.2.3 固体音の測定方法

測定は、図6.2.1に示す柱脚位置で、1階、2階、3階、5階および8階において同時測定を行った。各測定点に設置した振動加速度ピックアップによって取り出した信号をデータレコーダに録音した。分析は後日、録音したテープを再生し、先ず測定中に通過した全電車の振動加速度レベルの変動波形をレベルレコーダに記録した。次に、記録の中から測定状況がよく、かつ加速度レベルの大きい電車を選択し、実時間分析器により周波数分析を行った。実時間分析器の時定数は0.12秒とし、電車通過時を0.05秒間隔でサンプリングしてそのパワ平均を求めた。

図6.2.4に測定ブロック図を示す。

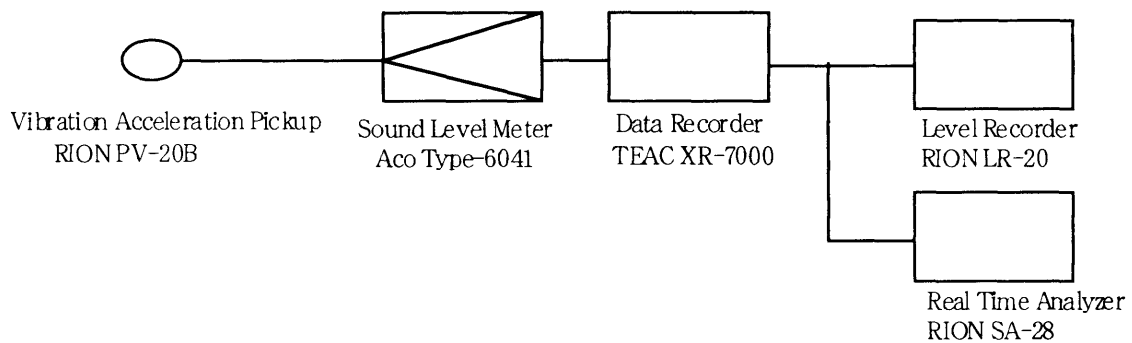


図6.2.4 測定ブロック図

6.2.4 計算結果と実測結果の比較

計算は22.5～352.5Hzを1.25Hz間隔で行い、計算結果は中心周波数31.5～250Hzの各オクターブバンドレベルとして求めた。

図6.2.5は1階を基準としたときの各階の相対振動加速度レベルについて、実測結果と計算結果の比較を示したものである。また、図6.2.6は各階の相対振動加速度レベルの計算値に1階の振動加速度レベルを加えた値と実測結果を比較したものである。

計算結果は実測結果と良く一致しており、本手法が実用上非常に有用であることが示されたといえるであろう。

なお、建築における鉄筋コンクリートの損失係数については、峯村は拡張SEAによる固体音の予測において63～500Hzでは0.005を用いて問題ないとしている³⁾。図6.2.5の31.5Hzと63Hzの図には、鉄筋コンクリートの損失係数を0.005とした場合と0.03とした場合の比較も示している。この結果を見ると本手法では損失係数を0.03とした方が実測値の対応が良い結果となっている。

図6.2.7は、C通り断面について、節点の振動加速度レベル計算結果から、コンター図を作成したものである。固体音は、250Hzにおいては、加振点（1階の左端）から距離に比例した減衰性状を示している。しかし、周波数が低くなるにつれて建物全体の振動モードの影響が顕著になるため、鉛直方向の減衰が水平方向の減衰に比べて小さくなる傾向にあり、31.5Hzおよび63Hzにおいては、中間階の方が1階よりも振動加速度レベルが大きくなっている。このことは、固体音の建物内減衰予測手法で、距離減衰項を用いる松田の手法⁴⁾は、低周波域においては誤差が大きくなることを示唆しているものと考えられる。

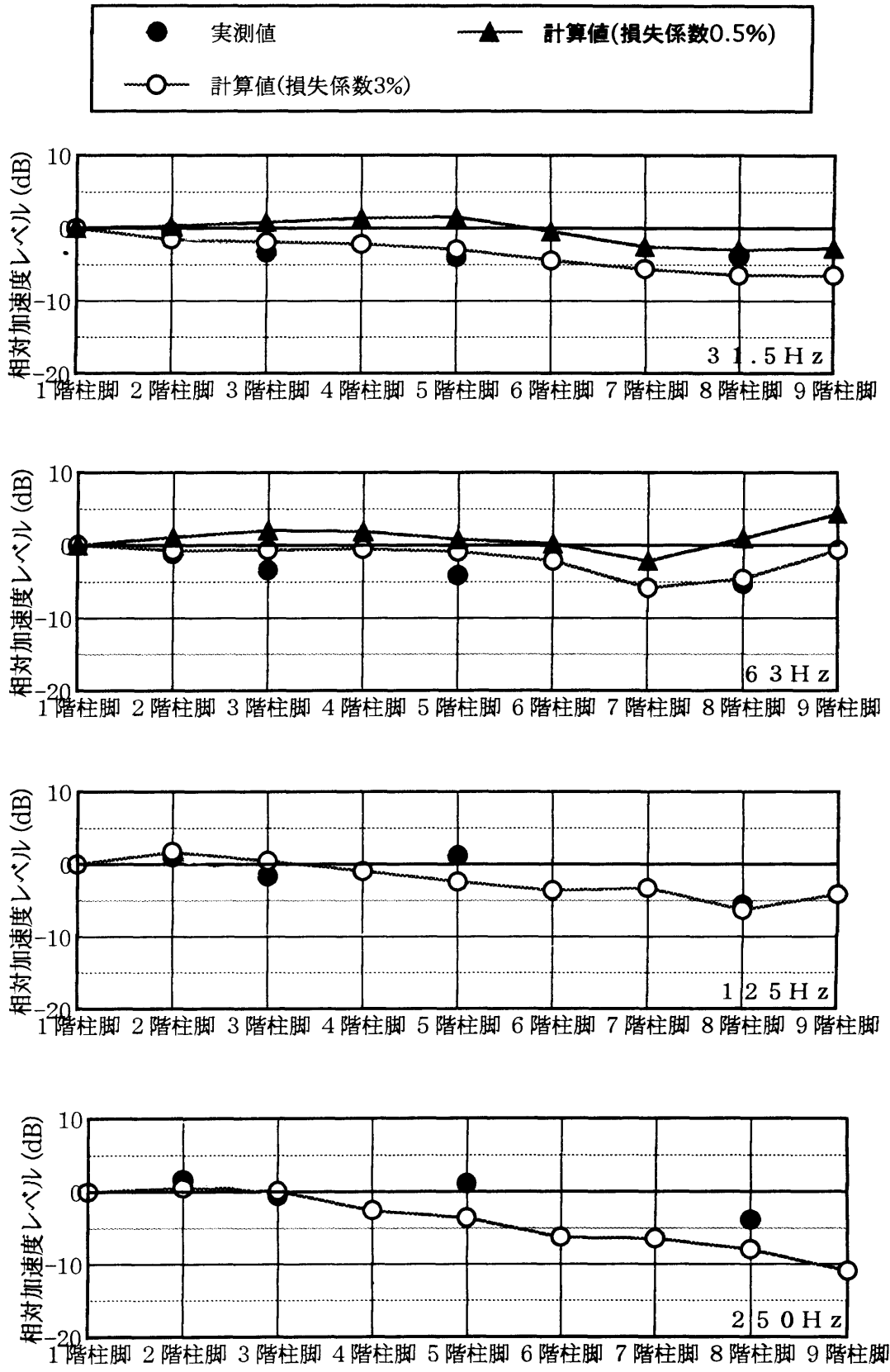


図6.2.5 1階を基準としたときの各階の相対振動加速度レベル

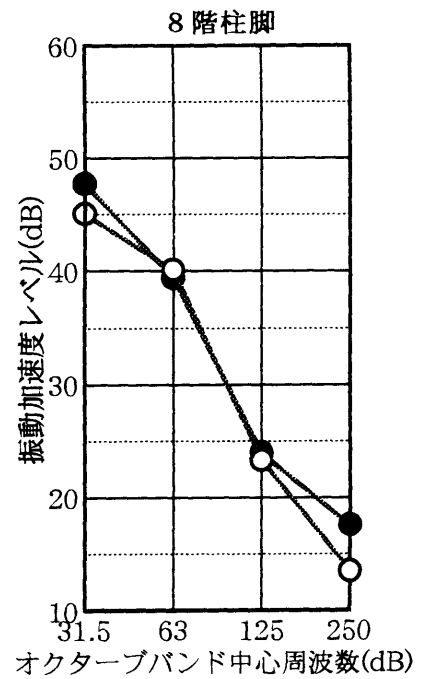
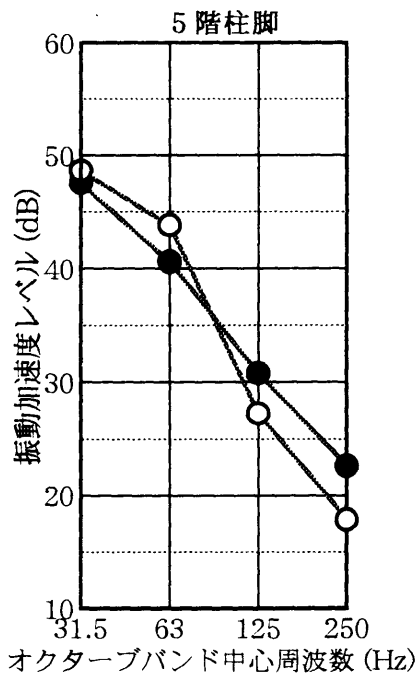
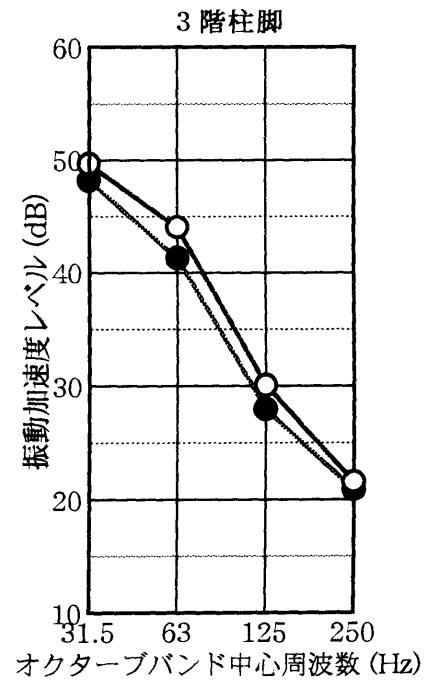
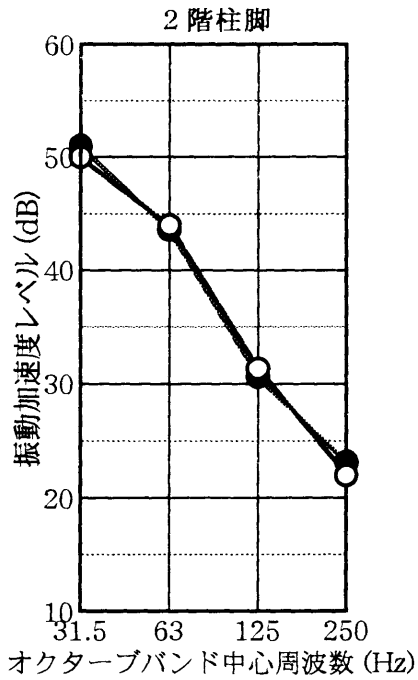


図6.2.6 柱脚部における上下方向の振動加速度レベルの実測結果と予測結果の比較

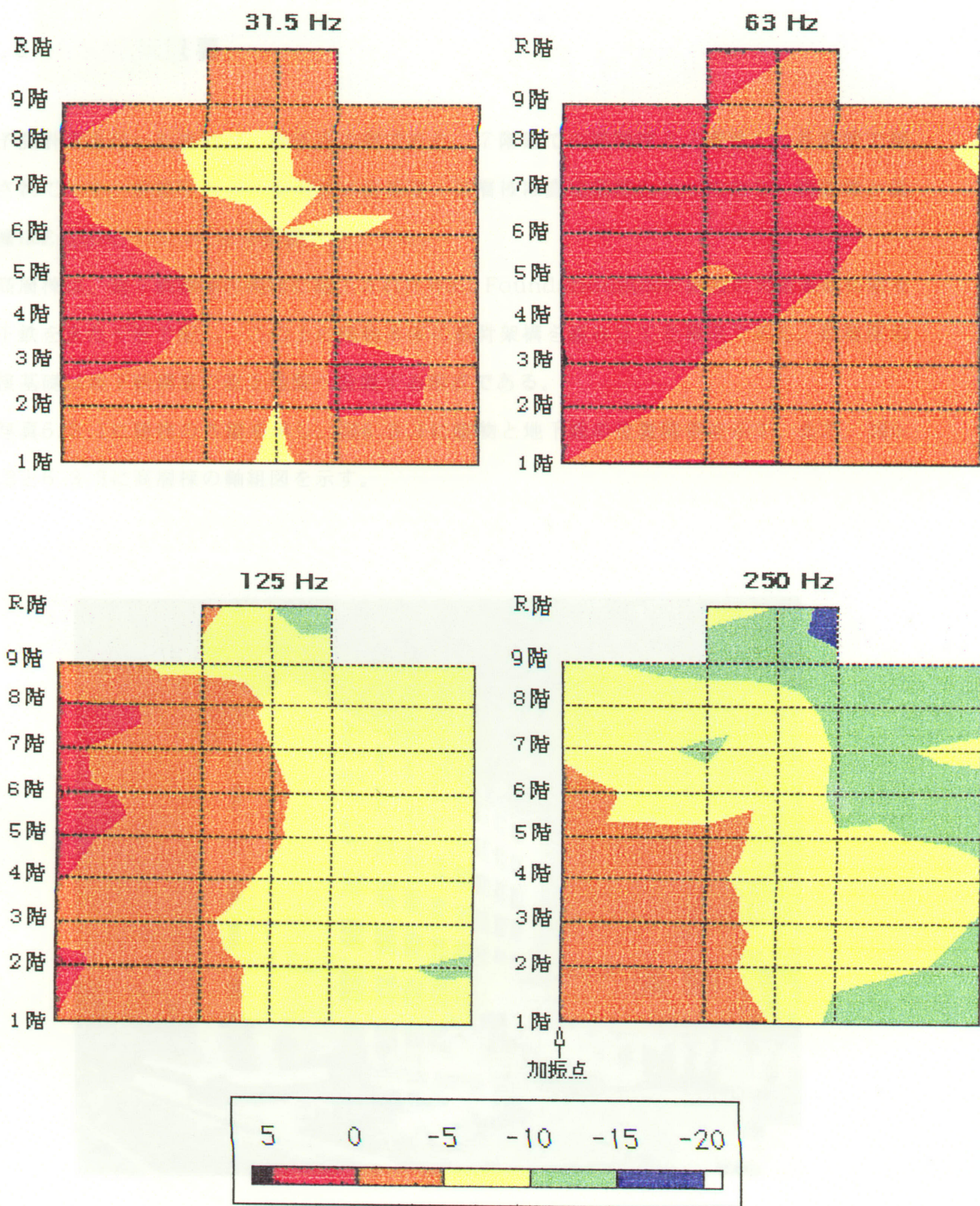


図6.2.7 C通り断面における節点の振動加速度レベルから描いたコンター図

6.3 鉄骨造建物における予測

6.3.1 建物概要

予測計算を行った建物は、鉄骨造の寮であり、7階建ての高層棟と2階建ての低層棟で構成されている。基礎仕様は、高層棟は杭基礎、低層棟は直接基礎となっており、高層棟と低層棟はExpand Jointにより連結されている。

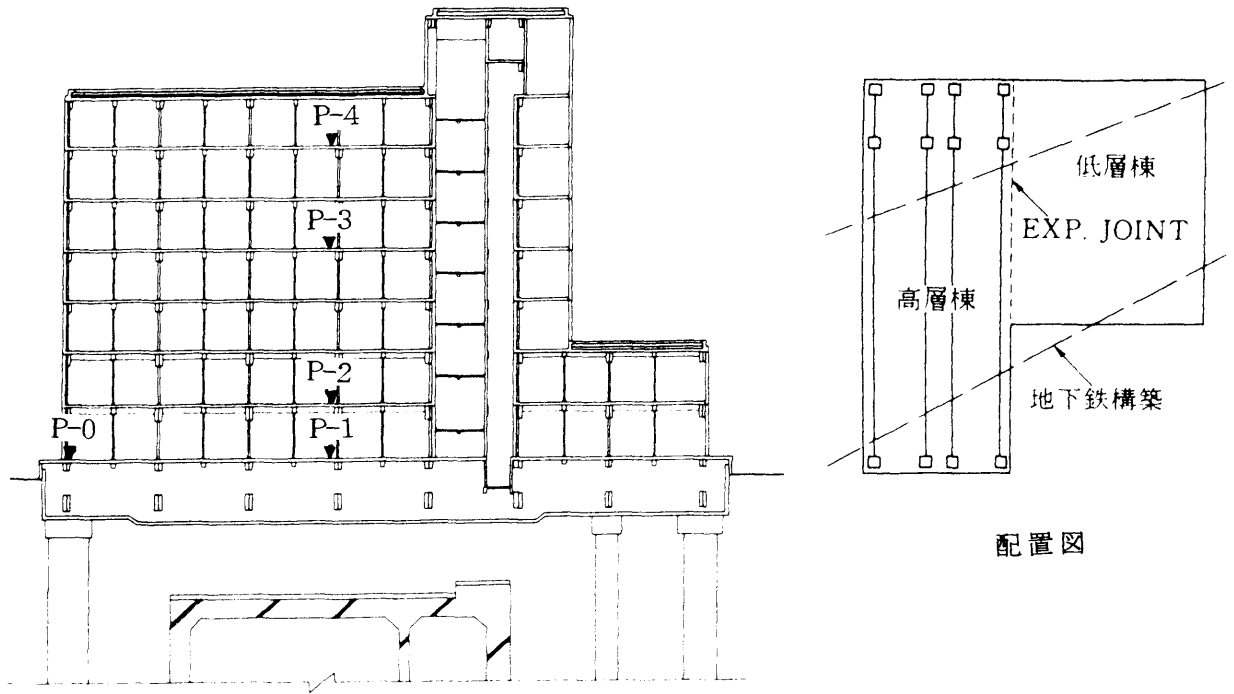
高層棟は、地下鉄構築の両側に施工されたWall Foundation杭間に鋼製の大型基礎桁梁を地下鉄をまたぐ形で配し、この上に建物本体の鉄骨架構を組み立てた構造である。低層棟の直接基礎は地下鉄構築の直上地盤へ設置する形式である。

写真6.3.1に建物の外観を示し、図6.3.1に建物と地下鉄の位置関係を示す。また、図6.3.2と6.3.3に高層棟の軸組図を示す。

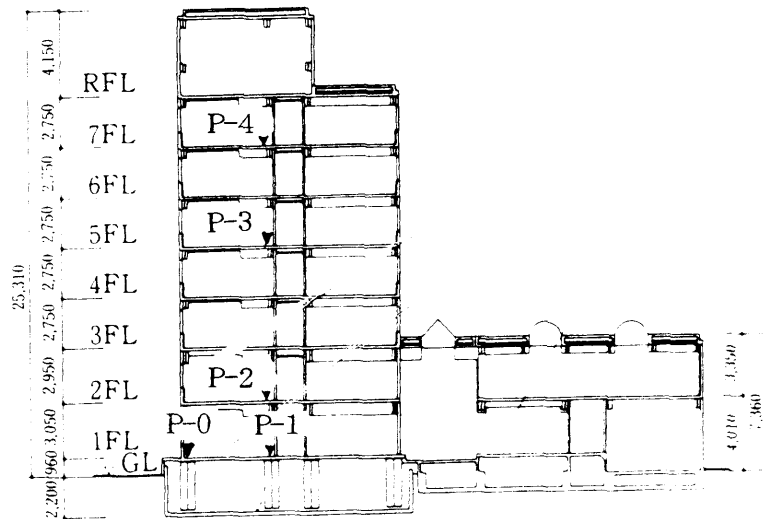


写真6.3.1 建物の外観

図6.3.1 建物と地下鉄の位置関係



高層棟断面図



断面図・測定位置図

図6.3.1 建物と地下鉄の位置関係

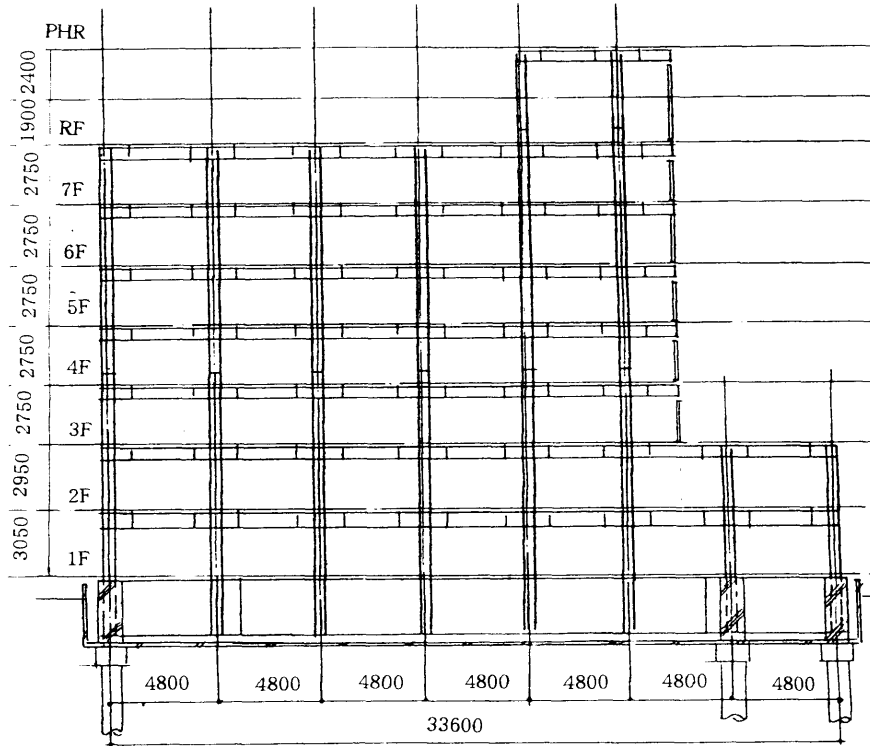


図6.3.2 高層棟の軸組図（断面）

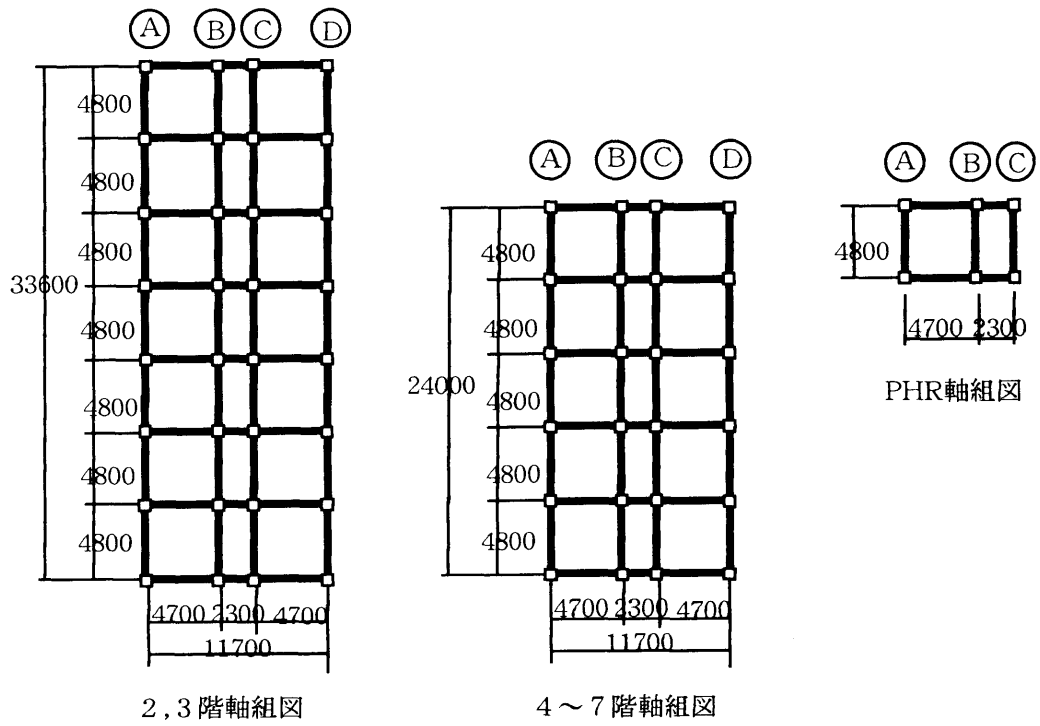


図6.3.3 高層棟の軸組図（平面）

6.3.2 計算モデル

本建物における地下鉄固体音の測定は、建物躯体工事および各室間仕切り壁工事完了時に行った。

計算は高層棟について行い、建物は建物骨組み構造と床スラブおよび構造壁でモデル化し、軽量間仕切りや窓などは床荷重に加えた。

柱は、1階が□-450×19、2階が□-410mm×19mm、3および4階が□-400mm×16mm、5～7階が□-400mm×12mm、8階が□-300mm×12mmの鉄骨柱とした。

梁は、1階がH-2650mm×800mm×16mm×38mm、2階がH-700mm×300mm×13mm×24mm、3階がH-588mm×300mm×12mm×20mm、4、5階がH-390mm×300mm×10mm×16mm、6、7およびR階がH-400mm×200mm×8mm×13mm、8、PHR階がH-300mm×150mm×6.5mm×9mmの鉄骨梁である。

床は、デッキプレートによる合成床版を厚さ155mmのコンクリート床版でモデル化し、床荷重は、基準階床が380kg/m²、屋上が495kg/m²とした。

計算モデルは、要素数538、節点数220である。

計算は、1階の杭で支持されている12節点に同振幅、同位相の鉛直方向単位加振力が作用したとして各点の振動加速度レベルを求めた。計算は22.5～352.5Hzを1.25Hz間隔で行い、計算結果は中心周波数31.5～250Hzの各オクターブバンドレベルとして求めた。

計算に用いた材料物性値^{1),2)}を表6.3.1に示す。

表6.3.1 材料物性値

| | 密度 (kg/m ³) | Young率 (N/m ²) | Poisson比 | 損失係数 |
|--------|-------------------------|----------------------------|----------|---------------------------------|
| コンクリート | 2500 | 2.1×10 ¹⁰ | 1/6 | 0.03 (<100Hz) 0.005 (>100Hz) |
| 鉄骨 | 7900 | 2.1×10 ¹¹ | 0.3 | 0.001 |

6.3.3 計算結果と実測結果の比較

図6.3.4は、各節点の振動加速度レベル計算結果からB通り断面についてコンター図を作成したものである。加振点および建物断面形状が、前節で述べた建物と比較して複雑であることから、建物内の振動加速度レベル分布は250Hzにおいても一様な距離減衰的性状は見られない。

図6.3.5は、P-1～4について、実測結果と計算結果の比較を示したものである。計算結果は、P-0の振動加速度レベル実測値を相対振動加速度レベル計算値に加えた値である。実測は、図6.3.1に示す各測定点において、第6章の2.3で述べた測定方法と同様の方法で行った。なお、250Hzについては実測値のS/Nが得られていないので、計算結果との比較は行っていない。

計算結果は実測結果と概ね5dB以内で一致しており、本手法の鉄骨造建物に対する実用性が示されたといえるであろう。

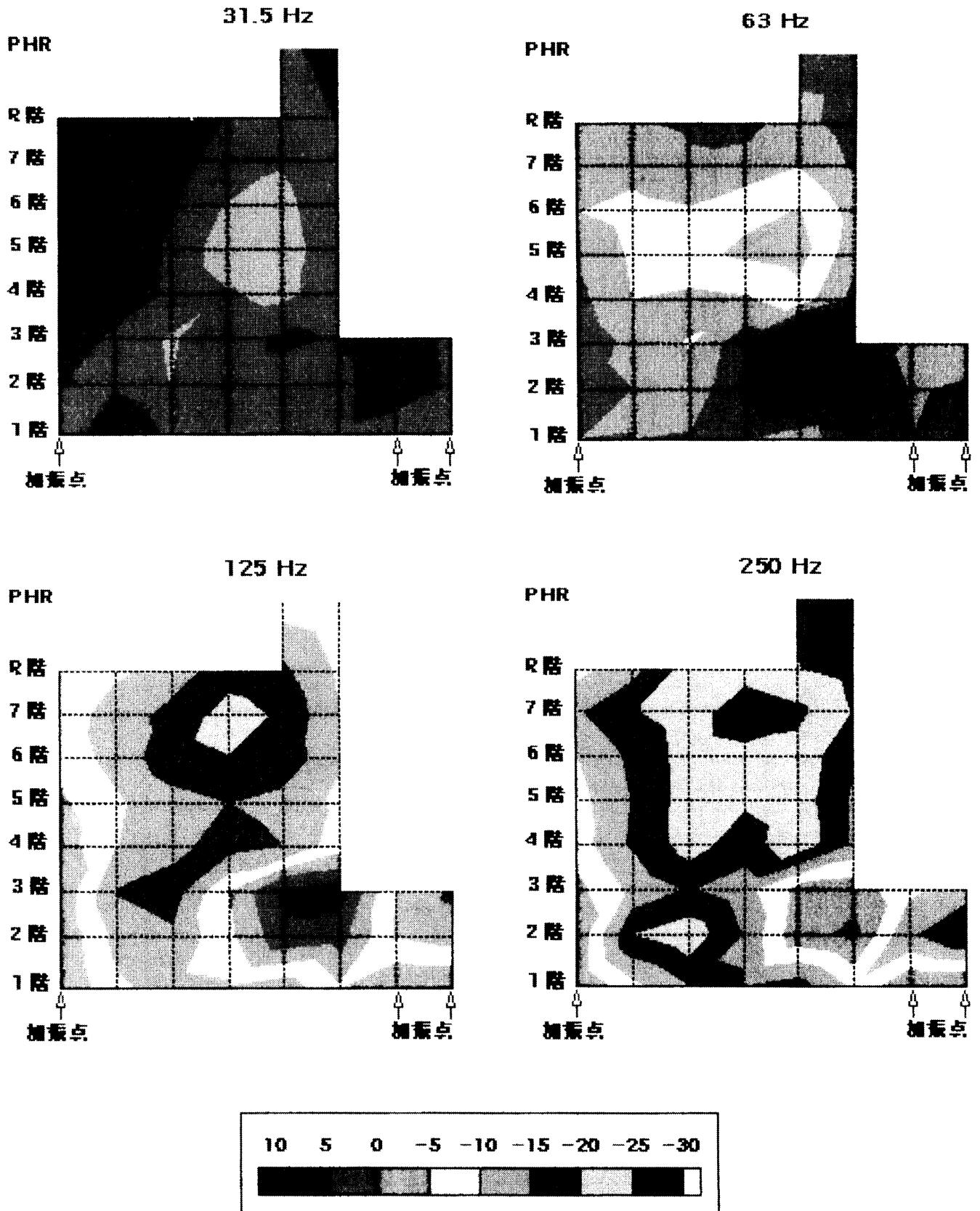


図6.3.4 B通り断面における節点の振動加速度レベルから描いたコンター図

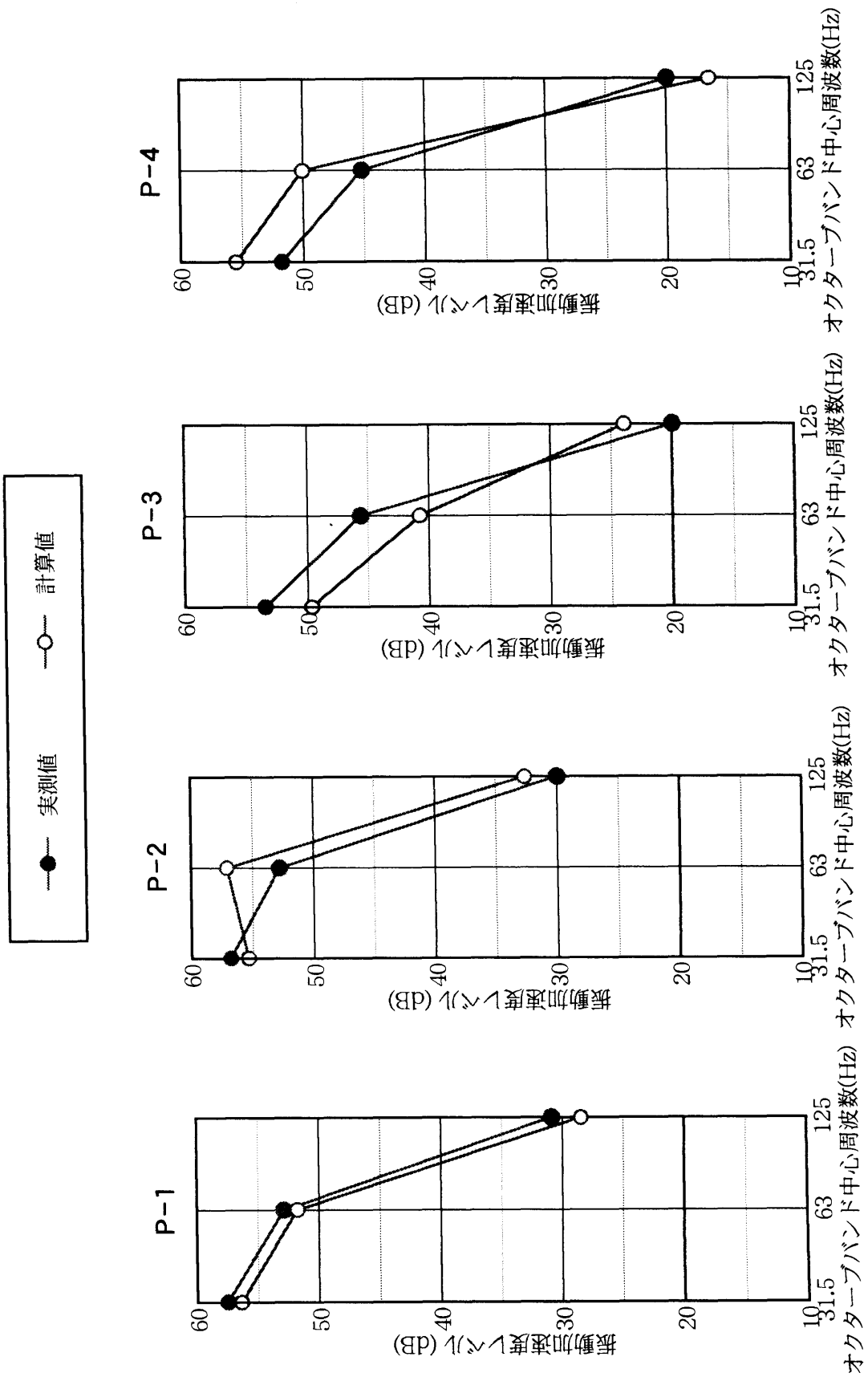


図 6.3.5 柱脚部における上下方向の振動加速度レベルの実測結果と予測結果の比較

参考文献

- 1)日本建築学会：鉄骨鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説,丸善,p.35～36,(1975)
- 2)日本音響材料協会編：騒音・振動対策ハンドブック,技報堂出版,p.314,(1985)
- 3)峯村敦雄：建物躯体内振動伝搬特性予測における拡張された統計的エネルギー解析法(SEA)の適用に関する研究,千葉工業大学博士学位論文,(1994年12月)
- 4)松田由利, 橘秀樹 他：建物構造体中における固体音の伝搬性状,日本音響学会誌,Vol.35,No.11, p.609～615,(1979)

第 7 章 むすび

7.1 まとめ

本研究は、棒要素および平板要素内を伝搬する擬似縦波、曲げ波、ねじれ波および剪断波について、波動方程式から得られる解をLagrangeの運動方程式を用いて各要素接合部の加速度振幅および回転角を一般座標とする運動方程式に展開した。

研究の成果として、建築物を棒要素と平板要素の集合としてモデル化し、各要素に関する運動方程式を建物全体の運動方程式として適用することによって、少ない要素数で建物をモデル化できる手法が得られた。本手法による計算結果と模型実験結果の比較によって予測手法の検証を行い、さらに実建物における実測結果と予測結果を比較し、地下鉄や鉄道による固体音の建物内伝搬性状予測に対する本予測手法の実用性を確かめた。

以下に第 1 章から第 6 章までに検討した結果の要約を記し、本論文のまとめとする。

第 1 章と第 2 章においては、本研究の背景および目的について説明し、地下鉄や鉄道による固体音として対象とされる周波数領域（オクターブバンド中心周波数で31.5～250Hz）へ適用し精度の良い解を得ることができる予測手法の確立が必要なることを述べている。また、建築物内を伝搬する波動の種類は、擬似縦波、曲げ波、ねじれ波および剪断波が重要であること、それらの波動方程式と境界条件は、仮想仕事の原理から導かれる仮想仕事方程式を用いて導かれることを説明した。さらに、建物を立体的なモデルとして取り扱う場合について、Newtonの運動方程式の問題点を挙げ、Lagrangeの運動方程式が適していることを解説した。

第 3 章と第 4 章においては、建物を棒要素と平板要素の集合としてモデル化し、建物全体の運動方程式を導いた。そして、建物に伝搬してきた固体音の建物内伝搬予測を行い、出力として、床スラブなどの応答・固体音放射を計算するための特性を決定する手法を示した。

その手法は、棒要素および平板要素内を伝搬する擬似縦波、曲げ波、剪断波、ねじれ波について、建物を各要素の組合せでモデル化する場合に都合の良い境界条件を規定し、境界条件を満足する波動方程式の解を求め、その解をLagrangeの運動方程式を用いて節点の加速度と回転角速度を一般座標とする運動方程式を解く手法である。

第5章においては、建物の基本構造である骨組み構造と棒要素と平板要素で構成される基本構造である床版付き骨組み構造模型について模型実験結果と計算結果の比較を行い、予測手法の検証を行っている。

検討結果として、オクターブバンド幅で予測結果を評価する場合には、入力波形の位相は無視しても予測値は実験値と5dB以内の範囲で一致することを示した。また、本手法は、予測値は低周波数域における建物全体のモードの影響や端部での加速度振幅の上昇など建物内における振動分布の性状を非常に良く表すことができる手法であることも明らかとした。

第6章においては、本手法を鉄骨鉄筋コンクリート造および鉄骨造の実建物における地下鉄固体音の予測に適用した例を示した。それによって、本手法が、地下鉄や鉄道による固体音として対象とされる周波数領域（オクターブバンド中心周波数で31.5～250Hz）における予測手法として実用性があることを示した。

7.2 今後の課題

本研究により地下鉄や鉄道による固体音の建物内伝搬性状の予測手法として、実用性のある手法が得られた。しかしながら、本手法は未だ万全なものではなく、今後の課題も多く残っている。以下に、問題点を列挙し、今後の研究の展開および適用の拡大につて述べる。

a. 予測精度のさらなる向上

本手法はオクターブバンド幅で予測結果を評価する限りにおいては、実用上十分な精度を有するといえる。

しかしながら、狭帯域のスペクトルで見ると予測精度は未だ十分であるとはいえない。この要因として、(1)入力波の入力位置（加振点位置）の計算モデルと実物との違い、(2)入力波間の振幅（加振力）および位相差の計算モデルと実物との違い、(3)実物部材の接合点のモデル化の問題、(4)材料物性値（特に損失係数）の計算モデルと実物との違いが挙げられ

る。

上記の要因の(1)と(2)については、現実問題として、建物に入力する全ての経路について詳細な同時測定を行うことは非常に困難である。したがって、本手法の実用化の面からは、建物と地盤の連成モデルとした解析方法の研究が今後の展開として必要であると思う。

地盤と建物との連成は、地盤と建物が振動的に遮断された建物と遮断されていない建物では建物内のエネルギー損失は異なるので、その連成効果の影響を考慮するかしないかは、建物内の固体音の予測精度に大きく係わってくる可能性がある。建物と地盤の連成モデルの研究は、近年の免震・制振建物の発展に伴い今後益々必要とされるであろう。

実物部材の接合点のモデル化については、本研究では各部材の中心線で剛接するとした。しかし、例えば、日本建築学会鉄骨鉄筋コンクリート構造計算規準では構造解析の基本事項として材の接合部に剛域を設ける考え方を示している¹⁾。本手法においても、予測精度の向上を図るためには、実建物における実測結果と計算結果との比較を更に行い、接合部の適切なモデル化手法の検討が必要とされる。

材料の損失係数は計算結果に最も大きく影響する。建築における鉄筋コンクリートの損失係数については、峯村は拡張SEAによる固体音の予測において63～500Hzでは0.005を用いて問題ないとしている²⁾。しかしながら、本手法による予測では、100Hz以下については、0.03とした方が実測値の対応が良い結果となった。今後、建築材料の損失係数についてその周波数特性に関する検討が必要であると考ええる。

b. 床スラブ等に対する小梁の影響

本研究では、床スラブは大梁で拘束された平板として取り扱っており、小梁は考慮していない。小梁はスラブ内の振動分布には影響するが、スラブ全体としてのエネルギー伝達への影響は小さいものと判断している。しかしながら、地下鉄や鉄道以外の加振源に本手法を適用していく場合には、小梁の影響も考慮する必要がでてくるものと思われる。

c. 建物躯体以外の内装材などの取り扱い

本研究では、内装材や軽量壁などは床にかかる荷重として取り扱っており、固体音の伝搬経路としては考慮していない。固体音の伝搬特性に対する軽量壁の影響は未だ十分明らかとされていないが、今後これらの影響を明らかとし予測手法に取り込むことで、更に予測精度の向上が図られるものと考ええる。

d. 固体音予測システム

本研究によって固体音の建物内伝搬予測に関する一つの手法が得られた。しかしながら、固体音の最終的な評価は放射された音でされるべきであると考えており、固体伝搬予測システム全体としての予測精度の向上を図っていくためには未だ多くの課題が残されている。

参考文献

- 1)日本建築学会：鉄骨鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説,丸善,p.43~51,(1975)
- 2)峯村敦雄：建物躯体内振動伝搬特性予測における拡張された統計的エネルギー解析法(SEA)の適用に関する研究,千葉工業大学博士学位論文,(1994年12月)

謝 辞

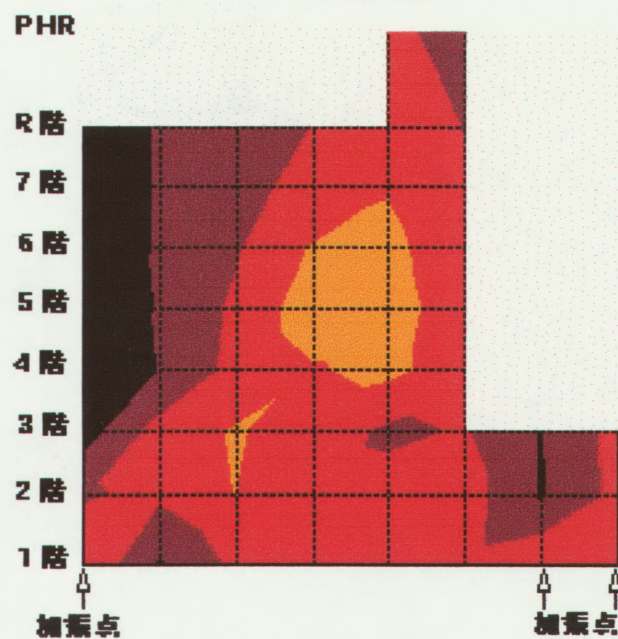
筆者が固体音問題に関する研究の必要性を痛感したのは、1985年にある劇場の遮音設計を担当し、固体音の影響によってその設計を失敗したときである。その後、地下鉄・鉄道による固体音問題に関わり、その調査研究から、固体音の建物内伝搬性状に関する予測手法についてまとめる機会を得たことは大変幸せなことであると感じている。

本論文の主査をしていただきました九州芸術工科大学 音響設計学科 藤原恭司博士には、本研究の遂行と論文のまとめに対して多くのご配慮ご指導を賜りました。ここに心よりお礼申し上げます。また、本論文の副査をしていただきました九州芸術工科大学 音響設計学科 鈴木俊行博士、同 津村尚志博士にも、多くの有益かつ貴重なご意見を賜りました。ここに、深く感謝の意を表します。

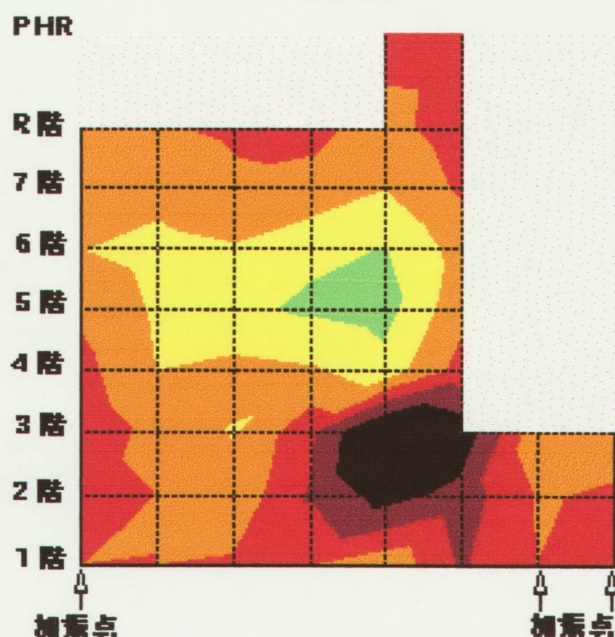
(株)大林組技術研究所 所長 武田寿一博士、同 音響研究室室長 平野 滋氏には、研究を進めるに当たり格別のご配慮と暖かい援助を賜りました。ここに深甚なる謝意を表します。また、同 音響研究室および振動研究室の方々、そして富士エンジニアリング(株) 宿谷建仁氏には研究当初から数々のご協力をいただきました。九州芸術工科大学 音響設計学科 鳥原秀男技官、同 尾本 章助手からは常に暖かい励ましの言葉をいただきました。感謝いたします。

九州芸術工科大学 牧田康雄 名誉教授、同 北村音壺 名誉教授には、大学卒業後もご指導ご鞭撻を賜りました。心より感謝いたします。筆者が、九州芸術工科大学において、両教授から音響学の手ほどきを受けて以来四半世紀が経過したことになりますが、その間に本当に多くの方々にご指導いただきました。これらの方々にもお礼申し上げます。

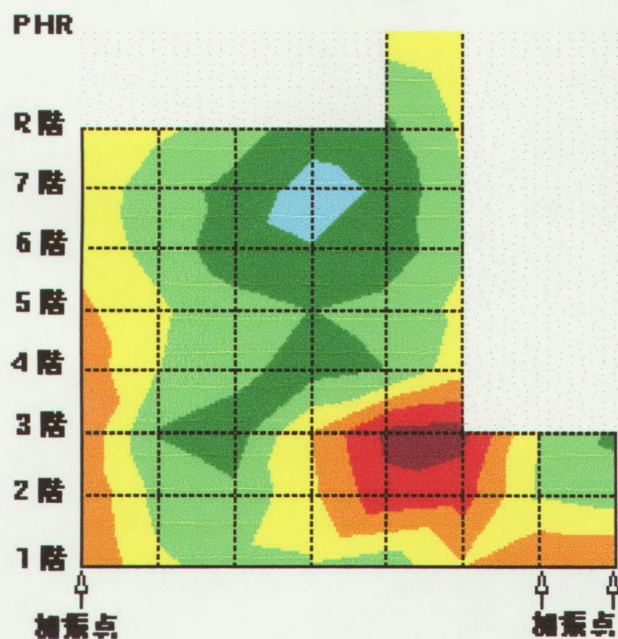
31.5 Hz



63 Hz



125 Hz



250 Hz

