

箱とバスケットと玉の系におけるソリトン解

由良, 文孝
公立はこだて未来大学

<https://doi.org/10.15017/27185>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 24A0-S3 (25), pp.156-161, 2013-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3

「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」 (研究代表者 太田 泰広)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by

Kyushu University Global COE Program

Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 25 (pp. 156 - 161)

箱とバスケットと玉の系におけるソリ トン解

由良 文孝 (YURA Fumitaka)

(Received 15 January 2013; accepted 1 March 2013)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2013

箱とバスケットと玉の系におけるソリトン解

公立はこだて未来大学 由良文孝 (Fumitaka YURA) *

概要

箱とバスケットと玉の系 [2] における超離散双線形形式およびソリトン解などについて、得られた結果を報告する。

1 はじめに

箱玉系 [1] はその発見以来、さまざまな側面から研究され、オリジナルの箱玉系を含む形で拡張されてきた [10]. 本論文で考察する箱とバスケットと玉の系 [2] は、2010 年に T. Lam, P. Pylyavskyy, R. Sakamoto らによって発見された系であり、向き付けられた曲面におけるネットワークから構成されたものである. バスケットがない状態を初期状態とした場合、箱玉系と同じルールを与えることから、箱玉系の拡張とみなすことができる. 論文 [2] において、ソリトン間の散乱過程や位相のずれについての基本的な考察はおこなわれているが、その力学的な性質は不明であった. 本論文では、BBB 系が従う超離散双線形形式を示し、さらに任意個のバスケットソリトンおよび玉ソリトンを含む N ソリトン解 ($N = p + q$) を得たので報告する.

2 箱とバスケットと玉の系について

Yang-Baxter 方程式を満たす whurl 関係式 [4] の超離散化は以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned} a' &= a - \min(a + b, a + c, b + f) + \min(e + c, d + c, d + b) \\ b' &= b - \min(a + b, a + c, b + f) + \min(a + e, d + f, e + f) \\ c' &= c - \min(e + c, d + c, d + b) + \min(a + e, d + f, e + f) \\ d' &= d + a - a' \\ e' &= e + b - b' \\ f' &= f + c - c' \end{aligned}$$

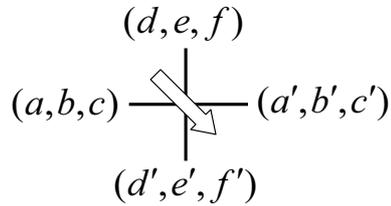


図 1: $R : (a, b, c) \otimes (d, e, f) \mapsto (d', e', f') \otimes (a', b', c')$

このとき $L := a - b + c = a' - b' + c'$, $K := d - e + f = d' - e' + f'$ が成立する. ここで、 $a \rightarrow \infty$ ($L \rightarrow \infty$) および $K > 0$ としたものが、箱とバスケットと玉の系 (Box-Basket-Ball System; BBB

*E-mail : yura@fun.ac.jp

系)[2, 3] である. (a, b, c) に対し (a', b', c') を空間座標 $n \rightarrow n+1$, (d, e, f) に対し (d', e', f') を時間 $t \rightarrow t+1$ の向きに定め, $b_n^t \equiv b, b_{n+1}^t \equiv b', e_n^t \equiv e, e_n^{t+1} \equiv e'$ などと表すと,

$$b_{n+1}^t = e_n^t + \min(0, K - f_n^t) \quad (1)$$

$$c_{n+1}^t = c_n^t + f_n^t - f_n^{t+1} \quad (2)$$

$$e_n^{t+1} = b_n^t + e_n^t - b_{n+1}^t \quad (3)$$

$$f_n^{t+1} = \min(c_n^t, K + e_n^t - f_n^t) \quad (4)$$

を得る. e_n^t と f_n^t をそれぞれ, 時刻 t , 座標 n での「バスケット」と「玉」の数と見たとき, BBB 系の時間発展の 1 ステップは次のように解釈できる [3].

1. 空のバスケットをすべて一つ右の箱の上に移し, 玉の入ったバスケットは動かさない.
2. 次に, 左側から順にすべての玉を 1 度だけ, 右側のもっとも近い空箱または空きバスケットに移す. ただし同じ場所で箱とバスケット両方が空いている場合には, 空箱に優先して玉を入れるものとする.

バスケットがない場合 ($e_n^t = 0, \forall t, n$) に, 玉の動きは箱玉系の時間発展と一致する. この意味で BBB 系は箱玉系の拡張となっている. BBB 系の具体例を図 2 に示す.

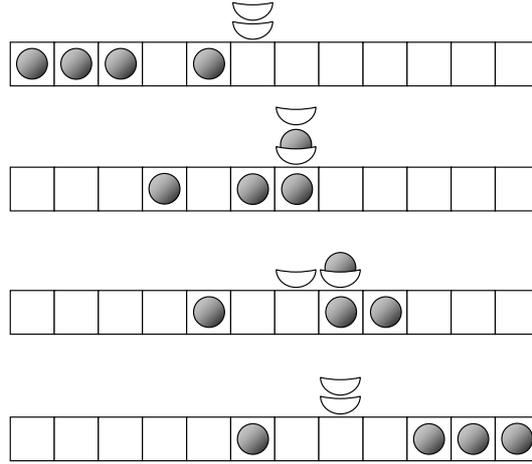


図 2: BBB 系の時間発展例 ($K = 1$)

3 BBB 系の双線形形式と離散 KP 方程式

上式 (1)~(4) は次の超離散双線形形式および従属変数変換から得られる.

$$F_n^t + G_{n+1}^{t+1} = \max(F_{n+1}^{t+1} + G_n^t, F_n^{t+1} + G_{n+1}^t - K) \quad (5)$$

$$F_{n+1}^{t+1} + G_n^{t-1} = \max(F_n^t + G_{n+1}^t, F_n^{t+1} + G_{n+1}^{t-1} - K) \quad (6)$$

$$b_n^t = F_{n-1}^t + G_{n-1}^{t-1} - F_{n-1}^{t-1} - G_{n-1}^t \quad (7)$$

$$c_n^t = F_{n-1}^{t+1} + G_{n-1}^{t-1} - F_{n-1}^t - G_{n-1}^t \quad (8)$$

$$e_n^t = F_{n-1}^{t-1} + G_n^{t-1} - F_n^{t-1} - G_{n-1}^{t-1} \quad (9)$$

$$f_n^t = F_{n-1}^t + G_n^{t-1} - F_n^t - G_{n-1}^{t-1} \quad (10)$$

さらに $|n| \rightarrow \infty$ で, $e_n^t, f_n^t = 0$ の条件を課し,

$$r_n^t := \sum_{m=n}^{\infty} e_m^t = F_{n-1}^{t-1} - G_{n-1}^{t-1} \quad (11)$$

$$s_n^t := \sum_{m=n}^{\infty} f_m^t = F_{n-1}^t - G_{n-1}^{t-1} \quad (12)$$

とおくことによって, 箱玉系で馴染みのある「運搬車」の表示 $b_n^t = r_n^{t+1} - r_n^t, c_n^t = s_n^{t+1} - s_n^t$ を与えることもできる.

上に述べた双線形形式 (5), (6) は次の 2 本の dKP 方程式から導くことができる.

$$\alpha(\beta - \gamma)\tau_n\tau_{tm} + \beta(\gamma - \alpha)\tau_t\tau_{mn} + \gamma(\alpha - \beta)\tau_m\tau_{nt} = 0 \quad (13)$$

$$\alpha(\beta - \kappa)\tau_n\tau_{tl} + \beta(\kappa - \alpha)\tau_t\tau_{ln} + \kappa(\alpha - \beta)\tau_l\tau_{nt} = 0 \quad (14)$$

ここで $\tau \equiv \tau(n, t, m, l)$, $\tau_n \equiv \tau(n+1, t, m, l)$, $\tau_{\bar{n}} \equiv \tau(n-1, t, m, l)$ など, 添え字は τ からのずれを示す表記を用いている. $\mu = \frac{\gamma(\alpha - \beta)}{\beta(\gamma - \alpha)}$, $-\frac{\mu}{\nu} = \frac{\kappa(\alpha - \beta)}{\beta(\kappa - \alpha)}$ と置き, さらに reduction 条件 $\tau_m = \tau_{tl}$ により独立変数 l を消去すると,

$$\begin{aligned} -(1 + \mu)\tau_n\tau_{tm} + \tau_t\tau_{mn} + \mu\tau_m\tau_{nt} &= 0 \\ (\mu - \nu)\tau_n\tau_m + \nu\tau_t\tau_{tm} - \mu\tau_{\bar{t}m}\tau_{nt} &= 0 \end{aligned}$$

さらに $\tilde{F}_n^t := \tau_m \equiv \tau(n, t, m+1)$, $\tilde{G}_n^t := \tau \equiv \tau(n, t, m)$, $t \rightarrow -t$ とすることにより

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{n+1}^{t+1}\tilde{G}_n^t + \mu\tilde{F}_n^{t+1}\tilde{G}_{n+1}^t &= (1 + \mu)\tilde{F}_n^t\tilde{G}_{n+1}^{t+1} \\ \nu\tilde{F}_{n+1}^{t+1}\tilde{G}_n^{t-1} - \mu\tilde{F}_n^{t+1}\tilde{G}_{n+1}^{t-1} &= (\nu - \mu)\tilde{F}_n^t\tilde{G}_{n+1}^t \end{aligned}$$

を得る. 最後に変数変換 (max-plus 対応) $\mu = \exp\left(-\frac{K}{\varepsilon}\right)$, $\nu = 1 + \mu$, $\tilde{F}_n^t = \exp\left(\frac{F_n^t}{\varepsilon}\right)$, $\tilde{G}_n^t = \exp\left(\frac{G_n^t}{\varepsilon}\right)$ および超離散極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ を取ることにより式 (5), (6) が得られる. 論文 [2] では min-plus 対応により記述してあるが, ここでは可積分ソリトン理論で一般的な max-plus 対応を用いて記載していることに注意する. これまでの議論より, dKP 方程式から式 (1)~(4) に従う BBB 系が導けたこととなる.

4 ソリトン解について

BBB 系には玉からなるソリトン (いわゆる箱玉ソリトン) と, バスケットからなるソリトンが存在することが知られている [3, 2]. p を玉からなるソリトンの数, q をバスケット数とし, 以下では, まず $p = 0$ または $q = 0$ の場合を調べたのち, 一般の (p, q) -ソリトン解について述べる.

4.1 玉のない場合 ($p = 0$)

$f_n^t = 0$ から $F_n^t = G_n^{t-1}$ となる. このとき任意の解は $r_n^t = r_{n-1}^{t-1}$, $s_n^t = 0$ と表され, 常にバスケットのみからなる速度 1 の平行移動を示す. バスケットが 1 つの場合の $(0, 1)$ -ソリトン解は $e_n^t = \delta_{t,n}$ とおくと,

$$F_n^t = G_n^{t-1} = \min(0, n - t) \quad (15)$$

と表される．この min 解が非負のバスケット数 e_n^t を与えることに注意する．

箱玉系においても min タイプの解は存在する (図 3)．箱玉系での負のソリトン [5] (広田の超離散”BBB”方程式) の τ 関数として知られており，その解は従属変数変換により負の f_n^t を与える．しかしながらここでの min 解 (15) は，箱玉系における負のソリトンではないことに注意しておく．BBB 系においては，箱玉系に由来する負のソリトンに対応する解が禁じられていることを次節にみる．

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & -2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 3, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -2, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\
1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0, & -2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & -2, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 3, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -2, & 1, & 1, & 1, & 1
\end{array}$$

図 3: 周期箱玉系における負のソリトンの例 ($K = 1$)[5]．この箱玉系の解は式 (16, 17) を満たすが，式 (18) を満たさないため，BBB 系には含まれないことに注意する．

4.2 バスケットのない場合 ($q = 0$)

$e_n^t = 0$ から $F_n^t = G_n^t$ となり，式 (6), (10) より

$$F_{n+1}^{t+1} + F_n^{t-1} = \max(F_n^t + F_{n+1}^t, F_n^{t+1} + F_{n+1}^{t-1} - K) \quad (16)$$

$$f_n^t = F_{n-1}^t + F_n^{t-1} - F_n^t - F_{n-1}^{t-1} \quad (17)$$

を得るが，これは箱玉系の超離散双線形形式そのものである．またもう一方の双線形形式の式 (5) から，

$$f_n^t \leq K \quad (18)$$

を得る．この条件は，箱の中の玉の数が箱の容量を超えないことを意味する．

箱玉系では初期条件として $\forall n, 0 \leq f_n^0 \leq K$ を課すと，以降の時刻 $t (> 0)$ で $0 \leq f_n^t \leq K$ を満たし続ける．通常 f_n^t は箱の中の玉の数と「解釈」されるため，任意の時刻における (箱玉系は可逆であるから) この条件は妥当である．これに対し，BBB 系には明示的にこの上限についての条件式 (18) が含まれていることがわかる．逆に箱玉系において，初期条件として負の値を与えると通常の正ソリトンとの衝突過程において $f_n^t > K$ が生じることが知られている (図 3)．つまり，箱玉系に由来する負のソリトンと正のソリトンが混在する解は式 (5) あるいは式 (18) により禁じられていることがわかる．ただし，正のソリトンを含まない負のソリトンのみの解は速度 1 しか取らないため衝突せず式 (18) を常に満たすことに注意しておく．

4.3 (p, q) -ソリトン解

玉ソリトンの速度を $\omega_i (\geq 1)$, 箱の容量を $K = 1$ とするとき,

$$\begin{aligned} [N] &= \{0, 1, \dots, N-1\} \\ |[N]| &= N \\ \eta_i &= n - \omega_i t - \theta_i \\ \xi_i &= n - t - \varphi_i \\ A_{ij} &= \min(\omega_i, \omega_j) \\ h(m) &= \sum_{i \in [q]} \min(0, \xi_i - m) \end{aligned}$$

を用いて,

$$F_n^t = \max_{J \subseteq [p]} \left(h(|J|) + \sum_{i \in J} \eta_i - \sum_{i, j \in J, i \neq j} A_{ij} \right) \quad (19)$$

$$G_n^t = \max_{J \subseteq [p]} \left(h(|J| + 1) + \sum_{i \in J} \eta_i - \sum_{i, j \in J, i \neq j} A_{ij} \right) \quad (20)$$

と表される. ただし和記号の領域が空集合の場合は値を 0 とする. バスケット数 $q = 0$ の場合は, $h(\cdot) = 0$ となり箱玉系の p ソリトン解 (負のソリトンは含まない) を与える (4.2 節). パラメータ q は h の定義の中にのみ現れることに注意する. また玉ソリトン数 $p = 0$ の場合は, $F_n^t = G_n^{t-1} = h(0)$ となり q 個のバスケットのみからなる速度 1 の解を与える (4.1 節).

図 2 は, $p = 2, q = 2, \omega_0 = 3, \omega_1 = 1, \theta_0 = \theta_1 = 0, \varphi_0 = \varphi_1 = 3$ として描いた解でもある. $q = 2, \varphi_0 = \varphi_1$ と重ねて与えた初期値が, 初期状態での 2 つの重なったバスケット ($= 2 \min(0, n - t - 3)$) に対応しているが, 衝突過程 (上から 3 番目の時刻) では個別に位相のずれを受けていることがわかる.

また一般には, $h(m)$ の定義中での最小値関数 \min の重ね合わせは, 正の実数の係数 (非自然数のバスケット個数に対応) も許すことにも注意しておく.

\min 解を含むソリトン解 (19), (20) の証明は離散系を経由せず超離散系の中だけでおこなうことが可能である. その証明は [6, 7] と同様の直接的な手法により可能であるが, 紙面の都合上他の機会に譲ることとする. またほぼ同様の形式により, 箱玉系の負ソリトンを含む解についても直接的手法により証明できる. この箱玉系に関する解は Appendix に記載した.

謝辞

発表時に中田庸一氏から頂いたコメントに感謝する. また, 本研究は科研費 (基盤 (C) 23611027) の助成を受けたものである.

A Hirota の負ソリトン解 [5] について

箱玉系は以下の超離散双線形形式と従属変数変換で与えられる.

$$\begin{aligned} F_{n+1}^{t+1} + F_n^{t-1} &= \max(F_n^t + F_{n+1}^t, F_n^{t+1} + F_{n+1}^{t-1} - 1) \\ f_n^t &= F_{n-1}^t + F_n^{t-1} - F_n^t - F_{n-1}^{t-1} \end{aligned}$$

この方程式に対して [5] の中では, 正ソリトンと負ソリトンを一つずつ含む場合の解が示されている.

$$F_n^t = \max[\min(0, n-t), \min(0, n-t-2) + \eta_1]$$

今回の BBB 系の解を証明する過程と同様の手法を用いることによる正のソリトンを p 個, 負のソリトンを q 個含むソリトン解について, 以下に結果のみを記す.

$$F_n^t = \max_{J \subseteq [p]} \left(h(2|J|) + \sum_{i \in J} \eta_i - \sum_{i, j \in J, i \neq j} A_{ij} \right)$$

ここで, 各変数の定義は本文中と同様のものを用いている. この解は本質的に [8] における背景解に由来するものと同一である. ここでは紙面の都合上証明は省略する.

参考文献

- [1] D. Takahashi and J. Satsuma, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 3514(1990).
- [2] T. Lam, P. Pylyavskyy and R. Sakamoto, arXiv: 1011.5930.
- [3] 坂本玲峰, 超離散ソリトン系と組み合わせ的表現論, 数理科学 **583** (2012年1月), 36–41.
- [4] T. Lam, P. Pylyavskyy, arXiv:1008.1949.
- [5] 広田良吾, ソリトン方程式の不安定解の超離散極限, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.19ME-S2.
- [6] D. Takahashi, R. Hirota, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **76**, 104007(2007).
- [7] H. Nagai, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**, 235204(2008).
- [8] M. Kanki, J. Mada and T. Tokihiro, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**, 145202(2011).
- [9] 中村佳正編, 「可積分系の応用数理」, 裳華房 (2000).
- [10] 広田良吾, 高橋大輔, 「差分と超離散」, 共立出版 (2003).