九州大学学術情報リポジトリ Kyushu University Institutional Repository

ある拡張型離散戸田方程式の漸近挙動について

飛田,明彦 東京理科大学大学院理学研究科

福田, 亜希子 東京理科大学理学部

石渡, 恵美子 東京理科大学理学部

岩崎, 雅史 京都府立大学生命環境学部

他

https://doi.org/10.15017/27184

出版情報:応用力学研究所研究集会報告. 24A0-S3 (24), pp.150-155, 2013-03. 九州大学応用力学研究

肵

バ バージョン: 権利関係:

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3

「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」(研究代表者 太田 泰広) 共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

$Frontiers \ of \ nonlinear \ wave \ science -- various \ phenomena \ and \ structures$

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy, Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by

Kyushu University Global COE Program

Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

<u>Article No. 24</u> (pp. 150 - 155)

ある拡張型離散戸田方程式の漸近挙動 について

飛田 明彦(TOBITA Akihiko),福田 亜希子(FUKUDA Akiko),石渡 恵美子(ISHIWATA Emiko),岩崎 雅史 (IWASAKI Masashi),中村 佳正(NAKAMURA Yoshimasa)

(Received 15 January 2013; accepted 21 February 2013)

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2013



ある拡張型離散戸田方程式の漸近挙動について

東京理科大学大学院理学研究科 飛田 明彦 (TOBITA Akihiko) 東京理科大学理学部 福田 亜希子 (FUKUDA Akiko) 東京理科大学理学部 石渡 恵美子 (ISHIWATA Emiko) 京都府立大学生命環境学部 岩崎 雅史 (IWASAKI Masashi) 京都大学大学院情報学研究科 中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)

概 要 中心多様体理論を利用すると,力学系を低次元化して平衡点付近における解挙動を調べることができる.本報告では,離散戸田方程式の拡張と見なせる離散可積分系に関連する中心多様体が存在することを示し,平衡点付近における解が平衡点へ指数的に収束することを明らかにする.

1 はじめに

対称3 重対角行列の固有値計算法として qd アルゴリズムは有名であるが,その漸化式は離散戸田方程式 (dToda: discrete Toda equation)

$$\begin{cases}
q_k^{(n+1)} = q_k^{(n)} + e_k^{(n)} - e_{k-1}^{(n+1)}, & k = 1, 2, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots, \\
e_k^{(n+1)} = \frac{q_{k+1}^{(n)}}{q_k^{(n+1)}} e_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, m - 1, \quad e_0^{(n)} \equiv 0, \quad n = 0, 1, \dots
\end{cases}$$
(1.1)

に他ならない . qd アルゴリズムでは上付き添え字 n は反復回数 , 下付き添え字 k は行列の成分番号 に対応している . $\operatorname{dToda}(1.1)$ の拡張の 1 つとして , 自然数 M をパラメータにもつ離散ハングリー 戸田方程式 $\operatorname{(dhToda: discrete hungry Toda equation)[5]}$

$$\begin{cases}
Q_k^{(n+M)} = Q_k^{(n)} + E_k^{(n)} - E_{k-1}^{(n+1)}, & k = 1, 2, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots, \\
E_k^{(n+1)} = \frac{Q_{k+1}^{(n)}}{Q_k^{(n+M)}} E_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, m - 1, \quad n = 0, 1, \dots
\end{cases}$$
(1.2)

が知られている.ただし, $n=0,1,\dots$ に対して $E_0^{(n)}\equiv 0$ である. $\mathrm{dhToda}\,(1.2)$ は,あらゆる部分の行列式が非負となる totally nonnegative (TN) 行列の固有値計算に応用できることが報告されている [2]. $\mathrm{dhToda}\,(1.2)$ に基づくアルゴリズムは $\mathrm{dhToda}\,P$ ルゴリズムと呼ばれ, $\mathrm{qd}\,P$ ルゴリズムの拡張と見なすことができる.

中心多様体理論 [1] は,力学系の平衡点付近における局所的な解挙動を調べる際に有効な解析手法の1 つである.力学系に対して中心多様体が存在すれば,力学系を低次元化して局所的な解の振る舞いを調べることができる.中心多様体理論を用いた解析により, $\mathrm{dToda}\,(1.1)$ と $\mathrm{dhToda}\,(1.2)$ の平衡点付近における解が指数的に平衡点へ近づくことが示され, $\mathrm{qd}\,$ アルゴリズムと $\mathrm{dhToda}\,$ アルゴリズムは終盤において安定に収束することが保証されている [3,4].

dhToda (1.2) と異なる dToda (1.1) の拡張として,

$$\begin{cases}
Q_k^{(n+1)} = Q_k^{(n)} + E_k^{(n)} - E_{k-1}^{(n+M)}, & k = 1, 2, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots, \\
E_k^{(n+M)} = \frac{Q_{k+1}^{(n)}}{Q_k^{(n+1)}} E_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, m - 1, \quad n = 0, 1, \dots
\end{cases}$$
(1.3)

が考えられる.ただし, $n=0,1,\ldots$ に対して $E_0^{(n)}\equiv 0$ である.以降,区別のために(1.2)を $\mathrm{dhToda}_{\mathbf{I}}$, (1.3) を dhToda II と呼ぶことにする . dhToda I (1.2) と dhToda II (1.3) の違いは上付き添え字である . dhToda II (1.3) から , dhToda I アルゴリズムとは異なる TN 行列の固有値計算アルゴリズムが定式 化できるが,本報告ではその詳細には触れない.本報告では, $\mathrm{dhToda_{II}}\,(1.3)$ に関連する中心多様体 の存在を調べ,平衡点付近での解挙動を明らかにする.

2 中心多樣体理論

本節では, $m{x}^{(n)} := (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{\ell_1}^{(n)})^{ op} \in \mathbb{R}^{\ell_1}, \; m{y}^{(n)} := (y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_{\ell_2}^{(n)})^{ op} \in \mathbb{R}^{\ell_2}$ に関する離 散力学系

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(n+1)} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}^{(n)} + \zeta(\boldsymbol{x}^{(n)}, \boldsymbol{y}^{(n)}), \\ \boldsymbol{y}^{(n+1)} = \mathcal{B}\boldsymbol{y}^{(n)} + \chi(\boldsymbol{x}^{(n)}, \boldsymbol{y}^{(n)}) \end{cases}$$
(2.1)

の漸近解析に有効な中心多様体理論 $[1,\,6]$ について概説する.行列 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{\ell_1 imes\ell_1}$ の固有値はすべて複 素平面の単位円周上に, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\ell_2 imes \ell_2}$ の固有値はすべて単位円の内部に分布しているとする.さらに, C^2 級関数 $\zeta: \mathbb{R}^{\ell_1+\ell_2} \to \mathbb{R}^{\ell_1}, \ \chi: \mathbb{R}^{\ell_1+\ell_2} \to \mathbb{R}^{\ell_2}$ は

$$\zeta(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad D\zeta(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \chi(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad D\chi(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

を満たすとする.ただし, $D\zeta$, $D\chi$ はそれぞれ ζ , χ のヤコビ行列である.離散力学系 (2.1) に関連 する中心多様体の存在性に関して,次の定理が成り立つ.

定理 2.1. 離散力学系 (2.1) に対して , $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $Dh(\mathbf{0}) = \mathbf{O}$ かつ $\mathbf{y}^{(n+1)} = h(\mathbf{x}^{(n+1)})$ を満たす 中心多様体と呼ばれる C^2 級関数 $h:\mathbb{R}^{\ell_1} o\mathbb{R}^{\ell_2}$ が存在する.ただし,十分小さな arepsilon>0 に対して $\|oldsymbol{x}^{(n)}\|<arepsilon$ とする.

離散力学系 (2.1) を中心多様体 h によって低次元化すると,

$$z^{(n+1)} = Az^{(n)} + \zeta(z^{(n)}, h(z^{(n)})), \quad z^{(n)} \in \mathbb{R}^{\ell_1}$$
 (2.2)

が得られる.原点付近における離散力学系(2.1)と低次元化された離散力学系(2.2)の解挙動につい て次の定理が成り立つ.

定理 2.2. (2.2) の零解が安定ならば (2.1) の零解は安定である.また $(x^{(n)}, y^{(n)})$ を十分小さな 初期値 $(oldsymbol{x}^{(0)},oldsymbol{y}^{(0)})$ に対する解とする.このとき,(2.2) の解 $oldsymbol{z}^{(n)}$ が存在し,すべての n に対して $\|m{x}^{(n)}-m{z}^{(n)}\|\leq \kappaeta^n$ かつ $\|m{y}^{(n)}-h(m{z}^{(n)})\|\leq \kappaeta^n$ を満たす.ここで, κ,eta は正の定数, $\beta<1$ である.

3 dhToda II に関連する中心多様体

本節では, $\mathrm{dhToda_{II}}$ (1.3)に関連する中心多様体の存在を示す. $\mathrm{dhToda_{II}}$ 変数の初期値 $Q_k^{(0)},$ $E_k^{(0)},$ $\dots,$ $E_k^{(M-1)}$ が正かつ有界であるとき, $c_1>c_2>\dots>c_m$ を満たす正の定数 $c_1,$ c_2,\dots,c_m が 存在して,

$$\lim_{n \to \infty} Q_k^{(n)} = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\lim_{n \to \infty} E_k^{(n)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m - 1$$
(3.1)

$$\lim_{n \to \infty} E_k^{(n)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m - 1$$
(3.2)

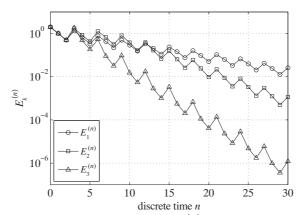


図 1: $\mathrm{dhToda}_{\mathrm{II}}$ 変数 $E_k^{(n)}$ の挙動 .

が成り立つ.(3.1),(3.2) の証明については別論文に示す予定である.ここで, $\mathrm{dhToda_{II}}$ (1.3) の解挙動についての数値例を示す.数値例では,m=4,M=3 として初期値を $Q_k^{(0)}=4.0$,(k=1,2,3,4), $E_k^{(0)}=2.0$, $E_k^{(1)}=1.0$, $E_k^{(2)}=0.5$ (k=1,2,3) と定めた.図 1 は $n=0,1,\ldots,30$ における $E_k^{(n)}$ の値をプロットしたグラフである.離散時間を $n=3\ell+j$ (j=0,1,2) とすると,図 1 より ℓ が大きくなるにつれて $E_k^{(3\ell+j)}$ $(k=1,2,3,\ j=0,1,2)$ は滑らかに 0 に近づく様子が観察できる。他の数値例でも同様の現象を確認できるので,離散時間 n を $\ell M+j$ $(j=0,1,\ldots,M-1)$ と書き直し, $Q_k^{(\ell M+j)}$, $E_k^{(\ell M+j)}$ をそれぞれ $Q_k^{(\ell,j)}$, $E_k^{(\ell,j)}$ と表記して以降の議論を進める.また,離散力学系((2.1) のように (2.1) のように (2.1) の平衡点を原点とするために新しい変数

$$\bar{Q}_k^{(\ell,j)} := Q_k^{(\ell,j)} - c_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1,$$

$$\bar{E}_k^{(\ell,j)} := E_k^{(\ell,j)}, \quad k = 1, 2, \dots, m - 1, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1$$

を導入する.このとき, $\operatorname{dhToda}_{\mathrm{II}}(1.3)$ は次のように書き換えられる.

$$\begin{cases}
\bar{Q}_k^{(\ell,j+1)} = \bar{Q}_k^{(\ell,j)} + \bar{E}_k^{(\ell,j)} - \bar{E}_{k-1}^{(\ell+1,j)}, & k = 1, 2, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \\
\bar{E}_k^{(\ell+1,j)} = \frac{\bar{Q}_{k+1}^{(\ell,j)} + c_{k+1}}{\bar{Q}_k^{(\ell,j+1)} + c_k} \bar{E}_k^{(\ell,j)}, & k = 1, 2, \dots, m-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.
\end{cases}$$
(3.3)

ただし, $\ell=0,1,\dots$ に対して $E_0^{(\ell,j)}\equiv 0$ である.本報告では,(3.3) も $\mathrm{dhToda_{II}}$ と呼ぶ.ここで, $\mathbf{q}^{(\ell)}:=(\mathbf{q}_1^{(\ell)},\mathbf{q}_2^{(\ell)},\dots,\mathbf{q}_m^{(\ell)})^{\top}\in\mathbb{R}^{mM},\ \mathbf{q}_k^{(\ell)}:=(\bar{Q}_k^{(\ell,0)},\bar{Q}_k^{(\ell,1)},\dots,\bar{Q}_k^{(\ell,M-1)}),\ \mathbf{e}^{(\ell)}:=(\mathbf{e}_1^{(\ell)},\mathbf{e}_2^{(\ell)},\dots,\mathbf{e}_{k-1}^{(\ell)})^{\top}\in\mathbb{R}^{(m-1)M},\ \mathbf{e}_k^{(\ell)}:=(\bar{E}_k^{(\ell,0)},\bar{E}_k^{(\ell,1)},\dots,\bar{E}_k^{(\ell,M-1)})$ とすると,次の補題が得られる.

補題 3.1. $k=1,2,\ldots,m,\;j=0,1,\ldots,M-1$ に対して $|ar{Q}_k^{(\ell,j)}| < c_k$ ならば ,

$$\bar{Q}_{k}^{(\ell+1,j)} = -\alpha_{k-1} \left(\alpha_{k-1} \sum_{t=0}^{j-1} \bar{E}_{k-1}^{(\ell,t)} + \sum_{t=j}^{M-1} \bar{E}_{k-1}^{(\ell,t)} \right) + \bar{Q}_{k}^{(\ell,j)} + \alpha_{k} \sum_{t=0}^{j-1} \bar{E}_{k}^{(\ell,t)} + \sum_{t=j}^{M-1} \bar{E}_{k}^{(\ell,t)} + \bar{F}_{k,j}(\mathbf{q}^{(\ell)}, \mathbf{e}^{(\ell)}), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$
(3.4)

$$\bar{E}_{k}^{(\ell+1,j)} = \alpha_{k} \bar{E}_{k}^{(\ell,j)} + \bar{g}_{k,j}(\boldsymbol{q}^{(\ell)}, \boldsymbol{e}^{(\ell)}), \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1$$
(3.5)

が成り立つ.ただし, $\alpha_k:=c_{k+1}/c_k$ とし,特に $\alpha_0=1$ とする.ここで, $\bar f_{k,j},\ \bar g_{k,j}$ は $m q^{(\ell)},\ m e^{(\ell)}$ の関数であり,

$$\bar{f}_{k,j}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0, \quad \nabla \bar{f}_{k,j}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \bar{g}_{k,j}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0, \quad \nabla \bar{g}_{k,j}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$
 (3.6)

を満たす.ただし, $abla ar{f}_{k,j}, \,\,
abla ar{g}_{k,j}$ は関数 $ar{f}_{k,j}, \,\, ar{g}_{k,j}$ の偏導関数である.

証明. まず , (3.5) を k に関する帰納法で示す . k=1 のとき $\mathrm{dhToda_{II}}$ (3.3) の第 2 式は

$$\bar{E}_{1}^{(\ell+1,j)} = \frac{\bar{E}_{1}^{(\ell,j)}}{c_{1}} \cdot \frac{\bar{Q}_{2}^{(\ell,j)} + c_{2}}{1 + \frac{\bar{Q}_{1}^{(\ell,j+1)}}{c_{1}}}$$
(3.7)

と書き換えられる . |x|<1 なる $x\in\mathbb{R}$ に対して $1/(1-x)=\sum_{j=0}^\infty x^j$ が成り立つので , $|\bar{Q}_1^{(\ell,j+1)}|< c_1$ ならば (3.7) は次のように変形できる .

$$\bar{E}_1^{(\ell+1,j)} = \frac{\bar{E}_1^{(\ell,j)}}{c_1} (\bar{Q}_2^{(\ell,j)} + c_2) \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(-\frac{\bar{Q}_1^{(\ell,j+1)}}{c_1} \right)^p \right] = \alpha_1 \bar{E}_1^{(\ell,j)} + \bar{g}_{1,j}.$$

ただし, $\bar{g}_{1,j}=[\bar{Q}_2^{(\ell,j)}+(\bar{Q}_2^{(\ell,j)}+c_2)\sum_{p=1}^\infty(-\bar{Q}_1^{(\ell,j+1)}/c_1)^p]\bar{E}_1^{(\ell,j)}/c_1$ である.ここで, $\bar{g}_{1,j}$ に含まれる $\bar{Q}_1^{(\ell,j+1)}$ は $\mathrm{dhToda_{II}}$ (3.3) の第 1 式より $\bar{Q}_1^{(\ell,j+1)}=\bar{Q}_1^{(\ell,j)}+\bar{E}_1^{(\ell,j)}$ なので, $\bar{g}_{1,j}$ は $\mathbf{q}^{(\ell)}$, $\mathbf{e}^{(\ell)}$ の関数と見なせる.また, $\bar{g}_{1,j}$ は明らかに (3.6) の第 3 式と第 4 式を満たす.続いて,(3.5) において k が k-1 である場合に成り立つと仮定する.(3.3) の第 2 式は $|\bar{Q}_k^{(\ell,j+1)}|< c_k$ を仮定すると,次のように変形できる.

$$\bar{E}_k^{(\ell+1,j)} = \frac{\bar{E}_k^{(\ell,j)}}{c_k} \cdot \frac{\bar{Q}_{k+1}^{(\ell,j)} + c_{k+1}}{1 + \frac{\bar{Q}_k^{(\ell,j+1)}}{c_k}} = \alpha_k \bar{E}_k^{(\ell,j)} + \bar{g}_{k,j}.$$

ただし, $\bar{g}_{k,j} = [\bar{Q}_{k+1}^{(\ell,j)} + (\bar{Q}_{k+1}^{(\ell,j)} + c_{k+1}) \sum_{p=1}^{\infty} (-\bar{Q}_k^{(\ell,j+1)}/c_k)^p] \bar{E}_k^{(\ell,j)}/c_k$ である.ここで, $\bar{g}_{k,j}$ に含まれる $\bar{Q}_k^{(\ell,j+1)}$ は $\mathrm{dhToda_{II}}$ (3.3) の第 1 式より $\bar{Q}_k^{(\ell,j+1)} = \bar{Q}_k^{(\ell,j)} + \bar{E}_k^{(\ell,j)} - \bar{E}_{k-1}^{(\ell+1,j)}$ なので, $\bar{E}_{k-1}^{(\ell+1,j)}$ に対して帰納法の仮定を用いると, $\bar{g}_{k,j}$ は $\mathbf{q}^{(\ell)}$, $\mathbf{e}^{(\ell)}$ の関数と見なせる.また, $\bar{g}_{k,j}$ は (3.6) の第 3 式と第 4 式を満たす.以上より, $k=1,2,\ldots,m-1$ に対して (3.5) および (3.6) の第 3 式と第 4 式が示された.

次に (3.4) を k に関する帰納法で示す . k=1 とした (3.3) の第1式に対して (3.5) を用いると ,

$$\bar{Q}_1^{(\ell+1,j)} = \bar{Q}_1^{(\ell,j)} + \alpha_1 \sum_{t=0}^{j-1} \bar{E}_1^{(\ell,t)} + \sum_{t=i}^{M-1} \bar{E}_1^{(\ell,t)} + \bar{f}_{1,j}$$

が得られる.ただし, $\bar{f}_{1,j}=\sum_{t=0}^{j-1}\bar{g}_{1,t}$ であり, $\bar{f}_{1,j}$ は (3.6) の第 1 式と第 2 式を満たす.(3.4) において k を k-1 とした場合に成り立つと仮定する.まず,j=0 とした (3.3) の第 1 式は (3.5) より,

$$\bar{Q}_k^{(\ell+1,0)} = -\alpha_{k-1} \sum_{t=0}^{M-1} \bar{E}_{k-1}^{(\ell,t)} + \bar{Q}_k^{(\ell,0)} + \sum_{t=0}^{M-1} \bar{E}_k^{(\ell,t)} + \bar{f}_{k,0}$$
(3.8)

と書き換えられる.ただし, $\bar{f}_{k,0}=-\sum_{t=0}^{M-1}\bar{g}_{k-1,t}$ であり, $\bar{f}_{k,0}$ は (3.6) の第 1 式と第 2 式を満たし,(3.8) は j=0 とした (3.4) と一致する. $\bar{Q}_k^{(\ell+1,i)}$ $(i=1,2,\ldots,j-1)$ は (3.4) のように与えられると仮定すると, $\bar{Q}_k^{(\ell+1,j)}$ は (3.5) より,

$$\bar{Q}_{k}^{(\ell+1,j)} = -\alpha_{k-1} \left(\alpha_{k-1} \sum_{t=0}^{j-1} \bar{E}_{k-1}^{(\ell,t)} + \sum_{t=j}^{M-1} \bar{E}_{k-1}^{(\ell,t)} \right) + \bar{Q}_{k}^{(\ell,j)} + \alpha_{k} \sum_{t=0}^{j-1} \bar{E}_{k}^{(\ell,t)} + \sum_{t=j}^{M-1} \bar{E}_{k}^{(\ell,t)} + \bar{f}_{k,j}$$

と導かれる.ただし, $\bar{f}_{k,j} = -\sum_{t=0}^{j-1} \{[\bar{Q}_k^{(\ell+1,t)} + (\bar{Q}_k^{(\ell+1,t)} + c_k)\sum_{p=1}^{\infty} (-\bar{Q}_{k-1}^{(\ell+1,t+1)}/c_{k-1})^p]\bar{E}_{k-1}^{(\ell+1,t)}/c_{k-1}\}$ $-\sum_{t=j}^{M-1} \bar{g}_{k-1,t} - \alpha_{k-1}\sum_{t=0}^{j-1} \bar{g}_{k-1,t} + \sum_{t=0}^{j-1} \bar{g}_{k,t}$ である.ここで, $\bar{f}_{k,j}$ に含まれる $\bar{Q}_k^{(\ell,t)}$, $\bar{Q}_{k-1}^{(\ell,t)}$ ($t=0,1,\ldots,j-1$)に対して帰納法の仮定を用いると, $\bar{f}_{k,j}$ は $q^{(\ell)}$, $e^{(\ell)}$ の関数と見なせる.また, $\bar{f}_{k,j}$ は (3.6) の第 1 式と第 2 式を満たす.以上より, $k=1,2,\ldots,m$ に対して (3.4) および (3.6) の第 1 式と第 2 式が成り立つ.

ここで,新たな変数を次のように定義する.

$$p_k^{(\ell,j)} := -\alpha_{k-1}^2 \beta_{k-1} \sum_{t=0}^{j-1} \bar{E}_{k-1}^{(\ell,t)} - \alpha_{k-1} \beta_{k-1} \sum_{t=j}^{M-1} \bar{E}_{k-1}^{(\ell,t)} + \bar{Q}_k^{(\ell,j)} + \alpha_k \beta_k \sum_{t=0}^{j-1} \bar{E}_k^{(\ell,t)} + \beta_k \sum_{t=j}^{M-1} \bar{E}_k^{(\ell,t)}.$$
(3.9)

ただし , $\beta_k:=1/(1-\alpha_k)$ である.このとき , $p_k^{(\ell,j)},\ e_k^{(\ell,j)}$ の ℓ から $\ell+1$ への時間発展について次の補題が得られる.

補題 3.2. $k=1,2,\ldots,m$ に対して $m{p}_k^{(\ell)}:=(p_k^{(\ell,0)},p_k^{(\ell,1)},\ldots,p_k^{(\ell,M-1)}),\; m{p}^{(\ell)}:=(m{p}_1^{(\ell)},m{p}_2^{(\ell)},\ldots,m{p}_m^{(\ell)})^\top\in\mathbb{R}^{mM}$ とする. $k=1,2,\ldots,m$ に対して $|\bar{Q}_k^{(\ell,j)}|< c_k$ ならば $\mathrm{dhToda_{II}}$ (3.3) は次のような離散力学系に書き換えられる.

$$\begin{cases}
\mathbf{p}^{(\ell+1)} = A\mathbf{p}^{(\ell)} + \mathbf{f}(\mathbf{p}^{(\ell)}, \mathbf{e}^{(\ell)}), \\
\mathbf{e}^{(\ell+1)} = B\mathbf{e}^{(\ell)} + \mathbf{g}(\mathbf{p}^{(\ell)}, \mathbf{e}^{(\ell)}),
\end{cases}$$
(3.10)

 $A = \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{mM \times mM}$

 $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \dots, B_{m-1}) \in \mathbb{R}^{(m-1)M \times (m-1)M}, \quad B_k = \operatorname{diag}(\alpha_k, \alpha_k, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{M \times M},$

$$m{f} := (m{f}_1, m{f}_2, \dots, m{f}_m)^{ op} \in \mathbb{R}^{mM}, \quad m{f}_k := (f_{k,0}, f_{k,1}, \dots, f_{k,M-1}),$$

$$\mathbf{g} := (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{m-1})^{\top} \in \mathbb{R}^{(m-1)M}, \quad \mathbf{g}_k := (g_{k,0}, g_{k,1}, \dots, g_{k,M-1}),$$

$$f(0,0) = 0$$
, $Df(0,0) = O$, $g(0,0) = 0$, $Dg(0,0) = O$. (3.11)

証明. (3.9) において ℓ を $\ell+1$ で置き換えて , (3.4),(3.5) を用いると ,

$$p_{k}^{(\ell+1,j)} = -\alpha_{k-1}^{2}(\alpha_{k-1}\beta_{k-1} + 1) \sum_{t=0}^{j-1} \bar{E}_{k-1}^{(\ell,t)} - \alpha_{k-1}(\alpha_{k-1}\beta_{k-1} + 1) \sum_{t=j}^{M-1} \bar{E}_{k-1}^{(\ell,t)} + \bar{Q}_{k}^{(\ell,j)}$$

$$+ \alpha_{k}(\alpha_{k}\beta_{k} + 1) \sum_{t=0}^{j-1} \bar{E}_{k}^{(\ell,t)} + (\alpha_{k}\beta_{k} + 1) \sum_{t=j}^{M-1} \bar{E}_{k}^{(\ell,t)} + \hat{f}_{k,j}$$

$$(3.12)$$

が得られる.ただし, $\hat{f}_{k,j}=-lpha_{k-1}^2eta_{k-1}^{j-1}ar{g}_{k-1,t}-lpha_{k-1}eta_{k-1}^{M-1}ar{g}_{k-1,t}+ar{f}_{k,j}+lpha_keta_k\sum_{t=0}^{j-1}ar{g}_{k,t}+eta_k\sum_{t=j}^{M-1}ar{g}_{k,t}$ である.ここで, $lpha_keta_k+1=eta_k$ に注意すると(3.12)は

$$p_k^{(\ell+1,j)} = p_k^{(\ell,j)} + \hat{f}_{k,j} \tag{3.13}$$

と表わされる.(3.9) より $\bar{Q}_k^{(\ell,j)}$ は $p_k^{(\ell,j)}$, $\bar{E}_k^{(\ell,j)}$ $(j=0,1,\ldots,M-1)$ の線形結合なので, $f_{k,j}(p^{(\ell)},e^{(\ell)})=\hat{f}_{k,j}(q^{(\ell)},e^{(\ell)})$ なる関数 $f_{k,j}$ が存在する.(3.13) をベクトル表記すると (3.10) の第 1 式が得られる.ここで, $(q^{(\ell)},e^{(\ell)})=(\mathbf{0},\mathbf{0})$ ならば $p^{(\ell)}=\mathbf{0}$ なので, $f_{k,j}(\mathbf{0},\mathbf{0})=0$ である.よって,f は (3.11) の第 1 式と第 2 式を満たす.同様に, $g_{k,j}(p^{(\ell)},e^{(\ell)})=\bar{g}_{k,j}(q^{(\ell)},e^{(\ell)})$ なる関数 $g_{k,j}$ も存在し, $g_{k,j}(\mathbf{0},\mathbf{0})=0$ なので,(3.10) の第 2 式と (3.11) の第 3 式と第 4 式が導かれる.

補題 3.2 より, $dhToda_{II}$ (1.3) は中心多様体が存在する離散力学系 (2.1) と同じ形に変形されることがわかり,次の定理が得られる.

定理 **3.3.** $k=1,2,\ldots,m,\;j=0,1,\ldots,M-1$ に対して $|Q_k^{(\ell,j)}-c_k|< c_k$ とすると, $\mathrm{dhToda_{II}}\,(1.3)$ に関連する中心多様体 $h^*:\mathbb{R}^{mM}\to\mathbb{R}^{(m-1)M}$ が存在する.

定理 3.3 の仮定は , $k=1,2,\ldots,m,\ j=0,1,\ldots,M-1$ に対して $0< Q_k^{(\ell,j)}< 2c_k$ と書き換えられ , $\mathrm{dhToda_{II}}$ 変数の正値性より , 十分大きな ℓ に対して必ず満たされる . つまり , $\mathrm{dhToda_{II}}$ (1.3) に関連する中心多様体は平衡点の近傍において必ず存在することがわかる .

4 dhToda II 変数の漸近挙動

本節では,中心多様体理論を利用して $\mathrm{dhToda_{II}}\,(1.3)$ の局所解析を行う.離散力学系(3.10) の中心多様体 h^* に対して $e^{(\ell)}=h^*(p^{(\ell)})$ が成り立つため,離散力学系(3.10) より,

$$h^*(Ap^{(\ell)} + f(p^{(\ell)}, h^*(p^{(\ell)}))) - Bh^*(p^{(\ell)}) - g(p^{(\ell)}, h^*(p^{(\ell)})) = 0$$

が得られる.ここで, $\phi(\mathbf{0})=\mathbf{0},\ D\phi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ を満たす C^1 級関数を $\phi:\mathbb{R}^{mM}\to\mathbb{R}^{(m-1)M}$ とする.さらに, ϕ に対する作用素 $\mathcal M$ を

$$\mathcal{M}\phi(\boldsymbol{p}^{(\ell)}) := \phi(A\boldsymbol{p}^{(\ell)} + f(\boldsymbol{p}^{(\ell)}, \phi(\boldsymbol{p}^{(\ell)}))) - B\phi(\boldsymbol{p}^{(\ell)}) - g(\boldsymbol{p}^{(\ell)}, \phi(\boldsymbol{p}^{(\ell)}))$$
(4.1)

とする . 補題 3.1,3.2 の証明を部分的に利用すると , $f(p^{(\ell)},\mathbf{0})=\mathbf{0},\ g(p^{(\ell)},\mathbf{0})=\mathbf{0}$ なので , $\phi(p^{(\ell)})=\mathbf{0}$ とすると (4.1) より ,

$$\mathcal{M}(\mathbf{0}) = \phi(Ap^{(\ell)} + f(p^{(\ell)}, \mathbf{0})) - g(p^{(\ell)}, \mathbf{0}) = \phi(Ap^{(\ell)}) = \mathbf{0}$$

が得られる.[1,6] によると,離散力学系 (3.10) の中心多様体 h^* は $p^{(\ell)}$ が十分小さいとき $h^*(p^{(\ell)})=\mathcal{O}(\|p^{(\ell)}\|^q)$ となる.ただし,q>1 である.このとき, $\ell\to\infty$ における離散力学系 (3.10) の漸近挙動は低次元化された離散力学系

$$\mathbf{p}^{(\ell+1)} = A\mathbf{p}^{(\ell)} + f(\mathbf{p}^{(\ell)}, h^*(\mathbf{p}^{(\ell)})) = \mathbf{p}^{(\ell)} + f(\mathbf{p}^{(\ell)}, \mathcal{O}(\|\mathbf{p}^{(\ell)}\|^q))$$
(4.2)

の $\ell \to \infty$ における漸近挙動を調べればよい.離散力学系 (4.2) の零解は明らかに安定であり,[6] より漸近挙動に関する定理を利用すると, $\mathrm{dhToda_{II}}$ 変数の漸近挙動について次の定理が導かれる.

定理 $\mathbf{4.1.}\ Q_k^{(\ell^*,j)},\ E_k^{(\ell^*,j)}$ が平衡点 $(c_k,0)$ に十分近いとき, $\ell \geq \ell^*$ を満たす ℓ が大きくなるにつれて $(c_k,0)$ へ指数的に近づく.また, $\|\mathbf{p}^{(\ell)}\|,\ \|\mathbf{e}^{(\ell)}\|$ はそれぞれ $\mathbf{0},\ \mathcal{O}(\|\mathbf{p}^{(\ell)}\|^q)$ へ指数的に近づく.

5 まとめ

本報告では,まず ${
m dhToda_{II}}$ に関連する中心多様体の存在を示した.中心多様体上では ${
m dhToda_{II}}$ と低次元化された離散力学系の漸近挙動は一致するため,低次元化された離散力学系に対する平衡点付近での安定性を介して,平衡点付近における ${
m dhToda_{II}}$ に関する指数的収束性を示した.以上より, ${
m dhToda_{II}}$ に基づくアルゴリズムの終盤における安定した収束性が明らかとなった.

参考文献

- [1] J. Carr: "Applications of Centre Manifold Theory", Springer-Verlag, New York, 1981.
- [2] A. Fukuda, E. Ishiwata, Y. Yamamoto, M. Iwasaki and Y. Nakamura: "Integrable discrete hungry systems and their related matrix eigenvalues", Ann. Mat. Pura Appl., DOI: 10.1007/s10231-011-0231-0.
- [3] M. Iwasaki and Y. Nakamura: "Center manifold approach to discrete integrable systems related to eigenvalues and singular values", Hokkaido Math. J., **36** (2007), 759–775.
- [4] Y. Takahashi, M. Iwasaki, A. Fukuda, E. Ishiwata and Y. Nakamura: "A periodical convergence in the discrete hungry Toda equation", J. Dyn. Diff. Eq., submitted.
- [5] T. Tokihiro, A. Nagai and J. Satsuma: "Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization", Inverse Probl., **15** (1999), 1639–1662.
- [6] S. Wiggins: "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos", Springer-Verlag, New York, 2003.