

B型箱玉系のソリトン解

広田, 良吾
早稲田大学名誉教授

長井, 秀友
東海大学理学部

<https://doi.org/10.15017/27175>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 24A0-S3 (15), pp.101-106, 2013-03. 九州大学応用力学研究
所
バージョン :
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3
「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」 (研究代表者 太田 泰広)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 15 (pp. 101 - 106)

B型箱玉系のソリトン解

広田 良吾 (HIROTA Ryogo), 長井 秀友 (NAGAI
Hidetomo)

(Received 15 January 2013; accepted 6 February 2013)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2013

B 型箱玉系のソリトン解

早稲田大学名誉教授 広田良吾 (HIROTA Ryogo)
東海大学理学部 長井秀友 (NAGAI Hidetomo)

概要 離散 BKP 方程式から導かれるある超離散方程式を紹介する．この方程式は超離散 KdV 方程式，超離散戸田格子方程式と同様の分散関係式で定義される 2 種類のソリトン解を持ち，また負のソリトン解も持つ．適当な変数変換を行うことでこれらの解の衝突等を観察する．

1 はじめに

箱玉系は無限個の箱を用意し，ある規則に従って有限個の玉を動かしていく時間発展系である [1]．簡単なルールからソリトンが持つ性質を再現することができることや，独立変数，従属変数がともに離散値をとるという特徴を持つ．箱玉系を拡張した容量付箱玉系や周期箱玉系なども存在し，同様にソリトンの性質を持つ [2, 3]．これら箱玉系の時間発展方程式は超離散化と呼ばれる極限操作を離散ソリトン方程式に施すことで与えることができる [4]．事実，離散 KdV 方程式や離散 mKdV 方程式，離散戸田方程式などを超離散化することによって上記に挙げた箱玉系が得られる [5]．離散ソリトン方程式に超離散化をして得られる方程式を超離散ソリトン方程式と呼ぶ．

現在までに与えられている超離散ソリトン方程式は離散 KP 方程式から導かれるものが大半である．一方，離散ソリトン方程式には離散 KP 方程式以外にも，離散 BKP 方程式などが存在する [6]．離散 BKP 方程式の超離散化の研究は離散 KP 方程式と比べるとあまり多くないが，先行研究の一つとして Sawada-Kotera 方程式の超離散化がある [7]．この研究では Sawada-Kotera 方程式を超離散化して得られる方程式には通常のソリトン解の他に PPS 解と呼ばれる周期位相項をもつソリトン解が存在することを示している．元の Sawada-Kotera 方程式には PPS 解は存在せず，超離散方程式において新しい解が発見されるという興味深い事実を与えている．本研究ではこのような結果を踏まえ，Sawada-Kotera 方程式とは別の離散 BKP 方程式に属し，かつ超離散化可能な新しい方程式を考え，さらに方程式が持つソリトン解を与える．

2 B 型箱玉系

離散 BKP 方程式は a, b, c を任意定数として

$$\begin{aligned} & (a+b)(a+c)(b-c)\tau(l+1, m, n)\tau(l, m+1, n+1) \\ & + (b+c)(b+a)(c-a)\tau(l, m+1, n)\tau(l+1, m, n+1) \\ & + (c+a)(c+b)(a-b)\tau(l, m, n+1)\tau(l+1, m+1, n) \\ & + (a-b)(b-c)(c-a)\tau(l+1, m+1, n+1)\tau(l, m, n) = 0 \end{aligned}$$

で与えられる [6]．この方程式を一般化した方程式（双線形形式）は

$$(z_1 \exp(D_1) + z_2 \exp(D_2) + z_3 \exp(D_3) + z_4 \exp(D_4))\tau \cdot \tau = 0$$

で与えられる．ただし z_j は定数， D_j は D -operator D_l, D_m, D_n の線形結合で表されるものとし，それぞれ

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0, \quad D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 0$$

を満たす．本研究ではこれに属する次の方程式を出発点とする．

$$(1 + d_2)f_{n+1}^{m+1}f_n^{m-1} = (1 - d_1)f_{n+1}^mf_n^m + d_1f_{n+1}^{m+1}f_{n+1}^{m-1} + d_2f_{n+2}^mf_{n-1}^m. \quad (2.1)$$

ここで m, n はそれぞれ時間，空間変数を表し， d_1, d_2 は $d_1 \geq d_2$ を満たす非負の定数とする．変数変換 $d_i = e^{-\delta_i/\varepsilon}$, $f_n^m = e^{F_n^m/\varepsilon}$ を行い (2.1) を超離散化すると

$$F_{n+1}^{m+1} + F_n^{m-1} = \max(F_{n+1}^m + F_n^m, F_{n+1}^{m+1} + F_{n+1}^{m-1} - \delta_1, F_{n+2}^m + F_{n-1}^m - \delta_2) \quad (\delta_1 \leq \delta_2) \quad (2.2)$$

を得る．次節に見るように (2.2) は超離散 KdV 方程式のソリトン解を解として持つ．離散 BKP 方程式に属し，箱玉系を含んでいることから (2.2) をここでは B 型箱玉系と呼ぶことにする．

3 ソリトン解

B 型箱玉系のソリトン解を与える．まず 1 ソリトン解として $F_n^m = \max(0, pm - qn + c)$ を (2.2) に代入すると，

$$\max(-p, p - q) = \max(0, -q, p - \delta_1, -p - q - \delta_1, q - \delta_2, -2q - \delta_2)$$

なる分散関係式を得る．この式をみたすものとして，たとえば

$$q = \frac{1}{2}(|p + \delta_1| - |p - \delta_1|)$$

や，あるいは

$$p = \min(0, -q + \delta_2) - \min(0, q + \delta_2)$$

などが存在する．これらの分散関係式はそれぞれ超離散 KdV 方程式，超離散戸田格子方程式の分散関係式と同じであることに注意されたい [8]．同様に 2 ソリトン解，3 ソリトン解として次を得る．

$$\begin{aligned} F_n^m &= (0, s_1, s_2, s_1 + s_2 - a_{12}) \\ F_n^m &= (0, s_1, s_2, s_3, s_1 + s_2 - a_{12}, s_1 + s_3 - a_{13}, s_2 + s_3 - a_{23}, \\ &\quad s_1 + s_2 + s_3 - a_{12} - a_{13} - a_{23}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし $s_i = s_i(m, n) = p_i m - q_i n + c_i$ とし，

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{1}{2}(|p_i + \delta_1| - |p_i - \delta_1|), \\ a_{ij} &= 2 \min(\max(p_i, -p_j), \max(-p_i, p_j)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

とする．これらが B 型箱玉系の解となることは，直接方程式に代入することによって確かめることができる [9]．上記の解は超離散 KdV 方程式のソリトン解に他ならない．さらに (3.2) の条件式とは別に

$$\begin{aligned} p_i &= \min(0, -q_i + \delta_2) - \min(0, q_i + \delta_2), \\ a_{ij} &= \min(\max(p_i - 2q_i, -p_j + 2q_j), \max(p_j - 2q_j, -p_i + 2q_i)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

としても (3.1) は B 型箱玉系の解となることが示される．この分散関係式は超離散戸田格子方程式のものと同じである．つまり B 型箱玉系は超離散 KdV 方程式のソリトン解のみならず，超離散戸田格子方程式タイプのソリトン解の 2 種類を持つ．

4 数値実験

ここでは前節で得たソリトン解や，2種類のソリトン解の衝突などを数値実験で観察する．はじめに双線形式で表された (2.1) において次の変数変換を行う [10]．

$$u_n^m = \frac{f_{n+1}^m f_n^{m+1}}{f_n^m f_{n+1}^{m+1}}, \quad v_n^m = \frac{f_n^{m-1} f_{n+1}^{m+1}}{f_n^m f_{n+1}^m}, \quad w_n^m = \frac{f_{n+1}^{m-1} f_n^{m+1}}{f_n^m f_{n+1}^m}, \quad x_n^m = \frac{f_{n-1}^m f_{n+2}^m}{f_n^m f_{n+1}^m}$$

これより (2.1) は次の式に変換される．

$$\begin{aligned} x_n^{m+1} &= x_n^m u_{n-1}^m / u_{n+1}^m \\ v_n^{m+1} &= (1 - d_1 + d_1 u_{n-1}^m u_n^m v_{n-1}^{m+1} + d_2 x_n^m u_{n-1}^m / u_{n+1}^m) / (1 + d_2) \\ u_n^{m+1} &= u_{n-1}^m v_{n-1}^{m+1} / v_n^{m+1} \\ w_n^{m+1} &= u_{n-1}^m u_n^m v_{n-1}^{m+1} \end{aligned}$$

特に第2式は a_n^m, b_n^m を

$$\begin{aligned} a_n^m &= (1 - d_1 + d_2 x_n^m u_{n-1}^m / u_{n+1}^m) / (1 + d_2) \\ b_n^m &= d_1 u_{n-1}^m u_n^m / (1 + d_2) \end{aligned}$$

で定義すると

$$-b_n^m v_{n-1}^{m+1} + v_n^{m+1} = a_n^m$$

と表される．今 N を定数とし，周期境界条件 $f_{n+N}^m = f_n^m$ を課すと上式は

$$\begin{pmatrix} -b_1^m & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2^m & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3^m & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{N-1}^m & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_N^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_N^{m+1} \\ v_1^{m+1} \\ v_2^{m+1} \\ \dots \\ v_{N-2}^{m+1} \\ v_{N-1}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^m \\ a_2^m \\ a_3^m \\ \dots \\ a_{N-1}^m \\ a_N^m \end{pmatrix}$$

で表される．したがって左辺の N 次正方行列を M と表し， M の逆行列を求めることで，次時刻の v_n^{m+1} が求まる．実際逆行列 M^{-1} は求まり，

$$(M^{-1})_{ij} = \begin{cases} \prod_{1 \leq k \leq i-1} b_k^m \prod_{j+1 \leq k \leq N} b_k^m / (1 - \prod_{1 \leq k \leq N} b_k^m) & (i \leq j) \\ \prod_{j+1 \leq k \leq i-1} b_k^m / (1 - \prod_{1 \leq k \leq N} b_k^m) & (i > j) \end{cases}$$

によって与えられる．得られた M^{-1} ならびに $u_n^m, v_n^m, x_n^m, w_n^m$ の時間発展方程式はすべて超離散化可能である．ゆえに超離散化を行うことで，周期境界条件のもとでの B 型箱玉系の時間発展方程式が与えられる．

$$\begin{aligned} X_n^{m+1} &= X_n^m + U_{n-1}^m - U_{n+1}^m \\ V_n^{m+1} &= \max \left(\max_{1 \leq k \leq n-1} (A_k^m + \sum_{k+1 \leq l \leq n} B_l^m), A_n^m, \max_{n+1 \leq k \leq N} (A_k^m + \sum_{1 \leq l \leq n} B_l^m + \sum_{k+1 \leq l \leq N} B_l^m) \right) \\ U_n^{m+1} &= U_{n-1}^m + V_{n-1}^{m+1} - V_n^{m+1} \\ W_n^{m+1} &= U_{n-1}^m + U_n^m + V_{n-1}^{m+1} \\ A_n^m &= \max(0, -\delta_2 + X_n^m + U_{n-1}^m - U_{n+1}^m) \\ B_n^m &= U_{n-1}^m + U_n^m - \delta_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

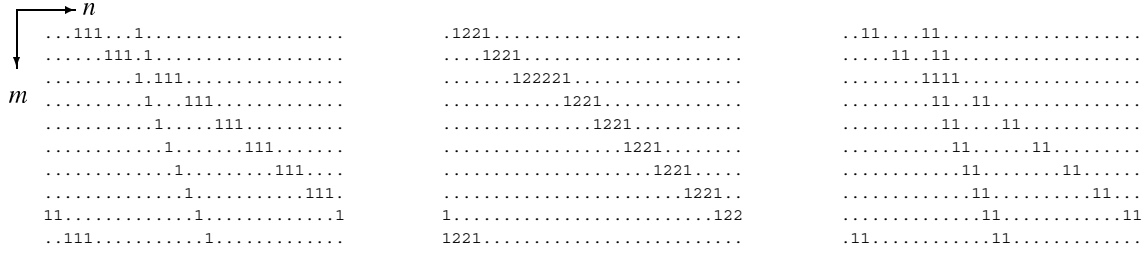


図 1: (3.2) で定義される 2 ソリトン解 $((\delta_1, \delta_2) = (1, 2), (p_1, p_2) = (1, 3), (c_1, c_2) = (0, 0))$ を初期値に定め, (4.1) に従って時間発展を行った U_n^m, V_n^m, X_n^m の挙動. “.”は 0 を表す.

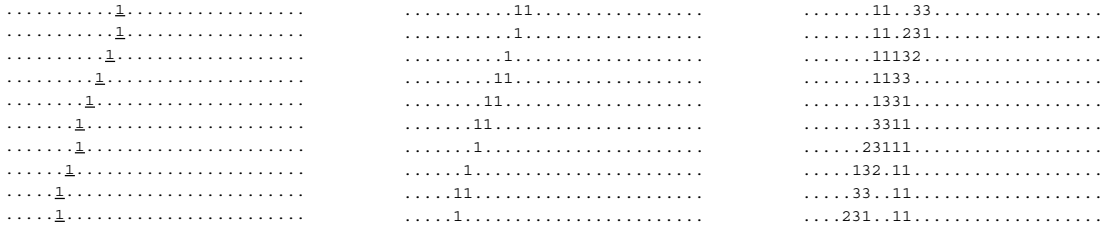


図 2: (3.3) で定義される 2 ソリトン解 $((\delta_1, \delta_2) = (1, 2), (q_1, q_2) = (1, 3), (c_1, c_2) = (0, 0))$ を初期値に定め, (4.1) に従って時間発展を行った 2 ステップごとの挙動. “.”は 0 を, “1”は -1 を表す.

前節の厳密解を初期値に定めた場合の U_n^m, V_n^m, X_n^m の解挙動を図 1, 図 2 に示す. なお W_n^m は時間発展に寄与しないので省略をした. 超離散 KdV 方程式の解は U_n^m の, 超離散戸田タイプの解は X_n^m の表示からソリトンの性質を持つことが確認できる. また, 2 種類のソリトン解を初期値として与えた際の解挙動を図 3 に表す. 別々のソリトン解の衝突においてもソリトンが壊れないことが観察される.

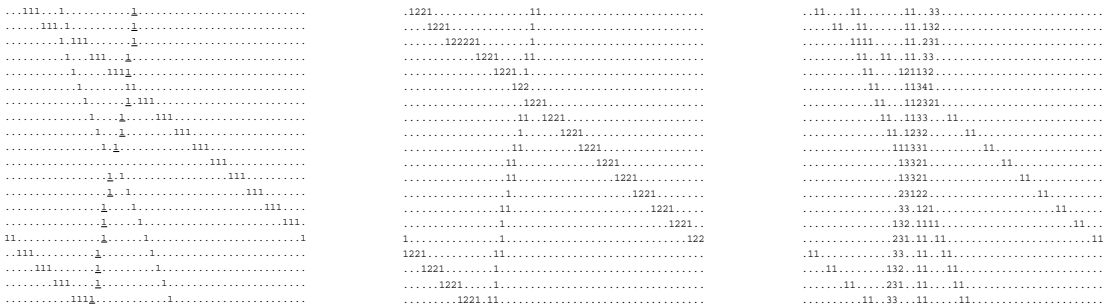


図 3: 図 1, 図 2 の 2 種類のソリトン解を初期値に定め, (4.1) による時間発展. “.”は 0 を, “1”は -1 を表す.

...111... <u>3</u> <u>66</u>242.....
.....111... <u>3</u> <u>66</u>44.....
.....12 <u>3</u> <u>66</u>242.....
.....14 <u>3</u> <u>66</u>44.....
..... <u>3</u> 41..... <u>66</u> 242.....
..... <u>3</u> 21..... <u>62</u> 4.....
..... <u>3</u>111..... <u>64</u> 4 <u>6</u>
..... <u>3</u>111..... <u>42</u> 6.....
..... <u>3</u>111.....242 <u>66</u>
..... <u>3</u>111.....44... <u>66</u>
..... <u>3</u>111.....242... <u>66</u>

図 4: 左図: 解 (5.1) の U_n^m 表示. 右図: 解 (5.2) の 3 ステップごとの X_n^m 表示. -3 を 3 のように下線で負の値を表している.

5 負のソリトン解

前節で与えたソリトン解以外に負の解も持つことが示される. たとえば $h > 0, c_0$ を任意定数とした

$$F_n^m = \max(h_n^m, s_1 + h_{n+2}^m) \quad (5.1)$$

は解となる. ただし $s_1 = s_1(m, n) = pm - qn + c$ は (3.2) で定義されるソリトン解であり $h_n^m = h \min(0, n - m + c_0)$ とする.

同じく $h > 0, c_0$ を任意定数とした

$$F_n^m = \max(h_n, s_1 + h_{n+2}) \quad (5.2)$$

もまた解となる. ただし $s_1 = s_1(m, n) = pm - qn + c$ は (3.3) で定義されるソリトン解であり $h_n = -h|n - c_0|$ とする. これらはいずれも超離散 KdV 方程式, 超離散戸田方程式の負の解と同様の形式をしている [11].

6 まとめ

本研究では離散 BKP 方程式に属し超離散化可能な方程式として, B 型箱玉系を導いた. ソリトン解として超離散 KdV 方程式や超離散戸田格子方程式と同様の分散関係式を持つ 2 種が存在すること, 負の解をもつことを示した. また 2 種のソリトンの衝突の解挙動を調べ, 衝突後も壊れないことを確認した. 2 種のソリトン解を混合した厳密解を与えることや, PPS 解のような新しい解が存在するかを調べることは今後の課題となる.

参考文献

- [1] 広田良吾, 高橋大輔: 「差分と超離散」, 共立出版 (2003)
- [2] D. Takahashi and J. Matsukidaira,: “Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation”, J. Phys. A Math. Gen. **30** (1997) L733–739.
- [3] F. Yura and T. Tokihiro: “On a periodic soliton cellular automaton”, J. Phys. A Math. Gen. **35** (2002) 3787–3801.
- [4] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma: “From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure”, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247–3250.

- [5] 時弘哲治: 「箱玉系の数理」, 朝倉書店 (2010).
- [6] T. Miwa: “On Hirota’s difference equations”, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. **58** (1982) 9–12.
- [7] S. Nakamura: “A periodic phase soliton of the ultradiscrete hungry Lotka-Volterra equation ”, J.Phys.A: Math.Theor.42(2009)495204(10pp))
- [8] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro and M. Torii: “Toda-type cellular automaton and its N -soliton solution”, Phys. Lett. A **225** (1997) 287–295.
- [9] H. Nagai and D. Takahashi: “Bilinear Equations and Bäcklund Transformation for Generalized Ultradiscrete Soliton Solution”, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010), 375202(13pp).
- [10] R. Hirota: “Integrability of soliton equations: from discrete to ultradiscrete”, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B30** (2012), 1-23.
- [11] R. Hirota: “New Solutions to the Ultradiscrete Soliton Equations”, Studies in Applied Mathematics **122** 361–376.