離散凸二次関数の最大値として表される超離散KdV方程式の解について

中田, 庸一
東京大学大学院数理科学研究科

https://doi.org/10.15017/27174

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 24AO-S3 (14), pp.95-100, 2013-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3
「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」（研究代表者　太田　泰広）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 14 (pp. 95 - 100)

離散凸二次関数の最大値として表される超離散KdV方程式の解について

中田　庸一（NAKATA Yoichi）

（Received 15 January 2013; accepted 8 February 2013）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2013

離散凸二次関数の最大値として表される超離散 KdV 方程式の解について

東京大学大学院数理科学研究科　中田 庸一 (NAKATA Yoichi)

概 要

我々はある離散 2 次関数の最大値として与えられる関数が超離散 KdV 方程式の解となることを示した．この関数は 2 次関数の定義域やパラメータを適切にとることでソリトン解や周期解を含む.

1　イントロダクション

超離散 KdV 方程式

$$T_{j+1}^{t+2} + T_j^t = \max\left(T_j^{t+2} + T_{j+1}^t - 1, T_j^{t+1} + T_{j+1}^{t+1}\right), \tag{1}$$

は離散 KdV 方程式 [1] を超離散化 [2] することによって得られる方程式である．従属変数

$$U_j^t = T_j^{t+1} + T_{j+1}^t - T_{j+1}^{t+1} - T_j^t \tag{2}$$

および適切な境界条件を導入することにより (1) は

$$U_j^{t+1} = \min\left(1 - U_j^t, \sum_{j'=j_0}^{j-1} (U_{j'}^t - U_{j'}^{t+1})\right), \tag{3}$$

と変形され, 特に初期値 U_j^0 を $\{0,1\}$ に限定した時は箱玉系 [3] の時間発展式と一致することが知られている．ただし j_0 は各種条件により定まる数であり, 境界条件

$$U_j^t = 0 \quad \text{for} \quad |j| \gg 1, \forall t \tag{4}$$

を課した場合は $j_0 = -\infty$ と取ればよく (この系を無限系と呼ぶ), 周期境界条件

$$U_{j+L}^t = U_j^t \quad \text{for} \quad \exists L \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall t, \forall j \tag{5}$$

を課した場合は, さらに条件

$$\#\{j | 1 \le j \le L, U_j^t = 1\} < L/2 \tag{6}$$

を満たす場合に (この系を周期系と呼ぶ) そのような j_0 を設定することが可能であることが知られている.

箱玉系およびそれに関連する超離散方程式について連続および離散可積分系と同様によい性質を持つことが知られており, さまざまなアプローチが提出されている. 無限系では離散方程式におけるソリトン解の超離散類似物が知られているが, それについて我々は超離散版の頂点作用素に対応すると考えられる再起表現 [4], [5] を提出した. また高橋らにより行列式型の解の類似としてパーマネント型の解 [6] が導入され, その性質について議論が長井ら [7], [8] によってされている. 組合せ論からのアプローチとしては超離散戸田分子方程式の解を重み付グラフの最大重み路として高垣ら [9] が提出しており, 我々も上述の再起表現の一般化として同様の重み路による表示 [10] を提出している. また周期系においては楕円関数解の類似物が知られており, 離散方程式同様に代数幾何的方法によるアプローチを用いたものが調べられている. 周期箱玉系の初期値問題を離散楕円曲線を経由することより解く方法は君島ら [11] により提出されており, 同じ問題を曲線の超離散化に対応するトロピカル曲線を用いて調べる方法は井上ら [12] により提出されている.

今回, 我々は離散二次関数の最大値として超離散 KdV 方程式の解を定義した. この表示において定義域やパラメータなどを適当に設定することにより上記のソリトン解, 楕円関数解を含み, さらに既存の解の表示を簡略化した表示を与えることを示した. 今回の議論において離散凸解析の結果を少し利用したが, そのほとんどは初等的な解析にのみよる. さらに議論の過程において我々が過去に提出した再起表現の拡張版と呼ぶべきものも提出した. この性質についても議論したい. なお, 各議論の詳細については [13] に書かれている.

2 離散二次関数の最大値として表される超離散 KdV 方程式の解

まず $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし, $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{Z}$ $(1 \le i \le N)$ は (離散的な) 区間 $[a_i, b_i]$ $(a_i \le b_i)$ もしくは半無限区間 $(-\infty, b_i]$, $[a_i, \infty)$ あるいは $\mathbb{Z}$ のいずれかとし, $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_N \subset \mathbb{Z}^N$ とする. パラメータ $t, j \in \mathbb{R}$ を持ち, 独立変数 $\mathbf{m} \in \mathcal{D}$ についての二次関数

$$f(\mathbf{m}) := \frac{1}{2}(\mathbf{m}, A\mathbf{m}) + (\mathbf{z}_j^t, \mathbf{m}) \tag{7}$$

を考える. ただし $(\cdot,\cdot)$ は Euclid 内積であり, 行列 $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, N)$ およびベクトル $\mathbf{z}_j^t \in \mathbb{R}^N$ は以下で与えられる.

$$(A)_{i,k} = \begin{cases} -L_i + 2\sum_{l=1}^{i-1}\Omega_l + 2(N-i)\Omega_i & (i = k) \\ -2\Omega_i & (i < k) \\ -2\Omega_k & (i > k) \end{cases} \tag{8}$$

$$\mathbf{z}_j^t = t\begin{pmatrix}\Omega_1\\ \vdots\\ \Omega_N\end{pmatrix} - j\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_N\end{pmatrix} \tag{9}$$

またパラメータ $\Omega_i, L_i \in \mathbb{R}$ は以下の関係を満たしているものとする.

$$1 \le \Omega_1 \le \Omega_2 \le \ldots \le \Omega_N \tag{10}$$

$$2\sum_{l=1}^{i-1}\Omega_l + 2(N-i+1)\Omega_i < L_i \quad (i=1,\ldots,N) \tag{11}$$

このとき行列 M および変数 $\boldsymbol{\mu}$ を

$$\mathbf{m} = M\boldsymbol{\mu} \tag{12}$$

$$(M)_{i,k} = \delta_{i,k} - \delta_{i+1,k} \tag{13}$$

とすると, 二次関数 f は以下で書き直される.

$$f(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}(M\boldsymbol{\mu}, AM\boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{z}_j^t, M\boldsymbol{\mu}) =: g(\boldsymbol{\mu}) \tag{14}$$

ここで M は整数係数の逆行列

$$(M^{-1})_{i,k} = \begin{cases}1 & (i \le k)\\ 0 & (i > k)\end{cases}$$

を持つので, この二つの二次関数は完全に等価であることに注意する. また g は以下の関係式を満たす.

$$g(\boldsymbol{\mu}) + g(\boldsymbol{\mu}') \le g(\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\mu}') + g(\boldsymbol{\mu}\vee\boldsymbol{\mu}') \tag{15}$$

ただし $\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\mu}'$ および $\boldsymbol{\mu}\vee\boldsymbol{\mu}'$ の各成分は以下で定義される.

$$(\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\mu}')_i := \min(\mu_i, \mu_i') \qquad (\boldsymbol{\mu}\vee\boldsymbol{\mu}')_i := \max(\mu_i, \mu_i'). \tag{16}$$

この性質を優モジュラ性という.

条件 (10), (11) の下で係数行列は負定値になるためこの二次形式は必ず最大値 T_j^t を持つ. 即ち

$$T_j^t := \max_{\mathbf{m}\in\mathcal{D}}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{m}, A\mathbf{m}) + (\mathbf{z}_j^t, \mathbf{m})\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{m}_j^t, A\mathbf{m}_j^t) + (\mathbf{z}_j^t, \mathbf{m}_j^t) \tag{17}$$

また最大値を与える $\mathbf{m}(=\boldsymbol{\mu})$ の集合は有限である. ここで $\boldsymbol{\mu}$ に以下の順序を導入する.

$$\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\mu}' \Longleftrightarrow \mu_i \ge \mu_i' \text{ for } 1 \le \forall i \le N. \tag{18}$$

優モジュラ性 (15) を用いることで, 最大値を与える元の集合はこの順序の元で最大元を持つことが分かる. その最大限を $\boldsymbol{\mu}_j^t$ とし, それを (12) で戻したものを $\mathbf{m}_j^t$ と定義する. 以下の議論ではこの $\mathbf{m}_j^t$ および $\boldsymbol{\mu}_j^t$ について考える.

$\xrightarrow{j}$

$t\downarrow$

```
...1......11.1.......1..11.....1....11...1......11
11..1.......1.11......1...11....1.....11..1.......
..11.1.......1..11.....1....11...1......11.1......
```

図 1: $N=2, \mathcal{D}=\mathbb{Z}^2, \Omega_1=1, \Omega_2=2, C_1=30, C_2=25, L_1=10, L_2=12$ として $0\le t\le 4, 0\le j\le 49$ の範囲を描画したもの. “.”(ドット) は 0 を表す.

補題 1 $\boldsymbol{\mu}_j^t$ は以下の関係式を満たす.

$$\boldsymbol{\mu}_j^t < \boldsymbol{\mu}_{j-1}^t < \boldsymbol{\mu}_j^{t+1}. \tag{19}$$

証明は優モジュラ性 (15) を用いる.

補題 2 $\mathbf{m}_j^{t-2}$ は $\mathbf{m}_j^t$ と同じか, $\mathbf{m}_j^t = \mathbf{m}_j^{t-2} + \mathbf{e}_i$ $(1\le i\le N)$ の形であらわされる. ただし $\mathbf{e}_i$ は i-番目の標準基底である, 即ち $(\mathbf{e}_i)_k = \delta_{i,k}$.

補題 1 および 2 を組み合わせることで以下が示される.

補題 3 $\mathbf{m}_{j+1}^t$ は $\mathbf{m}_j^t$ と同じか, $\mathbf{m}_j^t = \mathbf{m}_{j+1}^t + \mathbf{e}_i$ $(1\le i\le N)$ の形であらわされる.

超離散 KdV 方程式 (1) 中に現れる独立変数 (t,j) の組は 6 通りあるが, これらの補題を組み合わせることによって各 $\mathbf{m}_j^t$ のとりうる組み合わせは数パターンまでに絞られる. 関数 T_j^t が方程式を満たすことを示すには, 両辺をその各場合について評価すればよい.

3 具体例および既知の解への特殊化

我々が提出した今回の解について (2) で定義される U_j^t を用いてプロットしてみる. 一般的なパラメータの場合図 1 のように, 各 1 の塊が L_i に依存して規則的に配置されるが, ほかの塊とぶつからないようずれを起こすことが確認される.

しかしながら L_i をうまくとることにより, 既知の系に帰着させることができる. 例えばすべての L_i を同じ値 L にとると,

$$T_{j+L}^t = T_j^t + (t, j \text{ の一次関数}) \tag{20}$$

$$\mathbf{m}_{j+L}^t = \mathbf{m}_j^t + \mathbf{1} \tag{21}$$

となることが簡単な計算により示される (ただし $\mathbf{1} = {}^t(1,\ldots,1)$). したがって $U_{j+L}^t = U_j^t$ となり, この解は周期箱玉系の厳密解を表すことになる (図 2 参照). また L_i を調節することで, (21) の $\mathbf{1}$ を任意の $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_{>0}^N$ と変えることができ, 別の状態の周期箱玉系を表す厳密解にできる. この状態において 1 周期の中に各 i に対し Ω_i 個からなる玉の塊が $(\mathbf{n})_i$ 個存在している. また $\mathcal{D}$ が有限となる場合 $U_j^t = 0$ $(|j|\gg 1)$ が成り立つため, 先ほどと同様に箱玉系の既知のソリトン解を圧縮した表示になる.

$\xrightarrow{j}$

$t\downarrow$

```
11.....1....11.....1....11.....1....11.....1....11
..11....1.....11....1.....11....1.....11....1.....
....11...1......11...1......11...1......11...1....
```

図 2: $N=2, \mathcal{D}=\mathbb{Z}^2, \Omega_1=1, \Omega_2=2, C_1=30, C_2=25, L_1=12, L_2=12$ として $0\le t\le 4, 0\le j\le 49$ の範囲を描画したもの. 周期は 12 である. 長さ 1 の塊の個数が図 1 と比べて少ないことに注意.

4　このクラスの解の再帰表現について

この節では定義 (17) で定義される T_j^t について, N の寄与を明確にするため $T_j^{(N),t}$ と表す. 今, 各パラメータ L_i, Ω_i, C_i を固定しておく. このとき (17) 中の $\mathbf{m}$ の N 番目の成分 m_N とすると,

$$T_j^{(N),t}=\max_{m_N\in D_N}\left(\frac{1}{2}\Big(-L_N+2\sum_{i=1}^{N-1}\Omega_i\Big)m_N^2+(t\Omega_N-j+C_N)m_N+\tilde{T}_j^{(N-1),t-2m_N}\right) \tag{22}$$

となることが示される. ただし $\tilde{T}_j^{(N-1),t}$ は (17) 中の N をそのまま $N-1$ にした $T_j^{(N-1),t}$ におけるパラメータ L_i $(i=1,\dots,N-1)$ をそれぞれ $L_i-2\Omega_i$ にずらしたものである. ここで前節の議論により, 各 L_i が等しいときのみ擬周期解であったことに注意する. よって T および $\tilde{T}$ ともに擬周期解であるということはすべての Ω_i が同じといったきわめて特殊な場合を除きありえないことがわかる. またこの再帰表現は $\mathcal{D}=[0,1]^N$ のときに我々が以前提出した表示と一致することが確認できることから, その一般化であるといってよいだろう. 以上のことから, 我々のアプローチは周期系に適用するには相性が悪いと考えることができる. また今回の表示はあくまで二次関数で表されるタイプの解についての話であり, ソリトン解のときの議論のように背景のみを含む解を出発点として再帰表現を繰り返し適用することでソリトンと背景の両方を含んだ (1) の解となるかどうかも分かっていない.

5　まとめ

我々は離散二次関数の最大値として定義した関数が超離散 KdV 方程式の解となることを示した. この解は定義域やパラメータを上手くとることにより, 既知の解に帰着できることを示した. また我々が以前提出した再帰表現をこの解についても発見し, その性質について議論を行った.

我々は離散凸性が超離散方程式のソリトン解に対して本質的であると考えているが, 今回の議論においてそれが活かされたのは証明の補助的程度の役割でしかなかった. いずれ可積分系において本質的な関係式である Plücker 関係式のような関係が見つかることが期待される.

参考文献

[1] R. Hirota. Nonlinear Partial Difference Equations I; A Difference Analogue of the Korteweg-de Vries Equation. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 43:1424–1433, 1977.

[2] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma. From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure. *Phys. Rev. Lett.*, 76:3247–3250, 1996.

[3] D. Takahashi and J. Satsuma. A soliton cellular automaton. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 59:3514–3519, 1990.

[4] Y. Nakata. Vertex operator for the ultradiscrete KdV equation. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42:412001 (6pp), 2009.

[5] Y. Nakata. Vertex operator for the non-autonomous ultradiscrete KP equation. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 43:195201 (8pp), 2010.

[6] D. Takahashi and R. Hirota. Ultradiscrete soliton solution of permanent type. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 76:104007, 2007.

[7] H. Nagai and D. Takahashi. Bilinear equations and Backlund transformation for a generalized ultradiscrete soliton solution. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 43:375202 (13pp), 2010.

[8] H. Nagai and D. Takahashi. *Ultradiscrete Plücker Relation Specialized for Soliton Solutions. J. Phys. A: Math. Theor.*, 44:095202 (XXpp), 2011.

[9] 高垣知哲, 上岡修平. 超離散戸田方程式の解のグラフによる構成, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8 「非線形波動研究の新たな展開 - 現象とモデル化 - 」, Article No. 38.

[10] Y. Nakata. Solutions to the ultradiscrete Toda molecule equation expressed as minimum weight flows of planar graphs. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 44:295204 (15pp), 2011.

[11] T. Kimijima and T. Tokihiro. Initial-value problem of the discrete periodic toda equation and its ultradiscretization. *Inverse Problems*, 18:1705–1732, 2002.

[12] R. Inoue and T. Takenawa. Tropical spectral curves and integrable cellular automata. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (9):Art ID. rnn019, 27pp., 2008.

[13] Y. Nakata. Solutions to ultradiscrete KdV equation expressed as the maximum of a quadratic function. arXiv:1302.1927, 2013.