九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

三角型スピン格子上での量子状態転送について

三木, 啓司
京都大学情報学研究科

辻本, 諭
京都大学情報学研究科

Vinet, Luc
モントリオール大学

Zhedanov, Alexei
Donetsk Institute for Physics and Technology

https://doi.org/10.15017/27173

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 24AO-S3 (13), pp.89-94, 2013-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3
「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」（研究代表者　太田　泰広）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 13 (pp. 89 - 94)

三角型スピン格子上での量子状態転送について

三木　啓司（MIKI Hiroshi），辻本　諭（TSUJIMOTO Satoshi），Vinet　Luc（Vinet Luc），Zhedanov　Alexei（Zhedanov Alexei）

（Received 8 January 2013; accepted 12 February 2013）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2013

三角型スピン格子上での量子状態転送について

京都大学情報学研究科/日本学術振興会特別研究員 PD　三木 啓司 (MIKI Hiroshi)
京都大学情報学研究科　辻本 諭 (TSUJIMOTO Satoshi)
Université de Montréal　Luc Vinet
Donetsk Institute for Physics and Technology　Alexei Zhedanov

概　要　ある二次元の XX 型ハミルトニアンが Rahman 多項式と呼ばれる二変数 Krawtchouk 多項式により対角化できることを示す．得られた結果をもとにして，対応する二次元格子上での量子状態転送を理論的に観測し，完全状態遷移の有無を調べる．

1　はじめに

量子状態 (情報) をある場所から別の場所へと転送する量子状態転送問題は，二者間で通信を行う問題と読み直すことができ，このような問題は量子情報通信の分野において重要な問題である [1, 6]．このような問題設定において重要となるのは，通信をムダや損失なく実現できるか，すなわち量子状態転送が確率 1 で実現できるかどうかである．確率 1 で実現される量子状態転送は完全状態遷移 (Perfect State Transfer) と呼ばれ，以降では PST と呼ぶことにする．

量子状態転送は 1 次元系においては理論が整備されており，例えば 1 次元 XX スピン鎖において理論的に観測することができ，特にあるパラメータの下では PST が観測されることが知られている [6, 9]．しかしながら，2 次元以上の系になると，量子状態転送や PST の理論的観測ができるモデルというのはあまり知られていないというのが現状である．そこで，本研究の目的としてはまず，理論的に量子状態転送の観測が可能な 2 次元以上のモデルを提案することにある．その際には，PST の有無も調べていく．

2　1 次元 XX スピン鎖と直交多項式

本節では，1 次元 XX スピン鎖に関してレビューを行う．B_l, J_l をそれぞれ磁場，サイト間の結合定数として，つぎの XX スピン鎖のハミルトニアンを考える:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N-1} J_{l+1}(\sigma_l^x\sigma_{l+1}^x + \sigma_l^y\sigma_{l+1}^y) + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N} B_l(\sigma_l^z + 1). \tag{2.1}$$

ここで，$N+1$ はサイト数，$\sigma_l^x, \sigma_l^y, \sigma_l^z$ はそれぞれパウリ行列を表し，パウリ行列は単一キュービット状態 $|0\rangle, |1\rangle$ に対して以下のように作用する:

$$\begin{aligned} &\sigma^x|0\rangle = |1\rangle, \quad \sigma^y|0\rangle = -i|1\rangle, \quad \sigma^z|0\rangle = -|0\rangle, \\ &\sigma^x|1\rangle = |0\rangle, \quad \sigma^y|1\rangle = i|0\rangle, \quad \sigma^z|1\rangle = |1\rangle. \end{aligned} \tag{2.2}$$

ただし，$i \equiv \sqrt{-1}$．このハミルトニアン H は保存則

$$\left[H, \sum_{k=0}^{N} \sigma_k^z\right] = 0 \tag{2.3}$$

を満たし，この保存則によりスピンの総量が保存されることが保証される．実際，1 励起の基底

$$|e_n) = (0,\cdots,0,\underset{n}{1},0,\cdots,0), \quad n = 0,1,\cdots,N \tag{2.4}$$

に対して，ハミルトニアン H を作用させると

$$H\,|e_n) = J_{n+1}\,|e_{n+1}) + B_n\,|e_n) + J_n\,|e_{n-1}) \tag{2.5}$$

となる．上式からハミルトニアン H の作用は，1 励起基底が張る部分空間の下では次の三重対角行列

$$J = \begin{pmatrix} B_0 & J_1 & & & \\ J_1 & B_1 & J_2 & & \\ & J_2 & B_2 & J_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & J_N & B_N \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

と同一視することができる．従って，Favard の定理 (例えば [3]) を用いることにより，ハミルトニアン $H = J$ は (有限次元の) 直交多項式を用いることで対角化され，対応するスペクトルも求まる．これにより，直交多項式の満たす様々な関係式を用いることで，モデルの詳細な解析を実行することができ，量子状態転送ならびに PST の理論的な観測を行うことができる [2, 9]．例えば，係数 J_n, B_n を対称な Krawtchouk 多項式 [7] に対応する値

$$B_n = 0, \quad J_n = \frac{\sqrt{n(N+1-n)}}{2} \tag{2.7}$$

と選ぶことで，次のような関係式が導かれる:

$$e^{-iTH}\,|e_0) = |e_N), \quad {}^{\exists}T \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

これは，原点に上向きのスピンを与えて時間発展させた場合，ある時刻後には確率 1 で逆端で上向きのスピンを持つ状態へと遷移するということを表し，PST 現象に他ならない．

3　2 次元三角型 XX スピン鎖

前節では，1 次元 XX スピン鎖が直交多項式と密接な関係を持つことを明らかにし，特に Krawtchouk 多項式に対応するハミルトニアンを考えると PST が実現されることをみた．この関係に注目して，2 次元の場合に Krawtchouk 多項式の一般化である Rahman 多項式 [5] を用いることで，新しい可解なハミルトニアンを得ることに成功した [8]．ここで，Rahman 多項式とは次の GKZ 超幾何関数 (の特殊な場合) として定義される関数である:

$$K_{i,j}(x,y) = \sum_{0\le k+l+m+n\le N} \frac{(-i)_{k+l}(-j)_{m+n}(-s)_{k+m}(-t)_{l+n}}{k!l!m!n!(-N)_{k+l+m+n}} u_1^i v_1^j u_2^k v_2^l. \tag{3.1}$$

ただし，$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ は Pochhammer 記号であり，パラメータ u_1, v_1, u_2, v_2 は次のパラメータ関係式を満たす:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{(p_1+p_2)(p_1+p_3)}{p_1\sum p_k}, \quad u_2 = \frac{(p_1+p_2)(p_2+p_4)}{p_2\sum p_k}, \\ v_1 &= \frac{(p_1+p_3)(p_3+p_4)}{p_3\sum p_k}, \quad v_2 = \frac{(p_2+p_4)(p_3+p_4)}{p_4\sum p_k}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Rahman 多項式は，元々は Poker-Dice game や Ehrnfest モデル等の確率論のモデルから導入された多項式であり，三項分布関数に関して直交性を持つことが知られている [4, 5].

Rahman 多項式が三角型格子上で定義されていたのを参考にして，図 1 のような 2 次元の正方格子でなく三角型格子上で定義された次のハミルトニアンを考える:

$$
\begin{aligned}
H = \sum_{0\le i+j\le N} & \frac{I_{i+1,j}}{2}(\sigma^x_{i,j}\sigma^x_{i+1,j}+\sigma^y_{i,j}\sigma^y_{i+1,j}) \\
& +\frac{J_{i,j+1}}{2}(\sigma^x_{i,j}\sigma^x_{i,j+1}+\sigma^y_{i,j}\sigma^y_{i,j+1}) \\
& +\frac{1}{2}B_{i,j}(\sigma^z_{i,j}+1).
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

ここで，$I_{i,j}, J_{i,j}$ はそれぞれ各サイト間の結合定数を表し，$B_{i,j}$ は各サイトにおける磁場の強さを表す.

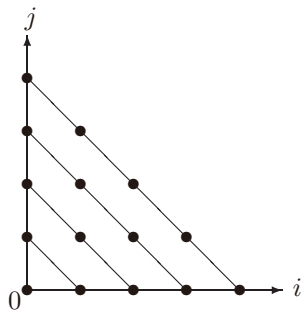

図 1: 2 次元の場合，正方格子ではなく三角型格子 $0 \le i+j \le N$ の上で考える.

ハミルトニアン H は 1 次元の場合同様に，保存則

$$
\left[H, \sum_{0\le i+j\le N} \sigma^z_{i,j}\right] = 0 \tag{3.4}
$$

を満たし，スピンの総量を保存する．以降では，ハミルトニアン H を 1 励起基底

$$
|e_{i,j}) = E_{i,j}, \quad 0 \le i+j \le N \tag{3.5}
$$

で張る部分空間の上で考える．ただし，$E_{i,j}$ は (i,j) 成分にのみ値 1 を持つ行列である．このとき，ハミルトニアン H に対して，次の定理を得た.

定理 1. 結合定数および磁場を

$$
\begin{aligned}
I_{i,j} &= \frac{1}{p_1+p_3}\sqrt{p_1p_3(p_2+p_4)i(N+1-i-j)\sum p_k}, \\
J_{i,j} &= -\frac{1}{p_2+p_4}\sqrt{p_2p_4(p_1+p_3)j(N+1-i-j)\sum p_k}, \\
B_{i,j} &= \frac{(N-i-j)\sum p_k}{p_1p_4-p_2p_3}\left\{\frac{p_2p_4(p_1+p_3)}{p_2+p_4}-\frac{p_1p_3(p_2+p_4)}{p_1+p_3}\right\} \\
&\quad + j\frac{p_1p_4-p_2p_3}{p_2+p_4} - i\frac{p_1p_4-p_2p_3}{p_1+p_3}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

と選ぶ．この時，ハミルトニアン H は *1* 励起基底が張る部分空間上で次のように対角化される*:*

$$
H|s,t\rangle = x_{s,t}|s,t\rangle, \tag{3.7}
$$

ここで，スペクトル $x_{s,t}$ は

$$x_{s,t} = (p_1+p_2)s-(p_3+p_4)t, \quad 0 \le s+t \le N \tag{3.8}$$

で与えられ，固有ベクトル $|s,t\rangle$ は *Rahman* 多項式 $K_{i,j}$ を用いて

$$\begin{aligned}
|s,t\rangle &= \sum_{0\le i+j\le N} W_{0,0}(s,t)\frac{K_{i,j}(s,t)}{\sqrt{r_{i,j}}}\left|e_{i,j}\right), \\
r_{i,j} &= \frac{(p_1p_4-p_2p_3)^{2(i+j)}\left(\sum p_k\right)^{-(i+j)}}{(p_1p_3(p_2+p_4))^i(p_2p_4(p_1+p_3))^j}\binom{N}{i,j}^{-1}, \\
W_{0,0}(s,t) &= \sqrt{\binom{N}{s,t}\frac{(p_1p_4-p_2p_3)^{2(N-s-t)}(p_1p_2)^s(p_3p_4)^t}{(p_1+p_2)^{N-t}(p_3+p_4)^{N-s}[(p_1+p_3)(p_2+p_4)]^N}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

と表される．

証明. 固有ベクトルの展開

$$|s,t\rangle = \sum_{0\le i+j\le N} W_{i,j}\left|e_{i,j}\right) \tag{3.10}$$

に対する $W_{i,j}$ が満たす関係式と，Rahman 多項式が満たす最隣接漸化式 [4]

$$\begin{aligned}
&[(p_1+p_2)s-(p_3+p_4)t]K_{m,n}(s,t) \\
&= (N-m-n)\left\{\frac{p_1p_3(p_2+p_4)\sum p_k}{(p_1+p_3)(p_1p_4-p_2p_3)}(K_{m+1,n}(s,t)-K_{m,n}(s,t))\right. \\
&\left.-\frac{p_2p_4(p_1+p_3)\sum p_k}{(p_2+p_4)(p_1p_4-p_2p_3)}(K_{m,n+1}(s,t)-K_{m,n}(s,t))\right\} \\
&+m\frac{p_1p_4-p_2p_3}{p_1+p_3}(K_{m-1,n}(s,t)-K_{m,n}(s,t))-n\frac{p_1p_4-p_2p_3}{p_2+p_4}(K_{m,n-1}(s,t)-K_{m,n}(s,t)),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

を比較することで題意を示すことができる． □

各定数を Rahman 多項式に付随するパラメーター (3.6) と選んだ場合，スペクトルが具体的に書き下すことができることが定理により分かった．従って，このモデルは可解であることが分かり，様々な物理量を計算することができる．本稿では特に，モデルに対する量子状態転送の観測を目標としているため，ここでは特に原点からの遷移振幅

$$f_{i,j}(T) = \left(e_{0,0}|e^{-iTH}|e_{i,j}\right), \quad 0 \le i+j \le N \tag{3.12}$$

を計算していくことを考える．以降では，さらに簡単のためパラメータの条件

$$p_1 = p_4, \quad p_2 = p_3 \tag{3.13}$$

を課しておく．実は遷移振幅は Rahman 多項式の理論を用いることで厳密に計算することが可能である．

定理 2. 定数 $I_{i,j}, J_{i,j}, B_{i,j}$ は式 (3.6) と設定しているものとする．このとき，

$$\begin{aligned}
f_{i,j}(T) &= \frac{(2p_1p_2(z-1)^2+(p_1+p_2)^2z)^{N-i-j}}{\sqrt{r_{i,j}}} \\
&\cdot\frac{(p_1-p_2)^i(z-1)^{i+j}(p_2z+p_1)^i(p_1z+p_2)^j}{(p_2-p_1)^{-j}z^N(p_1+p_2)^{2N}}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

ただし，$z \equiv e^{-iT(p_1+p_2)}$

証明. Rahman 多項式の直交性および各ベクトル・基底の正規直交性から自然と

$$\left|e_{i,j}\right) = \sum_{0\le s+t\le N} W_{0,0}(s,t)\frac{K_{i,j}(s,t)}{\sqrt{r_{i,j}}}\left|s,t\right\rangle, \quad 0\le i+j\le N \tag{3.15}$$

が導かれる．したがって，$a=\frac{p_1p_2\sum p_k}{(p_1+p_2)(p_1+p_3)(p_2+p_4)}, b=\frac{p_3p_4\sum p_k}{(p_2+p_4)(p_3+p_4)(p_1+p_3)}$ とおくことで，

$$\begin{aligned} f_{i,j}(t) &= \left(e_{0,0}\middle|e^{-iTH}\middle|e_{i,j}\right) \\ &= \sum_{0\le s+t\le N} W_{i,j}(s,t)e^{-iT(p_1+p_2)(s-t)]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r_{i,j}}}\sum_{0\le s+t\le N}\binom{N}{s,t}a^sb^t(1-a-b)^{N-s-t}z^{s-t}K_{i,j}(s,t) \end{aligned} \tag{3.16}$$

が導かれる．以上から，(変形された) 母関数公式

$$\begin{aligned} &\sum_{0\le s+t\le N}\binom{N}{s,t}a^sb^t(1-a-b)^{N-s-t}p^sq^yK_{m,n}(s,t) \\ &= (1-a-b+pa+qb)^{N-m-n}((1-u_1)pa+(1-u_2)qb+1-a-b)^m \\ &\quad\cdot((1-v_1)pa+(1-v_2)qb+1-a-b)^n \end{aligned} \tag{3.17}$$

を用いることで題意を示すことができる． □

この定理から直ちに次の系を導くことができる．

系 3. パラメーター p_1,p_2,p_3,p_4 にさらに条件

$$(p_1+p_2)^2 = 8p_1p_2 \tag{3.18}$$

を課す．このとき，

$$\left|f_{i,j}\left(\frac{\pi}{p_1+p_2}\right)\right| = \sqrt{2^{-N}\binom{N}{i}}\delta_{i+j,N}. \tag{3.19}$$

この系から，ある特定の状況下では，三角型格子上では原点から始めた量子状態転送は，ある一定時刻の後に対角線上にスピンがある状態に確率 1 で遷移し，その確率分布は二項分布に従うということを表している．これは，ある状況から別のひとつの状況へと遷移する PST そのものではないが，PST の拡張概念に相当するものとなっている．これらの話を整理すると，次の系になる．

系 4. *2 次元三角型スピン格子について，各定数を*

$$\begin{aligned} I_{i,j} &= \frac{1}{2}\sqrt{i(N+1-i-j)}, \quad J_{i,j} = -\frac{1}{2}\sqrt{j(N+1-i-j)}, \\ B_{i,j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(j-i) \end{aligned} \tag{3.20}$$

で与える．このとき，ある一定時刻の後には，原点から対角線上の状態和へと遷移する．すなわち，

$$e^{-iTH}\left|e_{0,0}\right) = \sum_{k=0}^{N}\sqrt{2^{-N}\binom{N}{k}}\left|e_{k,N-k}\right), \quad {}^{\exists}T\in\mathbb{R}. \tag{3.21}$$

4 結論

本稿では，量子状態転送の基本的なモデルである 1 次元 XX スピン鎖と Krawtchouk 直交多項式の関係に注目して，Krawtchouk 多項式の二変数拡張である Rahman 多項式を用いて新たに可解な 2 次元 XX スピン鎖を提案・考察した．このモデルは正方格子上ではなく，三角型格子上で定義されており，特別なパラメーターを選ぶことで，PST そのものではないが PST の拡張概念に相当するもの観測された．二次元以上で具体的に解析可能なモデルというものはあまり知られておらず，本モデルは非常に重要な例であると考えられる．

今後の課題としては，1 次元の場合は Krawtchouk 多項式以外の多項式も PST と関係することが知られている [2] が，それらの多項式に関しても対応物が見つかるものと期待している．また，一変数直交多項式では対称性というのは非常に重要な概念であるが，二変数以上になるとそのような概念は知られていない．今回得られた場合に相当する Rahman 多項式はいわゆる対称な Rahman 多項式と見なすこともでき，この結果から多変数多項式の理論の整備が可能になるのではないかと考えている．

謝辞

本研究は科研費 (10J03343 および 22540224) の助成を受けたものである．

参考文献

[1] S. Bose: “Quantum communication through an unmodulated spin chain”, Phys. Rev. Lett. **91** (2003), 207901.

[2] R. Chakrabarti and J. Van der Jeugt: “Quantum communication through a spin chain with interaction determined by a Jacobi matrix”, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010), 85302.

[3] T. S. Chihara: “An introduction to orthogonal polynomials”, Mathematics and its Applications, Vol. 13, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, (1978)

[4] F. A. Grünbaum and M. Rahman: “On a family of 2-variable orthogonal Krawtchouk polynomials”, SIGMA **6** (2010) 090.

[5] M. R. Hoare and M. Rahman: “A probabilistic origin for a new class of bivariate polynomials”, SIGMA **4** (2008) 089.

[6] A. Kay: “Perfect, efficient, state transfer and its application as a constructive tool”, J. Quantum Inf. **8** (2010), 641-676.

[7] R. Koekoek and R. F. Swarttouw: “The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue”, Delft University of Technology, Report no 98-17 (1998)

[8] H. Miki, S. Tsujimoto, L. Vinet and A. Zhedanov: “Quantum state transfer in a two-dimensional regular spin lattice of triangular shape”, Phys. Rev. A **85** (2012) 062306.

[9] L. Vinet and A. Zhedanov: “How to construct spin chains with perfect state transfer”, Phys. Rev. A **85** (2012) 012323.