# 3次元等質空間内の曲面と可積分系

井ノ口, 順一
山形大学理学部

https://doi.org/10.15017/27168

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 24AO-S3 (8), pp.58-63, 2013-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3
「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」（研究代表者　太田　泰広）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

***Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures***

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy, Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by
*Kyushu University Global COE Program*
*Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry*

**Article No. 8** (pp. 58 - 63)

# 3次元等質空間内の曲面と可積分系

**井ノ口　順一（INOGUCHI Jun-ichi）**

（Received 15 January 2013; accepted 24 February 2013）

**Research Institute for Applied Mechanics**
**Kyushu University**
**March, 2013**

# 3 次元等質空間内の曲面と可積分系

山形大学理学部　井ノ口順一　(INOGUCHI Jun-ichi)

**概　要**
3 次元定曲率空間内の曲面はサイン・ゴルドン型方程式を構造方程式にもち, 種々の構成法が知られている. Dorfmeister 氏, 小林真平氏との共同研究により, 定曲率でない 3 次元等質空間内の曲面で, 可積分系の構造をもち, ループ群を用いた構成法を許容するクラスが発見されたことを報告する.

## 1　背景

### 1.1　sinh-Gordon の微分幾何

$M$ を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面とする. 位置ベクトル場を $f$, 単位法ベクトル場を $n$ とする.

**定義** $\mathrm{I} = \mathrm{d}f \cdot \mathrm{d}f$, $\mathrm{II} = -\mathrm{d}f \cdot \mathrm{d}n$ をそれぞれ $(M, f)$ の**第一基本形式**, ($n$ に関する) **第二基本形式**とよぶ.

$M$ の各点のまわりで $\mathrm{I} = e^u(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$ と表示できる局所座標系 $(x, y)$ がとれる. この $(x, y)$ を**等温座標系**とよぶ. このとき $z = x + yi$ は局所複素座標を定める.

**定義**　$H = 2e^{-u}(f_{z\bar{z}} \cdot n)$ を $M$ の**平均曲率**, $Q\mathrm{d}z^2$ を**ホップ微分**とよぶ (ただし $Q = f_{zz} \cdot n$). ホップ微分の零点は**臍点**(umbilic point) とよばれる.

$H$ が定数函数である曲面を**平均曲率一定曲面**(CMC-surface) とよぶ. とくに $H = 0$ の曲面を**極小曲面**とよぶ.

$(M, f)$ の積分可能条件は次で与えられる.

$$u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2 e^u - 2|Q|^2 e^{-u} = 0 \ (\text{ガウス方程式}), \quad Q_{\bar{z}} = \frac{1}{2}H_z e^u. \ (\text{コダッチ方程式}).$$

コダッチ方程式より $M$ が CMC であることと $Q\mathrm{d}z^2$ が正則であることが同値であることがわかる.

$H$ が 0 でない定数のとき, 臍点ではない点のまわりでは $Q = H/2$ となる等温座標系 $z = x + yi$ がとれる. そのような座標系を**等温曲率線座標系**(isothermic coordinate system) とよぶ. この座標系のもとでは積分可能条件は sinh-Gordon 方程式 $u_{z\bar{z}} + H^2 \sinh u = 0$ になる.

**註** 極小曲面の場合は積分可能条件がリウヴィル方程式 $u_{z\bar{z}} = 2e^{-u}$ となる $z = x + yi$ がとれる.

### 1.2　Lax 表示

CMC 曲面の積分可能条件は変形: $Q \longmapsto Q_\lambda = \lambda^{-1} Q$ ($\lambda \in \mathbb{S}^1$) で不変であるから, I を第一基本形式, $H$ を平均曲率, $Q_\lambda\,\mathrm{d}z^2$ をホップ微分にもつ CMC 曲面 $f_\lambda$ が存在する. したがって $f$ の 1 径数変形族 $\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{S}^1\}$ が存在する. この族を $f$ の**同伴族**(associated family) とよぶ. 各 $f_\lambda$ に沿う正規直交フレームをとる.

$$F_\lambda = (e^{-u/2}(f_\lambda)_x, e^{-u/2}(f_\lambda)_y, n_\lambda) : D \subset M \to \mathrm{SO}_3.$$

ここで $D$ は $z$ の定義域を表す. 次に $F_\lambda$ の $\mathrm{SU}_2$ へのリフトを $\Phi=\Phi_\lambda$ で表す. すると $\Phi$ に対する線型微分方程式系 $\Phi_z=\Phi U$, $\Phi_{\bar{z}}=\Phi V$,

$$U=\begin{pmatrix} u_z/4 & -\lambda^{-1}He^{u/2}/2 \\ \lambda^{-1}Qe^{-u/2} & -u_z/4 \end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix} -u_{\bar{z}}/4 & -\lambda\bar{Q}e^{-u/2} \\ \lambda He^{u/2}/2 & u_{\bar{z}}/4 \end{pmatrix}$$

が得られる. これは $\lambda$ をスペクトル径数として含む Lax 方程式である. この Lax 方程式を CMC **曲面の** Lax **表示**とよぶ. 波動函数 $\Phi$ は $\Phi: D\times\mathbb{S}^1\to\mathrm{SU}_2$ という写像であるが, $\Phi: D\to\Lambda\mathrm{SU}_{2,\sigma}$ という写像とみなすことができる. ここで

$$\Lambda\mathrm{SU}_{2,\sigma}=\{g(\lambda):\mathbb{S}^1\to\mathrm{SU}_2 \mid \sigma(g(\lambda))=g(-\lambda)\},\ \ \sigma(X)=\sigma_3X\sigma_3^{-1},\ \sigma_3=\mathrm{diag}(1,-1)$$

である. $\Lambda\mathrm{SU}_{2,\sigma}$ を $\mathrm{SU}_2$ の **twisted loop group** とよぶ. $\sigma:\mathrm{SU}_2\to\mathrm{SU}_2$ は 2 次元球面 $\mathbb{S}^2$ のリーマン対称空間表示 $\mathbb{S}^2=\mathrm{SU}_2/\mathrm{U}_1$ を定める.

単位法ベクトル場 $n$ は $n: M\to\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$ という写像を定める ($f$ の**ガウス写像**). $H$ が一定という条件は $n$ が $\mathbb{S}^2$ への**調和写像**であること ($n_{z\bar{z}}//n$) と同値である. とくに $H=0$ は $n$ が正則写像 (有理型函数) であることと同値である.

### 1.3 DPW の方法

CMC 曲面 (あるいは sinh-Gordon 方程式の解) から Lax 方程式とその解 $\Phi$ が得られた. Lax 方程式の初期値問題の解法を復習する. **ポテンシャル**とよばれるデータ $\xi=\sum_{j=-\infty}^{-1}\xi_j(z)\lambda^j\,\mathrm{d}z$ をひとつ選ぶ. $\xi$ は単連結開リーマン面 D で定義された loop algebra $\Lambda\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}_\sigma$（twisted loop group のリー環）に値をもつ正則 1 次微分形式である.

**定理**(Dorfmeistet-Pedit-Wu [6])

1. 与えられたポテンシャル $\xi=\sum_{j=-\infty}^{-1}\xi_j(z)\lambda^j$ に対し $\mathrm{d}C=C\xi$ を解く.
2. $C$ を twisted loop group の Riemann-Hilbert 分解 (岩澤分解)

$$\Lambda\mathrm{SL}_2\mathbb{C}_\sigma=\Lambda\mathrm{SU}_{2,\sigma}\cdot\Lambda^+\mathrm{SL}_2\mathbb{C}_\sigma,\ \ \Lambda^+\mathrm{SL}_2\mathbb{C}_\sigma=\{\gamma(\lambda)=\mathrm{I}+\sum_{j>0}\gamma_j\lambda^j\in\Lambda\mathrm{SL}_2\mathbb{C}_\sigma\}.$$

に沿って $C=\Phi V_+$ と分解すれば $\Phi$ は Lax 方程式の解である.

3. $\mathbb{R}^3=\mathfrak{su}_2$ と同一視し, $\mathbb{S}^2=\mathrm{Ad}(\mathrm{SU}_2)\vec{i}$ と表示する. ただし $\vec{i}=\mathrm{diag}(i,-i)$. すると

$$f_\lambda:=\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\lambda\cdot\Psi_\lambda^{-1}-\mathrm{Ad}(\Psi_\lambda)\vec{i},\ \lambda=e^{it}$$

は $n_\lambda=\mathrm{Ad}(\Psi_\lambda)\vec{i}$ をガウス写像にもつ CMC 曲面の 1 径数族 (同伴族) である.

このレシピを DPW **の方法**とよぶ. DPW の方法を用いて描かれた CMC 曲面については [10] を参照されたい.

## 2 DPW の方法 (一般形)

より一般に, DPW の方法は, リーマン面で定義され, リーマン対称空間 $G/K$ に値をもつ調和写像に適用できる.

$C^\infty$ 写像 $\psi : \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \to G/K$ の $G$ へのリフト $\Psi : \mathbb{D} \to G$ を **framing** とよぶ. $\alpha = \Psi^{-1}\mathrm{d}\Psi$ は積分可能条件 (**Mauer-Cartan equation**) $\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0$ をみたす. リー環の分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に沿って $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ と分解する ($\alpha_0 \in \mathfrak{k}$, $\alpha_1 \in \mathfrak{p}$). さらに $\alpha_1 = \alpha_1' + \alpha_1''$ と分解する. ($\alpha_1'$ は $\mathrm{d}z$, $\alpha_1''$ は $\mathrm{d}\bar{z}$ で張られる成分).

**命題** $\psi$ は調和写像 $\Longleftrightarrow \mathrm{d}(*\alpha_1) + [\alpha \wedge *\alpha_1] = 0$ ($*$ は Hodge star 作用素).

スペクトル径数 $\lambda \in \mathbb{S}^1$ を $\alpha_\lambda := \alpha_0 + \lambda^{-1}\alpha_1' + \lambda\alpha_1''$ で挿入する.

**命題 (零曲率表示)** $\psi$ は調和写像 $\Longleftrightarrow d + \alpha_\lambda$ は平坦, すなわち $\mathrm{d}\alpha_\lambda + [\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda]/2 = 0$ がすべての $\lambda$ について成立.

零曲率表示より $\Psi_\lambda^{-1}\mathrm{d}\Psi_\lambda = \alpha_\lambda$ の解 $\Psi_\lambda$ が存在する. したがって調和写像の 1 径数族 $\psi_\lambda := \Psi_\lambda \cdot K$ が得られる.

$$\Psi_\lambda : \mathbb{D} \to \Lambda G_\sigma = \{\gamma : \mathbb{S}^1 \to G \mid \sigma(\gamma(\lambda)) = \gamma(-\lambda)\}$$

を **extended framing** とよぶ. $\sigma$ はリーマン対称空間 $G/K$ を定める $G$ の対合である. $\Lambda G_\sigma$ を $G$ の twisted loop group とよぶ. $\Psi_\lambda^{-1}\mathrm{d}\Psi_\lambda = \alpha_\lambda$ は調和写像に対する Lax 表示である. 実際 $\alpha_\lambda = U_\lambda dz + V_\lambda d\bar{z}$ と表示すれば, この方程式は

$$\partial_z \Psi_\lambda = \Psi_\lambda U_\lambda,\ \partial_{\bar{z}} \Psi_\lambda = \Psi_\lambda V_\lambda,$$

と書き直せ, その積分可能条件 $\partial_z V_\lambda - \partial_{\bar{z}} U_\lambda + [U_\lambda, V_\lambda] = 0$ は $\mathrm{d}\alpha_\lambda + [\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda]/2 = 0$ に他ならない.

**定理**(Dorfmeistet-Pedit-Wu [6])

1. twisted loop algebra $\Lambda\mathfrak{g}_\sigma^{\mathbb{C}}$ に値をもつ 1 次微分形式 (**potential**) $\xi = \sum_{j=-1}^{\infty} \xi_j(z)\lambda^j \mathrm{d}z$ をとり, 常微分方程式 $\mathrm{d}C = C\xi$ を解く.

2. $C$ を twisted loop group の Riemann-Hilbert 分解 (岩澤分解)

$$\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}} = \Lambda G_\sigma \cdot \Lambda^+ G_\sigma^{\mathbb{C}},\ \ \Lambda^+ G_\sigma^{\mathbb{C}} = \{\gamma(\lambda) = \mathrm{I} + \sum_{j>0} \gamma_j \lambda^j \in \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}\}$$

   に沿って $C = \Psi_\lambda V_+$ と分解すれば $\Psi_\lambda$ は Lax 方程式の解である.

## 3 DPW の方法の一般化

一般化の方向性として次の 2 つが考えられる.

1. 一般の等質空間に値をもつ調和写像 $\psi : M \to G/K$.

2. 定曲率ではない 3 次元等質空間内の CMC 曲面, または極小曲面 (候補は Thurston 幾何のモデル空間).

### 3.1 等質空間 $G/K$

一般の等質リーマン空間に値をもつ調和写像 $\psi : M \to G/K$ の場合, 零曲率表示は自動的にはみたされず,

$$U(\alpha_1' \wedge \alpha_1'') = 0,\ \ [\alpha_1' \wedge \alpha_1'']_{\mathfrak{p}} = 0$$

という条件を満たされねばならない. ここで $U$ は $2\langle U(X,Y),Z\rangle = \langle X,[Z,Y]\rangle + \langle Y,[Z,X]\rangle$ で定義される. しかしながら, これら 2 条件をみたす調和写像を探すことは容易ではない (階数 1 の偏微分方程式に帰着する場合を除く). これらをみたす例をひとつ挙げる. 3 次元双曲空間内の平均曲率一定曲面 $f: M \to \mathbb{H}^3 = \mathrm{SL}_2\mathbb{C}/\mathrm{SU}_2$ のガウス写像 $F = (f,n): M \to \mathrm{U}\mathbb{H}^3 = \mathrm{SL}_2\mathbb{C}/\mathrm{U}_1$ はこれら 2 条件を常にみたし, DPW 法を一般化した上で適用できる. この場合については以前に報告した [9] (報告 [8] も参照). 詳細については [3] を参照されたい. なお $\mathbb{H}^3$ の CMC 曲面の積分可能条件は $H^2 > 1$ のとき sinh-Gordon 方程式, $H^2 = 1$ のときリウヴィル方程式, $0 \leq H^2 < 1$ のとき cosh-Gordon 方程式である. $\mathbb{H}^3$ 内の極小曲面についての初期の重要な研究結果は Anderson [1], Polthier [12], Uhlenbeck [14] 等がある. また Novokshenov [11] は cosh-Gordon 方程式の軸対称解で定まる極小曲面を考察している. このとき cosh-Gordon 方程式はパンルヴェ方程式 $P_{\mathrm{III}}$ に簡約される.

### 3.2 Thurston 幾何

Thurston の 3 次元幾何における 8 種類のモデル空間は定曲率空間 ($\mathbb{E}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$), 直積空間 ($\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$), 佐々木空間形 (Nil, $\widetilde{\mathrm{SL}_2\mathbb{R}}$), 可解幾何のモデル空間 Sol で与えられる [13]. これらの空間は Sol を除き $U = 0$ をみたしている. 本稿でとりあげるのは **Heisenberg 群** Nil である. Nil は $\mathbb{R}^3$ に次の群構造とリーマン計量を与えたものである.

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(x_1',x_2',x_3') = (x_1+x_1', x_2+x_2', x_3+x_3'+x_1x_2'-x_1'x_2), \ \ \mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\omega\otimes\omega.$$

ただし $\omega = \mathrm{d}x_3 + (x_2\mathrm{d}x_1 - x_1\mathrm{d}x_2)/2$. 正規直交フレームとして

$$e_1 = \partial_{x_1} - x_2\partial_{x_3}/2,\ e_2 = \partial_{x_2} + x_1\partial_{x_3}/2,\ e_3 = \partial_{x_3}.$$

がとれる.

### 3.3 スピン幾何・Dirac 作用素と可積分系

曲面 $f: M \to \mathrm{Nil}$ に対し $\alpha = f^{-1}df$ とおき $\alpha' = (\phi_1 e_1 + \phi_1 e_2 + \phi_3 e_3)\mathrm{d}z$ と表す. 曲面の**スピン構造**を用いて

$$\phi_1 = (\bar{\psi}_2)^2 - \psi_1^2,\ \phi_2 = i\{(\bar{\psi}_2)^2 + \psi_1^2\},\ \phi_3 = 2\psi_1\bar{\psi}_2.$$

で**スピノル場**$(\psi_1\sqrt{dz}, \psi_2\sqrt{d\bar{z}})$ を定める. $\langle df, df\rangle = e^u dz d\bar{z}$, $h := e^{u/2}\langle n, e_3\rangle$ とおくと, 曲面の構造方程式は次の**非線型 Dirac 方程式**で与えられる.

$$D\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = 0 \ \text{ with } \ D = \begin{pmatrix}0 & \partial_z\\ -\partial_{\bar{z}} & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathscr{U} & 0\\ 0 & \mathscr{V}\end{pmatrix},\ \ \mathscr{U} = \mathscr{V} = -\frac{H}{2}e^{u/2} + \frac{i}{4}h.$$

この非線型 Dirac 方程式は Lax 方程式 $\Psi_z = \Psi U$, $\Psi_{\bar{z}} = \Psi V$ に書き換えられる. ただし

$$U = \begin{pmatrix} w_z/4 + H_z\exp(-w/2+u/2)/2 & \exp(w/2)\\ B\exp(-w/2) & -w_z/4\end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -w_{\bar{z}}/4 & \bar{B}\exp(-w/2)\\ \exp(w/2) & w_{\bar{z}}/4 + H_{\bar{z}}\exp(-w/2+u/2)/2\end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{4}(2H+i)\left(A + \frac{\phi_3^2}{2H+i}\right),\ Adz^2 = \mathrm{II}^{(2,0)}.$$

このLax 方程式にスペクトル径数を次のようにして挿入できる.

$$U_\lambda := \begin{pmatrix} w_z/4 + H_z \exp(-w/2+u/2)/2 & -\lambda^{-1}\exp(w/2) \\ \lambda^{-1} B \exp(-w/2) & -w_z/4 \end{pmatrix},$$

$$V_\lambda := \begin{pmatrix} -w_{\bar z}/4 & -\lambda \bar{B}\exp(-w/2) \\ \lambda \exp(w/2) & w_{\bar z}/4 + H_{\bar z}\exp(-w/2+u/2)/2 \end{pmatrix}.$$

**定理 (零曲率表示)**　次の3つの性質は互いに同値.

- $f$ はCMC 曲面.
- $\alpha_\lambda = U_\lambda dz + V_\lambda d\bar z$ とおくと, すべての $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対し, $\mathrm{d}\alpha_\lambda + [\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda]/2 = 0$.
- $\mathrm{Ad}(F)\mathrm{diag}(i,-i) : \mathbb{D} \to \mathrm{GL}_2\mathbb{C}/\mathrm{GL}_1\mathbb{C}$ は調和写像.

**系 (零曲率表示)**　次の3つの性質は互いに同値.

- $f$ は極小曲面.
- $\alpha_\lambda = U_\lambda dz + V_\lambda d\bar z$ とおくと, すべての $\lambda \in \mathbb{S}^1$ に対し, $\mathrm{d}\alpha_\lambda + [\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda]/2 = 0$ で $\alpha_\lambda \in \mathfrak{su}_{1,1}$.
- $\mathrm{Ad}(F)\mathrm{diag}(i,-i) : \mathbb{D} \to \mathrm{SU}_{1,1}/\mathrm{U}_1 = \mathbb{H}^2$ は調和写像.

球面に値をもつ写像 $g$ を $g := f^{-1}n : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^2 \subset \mathfrak{nil}$ で定め, $f$ の**法ガウス写像**とよぶ. $f$ が「$x_3$ 軸に平行な平面でない」という仮定の下では $|g| \neq 1$ であり, $|g| < 1$(または $|g| > 1$) と仮定できる.　今, 上半球面にポアンカレ計量を与えよう. すると $f$ が極小であることと $g$ が調和であることが同値である. さらに上半球面を $\mathrm{Ad}(\mathrm{SU}_{1,1})\mathrm{diag}(i,-i)$, と同一視すれば $g$ は $\mathrm{Ad}(F)\mathrm{diag}(i,-i)$ と一致する.

$\mathbb{H}^2 = \mathrm{SU}_{1,1}/\mathrm{U}_1$ はリーマン対称空間なのでDPW の方法が適用でき, Lax 方程式の解 (extended framing) を構成できる. extended framing から曲面 $f$ を求めるために Sym 型の公式が必要である.

**定理** リー環 $\mathfrak{su}_{1,1}$ を Nil のリー環 $\mathfrak{nil}$ と線型空間として同一視する (リー環としては同型でないことに注意).

- $\Psi_\lambda$ を $\mathbb{H}^2 = \mathrm{SU}_{1,1}/\mathrm{U}_1$ に値をもつ調和写像に対する extended framing とする.
- $m_\lambda := -i\lambda\partial_\lambda\Psi_\lambda \cdot \Psi_\lambda^{-1} - \dfrac{1}{2}\mathrm{Ad}(\Psi_\lambda)\mathrm{diag}(i,-i)$ を求める.
- $\tilde m_\lambda := (\textbf{off diagonal part of } m_\lambda) - \dfrac{i}{2}\lambda\,(\textbf{diagonal part of } \partial_\lambda m_\lambda)$ を求める.
- $f_\lambda = \exp \tilde m_\lambda$ は Nil の極小曲面を与える.

**註**

- $\mathbb{H}^2$ への調和写像が定める可積分方程式は「符号違い」の sinh-Gordon 方程式 $u_{z\bar z} - \sinh u = 0$ である. $u_{z\bar z} + \sinh u = 0$ とは解の性質が著しく異なる.
- $\mathbb{H}^2$ への調和写像は $(1+2)$ 次元ミンコフスキー時空内の空間的平均曲率一定曲面のガウス写像としても表れる ([7] 参照). DPW 法を用いた空間的平均曲率一定曲面の構成については, Brander, Rossman, Schmitt [2] 参照.

- 本稿で報告した Nil の極小曲面に対する DPW 法は $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ 内の $H=1$ 曲面及び $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ 内の $H=1/2$ 曲面にも適用できる.
- 一般の Lie 群への拡張については [5] を準備中である.

**参考文献**


[1] M. T. Anderson, Complete minimal varieties in hyperbolic space, Invent. Math. **69**(1982), no. 3, 477–494.

[2] D. Brander, W. Rossman, N. Schmitt. Holomorphic representation of constant mean curvature surfaces in Minkowski space: consequences of non-compactness in loop group methods. Adv. in Math., **223**(2010), no. 3, 949–986.

[3] J. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi, Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space via loop groups, J. reine angew. Math., to appear.

[4] J. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi, A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group, preprint, arXiv:1210.7300v1.

[5] J. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi, A loop group method for harmonic maps into Lie groups, in preparation.

[6] J. Dorfmeister, F. Pedit, H. Wu, Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces. Comm. Anal. Geom. **6**(1998), no. 4, 633–668.

[7] J. Inoguchi, Surfaces in Minkowski space and harmonic maps, *Harmonic Morphisms, Harmonic Maps and Related Topics*, (C. K. Anand, P. Baird, E. Loubeau and J. C. Wood editors), Reserch Notes in Mathematics, CRC Press, 2000, pp. 235–256.

[8] 井ノ口順一, 3 次元双曲空間の平均曲率一定曲面, 京都大学数理解析研究所講究録 **1700** (2010), 可積分系数理とその応用 (礒島伸 [編]), 48–64.

[9] 井ノ口順一, とり扱いの難しい可積分方程式, 九州大学応用力学研究所研究報告 21ME-S2(2010), 7–15.

[10] 小林真平, 平均曲率一定曲面を視る, 数学セミナー, 2010 年 1 月号, 30–36.

[11] V. Yu. Novokshenov, Minimal surfaces in the hyperbolic space and radial-symmetric solutions of the cosh-Laplace equation, *Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993)*, Math. Phys. Stud. **19**(1996), Kluwer Acad. Publ., pp. 357–370.

[12] K. Polthier, Geometric a priori estimates for hyperbolic minimal surfaces, Bonner Mathematische Schriften **263**(1994), Universität Bonn Mathematisches Institute, Bonn.

[13] W. M. Thurston (S. Levy ed.), *Three-dimensional geometry and topology* Vol. 1, Princeton Math. Series, Vol. 35, Prenceton Univ. Press, 1997.

[14] K. K. Uhlenbeck, Closed minimal surfaces in hyperbolic 3-manifolds, *Seminar on minimal submanifolds*, Ann. of Math. Stud. **103** (1983), pp. 147–168.