KP差分方程式系とその解の構造

広田, 良吾
早稲田大学名誉教授

https://doi.org/10.15017/27167

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 24AO-S3 (7), pp.49-57, 2013-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3
「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」（研究代表者　太田　泰広）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy, Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 7 (pp. 49 - 57)

KP差分方程式系とその解の構造

広田　良吾（HIROTA Ryogo）

（Received 15 January 2013; accepted 12 February 2013）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2013

KP 差分方程式系とその解の構造

早稲田大学名誉教授　広田良吾 (HIROTA Ryogo)

概要

BKP 差分方程式系列の構造はパフィアンの加法公式を使って簡明にできることを示したが、KP 差分方程式系列とその解の構造もパフィアンの加法公式を使うと簡明になることを示す。

1　はじめに

KP 方程式系とその解の構造については Ohta et al. の論文 [1] で、詳しく調べられている。この論文の目的は BKP 方程式系で使われたパフィアンの加法公式 [2] を使って、KP 方程式系の解の構造を簡潔に記述することである。
まず KP 方程式の復習から始める。KP(Kadomtsev-Petviashvili) 方程式は双線形形式で

$$(D_4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)\tau \cdot \tau = 0. \tag{1}$$

と表される方程式である [3]。2 ソリトン解は

$$\tau_2 = 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + a_{12}\exp(\eta_1 + \eta_2), \tag{2}$$

$$\eta_j = (p_j - q_j)x_1 + (p_j^2 - q_j^2)x_2 + (p_j^3 - q_j^3)x_3, \quad j = 1, 2, \tag{3}$$

$$a_{12} = \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)}. \tag{4}$$

と表現される。方程式 (1) を差分化した KP 差分方程式は、Miwa によって次式

$$\begin{aligned}&a(b-c)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)\\&+b(c-a)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)\\&+c(a-b)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n) = 0,\end{aligned} \tag{5}$$

で表現されている [4]。KP 差分方程式の 2 -ソリトン解は式 (2) と同じ形である。

$$\tau_2 = 1 + \alpha_1\exp(\eta_1) + \alpha_2\exp(\eta_2) + \alpha_1\alpha_2a_{12}\exp(\eta_1 + \eta_2), \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
\exp(\eta_j) = {} & [(1+p_j a)/(1+q_j a)]^l \\
& \times[(1+p_j b)/(1+q_j b)]^m \\
& \times[(1+p_j c)/(1+q_j c)]^n, \quad \text{for } j=1,2,
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
a_{12} = \frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1-q_2)(q_1-p_2)}. \tag{8}
$$

ここで、p_j, q_j と α_j は番号 j のソリトンの波数ベクトルと位置に関係したパラメータである。α_j の値は任意であり、$\alpha_j = 1$ としても解である。

2 シフト演算と τ の シフト記号

独立変数が 3 個 $\{k, l, m\}$ の KP 方程式を拡張して独立変数が m 個の高次 KP 方程式を考える。このため $\{k, l, m\}$ の代わりに $\{k_1, k_2, k_3, \cdots k_m\}$ を導入する。KP 差分方程式系で使われているパラメータ a, b, c の代わりに新しい記号 $a = 1/s_1,\ b = 1/s_2,\ c = 1/s_3, \ldots$ を導入する。 f が変数 $\{k_1, k_2, k_3, \cdots k_m\}$ の関数であるとき、添え字を省略して $f(k)$ で表す。次にシフト演算子 E を導入する。演算子 E は f の変数 $k_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ に作用して k_j を１だけシフトする. すなわち

$$
E(f(k), k_{j_1}, k_{j_2}, \cdots) = f(k)|_{k_{j_1}=k_{j_1}+1, k_{j_2}=k_{j_2}+1, \cdots} \tag{9}
$$

である。 さらに $\tau(k)$ のシフト記号を導入する。

$$
\begin{aligned}
\tau(k_l) &= E(\tau(k), k_l) = \tau(k_1, k_2, \cdots, k_l+1, \cdots, k_m), \\
\tau(\hat{k}_l) &= E(\tau(k), k_1, k_2, \cdots, \hat{k}_l, \cdots, k_m) \\
&\qquad = \tau(k_1+1, k_2+1, \cdots, k_l, k_l+1, \cdots, k_m+1).
\end{aligned}
$$

この記号 $\tau(k_l)$ は特定の変数 k_l だけ $\tau(k)$ をシフトすることを示している。
記号 $\tau(\hat{k}_l)$ は特定の変数 k_l を除いたすべての変数で $\tau(k)$ をシフトすることを示している。

3 高次 KP 差分方程式

前述の Ohta et al. の論文による m 次 KP 差分方程式は新しい記号を使うと

$$
\begin{vmatrix}
1 & s_1 & s_1^2 & \cdots & s_1^{m-2} & \tau(k_1)\tau(\hat{k}_1) \\
1 & s_2 & s_2^2 & \cdots & s_2^{m-2} & \tau(k_2)\tau(\hat{k}_2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & s_m & s_m^2 & \cdots & s_m^{m-2} & \tau(k_m)\tau(\hat{k}_m)
\end{vmatrix} = 0, \quad m = 3, 4, \cdots.
$$

と表現される。ここに現れる m 次行列式は Vandermonde 行列式 $V(m)$ で次の積表示を持つ。

$$V(m)=\begin{vmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 & \cdots & s_1^{m-1} \\ 1 & s_2 & s_2^2 & \cdots & s_2^{m-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 1 & s_m & s_m^2 & \cdots & s_m^{m-1} \end{vmatrix}=(-1)^{m(m-1)/2}\prod_{1\le i<j\le m}(s_i-s_j)$$

Miwa による KP 差分方程式 $(m=3)$ は新しい記号法を使うと次式で表現される。

$$(s_3-s_2)\tau(k_1)\tau(\hat{k}_1)-(s_3-s_1)\tau(k_2)\tau(\hat{k}_2)+(s_2-s_1)\tau(k_3)\tau(\hat{k}_3)=0$$

4 次の KP 差分方程式 $(m=4)$ を具体的に求めると次式になる。

$$\begin{aligned} &(s_4-s_3)(s_4-s_2)(s_3-s_2)\tau(k_1)\tau(\hat{k}_1) \\ -&(s_4-s_3)(s_4-s_1)(s_3-s_1)\tau(k_2)\tau(\hat{k}_2) \\ +&(s_4-s_2)(s_4-s_1)(s_2-s_1)\tau(k_3)\tau(\hat{k}_3) \\ -&(s_3-s_2)(s_3-s_1)(s_2-s_1)\tau(k_4)\tau(\hat{k}_4)=0. \end{aligned}$$

4　ソリトン方程式はパフィアンの恒等式である

「ソリトン方程式は解の表示を正しく選べばパフィアンの恒等式に帰着する」[3] という信念を抱いているので、m 次 KP 差分方程式はどのようなパフィアンの恒等式になっているのか？　と期待して高次 KP 差分方程式を眺める。τ 関数は値が 1 でも解になっている。そのとき恒等式は当然

$$\begin{vmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 & \cdots & s_1^{m-1} & 1 \\ 1 & s_2 & s_2^2 & \cdots & s_2^{m-1} & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 1 & s_m & s_m^2 & \cdots & s_m^{m-1} & 1 \end{vmatrix}=0$$

である。これは 全く trivial　な行列式の恒等式である。発想を変えて行列式表示からパフィアン表示に移る。m 次のパフィアンを表現するために文字列 s_i $(i=1,2,\cdots,m)$ と s_k^* $(k=0,1,\cdots,m-1)$ を導入し、次のパフィアンを定義する。

$$(s_i,s_j)=0,\quad (s_i,s_k^*)=(s_i)^k,\quad (s_k^*,s_l^*)=0.$$

ただし、s_0^* は特別で、$(s_i,s_0^*)=0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ とする。そのとき m 次の Vandermonde 行列式は次のパフィアンで表示される。

$$V(m)=(s_1,s_2,\cdots,s_m,s_{m-1}^*,s_{m-2}^*,\cdots,s_1^*,s_0^*)$$

このパフィアンを使って、高次 KP 差分方程式を表示する。結果は次式となる。

$$\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}(s_l,s_0^*)\tau(k_l)(s_1,s_2,\cdots,\hat{s}_l,\cdots,s_m,s_{m-2}^*,\cdots,s_2^*,s_1^*,s_0^*)\tau(\hat{k}_l)=0,$$
$$m=3,4,5,\cdots.$$

ここで $\tau(k)=1$ とおくと、これはよく知られたパフィアンの恒等式

$$\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}(s_l,s_0^*)(s_1,s_2,\cdots,\hat{s}_l,\cdots,s_m,s_{m-2}^*,\cdots,s_2^*,s_1^*,s_0^*)=0$$

である。この式は値が 0 になるパフィアン (同じ文字 s_0^* が重複している)

$$(s_1,s_2,\cdots,s_m,s_{m-2}^*,\cdots,s_1^*,s_0^*,s_0^*)$$

を最後の文字 s_0^* で展開すると得られる trivial な恒等式である。 しかしパフィアンには行列式と違って、驚くべき恒等式がある [3]。この恒等式は「trivial なパフィアンの恒等式に任意の文字列を同次的に付加しても恒等式は不変である」と表現される。即ち、上の展開式に N ソリトン解を示す文字列 $\{1,2,\cdots,N,N^*,\cdots,2^*,1^*\}$ を次のように付け加えても恒等式であることを示している。

$$\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}(s_l,s_0^*,1,2,\cdots,N,N^*,\cdots,2^*,1^*)$$
$$\times(s_1,s_2,\cdots,\hat{s}_l,\cdots,s_m,s_{m-2}^*,\cdots,s_2^*,s_1^*,s_0^*,1,2,\cdots,N,N^*,\cdots,2^*,1^*)=0$$

これが求めている「KP 高次差分方程式が帰着すべき恒等式」である。

5 $\tau'-$ 関数のパフィアン表示

パフィアンの恒等式

$$\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}(s_l,s_0^*,1,2,\cdots,N,N^*,\cdots,2^*,1^*)$$
$$\times(s_1,s_2,\cdots,\hat{s}_l,\cdots,s_m,s_{m-2}^*,\cdots,s_2^*,s_1^*,s_0^*,1,2,\cdots,N,N^*,\cdots,2^*,1^*)=0 \qquad (10)$$

と高次 KP 差分方程式

$$\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}(s_l,s_0^*)\tau(k_l)(s_1,s_2,\cdots,\hat{s}_l,\cdots,s_m,s_{m-2}^*,\cdots,s_2^*,s_1^*,s_0^*)\tau(\hat{k}_l)=0, \qquad (11)$$
$$m=3,4,5,\cdots.$$

を結びつけるものは次式で表される τ'_N- 関数（シフトされた τ_N- 関数）のパフィアン表示である：

$$\begin{aligned}
&\tau(k) = (1,2,3,\cdots,N,N^*,\cdots,2^*,1^*),\\
&\tau(k_l) = (s_l,s_0^*,1,2,3,\cdots,N,N^*,\cdots,2^*,1^*))/(s_l s_0^*),\\
&\tau(\hat{k}_l) =\\
&\ (s_1,s_2,\cdots,\hat{s}_l,\cdots,s_m,s_{m-2}^*,\cdots,s_2^*,s_1^*,s_0^*,1,2,\cdots,N,N^*,\cdots,2^*,1^*)\\
&\ /(s_1,s_2,\cdots,\hat{s}_l,\cdots,s_m,s_{m-2}^*,\cdots,s_2^*,s_1^*,s_0^*)
\end{aligned}$$

である。 この表示によって式 (11) は式 (10) に変換され「高次 KP 差分方程式がパフィアンの恒等式に帰着する」ことが証明される。

τ'_N- 関数のパフィアン表示の証明は、パフィアンの加法公式 (see Appendix A) を使うと、τ'_{ij} 関数 (1 〜 2 ソリトン解）のパフィアン表示

$$\begin{aligned}
&\tau_{i,j}(k) = (i,j^*),\\
&\tau(k_l) = (s_l,s_0^*,i,j^*)/(s_l s_0^*),\\
&\tau(\hat{k}_l) = (s_1,s_2,\cdots,\hat{s}_l,\cdots,s_m,s_{m-2}^*,\cdots,s_2^*,s_1^*,s_0^*,i,j^*)\\
&\qquad\quad /(s_1,s_2,\cdots,\hat{s}_l,\cdots,s_m,s_{m-2}^*,\cdots,s_2^*,s_1^*,s_0^*)
\end{aligned}$$

に帰着する。このため KP 差分方程式の 2 ソリトン解 (6) を調べる。

6　$N-$ ソリトン解

２-ソリトン解をパフィアンの加法公式が利用できる形に書き換える。結果は次式で表される。

$$\begin{aligned}
&\tau_2 = (1,2,2^*,1^*), \quad (i,j^*) = c_0(i,j) + (a(i),b^*(j)),\\
&(a(i),b^*(j)) = \alpha_i\ pq(i,j)\ \rho_p(i)\ \rho_q(j),\\
&\rho_p(i) = \prod_{l=1}^{m}[sp(l,i)]^{k_l}, \quad \rho_q(j) = \prod_{l=1}^{m}[sq(l,j)]^{k_l}
\end{aligned}$$

となる。ただし

$$pq(i,j) = 1/(-p_i+q_j), \quad sp(l,j) = (s_l+p_j), \quad sq(l,j) = 1/(s_l+q_j)$$

と定める。ここで i,j は任意の自然数で、$c_0(i,j)$ は i,j に依存する任意関数である。Miwa の解を再現する時は $c_0(i,j) = \delta_{i,j}$ を選ぶ。
N-ソリトン解は $\tau_N = (1,2,\cdots,N,N^*,2^*,1^*)$ で与えられる。

7　変形した Vandermonde 行列式

KP 差分方程式の表示に使われている Vandermonde 行列式には有理式が全く含まれていない。このため τ'_N- 関数の表示には使えない。有理式が含まれるように Vandermonde 行列式を変形する。新しいパフィアンの成分として、

$$(s_i, y^*) = (s_i - y)^{-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, m+1.$$

を導入し、変形された Vandermonde 行列式 $V'(m)$ を次式で定義する。

$$V'(m) = (s_1, s_2, \cdots, s_m, s_{m+1}, y^*, s^*_{m-1}, s^*_{m-2}, \cdots, s^*_1, s^*_0),$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 & \cdots & s_1^{m-1} & (s_1-y)^{-1} \\ 1 & s_2 & s_2^2 & \cdots & s_2^{m-1} & (s_2-y)^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & s_m & s_m^2 & \cdots & s_m^{m-1} & (s_m-y)^{-1} \\ 1 & s_{m+1} & s_{m+1}^2 & \cdots & s_{m+1}^{m-1} & (s_{m+1}-y)^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{m+1 \geq i > j \geq =1} (s_i - s_j) \prod_{l=1}^{m+1} (s_l - y)^{-1} \tag{12}$$

上式 (12) は全体に因子 $\prod_{l=1}^{m+1}(s_l-y)^{-1}$ を掛けると Vandermonde 行列式に変形できる。これがパフィアンの積表示 [2] に対応する行列式の積表示である。m 個の文字列 $\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ の中から任意に n 個の文字列 $\{s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}\}$ を選ぶ。この文字列と新しい文字 $p_i = -s_{m+1}$, $q_j* = -y*$ を使う。ただし $(p_i, q^*_j) = pq(i,j)$, $(p_i, s^*_l) = sp(l,i)$, $(s_{l_k}, q^*_j) = sq(l_k, j)$ とする。これらの文字列によって行列式の積表示 (12) を次式のように書き直す

$$V'(n) = (s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, p_i, q^*_j, s^*_{n-1}, s^*_{n-2}, \cdots, s^*_1, s^*_0),$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & s_{l_1} & s_{l_1}^2 & \cdots & s_{l_1}^{n-1}, (s_{l_1}+q_j)^{-1} \\ 1 & s_{l_2} & s_{l_2}^2 & \cdots & s_{l_2}^{n-1}, (s_{l_2}+q_j)^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & s_{l_n} & s_{l_n}^2 & \cdots & s_{l_n}^{n-1}, (s_{l_n}+q_j)^{-1} \\ 1 & -p_i & (-p_i)^2 & \cdots & (-p_i)^{n-1}, (-p_i+q_j)^{-1} \end{vmatrix}$$
$$= V(n)\; pq(i,j)\; P(n,i)\, Q(n,j)$$

ここで

$$P(n,i) = \prod_{k=1}^{n} sp(l_k, i), \quad Q(n,j) = \prod_{k=1}^{n} sq(l_k, j)^{-1},$$
$$pq(i,j) = (-p_i + q_j)^{-1}, \quad sp(l_k, i) = (s_{l_k} + p_i), \quad sq(l_k, j) = (s_{l_k} + q_j)^{-1}.$$

である。文字 $\{p_i, q_j^*\}$ を行の最後に移動し、式全体を $V(n)$ で割ると、

$$\begin{aligned}
&(s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s_{n-1}^*, s_{n-2}^*, \cdots, s_1^*, s_0^*, p_i, q_j^*) \\
&\quad /(s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s_{n-1}^*, s_{n-2}^*, \cdots, s_1^*, s_0^*) \\
&= pq(i,j)\; P(n,i)\, Q(n,j)
\end{aligned} \tag{13}$$

が得られる。 この表示 (13) から以下に示すように $\tau'-$ 関数のパフィアン表示が得られる。

8 $\tau'-$ 関数のパフィアン表示

関係式、$(i, j^*) = c_0(i,j) + (a(i), b^*(j))$ に注意して、パフィアン $(s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s_{n-2}^*, \cdots, s_1^*, s_0^*, i, j^*)$ を次式で定義する。

$$\begin{aligned}
&(s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s_{n-2}^*, \cdots, s_1^*, s_0^*, i, j^*) \\
&\qquad = (s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s_{n-2}^*, \cdots, s_1^*, s_0^*) c_0(i,j) \\
&\qquad +(s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, a(i), b^*(j), s_{n-2}^*, \cdots, s_1^*, s_0^*)
\end{aligned}$$

ここで、パフィアンの新しい成分は次式で与えられている。

$$\begin{aligned}
&(s_{l_k}, a(i)) = 0, \quad (s_{l_k}, b^*(j)) = \rho_q(j)\; sq(l_k, j), \quad k = 1, 2, \cdots, n \\
&(a(i), b^*(j)) = pq(i,j), \quad (a(i), s_l^*) = \rho_p(i)\; sp(l, i), \quad (b^*(j), s_l^*) = 0, \\
&\qquad l = 0, 1, 2, \cdots, n-2.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&(s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s_{n-2}^*, \cdots, s_1^*, s_0^*, i, j^*) \\
&\qquad = (s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s_{n-2}^*, \cdots, s_1^*, s_0^*) c_0(i,j) \\
&\qquad +(s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s_{n-2}^*, \cdots, s_1^*, s_0^*, p_i, q_j^*) \rho_p(i) \rho_q(j)
\end{aligned}$$

である。これを式 (13) に代入するとパフィアン表示式

$$\begin{aligned}
&(s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s_{n-2}^*, \cdots, s_1^*, s_0^*, i, j^*) \\
&\quad /(s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s_{n-2}^*, \cdots, s_1^*, s_0^*) \\
&= c_0(i,j) + pq(i,j) P(n,i) Q(m,j) \rho_p(i) \rho_q(j)
\end{aligned} \tag{14}$$

を得る。一方、パラメータ $\{s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}\}$ に対応する n 個の独立変数 $\{k_{l_1}, k_{l_2}, \cdots, k_{l_n}\}$ を考える。パフィアン $\tau_{ij} = (i, j^*)$ を $k_{l_1}, k_{l_2}, \cdots, k_{l_n}$ でシフトすると, 結果は,

$$E(\tau_{ij}, k_{l_1}, k_{l_2}, \cdots, k_{l_n}) = c_0(i,j) + pq(i,j) P(n,i) Q(n,j) \rho_p(i) \rho_q(j)$$

である。この式は表示式 (14) によって

$$E(\tau_{ij}, k_{l_1}, k_{l_2}, \cdots, k_{l_n}) = (s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s^*_{n-2}, \cdots, s^*_1, s^*_0, i, j^*) \\ /(s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_n}, s^*_{n-2}, \cdots, s^*_1, s^*_0)$$

となる。これが目的とする $\tau'_{ij}-$ 関数のパフィアン表示である。
したがって τ_N が高次 KP 差分方程式、

$$\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}(s_l, s^*_0)\tau(k_l)(s_1, s_2, \cdots, \hat{s}_l, \cdots, s_m, s^*_{m-2}, \cdots, s^*_2, s^*_1, s^*_0)\tau(\hat{k}_l) = 0, \\ m = 3, 4, 5, \cdots.$$

の解であることが証明された。この証明法は Nonautonomous KP 差分方程式にもそのまま利用できる [2]。

A Addition Formula for Pfaffians

パフィアンの加法公式 [2] は、パフィアンの恒等式の変形であり、次式で表される。

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2n}) = (d_1, d_2, \cdots, d_{2m}, b_1, b_2, \cdots, b_{2n})/(d_1, d_2, \cdots, d_{2m}). \tag{15}$$

ただし

$$(\beta_i, \beta_j) = (d_1, d_2, \cdots, d_{2m}, b_i, b_j)/(d_1, d_2, \cdots, d_{2m}).$$

$i, j = 1, 2, \cdots, 2n.$

A.1 加法公式の証明

n 次の加法公式 (15) を帰納法を使って証明する。ただし 1 次の加法公式

$$(\beta_i, \beta_j) = (d_1, d_2, \cdots, d_{2m}, b_i, b_j)/(d_1, d_2, \cdots, d_{2m}) \tag{16}$$

が $i, j = 1, 2, \cdots, 2n$ について常に成立していると仮定する。
帰納法を使うため、$n-1$ 次の加法公式

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2(n-1)}) \\ = (d_1, d_2, \cdots, d_{2m}, b_1, b_2, \cdots, b_{2(n-1)})/(d_1, d_2, \cdots, d_{2m}) \tag{17}$$

が成立していると仮定する。

n 次のパフィアンの展開式、

$$(b_1, b_2, \cdots, b_{2n}) = \sum_{j=2}^{2n}(b_1, b_j)(-1)^j(b_2, b_3, \cdots, \hat{b}_j, \cdots, b_{2n}). \tag{18}$$

を取り上げる。展開式はパフィアンの恒等式によって文字リスト $\{d_1, d_2, \cdots, d_{2m}\}$ を同次的に追加しても成立する。

$$\begin{aligned}&(d_1, d_2, \cdots, d_{2m}, b_1, b_2, \cdots, b_{2n})(d_1, d_2, \cdots, d_{2m})\\&= \sum_{j=2}^{2n}(d_1, d_2, \cdots, d_{2m}, b_1, b_j)(-1)^j(d_1, d_2, \cdots, d_{2m}, b_2, b_3, \cdots, \hat{b}_j, \cdots, b_{2n}).\end{aligned} \tag{19}$$

式 (19) を $(d_1, d_2, \cdots, d_{2m})$ の二乗で割り、仮定 (16) と (17) を使うと

$$\begin{aligned}&(d_1, d_2, \cdots, d_{2m}, b_1, b_2, \cdots, b_{2n})/(d_1, d_2, \cdots, d_{2m})\\&= \sum_{j=2}^{2n}(\beta_1, \beta_j)(-1)^j(\beta_2, \beta_3, \cdots, \hat{\beta}_j, \cdots, \beta_{2n})\\&= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2n})\end{aligned} \tag{20}$$

となる。すなわち n 次の加法公式が得られた。証明終わり。

References

[1] Yasuhiro Ohta,Ryogo Hirota,Satoshi Tsujimoto and Tatsuya Imai: "Casorati and Discrete Gram Type Determinant Representations of Solutions to the Discrete KP Hierarchy", J.Phys.Soc.Japan **62**,(1993) pp.1872-1886.

[2] Ryogo Hirota:"パフィアンの加法公式 (Addition Formula for pfaffians)" to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* (2013).

[3] Ryogo Hirota: *The Direct Method in Soliton Theory* (Cambridge University Press,2004).

[4] T.Miwa: "On Hirota's difference equations", Proc.Jpn.Acad. **58**,Ser.A (1982) 9-12.