

## AKNS形式の線形散乱問題の区分的近似解法とその応用

藤嶋, 浩史  
キャノン光学技研

矢嶋, 徹  
宇都宮大学工学研究科

<https://doi.org/10.15017/27162>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 24A0-S3 (2), pp.8-13, 2013-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン：  
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3

「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」 (研究代表者 太田 泰広)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

*Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by

*Kyushu University Global COE Program*

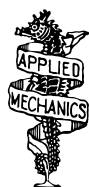
*Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry*

Article No. 2 (pp. 8 - 13)

# AKNS形式の線形散乱問題の区分的近似解法とその応用

藤嶋 浩史 (FUJISHIMA Hironobu), 矢嶋 徹 (YAJIMA Tetsu)

(Received 15 January 2013; accepted 23 January 2013)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2013

# AKNS 形式の線形散乱問題の区分的近似解法とその応用

キヤノン光学技研 藤嶋浩史 (FUJISHIMA Hironobu)\*

宇都宮大学工学研究科 矢嶋徹 (YAJIMA Tetsu)†

## Abstract

逆散乱変換によって解くことができる非線形方程式群のうち、AKNS 形式に書けるクラスを考察する。通常この散乱問題を解析的に解くことは困難であるが、最近我々は、初期波形を多数の区間に分割し、それぞれの区間をつなぐ転送行列を考えることにより、この問題の数値的近似解法を見出した。これにより、任意の初期波形から時間発展をスタートさせた波束の漸近的情報を抽出することができる。本稿では、非線形シュレディンガー方程式に本解析法を適用し、二連箱型初期波形の場合、漸近的に生成されるソリトンの数が振幅の単調増加関数とならないことを示す。

## 1 序論

非線形発展方程式の初期値問題を解くことは一般に非常に困難とされる。このことは可積分性が証明されているソリトン方程式に話を限定したとしても真である。なるほど初期条件がソリトン解に完全に一致しているならば、その時間発展は広田の直接法 [1] などを用いて得られる厳密解のそれと完全に一致する。あるいは逆散乱法の定式化 [2] に忠実に、無反射条件下で単純化された Gelfand–Levitan–Marchenko 方程式を解いてもよい。しかしながら、初期パルスがソリトン解の形状からずれた一般の場合を考察すると、解析は一気に困難になる。そのような場合に直接法の適用も、連続スペクトルが存在する場合に Gelfand–Levitan–Marchenko 方程式を解くことも共に困難であることはよく知られている。

しかし、様々な物理系で実験的にソリトン現象が観測されている [3] 以上、一般の初期条件を考察する必要がある。なぜなら実験において完全に理想的なソリトン形状をもつ初期条件を作り出すことが不可能に近いからである。解の任意の時刻  $t$  での挙動とは言わずとも、せめて  $t \rightarrow \infty$  における漸近的振る舞いに関する情報を引き出せれば実験と理論の照合はより確かなものになる。

もっとも、一般の初期条件の場合においてもある程度の物理的考察から  $t \rightarrow \infty$  における解の漸近的振る舞いを予想することはできる。初期条件として無限遠で十分速く減衰単一のパルスを考える。ソリトンは自らの振幅に非線形に依存する自己収束作用と分散項による拡散作用の釣り合いによって生じる。したがって初期パルスの振幅が十分でなければ

---

\*E-mail address: fujishima.hironobu@canon.co.jp

†E-mail address: yajimat@is.utsunomiya-u.ac.jp

単なる拡散波束になると考えられる。また、振幅が十分であれば、束縛ソリトンを含む複数個のソリトンと、ソリトンになるに足りなかった余りのノルムが所謂「輻射」が低振幅の拡散波として左右に放出される。しかし、初期条件が単一パルスではなく、有限の間隙で隔てられた複数のパルスの場合はどうだろうか。それぞれ一つずつでは振幅が足りなくて拡散してしまうようなパルスであっても、拡散の過程で干渉しあうことにより合体してソリトンに“昇格”するような現象は起こらないであろうか。また、そのような現象が解析できたとしたら滑らかな単一パルスを間隙が0の細いパルス列として表現して一般の波形の近似とみなすようなことはできないだろうか。

上記のような疑問に応える方法論を提示するのが本稿の目的である。以下では話を具体的にするために考察するソリトン方程式を一次元 Schrödinger 方程式 (NLSE)

$$i\psi_t = -\psi_{xx} - 2|\psi|^2\psi \quad (1)$$

に限定しよう。対応する物理系としては非線形ファイバー中の光パルス [4] や、一次元トラップ中に閉じ込められた引力相互作用する希薄中性アルカリ原子気体の Bose-Einstein 凝縮 (BEC) [5] などを念頭に置けばよい。

## 2 数学的設定

一般的な逆散乱法の定式化に従って NLSE(1) は次の2つの連立線形方程式の組に分解される。

$$\begin{pmatrix} \Psi_{1x} \\ \Psi_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\xi & i\psi^* \\ i\psi & i\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_{1t} \\ \Psi_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\xi^2 - i|\psi|^2 & \psi_x^* - 2i\xi\psi^* \\ -\psi_x - 2i\xi\psi & -2i\xi^2 + i|\psi|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

固有関数  $\Psi$  は補助的な場であって、(2) で決定されるスペクトルパラメタ  $\xi$  は時間に依存しない。従って、時刻  $t = 0$  における (1) の解  $\psi(x, 0)$  を用いて決定すればよい。そこからの系の時間発展を支配するのが (3) である。連立微分方程式 (2) は Zakharov-Shabat の固有値問題 [6] と呼ばれ、 $\psi(x, 0)$  をポテンシャルとする線形散乱問題となっている。なお、線形散乱問題 (2) におけるようなスペクトルパラメタ  $\xi$  の入り方で記述できるソリトン方程式を一般に“AKNS 形式で書ける”という [7]。NLSE(1) は KdV 方程式などとともにそのようなクラスに属するソリトン方程式である。以下、本稿で展開する方法は AKNS 形式で記述される全ての方程式に少なくとも原理的には適用可能である。

$|x| \rightarrow \infty$  で  $|\psi(x, 0)| \rightarrow 0$  という境界条件に対応して、補助場の Jost 関数  $\phi(x, \xi)$  を次の境界条件を満たす (2) の解として定義する。

$$\phi(x, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (4)$$

その時  $x \rightarrow \infty$  では、

$$\phi(x, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} a(\xi)e^{-i\xi x} \\ b(\xi)e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (5)$$

のようになり、係数  $a(\xi)$  と  $b(\xi)$  は散乱データと呼ばれ、以下の関係を満たす。

$$a(\xi)a(\bar{\xi}) + b(\xi)b(\bar{\xi}) = 1 \quad (6)$$

逆散乱法によれば、散乱データを求め、特に  $a(\xi)$  の (離散的な) 零点の数を勘定すればそれが漸近的に残存するソリトンの数を与える。薩摩と矢嶋 [8] は 1974 年にこの問題を研究し、初期条件が  $\psi(x, 0) = A \operatorname{sech}(x)$  のタイプで与えられるときには、その離散固有値 (残存ソリトン数) が  $\llbracket A \rrbracket$  個であることを示した。ここで  $\llbracket N \rrbracket$  は  $[N]$  内の数値を超えない最大の整数を表す Gauss の記号である。しかし、一般の初期条件の場合に (2) を解析することは難しい。

### 3 本手法のアイデア

一般の初期条件の場合に (2) を解析することは難しいのは  $\psi(x, 0)$  の  $x$  依存性に起因する。そこで  $\psi(x, 0)$  をその区間内では  $\psi_i(x) = V_i$  が一定とみなせるような多数の小区間 ( $x_i \leq x < x_{i+1}$ ) に分割しよう。ただし本節においては説明の簡単のため  $V_i$  は実数であると仮定する。つまりステップ関数  $\theta(x)$  を用いて

$$\psi_i(x) = V_i \{ \theta(x - x_i) - \theta(x - x_{i+1}) \} \quad (7)$$

と定義して、 $\psi(x, 0)$  を

$$\psi(x, 0) \simeq \sum_i \psi_i(x) \quad (8)$$

と近似することになる。 $|\psi(x, 0)|$  が無限遠で十分速く減衰する条件を満たすことを反映して、近似された  $|\psi(x, 0)|$  はコンパクトサポートになっているものとする。

このような小区間への分割を行うと、以下に示すように各小区間内では (2) が解ける。それぞれの区間では (2) は

$$\Psi_{i,x} = \begin{pmatrix} -i\xi & iV_i^* \\ iV_i & i\xi \end{pmatrix} \Psi_i = i(-\xi\sigma_3 + V_i\sigma_1)\Psi_i \quad (9)$$

となる。仮に  $V_i$  が実数でなく一般の複素数であったとしても、 $\sigma_2$  を用いることにより、以下で説明する方法は全く同様に機能する。ここで  $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  は Pauli 行列で  $\{\sigma_1, \sigma_3\} = 0$ 、 $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$  を満たす。微分方程式 (9) は単純に  $\Psi$  の係数行列を指数関数の肩に乗せることにより、

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) &= e^{i(-\xi\sigma_3 + V_i\sigma_1)X} \Psi_i(x_i) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(KX) - i\frac{\xi}{K}\sin(KX) & i\frac{V_i}{K}\sin(KX) \\ i\frac{V_i}{K}\sin(KX) & \cos(KX) + i\frac{\xi}{K}\sin(KX) \end{pmatrix} \Psi_i(x_i) \end{aligned} \quad (10)$$

と解ける。ここで、 $X = x - x_i$ 、 $K = \sqrt{\xi^2 + V_i^2}$  である。今、 $i$  番目の小区間の幅  $x_{i+1} - x_i = L_i$  と定義すれば、Jost 関数とその境界条件の定義などから、以下の関係が成立することが分かる。

$$\Psi(L_N + L_{N-1} + \cdots + L_2 + L_1) = \begin{pmatrix} a(\xi)e^{-i\xi(L_N + L_{N-1} + \cdots + L_2 + L_1)} \\ b(\xi)e^{i\xi(L_N + L_{N-1} + \cdots + L_2 + L_1)} \end{pmatrix} = T_N T_{N-1} \cdots T_2 T_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここで転送行列  $T_i$  は

$$T_i \equiv \begin{pmatrix} \cos(KL_i) - i\frac{\xi}{K}\sin(KL_i) & i\frac{V_0}{K}\sin(KL_i) \\ i\frac{V_0}{K}\sin(KL_i) & \cos(KL_i) + i\frac{\xi}{K}\sin(KL_i) \end{pmatrix} \quad (12)$$

である。ここまで来て明らかになったように、小区間への分割近似を行った後の初期波形に対しては散乱データ  $a(\xi)$  と  $b(\xi)$  が既知の量を用いて explicit に書けてしまうのである。従って、ほしかった  $a(\xi)$  の零点に関する情報なども全て小区間への分割の細かさをパラメータとする任意の精度で求まることになる。

#### 4 静的な箱型二連パルスからなる初期条件への応用

最後に、簡単で非自明な例に本稿で説明してきた手法を適用しよう。NLSE(1) おいて、以下に説明するような初期波形  $\psi(x, 0)$  からの時間発展を考える。初期波形が静的というのは初速度が共に 0 ということ、位相因子のない実数の振幅を持つということの意味する。形状は箱型であるので、共に矩形関数であり、2つのパルスに共通の振幅を  $V_0$  としよう。2つのパルスに共通のパルス幅  $L$  は簡単のため 1 に固定する。もうひとつのパラメータとして、2つのパルス間の間隔が考えられる。これを  $w$  で表すことにする。定式化すると初期条件は

$$\psi(x, 0) = V_0 \{ \theta(x) - \theta(x - L) + \theta(x - L - w) - \theta(x - 2L - w) \} \quad (13)$$

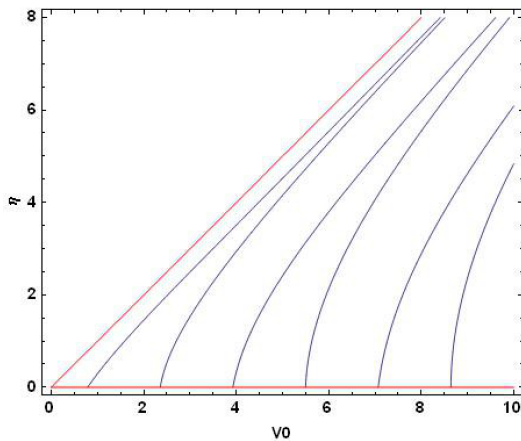
である。この初期条件に対して前節で述べた方法で散乱データ  $a(\xi)$  を計算すると以下のようになる。

$$a(\xi) = e^{i\xi(2L+w)} [e^{i\xi w} \{ \cos(KL) - i\frac{\xi}{K}\sin(KL) \}^2 - \frac{V_0^2}{K^2} e^{-i\xi w} \sin^2(KL)] \quad (14)$$

ここで以前同様  $K = \sqrt{\xi^2 + V_0^2}$  である。さて我々は、静的な初期波形を仮定したので、固有値  $\xi$  は実部を持たない純虚数であることが期待される。さらにこの離散固有値は複素上半面にあるはずである。そこで、

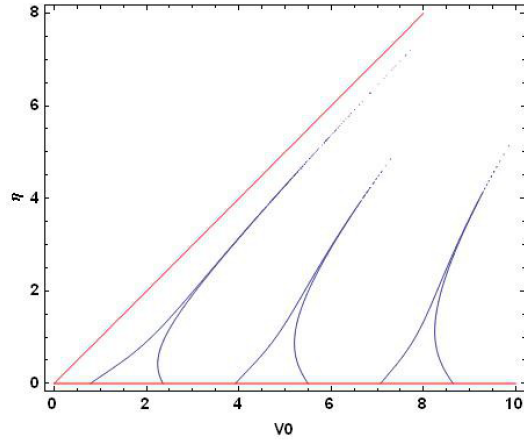
$$\xi = i\eta \quad (\eta > 0) \quad (15)$$

と仮定し (14) に代入すると実数の式となる。ここで初期波形 (13) が漸近的にいくつのソリトンを生成するかを調べるため、方程式 (14) = 0 の根の個数を数的に調べた。以下の Fig. 1 に  $w = 0.1$  の時、(14) = 0 となる  $\eta$  の軌跡を  $V_0 - \eta$  平面上に示す。これをみると、 $V_0$  が 0.8 程度より小さい場合には根が存在しないことが分かる。つまり、振幅が小さすぎて初期波形は全て輻射として拡散してしまう。次におおむね  $0.8 < V_0 < 2.3$  程度の領域では、一つの解が存在し、1ソリトン状態に相当している。初期条件の左右対称性からこれは二つのパルスの中央にそれぞれの寄与が合体する形でソリトンが一つ残ることを意味している。さらに、それ以上  $V_0$  が大きくなると、ソリトンの数は振幅  $V_0$  と共に単調に増加していく。一方、Fig. 2 に  $w = 1.5$  の時、(14) = 0 となる  $\eta$  の軌跡を Fig. 1 同様  $V_0 - \eta$  平面上に示す。Fig. 1 の場合より、2つのパルス間の間隔を広くした場合に相当するが、この場合グラフには Fig. 1 のグラフと定性的に異なった特徴が認められる。おおむ



**w=0.1**

Figure 1:  $a=0$  となる  $\eta$  の軌跡



**w=1.5**

Figure 2:  $a=0$  となる  $\eta$  の軌跡

ね  $V_0 < 0.75$  までは解がなく、 $V_0 = 2.2$  付近から次の解が現れる。しかし、解の軌跡に接線の傾きの正負が入れ替わる点が存在しており、ただ一点  $V_0 = 2.2$  付近で二重根とみられる解を持った後、直ちに解の数は3つに増える。そして、 $2.3 < V_0$  の方へ振幅  $V_0$  を増していくと解の数は一転して2個に減少してしまう。このようにパルス間隔  $w$  によっては漸近的ソリトンの個数が振幅  $V_0$  の単調増加関数にならないことが見出された。なおこれらの結果は NLSE(1) を直接数値的に解くことにより確かめたが、別の機会に譲る [9]。

## 5 まとめ

本稿では、AKNS 形式に書けるソリトン方程式の任意の初期条件に対する漸近波形に関する情報を引き出す近似的手法を説明した。NLSE を題材に二連箱型パルスからなる初期波形へその手法を応用し初期条件によっては漸近的ソリトンの個数が振幅の単調増加関数にならないことを見出した。なお、一般には AKNS 形式とは異なるスペクトルパラメタ依存性を持つソリトン方程式も多く存在するが、これらの系への我々の方式の拡張も可能と考えられ、将来の課題である。

## 謝辞

著者(藤嶋)は、素晴らしい作業場所を提供していただいたことに関して宇都宮大学に謝意を表します。

## 参考文献

- [1] R. Hirota: *Phy. Rev. Lett.* **27** (1971) 1192.
- [2] C.S. Gardiner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura: *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095.
- [3] 和達三樹「非線形波動」岩波書店 (2000).

- [4] A. Hasegawa: *Optical Solitons in Fibers* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
- [5] L.P. Pitaevskii and S. Stringari: *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [6] V.E. Zakharov and A.B. Shabat: Sov.Phys. JETP **34** (1972) 62.
- [7] M.J Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur: Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 125.
- [8] J. Satsuma and N. Yajima: Prog. Theor. Phys. Suppl. **55** (1974) 284.
- [9] H. Fujishima and T. Yajima: *in preparation*.