

流れ方向に壁が振動するチャネル流のFloquet解析

跡部, 隆
独立行政法人宇宙航空研究開発機構

<https://doi.org/10.15017/27094>

出版情報 : 九州大学応用力学研究所所報. 139, pp.111-114, 2010-09. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

流れ方向に壁が振動するチャネル流の Floquet 解析

跡部 隆*¹

(2010年7月30日受理)

Floquet Analysis for the Channel Flow with Longitudinal Wall-Oscillation

Takashi ATOBE

E-mail of corresponding author: atobe.takashi@jaxa.jp

Abstract

Stability of the channel flow with longitudinal wall-oscillation is investigated by the Floquet theory. The stability equation, time-dependent Orr-Sommerfeld equation, is rewritten as a simple ordinary differential equation by the use of the collocation method. Then, using this ordinary equation, the Floquet exponents are defined. The velocity profiles for the Floquet analysis are given as superimposition of the plane Poiseuille flow with the Stokes layer. Reynolds number is fixed at 10,000 which corresponds to supercritical condition. Depending on the parameters, the parametric study shows that there is a stability spot on the parameter space in spite of the supercritical condition. DNS results agree well with the present Floquet analysis.

Key words : Stability, Channel flow, Longitudinal wall-oscillation, Floquet analysis

1. 緒言

2枚の平行平板間の2次元流れは、平面 Poiseuille 流と呼ばれ、2次元平行流近似のもとで線形化される非圧縮 Navier-Stokes 方程式の厳密解であることはよく知られている。解析的な取り扱いの容易さに加え、物理的にも比較的単純な流れ場であるため、これまでに数多くの研究がなされている。またこの流れは有限のレイノルズ数で不安定となり乱流に遷移するため、一様等方乱流や壁乱流などともに乱流研究の対象としても研究者の興味を引いている。さらに計算機とともに発達した CFD 分野においては、いわゆるベンチマーク的な役割も果たしてきた^{1,2)}。上述の臨界レイノルズ数 (≈ 5772) もこの取組みの中で極めて高い精度まで求められた。なおこれらの実験的・数値的研究においてはこの流れ場をチャネル流、平行平板間流れなどと呼び、厳密性の観点から平面 Poiseuille 流と区別する場合も多い。

この流れ場については、流体制御あるいは抵抗低減を目的とした研究も多い。これらは大きく受動制御と能動制御に分けられ、前者は壁面を波状にしたり溝を掘ったりする例がある。後者については壁を振動させるものが典型的であり、波状壁と組み合わせた研究もある

³⁻⁸⁾。この壁の振動による抵抗低減効果は Jung et al.⁹⁾によって初めて報告された。彼らは2枚の平板を流れと直角なスパン方向に振動させ、壁面近傍のせん断応力などから摩擦抵抗を評価した。その後、Quadrio and Ricco¹⁰⁾は抵抗低減効果が実に40%を超えることを示した。また壁面近傍に注目するとそこでの流れ場が Stokes 層に類似的だとして、抵抗低減を Stokes 層の安定性と関連させた研究もある¹¹⁾。実際 Stokes 層も平面 Poiseuille 流と同様に同じ支配方程式の厳密解であることから、その線形結合によって得られる系を議論するという観点からすると妥当である。しかしこの場合、流れ場は原理的に3次元となるため問題を複雑化してしまうという欠点もある。

そこで本研究では壁を流れ方向に振動させるケースを取り扱う。これにより2次元性を確保して解析的な妥当性をより明確にするとともに、系の単純化によって流体現象の基本特性の抽出を目指す。系の安定性を議論するにあたり、ここで対象とするような周期流の場合、一般には Floquet 理論が有力な手法となる。ただし問題は流れ場を支配する方程式が Floquet 解析に適した単純な常微分方程式に書き下すことができるかどうかである。つまり本研究のメインテーマは、安定性を支配する常微分方程式の導出である。

*1 (独)宇宙航空研究開発機構

これを実現するため、筆者はコロケーション法の適用を提案する。これにより支配方程式は周期的な係数行列をもつ方程式となり、簡単な数値積分と合わせることで周期変動場の安定性が解析可能となることを示す。そしてその結果を直接数値シミュレーションの結果と比較し、妥当性を検証する。

第2章で流れ場を設定し、続く第3章では安定性を記述する時間依存型の Orr-Sommerfeld 方程式を導出する。第4章ではこの方程式から Floquet 解析が可能な常微分方程式をコロケーション法を用いて導出するとともに、安定性を記述する Floquet 指数を定義する。数値計算の結果を第5章で議論し、第6章で総括する。

2. 主流の設定

壁面が流れ方向に振動する平行平板間流れを、

- ・通常の平面 Poiseuille 流
- ・振動平板上の境界層流れ (Stokes 流)

の重ね合わせとして考える。このことは、両者の流れ場が Navier-Stokes 方程式に平行流近似を課して得られる支配方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

の解であること、およびこの式の線形性からその重ね合わせもやはり解であることから妥当である。ここで座標軸を主流、壁面垂直、スパン方向にそれぞれ x, y, z としているが、問題の性質から基本流 U は $U=(U(y,t), 0, 0)$ となる。また $U(y,t)$ を具体的に書き下すと以下ようになる。

$$U(y,t) = 1 - y^2 + U_w \text{Re} \left[\frac{\cosh(\kappa y)}{\cosh(\kappa)} \right] \exp(i\Omega t) \quad (2)$$

ただし $\kappa = \sqrt{\Omega/2\nu}$ で、 U_w 、 Ω はそれぞれ壁の振幅、振動数である。ここで各量は主流の最大値および壁面間距離の 1/2 により無次元化されている。以下ではこの流れ場をもとに議論を進める。

3. 時間依存型 Orr-Sommerfeld 方程式

主流に微小な攪乱が含まれる、以下のような流れを考える。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t) + \varepsilon p'(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

ここで $|\varepsilon| \ll 1$ で、 p は圧力である。(3),(4)式を

Navier-Stokes 方程式および連続の式に代入し、整理すると、次のような線形攪乱方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \text{grad}) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \text{grad}) \mathbf{U} \\ = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}' \end{aligned} \quad (5)$$

いま攪乱が以下のような平面波タイプであらわされると仮定する。

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, y, z, t) = \hat{\mathbf{u}}(y, t) e^{i(\alpha x + \gamma z)} \quad (6)$$

ここで i は虚数単位、 α, γ は実数で、それぞれ x, z 方向の波数である。この式を(5)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha U(y, t) \right) (D^2 - k^2) - i\alpha D^2 U(y, t) \right] \hat{v}(y, t) \\ = \frac{1}{R} (D^2 - k^2)^2 \hat{v}(y, t) \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる、ただし $k = \alpha^2 + \gamma^2$ 、 D は y 方向の微分オペレータ、 R はレイノルズ数を表す。この式は時間依存型の Orr-Sommerfeld 方程式であり、Floquet 解析の基礎方程式になる。

4. Floquet 指数

まず(7)式を以下のように表現しなおす。

$$(D^2 - k^2) \frac{\partial}{\partial t} \hat{v}(y, t) = g(y, t) \hat{v}(y, t) \quad (8)$$

ここで g は時間周期関数を含むオペレーターであり、その周期は壁の振動の周期 T である。さてここでこの式が以下のように書き下すことができるとする。

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{v}(y, t) = G(y, t) \hat{v}(y, t) \quad (9)$$

そうすると、Floquet の理論によりこの解は次のような形になると期待される。

$$\hat{v}(y, t) = e^{\mu_i t} \phi_i(y, t), \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

ここで $\phi_i(y, t)$ は周期 T の時間周期関数、 μ_i は Floquet 指数と呼ばれる複素数で、この実部の負、正により安定、不安定が決定される。

さて(8)式に立ち返る。この式を解くため、 y 方向についてチェビシエフ・スペクトラルコロケーション法¹²⁾を用い

る。問題の性質より、選点は以下のような Gauss-Lobatto 点を採用する。

$$y_i = \cos \frac{i\pi}{N}, \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (11)$$

これにより(8)式は以下のように表現される。

$$\left(D_{ij}^{(2)} - k^2 \right) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{v}(y_0, t) \\ \hat{v}(y_1, t) \\ \vdots \\ \hat{v}(y_N, t) \end{pmatrix} = g_{ij} \begin{pmatrix} \hat{v}(y_0, t) \\ \hat{v}(y_1, t) \\ \vdots \\ \hat{v}(y_N, t) \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで $D_{ij}^{(2)}$ は $(N+1) \times (N+1)$ の 2 階の微分行列である¹²⁾。もし左辺係数に逆行列が存在すれば、この式は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{v}(y_0, t) \\ \hat{v}(y_1, t) \\ \vdots \\ \hat{v}(y_N, t) \end{pmatrix} &= \left(D_{ij}^{(2)} - k^2 \right)^{-1} g_{ij} \begin{pmatrix} \hat{v}(y_0, t) \\ \hat{v}(y_1, t) \\ \vdots \\ \hat{v}(y_N, t) \end{pmatrix} \\ &\equiv G_{ij} \begin{pmatrix} \hat{v}(y_0, t) \\ \hat{v}(y_1, t) \\ \vdots \\ \hat{v}(y_N, t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

と書き換えられ、

$$\frac{d}{dt} \hat{v}(y_i, t) = G_{ij}(t) \hat{v}(y_j, t) \quad (14)$$

となる。G の具体的な形は以下のとおりである。

$$G_{ij} = \frac{1}{R} \left(D_{ij}^{(2)} - k^2 \right)^{-1} \left\{ D_{ij}^{(4)} - (2k^2 + iR\alpha U) D_{ij}^{(2)} + \delta_{ij} (iR\alpha D_{ij}^{(2)} U + iR\alpha k^2 U + k^4) \right\} \quad (15)$$

ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。さらに(9),(10)式の考察から、解を $N+1$ 個までとるとき、(14)式は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{v}_1(y_0, t) \cdots \hat{v}_{N+1}(y_0, t) \\ \hat{v}_1(y_1, t) \cdots \hat{v}_{N+1}(y_1, t) \\ \vdots \\ \hat{v}_1(y_N, t) \cdots \hat{v}_{N+1}(y_N, t) \end{pmatrix} \\ \equiv G_{ij} \begin{pmatrix} \hat{v}_1(y_0, t) \cdots \hat{v}_{N+1}(y_0, t) \\ \hat{v}_1(y_1, t) \cdots \hat{v}_{N+1}(y_1, t) \\ \vdots \\ \hat{v}_1(y_N, t) \cdots \hat{v}_{N+1}(y_N, t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで上式を、

$$\frac{d}{dt} F(t) = GF(t) \quad (17)$$

と表せば、Floquet の理論よりこの解が以下のように表現

されることが期待される。

$$F(t) = e^{Qt} \Phi(t) \quad (18)$$

ここで $\Phi(t)$ はやはり周期 T の時間周期関数である。また Q は $N+1$ 個の Floquet 指数からなる定数行列で、これが求まればよいことになる。

これを求めるため、まず次の関係式を用いる。

$$F(0) = \Phi(0) = I \quad (19)$$

これは Floquet 理論から一般的に成り立つことがわかっている。したがって、

$$F(T) = e^{QT} \Phi(T) = e^{QT} \quad (20)$$

であり、

$$Q = \frac{1}{T} \ln F \quad (21)$$

となる。ここで Q の固有値を μ_i 、 F の固有値を σ_i とすれば、

$$\mu_i = \frac{1}{T} \ln \sigma_i \quad (22)$$

であり、結局 F の固有値が求まれば、上式により系の固有値 μ_i が求まることになる。 F の固有値は(9)式を1周期にわたり数値的に積分することにより得られる。

5. 計算結果

対象とする流れ場を Fig.1 のように設定する。2 枚の壁が $2h$ だけ離れて置かれ、その間を流体が流れる。壁は振幅 U_w 、振動数 Ω で周期的に振動する。主流の最高速度と h で定義されるレイノルズ数を 10,000 に固定すると、この系を支配するパラメーターは U_w と Ω だけとなる。

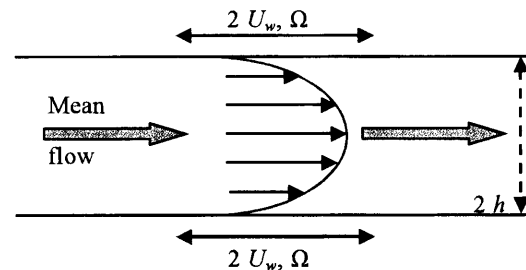


Fig.1 Schematic view of the flow field and the parameters.

次に(17)式の G 、すなわち(15)式中の右辺に現れる速度分布 U を(2)式によって準備する。その結果を Fig.2 に示す。ここでは $1/8$ 周期ごとの各タイミングでプロットしている。また y 方向の対称性から、下半分のみを表した。壁面近傍は Stokes 層の影響を大きく受けるが、 $y=0$ 付近では放物型に近く、その影響はほとんどみられない。

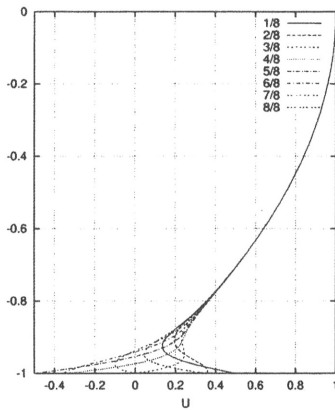


Fig.2 Velocity profiles at each 1/8 period.

これをもとにパラメトリック計算を行った. 各パラメータに対する Floquet 指数の値を Fig.3 に等高線で示した. 中立安定曲線に“0”を記した. 原点は振動のない, いわゆる平面 Poiseuille 流に対応するもので, ここでの値は Orszag¹⁾によって得られた値と4ケタまで一致することを確認した. この結果は, 超臨界であっても壁の振動によってパラメータ空間に部分的に安定領域が存在することを示す. それは海溝状の極めて安定な帯域を含む.

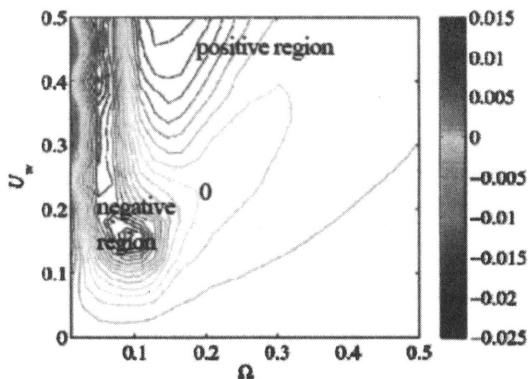


Fig.3 Contour of the Floquet exponent.

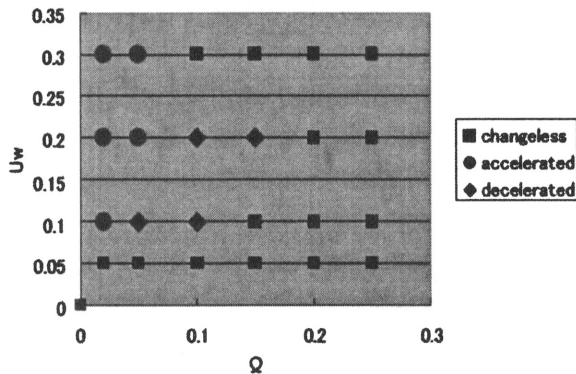


Fig.4 Results from DNS.

Fig. 4 は DNS によって得られた結果で, 振動のない場合と比べた乱流遷移の加速・減速の様子を調べたものである. 強い安定性を示す(減速)領域はよく一致する. ただ U_w の大きい領域及び Ω の小さな領域では不一致が見られる. これは非線形性の影響だと考えられる.

6. まとめ

流れ方向に壁が振動するチャンネル流の安定性を, Floquet 理論を用いて定量的に調べた. 時間依存型の Orr-Sommerfeld 方程式がコロケーション法により単純な常微分方程式に書き下せることを示し, それを用いて Floquet 指数を数値的に算出した. その結果, 超臨界であってもパラメータ空間に安定な領域が存在することがわかった. この結果は DNS による結果とよく一致した.

参考文献

- 1) Orszag, S. A.: Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation, *J. Fluid Mech.*, **50**, 689 (1971), pp.1441-1447.
- 2) Kim, J., Moin, P., and Moser, R.: Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number, *J. Fluid Mech.*, **177** (1987), pp.133-166.
- 3) Selvarajan, S., Tulapurkara, E.G., and Vasanta Ram, V.: Stability Characteristics of Wavy Walled Channel Flows, *Phys. Fluids*, **11** (1999), pp. 579-589.
- 4) Floryan, J. M.: Stability of Wall-Bounded Shear Layers in the Presence of Simulated Distributed Surface roughness, *J. Fluid Mech.*, **335** (1997), pp. 29-55.
- 5) Floryan, J. M., Szumbariski, J., and Vasanta Ram, V.: Stability of a Flow in a Channel with Vibrating Walls, *Phys. Fluids*, **14** (2002), pp. 3927-3936.
- 6) Zhou, H., Martinuzzi, R. J., Khayat, R. E., Straatman, A. G., and AbuRamadan, E.: Influence of Wall Shape on Vortex Formation in Modulated Channel Flow, *Phys. Fluids*, **15**, (2003), pp.3114-3133.
- 7) Choi, H., Moin, P., and Kim, J.: Active Turbulence Control for Drag Reduction in Wall Bounded Flows, *J. Fluid Mech.*, **262** (1994), pp.75-110.
- 8) Sumitani, Y. and Kasagi, N.: Direct Numerical Simulation of Turbulent Transport with Uniform Wall Injection and Suction, *AIAA J.*, **33**, (1995), pp.1220-1228.
- 9) Jung, W. J., Mangiavacchi, N., and Akhavan, R.: Suppression of Turbulence in Wall-Bounded Flows by High-Frequency Spanwise Oscillations, *Phys. Fluids*, **A 4** (8) (1992), pp.1605-1607.
- 10) Quadrio, M. and Ricco, P.: Critical Assessment of Turbulent Drag Reduction Through Spanwise Wall Oscillation, *J. Fluid Mech.*, **521**, (2004), pp.251-271.
- 11) Choi, K.-S.: Near-Wall Structure of Turbulent Boundary Layer with Spanwise-Wall Oscillation, *Phys. Fluids*, **14** (2002), pp.2530-2542.
- 12) Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A.: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.