

Retirement of Professor Masayuki OIKAWA

<https://doi.org/10.15017/27083>

出版情報：九州大学応用力学研究所所報. 139, pp.1-30, 2010-09. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

及川正行教授の退職の記録

及川教授の略歴

- 1947年1月 群馬県に生まれる
- 1969年3月 京都大学工学部数理工学科卒業
- 1969年4月 京都大学大学院工学研究科修士課程数理工学専攻入学
- 1971年3月 同上修了
- 1971年4月 京都大学大学院工学研究科博士課程数理工学専攻進学
- 1974年3月 同上単位取得の上退学
- 1974年4月 九州大学講師 (応用力学研究所)
- 1975年5月 九州大学大学院工学研究科授業担当 (応用力学専攻)
- 1977年5月 工学博士 (京都大学)
- 1977年9月 九州大学助教授 (応用力学研究所)
- 1985年3月 米国マサチューセッツ工科大客員研究員 (10ヶ月)
- 1987年2月 九州大学教授 (応用力学研究所)
- 1990年6月 九州大学大学院総合理工学研究科指導教官
- 2006年4月 九州大学応用力学研究所副所長 (~2008年3月)
- 2010年3月 九州大学を定年退職
- 2010年4月 九州大学名誉教授
- 2010年4月 福岡工業大学特任教授

私のソリトン研究を振り返る

及川 正行*¹
(2010年7月30日受理)

My Research on Solitons

Masayuki OIKAWA

E-mail of corresponding author: *oikawa@fit.ac.jp*

Abstract

My research works on solitons are reviewed briefly. First, I explain the basic things on solitons, that is, Korteweg-de Vries equation, nonlinear Schrödinger equation, solitary waves, envelope solitons, inverse scattering method etc. Next, I explain my works (with my collaborators) on head-on collision of solitary waves, collision of envelop solitons, nonlinear evolution equations solvable by the inverse scattering method by means of certain differential operator of 3×3 matrix type, two-dimensional interaction of solitons. In particular, I give rather detailed account for the process of finding the Lax operator for the sonic-Langmuir solitons.

Key words : *Soliton, Nonlinear Waves, Interaction, Perturbation Method, Inverse Scattering Method, Long wave-short wave resonance, Oblique Interaction, Soliton resonance.*

1. はじめに

私は2010(平成22)年3月いっばいで九州大学を定年退職しました。1974(昭和49)年4月に応用力学研究所に着任以来36年間九州大学にお世話になりました。浅学非才な私がここまで勤めることができたのはひとえに皆様のおかげと感謝しています。

2010年3月15日に最終講義をさせていただきました。そのときにはいろいろな思い出話もしましたが、ここでは、研究に関する部分のみを少し補足してまとめることにしました。

私の研究を強いて分類してみれば

- (1) ソリトンの相互作用に関する研究
- (2) 非線形発展方程式の厳密解に関する研究
- (3) 離散非線形可積分系に関する研究
- (4) 流れや波の安定性に関する研究
- (5) その他

のようになるかもしれません。

(1) には初期の摂動法によるソリトンの正面衝突や速度の異なる包絡ソリトンの相互作用を論じた論文や最近の線ソリトンの二次元相互作用に関する一連の研究が属する。(2) にはある種の固有値問題の逆散乱法で解ける非線形発

展方程式の研究, sonic-Langmuir 波の逆散乱法による厳密解の研究, また, その弱二次元化方程式の厳密解の研究などが属する。(3) はこのテーマで学位を取った丸野健一テキサス大学パンアメリカン校助教授の仕事である。(4) に属するのは非同軸回転円筒間の流れの安定性に関する論文や剪断流上の非線形波, 高調波共鳴付近の永久波タイプの非線形波などの安定性に関する論文である。(5) に属する論文としては, 非線形 Schrödinger 方程式に対する3次分散項の効果に関する論文や非線形波列の周波数低下に関する論文などがある。

私の主要な論文は(1), (2) なので主としてそれらについて述べる。

まず, §2 でソリトンに関するごく基本的なことを解説する。§3 ではソリトンの正面衝突に関する摂動法について述べる。§4 では前節で述べた摂動法の包絡ソリトンの衝突への拡張を述べる。§5 では 3×3 の行列型の微分作用素の逆散乱法で解ける非線形発展方程式について述べる。特に, sonic-Langmuir ソリトンを記述する方程式がこの方法で解けることを発見した過程をやや詳しく述べる。これは論文には書かれていない事柄で, 何でこんなものを見つけることができたのかという質問に対する答えになるかもしれない。§6 ではソリトンの二次元相互作用について述べる。イオン音波ソリトンの相互作用, 長波短波共鳴を弱二次元化した方程式の解をやや詳しく述べた。Benjamin-Ono ソ

*1 福岡工業大学工学部知能機械工学科, 九州大学名誉教授

リトンの弱い相互作用について原論文にやや不十分な点があったのでここで修正しておいた。最近の(長波)ソリトンの二次元相互作用については概説論文も書いたので、簡単にまとめるだけにした。

2. ソリトン

1965年, Zabusky と Kruskal¹⁾ は Korteweg-de Vries (KdV) 方程式

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

の孤立波解

$$u = u_\infty + A \operatorname{sech}^2 \left[\frac{x - ct - x_0}{\Delta} \right], \quad (2)$$

$$\Delta = \delta \sqrt{\frac{12}{A}}, \quad c = u_\infty + \frac{A}{3} \quad (3)$$

が粒子的な性質を持つことを発見し, それらを“ソリトン”と名付けた。ここで, δ^2 は分散性と非線形性の比を表す定数, A はソリトンの振幅, u_∞ は無限遠での u の値, Δ はソリトンの幅, c はソリトンの伝播速度で, いずれも定数である。振幅が大きいほど幅が狭く, 伝播速度は大きい。

彼らは周期境界条件の下で, 初期値

$$u(x, 0) = \cos \pi x \quad (0 \leq x \leq 2) \quad (4)$$

がいくつかのソリトンに分裂するが, ソリトンが互いの相互作用で振幅や波形を保存するため, ある時間が経過した後にはほとんど初期値に戻ることを数値計算によって見出した。この論文のタイトルには“collisionless plasma”という語句が入っているが, 彼らが実際に目指したのは Fermi, Pasta, Ulam が見出した3次の相互作用ポテンシャルをもつ非線形格子における再帰現象の説明であった。Zabusky と Kruskal は格子振動の方程式を連続体近似して一方向に伝播する有限小振幅の長波長の波に注目し KdV 方程式に帰着させた²⁾。これがソリトン研究の幕開けの論文である。

KdV 方程式は1895年に Korteweg と de Vries³⁾ によって浅水孤立波を記述する方程式として導出されたが, その後長らく忘れられた。しかし, Courant 研究所の人たちは KdV 方程式がプラズマにおける磁気流体波も記述できることを知っていた。その後, 我が国では谷内ら⁴⁾ が通減摂動法を提唱し, KdV 方程式が弱分散弱非線形な波を記述する普遍的な方程式であることが分かってきた。

さらに, 1967年に Gardner らは KdV 方程式の初期値問題を原理的に解く方法を発見した⁵⁾。その方法は驚くべきものだった。彼らは

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (5)$$

の形の KdV 方程式を用いた (KdV 方程式は0以外のどんな係数の場合でもスケール変換でこの形に帰着する)。こ

れに対して量子力学でおなじみの定常状態の Schrödinger 方程式

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0 \quad (6)$$

を考えた。なぜこのようなものを考えたのかについては, この発見に重要な役割を演じた R.Miura 氏が2005年2月に応研で詳しく講義された。その講義録が数学セミナー⁶⁾に掲載されているので, 興味ある方はご覧いただきたい。

(5)に対する遠方で十分速く0になる初期値 $u(x, 0)$ が与えられたとき, (6)の離散固有値 λ_n , 対応する固有関数の規格化定数 c_n , 連続スペクトル ($\lambda = k^2 > 0$) に対する透過係数 $a(k, 0)$, 反射係数 $b(k, 0)$ を求める。これはいわゆる散乱問題である。

$$S = \{\lambda_n, c_n (n = 1, 2, \dots, N), b(k)\} \quad (7)$$

を散乱データという。散乱データから(6)の $u(x)$ を求める問題は逆散乱問題といわれ, 散乱データから作られるある線形積分方程式を解くことに帰着される。

GGKM は $u(x, t)$ が(5)に従って時間的に変化するとき, 離散固有値 λ_n は時間的に変化しないこと, および $c_n, b(k)$ は簡単な時間発展を見出した。従って, 初期の散乱データから時刻 t における散乱データが得られ, それらから構成される線形積分方程式を解けば, KdV 方程式の初期値問題が原理的に解けるということである。特に簡単なのは反射係数 $b(k, 0) = 0$ の場合で, この場合線形積分方程式を線形代数方程式系に帰着させることができ, 閉じた形で解析解をえることができる。それは N 個のソリトンが相互作用しているいわゆる N ソリトン解であり, (6)との関連でいうと, 無反射ポテンシャルである。固有値 $\lambda_n = -\kappa_n^2$ ($\kappa_n > 0$) はソリトン $u_n = -2\kappa_n^2 \operatorname{sech}^2 \kappa_n(x - 4\kappa_n^2 t - x_{0n})$ に対応していて衝突におけるソリトンの安定性は固有値の時間不変性と結びついているのである。

KdV 方程式とともに普遍的なもう一つの重要なソリトン方程式は非線形シュレディンガー (NLS) 方程式

$$iu_t + u_{xx} + 2\epsilon|u|^2 u = 0, \quad \epsilon = \pm 1 \quad (8)$$

である。 ϵ の正負でこの方程式は本質的に異なる。これは自らがつくるポテンシャル $-2\epsilon|u|^2$ をもつ Schrödinger 方程式であり, $\epsilon = 1$ なら, 引力ポテンシャル, $\epsilon = -1$ なら, 斥力ポテンシャルである。

$\epsilon = 1$ の場合, (8) は次のような解を持つ:

$$u(x, t) = a \operatorname{sech} a(x - Vt - x_0) \times \exp \left[i \left(\frac{V}{2}x - \left(\frac{V^2}{4} - a^2 \right)t + \theta_0 \right) \right] \quad (9)$$

これは包絡ソリトンと呼ばれる。NLS 方程式は波の非線形変調を記述する⁷⁾が, その場合, $u(x, t)$ はある中心波数 k , 角振動数 $\omega(k)$ の搬送波の複素振幅であり, x は波数 k

における群速度で動く座標である。 a が複素振幅の絶対値の形を決め、 V が速度を決める。 $\epsilon = 1$ のときの NLS 方程式は深水波の非線形変調⁸⁾、光ファイバー中の電磁波⁹⁾などの他、局所誘導近似が有効な場合の細い渦糸におけるソリトン (橋本ソリトン)¹⁰⁾ も記述する。

KdV 方程式や NLS 方程式の他にもソリトン系が沢山見つかった。例えば、戸田格子^{11, 12, 13)}、変形 KdV (MKdV) 方程式^{2, 14)}、Sine-Gordon 方程式¹⁵⁾ などである。

一方、逆散乱法が KdV 方程式以外にも適用できることが Lax によって示された¹⁶⁾。非線形発展方程式

$$u_t = K(u) \quad (10)$$

が u に依存する二つの線形作用素 L, M を用いて

$$L_t + [L, M] = 0, [L, M] := LM - ML \quad (11)$$

と書けるとき

$$L\psi = \lambda\psi, \psi_t = M\psi \quad (12)$$

とすると、 L の固有値 λ は時間不変である。従って、(10) を解くのに、 L に対する逆散乱法が使える。(11) は (10) の Lax 形式と呼ばれる。KdV に対しては $L = -\partial_x^2 + u$ 、 $M = -4\partial_x^3 + 3u\partial_x + 3\partial_x u$ である。しかし、逆散乱法の他の方程式への適用には時間がかかった。Zakharov & Shabat¹⁷⁾ が NLS 方程式 ($\epsilon = 1$ のときの) にも逆散乱法が適用できることを示したのは 1971 年 (1972 年は英訳が出た年。名古屋大学プラズマ研究所の研究会で英訳が出る前にこの論文の詳しい内容の解説を当時神戸大教授の麦林先生がされた) であった。この場合離散固有値は一般に複素数でその実部が包絡ソリトンの速度に、虚部が包絡ソリトンの振幅 (及び幅) に対応する。従って、実部が等しいいくつかの固有値がつくる状態はソリトンの束縛状態と呼ばれ、実部に対応する速度で進行しながら時間的には周期的に変動する。こういう解が見つかるのは厳密解ならではのである。

私が研究を始めたのはこのような時期であった。1970 年代はソリトンに関する新しい手法や概念が次々と現れる全くスリリングな時代であった。

3. ソリトンの正面衝突

私は修士論文で Boussinesq 方程式^{18, 19)}

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{3}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \quad (13)$$

の数値計算を行った。これも KdV 同様孤立波解

$$\eta = a \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{3a}{4}} (x - ct - x_0) \right), c = \sqrt{1 + a} \quad (14)$$

をもつ。浅水波や非線形格子で現れる。(13) は浅水波に対する方程式を長さを静水時の深さ h_0 で、時間を $h_0/\sqrt{gh_0}$

で無次元化したもので、 η は h_0 で無次元化した表面変位 ($1 + \eta$ が無次元水深) である。正負の向きに伝播できるので、反射問題なども扱える。実はこれもソリトン方程式であることが後でわかる²⁰⁾ が、そのころ (1970 年ころ) はまだ、知られていなかった。時間についても空間についても単純な中心差分を使ったのだが、うまくいかなかった。そのときに指導教授の上田顕先生が、当時基礎物理学研究所におられた矢嶋信男先生を紹介してくださった。実はこのころには次年度から矢嶋先生がわれわれの研究室に助教として来られるということが決まっていたかもしれない。私が状況をお話すると矢嶋先生はすぐにそれは線形の不安定だと言われて、スキームの安定性を黒板で計算された。大変印象的であった。私の周囲には数値計算の専門家もおられたが、私の説明を聞かれて的確なアドバイスしてくれたのは矢嶋先生だけだった。特別なスキームから離れても、(13) の線形分散関係は

$$\omega^2 = k^2(1 - k^2/3) \quad (15)$$

だから、 $k > \sqrt{3}$ では不安定波が現れる。従って小さいスケールの波が出ないように空間メッシュをある程度粗くする必要がある。数学的には許されないだろうが、(13) は長波長近似した結果なので物理的には許されるだろう。その結果、計算はうまくいき、Sinusoidal な波形が右に動くような初期値を与えると孤立波列に分裂し、孤立波を正面衝突させると、ほとんどすり抜けたのである。

ところで、波数が大きいと数値計算上は不安定が起こるかもしれないが、(13) は可積分 (ソリトン系) であるから、非線形項のために振幅の増加がおさえられるのではないかと考えられる。これについてはずっと後に矢嶋先生が解決した²¹⁾

さて、私の最初の論文²²⁾ はこの修士論文を基にしたものだ。(13) の孤立波の正面衝突ではほとんどすり抜けるので、摂動法で解が記述できるのではないかと考えられる。孤立波単独では xt 平面のある直線に沿って伝播する。逆向きの孤立波と衝突するとその間孤立波の軌道が直線からずれ、その後再び直線に沿って伝播すると予想される。そこで、 ϵ を振幅を代表する微小パラメータとして、位相変数 ψ_1, ψ_2 を含む独立変数

$$\xi_1 = \epsilon^{1/2}(x - t + \epsilon^{1/2}\psi_1(\xi_1, \xi_2, \tau) + \dots)$$

$$\xi_2 = \epsilon^{1/2}(x + t + \epsilon^{1/2}\psi_2(\xi_1, \xi_2, \tau) + \dots)$$

$$\tau = \epsilon^{3/2}$$

を導入し、 η を ϵ のべきで

$$\eta = \epsilon\eta^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \epsilon^2\eta^{(2)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \dots$$

と展開する。すると $O(\epsilon^2)$ で

$$-4 \frac{\partial^2 \eta^{(1)}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0 \implies \eta^{(1)} = f_1(\xi_1, \tau) + f_2(\xi_2, \tau)$$

が得られる. f_1, f_2 はこの段階では未定である. $O(\varepsilon^3)$ では

$$\begin{aligned} -4 \frac{\partial^2 \eta^{(2)}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} &= 4 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} + \frac{3}{4} f_2 \right) \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \right] \\ &+ 4 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} + \frac{3}{4} f_1 \right) \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \right] + 6 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} (f_1 f_2) \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2} f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial \xi_1^3} \right) \\ &- 2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \tau} - \frac{3}{2} f_2 \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_2}{\partial \xi_2^3} \right) \end{aligned}$$

が得られる. そこでまず位相変数を

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} = -\frac{3}{4} f_2, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} = -\frac{3}{4} f_1 \quad (16)$$

と選ぶ. すると, $\eta^{(2)}$ が有界であるためには

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2} f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial \xi_1^3} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \tau} - \frac{3}{2} f_2 \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_2}{\partial \xi_2^3} = 0 \quad (18)$$

が必要であり

$$\eta^{(2)} = -\frac{3}{2} f_1(\xi_1, \tau) f_2(\xi_2, \tau) + g_1(\xi_1, \tau) + g_2(\xi_2, \tau) \quad (19)$$

が得られる. ここでは g_1, g_2 は未定である. (17), (18) はそれぞれ右および左に進む波がそれぞれの KdV 方程式に支配されることを示す.

ここまでで次のことがわかる. 近似の最低次では解は左右に伝播する KdV に従う波の重ね合わせで相互作用の効果は (16) で決まる位置の位相のずれと (19) の右辺第 1 項で与えられる局所的な波形の変化である. 逆向きに伝播する二つの孤立波の相互作用に限定すれば, さらに高次に進んで解析することができる. 最低次に限っても孤立波解は

$$\begin{aligned} f_1 &= A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3A}}{2} (\xi_1 - \frac{A}{2} \tau) \right) \\ f_2 &= B \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3B}}{2} (\xi_2 + \frac{B}{2} \tau) \right) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varepsilon^{1/2} \left\{ x - t - \frac{\sqrt{3\varepsilon B}}{2} \tanh \left(\frac{\sqrt{3B}}{2} (\xi_2 + B\tau/2) \right) + x_1 \right\} \\ \xi_2 &= \varepsilon^{1/2} \left\{ x + t - \frac{\sqrt{3\varepsilon A}}{2} \tanh \left(\frac{\sqrt{3A}}{2} (\xi_1 - A\tau/2) \right) + x_2 \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, x_1, x_2 は定数である. このことから相互作用によって, 右に進む孤立波は $\sqrt{3\varepsilon B}$ だけ右に, 左に進む孤立波は $\sqrt{3\varepsilon A}$ だけ左にずれることがわかる (Fig.1).

われわれはこの方法を分散性あるいは散逸性を無視したときに n 個の可能な特性曲線に対応して n 個の単純波が存在する場合に一般化した. 弱い分散性あるいは散逸性の影響をうける単純波を“準単純波”とよぼう. それらは有限小振幅で単一の場合はそれぞれ KdV 方程式あるいは

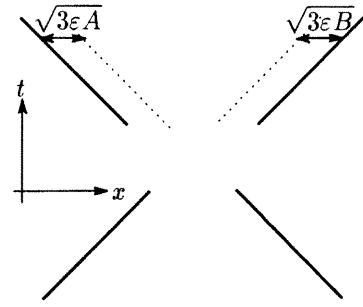


Fig. 1 Position phase shifts in the head-on collision of two solitary waves in the Boussinesq eq.(13)

Burgers 方程式で近似される. いくつかの準単純波が共存する場合にも最低次の近似ではそれぞれが KdV 方程式あるいは Burgers 方程式で支配される準単純波の重ね合わせで書けることを示した. 相互作用の効果は分散性の影響を受けるときには位置の位相のずれで漸近的には記述できるが, 散逸性の影響を受けるときには相互作用によって伝播速度が漸的に有限な変化を受けるなどより複雑であることが示された²³⁾.

この研究には 1 つの副産物がある. 浅水波に対する Boussinesq 方程式系と呼ばれる系²⁴⁾

$$\begin{cases} \eta_t + [(1 + \eta)u]_x = 0 \\ u_t + uu_x + \eta_x + \frac{1}{3} \eta_{txx} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

(ここで, η は無次元波高, u は水平流速の鉛直平均の無次元量) にこの摂動法を適用してみると,

$$\begin{aligned} \eta &= \varepsilon (f_1(\xi_1, \tau) + f_2(\xi_2, \tau)) + \dots, \\ u &= \varepsilon (f_1(\xi_1, \tau) - f_2(\xi_2, \tau)) + \dots \end{aligned}$$

となつて, ψ_1, ψ_2 は (16) ではなく

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4} f_2, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4} f_1 \quad (21)$$

となるが, f_1, f_2 が (17), (18) で支配されることは同じで, 従つて, 孤立波解もかわらない. 孤立波の正面衝突の場合には

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varepsilon^{1/2} \left\{ x - t + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon B}{3}} \tanh \left(\frac{\sqrt{3B}}{2} (\xi_2 + B\tau/2) \right) + x_1 \right\} \\ \xi_2 &= \varepsilon^{1/2} \left\{ x + t + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon A}{3}} \tanh \left(\frac{\sqrt{3A}}{2} (\xi_1 - A\tau/2) \right) + x_2 \right\} \end{aligned}$$

となつて, 右に進む孤立波は $\sqrt{\varepsilon B/3}$ 左へ, 左に進む孤立波は $\sqrt{\varepsilon A/3}$ 右へずれる. これは Boussinesq 方程式の場合とは逆向きである. (20) は浅水波に対する正しい近似方程式であるから, (13) は浅水波の逆向きの波の相互作用を正しく記述しないということである.

Maxworthy²⁵⁾ は浅水孤立波の正面衝突および剛体壁での反射の実験を行った. 彼は位置の位相のずれはわれわれ

の理論のように相手の孤立波の振幅の平方根に比例するのではなく、相手の孤立波の振幅に無関係な一定値をとることを観測したと主張した。ただし、位置の位相のずれの符号は Boussinesq 方程式系に対するわれわれの結果と一致する。Maxworthy は位相のずれが振幅に依らないことの定性的説明を行ったがそれは全然納得できるものではなかった。彼の実験は振幅が 0.1~0.4 と比較的大きい場合に関してのものだったので、私は浅水波で Boussinesq 系などを使わずに Euler 方程式系を使って位相のずれの高次近似を計算しようとした。これは計算も複雑で大変であったが、最低次と同様に次の近似を得ることはできなかった。しかし、Su & Mirie²⁶⁾ は次のオーダーまで計算した。それは漸近的に波形のゆがみを生ずるようなものであった。しかし、近似の範囲では衝突後、secondary wave を放出して衝突前と同じ孤立波に回復するというのである。彼らの位相のずれはわれわれの結果を少し大きめに修正するものであった。私はこの Su & Mirie の摂動法がよくわからなかった（いまでもよくわからないが）ので、数値計算で確かめることにした。Euler 方程式で数値計算を実行してくれたのは当時研究室の助手であった船越満明現京大教授である。孤立波の剛体壁での反射問題を改良型 MAC 法で調べたのである²⁷⁾。入射孤立波の振幅が 0.2 のときには、反射波は secondary wave を放出して反射波の主要部分は入射孤立波からずれている。このずれは反射波の振幅を減少させるものであるが、時間が経過するとともに secondary wave は反射波の主要部分からしだいに後方へずれてゆき、反射波の振幅の減少値もゆっくりと小さくなっていく。これが計算誤差でないことは時間反転計算によって確かめた。反射波の波形のゆがみ（入射孤立波からのずれ）は入射波の振幅 ϵ のせいぜい 3 乗程度なので、振幅が小さければ無視できる。数値計算による位相のずれは Su & Mirie の結果より若干大きい、Maxworthy の結果よりずっと小さい。さらに計算時間を延ばせば、secondary wave を放出することで、反射波は加速されるから位相のずれはもう少し小さくなると予想される。Renouard らは注意深い計測を行い理論的結果とずっと良く一致する位相のずれに関する結果を得た²⁸⁾。彼らによれば、Maxworthy の実験では位相のずれを計測する場所が壁に近すぎたのだらうということだが、反射波の挙動から推測するとそれが正しいかもしれない。

4. 速度の近くない包絡ソリトンの相互作用

次は包絡ソリトンの相互作用に関する論文である²⁹⁾。二つの波束のそれぞれの中心波数が、群速度がかなり異なるようなものだとするとこの二つの波束の相互作用は前節同様摂動法で扱えるのではないかと考えられる。われわれが扱ったのは中心波数が一つのときに、 $\epsilon = +1$ のタイプの非線形 Schrödinger 方程式が得られるような場合であ

る。はじめなかなかうまくいかなかったのだが、搬送波の phase shift も含めるべきだと気が付きやってみたらうまくいった。どんな展開をするのかということだけをざっと述べておこう。最初は Klein-Gordon 方程式

$$y_{tt} - y_{xx} + m^2 y - \beta y^3 = 0 \quad (22)$$

をモデルにしてやってみた。線形分散関係は $\omega^2 = k^2 + m^2$ である。波数 k を中心とするスペクトル幅が ϵ 程度で、振幅も ϵ の変調波は $y = \epsilon \varphi(\xi, \tau) \exp i(kx - \omega t) + \text{c.c.} + \dots$ (c.c. は複素共役), $\xi = \epsilon(x - \lambda t)$, $\tau = \epsilon^2 t$, ($\lambda = d\omega/dk = k/\omega$) と書いたとき、 φ は非線形 Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{m^2}{2\omega^3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{3\beta}{2\omega} |\varphi|^2 \varphi = 0 \quad (23)$$

に従うことに注意しよう。ここで、 y の展開の \dots の部分は高調波や長波長成分を含む高次項である。 $\beta > 0$ とする。波数 k_1, k_2 に対応する二つの変調波の相互作用に対して、次のように展開する：

$$y = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\ell, n=-\infty}^{\infty} \epsilon^\alpha y_{\ell, n}^{(\alpha)}(\xi_1, \xi_2, \tau) Z_{\ell, n},$$

$$Z_{\ell, n} = \exp[i\ell\{k_1 x - \omega_1 t + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \epsilon^\gamma \Omega_1^{(\gamma)}(\xi_1, \xi_2, \tau)\}]$$

$$+ i n\{k_2 x - \omega_2 t + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \epsilon^\gamma \Omega_2^{(\gamma)}(\xi_1, \xi_2, \tau)\},$$

ここで、

$$\xi_1 = \epsilon\{x - \lambda_1 t - \sum_{\gamma=0}^{\infty} \epsilon^\gamma \psi_1^{(\gamma)}(\xi_1, \xi_2, \tau) - \gamma_1\},$$

$$\xi_2 = \epsilon\{x - \lambda_2 t - \sum_{\gamma=0}^{\infty} \epsilon^\gamma \psi_2^{(\gamma)}(\xi_1, \xi_2, \tau) - \gamma_2\},$$

$$\tau = \epsilon^2 t,$$

$$\omega_i^2 = k_i^2 + m^2, \lambda_i = \frac{k_i}{\omega_i}, (i = 1, 2),$$

$\Omega_i^{(\gamma)}, \psi_i^{(\gamma)}$ は実数で、 $y_{-\ell, -n}^{(\alpha)} = y_{\ell, n}^{(\alpha)*}$ である。

まず、 $O(\epsilon)$ の式から $y_{1,0}^{(1)} = f_1(\xi_1, \tau)$, $y_{0,1}^{(1)} = f_2(\xi_2, \tau)$ が得られ、 f_1 に対する方程式は $y_{1,0}^{(1)}$ が永年項を持たない条件から

$$i \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \frac{m^2}{2\omega_1^3} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_1^2} + \frac{3\beta}{2\omega_1} |f_1|^2 f_1 = 0 \quad (24)$$

となり、 $\Omega_1^{(1)}, \psi_1^{(1)}$ は

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega_1^{(1)}}{\partial \xi_2} = \frac{3\beta}{\omega_1(\lambda_1 - \lambda_2)} |f_2|^2, \\ \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \xi_2} = \frac{3\beta(1 - \lambda_1 \lambda_2)}{\omega_1^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2} |f_2|^2. \end{cases} \quad (25)$$

これらの式で、1 を 2 に、2 を 1 に置き換えれば、もう一方の結果が得られる。

この方法はもっと一般的な系にも拡張できる。また、特に包絡ソリトンに適用すれば、 $|\lambda_1 - \lambda_2| = O(1)$ であるような二つの包絡ソリトンが相互作用すると位置及び位相のずれを除いてほとんどすり抜けると言える。これは深水波の実験でも確かめられた³⁰⁾。

5. 逆散乱法

KdV 方程式を解くために導入された逆散乱法が Lax の解釈を経て、非線形 Schrödinger 方程式にも適用されたということを第 2 節の最後で述べた。Ablowitz, Kaup, Newell, Segur (AKNS) は Zakharov & Shabat が導入した線形作用素を利用して少し違った定式化を行った^{31, 32}。彼らは $q(x, t), r(x, t)$ をポテンシャルとする固有値問題

$$\begin{cases} v_{1x} + i\zeta v_1 = q(x, t)v_2 \\ v_{2x} - i\zeta v_2 = r(x, t)v_1 \end{cases} \quad (26)$$

及び固有関数 v_1, v_2 の時間発展

$$\begin{cases} v_{1t} = A(x, t, \zeta)v_1 + B(x, t, \zeta)v_2 \\ v_{2t} = C(x, t, \zeta)v_1 - A(x, t, \zeta)v_2 \end{cases} \quad (27)$$

を考えた。(26) は v_1, v_2 の x 方向の発展を記述し、(27) は t 方向の発展の記述する。これらが v_1, v_2 について可積分であるためには x 方向の発展と t 方向の発展が矛盾しない、つまり、 $(v_{ix})_t = (v_{it})_x$, ($i = 1, 2$) が必要である。(26) を t で偏微分し、(27) を x で偏微分してこの条件を書く

$$\begin{cases} A_x = qC - rB - i\zeta_t \\ B_x + 2i\zeta B = q_t - 2qA \\ C_x - 2i\zeta C = r_t + 2rA \end{cases} \quad (28)$$

を得る。ここでさらに

$$\begin{cases} A_x = qC - rB \\ B_x + 2i\zeta B = q_t - 2qA \\ C_x - 2i\zeta C = r_t + 2rA \end{cases} \quad (29)$$

が成り立てば、固有値 ζ は時間不変になる。(29) を A, B, C に対する常微分方程式系とみなそう。するとこれは非同次線形常微分方程式系だから、一般に解が存在するためには非同次項は何らかの直交条件を満たさなければならない。その条件が (26) を用いた逆散乱法で解ける q, r の発展方程式を与え、そのときの解 A, B, C が固有関数の時間発展 (27) をきめる。これについては一般論が建設されている³²が、発展方程式と A, B, C を求める 1 つの簡単な方法は A, B, C をパラメーター $2i\zeta$ のベキで展開し、次数の高い方から順次解いていくと最後に解けるための条件として q, r の発展方程式が得られ、同時に A, B, C も得られる。AKNS はこのようなやり方で KdV, MKdV, NLS, Sine-Gordon 方程式などを得た。この方法はいろんな仕方で拡張された。一つの例は (26) における固有値の入り方を変えるものであるが、われわれは 2 行 2 列の作用素から 3 行 3 列の作用素に一般化した³³。この研究でわれわれは 3 波共鳴相互作用方程式、結合型非線形 Schrödinger 方程式、結合型 KdV 方程式、結合型 MKdV 方程式などが逆散乱法で解けることを見出した。われわれが見出した結合型非線形 Schrödinger 方程式は次の 3 タイプである。

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx}/2 - (|u|^2 + |v|^2)u = 0, \\ iv_t + v_{xx}/2 - (|u|^2 + |v|^2)v = 0, \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx}/2 + (|u|^2 + |v|^2)u = 0, \\ iv_t + v_{xx}/2 + (|u|^2 + |v|^2)v = 0, \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx}/2 - (|u|^2 - |v|^2)u = 0, \\ iv_t + v_{xx}/2 - (|u|^2 - |v|^2)v = 0. \end{cases} \quad (32)$$

(30), (31) は任意の偏光をもつ電磁波の非線形自己変調を記述する。また、光ファイバー中の非線形波動のモデルとしてもよく使われる。とくに、(31) は Manakov モデルとも呼ばれる。Manakov によって初めて解かれたからである³⁴。われわれがこれらの方程式が逆散乱法で解けることを見つけたときには Manakov はすでに (31) を解いていたのである。

Ablowitz & Haberman も少しやり方はちがうが、われわれと同様の拡張を行った³⁵。彼らは Boussinesq 方程式が解けることを見出した。われわれも Boussinesq 方程式が入っているはずだと考え、探したけれども見つかることができなかった。しかし、われわれは sonic-Langmuir soliton に対する方程式 (長波-短波共鳴相互作用方程式) がこのスキームで解けることを見出した³⁶。その方程式は

$$\begin{cases} iE_t + E_{xx}/2 - nE = 0 \\ n_t + n_x + (|E|^2)_x = 0 \end{cases} \quad (33)$$

である。これは Zakharov³⁷ が Langmuir 乱流におけるエネルギー散逸のメカニズムを提案したときに導入した Zakharov 方程式の一次元版

$$\begin{cases} iE_t + E_{xx}/2 - nE = 0 \\ n_{tt} - n_{xx} - 2(|E|^2)_{xx} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

($Ee^{-i\omega_p t}$ が Langmuir 振動の規格化された電場、 n はイオンの規格化された密度変動、 x, t は適当に規格化されている) において、イオン波の伝播方向を正方向に制限したものである。そのような制限の下では、 $\partial n/\partial t \approx -\partial n/\partial x$ であるから $\partial^2 n/\partial t^2 - \partial^2 n/\partial x^2 = (\partial/\partial t - \partial/\partial x)(\partial n/\partial t + \partial n/\partial x) \approx -2\partial/\partial x(\partial n/\partial t + \partial n/\partial x)$ が成り立ち、(34) は (33) に帰着するのである。(33) は可積分であるが、(34) の数値解の挙動はずっと複雑であるということは覚えておく必要がある。

さて、(33) に対する散乱問題をどのようにして見つけたかを少し詳しく書いておこう。われわれは (26), (27) の拡張として

$$\begin{cases} v_x = \left(i\zeta(\lambda_3 + \mu\lambda_8) + \sum_{j=1, (j \neq 3)}^7 a_j(x, t)\lambda_j \right) v \\ v_t = \left(\sum_{j=1}^8 b_j(x, t, \zeta)\lambda_j \right) v \end{cases} \quad (35)$$

を考察した。ここで、 μ は定数で、 v は 3 成分をもつ列ベクトル、 λ_j ($j = 1, 2, \dots, 8$) は SU(3) の生成元の行列表示で交換関係 $[\lambda_j, \lambda_k] = 2i \sum_{\ell=1}^8 f_{j k \ell} \lambda_\ell$, ($j, k = 1, 2, \dots, 8$)

を満たす. f_{jkl} はどれか二つの添え字が等しければ 0 で, ゼロでない値は

$$\begin{cases} f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}, \\ f_{123} = 1, f_{458} = f_{678} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{cases}$$

であって, 他のゼロでない値はこれらの偶置換ならこれらと同じ値, 奇置換ならば, 符号を変えた値である. また, λ_j の具体的表現は

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

(35) の第 1 式を t で, 第 2 式を x で微分してそれらを等値すれば, v に対して無矛盾かつ ζ が時間不変である条件として

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial b_j}{\partial x} + 2i(i\zeta) \sum_{k=1}^8 (f_{3kj} + \mu f_{8kj}) b_k \\ + 2i \sum_{k,\ell=1}^8 (k \neq j, 8) f_{jkl} a_k b_\ell = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

を得る. ただし, $j = 1, 2, \dots, 8$ であって, $a_3 = a_8 = 0$ である.

これを b_j に対する方程式系と考えて, b_j を求めるのであるが, そのために b_j を $i\zeta$ の有限のべきで展開し, 高い次数から順次決めていく. ここでは (33) を得るために

$$b_j = b_j^{(2)}(i\zeta)^2 + b_j^{(1)}i\zeta + b_j^{(0)}, \quad (j = 1, \dots, 8) \quad (37)$$

と $(i\zeta)^2$ まで展開する. また, とくに $\mu = \sqrt{3}$ とする.

まず, $(i\zeta)^3$ の係数から, $b_3^{(2)}, b_8^{(2)}$ 以外の $b_j^{(2)}$ はすべて 0 であることがわかる. $b_3^{(2)}, b_8^{(2)}$ は任意であって必ずしも定数である必要はないが, 定数とする. さらにこれらは独立な定数でよいのだが, $b_3^{(2)} = A_2, b_8^{(2)} = -A_2/\sqrt{3}$ (A_2 は定数) とする.

次に, $(i\zeta)^2$ の係数から, $b_3^{(1)}, b_8^{(1)}$ も任意であるが, 今度は $b_3^{(1)} = A_1, b_8^{(1)} = \sqrt{3}A_1$ (A_1 は定数) とする. このように順次計算すると, 次の結果が得られる.

$$\begin{aligned} b_1 &= i\zeta A_2 a_1 - \frac{iA_2}{2} \frac{\partial a_2}{\partial x} + A_1 a_1 + \frac{A_2}{2} (a_4 a_6 + a_5 a_7), \\ b_2 &= i\zeta A_2 a_2 + \frac{iA_2}{2} \frac{\partial a_1}{\partial x} + A_1 a_2 + \frac{A_2}{2} (a_5 a_6 - a_4 a_7), \\ b_3 &= (i\zeta)^2 A_2 + i\zeta A_1 - \frac{A_2}{2} (a_1^2 + a_2^2) - \frac{a_2}{4} (a_6^2 + a_7^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= A_1 a_4 + \frac{A_2}{2} (a_1 a_6 - a_2 a_7), \\ b_5 &= A_1 a_5 + \frac{A_2}{2} (a_1 a_7 + a_2 a_6), \\ b_6 &= -i\zeta A_2 a_6 + \frac{iA_2}{2} \frac{\partial a_7}{\partial x} + A_1 a_6 + \frac{A_2}{2} (a_1 a_4 + a_2 a_5), \\ b_7 &= -i\zeta A_2 a_7 - \frac{iA_2}{2} \frac{\partial a_6}{\partial x} + A_1 a_7 + \frac{A_2}{2} (a_1 a_5 - a_2 a_4), \\ b_8 &= -(i\zeta)^2 \frac{A_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}i\zeta A_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} A_2 (a_6^2 + a_7^2). \end{aligned}$$

これと同時に可解条件として a_j についての発展方程式も得られる. ここではそれらを変数

$$\begin{cases} u_1 = a_1 + ia_2, & u_2 = a_1 - ia_2 \\ v_1 = a_4 + ia_5, & v_2 = a_4 - ia_5 \\ w_1 = a_6 + ia_7, & w_2 = a_6 - ia_7 \end{cases} \quad (38)$$

に書き変えて示せば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{A_2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{A_2}{2} w_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ - A_2 u_1^2 u_2 - \frac{A_2}{2} u_1 v_1 v_2 = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{A_2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - A_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{A_2}{2} w_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ + A_2 u_1 u_2^2 + \frac{A_2}{2} u_2 v_1 v_2 = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} - A_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - A_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_1 w_1) \\ - A_2 u_1 u_2 v_1 + A_2 w_1 w_2 v_1 = 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - A_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} - A_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_2 w_2) \\ + A_2 u_1 u_2 v_2 - A_2 w_1 w_2 v_2 = 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{A_2}{2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - A_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{A_2}{2} u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ + A_2 w_1^2 w_2 + \frac{A_2}{2} v_1 v_2 w_1 = 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{A_2}{2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - A_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{A_2}{2} u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ - A_2 w_1 w_2^2 - \frac{A_2}{2} v_1 v_2 w_2 = 0 \end{aligned}$$

となる. ここで, $u_2 = w_2 = 0, v_2 = C$ (定数) とすれば,

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{A_2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{A_2}{2} C u_1 v_1 = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{A_2}{2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - A_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{A_2}{2} C v_1 w_1 = 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} - A_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - A_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_1 w_1) = 0 \end{cases} \quad (39)$$

となる. さらに $A_1 = -1, A_2 = -i, u_1 = w_1^* = \phi, v_1 = in, C = -2i$ とすれば, (39) は

$$\begin{cases} i(\phi_t + \phi_x) + \phi_{xx}/2 - n\phi = 0 \\ n_t + n_x + (|\phi|^2)_x = 0 \end{cases} \quad (40)$$

に帰着する.

(33) と (40) は変換

$$\phi(x, t) = E(x, t) e^{i(t/2-x)} \quad (41)$$

によって移りあうから、同等である。以上の結果から (40) に対する固有値問題と固有関数の時間発展は

$$\begin{cases} V_{1x} = 3i\zeta V_1 - 2iV_3, \\ V_{2x} = \phi V_1 + i\zeta V_2, \\ V_{3x} = inV_1 + \phi^* V_2 - i\zeta V_3, \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} V_{1t} = i(2\zeta^2/3 - 2\zeta)V_1 - \phi^* V_2 + 2iV_3 \\ V_{2t} = (\zeta\phi + i\phi_x/2 - \phi)V_1 \\ \quad - 4i(\zeta^2/3)V_2 - \phi V_3 \\ V_{3t} = -i(n + |\phi|^2/2)V_1 \\ \quad - (\zeta\phi^* + i\phi_x^*/2 + \phi^*)V_2 + i(2\zeta^2/3 + 2\zeta)V_3 \end{cases} \quad (43)$$

となる。ただし、固有関数を $v = \mathbf{V}e^{-i\zeta x}$ によって v から \mathbf{V} に変更した。ここでさらに、固有関数を

$$V_1 = f_1 + f_3, \quad V_2 = 2\zeta f_2, \quad V_3 = 2\zeta f_3 \quad (44)$$

によって、 \mathbf{V} から \mathbf{f} に変更すれば、Yajima & Oikawa の論文³⁶⁾にある固有値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 3i\zeta f_1 - \frac{in}{2\zeta}(f_1 + f_3) - \phi^* f_2, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = i\zeta f_2 + \frac{\phi}{2\zeta}(f_1 + f_3), \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} = -i\zeta f_3 + \frac{in}{2\zeta}(f_1 + f_3) + \phi^* f_2, \end{cases} \quad (45)$$

に到達する。固有関数の時間発展の式も変換 (44) で得られるが、長いので省略する。この変換は (42) の右辺第二項を消去するために行った。さらに、論文³⁶⁾では (45) の散乱問題および逆問題を解いて N -ソリトン解などを求めた。

(40) を速度 1 で走る座標系で眺めれば

$$\begin{cases} i\phi_t + \phi_{xx}/2 - n\phi = 0 \\ n_t + (|\phi|^2)_x = 0 \end{cases} \quad (46)$$

の形になるが、これは長波-短波共鳴相互作用を記述する一般的な方程式であることが分かった³⁸⁾。これに対する固有値問題はやはり (42) であって、固有関数の時間発展が若干 (43) より簡単になる。(40) を導くときに $A_1 = -1$ としたが、代わりに $A_1 = 0$ とすればよいのである。

6. 二次元におけるソリトンの相互作用

6.1 KP 方程式とソリトン共鳴

Fig.2 のように y 方向に一様に伸びたソリトンが x 方向に伝播している場合も KdV 方程式のような一次元の方程式で記述できる。Kadomtsev & Petviashvili はこのようなソリトンが y 方向の長波長の摂動に対して安定かどうかを考察し、その際、次の Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式を得た³⁹⁾。

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x + \sigma^2 u_{yy} = 0. \quad (47)$$

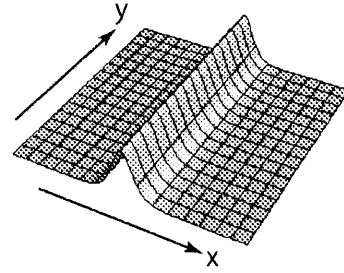


Fig. 2 line soliton

u が y に依存しなければ KdV 方程式になる。これを導くときには、 $k_y \ll k_x$ を仮定するので、われわれは KP 方程式を KdV 方程式の“弱二次元化”と呼んでいる。KP 方程式には 2 種類ある。 $\sigma^2 > 0$ の場合は、ソリトンが y 方向の長波長の摂動に対して安定で、KPII 方程式と呼ばれ、 $\sigma^2 < 0$ の場合は、ソリトンが y 方向の長波長の摂動に対して不安定で、KPI 方程式と呼ばれる。浅水波の場合、重力の効果が大きいときに KPII になり、表面張力の効果が大きいときに KPI になる。Dryuma⁴⁰⁾ は KPI, KPII の Lax 形式を見出した。従って、これらもソリトン方程式である。私が係わったのは KPII の場合なので、以後 KPII の場合のみを考え、それを単に KP 方程式と呼ぶことにする。

二次元の逆散乱問題を解くのは難しい。したがって、二次元 ((2+1) 次元と呼ばれることも多い) 問題は逆散乱法とは違う方法で解を求めることが多い。その代表は広田の方法⁴¹⁾である。これは従属変数を適当に (基本的には分数式に) 変換して、二次の同次式 (Bilinear form) に直して解く方法で、具体的な解を求めるには強力な方法である。広田先生は研究会や学会のたびに今度はこんな方程式が解けましたというような話をされたが、最初のうちはよくわからなかった。次第に理論が整備され、 N -ソリトン解を形式的なベキ展開で求めるやり方を開発されたあたりから、使ってみようかと思うようになったし、信奉者も増えていった。佐藤幹夫は広田の方法の謎を解明し、ソリトン方程式の数学的意味や構造を明らかにした (私はよくわかっていないのだが、今後の私の課題!)⁴²⁾。そのとき、中心的な位置を占めるのが KP 方程式である。

さて、二つの浅水孤立波の二次元相互作用を考えよう。つまり、Fig.2 のような長いソリトン — これを線ソリトン (line soliton) と呼ぼう — が二つ異なる方向に伝播していてこれらが相互作用している場合を考えよう。この問題はだいぶ以前に Benney & Luke⁴³⁾ によって調べられた。彼らは摂動法を使い、線ソリトンの伝播方向が近いと摂動法が破綻することを指摘した。しかし、伝播方向が近い場合は考察しなかった。考察していたら彼らが KP 方程式を発見しても不思議ではない。われわれ 73 年の論文²²⁾を書い

たとき、われわれの方法を2次元問題に適用しようとは考えなかった。しかし、実際には適用できるのである。Milesがこの問題を再考した⁴⁴⁾ときにそれに気がついた。Milesは伝播方向が近くないときは摂動法で記述できるので、相互作用が“弱い”と呼び、伝播方向が近いときは摂動法では記述できないので、相互作用が“強い”と呼んだ。相互作用が弱いときには lowest order の解は二つの KdV ソリトンの和であり、order で相互作用の効果として位置の位相のずれが現れ、局所的には線ソリトンが交わったところで振幅が和よりもわずかに大きくなる。Miles は相互作用が強い場合も考察した⁴⁵⁾。彼が考察したのは実質的に KP 方程式のある意味での定常解である。彼は Satsuma⁴⁶⁾が求めた KP 方程式の2-ソリトン解が常に regular であるとは限らないことに気がついた。便宜上、KP 方程式として

$$(4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0 \quad (48)$$

を扱うことにする。KPII 内ではどんな係数でもスケール変換で移れる。

$$u = 2(\log \tau(x, y, t))_{xx} \quad (49)$$

と変換すると、bilinear form

$$4\left(\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial t}\right) + \tau \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4} - 4 \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial^3 \tau}{\partial x^3} + 3\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\right)^2 + 3\left(\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2\right) = 0 \quad (50)$$

に帰着する。まず、古典的な N -ソリトン解を紹介しよう。形式的なパラメーター ϵ (後で $\epsilon = 1$ とおく) を用いた形式的な展開

$$\tau = 1 + \epsilon \tau^{(1)} + \epsilon^2 \tau^{(2)} + \dots \quad (51)$$

を行うと、

$$O(\epsilon): 4 \frac{\partial^2 \tau^{(1)}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4 \tau^{(1)}}{\partial x^4} + 3 \frac{\partial^2 \tau^{(1)}}{\partial y^2} = 0, \quad (52)$$

$$O(\epsilon^2): 4 \frac{\partial^2 \tau^{(2)}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4 \tau^{(2)}}{\partial x^4} + 3 \frac{\partial^2 \tau^{(2)}}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial t} + 4 \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^3 \tau^{(1)}}{\partial x^3} - 3 \left(\frac{\partial^2 \tau^{(1)}}{\partial x^2}\right)^2 + 3 \left(\frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial y}\right)^2, \quad (53)$$

...

を得る。(52)の解として

$$D(K_i, L_i, \Omega_i) := -16K_i \Omega_i + 16K_i^4 + 12L_i^2 = 0 \quad (54)$$

を満たす定数 $K_i > 0, L_i, \Omega_i$ を用いて

$$\tau^{(1)} = \sum_{i=1}^N e^{2\varphi_i}, \quad \varphi_i = K_i x + L_i y - \Omega_i t + \varphi_{i0} \quad (55)$$

とすれば、 $\tau^{(N+1)} = \tau^{(N+2)} = \dots = 0$ とれる。例えば

1-ソリトン解は

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + \tau^{(1)} = 1 + e^{2\varphi_1}, \\ u &= 2(\log(1 + e^{2\varphi_1}))_{xx} = 2K_1^2 \operatorname{sech}^2 \varphi_1, \end{aligned} \quad (56)$$

2-ソリトン解は

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + \tau^{(1)} + \tau^{(2)} = 1 + e^{2\varphi_1} + e^{2\varphi_2} + A_{12} e^{2\varphi_1 + 2\varphi_2}, \\ u &= 2(\log(1 + e^{2\varphi_1} + e^{2\varphi_2} + A_{12} e^{2\varphi_1 + 2\varphi_2}))_{xx} \\ A_{12} &= -\frac{D(K_1 - K_2, L_1 - L_2, \Omega_1 - \Omega_2)}{D(K_1 + K_2, L_1 + L_2, \Omega_1 + \Omega_2)} \\ &= \frac{4(K_1 - K_2)^2 - (L_1/K_1 - L_2/K_2)^2}{4(K_1 + K_2)^2 - (L_1/K_1 - L_2/K_2)^2} \\ &= \frac{4(K_1 - K_2)^2 - (\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2}{4(K_1 + K_2)^2 - (\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2} \end{aligned} \quad (57)$$

である。ここで、 $\tan \theta_1 = L_1/K_1, \tan \theta_2 = L_2/K_2$ であつて、 θ_1, θ_2 はそれぞれのソリトンの伝播方向が x 軸の正方向となす角である。2-ソリトン解に対する表現は長いので省略する。しかし次のことはすぐにわかる。

$A_{12} > 0$ ならば、すなわち

$$(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2 > 4(K_1 + K_2)^2 \quad (58)$$

または

$$(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2 < 4(K_1 - K_2)^2 \quad (59)$$

ならば、 u は regular で、位相はずれるが二つの線ソリトンが交わる X 字型パターンを示す。一方、 $A_{12} < 0$ ならば、すなわち

$$4(K_1 - K_2)^2 < (\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2 < 4(K_1 + K_2)^2 \quad (60)$$

ならば、 u は singular である。この regular と singular の境目、すなわち、 $(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2 = 4(K_1 \pm K_2)^2$ のときには、 τ は $\tau = 1 + e^{2\varphi_1} + e^{-2\varphi_2}$ あるいは $\tau = 1 + e^{2\varphi_1} + e^{2\varphi_2}$ で与えられ、 u は Y 字型パターンを示す。この条件は

$$D(K_1 \pm K_2, L_1 \pm L_2, \Omega_1 \pm \Omega_2) = 0 \quad (61)$$

と書くことができ、 K_i, L_i をソリトンの波数、 Ω_i をソリトンの角振動数と考え、(54)をソリトンの(非線形)分散関係と見なすならば、(61)は波数 K_i, L_i 、角振動数 Ω_i の sinusoidal な波の3波共鳴の条件と形は同じである。それゆえ、このような Y 字型パターンの解を“ソリトン共鳴”解と呼ぶ。Miles は浅水波ソリトンの相互作用でこのような解を発見し、これを浅水波ソリトンの剛体壁における Mach 反射の説明に利用した。

6.2 イオン音波におけるソリトンの多次元相互作用

われわれはこのソリトン共鳴に非常に興味をもち、イオン音波でも同様の現象があるに違いないと思い、イオン音波を調べた⁴⁷⁾。 α を波の振幅の目安を示す微小パラメーター、 β を (Debye 長/波長)² として $\alpha \ll 1, \beta \ll 1, \alpha = O(\beta)$ とする。ポテンシャル流を仮定して、(物理量はすべて適当に無次元化して) イオンの速度を $u = \alpha \nabla f$ 、イオンの数密度を $n = 1 + \alpha \rho$ 、静電ポテンシャルを $\Phi = \alpha \phi$ とすると、 $O(\beta^2)$ を省略して

$$\begin{cases} \phi \simeq \rho - (\alpha/2)\rho^2 + \beta \nabla^2 \rho, \\ \rho \simeq -f_t + (\alpha/2)(f_t^2 - (\nabla f)^2) + \beta \nabla^2 f_t, \end{cases} \quad (62)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \nabla^2 f + \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\nabla f)^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 f = 0 \quad (63)$$

を得る。これは次の 1-ソリトン解をもつ。

$$\tilde{\rho} = \frac{6\beta}{\alpha} \mathbf{K}^2 \operatorname{sech}^2[\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} - \Omega t], \quad (64)$$

$$D(\mathbf{K}, \Omega) := \Omega^2 - \mathbf{K}^2 - 4\beta\Omega^2 \mathbf{K}^2 = 0, \quad (65)$$

ただし, $\tilde{\rho}$ は

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\nabla^2 f \quad (66)$$

で定義する。また, (65) はソリトンの分散関係である。

$$f = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}, \quad \tilde{\rho} = -\nabla^2 \tilde{f} \quad (67)$$

によって, \tilde{f} を導入し, さらに

$$\tilde{f} = -\frac{6\beta}{\alpha} \log E \quad (68)$$

によって, \tilde{f} を E に変換すれば, $O(\beta^2)$ を無視して, bilinear form

$$\begin{aligned} & EE_{tt}(E_t)^2 - (E\nabla^2 E - (\nabla E)^2) - \beta(E\nabla^2 E_{tt} \\ & - 2\nabla E \cdot \nabla E_{tt} + E_{tt}\nabla^2 E - 2E_t\nabla^2 E_t) - 2\beta(E_t E_{tt} \\ & - (E_{tt})^2 - 2E_t\nabla^2 E_t + 2(\nabla E_t)^2) = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

を得る。(63) はこのように $O(\beta^2)$ の項を無視すれば, bilinear form に変換できるのである。形式的展開 $E = 1 + \epsilon E^{(1)} + \epsilon^2 E^{(2)} + \dots$ を行えば, 1-ソリトン解は (65) を満たす \mathbf{K}_1, Ω_1 を用いて

$$\begin{aligned} E &= 1 + e^{2\varphi_1}, \quad \varphi_1 = \mathbf{K}_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \Omega_1 t \\ \tilde{\rho} &= \frac{6\beta}{\alpha} \mathbf{K}_1^2 \operatorname{sech}^2 \varphi_1 \end{aligned} \quad (70)$$

で与えられる。これは (64) と一致する。また, 2-ソリトン解は $O(\beta^2)$ の項を無視して

$$\begin{aligned} E &= 1 + e^{2\varphi_1} + e^{2\varphi_2} + A_{12} e^{2(\varphi_1 + \varphi_2)}, \\ A_{12} &= -[D(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2, \Omega_1 - \Omega_2) \\ & - 8\beta\Omega_1\Omega_2\{(\Omega_1 - \Omega_2)^2 - (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2)^2\}] \\ & / D(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2, \Omega_1 + \Omega_2), \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{24\beta}{\alpha E^2} [\mathbf{K}_1^2 e^{2\varphi_1} + \mathbf{K}_2^2 e^{2\varphi_2} + (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2)^2 e^{2(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ & + A_{12} \{(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)^2 + \mathbf{K}_2^2 e^{2\varphi_1} + \mathbf{K}_1^2 e^{2\varphi_2}\} e^{2(\varphi_1 + \varphi_2)}] \end{aligned}$$

で与えられる。この解を導く際に弱二次元の近似は行っていないことに注意しよう。この解を用いれば, 二つのソリトンの伝播方向の間の角度を ψ とすると, $\psi = O(1)$ のときには, ソリトン共鳴は起こらず, 解のパターンは X 字型になること, $\psi = \pi$ (正面衝突) のときには, ソリトンの

phase shift は Oikawa & Yajima²²⁾ の結果と一致すること, また $\psi = O(\beta^{1/2})$ のときには,

$$\begin{aligned} & D(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2, \Omega_1 - \Omega_2) \\ & = -|\mathbf{K}_1||\mathbf{K}_2|\{\psi^2 - 12\beta(|\mathbf{K}_1| - |\mathbf{K}_2|)^2\} + O(\beta^2) \\ & D(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2, \Omega_1 + \Omega_2) \\ & = |\mathbf{K}_1||\mathbf{K}_2|\{\psi^2 - 12\beta(|\mathbf{K}_1| + |\mathbf{K}_2|)^2\} + O(\beta^2) \end{aligned}$$

であり, また (71) の分子の第 2 項は $O(\beta^2)$ なので, $O(\beta^2)$ の項を無視して

$$A_{12} = \frac{\psi^2 - 12\beta(|\mathbf{K}_1| - |\mathbf{K}_2|)^2}{\psi^2 - 12\beta(|\mathbf{K}_1| + |\mathbf{K}_2|)^2} \quad (72)$$

であることがわかる。従って,

$$12\beta(|\mathbf{K}_1| - |\mathbf{K}_2|)^2 < \psi^2 < 12\beta(|\mathbf{K}_1| + |\mathbf{K}_2|)^2 \quad (73)$$

のとき, 2-ソリトン解は singular であり,

$$\psi^2 = 12\beta(|\mathbf{K}_1| \pm |\mathbf{K}_2|)^2 \quad (74)$$

のときソリトン共鳴が起こることがわかる。

イオン音波に対して KP 方程式を導けば, ソリトン共鳴が起こることはすぐにわかる。われわれの解析の重要な点は弱二次元近似に頼らずにソリトンの二次元あるいは三次元相互作用を調べた点にある。丸野氏によれば, このような解析は浅水波に対しても可能なようである。

6.3 長波-短波共鳴の弱二次元化

弱二次元では相互作用が強くなっておもしろい解が得られる可能性がある。これを調べるために自由表面を持つ二層流体モデルを用いて, 界面重力波と表面重力波の長波-短波共鳴相互作用方程式を弱二次元化した⁴⁸⁾。導出した方程式系は

$$\begin{cases} i\left(\frac{\partial A}{\partial T} + c_g \sin \psi \frac{\partial A}{\partial Y}\right) + a \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + bAB = 0, \\ \frac{\partial B}{\partial T} = r \frac{\partial |A|^2}{\partial X} \end{cases} \quad (75)$$

である。A は表面重力波 (短波) による表面変位の複素振幅, B は界面重力波 (長波) による界面変位である。短波は x 軸の正方向と角度 ψ をなす方向に伝播しており, 長波はほぼ x 方向に伝播している。長波-短波の共鳴条件 $c_g \cos \psi = c_p$ (c_g は短波の群速度の大きさ, c_p は長波の長波長極限での位相スピード) を満たしているものとする。また, 短波はほぼ x 方向の変調を受けているとする。X, Y, T は ϵ を短波の振幅の目安である微小パラメータとして $X = \epsilon^{2/3}(x - c_p t)$, $Y = \epsilon^{4/3}y$, $T = \epsilon^{4/3}t$ である。さらに, 長波の振幅は $O(\epsilon^{4/3})$ である。係数 a, b, r は正と考えてよい。

$\psi = 0$ の場合は, 逆散乱法が適用できることがわかっている^{36, 49)}。また, Funakoshi & Oikawa⁵⁰⁾ はその場合の

結合ソリトンの生成過程などを数値計算で詳しく調べた。逆散乱法が適用できても初期値問題を解析的に調べることは難しいからである。

Mel'nikov⁵¹⁾ は (75) と同等な系に逆散乱法を適用できることを見出ししていたが、私の知る限りでは (75) の解についての議論はしなかった。そこでわれわれは (75) をスケール変換した系

$$\begin{cases} i(S_t + S_y) - S_{xx} + LS = 0, \\ L_t = 2(|S|^2)_x \end{cases} \quad (76)$$

について、その解を調べた。

従属変数の変換

$$S = \frac{G}{F}, \quad L = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log F \quad (77)$$

によって、(76) は bilinear form

$$\begin{cases} i(G_t + G_y)F - iG(F_t + F_y) \\ - (G_{xx}F - 2G_xF_x + GF_{xx}) = 0, \\ F_{tx}F - F_tF_x - CF^2 = -GG^* \end{cases} \quad (78)$$

に書き換えられる。C は一般には y, t の任意関数であるが、ここでは定数としておく。

この方程式系は bright soliton 解の他に dark soliton 解ももつ。bright soliton というのは無限遠で 0 になるような包絡ソリトンで、光でいえばソリトン部分が明るいから、その名がある。一方、dark soliton というのは遠方で振幅が一定でソリトン部分が振幅が小さくなっている包絡ソリトンで、光でいえば、ソリトン部分がまわりより暗いからその名がある。この系のソリトン解はパラメーターをたくさん含むので、様々な興味深い解を含むのであるが、いくつかの例を挙げるだけにする。bright soliton type を考えることにし、 $C = 0$ とする。

$$\begin{aligned} G &= \exp(\eta), \quad F = 1 + a(1, 1^*) \exp(\eta + \eta^*) \\ \eta &= px + qy - \lambda t + \eta^{(0)}, \\ (p, q, \lambda, \eta^{(0)} &: \text{複素数}) \end{aligned} \quad (79)$$

は次の条件が満たされるとき、(78) の解である。

$$\lambda = ip^2 + q, \quad a(1, 1^*) = [(p + p^*)(\lambda + \lambda^*)]^{-1}. \quad (80)$$

ここで

$$\begin{aligned} p &= \mu - i\frac{\alpha}{2}, \quad q = \mu\nu + i\beta, \quad \eta^{(0)} = \eta_r^{(0)} + i\eta_i^{(0)} \\ (\mu, \nu, \alpha, \beta, \eta_r^{(0)}, \eta_i^{(0)} &: \text{実数}) \end{aligned} \quad (81)$$

と書けば、

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu(\alpha + \nu) + i\left(\mu^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \beta\right) \\ a(1, 1^*) &= [4\mu^2(\alpha + \nu)]^{-1} \end{aligned} \quad (82)$$

となつて、(76) の bright type のソリトン解は

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\mu^2(\alpha + \nu)} \operatorname{sech}\{\mu[x + \nu y - (\alpha + \nu)t] + \delta^{(0)}\} \\ &\times \exp\left\{i\left[-\frac{\alpha x}{2} + \beta y - \left(\mu^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \beta\right)t + \eta_i^{(0)}\right]\right\}, \\ L &= -2\mu^2 \operatorname{sech}^2\{\mu[x + \nu y - (\alpha + \nu)t] + \delta^{(0)}\}, \\ \delta^{(0)} &= \eta_r^{(0)} - \frac{1}{2} \log(4\mu^2(\alpha + \nu)) \end{aligned} \quad (83)$$

で与えられる。ただし、 $\alpha + \nu > 0$ とする。これは短波の包絡線と長波が結合して同じ方向に同じ速度で伝播する一種の線ソリトンである。

bright type の 2-ソリトン解は次で与えられる。

$$\begin{aligned} G &= \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) \\ &+ a(1, 2, 1^*) \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_1^*) \\ &+ a(1, 2, 2^*) \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^*), \\ F &= 1 + a(1, 1^*) \exp(\eta_1 + \eta_1^*) \\ &+ a(1, 2^*) \exp(\eta_1 + \eta_2^*) \\ &+ a(2, 1^*) \exp(\eta_2 + \eta_1^*) \\ &+ a(2, 2^*) \exp(\eta_2 + \eta_2^*) \\ &+ a(1, 2, 1^*, 2^*) \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_1^* + \eta_2^*), \\ \eta_j &= p_j x + q_j y - \lambda_j t + \eta_j^{(0)}, \quad \lambda_j = ip_j^2 + q_j, \\ p_j &= \mu_j - i\frac{\alpha_j}{2}, \quad q_j = \mu_j \nu_j + i\beta_j, \quad \eta_j^{(0)} = \eta_{jr}^{(0)} + i\eta_{ji}^{(0)}, \\ \alpha_j + \nu_j &> 0, \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (84)$$

ただし

$$\begin{aligned} a(i, j^*) &= [(p_i + p_j^*)(\lambda_i + \lambda_j^*)]^{-1}, \\ a(i, j) &= (p_i - p_j)(\lambda_i - \lambda_j), \\ a(i^*, j^*) &= [a(i, j)]^*, \\ a(i, j, k^*) &= a(i, j)a(i, k^*)a(j, k^*), \\ a(i, j, k^*, \ell^*) &= a(i, j)a(i, k^*) \\ &\times a(i, \ell^*)a(j, k^*)a(j, \ell^*)a(k^*, \ell^*) \end{aligned} \quad (85)$$

$\lambda_1 + \lambda_2^* \neq 0, p_1 + p_2^* \neq 0$ を仮定する。 $\lambda_1 \neq \lambda_2, p_1 \neq p_2, \nu_1 \neq \nu_2$ の場合、

$$\begin{aligned} \eta_{jr} &= \mu_j[x + \nu_j y - (\alpha_j + \nu_j)t] + \delta_j^{(0)}, \\ \delta_j^{(0)} &= \eta_{jr}^{(0)} - \frac{1}{2} \log(4\mu_j^2(\alpha_j + \nu_j)), \quad (j = 1, 2) \\ \eta_{ji} &= -\frac{\alpha_j}{2}x + \beta_j y - \left(\mu_j^2 - \frac{\alpha_j^2}{4} + \beta_j\right)t + \eta_{ji}^{(0)} \end{aligned} \quad (86)$$

とすれば、2-ソリトン解の漸近形は

$\eta_{1r} = \text{const.}$ かつ $\eta_{2r} \rightarrow -\infty$ のとき

$$\begin{cases} S \simeq \sqrt{\mu_1^2(\alpha_1 + \nu_1)} \operatorname{sech}(\eta_{1r}) \exp(i\eta_{1i}), \\ L \simeq -2\mu_1^2 \operatorname{sech}^2(\eta_{1r}), \end{cases} \quad (87)$$

$\eta_{1r} = \text{const.}$ かつ $\eta_{2r} \rightarrow +\infty$ のとき

$$\begin{cases} S \simeq \sqrt{\mu_1^2(\alpha_1 + \nu_1)} \operatorname{sech}(\eta_{1r} + \Delta_1) \\ \times \exp[i(\eta_{1i} + \varphi_1)] \\ L \simeq -2\mu_1^2 \operatorname{sech}^2(\eta_{1r} + \Delta_1), \end{cases} \quad (88)$$

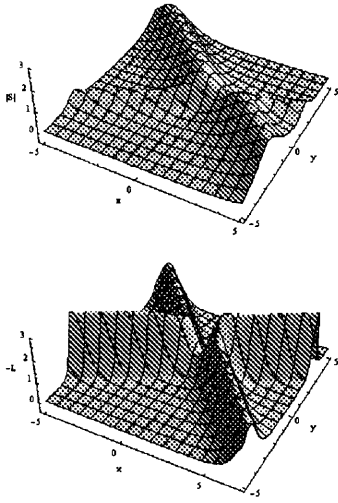


Fig. 3 Two bright-soliton interaction for the case $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $p_1 \neq p_2$, $\nu_1 \neq \nu_2$. $\mu_1 = \nu_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\eta_{1r}^{(0)} = \eta_{1i}^{(0)} = 0$; $\mu_2 = 1.2$, $\nu_2 = -2$, $\alpha_2 = 2.25$, $\beta_2 = 2.5$, $\eta_{2r}^{(0)} = \eta_{2i}^{(0)} = 0$. So, $\lambda_1 = 2 + 1.75i$, $\lambda_2 = 0.3 + 2.674i$, $p_1 = 1 - 0.5i$, $p_2 = 1.2 - 1.125i$. $t=0$. upper: $|S|$, lower: $-L$.

ただし,

$$\begin{cases} \Delta_1 := \log \left(\left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2^*} \right| \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2^*} \right), \\ \varphi_1 := \arg \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2^*} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2^*} \right). \end{cases} \quad (89)$$

$\eta_{2r} = \text{const.}$ かつ $\eta_{1r} \rightarrow -\infty$ のとき

$$\begin{cases} S \simeq \sqrt{\mu_2^2(\alpha_2 + \nu_2)} \text{sech}(\eta_{2r}) \exp(i\eta_{2i}) \\ L \simeq -2\mu_2^2 \text{sech}^2(\eta_{2r}), \end{cases} \quad (90)$$

$\eta_{2r} = \text{const.}$ かつ $\eta_{1r} \rightarrow +\infty$ のとき

$$\begin{cases} S \simeq \sqrt{\mu_2^2(\alpha_2 + \nu_2)} \text{sech}(\eta_{2r} + \Delta_2) \\ \quad \times \exp[i(\eta_{2i} + \varphi_2)] \\ L \simeq -2\mu_2^2 \text{sech}^2(\eta_{2r} + \Delta_2), \end{cases} \quad (91)$$

ただし,

$$\begin{cases} \Delta_2 := \log \left(\left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1^*} \right| \frac{p_1 - p_2}{p_2 + p_1^*} \right), \\ \varphi_2 := \arg \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1^*} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_2 + p_1^*} \right) \end{cases} \quad (92)$$

で与えられる。一例が Fig.3 にある。全体として一定速度でパターンが伝播するが、ソリトンが交わったあたりでは時間的に変化している。(89), (92) が位相のずれを与えるが、 $\lambda_1 = \lambda_2$ あるいは $p_1 = p_2$ では何か起こりそうである。そこで、それらの場合およびその近くを調べてみよう。

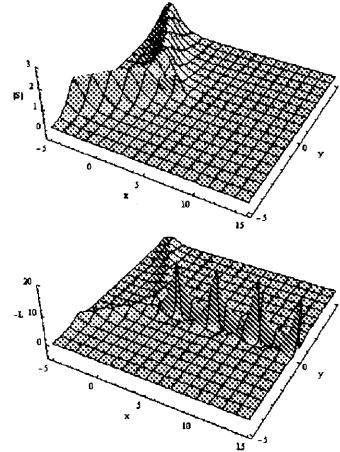


Fig. 4 Two bright-soliton interaction for the case $\lambda_1 = \lambda_2$, $p_1 \neq p_2$, $\nu_1 \neq \nu_2$. $\mu_1 = \nu_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\eta_{1r}^{(0)} = \eta_{1i}^{(0)} = 0$; $\mu_2 = 1$, $\nu_2 = -2$, $\alpha_2 = 4$, $\beta_2 = 4.75$, $\eta_{2r}^{(0)} = \eta_{2i}^{(0)} = 0$. So, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 + 1.75i$, $p_1 = 1 - 0.5i$, $p_2 = 1 - 2i$. $t=0$. upper: $|S|$, lower: $-L$.

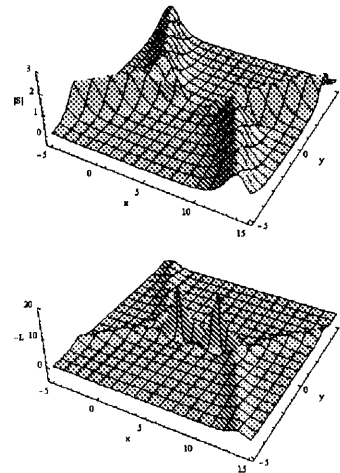


Fig. 5 Two bright-soliton interaction for the case $\lambda_1 \approx \lambda_2$, $p_1 \neq p_2$, $\nu_1 \neq \nu_2$. $\mu_1 = \nu_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\eta_{1r}^{(0)} = \eta_{1i}^{(0)} = 0$; $\mu_2 = 1.001$, $\nu_2 = -2$, $\alpha_2 = 4$, $\beta_2 = 4.75$, $\eta_{2r}^{(0)} = \eta_{2i}^{(0)} = 0$. So, $\lambda_1 = 2 + 1.75i$, $\lambda_2 = 2.002 + 1.752i$, $p_1 = 1 - 0.5i$, $p_2 = 1.001 - 2i$. $t=0$. upper: $|S|$, lower: $-L$.

(i) $\lambda_1 = \lambda_2$, $p_1 \neq p_2$, $\nu_1 \neq \nu_2$ の場合: 解の漸近形は, $\eta_{1r} = \text{const.}$ かつ $\eta_{2r} \rightarrow -\infty$ のときは (87) となり, $\eta_{2r} = \text{const.}$ かつ $\eta_{1r} \rightarrow -\infty$ のときは (90) となる。しかし, $\eta_{1r} = \text{const.}$ かつ $\eta_{2r} \rightarrow +\infty$ のとき及び $\eta_{2r} = \text{const.}$ かつ $\eta_{1r} \rightarrow -\infty$ のときには $S \simeq 0$, $L \simeq 0$ となり, $\eta_{1r} \sim \eta_{2r} \rightarrow +\infty$ のときには $S \simeq 0$, $L \simeq \exp(\eta_1 - \eta_2)$ 及び $\exp(\eta_1^* - \eta_2^*)$ のある関数という形をとる。Fig.4 は μ_1, μ_2 が正のときのその一例である。 $-L$ にピークの列が

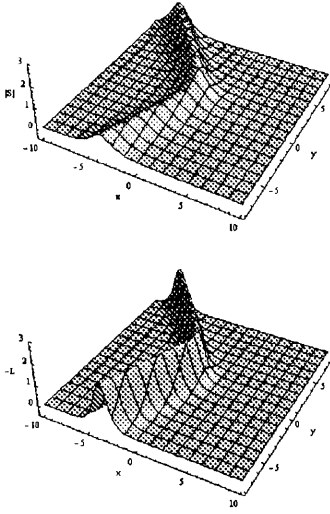


Fig. 6 Two bright-soliton interaction for the case $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $p_1 = p_2$, $\nu_1 \neq \nu_2$. $\mu_1 = \nu_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\eta_{1r}^{(0)} = \eta_{1i}^{(0)} = 0$; $\mu_2 = 1$, $\nu_2 = -0.5$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1.5$, $\eta_{2r}^{(0)} = \eta_{2i}^{(0)} = 0$. So, $\lambda_1 = 2 + 1.75i$, $\lambda_2 = 0.5 + 2.25i$, $p_1 = p_2 = 1 - 0.5i$. $t=0$. upper: $|S|$, lower: $-L$.

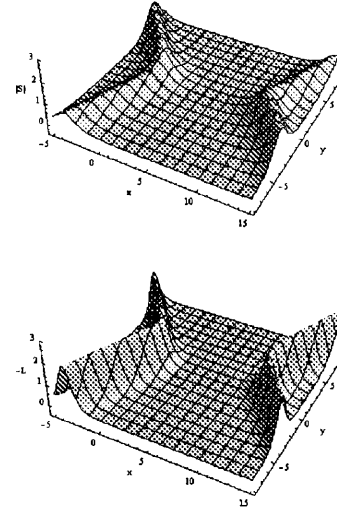


Fig. 7 Two bright-soliton interaction for the case $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $p_1 \approx p_2$, $\nu_1 \neq \nu_2$. $\mu_1 = \nu_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\eta_{1r}^{(0)} = \eta_{1i}^{(0)} = 0$; $\mu_2 = 1.0001$, $\nu_2 = -0.5$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1.5$, $\eta_{2r}^{(0)} = \eta_{2i}^{(0)} = 0$. So, $\lambda_1 = 2 + 1.75i$, $\lambda_2 = 0.50005 + 2.2502i$, $p_1 = 1 - 0.5i$, $p_2 = 1.0001 - 0.5i$. $t=0$. upper: $|S|$, lower: $-L$.

みられるが、これらは静止している。左側の二つの半無限のソリトンはそれぞれ一定速度で進むので、 $-L$ のピークは一個ずつ消滅していく。 μ_1, μ_2 が負のときには、二つの半無限ソリトンが右側に来て、 $-L$ のピークの列が左側にくる。従って、ピークが一個ずつ生成されることになる。

Fig.5は $\lambda_1 \approx \lambda_2$ の場合の例である。ソリトンのパターンは右側に進むが $-L$ のピークは静止しているので、二つの半無限のソリトンの右側の交点付近で $-L$ のピークが生成され、左側の交点付近で $-L$ のピークが消滅する。

Fig.5は $\lambda_1 \approx \lambda_2$ の場合の例である。ソリトンのパターンは右側に進むが $-L$ のピークは静止しているので、二つの半無限のソリトンの右側の交点付近で $-L$ のピークが生成され、左側の交点付近で $-L$ のピークが消滅する。

(ii) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $p_1 = p_2$, $\nu_1 \neq \nu_2$ の場合: この場合には、漸近形(87), (90)のみが生き残る。 $\mu_1 (= \mu_2)$ が正の場合の例をFig.6に示す。二つの半無限のソリトンがつながって“く”の字型になる。 $p_1 \approx p_2$ の例をFig.7に示す。この場合は位相のずれが大きくなるが、共鳴ソリトンのようなものは現れないように見える。

$\nu_1 = \nu_2$ の場合や、dark solitonの場合は原論文⁴⁸⁾を参照していただきたい。短波の数を増やした系の解析も可能であるが相当に複雑である⁵²⁾。このように二次元の場合には多様な解が可能になる。

6.4 Benjamin-Ono ソリトンの二次元相互作用

KP方程式はKdV方程式の弱二次元化であるが、KdV同様に可積分系(ソリトン系)である。しかし、一次元では可積分でも(弱)二次元化すると可積分でなくなる場合が多い。そのような場合はソリトンの相互作用はどうなるのであろうか。最初にこの問題を考えたのは1984年である。成層流体中のソリトンを記述するBenjamin-Ono(BO)方程式というのがあるが、その二次元相互作用を考えたときである⁵³⁾。まず、それらの弱い相互作用を考える。考える系は下層が浅く、上層が無限に深い二層流体で、上層流体の密度に対する下層流体の密度の比が $1 + \Delta$, ($\Delta > 0$)とする。界面波が伝播するとき、密度はそれぞれ一定で、流れは渦なしと仮定する。また、下層の遠方での深さは h 、波の代表振幅を a 、波の代表波長を ℓ 、線形長波の位相速度を $V = (\Delta gh / (1 + \Delta))^{1/2}$ とし、線形理論を使うと、上層の速度ポテンシャルは $O(aV)$ 、下層の速度ポテンシャルは $O(aV\ell/h)$ となる。そこで、界面変位は a で、水平座標は ℓ で、時間は ℓ/V で、上層の速度ポテンシャルは aV で、下層の速度ポテンシャルは $aV\ell/h$ で、上層の鉛直座標は ℓ で、下層の鉛直座標は h で無次元化する。無次元化した基礎方程式には二つのパラメーター $\epsilon := a/h$ と $\delta := h/\ell$ が現れる。ここでは、 $\epsilon \ll 1, \delta \ll 1, \delta = O(\epsilon)$ とする。下層の速度ポテンシャル ϕ_2 を水底 $z = -1$ の回りに展開して、ラプラス方程式と水底での境界条件 $\partial\phi_2/\partial z = 0$ を使

えば

$$\phi_2 = f(\mathbf{x}, t) - \frac{\delta^2}{2}(\Delta_2 f)(z+1)^2 + \dots \quad (93)$$

となる。ここで、 $f(\mathbf{x}, t)$ は水底における速度ポテンシャルの値、 $\mathbf{x} = (x, y)$ は水平座標、 t は時間でいずれも無次元。 Δ_2 は二次元のラプラシアンである。これを基礎方程式の残りに代入し、 ϵ, δ の1次の項まで考慮すれば

$$\nabla_2^2 \phi_1 + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial Z^2} = 0, \quad Z > 0, \quad (94)$$

$$\phi_1 \rightarrow 0, \quad Z \rightarrow +\infty \quad (95)$$

$$\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial Z} \right]_{Z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (96)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \epsilon \nabla_2 \zeta \cdot \nabla_2 f = -(\Delta_2 f)(1 + \epsilon \zeta) \quad (97)$$

$$\delta \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right]_{Z=0} = (1 + \Delta) \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon (\nabla_2 f)^2 + \zeta \right] \quad (98)$$

を得る。ここで、 ϕ_1 は上層の速度ポテンシャル、 ζ は界面変位、 Z は上層の鉛直座標でいずれも無次元である。また、 $\nabla_2 := (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ である。

$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 方向に伝播する二つの波の相互作用を調べるために次の座標を導入する。

$$\begin{aligned} \xi_j &= \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{x} - t + \epsilon \psi_j(\mathbf{x}, t), \quad (j = 1, 2), \\ \tau &= \epsilon t, \end{aligned} \quad (99)$$

ここで、波の相互作用による位相のずれを考慮して、Oikawa & Yajima²²⁾ のように位相変数 ψ_j を導入した。さらに

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta^{(0)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \epsilon \zeta^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \dots, \\ f &= f^{(0)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \epsilon f^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \dots, \\ \phi_1 &= \phi_1^{(0)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \epsilon \phi_1^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (100)$$

と展開する。すると $O(1)$ では、(94) から (98) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + 2\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \phi_1^{(0)} \\ + \frac{\partial^2 \phi_1^{(0)}}{\partial Z^2} = 0, \quad Z > 0, \end{aligned} \quad (101)$$

$$\phi_1^{(0)} \rightarrow 0, \quad Z \rightarrow +\infty, \quad (102)$$

$$\left[\frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial Z} \right]_{Z=0} = - \left(\frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi_2} \right), \quad (103)$$

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi_2} \right) \\ = - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + 2\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) f^{(0)}, \end{aligned} \quad (104)$$

$$\zeta^{(0)} = - \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \xi_2} \right) \quad (105)$$

となる。(104), (105) から

$$2(1-p) \frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0. \quad p := \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \quad (106)$$

従って、 $p \neq 1$ ならば

$$f^{(0)} = F_1(\xi_1, \tau) + F_2(\xi_2, \tau), \quad (107)$$

$$\zeta^{(0)} = \zeta_1(\xi_1, \tau) + \zeta_2(\xi_2, \tau), \quad \zeta_j = \frac{\partial F_j}{\partial \xi_j} \quad (108)$$

を得る。ただし、 F_j あるいは ζ_j は次のオーダーで書ける。このとき (103) は

$$\left[\frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial Z} \right]_{Z=0} = - \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial \xi_2} \right) \quad (109)$$

となる。(101), (102), (109) にフーリエ変換を適用すれば、

$$\frac{d^2 \hat{\phi}_1^{(0)}}{dZ^2} - \kappa^2 \hat{\phi}_1^{(0)} = 0, \quad Z > 0, \quad (110)$$

$$\kappa := \sqrt{\kappa_1^2 + 2p\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2}, \quad (111)$$

$$\hat{\phi}_1^{(0)} \rightarrow 0, \quad (Z \rightarrow \infty), \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d \hat{\phi}_1^{(0)}}{dZ} \right]_{Z=0} &= -2\pi i \kappa_1 \hat{\zeta}_1(\kappa_1, \tau) \delta(\kappa_2) \\ &\quad - 2\pi i \kappa_2 \hat{\zeta}_2(\kappa_2, \tau) \delta(\kappa_1) \end{aligned} \quad (113)$$

を得る。ここで、 $\hat{\phi}_1^{(0)}, \hat{\zeta}$ はそれぞれ $\phi_1^{(0)}, \zeta$ のフーリエ変換で

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^{(0)}(\kappa_1, \kappa_2) &= \mathcal{F}[\phi_1^{(0)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^{(0)}(\xi_1, \xi_2) e^{-i\kappa_1 \xi_1 - i\kappa_2 \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (114)$$

などで定義される。ただし、 Z, τ 依存性を書くのは省略した。また、 $\delta(\kappa_1), \delta(\kappa_2)$ は Dirac のデルタ関数である。(111), (112), (113) から

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^{(0)} &= 2\pi i \left(\frac{\kappa_1}{\kappa} \hat{\zeta}_1(\kappa_1) \delta(\kappa_2) + \frac{\kappa_2}{\kappa} \hat{\zeta}_2(\kappa_2) \delta(\kappa_1) \right) e^{-\kappa Z} \\ &= 2\pi i (\text{sgn}(\kappa_1) \hat{\zeta}_1(\kappa_1) \delta(\kappa_2) e^{-|\kappa_1|Z} \\ &\quad + \text{sgn}(\kappa_2) \hat{\zeta}_2(\kappa_2) \delta(\kappa_1) e^{-|\kappa_2|Z}) \end{aligned} \quad (115)$$

が得られる。

$$\lim_{Z \rightarrow +0} \mathcal{F}^{-1}[\text{sgn}(\kappa_j) e^{-|\kappa_j|Z}] = -\frac{1}{i\pi} \text{vp} \left(\frac{1}{\xi_j} \right) \quad (116)$$

を用いれば

$$[\phi_1^{(0)}]_{Z=0} = \mathcal{H}[\zeta_1] + \mathcal{H}[\zeta_2] \quad (117)$$

であって、 $\mathcal{H}[\zeta_j]$ はヒルベルト変換で

$$\mathcal{H}[\zeta_j] := \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_j(\xi)}{\xi - \xi_j} d\xi, \quad (j = 1, 2) \quad (118)$$

で定義される。P は主値積分を表す。

$O(\epsilon)$ では, $O(1)$ の結果を用いると, (97), (98) から

$$\begin{aligned} 2(1-p) \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} &= -2 \left[\frac{\partial \zeta_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \zeta_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1} + q \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \mathcal{H}[\zeta_1] \right] \\ &\quad - 2 \left[\frac{\partial \zeta_2}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \zeta_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial \xi_2} + q \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \mathcal{H}[\zeta_2] \right] \\ &\quad + 2(1-p) \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\zeta_1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} - \beta \zeta_2 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\zeta_2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} - \beta \zeta_1 \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (119)$$

ただし, $q := \frac{\delta}{2(1+\Delta)\epsilon}$, $\beta := \frac{1+2p}{2(1-p)}$. $f^{(1)}$ に永年項が存在しないための条件として

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \zeta_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1} + q \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \mathcal{H}[\zeta_1] &= 0, \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \zeta_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial \xi_2} + q \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \mathcal{H}[\zeta_2] &= 0 \end{aligned} \quad (120)$$

が得られる. これは Benjamin-Ono 方程式である. さらに, ψ_1, ψ_2 を

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} = \beta \zeta_2, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} = \beta \zeta_1 \quad (121)$$

と選べば, (119) は $\partial^2 f^{(1)} / \partial \xi_1 \partial \xi_2 = 0$ となるから

$$f^{(1)} = G_1(\xi_1, \tau) + G_2(\xi_2, \tau).$$

従って, $O(\epsilon)$ まででは

$$\begin{aligned} f &= F_1(\xi_1, \tau) + F_2(\xi_2, \tau) + \epsilon [G_1(\xi_1, \tau) + G_2(\xi_2, \tau)], \\ \zeta &= \zeta_1 + \zeta_2 + \epsilon \left\{ \left[\frac{\partial G_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial F_1}{\partial \tau} - \frac{\zeta_1^2}{2} - 2q \frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathcal{H}[\zeta_1] \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial G_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial F_2}{\partial \tau} - \frac{\zeta_2^2}{2} - 2q \frac{\partial}{\partial \xi_2} \mathcal{H}[\zeta_2] \right] + r \zeta_1 \zeta_2 \right\} \end{aligned}$$

となる. ただし, $r = (1+p+p^2)/(1-p)$ である.

84年のノート⁵³⁾で不十分であったのは(116)のように右辺が ξ_1, τ の関数と ξ_2, τ の関数の和になることの証明である. ここでは, フーリエ変換を用いてそれを示した.

上記の摂動解は基本的には二つの波の重ね合わせで, 相互作用の効果としては位相のずれと波が重なったところでの振幅の増加として表れるということを示している. しかし, n_1 と n_2 が近いときには使えない. その場合には伝播方向が近いことを利用して近似ができる. それが弱二次元化である. 主要な伝播方向を x の正方向として, 新しい変数

$$\xi = x - t, \quad \eta = \epsilon^{1/2} y, \quad \tau = \epsilon t \quad (122)$$

を導入して, (94) から (98) における ϕ_1, ζ, f を

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_1^{(0)}(\xi, \eta, \tau, Z) + \epsilon \phi_1^{(1)}(\xi, \eta, \tau, Z) + \dots \\ \zeta &= \zeta^{(0)}(\xi, \eta, \tau) + \epsilon \zeta^{(1)}(\xi, \eta, \tau) + \dots \\ f &= f^{(0)}(\xi, \eta, \tau) + \epsilon f^{(1)}(\xi, \eta, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (123)$$

と展開すれば, 容易に

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \zeta^{(0)} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} + q \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{H}[\zeta^{(0)}] \right) \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta^{(0)}}{\partial \eta^2} = 0 \end{aligned} \quad (124)$$

を得る. これが Benjamin-Ono 方程式の弱二次元化である.

私はこの方程式を1984年のノート⁵³⁾で得ていて, この方程式でのソリトンの相互作用はどうなるのかということに非常に興味があったが, 二次元の微積分方程式ということで数値計算は当分だめだと思っていた. しかし, コンピューターの発達と計算法の工夫で可能になった⁵⁴⁾. (124)以外にも, 辻 英一助教とともに, MKdV 方程式の弱二次元化⁵⁵⁾, EKdV 方程式の弱に次元化⁵⁶⁾なども調べた. これらについては⁵⁷⁾にも概説がある. また, ⁵⁸⁾にもまとめられている. 一番あたらしいもの⁵⁹⁾は極限で KP 方程式と BO 方程式の弱二次元化を含むものである. これらの意義を説明するためには KP 方程式の解についてもう少し詳しい解説が必要であろう. それについては⁶⁰⁾にまとめられている. ここでは KP 方程式のソリトン解の新しい側面を簡単に解説し, それに関連するわれわれの仕事と弱二次元化が非可積分になる場合のもっとも新しい例⁵⁹⁾を簡単に紹介する.

6.5 KP 方程式におけるソリトン研究の新展開

KP 方程式は(48)を用いると便利である. 関数 $f_i(x, y, t)$, ($i = 1, 2, \dots, N$) が線形方程式系

$$f_y = f_{xx}, \quad f_t = -f_{xxx} \quad (125)$$

を満たすとき,

$$\begin{aligned} \tau(x, y, t) &= \text{Wr}(f_1, f_2, \dots, f_N) \\ &:= \begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(1)} & \dots & f_1^{(N-1)} \\ f_2 & f_2^{(1)} & \dots & f_2^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N & f_N^{(1)} & \dots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (126)$$

は(50)を満たし, 従って, この τ に対する(49)は(48)の解であることはよく知られていた⁶¹⁾. ただし, $f_i^{(j)} := \partial^j f_i / \partial x^j$ である. k_j を定数とすると,

$$E_j := e^{\theta_j}, \quad \theta_j := k_j x + k_j^2 y - k_j^3 t \quad (127)$$

は(125)を満たす. さらに, これらの線形結合

$$f_i = \sum_{j=1}^M a_{ij} E_j, \quad (i = 1, 2, \dots, N; a_{ij} : \text{定数}) \quad (128)$$

も(125)を満たす.

$$k_1 < k_2 < \dots < k_M \quad (129)$$

を仮定する. (128)の f_i , ($i = 1, 2, \dots, N$)が線形独立である(さもないと(126)の τ はゼロとなる)であるためには

$\text{rank} A = N$, ($A = (a_{ij})$) でなければならない. そのとき, $M \geq N$ であるが, $M = N$ ならば, τ は $e^{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_M}$ の定数倍であるから, (49) から $u = 0$ になってしまうので, $M > N$ の場合のみを考えればよい. (126) に (127) を代入すると

$$\tau = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1 & k_1 E_1 & \cdots & k_1^{N-1} E_1 \\ E_2 & k_2 E_2 & \cdots & k_2^{N-1} E_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_M & k_M E_M & \cdots & k_M^{N-1} E_M \end{pmatrix} \quad (130)$$

となる. ここで, C を正則な N 次の定数行列とし, A を CA で置き換えると τ は $\det(C)$ 倍されるだけだから u は変わらない. 従って, 行列 A の代表として行基本変形をして帰着するもっとも簡単な形 reduced row echelon form (RREF) をとればよい. また, (130) は $N \times M$ 行列と $M \times N$ 行列の積の行列式だから Binet-Cauchy の公式を使うと

$$\tau = \sum_{m_1 < m_2 < \dots < m_N} A(m_1, \dots, m_N) V(m_1, \dots, m_N) \times \exp(\theta_{m_1, \dots, m_N}) \quad (131)$$

となる. ここで和は M 個の数 $\{1, 2, \dots, M\}$ の中から選んだ N 個の数の可能な異なる組み合わせ $\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$ のすべてにわたる. $A(m_1, \dots, m_N)$ は A の第 m_1 列, 第 m_2 列, \dots , 第 m_N 列からなる N 次の小行列式, $V(m_1, \dots, m_N)$ は Vandermonde の行列式

$$V(m_1, \dots, m_N) = \begin{vmatrix} 1 & k_{m_1} & \cdots & k_{m_1}^{N-1} \\ 1 & k_{m_2} & \cdots & k_{m_2}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & k_{m_N} & \cdots & k_{m_N}^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq r < s \leq N} (k_{m_s} - k_{m_r}), \quad (132)$$

であり,

$$\theta_{m_1, \dots, m_N} = \theta_{m_1} + \dots + \theta_{m_N} \quad (133)$$

である. $V(m_1, \dots, m_N)$ 及び $\exp(\theta_{m_1, \dots, m_N})$ は正であるから, すべての N 次の小行列式 $A(m_1, \dots, m_N)$ が非負 (このような A は totally nonnegative と呼ばれる) ならば, $u(x, y, t)$ は regular である.

行列 A の RREF の各行の最初の非零要素 1 はピボットと呼ばれる. A の RREF のピボットを含む列を“ピボット列”, ピボットを含まない列を“非ピボット列”と呼ぼう. ピボット列ではピボット以外の要素はすべて 0 である. A の行列 A の RREF が各列に少なくとも一つの非零要素を含み, 各行にピボット以外の非零要素を少なくとも一つ

含むとき, A は irreducible であると言われる. そうでなければ, もっと小さい M, N の場合に帰着するからである. irreducible かつ totally nonnegative な A に対して, (131) で与えられる τ は $y \rightarrow +\infty$ においては N 個の線ソリトンから成り, $y \rightarrow -\infty$ においては $M - N$ 個の線ソリトンから成る $u(x, y, t)$ を生じる. このような解 u は $(M - N, N)$ -ソリトンと呼ばれる.

- $M = 2, N = 1$ の場合: $A = (1 \ a)$, $a > 0$ とすると

$$\tau = f_1 = e^{\theta_i} + a e^{\theta_j}, \quad k_i < k_j. \quad (134)$$

(134) において二つの指数関数項のどちらかが卓越する領域 (t を固定して) では τ はその卓越する指数関数項だけで近似できるから, その領域では $u \approx 0$ である. 二つの指数関数項がバランスする線

$$\theta_i = \theta_j + \theta_{j0}, \quad \theta_{j0} = \log a \quad (135)$$

に沿って線ソリトン (line soliton)

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2}(k_j - k_i)^2 \text{sech}^2 \frac{1}{2}(\theta_j - \theta_i + \theta_{j0}), \quad (136)$$

が存在する. これは $[i, j]$ -ソリトンと呼ばれる.

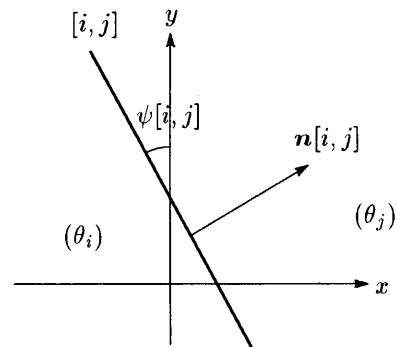


Fig. 8 $[i, j]$ -soliton. $n[i, j]$ denotes propagation direction of $[i, j]$ -soliton.

$$\theta_j - \theta_i + \theta_{j0} = (k_j - k_i)x + (k_j^2 - k_i^2)y - (k_j^3 - k_i^3)t + \theta_{j0} \quad (137)$$

であるから, このソリトンの振幅を $\alpha[i, j]$, 伝播方向 $n[i, j]$ の傾きを $\gamma[i, j]$ とすれば

$$\alpha[i, j] = \frac{1}{2}(k_j - k_i)^2, \quad \gamma[i, j] = k_i + k_j = \tan \psi[i, j] \quad (138)$$

である. ここで, $-\pi/2 < \psi[i, j] < \pi/2$ は y 軸の正方向と線ソリトンのなす角を反時計回りを正として測ったものである. また, 図の $(\theta_i), (\theta_j)$ はそれぞれ τ において $e^{\theta_i}, e^{\theta_j}$ が卓越する領域を示しており, $[i, j]$ -ソリトンはその二つの領域を分けていると言える.

- $M = 3, N = 1$ の場合: $A = (1 \ a \ b)$, $a > 0, b > 0$ とすると

$$\tau = f_1 = e^{\theta_1} + ae^{\theta_2} + be^{\theta_3}, (k_1 < k_2 < k_3) \quad (139)$$

これは (2,1)-ソリトン解に対応する。鳥瞰図の例を Fig.9 に挙げる。Fig.10 はその平面図の概略である。パターンが Fig.10 のようになることは例えば次のようにしてわかる。 x が正で大きいときには e^{θ_3} が卓越し、 x が負で絶対値が大きいときには e^{θ_1} が卓越することは明らか。可能なソリトンは [1,2], [2,3], [1,3] の三つである。[1,2]-ソリトンが $y \rightarrow +\infty$ まで伸びているとすると、それが他のソリトンより右側にくる。それは (138) の $\gamma[i, j]$ を計算すればわかる。しかし、[1,2]-ソリトンは e^{θ_3} が卓越する領域に隣り合うことはできない。[1,2]-ソリトンは e^{θ_1} が卓越する領域と e^{θ_2} が卓越する領域を分けるのである。[1,3]-ソリトンが $y \rightarrow -\infty$ に伸びられないこと、[2,3]-ソリトンが $y \rightarrow +\infty$ に伸びられないことも同様にしてわかる。この解がソリトン共鳴解であることは $[i, j]$ -ソリトンをソリトンの波数 $K[i, j], L[i, j]$ と振動数 $\Omega[i, j]$ を用いて

$$\alpha[i, j] \operatorname{sech}^2(K[i, j]x + L[i, j]y - \Omega[i, j]t + \theta_{j0}) \quad (140)$$

書くと、

$$\begin{aligned} K[i, j] &= (k_j - k_i)/2, \\ L[i, j] &= (k_j^2 - k_i^2)/2, \\ \Omega[i, j] &= (k_j^3 - k_i^3)/2 \end{aligned} \quad (141)$$

だから、共鳴条件

$$\begin{aligned} K[1, 2] + K[2, 3] &= K[1, 3], \\ L[1, 2] + L[2, 3] &= L[1, 3], \\ \Omega[1, 2] + \Omega[2, 3] &= \Omega[1, 3] \end{aligned} \quad (142)$$

が成り立つことからわかる。

($M - N, N$)-ソリトンはコード図 (chord diagram) で表される。Fig.11 は (a) (1,1)-ソリトンのコード図の例と (b) (2,1)-ソリトンのコード図の例である。(右向き矢印の

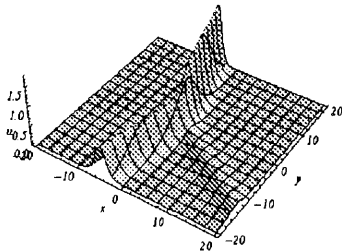


Fig. 9 Bird's-eye view of (2,1)-soliton solution corresponding to (139). $k_1 = -3/4$, $k_2 = 1/2$, $k_3 = 1$, $a = b = 1$, $t = 0$.

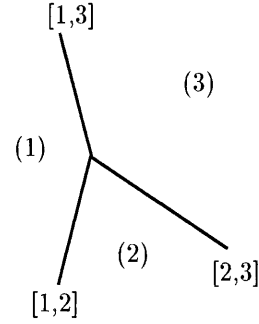


Fig. 10 Plane schematic diagram of Fig.9.

ついた) 上側のコードが $y \rightarrow +\infty$ における線ソリトンを表す。図 (a) では [1,2]-ソリトン、図 (b) では [1,3]-ソリトンである。(左向き矢印のついた) 下側のコードが $y \rightarrow -\infty$ における線ソリトンを表す。図 (a) では [1,2]-ソリトン、図 (b) では [1,2]-ソリトンと [2,3]-ソリトンである。もちろん

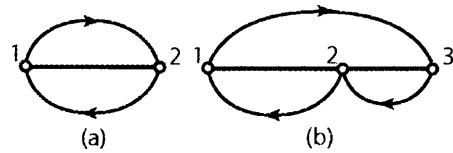


Fig. 11 Chord diagram. (a) (1,1)-soliton; (b) (2,1)-soliton. 1, 2 and 3 denote k_1, k_2 and k_3 , respectively.

コード図は行列 A の RREF と関係している。上側コードの出発位置の番号が行列 A の RREF のピボット列の番号に、下側コードの出発位置の番号が非ピボット列の番号に対応している。また、 M の要素 $\{1, 2, \dots, M\}$ の固定点を持たない置換とも関係している。たとえば、Fig.11(a), (b) はそれぞれ置換

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (143)$$

に対応している。1 列目の $\pi(1) = 2$ あるいは $\pi(1) = 3$ が上側のコードに対応し、2 列目あるいは 2,3 列目の $\pi(2) = 1$ あるいは $\pi(2) = 1, \pi(3) = 2$ が下側のコードに対応する。詳しいことは^{62, 63)}を参照してほしい。

$M = 4, N = 2$ の場合の τ は

$$\tau = \sum_{1 \leq r < s \leq 4} (k_s - k_r) A(r, s) \exp(\theta_r + \theta_s) \quad (144)$$

で与えられる。ただし、 $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$ である。また、 $A(r, s)$ は A の第 r 列と第 s 列からなる小行列式で、これがすべて非負であるとき、 τ は regular な $u(x, y, t)$ を与える。これには 7 つの異なるタイプがあることがわかっている^{62, 63)}。それらのうちの二つが従来の 2-ソリトン解で、(58) あるいは (59) の条件を満たすときの (57) であって、X 字型のパターンを示す定常解である。それぞれ

O-type (2,2)-ソリトン, P-type (2,2)-ソリトンと呼ばれている. それらのコード図は Fig.12 で与えられる. (2 1 4 3)

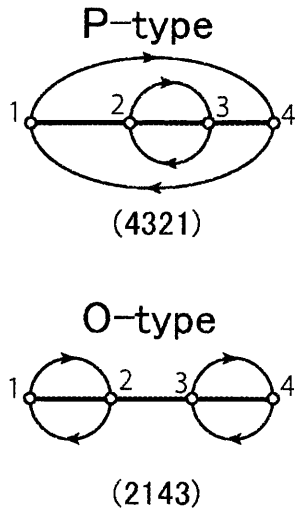


Fig. 12 Chord diagrams of 2-soliton solutions O-type and P-type. 1, 2, 3 and 4 denote k_1, k_2, k_3 and k_4 , respectively.

などは置換 $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ などを表す. これに対して, 残りの 5 個は最近認識された解で非定常解である. われわれはとくに (3142) タイプの (2,2)-ソリトンに注目した. そのコード図は Fig.13 である. これは O-type と

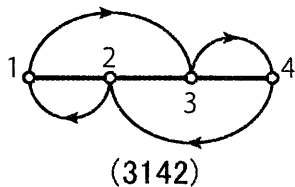


Fig. 13 Chord diagram of (3142)-type (2,2)-soliton solution. 1, 2, 3 and 4 denote k_1, k_2, k_3 and k_4 , respectively.

P-type が singular になる領域 (条件 (60) に対応するパラメーター領域) で regular である. この解は, Miles がソリトン共鳴解を利用して浅水波ソリトンの Mach 反射に対する漸近解を構成したときに要求した性質をすべてもっている. 従って, この (3142)-type の (2,2)-ソリトン解が Mach 反射を (少なくとも漸近的に) 記述する解と考えられる.

ところで Tsuji & Oikawa は^{54, 55, 56}) においてソリトンの強い二次元相互作用を調べるために Fig.14 のような振幅の同じ二つの半無限のソリトン AB, AC を x 軸に関して対称に配置した V 字型の初期波形を用いてその時間発展を数値計算した. この初期値は x 軸に沿う剛体壁による斜めに入射したソリトンの反射問題にたいするもの

と解釈することもできる. Fig.14 の ψ_i が入射角である. Miles の理論^{44, 45}) や Funakoshi の Boussinesq 方程式

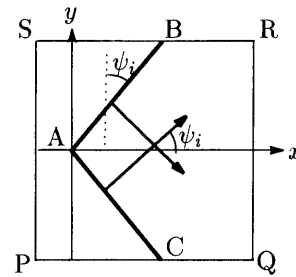


Fig. 14 Symmetrical V-shaped initial wave consisting of two semi-infinite solitons

系に関する数値計算⁶⁴) から ψ_i がある値 ψ_{ic} より大きいと等角反射が起こり, ψ_i がその値より小さいと y 軸に平行な stem と呼ばれる新しいソリトンが生成される Mach 型の反射が起こることが予想される. KP 方程式以外については後で述べることにして, まず, KP 方程式の場合を考える. 最近見いだされた新しい解を考慮して考えてみようということである⁶⁵).

振幅を一般性を失うことなく 2 として, 初期値を

$$u(x, y, 0) = 2\text{sech}^2(x - \gamma|y|) \quad (145)$$

とする. これが O-type あるいは (3142)-type のソリトンの一部と考えるとそれぞれ次のように k_1, k_2, k_3, k_4 が決まる:

- O-type: $\alpha[1, 2] = (k_2 - k_1)^2/2 = \alpha$, $\alpha[3, 4] = (k_4 - k_3)^2/2 = \alpha$, $\gamma[1, 2] = k_1 + k_2 = -\gamma$, $\gamma[3, 4] = k_3 + k_4 = \gamma \implies$

$$\begin{aligned} k_1 &= -\gamma/2 - \sqrt{\alpha/2}, & k_2 &= -\gamma/2 + \sqrt{\alpha/2}, \\ k_3 &= \gamma/2 - \sqrt{\alpha/2}, & k_4 &= \gamma/2 + \sqrt{\alpha/2} \end{aligned} \quad (146)$$

- (3142)-type: $\alpha[1, 3] = (k_3 - k_1)^2/2 = \alpha$, $\alpha[2, 4] = (k_4 - k_2)^2/2 = \alpha$, $\gamma[1, 3] = k_1 + k_3 = -\gamma$, $\gamma[2, 4] = k_2 + k_4 = \gamma \implies$

$$\begin{aligned} k_1 &= -\gamma/2 - \sqrt{\alpha/2}, & k_2 &= \gamma/2 - \sqrt{\alpha/2}, \\ k_3 &= -\gamma/2 + \sqrt{\alpha/2}, & k_4 &= \gamma/2 + \sqrt{\alpha/2} \end{aligned} \quad (147)$$

$k_1 < k_2 < k_3 < k_4$ という順序が成り立つためには, (146) と (147) から, それぞれ $\sqrt{2\alpha} < \gamma$ 及び $\gamma < \sqrt{2\alpha}$ である. これらの条件はそれぞれ, (58) 及び (60) と一致する ($K_1 = K_2$ であるから, P-type はいまの場合存在しない). つまり, $\gamma_c := \sqrt{2\alpha}$ とすると, $\gamma > \gamma_c$ のときには O-type が, $\gamma < \gamma_c$ のときには (3142)-type が regular になる. $\alpha = 2$ のときには, $\gamma_c = 2$ である. (3142)-type を生じる行列は $A_{(3142)} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ であり, τ

は

$$\begin{aligned} \tau = & (k_3 - k_1)e^{\theta_1 + \theta_3} + (k_4 - k_1)be^{\theta_1 + \theta_4} \\ & + (k_3 - k_2)ae^{\theta_2 + \theta_3} + (k_4 - k_2)abe^{\theta_2 + \theta_4} \\ & + (k_4 - k_3)ce^{\theta_3 + \theta_4} \end{aligned} \quad (148)$$

で与えられる. ここで, a, b, c は正のパラメーターである. O-type の行列と τ はこれらにおいて $c = 0$ と置けばよい.

数値計算はスペクトル法を用いて, 入射ソリトンが無限に伸びていることを模擬するような工夫をした. 従って, われわれの計算法は計算領域内のエネルギーや質量を保存せず, エネルギーおよび質量の供給系になっている.

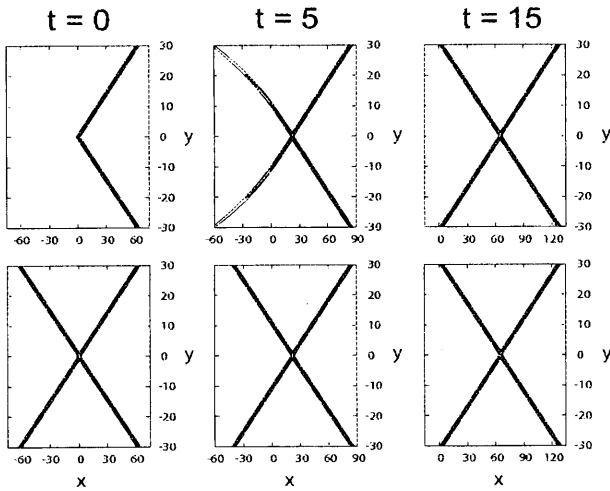


Fig. 15 Numerical solution for V-shaped initial wave (145) with $\gamma = 2.1$ (upper figures) and O-type (2,2)-soliton solution (lower figures) for $t = 0, 5$ and 15 .

Fig.15 は $\gamma = 2.1$ のときの (145) を初期値とする数値解 (上側の図) と (146) から決めた k_1, \dots, k_4 をもつ O-type の解 (下側の図) の比較である. ただし, 解析解では $a = 41/21, b = 1/21$ とした. これは $t = 0$ において右側の二つの半無限のソリトンが原点で会うようにしたためである. $t = 5$ の数値解に見られるように反射波 (左側の波) が生成され, 伸びていく. $t = 15$ では反射波が十分に発達し, 振幅も入射波と同じである. また, 数値解と解析解は非常によく一致している. つまり, 等角反射が起こっている.

Fig.16 は $\gamma = 1.5$ の場合の数値解 (上側の図) と (147) から決めた k_1, \dots, k_4 をもつ (3142)-type (2,2)-ソリトン解 (下側の図) の比較である. ただし, 解析解においては $t = 0$ においてすべてのソリトンが原点で会うように $a = 4, b = 4/7, c = 4/3$ と定めた. 図は数値解が $t = 20$ においては (3142)-type 解とよく一致することを示している. 反射波の振幅は入射波のそれより小さく, y 軸に平行

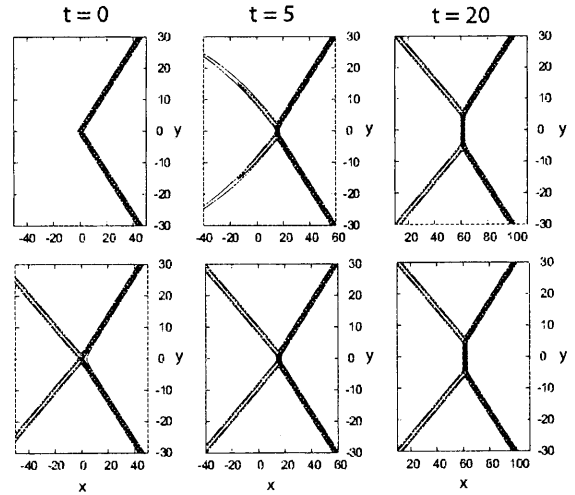


Fig. 16 Numerical solution for V-shaped initial wave (145) with $\gamma = 1.5$ (upper figures) and O(3142)-type (2,2)-soliton solution (lower figures) for $t = 0, 5$ and 20 .

な stem が生成され, 時間に比例して伸びていく. その断面はソリトンそのもの ([1,4]-ソリトン) である. Fig.17

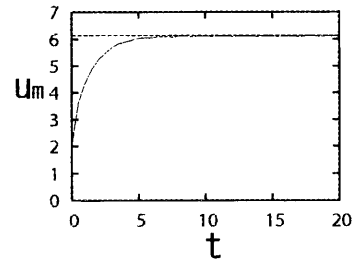


Fig. 17 Time evolution of u_{max} . $\gamma = 1.5$.

は $\gamma = 1.5$ のときの u_{max} , すなわち, stem の振幅の時間発展である. 破線は理論値 $\alpha[1,4] = 6.125$ であり, 計算値は理論値に漸近することが分かる.

数値計算は $\gamma = 1, 1.5, 1.748, 1.898, 2.1, 2.207, 2.367, 2.5$ について行ったが, $\gamma > 2$ のときは等角反射, $\gamma < 2$ のときは Mach 反射的となった. Fig.18 は stem の長さ L_s

の時間発展を示す. 解析解から, L_s は [1,3]-ソリトンの峰と [1,4]-ソリトンの峰の交点の座標として

$$L_s = (2 - \gamma)t \quad (149)$$

となるが, 計算値もこれに漸近している. Fig.19 は $\gamma > 2$

のときの位相のずれの漸近値である. 破線はその理論値 δ_x で

$$\delta_x = \frac{1}{2} \log \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 4} \quad (150)$$

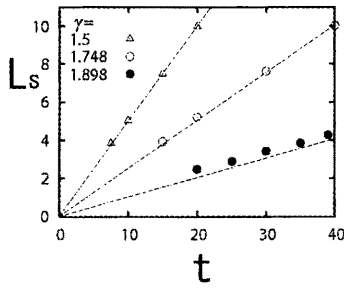


Fig. 18 Time evolution of the stem length for $\gamma = 1.5, 1.748, 1.898$.

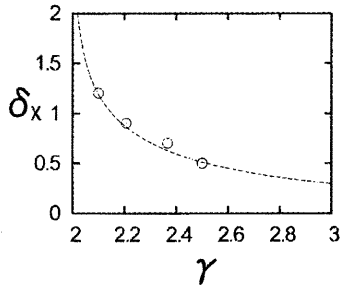


Fig. 19 Phase-shift of O-type (2, 2)-soliton for $\gamma = 2.1, 2.207, 2.367, 2.5$.

で与えられる⁶³⁾. 計算値と理論値はよく一致する. さらに

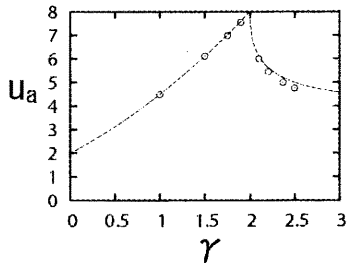


Fig. 20 Asymptotic value u_a of maximum amplitude for $\gamma = 1.5, 1.748, 1.898, 2.1, 2.207, 2.367, 2.5$.

に, Fig.20 は最大振幅の漸近的値 u_a の比較である. 理論値は

$$u_a = \begin{cases} (\gamma + 2)^2, & (\gamma < 2 \text{ のとき}) \\ \frac{8}{1 + e^{-\delta_x}}, & (\gamma > 2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (151)$$

である⁴⁵⁾. これについても計算値と理論値がよく一致することがわかる.

このような計算値と理論値の一致はここで設定している V 字型の初期値問題の漸近解が $\gamma > 2$ では, O-type (2,2)-ソリトン解, $\gamma < 2$ では, (3142)-type (2,2)-ソリトン解であることを示す. 理論的には $\gamma = 2$ のときは, 最大振幅の漸近値は 8 になるが, 初期値からの発展はどうなるのだろうか. $\gamma = 2$ に対する計算結果を Fig.21 及び

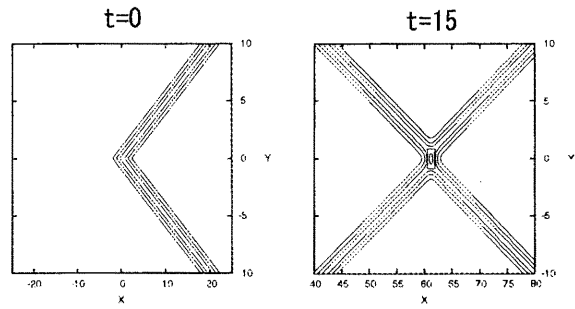


Fig. 21 Contour lines of the numerical solution for $\gamma = 2$. $t = 0$ and $t = 15$.

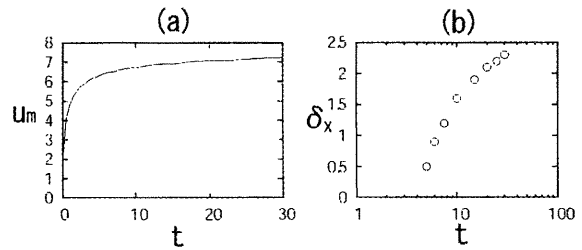


Fig. 22 (a) Time evolution of the maximum amplitude u_m for $\gamma = 2$ and (b) the phase shift for $\gamma = 2$.

Fig.22 に示す. Fig.21 に見られるように位相のずれがやや大きい点を除くと $t = 30$ 程度の計算時間では $\gamma > 2$ のときの O-type と見かけ上は変わらない. しかし, Fig.22 に見られるように最大振幅や位相のずれの時間発展は非常にゆっくりとはあるが持続しており, とくに Fig.22(b) から, δ_x (stem の長さと言ってもいいが) は時間とともに対数的に増加していることが推測される.

これらの結果をコード図を用いて解釈したり, 初期に振幅の異なるソリトンを与えた場合の結果及びコード図を用いたその解釈などは非常に興味深い⁶⁵⁾ や⁶⁰⁾ を参照して頂きたい.

6.6 ILW ソリトンの二次元相互作用

一次元のときはソリトン系だが, 二次元になるとそうではなくてというのが一般的である. KP 方程式は二次元になってもソリトン系で, 厳密解が求まり, ソリトン共鳴が起こるといようなことがわかる. そういう意味で厳密解は貴重である. ここでは, 二次元化するとソリトン系にならない系の代表として, ILW ソリトンの二次元相互作用について簡単に述べる. 簡単のために二層流体モデルを考えよう. 静止状態での上層の深さと密度を h_1, ρ_1 , 下層の深さと密度を h_2, ρ_2 ($\rho_2 = (1 + \Delta)\rho_1$, $\Delta > 0$) としよう. また, 簡単のため, 上下の境界は剛体壁とする. 界面長波の代表スケールを l とし, $h_2 \ll l$ とする. $h_1 \ll l$, $h_1 = O(h_2)$ ならば, 一次元の有限小振幅波界面波は KdV 方程式で記

述される。 $h_1 \rightarrow \infty$ ならば、一次元の有限の小振幅波界面波は Benjamin-Ono 方程式で記述される。この中間の場合、すなわち、 $h_1 = O(\ell)$ の場合には、適当に無次元化した後で、有限小振幅の界面波は

$$\frac{\partial u}{\partial T} + u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} P \int_{-\infty}^{\infty} G(X' - X) u(X', T) dX' = 0, \quad (152)$$

$$G(X) := \frac{1}{2\chi} \left[\coth\left(\frac{\pi X}{2\chi}\right) - \text{sgn}(X) \right]. \quad (153)$$

で記述される。ただし、 $\chi := h_1/\ell$ である。これは intermediate long wave (ILW) equation とか finite depth (FD) equation と呼ばれるソリトン系である。これに関する文献は⁵⁹⁾の文献表を参照頂きたい。これは $\chi \rightarrow 0$ で KdV に、 $\chi \rightarrow \infty$ で BO に帰着する。ILW ソリトンの弱い二次元相互作用は BO ソリトンの弱い相互作用と同様に摂動法で記述できる⁵⁹⁾。また、強い相互作用は (152) の弱二次元化

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial T} + u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} P \int_{-\infty}^{\infty} G(X' - X) u(X', Y, T) dX' \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad (154)$$

で記述される。これを 2DILW 方程式と呼ぼう。このソリトン解は

$$u = \frac{2K \sin(K\chi)}{\cosh[K(X + \Omega Y - cT - X_0)] + \cos(K\chi)}, \quad (155)$$

$$c = \frac{1}{\chi} - K \cot(K\chi) + \Omega^2, \quad 0 < K\chi < \pi \quad (156)$$

であって、振幅は $2K \tan(K\chi/2)$ である。

二つの同じ振幅をもつ x 軸に関して対称な V 字型の初期波形

$$u(X, Y, 0) = \frac{2K \sin(K\chi)}{\cosh[K(X + \Omega|Y|)] + \cos(K\chi)} \quad (157)$$

を考える。振幅は 1 に固定する。従って、与えられた χ に対して、 $2K \tan(K\chi/2) = 1$ から K を決める。数値計算法は他の場合と同様に、スペクトル法を使い、計算領域の Y 方向の境界では無限に長いソリトンが定常的に伝播するのを模擬するような工夫をする。従って、計算領域内のエネルギーや質量は保存しない。計算法については⁵⁴⁾を参照。

まず、 χ が小さいときを考える。このとき (154) は KP 方程式

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial T} + u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\chi}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad (158)$$

に帰着し、初期値 (157) は

$$u(X, Y, 0) = \text{sech}^2 \left[\frac{1}{\sqrt{4\chi}} (X - \Omega|Y|) \right], \quad \Omega > 0 \quad (159)$$

に帰着する。従って、 χ が小さいときには (154), (157) の解は (158), (159) の解で近似できると予想される。この場

合の O-type 解, (3142)-type 解などは変数変換をするだけで前小節に述べたことから得られる。

$\chi = 0.2$ の場合、O-type と (3142)-type の境目は $\Omega_c = 1$ であり、解は $\Omega > 1$ ならば、O-type, $\Omega < 1$ ならば、(3142)-type に漸近するはずである。また、これらの解の最大振幅の漸近値 u_a は

$$u_a = \begin{cases} (\Omega + 1)^2, & (\Omega < 1) \\ \frac{4\Omega}{\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1}}, & (\Omega > 1) \end{cases} \quad (160)$$

で与えられる。

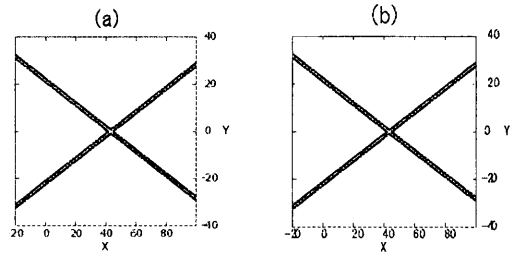


Fig. 23 Contour plots of $u(X, Y, T)$ at $T = 10$. $\chi = 0.2$, $\Omega = 2$. (a) Numerical solution to (154) with (157). (b) O-type (2,2)-soliton solution to (158) with (159).

まず、 $\chi = 0.2$, $\Omega = 2$ の場合には、反射波が生成され、入射波と同じ振幅のソリトンへと成長する。Fig.23 はこの場合の (157) を初期値とする (154) の数値解と (159) から決まる k_1, \dots, k_4 をもつ (158) の O-type (2,2)-ソリトン解の $T = 10$ における等高線図である。これらは非常によく一致することがわかる。これは明らかに等角反射である。また、 $\chi = 0.2$, $\Omega = 0.5$ の場合には、反射波と stem が生

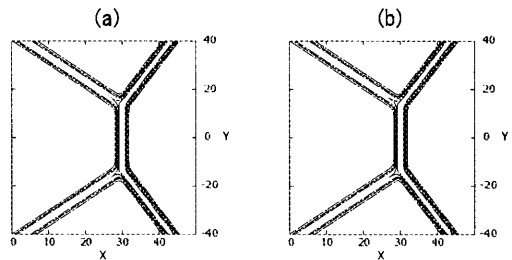


Fig. 24 Contour plots of $u(X, Y, T)$ at $T = 40$. $\chi = 0.2$, $\Omega = 0.5$. (a) Numerical solution to (154) with (157). (b) (3142)-type (2,2)-soliton solution to (158) with (159).

成され、stem は時間に比例して伸びる。反射波も stem もソリトンに成長する。Fig.24 はこの場合の (157) を初期値とする (154) の数値解と (159) から決まる k_1, \dots, k_4 をもつ (158) の (3142)-type (2,2)-ソリトン解の $T = 40$ における等高線図で、これらもよく一致している。(3142)-type

解では反射波の振幅は 0.25, stem の振幅は 2.25 であるが, 数値解もそれらとよく一致する. この場合の反射は Mach 反射である. Ω の他のいくつかの値についての計算も同様の結果を与える. 従って, $\chi = 0.2$ の場合はほとんど対応する KP 方程式と初期値で近似できると言える.

$\chi = 1, 5, 10$ の場合も相互作用の性質は定性的には $\chi = 0.2$ の場合と同じである. 比較的大きな Ω に対しては, 等角反射が起こり, 比較的小きな Ω に対しては, Mach タイプの反射が起こる. 時間発展の仕方も $\chi = 0.2$ のときとほとんど同じである. $\chi = 0.2$ の場合との違いは反射波が必ずしもソリトンではないということである. Fig.25

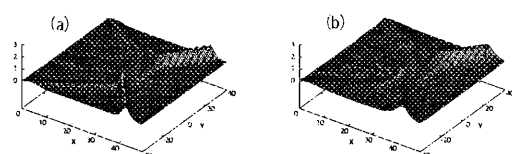


Fig. 25 Bird's eye views of the numerical solution $u(X, Y, T)$ to (154). $\Omega = 0.5$, $T = 40$. (a) $\chi = 1$, (b) $\chi = 5$.

は $\Omega = 0.5$ かつ (a) $\chi = 1$, (b) $\chi = 5$ の場合の数値解の $T = 40$ における鳥瞰図である. stem の背後に反射波のほかに長い峰をもつ波 (“寄生波”と呼ぼう) が入射波, stem, 反射波の交点付近から発生していて, 下流に流れ去ることはない. 反射波がソリトンでないのはこのことに関係するようと思われる. $\chi = 1$ では寄生波は非常に小さいので, 反射波はかなりソリトンに近いが χ が大きくなるにつれて寄生波も反射波のソリトンからのずれも目立ってくる.

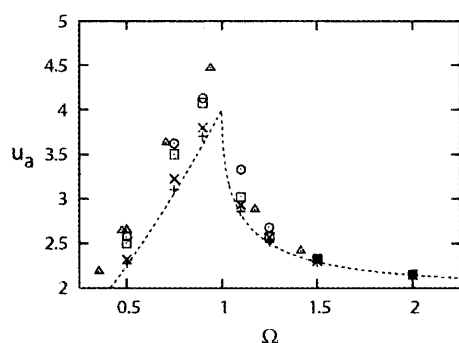


Fig. 26 Dependence of the asymptotic maximum amplitude u_a in the numerical solutions on Ω for various values of χ . + : $\chi = 0.2$, x : $\chi = 1$, \square : $\chi = 5$, \circ : $\chi = 10$, \triangle : $\chi = \infty$. The dashed line denotes (160) for the KP equation (158) with (159).

Fig.26 は $\chi = 0.2, 1, 5, 10, \infty$ に対する数値解における最大振幅の漸近値の Ω 依存性を示す. 破線は KP 近似の結果 (160) である. $\chi = 0.2$ のときのデータはこの破線に

非常に近い. これは期待通りである. また, χ が小さいときだけでなく, 大きなときにも反射のパターンの分かれ目である Ω_c は KP 近似の値 1 に近いことがわかる. また, 同じ Ω の値に対しては χ が大きいほど u_a が大きい. とくに, $\chi = 5, 10, \infty$ に対しては u_a は KP 近似における値 4 を明らかに超える. ここで考察したソリトンの二次元相互作用についても 2DILW 方程式は KP と 2DBO 方程式の中間的な性質をもつ.

7. おわりに

3月15日の最終講義をそのまま書くのではなく, 所報に書くのは研究についてにしたいと思っていたのでそうしたが, やたらと長いだけのつまらない内容になったかもしれない. とくに最後の方は⁶⁰⁾などを読んでもらう方がずっとよい. 昔の話を書くのに計算をやり直して結果を確かめたりしたためもあり原稿ができあがるのが遅れて大変申し訳なく思っています. “ソリトン”という用語が広辞苑に出ているということは同志社大学, 大宮眞弓教授の近著「非線形波動の古典解析」で知りました. 私がソリトンの世界に入った当時から比べると隔世の感があります. 日本では離散系をやる人が多くなり, 物理的な観点から連続体の非線形波動をやる人は本当に少なくなりました. ソリトン発見以来45年がたつわけですが, 多次元の問題についてはまだまだわかっていないことが多いように思います. ソリトン解がわかっているとしてもそれがどういう役割をするのか, 初期値問題の解を説明するのに役に立つのかというようなことはよくわかっていません. いまのところ解析的な手法が使えないので, 数値計算にたよるしかありません. 新しい解析的な手法の発展に期待したいところです.

これまで, 多くの人にお世話になった. 岡部先生の先生でもあった山田彦児先生, 上田 顕先生, 矢嶋信男先生, 岡部淳一先生, 特に矢嶋先生には研究の手ほどきを受けた. また, 共同研究者として薩摩順吉さん, 船越満明さん, 岡村 誠さん, 辻 英一さん, 加藤由紀さん, 丸野健一さんらに感謝申し上げる. とくに, 最近のソリトンの二次元相互作用に関する研究は辻 英一さんの協力なしにはできなかったことである. 感謝申し上げたい. また, 井上 進さん, 星野スマ子さん, 逆瀬川玲子さん, 井手留美子さんから研究室の方々にもお世話になった. 感謝申し上げたい. さらに, 応力研の共同利用については全国の方々にご協力頂いた. この機会にお礼を申し上げたい.

テニス仲間の方々にも感謝したい. おかげでよい息抜きができました. 溝田さんと組んだダブルスで九大教職員テニス大会で優勝できたこと, また, 総長杯で筑紫地区が15年目にして初めて優勝できたことは, とてもよい思い出です.

参考文献

- 1) N. J. Zabusky and M. D. Kruskal: *Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Letters **15** (1965) 240-243.
- 2) N. J. Zabusky: *A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction*, Nonlinear partial differential equations ed. by W. F. Ames (1967, New York, Academic Press) 223-258.
- 3) D. J. Korteweg and G. de Vries: *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Phil. Mag. Series 5 **39** (1895) 422-443.
- 4) T. Taniuti and C.-C. Wei: *Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. I*, J. Phys. Soc. Jpn. **24** (1968) 941-946.
- 5) C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura: *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev. Letters **19** (1967) 1095-1097.
- 6) R. M. Miura: ソリトンと逆散乱法: 歴史的視点から (1), (2), 数学セミナー (2008) 8月号 32-38, 9月号 44-49.
- 7) T. Taniuti and N. Yajima: *Perturbation method for a nonlinear wave modulation. I*, J. Math. Phys. **10** (1969) 1369-1372.
- 8) V. H. Chu and C. C. Mei: *On slowly-varying Stokes waves*, J. Fluid Mech. **41** (1970) 873-887.
- 9) A. Hasegawa and F. Tappert: *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion*, Appl. Phys. Letters **23** (1973) 142-144.
- 10) H. Hasimoto: *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972) 477-485.
- 11) M. Toda: *Vibration of a chain with nonlinear interaction*, J. Phys. Soc. Jpn. **22** (1967) 431-436.
- 12) M. Toda: *Wave Propagation in Anharmonic Lattices*, J. Phys. Soc. Jpn. **23** (1967) 501-506.
- 13) M. Toda: *Waves in Nonlinear Lattice*, Progr. Theor. Phys. Suppl. No.45 (1970) 174-200.
- 14) R. M. Miura: *Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation*, J. Math. Phys. **9** (1968) 1202-1204.
- 15) J. K. Perring and T. H. R. Skyrme: *A model unified field equation*, Nucl. Phys. **31** (1962) 550-555.
- 16) P. D. Lax: *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968) 467-490.
- 17) V. E. Zakharov and A. B. Shabat: *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Sov. Phys. JETP **34** (1972) 62-69.
- 18) J. Boussinesq: *Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, J. Math. Pures Appl. Ser 2 **17** (1872) 55-108.
- 19) G. H. Keulegan and G. W. Patterson: *Mathematical theory of irrotational translation waves*, J. Res. Nat. Bureau Stand. **24** (1940) 47-101.
- 20) V. E. Zakharov: *On stochastization of one-dimensional chains of nonlinear oscillations*, Sov. Phys. JETP **38** (1974) 108-110.
- 21) N. Yajima: *On a growing mode of the Boussinesq equation*, Progr. Theor. Phys. **69** (1983) 678-680.
- 22) M. Oikawa and N. Yajima: *Interactions of solitary waves — a perturbation approach to nonlinear systems —*, J. Phys. Soc. Jpn. **34** (1973) 1093-1099.
- 23) T. Tatsumi and H. Tokunaga: *One-dimensional shock turbulence in a compressible fluid*, J. Fluid Mech. **65** (1974) 581-601.
- 24) G. B. Whitham: *Variational methods and applications to water waves*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **299** (1967) 6-25.
- 25) T. Maxworthy: *Experiments on collisions between solitary waves*, J. Fluid Mech. **76** (1976) 177-185.
- 26) C. H. Su and R. M. Mirie: *On head-on collisions between two solitary waves*, J. Fluid Mech. **98** 509-525.
- 27) M. Funakoshi and M. Oikawa: *A numerical study on the reflection of a solitary wave in shallow water*, J. Phys. Soc. Jpn. **51** (1982) 1018-1023.
- 28) D. P. Renouard, F. J. Seabra Santos and A. M. Temperville: *Experimental study of the generation, damping, and reflexion of a solitary wave*, Dyn. Atm. Oceans **9** (1985) 341-358.

- 29) M. Oikawa and N. Yajima: *A perturbation approach to nonlinear systems. II. Interaction of nonlinear modulated waves*, J. Phys. Soc. Jpn. **37** (1974) 486-496.
- 30) H. C. Yuen and B. M. Lake: *Nonlinear deep water waves: theory and experiment*, Phys. Fluids **18** (1975) 956-960.
- 31) M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur: *Nonlinear-evolution equations of physical significance*, Phys. Rev. Letters **31** (1973) 125-127.
- 32) M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur: *The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems*, Studies Appl. Math. **53** (1974) 249-315.
- 33) N. Yajima and M. Oikawa: *A class of exactly solvable nonlinear evolution equations*, Progr. Theor. Phys. **54** (1975) 1576-1577.
- 34) S. V. Manakov: *On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves*, Sov. Phys. JETP **38** (1974) 248-253.
- 35) M. J. Ablowitz and R. Haberman: *Resonantly coupled nonlinear evolution equations*, J. Math. Phys. **16** (1975) 2301-2305.
- 36) N. Yajima and M. Oikawa: *Formation and interaction of sonic-Langmuir solitons — Inverse scattering method —*, Progr. Theor. Phys. **56** (1976) 1719-1739.
- 37) V. E. Zakharov: *Collapse of Langmuir waves*, Sov. Phys. JETP **35** (1972) 908-914.
- 38) V. D. Djordjevic and L. G. Ledekopp: *On two-dimensional packets of capillary-gravity waves*, J. Fluid Mech. **79** (1977) 703-714.
- 39) B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili: *On the stability of solitary waves in weakly dispersing media*, Sov. Phys. Doklady **15** (1970) 539-541.
- 40) V. S. Dryuma: *Analytic solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries (KdV) equation*, Sov. Phys. JETP Letters **19** (1974) 387-388.
- 41) 広田良吾: 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店, 1992.
- 42) M. Sato: *Soliton equations as dynamical systems on a infinite dimensional Grassmann manifolds*, 京大数理解析研究所講究録 No.439 (1981) 30-46.
- 43) D. J. Benney and J. C. Luke: *On the interactions of permanent waves of finite amplitude*, J. Math. and Phys. (Studies Appl. Math. の前身) **43** 309-313.
- 44) J. W. Miles: *Obliquely interacting solitary waves*, J. Fluid Mech. **79** (1977) 157-169.
- 45) J. W. Miles: *Resonantly interacting solitary waves*, J. Fluid Mech. **79** (1977) 171-179.
- 46) J. Satsuma: *N-soliton solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries equation*, J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976) 286-290.
- 47) N. Yajima, M. Oikawa and J. Satsuma: *Interaction of ion-acoustic solitons in three-dimensional space*, J. Phys. Soc. Jpn. **44** (1978) 1711-1714.
- 48) M. Oikawa, M. Okamura and M. Funakoshi: *Two-dimensional resonant interaction between long and short waves*, J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 4416-4430.
- 49) Y.-C. Ma: *The complete solution of the long-wave-Short-wave resonance equations*, Studies Appl. Math. **59** (1978) 201-221.
- 50) M. Funakoshi and M. Oikawa: *The resonant interaction between a long internal gravity wave and a surface gravity wave packet*, J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 1982-1995.
- 51) V. K. Mel'nikov: *On equations for wave interactions*, Letters Math. Phys. **7** (1983) 129-136.
- 52) Y. Ohta, K. Maruno and M. Oikawa: *Two-component analogue of two-dimensional long wave-short wave resonance interaction equations: a derivation and solutions*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) 7659-7672.
- 53) 及川正行: Benjamin-Ono ソリトンの弱い相互作用について, 九大応力研所報 第60号 (1984) 467-472.
- 54) H. Tsuji and M. Oikawa: *Oblique interaction of internal solitary waves in a two-layer fluid of infinite depth* Fluid Dyn. Res. **29** (2001) 251-267.
- 55) H. Tsuji and M. Oikawa: *Two-dimensional interaction of solitary waves in a modified Kadomtsev-Petviashvili equation*, J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004) 3034-3043.
- 56) H. Tsuji and M. Oikawa: *Oblique interaction of solitons in an extended Kadomtsev - Petviashvili equation*, **76** (2007) 084401(8pp).
- 57) M. Oikawa and H. Tsuji: *Oblique interactions of weakly nonlinear long waves in dispersive systems*, Fluid Dyn. Res. **38** (2006) 868-898.
- 58) 及川正行, 辻 英一: ソリトンの二次元相互作用について, 九大応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7

「非線形波動研究の現状と将来 — 次の10年への展望」
(2010) 75-87.

- 59) H. Tsuji and M. Oikawa: *Two-dimensional interaction of solitons in a two-layer fluid of finite depth*, Fluid Dyn. Res. (to be published).
- 60) 及川正行, 辻 英一, 児玉裕治, 丸野健一: KPII 方程式のソリトン解とその応用, 京大数理解析研究所講究録 No.1700 「可積分系数理とその応用」(2010) 65-84.
- 61) N. C. Freeman and J. J. C. Nimmo: *Soliton solutions of the Korteweg-de Vries and Kadomtsev-Petviashvili equations: The wronskian technique*, Phys. Letters A **95** (1983) 1-3.
- 62) S. chakravarty and Y. Kodama: *Classification of the line-soliton solutions of KPII*, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 275209(33pp).
- 63) S. Chakravarty and Y. Kodama: *Soliton Solutions of the KP Equation and Application to Shallow Water Waves*, Studies Appl. Math. **123** 83-151.
- 64) M. Funakoshi: *Reflection of obliquely incident solitary waves*, J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 2371-2379.
- 65) Y. Kodama, M. Oikawa and H. Tsuji: *Soliton solutions of the KP equation with V-shape initial waves*, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 312001(9pp).

及川教授の主要論文リスト

1. M. Oikawa and N. Yajima : *Interaction of solitary waves — a perturbation approach to nonlinear systems —*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.34, No.4, (1973) 1093-1099.
2. M. Oikawa and N. Yajima : *A perturbation approach to nonlinear systems. II. Interaction of nonlinear modulated waves*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.37, No.2, (1974) 486-496.
3. M. Oikawa, J. Satsuma and N. Yajima : *Shallow water waves propagating along undulation of bottom surface*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.37, No.2, (1974) 511-517.
4. M. Oikawa and N. Yajima : *Generalization of the reductive perturbation method to multi-wave systems*, Supplement of the Progress of Theoretical Physics, No. 55, (1974) 36-51.
5. N. Yajima and M. Oikawa : *A class of exactly solvable nonlinear evolution equations*, Progress of Theoretical Physics, Vol.54, No.5, (1975) 1576-1577.
6. N. Yajima and M. Oikawa : *Formation and interaction of sonic-Langmuir solitons —inverse scattering method —*, Progress of Theoretical Physics, Vol.56, No.6, (1976) 1719-1739.
7. N. Yajima, M. Oikawa and J. Satsuma : *Interaction of ion-acoustic solitons in three-dimensional space*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.44, No.5, (1978) 1711-1714.
8. N. Yajima, M. Oikawa, J. Satsuma and C. Namba : *Modulated Langmuir waves and nonlinear Landau damping*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.45, No.2, (1978) 643-651.
9. M. Funakoshi and M. Oikawa : *A numerical study on the reflection of a solitary wave in shallow water*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.51, No.3, (1982) 1018-1023.
10. M. Funakoshi and M. Oikawa : *The resonant interaction between a long internal gravity wave and a surface gravity wave packet*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.52, No.6, (1983) 1982-1995.

11. M. Funakoshi and M. Oikawa : *Long internal waves of large amplitude in a two-layer fluid*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.55, No.1, (1986) 128-144.
12. M. Oikawa, K. Chow and D. J. Benney : *The propagation of nonlinear wave packets in a shear flow with a free surface*, Studies in Applied Mathematics, Vol.76, No.1, (1987) 69-92.
13. T. Karasudani, M. Funakoshi and M. Oikawa : *Breakdown and rearrangement of vortex streets in a far wake*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.58, No.5, (1989) 1497-1500.
14. M. Oikawa, T. Karasudani and M. Funakoshi : *Stability of flow between eccentric rotating cylinders with a wide gap*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.58, No.6, (1989) 2209-2210.
15. M. Oikawa, T. Karasudani and M. Funakoshi : *Stability of flow between eccentric rotating cylinders*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.58, No.7, (1989) 2355-2364.
16. M. Okamura and M. Oikawa : *The linear stability of finite amplitude surface waves on a linear shearing flow*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.58, No.7, (1989) 2386-2396.
17. M. Oikawa, M. Okamura and M. Funakoshi : *Two-dimensional resonant interaction between long and short waves*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.58, No.12, 4416-4430 (1989).
18. M. Oikawa : *Effect of the third-order dispersion on the nonlinear Schrödinger equation*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.62, No.7, (1993) 2324-2333.
19. H. Tsuji and M. Oikawa : *Two-dimensional interaction of internal solitary waves in a two-layer fluid*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.62, No.11, (1993) 3881-3892.
20. Y. Kato and M. Oikawa : *Wave number downshift in modulated wavetrain through a nonlinear damping effect*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.64, No.12, (1995) 4660-4669.
21. Y. Kato, M. Oikawa and M. Okamura : *Direct simulation of unsteady capillary gravity waves on deep water*, Journal of the Physical Society of Japan,

- Vol.65, No.7, (1996) 2060-2067.
22. K. Maruno, K. Kajiwara, S. Nakao and M. Oikawa : *Bilinearization of discrete soliton equations and singularity confinement*, Physics Letters A, Vol.229, No.3, (1997) 173-182.
 23. Y. Kato, M. Okamura and M. Oikawa : *Two-dimensional instabilities of weakly nonlinear capillary gravity waves of permanent form near the fourth harmonic resonance*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.66, No.9, (1997) 2665-2674.
 24. Y. Kato, M. Okamura and M. Oikawa : *Three-dimensional instabilities of capillary gravity waves of permanent form near the fourth harmonic resonance*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.66, No.9, (1997) 2675-2681.
 25. K. Maruno, K. Kajiwara and M. Oikawa : *Casorati determinant solutions for the discrete-time relativistic Toda lattice equation*, Physics Letters A, Vol.241, No.6, (1998) 335-343.
 26. K. Kajiwara, K. Maruno and M. Oikawa : *Bilinearization of discrete soliton equations through the singularity confinement test*, Chaos, Solitons and Fractals, Vol.11, No.1-3, (1999) 33-39.
 27. K. Maruno and M. Oikawa : *Bilinear structure and determinant solution for the relativistic Lotka-Volterra equation*, Physics Letters A, Vol.270, No.3-4, (2000) 122-131.
 28. K. Maruno, K. Kajiwara and M. Oikawa : *A note on integrable systems related to discrete time Toda lattice*, Centre de Recherches Mathematiques, CRM Proceedings and Lecture Notes Vol. 25, (2000) 303-314 (AMS) .
 29. H. Tsuji and M. Oikawa : *Oblique interaction of internal solitary waves in a two-layer fluid of infinite depth*, Fluid Dynamics Research, Vol.29, No.4, (2001) 251-267.
 30. K. Maruno, W.-X. Ma and M. Oikawa : *Generalized Casorati determinant and positon-negaton-type solutions of the Toda lattice equation*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.73, No.4, (2004) 831-837.
 31. H. Tsuji and M. Oikawa : *Two-dimensional interaction of solitary waves in a modified Kadomtsev-Petviashvili equation*, Journal of the Physical Society

- of Japan, Vol.73, No.11, (2004) 3034-3043.
32. A.V. Porubov, H. Tsuji, I.V. Lavrenov and M. Oikawa : *Formation of the rogue wave due to non-linear two-dimensional waves interaction*, Wave Motion, Vol.42, No.3, (2005) 202-210.
 33. M. Oikawa and H. Tsuji : *Oblique interactions of weakly nonlinear long waves in dispersive systems*, Fluid Dynamics Research, Vol.38, No.12, (2006) 868-898 (Review).
 34. Y. Ohta, K. Maruno and M. Oikawa : *Two-component analogue of two-dimensional long wave-short wave resonance interaction equations: a derivation and solutions*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol.40, No.27, (2007) 7659-7672.
 35. H. Tsuji and M. Oikawa : *Oblique interaction of solitons in an extended Kadomtsev-Petviashvili equation*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 76, No.8, (2007) 084401(8pp).
 36. K. Maruno, Y. Ohta and M. Oikawa : *Note on the two-component analogue of two-dimensional long wave - short wave resonance interaction system*, Glasgow Mathematical Journal, Vol. 51, Issue A, (2009) 129-135.
 37. Y. Kodama, M. Oikawa and H. Tsuji : *Soliton solutions of the KP equation with V-shape initial waves*, Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, Vol. 42, No. 31, (2009) 312001(9pp).