

[040] 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012

井ノ口, 順一
山形大学理学部

太田, 泰広
神戸大学大学院理学研究科

箕, 三郎
立教大学理学部数学科

梶原, 健司
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

他

<https://hdl.handle.net/2324/25116>

出版情報 : COE Lecture Note. 40, 2012-03-15. 九州大学大学院数理学研究院
バージョン :
権利関係 :

可積分幾何入門

井ノ口順一 山形大学理学部数理科学科

曲面の離散微分幾何 (差分幾何) を考えるためには, 曲面のもつ可積分系の構造に着目することが有効なアプローチである. この講義では, 負定曲率曲面と平均曲率一定曲面を題材とし, 可積分系の構造をもつ曲面について解説を行い, 離散化 (差分化) の一例を紹介する.

1 曲面の基礎事項

まず 3次元ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の曲面の取り扱いを手短にまとめておく. 詳細については微分幾何の教科書, たとえば [44] を参照されたい.

1.1 記法

(x, y, z) を座標系とする 3次元数空間

$$\mathbb{R}^3 = \{P = (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

に内積 \cdot を与えたものを 3次元ユークリッド空間とよび \mathbb{E}^3 と表記する. 原点を $O = (0, 0, 0)$ で表す. 点 $P = (x, y, z)$ の位置ベクトルを $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$ で表す. \mathbb{E}^3 の 2点 P と Q の距離 $d(P, Q)$ は

$$d(P, Q) = \left| \overrightarrow{PQ} \right| = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

で求められる.

1.2 曲面片

(u, v) を座標系とする \mathbb{R}^2 内の領域 \mathcal{D} で定義されたベクトル値関数

$$\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

が以下の条件をみたすとき, 曲面片 (surface piece) とよぶ.

- $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ は u, v について \mathcal{D} 上で C^∞ 級.
- ヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

が \mathcal{D} 上でつねに階数 2.

とくに \mathbf{p} が 1 対 1 のときは埋め込まれた曲面片という.

1.3 第一基本形式と第二基本形式

曲面片 $\Sigma = (\mathcal{D}, \mathbf{p})$ に対し, 行列値関数

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix}$$

を第一基本行列とよぶ. 第一基本行列は, 今指定した径数 (u, v) を使って定めたものだから, 別の径数を使って計算すれば異なる行列値関数を得る. 径数に依らない (径数変換で不変な) 量にするためには

$$\mathbf{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

という量を定義しておけばよい. \mathbf{I} を第一基本形式 (first fundamental form) とよぶ. 第一基本形式は $\mathbf{I} = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}$ という表し方もできる. この記法の意味は次のように計算することを意味している.

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv) \cdot (\mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv) \\ &= \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u du du + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v du dv + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u dv du + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v dv dv \\ &= Edu du + F du dv + F dv du + G dv dv \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \end{aligned}$$

問 1.1 第一基本形式 \mathbf{I} が座標変換で不変なことを確かめよ. もっと詳しく説明しておく, 2 種の径数 (u, v) , (\tilde{u}, \tilde{v}) で得られる第一基本行列を

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}$$

としたとき,

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \tilde{E}d\tilde{u}^2 + 2\tilde{F}d\tilde{u}d\tilde{v} + Gd\tilde{v}^2$$

が成立することを確かめる.

曲面片の各点で \mathbf{p}_u と \mathbf{p}_v の双方に直交する単位ベクトル場をとれる. たとえば $\mathbf{n} = (\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v) / |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|$ とすればよい. \mathbf{n} を単位法ベクトル場とよぶ. \mathbf{n} を用いて

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{p}_{vu} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

と定め, これを第二基本行列とよぶ. 第一基本形式と同様に, 径数に依存しない量を得るためには

$$\mathbf{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

とおけばよい. これを \mathbf{n} に由来する第二基本形式 (second fundamental form derived from \mathbf{n}) とよぶ.

問 1.2 第二基本形式は $-d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{n}$ と表せることを確かめよ.

1 点 $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}$ に対し, $\mathbf{p}(u_0, v_0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ とする. 曲面片 $\Sigma = (\mathcal{D}, \mathbf{p})$ 上の点 P_0 における接平面 (tangent plane) を $T_{P_0}\Sigma$ で表す. $T_{P_0}\Sigma$ は $\mathbf{p}_u(u_0, v_0)$ と $\mathbf{p}_v(u_0, v_0)$ で張られる. また, $T_{P_0}\Sigma$ は P_0 を通り, $\mathbf{n}_0 := \mathbf{n}(u_0, v_0)$ を法線ベクトルにもつ平面であることに注意しよう.

2階微分 $\mathbf{p}_{uu}(u_0, v_0)$, $\mathbf{p}_{uv}(u_0, v_0)$, $\mathbf{p}_{vv}(u_0, v_0)$ を曲面に接する成分と直交する成分に分解する. 煩雑なので, (u_0, v_0) を省略して分解式を書くと

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{p}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{p}_v + L\mathbf{n}, \\ \mathbf{p}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{p}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{p}_v + M\mathbf{n}, \\ \mathbf{p}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{p}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{p}_v + N\mathbf{n}\end{aligned}$$

という形になる. これらの公式ををガウスの公式 (Gauss formula) とよぶ. ガウスの公式における接ベクトルの係数関数 Γ_{ij}^k はクリストッフエル記号 (Christoffel symbol) とよばれる. クリストッフエル記号はテンソル場ではないことに注意.

一方, 単位法ベクトル場は $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ をみたまから $\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v$ は曲面に接することがわかる. そこで

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} &= S_{11} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} + S_{21} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}, \\ -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} &= S_{12} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} + S_{22} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}\end{aligned}$$

と表そう. この式をワインガルテンの公式 (Weingarten formula) とよぶ. 行列 $S = (S_{ij})$ は各接平面上の線型変換を定めている. S を \mathbf{n} に由来する形状作用素 (shape operator derived from \mathbf{n}) とよぶ (径数に依存しない表示は $S = -d\mathbf{n}$ である). (S_{ij}) は第一基本行列と第二基本行列を使って

$$(1) \quad \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

と計算される.

問 1.3 (1) を確かめよ.

点 P_0 における S の値を $S_0 = S(u_0, v_0)$ と書く ($S_0 := (S_{ij}(u_0, v_0))$ ということ). S_0 は対称行列なので実の固有値をもつ. それらを $\kappa_1(u_0, v_0)$, $\kappa_2(u_0, v_0)$ と書く. 点ごとにこれらの固有値を求めることで関数 $(u, v) \mapsto \kappa_i(u, v) (i = 1, 2)$ が定まる. 関数 $\{\kappa_1, \kappa_2\}$ を曲面 Σ の主曲率 (principal curvature) という.

主曲率の平均を平均曲率 (mean curvature), 主曲率の積をガウス曲率 (Gauss curvature) とよび, それぞれ H , K で表す. ガウス曲率は

$$K = \det(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{II})$$

で計算できる. すなわち \mathbf{I} と \mathbf{II} の両方を用いて計算できるのだが, 実は K は \mathbf{I} のみで決まることが知られている (ガウスの驚愕定理 [44, p. 94]).

例 1.1 (球面) 原点を中心とする半径 $r > 0$ の球面 $\mathbb{S}^2(r)$ は緯度 u と経度 v を径数として曲面片

$$\mathbf{p}(u, v) = r(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

として表示できる. \mathbf{p} が 1 対 1 であるようにするには

$$\mathcal{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid |u| < \pi/2, |v| < \pi\}$$

を \mathbf{p} の定義域とすればよいが, 球面全体をカバーできない. この表示では

$$\mathbf{I} = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}$$

と計算され、 $K = 1/r^2$ が得られる。この曲面片のほかに

$$p(u, v) = (u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}), \quad u^2 + v^2 < r^2$$

を用いると球面の上半分を覆うことができる。

球面全体をひとつの曲面片で覆うことはできないが、いくつかの曲面片を組み合わせれば球面全体を覆うことができる。そこで、いくつかの曲面片の集まりを曲面 (surface) とよぶ^{*1}。ただし本講義では、曲面片のみを扱うので、以下曲面片を単に曲面とよんでしまう。

註 1.1 $\kappa_1(u_0, v_0) = \kappa_2(u_0, v_0)$ をみたす点 (u_0, v_0) を臍点とよぶ。

問題 1.1 曲面 $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ のすべての点が臍点であれば、その曲面は平面か球面であることを示せ。

2 リーマン計量

2.1 計量

ここで一旦、 \mathbb{E}^3 内の曲面を忘れて次の定義を行う ([44, 3.1 節])。

定義 2.1 平面内の領域 \mathcal{D} に行列値函数

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

が与えられていて、 $\det g > 0, E > 0$ をみたしているとき g を \mathcal{D} 上のリーマン計量とよぶ。 \mathcal{D} にリーマン計量を指定したものを $\Sigma = (\mathcal{D}, g)$ を 2次元リーマン多様体とよぶ^{*2}。第一基本行列から第一基本形式を定めたように、リーマン計量も $g = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ を定義とする方が都合がよい。

定義 2.2 リーマン計量が

$$g = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

と与えられているとき、 (u, v) を等温座標系とよぶ。また

$$g = \begin{pmatrix} 1 & F \\ F & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられているとき、 (u, v) をチェヴィシエフ網とよぶ。

リーマン多様体 $\Sigma = (\mathcal{D}, g)$ においては径数のことを座標系 (coordinates) とよぶことが多い。

任意の (向き付け可能な) 2次元リーマン多様体には等温座標系およびチェヴィシエフ網が存在することが知られている。2次元リーマン多様体にガウス曲率が定義される。正確な定義はここでは省略し、次の事実だけ挙げておく。

^{*1} 「曲面」の正確な定義を与えるためには、多様体の概念を導入する必要がある。本稿では、多様体の概念を導入せずすむので割愛する。

^{*2} もちろん、これは 2次元リーマン多様体の特別なものにすぎないが本稿を読むにあたってはこの定義で充分である。

命題 2.1 等温座標系 (u, v) でリーマン計量 g が与えられたとき, ガウス曲率は

$$K = -\frac{1}{2E} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \log E$$

で求められる ([44, p. 95]).

2.2 等長はめ込み

例 2.1 (\mathbb{E}^3 内の曲面) $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ を曲面片とする. このとき $g = I$ はリーマン計量であり, g のガウス曲率は $\det(I^{-1}II)$ と一致する ([44, 3.2 節]).

例 2.2 (双曲平面) 上半平面 $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$ にリーマン計量

$$g = \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix}$$

を与えたものを \mathbb{H}^2 と表し, 双曲平面とよぶ. 上の命題より $K = -1$ であることがわかる.

2次元リーマン多様体 $\Sigma = (\mathcal{D}, g)$ に対し曲面片 $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ が存在し, $g = I$ となるとき, p を Σ の等長はめ込みとよぶ. とくに p が 1 対 1 のときは等長埋め込みという. したがって「ガウス曲率が負で一定の曲面」は双曲幾何の \mathbb{E}^3 内の模型ということができる.

註 2.1 双曲平面から \mathbb{E}^3 への等長はめ込みは存在しない (ヒルベルトの定理). 本稿に登場する負定曲率曲面は常に特異点をもつ.

3 ガウス曲率一定曲面と可積分系

3.1 基本的な例

ガウス曲率が $K = -1$ の曲面を構成してみよう. もっとも簡単な構成法は回転面の中で例を探すことである. xz 平面内の曲線 $(x, z) = (f(u), g(u))$, (ただし $f > 0$) を z 軸の周りに回転させて得られる曲面は

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

と表せる. u を弧長径数に選んでおくと

$$E = 1, F = 0, G = f^2, L = f'g - fg', M = 0, N = fg'$$

より $K = -f''/f$. $K = -1$ なので $f'' = f$ を解けばよい. たとえば $f(u) = e^{-u} > 0$ と選ぶと

$$g(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}} dt.$$

この曲線を $z < 0$ まで延長するには

$$(f(u), g(u)) = \begin{cases} (e^{-u}, \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2s}} ds), & u \geq 0, \\ (e^u, \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2s}} ds), & u < 0, \end{cases}$$

とすればよい. この曲線はトラクトリクスとよばれる. トラクトリクスを回転させて得られることからこの曲面はトラクトロイドという. トラクトロイドはベルトラミの擬球 (Beltrami's pseudosphere) という別名もある^{*3}.

註 3.1 後で使うため, トラクトリクスの別の表示を与えておく.

$$(2) \quad (x, z) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t).$$

この曲面 (トラクトロイド) を眺めていても可積分系との関係は見えてこない. 可積分系の構造を見出すには適切な座標系への変更が必要である.

3.2 漸近座標系とサイン・ゴールドン方程式

定義 3.1 曲面 $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ において, 座標系 (u, v) が $L = N = 0$ をみたすとき, 漸近座標系とよぶ.

ここで次の事実を使う.

命題 3.1 曲面 $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ において $K < 0$ ならば漸近座標系 (u, v) に取替えができる. 漸近座標系のもとでは

$$E = \rho^2 a^2, \quad F = \rho^2 ab \cos \phi, \quad G = \rho^2 b^2, \quad L = N = 0, \quad M = \rho ab \sin \phi$$

と表せる. ただし $K = -1/\rho^2$.

以下, 漸近座標系で表示された負曲率曲面 ($K = -1/\rho^2$) を考える. また領域 \mathcal{D} は単連結であるとする. このとき, 曲面の積分可能条件は

$$(3) \quad \phi_{uv} = ab \sin \phi + 2(\mathcal{P}_v - \mathcal{Q}_u),$$

$$(4) \quad a_v + \frac{\rho_v}{2\rho} a - \frac{\rho_u}{2\rho} b \cos \phi = 0, \quad b_u + \frac{\rho_v}{2\rho} b - \frac{\rho_u}{2\rho} a \cos \phi = 0$$

で与えられる. 補助的に導入した関数 \mathcal{P}, \mathcal{Q} は

$$\mathcal{P} = -\frac{\rho_v a}{4\rho b} \sin \phi, \quad \mathcal{Q} = -\frac{\rho_u b}{4\rho a} \sin \phi$$

で定義される. (3) をガウス方程式, (4) をコダッチ方程式とよぶ. コダッチ方程式より

$$K \text{ が定数} \iff \mathcal{P} = \mathcal{Q} = 0 \iff a_v = b_u = 0$$

がわかる. $K = -1/\rho^2$ が定数のときは, ガウス・コダッチ方程式は

$$\phi_{uv} = ab \sin \phi, \quad a_v = b_u = 0$$

と簡単になる. 単に簡単な形になるというだけでなく, 可積分系の構造をもつということが読み取れる. a, b をそれぞれ $a_\lambda := \lambda a, b_\lambda := \lambda^{-1} b (\lambda \neq 0)$ で置き換えてもガウス・コダッチ方程式が保たれる. ガウス・コダッチ方程式は曲面の積分可能条件であったから

$$I_\lambda := \begin{pmatrix} \rho^2 a_\lambda & \rho^2 a_\lambda b_\lambda \cos \phi \\ \rho^2 a_\lambda b_\lambda \cos \phi & \rho^2 b_\lambda \end{pmatrix}, \quad \Pi_\lambda := \begin{pmatrix} 0 & \rho a_\lambda b_\lambda \sin \phi \\ \rho a_\lambda b_\lambda \sin \phi & 0 \end{pmatrix}$$

^{*3} ガウスはこの曲面を発見していた [35].

とおくと、これらを第1, 第2基本行列にもつ曲面 $p_\lambda: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ が存在する. $\Pi_\lambda = \Pi$ であることに注意しよう. つまり負定曲率曲面がひとつあると, 第2基本行列とガウス曲率を保ったまま連続変形できることがわかった. ここで変形の径数 $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が出てきたが, これは逆散乱法におけるスペクトル径数と一致している. 一般の曲面はこのような変形を許容しない. 連続変形の存在は負定曲率曲面が可積分系であることの象徴である.

さらに, 漸近座標系の取替えで $a = b = 1$ とすることができる^{*4}. するとガウス・コダッチ方程式はサイン・ゴールドン方程式 $\phi_{uv} = \sin \phi$ になる. 変形族 $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}^\times}$ はもとの曲面の同伴族とよばれている.

ここで規格化 $a = b = 1$ の意味を考えよう. もともと (u, v) は漸近座標系であった. 漸近座標系は第2基本行列を標準化した座標系であった. 漸近 $a = b = 1$ と規格化すると第1基本行列が $E = G = 1$ となるから, (u, v) はチェヴィシェフ網でもある. 一般の負曲率曲面では, このように I と II を同時標準化することはできないが, 負定曲率曲面では漸近かつチェビシェフという座標系をとることができ, その座標系では積分可能条件が(可積分系の典型例である)サイン・ゴールドン方程式になった.

例 3.1 (トラクトロイド) サイン・ゴールドン方程式の1-ソリトン解

$$\phi(u, v) = 4 \tan^{-1} \exp(\lambda u + \lambda^{-1} v)$$

の定める曲面を求めよう. $\lambda = 1$ のときは定常キंक, $\lambda = -1$ のときは定常反キंकとよばれている. この解から定まる曲面は, $\lambda = \tan(\theta/2)$ とおくと

$$p_\theta(u, v) = \sin \theta \begin{pmatrix} \operatorname{sech}(\lambda u + \lambda^{-1} v) \cos(u - v) \\ \operatorname{sech}(\lambda u + \lambda^{-1} v) \sin(u - v) \\ (\lambda u + \lambda^{-1} v) - \tanh(\lambda u + \lambda^{-1} v) + \cot \theta (u - v) \end{pmatrix}$$

で与えられる^{*5}. この曲面の性質を述べるために次の定義をしよう.

定義 3.2 h を定数とする. xz 平面内の曲線 $(x, z) = (f(u), g(u))$, ($f > 0$) に対し

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u) + hv)$$

で定まる曲面を, この曲線を母線とする螺旋面 (helicoidal surface) とよぶ. h をピッチという. $h = 0$ のときは回転面である.

トラクトロイドに戻ろう. トラクトリクス $(x, z) = (f(u), g(u))$ に対しピッチ h の螺旋面を作るとガウス曲率が負の一定値 $-1/(1+h^2)$ であることが確かめられる. この曲面はディニの擬球とよばれている. $h = \cot \theta$ とおき, 相似変形 (scaling) をしてガウス曲率が -1 となるようにする:

$$\sin \theta (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u) + \cot \theta v).$$

ここでトラクトリクスの径数表示を (2) に変更してみれば, 1-ソリトン解の定める曲面がディニの擬球であることがわかる. とくに定常キंक ($\theta = \pi/2$) の定める曲面はトラクトロイドである.

^{*4} 正確には, 曲面に弱正則性 ($a \neq 0, b \neq 0$) を仮定しておく.

^{*5} 詳細な計算は [41] 参照.

4 ラックス形式

4.1 ガウス・ワインガルテンの公式

$K = -1$ の曲面の同伴族 $\{\mathbf{p}_\lambda\}$ を考えよう. 行列値関数 $\mathcal{F}_\lambda : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathrm{GL}_3\mathbb{R}$ を

$$\mathcal{F}_\lambda = ((\mathbf{p}_\lambda)_u, (\mathbf{p}_\lambda)_v, \mathbf{n}_\lambda)$$

と定める. \mathcal{F}_λ は次をみます.

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_\lambda \mathcal{U}_\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_\lambda \mathcal{V}_\lambda,$$

$$\mathcal{U}_\lambda = \begin{pmatrix} (\log |a \sin \phi|)_u & 0 & \rho^{-1} \cot \phi \\ -\lambda^2 a \phi_u / (b \sin \phi) & 0 & -\lambda^2 a / (\rho b \sin \phi) \\ 0 & \rho ab \sin \phi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-2} b \phi_v / (a \sin \phi) & -\lambda^{-2} b / (\rho a \sin \phi) \\ 0 & (\log |b \sin \phi|)_v & \rho^{-1} \cot \phi \\ \rho ab \sin \phi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

この線型方程式系の積分可能条件 $(\mathcal{V}_\lambda)_u - (\mathcal{U}_\lambda)_v + [\mathcal{U}_\lambda, \mathcal{V}_\lambda] = 0$ を計算すればガウス・コダッチ方程式が得られる.

4.2 2×2 行列によるラックス表示

2×2 行でガウス・ワインガルテンの公式を書き直す. そのために 3 次元ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 を特殊ユニタリ群 $\mathrm{SU}(2)$ のリー環 $\mathfrak{su}(2)$ と同一視する. \mathbb{E}^3 の標準基底を次のように対応させる. $i = \sqrt{-1}$ として

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -x_3 i & -x_2 - x_1 i \\ x_2 - x_1 i & x_3 i \end{pmatrix}$$

と対応させる. この同一視で内積と外積は

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\frac{1}{2} \mathrm{tr}(\mathbf{x}\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \frac{1}{2} [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

と対応する. ここで $\Phi_\lambda : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ を

$$\lambda \rho a \Phi_\lambda \left(\cos \frac{\phi}{2} \mathbf{e}_1 - \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e}_2 \right) \Phi_\lambda^{-1} = (\mathbf{p}_\lambda)_u,$$

$$\lambda^{-1} \rho b \Phi_\lambda \left(\cos \frac{\phi}{2} \mathbf{e}_1 + \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e}_2 \right) \Phi_\lambda^{-1} = (\mathbf{p}_\lambda)_v,$$

$$\Phi_\lambda \mathbf{e}_3 \Phi_\lambda^{-1} = \mathbf{n}_\lambda$$

で定めることができる^{*6}. ガウス・ワインガルテンの公式は

$$\frac{\partial}{\partial u} \Phi_\lambda = \Phi_\lambda U_\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial v} \Phi_\lambda = \Phi_\lambda V_\lambda,$$

^{*6} $\mathrm{SU}(2)$ は $\mathrm{SO}(3)$ の二重被覆であるという事実を使っている.

$$U_\lambda = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \phi_u/2 & -\lambda a \exp(i\phi/2) \\ -\lambda a \exp(-i\phi/2) & -\phi_u/2 \end{pmatrix}, \quad V_\lambda = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\phi_v/2 & \lambda^{-1} b \exp(-i\phi/2) \\ \lambda^{-1} b \exp(i\phi/2) & \phi_v/2 \end{pmatrix}$$

と書き換えられる. これを負定曲率曲面のラックス表示とよぼう. Φ_λ を行列値波動関数または **extended frame** とよぶ. Φ_λ から各曲面は次の公式で復元される.

命題 4.1 (Sym の公式)

$$(5) \quad p_\lambda = -2\rho\lambda \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial \lambda} \Phi_\lambda^{-1} : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathfrak{su}(2) = \mathbb{E}^3$$

はガウス曲率が負の一定値 $-1/\rho^2$ の曲面で (u, v) は漸近座標系である.

$$n_\lambda := \Phi_\lambda e_3 \Phi_\lambda^{-1}$$

が p_λ の単位法ベクトル場を与える.

問題 4.1 (5) が $K = -1/\rho^2$ の曲面であることを確かめよ.

5 ベックルンド変換

5.1 線叢

19 世紀の幾何学においては, 負定曲率曲面から別の負定曲率曲面を構成する方法が研究された.

定義 5.1 曲面 $p : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ と \mathcal{D} 上の単位ベクトル場 ν に対し

$$\tilde{p}(u, v) := p(u, v) + r\nu(u, v)$$

とおく ($r > 0$ は定数). \tilde{p} が曲面を定め, さらに次の条件をみたすとき, p のベックルンド変換とよぶ.

- (1) ν は両方の曲面に接する (このような \tilde{p} を p を通る接線叢とよぶ).
- (2) \tilde{p} の単位法ベクトル場 \tilde{n} と, もとの曲面の単位法ベクトル場は定角をなす. すなわち $\cos \theta := \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{n}}$ は定数.

負定曲率曲面はベックルンド変換をもつ曲面として特徴づけられる.

定理 5.1 (Bäcklund(1875)) 曲面 p がベックルンド変換をもてば, p のガウス曲率は負の一定値 $K = -(\sin \theta/r)^2$.

5.2 サイン・ゴルドン方程式のベックルンド変換

ベックルンド変換は漸近座標系を保つ. したがってサイン・ゴルドン方程式の与えられた解から新しい解を導く.

簡単のため $K = -1$ としよう (したがって $r = \sin \theta$). このときベックルンド変換は次のように具体的に表示される.

$$\tilde{p} = p + \frac{\sin \theta}{2} \left\{ \frac{\cos(\tilde{\phi}/2)}{\cos \phi/2} (p_u + p_v) + \frac{\sin(\tilde{\phi}/2)}{\sin \phi/2} (p_u - p_v) \right\}.$$

$\tilde{\phi}$ はサイン・ゴールドン方程式の新しい解であり

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\tilde{\phi} + \phi}{2} \right) = \lambda \sin \left(\frac{\tilde{\phi} - \phi}{2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\tilde{\phi} - \phi}{2} \right) = \lambda^{-1} \sin \left(\frac{\tilde{\phi} + \phi}{2} \right)$$

にしたがう。ただし $\lambda = \tan(\theta/2)$. (6) は今日、サイン・ゴールドン方程式のベックルンド変換として知られているものである。(6) をトラクトロイドに施して得られる曲面 (2-ソリトン曲面) については [34, 展望 A.2], [41], [61] を参照されたい。

例 5.1 (アムズラー曲面) 漸近座標系で表示された $K = -1$ の曲面に対し、ピアンキは「座標曲線が直線」という条件を課したクラスを考察した。この条件はサイン・ゴールドン方程式に対し、 ϕ は $r = \sqrt{-uv}$ のみに依存するという相似簡約を課すことに対応する。サイン・ゴールドン方程式は

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r} \phi_r + \sin \phi = 0$$

という常微分方程式に簡約されるが、

$$y(t) := \exp(i\phi(r)), \quad t = r^2$$

と変数変換すると $P_{\text{III}}^{D_8^{(1)}}$ 型パンルヴェ方程式

$$y_{tt} = \frac{y_t^2}{y} - \frac{y_t}{t} + \frac{i}{8t}(y^2 - 1)$$

に帰着する。このクラスの曲面はアムズラー曲面とよばれる。

註 5.1 III 型パンルヴェ方程式 (P_{III}) の標準形は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ をパラメータとして

$$y_{tt} = \frac{y_t^2}{y} - \frac{y_t}{t} + \frac{1}{t}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}$$

で与えられる。アムズラー曲面の構造方程式は $\gamma = \delta = 0, \alpha\beta \neq 0$ をみたしている。この条件をみたす III 型パンルヴェ方程式は $D_8^{(1)}$ 型とよばれている ([63], [58])。アムズラー曲面の構造方程式は $P_{\text{III}}^{D_8^{(1)}}$ 型パンルヴェ方程式で、さらに $\alpha = -\beta = i/8, (i = \sqrt{-1})$ と特殊化したものである。

6 負定曲率曲面の差分化

ここでは、負定曲率曲面のもつ可積分系の構造に着目して、曲面の差分化を考える。曲面の差分化については離散可積分系理論とは独立に 1950 年代の Sauer による研究 [64] がある。広田による差分サイン・ゴールドン方程式が発表されたのが 1977 年刊行の論文である。差分サイン・ゴールドン方程式と差分曲面の関係がつかののは 1990 年代になってからである。なお本節と次節の図版は松浦望氏に作成していただいた。

6.1 差分曲面

まず一般の状況から説明しておこう。

記法

- G : グラフ,
- $v \in V$: 頂点, V : 頂点全体の集合 (頂点集合),
- $e = [v, v'] \in E$: 頂点 v と頂点 v' を結ぶ辺,
- E : 辺全体の集合 (辺集合),
- $q = (v_1, v_2, v_3, v_4)$: v_1, v_2, v_3, v_4 を頂点にもつ基本四角形 (elementary quadrilateral),
- Q : 基本四角形全体の集合.

基本四角形とは何かを説明しよう.

定義 6.1 頂点の 4 つ組 (v, v', v'', v''') が次の条件を満たすとき基本四辺形とよぶ.

- (1) 頂点は丁度四本の辺:

$$[v, v'], [v', v''], [v'', v'''], [v''', v] \in E$$

で結ばれる. とくに $[v, v''], [v', v'''] \notin E$ である.

- (2) 基本四辺形の各辺は 1 つまたは 2 つの基本四角形に含まれる.

とくに辺 e が一つの四角形のみに含まれるとき $e \in \partial G$ と書き, “辺 e は G の境界上にある” と言い表す.

定義 6.2 グラフ G が次の条件をみたすとき矩グラフ (quad-graph) とよぶ. 各基本四角形のすべての頂点がちょうど 4 つの辺

$$[v, v'], [v', v''], [v'', v'''], [v''', v] \in E$$

上にあり, 各辺はちょうど 1 つだけ, または 2 つだけの基本四角形に属する.

この講義では記述の簡略化のため, 矩グラフとして, 差分間隔 ε, δ をもつ整数格子 \mathbb{L} のみを扱う. すなわち

$$\mathbb{L} = \{(n\varepsilon, m\delta) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

\mathbb{R}^2 内の領域 \mathcal{D} を \mathbb{L} に置き換え, \mathbb{L} 上で定義されたベクトル値函数

$$p : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{E}^3; (n\varepsilon, m\delta) \mapsto p_m^n$$

に対し, 次の記法を用いる.

- p_m^n : 頂点,
- $[p_m^n, p_m^{n+1}]$ など: 辺,
- $(p_m^n, p_m^{n+1}, p_{m+1}^{n+1}, p_{m+1}^n)$: 基本四角形.

6.2 差分漸近網

まず着目するのは漸近座標系である. 漸近座標系の条件 $L = N = 0$ を見直す. これは p_{uu} と p_{vv} が曲面に接するという他に他ならない. そこでこの純幾何学的説明を利用する.

定義 6.3 $p : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{E}^3$ が条件

各 $(n\varepsilon, m\delta) \in \mathbb{L}$ に対し 5 点 $\mathbf{p}_m^n, \mathbf{p}_m^{n+1}, \mathbf{p}_{m\pm 1}^n$ は同一平面 P_m^n 上にある

をみたすとき \mathbf{p} を差分漸近網 (discrete asymptotic net) とよぶ.

6.3 差分 K 曲面

負定曲率曲面においては漸近かつチェヴィシエフ網である座標系がとれた. この性質に着目し, Bobenko と Pinkall[6] は次の定義を与えた.

定義 6.4 差分漸近網 $\mathbf{p} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{E}^3$ が条件をみたすとき差分負定曲率曲面 (差分 K 曲面と略称). とよぶ.

基本四角形 $(\mathbf{p}_m^n, \mathbf{p}_m^{n+1}, \mathbf{p}_{m+1}^n, \mathbf{p}_{m+1}^{n+1})$ の対辺の長さは等しい

$$|\mathbf{p}_m^{n+1} - \mathbf{p}_m^n| = |\mathbf{p}_{m+1}^{n+1} - \mathbf{p}_{m+1}^n|, \quad |\mathbf{p}_{m+1}^n - \mathbf{p}_m^n| = |\mathbf{p}_{m+1}^{n+1} - \mathbf{p}_m^{n+1}|.$$

差分 K 曲面は漸近チェヴィシエフ網を差分化したものに他ならない.

平面 P_m^n の単位法ベクトル \mathbf{n}_m^n を \mathbf{p}_m^n の単位法ベクトルと定めよう.

$$\mathbf{n}_m^n = \frac{(\mathbf{p}_m^{n+1} - \mathbf{p}_m^n) \times (\mathbf{p}_{m+1}^n - \mathbf{p}_m^n)}{|(\mathbf{p}_m^{n+1} - \mathbf{p}_m^n) \times (\mathbf{p}_{m+1}^n - \mathbf{p}_m^n)|}$$

と計算できる. \mathbf{p}_m^n のまわりの角関数 $\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3, \kappa^4$ を

$$\begin{aligned} \kappa_{n,m}^1 &= \angle(\mathbf{p}_m^{n+1} - \mathbf{p}_m^n, \mathbf{p}_{m+1}^n - \mathbf{p}_m^n), \\ \kappa_{n,m}^2 &= \angle(\mathbf{p}_{m+1}^n - \mathbf{p}_m^n, \mathbf{p}_{m+1}^{n+1} - \mathbf{p}_m^{n+1}), \\ \kappa_{n,m}^3 &= \angle(\mathbf{p}_m^{n+1} - \mathbf{p}_m^n, \mathbf{p}_{m-1}^n - \mathbf{p}_m^n), \\ \kappa_{n,m}^4 &= \angle(\mathbf{p}_{m-1}^n - \mathbf{p}_m^n, \mathbf{p}_{m-1}^{n+1} - \mathbf{p}_m^{n+1}) \end{aligned}$$

で定める. 基本四角形の対辺の長さが等しいので

$$\kappa_{n,m}^1 = \kappa_{n+1,m+1}^3, \quad \kappa_{n+1,m}^2 = \kappa_{n,m+1}^4$$

が成立している.

\mathbf{n}_m^{n+1} と \mathbf{n}_m^n のなす角を $p_m^n \in (0, \pi)$, \mathbf{n}_{m+1}^n と \mathbf{n}_m^n のなす角を $q_m^n \in (0, \pi)$ としよう. すると

$$\mathbf{n}_m^{n+1} \cdot \mathbf{n}_m^n = \mathbf{n}_{m+1}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{m+1}^n, \quad \mathbf{n}_{m+1}^n \cdot \mathbf{n}_m^n = \mathbf{n}_{m+1}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_m^{n+1}$$

であることがわかる^{*7}. この関係式から差分コダッチ方程式 (discrete Codazzi equation)

$$p_{m+1}^n - p_m^n = 0, \quad q_m^{n+1} - q_m^n = 0$$

が得られる.

ラックス表示の差分化を次のように与えることができる.

$$\Phi_m^{n+1}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\det U_m^n(\lambda)}} \Phi_m^n(\lambda) U_m^n(\lambda), \quad \Phi_{m+1}^n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\det V_m^n(\lambda)}} \Phi_m^n(\lambda) V_m^n(\lambda),$$

^{*7} 正確な議論は [41, 第 3 部] を参照.

$$U_m^n(\lambda) = \begin{pmatrix} \exp \frac{i(\phi_m^{n+1} - \phi_m^n)}{2} & -\lambda i \tan \frac{p_m^n}{2} \\ -\lambda i \tan \frac{p_m^n}{2} & \exp \frac{-i(\phi_m^{n+1} - \phi_m^n)}{2} \end{pmatrix},$$

$$V_m^n(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & i\lambda^{-1} \tan \frac{q_m^n}{2} \exp \frac{-i(\phi_{m+1}^n - \phi_m^n)}{2} \\ i\lambda^{-1} \tan \frac{q_m^n}{2} \exp \frac{i(\phi_{m+1}^n - \phi_m^n)}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

このラックス表示の和分条件は差分ガウス方程式 (discrete Gauss equation)

$$\sin \frac{\phi_{m+1}^{n+1} - \phi_m^{n+1} - \phi_{m+1}^n + \phi_m^n}{4} - \tan \frac{p_m^n}{2} \tan \frac{q_m^n}{2} \sin \frac{\phi_{m+1}^{n+1} + \phi_m^{n+1} + \phi_{m+1}^n + \phi_m^n}{4} = 0,$$

と差分コダッチ方程式

$$p_{m+1}^n - p_m^n = 0, \quad q_m^{n+1} - q_m^n = 0$$

である. 差分ガウス・コダッチ方程式は広田 [27] により提出された差分サイン・ゴールドン方程式 (の係数を一般化したもの) である.

差分版のラックス表示から差分 K 曲面を復元する Sym の公式は次で与えられる.

命題 6.1 (Bobenko-Pinkall [6])

$$p_m^n(\lambda) := -2\lambda \frac{\partial \Phi_m^n(\lambda)}{\partial \lambda} \Phi_m^n(\lambda)^{-1}$$

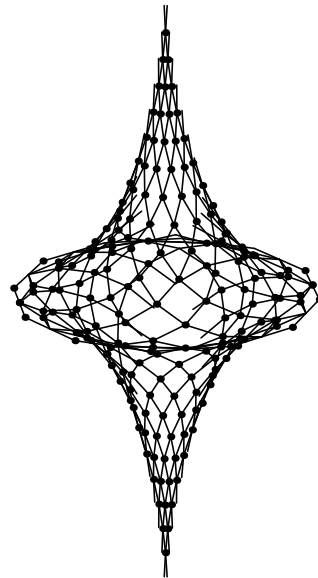
例 6.1 (差分トラクトロイド) 簡単のため差分間隔を $\varepsilon = \delta = 1$ とする.

$$p_m^n(\lambda) = -2\lambda \begin{pmatrix} -\frac{2c}{1+c^2} (m+n) \cos \omega_m^n & \\ -\cos\{2(m-n)\arg(1+ic)\} \sin \omega_m^n & \\ -\sin\{2(m-n)\arg(1+ic)\} \sin \omega_m^n & \end{pmatrix},$$

ただし

$$\omega_m^n = 2\arg \left(1 + i \left(\frac{1-c}{1+c} \right)^{m+n} \right), \quad c > 0, \quad i = \sqrt{-1}$$

がトラクトロイドの差分化である.



差分トラクトロイド

差分サイン・ゴルドン方程式の有限隙型解 (finite gap solution, ϑ 函数解) で定まる差分 K 曲面については Bobenko-Pinkall [6] で詳しく調べられている. またアムズラー曲面の差分化を Hoffmann[31] が提案している.

7 等積アフィン幾何

7.1 アフィン不変性

漸近座標系は次の不変性をもつ.

命題 7.1 漸近座標系 (u, v) で表示された曲面 $\mathbf{p} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ に \mathbb{E}^3 のアフィン変換 F を施して得られる曲面 $\tilde{\mathbf{p}}(u, v) = F(\mathbf{p}(u, v))$ に対し (u, v) は, やはり漸近座標系である.

この不変性に着目しよう. 漸近座標系がアフィン変換で不変ならば, アフィン変換の下での「曲面の微分幾何」を考え, そして差分化を考察しよう. そこで等積アフィン変換群 $SA(3)$ の定める幾何 (等積アフィン幾何) をこの節で扱う. 等積アフィン幾何における曲線・曲面の微分幾何 (等積アフィン幾何) については, 野水・佐々木による教科書 [57] を参照されたい.

7.2 等積アフィン曲面論

等積アフィン変換とは

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A \in SL_3\mathbb{R}$$

という変換のことである. この群を用いるのであるから, \mathbb{R}^3 に距離構造 (ユークリッド空間の構造) を与えるのではなく, 等積構造を与えた空間 \mathbb{A}^3 を用意しておく必要がある.

定義 7.1 D を \mathbb{R}^3 の標準的な (共変) 微分作用素, $dv = \det$ を体積要素とする. $\mathbb{A}^3 = (\mathbb{R}^3, D, dv)$ を 3次元標準的等積アフィン空間とよぶ.

この空間 \mathbb{A}^3 内の曲面 $\mathbf{p} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{A}^3$ を考える. 曲面の座標系を (u_1, u_2) とする. いま \mathbb{A}^3 には内積が与えられていないので (向きを除き) 一意的に法ベクトルを定める方法がない. そこで何でもよいから接平面に横断的なベクトル場 $\boldsymbol{\xi}$ をひとつ取り,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_k} + h_{ij} \boldsymbol{\xi}$$

と分解する. さらに

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial u_i} = - \sum_{j=1}^2 S_{ji} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_j} + \tau_i \boldsymbol{\xi}$$

と分解しよう. 行列値函数 $h = (h_{ij})$ を等積アフィン計量とよぼう. また行列値函数 $S = (S_{ij})$ を等積アフィン形状作用素とよぶ.

補題 7.1 $\det h \neq 0$ という性質は $\boldsymbol{\xi}$ の選び方に依存しない. このとき \mathbf{p} は非退化であるという.

以下 \mathbf{p} は非退化であると仮定しよう. このとき h を等積アフィン計量とよぶ. すると, ある意味で標準的な横断的ベクトル場がとれることが知られている ([57, p. 63]).

命題 7.2 p が非退化ならば, 以下の条件をみたす横断的ベクトル場 ξ が向きを除いて一意に存在する.

- $\vartheta := \det(\cdot, \cdot, \xi)$ が h の面積要素と一致する.
- ϑ は $\{I_{ij}^k\}$ の定める線型接続に関し平行.

このとき $\tau_i = 0$ である. この ξ をブラシュケ・ベクトル場とよぶ.

ブラシュケ・ベクトル場を指定した非退化な曲面をブラシュケ曲面とよぶ. ブラシュケ曲面の等積アフィン計量はブラシュケ計量ともよばれる.

7.3 アフィン球面

補題 7.2 ブラシュケ曲面 (p, ξ) において

- 等積アフィン形状作用素 $S = (S_{ij})$ が単位行列の (0 ではない) 定数倍である \iff すべてのブラシュケ法線 $\mathbb{R}\xi$ がある 1 点に集まる.
- $S = 0 \iff$ すべてのブラシュケ法線 $\mathbb{R}\xi$ が平行.

この補題に基づき次の定義を与える.

定義 7.2 ブラシュケ曲面が

- $S = kE, k \neq 0$ のとき (固有) アフィン球面という.
- $S = 0$ のとき非固有アフィン球面という.

つまり「ユークリッド幾何における球面」の等積幾何学的な類似が固有アフィン球面である. 以下, 固有・非固有アフィン球面でアフィン計量が $\det(h_{ij}) < 0$ をみたすものを扱うことにしよう. このようなアフィン球面は不定値アフィン球面 (indefinite affine sphere) とよばれている.

不定値アフィン球面では, 漸近座標系 (u, v) がとれる. すなわち

$$\begin{aligned} p_{uu} &= (\log \omega)_u p_u + a\omega^{-1} p_v, \\ p_{uv} &= \omega \xi, \\ p_{vv} &= b\omega^{-1} p_u + (\log \omega)_v p_v, \end{aligned}$$

をみたす座標系である. ただし

$$\xi = -Hp + (1 + H)\xi_0.$$

ここで H は定数で, p が固有のとき -1 , 非固有のとき 0 とする. $\xi_0 \neq 0$ は \mathbb{A}^3 の定ベクトルである. ブラシュケ計量は

$$h = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる. アフィン球面の積分可能条件は $\omega = e^\phi$ とおくと

$$\phi_{uv} + He^\phi + abe^{-2\phi} = 0, \quad a_v = b_u = 0$$

で与えられる. ユークリッド幾何の負定曲率曲面のときと同様に $a \neq 0, b \neq 0$ という仮定を課そう. すると $a = b = 1$ と規格化できるので積分可能条件は

- 固有アフィン球面のときはツイツェイカ方程式 $\phi_{uv} = e^\phi - e^{-2\phi}$.
- 非固有アフィン球面のときはリウヴィル方程式 $\phi_{uv} = -e^{-2\phi}$.

となる. したがってアフィン球面も可積分系を積分可能条件にもつ曲面であることがわかった. 固有アフィン球面はツイツェイカ変換とよばれるベックルンド変換をもつ. ツイツェイカ変換については [9], [50] を参照.

7.4 差分アフィン球面

アフィン球面の差分化は, 固有の場合を Bobenko と Schief が提出し, 松浦が修士論文で非固有の場合を提出した. ここでは両者を統合した差分化を述べる ([41, 第3部]).

まず記号を準備する. 函数 $f = f_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し前進差分 $\Delta_{+n}f$, 後退差分 $\Delta_{-n}f$ を次で定める.

$$\Delta_{+n}f_m^n := \frac{f_m^{n+1} - f_m^n}{\varepsilon}, \quad \Delta_{-n}f_m^n := \frac{f_m^n - f_m^{n-1}}{\varepsilon}.$$

$\Delta_{+m}f_m^n, \Delta_{-m}f_m^n$ も同様に定める.

定義 7.3 ([9],[47]) $\mathbf{p}_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ が, 次の 2 条件をみたすとき差分アフィン球面 (discrete affine sphere) という^{*8}.

- \mathbf{p}_m^n は差分漸近網.
- 各 $(n\varepsilon, m\varepsilon) \in \mathbb{L}$ に対し $\mathbf{p}_{m+1}^{n+1} - \mathbf{p}_m^{n+1} - \mathbf{p}_{m+1}^n + \mathbf{p}_m^n$ はベクトル

$$\boldsymbol{\xi}_m^n := -H \frac{\mathbf{p}_m^{n+1} - \mathbf{p}_{m+1}^n}{2} + (1+H)\boldsymbol{\xi}_0$$

に平行. ただし $\boldsymbol{\xi}_0 \neq \mathbf{0}$ は定ベクトルで, $H = 0$ または $H = -1$. $H = -1$ のとき差分不定値固有アフィン球面, $H = 0$ のとき差分不定値非固有アフィン球面という.

定理 7.1 差分アフィン球面 \mathbf{p}_m^n に対し, 以下をみたす \mathbb{L} 上の函数 ω, a, b が存在する.

$$\begin{aligned} \Delta_{+n}\Delta_{-n}\mathbf{p}_m^n &= \left(\frac{\Delta_{-n}\omega_m^n}{\omega_m^n} + \frac{\delta H}{2}\omega_m^{n-1} \right) \Delta_{+n}\mathbf{p}_m^n + \frac{a_m^n}{\omega_m^n} \Delta_{+m}\mathbf{p}_m^n, \\ \Delta_{+n}\Delta_{+m}\mathbf{p}_m^n &= \omega_m^n \boldsymbol{\xi}_m^n, \\ \Delta_{+m}\Delta_{-m}\mathbf{p}_m^n &= \frac{b_m^n}{\omega_m^n} \Delta_{+n}\mathbf{p}_m^n + \left(\frac{\Delta_{-m}\omega_m^n}{\omega_m^n} + \frac{\varepsilon H}{2}\omega_{m-1}^n \right) \Delta_{+m}\mathbf{p}_m^n. \end{aligned}$$

これらの両立条件は

$$\begin{aligned} &\frac{\omega_m^n \Delta_{-n}\Delta_{-m}\omega_m^n - \Delta_{-n}\omega_m^n \Delta_{-m}\omega_m^n}{\omega_{m-1}^n \omega_m^{n-1}} + H \left(\frac{\omega_m^n + \omega_{m-1}^{n-1}}{2} - \varepsilon\delta \frac{H}{4} \omega_m^n \omega_{m-1}^{n-1} \right) \\ &+ \frac{2 - \varepsilon\delta H \omega_{m-1}^{n-1}}{2 - \varepsilon\delta H \omega_m^n} \frac{a_m^n b_m^n}{\omega_{m-1}^n \omega_m^{n-1}} = 0, \\ &a_m^n (2 - \varepsilon\delta H \omega_{m-1}^{n-1}) - a_{m-1}^n (2 - \varepsilon\delta H \omega_m^n) = 0, \\ &b_m^n (2 - \varepsilon\delta H \omega_{m-1}^{n-1}) - b_{m-1}^{n-1} (2 - \varepsilon\delta H \omega_m^n) = 0 \end{aligned}$$

で与えられる.

^{*8} 正確には差分不定値アフィン球面という.

$H = 0$ の場合, 両立条件は

$$\begin{aligned}\omega_m^n \omega_{m-1}^{n-1} - \omega_{m-1}^n \omega_m^{n-1} + \varepsilon \delta a_m^n b_m^n &= 0, \\ a_m^n - a_{m-1}^n &= 0, \quad b_m^n - b_{m-1}^n = 0\end{aligned}$$

となる. とくに $\varepsilon = \delta = 1$, $a_m^n = b_m^n = 1$ とし, $\omega_m^n := \pm \exp W_m^n$ とおけば広田 [28] によって提出された差分リウヴィル方程式

$$2 \sinh(W_{m+1}^{n+1} - W_m^{n+1} - W_{m+1}^n + W_m^n) + \exp(-W_{m+1}^{n+1} - W_m^{n+1} - W_{m+1}^n - W_m^n) = 0$$

となる. $H = -1$ のとき, 両立条件は Bobenko と Schief [9] によって提出された差分ツイツェイカ系である.

$$\frac{2a_m^n}{2 + \varepsilon \delta \omega_m^n} = \frac{(\tau_m^n)^2}{\tau_m^{n-1} \tau_m^{n+1}}, \quad \frac{2b_m^n}{2 + \varepsilon \delta \omega_m^n} = \frac{(\tau_m^n)^2}{\tau_{m-1}^n \tau_{m+1}^n}, \quad \frac{2 + \varepsilon \delta \omega_m^n}{2} = \frac{\tau_m^{n+1} \tau_{m+1}^n}{\tau_m^n \tau_{m+1}^{n+1}}$$

で函数 τ_m^n を定義すれば差分ツイツェイカ系は次の 3 重線型形式 (trilinear form) に書き直せることが [9] で示された.

$$\frac{1}{\varepsilon^3 \delta^3} \det \begin{pmatrix} \tau_m^n & \tau_m^{n+1} & \tau_m^{n+2} \\ \tau_{m+1}^n & \tau_{m+1}^{n+1} & \tau_{m+1}^{n+2} \\ \tau_{m+2}^n & \tau_{m+2}^{n+1} & \tau_{m+2}^{n+2} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} (\tau_{m+1}^{n+1})^3 = 0.$$

広田と高橋の論文 [30] では差分ツイツェイカ系の双線型形式が与えられ, さらに差分ツイツェイカ系の超離散化も与えられた. [50] では差分ツイツェイカ系の自明解が定める不定値差分固有アフィン球面に対する超離散極限が計算されている. なおトラクトロイドの超離散極限が [55] で計算されている. [17] では差分不定値非固有アフィン球面と等積アフィン距離函数 (area distance) との関係が議論されている. 差分不定値非固有アフィン球面の例を挙げておく.

例 7.1 (差分双曲放物面) $p(u, v) = (u + v, u - v, 2uv)$ で定まる \mathbb{A}^3 内の曲面 (双曲放物面) は $\xi = (0, 0, 1)$ をブラシュケ・ベクトル場にもつ非固有アフィン球面である. $p_m^n : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$ を $p_m^n = (n + m, n - m, 2nm)$ と定義すれば, これは差分非固有アフィン球面である. 実際

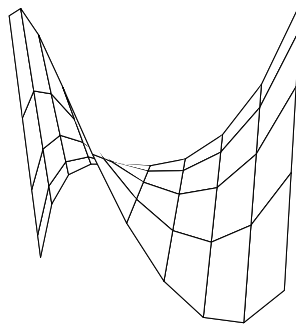
$$\begin{aligned}(p_m^{n+1} - p_m^n) - (p_m^n - p_m^{n-1}) &= \mathbf{0}, \\ p_{m+1}^{n+1} + p_m^n - p_m^{n+1} - p_{m+1}^n &= 2\xi = (0, 0, 1), \\ (p_{m+1}^n - p_m^n) - (p_m^n - p_{m-1}^n) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

をみたしている.

例 7.2 (ケーリー曲面) $p(u, v) = (u, (u^2 - v^2)/2, u^3/6 - uv^2/2)$ をケーリー曲面 (Cayley surface) とよぶ. この曲面の差分化として, $p_m^n : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$ を

$$p_m^n = (n, (n^2 - m^2)/2, n^3/6 - nm^2/2)$$

と定義し, 差分ケーリー曲面とよぶ.



差分ケーリー曲面

7.5 アフィン極小曲面

差分 K 曲面, 差分固有アフィン球面, 差分非固有アフィン球面はそれぞれ差分サイン・ゴルドン方程式, 差分ツイツェイカ系, 差分リウヴィル方程式の差分幾何学的モデルであった. この節では, 差分曲面から離散可積分系を発見するという考察をしてみよう. 差分リウヴィル方程式の一般化を差分幾何学を用いて発見してみる. 非固有アフィン球面を含むクラスにアフィン極小曲面がある. そこでアフィン極小曲面を差分化してみる.

漸近座標系 (u, v) で径数表示された不定値ブラシュケ曲面 $p(u, v) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{A}^3$ のブラシュケ・ベクトル場を ξ とする. \mathbb{A}^3 の双対空間を \mathbb{A}_3 で表す^{*9}. このとき

$$\nu(p_u) = \nu(p_v) = 0, \quad \nu(\xi) = 1$$

で $\nu : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{A}_3$ が定まる. ν を (p, ξ) の余法ベクトル場 (conormal vector field) とよぶ. 等積アフィン形状作用素は

$$\Delta_h \nu + (\text{tr } S) \nu = \mathbf{0}$$

をみたす. ここで Δ_h はブラシュケ計量の定めるラプラス作用素である. \mathbb{A}^3 の双対空間 \mathbb{A}_3 上の体積要素 $d^* \nu = \det^*$ を

$$|\det^*(\nu_u, \nu_v, -\nu)| = \det(p_u, p_v, \xi)$$

で定義する. またベクトル積 $\times : \mathbb{A}_3 \times \mathbb{A}_3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ を

$$\nu(\mu_1 \times \mu_2) = \det^*(\nu, \mu_1, \mu_2), \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{A}_3$$

で定義する.

定義 7.4 ブラシュケ曲面 (p, ξ) が $\text{tr } S = 0$ をみたすときアフィン極小曲面 (affine minimal surface) とよぶ.

非固有アフィン球面はアフィン極小曲面の例であることを注意しておく. 漸近座標系 (u, v) で径数表示された

^{*9} \mathbb{A}_3 は \mathbb{A}^3 から \mathbb{R} への線型写像の全体.

アフィン極小曲面*10の積分可能条件を求めよう. アフィン球面のときと同様にガウスの公式が

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{uu} &= (\log \omega)_u \mathbf{p}_u + a\omega^{-1} \mathbf{p}_v, \\ \mathbf{p}_{uv} &= \omega \boldsymbol{\xi}, \\ \mathbf{p}_{vv} &= b\omega^{-1} \mathbf{p}_u + (\log \omega)_v \mathbf{p}_v, \end{aligned}$$

で与えられる. ワインガルテンの公式は

$$\boldsymbol{\xi}_u = -s\mathbf{p}_v, \boldsymbol{\xi}_v = -t\mathbf{p}_u$$

となる. 積分可能条件は

$$\begin{aligned} (\log \omega)_{uv} + ab\omega^{-2} &= 0, \quad a_v + \omega^2 s = 0, \quad b_u + \omega^2 t = 0, \\ (\omega t)_u - bs &= 0, \quad (\omega s)_v - at = 0 \end{aligned}$$

で与えられる. 余法ベクトル場 \mathbf{v} は

$$\mathbf{v}_{uu} = \frac{\omega_u}{\omega} \mathbf{v}_u - \frac{a}{\omega} \mathbf{v}_v + \omega s(-\mathbf{v}), \quad \mathbf{v}_{uv} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_{vv} = -\frac{b}{\omega} \mathbf{v}_u + \frac{\omega_v}{\omega} \mathbf{v}_v + \omega t(-\mathbf{v})$$

をみたく. 余法ベクトル場 \mathbf{v} は $\mathbf{v}_{uv} = 0$ をみたくので $\mathbf{v}(u, v) = \mathbf{X}(u) + \mathbf{Y}(v)$ と変数分離される. すると, アフィン極小曲面 $\mathbf{p}(u, v)$ は

$$\mathbf{p}(u, v) = \int_{(0,0)}^{(u,v)} \mathbf{v} \times \mathbf{v}_u \, du - \int_{(0,0)}^{(u,v)} \mathbf{v} \times \mathbf{v}_v \, dv + \mathbf{p}_0$$

と積分表示で復元できる. この積分表示式をルリウヴルの公式 (Lelievre formula) とよぶ. ここで

$$\widehat{\mathbf{p}}(u, v) := \mathbf{p}(u, v) - 2\mathbf{Y}(v) \times \mathbf{X}(u)$$

と定めると $\widehat{\mathbf{p}}$ もアフィン極小曲面であり

- (1) $\widehat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}$ は \mathbf{p} と $\widehat{\mathbf{p}}$ の双方に接する.
- (2) 両者のブラシュケ・ベクトル場は平行, $(\boldsymbol{\xi} // \widehat{\boldsymbol{\xi}})$

という性質をもっている. この $\widehat{\mathbf{p}}$ を \mathbf{p} のアフィン・ベクトル変換とよぶ. 松浦は学位論文において, アフィン極小曲面の差分化を次のように定義した.

定義 7.5 ([48], [51]) $\mathbf{p}_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ に対し以下をみたく $\boldsymbol{\xi}_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ と \mathbb{L} 上の関数 a, b, ω, s, t が存在するとき, \mathbf{p}_m^n を (不定値) 差分アフィン極小曲面とよぶ.

$$\begin{aligned} \Delta_{+n}\Delta_{+n}\mathbf{p}_m^n &= \frac{\Delta_{-n}\omega_m^n}{\omega_m^n} + \Delta_{+n}\mathbf{p}_m^n + \frac{a_m^n}{\omega_m^n} \Delta_{+m}\mathbf{p}_m^n, \\ \Delta_{+n}\Delta_{+m}\mathbf{p}_m^n &= \omega_m^n \boldsymbol{\xi}_m^n, \\ \Delta_{+m}\Delta_{+m}\mathbf{p}_m^n &= \frac{b_m^n}{\omega_m^n} \Delta_{+n}\mathbf{p}_m^n + \frac{\Delta_{-m}\omega_m^n}{\omega_m^n} \Delta_{+m}\mathbf{p}_m^n, \\ \Delta_{-n}\boldsymbol{\xi}_m^n &= -s_m^n \Delta_{+m}\mathbf{p}_m^n, \\ \Delta_{-m}\boldsymbol{\xi}_m^n &= -t_m^n \Delta_{+n}\mathbf{p}_m^n, \\ \omega_m^n &= \det(\Delta_{+n}\mathbf{p}_m^n, \Delta_{+m}\mathbf{p}_m^n, \boldsymbol{\xi}_m^n). \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\xi}$ が定ベクトルならば, 非固有アフィン球面であることに注意しよう.

*10 正確には不定値アフィン極小曲面

定理 7.2 差分アフィン極小曲面の両立条件は以下で与えられる.

$$\begin{aligned}\omega_m^n \omega_{m-1}^{n-1} - \omega_m^{n-1} \omega_{m-1}^n + \varepsilon \delta a_m^n b_m^n &= 0, \\ \Delta_{+m} a_m^n + \omega_m^{n-1} \omega_m^n s_m^n &= 0, \\ \Delta_{+n} b_m^n + \omega_{m-1}^n \omega_m^n t_m^n &= 0, \\ \Delta_{-n}(\omega_m^n t_m^n) - b_m^n s_{m-1}^n &= 0, \\ \Delta_{-m}(\omega_m^n s_m^n) - a_m^n s_{m-1}^{n-1} &= 0.\end{aligned}$$

両立条件として導かれた, この連立差分方程式系 (coupled system) が差分リウヴィル方程式の差分幾何学的一般化のひとつである.

差分アフィン極小曲面の余法ベクトル場は

$$\mathbf{v}_m^n := \frac{1}{\omega_m^n} \Delta_{+n} \mathbf{p}_m^n \times \Delta_{+m} \mathbf{p}_m^n$$

で定義される. ルリウヴルの公式の差分版は

$$\Delta_{+n} \mathbf{p}_m^n = \mathbf{v} \times \Delta_{+n} \mathbf{v}, \quad \Delta_{+m} \mathbf{p}_m^n = \Delta_{+m} \mathbf{v} \times \mathbf{v}_m^n$$

で与えられる. アフィン・ベックルンド変換は余法ベクトル場を用いて, 滑らかな曲面のときと同様に定義される. Craizer, Anciaux, Lewiner [16] は松浦と独立に差分アフィン極小曲面を提案した. 彼らの提案した差分アフィン極小曲面は松浦の定義したものと一致している. ただし松浦は定値の場合 ($\det(h_{ij}) > 0$) も扱っていることを注意しておく. 一方, [16] では次のような変分学的な解釈が与えられている. 曲面 \mathbf{p}_m^n に対し

$$\det(\mathbf{p}_m^{n+1} - \mathbf{p}_m^n, \mathbf{p}_{m+1}^n - \mathbf{p}_m^n, \mathbf{p}_{m+1}^{n+1} - \mathbf{p}_m^n) > 0$$

と仮定し, この量の正の平方根を F_m^n とする. 差分表面積汎関数 \mathcal{A} を

$$\mathcal{A}(\mathbf{p}_m^n) := \sum_{n,m} F_m^n$$

で定義する. 次に $\mathbf{V}_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ を有限個の点を除き, 値 0 をとる差分ベクトル場とする. \mathbf{V}_m^n を変分ベクトル場にもつ \mathbf{p}_m^n の変分を

$$\mathbf{p}_m^n(t) := \mathbf{p}_m^n + t \mathbf{V}_m^n$$

で定める.

命題 7.3 $\mathbf{p}_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ が差分アフィン極小曲面ならば,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{A}(\mathbf{p}_m^n(t)) = 0.$$

差分アフィン極小曲面の例を挙げて本節を終えよう. まず中心冪函数, 上昇冪函数, 下降冪函数を復習しておく ([23], [29] 参照).

定義 7.6 整数 k に対し x の中心 k 乗 $x^{(k)}$ を次で定める.

- $k = 0$ のとき, $x^{(0)} = 1$.
- $k > 0$ のとき

$$x^{(k)} := \prod_{j=1}^k \left(x + \left(\frac{k+1}{2} - j \right) \varepsilon \right),$$

- $k < 0$ のとき,

$$x^{(k)} = \frac{1}{x^{(-k)}}.$$

定義 7.7 整数 k に対し x の上昇 k 乗 $x^{\bar{k}}$ を次で定める.

- $k = 0$ のとき, $x^{\bar{0}} = 1$.
- $k > 0$ のとき

$$x^{\bar{k}} := \prod_{j=1}^k (x + (j-1)\varepsilon),$$

- $k < 0$ のとき,

$$x^{\bar{k}} = \prod_{j=1}^{-k} \frac{1}{x - j\varepsilon}$$

定義 7.8 整数 k に対し x の下降 k 乗 x^k を次で定める.

- $k = 0$ のとき, $x^0 = 1$.
- $k > 0$ のとき

$$x^k := \prod_{j=1}^k (x - (j-1)\varepsilon),$$

- $k < 0$ のとき,

$$x^k = \prod_{j=1}^{-k} \frac{1}{x + j\varepsilon}$$

x, y を不定元とする多項式 $P(x, y)$ が中心差分作用素 Δ_x, Δ_y に対し^{*11} $(\Delta_x \Delta_x + \Delta_y \Delta_y)P(x, y) = 0$ をみたすとき, $P(x, y)$ を差分調和多項式とよぶ.

定理 7.3 ([51]) $\psi_d(x, y)$ を次数 $d > 0$ の差分調和多項式とすると, ψ_d は次に挙げる差分調和多項式の線型結合である.

$$\varphi_d(x, y) = \sum_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j} x^{(d-2j)} y^{(2j)}, \quad \phi_d(x, y) = \sum_{j=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j+1} x^{(d-2j-1)} y^{(2j+1)}.$$

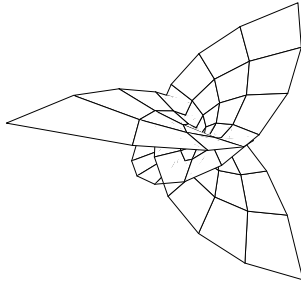
例 7.3 (差分エネパー曲面) α, β, γ を定数とする. $(x, y) = (n\varepsilon, m\delta) \in \mathbb{L}$ に対し

$$p(x, y) := (y^3 - 3x^2(y - \delta) + 3(y - \delta), x^3 - 3(x - \varepsilon)y^2 + 3(x - \varepsilon), -6(x - \varepsilon)(y - \delta))$$

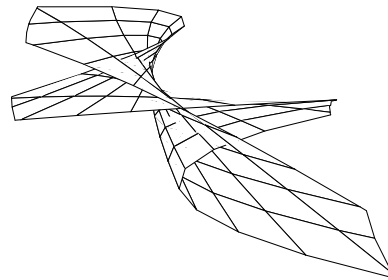
と定めると差分アフィン極小曲面である.

^{*11}

$$\Delta_x f(x, y) = \frac{f(x + \varepsilon/2, y) - f(x - \varepsilon/2, y)}{\varepsilon}, \quad \Delta_y f(x, y) = \frac{f(x, y + \varepsilon/2) - f(x, y - \varepsilon/2)}{\varepsilon}.$$



差分エネパー曲面



そのアフィン・ベックルンド変換

例 7.4 ([51]) $\psi_2(x, y)$ を 2 次の差分調和多項式とする. このとき

$$\psi_2(x, y) = c_0\varphi_2(x, y) + \frac{c_1}{2}\phi_2(x, y), \quad \varphi_2(x, y) = x^{(2)} - y^{(2)}, \quad \phi_2(x, y) = 2xy$$

と表すことができる. (c_0, c_1 は定数). $\nu: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}_3$ を

$$\nu(x, y) = (x, y, \psi_2(x, y)) + (a_1, a_2, a_3)$$

で定める. ただし a_1, a_2, a_3 は定数. これを余法ベクトル場にもつ差分アフィン極小曲面 $p: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ は

$$\begin{aligned} p(x, y) = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2a_3x \\ -2a_3y \\ x^{\bar{2}} + y^{\bar{2}} + 2a_1x + 2a_2y \end{pmatrix} \\ & + \frac{c_0}{6} \begin{pmatrix} -2x^{(3)} - 6xy^{\bar{2}} - 6a_2(x(y + \delta) + (x + \varepsilon)y) - 3\varepsilon(x^{\bar{2}} + y^{\bar{2}}) + \frac{3}{2}(\varepsilon^2 - \delta^2)x \\ 2y^{(3)} + 6x^{\bar{2}}y + 6a_1(x(y + \delta) + (x + \varepsilon)y) + 3\delta(x^{\bar{2}} + y^{\bar{2}}) + \frac{3}{2}(\varepsilon^2 - \delta^2)y \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{c_1}{6} \begin{pmatrix} -2y^{(3)} + 3a_2(x^{\bar{2}} - y^{\bar{2}}) - 3\delta y^{\bar{2}} \\ -2x^{(3)} - 3a_1(x^{\bar{2}} - y^{\bar{2}}) - 3\varepsilon x^{\bar{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で与えられる.

8 平均曲率一定曲面

平均曲率が 0 でない一定の値をもつ曲面を CMC 曲面 (constant mean curvature surface) と略称する. CMC 曲面のもつ可積分系の構造は双等温座標系を使うことで見えてくる.

8.1 等温座標系

曲面片 $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ を等温座標系 (u, v) で径数表示しよう. 等温座標系を用いて $w = u + iv$ とおくと, w は複素座標系を定める^{*12}. w の共軛を $\bar{w} = u - iv$ で表す. w と \bar{w} の全微分を

$$dw = du + idv, \quad d\bar{w} = du - idv$$

^{*12} 正確な意味を説明するためには, 複素構造 (リーマン面) の知識を必要とする.

で定義する. さらに複素偏微分作用素を

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

で定める.

註 8.1 複素平面 \mathbb{C} 内の領域 \mathcal{D} で定義された複素関数 $f(w)$ を \bar{w} で偏微分してみる. まず $w = u + iv$ を用いて $f(w) = \xi(u, v) + i\eta(u, v)$ と表すと

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} (\partial_u + i\partial_v)(\xi + i\eta) = \frac{1}{2} \{(\xi_u - \eta_v) + i(\xi_v + \eta_u)\}$$

であるから

$$f_{\bar{w}} = 0 \iff \xi_u = \eta_v, \quad \xi_v = -\eta_u.$$

すなわち, $f_{\bar{w}} = 0$ とは $\{\xi(u, v), \eta(u, v)\}$ がコーシー・リーマン方程式をみたすことに他ならない.

w を用いて第一基本形式 I を表示してみよう. $dwd\bar{w} = du^2 + dv^2$ であるから

$$I = Edwd\bar{w}$$

と表せる. $E > 0$ なので, $E = e^\phi$ とおく. したがって, $I = e^\phi dwd\bar{w}$ と表わせた. すると単位法ベクトル場 \mathbf{n} は $\mathbf{n} = e^{-\phi}(\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v)$ で与えられることに注意しよう. ここで複素関数 Q を $Q = \mathbf{p}_{w\bar{w}} \cdot \mathbf{n}$ で定める. 第一基本形式や第二基本形式のように径数に依存しない量にするためには $Q^\# = Q dw^2$ と定めればよい. $Q^\#$ は Hopf 微分とよばれている.

第二基本形式の成分 L, M, N を使うと Hopf 微分の係数 Q は

$$Q = \frac{1}{4} \{(L - N) - 2iM\}$$

と計算されるから次のことがわかる.

命題 8.1 Q の零点と臍点は一致する.

函数論 (リーマン面の理論) に習熟した読者向けに次の定理を挙げておこう.

定理 8.1 (Hopf [33]) \mathbb{E}^3 内の種数 0 の CMC 閉曲面は球面のみである.

(証明) Hopf 微分は正則 2 次微分である. いま曲面の種数が 0 なので, Hopf 微分は恒等的に 0 である (Riemann-Roch の定理). したがってこの曲面は全臍的 (すべての点が臍点). すなわち球面. ■

8.2 ガウス・コダッチ方程式

等温座標系 (u, v) の元ではガウス方程式は

$$(7) \quad \phi_{w\bar{w}} + \frac{1}{2} H^2 e^\phi - 2|Q|^2 e^{-\phi} = 0,$$

と表示される ($w = u + iv$). コダッチ方程式は

$$(8) \quad H_w = 2e^{-u} Q_{\bar{w}}$$

と表される. これらの導出は後回しにして, コダッチ方程式からわかることを述べよう. コダッチ方程式 (8) は, 平均曲率が一定であることと $Q^\#$ が正則であることは同値であることを示している*13.

ガウス・コダッチ方程式の導出方法を手短かに説明しておこう. まず, 等温座標系 (u, v) で径数表示された曲面 $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ に対し $(e^{-\frac{\phi}{2}} p_u, e^{-\frac{\phi}{2}} p_v, n)$ は \mathcal{D} で定義され回転群 $SO(3)$ に値をもつ行列値関数である. 第4節で負定曲率曲面に対して行ったように, この行列値関数から $SU(2)$ に値をもつ関数 Φ を求める.

$$\begin{aligned}\Phi e_1 \Phi^{-1} &= e^{-\phi/2} p_u, \\ \Phi e_2 \Phi^{-1} &= e^{-\phi/2} p_v, \\ \Phi e_3 \Phi^{-1} &= n\end{aligned}$$

ガウス・ワインガルテンの公式は

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial w} \Phi = \Phi U, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \Phi = \Phi V,$$

$$(10) \quad U = \begin{pmatrix} -\phi_w/4 & Qe^{-\frac{\phi}{2}} \\ -He^{\phi/2}/2 & \phi_w/4 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \phi_{\bar{w}}/4 & He^{\phi/2}/2 \\ -Qe^{-\phi/2} & -\phi_{\bar{w}}/4 \end{pmatrix}$$

で与えられる.

問題 8.1 $\Phi^{-1} \Phi_w, \Phi^{-1} \Phi_{\bar{w}}$ を計算して (10) を確かめよ.

ガウス・ワインガルテンの公式 (9)–(10) の可積分条件

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial w} V - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} U + [U, V] = 0$$

を計算するとガウス・コダッチ方程式 (7)–(8) が得られる.

8.3 同伴族

平均曲率 H が一定ならば, コダッチ方程式は Q が複素正則であることを意味する. ガウス・コダッチ方程式はガウス・ワインガルテン公式の積分可能条件であることを思い出そう. 平均曲率が一定の曲面を構成するには, 正則 2 次微分 $Q^\# = Q dw^2$ と定数 H をまず指定し, ガウス方程式

$$\phi_{w\bar{w}} + \frac{1}{2} H^2 e^\phi - 2|Q|^2 e^{-\phi} = 0$$

の解を構成すればよいということになる.

いま平均曲率一定曲面 $\Sigma = (\mathcal{D}, p)$ がひとつ与えられているとしよう. さらに \mathcal{D} は単連結と仮定する. Σ の第一基本形式 $I = e^\phi dw dw$, 平均曲率 H , Hopf 微分 $Q dw^2$ はガウス方程式をみたしている. ここで, 長さ 1 の複素数 $\lambda = e^{it} (t \in \mathbb{R})$ を用いて $Q_\lambda := \lambda Q$ と定めよう. $Q_\lambda^\# = Q_\lambda dw^2$ も正則 2 次微分である. さらに $|Q_\lambda| = |\lambda Q| = |Q|$ だから

$$\phi_{w\bar{w}} + \frac{1}{2} H^2 e^\phi - 2|Q_\lambda|^2 e^{-\phi} = 0$$

をみたとす. ということは

$$I_\lambda := I, \quad H_\lambda := H, \quad Q_\lambda^\# := \lambda Q^\#$$

*13 あとで述べるように平均曲率一定輪環面は双等温であり, 双等温座標を使うとガウス・コダッチ方程式は Sinh-Gordon 方程式になる.

を第一基本形式, 平均曲率, Hopf 微分にもつ平均曲率一定曲面 $\Sigma_\lambda := (\mathcal{D}, \mathbf{p}_\lambda)$ が存在することが言えた. $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}_\lambda$ は第一基本形式と平均曲率を保ったまま連続的に曲面を変形していることに注意してほしい. この結果得られる平均曲率一定曲面の 1 径数族 $\{\mathbf{p}_\lambda\}_{\lambda \in U(1)}$ をもとの平均曲率一定曲面の同伴族とよぶ^{*14}. この事実は Bonnet により指摘された ([12]).

註 8.2 \mathbf{p}_λ の単位法ベクトル場を \mathbf{n}_λ とすると, \mathbf{p}_λ と \mathbf{n}_λ は次をみたす.

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_\lambda)_w &= \frac{e^{\phi/2}}{2} \Phi_\lambda (\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) \Phi_\lambda^{-1} = -ie^{\phi/2} \Phi_\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_\lambda^{-1}, \\ (\mathbf{p}_\lambda)_{\bar{w}} &= \frac{e^{\phi/2}}{2} \Phi_\lambda (\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2) \Phi_\lambda^{-1} = -ie^{\phi/2} \Phi_\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi_\lambda^{-1}, \\ \mathbf{n}_\lambda &= \Phi_\lambda (\mathbf{e}_3) \Phi_\lambda^{-1} = \Phi_\lambda \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \Phi_\lambda^{-1}. \end{aligned}$$

同伴族のラックス表示を求めよう. $\Phi_\lambda : \mathcal{D} \times U(1) \rightarrow SU(2)$ を

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda \mathbf{e}_1 \Phi_\lambda^{-1} &= e^{-\phi/2} (\mathbf{p}_\lambda)_u, \\ \Phi_\lambda \mathbf{e}_2 \Phi_\lambda^{-1} &= e^{-\phi/2} (\mathbf{p}_\lambda)_v, \\ \Phi_\lambda \mathbf{e}_3 \Phi_\lambda^{-1} &= \mathbf{n}_\lambda \end{aligned}$$

で定めよう. \mathbf{p}_λ は第一基本形式と平均曲率は \mathbf{p} と共通で Hopf 微分のみ $Q_\lambda = \lambda Q$ と変形されていることに注意すれば \mathbf{p}_λ のガウス・ワインガルテン公式は

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial w} \Phi_\lambda = \Phi_\lambda U_\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \Phi_\lambda = \Phi_\lambda V_\lambda,$$

$$(13) \quad U_\lambda = \begin{pmatrix} -\phi_w/4 & \lambda Q e^{-\frac{\phi}{2}} \\ -He^{\phi/2}/2 & \phi_w/4 \end{pmatrix}, \quad V_\lambda = \begin{pmatrix} \phi_{\bar{w}}/4 & He^{\phi/2}/2 \\ -\lambda^{-1} \bar{Q} e^{-\phi/2} & -\phi_{\bar{w}}/4 \end{pmatrix}$$

となるのがわかる. これを CMC 曲面 $\Sigma = (\mathcal{D}, \mathbf{p})$ のラックス表示とよぶ. 負定曲率曲面のときと同様に Φ_λ を行列値波動関数とよぶ^{*15}.

Sym の公式を CMC 曲面に対しても考えることができる^{*16}.

定理 8.2 (Bobenko) Φ_λ を (12)–(13) の解とすると

$$\mathbf{p}_\lambda := \frac{2}{H} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi_\lambda \right) \Phi_\lambda^{-1} - \frac{1}{H} \Phi_\lambda \mathbf{e}_3 \Phi_\lambda^{-1}, \quad \lambda = e^{it}$$

は $I_\lambda = e^\phi dw d\bar{w}$ を第一基本形式, $\mathbf{n}_\lambda = \Phi_\lambda \mathbf{e}_3 \Phi_\lambda^{-1}$ を単位法ベクトル場にもつ CMC 曲面であり, 平均曲率, Hopf 微分は $H, Q_\lambda^\#$ である.

^{*14} $U(1) = \{\lambda = e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

^{*15} extended frame の名称は用いない. extended frame は次の節で定義する.

^{*16} Sym-Bobenko の公式ともよばれる.

(証明)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi_\lambda \right) \Phi_\lambda^{-1} \right\} &= \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi_\lambda \right) \cdot \Phi_\lambda^{-1} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi_\lambda \right) \frac{\partial}{\partial w} \Phi_\lambda^{-1} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial w} \Phi_\lambda \right) \cdot \Phi_\lambda^{-1} - \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi_\lambda \right) \Phi_\lambda^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial w} \Phi_\lambda \right) \Phi_\lambda^{-1} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_\lambda U_\lambda) \cdot \Phi_\lambda^{-1} - \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi_\lambda \right) U_\lambda \Phi_\lambda^{-1} \\
&= \Phi_\lambda \frac{\partial}{\partial t} U_\lambda \Phi_\lambda^{-1} \\
&= -i\lambda Q e^{-\phi/2} \Phi_\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi_\lambda^{-1}, \\
\frac{\partial}{\partial w} (\Phi_\lambda e_3 \Phi_\lambda^{-1}) &= \Phi_\lambda [U_\lambda, e_3] \Phi_\lambda^{-1} = -i\Phi_\lambda \begin{pmatrix} 0 & -2\lambda Q e^{-\phi/2} \\ -H e^{\phi/2} & 0 \end{pmatrix} \Phi_\lambda^{-1}
\end{aligned}$$

と註 8.2 より

$$\frac{\partial}{\partial w} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi_\lambda \right) \Phi_\lambda^{-1} - \frac{1}{2} \Phi_\lambda e_3 \Phi_\lambda^{-1} \right\} = -\frac{H}{2} i e^{\phi/2} \Phi_\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_\lambda^{-1} = \frac{H}{2} \frac{\partial}{\partial w} p_\lambda$$

を得る. 同様に

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi_\lambda \right) \Phi_\lambda^{-1} - \frac{1}{2} \Phi_\lambda e_3 \Phi_\lambda^{-1} \right\} = \frac{H}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} p_\lambda$$

を得るので, 結論を得る. ■

8.4 双等温曲面

以下の議論で中心的な役割を演ずる特別な座標系をここで導入しておく.

定義 8.1 曲面 $\Sigma = (\mathcal{D}, \mathbf{p})$ 上の座標系 (u, v) が双等温(isothermic)^{*17} であるとは次の条件をみたすことをいう.

$$\mathbf{I} = e^\phi (du^2 + dv^2), \quad \mathbf{II} = Ldu^2 + Ndv^2.$$

とくに双等温座標は \mathbf{I} と \mathbf{II} を同時対角化していることが特徴である. また $\kappa_1 = e^{-\phi}L, \kappa_2 = e^{-\phi}N$ は曲面の主曲率である. 双等温座標系に対応する複素座標 $w = u + iv$ を単に双等温座標と呼ぶ.

定義 8.2 曲面 $\Sigma = (\mathcal{D}, \mathbf{p})$ において双等温座標系 (u, v) がとれるとき, Σ を双等温曲面とよぶ.

双等温性は次のように言い換えられる.

$(\mathcal{D}, \mathbf{p})$: 双等温曲面 $\iff Q(w, \bar{w})$ が実数値函数となるような複素座標 w がとれる.

平均曲率一定曲面の場合に双等温座標系を用いてガウス・コダッチ方程式を書いてみよう.

- $H = 0$ の場合: $Q = 1/\sqrt{8}$ となる双等温座標をとればガウス・コダッチ方程式は

$$\Delta u = e^{-u}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

^{*17} 非常に紛らわしい命名だが, 等温座標系 (isothermal coordinates) であり同時に第二基本形式を対角化する座標系である. 漸近チェヴィシェフ網と同様に第一基本形式と第二基本形式を同時標準化していることに注意されたい. isothermic も isothermal もともに「等温」と和訳されるが紛らわしいのでここでは isothermic に「双等温」の語を当てた. これは Tilla Weinstein が使っていた bisothermic coordinates の和訳である.

となりこれはリウヴィル方程式である.

- $H \neq 0$ の場合: $Q = H/2$ となるように双等温座標をとれる. そのとき, ガウス・コダッチ方程式は

$$\Delta u + H^2 \sinh u = 0$$

となりこれは Sinh-Gordon 方程式である*18.

双等温曲面の基本的な性質は次の命題である.

命題 8.2 \mathcal{D} は単連結であるとする. $\Sigma = (\mathcal{D}, \mathbf{p})$ が双等温ならば, 以下の条件をみたす曲面 $\Sigma^* = (\mathcal{D}, \mathbf{p}^*)$ が存在する.

- (1) Σ^* は双等温,
- (2) Σ^* は Σ と反等角的*19,
- (3) (u, v) を Σ の双等温座標系とし第一基本形式を $I = e^\phi(du^2 + dv^2)$ と表したとき, Σ^* の第一基本形式 I^* , 平均曲率, Hopf 微分は

$$I^* = e^{\phi^*}(du^2 + dv^2), \quad e^{\phi^*} = e^{-\phi}, \quad H^* = 2Q, \quad Q^* = H/2$$

で与えられる.

$\Sigma^* = (\mathcal{D}, \mathbf{p}^*)$ を Σ のクリストッフエル変換または双対曲面(dual surface)と呼ぶ.

(証明) 双等温座標 $w = u + iv$ を双等温座標とする. この座標の下で, Q は実数値である. $\phi^* = -\phi, H^* = 2Q, Q^* = H/2$ とおくと, Q^* はもちろん複素正則であり, Σ のガウス方程式は

$$\phi_{w\bar{w}}^* + \frac{1}{2}(H^*)^2 e^{\phi^*} - 2|Q^*|^2 e^{-\phi^*} = 0$$

と書き直せる. したがって (I^*, H^*, Q^*) は積分可能条件をみたすので, 題意の曲面 \mathbf{p}^* が存在する. ■

離散可積分系の理論においては「クリストッフエル変換」の名称は別の意味でも使われているので, ここでは「双対曲面」の名称を使う. とくに平均曲率一定 ($\neq 0$) の場合, 双対曲面は単純な形で与えられる.

系 8.1 $\Sigma = (\mathcal{D}, \mathbf{p})$ が臍点の無い平均曲率一定曲面 ($H \neq 0$) ならばその双対曲面は

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p} + \frac{1}{H}\mathbf{n}$$

で与えられる.

(証明) $\mathbf{p}^* = \mathbf{p} + \mathbf{n}/H$ の第一基本形式を計算すると

$$I^* = e^{\phi^*} dw d\bar{w}, \quad e^{\phi^*} = \frac{4}{H^2} |Q|^2 e^{-\phi}.$$

もとの曲面で \mathbf{n} が正の向きに選んであれば, $\mathbf{n}^* = -\mathbf{n}$ が \mathbf{p}^* に対し正の向きに単位法ベクトル場を与える. \mathbf{n}^* を用いて平均曲率と Hopf 微分を求めると

$$H^* = H, \quad Q^* = Q.$$

*18 主要部がラプラシアンであることから Sinh-Laplace 方程式ともよばれる. また $A_1^{(1)}$ 型の戸田場方程式でもある.

*19 向きを反転した共形変換でうつりあうこと.

Σ は双等温なので $Q = H/2$ となる双等温座標 $w = u + iv$ をとると

$$e^{\phi^*} = e^{-\phi}, \quad H^* = 2Q, \quad Q^* = H/2$$

となるので, p^* は p の双対である. ■

次節ではこの性質が「CMC 曲面の差分化のキー」であることを説明する.

註 8.3 $\Sigma = (\mathcal{D}, p)$ が極小曲面 ($H = 0$) ならばその双対曲面はガウス写像

$$p^* = n$$

である.

本講義では詳しく述べないが, 平均曲率一定曲面に対して, ベックルンド型の変換を考えることができる. [40], [43], [36] を参照.

8.5 可積分系理論からみた CMC 曲面論

この節では「CMC 曲面のクラス」より広いクラスの可積分曲面^{*20}を探してみる. そのためにまず CMC 輪環面のもつ性質をいくつか列挙してみる.

- (0) 臍点がない,
- (I) “よい座標”で覆われている (双等温),
- (II) 同伴族をもつ,
- (III) 零曲率表示 (ZCR)^{*21}をもつ,
- (IV) ガウス写像が調和写像,
- (V) Hopf 微分が複素正則.

輪環面では (0) が成立していることから (I) の“よい座標系”の存在が導かれる. さらに非自明な同伴族の存在が導かれる^{*22}. 正確に述べると、臍点がないことから各点で双等温座標系がとれる. この座標系のもとではガウス・コダッチ方程式は Sinh-Gordon 方程式の形になる.

CMC 曲面の「可積分性」を理解するためには CMC 曲面を「可積分系のまま拡張する」ことが有効なアプローチであろう. そこで (II), (III) に着目する.

(II) の観点での一般化は「平均曲率を保ったまま等長的に連続変形できる曲面」である. 但しここでいう変形は局所的でもよく, このような曲面はボンネ曲面 (Bonnet surface) と呼ばれている. 定義の仕方からボンネ曲面は「純幾何学的拡張」といえる.

次に (III) の観点からの一般化を考える. すなわち ZCR を許容するという観点から CMC という条件を拡張してみる. 一般の曲面に対するガウス・ワインガルテンの公式 (9)–(10) を思い出そう.

U, V に変形の径数 λ を挿入する. 正確には $\lambda = \lambda(w, \bar{w})$ を \mathcal{D} で定義された複素関数として U, V に挿入してみる. 次の 2 通りの仕方でスペクトル径数 λ を挿入してみよう.

$$(1) \{U_\lambda^{[1]}, V_\lambda^{[1]}\}: U, V \text{ において } Q \mapsto \lambda Q, \bar{Q} \mapsto \lambda^{-1} \bar{Q} \text{ と変える.}$$

^{*20} integrable surface, 可積分系の構造をもつ曲面.

^{*21} Zero Curvature Representation. 意味はあとで説明する.

^{*22} 同伴族 $\{p_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ が \mathbb{E}^3 の合同変換群 $E(3)$ の 1 径数部分群 $\{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ により $p_t = \{g_t(p)\}$ と表されるとき, 自明であるという.

(2) $\{U_\lambda^{[2]}, V_\lambda^{[2]}\}$ を次で定める.

$$U_\lambda^{[2]} = \begin{pmatrix} -\phi_w/4 & Qe^{-\frac{\phi}{2}} \\ -\lambda He^{\phi/2}/2 & \phi_w/4 \end{pmatrix}, \quad V_\lambda^{[2]} = \begin{pmatrix} \frac{\phi_w}{4} & \lambda^{-1} He^{\phi/2}/2 \\ -Qe^{-\phi/2} & -\frac{\phi_w}{4} \end{pmatrix}.$$

このそれぞれについて零曲率条件を書き下してみる. すなわち, λ を挿入しても積分可能条件

$$\frac{\partial}{\partial w} V_\lambda^{(i)} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} U_\lambda^{(i)} + [U_\lambda^{(i)}, V_\lambda^{(i)}] = 0$$

が成立するという条件を課すのである. まず $\{U_\lambda^{(1)}, V_\lambda^{(1)}\}$ の場合を考えよう. H が一定のときは λ は定数でよく, 積分可能条件は自動的にみたされた. とくに $\lambda \in U(1)$ であり, $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$ であることに注意.

H, λ が定数とは限らないときに積分可能条件を計算してみると, $(\lambda Q)(\lambda^{-1} \bar{Q}) = |Q|^2$ であることから, (1,1) 成分と (2,2) から同じ方程式

$$\phi_{w\bar{w}} + \frac{1}{2} H^2 e^\phi - 2|Q|^2 e^{-\phi} = 0$$

が得られる. これはもとの曲面のガウス方程式である. $\{U_\lambda^{(1)}, V_\lambda^{(1)}\}$ が積分可能条件をみたす, すなわち曲面を定めているという場合, その第一基本形式は I, 平均曲率は H であるから, もとの曲面はボンネ曲面であることを注意しておこう.

一方, (1,2) 成分と (2,1) 成分も同じ方程式

$$H_w = 2(\lambda Q)_{\bar{w}} e^{-\phi}$$

を導く. H が定数のときはコダッチの方程式からこの方程式が自動的にみたされることがわかる (λ は定数).

一般の場合はこの方程式にコダッチ方程式 $H_w = 2Q_{\bar{w}} e^{-\phi}$ を代入すると

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \{(1 - \lambda)Q\} = 0$$

が得られる. この条件から, Q と λ は 2 つの複素正則関数 $a(w), b(w)$ を用いて

$$Q = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{|b|^2 - |a|^2}, \quad \lambda = \frac{1 + b/a}{1 + \bar{a}/\bar{b}}$$

と表すことができる. ここで

$$\left(\frac{dw}{d\bar{w}}\right)^2 = a(w) + b(w)$$

で新しい複素座標 \bar{w} を定義すると, この座標では Hopf 微分は

$$\bar{Q} d\bar{w}^2 = \frac{|a + b|^2}{|b|^2 - |a|^2} d\bar{w}^2$$

と表示される. 記号が煩雑になるので \bar{w} を改めて w と書こう. ここで複素正則関数 $h(w)$ を

$$h(w) = \frac{b(w) - a(w)}{2(b(w) + a(w))}$$

で定めると

$$\frac{1}{Q(w, \bar{w})} = h(w) + \bar{h}(\bar{w}), \quad \lambda = \frac{1 - 2i\bar{h}(\bar{w})}{1 + 2ih(w)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

を得る. λ は (u, v) および, これらと独立な実数 t に依存している. とくに Q は実数値なので w は双等温座標になっている. したがって $\{U_\lambda^{(1)}, V_\lambda^{(1)}\}$ がボンネ曲面を定めていれば, それを $p^{(i)}$ と表記してよい. もとの曲面は

$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{p}$ である. つまりボンネ曲面 \mathbf{p} に対し, 第一基本形式と平均曲率を保ったまま連続変形 $\{\mathbf{p}^{(t)}\}$ が得られ, $\mathbf{p}^{(t)}$ の Hopf 微分は $Q^{(t)} := \lambda(w, \bar{w}, t)Q$ で与えられる. コダッチ方程式 $Q_{\bar{w}} = H_w e^{\phi}/2$ に $1/Q = h + \bar{h}$ を代入して計算すると $h_w H_w = \bar{h}_{\bar{w}} H_{\bar{w}}$ を得る. ここでもう一度変数変換 $\zeta = \int 1/h_w dw$ を行うと $h_w H_w = \bar{h}_{\bar{w}} H_{\bar{w}}$ は H が $s := \zeta + \bar{\zeta}$ のみに依存するというを意味する. ガウス方程式は

$$(14) \quad \left(\frac{H''(s)}{H'(s)} \right)' - H'(s) = 2R_X(s) \left(2 - \frac{H(s)^2}{H'(s)} \right),$$

という常微分方程式になる. ここで函数 $R_X(s)$ は

$$R_A(s) = \frac{4}{\sin^2(2s)}, \quad R_B(s) = \frac{4}{\sinh^2(2s)}, \quad R_C(s) = \frac{1}{s^2}$$

に標準化される. 常微分方程式 (14) は **Hazzidakis** 方程式とよばれている. 本講義では詳しく述べないが, **Hazzidakis** 方程式はパウルヴェ方程式に帰着することが知られている. R_A と R_B は VI 型の特殊なもの, R_C は V 型の特殊なものに帰着する. 詳細は [5] を参照されたい*23.

ボンネ曲面については次の結果が知られている.

命題 8.3 (Raffy [60], Graustein [24]) 臍点のない曲面 $\Sigma = (\mathcal{D}, \mathbf{p})$ がボンネ曲面であるための必要十分条件は

- (1) Σ は双等温で,
- (2) 双等温座標系 w に関し

$$\frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} \frac{1}{Q} = 0$$

をみたす.

この事実から双等温曲面のガウス・コダッチ方程式は Sinh-Gordon, 特殊な P_V , 特殊な P_{VI} を含む可積分系であることがわかった.

次に $\{U_\lambda^{(2)}, V_\lambda^{(2)}\}$ を調べよう. $\{U_\lambda^{(1)}, V_\lambda^{(1)}\}$ のときと同様に積分可能条件を計算すると, もとの曲面のガウス方程式と

$$Q_{\bar{w}} = \frac{1}{2}(\lambda^{-1}H) = 0, \quad \bar{Q}_w = \frac{1}{2}(\lambda H) = 0$$

が得られる. この方程式ともとの曲面のコダッチ方程式を組み合わせると

$$\frac{\partial}{\partial w} \{(\lambda^{-1} - 1)H\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \{(\lambda - 1)H\} = 0$$

が得られるから, H と λ は

$$\frac{1}{H} = h(w) + \bar{h}(\bar{w}), \quad \lambda(w, \bar{w}) = -\frac{\bar{h}(\bar{w})}{h(w)}$$

と表すことができる (h は複素正則函数). ゆえに $\{U_\lambda^{(2)}, V_\lambda^{(2)}\}$ が積分可能条件をみたすための必要十分条件は $1/H$ が (\mathcal{D}, I) 上の調和函数である. この条件をみたす曲面を汎調和平均曲率曲面(HIMC 曲面と略称)と呼ぶ*24. この概念は Bobenko [4] により導入された. HIMC 曲面は可積分系の観点からの, CMC 曲面の一般化である.

*23 パウルヴェ方程式の初等函数解で記述されるボンネ曲面については [21] を参照.

*24 **Harmonic Inverse Mean Curvature**

問題 8.2 HIMC 曲面に対する Sym 型の公式を作れ ([4] 参照). 負定曲率曲面に対しても, 同様の一般化を考察せよ ([4], [41] 参照).

ボンネ曲面と HIMC 曲面はともに平均曲率一定曲面の拡張概念であるがこの 2 つの概念はどのような関連にあるのだろうか. ボンネ曲面が双等温であることから次が示せる.

系 8.2 臍点のない曲面がボンネ曲面であれば, その双対曲面は HIMC 曲面である.

この系の逆は成立しない. HIMC 曲面は一般には双等温ではないため, 双対曲面が存在するとは限らない. ボンネ曲面の研究は, 双等温性のもとでは「双対をとる操作」を通じて (局所理論的には) 双等温 HIMC の研究と等価になる.

ボンネ曲面, HIMC 曲面のラックス表示

$$\frac{\partial}{\partial w} \Phi_\lambda^{[i]} = \Phi_\lambda^{[i]} U_\lambda^{[i]}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \Phi_\lambda^{[i]} = \Phi_\lambda^{[i]} V_\lambda^{[i]}, \quad i = 1, 2$$

においてはスペクトル径数 λ が点に依存していることに注意してほしい*25. これらの曲面のラックス表示は Burtsev, Zakharov, Mikhailov [13] のいう「動くスペクトル径数をもつ逆散乱形式」の例を与えている*26.

この節で説明した「平均曲率一定曲面の可積分系としての一般化」については [22] に手短かなサーベイがある.

この講義ではユークリッド空間内の曲面のみを取り上げたが 3 次元球面, 3 次元双曲空間内の可積分な曲面も興味深い対象である. 例えば 3 次元球面内の平坦な曲面は線型波動方程式 $-u_{tt} + u_{xx} = 0$ と対応する.

ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の平均曲率一定曲面は球面 S^3 及び双曲空間 \mathbb{H}^3 に対応物をもつことが知られている (Lawson 対応と呼ばれている). だが双曲空間 \mathbb{H}^3 には $0 < H^2 < 1$ の場合, 球面やユークリッド空間に対応物を持たない平均曲率一定曲面が存在する. それらは Cosh-Gordon 方程式 $\Delta u + \cosh u = 0$ を積分可能条件にもつ ([18], [38] 参照).

藤岡 [20] は HIMC 曲面の概念を球面と双曲空間にも広げた. ただし外側の空間が曲がっている場合は定義式 $\Delta(1/H) = 0$ を修正する必要がある. HIMC 曲面の場合にも Lawson 対応が成立するがやはり $0 < H^2 < 1$ の場合, 双曲空間にはユークリッド空間や球面には対応物がない双曲空間特有の HIMC 曲面が存在する. $0 < H^2 < 1$ である HIMC 曲面はラックス表示をもつことから, 新しいクラスの可積分曲面を定める可能性がある. これらの曲面が既知の可積分系, 例えばパンルヴェ方程式等と対応するかどうかははまだわかっていない.

問題 8.3 動くスペクトル径数 $\lambda(u, v)$ を次のように挿入する.

$$U_\lambda^{[3]} = \begin{pmatrix} -\phi_w/4 & \lambda^{-1} Q e^{-\phi/2} \\ -\lambda^{-1} H e^{\phi/2}/2 & \phi_w/4 \end{pmatrix}, \quad V_\lambda^{[3]} = \begin{pmatrix} \phi_{\bar{w}}/4 & \lambda H e^{\phi/2}/2 \\ -\lambda \bar{Q} e^{-\phi/2} & -\phi_{\bar{w}}/4 \end{pmatrix}.$$

$\{U_\lambda^{[3]}, V_\lambda^{[3]}\}$ が積分可能条件をみたすという要請から得られる曲面のクラスを調べよ*27. CMC 曲面の一般化は得られるだろうか.

*25 (u, v) の関数ということ.

*26 彼らによれば物理学的に興味ある方程式で固有値が時間変数に依存するものがあり, 逆散乱法は拡張されなければならないという (実際には空間変数にも依存するものも考えなければならない). 彼らはこの「拡張された逆散乱法」を *Inverse scattering method with variable spectral parameter* と呼んだ.

*27 積分可能条件からはもとの曲面のガウス方程式と

$$(\lambda H)_w = 2(\lambda^{-1} Q)_{\bar{w}} e^{-\phi/2}, \quad (\lambda H)_{\bar{w}} = -2(\lambda \bar{Q})_w e^{-\phi/2}$$

が得られる. これとコダッチ方程式を組み合わせよ.

註 8.4 (extended frame) CMC 曲面の場合, λ を $|\lambda| = 1$ をみたす定数とすれば問題 8.3 の条件をみたす. このとき

$$\frac{\partial}{\partial w} \Phi_\lambda^{[3]} = U_\lambda^{[3]}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \Phi_\lambda^{[3]} = V_\lambda^{[3]}$$

の解 $\Phi_\lambda^{[3]}$ を CMC 曲面の extended frame とよぶ.

9 CMC 曲面の差分化

9.1 離散双等温曲面

双等温曲面の差分化を考えたい. そのためには「双等温曲面」について更に詳しく理解しておく必要がある. 興味深いことにケーリーに遡る双等温曲面の「古典的定義」が差分化のヒントを与える.

定義 9.1 (Cayley [14]) ユークリッド空間内の曲面 Σ が双等温であるための必要十分条件は Σ が曲率線を辺とする無限小正方形に分割できることである.

もちろんこの「定理」はこのままでは現代数学的には意味を為さないが, 以下で導入する複比を用いることで厳密化できる.

註 9.1 ケーリーの定理を「無限小」を厳密化してこのままの形で活かすことができると面白い. これは超準解析 (Nonstandard Analysis) を取り込むことで実現できることを Hertrich-Jeromin[25] が証明した. 微分幾何学の離散化によって「古典幾何学における無限小概念」が正当化されたことは注目すべきことと思われる. これから説明する双等温曲面の離散化は無限小正方形の正当化と理解できる.

9.2 複比と差分 CMC 曲面

命題 9.1 双等温曲面は共形的概念である. すなわち次が成立する.

$p(u, v)$ を双等温曲面とする. \mathbb{E}^3 の任意の共形変換 (メビウス変換) F に対し $F(p(u, v))$ も双等温曲面である.

共形普遍性に鑑み, この節では複比を導入する. まず四元数の定義を与えよう.

四元数体 \mathbb{H} とは \mathbb{R} 上の多元環 (代数) で基底 $\{\mathbf{1}, i, j, k\}$ と乗法:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}i &= i\mathbf{1} = i, & \mathbf{1}j &= j\mathbf{1} = j, & \mathbf{1}k &= k\mathbf{1} = k, \\ ij &= -ji = k, & jk &= -kj = i, & ki &= -ik = j, \\ i^2 &= j^2 = k^2 = -\mathbf{1} \end{aligned}$$

で生成されるものである. $\mathbb{R} = \mathbb{R}\mathbf{1}$, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \sqrt{-1}\mathbb{R} = \mathbb{R}\mathbf{1} \oplus \mathbb{R}i$ と同一視し $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ とみなす. もう少し詳しくいうと, 実数 x_0 を $x_0\mathbf{1} \in \mathbb{H}$ と, 複素数 $x_0 + \sqrt{-1}x_1$ を $x_0\mathbf{1} + x_1i \in \mathbb{H}$ と同一視することである. \mathbb{H} の元を四元数 (quaternion) とよぶ. 四元数 $\mathbf{x} = x_0\mathbf{1} + x_1i + x_2j + x_3k$ に対し $\operatorname{Re} \mathbf{x} := x_0$, $\operatorname{Im} \mathbf{x} := x_1i + x_2j + x_3k$ と定めそれぞれ x_i の実部 (real part)・虚部 (imaginary part) とよぶ. 虚部の定義の仕方が複素数のときと違っていることに注意. $\operatorname{Re} \mathbf{x} = 0$ である四元数を純虚四元数 (pure imaginary quaternion) とよび, その全体を

$$\operatorname{Im} \mathbb{H} = \{x_1i + x_2j + x_3k \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}\}$$

と表す. ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 を $\text{Im } \mathbb{H}$ と同一視する. すなわち

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \longleftrightarrow x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$$

と対応させる. このとき, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Im } \mathbb{H} = \mathbb{E}^3$ の四元数としての積は

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = -(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{1} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}$$

をみたしている. 4.2 節で導入した \mathbb{E}^3 と $\text{su}(2)$ の同一視を思い出そう.

$$\mathbf{i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -x_3 i & -x_2 - x_1 i \\ x_2 - x_1 i & x_3 i \end{pmatrix}$$

と対応させると, $\text{su}(2)$ の基底に単位行列 $\mathbf{1}$ を加えた基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ は四元数の乗法規則をみたしている. したがって $\text{Im } \mathbb{H}$ における積の計算を行う際には $\text{su}(2)$ における行列の乗法を実行すればよい.

定義 9.2 4 点 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \text{Im } \mathbb{H}$ に対し

$$C(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) := (Q_1 - Q_2)(Q_2 - Q_3)^{-1}(Q_3 - Q_4)(Q_4 - Q_1)^{-1}$$

と定め 4 点 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 の複比(cross ratio) という.

基本四辺形 $q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ が与えられているとき, q の頂点に対し, 複比 $C(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ を計算することができる. この複比を, 基本四角形 q の複比とよび, $C(q)$ と表記する.

次の命題は複素数の場合によく知られている事実の自然な拡張である.

命題 9.2 (1) 複比は $\mathbb{E}^3 = \text{Im } \mathbb{H}$ のメビウス変換で不変.

(2) 基本四角形 q に対し $\text{Im } C(q) = 0 \Leftrightarrow q$ の頂点は同一円周上にある (concurrent, conformal rectangular).

(3) $C(q) = -1 \Leftrightarrow q$ は共形正方形 (conformal square) の 4 頂点*28.

とくに (3) に注目しよう. ケーリーの古典的定義と比較すれば $C = -1$ が「双等温曲面の差分化は, どう定義されねばならないか」を説明している.

曲面 $\mathbf{p} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ の 1 点 (u_0, v_0) を固定する. $\varepsilon > 0$ に対し

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}(u_0 + \varepsilon, v_0 - \varepsilon), \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}(u_0 + \varepsilon, v_0 + \varepsilon), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}(u_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon), \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}(u_0 - \varepsilon, v_0 - \varepsilon), \end{aligned}$$

とおく. これらをテイラー展開すると

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}(u_0, v_0) + \varepsilon\{(\partial_u - \partial_v)\mathbf{p}\}(u_0, v_0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\{(\partial_u - \partial_v)^2\mathbf{p}\}(u_0, v_0) + o(\varepsilon^2), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}(u_0, v_0) + \varepsilon\{(\partial_u + \partial_v)\mathbf{p}\}(u_0, v_0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\{(\partial_u + \partial_v)^2\mathbf{p}\}(u_0, v_0) + o(\varepsilon^2), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}(u_0, v_0) - \varepsilon\{(\partial_u - \partial_v)\mathbf{p}\}(u_0, v_0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\{(\partial_u - \partial_v)^2\mathbf{p}\}(u_0, v_0) + o(\varepsilon^2), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}(u_0, v_0) - \varepsilon\{(\partial_u + \partial_v)\mathbf{p}\}(u_0, v_0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\{(\partial_u + \partial_v)^2\mathbf{p}\}(u_0, v_0) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

*28 正方形に共形同値ということ.

である. これを用いて $C(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$ を計算すると次の定理が証明できる.

定理 9.1 (u, v) が双等温座標系であるための必要十分条件は

$$C(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = -1 + o(\varepsilon)$$

がすべての点 (u_0, v_0) において成立することである.

これは「ケーリーの定義した双等温曲面」の厳密な再定式化を与えている. ここまでくれば双等温曲面の離散化がどうあるべきかは自ずと決まる.

定義 9.3 (Bobenko-Pinkall [7]) $\mathbf{p} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{E}^3$ が条件

$$C(\mathbf{p}_m^n, \mathbf{p}_m^{n+1}, \mathbf{p}_{m+1}^{n+1}, \mathbf{p}_{m+1}^n) = -1$$

をみたすとき差分双等温網(discrete isothermic net) または差分双等温曲面とよぶ.

このように定めれば「差分双等温曲面」が共形不変概念になっていることは明らかである.

定義 9.4 差分双等温網 $\mathbf{p} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{E}^3$ に対し

$${}^* \mathbf{p}_m^{n+1} - {}^* \mathbf{p}_m^n = \frac{\mathbf{p}_m^{n+1} - \mathbf{p}_m^n}{|\mathbf{p}_m^{n+1} - \mathbf{p}_m^n|^2}, \quad {}^* \mathbf{p}_{m+1}^n - {}^* \mathbf{p}_m^n = \frac{\mathbf{p}_{m+1}^n - \mathbf{p}_m^n}{|\mathbf{p}_{m+1}^n - \mathbf{p}_m^n|^2}$$

で定まる差分双等網 ${}^* \mathbf{p}_m^n$ を \mathbf{p}_m^n の双対差分双等温網(または双対差分双等温曲面) とよぶ.

差分曲面に対し「曲率」をどう定義すればよいのだろうか. 「平均曲率」の定義に依存して様々な種類の「平均曲率一定離散曲面」が定義できるかもしれない. しかし我々は離散可積分系(差分方程式)に関心があり, そして連続理論(通常平均曲率一定曲面)と自然に結びつく系が欲しいのである. そうすると系 8.1 に着目すればよいことに気づく.

定義 9.5 ([8]) 差分双等温網 \mathbf{p}_m^n が次をみたすとき差分 CMC 網(discrete CMC net) または平均曲率一定差分曲面(discrete CMC surface) とよぶ.

$$|\mathbf{p}_m^n - {}^* \mathbf{p}_m^n| = \frac{1}{H^2}$$

ここで $H \neq 0$ は定数である.

ここでは平均曲率の概念を導入することを避けて差分 CMC 網を定義した. 接触球を用いて, isothermic とは限らない discrete net に対し, 平均曲率を定義することができる ([8] 参照). 差分 CMC 網については [62] を参考書としてあげておく ([45] も参照されたい).

10 差分等角写像

10.1 等角写像の差分化

複比を用いると次の事実を示すことができる.

補題 10.1 複素関数 $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が共形的 (正則関数または反正則関数) であるための必要十分条件は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(f(u, v), f(u + \varepsilon, v), f(u + \varepsilon, v + \varepsilon), f(u, v + \varepsilon)) = -1$$

である.

これをもとに次の定義が提案された.

定義 10.1 (Bobenko-Pinkall [7]) $f = f_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$ が差分漸近網であるとき, f_m^n を差分共形写像(discrete conformal map) とよぶ. 向きを保つときは差分等角写像とか差分正則関数(discrete holomorphic function) とよぶ.

10.2 差分正則関数

差分共形写像のラックス表示

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^m &= \Psi_n^m U_n^m, \quad \Psi_n^{m+1} = \Psi_n^m V_n^m, \\ U_n^m &= \begin{pmatrix} 1 & -f_{n+1}^m + f_n^m \\ \lambda/(f_{n+1}^m - f_n^m) & 1 \end{pmatrix}, \\ V_n^m &= \begin{pmatrix} 1 & -f_n^{m+1} + f_n^m \\ -\lambda/(f_n^{m+1} - f_n^m) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

を Nijhoff と Capel が提出した [56].

差分正則関数の例は, (現状では) 極めて乏しい. 非自明な例は指数関数と冪関数が知られている. 冪関数 $f(w) = w^\gamma$ の差分化を紹介する.

定義 10.2 $0 < \gamma < 2$ とする. 差分冪関数 $f_m^n : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ を以下の条件で定義する:

- 差分正則

$$C(f_m^n, f_m^{n+1}, f_{m+1}^{n+1}, f_{m+1}^n) = -1,$$

- 常微分方程式 $\gamma f(w) = w f'(w)$ の離散版をみたす.

$$\gamma f_m^n = 2n \frac{(f_m^{n+1} - f_m^n)(f_m^n - f_m^{n-1})}{f_m^{n+1} - f_m^{n-1}} + 2m \frac{(f_{m+1}^n - f_m^n)(f_m^n - f_{m-1}^n)}{f_{m+1}^n - f_{m-1}^n},$$

-

$$f_0^0 = 0, \quad f_0^1 = 1, \quad f_1^0 = i^\gamma.$$

条件 $0 < \gamma < 2$ のもとでこの差分冪関数は埋め込みである, すなわち相異なる基本四辺形の内部同士は交わらない(自己交叉しない). 実際には, $\gamma \notin 2\mathbb{Z}_{>0}$ ならば埋め込みである (Agafonov, [1]). 差分正則関数については, [66] に手短な解説がある. いくつかの研究課題をあげておこう.

- もっと多くの差分正則関数を作れないか.
- この定義でよいのかどうか検討せよ.
- 差分冪関数と P_{VI} との関係, 指数冪の一般化を研究せよ. 先行研究として [2], [3], [46] がある.
- 超離散等角写像を定義せよ.

参考文献

- [1] S. I. Agafonov, Imbedded circle patterns with the combinatorics of the square grid and discrete Painlevé equations, *Discrete Comput. Geom.* 29 (2003), 305–319.
- [2] 安藤央, 離散冪関数と Painlevé VI 方程式との関係, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No. 22AO-S8, 2011, pp. 56–61.
- [3] T. Ando, M. Hay, K. Kajiwara, T. Masuda, An explicit formula for the discrete power function associated with circle patterns of Scramm type, preprint. arXiv:1105.1612v2[nlin.SI].
- [4] A. I. Bobenko, Surfaces in terms of 2 by 2 matrices— Old and new integrable cases, in: *Harmonic Maps and Integrable Systems* (A. P. Fordy, J. C. Wood eds.), Aspects of Math. E23, Viewig 1994, 83–127.
- [5] A. I. Bobenko, U. Eitner, *Painlevé Equations in the Differential Geometry of Surfaces*, Lecture Notes in Math. 1753 (2000), Springer Verlag.
- [6] A. Bobenko, U. Pinkall, Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation, *J. Differential Geom.* 43 (1996), no. 3, 527–611.
- [7] A. I. Bobenko, U. Pinkall, Discrete isothermic surfaces, *J. Reine Angew. Math.* 475 (1996), 187–208.
- [8] A. I. Bobenko, U. Pinkall, Discretization of surfaces and integrable systems, in [10], pp. 3–58.
- [9] A. I. Bobenko, W. Schief, Discrete indefinite affine spheres, in: [10], pp. 113–138.
- [10] A. I. Bobenko, R. Seiler, *Discrete Integrable Geometry and Physics*, Oxford Lecture Series in Math. Appl. 16, 1999.
- [11] A. I. Bobenko, Y. B. Suris, *Discrete Differential Geometry. Integrable Structure*, Graduate Studies in Math. 98, Amer. Math. Soc., 2008.
- [12] O. Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables, *J. Éc. Polyt.* 42(1867), 72–92.
- [13] S. P. Burtsev, V. E. Zakharov, A. V. Mikhailov, Inverse scattering method with variable spectral parameter, *Theo. Math. Phys.* 70(1987), 227–240.
- [14] A. Cayley, On the surfaces divisible into squares by their curves of curvatures, *Proc. London Math. Soc.* 4 (1872), 8–9, 120–121.
- [15] E. Christoffel, Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen, *J. Reine Angew. Math.* 67(1867), 218–228.
- [16] M. Craizer, H. Anciaux, T. Lewiner, Discrete affine minimal surfaces with indefinite metric, *Differential Geom. Appl.* 28 (2010), 158–169.
- [17] M. Craizer, M. Alvim, R. Teixeira, Area distances of convex plane curves and improper affine spheres, *SIAM J. Imaging Sciences* 1 (2008), no. 1, 209–227.
- [18] J. F. Dorfmeier, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi, Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space via loop groups, *J. Reine Angew. Math.*, to appear.
- [19] S. Fujimori, S.-P. Kobayashi, W. Rossman, *Loop Group Methods for Constant Mean Curvature Surfaces*, Rokkyo Lectures in Math. 17, Kobe Univ., 2005.
- [20] A. Fujioka, Surfaces with harmonic inverse mean curvature in space forms, *Proc. Amer. Math. Soc.* 127(1999), 3021–3025.
- [21] A. Fujioka, J. Inoguchi, Bonnet surfaces with constant curvature, *Results Math.* 33(1998), 288–293.

- [22] A. Fujioka, J. Inoguchi, On some generalisations of constant mean curvature surfaces, *Lobachevskii Math. J.* 3(1999), 73–95
(<http://ljm.ksu.ru/vol3/fujioka.htm>)
- [23] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*, Second edition, Addison-Wesley Publ., 1994. 邦訳, 『コンピュータの数学』(有沢誠, 萩野達也, 安村通晃, 石畑清 [訳]), 共立出版, 1993.
- [24] W. C. Graustein, Applicability with preservation of both curvatures, *Bull. Amer. Math. Soc.* 30 (1924), 19–23., *Duke Math. J.* 2(1936), 177–191.
- [25] U. Hertrich-Jeromin, The surfaces capable of division into infinitesimal squares by their curves of curvature: a nonstandard-analysis approach to classical differential geometry, *Math. Intelligencer* 22(2000), 54–61.
- [26] U. Hertrich-Jeromin, I. McIntosh, P. Norman, F. Pedit, Periodic discrete conformal maps, *J. Reine Angew. Math.* 534 (2001), 129–153.
- [27] R. Hirota, Nonlinear partial difference equations. III. Discrete sine-Gordon equation, *J. Phys. Soc. Japan* 43 (1977), no. 6, 2079–2086.
- [28] R. Hirota, Nonlinear partial difference equations. V. Nonlinear equations reducible to linear equations, *J. Phys. Soc. Japan* 46 (1979), 312–319.
- [29] 広田良吾, 『差分幾何入門』, 培風館, 1998.
- [30] R. Hirota and D. Takahashi, Ultradiscretization of the Tzitzeica equation, *Glasgow Math. J.* 47A (2005), 77–85.
- [31] T. Hoffmann, Discrete Amsler surfaces and a discrete Painlevé III equation, in: [10], pp. 83–96.
- [32] T. Hoffmann, *Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces*, COE Lecture Note 18, Kyushu Univ., 2009 ([65] に部分的な邦訳あり).
- [33] H. Hopf, Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen, *Math. Nachr.* 4 (1951), 232–249.
- [34] 井ノ口順一, 『曲線とソリトン』, 朝倉書店, 2010.
- [35] 井ノ口順一, 『どこにでも居る幾何』, 日本評論社, 2010.
- [36] 井ノ口順一, 数学的しゃぼん玉, *数学セミナー*, 2010年1月号, 25–29.
pp. 25–29.
- [37] 井ノ口順一, 差分幾何, *数学セミナー*, 2010年11月号, pp. 26–31.
- [38] 井ノ口順一, 3次元双曲空間の平均曲率一定曲面, *京都大学数理解析研究所講究録*, 1700 (2010), 48–64.
- [39] 井ノ口順一, 曲面の差分幾何, *京都大学数理解析研究所講究録別冊*, 掲載予定.
- [40] 井ノ口順一・小林真平, Bianchi-Bäcklund-Darboux 変換について, *九州大学応用力学研究所 研究集会報告*, 16ME-S1 (2005), Article No. 25.
- [41] 井ノ口順一・小林真平・松浦望, 『曲面の微分幾何学とソリトン方程式』, *立教 SFR 講究録 No. 8*, 2005年2月刊.
- [42] 小林真平, 平均曲率一定曲面を視る, *数学セミナー*, 2010年1月号, 30–36.
- [43] S.-P. Kobayashi, J. Inoguchi, Characterizations of Bianchi-Bäcklund transformations of constant mean curvature surfaces, *Internat. J. Math.* 16 (2005), no. 2, 1–10.
- [44] 小林昭七, 『曲線と曲面の微分幾何』, 裳華房, 1977. 新装改定版, 1995.
- [45] 近藤剛史, W. Rossman, 離散的な曲面, *数理科学*, 2010年11月号, pp. 19–25.

- [46] 増田哲, 離散冪函数の明示公式, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No. 22AO-S8, 2011, pp. 56–61.
- [47] 松浦望, 曲面の離散化と微分幾何学, 修士論文, 東北大学大学院情報科学研究科, 2001.
- [48] 松浦望, Discrete analogue of affine differential geometry and integrable systems, 博士学位論文, 東北大学大学院情報科学研究科, 2004.
- [49] 松浦望, 曲面の差分幾何, ([41, 第 3 章]), 2005.
- [50] 松浦望, アフィン球面の超離散化 (に向けて), 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No. 12ME-S2, Article No. 40, 2006.
- [51] N. Matsuura, A discrete analogue of the affine Bäcklund transformation, Fukuoka Univ. Sci. Rep. 40 (2010), no. 2, 163–173.
- [52] 松浦望, 曲線と曲面の差分幾何, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No. 22AO-S8, 2011, pp. 62–74.
- [53] 松浦望, 曲線の差分幾何, 京都大学数理解析研究所講究録別冊, 掲載予定.
- [54] N. Matsuura, H. Urakawa, Discrete improper affine spheres, J. Geom. Phys. 45 (2003), no. 1-2, 164–183.
- [55] 中田庸一, 超離散負定曲率曲面の構成, 修士論文, 東京大学大学院数理科学研究科, 2006.
- [56] F. W. Nijhoff, H. W. Capel, The discrete Korteweg-de Vries equation, Acta Appl. Math. 39 (1995), 133–158.
- [57] 野水克己, 佐々木武, 『アファイン微分幾何学』, 裳華房, 1994.
- [58] Y. Ohya, H. Kawamuko, H. Sakai, K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations V, Third Painlevé equations of special type $P_{\text{III}}(D_7)$ and $P_{\text{III}}(D_8)$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 13 (2006), no. 2, 145–204.
- [59] F. Pedit, H. Wu, Discretizing constant curvature surfaces via loop group factorizations: The discrete sine- and sinh-Gordon equation, J. Geom. Phys. 17 (1995), 245–260.
- [60] L. Raffy, Sur une classe nouvelle des surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sans altération des courbures principales, Bull. Soc. Math. France 21(1893), 70–72.
- [61] C. Rogers, W. K. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations. Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge Texts in Applied Math., Cambridge Univ. Press, 2002.
- [62] W. Rossman, *Discrete Constant Mean Curvature Surfaces via Conserved Quantities*, COE Lecture Note. 25, Kyushu Univ., 2010.
- [63] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys. 220 (2001), no. 1, 165–229.
- [64] R. Sauer, Parallelogrammgeritter als Modelle pseudosphärischer Flächen, Math. Z. 52 (1950), 611–622.
- [65] 若山正人 (編), 『可視化の技術と現代幾何学』, 岩波, 2010.
- [66] 吉田正章, 離散正則関数, 数理科学, 2010 年 11 月号, pp. 7–12.