

## [040] 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012

井ノ口, 順一  
山形大学理学部

太田, 泰広  
神戸大学大学院理学研究科

箕, 三郎  
立教大学理学部数学科

梶原, 健司  
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

他

<https://hdl.handle.net/2324/25116>

---

出版情報 : COE Lecture Note. 40, 2012-03-15. 九州大学大学院数理学研究院  
バージョン :  
権利関係 :

# 可積分系の厳密解と **Gram** 行列式

太田 泰広

(神戸大学大学院 理学研究科)

離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル2012

九州大学 伊都キャンパス

2012年2月22～24日

## 可積分系の解 $\longrightarrow$ Casorati 行列式

{	戸田格子 (1次元, 2次元)	{	ソリトン解
	sinh-Gordon		分子解
	sine-Gordon		etc.
	それらの離散化 etc.		

双線形方程式 = 行列式の恒等式  
(Plücker 関係式)

もう一つの行列式表示

Gram 行列式 (Gramian)

## sine-Gordon と Casorati 行列式解 (復習)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -4 \sin \theta \quad \theta = \frac{1}{i} \left( 2 \log \frac{\tau_1}{\tau_0} - \log \lambda \right)$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ f_n^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} \quad \lambda = \prod_{i=1}^N p_i^2$$

$$f_n^{(k)} = p_k^n e^{p_k x - \frac{y}{p_k} + \eta_{k0}} + (-p_k)^n e^{-p_k x + \frac{y}{p_k} + \xi_{k0}}$$

$\theta$ が実数値をとるためには……

2

『 $x, y$ が実数ならば $\theta$ が実数』

という条件を満足させたい。

⇒ 行列式解の中のパラメータの特殊化

$$\eta_{k0} = -\xi_{k0} = \frac{\pi}{4} i \quad p_k \in \mathbb{R}$$

解に対する付加条件をどうやって満足させるか。

Gram 行列式を利用する。

3

Gram 行列式とは

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_N) \\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_2, \varphi_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_N, \varphi_1) & (\varphi_N, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_N, \varphi_N) \end{vmatrix}$$

$(\varphi_i, \varphi_j)$  は  $\varphi_i$  と  $\varphi_j$  の内積

例

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x) \overline{\varphi_j(x)} dx$$

4

(可積分系の文脈での) Gram 行列式

$$\tau(x, y, \cdots) = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left( c_{ij} + \int^x \varphi_i(x', y, \cdots) \psi_j(x', y, \cdots) dx' \right)$$

$c_{ij}$  : 積分定数

$\varphi_i, \psi_j$  は線形微/差分方程式をみたす

5

## Casorati (復習)

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ f_n^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}$$

は2次元戸田格子方程式 (双線形形式)

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$$

をみます。ただし

$$\frac{\partial}{\partial x} f_n^{(k)} = f_{n+1}^{(k)} \quad \frac{\partial}{\partial y} f_n^{(k)} = -f_{n-1}^{(k)}$$

6

$$m_{ij} = c_{ij} + \int^x \varphi_i(x) \psi_j(x) dx \text{ に対し, } \boxed{\frac{\partial m_{ij}}{\partial x} = \varphi_i \psi_j}$$

$\varphi_i, \psi_j$  が

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi_i = -\varphi_i \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \psi_j = -\psi_j$$

をみますなら

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{ij}}{\partial y} &= \int^x \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \psi_j + \varphi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx \\ &= - \int^x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial m_{ij}}{\partial y} = - \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}}$$

7

$\varphi_i, \psi_j$  が

$$\partial_x \varphi_i(n) = \varphi_i(n+1) \quad \partial_x \psi_j(n) = -\psi_j(n-1)$$

をみたすなら

$$\begin{aligned} m_{ij}(n+1) - m_{ij}(n) &= \int^x (\varphi_i(n+1)\psi_j(n+1) - \varphi_i(n)\psi_j(n)) dx \\ &= \int^x \{(\partial_x \varphi_i(n))\psi_j(n+1) + \varphi_i(n)\partial_x \psi_j(n+1)\} dx \\ &= \int^x \partial_x (\varphi_i(n)\psi_j(n+1)) dx \end{aligned}$$

$$m_{ij}(n+1) = m_{ij}(n) + \varphi_i(n)\psi_j(n+1)$$

8

## Gram

$$\tau_n = \begin{vmatrix} m_{11}^n & m_{12}^n & \cdots & m_{1N}^n \\ m_{21}^n & m_{22}^n & \cdots & m_{2N}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{N1}^n & m_{N2}^n & \cdots & m_{NN}^n \end{vmatrix}$$

は 2 次元戸田格子方程式 (双線形形式)

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$$

をみたす。ただし

9

$$\partial_x m_{ij}^n = \varphi_i^n \psi_j^n$$

$$\partial_y m_{ij}^n = -(\partial_y \varphi_i^n)(\partial_y \psi_j^n)$$

$$m_{ij}^{n+1} = m_{ij}^n + \varphi_i^n \psi_j^{n+1}$$

$$\partial_x \partial_y \varphi_i^n = -\varphi_i^n \quad \partial_x \partial_y \psi_j^n = -\psi_j^n$$

$$\partial_x \varphi_i^n = \varphi_i^{n+1} \quad \partial_x \psi_j^n = -\psi_j^{n-1}$$

$$\left( \partial_y \varphi_i^n = -\varphi_i^{n-1} \quad \partial_y \psi_j^n = \psi_j^{n+1} \right)$$

10

定理

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \text{に対して}$$

$$\partial_x |A| = \sum_{j=1}^N \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \partial_x a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & \partial_x a_{Nj} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

Casorati (Wronskian) の微分

$$\tau = \det(f_j^{(i)})_{N \times N} = |0, 1, \dots, N-1| \quad \partial_x f_j^{(i)} = f_{j+1}^{(i)}$$

に対して

$$\partial_x \tau = |0, 1, \dots, N-2, N|$$

11

定理

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

$\Delta_{ij} = (A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子})$

に対して

$$\partial_x |A| = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_{ij} \partial_x a_{ij}$$

証明

$$\partial_x |A| = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \underbrace{\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}}}_{\parallel \Delta_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x}$$

12

定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} & b_N \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_N & 0 \end{vmatrix} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_{ij} b_i c_j$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= \left( \left( \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \right) \text{ の } (i, j) \text{ 余因子} \right) \\ &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} < \widehat{i} \end{aligned}$$

13



## Gramian の微分

$$\tau = \det(m_{ij})_{N \times N} \quad \partial_x m_{ij} = \varphi_i \psi_j$$

に対して

$$\partial_x \tau = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} & \varphi_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{N1} & \cdots & m_{NN} & \varphi_N \\ -\psi_1 & \cdots & -\psi_N & 0 \end{vmatrix}$$

証明

$$\begin{aligned} \partial_x \tau &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_{ij} \partial_x m_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_{ij} \varphi_i \psi_j \\ &= \begin{vmatrix} m_{ij} & \varphi_i \\ -\psi_j & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

14

$$\partial_x m_{ij} = \varphi_i \psi_j \quad \partial_y m_{ij} = -(\partial_y \varphi_i)(\partial_y \psi_j)$$

のとき

$$\partial_x |m_{ij}| = \begin{vmatrix} m_{ij} & \varphi_i \\ -\psi_j & 0 \end{vmatrix} \quad \partial_y |m_{ij}| = \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 \end{vmatrix}$$

さらに,  $\partial_x \partial_y \varphi_i = -\varphi_i$ ,  $\partial_x \partial_y \psi_j = -\psi_j$  のとき

$$\partial_x \partial_y |m_{ij}| = \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 & -1 \\ -\psi_j & 1 & 0 \end{vmatrix} - |m_{ij}|$$

15

$$\because \partial_x \partial_y \left| m_{ij} \right| = \partial_x \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \tilde{\Delta}_{ij} \partial_x \left( (i, j) \text{成分} \right)$$

$\tilde{\Delta}_{ij}$  は  $(N+1) \times (N+1)$  行列の余因子

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{\Delta}_{ij} \underbrace{\partial_x m_{ij}}_{\parallel \varphi_i \psi_j} + \sum_{i=1}^N \tilde{\Delta}_{i, N+1} \underbrace{\partial_x \partial_y \varphi_i}_{\parallel -\varphi_i} + \sum_{j=1}^N \tilde{\Delta}_{N+1, j} \underbrace{\partial_x \partial_y \psi_j}_{\parallel -\psi_j}$$

$$= \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 & 0 \\ -\psi_j & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{ij} & -\varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i \\ -\psi_j & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 & 0 \\ -\psi_j & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i \\ -\psi_j & 1 \end{vmatrix} - |m_{ij}|$$

$$= \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 & -1 \\ -\psi_j & 1 & 0 \end{vmatrix} - |m_{ij}|$$

$m_{ij}^{n+1} = m_{ij}^n + \varphi_i^n \psi_j^{n+1}$  のとき

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m_{11}^{n+1} & \cdots & m_{1N}^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{N1}^{n+1} & \cdots & m_{NN}^{n+1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} m_{11}^n + \varphi_1^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{1N}^n + \varphi_1^n \psi_N^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{N1}^n + \varphi_N^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{NN}^n + \varphi_N^n \psi_N^{n+1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} m_{11}^n + \varphi_1^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{1N}^n + \varphi_1^n \psi_N^{n+1} & \varphi_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{N1}^n + \varphi_N^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{NN}^n + \varphi_N^n \psi_N^{n+1} & \varphi_N^n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11}^n & \cdots & m_{1N}^n & \varphi_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{N1}^n & \cdots & m_{NN}^n & \varphi_N^n \\ -\psi_1^{n+1} & \cdots & -\psi_N^{n+1} & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

また,  $m_{ij}^{n-1} = m_{ij}^n - \varphi_i^{n-1} \psi_j^n$  なので

$$\left| m_{ij}^{n-1} \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^n & 1 \end{vmatrix}$$

18

(まとめ)

$$\begin{aligned} \partial_x m_{ij}^n &= \varphi_i^n \psi_j^n & \partial_y m_{ij}^n &= -(\partial_y \varphi_i^n)(\partial_y \psi_j^n) \\ m_{ij}^{n+1} &= m_{ij}^n + \varphi_i^n \psi_j^{n+1} \\ \partial_x \varphi_i^n &= \varphi_i^{n+1} & \partial_y \varphi_i^n &= -\varphi_i^{n-1} \\ \partial_x \psi_j^n &= -\psi_j^{n-1} & \partial_y \psi_j^n &= \psi_j^{n+1} \end{aligned}$$

のとき

$$\begin{aligned} \partial_x \left| m_{ij}^n \right| &= \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^n \\ -\psi_j^n & 0 \end{vmatrix} & \partial_y \left| m_{ij}^n \right| &= \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \partial_y \varphi_i^n \\ \partial_y \psi_j^n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^{n+1} & 0 \end{vmatrix} \\ (\partial_x \partial_y + 1) \left| m_{ij}^n \right| &= \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \partial_y \varphi_i^n & \varphi_i^n \\ \partial_y \psi_j^n & 0 & -1 \\ -\psi_j^n & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} & \varphi_i^n \\ \psi_j^{n+1} & 0 & -1 \\ -\psi_j^n & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

19

$$\left| m_{ij}^{n+1} \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^n \\ -\psi_j^{n+1} & 1 \end{vmatrix} \quad \left| m_{ij}^{n-1} \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^n & 1 \end{vmatrix}$$

定理 (分子解の講義の復習)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+1} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+1} & a_{N,N+2} \\ a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} & a_{N+1,N+2} \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+1} & a_{N+2,N+2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+1} \\ a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} & & & a_{1,N+2} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{N,N+2} \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+2} \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} & & & a_{1,N+2} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{N,N+2} \\ a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} & & & a_{1,N+1} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{N,N+1} \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

証明

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+1} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+1} & a_{N,N+2} \\ a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} & a_{N+1,N+2} \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+1} & a_{N+2,N+2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^{N+2} a_{i,N+2} \Delta_{i,N+2} \left| a_{ij} \right|_{N \times N} \quad \left( \Delta_{ij} \text{ は } (N+2) \times (N+2) \text{ 行列の余因子} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{N+2} a_{i,N+2} \Delta_{i,N+2} \left| a_{ij} \right|_{N \times N} \\
 &+ \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^{N+2} a_{ij} \Delta_{i,N+2} \right) (-1)^{j+N-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

22

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{N+2} \Delta_{i,N+2} \left( \sum_{j=1}^N (-1)^{j+N-1} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \end{vmatrix} + a_{i,N+2} \left| a_{ij} \right|_{N \times N} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{N+2} \Delta_{i,N+2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \\ a_{i1} & \cdots & a_{iN} & a_{i,N+2} \end{vmatrix} \\
 &= \Delta_{N+2,N+2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+2} \end{vmatrix} + \Delta_{N+1,N+2} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i,N+2} \\ a_{N+1,j} & a_{N+1,N+2} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

23

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} & \varphi_i^n \\ \psi_j^{n+1} & 0 & -1 \\ -\psi_j^n & 1 & 0 \end{vmatrix} \times |m_{ij}^n| &= \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^{n+1} & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^n \\ -\psi_j^n & 0 \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^n \\ \psi_j^{n+1} & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} \\ -\psi_j^n & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$(\partial_x \partial_y + 1)\tau_n \times \tau_n = \partial_y \tau_n \times \partial_x \tau_n - (-\tau_{n+1})\tau_{n-1}$$

$$\tau_n := |m_{ij}^n|$$

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$$

24

## 1. Gram 行列式の微分則, 差分則

微分やシフトが縁つき Gram 行列式  
で書ける.

## 2. 行列式の恒等式

⇒ 双線形方程式

25

$N$ -soliton 解

$$\tau_n = \det \left( m_{ij}^n \right)_{N \times N} = \det \left( c_{ij} + \int^x \varphi_i^n \psi_j^n dx \right)_{N \times N}$$

において

$$c_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\varphi_i^n = \alpha_i p_i^n e^{p_i x - \frac{1}{p_i} y}$$

$$\psi_j^n = \beta_j (-q_j)^{-n} e^{q_j x - \frac{1}{q_j} y}$$

ととる. このとき, 
$$m_{ij}^n = \delta_{ij} + \frac{1}{p_i + q_j} \varphi_i^n \psi_j^n$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\varphi_1 \psi_1}{p_1 + q_1} & \frac{\varphi_1 \psi_2}{p_1 + q_2} & \cdots & \frac{\varphi_1 \psi_N}{p_1 + q_N} \\ \frac{\varphi_2 \psi_1}{p_2 + q_1} & 1 + \frac{\varphi_2 \psi_2}{p_2 + q_2} & \cdots & \frac{\varphi_2 \psi_N}{p_2 + q_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varphi_N \psi_1}{p_N + q_1} & \frac{\varphi_N \psi_2}{p_N + q_2} & \cdots & 1 + \frac{\varphi_N \psi_N}{p_N + q_N} \end{vmatrix}$$

## Fredholm 行列式

$$A = (a_{ij})_{N \times N} \quad I = (\delta_{ij})_{N \times N} \quad \text{として}$$

$$\begin{aligned} F &= \det (I + A) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^N a_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

28

$$\begin{aligned} \tau_n &= 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i \psi_i}{p_i + q_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \begin{vmatrix} \frac{\varphi_i \psi_i}{p_i + q_i} & \frac{\varphi_i \psi_j}{p_i + q_j} \\ \frac{\varphi_j \psi_i}{p_j + q_i} & \frac{\varphi_j \psi_j}{p_j + q_j} \end{vmatrix} + \cdots \\ &\quad \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\varphi_1 \psi_1}{p_1 + q_1} & \cdots & \frac{\varphi_1 \psi_N}{p_1 + q_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\varphi_N \psi_1}{p_N + q_1} & \cdots & \frac{\varphi_N \psi_N}{p_N + q_N} \end{vmatrix} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i + q_i} \varphi_i \psi_i + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \begin{vmatrix} \frac{1}{p_i + q_i} & \frac{1}{p_i + q_j} \\ \frac{1}{p_j + q_i} & \frac{1}{p_j + q_j} \end{vmatrix} \varphi_i \varphi_j \psi_i \psi_j \\ &\quad + \cdots + \left| \frac{1}{p_i + q_j} \right|_{N \times N} \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_N \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_N \end{aligned}$$

29



簡約

解に制限を加えて，方程式をえる。

☆ 1次元戸田格子

要請：  $\partial_x \tau_n = \partial_y \tau_n$

このとき

$$\frac{1}{2} D_x^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$$

$$\begin{aligned} \tau_n &= \det \left( \delta_{ij} + \frac{1}{p_i + q_j} \varphi_i \psi_j \right)_{N \times N} \\ &= \left( \prod_{i=1}^N \varphi_i \right) \det \left( \delta_{ij} \frac{1}{\varphi_i} + \frac{\psi_j}{p_i + q_j} \right) = \det \left( \delta_{ij} \frac{\varphi_j}{\varphi_i} + \frac{\varphi_j \psi_j}{p_i + q_j} \right) \\ &= \det \left( \delta_{ij} + \frac{1}{p_i + q_j} \varphi_j \psi_j \right) \end{aligned}$$

$$\varphi_j \psi_j = \alpha_j \beta_j \left( -\frac{p_j}{q_j} \right)^n e^{\frac{(p_j + q_j)x - \left( \frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} \right) y}{}}$$



$q_j = -\frac{1}{p_j}$  とえらぶと  $\left( p_j - \frac{1}{p_j} \right) x + \left( p_j - \frac{1}{p_j} \right) y$

$$\partial_x(\varphi_j \psi_j) = \partial_y(\varphi_j \psi_j) \quad \therefore \partial_x \tau_n = \partial_y \tau_n$$

☆ sinh-Gordon , sine-Gordon

要請：  $\tau_{n+2} = \tau_n$

このとき  $f = \tau_0$  ,  $g = \tau_1$  に対して

$$\frac{1}{2}D_x D_y f \cdot f = g^2 - f^2$$

$$\frac{1}{2}D_x D_y g \cdot g = f^2 - g^2$$

32

$$\tau_n = \det \left( \delta_{ij} + \frac{1}{p_i + q_j} \varphi_j \psi_j \right)$$

$$\varphi_j \psi_j = \alpha_j \beta_j \left( -\frac{p_j}{q_j} \right)^n e^{(p_j + q_j)x - \left( \frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} \right) y}$$

$q_j = p_j$  とえらぶと  $(-1)^n$

$$\tau_{n+2} = \tau_n$$

33

sinh-Gordon , sine-Gordon 方程式

$$\frac{1}{2}D_x D_y f \cdot f = g^2 - f^2 \qquad \frac{1}{2}D_x D_y g \cdot g = f^2 - g^2$$

$$(\log f)_{xy} = \frac{D_x D_y f \cdot f}{2f^2} \text{ より}$$

$$(\log f)_{xy} = \left(\frac{g}{f}\right)^2 - 1 \qquad (\log g)_{xy} = \left(\frac{f}{g}\right)^2 - 1$$

$$\therefore \left(\log \frac{g}{f}\right)_{xy} = \left(\frac{f}{g}\right)^2 - \left(\frac{g}{f}\right)^2$$

34

$$\left(\log \frac{g}{f}\right)_{xy} = \left(\frac{f}{g}\right)^2 - \left(\frac{g}{f}\right)^2$$

$v = 2 \log \frac{g}{f}$  に対して,

$$v_{xy} = 2(e^{-v} - e^v) = -4 \sinh v \qquad (\text{sinh-Gordon})$$

$\theta = \frac{v}{i} = \frac{2}{i} \log \frac{g}{f}$  に対して,

$$\theta_{xy} = -4 \sin \theta \qquad (\text{sine-Gordon})$$

複素数なら同じ方程式. 実数に制限すると別の方程式

方程式として区別すべきものはどれだけあるか

35

$x, y \in \mathbb{R}$  のとき 双曲型

$$\partial_x \partial_y \theta = -4 \sin \theta$$

または  $t = x + y$ ,  $s = x - y$  によって

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2)\theta = -4 \sin \theta$$

$x \in \mathbb{C}$ ,  $y = \bar{x}$  のとき 楕円型

$$X = x + y = x + \bar{x}, \quad Y = \frac{x - y}{i} = \frac{x - \bar{x}}{i}$$

によって

$$(\partial_X^2 + \partial_Y^2)\theta = -4 \sin \theta$$

36

$$(\partial_X^2 + \partial_Y^2)\theta = -4 \sin \theta$$

↑

$X, Y$  のスケールリングでは符号を  
かえられない

$\theta \rightarrow \theta + \pi$  で符号反転

境界条件の話と関係

37

68

境界条件について

$$(\partial_x^2 + \partial_Y^2) \theta = -4 \sin \theta$$

$X \rightarrow \pm\infty$  のとき  $\theta \rightarrow$  定数 とすると

その定数は  $n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )

たとえば

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right) \theta = -4 \sin \theta \quad \theta \longrightarrow 2n\pi \quad (X \rightarrow -\infty)$$

と

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right) \theta = +4 \sin \theta \quad \theta \longrightarrow 2n\pi \quad (X \rightarrow -\infty)$$

は別の方程式. 別の解

38

sine-Gordon  $(x, y, X, Y, \theta \in \mathbb{R})$

$$\partial_x \partial_y \theta = -4 \sin \theta$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right) \theta = -4 \sin \theta \quad \theta \rightarrow 2n\pi$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right) \theta = 4 \sin \theta \quad \theta \rightarrow 2n\pi$$

sinh-Gordon  $(x, y, X, Y, v \in \mathbb{R})$

$$\partial_x \partial_y v = -4 \sinh v$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right) v = -4 \sinh v$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right) v = 4 \sinh v$$

39

系に対する付加条件

- 実数性, 複素共役性
- 境界条件
- 解の正則性

$$v = 2 \log \frac{g}{f} \quad \theta = \frac{2}{i} \log \frac{g}{f}$$

$f = 0$  (or  $g = 0$ ) のとき  $v, \theta$  発散

40

sine-Gordon 双曲型  $\theta_{xy} = -4 \sin \theta \quad \theta = \frac{2}{i} \log \frac{g}{f}$

$$f = \tau_0 = \det \left( \delta_{ij} + \frac{1}{p_i + p_j} \alpha_i \beta_j e^{(p_i + p_j)x - \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_j}\right)y} \right)_{N \times N}$$

$$g = \tau_1 = \det \left( \delta_{ij} - \frac{1}{p_i + p_j} \alpha_i \beta_j e^{(p_i + p_j)x - \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_j}\right)y} \right)_{N \times N}$$

- 実数性  $\theta \in \mathbb{R}$  のためには  $|f| = |g|$   
(たとえば  $g = \bar{f}$ )

$$p_j \in \mathbb{R}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad \beta_j \in i\mathbb{R} \quad \text{ととれば}$$

$$g = \bar{f} \quad \text{for } x, y \in \mathbb{R}$$

41

70

• 解の正則性

$f \neq 0$  for  $x, y \in \mathbb{R}$  を満足させたい

$$\alpha_j = e^{\xi_j 0}, \quad \beta_j = \sqrt{-1} e^{\xi_j 0} \quad \text{ととって}$$

$$f = \det \left( \delta_{ij} + \frac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j} e^{\xi_i + \xi_j} \right)_{N \times N}$$

$$p_j \in \mathbb{R}, \quad \xi_j = p_j x - \frac{1}{p_j} y + \xi_{j0} \in \mathbb{R}$$

42

$|f|^2 \neq 0$  を示す

$$|f|^2 = \bar{f} f = g f$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{ij} - \frac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j} e^{\xi_i + \xi_j} & \frac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j} e^{\xi_i + \xi_j} \\ 0 & \delta_{ij} + \frac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j} e^{\xi_i + \xi_j} \end{vmatrix}_{2N \times 2N}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \frac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j} e^{\xi_i + \xi_j} \\ \delta_{ij} + \frac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j} e^{\xi_i + \xi_j} & \delta_{ij} + \frac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j} e^{\xi_i + \xi_j} \end{vmatrix}$$

43

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{cc} \delta_{ij} & \frac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j} e^{\xi_i + \xi_j} \\ \frac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j} e^{\xi_i + \xi_j} & \delta_{ij} \end{array} \right|_{2N \times 2N} \\
&= \det \left[ \left( \begin{array}{cc} I & O \\ O & I \end{array} \right) + \underbrace{\left( \begin{array}{cc} O & \sqrt{-1} e_{ij} \\ \sqrt{-1} e_{ij} & O \end{array} \right)}_{=(a_{ij}) \text{ とかく}} \right] \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{2N} a_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \\
&+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq 2N} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \sum_{i < j < k < l} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{vmatrix} + \dots
\end{aligned}$$

44

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{-1} e_{ij} \\ \sqrt{-1} e_{ji} & 0 \end{vmatrix} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sum_{1 \leq k < l \leq N} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sqrt{-1} e_{ik} & \sqrt{-1} e_{il} \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} e_{jk} & \sqrt{-1} e_{jl} \\ \sqrt{-1} e_{ki} & \sqrt{-1} e_{kj} & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} e_{li} & \sqrt{-1} e_{lj} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ \dots + \left| \begin{array}{cc} O & \sqrt{-1} e_{ij} \\ \sqrt{-1} e_{ij} & O \end{array} \right|_{2N \times 2N} \\
&= 1 + \sum_i \sum_j (e_{ij})^2 + \sum_{i < j} \sum_{k < l} \left( \begin{vmatrix} e_{ik} & e_{il} \\ e_{jk} & e_{jl} \end{vmatrix} \right)^2 \\
&+ \dots + \left( \left| e_{ij} \right|_{N \times N} \right)^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

45



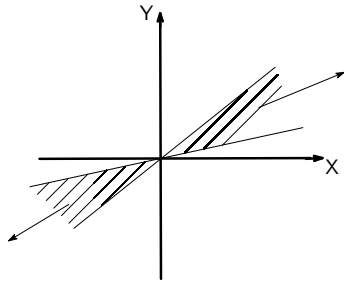


● 解の正則性

演習.  $|f|^2 > 0$  for  $y = -\bar{x}$  を示せ.

● 境界条件

(X, Y) 平面のあるセクターで, 遠方で  $\xi_i \rightarrow -\infty$  とする  
( $1 \leq i \leq N$ )



$$\xi_i \rightarrow -\infty$$

$$f \rightarrow 1, \quad g \rightarrow 1, \quad \theta \rightarrow 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi_i \rightarrow +\infty, \\ f \\ g \end{array} \right\} \rightarrow \det \left( \frac{\pm\sqrt{-1}}{(p_i/p_j)^{1/2} + (p_j/p_i)^{1/2}} \right) e^{2(\xi_1 + \dots + \xi_N)}$$

48

$$\frac{g}{f} \rightarrow (-1)^N, \quad \theta = \frac{2}{i} \log \frac{g}{f} \rightarrow 2n\pi$$

問題. 
$$\begin{cases} (\partial_X^2 + \partial_Y^2) \theta = 4 \sin \theta \\ \text{境界条件: 遠方で } \theta \rightarrow (2n+1)\pi \end{cases}$$

の正則解をつくれ

問題. 
$$\begin{array}{ll} \theta \rightarrow 2n\pi & (X \rightarrow -\infty) \\ \theta \rightarrow (2m+1)\pi & (X \rightarrow +\infty) \end{array}$$

をつなぐ解はつくれるか.

(楕円型. 双曲型)

49



$$\left. \begin{array}{l} \underline{\text{B型}} \quad \psi_j^n = (-1)^n \varphi_j^{1-n} \\ c_{ij} = -c_{ji} \\ N : \text{even} \end{array} \right\} \text{ととると}$$

$$\begin{aligned} \tau_n &= \det \left( c_{ij} + \int^x (-1)^n \varphi_i^n \varphi_j^{1-n} dx \right)_{N \times N} \\ &= \det \left( -c_{ji} - \int^x (-1)^{1-n} \varphi_j^{1-n} \varphi_i^n dx \right)_{N \times N} \\ &= \tau_{1-n} \end{aligned}$$

52

☆ Gram 行列式表示だと，様々な  
付加条件を満足させやすい。

☆ しかし，万能ではない。  
境界条件や正則性については  
一般論はまだない。

53

76