九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

[040] 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012

井ノ口, 順一
山形大学理学部

太田, 泰広
神戸大学大学院理学研究科

筧, 三郎
立教大学理学部数学科

梶原, 健司
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

他

https://hdl.handle.net/2324/25116

出版情報：COE Lecture Note. 40, 2012-03-15. 九州大学大学院数理学研究院
バージョン：
権利関係：

可積分系の厳密解と **Gram** 行列式

太田 泰広

（神戸大学大学院 理学研究科）

離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル2012

九州大学 伊都キャンパス

２０１2年2月２２〜２４日

可積分系の解 $\longrightarrow$ Casorati 行列式

- 戸田格子（１次元，２次元）
- sinh-Gordon
- sine-Gordon
- それらの離散化　etc.

- ソリトン解
- 分子解
- etc.

双線形方程式＝行列式の恒等式
（Plücker 関係式）

もう一つの行列式表示

Gram 行列式（Gramian）

sine-Gordon と Casorati 行列式解（復習）

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = -4\sin\theta \qquad \theta = \frac{1}{i}\left(2\log\frac{\tau_1}{\tau_0} - \log\lambda\right)$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ f_n^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} \qquad \lambda = \prod_{i=1}^{N} p_i^2$$

$$f_n^{(k)} = p_k^n\, e^{p_k x - \frac{y}{p_k} + \eta_{k0}} + (-p_k)^n\, e^{-p_k x + \frac{y}{p_k} + \xi_{k0}}$$

<u>θが実数値をとるためには……</u>

『x, yが実数ならばθが実数』

という条件を満足させたい.

$\Rightarrow$ 行列式解の中のパラメータの特殊化

$$\eta_{k0} = -\xi_{k0} = \frac{\pi}{4}i \qquad p_k \in \mathbb{R}$$

<u>解に対する付加条件</u>をどうやって
満足させるか.

<u>Gram 行列式</u>を利用する.

Gram 行列式とは

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_N) \\ (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\varphi_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_N,\varphi_1) & (\varphi_N,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_N,\varphi_N) \end{vmatrix}$$

(φ_i,φ_j) は φ_i と φ_j の内積

例

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}dx$$

4

（可積分系の文脈での）Gram 行列式

$$\tau(x,y,\cdots) = \det_{1\le i,j\le N}\left(c_{ij} + \int^x \varphi_i(x',y,\cdots)\psi_j(x',y,\cdots)dx'\right)$$

c_{ij}：積分定数

φ_i,ψ_j は線形微／差分方程式をみたす

5

Casorati（復習）

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ f_n^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}$$

は２次元戸田格子方程式（双線形形式）

$$\frac{1}{2}D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2$$

をみたす．ただし

$$\frac{\partial}{\partial x} f_n^{(k)} = f_{n+1}^{(k)} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_n^{(k)} = -f_{n-1}^{(k)}$$

$m_{ij} = c_{ij} + \int^x \varphi_i(x)\psi_j(x)dx$ に対し，$\boxed{\dfrac{\partial m_{ij}}{\partial x} = \varphi_i \psi_j}$

φ_i, ψ_j が

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varphi_i = -\varphi_i \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\psi_j = -\psi_j$$

をみたすなら

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{ij}}{\partial y} &= \int^x \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\psi_j + \varphi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx \\ &= -\int^x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial m_{ij}}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}}$$

φ_i, ψ_j が

$$\partial_x \varphi_i(n) = \varphi_i(n+1) \qquad \partial_x \psi_j(n) = -\psi_j(n-1)$$

をみたすなら

$$m_{ij}(n+1) - m_{ij}(n) = \int^x \big(\varphi_i(n+1)\psi_j(n+1) - \varphi_i(n)\psi_j(n)\big)\, dx$$

$$= \int^x \big\{\big(\partial_x \varphi_i(n)\big)\psi_j(n+1) + \varphi_i(n)\partial_x \psi_j(n+1)\big\}\, dx$$

$$= \int^x \partial_x\big(\varphi_i(n)\psi_j(n+1)\big) dx$$

$$\boxed{m_{ij}(n+1) = m_{ij}(n) + \varphi_i(n)\psi_j(n+1)}$$

<u>Gram</u>

$$\tau_n = \begin{vmatrix} m_{11}^n & m_{12}^n & \cdots & m_{1N}^n \\ m_{21}^n & m_{22}^n & \cdots & m_{2N}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{N1}^n & m_{N2}^n & \cdots & m_{NN}^n \end{vmatrix}$$

は２次元戸田格子方程式（双線形形式）

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2$$

をみたす．ただし

$$\partial_x m_{ij}^n = \varphi_i^n \psi_j^n$$

$$\partial_y m_{ij}^n = -(\partial_y \varphi_i^n)(\partial_y \psi_j^n)$$

$$m_{ij}^{n+1} = m_{ij}^n + \varphi_i^n \psi_j^{n+1}$$

$$\partial_x \partial_y \varphi_i^n = -\varphi_i^n \qquad \partial_x \partial_y \psi_i^n = -\psi_i^n$$

$$\partial_x \varphi_i^n = \varphi_i^{n+1} \qquad \partial_x \psi_j^n = -\psi_j^{n-1}$$

$$\left(\partial_y \varphi_i^n = -\varphi_i^{n-1} \qquad \partial_y \psi_j^n = \psi_j^{n+1}\right)$$

<u>定理</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \text{に対して}$$

$$\partial_x |A| = \sum_{j=1}^{N} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \partial_x a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & \partial_x a_{Nj} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

Casorati (Wronskian)の微分

$$\tau = \det(f_j^{(i)})_{N\times N} = |0, 1, \cdots, N-1| \qquad \partial_x f_j^{(i)} = f_{j+1}^{(i)}$$

に対して

$$\partial_x \tau = |0, 1, \cdots, N-2, N|$$

<u>定理</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{ij} = (A\text{の}\,(i,j)\,\text{余因子})$$

に対して

$$\partial_x |A| = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Delta_{ij}\, \partial_x a_{ij}$$

<u>証明</u>

$$\partial_x |A| = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}}}_{\substack{\| \\ \Delta_{ij}}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x}$$

12

<u>定理</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} & b_N \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_N & 0 \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Delta_{ij}\, b_i c_j$$

ただし

$$\Delta_{ij} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \text{の}\,(i,j)\,\text{余因子} \right)$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \widehat{j} & \\ & \vee & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \end{array} < \widehat{i}$$

13

Gramian の微分

$$\tau = \det(m_{ij})_{N\times N} \qquad \partial_x m_{ij} = \varphi_i \psi_j$$

に対して

$$\partial_x \tau = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} & \varphi_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{N1} & \cdots & m_{NN} & \varphi_N \\ -\psi_1 & \cdots & -\psi_N & 0 \end{vmatrix}$$

証明

$$\partial_x \tau = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \Delta_{ij}\, \partial_x m_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \Delta_{ij}\, \varphi_i \psi_j$$

$$= \begin{vmatrix} m_{ij} & \varphi_i \\ -\psi_j & 0 \end{vmatrix}$$

$$\partial_x m_{ij} = \varphi_i \psi_j \qquad \partial_y m_{ij} = -(\partial_y \varphi_i)(\partial_y \psi_j)$$

のとき

$$\partial_x \Big| m_{ij} \Big| = \begin{vmatrix} m_{ij} & \varphi_i \\ -\psi_j & 0 \end{vmatrix} \qquad \partial_y \Big| m_{ij} \Big| = \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 \end{vmatrix}$$

さらに，$\partial_x \partial_y \varphi_i = -\varphi_i$，$\partial_x \partial_y \psi_j = -\psi_j$ のとき

$$\partial_x \partial_y \Big| m_{ij} \Big| = \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 & -1 \\ -\psi_j & 1 & 0 \end{vmatrix} - \Big| m_{ij} \Big|$$

$$\because\ \partial_x\partial_y \left|m_{ij}\right| = \partial_x \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y\varphi_i \\ \partial_y\psi_j & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=1}^{N+1} \widetilde{\Delta}_{ij}\,\partial_x\Big((i,j)\text{成分}\Big)$$

$\widetilde{\Delta}_{ij}$ は $(N+1)\times(N+1)$ 行列の余因子

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \widetilde{\Delta}_{ij}\underbrace{\partial_x m_{ij}}_{\substack{\| \\ \varphi_i\psi_j}} + \sum_{i=1}^{N}\widetilde{\Delta}_{i,N+1}\underbrace{\partial_x\partial_y\varphi_i}_{\substack{\| \\ -\varphi_i}} + \sum_{j=1}^{N}\widetilde{\Delta}_{N+1,j}\underbrace{\partial_x\partial_y\psi_j}_{\substack{\| \\ -\psi_j}}$$

$$= \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y\varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y\psi_j & 0 & 0 \\ -\psi_j & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{ij} & -\varphi_i \\ \partial_y\psi_j & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y\varphi_i \\ -\psi_j & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y\varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y\psi_j & 0 & 0 \\ -\psi_j & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y\varphi_i \\ -\psi_j & 1 \end{vmatrix} - \left|m_{ij}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y\varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y\psi_j & 0 & -1 \\ -\psi_j & 1 & 0 \end{vmatrix} - \left|m_{ij}\right|$$

$m_{ij}^{n+1} = m_{ij}^{n} + \varphi_i^n \psi_j^{n+1}$ のとき

$$\begin{vmatrix} m_{11}^{n+1} & \cdots & m_{1N}^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{N1}^{n+1} & \cdots & m_{NN}^{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11}^{n} + \varphi_1^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{1N}^{n} + \varphi_1^n \psi_N^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{N1}^{n} + \varphi_N^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{NN}^{n} + \varphi_N^n \psi_N^{n+1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m_{11}^{n} + \varphi_1^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{1N}^{n} + \varphi_1^n \psi_N^{n+1} & \varphi_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{N1}^{n} + \varphi_N^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{NN}^{n} + \varphi_N^n \psi_N^{n+1} & \varphi_N^n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11}^{n} & \cdots & m_{1N}^{n} & \varphi_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{N1}^{n} & \cdots & m_{NN}^{n} & \varphi_N^n \\ -\psi_1^{n+1} & \cdots & -\psi_N^{n+1} & 1 \end{vmatrix}$$

また，$m_{ij}^{n-1} = m_{ij}^{n} - \varphi_i^{n-1} \psi_j^{n}$ なので

$$\left| m_{ij}^{n-1} \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^{n} & \varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^{n} & 1 \end{vmatrix}$$

(まとめ)

$$\partial_x m_{ij}^n = \varphi_i^n \psi_j^n \qquad \partial_y m_{ij}^n = -(\partial_y \varphi_i^n)(\partial_y \psi_j^n)$$
$$m_{ij}^{n+1} = m_{ij}^n + \varphi_i^n \psi_j^{n+1}$$
$$\partial_x \varphi_i^n = \varphi_i^{n+1} \qquad \partial_y \varphi_i^n = -\varphi_i^{n-1}$$
$$\partial_x \psi_j^n = -\psi_j^{n-1} \qquad \partial_y \psi_j^n = \psi_j^{n+1}$$

のとき

$$\partial_x \left| m_{ij}^n \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^n \\ -\psi_j^n & 0 \end{vmatrix} \qquad \partial_y \left| m_{ij}^n \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \partial_y \varphi_i^n \\ \partial_y \psi_j^n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^{n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\partial_x \partial_y + 1) \left| m_{ij}^n \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \partial_y \varphi_i^n & \varphi_i^n \\ \partial_y \psi_j^n & 0 & -1 \\ -\psi_j^n & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} & \varphi_i^n \\ \psi_j^{n+1} & 0 & -1 \\ -\psi_j^n & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left|m_{ij}^{n+1}\right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^{n} & \varphi_i^{n} \\ -\psi_j^{n+1} & 1 \end{vmatrix} \qquad \left|m_{ij}^{n-1}\right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^{n} & \varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^{n} & 1 \end{vmatrix}$$

<u>定理</u>（分子解の講義の復習）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+1} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+1} & a_{N,N+2} \\ a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} & a_{N+1,N+2} \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+1} & a_{N+2,N+2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+1} \\ a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} & & & a_{1,N+2} \\ & 〃 & & \vdots \\ & & & a_{N,N+2} \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+2} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} & & & a_{1,N+2} \\ & 〃 & & \vdots \\ & & & a_{N,N+2} \\ a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} & & & a_{1,N+1} \\ & 〃 & & \vdots \\ & & & a_{N,N+1} \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+1} \end{vmatrix}$$

<u>証明</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+1} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+1} & a_{N,N+2} \\ a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} & a_{N+1,N+2} \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+1} & a_{N+2,N+2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+2} a_{i,N+2}\,\Delta_{i,N+2} \left|a_{ij}\right|_{N\times N} \qquad \left(\begin{array}{l}\Delta_{ij}\text{は}(N+2)\times(N+2)\\ \text{行列の余因子}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N+2} a_{i,N+2}\,\Delta_{i,N+2} \left|a_{ij}\right|_{N\times N}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N+2} a_{ij}\,\Delta_{i,N+2} \right) (-1)^{j+N-1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \widehat{j} & & \\ & \vee & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+2} \Delta_{i,N+2} \left(\sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+N-1} a_{ij} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \end{vmatrix} \\ \widehat{j} \end{array} + a_{i,N+2} \left|a_{ij}\right|_{N\times N} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N+2} \Delta_{i,N+2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \\ a_{i1} & \cdots & a_{iN} & a_{i,N+2} \end{vmatrix}$$

$$= \Delta_{N+2,N+2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+2} \end{vmatrix} + \Delta_{N+1,N+2} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i,N+2} \\ a_{N+1,j} & a_{N+1,N+2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} & \varphi_i^n \\ \psi_j^{n+1} & 0 & -1 \\ -\psi_j^n & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \left| m_{ij}^n \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^{n+1} & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^n \\ -\psi_j^n & 0 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^n \\ \psi_j^{n+1} & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} \\ -\psi_j^n & 1 \end{vmatrix}$$

$$(\partial_x \partial_y + 1)\tau_n \times \tau_n = \partial_y \tau_n \times \partial_x \tau_n - (-\tau_{n+1})\tau_{n-1}$$

$$\tau_n := \left| m_{ij}^n \right|$$

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2$$

1. Gram 行列式の微分則，差分則

   微分やシフトが縁つき Gram 行列式
   で書ける．

2. 行列式の恒等式

$\Longrightarrow$ 双線形方程式

N-soliton 解

$$\tau_n = \det\left(m_{ij}^n\right)_{N\times N} = \det\left(c_{ij} + \int^x \varphi_i^n \psi_j^n dx\right)_{N\times N}$$

において

$$c_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\varphi_i^n = \alpha_i\, p_i^n\, e^{p_i x - \frac{1}{p_i} y}$$

$$\psi_j^n = \beta_j\, (-q_j)^{-n}\, e^{q_j x - \frac{1}{q_j} y}$$

ととる．このとき，　$m_{ij}^n = \delta_{ij} + \dfrac{1}{p_i + q_j}\, \varphi_i^n \psi_j^n$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\varphi_1\psi_1}{p_1+q_1} & \dfrac{\varphi_1\psi_2}{p_1+q_2} & \cdots & \dfrac{\varphi_1\psi_N}{p_1+q_N} \\ \dfrac{\varphi_2\psi_1}{p_2+q_1} & 1 + \dfrac{\varphi_2\psi_2}{p_2+q_2} & \cdots & \dfrac{\varphi_2\psi_N}{p_2+q_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\varphi_N\psi_1}{p_N+q_1} & \dfrac{\varphi_N\psi_2}{p_N+q_2} & \cdots & 1 + \dfrac{\varphi_N\psi_N}{p_N+q_N} \end{vmatrix}$$

Fredholm 行列式

$$A = \Big(a_{ij}\Big)_{N\times N} \qquad I = \Big(\delta_{ij}\Big)_{N\times N} \text{ として}$$

$$\begin{aligned} F &= \det\Big(I + A\Big) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{N} a_{ii} + \sum_{1\le i<j\le N} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \\ &\quad + \sum_{1\le i<j<k\le N} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

28

$$\begin{aligned} \tau_n &= 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i\psi_i}{p_i+q_i} + \sum_{1\le i<j\le N} \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_i\psi_i}{p_i+q_i} & \dfrac{\varphi_i\psi_j}{p_i+q_j} \\ \dfrac{\varphi_j\psi_i}{p_j+q_i} & \dfrac{\varphi_j\psi_j}{p_j+q_j} \end{vmatrix} + \cdots \\ &\quad \cdots + \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_1\psi_1}{p_1+q_1} & \cdots & \dfrac{\varphi_1\psi_N}{p_1+q_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\varphi_N\psi_1}{p_N+q_1} & \cdots & \dfrac{\varphi_N\psi_N}{p_N+q_N} \end{vmatrix} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i+q_i}\varphi_i\psi_i + \sum_{1\le i<j\le N} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p_i+q_i} & \dfrac{1}{p_i+q_j} \\ \dfrac{1}{p_j+q_i} & \dfrac{1}{p_j+q_j} \end{vmatrix} \varphi_i\varphi_j\psi_i\psi_j \\ &\quad + \cdots + \left|\frac{1}{p_i+q_j}\right|_{N\times N} \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_N\psi_1\psi_2\cdots\psi_N \end{aligned}$$

29

簡約　　解に制限を加えて，方程式をえる．

☆ 1 次元戸田格子

要請：　$\partial_x \tau_n = \partial_y \tau_n$

このとき

$$\frac{1}{2} D_x^2 \, \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2$$

30

$$\begin{aligned}
\tau_n &= \det\left(\delta_{ij} + \frac{1}{p_i + q_j}\varphi_i\psi_j\right)_{N\times N} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{N}\varphi_i\right)\det\left(\delta_{ij}\frac{1}{\varphi_i} + \frac{\psi_j}{p_i+q_j}\right) = \det\left(\delta_{ij}\frac{\varphi_j}{\varphi_i} + \frac{\varphi_j\psi_j}{p_i+q_j}\right) \\
&= \det\left(\delta_{ij} + \frac{1}{p_i+q_j}\varphi_j\psi_j\right)
\end{aligned}$$

$$\varphi_j\psi_j = \alpha_j\beta_j\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)^n e^{\underline{\underline{(p_j+q_j)x - \left(\frac{1}{p_j}+\frac{1}{q_j}\right)y}}}$$

$$\downarrow$$

$\boxed{q_j = -\dfrac{1}{p_j}}$ とえらぶと　$\left(p_j - \dfrac{1}{p_j}\right)x + \left(p_j - \dfrac{1}{p_j}\right)y$

$$\partial_x(\varphi_j\psi_j) = \partial_y(\varphi_j\psi_j) \qquad \therefore \quad \partial_x\tau_n = \partial_y\tau_n$$

31

☆ sinh-Gordon , sine-Gordon

$\boxed{\text{要請：} \quad \tau_{n+2} = \tau_n}$

このとき $f = \tau_0$, $g = \tau_1$ に対して

$$\frac{1}{2} D_x D_y \, f \cdot f = g^2 - f^2$$

$$\frac{1}{2} D_x D_y \, g \cdot g = f^2 - g^2$$

$$\tau_n = \det\left(\delta_{ij} + \frac{1}{p_i + q_j}\varphi_j \psi_j\right)$$

$$\varphi_j \psi_j = \alpha_j \beta_j \underline{\underline{\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)^n}} e^{(p_j+q_j)x - \left(\frac{1}{p_j}+\frac{1}{q_j}\right)y}$$

$\boxed{q_j = p_j}$ とえらぶと $(-1)^n$

$$\tau_{n+2} = \tau_n$$

sinh-Gordon ， sine-Gordon 方程式

$$\frac{1}{2}D_xD_y\, f\cdot f = g^2 - f^2 \qquad \frac{1}{2}D_xD_y\, g\cdot g = f^2 - g^2$$

$(\log f)_{xy} = \dfrac{D_xD_y\, f\cdot f}{2f^2}$ より

$$(\log f)_{xy} = \left(\frac{g}{f}\right)^2 - 1 \qquad (\log g)_{xy} = \left(\frac{f}{g}\right)^2 - 1$$

$$\therefore\ \left(\log\frac{g}{f}\right)_{xy} = \left(\frac{f}{g}\right)^2 - \left(\frac{g}{f}\right)^2$$

$$\left(\log\frac{g}{f}\right)_{xy} = \left(\frac{f}{g}\right)^2 - \left(\frac{g}{f}\right)^2$$

$v = 2\log\dfrac{g}{f}$ に対して，

$$v_{xy} = 2(e^{-v} - e^{v}) = -4\sinh v \qquad \text{(sinh-Gordon)}$$

$\theta = \dfrac{v}{i} = \dfrac{2}{i}\log\dfrac{g}{f}$ に対して，

$$\theta_{xy} = -4\sin\theta \qquad \text{(sine-Gordon)}$$

複素数なら同じ方程式．実数に制限すると別の方程式

方程式として区別すべきものはどれだけあるか

$x, y \in \mathbb{R}$ のとき　　双曲型

$$\partial_x \partial_y \theta = -4 \sin \theta$$

または $t = x + y$, $s = x - y$ によって

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2)\theta = -4 \sin \theta$$

$x \in \mathbb{C}$, $y = \overline{x}$ のとき　　楕円型

$X = x + y = x + \overline{x}$, $Y = \dfrac{x - y}{i} = \dfrac{x - \overline{x}}{i}$

によって

$$(\partial_X^2 + \partial_Y^2)\theta = -4 \sin \theta$$

$$(\partial_X^2 + \partial_Y^2)\,\theta = \underline{\underline{-4}} \sin \theta$$

$\uparrow$

X, Y のスケーリングでは符号を
かえられない

$\theta \rightarrow \theta + \pi$ で符号反転

境界条件の話と関係

境界条件について

$$(\partial_x^2 + \partial_Y^2)\,\theta = -4\sin\theta$$

$X \to \pm\infty$ のとき $\theta \to$ 定数　とすると

その定数は　$n\pi$　$(n \in \mathbb{Z})$

たとえば

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right)\,\theta = -4\sin\theta \qquad \theta \longrightarrow 2n\pi \quad (X \to -\infty)$$

と

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right)\,\theta = +4\sin\theta \qquad \theta \longrightarrow 2n\pi \quad (X \to -\infty)$$

は別の方程式．別の解

38

sine-Gordon　　$(x, y, X, Y, \theta \in \mathbb{R})$

$$\partial_x\partial_y\,\theta = -4\sin\theta$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right)\theta = -4\sin\theta \qquad \theta \to 2n\pi$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right)\theta = 4\sin\theta \qquad \theta \to 2n\pi$$

sinh-Gordon　　$(x, y, X, Y, v \in \mathbb{R})$

$$\partial_x\partial_y\,v = -4\sinh v$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right)v = -4\sinh v$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right)v = 4\sinh v$$

39

系に対する付加条件

- 実数性，複素共役性
- 境界条件
- 解の正則性

$$v = 2\log\frac{g}{f} \qquad\qquad \theta = \frac{2}{i}\log\frac{g}{f}$$

$f = 0$ $\Big($or $g = 0\Big)$ のとき v, θ 発散

<u>sine-Gordon　双曲型</u>　$\theta_{xy} = -4\sin\theta \qquad\qquad \theta = \dfrac{2}{i}\log\dfrac{g}{f}$

$$f = \tau_0 = \det\left(\delta_{ij} + \frac{1}{p_i + p_j}\,\alpha_i\beta_j\, e^{(p_i+p_j)x - \left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_j}\right)y}\right)_{N\times N}$$

$$g = \tau_1 = \det\left(\delta_{ij} - \frac{1}{p_i + p_j}\,\alpha_i\beta_j\, e^{(p_i+p_j)x - \left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_j}\right)y}\right)_{N\times N}$$

- <u>実数性</u>　$\theta \in \mathbb{R}$ のためには $|f| = |g|$
  (たとえば $g = \overline{f}$)

$p_j \in \mathbb{R}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad \beta_j \in i\,\mathbb{R}$ ととれば

$g = \overline{f}$ for $x, y \in \mathbb{R}$

- <u>解の正則性</u>

$f \neq 0$ for $x, y \in \mathbb{R}$ を満足させたい

$\alpha_j = e^{\xi_{j0}}, \qquad \beta_j = \sqrt{-1}\, e^{\xi_{j0}}$ ととって

$$f = \det\left(\delta_{ij} + \frac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j}\, e^{\xi_i + \xi_j}\right)_{N \times N}$$

$$p_j \in \mathbb{R}, \qquad \xi_j = p_j x - \frac{1}{p_j} y + \xi_{j0} \quad \in \mathbb{R}$$

$|f|^2 \neq 0$ を示す

$$|f|^2 = \overline{f} f = g f$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{ij} - \dfrac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j}\, e^{\xi_i + \xi_j} & \dfrac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j}\, e^{\xi_i + \xi_j} \\ 0 & \delta_{ij} + \dfrac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j}\, e^{\xi_i + \xi_j} \end{vmatrix}_{2N \times 2N}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \dfrac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j}\, e^{\xi_i + \xi_j} \\ \delta_{ij} + \dfrac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j}\, e^{\xi_i + \xi_j} & \delta_{ij} + \dfrac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j}\, e^{\xi_i + \xi_j} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \dfrac{\sqrt{-1}}{p_i+p_j}\, e^{\xi_i+\xi_j} \\ \dfrac{\sqrt{-1}}{p_i+p_j}\, e^{\xi_i+\xi_j} & \delta_{ij} \end{vmatrix}_{2N\times 2N}
$$

$$
= \det\left[\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} O & \sqrt{-1}\, e_{ij} \\ \sqrt{-1}\, e_{ij} & O \end{pmatrix}}_{=(a_{ij})\ \text{とかく}}\right]
$$

$$
= 1 + \sum_{i=1}^{2N} a_{ii} + \sum_{1\le i<j\le 2N} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \sum_{1\le i<j<k\le 2N} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \sum_{i<j<k<l} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{vmatrix} + \cdots
$$

44

$$
= 1 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{-1}\, e_{ij} \\ \sqrt{-1}\, e_{ji} & 0 \end{vmatrix} + \sum_{1\le i<j\le N}\ \sum_{1\le k<l\le N} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sqrt{-1}\, e_{ik} & \sqrt{-1}\, e_{il} \\ 0 & 0 & \sqrt{-1}\, e_{jk} & \sqrt{-1}\, e_{jl} \\ \sqrt{-1}\, e_{ki} & \sqrt{-1}\, e_{kj} & 0 & 0 \\ \sqrt{-1}\, e_{li} & \sqrt{-1}\, e_{lj} & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
+ \cdots + \begin{vmatrix} O & \sqrt{-1}\, e_{ij} \\ \sqrt{-1}\, e_{ij} & O \end{vmatrix}_{2N\times 2N}
$$

$$
= 1 + \sum_{i}\sum_{j} (e_{ij})^2 + \sum_{i<j}\sum_{k<l} \left(\begin{vmatrix} e_{ik} & e_{il} \\ e_{jk} & e_{jl} \end{vmatrix} \right)^2
$$

$$
+ \cdots + \left(\left| e_{ij} \right|_{N\times N} \right)^2
$$

$$
> 0
$$

45

sine-Gordon 楕円型

$$\left(\partial_X^2+\partial_Y^2\right)\theta=+4\sin\theta \qquad \theta=\frac{2}{i}\log\frac{g}{f}$$

$$X=x-y,\quad Y=\frac{x+y}{i},\quad y=-\overline{x}$$

$$f=\det\left(\delta_{ij}+\frac{1}{p_i+p_j}\,\alpha_i\beta_j\,e^{(p_i+p_j)x-\left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_j}\right)y}\right)$$

$$g=\det\left(\delta_{ij}-\qquad\qquad 〃\qquad\qquad\right)$$

- 実数性

$|p_j|=1$ ととると $p_jx-\dfrac{1}{p_j}y=p_jx+\overline{p}_j\overline{x}\in\mathbb{R}$

$$\alpha_i=p_i^{\frac{1}{2}}\,r_i,\qquad \beta_j=p_j^{\frac{1}{2}}\,r_i\sqrt{-1}\ \ (r_j\in\mathbb{R})$$

ととると

$$\frac{1}{p_i+p_j}\,\alpha_i\beta_j=\sqrt{-1}\,\frac{r_ir_j}{\left(\dfrac{p_i}{p_j}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{p_j}{p_i}\right)^{\frac{1}{2}}}\quad\in\sqrt{-1}\,\mathbb{R}$$

$$f=\det\left(\delta_{ij}+\frac{\sqrt{-1}}{\left(\dfrac{p_i}{p_j}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{p_j}{p_i}\right)^{\frac{1}{2}}}\,e^{\xi_i+\xi_j}\right)$$

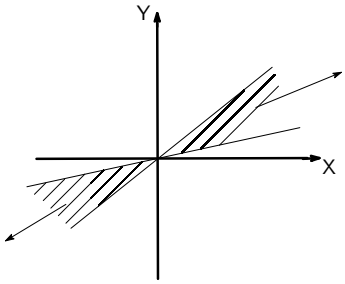
$$\xi_j=p_jx-\frac{1}{p_j}y+\xi_{j0}\quad (r_j=e^{\xi_{j0}})$$

- <u>解の正則性</u>

  演習. $|f|^2 > 0$ for $y = -\overline{x}$ を示せ.

- <u>境界条件</u>

  (X, Y)平面のあるセクターで，遠方で $\xi_i \to -\infty$ とする $(1 \le i \le N)$



$$\xi_i \to -\infty$$

$$f \to 1, \qquad g \to 1, \qquad \theta \to 0$$

$$\xi_i \to +\infty, \quad \left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} \to \det\left(\frac{\pm\sqrt{-1}}{(p_i/p_j)^{1/2} + (p_j/p_i)^{1/2}}\right) e^{2(\xi_1 + \cdots + \xi_N)}$$

$$\frac{g}{f} \to (-1)^N, \qquad \theta = \frac{2}{i}\log\frac{g}{f} \to 2n\pi$$

問題. $\begin{cases} \left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right)\theta = 4\sin\theta \\ \text{境界条件：遠方で } \theta \to (2n+1)\pi \end{cases}$

の正則解をつくれ

問題. $\theta \to 2n\pi \qquad (X \to -\infty)$

$\theta \to (2m+1)\pi \qquad (X \to +\infty)$

をつなぐ解はつくれるか.

（楕円型．双曲型）

B型，C型の戸田格子

$$\frac{1}{2}D_xD_y\,\tau_n\cdot\tau_n=\tau_{n+1}\tau_{n-1}-\tau_n^2$$

左右対称な格子に制限する．

<u>C型</u>　$\cdots\quad \tau_{-2}\quad \tau_{-1}\quad \tau_0\quad \tau_1\quad \tau_2\quad \cdots$

↑

ここを中心に

$$\tau_1=\tau_{-1},\quad \tau_2=\tau_{-2},\quad \tau_3=\tau_{-3},\quad \cdots$$

<u>B型</u>　$\cdots\quad \tau_{-2}\quad \tau_{-1}\quad \tau_0\quad \tau_1\quad \tau_2\quad \cdots$

↑

ここを中心に

$$\tau_1=\tau_0,\quad \tau_2=\tau_{-1},\quad \tau_3=\tau_{-2},\quad \cdots$$

50

$$\tau_n=\det\left(c_{ij}+\int^x\varphi_i^n\psi_j^n dx\right)_{N\times N}$$

$$\partial_x\varphi_i^n=\varphi_i^{n+1}\qquad \partial_y\varphi_i^n=-\varphi_i^{n-1}$$

$$\partial_x\psi_j^n=-\psi_j^{n-1}\qquad \partial_y\psi_j^n=\psi_j^{n+1}$$

<u>C型</u>　$\left.\begin{array}{l}\psi_j^n=(-1)^n\varphi_j^{-n}\\ c_{ij}=c_{ji}\end{array}\right\}$ ととると

$$\tau_n=\det\left(c_{ij}+\int^x(-1)^n\varphi_i^n\varphi_j^{-n}dx\right)=\tau_{-n}$$

51

<u>B型</u>

$$\left.\begin{array}{l} \psi_j^n = (-1)^n \varphi_j^{1-n} \\ c_{ij} = -c_{ji} \\ N：\text{even} \end{array}\right\} \text{ととると}$$

$$\begin{aligned} \tau_n &= \det\left(c_{ij} + \int^x (-1)^n \varphi_i^n \varphi_j^{1-n} dx\right)_{N\times N} \\ &= \det\left(-c_{ji} - \int^x (-1)^{1-n} \varphi_j^{1-n} \varphi_i^n dx\right)_{N\times N} \\ &= \tau_{1-n} \end{aligned}$$

☆ Gram 行列式表示だと，様々な
付加条件を満足させやすい.

☆ しかし，万能ではない.
境界条件や正則性については
一般論はまだない.