九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

[040] 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012

井ノ口, 順一
山形大学理学部

太田, 泰広
神戸大学大学院理学研究科

筧, 三郎
立教大学理学部数学科

梶原, 健司
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

他

https://hdl.handle.net/2324/25116

出版情報：COE Lecture Note. 40, 2012-03-15. 九州大学大学院数理学研究院
バージョン：
権利関係：

離散可積分系入門

立教大学理学部　筧 三郎 (Kakei, Saburo)

1　はじめに

微分方程式と対応する差分方程式，すなわち，連続極限をとることで元の微分方程式が得られるような差分方程式を構成することは，微分方程式モデルをシミュレーションする際には必須の手法である。近年では，差分化の対象となる微分方程式の持つ数学的構造 (例えば，保存量，対称性，etc.) を保つような差分化も研究されている。

本稿で差分化の対象とするのは，「(古典) 可積分系」と呼ばれるクラスの微分方程式であり，それらを “うまく” 差分化して得られる差分方程式が，表題の「離散可積分系」である[*1]。ここで「可積分系」と呼ぶのは，微分方程式，差分方程式で，なんらかの意味で「良い構造」を持つものであり，本稿では特に

広いクラスの特殊解を具体的に書き下ろすことができる微分方程式

を考察の対象とする。そして，

微分方程式の解の振る舞い，数学的構造を忠実に再現するように差分化する

という目的意識の下で，対応する差分方程式を構成する。そうして得られる差分方程式は，シミュレーションの道具としての差分化を超えて，様々な数学と関連する興味深い対象となる。

本稿は，九州大学におけるチュートリアル DISDDG2010, DISDDG2012 での筆者による講義，および立教大学，早稲田大学での講義に基づいている。微分方程式を学んだばかりの学部学生の方々でもすぐに理解できて，かつ手を動かして楽しめるように心がけたつもりであり，いくつかの練習問題も挿入した。けっこう繁雑な計算となるものもあるが，どれも最後には「きれい」な答えにまとまっていく。このあたりが，「可積分系」という分野の醍醐味であると，筆者は思っている。本稿の練習問題を通してその雰囲気に触れていただくことで，興味を持つ方が増えることを願っている。扱っている内容は [Kaj2, H1, H2] と重複する部分も多いので，合わせて参照していただきたい。

2　微分方程式の “可積分” 差分化

2.1　指数関数の差分化

まずは基本に立ち返って，関数 $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ の定義を思い出しておく:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{1}$$

このことから，h が 0 に近いときには，

$$\frac{df(x)}{dx} \fallingdotseq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (h \fallingdotseq 0) \tag{2}$$

[*1] 本稿では，「離散」，「差分」という 2 つの接頭語の両方を使っている。筆者としては特別意識して使い分けているわけではないので，本稿では同じ意味だと思っていただきたい。

と考えられる。微分方程式の差分化とは，たとえばこの関係式を使って微分を (2) の右辺で置き換えることで差分方程式を作るという作業のことである。

簡単ではあるが以下の議論で大変重要な例として，指数関数 $f(x) = e^{\alpha x}$ (α は定数) の満たす微分方程式

$$\frac{df(x)}{dx} = \alpha f(x) \tag{3}$$

を考えよう。この式の左辺を， (2) の右辺で置き換えてみる (オイラー法):

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \alpha f(x). \tag{4}$$

この方程式は，次のように書き換えられる:

$$f(x+h) = (1 + \alpha h) f(x) \tag{5}$$

$x = 0$ における値 $f(0)$ を与えると，上の方程式によって $f(h), f(2h), \ldots$ が逐次決定されていく。一般の整数 n に対しては，$f(nh) = (1 + \alpha h)^n f(0)$ となる (等比数列)。$x = nh$, $f(0) = 1$ とおいて整理すれば，指数関数 $f(x) = e^{\alpha x}$ の離散的対応物として，$F(x) = (1 + \alpha h)^{x/h}$ が得られる。ここまでを模式的にまとめておこう。

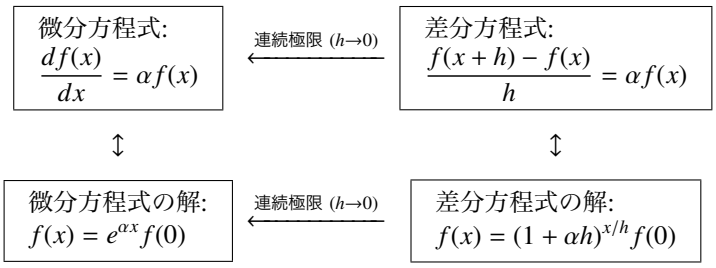

図 1　前進差分による差分化とその解

前節でも述べたように，様々な微分方程式に対して，方程式とその解をセットにして差分化を行うことが本稿の目的であり，図 1 はその 1 つの典型例を与えるものとみなせる。より一般的に，図 2 のような対応が成立しているときに，“可積分差分” と呼ぶときもある。以下では図 2 の対応がなりたつ例をいくつか紹介して

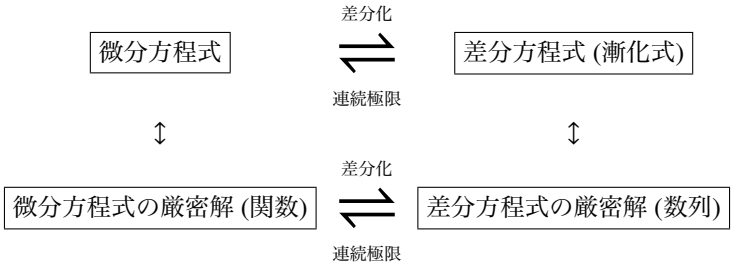

図 2　“可積分差分” の考え方

いく。

ここまでは，いわゆる “前進差分” $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を考えた。差分化のやり方はこれだけではなく無数にある。要するに，適当な極限の元で導関数 $f'(x)$ に収束すればなんでもよい。例えば，後退差分 $\dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$

を考えるなら，(3) に対応する差分方程式は次のものになる：

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=\alpha f(x). \tag{6}$$

また，(4) の右辺を “平均化” して，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\alpha\frac{f(x+h)+f(x)}{2}. \tag{7}$$

とすることも考えられる。この場合も，連続極限 $h\to 0$ をとれば微分方程式 (3) が回復する。

練習問題 1. (i) 初期条件 $f(0)$ が与えられたとき，差分方程式 (6) の解 $f(nh)$ を求め，連続極限を考察せよ。
(ii) 差分方程式 (7) に対しても同様の考察を行え。
(iii) 後退差分による方程式 (6) の右辺を左辺に合わせて平均化し，同様の考察を行え。

ここまでの差分化 (4), (6), (7) は隣り合う 2 点の間の関係式であった。この条件をはずすと，例えば

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\alpha f(x) \tag{8}$$

などという差分化を考えることもできる ($h\to 0$ で (3) に戻ることは明らかであろう)。この場合は 2 階の差分方程式 (3 項間漸化式) となるので，一般の n での $f(nh)$ を定めるには，初期条件として $f(0), f(h)$ を与えることになる。さらに高階の差分方程式を考えることももちろん可能であり，単純な形の微分方程式 (3) の差分化に対して，無限の可能性があることがご理解いただけることと思う。

練習問題 2. 中心差分による差分化 (8) で $\alpha=-1$ の場合を考える。初期条件を $f(0)=1$ とすると，対応する微分方程式 (3) の解は $f(x)=e^{-x}$ である。

$\alpha=-1$ の場合，(8) は

$$f(x+h)=f(x-h)-2hf(x) \tag{9}$$

と書き換えられる。差分間隔を $h=0.1$，初期条件を $f(0)=1, f(h)=e^{-h}$ で与えるとき，漸化式 (9) で定められる値をグラフにすると図 3 のようになる。初めのころは対応する微分方程式の解 $f(x)=e^{-x}$ と似た振る舞いをしているが，あるところから激しく振動し始めることが分かる。図 3 のような，元の微分方程式には現れない解は「幻影解」と呼ばれる。差分方程式 (9) の厳密解を求めることで，今の場合に「幻影解」が生じる理由を考察せよ。

(参考) 練習問題 2 については，文献 [H2], 5.5 節の例 2b (p. 115) に詳しい解説がある。今の場合の不安定性を除くための 1 つの方法も解説されている。

別種の差分化として，次のような “乗法的” 差分化も考えられる：

$$\frac{f(x)-f(qx)}{x(1-q)}=\alpha f(x). \tag{10}$$

ここで q は定数であり，$0<q<1$ としておく。(10) の左辺は，xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $(x, f(x))$, $(qx, f(qx))$ を結ぶ線分の傾きを表す。このことから，極限 $q\to 1$ の下で，

$$\lim_{q\to 1}\frac{f(x)-f(qx)}{x(1-q)}=\frac{df(x)}{dx} \tag{11}$$

が成立する。(10) の左辺は “q-差分” と呼ばれる。

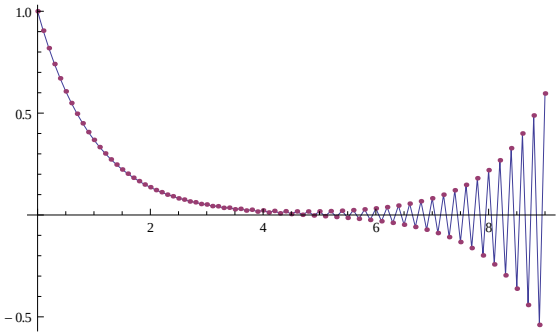

図 3　中心差分による幻影解

練習問題 3.　(i) $f(x)$ が微分可能であるとして，公式 (11) を証明せよ。

(ii) 形式的ベキ級数 $f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ が q-差分方程式 (10) を満たすように，係数 $a_1, a_2, \ldots$ を定めよ。

(iii) ここでは $|q| < 1$ とする。無限積[*2]

$$(z;q)_\infty := \prod_{n=0}^{\infty}(1 - zq^n)$$

を用いて，q-差分方程式 (10) の解で $f(0) = 1$ を満たすものを作れ。

(iv) q-差分方程式 (10) に対して “後退差分”, “平均化” 等の変更を行い，その解を考察せよ。

初めて見た方には，q-差分はやや特殊な差分のとり方に見えるかも知れないが，特殊関数論，量子群の表現論などと関係し，大変興味深いものである [USS]。例えば論文 [KOS] では戸田方程式の q-差分化が議論されており，その後に量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ との結び付きが見出された [NK]。

通常の加法的な差分化では，

$$\ldots,\ f(x-2h),\ f(x-h),\ f(x),\ f(x+h),\ f(x+2h),\ \ldots$$

という，x 軸上に等間隔に分布している点の間の関係式を記述しているものとみなせる。これに対し，q-差分では，

$$\ldots,\ f(q^2x),\ f(qx),\ f(x),\ f(q^{-1}x),\ f(q^{-2}x),\ \ldots$$

(ここでは $0 < q < 1$ としている) という量の間の関係式を考えている。さらに，x 軸上に，座標が楕円関数でパラメトライズされるような点列を考えて，その上での差分方程式を考える場合もあり，“楕円差分” と呼ばれる [Sa]。

本節では，指数関数 $e^{\alpha x}$ の満たす微分方程式 (3) に対する様々な差分化を紹介した。指数関数の差分化については，文献 [H1] の 2.4 節で詳しく解説されている。

[*2] 無限積の収束についての議論は，例えば [J] を参照せよ。

2.2　ロジスティック方程式

次の題材として，ロジスティック方程式

$$\frac{df(x)}{dx} = \alpha f(x)\{1 - \beta f(x)\} \qquad (\alpha, \beta \text{ は定数}) \tag{12}$$

の差分化を考えてみよう。この方程式はロジスティック (logistic) 方程式と呼ばれ，生物の個体数変化を記述するモデルとみなすことができる。$\beta = 0$ とすれば，先程の微分方程式 (3) となる。

方程式 (12) は変数分離型であり，初等的に求積できる。初期値 $f(0)$ に対する解は次で与えられる：

$$f(x) = \frac{f(0)e^{\alpha x}}{\beta f(0)e^{\alpha x} + 1 - \beta f(0)}. \tag{13}$$

xy 平面上に $y = f(x)$ のグラフを描くと，図 4 のようになる。図 4 の曲線は “ロジスティック曲線” と呼ばれ，様々な成長現象の記述に用いられる。

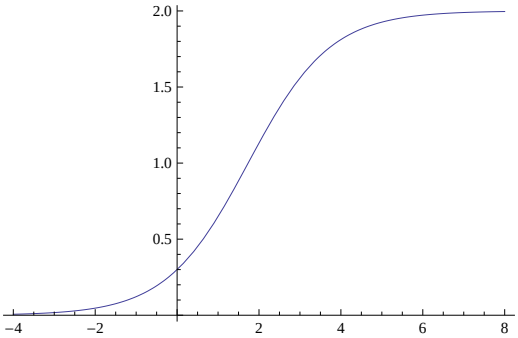

図 4　ロジスティック曲線

練習問題 4. 常微分方程式 (12) を変数分離法によって解き，(13) を導け。

ロジスティック方程式 (12) に対して，まずは単純に微分を前進差分で置き換えてみよう。

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \alpha f(x)\{1 - \beta f(x)\} \tag{14}$$

さらに $g_n = \dfrac{\alpha\beta h}{1 + \alpha h} f(nh)$, $a = 1 + \alpha h$ と置いて整理すると，

$$g_{n+1} = a\, g_n(1 - g_n) \tag{15}$$

なる漸化式が得られる。これは，2 次式 $f(x) = x(1 - x)$ による写像力学系とみなせ，ロジスティック写像と呼ばれる。ただし，パラメータ a は $0 < a \leq 4$ を満たすものとする (「$0 \leq g_n \leq 1$ ならば $0 \leq g_{n+1} \leq 1$」が成り立つようにするため)。

差分方程式 (15) に対して，パラメータ a の値をいくつかとってシミュレーションを行ったのが図 5 である。$a = 2$ のときの振る舞いは図 4 のロジスティック曲線と近いが，a の値が大きくなるにつれて，軌道が不規則に振動することが見て取れる。(15) のように単純な差分方程式から，このように複雑な軌道が出現することを発見したのは R.M. May [May] であり，その発見から，今日では “カオス” と呼ばれる分野が誕生した。しか

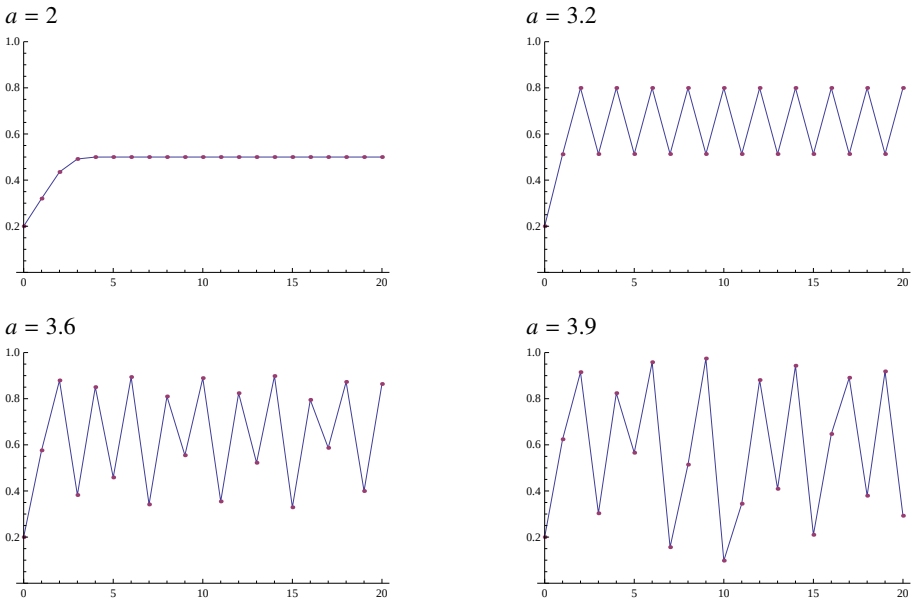

図 5　ロジスティック写像の軌道の振る舞い

し，「微分方程式の解の振る舞いを忠実に再現する」という問題意識からすると，狭い範囲のパラメータでしかうまくいっていない。

練習問題 5. 差分方程式 (14) では，前進差分によって差分化を行っている。前節で述べたような別のやり方で差分化を行い，得られる差分方程式の軌道の振る舞いを計算機を用いて調べよ。

(参考)　文献 [YU] では，(12) を中心差分で差分化するときに現れるカオスを研究している。([THYM] にも紹介がある。)

次の試みとして，ロジスティック方程式 (12) の解 (13) を，$e^{\alpha x}$ について解いてみる：

$$e^{\alpha x} = \frac{1-\beta f(0)}{f(0)} \frac{f(x)}{1-\beta f(x)}. \tag{16}$$

すなわち，$e^{\alpha x} = (\text{定数}) \times \dfrac{f(x)}{1-\beta f(x)}$ という形になっている。そこで，

$$g(x) = \frac{f(x)}{1-\beta f(x)} \tag{17}$$

と置けば，$g(x)$ は次の微分方程式を満たすことがわかる．

$$\frac{dg(x)}{dx} = \alpha g(x) \tag{18}$$

これは 2.1 節で扱った方程式そのものであり，その 1 つの差分化としては

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \alpha g(x) \tag{19}$$

が考えられる (前進差分)。(17), (19) より，$f(x)$ に対する次の差分方程式が得られる：

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \alpha f(x)\{1-\beta f(x+h)\} \tag{20}$$

この関係式は森下 [Mo] によって与えられたものであるので，以下では “森下差分” と呼ぶことにする。

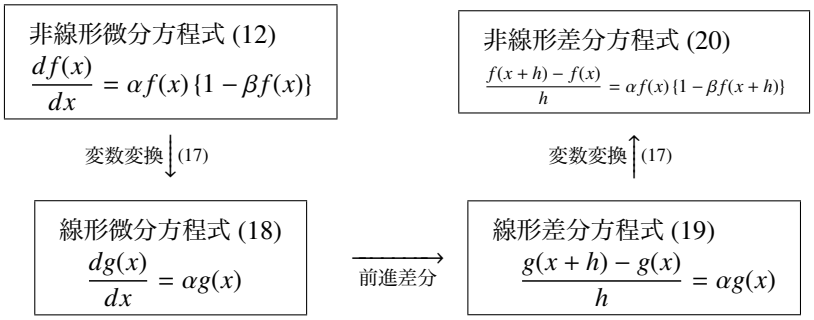

図 6　ロジスティック方程式に対する “森下差分”

今得られた (20) と，ロジスティック写像と等価な (14) を比較すると，(20) の右辺では “$f(x+h)$” となっている部分が (14) では “$f(x)$” であることが分かる。このように，差分化のとり方を少し変えるだけで，得られる差分方程式の数学的性質は大きく変わりうる。寺本英，広田良吾，武者利光，山口昌哉という 4 名による対談の記録である [THYM] でも，広田氏が「差分化」に関する自身の研究を紹介したのを受けて，次のような対話が行われている (p. 41)。

山口　僕と非常に対照的ですね．微分方程式を discrete に直したら，微分方程式の解とまったくちがう性質がでてくる，ということを追求している．

武者　広田さんの仕事は，非常に体系的ですごいですね．

広田　僕は，逆に元の微分方程式の解の性質を保存するように，どう差分化したらいいか，ということです．

…《中略》…

山口　1 つの微分方程式に対して差分化は無限にある．そのいい方をとったら非常に体系的な議論ができる．微分方程式と同じような体系的な議論ができる，というのは広田さんの立場．

繰り返すが，本稿では広田氏の発言のような「元の微分方程式の解の性質を保存するように差分化する」という立場をとる。次節からは，戸田格子方程式を例にとって，ソリトン方程式に対する「解の性質を保存する差分化」はどのようになされるかを紹介する。

練習問題 6.　(i) “森下差分” によって得られた差分方程式 (20) に対して，初期条件 $f(0)$ が与えられたときの $f(nh)$ を求めよ。

(ii) “森下差分” においては前進差分 (19) が用いられた。これを他の差分化で置き換えることで，ロジスティック方程式の異なる差分化を導出せよ。また，その方程式に対して，初期条件 $f(0)$ が与えられたときの $f(nh)$ を求めよ。

3　戸田格子の差分化

3.1　戸田格子の双線形化

まずは戸田格子の運動方程式を復習しておく [Kaj1]。$u_n(t)$ を時刻 t における n 番目の質点のつり合いの位置からのずれとする (図 7)。

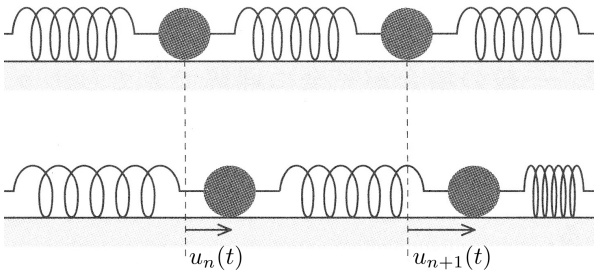

図 7　戸田格子

変位が r のときのバネの力が $f(r) = a\left(1 - e^{-br}\right)$ で表される場合の運動方程式 (戸田格子方程式) は,

$$m\frac{d^2u_n(t)}{dt^2} = a\left[e^{-b\{u_n(t)-u_{n-1}(t)\}} - e^{-b\{u_{n+1}(t)-u_n(t)\}}\right] \tag{21}$$

で与えられる (m は質点の質量)。以下では独立変数 t, 従属変数 $u_n(t)$ を適当にスケールして,

$$\frac{d^2u_n(t)}{dt^2} = \left[e^{-\{u_n(t)-u_{n-1}(t)\}} - e^{-\{u_{n+1}(t)-u_n(t)\}}\right] \tag{22}$$

という形で考えることにする。

練習問題 7. 条件 $m > 0, a > 0, b > 0$ の下で，適当なスケール変換を行うことにより，運動方程式 (21) は (22) に帰着されることを示せ。

変数 $V_n(t)$ を

$$V_n(t) = e^{u_n(t)-u_{n+1}(t)} \tag{23}$$

で定めると，$V_n(t)$ の満たす微分方程式は,

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\left[1 + V_n(t)\right] = V_{n+1}(t) + V_{n-1}(t) - 2V_n(t) \tag{24}$$

となる。さらに,

$$V_n(t) = \frac{d^2}{dt^2}\log f_n(t) \tag{25}$$

とおいて積分すると，広田の双線形方程式

$$\ddot{f}_n(t)f_n(t) - \left\{\dot{f}_n(t)\right\}^2 = f_{n+1}(t)f_{n-1}(t) - \{f_n(t)\}^2 \tag{26}$$

が得られる (これ以降では，ドットは t についての微分を表すものとする)。ここで，(25) と (26) とを組み合わせると，

$$V_n(t) = \frac{f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)}{\{f_n(t)\}^2} - 1 \tag{27}$$

と表すこともできることを注意しておく (後で使う)。

双線形方程式 (26) に対する N-ソリトン解は，次の手順によって得られる：

Step 1: 解の形を

$$f_n(t) = 1 + \varepsilon f_n^{(1)}(t) + \varepsilon^2 f_n^{(2)}(t) + \cdots + \varepsilon^N f_n^{(N)}(t) \tag{28}$$

と仮定する。

Step 2: (28) を双線形方程式 (26) に代入し，ε の次数ごとに整理する。

Step 3: ε について 1 次の方程式から，$f_n^{(1)}(t)$ の満たす線形方程式を導く。今の場合は

$$\ddot{f}_n^{(1)}(t) = f_{n+1}^{(1)}(t) + f_{n-1}^{(1)}(t) - 2f_n^{(1)}(t) \tag{29}$$

であり，N-ソリトン解を得るためにはこの線形方程式の特解として

$$f_n^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j P_j^{2n} \exp\left[\left(P_j - \frac{1}{P_j}\right)t\right] \tag{30}$$

を選ぶ。(N 項の和であるところが "N-ソリトン解" の特徴である。)

Step 4: ε について 2 次〜N 次の方程式から，$f_n^{(2)}(t), \ldots, f_n^{(N)}(t)$ を順次定めていく。

Step 5: 上で定めた $f_n^{(1)}(t), f_n^{(2)}(t), \ldots, f_n^{(N)}(t)$ が，ε について $N+1$ 次〜$2N$ 次の方程式も満たしていることを確認する。

上記の手順を実際に行うには，かなり煩雑な計算が要求される。研究の現場では，計算機代数ソフトウェア (Mathematica, Maple, Maxima, Reduce, Risa/Asir 等[*3]) が利用されることも多い。

練習問題 8. (i) $N = 1$ の場合に上の Step 1〜5 を実行して 1-ソリトン解を求めよ。

(ii) 上で求めた 1-ソリトン解 $f_n(t)$ に対して，(25) によって定められる $V_n(t)$ を求めよ。

(iii) $N = 2$ の場合に上の Step 1〜5 を実行して 2-ソリトン解を求めよ。

(iv) (計算機代数システムが使えるなら) 2-ソリトン解のパラメータを適当に選び，対応する $V_n(t)$ のグラフをプロットして 2 つのソリトンの衝突の様子を観察せよ。

上述の手順で求められる N-ソリトン解は，$I = \{1, 2, \ldots, N\}$ のあらゆる部分集合 J についての和

$$f_n(t) = \sum_{J \subset I} \varepsilon^{|J|} \left(\prod_{\substack{i, i' \in J \\ i < i'}} A_{ii'} \right) \prod_{i \in J} E_i(n, t) \tag{31}$$

という形で表される。ただし $E_i(n,t)$ $(i \in J)$ および $A_{ii'}$ $(i, i' \in J, i < i')$ は，双線形戸田方程式 (26) に対しては次で与えられる：

$$E_i(n,t) = c_i P_i^{2n} \exp\left[\left(P_i - \frac{1}{P_i}\right)t\right], \quad A_{ii'} = \left(\frac{P_i - P_{i'}}{1 - P_i P_{i'}}\right)^2. \tag{32}$$

[*3] Maxima, Reduce, Risa/Asir はフリーウェアであり，Mathematica, Maple は有料である。本稿の図は Mathematica で作っている。iPhone, iPad 上で動く Reduce の処理系 (iCAS) もあるが，そちらは有料である。

N-ソリトン解 (31) の形は，文献 [MDJ], §3.2 (3.8) 式 (p. 23) で与えられている KdV 方程式の N-ソリトン解と，形だけ見れば同じである。(もちろん，$E_i(n,t), A_{ii'}$ の具体的な形は異なる。) これは偶然ではなく，どちらも “A 型” の階層に属していることからの帰結である (cf. [MDJ, JM])。

3.2　ソリトン解を保つ差分化

前節で紹介したように，戸田方程式は (22), (24), (26) 等といった様々な表示を持つ。このどの表示に基づいて差分化を考えるかによって，得られる結果が変わってくる。ここでは，双線形方程式 (26) に基づいて考えてみよう。やや技巧的ではあるが，次のように差分化を行ってみる：

$$
\begin{aligned}
&(26)\text{ の左辺} = \ddot{f}_n(t)f_n(t) - \left\{\dot{f}_n(t)\right\}^2 \\
&\xrightarrow[\text{差分化}]{} \underbrace{\frac{f_n(t+\delta) - 2f_n(t) + f_n(t-\delta)}{\delta^2}}_{\text{中心差分}} \cdot f_n(t) - \underbrace{\frac{f_n(t+\delta) - f_n(t)}{\delta}}_{\text{前進差分}} \cdot \underbrace{\frac{f_n(t) - f_n(t-\delta)}{\delta}}_{\text{後退差分}} \\
&= \frac{f_n(t+\delta)f_n(t-\delta) - \{f_n(t)\}^2}{\delta^2}.
\end{aligned} \tag{33}
$$

(26) の左辺をこの (33) で置き換えると，次の双線形差分方程式が得られる：

$$
\frac{f_n(t+\delta)f_n(t-\delta) - \{f_n(t)\}^2}{\delta^2} = f_{n+1}(t)f_{n-1}(t) - \{f_n(t)\}^2 . \tag{34}
$$

これが，論文 [H4], II において導入された，離散時間戸田格子方程式である。このようにして構成した偏差分方程式が「良いもの」であるかどうか，ここまでの議論では分からない。しかし実際には，以下に見るように双線形差分方程式 (34) は N-ソリトン解を持ち，元の微分方程式 (26) の性質を引き継いでいると言える。

双線形方程式 (34) に対する N-ソリトン解は，前節とまったく同じ流れで得られる：

Step 1:　解の形を (28) に仮定する。

Step 2:　(28) を双線形方程式 (34) に代入し，ε の次数ごとに整理する。

Step 3:　ε について 1 次の方程式から，$f_n^{(1)}(t)$ の満たす線形方程式を導く。差分系の場合は

$$
\frac{1}{\delta^2}\left\{f_n^{(1)}(t+\delta) + f_n^{(1)}(t-\delta) - 2f_n^{(1)}(t)\right\} = f_{n+1}^{(1)}(t) + f_{n-1}^{(1)}(t) - 2f_n^{(1)}(t) \tag{35}
$$

であり，N-ソリトン解を得るためにはこの線形方程式の特解として

$$
f_n^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j P_j^{2n} Q_j^{2t/\delta}, \quad Q_j - \frac{1}{Q_j} = \delta\left(P_j - \frac{1}{P_j}\right) \tag{36}
$$

を選ぶ。

Step 4, Step 5:　前節の連続時間の場合とまったく同じ。

練習問題 9.　(i) $N = 1$ の場合に上の Step 1〜5 を実行して 1-ソリトン解を求めよ。

(ii) $N = 2$ の場合に上の Step 1〜5 を実行して 2-ソリトン解を求めよ。

実は，N-ソリトン解の形自体は (31) と同じ形となる。ただし，ソリトン解を構成する部品である $E_i(n,t)$, $A_{ii'}$ の具体的な形は (32) とは異なっており，離散時間戸田格子方程式 (34) の場合は，

$$
Q_i - \frac{1}{Q_i} = \delta\left(P_i - \frac{1}{P_i}\right) \tag{37}
$$

を満たす P_i, Q_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ を用いて，

$$E_i(n,t) = c_i P_i^{2n} Q_i^{2t/\delta}, \quad A_{ii'} = \frac{-\left(\frac{Q_i}{Q_{i'}} - \frac{Q_{i'}}{Q_i}\right)^2 + \delta^2\left(\frac{P_i}{P_{i'}} - \frac{P_{i'}}{P_i}\right)^2}{\left(Q_i Q_{i'} - \frac{1}{Q_i Q_{i'}}\right)^2 - \delta^2\left(P_i P_{i'} - \frac{1}{P_i P_{i'}}\right)^2} \tag{38}$$

と表される。

このとき連続極限 $\delta \to 0$ をとると，連続の場合の (32) が得られることを確認しておこう。(37) を Q_i について解くと，

$$Q_i = \frac{\delta}{2}\left(P_i - \frac{1}{P_i}\right) \pm \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}\left(P_i - \frac{1}{P_i}\right)^2} \tag{39}$$

が得られるが，“±” の “+” をとることにすると，

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\delta}{2}\left(P_i - \frac{1}{P_i}\right) + \left\{1 + \frac{\delta^2}{4}\left(P_i - \frac{1}{P_i}\right)^2\right\}^{1/2} \\ &= 1 + \frac{\delta}{2}\left(P_i - \frac{1}{P_i}\right) + \frac{\delta^2}{8}\left(P_i - \frac{1}{P_i}\right)^2 + o(\delta^2) \end{aligned} \tag{40}$$

である。さらに，

$$\log(1+z) = z + O(z^2) \quad \text{as } z \to 0 \tag{41}$$

であるので，

$$\begin{aligned} \log Q_i^{2t/\delta} &= \frac{2t}{\delta}\log\left[1 + \frac{\delta}{2}\left(P_i - \frac{1}{P_i}\right) + O(\delta^2)\right] \\ &= \frac{2t}{\delta}\left\{\frac{\delta}{2}\left(P_i - \frac{1}{P_i}\right) + O(\delta^2)\right\} \quad (\because\ (41)) \\ &\xrightarrow[\delta\to 0]{} \left(P_i - \frac{1}{P_i}\right)t \end{aligned} \tag{42}$$

となる。よって

$$\lim_{\delta\to 0} Q_i^{2t/\delta} = \exp\left[\left(P_i - \frac{1}{P_i}\right)t\right] \tag{43}$$

であり，(38) の $E_i(n,t)$ から (32) の $E_i(n,t)$ が得られることが示された。

練習問題 10. (38) の $A_{ii'}$ に (39) を用いて極限 $\delta \to 0$ をとると，(32) の $A_{ii'}$ が得られることを示せ。

次に，変数 $V_n(t)$ についての方程式である (24) に対応する偏差分方程式を導出しておく。双線形差分方程式 (34) と，連続の場合の変数変換の式 (27) とを組み合わせると，

$$V_n(t) = \frac{f_{n+1}(t) f_{n-1}(t)}{\{f_n(t)\}^2} - 1 = \frac{1}{\delta^2}\left\{\frac{f_n(t+\delta) f_n(t-\delta)}{\{f_n(t)\}^2} - 1\right\} \tag{44}$$

となる。この式より，

$$1 + V_n(t) = \frac{f_{n+1}(t) f_{n-1}(t)}{\{f_n(t)\}^2}, \quad 1 + \delta^2 V_n(t) = \frac{f_n(t+\delta) f_n(t-\delta)}{\{f_n(t)\}^2} \tag{45}$$

なる関係式が得られ，よって

$$\frac{\{1+V_n(t+\delta)\}\{1+V_n(t-\delta)\}}{\{1+V_n(t)\}^2}=\frac{\left\{1+\delta^2V_{n+1}(t)\right\}\left\{1+\delta^2V_{n-1}(t)\right\}}{\{1+\delta^2V_n(t)\}^2} \tag{46}$$

という非線形偏差分方程式が得られる。さらに，$\Delta_t F(t) := F(t+\delta)+F(t-\delta)-2F(t)$, $\Delta_n F(n) := F(n+1)+F(n-1)-2F(n)$ という記法を用いると，

$$\Delta_t \log[1+V_n(t)] = \Delta_n \log\left[1+\delta^2V_n(t)\right] \tag{47}$$

という形に整理できる。右辺に (41) を用いると，

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\Delta_n \log\left[1+\delta^2V_n(t)\right] &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\Delta_n\left\{\delta^2V_n(t)+o(\delta^2)\right\}\\ &= \Delta_n V_n(t) = V_{n+1}(t)+V_{n-1}(t)-2V_n(t)\end{aligned} \tag{48}$$

となることが分かる。さらに

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\Delta_t \log[1+V_n(t)] = \frac{d^2}{dt^2}\log[1+V_n(t)] \tag{49}$$

であるので，(47) において $\delta\to 0$ という極限をとると，連続の場合の方程式 (24) が得られることが分かる。

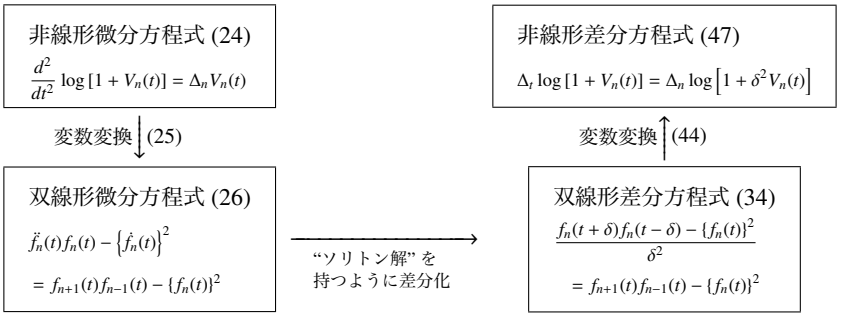

図 8　双線形方程式に基づく差分化

本節の議論を模式的にまとめたのが図 8 である。最終的に得られた非線形差分方程式 (47) において，左辺は通常の中心差分であるが，右辺の形は双線形方程式を用いた議論を経由しないと思いつかないような形をしている。一連の論文 [H4] では，図 8 のような流れに基づいて，ソリトン方程式，および線形化可能な微分方程式の “可積分差分” が提案されている。

4　広田・三輪方程式とその退化

4.1　広田・三輪方程式

双線形差分方程式 (34) を整理すると，

$$f_n(t+\delta)f_n(t-\delta)-\delta^2 f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)+\left(\delta^2-1\right)\{f_n(t)\}^2=0 \tag{50}$$

という形になる。左辺第 1 項は変数 t に関して前後にずらしたものの積，左辺第 2 項は変数 n に関して前後にずらしたものの積という形になっている。

論文 [H5] において，広田は次の差分方程式を導入した：

$$\begin{aligned} Z_1 f(x_1+1,x_2,x_3)f(x_1-1,x_2,x_3) + Z_2 f(x_1,x_2+1,x_3)f(x_1,x_2-1,x_3) \\ + Z_3 f(x_1,x_2,x_3+1)f(x_1,x_2,x_3-1) = 0. \end{aligned} \tag{51}$$

ここで Z_1, Z_2, Z_3 は 0 でない定数である。論文 [H5] では，方程式 (51) は “Discrete Analogue of a Generaliged Toda Equation” (DAGTE) と呼ばれている。

離散時間戸田格子方程式 (34) は 2 次元格子 (n,t) 上の方程式であるのに対し，DAGTE(51) は 3 次元格子 $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}^3$ 上の差分方程式である。逆に言えば，離散時間戸田格子方程式 (34) は，DAGTE に対して

$$f(x_1,x_2,x_3+1) = (0 \text{ でない定数}) \times f(x_1,x_2,x_3), \quad \forall x_3 \in \mathbb{Z} \tag{52}$$

という簡約条件を課したものとして得られることになる。簡約条件として別のものを課すことによって，さまざまな離散ソリトン方程式が得られる。このことは，節を改めて議論する。

DAGTE (51) の特徴的なところは，単に対称性の高い方程式というだけでなく，N-ソリトン解を持つという点にある。論文 [H5] では一般の N に対する N-ソリトン解は “conjecture” となっており，証明のアイデアは三輪 [Mi] により与えられた。

双線形差分方程式 (51) において

$$\tau(\ell,m.n) = f(m+n,n+\ell,\ell+m) \tag{53}$$

と定め，

$$Z_1 = a(b-c), \quad Z_2 = b(c-a), \quad Z_3 = c(a-b) \tag{54}$$

とおくと[*4]，

$$\begin{aligned} &a(b-c)\tau(\ell+1,m,n)\tau(\ell,m+1,n+1) \\ &+ b(c-a)\tau(\ell,m+1,n)\tau(\ell+1,m,n+1) \\ &+ c(a-b)\tau(\ell,m,n+1)\tau(\ell+1,m+1,n) = 0 \end{aligned} \tag{55}$$

なる方程式が得られる[*5]。DAGTE (51) の座標をとりなおして，方程式を (55) という形に解た書いたのは三輪 [H5] であり，方程式が N-ソリトン解を持つことに見通しのよい証明を与えるためには，この書き換えが重要である。このような経緯から，方程式 (55) は “広田・三輪方程式” と呼ばれる (“離散 KP 方程式” と呼ばれることもある)。

座標変換後の広田・三輪方程式 (55) に対しては，N-ソリトン解の “部品” は次で与えられる：

$$E_i = \kappa_i \left(\frac{1-aq_i}{1-ap_i}\right)^{\ell} \left(\frac{1-bq_i}{1-bp_i}\right)^{m} \left(\frac{1-cq_i}{1-cp_i}\right)^{n} \quad (1 \le i \le N), \tag{56}$$

$$A_{ii'} = \frac{(p_i-p_{i'})(q_i-q_{i'})}{(p_i-q_{i'})(q_i-p_{i'})} \qquad (1 \le i < i' \le N). \tag{57}$$

これらを用いて，

$$\tau = \sum_{J \subset I} \varepsilon^{|J|} \Bigg(\prod_{\substack{i,i' \in J \\ i<i'}} A_{ii'} \Bigg) \prod_{i \in J} E_i \tag{58}$$

[*4] (54) のようにおくと $Z_1+Z_2+Z_3=0$ という条件をおいていることになるが，一般性を失うことなくこの条件を満たすようにすることができる。実際，(53) の代わりに $\tau(\ell,m.n) = \lambda^{mn}\mu^{n\ell}\nu^{\ell m} f(m+n,n+\ell,\ell+m)$ とおけば，“ゲージ変換” のパラメータ λ,μ,ν を適当に選ぶことによって方程式の係数を調整できる。

[*5] [MNTU] によると，(53) における “τ” という記法は、Lehmann-Symanzik-Zimmermann の公理論的場の理論から来ているそうである。

として “τ 関数” を定義すれば，(58) が (55) の N-ソリトン解となる。

(58) が実際に解となることを，練習問題の形で見て行こう (cf. [Ta], 6.4 節「離散的戸田場の方程式」)。

練習問題 11 (KP 階層の双線形恒等式と N-ソリトン解)**.**

無限個の変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ に対して，$\xi(\boldsymbol{x}, k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n$ とおく。また，$[a]$ で $[a] = (a, a^2/2, a^3/3, \dots)$ を表すものとする。このとき，(58) において，

$$E_i = e^{\xi(\boldsymbol{x}, p_i) - \xi(\boldsymbol{x}, q_i)} \quad (1 \le i \le N) \tag{59}$$

および (57) を代入した τ 関数を考えると，“双線形恒等式 (bilinear identity)”

$$0 = \oint \frac{dk}{2\pi\sqrt{-1}} e^{\xi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', k)} \tau(\boldsymbol{x} - [k^{-1}]) \tau(\boldsymbol{x} + [k^{-1}]) \tag{60}$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，$\oint \frac{dk}{2\pi\sqrt{-1}}$ は被積分関数の $k = \infty$ における展開の k^{-1} の係数をとることを意味する。

練習問題 11 の証明は [MDJ] の §3.4 で解説されている。双線形恒等式 (60) は KP 階層の 1 つの表示方法であり，無限個の広田型 (双線形) 微分方程式の母関数となっている。KP 階層からの導出については，[DJKM] に解説されている。

練習問題 12 (三輪変換)**.** 無限個の変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ に対して，

$$x_j = \frac{\ell a^j}{j} + \frac{m b^j}{j} + \frac{n c^j}{j} \quad (j = 1, 2, \dots) \tag{61}$$

とおくとき，次が成り立つことを証明せよ。

$$\xi(\boldsymbol{x}, k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n = (1 - ak)^{-\ell} (1 - bk)^{-m} (1 - ck)^{-n}. \tag{62}$$

(ヒント)　マクローリン展開 $-\log(1 - z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots$ を利用する。

練習問題 13 (τ 関数の加法公式. 文献 [SS] の Theorem 3 の特別な場合)**.**

練習問題 11 の記法の下に，

$$\boldsymbol{x} = (\ell + 1)[a] + (m + 1)[b] + (n + 1)[c], \quad \boldsymbol{x}' = \ell[a] + m[b] + n[c] \tag{63}$$

とおく。このとき，双線形恒等式 (60) より次が得られることを示せ：

$$\begin{aligned} a(b - c)\tau(\boldsymbol{x} - [a])\tau(\boldsymbol{x}' + [a]) + b(c - a)\tau(\boldsymbol{x} - [b])\tau(\boldsymbol{x}' + [b]) \\ + c(a - b)\tau(\boldsymbol{x} - [c])\tau(\boldsymbol{x}' + [c]) = 0. \end{aligned} \tag{64}$$

無限個の連続変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots)$ に対する τ 関数 $\tau(\boldsymbol{x})$ を用いて，離散変数 ℓ, m, n に対する τ 関数 $\tau(\ell, m, n)$ を

$$\tau(\ell, m, n) = \tau(\ell[a] + m[b] + n[c]) \tag{65}$$

によって定めると，加法公式 (64) が広田・三輪方程式 (55) と等価になることは明らかであろう。

練習問題 14 (三輪変換によるソリトン解の書き換え)**.** 練習問題 11 の τ 関数に対して，(65) の $\tau(\ell, m, n)$ は，(56), (57), (58) で定められる τ 関数と一致することを示せ。

以上のようにして，(56), (57), (58) で定められる τ 関数 (N-ソリトン解) が，広田・三輪方程式 (55) を満たすことが証明される。伊達・神保・三輪による一連の論文 [DJM, JM] では，ここで紹介したような

双線形恒等式 (60) ＋ 三輪変換 (61)

という手法を拡張してくことで，多くのソリトン方程式の差分化を行っている。

ここで紹介した証明とは別のやり方として，τ 関数を行列式で表示しておくことで，行列式の代数的恒等式 (プリュッカー関係式) に帰着させて証明する手もある。このやり方については，連続の場合は [H3]，差分の場合は [Kaj2, Ts] を参照していただきたい。また，非線形差分方程式の行列式解については，シフト作用素を用いた定式化から導出することもできる。こちらについては [KNW] をご覧いただきたい。

4.2 離散 KdV 方程式

広田・三輪方程式 (離散 KP 方程式) を特殊化することにより，それまでに知られていた多くの[*6]離散ソリトン方程式を導出することができる。本節では，戸田格子方程式と並んで，最も有名なソリトン方程式の 1 つである KdV 方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 6v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \tag{66}$$

およびそれに対応する偏差分方程式がどのように導かれるかを紹介する。

天下りになってしまうが，(55) を満たす $\tau(l, m, n)$ に対して，次の簡約条件を要請する：

$$\tau(\ell, m+1, n+1) = (0 \text{ でない定数}) \times \tau(\ell, m, n). \tag{67}$$

このとき，(55) から

$$\begin{aligned} a(b-c)\,\tau(\ell+1, m, n)\tau(\ell, m, n) + b(c-a)\,\tau(\ell, m+1, n)\tau(\ell+1, m-1, n) \\ + c(a-b)\,\tau(\ell, m-1, n)\tau(\ell+1, m+1, n) = 0 \end{aligned} \tag{68}$$

が得られる。以下では変数 n は固定して考えることにして，明記しないことにする：

$$\begin{aligned} a(b-c)\,\tau(\ell+1, m)\tau(\ell, m) + b(c-a)\,\tau(\ell, m+1)\tau(\ell+1, m-1) \\ + c(a-b)\,\tau(\ell, m-1)\tau(\ell+1, m+1) = 0. \end{aligned} \tag{69}$$

このとき，

$$U(\ell, m) := \frac{\tau(\ell+1, m)\tau(\ell, m+1)}{\tau(\ell, m)\tau(\ell+1, m+1)}, \quad \delta := -\frac{b(c-a)}{c(a-b)} \tag{70}$$

とおくと，次の方程式を満たすことが示される：

$$\frac{1}{U(\ell+1, m+1)} - \frac{1}{U(\ell, m)} = \delta\{U(\ell+1, m) - U(\ell, m+1)\} \tag{71}$$

[*6] ここを “すべての” としてよいかかどうか筆者は知らない。

練習問題 15. $\tau(\ell, m)$ が双線形方程式 (69) を満たすとき，(70) で定められる $U(\ell, m)$ は偏差分方程式 (71) を満たすことを示せ。

次に，u_n^k [*7]を

$$u_n^k := U\left(\frac{1+k+n}{2}, \frac{1+k-n}{2}\right) \tag{72}$$

で定義する。このとき，u_n^k は次の形の偏差分方程式を満たす：

$$\delta\left(u_n^{k+1} - u_n^{k-1}\right) = \frac{1}{u_{n+1}^k} - \frac{1}{u_{n-1}^k}. \tag{73}$$

これが，広田の導入した離散 KdV 方程式である ([H4], I)。

KdV 方程式 (66) は，離散 KdV 方程式 (73) のある種の連続極限として得られることを示そう。$\varepsilon, \delta_1, \delta_2, \kappa$ を微小パラメータとして，$u_n^k = 1 - \kappa v(x,t)$, $x = k\delta_1 + n\delta_2$, $t = k\varepsilon$ $(k, n \in \mathbb{Z})$ とすると，$u_n^{k\pm1} = 1 - \kappa v(x \pm \delta_1, t \pm \varepsilon)$ であり，

$$\begin{aligned} v(x \pm \delta_1, t \pm \varepsilon) = v(x,t) &\pm \left(\delta_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\delta_1^2 \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + 2\delta_1 \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + o(\delta_1^2 + \varepsilon^2) \end{aligned} \tag{74}$$

とテーラー展開されるので，

$$(73) \text{ の左辺} = -\delta\kappa \left\{2\left(\delta_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t}\right) + o(\delta_1^2 + \varepsilon^2)\right\} \tag{75}$$

となる。また，高校で学ぶ無限等比級数の公式

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots \quad (|z| < 1), \tag{76}$$

およびテーラー展開より得られる

$$v_{n\pm1}^k = v \pm \delta_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\delta_2^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \pm \frac{\delta_2^3}{6}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \cdots, \tag{77}$$

$$\left(v_{n\pm1}^k\right)^2 = v^2 \pm 2\delta_2 v \frac{\partial v}{\partial x} + \delta_2^2 \left\{v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\} \pm \delta_2^3 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{3} v \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) + \cdots \tag{78}$$

を用いると，

$$\begin{aligned} (73) \text{ の右辺} &= \frac{1}{1-\kappa v_{n+1}^k} - \frac{1}{1-\kappa v_{n-1}^k} \\ &= \left\{1 + \kappa v_{n+1}^k + \kappa^2 \left(v_{n+1}^k\right)^2 + o(\kappa^2)\right\} - \left\{1 + \kappa v_{n-1}^k + \kappa^2 \left(v_{n-1}^k\right)^2 + o(\kappa^2)\right\} \\ &= \kappa\left(v_{n+1}^k - v_{n-1}^k\right) + \kappa^2 \left\{\left(v_{n+1}^k\right)^2 - \left(v_{n-1}^k\right)^2\right\} + o(\kappa^2) \\ &= 2\kappa \left\{\delta_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\delta_2^3}{6}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + o(\delta_2^4)\right\} + 2\kappa^2 \left\{2\delta_2 v \frac{\partial v}{\partial x} + o(\delta_2^2)\right\} + o(\kappa^2) \end{aligned} \tag{79}$$

[*7] "u_n^k" は「u_n の k 乗」ではなく，u が n, k の関数であることを意味する。離散可積分系の研究ではよく用いられる記法である。

と展開されることが分かる。ここから KdV 方程式 (66) を導くために，(75), (79) において，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$ の項が打ち消し合うようにしたい。そこで，$\delta_1 = -\delta_2/\delta$ が成り立つものとしよう。さらに，$\delta_2^3 = 6\delta\varepsilon, \kappa\delta_2 = 3\delta\varepsilon$ が成り立てば，KdV 方程式 (66) が得られる。実際，方程式 (73) に含まれるパラメータ δ を用いて

$$\delta_1 = -\delta, \quad \delta_2 = \delta^2, \quad \varepsilon = \frac{\delta^5}{6}, \quad \kappa = \frac{\delta^4}{2} \tag{80}$$

ととればよい。

このように，方程式だけを見ると離散 KdV 方程式 (73) から KdV 方程式 (66) を導くための “連続極限” はやや技巧的なものであるが，連続と離散のソリトン解が連続極限でつながるだけでなく，三輪変換 (61) で直接結びついているという著しい特徴を持っている。

4.3 離散変形 KdV 方程式

次に，2 周期条件

$$\tau(\ell + 2, m, n) = (0 \text{ でない定数}) \times \tau(\ell, m, n). \tag{81}$$

を満たす場合を考える。このとき，$\tau_0(m, n) = \tau(0, m, n), \tau_1(m, n) = \tau(1, m, n)$ とおけば，広田・三輪方程式 (55) から

$$\begin{cases} a(b-c)\tau_0(m,n)\tau_0(m+1,n+1) + b(c-a)\tau_0(m+1,n)\tau_1(m,n+1) \\ \qquad\qquad + c(a-b)\tau_0(m,n+1)\tau_1(m+1,n) = 0, \\ a(b-c)\tau_0(m,n)\tau_1(m+1,n+1) + b(c-a)\tau_1(m+1,n)\tau_0(m,n+1) \\ \qquad\qquad + c(a-b)\tau_1(m,n+1)\tau_0(m+1,n) = 0 \end{cases} \tag{82}$$

が得られる。

練習問題 16. 従属変数 $u(m, n)$ を

$$u(m, n) = \frac{\tau_1(m, n)}{\tau_0(m, n)} \tag{83}$$

で定めると，$u(m, n)$ は

$$\frac{u(m+1, n+1)}{u(m, n)} = \frac{u(m, n+1) + \kappa u(m+1, n)}{u(m+1, n) + \kappa u(m, n+1)}, \quad \kappa := \frac{c(a-b)}{b(c-a)} \tag{84}$$

を満たすことを示せ。

文献 [FV] では，方程式 (84) と広田による離散サイン・ゴルドン方程式 (後述の (101) の偏差分方程式) との関係が議論されている。また，(84) に適当な変換を行った後に “超離散化” [HT, Mat, To] を行うと，[TM] における “運搬車付き箱玉系” が得られる。

練習問題 17. θ_n^m を

$$\exp\left[\frac{\sqrt{-1}}{2}\theta_n^m\right] = u(m, n) \tag{85}$$

によって定めるとき，θ_n^m は方程式

$$\tan\left(\frac{\theta_{n+1}^{m+1} - \theta_n^m}{4}\right) = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\tan\left(\frac{\theta_n^{m+1} - \theta_{n+1}^m}{4}\right) \tag{86}$$

を満たすことを示せ。

非線形方程式 (86) は，文献 [H6] において “離散ポテンシャル変形 KdV 方程式” と呼ばれている。

4.4 離散 2 次元戸田方程式，離散サイン・ゴルドン方程式

サイン・ゴルドン方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\phi(x,y) = \sin\phi(x,y) \tag{87}$$

は，微分幾何と可積分系を結びつける重要な方程式である。可積分系の観点からすると，サイン・ゴルドン方程式は 2 次元戸田方程式 (戸田場の方程式)

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\log\left[1 + V_n(x,y)\right] = V_{n+1}(x,y) + V_{n-1}(x,y) - 2V_n(x,y) \tag{88}$$

の簡約として理解すべきものなので，まずは 2 次元戸田方程式の離散化を紹介する。

広田・三輪方程式 (55) を満たす $\tau(\ell, m, n)$ に対して，$f_k(x,y)$ を

$$f_k(x,y) = \tau\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, k - \frac{x}{a}\right) \tag{89}$$

で定める。このとき，$f_k(x,y)$ は次の双線形差分方程式を満たす：

$$\begin{aligned} Z_1 f_{k+1}(x+a,y) f_{k+1}(x,y+b) + Z_2 f_k(x,y+b) f_{k+2}(x+a,y) \\ + Z_3 f_{k+1}(x,y) f_{k+1}(x+a,y+b) = 0. \end{aligned} \tag{90}$$

改めて $n = k+1$ とおき，$Z_1 = 1, Z_2 = ab, Z_3 = -(1+ab)$ とすれば[*8]，

$$\begin{aligned} f_n(x+a,y) f_n(x,y+b) + ab f_{n-1}(x,y+b) f_{n+1}(x+a,y) \\ = (1+ab) f_n(x,y) f_n(x+a,y+b) \end{aligned} \tag{91}$$

なる差分方程式が得られる。これが，双線形形式での離散 2 次元戸田方程式である [Kaj2, Ta]。

練習問題 18. 離散 2 次元戸田方程式 (91) の 1-ソリトン解，2-ソリトン解を，3.1 節，3.2 節での Step 1 〜 5 を実行することで求めよ。

文献 [Kaj2] では，(91) の解をカソラチ行列式を用いて構成する方法が解説されている。

双線形方程式 (91) より，

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{f_{n+1}(x+a,y) f_{n-1}(x,y+b)}{f_n(x+a,y) f_n(x,y+b)} - 1 \\ &= \frac{1+ab}{ab}\left\{\frac{f_n(x+a,y+b) f_n(x,y)}{f_n(x+a,y) f_n(x,y+b)} - 1\right\} \end{aligned} \tag{92}$$

とおくことができて，

$$\begin{aligned} &\frac{\{1+V_n(x+a,y+b)\}\{1+V_n(x,y)\}}{\{1+V_n(x+a,y)\}\{1+V_n(x,y+b)\}} \\ &\quad = \frac{\{1+\kappa V_{n+1}(x+a,y)\}\{1+\kappa V_{n-1}(x,y+b)\}}{\{1+\kappa V_n(x+a,y)\}\{1+\kappa V_n(x,y+b)\}} \qquad \left(\kappa = \frac{ab}{1+ab}\right) \end{aligned} \tag{93}$$

[*8] 脚注*4 でも述べたように，係数は “ゲージ変換” によって自由に選べる。

という非線形偏差分方程式が得られる。これも離散 2 次元戸田方程式と呼ばれる。さらに，

$$K_n(x,y) = \frac{-\kappa\{1+V_n(x,y)\}}{1+\kappa V_n(x,y)} = -\kappa\frac{f_{n+1}(x+a,y)f_{n-1}(x,y+b)}{f_n(x+a,y+b)f_n(x,y)} \tag{94}$$

とすれば，変数 x, y のずれ方が両辺で同じになる：

$$\frac{K_n(x+a,y)K_n(x,y+b)}{K_n(x+a,y+b)K_n(x,y)} = \frac{\{1+K_{n+1}(x+a,y)\}\{1+K_{n-1}(x,y+b)\}}{\{1+K_n(x+a,y+b)\}\{1+K_n(x,y)\}} \tag{95}$$

文献 [D] では，この方程式を，離散 2 次元戸田方程式の “ゲージ不変形式” と呼んでいる。このように，非線形方程式の具体的な形は (あたりまえであるが) 従属変数のとり方に依存しており，目的に応じて “うまい” 変数を探す必要がある。そもそも，τ 関数に対する双線形方程式が与えられたときに，それをどのように組み合わせて “従属変数” を設定すればよいかは多分に技巧を要する[*9]。

次に，(91) を満たす $f_n(x,y)$ が，簡約条件

$$f_{n+2}(x,y) = \mu\, f_n(x,y), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{96}$$

を満たすことを要請する (2 周期簡約)。ここで，μ は 0 でない定数である。この条件の下では，$f_0(x,y), f_1(x,y)$ のみを考えれば十分であり，それらの満たす方程式として，

$$\begin{cases} \dfrac{ab}{\mu}\tau_1(x+a,y)\tau_1(x,y+b) + \tau_0(x+a,y)\tau_0(x,y+b) \\ \qquad\qquad - (1+ab)\tau_0(x+a,y+b)\tau_0(x,y) = 0, \\ ab\mu\,\tau_0(x+a,y)\tau_0(x,y+b) + \tau_1(x+a,y)\tau_1(x,y+b) \\ \qquad\qquad - (1+ab)\tau_1(x+a,y+b)\tau_1(x,y) = 0 \end{cases} \tag{97}$$

が得られる。

練習問題 19. 双線形方程式 (97) に対する 1-ソリトン解，2-ソリトン解を求めよ。3.1 節，3.2 節での Step 1 〜 5 を実行してもよいし，練習問題 18 で求めたもののパラメータに適当な条件をおいてもよい。

ここで，

$$u(x,y) = \frac{\sqrt{\mu}\,\tau_0(x,y)}{\tau_1(x,y)} \tag{98}$$

とおくと，双線形方程式 (97) より，

$$u(x+a,y+b)u(x,y) = \frac{u(x+a,y)u(x,y+b)+ab}{1+ab\,u(x+a,y)u(x,y+b)} \tag{99}$$

なる差分方程式が得られる。さらに，ϕ_y^x を[*10]

$$\exp\left[\frac{\sqrt{-1}}{2}\phi_y^x\right] := u\left(\frac{ax}{2\delta}, \frac{by}{2\delta}\right) \tag{100}$$

[*9] τ 関数をどのように組み合わせるとよいかについて，1 つの指針として “ゲージ不変性” に注目することが多い。これは，$\tau(\ell,m,n) \mapsto \lambda^\ell\mu^m\nu^n\tau(\ell,m,n)$ という置き換えに関して不変である組み合わせを選ぶというものである (ここまでの例 (44), (70) では実際に不変になっている)。さらに，「特異点閉じ込め法」(singularity confinement) と呼ばれる手法を用いることで，ある程度システマティックに探すやり方が提案されている。詳しくは [Kaj3] を参照していただきたい。

[*10] ここでも，“ϕ_x^y” は ”ϕ_x の y 乗” ではなく，$\phi(x,y)$ の略記である。

で定めると，

$$\sin\left(\frac{\phi_{y+\delta}^{x+\delta}+\phi_{y-\delta}^{x-\delta}-\phi_{y-\delta}^{x+\delta}-\phi_{y-\delta}^{x+\delta}}{4}\right)=\delta^2\sin\left(\frac{\phi_{y+\delta}^{x+\delta}+\phi_{y-\delta}^{x-\delta}+\phi_{y-\delta}^{x+\delta}+\phi_{y-\delta}^{x+\delta}}{4}\right) \tag{101}$$

が得られる。これが広田による離散サイン・ゴルドン方程式である (文献 [H4], III)。

練習問題 20. パラメータ δ を微小量としてテーラー展開することで，(広田による) 離散サイン・ゴルドン方程式 (101) からサイン・ゴルドン方程式 (87) を導け。

曲面論との関係からすると，サイン・ゴルドン方程式はガウス曲率が負の一定値をとる曲面の構造方程式として現れる。この視点の離散化として，“discrete K-surface” なる離散曲面のクラスがあり，その設定では (101) とは違う形の “離散サイン・ゴルドン方程式”

$$\frac{U(x,y)U(x+a,y+b)}{U(x+a,y)U(x,y+b)}=\frac{\{1+ab/U(x+a,y)\}\{1+ab/U(x,y+b)\}}{\{1+abU(x+a,y)\}\{1+abU(x,y+b)\}} \tag{102}$$

が提案されている。

練習問題 21. τ 関数 $\tau_0(x,y)$, $\tau_1(x,y)$ が双線形方程式 (97) を満たすとき，

$$U(x,y)=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\tau_1(x+a,y)\tau_1(x,y+b)}{\tau_0(x+a,y)\tau_0(x,y+b)} \tag{103}$$

で定められる $U(x,y)$ は離散サイン・ゴルドン方程式 (102) を満たすことを証明せよ。

方程式 (102) を “離散サイン・ゴルドン方程式” と呼ぶのは，もちろん，適当な連続極限をとることでサイン・ゴルドン方程式が得られるからである。それを見るために，まず $U(x,y)=e^{i\varphi(x,y)}$ $(i=\sqrt{-1})$, $a=b=\delta$ とおいて (102) に代入し，両辺の log をとると，

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi(x+\delta,y+\delta)-\varphi(x+\delta,y)-\varphi(x,y+\delta)+\varphi(x,y)}{\delta^2}\\&=\frac{1}{i}\left[\frac{1}{\delta^2}\log\left\{1+\delta^2e^{-i\varphi(x+\delta,y)}\right\}-\frac{1}{\delta^2}\log\left\{1+\delta^2e^{i\varphi(x+\delta,y)}\right\}\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{\delta^2}\log\left\{1+\delta^2e^{-i\varphi(x,y+\delta)}\right\}-\frac{1}{\delta^2}\log\left\{1+\delta^2e^{i\varphi(x,y+\delta)}\right\}\right]\end{aligned} \tag{104}$$

が得られる。(41) に注意して極限 $\delta\to 0$ をとれば，サイン・ゴルドン方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\varphi(x,y)+4\sin\varphi(x,y)=0 \tag{105}$$

が得られる[*11]。

[*11] 係数が (87) とは異なるが，変数 x,y を適当にスケールすれば合わせることができる。

5 おわりに

本稿では，「厳密解の構造を保つ」という問題意識の下で差分化されたソリトン方程式の例を紹介した。可積分系の差分化に対して，「解が分かっている方程式を差分化してどうする？」という (至極もっともな) 疑問を持つ方も多い。これに対してどう答えるのが適切かは悩ましいところであるが，“離散微分幾何” 等といった形で諸分野とのつながりが見出される点は，1 つの答えとなるであろう。

ソリトン方程式の差分対応物はただ 1 つに決まるものではなく，視点を変えれば結果が変わってくることもある[*12]。ここで紹介した「厳密解の構造を保つ」というアプローチ以外にも，以下のようにさまざまな研究がある。

- Lax 形式の差分化 [AL]
- “Dressing method” の差分化 (2 次元戸田階層を差分化していることと同等) [LPS]
- 線形積分方程式による “direct linearization” [QNCL, NCWQ]
- Poisson 構造に基づく差分化 [FV, Sur]

近年の研究の動向については，[GKT] が参考になるであろう。また，離散可積分系を数値計算アルゴリズムに利用するという研究もある [N1, N2]。

本稿では “超離散化” という話題には触れられなかった。こちらについては，[HT, Mat, To] をご覧いただきたい。近年では，超離散化を通して，離散可積分系と組合せ論との関係も見出されている [Ku, To]。

離散可積分系という分野には「計算してナンボ」という側面があり，文献 [Kaj4] の言葉を借りれば，「徒手空拳の状態からでも形式論から一歩出た結果が得られる」。さらに，可積分系は多くの分野と接点を持つため，それを通して新たな研究の世界に一歩踏み出す絶好の機会を与えてくれる[*13]。本稿を通して離散可積分系に触れた方が，この分野をさらに広げてくれることを望む。

DISDDG2012 の際に有益なコメントをいただいた増田哲さん，清水保弘さん，講演及び執筆の機会を与えていただいた梶原健司さんに，この場をお借りして感謝の意を表したい。

参考文献

[AL] M.J. Ablowitz and J.F. Ladik, Nonlinear differential-difference equations, *J. Math. Phys.* **16** (1975), 598–603; Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis, *ibid.* **17** (1976), 1011–1018.

[BS] A.I. Bobenko and Y.B. Suris, *Discrete Differential Geometry: Integrable Structure*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 98, AMS, 2009.

[DJKM] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Transformation groups for soliton equations, in *Nonlinear. Integrable Systems — Classical Theory and Quantum Theory*, Proceedings of RIMS Symposium, World Scientific, 1983, 39–119.

[DJM] E. Date, M. Jimbo, T. Miwa, Methods for generating discrete soliton equations. I. *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** (1982), 4116–4124; II. *ibid.* **51** (1982), 4125–4131; III. *ibid.* **52** (1983), 388–393; IV. *ibid.* **52** (1983), 761–765; V. *ibid.* **52** (1983), 766–771.

[*12] 面白いことに，異なる問題意識の研究から，同じ差分方程式が得られる場合もある。

[*13] DISDDG2012 の際に中屋敷厚さんからご指摘があった。

[D] A. Doliwa, Geometric discretisation of the Toda system, *Phys. Lett. A* **234** (1997), 187–192.

[FV] L. Faddeev and A. Yu. Volkov, Hirota equation as an example of integrable symplectic map *Lett. Math. Phys.* **32**, (1994), 125–135.

[GKT] B. Grammaticos, Y. Kosmann-Schwarzbach, and T. Tamizhmani (Eds.), *Discrete Integrable Systems*, Lecture Notes in Physics, Springer (2004).

[H1] 広田良吾，差分方程式講義 — 連続より離散へ，サイエンス社 (SGC ライブラリ 8)，2000 年.

[H2] 広田良吾，差分学入門 — 情報化時代の微積分学，培風館 (情報数理シリーズ), 1998 年.

[H3] 広田良吾，直接法による ソリトンの数理，岩波書店，1992 年.

[H4] R. Hirota, Nonlinear partial difference equations, I. A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977), 1424–1433; II. Discrete-time Toda equation, *ibid.* **43** (1977), 2074–2078; III. Discrete sine-Gordon equation, *ibid.* **43** (1977), 2079–2086; IV. Bäcklund transformation for the discrete-time Toda equation, *ibid.* **45** (1978), 321-332; V. Nonlinear equations reducible to linear equations, *ibid.* **46** (1979) 312–319.

[H5] R. Hirota, Discrete analogue of a generalized Toda equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** (1981), 3785–3791.

[H6] R. Hirota, Discretization of the Potential Modified KdV Equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998), 2234–2236.

[HT] 広田良吾・高橋大輔，差分と超離散，共立出版，2003 年.

[J] 神保道夫，複素関数入門，岩波書店 (現代数学への入門)，2003 年.

[JM] M. Jimbo and T. Miwa, Solitons and infinite dimensional Lie algebras, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* **19** (1983), 943–1001.

[Kaj1] 梶原健司，可積分系入門，本レクチャーノート 所収.

[Kaj2] 梶原健司，離散可積分系の基礎，若山正人 編，可視化の技術と現代幾何学 (岩波書店, 2010 年) 所収.

[Kaj3] 梶原健司，離散系における可積分性の判定，[N1] 所収.

[Kaj4] 梶原健司，離散パンルベ方程式,
gandalf.math.kyushu-u.ac.jp/~kaji/painleve/report.pdf

[KOS] K. Kajiwara and J. Satsuma, q-Difference version of the two-dimensional Toda lattice equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** (1991), 3986–3989; K. Kajiwara, Y. Ohta, and J. Satsuma, *q*-discrete Toda molecule equation, *Phys. Lett.* **A180** (1993), 249–256.

[KNW] S. Kakei, J.J.C. Nimmo, and R. Willox, Yang-Baxter maps and the discrete KP hierarchy, *Glasgow Math. J.* **51A** (2009), 107–119; S. Kakei, J.J.C. Nimmo, and R. Willox, Yang-Baxter maps from the discrete BKP equation, *SIGMA (Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications)* **6** (2010), 028, 11 pages.

[Ku] 国場敦夫，ベーテ仮説と組合せ論，朝倉書店 (開かれた数学 5)，2011 年.

[LPS] D. Levi, L. Pilloni and P. M. Santini, Integrable three-dimensional lattices, *J. Phys. A* **14** (1981), 1567–1575.

[Mat] 松木平淳太，超離散可積分系とソリトン・セルオートマトン，[N1] 所収.

[May] R.M. May, Biological populations with nonoverlapping generation: Stable points, stable cycles, and chaos, *Science*, **186** (1974), 645–647; R.M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261** (1976), 459–467.

[Mi] T. Miwa, On Hirota's difference equations, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **58** (1982), 9–12.

[MDJ] 三輪哲二・伊達悦朗・神保道夫，ソリトンの数理，岩波書店，2007 年.

[MNTU] 三輪哲二・野海正俊・高崎金久・上野健爾，数理物理と佐藤幹夫先生，佐藤幹夫の数学 (木村達雄 編，日本評論社，2007 年) 所収.

[Mo] M. Morisita, The fitting of the logistic equation to the rate of increase of population density, *Res. Popul. Ecol.* **VII** (1965), 52–55.

[NK] 永友清和・古閑義之，オイラー・ポワソン・ダルブーの方程式の q-差分化について，京都大学数理解析研究所講究録 **868** (1994), 211–215.

[N1] 中村佳正 編，可積分系の応用数理，裳華房，2000 年.

[N2] 中村佳正，可積分系の機能数理，共立叢書 (現代数学の潮流)，2006 年.

[NCWQ] F.W. Nijhoff, H.W. Capel, G.L. Wiersma and G.R.W. Quispel, Linearizing integral transform and partial difference equations, *Phys. Lett. A* **103** (1984), 293.

[QNCL] G.R.W. Quispel, F.W. Nijhoff, H.W. Capel and J. van der Linden, Linear integral equations and nonlinear difference-difference equations, *Physica A* **125** (1984), 344–380.

[Sa] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *Commun. Math. Phys.* **220** (2001), 165–229.

[SS] M. Sato and Y. Sato, Soliton equations as dynamical system on infinite dimensional Grassmann manifold, Nonlinear PDE in Applied Mathematics (Proc. US-Japan Seminar, Tokyo 1982), P.D. Lax and H. Fujita. editors. North-Holland. 1982.

[Sur] Y.B. Suris, *The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach*, Birkhäuser (2003).

[TM] D. Takahashi, J. Matsukidaira, Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation, *J. Phys.* **A30** (1997) L733–L739.

[Ta] 高崎金久，可積分系の世界 — 戸田格子とその仲間，共立出版，2001 年.

[THYM] 寺本英・広田良吾・武者利光・山口昌哉，無限・カオス・ゆらぎ — 物理と数学のはざまから，培風館，1985 年.

[To] 時弘哲治，箱玉系の数理，朝倉書店 (開かれた数学 3)，2010 年.

[Ts] 辻本諭，可積分系の離散化について，[N1] 所収.

[USS] 上野健爾・志賀浩二・砂田利一 編，「フォーラム：現代数学の風景 q 解析学のルネサンス」，数学のたのしみ，no. 2, 日本評論社，1997 年

[YU] M. Yamaguti and S. Ushiki, Chaos in numerical analysis of ordinary differential equations, *Physica D* **3** (1981), 618–626; S. Ushiki, Central difference scheme and chaos, *ibid.* **4** (1982), 407–424.