九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

[040] 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012

井ノ口, 順一
山形大学理学部

太田, 泰広
神戸大学大学院理学研究科

筧, 三郎
立教大学理学部数学科

梶原, 健司
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

他

https://hdl.handle.net/2324/25116

出版情報：COE Lecture Note. 40, 2012-03-15. 九州大学大学院数理学研究院
バージョン：
権利関係：

可積分系の理論入門
— 2 次元戸田格子を中心にして —

梶原 健司　　九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

1　戸田格子から始まる可積分系の第 1 歩

主な内容とキーワード

(1)（1 次元）戸田格子とその性質
(2) 完全積分可能系
(3) Lax 形式: 線形方程式系の両立条件
(4) Bäcklund 変換: 解から別の解への変換
(5) 広田の方法：厳密解を具体的に作る
(6) ソリトン解

1.1　戸田格子

次のような非線形微分差分方程式を戸田格子方程式と呼ぶ．

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n - q_{n+1}} \tag{1.1}$$

この方程式は次のような非線形相互作用をするバネでつながれた 1 次元のバネ・質点系を記述する方程式である．質点の質量を m とし，q_n を n 番目の質点の平衡点からの（右方向を正とする）変位，相対変位 (バネの伸び) を $r_n = q_n - q_{n-1}$ とする．伸びが r であるバネのポテンシャルエネルギーを $\phi(r)$ とするとき，力は $-\phi'(r)$ で与えられる．

図 1　1 次元の格子と戸田ポテンシャル

以上のことから，n 番目の質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\phi'(r_n) + \phi'(r_{n+1}), \tag{1.2}$$

となる．ここで，右辺第 1 項は質点の左側のバネからかかる力，第 2 項は右のバネからかかる力である．例えば Hooke の法則に従うバネであれば $\phi(r) = \frac{1}{2}\kappa r^2$ ($\kappa > 0$ はバネ定数) で与えられるから，(1.2) は

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\kappa(q_n - q_{n-1}) + \kappa(q_{n+1} - q_n) = \kappa(q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n), \tag{1.3}$$

となる．ここで，戸田ポテンシャルと呼ばれる，次のようなポテンシャルを考える．

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar \quad a, b > 0 \tag{1.4}$$

戸田ポテンシャルで特徴づけられるバネでつながった，一様な 1 次元バネ・質点系を戸田格子，運動方程式を戸田格子方程式といい，実際，(1.2) は

$$m\frac{d^2q_n}{dt^2} = a\left[e^{-b(q_n-q_{n-1})} - e^{-b(q_{n+1}-q_n)}\right]. \tag{1.5}$$

となり，m と a,b は適当なスケール変換で 1 と規格化できて（問を参照）(1.1) を与える．

問 1.1　(1)　戸田ポテンシャルによる力が $r \sim 0$ のときに Hooke の法則による力で近似できることを示せ．また，$r \gg 1$ のとき，戸田ポテンシャルはどのような力を与えるか．

(2)　α, β を定数として $t = \alpha s$, $q_n = \beta u_n$ とおき，α と β をうまく選んで (1.5) から s と u_n に関する戸田格子方程式 (1.1) を導け．

戸田格子方程式にはいろいろな表示がある．例えば

$$\frac{d^2R_n}{dt^2} = e^{R_{n+1}} + e^{R_{n-1}} - 2e^{R_n}, \tag{1.6}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1+V_n) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\log(1+V_n) = I_n - I_{n+1}, \\ \dfrac{dI_n}{dt} = V_{n-1} - V_n, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{da_n}{dt} = a_n(b_n - b_{n+1}), \\ \dfrac{db_n}{dt} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2), \end{cases} \tag{1.9}$$

などである．ここで，各従属変数は

$$R_n = q_n - q_{n+1}, \quad 1 + V_n = e^{R_n}, \quad I_n = \frac{dq_n}{dt}, \quad a_n = \frac{1}{2}e^{\frac{q_n - q_{n+1}}{2}}, \quad b_n = \frac{1}{2}\frac{dq_n}{dt}, \tag{1.10}$$

で与えられる．特に (1.7), (1.8) は LC 梯子回路を記述する方程式と見なすこともでき，これをもとにして戸田格子を電気回路で実現する実験がなされた[*1]．

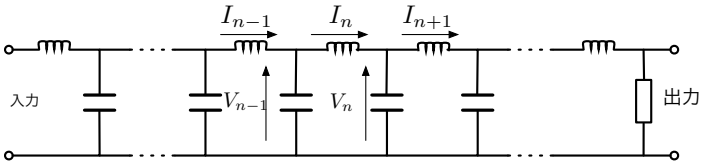

図 2　戸田格子と等価な梯子回路

1.2　戸田格子の性質

本節では戸田格子のいくつかの性質について議論する．

(1) 戸田格子は通常の古典力学で取り扱える力学系である．特に，Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m}\sum_n p_n^2 + \frac{a}{b}\sum_n e^{-b(q_n-q_{n-1})}, \tag{1.11}$$

[*1] Ryogo Hirota and Kimio Suzuki, “Studies on Lattice Solitons by Using Electrical Circuit”, J. Phys. Soc. Jpn. 28(1970) 1366-1367

をもつ Hamilton 系である．実際，正準方程式

$$\frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \tag{1.12}$$

は (1.5) を与える．

(2) N 個の質点からなる有限系（周期系など）の場合，Poisson 括弧について可換な保存量が保存量が N 個ある．すなわち，Liouville-Arnold の定理が適用される完全積分可能系であり，求積法で初期値問題が解ける．[*2]

参考： **Liouville-Arnold の定理**[10]
自由度 N の Hamilton 系が Poisson 括弧に関して可換な保存量を N 個もつならば，その力学系の初期値問題は有限回の求積操作，すなわち (i) 四則演算，(ii) 微分積分 (iii) 逆函数をとる操作，(iv) 微分積分を含まない方程式を解く操作，の有限回の繰り返しで解ける．

(3) 線形作用素の固有値問題の固有値保存変形として定式化できる (Lax 形式)．(1.8) を周期境界条件すなわち，$n = 1, \ldots, N$, $I_{N+1} = I_1$, $V_{N+1} = V_1$ という条件の下で考える．このとき，次の固有値問題を考える．

$$L\Psi = \lambda\Psi, \quad L = \begin{pmatrix} I_1 & 1 & & & & 1+V_N \\ 1+V_1 & I_2 & 1 & & & \\ & 1+V_2 & I_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1+V_{N-2} & I_{N-1} & 1 & \\ 1 & & & 1+V_{N-1} & I_N & \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

I_n, V_n は t の函数であるから，固有値 λ, 固有函数 Ψ は一般に t の函数である．また，Ψ の時間発展を

$$\frac{d\Psi}{dt} = B\Psi, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 1+V_N \\ 1+V_1 & 0 & & & & \\ & 1+V_2 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & 1+V_{N-2} & 0 & & \\ & & & 1+V_{N-1} & 0 & \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

で定めることにする．ここで，特に固有値 λ が t に依存しないという条件の下で，(1.13), (1.14) の両立条件を考える（L を作用させてから t で微分したものと微分してから L を作用させたものは等しくなるべき）と Lax 方程式

$$\frac{dL}{dt} = BL - LB, \tag{1.15}$$

が成り立たなければならないことがわかる．(1.15) を成分毎に書き下すと，(1.8) が得られる．

Lax 形式の一つのご利益として，戸田格子の保存量が明示的に計算できるということがある．

命題 1.1　$\mathrm{Tr}\, L^k$ $(k = 1, \ldots, N)$ は保存量である[*3]．すなわち，

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\, L^k = 0, \quad k = 1, \ldots, N.$$

[*2] なお，完全積分可能系の例としては，万有引力にしたがって運動する 2 体問題 (Kepler 問題)，Lagrange のコマ，Euler のコマ，Kowalevskaya のコマなどが知られていた．Kowalevskaya のコマの論文は 1889 年に出版されており，次の例である戸田格子の発見 (1967) まで 70 年近くの歳月が必要であった．数学の進歩には時間がかかる！

[*3] バネ・質点系の変数 q_n で書き直すと，$\mathrm{Tr}\, L \propto$ 運動量, $\mathrm{Tr}\, L^2 \propto$ 全エネルギー

証明： まず，$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対して $\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{N} a_{ii}$，　$\mathrm{Tr}\, AB = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} b_{ki}a_{ik} = \mathrm{Tr}\, BA$ が成り立つ．また A, B の要素が t の函数であるとき

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\, AB = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(a'_{ik}b_{ki} + a_{ik}b'_{ki}\right) = \mathrm{Tr}\left(\frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}\right),$$

である．$\mathrm{Tr}\, L^k$ の微分は，$L' = BL - LB$ であることに注意して上の事実を用いると次のように計算できる．

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\, L^k = \mathrm{Tr}\left(L'L^{k-1} + LL'L^{k-2} + \cdots + L^{k-1}L'\right) = \mathrm{Tr}\left[(BL - LB)L^{k-1} + L(BL - LB)L^{k-2} + \cdots + L^{k-1}(BL - LB)\right]$$
$$= \mathrm{Tr}\left[(BL^k - LBL^{k-1}) + (LBL^{k-1} - LBL^{k-2}) + \cdots + (L^{k-1}BL - L^kB)\right] = \mathrm{Tr}\left(BL^k - L^kB\right) = 0. \qquad \square$$

(4) Bäcklund 変換．天下りだが，λ, α をパラメータとして，t の函数 $q_n, \overline{q}_n$ についての以下の関係式を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dq_n}{dt} = \lambda e^{q_n - \overline{q}_n} + \dfrac{1}{\lambda}e^{\overline{q}_{n-1} - q_n} + \alpha, \\ \dfrac{d\overline{q}_n}{dt} = \lambda e^{q_n - \overline{q}_n} + \dfrac{1}{\lambda}e^{\overline{q}_n - q_{n+1}} + \alpha, \end{cases} \tag{1.16}$$

二つの式から $\overline{q}_n$ を消去すると q_n に関して戸田格子方程式 (1.1) が，同様に q_n を消去すると $\overline{q}_n$ に関して (1.1) が得られることが簡単な計算で確かめられる．

問 1.2　このことを確かめよ．

すなわち，戸田格子方程式 (1.1) の解 $q_n(\overline{q}_n)$ が与えられれば，(1.16) を解けば別の解 $\overline{q}_n(q_n)$ が得られる．(1.16) を（戸田格子方程式の）**Bäcklund** 変換という．

例 1.1　$q_n = 0, \lambda = e^{-\kappa}, \alpha = -(e^{\kappa} + e^{-\kappa})$ とするとき，(1.16) は $e^{\overline{q}_n} = X_n$ とおくと

$$\begin{cases} X_n = -\dfrac{e^{-\kappa}}{e^{\kappa}X_{n-1} - (e^{\kappa} + e^{-\kappa})}, \\ X'_n = e^{\kappa}X_n^2 - (e^{\kappa} + e^{-\kappa})X_n + e^{-\kappa}, \end{cases} \tag{1.17}$$

(1.17) 第 2 式は Riccati 方程式であり，標準的な方法，すなわち従属変数の変換で定数係数 2 階線形方程式に帰着させることで一般解を求めることができる．解の任意定数を n の函数と仮定して第 1 式に代入すれば，n 依存性を決定することができ，その結果戸田格子方程式 (1.1) の新しい解

$$X_n = e^{\overline{q}_n} = \frac{1 + e^{2\kappa(n-1)+2\beta t}}{1 + e^{2\kappa n + 2\beta t}}, \quad \beta = \sinh\kappa = \frac{e^{\kappa} - e^{-\kappa}}{2}, \tag{1.18}$$

を得ることができる．この方法で解を具体的に作っていくことは簡単ではないが，Bäcklund 変換の存在は戸田格子の背後の豊富な数理構造を示唆している．なお，Bäcklund 変換は解析力学における正準変換として定式化することも可能であることを注意しておく [14].

問 1.3　(1.17) を実際に解いて (1.18) を導出せよ．

1.3　戸田格子方程式のソリトン解を作る：広田の方法

戸田格子方程式の解 (1.18) の形を見ると，分子は分母の n を $n-1$ で置き換えたものになっている．そこで，

$$e^{q_n} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \quad \text{または} \quad q_n = \log\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \tag{1.19}$$

とおいて，τ_n を従属変数として戸田格子方程式を書き直してみよう．(1.19) を (1.1) に代入して少し整理すると

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\tau_{n-1} - \frac{\tau_{n-2}\tau_n}{\tau_{n-1}^2} = \frac{d^2}{dt^2}\log\tau_n - \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2}, \tag{1.20}$$

が得られる．n をシフトした量の間の等式であるから，両辺は n に依存しないはずである．そこで両辺を $f(t)$ とおいて分母をはらうと τ_n とその微分に関する 2 次の方程式

$$\tau_n''\tau_n - (\tau_n')^2 = \tau_{n-1}\tau_{n+1} - f(t)\,\tau_n^2, \tag{1.21}$$

を得る．ここで，今後の議論において鍵となる微分演算子を導入する．二つの函数 $f(x,t)$, $g(x,t)$ を引数に取り一つの函数を与える，広田微分もしくは D-operator と呼ばれる微分演算子 $D_x^m D_t^n\, f\cdot g$ を以下で定義する．

$$D_x^m D_t^n f\cdot g = (\partial_x - \partial_{x'})^m\,(\partial_t - \partial_{t'})^n\, f(x,t)g(x',t')\Big|_{x=x',t=t'}. \tag{1.22}$$

例えば，

$$D_x f\cdot g = f_x g - f g_x,\quad D_x^2 f\cdot g = f_{xx}g - 2f_x g_x + f g_{xx},\quad D_x D_t f\cdot g = f_{xt}g - f_x g_t - f_t g_x + f g_{xt}, \tag{1.23}$$

などである．(1.22) の定義において，$-$ を $+$ に置き換えれば，Leibnitz 則にほかならない．また，広田微分は独立変数の数が増えても同様に定義できることを注意しておく．広田微分を用いると，(1.21) は

$$\frac{1}{2}D_t^2\,\tau_n\cdot\tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - f(t)\,\tau_n^2, \tag{1.24}$$

と表される．(1.21), (1.24) を戸田格子方程式の双線形方程式 (bilinear equation) もしくは双線形形式 (bilinear form) と呼ぶ．広田微分の基本的な性質として，以下の 4 点を定義から簡単に確かめることができる．

命題 1.2　(広田微分の性質)

(1)　双線形性：$D_x^m D_t^n\,(af+bg)\cdot h = aD_x^m D_t^n\, f\cdot h + bD_x^m D_t^n\, g\cdot h$　(a, b: 定数．第 2 の引数についても同様)
(2)　交換則：$D_x^m D_t^n\, f\cdot g = (-1)^{m+n} D_x^m D_t^n\, g\cdot f$
(3)　$D_x^m D_t^n\, f\cdot 1 = \partial_x^m \partial_t^n\, f$
(4)　指数函数の計算則：$D_x^m D_t^n\, e^{p_1x+q_1t}\cdot e^{p_2x+q_2t} = (p_1-p_2)^m(q_1-q_2)^n\, e^{(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)t}$

問 1.4　命題 1.2 を広田微分の定義より確認せよ．

さて，双線形方程式 (1.24) から，摂動法のテクニックを用いた初等的な計算によって，戸田格子方程式の「ソリトン解」と呼ばれる厳密解を組織的に作っていくことができる．この方法は広田の方法[3] と呼ばれている．また，双線形方程式の従属変数は τ 函数と呼ばれ，可積分系の理論でもっとも基本的なオブジェクトの一つである[*4]．

広田の方法によるソリトン解の構成の手順

(1) 戸田格子方程式 (1.1) において $q_n = 0$ は解．対応して，$\tau_n = 1$ は解である (任意函数 $f(t)$ は $f(t) = 1$ と選ぶ).
(2) $\tau_n = 1$ から摂動法で解を作っていく．すなわち，ϵ を（形式的）微小パラメータとして展開

$$\tau_n = 1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)} + \cdots, \tag{1.25}$$

を仮定し，双線形方程式 (1.24) に代入して ϵ のベキで整理する．各係数から得られる方程式を下の方から順番に解き，適当なところで無理矢理打ち切って近似解とする[*5]．

[*4] 楕円函数，より一般にアーベル函数の理論におけるテータ函数に相当する函数である．
[*5] 実は有限項で切ることができ，その結果厳密解が得られるという奇跡が起こることが後でわかる．

さて，(1.25) を (1.24) に代入し，命題 1.2 に注意すると，ϵ のベキの係数から以下のような方程式が得られる．

$$O(\epsilon):\quad f_n^{(1)\prime\prime} = f_{n+1}^{(1)} + f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)}, \tag{1.26}$$

$$O(\epsilon^2):\quad f_n^{(2)\prime\prime} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_t^2\, f_n^{(1)}\cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)}f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2}, \tag{1.27}$$

$$O(\epsilon^3):\quad f_n^{(3)\prime\prime} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2f_n^{(3)} = -D_t^2\, f_n^{(1)}\cdot f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(1)}f_{n-1}^{(2)} + f_{n+1}^{(2)}f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)}f_n^{(2)}. \tag{1.28}$$

これらの方程式を下から順に解いていく．まず，$f_n^{(1)}$ として指数函数

$$f_n^{(1)} = e^{\eta_1},\quad \eta_1 = p_1 n + q_1 t + \eta_{10},\quad p_1, q_1, \eta_{10}:\ \text{パラメータ} \tag{1.29}$$

を仮定する．(1.26) より

$$q_1^2 = e^{p_1} + e^{-p_1} - 2 = (e^{\frac{p_1}{2}} - e^{-\frac{p_1}{2}})^2 \ \to\ q_1 = \pm 2\sinh\frac{p_1}{2}.$$

が得られる．(1.27) の右辺を計算すると，

$$-\frac{1}{2}D_t^2\, f_n^{(1)}\cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)}f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2} = -\frac{1}{2}D_t^2\, e^{\eta_1}\cdot e^{\eta_1} + e^{p_1}e^{\eta_1}\cdot e^{-p_1}e^{\eta_1} - e^{2\eta_1} = 0,$$

となることがわかる．特に第 1 項は命題 1.2 の (4) より 0 となることに注意．したがって (1.27) は

$$f_n^{(2)\prime\prime} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = 0,$$

という線形方程式となり，これを満たす函数として $f_n^{(2)} = 0$ を選ぶことができる．同様に，$f_n^{(k)} = 0\ (k = 3, 4, \ldots)$ と選ぶことができることが示される[*6]．以上より，摂動展開 (1.25) が 2 項で切れて，

$$\tau_n = 1 + e^{\eta_1},\quad \eta_1 = p_1 n \pm 2\sinh\frac{p_1}{2}t + \eta_{10},\quad p_1, \eta_{10}:\ \text{パラメータ} \tag{1.30}$$

が双線形方程式 (1.24) の厳密解であることがわかった．(1.30) は従属変数変換 (1.19) によって (1.18) と本質的に同じ解を与える．この解を **1-** ソリトン解と呼ぶ．

さて，もう少し複雑な解を作ろう．(1.26) は $f_n^{(1)}$ について線形であるから，解の重ね合わせが可能である．そこで $f_n^{(1)}$ として指数函数の 2 項の和を選ぼう．

$$f_n^{(1)} = e^{\eta_1} + e^{\eta_2},\quad \eta_i = p_i n + q_i t + \eta_{i0},\quad (i = 1, 2). \tag{1.31}$$

上と同様に，(1.26) より

$$q_i = \pm 2\sinh\frac{p_i}{2},\ (i = 1, 2), \tag{1.32}$$

となり，(1.27) に代入して命題 1.2 に注意しながら整理すると

$$\begin{aligned}
&f_n^{(2)\prime\prime} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_t^2\, f_n^{(1)}\cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)}f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2}\\
&= -\frac{1}{2}D_t^2\,(e^{\eta_1} + e^{\eta_2})\cdot(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) + \left(e^{\eta_1+p_1} + e^{\eta_2+p_2}\right)\left(e^{\eta_1-p_1} + e^{\eta_2-p_2}\right) - (e^{\eta_1} + e^{\eta_2})^2\\
&= -D_t^2\, e^{\eta_1}\cdot e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2+p_1-p_2} + e^{\eta_1+\eta_2-p_1+p_2} - 2e^{\eta_1+\eta_2}\\
&= -(q_1 - q_2)^2 e^{\eta_1+\eta_2} + \left(e^{\frac{p_1-p_2}{2}} - e^{-\frac{p_1-p_2}{2}}\right)^2 e^{\eta_1+\eta_2} = -\left(e^{\frac{p_1}{2}} - e^{-\frac{p_1}{2}}\right)\left(e^{\frac{p_2}{2}} - e^{-\frac{p_2}{2}}\right)\left(e^{\frac{p_1-p_2}{4}} - e^{-\frac{p_1-p_2}{4}}\right)^2 e^{\eta_1+\eta_2}.
\end{aligned}$$

右辺が指数函数の定数倍であることに注意して，$f_n^{(2)} = A_{12}e^{\eta_1+\eta_2}$ (A_{12}: 定数) とおくと，左辺は

$$A_{12}(q_1 + q_2)^2 e^{\eta_1+\eta_2} - A_{12}\left(e^{\frac{p_1+p_2}{2}} - e^{-\frac{p_1+p_2}{2}}\right)^2 e^{\eta_1+\eta_2} = -A_{12}\left(e^{\frac{p_1}{2}} - e^{-\frac{p_1}{2}}\right)\left(e^{\frac{p_2}{2}} - e^{-\frac{p_2}{2}}\right)\left(e^{\frac{p_1+p_2}{4}} - e^{-\frac{p_1+p_2}{4}}\right)^2 e^{\eta_1+\eta_2},$$

[*6] 厳密には帰納法などを用いて示す必要があるが，ここでは省略する．

となるから，

$$A_{12} = \left(\frac{e^{\frac{p_1-p_2}{4}} - e^{-\frac{p_1-p_2}{4}}}{e^{\frac{p_1+p_2}{4}} - e^{-\frac{p_1+p_2}{4}}} \right)^2 = \left(\frac{\sinh \frac{p_1-p_2}{4}}{\sinh \frac{p_1+p_2}{4}} \right)^2, \tag{1.33}$$

が得られる．さらに (1.28) の右辺を計算すると

$$\begin{aligned} &-D_t^2\ f_n^{(1)} \cdot f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(2)} + f_{n+1}^{(2)} f_{n-1}^{(1)} - 2 f_n^{(1)} f_n^{(2)} \\ &= -D_t^2\ (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \cdot A_{12} e^{\eta_1+\eta_2} + (e^{\eta_1+p_1} + e^{\eta_2+p_2})\ A_{12} e^{\eta_1+\eta_2-p_1-p_2} + (e^{\eta_1-p_1} + e^{\eta_2-p_2})\ A_{12} e^{\eta_1+\eta_2+p_1+p_2} \\ &\qquad -2\,(e^{\eta_1} + e^{\eta_2})\ A_{12} e^{\eta_1+\eta_2}. \end{aligned}$$

ここで右辺第 1 項をさらに計算すると命題 1.2 (4) に注意して

$$\begin{aligned} D_t^2\ (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \cdot e^{\eta_1+\eta_2} &= D_t^2\ e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_1+\eta_2} + D_t^2\ e^{\eta_2} \cdot e^{\eta_1+\eta_2} = [q_1 - (q_1+q_2)]^2\, e^{2\eta_1+\eta_2} + [q_2 - (q_1+q_2)]^2\, e^{\eta_1+2\eta_2} \\ &= q_2^2\, e^{2\eta_1+\eta_2} + q_1^2\, e^{\eta_1+2\eta_2}, \end{aligned}$$

であるから，(1.28) の右辺は

$$A_{12} \left[-q_2^2\, e^{2\eta_1+\eta_2} - q_1^2\, e^{\eta_1+2\eta_2} + \left(e^{\frac{p_2}{2}} - e^{-\frac{p_2}{2}} \right)^2\ e^{2\eta_1+\eta_2} + \left(e^{\frac{p_1}{2}} - e^{-\frac{p_1}{2}} \right)^2\ e^{\eta_1+2\eta_2} \right] = 0,$$

となってしまう．したがって，(1.28) は

$$f_n^{(3)\prime\prime} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2 f_n^{(3)} = 0,$$

となって，やはり $f_n^{(3)} = 0$ と選ぶことができる．同様に，$f_n^{(k)} = 0\ (k = 4, 5, \ldots)$ と選べることが示される．以上のことから，

$$\tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12} e^{\eta_1+\eta_2}, \quad \eta_i = p_i n + q_i t + \eta_{i0}, \quad q_i = \pm 2 \sinh \frac{p_i}{2},\ (i = 1, 2), \quad A_{12} = \left(\frac{\sinh \frac{p_1-p_2}{4}}{\sinh \frac{p_1+p_2}{4}} \right)^2, \tag{1.34}$$

が双線形方程式 (1.24) の厳密解であることがわかった．この解は **2-ソリトン解**と呼ばれる．以上のようにして，一般に $f_n^{(1)}$ を指数函数の N 個の和に取ることによって，摂動展開が N 項で切れて N-ソリトン解と呼ばれる厳密解が得られる．

■なぜ 2 ーソリトン解は「2 ーソリトン」か？

ソリトンとは，粒子性をもつ孤立波，すなわち，安定に伝播する孤立波であって，二つの波が衝突しても個性（速度，振幅）が相互作用の前後で保たれるような波である．ここでは，2-ソリトン解 (1.34) が実際に二つのソリトンの相互作用を記述していることを，簡単な漸近解析で直観的に見ることにする．さて，まず (1.30) から作られる 1-ソリトン解

$$q_n = \log \frac{1 + e^{-p_1} e^{\eta_1}}{1 + e^{\eta_1}}, \quad \eta_1 = p_1 n + q_1 t, \quad q_1 = -2 \sinh \frac{p_1}{2}, \tag{1.35}$$

はどのような現象を記述する解だろうか．ここで, 簡単のために q_1 の複号は $-$ に取り, $\eta_{10} = 0$ とした．$\eta_1 = p_1(n - v_1 t)$, $v_1 = \frac{2}{p_1} \sinh \frac{p_1}{2}$ であるから，これは右方向に速度 v_1 で伝播する波を表す．$p_1 > 0$ と仮定し，t を固定して波の形を調べると $n \to -\infty$ で $\eta_1 \to -\infty$ であるから $q_n \sim \log 1 = 0$，$n \to \infty$ で $\eta_1 \to \infty$ であるから $q_n \sim \log e^{-p_1} = -p_1$ である．したがって，q_n は高さ p_1 で速度 v_1 で右方向に移動する衝撃波を記述していることがわかる (図 3)．これを踏まえて，2-ソリトン解 (1.34) の挙動を考察する．$p_1 > p_2 > 0$ と仮定しよう．すると，$\eta_i = p_i(n - v_i t)$, $v_i = \frac{2}{p_i} \sinh \frac{p_i}{2}$ とするとき，v_i が p_i の単調増加函数だということに注意すると，$v_1 > v_2 > 0$ である．

(1) 速度 v_1 の波に乗って眺める．すなわち，$\eta_1 = p_1(n - v_1 t) = p_1 \xi_1$，$\xi_1 =$ 一定 とする．

$$\eta_2 = p_2(n - v_2 t) = p_2(n - v_1 t) + p_2(v_1 - v_2) t = p_2 \xi_1 + p_2(v_1 - v_2) t,$$

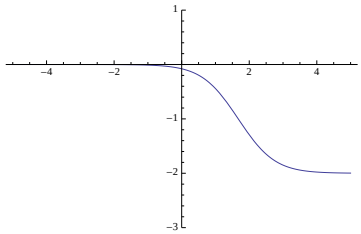

図 3　戸田格子方程式の 1-ソリトン解.

であるから，

$$\tau_n = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2} = 1 + e^{p_1\xi_1} + e^{p_2\xi_1+p_2(v_1-v_2)t} + A_{12}e^{(p_1+p_2)\xi_1+p_2(v_1-v_2)t},$$

となる．$v_1 - v_2 > 0$ に注意して $t \to \pm\infty$ での漸近挙動を考えると

$$t \to \infty: \quad \tau_n \sim 1 + e^{p_1\xi_1} = 1 + e^{\eta_1}$$

$$t \to +\infty: \quad \tau_n \sim e^{p_2\xi_1+p_2(v_1-v_2)t} + A_{12}e^{(p_1+p_2)\xi_1+p_2(v_1-v_2)t} = e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2} = e^{\eta_2}\,(1 + A_{12}e^{\eta_1}) \fallingdotseq 1 + A_{12}e^{\eta_1},$$

となる[*7] すなわち $t \sim \pm\infty$ で速度 v_1 で走る波が見えており振幅，速度は変わらない．ただし位相が $\log A_{12}$ ずれた．
(2) 速度 v_2 の波に乗って眺める．すなわち，$\eta_2 = p_2(n - v_2t) = p_2\xi_2$，　$\xi_2 =$ 一定.

$$\eta_1 = p_1(n - v_1t) = p_1(n - v_2t) + p_1(v_2 - v_1)t = p_1\xi_2 + p_1(v_2 - v_1)t,$$

であるから，

$$\tau_n = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2} = 1 + e^{p_1\xi_2+p_1(v_2-v_1)t} + e^{p_2\xi_2} + A_{12}e^{(p_1+p_2)\xi_2+p_1(v_2-v_1)t},$$

となる．これより

$$t \to -\infty: \quad \tau_2 \sim e^{p_1\xi_2+p_1(v_2-v_1)t} + A_{12}e^{(p_1+p_2)\xi_2+p_1(v_2-v_1)t} = e^{\eta_1} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2} = e^{\eta_1}\,(1 + A_{12}e^{\eta_2}) \fallingdotseq 1 + A_{12}e^{\eta_2},$$

$$t \to +\infty: \quad \tau_2 \sim 1 + e^{p_2\xi_2} = 1 + e^{\eta_2},$$

となる．すなわち $t \sim \pm\infty$ で速度 v_2 で走る波が見えており振幅と速度は変わらない．ただし位相が $-\log A_{12}$ ずれた．

以上のことから，(1.34) は速度 v_1 で走る波と速度 v_2 で走る波の相互作用を記述しており，相互作用をしても波の速度・振幅は変化しない．また非線形相互作用の証拠として，位相のずれが起こることがわかる．以上のように，この解は粒子性をもつ二つの孤立波すなわちソリトンの相互作用を記述している．図 4 は，$r_n = q_n - q_{n-1}$ に関して 2 − ソリトン解を描いたグラフで，横軸が n，縦軸が t である．振幅の小さな遅い波が，振幅の大きい速い波に追い越されている．また，相互作用の前後で速度・振幅の変化はないが，遅い波が左にずれ，速い波が右にずれていることが見て取れるであろう．

2　2 次元戸田格子で学ぶ可積分系の数理

2.1　2 次元戸田格子方程式とその性質

主な内容とキーワード

[*7] ここで $\fallingdotseq$ は両辺が自明な乗法因子を除いて等価ということを意味する記号である．τ_n が (1.24) を満たすとき，$e^{Pn+Qt}\tau_n$ も (1.24) を満たすことは直接計算で確認できる．$q_n = \log\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}$ のレベルでは $\log\frac{e^{P(n-1)+Qt}\tau_{n-1}}{e^{Pn+Qt}\tau_n} = q_n - P$ であるから全体が定数だけずれるが，τ_n と $e^{Pn+Qt}\tau_n$ は本質的に同じ解を与えると考えてよいだろう．そのような意味で $\tau_n \fallingdotseq e^{Pn+Qt}\tau_n$ という記号を用いる．

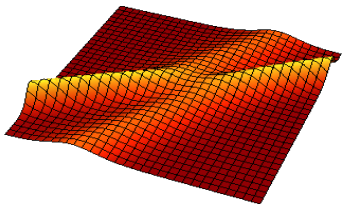

図 4　戸田格子方程式の $R_n = q_n - q_{n+1}$ で見た 2-ソリトン解.

(1) 広田の方法でソリトン解を作る
(2) ソリトン解の行列式構造: τ 函数
(3) 双線形方程式 = 行列式の恒等式： Plücker 関係式
(4) 分子解

2.1.1　2 次元戸田格子方程式とソリトン解

2 次元戸田格子方程式とは次式で与えられる方程式である.

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x \partial y} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n - q_{n+1}}. \tag{2.1}$$

戸田格子方程式 (1.1) と比べると，左辺の時間に関する 2 階微分が $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ に置き換えられている．戸田格子と同様に，(2.1) にはいくつか等価な表示がある.

$$\frac{\partial^2 r_n}{\partial x \partial y} = e^{r_{n+1}} + e^{r_{n-1}} - 2e^{r_n}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(1 + V_n) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \log(1 + V_n) = I_n - I_{n+1}, \quad \frac{\partial I_n}{\partial y} = V_{n-1} - V_n. \tag{2.4}$$

双線形方程式は $f(x, y)$ を任意函数として

$$\frac{1}{2} D_x D_y \, \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - f(x, y)\, \tau_n^2, \tag{2.5}$$

で与えられ，従属変数の間の関係は

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \quad r_n = q_n - q_{n+1} = \log(1 + V_n) = \log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}, \quad I_n = \frac{\partial q_n}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \tag{2.6}$$

である．2 次元戸田格子方程式 (2.1) から戸田格子方程式 (1.1) を得るには，$t = x + y$, $s = x - y$ として，条件 $\frac{\partial q_n}{\partial s} = 0$ を課せばよい．実際，次のようにして導出される.

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x \partial y} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n - q_{n+1}} \;\rightarrow\; \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) q_n = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n - q_{n+1}} \;\rightarrow\; \frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n - q_{n+1}}.$$

さて，2 次元戸田格子方程式 (2.1) に対して広田の方法を用いてソリトン解を構成しよう．$q_n = 0$ に対応して $\tau_n = 1$ が双線形方程式 (2.5) の解となるように $f(x, y) = 1$ とし，

$$\frac{1}{2} D_x D_y \, \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2, \tag{2.7}$$

τ_n に対して摂動展開

$$\tau_n = 1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)} + \cdots, \tag{2.8}$$

を仮定し，下の方から解いてゆく．ϵ の各ベキの係数から得られる方程式は

$$\begin{aligned}
O(\epsilon):&\quad \partial_x\partial_y f_n^{(1)} = f_{n+1}^{(1)} + f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)},\\
O(\epsilon^2):&\quad \partial_x\partial_y f_n^{(2)} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_xD_y\, f_n^{(1)}\cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)}f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2},\\
O(\epsilon^3):&\quad \partial_x\partial_y f_n^{(3)} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2f_n^{(3)} = -D_xD_y\, f_n^{(1)}\cdot f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(1)}f_{n-1}^{(2)} + f_{n+1}^{(2)}f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)}f_n^{(2)},
\end{aligned}$$

である．少々つらいかも知れないが，以下の計算に是非チャレンジしていただきたい．

問 2.1　(1)　$f_n^{(1)} = R_1^{2n}e^{P_1x+Q_1y} = e^{\zeta_1}$，　$\zeta_1 = 2n\log R_1 + P_1x + Q_1y + \zeta_{10}$ ($P_1, Q_1, R_1, \zeta_{10}$ はパラメータ) とおき，1-ソリトン解が次式で与えられることを確かめよ．

$$\tau_n = 1 + R_1^{2n}e^{P_1x+Q_1y}, \quad P_1Q_1 = \left(R_1 - \frac{1}{R_1}\right)^2. \tag{2.9}$$

(2)　$f_n^{(1)} = e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}$，　$\zeta_i = 2n\log R_i + P_ix + Q_iy + \zeta_{i0}$ $(i = 1, 2)$ とおき，2-ソリトン解が次式で与えられることを確かめよ．

$$\begin{aligned}
&\tau_n = 1 + e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2} + A_{12}e^{\zeta_1+\zeta_2},\\
&P_iQ_i = \left(R_i - \frac{1}{R_i}\right)^2 \ (i = 1, 2), \quad A_{12} = -\frac{\left[(P_1 - P_2)(Q_1 - Q_2) - \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1}\right)^2\right]}{\left[(P_1 + P_2)(Q_1 + Q_2) - \left(R_1R_2 - \frac{1}{R_1R_2}\right)^2\right]}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

なお，参考のために 3-ソリトン解を記しておく．

$$\tau_n = 1 + e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2} + e^{\zeta_3} + A_{12}e^{\zeta_1+\zeta_2}, +A_{23}e^{\zeta_2+\zeta_3} + A_{13}e^{\zeta_1+\zeta_3} + A_{123}e^{\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3}, \tag{2.11}$$

$$\zeta_i = 2n\log R_i + P_ix + Q_iy + \zeta_{i0}, \quad P_iQ_i = \left(R_i - \frac{1}{R_i}\right)^2, \tag{2.12}$$

$$A_{ij} = -\frac{\left[(P_i - P_j)(Q_i - Q_j) - \left(\frac{R_i}{R_j} - \frac{R_j}{R_i}\right)^2\right]}{\left[(P_i + P_j)(Q_i + Q_j) - \left(R_iR_j - \frac{1}{R_iR_j}\right)^2\right]}, \quad A_{123} = A_{12}A_{23}A_{13}. \tag{2.13}$$

3-ソリトン解，特に A_{123} の形から，ソリトンの相互作用は 2 体相互作用のみで記述されることがわかる．

2.1.2　ソリトン解と Casorati 行列式

ソリトン解のパラメータを上手に取ると，表示が劇的にきれいになる．例えば，2-ソリトン解 (2.10) において，

$$P_i = p_i - q_i, \quad Q_i = -\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}, \quad R_i = \left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.14}$$

すると，関係式 $P_iQ_i = \left(R_i - \frac{1}{R_i}\right)^2$ は自動的に満たされ，

$$A_{ij} = \frac{(p_i - q_i)(p_j - q_j)}{(p_i - q_j)(p_j - q_i)}, \tag{2.15}$$

となることが直接計算で確かめられる．したがって，2-ソリトン解 (2.10) は次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned}
&\tau_n = 1 + e^{\eta_1-\xi_1} + e^{\eta_2-\xi_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2-\xi_1-\xi_2},\\
&\eta_i = n\log p_i + p_ix - \frac{y}{p_i} + \eta_{0i}, \quad \xi_i = n\log q_i + q_ix - \frac{y}{q_i} + \xi_{0i}, \quad A_{12} = \frac{(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

実は，2-ソリトン解 (2.16) は行列式を用いて表される．

命題 2.1

$$\tau_n = 1 + e^{\eta_1-\xi_1} + e^{\eta_2-\xi_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2-\xi_1-\xi_2} \approx \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix}, \tag{2.17}$$

$$f_n^{(i)} = e^{\eta_i} + e^{\xi_i}, \quad \eta_i = n\log p_i + p_i x - \frac{y}{p_i} + \eta_{0i}, \quad \xi_i = n\log q_i + q_i x - \frac{y}{q_i} + \xi_{0i}. \tag{2.18}$$

証明：　右辺の行列式を展開すると，

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} &= \left(e^{\eta_1} + e^{\xi_1}\right)\left(p_2 e^{\eta_2} + q_2 e^{\xi_2}\right) - \left(e^{\eta_2} + e^{\xi_2}\right)\left(p_1 e^{\eta_1} + q_1 e^{\xi_1}\right) \\ &= (p_2 - p_1)e^{\eta_1+\eta_2} + (q_2 - p_1)e^{\eta_1+\xi_2} + (p_2 - q_1)e^{\eta_2+\xi_1} + (q_2 - q_1)e^{\xi_1+\xi_2} \\ &\approx 1 + \frac{q_2 - p_1}{q_2 - q_1}e^{\eta_1-\xi_1} + \frac{p_2 - q_1}{q_2 - q_1}e^{\eta_2-\xi_2} + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}e^{\eta_1+\eta_2-\xi_1-\xi_2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

となる．ここで，位相の任意定数 (η_{i0}, ξ_{i0}) の自由度をうまく用いる．

$$\begin{aligned} (q_2 - p_1)e^{\eta_1} &= e^{\eta_1+\log(q_2-p_1)} = e^{\tilde{\eta}_1}, \quad (p_2 - q_1)e^{\eta_2} = e^{\eta_2+\log(p_2-q_1)} = e^{\tilde{\eta}_2}, \\ (q_2 - q_1)e^{\xi_1} &= e^{\xi_1+\log(q_2-q_1)} = e^{\tilde{\xi}_1}, \quad (q_2 - q_1)e^{\xi_2} = e^{\xi_2+\log(q_2-q_1)} = e^{\tilde{\xi}_2}, \end{aligned}$$

とおくと，(2.19) は

$$1 + e^{\tilde{\eta}_1-\tilde{\xi}_1} + e^{\tilde{\eta}_2-\tilde{\xi}_2} + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} \times \frac{(q_2 - q_1)^2}{(q_2 - p_1)(p_2 - q_1)}e^{\tilde{\eta}_1+\tilde{\eta}_2-\tilde{\xi}_1-\tilde{\xi}_2} = 1 + e^{\tilde{\eta}_1-\tilde{\xi}_1} + e^{\tilde{\eta}_2-\tilde{\xi}_2} + \frac{(p_2 - p_1)(q_2 - q_1)}{(q_2 - p_1)(p_2 - q_1)}e^{\tilde{\eta}_1+\tilde{\eta}_2-\tilde{\xi}_1-\tilde{\xi}_2},$$

となる．$\tilde{\eta}_i, \tilde{\xi}_i$ をそれぞれ改めて η_i, ξ_i と置き直せば[*8]，(2.17) が得られる．　∎

(2.17) の行列式において，要素は右の列に行くと n が一つシフトしている．このような行列式は **Casorati** 行列式と呼ばれる．これは Wronski 行列式の離散版であり，実際，線形差分方程式の理論で Wronski 行列式と同じ役割を果たす．(2.17) の行列式の要素は

$$\frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x} = f_{n+1}^{(i)}, \quad \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial y} = -f_{n-1}^{(k)}, \tag{2.20}$$

という関係式を満たしていることに注意しよう．こうなると，2×2 行列を $N \times N$ 行列式に変えても双線形方程式 (2.7) の解になるのではないかという推測をするのは自然である．実際，以下の定理が成り立つ．

定理 2.1　任意の自然数 N について，$N \times N$ Casorati 行列式

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}, \tag{2.21}$$

は 2 次元戸田格子方程式の双線形形式 (2.7) を満たす．ただし，$f_n^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, N)$ は以下の線形微分差分方程式を満足する．

$$\frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x} = f_{n+1}^{(i)}, \quad \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial y} = -f_{n-1}^{(i)}. \tag{2.22}$$

[*8] 任意定数 η_{i0}, ξ_{i0} を再定義したことになる．

定理 2.1 において，行列式の要素を特に

$$f_n^{(i)} = p_i^n \exp\left(p_i x - \frac{y}{p_i} + \eta_{i0}\right) + q_i^n \exp\left(q_i x - \frac{y}{q_i} + \xi_{i0}\right), \tag{2.23}$$

と取れば，N-ソリトン解を与えることを注意しておく．次の節で定理 2.1 の証明を与える．

2.1.3　双線形方程式と Plücker 関係式

ここで主張したいことは次のことである．

2 次元戸田格子方程式の双線形方程式 (2.7) は Plücker 関係式である．

Plücker 関係式とは，列が適当にシフトした行列式の間に成り立つ 2 次の恒等式であり，Grassmann 多様体の射影空間への埋め込みを議論する際に鍵となる関係式として知られている．本節では定理 2.1 の証明を次の方針で進めていく．

(1) τ 函数の微分（もしくは n のシフト）を列のシフトした行列式で表す「微分公式」を構成する．
(2) (2.7) を微分公式によって Plücker 関係式に帰着させる．

■ステップ 1 ：「微分公式」を作る

最初に行列式の列ベクトルの表示に便利な次の記法を導入する（Freeman-Nimmo の記法）

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} = |\,\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\,|, \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} f_{n+j}^{(1)} \\ f_{n+j}^{(2)} \\ \vdots \\ f_{n+j}^{(N)} \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

命題 2.2　（微分公式）次の公式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \tau_n &= |\,\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\,|, & \partial_x \tau_n &= |\,\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N}\,|, \\ \tau_{n+1} &= |\,\mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}, \boldsymbol{N}\,|, & -\partial_y \tau_n &= |\,\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\,|, \\ \tau_{n-1} &= |\,\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}\,|, & -\left(\partial_x \partial_y + 1\right)\tau_n &= |\,\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N}\,|. \end{aligned} \tag{2.25}$$

証明：　(2.25) の左側の 3 つの式は定義より自明である．右側の 3 式を示そう．まず，行列式の微分は

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{N} \begin{vmatrix} \cdots & f_{n+j-1}^{(1)} & f_{n+j}^{(1)\prime} & f_{n+j+1}^{(1)} & \cdots \\ \cdots & f_{n+j-1}^{(2)} & f_{n+j}^{(2)\prime} & f_{n+j+1}^{(2)} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & f_{n+j-1}^{(N)} & f_{n+j}^{(N)\prime} & f_{n+j+1}^{(N)} & \cdots \end{vmatrix}, \tag{2.26}$$

であることに注意する．関係式 $\frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x} = f_{n+1}^{(i)}$ より

$$\begin{aligned} \partial_x \tau_n &= \left|\,\mathbf{0}', \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\,\right| + \cdots \left|\,\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}', \boldsymbol{N-1}\,\right| + \left|\,\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}'\,\right| \\ &= |\,\mathbf{1}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\,| + \cdots + |\,\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-1}, \boldsymbol{N-1}\,| + |\,\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N}\,| \\ &= |\,\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N}\,|, \end{aligned}$$

を得る．同様に $\frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial y} = -f_{n-1}^{(i)}$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\partial_y \tau_n &= \left| \mathbf{0'}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1} \right| + \left| \mathbf{0}, \mathbf{1'}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1} \right| + \cdots + \left| \mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1'} \right| \\
&= -|\,\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\,| - |\,\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\,| - \cdots - |\,\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-2}\,| \\
&= -|\,\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\,|,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_x \partial_y \tau_n &= -\left| \mathbf{-1'}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1} \right| - \left| \mathbf{-1}, \mathbf{1'}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1} \right| + \cdots + \left| \mathbf{-1}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1'} \right| \\
&= -|\,\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\,| - |\,\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N}\,| \\
&= -\tau_n - |\,\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N}\,|,
\end{aligned}
$$

を得る． ∎

■ステップ２：双線形方程式を Plücker 関係式に帰着させる

(2.25) を双線形方程式 (2.7) に代入して整理すると，

$$
\begin{aligned}
0 = &\left| \boxed{\mathbf{-1}}, \boxed{\mathbf{0}}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2} \right| &\times &\left| \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boxed{\boldsymbol{N-1}}, \boxed{\boldsymbol{N}} \right| \\
+ &\left| \boxed{\mathbf{0}}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boxed{\boldsymbol{N-1}} \right| &\times &\left| \boxed{\mathbf{-1}}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boxed{\boldsymbol{N}} \right| \\
- &\left| \boxed{\mathbf{0}}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boxed{\boldsymbol{N}} \right| &\times &\left| \boxed{\mathbf{-1}}, \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boxed{\boldsymbol{N-1}} \right|, s
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

が得られる．(2.27) の各行列式で，列ベクトル $\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{N-2}$ は全ての行列式が共通に持っており，4 本の列ベクトル $\mathbf{-1}$, $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{N-1}$, $\boldsymbol{N}$(わかりやすくするために箱で囲ってある) を 2 つずつ選ぶ全ての組合せが現れていることが見て取れる．(2.27) は **Plücker** 関係式と呼ばれる行列式の恒等式（の一つ）である．以下，(2.27) を証明しよう．

証明の鍵となるのは，Laplace 展開と呼ばれる行列式の展開公式である．

命題 2.3　(行列式の **Laplace** 展開) $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を $N \times N$ 行列とし，$|A|^{i_1 i_2 \cdots i_l}_{j_1 j_2 \cdots j_l}$ を A の第 $i_1, \cdots, i_l$ 行および第 $j_1, \cdots, j_l$ 列を選んで作った $l \times l$ 小行列式，$\overline{|A|}^{i_1 i_2 \cdots i_l}_{j_1 j_2 \cdots j_l}$ を A から第 $i_1, \cdots, i_l$ 行と第 $j_1, \cdots, j_l$ 列を取り去って作られる $(N-l) \times (N-l)$ 小行列式とする．今，l 個の整数 $i_1, \cdots, i_l$ を $1 \le i_1 < \cdots < i_l \le N$ となるように選んで固定する．このとき，

$$
|A| = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_l \le N} (-1)^{i_1 + \cdots + i_l + j_1 + \cdots + j_l} \quad |A|^{i_1 i_2 \cdots i_l}_{j_1 j_2 \cdots j_l} \times \overline{|A|}^{i_1 i_2 \cdots i_l}_{j_1 j_2 \cdots j_l},
\tag{2.28}
$$

が成立する．

例えば $l = 1$, $i_1 = 1$ とすれば，(2.28) は行列式の第 1 行に関する展開となっていることを注意しておく．証明は線形代数の教科書，例えば [5] などを参照して欲しい．

さて，天下りではあるが，以下の恒等的に 0 の $2N \times 2N$ 行列式を考える．Ø は全ての要素が 0 のブロックを表す．

$$
0 = \left| \begin{array}{c:cccc:ccc:cc}
\mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \boldsymbol{N-2} & & & \text{Ø} & & \boldsymbol{N-1} & \boldsymbol{N} \\
\hdashline
\mathbf{-1} & & & \text{Ø} & & & \mathbf{1} & \cdots & \boldsymbol{N-2} & \boldsymbol{N-1} & \boldsymbol{N}
\end{array} \right|.
\tag{2.29}
$$

$$
\underbrace{\qquad\qquad}_{N-1} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{N-2}
$$

実際に右辺が 0 であることは，次のようにしてわかる．右辺の下のブロックを (-1) 倍して上のブロックに足し込み，囲みのブロックを右隣のブロックに足し込めば

$$
\text{右辺} = \left| \begin{array}{c:cccc:ccc:cc}
\text{Ø} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \boldsymbol{N-2} & \mathbf{-(1)} & \cdots & \mathbf{-(}\boldsymbol{N-2}\mathbf{)} & \text{Ø} & \text{Ø} \\
\hdashline
\mathbf{-1} & & & \text{Ø} & & \mathbf{1} & \cdots & \boldsymbol{N-2} & \boldsymbol{N-1} & \boldsymbol{N}
\end{array} \right|
$$

$$
= \left|\begin{array}{c:c:c:cc}
\emptyset & \mathbf{0}\ \ \mathbf{1}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{N-2} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\
\hdashline
\mathbf{-1} & \underbrace{\qquad\emptyset\qquad}_{N-1} & \underbrace{\mathbf{1}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{N-2}}_{N-2} & \boldsymbol{N-1} & \boldsymbol{N}
\end{array}\right|.
$$

この時点で $l = N, i_1 = 1, \ldots, i_N = N$ として Laplace 展開を行う．上のブロックから N 列選び，下のブロックから残りの N 列を選び，全ての列の選び方について和を取る．しかし，上のブロックには要素が全て 0 の列が $N+1$ 本あるため，どう選んでも 0 の列が入る．従って，展開の全ての項が 0 となる．

最後に，(2.29) の右辺をそのまま Laplace 展開すると，(2.27) が得られることは直ちにわかる．以上で定理 2.1 が証明された．

以上で見た構造は可積分系のもっとも根幹をなす構造と言ってもよい．いくつか注意とコメントをしておく．

(1) Plücker 関係式は無限個ある．
  (a) 特別視する列ベクトル $\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \boldsymbol{N-1}, \boldsymbol{N}$ をどう選んでもよい．
  (b) 特別視する列の本数は 4 本以上なら何本でもよい．

(2) τ に適当な微差分構造を入れる．例えば，無限個の独立変数 x_j, y_j $(j = 1, 2, \ldots)$ を導入して，次のような関係式を課す．

$$
\frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x_j} = f_{n+j}^{(i)}, \quad \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial y_j} = -f_{n-j}^{(i)}. \tag{2.30}
$$

このようにすると，列を任意にシフトさせた行列式は τ 函数に微分作用素を作用させて得られる [**?**, **?**].

(3) 上のような適当な微差分構造の下で，無限個の Plücker 関係式は，解を共有する無限個の双線形微分差分方程式と対応する．このような双線形微分差分方程式の族は，例えば上のような微差分構造を入れた場合，2 次元戸田格子階層 (hierarchy) と呼ばれ，x_j (もしくは y_j) のみで方程式を記述したものは KP 階層と呼ばれる．

ソリトン方程式の階層構造を記述する枠組みの一つとして，「佐藤理論」が知られており，そこでは τ 函数が中心的な役割を果たす．佐藤理論の主張を標語的に述べると，

(1) ソリトン方程式の解空間は普遍グラスマン多様体である．
(2) τ 函数（双線形形式の解）は Plücker 座標であり，双線形方程式は Plücker 関係式である．

可積分系を使いこなしたい人は，何らかの機会に佐藤理論に触れておくと将来役に立つと思う．

2.1.4 分子解

前節で議論した Casorati 行列式解では，離散変数 n は行列式の要素におけるソリトンの位相に対応する量であった．ここでは，離散変数 n が行列式のサイズで与えられるような，分子解と呼ばれる行列式解について述べよう．

定理 2.2 任意の自然数 n について，τ_n を次の $n \times n$ 行列式とする．

$$
\tau_n = \begin{vmatrix}
f(x,y) & \partial_x f(x,y) & \cdots & \partial_x^{n-1} f(x,y) \\
\partial_y f(x,y) & \partial_x \partial_y f(x,y) & \cdots & \partial_x^{n-1} \partial_y f(x,y) \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\partial_y^{n-1} f(x,y) & \partial_x \partial_y^{n-1} f(x,y) & \cdots & \partial_x^{n-1} \partial_y^{n-1} f(x,y)
\end{vmatrix}, \tag{2.31}
$$

ただし，$f(x,y)$ は任意函数である．このとき，τ_n は 2 次元戸田格子方程式の双線形形式を満たす．

$$\frac{1}{2}D_xD_y\,\tau_n\cdot\tau_n=\tau_{n+1}\tau_{n-1},\quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{2.32}$$

$$\text{初期 (境界) 条件：}\quad \tau_{-1}=0,\quad \tau_0=1,\quad \tau_1=f. \tag{2.33}$$

(2.32) の右辺の行列式は，横方向には x に関して，縦方向には y に関して，それぞれ Wronskian の構造を持っている．このことから，この行列式は 2 方向 Wronskian と呼ばれることがある．なお，境界条件 (2.33) は，非線形方程式の従属変数では以下の条件に対応する．

$$q_n=\log\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\ :\ q_0=-\infty,\quad R_n=\log\frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}\ :\ R_0=-\infty \tag{2.34}$$

さて，定理 2.2 を証明しよう．方法としては，前節と同様に双線形方程式 (2.32) を Plücker 関係式に帰着させよう．n は行列式のサイズであるから，(2.32) から得られるのはサイズが異なる行列式の間の恒等式である．それをどのように処理するかがポイントである．Freeman-Nimmo の記法で

$$\tau_{n+1}=\begin{vmatrix} f(x,y) & \cdots & \partial_x^{n-1}f(x,y) & \partial_x^{n}f(x,y)\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \partial_y^{n-1}f(x,y) & \cdots & \partial_x^{n-1}\partial_y^{n-1}f(x,y) & \partial_x^{n}\partial_y^{n-1}f(x,y)\\ \partial_y^{n}f(x,y) & \cdots & \partial_x^{n-1}\partial_y^{n}f(x,y) & \partial_x^{n}\partial_y^{n}f(x,y)\end{vmatrix}=|\,\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{n-1},\boldsymbol{n}\,|,\quad \boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}\partial_x^{j}f(x,y)\\ \vdots\\ \partial_x^{j}\partial_y^{n-1}f(x,y)\\ \partial_x^{j}\partial_y^{n}f(x,y)\end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

と書くことにする．左辺は $(n+1)\times(n+1)$ 行列式で，$\boldsymbol{j}$ は $(n+1)$ 次元ベクトルである．しかし，以下ではサイズの異なる行列式が現れ，ベクトルのサイズも異なるものが出てくる．そこで，第 1 行が $\partial_x^j f$ で始まるベクトルを $\boldsymbol{j}$ と書き，サイズの違いは無視することにする．次の $(2n+2)\times(2n+2)$ 行列式の恒等式を考える．

$$0=\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{n-2} & \boldsymbol{n-1} & & & & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{\phi_1} & \boldsymbol{\phi_2}\\ \hline & & & & \emptyset & & & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{\phi_1} & \boldsymbol{\phi_2}\\ \hline & & \emptyset & & & & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{n-2} & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{\phi_1} & \boldsymbol{\phi_2}\end{array}\right|,\quad \boldsymbol{\phi_1}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\phi_2}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \tag{2.36}$$

$\boldsymbol{\phi_1},\boldsymbol{\phi_2}$ などの列ベクトルを挿入していることがミソである．右辺が恒等的に 0 であることは，前節と同様の議論で示すことができる．右辺を Laplace 展開すると，

$$\begin{aligned} 0=\ & \left|\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{n-2},\boxed{\boldsymbol{n-1}},\boxed{\boldsymbol{n}}\right| \times \left|\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{n-2},\boxed{\boldsymbol{\phi_1}},\boxed{\boldsymbol{\phi_2}}\right| \\ -\ & \left|\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{n-2},\boxed{\boldsymbol{n-1}},\boxed{\boldsymbol{\phi_1}}\right| \times \left|\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{n-2},\boxed{\boldsymbol{n}},\boxed{\boldsymbol{\phi_2}}\right| \\ +\ & \left|\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{n-2},\boxed{\boldsymbol{n-1}},\boxed{\boldsymbol{\phi_2}}\right| \times \left|\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{n-2},\boxed{\boldsymbol{n}},\boxed{\boldsymbol{\phi_1}}\right|, \end{aligned} \tag{2.37}$$

という Plücker 関係式が得られる．現れた各因子を τ で表そう．

$$|\,\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{n-2},\boldsymbol{\phi_1},\boldsymbol{\phi_2}\,|=\begin{vmatrix} f & \cdots & \partial_x^{n-2}f & 0 & 0\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \partial_y^{n-2}f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n-2}f & 0 & 0\\ \partial_y^{n-1}f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n-1}f & 1 & 0\\ \partial_y^{n}f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n}f & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f & \cdots & \partial_x^{n-2}f\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \partial_y^{n-2}f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n-2}f\end{vmatrix}=\tau_{n-1}. \tag{2.38}$$

ここで，第 $(n+1)$ 列 および第 n 列についての展開を行ったことに注意する．また，

$$
|\,\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{n-2},\boldsymbol{n-1},\boldsymbol{\phi_1}\,| = \begin{vmatrix} f & \cdots & \partial_x^{n-1} f & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-2} f & \cdots & \partial_x^{n-1}\partial^{n-2} f & 0 \\ \partial_y^{n-1} f & \cdots & \partial_x^{n-1}\partial_y^{n-1} f & 1 \\ \partial_y^{n} f & \cdots & \partial_x^{n-1}\partial_y^{n} f & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f & \cdots & \partial_x^{n-1} f \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_y^{n-2} f & \cdots & \partial_x^{n-1}\partial^{n-2} f \\ \partial_y^{n} f & \cdots & \partial_x^{n-1}\partial_y^{n} f \end{vmatrix} = -\partial_y \tau_n. \tag{2.39}
$$

ここでは第 $(n+1)$ 列で展開した後，行列式の縦方向の構造に注目していることに注意して欲しい（行列式の微分は各行を微分していってもよい）．同様に，

$$
\begin{aligned}
|\,\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{n-2},\boldsymbol{n},\boldsymbol{\phi_2}\,| &= \begin{vmatrix} f & \cdots & \partial_x^{n-2} f & \partial_x^{n} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-1} f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n-1} f & \partial_x^{n}\partial_y^{n-1} f & 0 \\ \partial_y^{n} f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n} f & \partial_x^{n}\partial_y^{n} f & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & \cdots & \partial_x^{n-2} f & \partial_x^{n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-1} f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n-1} f & \partial_x^{n}\partial_y^{n-1} f \end{vmatrix} \\
&= \partial_x \tau_n,
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

$$
\begin{aligned}
|\,\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{n-2},\boldsymbol{n},\boldsymbol{\phi_1}\,| &= \begin{vmatrix} f & \cdots & \partial_x^{n-2} f & \partial_x^{n} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-2} f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n-2} f & \partial_x^{n-1}\partial^{n-2} f & 0 \\ \partial_y^{n-1} f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n-1} f & \partial_x^{n}\partial_y^{n-1} f & 1 \\ \partial_y^{n} f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n} f & \partial_x^{n}\partial_y^{n} f & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f & \cdots & \partial_x^{n-2} f & \partial_x^{n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-2} f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n-2} f & \partial_x^{n-1}\partial^{n-2} f \\ \partial_y^{n} f & \cdots & \partial_x^{n-2}\partial_y^{n} f & \partial_x^{n}\partial_y^{n} \end{vmatrix} \\
&= -\partial_x \partial_y \tau_n,
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

以上の式を Plücker 関係式 (2.37) に代入すると，

$$
\left(\partial_x \partial_y \tau_n\right)\tau_n - \left(\partial_x \tau_n\right)\left(\partial_y \tau_n\right) = \tau_{n+1}\tau_{n-1}, \tag{2.42}
$$

となり，これは双線形方程式 (2.32) と等価である．以上で定理 2.2 が証明された．

注意：

(1) 分子解は半無限格子上の 2 次元戸田格子方程式の解だが，これを有限格子に制限することもできる．$X_i(x)$, $Y_i(y)$ $(i = 1, \ldots, N)$ をそれぞれ任意函数として

$$
f(x,y) = \sum_{i=1}^{N} X_i(x) Y_i(y), \tag{2.43}
$$

とおくと，τ_N は

$$
\tau_N = \begin{vmatrix} Y_1 & \cdots & Y_N \\ \partial_y Y_1 & \cdots & \partial_y Y_N \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_y^{N-1} Y_1 & \cdots & \partial_y^{N-1} Y_N \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1 & \partial_x X_1 & \cdots & \partial_x^{N-1} X_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_N & \partial_x X_N & \cdots & \partial_x^{N-1} X_N \end{vmatrix} = Y(y) \times X(x),
$$

という形に変数分離される．このとき，(2.32) を用いると直ちに

$$
\tau_{N+1} = 0, \tag{2.44}
$$

となり[*9]，$n = 1, \ldots, N$ の有限格子に制限できたことになる．

(2) 2 次元戸田格子方程式

$$\frac{\partial^2 \log h_n}{\partial x \partial y} = h_{n+1} + h_{n-1} - 2h_n, \quad h_n = \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2},$$

は実射影空間中で「共役網」と呼ばれる座標系を許容する曲面の変換を記述する方程式として，1889 年に Darboux が導出している (例えば [7] 第 2 章を参照)．半無限格子上の分子解も Darboux によって見いだされている．

(3) 戸田格子方程式の分子解もある．実際，$f(t)$ を任意函数とするとき，

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f(t) & \cdots & \partial_t^{n-1} f(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_t^{n-1} f(t) & \cdots & \partial_t^{2n-2} f(t) \end{vmatrix}, \tag{2.45}$$

は双線形方程式

$$\left(\partial_t^2 \tau_n\right) \tau_n - (\partial_t \tau_n)^2 = \tau_{n+1}\tau_{n-1}, \quad \tau_{-1} = 0, \quad \tau_0 = 1, \quad \tau_1 = f(t), \tag{2.46}$$

を満足することが上と同様にして簡単に示される．有限格子に制限するには，行列式の要素を $f(t) = \sum_{i=1}^{N} e^{\lambda_i t + \mu_i}$ とおけばよい．さらに，

$$V_n = \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2}, \quad I_n = \frac{d}{dt} \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \tag{2.47}$$

とおけば，V_n, I_n は LC 梯子回路の方程式

$$\frac{d}{dt} \log V_n = I_n - I_{n+1}, \quad \frac{dI_n}{dt} = V_{n-1} - V_n, \tag{2.48}$$

を満たす[*10]．ただし，境界条件は

$$V_0 = 0, \quad V_N = 0, \tag{2.49}$$

となる．この境界条件は，回路の両端をショートさせることに相当するので，時間とともに $V_n \to 0$ となることがわかる．これは Lax 形式では L 行列 (1.13) が $t \to \infty$ で対角行列に収束することを意味する．これは戸田格子方程式が行列の固有値計算アルゴリズムと密接に関連することを示唆しており，これを出発点とし，可積分系の理論を応用して行列の固有値や特異値の新しい数値計算法が開発されるに至っている [8]．また q_n については，境界条件は両端を無限遠に飛ばしたことに相当するので，質点は時間とともに相互作用をして無限の彼方に飛び去って行くだけである．もはやバネでつながった質点系というより，戸田ポテンシャルで記述される相互作用を持つ分子系と見なすのが妥当であろう．分子解というの名称はここに由来するものであろう．

2.2 簡約

解のパラメータに制限を加えることで方程式を制限する操作を簡約 **(reduction)** という．例えば，簡約によって 2 次元戸田格子方程式 (2.1) から戸田格子方程式 (1.1) を得るには条件

$$\frac{\partial q_n}{\partial s} = 0, \quad t = x + y, \quad s = x - y, \tag{2.50}$$

を課せばよい．また，2 周期性

$$q_{n+2} = q_n, \tag{2.51}$$

[*9] 行列式に対する Binet-Cauchy の公式 [5] を用いると (2.32) を経由せず直接示すこともできる．

[*10] (1.8) での $1 + V_n$ を改めて V_n とおいている．

を課せば，2 次元戸田格子方程式 (2.1) は

$$\frac{\partial^2 q_0}{\partial x \partial y} = e^{q_1 - q_0} - e^{q_0 - q_1}, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial x \partial y} = e^{q_0 - q_1} - e^{q_1 - q_0}, \tag{2.52}$$

となるが，これは直ちに

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 2\left(e^{-v} - e^{v}\right), \quad v = q_0 - q_1, \tag{2.53}$$

もしくは

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -4 \sinh v, \tag{2.54}$$

と書き直される．また，$v = i\theta \in i\mathbb{R}$ とおけば，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -4 \sin v, \tag{2.55}$$

が得られる．(2.54)，(2.55) はそれぞれ sinh-Gordon 方程式，sine-Gordon 方程式と呼ばれ，微分幾何，特に曲面論で重要な役割を果たす方程式である．以下，実際に解のパラメータに制限をおき，簡約条件を実現することを考えよう．

■2 次元戸田格子方程式→戸田格子方程式

ソリトン解を与える Casorati 行列式解 (2.21), (2.23) のパラメータに制限をおき，簡約条件 (2.50) を実現する．τ 函数のレベルでは

$$\frac{\partial q_n}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} = \frac{\partial_s \tau_{n-1}}{\partial s} - \frac{\partial_s \tau_n}{\partial s} = 0,$$

より

$$\partial_s \tau_n = \text{const.} \times \tau_n, \tag{2.56}$$

を課せばよい．行列式の要素 $f_n^{(i)}$ のレベルでは，

$$f_n^{(k)} = p_k^n e^{p_k x - \frac{y}{p_k}} + q_k^n e^{q_k x - \frac{y}{q_k}} = p_k^n \exp\left[\frac{1}{2}\left(p_k - \frac{1}{p_k}\right)t + \frac{1}{2}\left(p_k + \frac{1}{p_k}\right)s\right] + q_k^n \exp\left[\frac{1}{2}\left(q_k - \frac{1}{q_k}\right)t + \frac{1}{2}\left(q_k + \frac{1}{q_k}\right)s\right],$$

であるから，

$$\partial_s f_n^{(k)} = \frac{1}{2}\left(p_k + \frac{1}{p_k}\right)p_k^n \exp\left[\frac{1}{2}\left(p_k - \frac{1}{p_k}\right)t + \frac{1}{2}\left(p_k + \frac{1}{p_k}\right)s\right] + \frac{1}{2}\left(q_k + \frac{1}{q_k}\right)q_k^n \exp\left[\frac{1}{2}\left(q_k - \frac{1}{q_k}\right)t + \frac{1}{2}\left(q_k + \frac{1}{q_k}\right)s\right],$$

となる．$\partial_s f_n^{(k)} = \text{const.} \times f_n^{(i)}$ であれば (2.56) は実現できるであろうから，こうなるためには

$$p_k + \frac{1}{p_k} = q_k + \frac{1}{q_k},$$

すなわち

$$q_k = \frac{1}{p_k}, \tag{2.57}$$

を課せばよい．このとき，

$$\partial_s f_n^{(k)} = \frac{1}{2}\left(p_k + \frac{1}{p_k}\right) f_n^{(k)}, \tag{2.58}$$

$$\partial_s \tau_n = C_N \, \tau_n, \quad C_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\left(p_i + \frac{1}{p_i}\right), \tag{2.59}$$

が成り立ち，簡約条件 (2.56) が実現できた．実際，独立変数を s, t に取り換えた後に (2.59) を双線形方程式 (2.7) に代入すると，戸田格子の双線形方程式 (1.24)($f(t) = 1$) が得られることは直接計算で確かめられる．以上のことから，以下の命題を得る．

命題 2.4　戸田格子方程式 (1.1) の N-ソリトン解は次のように与えられる．

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \tag{2.60}$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}, \tag{2.61}$$

$$f_n^{(k)} = p_k^n e^{\frac{t}{2}\left(p_k - \frac{1}{p_k}\right) + \eta_{k0}} + p_k^{-n} e^{-\frac{t}{2}\left(p_k - \frac{1}{p_k}\right) + \xi_{k0}}. \tag{2.62}$$

■2 次元戸田格子方程式→ sinh-Gordon 方程式

簡約条件 (2.51) を実現するには，τ 函数のレベルで

$$\tau_{n+2} = \text{const.} \times \tau_n, \tag{2.63}$$

という条件を課せばよい．N-ソリトン解 (2.21), (2.23) においては

$$f_{n+2}^{(k)} = p_k^2\, p_k^n e^{p_k x - \frac{y}{p_k}} + q_k^2\, q_k^n e^{q_k x - \frac{y}{q_k}}, \propto f_n^{(k)}$$

となるために，$p_k^2 = q_k^2$, すなわち

$$q_k = -p_k, \tag{2.64}$$

を課せばよい．このとき，

$$f_{n+2}^{(k)} = p_k^2\, f_n^{(k)}, \tag{2.65}$$

$$\tau_{n+2} = \lambda\, \tau_n, \quad \lambda = \prod_{i=1}^{N} p_i^2, \tag{2.66}$$

が成り立つ．双線形方程式 (2.7) は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} D_x D_y\, \tau_0 \cdot \tau_0 = \dfrac{1}{\lambda}\tau_1^2 - \tau_0^2, \\ \dfrac{1}{2} D_x D_y\, \tau_1 \cdot \tau_1 = \lambda \tau_0^2 - \tau_1^2, \end{cases} \tag{2.67}$$

また，v は

$$v = q_0 - q_1 = \log \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} - \log \lambda, \tag{2.68}$$

となる．以上のことをまとめて，次の命題を得る．

命題 2.5　sinh-Gordon 方程式 (2.54) の N-ソリトン解は次のように与えられる．

$$v = 2 \log \frac{\tau_1}{\tau_0} - \log \lambda, \tag{2.69}$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}, \tag{2.70}$$

$$f_n^{(k)} = p_k^n e^{p_k x - \frac{y}{p_k} + \eta_{k0}} + (-p_k)^n e^{-\left(p_k x - \frac{y}{p_k}\right) + \xi_{k0}}, \quad \lambda = \prod_{i=1}^{N} p_i^2. \tag{2.71}$$

なお，sine-Gordon 方程式 (2.55) の解は上の解をさらに純虚数に制限すれば得られる．しかし，このような特殊化を行列式解のレベルで実現することは自明ではない．上の Casorati 行列式では

$$\eta_{k0} \in \mathbb{R}, \quad \xi_{k0} = \frac{\pi i}{2}, \tag{2.72}$$

と取ればよいことがわかっている．このような制限を課すには，Gram 行列式と呼ばれる別の行列式表示を用いるのが便利な場合が多い．本レクチャーノートに収録されている太田泰広氏によるスライドを参考にしていただきたい．

2.3 Bäcklund 変換

主な内容

(1) 双線形方程式の算術で Bäcklund 変換を作る
(2) Bäcklund 変換から Lax 形式を作る
(3) Bäcklund 変換で新しい解を作る

2.3.1 Bäcklund 変換の導出

1 章で戸田格子の Bäcklund 変換について触れた．では，Bäcklund 変換はどうやって見つければよいか．ここでは双線形方程式の算術を用いた Bäcklund 変換の導出を議論する．

定理 2.3 (戸田格子の双線形方程式の **Bäcklund** 変換) τ_n を

$$\frac{1}{2}D_t^2\, \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2, \tag{2.73}$$

を満たすものとする．このとき，定数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対して，$\overline{\tau}_n$ が

$$\begin{aligned} D_t\, \tau_n \cdot \overline{\tau}_n &= \lambda_1 \tau_{n+1}\overline{\tau}_{n-1} - \lambda_2 \tau_n \overline{\tau}_n, \\ D_t\, \tau_{n+1} \cdot \overline{\tau}_n &= -\frac{1}{\lambda_1}\tau_n \overline{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1}\overline{\tau}_n, \end{aligned} \tag{2.74}$$

を満たすならば，$\overline{\tau}_n$ も (2.73) の解である．逆に，$\overline{\tau}_n$ が (2.73) を満たし，τ_n が (2.74) を満たすならば，τ_n も (2.73) の解である．

証明： τ_n が (2.73) の解であり，かつ τ_n が (2.74) を満たすときに $P = 0$ であることを示すことができれば，$\overline{\tau}_n$ が (2.73) の解であることが従う．逆も同様である．鍵となるのは，次の交換公式である．

命題 2.6 (交換公式) 任意の $x, y, \tau_n, \overline{\tau}_n$ に関して以下の公式が成り立つ．

$$(1) \quad \left[D_x D_y\, \tau_n \cdot \tau_n\right]\tau_n^2 - (\tau_n)^2\left[D_x D_y\, \overline{\tau}_n \cdot \overline{\tau}_n\right] = 2D_x\left(D_y\, \tau_n \cdot \overline{\tau}_n\right) \cdot \overline{\tau}_n \tau_n, \tag{2.75}$$

$$(2) \quad D_x\left(\tau_{n+1}\overline{\tau}_{n-1}\right) \cdot \left(\overline{\tau}_n \tau_n\right) = \left[D_x\, \tau_{n+1} \cdot \overline{\tau}_n\right]\overline{\tau}_{n-1}\tau_n + \tau_{n+1}\overline{\tau}_n\left[D_x\, \overline{\tau}_{n-1} \cdot \tau_n\right]. \tag{2.76}$$

上の公式は直接計算でチェックできる．同様の公式の効率的な生成法は [3] を参照．交換公式を用いて P を次のように変形する．

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{1}{2}D_t^2\, \tau_n \cdot \tau_n - \tau_{n+1}\tau_{n-1} + \tau_n^2\right](\overline{\tau}_n)^2 - (\tau_n)^2\left[\frac{1}{2}D_t^2\, \overline{\tau}_n \cdot \overline{\tau}_n - \overline{\tau}_{n+1}\overline{\tau}_{n-1} + (\overline{\tau}_n)^2\right] \\ &= D_t\left[D_t\, \tau_n \cdot \overline{\tau}_n\right] \cdot \overline{\tau}_n \tau_n + \tau_n \overline{\tau}_{n+1}\overline{\tau}_{n-1}\tau_n + \tau_{n-1}\overline{\tau}_n \overline{\tau}_n \tau_{n+1} \\ &= D_t\left[D_t\, \tau_n \cdot \overline{\tau}_n - \boxed{\lambda_1 \tau_{n+1}\overline{\tau}_{n-1}}\right] \cdot \overline{\tau}_n \tau_n + \lambda_1\left[\boxed{D_t\, \overline{\tau}_{n+1} \cdot \tau_n} + \lambda_1^{-1}\overline{\tau}_n \tau_{n+1}\right]\tau_{n-1}\overline{\tau}_n + \lambda_1\left[\boxed{D_t\, \tau_n \cdot \overline{\tau}_{n-1}} + \lambda_1^{-1}\tau_{n-1}\overline{\tau}_n\right]\overline{\tau}_n \tau_{n+1}. \end{aligned}$$

ここで，第 2 行では (2.75) を用いており，第 3 行では (2.76) を用いて箱で囲った部分を挿入している．これより，$D_t\, f\cdot f = 0$ であることに注意すると，第 1 項において

$$D_t\, \tau_n\cdot\overline{\tau}_n - \lambda_1\tau_{n+1}\overline{\tau}_{n-1} = -\lambda_2\tau_n\overline{\tau}_n, \tag{2.77}$$

が成り立てば第 1 項は 0 となり，第 2,3 項の和が 0 となるためには

$$D_t\, \tau_{n+1}\cdot\overline{\tau}_n = -\frac{1}{\lambda_1}\tau_n\overline{\tau}_{n+1} + \lambda_3\tau_{n+1}\overline{\tau}_n, \tag{2.78}$$

が成り立てばよい（λ_3 のついた項は第 2,3 項で打ち消しあう）．したがって，(2.74) が成り立てば $P = 0$ となることがわかった． ∎

さて，Bäcklund 変換 (2.74) を q_n で書き直してみよう．

$$q_n = \log\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \quad \overline{q}_n = \log\frac{\overline{\tau}_{n-1}}{\overline{\tau}_n}, \tag{2.79}$$

とおく．(2.74) の第 1 式の両辺を $\tau_n\overline{\tau}_n$, 第 2 式の両辺を $\tau_{n+1}\overline{\tau}_n$ で割ると，

$$(\log\tau_n)' - (\log\overline{\tau}_n)' = \lambda_1\frac{\tau_{n+1}\overline{\tau}_{n-1}}{\tau_n\overline{\tau}_n} - \lambda_2, \tag{2.80}$$

$$(\log\tau_{n+1})' - (\log\overline{\tau}_n)' = -\frac{1}{\lambda_1}\frac{\tau_n\overline{\tau}_{n+1}}{\tau_{n+1}\overline{\tau}_n} + \lambda_3, \tag{2.81}$$

を得る．$(2.80)_{n-1} - (2.81)_{n-1}$ より

$$\left(\log\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\right)' = \lambda_1\frac{\tau_n\overline{\tau}_{n-2}}{\tau_{n-1}\overline{\tau}_{n-1}} + \frac{1}{\lambda_1}\frac{\tau_{n-1}\overline{\tau}_n}{\tau_n\overline{\tau}_{n-1}} - \lambda_2 + \lambda_3, \tag{2.82}$$

また $(2.80)_n - (2.81)_{n-1}$ より

$$\left(\log\frac{\overline{\tau}_{n-1}}{\overline{\tau}_n}\right)' = \lambda_1\frac{\tau_{n+1}\overline{\tau}_{n-1}}{\tau_n\overline{\tau}_n} + \frac{1}{\lambda_1}\frac{\tau_{n-1}\overline{\tau}_n}{\tau_n\overline{\tau}_{n-1}} - \lambda_2 + \lambda_3, \tag{2.83}$$

をそれぞれ得るが，これらを $q_n, \overline{q}_n$ で書き換えると

$$\begin{cases} \dfrac{dq_n}{dt} = \lambda_1 e^{-q_n+\overline{q}_{n-1}} + \dfrac{1}{\lambda_1}e^{q_n-\overline{q}_n} - \lambda_2 + \lambda_3, \\ \dfrac{d\overline{q}_n}{dt} = \lambda_1 e^{-q_{n+1}+\overline{q}_n} + \dfrac{1}{\lambda_1}e^{q_n-\overline{q}_n} - \lambda_2 + \lambda_3, \end{cases} \tag{2.84}$$

となる．これは 1 章で触れた戸田格子の Bäcklund 変換 (1.16) と等価である．

2.3.2 Bäcklund 変換からの Lax 形式の導出

τ 函数を用いた Bäcklund 変換 (2.74) が与えられると，簡単に Lax 形式を導出することができる．次のように置けばよい[*11]．

$$\overline{\tau}_n = \tau_n\Psi_{n+1}. \tag{2.85}$$

(2.74) に (2.85) を代入して整理すると，

$$\begin{aligned} -\Psi'_{n+1} &= \lambda_1\frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}\Psi_n - \lambda_2\Psi_{n+1}, \\ -\Psi'_{n+1} + \left(\log\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\right)'\Psi_{n+1} &= -\frac{1}{\lambda_1}\Psi_{n+2} + \lambda_3\Psi_{n+1}, \end{aligned} \tag{2.86}$$

[*11] n がずれているのは本質的ではない．補助線形問題の解が Bäcklund 変換で結ばれた二つの τ 函数の比で表されるところがポイントである．

が得られる．ここで，(2.6) より V_n, I_n を用いて書き換えると

$$\begin{aligned}\Psi'_n &= -\lambda_1(1+V_{n-1})\Psi_{n-1} + \lambda_2\Psi_n,\\ \Psi'_n &= -(I_n+\lambda_3)\Psi_n + \frac{1}{\lambda_1}\Psi_{n+1},\end{aligned} \tag{2.87}$$

または

$$\begin{aligned}&\lambda_1(1+V_{n-1})\Psi_{n-1} - I_n\Psi_n + \frac{1}{\lambda_1}\Psi_{n+1} = (\lambda_2+\lambda_3)\Psi_n,\\ &\Psi'_n = -\lambda_1(1+V_{n-1})\Psi_{n-1} + \lambda_2\Psi_n,\end{aligned} \tag{2.88}$$

となる．さらに，$(-\lambda_1)^n e^{\lambda_2 t}\Psi_n$ を改めて Ψ_n とおき直し，$\lambda_3 = -\lambda$ とすると，

$$\begin{aligned}&(1+V_{n-1})\Psi_{n-1} + I_n\Psi_n + \Psi_{n+1} = \lambda\Psi_n,\\ &\Psi'_n = (1+V_{n-1})\Psi_{n-1},\end{aligned} \tag{2.89}$$

が得られる．これは戸田格子の Lax 形式 (1.13), (1.14) と実質的に同じものである．

2.3.3 Bäcklund 変換による新しい解の生成

本節では簡約の面倒を避けるため，2 次元戸田格子方程式の Bäcklund 変換を議論したい．

定理 2.4 (**2 次元戸田格子の双線形方程式の Bäcklund 変換**) τ_n を

$$\frac{1}{2}D_xD_y\,\tau_n\cdot\tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2, \tag{2.90}$$

を満たすものとする．このとき，定数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対して，$\overline{\tau}_n$ が

$$\begin{aligned}D_y\,\tau_n\cdot\overline{\tau}_n &= \lambda_1\tau_{n+1}\overline{\tau}_{n-1} - \lambda_2\tau_n\overline{\tau}_n,\\ D_x\,\tau_{n+1}\cdot\overline{\tau}_n &= -\frac{1}{\lambda_1}\tau_n\overline{\tau}_{n+1} + \lambda_3\tau_{n+1}\overline{\tau}_n,\end{aligned} \tag{2.91}$$

を満たすならば，$\overline{\tau}_n$ も (2.90) の解である．逆に，$\overline{\tau}_n$ が (2.90) を満たし，τ_n が (2.74) を満たすならば，τ_n も (2.90) の解である．

問 2.2 (1) 戸田格子の場合の計算を参考にして，定理 2.4 を証明せよ．
(2) 戸田格子の Bäcklund 変換 (1.16) の 2 次元戸田格子版を導出せよ．

以下，τ_n として $N\times N$ の Casorati 行列式解 (N-ソリトン解)(2.21), (2.22) が与えられたとき，$\overline{\tau}_n$ として $(N+1)\times(N+1)$ の Casorati 行列式解 ($N+1$-ソリトン解) が取れることを示そう[*12]．行列式のサイズを明示的に示すため，(2.21) の $N\times N$ の Casorati 行列式解 τ_n を τ_n^N と記すことにする．

2 次元戸田格子方程式の双線形方程式 (2.7) は，行列式 (2.29) の Laplace 展開から得られた．右辺の行列式の一番右の列を次のように取り替える．

$$0 = \left|\begin{array}{c:ccc:c:cc} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \cdots & \boldsymbol{N-2} & \emptyset & \boldsymbol{N-1} & \boldsymbol{\phi_2} \\ \hdashline \boldsymbol{-1} & & \emptyset & & & \boldsymbol{1}\ \cdots\ \boldsymbol{N-2} & \boldsymbol{N-1} & \boldsymbol{\phi_2} \end{array}\right| \qquad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.92}$$

行列式を Laplace 展開すると，

$$\begin{aligned} 0 = \ & |\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}| \times |\boldsymbol{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}, \boldsymbol{\phi_2}| \\ + \ & |\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}| \times |\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{\phi_2}| \\ - \ & |\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{\phi_2}| \times |\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{1}, \cdots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}|. \end{aligned} \tag{2.93}$$

[*12] これとは別に，$\overline{\tau}_n$ としてソリトンの位相がずれた解を選ぶこともできる．

ここで微分公式 (2.2) を用い，$\boldsymbol{\phi_2}$ を含む行列式はその列で展開するとサイズが一つ小さくなることに注意すると，

$$0 = \tau_{n-1}^N \times \tau_{n+1}^{N-1} + \tau_n^N \times \left(-\partial_y \tau_n^{N-1}\right) - \tau_n^{N-1} \times (-\partial_y \tau_n^N), \tag{2.94}$$

または，N を一つシフトして $\tau_n^N = \tau_n, \tau_n^{N+1} = \overline{\tau}_n$ と書けば

$$D_y\, \tau_n \cdot \overline{\tau}_n = \tau_{n+1}\overline{\tau}_{n-1}, \tag{2.95}$$

が得られる．これは (2.91) の第 1 式において，$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ としたものである．

問 2.3　$\tau_n^N = \tau_n, \tau_n^{N+1} = \overline{\tau}_n$ の場合に，(2.91) の第 2 式を導出せよ．微分公式 (2.2) を見ながら，(2.91) の第 2 式からどのような列が現れるかを推測し，Laplace 展開を適用するべき行列式を上手に作るのがポイントである．

注意：

(1) 2 次元戸田格子方程式の Lax 形式も $\overline{\tau}_n = \tau_n \Psi_n$ とおくことで作ることができ，

$$\begin{cases} \partial_y \Psi_n = -\lambda_1(1 + V_{n-1})\Psi_{n-1} + \lambda_2 \Psi_n, \\ \partial_x \Psi_n = -(I_n + \lambda_3)\Psi_n + \dfrac{1}{\lambda_1}\Psi_{n+1}, \end{cases} \tag{2.96}$$

となる．両立条件 $\partial_x(\partial_y \Psi_n) = \partial_y(\partial_x \Psi_n)$ より 2 次元戸田格子方程式 (2.4) が得られる．

(2) Bäcklund 変換の簡約も，方程式や解の簡約と同じようにすればよい．例えば戸田格子の場合は $t = x + y$, $s = x - y$ として s 依存性を落とし，sinh-Gordon 方程式, sine-Gordon 方程式の場合は 2 周期性を課せばよい．特に，sine-Gordon 方程式の Bäcklund 変換は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\theta - \overline{\theta}}{2}\right)_y &= -2\lambda_1 \sin\frac{\theta + \overline{\theta}}{2}, \\ \left(\frac{\theta + \overline{\theta}}{2}\right)_x &= -\frac{2}{\lambda_1} \sin\frac{\theta - \overline{\theta}}{2}, \end{aligned} \tag{2.97}$$

となるが，これは Bäcklund がユークリッド空間中の負の定曲率曲面の変換として 1875 年に導いたものである．

問 2.4　(2.97) から θ(または $\overline{\theta}$) を消去して，$\overline{\theta}$(または θ) に関する sine-Gordon 方程式 (2.55) を導け．

3　終わりに：さらなる学習に向けて

このノートでは，可積分系の持つ非常に多様な側面を τ 函数という切り口から可積分系の根幹をなす構造に切り込んだ．これを支える数理的な舞台装置は壮大なもので，それも複数の定式化がある．いわゆる KP 階層（2 次元戸田階層）の理論については，[13] が詳しい．大ざっぱに掴みたいならば [12] もよいだろう．また，解空間に作用する対称性の立場から Fermion や Boson を用いて定式化したいわゆる Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa の理論については [2] が詳しい．このアプローチは表現論など数学や物理のさまざまな分野と密接に関連し，最近の数学的な発展に直結する．ソリトン方程式の初期値問題を補助線形問題から解析的な手法で解く「逆散乱法」については [1] に詳しい．離散可積分系の理論については [4] や [7]，[15] に解説がある．可積分系の理論の中で非常に重要なクラスとして，パンルヴェ方程式や離散パンルヴェ方程式が知られており，日本での研究が大変進んでいる．これについては [9]，[11] などを参照するとよい．微分幾何との関連では，[6] や [16] が入門書として適当であろう．その他，可積分系の理論には

さまざまな切り口があり，多くの数学のように基礎から定義・定理式に積み上げて包括的に語ることは（このノートからも想像できるように）難しい[*13]．興味を持ったら可積分系の研究者にコンタクトを取ってみるとよいだろう[*14]．

参考文献

[1] M.J. アブロヴィッツ，H. シーガー著，薩摩順吉，及川正行訳，「ソリトンと逆散乱変換」，日本評論社 (1991).

[2] 三輪哲二，伊達悦朗，神保道夫著，「ソリトンの数理」，岩波書店 (2007).

[3] 広田良吾著，「直接法によるソリトンの数理」，岩波書店 (1992).

[4] 広田良吾，高橋大輔著 「差分と超離散」，共立出版 (2003).

[5] 伊理正夫著，「線形代数汎論」，朝倉書店 (2009).

[6] 井ノ口順一著，「曲線とソリトン」，朝倉書店 (2010).

[7] 若山正人編，「可視化の技術と現代幾何学」，岩波書店 (2010

[8] 中村佳正著，「可積分系の機能数理」，共立出版 (2006).

[9] 野海正俊著，「パンルヴェ方程式–対称性からの入門」，朝倉書店 (2000).

[10] 大貫義郎，吉田春夫著，「力学」，岩波書店 (1994).

[11] 岡本和夫著，「パンルヴェ方程式」，岩波書店 (2009).

[12] Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro, “An elementary introduction to Sato Theory”, Progr. Theor. Phys. Suppl. **94**(1988) 210–241.

[13] 高崎金久著，「可積分系の世界–戸田格子とその仲間」，共立出版 (2001).

[14] 戸田盛和著，「非線形格子力学」，岩波書店 (1987).

[15] 時弘哲治著，「箱玉系の数理」，朝倉書店 (2010).

[16] C. Rogers and W.K. Schief, “Bäcklund and Darboux Transformations–Geometry and Modern Applications in Soliton Theory” (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).

[*13] 可積分系が定義定理式で語れるようになるのは，分野の研究が終わったときであるという冗談がある．

[*14] もちろん私は喜んで相談に応じます．kaji@imi.kyushu-u.ac.jp までご連絡ください．