

ビームコア振動によって誘起される非線形共鳴の大強度陽子ビームのハロー形成と平衡状態への移行における役割

下崎, 義人
九州大学工学エネルギー量子

<https://doi.org/10.11501/3180392>

出版情報 : 九州大学, 2000, 博士 (工学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

第4章 孤立共鳴ハミルトニアン の 導出、最適化及び正当性の評価

PCM 解析では rms エミッタンスを定数として取り扱う。本論では、rms エミッタンスが時間的に変化する領域でもハロー解析が可能となる孤立共鳴ハミルトニアンによる解析手法を開発した。この章では孤立共鳴ハミルトニアン の 導出、計算パラメータの最適化及び導出した孤立共鳴ハミルトニアン の 正当性について論じる。

4-1 ハミルトニアン 公式化

非線形共鳴をハミルトニアンで解析する際、角変数及び作用変数に正準変換するのが便利である[13]。これは解析を行う際、ハミルトニアンにおける無摂動項は定数になるため、残りの摂動項にのみ着目すれば良いからである。

空間電荷効果を含むベータトロン振動は

$$x'' + K(s)x = \frac{eE_x(x, y; s)}{\gamma^2 \rho v}$$

$$y'' - K(s)y = \frac{eE_y(x, y; s)}{\gamma^2 \rho v}$$

で表される[13]。ここで $K(s) = \frac{eB'}{\rho v}$ で B' は四極磁石の磁場勾配である。このときハミルトニアンは

$$H(x, y, p_x, p_y; s) = H_0(x, y, p_x, p_y; s) + \frac{e\phi(x, y; s)}{\gamma^2 \rho v}$$

となる。ただし H_0 は空間電荷効果が無いときのハミルトニアン、 ϕ は実験室系での空間電荷ポテンシャルである。 H_0 について考える。空間電荷効果が無いときのベータトロン振動方程式の解は

$$x = \sqrt{\beta_x \epsilon_x} \cos \phi_x \tag{4-1}$$

となる。ここで ϵ_x はこの粒子が初期条件として持つエミッタンスである。式

(4-1)を微分すると

$$\beta_x p_x + \alpha_x x = -\sqrt{\beta_x \epsilon_x} \sin \phi_x$$

となり、さらに式(4-1)で割ると

$$p_x = -\frac{\tan \phi_x + \alpha_x}{\beta_x} x \quad (4-2)$$

が得られる。正準共役変数 (x, y, p_x, p_y) を、第1種母関数

$$F_1(x, y, \phi_x, \phi_y) = -\frac{\tan \phi_x + \alpha_x}{2\beta_x} x^2 - \frac{\tan \phi_y + \alpha_y}{2\beta_y} y^2 \quad (4-3)$$

を使って作用・角変数 $(\phi_x, \phi_y, J_x, J_y)$ に正準変換する。

$$p_x = \frac{\partial F_1}{\partial x}$$

$$p_y = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$J_x = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi_x} \quad (4-4)$$

$$J_y = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi_y} \quad (4-5)$$

式(4-3)を(4-4)及び(4-5)に代入すると

$$J_x = \frac{x^2}{2\beta_x} \frac{\partial}{\partial \phi_x} (\tan \phi_x + \alpha_x) = \frac{x^2}{2\beta_x \cos^2 \phi_x} = \frac{\epsilon_x}{2}$$

$$J_y = \frac{\epsilon_y}{2}$$

という関係が得られる。また正準方程式

$$\frac{\partial H_0}{\partial J_x} = \frac{d\phi_x}{ds} = \frac{1}{\beta_x}$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial J_y} = \frac{d\phi_y}{ds} = \frac{1}{\beta_y}$$

から

$$H_0(\phi_x, \phi_y, J_x, J_y; s) = \frac{J_x}{\beta_x} + \frac{J_y}{\beta_y}$$

であることがわかる。さらに H_0 を簡単にするために新しい角変数

$$\psi_x(s) = \phi_x(s) - \int \frac{ds}{\beta_x} + \frac{2\pi\nu_x}{C_0}s = \phi_x(s) - \int \frac{ds}{\beta_x} + \frac{\nu_x}{R_0}s \quad (4-6)$$

$$\psi_y(s) = \phi_y(s) - \int \frac{ds}{\beta_y} + \frac{\nu_y}{R_0}s$$

及び作用変数 I_x, I_y に正準変換する。ただし C_0 及び R_0 は、それぞれ円形加速器の周長と平均半径、 ν_x, ν_y は x, y 方向の bare tune である。 I_x に関しては任意性があるので、

$$I_x = J_x \quad (4-7)$$

$$I_y = J_y$$

という条件を与える。第 2 種母関数

$$F_2(\phi_x, \phi_y, I_x, I_y, s) = \left[\phi_x(s) - \int \frac{ds}{\beta_x} + \frac{v_x}{R_0} s \right] I_x + \left[\phi_y(s) - \int \frac{ds}{\beta_y} + \frac{v_y}{R_0} s \right] I_y \quad (4-8)$$

を用いると

$$J_x = \frac{\partial F_2}{\partial \phi_x}$$

$$J_y = \frac{\partial F_2}{\partial \phi_y}$$

$$\psi_x = \frac{\partial F_2}{\partial I_x}$$

$$\psi_y = \frac{\partial F_2}{\partial I_y}$$

$$H_1 = H_0 + \frac{\partial F_2}{\partial s} \quad (4-9)$$

である。ただし、 H_1 は新しい「空間電荷効果が無いときのハミルトニアン」である。式(4-9)に(4-7)及び(4-10)を代入すると、

$$H_1(\psi_x, I_x; s) = \frac{J_x}{\beta_x} + \frac{J_y}{\beta_y} - \frac{I_x}{\beta_x} - \frac{J_y}{\beta_y} + \frac{v_x}{R_0} I_x + \frac{v_y}{R_0} I_y = \frac{v_x}{R_0} I_x + \frac{v_y}{R_0} I_y$$

が得られる。よって空間電荷効果の影響を受けながらベータatron振動を行う粒子について、ハミルトニアンは

$$H(\psi_x, \psi_y, I_x, I_y; s) = \frac{v_x}{R_0} I_x + \frac{v_y}{R_0} I_y + \frac{e\phi(\psi_x, \psi_y, I_x, I_y; s)}{\gamma^2 \beta v} \quad (4-10)$$

となる。ここで独立変数を s から θ に変換する。ただし

$$\theta = \frac{s}{R_0}$$

である。このときのハミルトニアンを $K(\psi_x, \psi_y, I_x, I_y; \theta)$ とする。正準方程式

$$\frac{d\psi_x}{ds} = \frac{\partial H}{\partial I_x}$$

$$\frac{d\psi_x}{d\theta} = \frac{\partial K}{\partial I_x}$$

と

$$\frac{d\psi_x}{ds} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{d\psi_x}{d\theta} = \frac{1}{R_0} \frac{d\psi_x}{d\theta}$$

の関係を用いると $K = R_0 H$ の関係が得られる。

まとめると

$$x = \sqrt{2\beta_x I_x} \cos(\psi_x + \psi_{0,x}) \quad (4-11)$$

$$y = \sqrt{2\beta_y I_y} \cos(\psi_y + \psi_{0,y}) \quad (4-12)$$

$$\psi_{0,x} = \phi_{0,x} - \nu_x \theta$$

$$\psi_{0,y} = \phi_{0,y} - \nu_y \theta$$

$$\phi_{0,x} = \int \frac{ds}{\beta_x} = R_0 \int \frac{d\theta}{\beta_x}$$

$$\phi_{0,y} = \int \frac{ds}{\beta_y} = R_0 \int \frac{d\theta}{\beta_y}$$

$$s = R_0 \theta$$

の変換により、空間電荷効果の影響を受けながらベータatron振動を行う粒子のハミルトニアンは

$$H(\psi_x, \psi_y, I_x, I_y; \theta) = v_x I_x + v_y I_y + \frac{eR}{\gamma^2 \rho v} \varphi(\psi_x, \psi_y, I_x, I_y; \theta) \quad (4-13)$$

で与えられる。

3-2 空間電荷ポテンシャルの変形

x, y 方向にガウス分布を持つ2次元ビームが作る空間電荷ポテンシャルは

$$\varphi(x, y; s) = \frac{N}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} f_{n,r}(s) x^{2(n-r)} y^{2r} \quad (4-14)$$

$$f_{n,r}(s) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\{t + 2\sigma_x(s)^2\}^{n-r+1/2} \{t + 2\sigma_y(s)^2\}^{r+1/2}} \quad (4-15)$$

と表現できる [17]。ただし σ_x, σ_y は x, y 方向の rms ビームサイズ、 N は s 方向単位長さ当たりの総粒子数である。

ここでは式(4-14)に(4-11)及び(4-12)を代入し、空間電荷ポテンシャルに関して「粒子自身のベータatron振動に伴って振動する項 $e^{j(u\psi_x + v\psi_y)}$ 」と、「 β 関数、ビームサイズ及び flutter 等の外部要因により、 θ に関する陽の関数として振動する項 $g^{(n)}(\theta)$ 」に分離する。ただし、 j は虚数単位、 u, v は任意の整数である。数学公式

$$\cos^{2n} \theta = \frac{1}{2^{2n-1}} \left[\sum_{r=0}^{n-1} \binom{2n}{r} \cos(2n-2r)\theta + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right]$$

を用いる。式(4-14)を

$$\varphi(x, y; \theta) = \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} [f_{n,0}x^{2n} + f_{n,n}y^{2n}] + \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} f_{n,r} x^{2(n-r)} y^{2r} \quad (4-16)$$

と変形し、式(4-11)及び(4-12)を代入する。式(4-16)右辺第1項は

$$\begin{aligned} f_{n,0}x^{2n} &= f_{n,0}(2\beta_x I_x)^n \cos^{2n}(\psi_x + \psi_{0,x}) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} f_{n,0}(\beta_x I_x)^n \left[\sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \cos(2n-2l)(\psi_x + \psi_{0,x}) + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right] \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} f_{n,0} \beta_x^n I_x^n \left[\frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \left\{ \cos(2n-2l)\psi_{0,x} \cos(2n-2l)\psi_x - \sin(2n-2l)\psi_{0,x} \sin(2n-2l)\psi_x \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} f_{n,0} \beta_x^n I_x^n + \frac{1}{2^{n-1}} f_{n,0} \beta_x^n I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \cos(2n-2l)\psi_{0,x} \cos(2n-2l)\psi_x \\ &\quad - \frac{1}{2^{n-1}} f_{n,0} \beta_x^n I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sin(2n-2l)\psi_{0,x} \sin(2n-2l)\psi_x \end{aligned}$$

θ に依存する項をまとめて $g^{(n)}(\theta)$ で表すと

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} g_n^{(0)}(\theta) I_x^n + \frac{1}{2^{n-1}} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} g_{n,l}^{(1)}(\theta) \cos(2n-2l)\psi_x \\ &\quad - \frac{1}{2^{n-1}} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} g_{n,l}^{(2)}(\theta) \sin(2n-2l)\psi_x \end{aligned} \quad (4-17)$$

$$g_n^{(0)}(\theta) = f_{n,0} \beta_x^n$$

$$g_{n,l}^{(1)}(\theta) = f_{n,0} \beta_x^n \cos(2n-2l)\psi_{0,x}$$

$$g_{n,l}^{(2)}(\theta) = f_{n,0} \beta_x^n \sin(2n-2l)\psi_{0,x}$$

となる。同様に式(4-16)右辺第2項は

$$\begin{aligned}
 f_{n,n}y^{2n} &= f_{n,n}(2\beta_y I_y)^n \cos^{2n}(\psi_y + \psi_{0,y}) \\
 &= f_{n,n}(\beta_y I_y)^n \frac{1}{2^{n-1}} \left[\sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \cos(2n-2l)(\psi_y + \psi_{0,y}) + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right] \\
 &= \frac{1}{2^{n-1}} f_{n,n} \beta_y^n I_y^n \left[\frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \left\{ \cos(2n-2l)\psi_{0,y} \cos(2n-2l)\psi_y - \sin(2n-2l)\psi_{0,y} \sin(2n-2l)\psi_y \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} f_{n,n} \beta_y^n I_y^n + \frac{1}{2^{n-1}} f_{n,n} \beta_y^n I_y^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \cos(2n-2l)\psi_{0,y} \cos(2n-2l)\psi_y \\
 &\quad - \frac{1}{2^{n-1}} f_{n,n} \beta_y^n I_y^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sin(2n-2l)\psi_{0,y} \sin(2n-2l)\psi_y \\
 &= \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} g_n^{(3)}(\theta) I_y^n + \frac{1}{2^{n-1}} I_y^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} g_{n,l}^{(4)}(\theta) \cos(2n-2l)\psi_y \\
 &\quad - \frac{1}{2^{n-1}} I_y^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} g_{n,l}^{(5)}(\theta) \sin(2n-2l)\psi_y \tag{4-18}
 \end{aligned}$$

$$g_n^{(3)}(\theta) = f_{n,n} \beta_y^n$$

$$g_{n,l}^{(4)}(\theta) = f_{n,n} \beta_y^n \cos(2n-2l)\psi_{0,y}$$

$$g_{n,l}^{(5)}(\theta) = f_{n,n} \beta_y^n \sin(2n-2l)\psi_{0,y}$$

となる。式(4-16)右辺第3項については

$$f_{n,r}x^{2(n-r)}y^{2r} = f_{n,r}(2\beta_x I_x)^{n-r}(2\beta_y I_y)^r \cos^{2(n-r)}(\psi_x + \psi_{0,x}) \cos^{2r}(\psi_y + \psi_{0,y})$$

$$\begin{aligned}
&= f_{n,r}(2\beta_x I_x)^{n-r}(2\beta_y I_y)^r \\
&\quad \times \frac{1}{2^{2n-2r-1}} \left[\sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} \cos(2n-2r-2l)(\psi_x + \psi_{0,x}) + \frac{1}{2} \binom{2n-2r}{n-r} \right] \\
&\quad \times \frac{1}{2^{2r-1}} \left[\sum_{m=0}^{r-1} \binom{2r}{m} \cos(2r-2m)(\psi_y + \psi_{0,y}) + \frac{1}{2} \binom{2r}{r} \right] \\
&= \frac{1}{2^{n-2}} f_{n,r} \beta_x^{n-r} I_x^{n-r} \beta_y^r I_y^r \left[\frac{1}{4} \binom{2n-2r}{n-r} \binom{2r}{r} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \binom{2r}{r} \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} \cos(2n-2r-2l)(\psi_x + \psi_{0,x}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \binom{2n-2r}{n-r} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2r}{m} \cos(2r-2m)(\psi_y + \psi_{0,y}) \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} \cos(2n-2r-2l)(\psi_x + \psi_{0,x}) \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2r}{m} \cos(2r-2m)(\psi_y + \psi_{0,y}) \right] \\
&= \frac{1}{2^{n-2}} f_{n,r} \beta_x^{n-r} I_x^{n-r} \beta_y^r I_y^r \left[\frac{1}{4} \binom{2n-2r}{n-r} \binom{2r}{r} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \binom{2r}{r} \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} \cos(2n-2r-2l)(\psi_x + \psi_{0,x}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \binom{2n-2r}{n-r} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2r}{m} \cos(2r-2m)(\psi_y + \psi_{0,y}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} \cos\{(2l-2r-2l)(\psi_x + \psi_{0,x}) + (2r-2m)(\psi_y + \psi_{0,y})\} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} \cos\{(2n-2r-2l)(\psi_x + \psi_{0,x}) - (2r-2m)(\psi_y + \psi_{0,y})\} \right] \\
&= \frac{1}{2^{n-2}} f_{n,r} \beta_x^{n-r} I_x^{n-r} \beta_y^r I_y^r \left[\frac{1}{4} \binom{2n-2r}{n-r} \binom{2r}{r} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \binom{2r}{r} \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} \cos(2n-2r-2l) \psi_{0,x} \cos(2n-2r-2l) \psi_x \\
&\quad - \frac{1}{2} \binom{2r}{r} \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} \sin(2n-2r-2l) \psi_{0,x} \sin(2n-2r-2l) \psi_x \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \binom{2n-2r}{n-r} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2r}{m} \cos(2r-2m) \psi_{0,y} \cos(2r-2m) \psi_y \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \binom{2n-2r}{n-r} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2r}{m} \sin(2r-2m)\psi_{0,y} \sin(2r-2m)\psi_y \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} \\
& \quad \times \cos\{(2n-2r-2l)\psi_{0,x} + (2r-2m)\psi_{0,y}\} \cos\{(2n-2r-2l)\psi_x + (2r-2m)\psi_y\} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} \\
& \quad \times \sin\{(2n-2r-2l)\psi_{0,x} + (2r-2m)\psi_{0,y}\} \sin\{(2n-2r-2l)\psi_x + (2r-2m)\psi_y\} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} \\
& \quad \times \cos\{(2n-2r-2l)\psi_{0,x} - (2r-2m)\psi_{0,y}\} \cos\{(2n-2r-2l)\psi_x - (2r-2m)\psi_y\} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} \\
& \quad \times \sin\{(2n-2r-2l)\psi_{0,x} - (2r-2m)\psi_{0,y}\} \sin\{(2n-2r-2l)\psi_x - (2r-2m)\psi_y\} \\
& = \frac{1}{2^n} \binom{2n-2r}{1-r} \binom{2r}{r} g_n^{(6)}(\theta) I_x^{n-r} I_y^r \\
& + \frac{1}{2^{n-1}} I_x^{n-r} I_y^r \binom{2r}{r} \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} g_{n,r,l}^{(7)}(\theta) \cos(2n-2r-2l)\psi_x \\
& - \frac{1}{2^{n-1}} I_x^{n-r} I_y^r \binom{2r}{r} \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} g_{n,r,l}^{(8)}(\theta) \sin(2n-2r-2l)\psi_x \\
& + \frac{1}{2^{n-1}} I_x^{n-r} I_y^r \binom{2n-2r}{n-r} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2r}{m} g_{n,r,m}^{(9)}(\theta) \cos(2r-2m)\psi_y \\
& - \frac{1}{2^{n-1}} I_x^{n-r} I_y^r \binom{2n-2r}{n-r} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2r}{m} g_{n,r,m}^{(10)}(\theta) \sin(2r-2m)\psi_y \\
& + \frac{1}{2^{n-1}} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} g_{n,r,l,m}^{(11)}(\theta) \cos\{(2n-2r-2l)\psi_x + (2r-2m)\psi_y\} \\
& - \frac{1}{2^{n-1}} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} g_{n,r,l,m}^{(12)}(\theta) \sin\{(2n-2r-2l)\psi_x + (2r-2m)\psi_y\} \\
& + \frac{1}{2^{n-1}} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} g_{n,r,l,m}^{(13)}(\theta) \cos\{(2n-2r-2l)\psi_x - (2r-2m)\psi_y\}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2^{n-1}} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} g_{n,r,l,m}^{(14)}(\theta) \sin\{(2n-2r-2l)\psi_x - (2r-2m)\psi_y\}$$

(4-19)

$$g_{n,r}^{(6)}(\theta) = f_{n,r} \beta_x^{n-r} \beta_y^r$$

$$g_{n,r,l}^{(7)}(\theta) = f_{n,r} \beta_x^{n-r} \beta_y^r \cos(2n-2r-2l)\psi_{0,x}$$

$$g_{n,r,l}^{(8)}(\theta) = f_{n,r} \beta_x^{n-r} \beta_y^r \sin(2n-2r-2l)\psi_{0,x}$$

$$g_{n,r,m}^{(9)}(\theta) = f_{n,r} \beta_x^{n-r} \beta_y^r \cos(2r-2m)\psi_{0,y}$$

$$g_{n,r,m}^{(10)}(\theta) = f_{n,r} \beta_x^{n-r} \beta_y^r \sin(2r-2m)\psi_{0,y}$$

$$g_{n,r,l,m}^{(11)}(\theta) = f_{n,r} \beta_x^{n-r} \beta_y^r \cos\{(2n-2r-2l)\psi_{0,x} + (2r-2m)\psi_{0,y}\}$$

$$g_{n,r,l,m}^{(12)}(\theta) = f_{n,r} \beta_x^{n-r} \beta_y^r \sin\{(2n-2r-2l)\psi_{0,x} + (2r-2m)\psi_{0,y}\}$$

$$g_{n,r,l,m}^{(13)}(\theta) = f_{n,r} \beta_x^{n-r} \beta_y^r \cos\{(2n-2r-2l)\psi_{0,x} - (2r-2m)\psi_{0,y}\}$$

$$g_{n,r,l,m}^{(14)}(\theta) = f_{n,r} \beta_x^{n-r} \beta_y^r \sin\{(2n-2r-2l)\psi_{0,x} - (2r-2m)\psi_{0,y}\}$$

となる。

式(4-17)、(4-18)及び(4-19)をまとめると、空間電荷ポテンシャルの作用・角変数表示は

$$\begin{aligned} \varphi(\psi_x, \psi_y, I_x, I_y; \theta) &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} g_n^{(0)}(\theta) I_x^n \\ &+ \frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} g_{n,l}^{(1)}(\theta) \cos(2n-2l)\psi_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} g_{n,l}^{(2)}(\theta) \sin(2n-2l)\psi_x \\
& +\frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} g_n^{(3)}(\theta) I_y^n \\
& +\frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_y^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} g_{n,l}^{(4)}(\theta) \cos(2n-2l)\psi_y \\
& -\frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_y^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} g_{n,l}^{(5)}(\theta) \sin(2n-2l)\psi_y \\
& +\frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-r} \binom{2r}{r} g_n^{(6)}(\theta) I_x^{n-r} I_y^r \\
& +\frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} g_{n,r,l}^{(7)}(\theta) \cos(2n-2r-2l)\psi_x \\
& -\frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} g_{n,r,l}^{(8)}(\theta) \sin(2n-2r-2l)\psi_x \\
& +\frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2r}{m} g_{n,r,m}^{(9)}(\theta) \cos(2r-2m)\psi_y \\
& -\frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2r}{m} g_{n,r,m}^{(10)}(\theta) \sin(2r-2m)\psi_y \\
& +\frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} g_{n,r,l,m}^{(11)}(\theta) \\
& \quad \times \cos\{(2n-2r-2l)\psi_x + (2r-2m)\psi_y\} \\
& -\frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} g_{n,r,l,m}^{(12)}(\theta) \\
& \quad \times \sin\{(2n-2r-2l)\psi_x + (2r-2m)\psi_y\} \\
& +\frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} g_{n,r,l,m}^{(13)}(\theta) \\
& \quad \times \cos\{(2n-2r-2l)\psi_x - (2r-2m)\psi_y\} \\
& -\frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} I_x^{n-r} I_y^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{2n-2r}{l} \binom{2r}{m} g_{n,r,l,m}^{(14)}(\theta) \\
& \quad \times \sin\{(2n-2r-2l)\psi_x - (2r-2m)\psi_y\}
\end{aligned} \tag{4-20}$$

となる。

3-3 孤立共鳴ハミルトニアンへの導出

式(4-20)を(4-13)に代入すると、2次元ガウス分布ビームのベータatron振動に関するハミルトニアンが得られる。ここで $g^{(\eta)}(\theta)$ が少なくともリング1周についての周期性、すなわち 2π の周期性を持つと仮定し、これをフーリエ級数に展開する。

$$g^{(\eta)}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)^{(\eta)} e^{jk\theta} \quad (4-21)$$

$$G(k)^{(\eta)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{(\eta)}(\theta) e^{-jk\theta} d\theta \quad (4-22)$$

式(4-21)を式(4-20)に代入すると、式(4-21)の各項は

$$g^{(\eta)}(\theta) e^{j(u\psi_x + v\psi_y)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)^{(\eta)} e^{j(u\psi_x + v\psi_y + k\theta)} \quad (4-23)$$

という形で表される。このとき各項の $e^{j(u\psi_x + v\psi_y + k\theta)}$ がハミルトニアンの振動項を表す。

ここでハミルトニアンの振動項と共鳴項の関係を考える。今、ハミルトニアンを

$$H = f(J_x) \cos(u\psi_x + v\psi_y + k\theta)$$

で表すと、正準方程式より

$$\frac{dJ_x}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_x} = uf(J_x) \sin(u\psi_x + v\psi_y + k\theta) \quad (4-24)$$

となる。ただし $f(J_x)$ は J_x に関する任意の関数である。今、 $uv_{s.c.x} + v\psi_{s.c.y} + k \approx 0$

の場合を考える。ただし

$$v_{s.c.x} = \frac{d\psi_x}{d\theta}$$

$$v_{s.c.y} = \frac{d\psi_y}{d\theta}$$

で $v_{s.c.x}, v_{s.c.y}$ は depressed tune である。このとき、 $\sin(u\psi_x + v\psi_y + k\theta) \approx \text{const.}$ と考えることができる。このため作用・角変数で表される位相空間上で、 $uf(J_x)\sin(u\psi_x + v\psi_y + k\theta) > 0$ を満足する $(\psi_x, \psi_y, J_x, J_y)$ を持つ粒子に関しては、式(4-24)より J_x は時間と共に一方的に増加していく。このような状態が共鳴となる。 $uv_{s.c.x} + v_{s.c.y} + k$ が大きいとき、式(4-24)は時間的に速く振動するため、 $\frac{dJ_x}{d\theta}$ の時間平均を取ると 0 となる。このとき、 J_x の変動が生じないため、共鳴は起きていないと言える。以上のことから、式(4-7)を式(4-6)に代入した式について、 $uv_{s.c.x} + v_{s.c.y} + k \approx 0$ となる項が、ハミルトニアン の 共鳴項であることがわかる。ハミルトニアン の 時間平均を取ると、速い振動を含む項は 0 になるため、共鳴に寄与する項のみを残すことができる[16]。このようにして得られたハミルトニアンを孤立共鳴ハミルトニアンという。

ここでは、 x 方向の共鳴のみがある場合を考える。また最低次の共鳴が $2\delta v_{s.c.x} - \kappa \approx 0$ の時に生じるものと仮定する。 δ, κ は整数である。 k が κ の整数倍になるたびに共鳴項が現れうる。具体的な例を示すと、最低次の共鳴が $4v_{s.c.x} - 1 \approx 0$ (このとき $\delta = 2, \kappa = 1$) のとき $8v_{s.c.x} - 2 \approx 0$ 及び $12v_{s.c.x} - 3 \approx 0$ も共鳴項となりうる。今、式(4-20)の時間平均値を取り、共鳴に依存する部分のみを抜き出すことを考える。ただし I_x, I_y はゆっくりと変化すると仮定する。まず式(4-20)右辺第 5 項、第 6 項、第 10 項～第 15 項については、共鳴条件である遅い振動項 ($2\delta v_{s.c.x} - \kappa \approx 0$) が存在しないので、時間平均は 0 となる。次に式(4-20)右辺第 1 項、第 4 項及び第 7 項について、振動項は時間平均を取ると消え、定数項のみ残る。

$$\langle \text{第 1 項} \rangle = \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{2n}{n} G^{(0)}_n^{(0)} \left(-\frac{I_x}{2} \right)^n \quad (4-26)$$

$$\langle \text{第 3 項} \rangle = \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{2n}{n} G(0)_n^{(3)} \left(-\frac{I_y}{2}\right)^n \quad (4-27)$$

$$\langle \text{第 7 項} \rangle = \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-r} \binom{2r}{r} G(0)_{n,r}^{(6)} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(-\frac{I_y}{2}\right)^r \quad (4-28)$$

次に式(4-20)右辺第 2 項について考える。

$$\begin{aligned} \langle \text{第 2 項} \rangle &= \frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,l}^{(1)} (\cos k\theta + j \sin k\theta) \cos(2n-2l)\psi_x \right\rangle \\ &= \frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,l}^{(1)} \cos k\theta \cos(2n-2l)\psi_x \right\rangle \\ &\quad + j \frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,l}^{(1)} \sin k\theta \cos(2n-2l)\psi_x \right\rangle \\ &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,l}^{(1)} \cos\{(2n-2l)\psi_x + k\theta\} \right\rangle \\ &\quad + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,l}^{(1)} \cos\{(2n-2l)\psi_x - k\theta\} \right\rangle \\ &\quad + j \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,l}^{(1)} \sin\{(2n-2l)\psi_x + k\theta\} \right\rangle \\ &\quad - j \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,l}^{(1)} \sin\{(2n-2l)\psi_x - k\theta\} \right\rangle \quad (4-29) \end{aligned}$$

式(4-29)に関して $k = i\kappa$ (i は整数)のみを抜き出すと

$$\begin{aligned} &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \cos\{(2n-2l)\psi_x + i\kappa\theta\} \right\rangle \\ &\quad + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \cos\{(2n-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right\rangle \\ &\quad + j \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \sin\{(2n-2l)\psi_x + i\kappa\theta\} \right\rangle \end{aligned}$$

$$-j \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \sin\{(2n-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right\rangle$$

となる。周波数が $(2n-2l)v_{s.c.x} - i\kappa$ となる項のみを残すと

$$\begin{aligned} &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=-\infty}^{-1} G(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \cos\{(2n-2l)\psi_x + i\kappa\theta\} \right\rangle \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=1}^{\infty} G(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \cos\{(2n-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right\rangle \\ &+ j \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=-\infty}^{-1} G(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \sin\{(2n-2l)\psi_x + i\kappa\theta\} \right\rangle \\ &- j \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=1}^{\infty} G(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \sin\{(2n-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right\rangle \end{aligned}$$

となり、上式の第1項及び第3項についてのみ $i = -i$ に変換すると

$$\begin{aligned} &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=1}^{\infty} G(-i\kappa)_{n,l}^{(1)} \cos\{(2n-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right\rangle \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=1}^{\infty} G(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \cos\{(2n-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right\rangle \\ &+ j \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=1}^{\infty} G(-i\kappa)_{n,l}^{(1)} \sin\{(2n-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right\rangle \\ &- j \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=1}^{\infty} G(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \sin\{(2n-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right\rangle \\ &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=1}^{\infty} P(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \cos\{(2n-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right\rangle \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} I_x^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{i=1}^{\infty} Q(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \sin\{(2n-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right\rangle \end{aligned}$$

ただし

$$P(i\kappa)_{n,l}^{(1)} = G(-i\kappa)_{n,l}^{(1)} + G(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \quad (4-30)$$

$$Q(i\kappa)_{n,l}^{(1)} = jG(-i\kappa)_{n,l}^{(1)} - jG(i\kappa)_{n,l}^{(1)} \quad (4-31)$$

となる。\$2n-2l=2i\delta\$ のとき共鳴が起きるので、時間平均により \$l=n-i\delta\$ が残る。よって \$0 \le l \le n-1\$ より \$n \ge i\delta\$ かつ \$i \ge 1\$ が残る。よって式(4-20)右辺第 2 項の共鳴項は

$$\begin{aligned} \langle \text{第 2 項} \rangle &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i\delta}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} P(i\kappa)_{n,n-i\delta}^{(1)} \cos i(2\delta\psi_x - \kappa\theta) \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i\delta}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} Q(i\kappa)_{n,n-i\delta}^{(1)} \sin i(2\delta\psi_x - \kappa\theta) \end{aligned} \quad (4-32)$$

となる。

式(4-20)右辺第 3 項についても同様にすると

$$\begin{aligned} \langle \text{第 3 項} \rangle &= -\frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i\delta}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} P(i\kappa)_{n,n-i\delta}^{(2)} \sin i(2\delta\psi_x - \kappa\theta) \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i\delta}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} Q(i\kappa)_{n,n-i\delta}^{(2)} \cos i(2\delta\psi_x - \kappa\theta) \end{aligned} \quad (4-33)$$

$$P(i\kappa)_{n,l}^{(2)} = G(-i\kappa)_{n,l}^{(2)} + G(i\kappa)_{n,l}^{(2)} \quad (4-34)$$

$$Q(i\kappa)_{n,l}^{(2)} = jG(-i\kappa)_{n,l}^{(2)} - jG(i\kappa)_{n,l}^{(2)} \quad (4-35)$$

が得られる。

次に式(4-20)右辺第 5 項について

$$\begin{aligned} \langle \text{第 5 項} \rangle &= \frac{eN}{2\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^{r} \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} \right. \\ &\times \left. \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,r,l}^{(7)} \cos k\theta \cos(2n-2r-2l)\psi_x + j \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,r,l}^{(7)} \sin k\theta \cos(2n-2r-2l)\psi_x \right] \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} \right. \\
&\times \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,r,l}^{(7)} \cos\{(2n-2r-2l)\psi_x + k\theta\} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,r,l}^{(7)} \cos\{(2n-2r-2l)\psi_x - k\theta\} \right. \\
&\left. \left. + j \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,r,l}^{(7)} \sin\{(2n-2r-2l)\psi_x + k\theta\} - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)_{n,r,l}^{(7)} \sin\{(2n-2r-2l)\psi_x - k\theta\} \right] \right\rangle
\end{aligned}$$

周波数が $(2n-2r-2l)v_{s.c.x} - i\kappa$ となる項のみ残すと

$$\begin{aligned}
&= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} \right. \\
&\times \left[\sum_{i=1}^{\infty} G(-i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} \cos\{(2n-2r-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} G(i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} \cos\{(2n-2r-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \\
&+ j \sum_{i=1}^{\infty} G(-i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} \sin\{(2n-2r-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \\
&\left. \left. - j \sum_{i=1}^{\infty} G(i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} \sin\{(2n-2r-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right] \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r \sum_{l=0}^{n-r-1} \binom{2n-2r}{l} \right. \\
&\times \left[\sum_{i=1}^{\infty} P(i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} \cos\{(2n-2r-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right. \\
&\left. \left. + \sum_{i=1}^{\infty} Q(i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} \sin\{(2n-2r-2l)\psi_x - i\kappa\theta\} \right] \right\rangle
\end{aligned}$$

$$P(i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} = G(-i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} + G(i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} \quad (4-36)$$

$$Q(i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} = jG(-i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} - jG(i\kappa)_{n,r,l}^{(7)} \quad (4-37)$$

となる。 $2n-2r-2l=2i\delta$ のとき非線形共鳴が起きるので、 $l=n-r-i\delta$ が残る。よって $0 \leq l \leq n-r-1$ より $r \leq n-i\delta$ 及び $i \geq 1$ が残り、また $1 \leq r \leq n-1$ より $n \geq 1+i\delta$ が

残る。よって

$$\begin{aligned} \langle \text{第 5 項} \rangle &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1+i\delta}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{-i\delta}}{n!} \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r-i\delta} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r \\ &\quad \times \left[P(i\kappa)_{n,r,n-r-i\delta}^{(7)} \cos i(2\delta\psi_x - \kappa\theta) + Q(i\kappa)_{n,r,n-r-i\delta}^{(7)} \sin i(2\delta\psi_x - \kappa\theta) \right] \quad (4-38) \end{aligned}$$

が得られる。

式(4-20)右辺第 6 項についても式(4-38)と同様にして

$$\begin{aligned} \langle \text{第 5 項} \rangle &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1+i\delta}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{-i\delta}}{n!} \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r-i\delta} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r \\ &\quad \times \left[-P(i\kappa)_{n,r,n-r-i\delta}^{(8)} \sin i(2\delta\psi_x - \kappa\theta) + Q(i\kappa)_{n,r,n-r-i\delta}^{(8)} \cos i(2\delta\psi_x - \kappa\theta) \right] \quad (4-39) \end{aligned}$$

$$P(i\kappa)_{n,r,l}^{(8)} = G(-i\kappa)_{n,r,l}^{(8)} + G(i\kappa)_{n,r,l}^{(8)} \quad (4-40)$$

$$Q(i\kappa)_{n,r,l}^{(8)} = jG(-i\kappa)_{n,r,l}^{(8)} - jG(i\kappa)_{n,r,l}^{(8)} \quad (4-41)$$

が得られる。

式(4-26)~(4-41)をまとめると、孤立共鳴ハミルトニアンは

$$\langle H(\psi_x, I_x, I_y; \theta) \rangle = v_x I_x + v_y I_y + \frac{eR_0}{\gamma^2 \rho v} \langle \varphi(\psi_x, I_x, I_y; \theta) \rangle \quad (4-42)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\psi_x, I_x, I_y; \theta) \rangle &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{2n}{n} G(0)_n^{(0)} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \\ &\quad + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{2n}{n} G(0)_n^{(3)} \left(-\frac{I_y}{2}\right)^n \\ &\quad + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-r} \binom{2r}{r} G(0)_{n,r}^{(6)} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(-\frac{I_y}{2}\right)^r \\ &\quad + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i\delta}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} S_1(i, n) \cos i(2\delta\psi_x - \kappa\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i\delta}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} S_2(i, n) \sin i(2\delta\psi_x - \kappa\theta) \\
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1+i\delta}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^{n-i\delta} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r-i\delta} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r S_3(i, n, r) \cos i(2\delta\psi_x - \kappa\theta) \\
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1+i\delta}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^{n-i\delta} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r-i\delta} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r S_4(i, n, r) \sin i(2\delta\psi_x - \kappa\theta)
\end{aligned} \tag{4-43}$$

となる。ただし

$$S_1(i, n) = P(i\kappa)_{n, n-i\delta}^{(1)} + Q(i\kappa)_{n, n-i\delta}^{(2)} \tag{4-44}$$

$$S_2(i, n) = -P(i\kappa)_{n, n-i\delta}^{(2)} + Q(i\kappa)_{n, n-i\delta}^{(1)} \tag{4-45}$$

$$S_3(i, n, r) = P(i\kappa)_{n, r, n-r-i\delta}^{(7)} + Q(i\kappa)_{n, r, n-r-i\delta}^{(8)} \tag{4-46}$$

$$S_4(i, n, r) = -P(i\kappa)_{n, r, n-r-i\delta}^{(8)} + Q(i\kappa)_{n, r, n-r-i\delta}^{(7)} \tag{4-47}$$

である。

式(4-44)~(4-47)について考える。フーリエ係数 $G(k)^{(n)}$ について

$$G(k)^{(n)} = u(k)^{(n)} + jv(k)^{(n)} \tag{4-48}$$

と定義する。定義式(4-22)より

$$\begin{aligned}
G(k)^{(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{(n)}(\theta) e^{-jk\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{(n)}(\theta) \cos(k\theta) d\theta - j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{(n)}(\theta) \sin(k\theta) d\theta
\end{aligned}$$

$g^{(\eta)}(\theta)$ は実数のみからなる関数なので

$$u(k)^{(\eta)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{(\eta)}(\theta) \cos(k\theta) d\theta \quad (4-49)$$

$$v(k)^{(\eta)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{(\eta)}(\theta) \sin(k\theta) d\theta \quad (4-50)$$

である。これを用いると $G(-k)^{(\eta)}$ について

$$\begin{aligned} G(-k)^{(\eta)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{(\eta)}(\theta) e^{jk\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{(\eta)}(\theta) \cos(k\theta) d\theta + j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{(\eta)}(\theta) \sin(k\theta) d\theta \\ &= u(k)^{(\eta)} - jv(k)^{(\eta)} \end{aligned}$$

となる。故に式(4-48)~(4-50)から

$$P(i\kappa)^{(\eta)} = G(-i\kappa)^{(\eta)} + G(i\kappa)^{(\eta)} = 2u(i\kappa)^{(\eta)} \quad (4-51)$$

$$Q(i\kappa)^{(\eta)} = jG(-i\kappa)^{(\eta)} - jG(i\kappa)^{(\eta)} = 2v(i\kappa)^{(\eta)} \quad (4-52)$$

が得られる。式(4-44)~(4-47)は式(4-51)及び(4-52)を代入することで簡単になる。まず式(4-44)について

$$P(i\kappa)_{n,n-i\delta}^{(1)} = 2u(i\kappa)_{n,n-i\delta}^{(1)} \quad (4-53)$$

$$Q(i\kappa)_{n,n-i\delta}^{(2)} = 2v(i\kappa)_{n,n-i\delta}^{(2)} \quad (4-54)$$

である。定義式

$$g_{n,l}^{(1)}(\theta) = f_{n,0} \beta_x^n \cos(2n-2l)\psi_{0,x}$$

$$g_{n,l}^{(2)}(\theta) = f_{n,0} \beta_x^n \sin(2n-2l)\psi_{0,x}$$

及び式(4-15)を、式(4-49)及び(4-50)に代入すると

$$u(i\kappa)_{n,n-i\delta}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\beta_x^n}{(t+2\sigma_x^2)^{n+1/2} (t+2\sigma_y^2)^{1/2}} \cos(2i\delta\psi_{0,x}) \cos(i\kappa\theta) d\theta dt \quad (4-55)$$

$$v(i\kappa)_{n,n-i\delta}^{(2)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\beta_x^n}{(t+2\sigma_x^2)^{n+1/2} (t+2\sigma_y^2)^{1/2}} \sin(2i\delta\psi_{0,x}) \sin(i\kappa\theta) d\theta dt \quad (4-56)$$

となる。式(4-53)～(4-56)を式(4-44)に代入すると

$$S_1(i,n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\beta_x^n}{(t+2\sigma_x^2)^{n+1/2} (t+2\sigma_y^2)^{1/2}} \cos i(2\delta\psi_{0,x} + \kappa\theta) d\theta dt \quad (4-57)$$

が得られる。式(4-45)～(4-46)についても同様にすると

$$S_2(i,n) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\beta_x^n}{(t+2\sigma_x^2)^{n+1/2} (t+2\sigma_y^2)^{1/2}} \sin i(2\delta\psi_{0,x} + \kappa\theta) d\theta dt \quad (4-58)$$

$$S_3(i,n,r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\beta_x^{n-r} \beta_y^r}{(t+2\sigma_x^2)^{n-r+1/2} (t+2\sigma_y^2)^{r+1/2}} \cos i(2\delta\psi_{0,x} + \kappa\theta) d\theta dt \quad (4-59)$$

$$S_4(i,n,r) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\beta_x^{n-r} \beta_y^r}{(t+2\sigma_x^2)^{n-r+1/2} (t+2\sigma_y^2)^{r+1/2}} \sin i(2\delta\psi_{0,x} + \kappa\theta) d\theta dt \quad (4-60)$$

が得られる。尚、 $G(0)_n^{(0)}$, $G(0)_n^{(3)}$, $G(0)_{n,r}^{(6)}$ は定義式(4-15)及び

$$g_n^{(0)}(\theta) = f_{n,0} \beta_x^n$$

$$g_n^{(3)}(\theta) = f_{n,n} \beta_y^n$$

$$g_{n,r}^{(6)}(\theta) = f_{n,r} \beta_x^{n-r} \beta_y^r$$

を用いることにより

$$G(0)_n^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dt \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\beta_x^n}{(t+2\sigma_x^2)^{n+1/2} (t+2\sigma_y^2)^{1/2}} \quad (4-61)$$

$$G(0)_n^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dt \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\beta_y^n}{(t+2\sigma_x^2)^{1/2} (t+2\sigma_y^2)^{n+1/2}} \quad (4-62)$$

$$G(0)_{n,r}^{(6)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dt \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\beta_x^{n-r} \beta_y^r}{(t+2\sigma_x^2)^{n-r+1/2} (t+2\sigma_y^2)^{r+1/2}} \quad (4-63)$$

で与えられる。さらに $\int_0^\infty \frac{dt}{(t+a^2)^{n-r+1/2} (t+b^2)^{r+1/2}}$ に関する数学公式 (付録 A 参照) を用いて式(4-57)~(4-63)を t で積分すると、

$$S_1(i,n) = \frac{2}{\pi} \sum_{u=0}^{n-1} a_{n,u} \int_0^{2\pi} h_x^n \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right)^u \cos i(2\delta\psi_{0,x} + \kappa\theta) d\theta \quad (4-64)$$

$$S_2(i,n) = \frac{2}{\pi} \sum_{u=0}^{n-1} a_{n,u} \int_0^{2\pi} h_x^n \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right)^u \sin i(2\delta\psi_{0,x} + \kappa\theta) d\theta \quad (4-65)$$

$$S_3(i,n,r) = \frac{2}{\pi} \sum_{u=0}^{n-2} c_{n,r,u} \int_0^{2\pi} h_x^{n-r} h_{xy}^r \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right)^{u-2r+1} \cos i\{2\delta\psi_{0,x}(\theta) + \kappa\theta\} d\theta \quad (4-66)$$

$$S_4(i,n,r) = -\frac{2}{\pi} \sum_{u=0}^{n-2} c_{n,r,u} \int_0^{2\pi} h_x^{n-r} h_{xy}^r \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right)^{u-2r+1} \sin i\{2\delta\psi_{0,x}(\theta) + \kappa\theta\} d\theta \quad (4-67)$$

$$G(0)_n^{(0)} = \frac{1}{\pi} \sum_{u=0}^{n-1} a_{n,u} \int_0^{2\pi} h_x^n \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right)^u d\theta \quad (4-68)$$

$$G(0)_{n,r}^{(6)} = \frac{1}{\pi} \sum_{u=0}^{n-2} c_{n,r,u} \int_0^{2\pi} h_x^{n-r} h_{xy}^r \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right)^{u-2r+1} d\theta \quad (4-69)$$

$$a_{n,0} = (-1)^n \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$a_{n,2m} = \sum_{u=1}^{2m} \binom{n}{u} (-1)^{u+1} a_{n,2m-u}$$

$$a_{n,2m+1} = \sum_{u=1}^{2m+1} \binom{n}{u} (-1)^{-u+1} a_{n,2m-u+1} + \frac{(-1)^{m-n-1} (n-1)}{2m+1} \binom{n-1}{m}$$

$$c_{n,r,0} = \frac{(-1)^n}{2r-1}$$

$$c_{n,r,m-1} = \begin{cases} \sum_{v=0}^{m-2} c_{n,r,v} \binom{n}{m-1-v} (-1)^{-m+v} + \frac{(-1)^{u+1-n} (n-1)}{2u-2r+1} \binom{n-1}{u} \dots m=2u+1 \\ \sum_{v=0}^{m-2} c_{n,r,v} \binom{n}{m-1-v} (-1)^{-m+v} \dots m=2u, u \neq r \\ \sum_{v=0}^{m-2} c_{n,r,v} \binom{n}{m-1-v} (-1)^{-m+v} + \sum_{u=0}^{n-1} \frac{(-1)^{u-n}}{2u-2r+1} \binom{n-1}{u} \dots m=2r \end{cases}$$

$$h_x(\theta) = -\frac{\beta_x}{2\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)}$$

$$h_{xy}(\theta) = -\frac{\beta_y}{2\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)}$$

が得られる。

得られた孤立共鳴ハミルトニアン式(4-42)は θ に依存しているので、第2種母関数 $F_2(\psi_x, P_x, \theta)$ を使って新しい角変数

$$\Psi_x = \psi_x - \frac{\kappa}{2\delta} \theta \quad (4-70)$$

及び作用変数

$$P_x = I_x \quad (4-71)$$

へ正準変換する。

$$I_x = \frac{\partial F_2}{\partial \psi_x}$$

$$\Psi_x = \frac{\partial F_2}{\partial P_x} \quad (4-72)$$

$$H_2 = \langle H \rangle + \frac{\partial F_2}{\partial s} \quad (4-73)$$

ここで $H_2(\Psi_x, I_x, I_y; \theta)$ は新しい孤立共鳴ハミルトニアンである。式(4-70)及び(4-72)より

$$F_2(\psi_x, P_x) = \left(\psi_x - \frac{\kappa}{2\delta} \theta \right) P_x \quad (4-74)$$

が得られ、式(4-74)、(4-73)及び(4-74)より

$$H_2(\Psi_x, I_x, I_y) = \left(v_x - \frac{\kappa}{2\delta} \right) I_x + v_y I_y + \frac{eR_0}{\gamma^2 p v} \langle \phi(\Psi_x, I_x, I_y) \rangle \quad (4-75)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi(\Psi_x, \Psi_y, I_x, I_y; \theta) \rangle &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{2n}{n} G(0)_n^{(0)} \left(-\frac{I_x}{2} \right)^n \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{2n}{n} G(0)_n^{(3)} \left(-\frac{I_y}{2} \right)^n \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-r} \binom{2r}{r} G(0)_{n,r}^{(6)} \left(-\frac{I_x}{2} \right)^{n-r} \left(-\frac{I_y}{2} \right)^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i\delta}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} S_1(i, n) \cos(2i\delta\Psi_x) \\
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i\delta}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} S_2(i, n) \sin(2i\delta\Psi_x) \\
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1+i\delta}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^{n-i\delta} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r-i\delta} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r S_3(i, n, r) \cos(2i\delta\Psi_x) \\
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1+i\delta}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^{n-i\delta} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r-i\delta} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r S_4(i, n, r) \sin(2i\delta\Psi_x)
\end{aligned} \tag{4-76}$$

が得られる。ここで式(4-75)及び(4-76)について、正準方程式より

$$\frac{dI_y}{d\theta} = -\frac{\partial H_2}{\partial \Psi_y} = 0$$

すなわち、 I_y は保存量となる。よって I_y のみを含む、式(4-75)の右辺第2項及び式(4-76)の右辺第2項を削除すると、最終的に「ベータトロン振動と空間電荷力の間で起きる非線形共鳴」を表す孤立共鳴ハミルトニアン H_{iso} は

$$H_{iso}(\Psi_x, I_x, I_y) = \left(v_x - \frac{\kappa}{2\delta}\right) I_x + \frac{eR_0}{\gamma^2 \rho v} \langle \varphi(\Psi_x, I_x, I_y) \rangle \tag{4-77}$$

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(\Psi_x, \Psi_y, I_x, I_y; \theta) \rangle & = \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{2n}{n} G(0)_n^{(0)} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \\
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-r} \binom{2r}{r} G(0)_{n,r}^{(6)} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(-\frac{I_y}{2}\right)^r \\
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i\delta}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} S_1(i, n) \cos(2i\delta\Psi_x) \\
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i\delta}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} S_2(i, n) \sin(2i\delta\Psi_x) \\
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1+i\delta}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^{n-i\delta} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r-i\delta} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r S_3(i, n, r) \cos(2i\delta\Psi_x) \\
& + \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1+i\delta}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^{n-i\delta} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r-i\delta} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r S_4(i, n, r) \sin(2i\delta\Psi_x)
\end{aligned} \tag{4-78}$$

となる。式(4-77)について

$$\frac{dH_{iso}}{d\theta} = 0$$

より、 H_{iso} は保存量である。

式(4-78)は数値的に計算される。このため i 及び n に関する和を有限個で打ち切る必要が有る。打ち切り範囲をそれぞれ i_{max}, n_{max} とし、

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\Psi_x, \Psi_y, I_x, I_y; \theta) \rangle &= \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{n_{max}} \frac{1}{n!} \binom{2n}{n} G(0)_n^{(0)} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^{n_{max}} \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-r} \binom{2r}{r} G(0)_{n,r}^{(6)} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(-\frac{I_y}{2}\right)^r \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i_{max}} \sum_{n=i\delta}^{n_{max}} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} S_1(i, n) \cos(2i\delta\Psi_x) \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i_{max}} \sum_{n=i\delta}^{n_{max}} \frac{1}{n!} \left(-\frac{I_x}{2}\right)^n \binom{2n}{n-i\delta} S_2(i, n) \sin(2i\delta\Psi_x) \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i_{max}} \sum_{n=1+i\delta}^{n_{max}} \frac{(-1)^n n^{-i\delta}}{n!} \sum_{r=1}^{n-i\delta} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r-i\delta} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r S_3(i, n, r) \cos(2i\delta\Psi_x) \\ &+ \frac{eN}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i_{max}} \sum_{n=1+i\delta}^{n_{max}} \frac{(-1)^n n^{-i\delta}}{n!} \sum_{r=1}^{n-i\delta} \binom{n}{r} \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r-i\delta} \left(\frac{I_x}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{I_y}{2}\right)^r S_4(i, n, r) \sin(2i\delta\Psi_x) \end{aligned} \quad (4-79)$$

を非線形共鳴解析に使用した。式(4-79)を計算するためには、式(4-64)~(4-69)を数値的に求めねばならない。このとき $\beta_x, \beta_y, \psi_{0,x}$ の他に σ_x, σ_y のデータが必要である。ここでは非線形空間電荷効果による現実的なビームサイズの変化を取り入れるため、第1章で述べたエンベロープ振動方程式の解ではなく、シミュレーション結果を用いた事が特筆される。

3-4 非線形共鳴の定量的解析手法

まず、式(4-77)の計算例として、bare tune が $(\nu_x, \nu_y) = (7.123, 5.229)$ 、ビーム強度が 8.5×10^{11} pppで10周目のときに起きる構造共鳴に関する、孤立共鳴ハミル

トニアン (Tori) の contour plot を図 4-1 に示す。後述するが、ここでは $I_y = 0$ と仮定した。横軸及び縦軸はそれぞれ角変数、作用変数である。

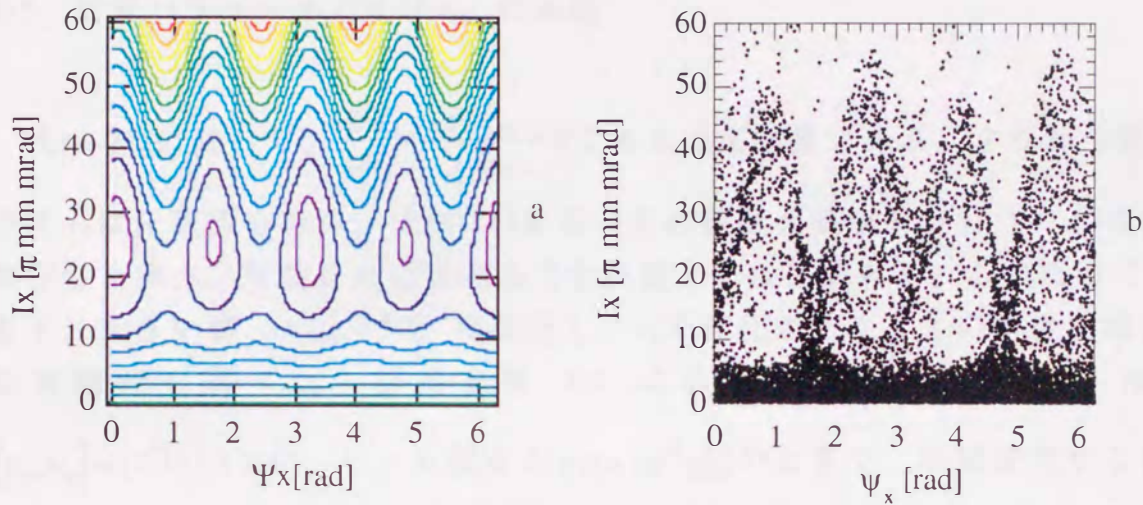


図 4-1 位相空間上での粒子分布

(a) 孤立共鳴ハミルトニアン、(b) PATRASH 結果の対比

4 つの resonance island が見える。このとき、resonance island の境界がセパトトリクスとなる。セパトトリクスにおける作用変数の最大値を $I_{x,max}$ 、最小値を $I_{x,min}$ と定義する。また $I_{x,max} - I_{x,min}$ を resonance width と定義する。ここでは定量的な評価の指標として、resonance width ではなく $I_{x,max}$ 及び $I_{x,min}$ を用いた。

$I_{x,max}$ 及び $I_{x,min}$ の計算方法を示す。まず不動点を求めるために

$$\frac{d\Psi_x}{d\theta} = \frac{\partial H_{iso}}{\partial I_x} = 0 \quad (4-80)$$

$$\frac{dI_x}{d\theta} = -\frac{\partial H_{iso}}{\partial \Psi_x} = 0 \quad (4-81)$$

を数値的に計算する。式(4-80)及び(4-81)で求めた不安定不動点の座標を (Ψ_0, I_0) 、安定不動点の座標を (Ψ_1, I_1) とする。セパトトリクスは不安定点上を通過するので、セパトトリクス上のハミルトニアン値は $H_{iso}(\Psi_0, I_0, I_y)$ となる。

図 4-1 からわかるように、構造共鳴時、セパトトリクス上の $\Psi_x = \Psi_1$ で $I_{x,max}$ 及

び $I_{x\min}$ となるので、 $H_{iso}(\Psi_1, I_x, I_y) = H_{iso}(\Psi_0, I_0, I_y)$ を数値的に計算することにより、 $I_{x\max}$ 及び $I_{x\min}$ が求まる。

4-5 計算パラメータ I_y 及び n_{\max} の決定

式(4-77)に関して、 $\frac{dI_y}{d\theta} = -\frac{\partial H_{iso}}{\partial \psi_y} = 0$ より I_y は保存量である。すなわち式(4-77)

中で I_y は任意性を持つ。式(4-77)を用いて非線形共鳴解析を行うためには、 I_y 依存性を調べ、可能ならば最適な I_y を決定する必要がある。このために、 n_{\max} を十分大きい値 ($n_{\max} = 50$) に固定し、 I_y を変化させたときの構造共鳴に関する共鳴幅を調べた。結果を図 4-2 に示す。計算条件は bare tune が $(\nu_x, \nu_y) = (7.123, 5.229)$ 、ビーム強度が 8.5×10^{11} ppp のときで、時間変化するビームサイズとして 10 周目のシミュレーション結果を用いた。 I_y が大きくなるほど共鳴幅が小さくなり、やがて $I_y \geq 15\pi$ mm mrad で resonance island は消失することがわかる。 $I_y \geq 15\pi$ mm mrad で resonance island が消失する原因は、tune spread (付録 B 参照) から説明できる。図 4-2 と同じ計算条件を代入し得られた tune spread を図 4-3 に示す。図 4-3 から構造共鳴を起こす $\nu_{s.c.x} = 7$ が $AI_x + BI_y = C$ (ただし A, B, C は定数) で近似できる線分上にのみ存在することがわかる。すなわち $\nu_{s.c.x} = 7$ となる粒子について、 I_y の増加とともに I_x は減少し、 $I_y \geq 15\pi$ mm mrad で $\nu_{s.c.x} = 7$ となる粒子は存在しなくなる。これが図 4-2 で $I_y \geq 15\pi$ mm mrad のとき resonance island が消失した原因である。Resonance island の境界でハローが発生することを考えると、 $I_y = 0$ となる粒子数を減少させる、すなわち y 方向にビームを広げることにより、 x 方向のハローを抑制できることがわかる。非線形共鳴解析を行う際の最適な I_y として、以後共鳴幅が最大となる $I_y = 0\pi$ mm mrad を採用した。

次に式(4-79)に関して、打ち切り範囲 n_{\max} を決定する必要がある。最適な n_{\max} を決定するために、 n_{\max} を変化させたときの構造共鳴に関する $I_{x\max}$ 及び $I_{x\min}$ を調べた。計算条件は bare tune が $(\nu_x, \nu_y) = (7.123, 5.229)$ 、ビーム強度が 8.5×10^{11} ppp の時で、時間変化するビームサイズとして 10 周目のシミュレーション結果を用いた。結果を図 4-4 に示す。 $n_{\max} \geq 10$ 以上で結果が飽和すること、及び $n_{\max} < 10$ では正しい resonance island の位置及び大きさを計算できないことがわかる。これは式(4-14)における x に関して 20 次以上取り込む必要があるこ

とを示す。ハローとなる粒子は resonance island の境界、すなわち位相空間上で原点から離れた位置に存在するため、常に非線形空間電荷力の高次の項を受けながらベータatron振動を行う。このことが、ハローの位置及び大きさを決定する際に、非線形空間電荷力の高次の項を必要とする原因となる。以後の計算では $n_{\max} = 20$ で計算を行った。

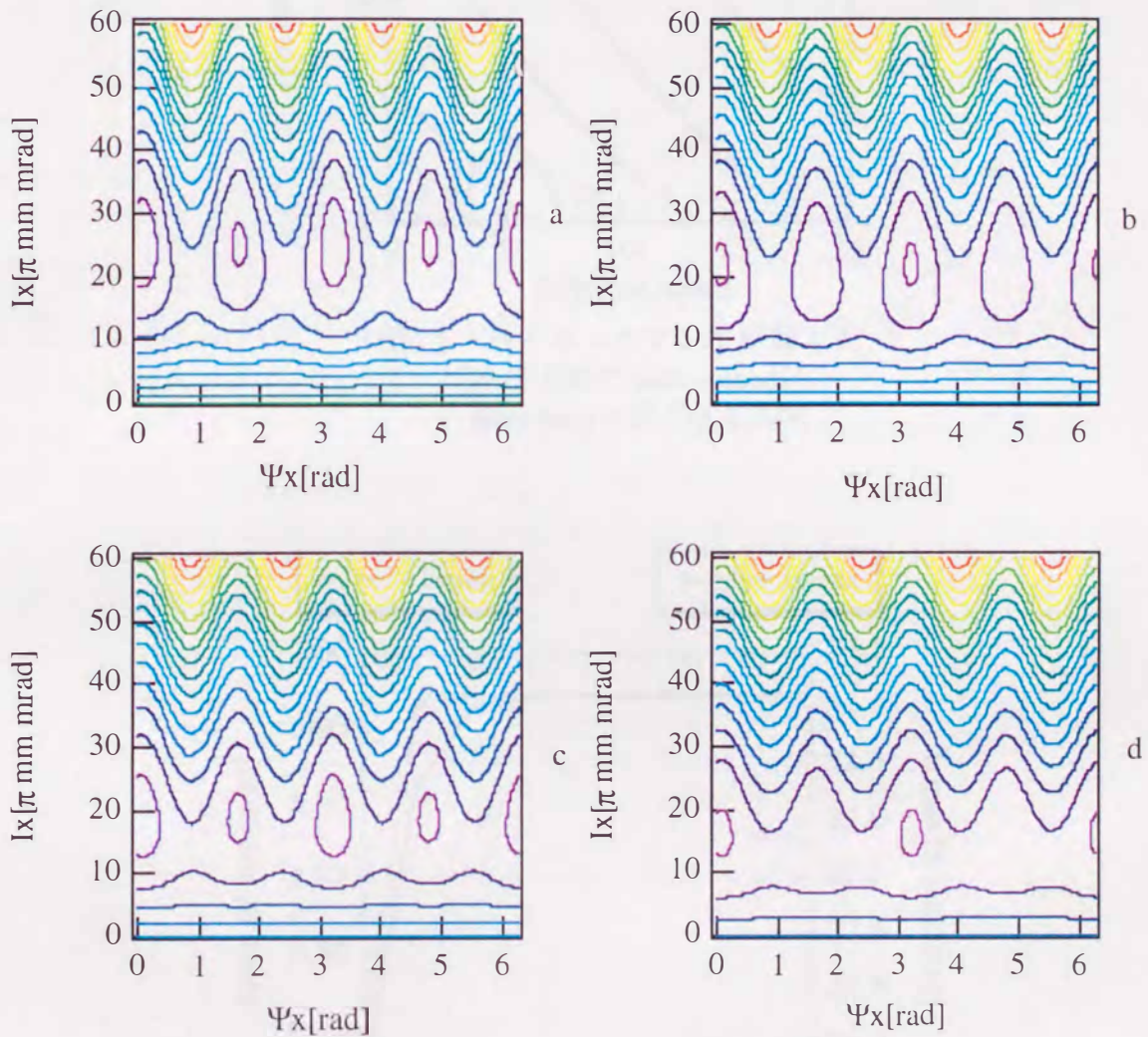


図 4-2 構造共鳴の I_y 依存性

- (a) $I_y = 0$ [π mm mrad] (b) $I_y = 2$ [π mm mrad]
(c) $I_y = 4$ [π mm mrad] (d) $I_y = 6$ [π mm mrad]

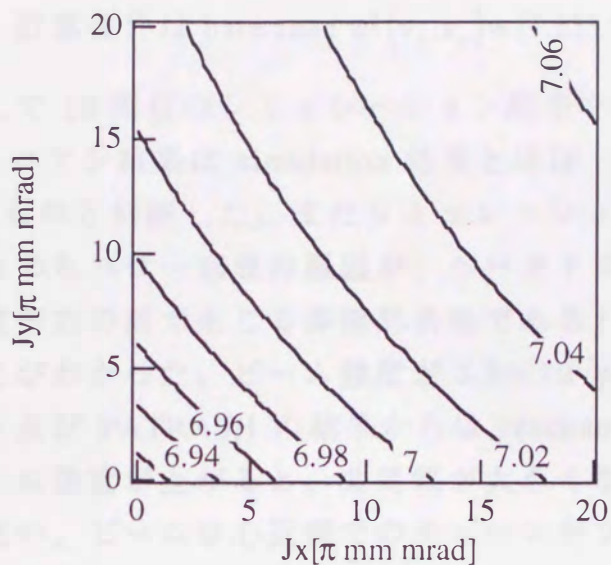


図4-3 ハミルトニアンで計算した
水平方向のtune spread。
Bare tune = (7.123, 5.229)

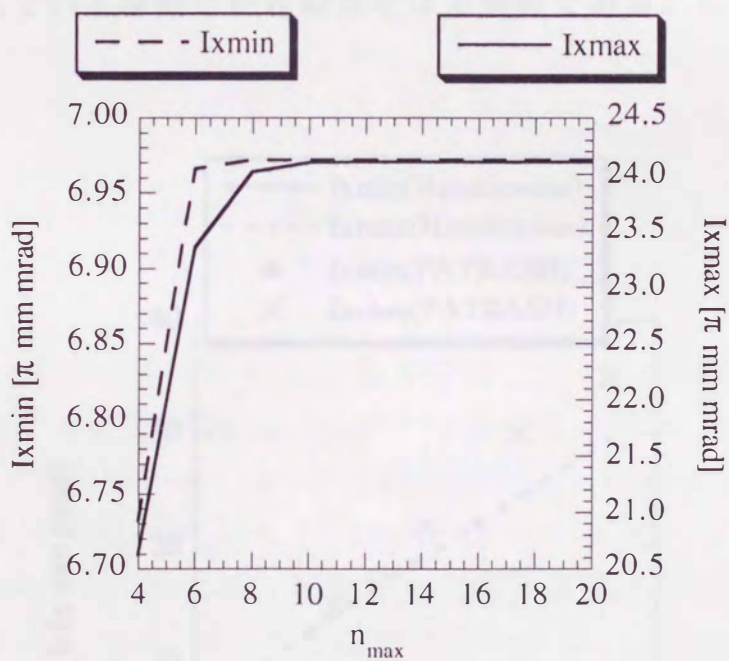


図4-4 $I_{x\max}$ 及び $I_{x\min}$ の n_{\max} 依存性

4-6 孤立共鳴ハミルトニアンの正当性

導出した孤立共鳴ハミルトニアン式(4-77)の正当性を評価するために、ハロ

の位置 $I_{x\max}$ 及び $I_{x\min}$ のビーム強度依存性に関して、シミュレーション結果との比較を行った。計算条件は bare tune が $(\nu_x, \nu_y) = (7.123, 5.229)$ で、時間変化するビームサイズとして 10 周目のシミュレーション結果を用いた。結果を図 4-5 に示す。ハミルトニアン結果は simulation 結果とほぼ一致した。この結果から式(4-77)は正しいものと判断した。またシミュレーション結果から得られた「非線形共鳴、すなわちハロー形成の原因が、ベータatron振動とガウス分布が作る非線形空間電荷力の間で生じる非線形共鳴である」というスペキュレーションは正しいことがわかった。ビーム強度が 5.5×10^{11} ppp 以下の場合、孤立共鳴ハミルトニアン及び PATRASH の結果からは resonance island を観測できなかった。またビーム強度が上がると、共鳴幅が大きくなった。これはビーム強度が増加するに従い、ビーム中心近傍でのチューンシフトが大きくなり、その結果、図 4-3 における構造共鳴を起こす $\nu_{s.c.x} = 7$ を表す線分、 $AI_x + BI_y = C$ 中の定数 C が大きくなるためだと思われる。

最後に重要な特徴として、共鳴条件となる線分 $AI_x + BI_y = C$ 上で I_x が大きくなる程、 x 方向の共鳴幅が大きくなることが挙げられる。このことは図 4-2 及び図 4-3 で共通している特徴だが現時点では未解析である。この特徴は次の節で重要となる。

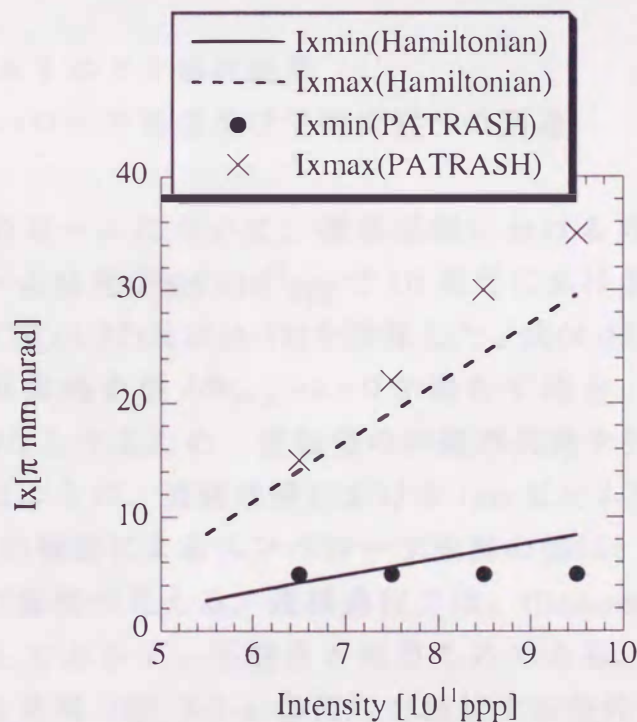


図4-5 孤立共鳴ハミルトニアン結果と PATRASH結果の比較

第5章 孤立共鳴ハミルトニアンを用いた非線形共鳴解析

第4章で求めたガウス分布に関する孤立共鳴ハミルトニアンを用いて、ベータトロン振動と振動する空間電荷力の間で生じる非線形共鳴について解析を行った。ハローが resonance island の境界に生じると考えられることから、非線形共鳴の様相を明らかにすることで、ハローの形成状態を知ることができる。この章では非線形共鳴に関する解析結果について詳述する。

本研究では、ビームの入射から、平衡状態へ達する間の、遷移過程での非線形共鳴に着目し、それぞれの bare tune で、遷移過程におけるパラメトリック共鳴の時間変化を、入射してから10周目までの時間幅で調べた。着目した理由の一つに、遷移過程ではシミュレーションによるポアンカレマップ解析が難しいことが挙げられる。わずかに数ターンで平衡状態へ達するので、ポアンカレマップを描くには、多くのテスト粒子数を適切に配置させる必要が有る。これは多大な労力を必要とする作業である。もう一つの理由として、式(4-77)が適用可能なのはガウス分布のビームにのみである点が挙げられる。再分布により、ビームの分布がガウス分布から著しく変化すると、式(4-77)は適用不可となる。図3-7及び図3-8で示したように、入射してから10周目までは、ほぼガウス分布を維持している。よって入射してから10周目までは式(4-77)が適用できることがわかる。

5-1 孤立共鳴ハミルトニアン解析結果

- ハローの形成及び平衡状態への到達

まず(7.123,5.229)のビームについて、遷移過程における非線形共鳴の特徴を調べるために、ビーム強度が 8.5×10^{11} ppp で10周目における rms ビームサイズの時間変化を用いて式(4-77)及び(4-79)を計算した。式(4-43)からわかるように、ある1つの非線形共鳴条件 $2\delta v_{s.c.x} - \kappa \approx 0$ を満たす場合、任意の i について $i(2\delta v_{s.c.x} - \kappa) \approx 0$ を満たしうるため、複数個の非線形共鳴を引き起こす可能性がある。前章で述べたように、過渡状態における rms ビームサイズに関して、振動数28のラティスの構造によるエンベロープ振動の他に、振動数14の不整合によるエンベロープ振動が見える。遷移過程では、filamentation による塗りつぶしが完全に終了しておらず、不整合が残るためである。これは(7.123,5.229)のとき不整合による共鳴(図5-1-a 参照)を励起する条件 $2v_{s.c.x} - 14 \approx 0$ 、及び構造共鳴(図5-1-b 参照)を励起する条件 $4v_{s.c.x} - 28 \approx 0$ の両方を満たす。このため遷移過程では、不整合による共鳴と構造共鳴を重ね合わせたパラメトリッ

ク共鳴（図 5-1-c 参照）を励起することがわかる。

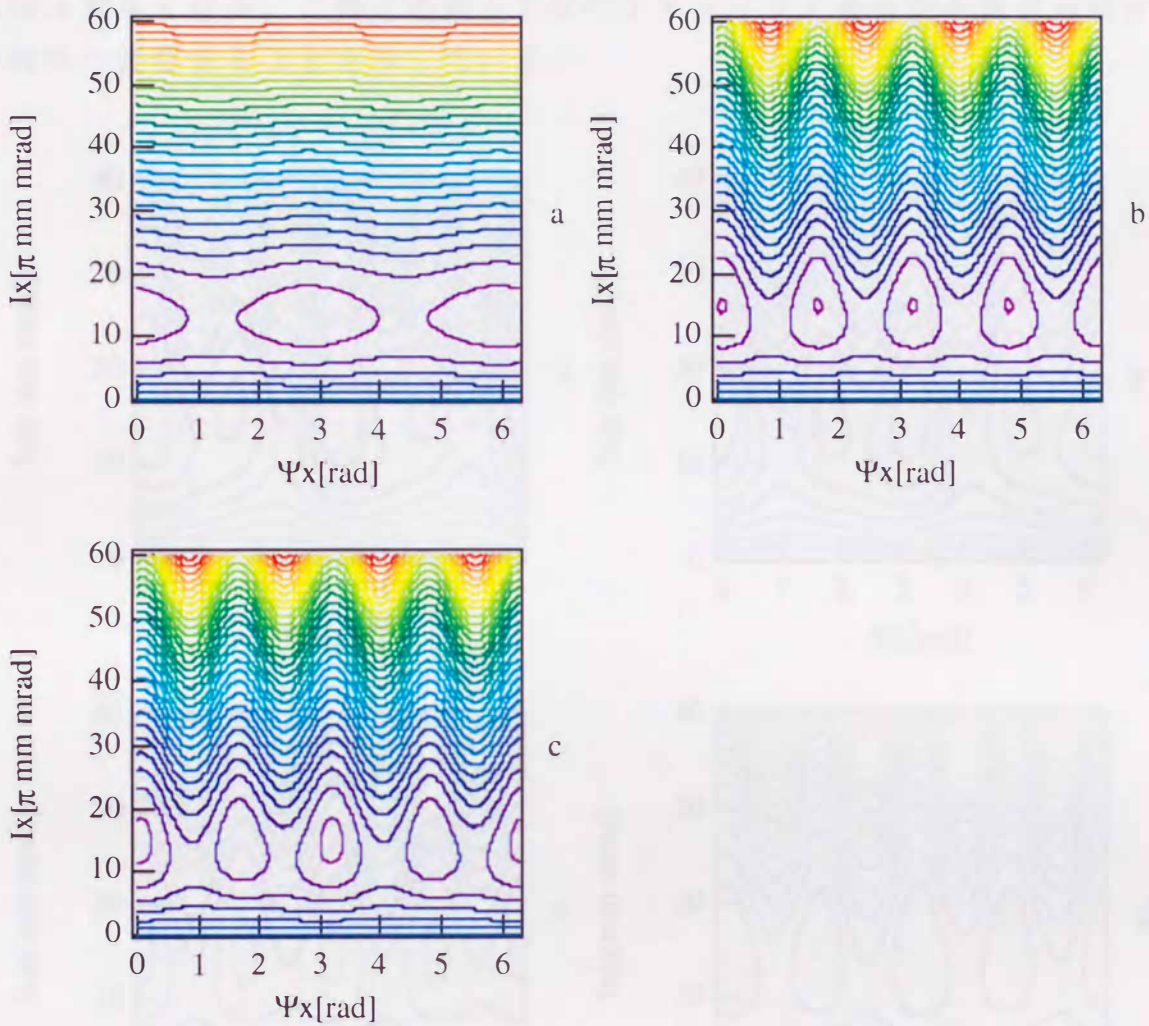


図 5-1 非線形共鳴の共存。

- (a) 不整合による非線形共鳴
- (b) 構造共鳴成分。
- (c) (a)と(b)の合成で引き起こされる非線形共鳴。

(7.123,5.229)のビームに関する、パラメトリック共鳴の時間変化を図 5-2 に示す。図 4-3 からわかるように、(7.123,5.229)のビームは不整合による共鳴条件 $2\nu_{s.c.x} - 14 \approx 0$ 及び構造共鳴条件 $4\nu_{s.c.x} - 28 \approx 0$ の両方を満たす。1 周目は 4 つの resonance island 中、2 つの resonance island が支配的であるのに、その後時間の経過と共に 2 つの resonance island が 4 つの resonance island へ分離していく様子が見られる。これは入射直後は smear out による不整合の消失が無いために不整合による共鳴が支配的であるが、時間の経過と共に塗りつぶしによる不整合の消失が顕著となり不整合共鳴は消失することを示す。また図 4-3 からわか

るように構造共鳴の条件 $4\nu_{s.c.x} - 28 \approx 0$ を $I_x = 13\pi$ mm mrad と比較的大きい I_x で満足している。前節で述べたように、 I_x が大きい粒子が共鳴条件を満たすとき、共鳴幅は大きくなる。このため図 5-2 はパラメトリック共鳴が不整合共鳴から構造共鳴へ推移することを示している。

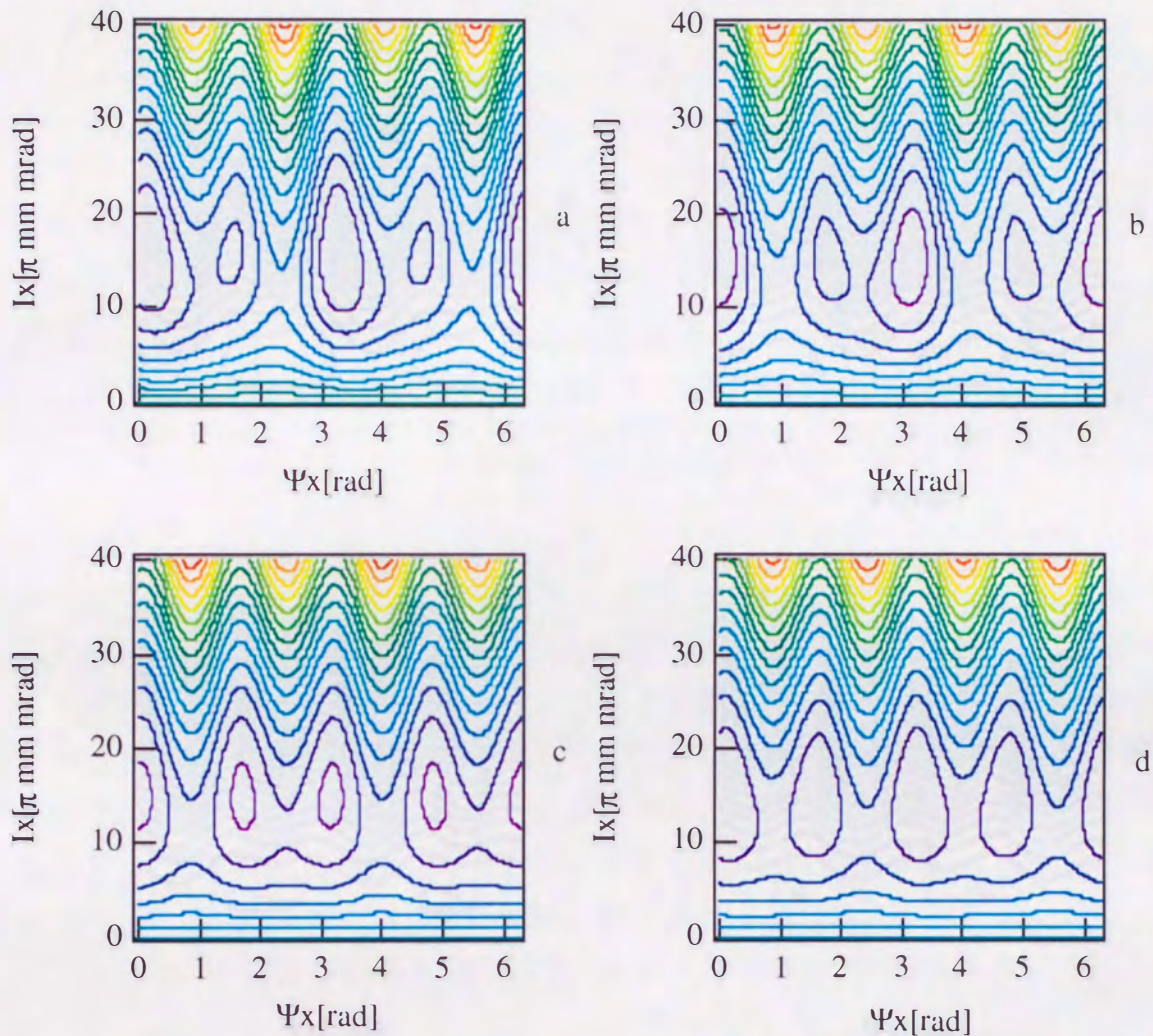


図 5-2 不整合による非線形共鳴から構造共鳴への推移。

(a) 1 周目 (b) 3 周目 (c) 5 周目 (d) 7 周目

同様にして (7.203,5.229) のビームに関する、パラメトリック共鳴の時間変化を図 5-3 に示す。このときの 10 周目における tune spread を図 5-4 に示す。図 5-4 から不整合による共鳴条件 $2\nu_{s.c.x} - 14 \approx 0$ 及び構造共鳴条件 $4\nu_{s.c.x} - 28 \approx 0$ の両方を満たすことがわかる。図 5-3 から、(7.123,5.229) のビームと同様に 1 周目は 2 つの resonance island が支配的であるが、その後時間の経過と共に resonance island が消失していく様子が見られる。不整合による共鳴が消失する過程は (7.123,5.229) のビームと同様である。しかし図 5-4 からわかるように構造共鳴の

条件 $4\nu_{s.c.x} - 28 \approx 0$ を満たす I_x が非常に小さい (10 周目で $I_x = 4.00\pi$ mm mrad) ため、共鳴幅は非常に小さく (式(4-77)で計算したとき、10 周目で $I_{x\max} = 6.27\pi$ 及び $I_{x\min} = 1.99\pi$ mm mrad)、構造共鳴は無視できる。このため図 5-3 は、パラメトリック共鳴が不整合共鳴の消失と共に消えることを示している。

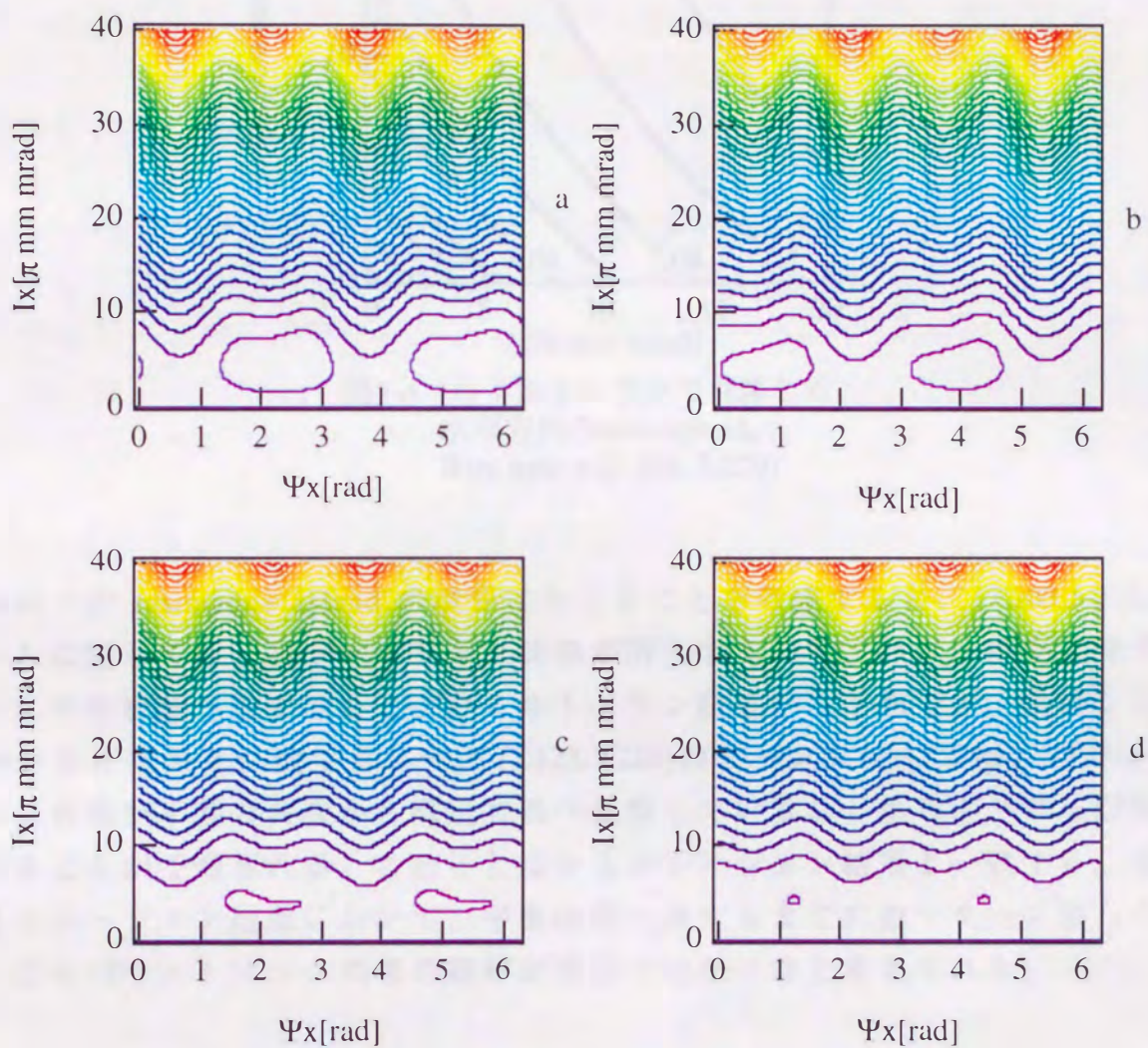


図 5-3 不整合による非線形共鳴の消失。

(a) 1 周目 (b) 3 周目 (c) 5 周目 (d) 7 周目

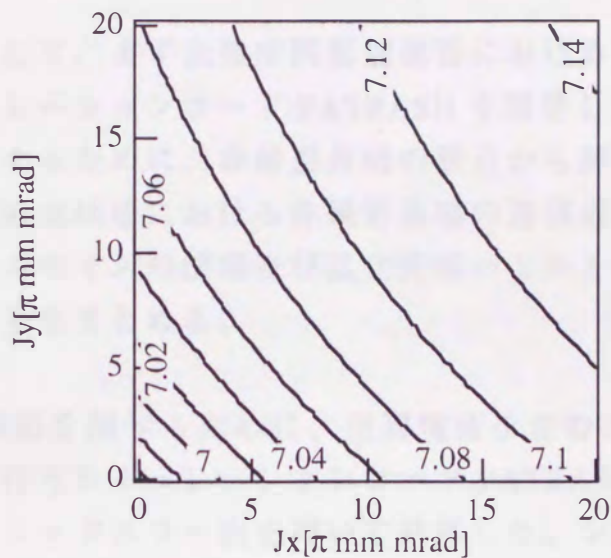


図5-4 ハミルトニアンで計算した
水平方向のtune spread。
Bare tune = (7.203, 5.229)

ハローが resonance island の境界に生じることを考慮すると、(7.203, 5.229) のビームに関しては、パラメトリック共鳴が消失するので、ハローは生成せず、すぐに平衡状態へ達することがハミルトニアン結果から予想でき、実際シミュレーション結果と一致する。一方 (7.123, 5.229) のビームに関しては、パラメトリック共鳴が不整合共鳴から構造共鳴へ推移していることから、ハローが生成されることが予想される。このことはシミュレーション結果と一致する。またシミュレーション結果において、平衡状態へ達するまでに数十ターン要したのは、このパラメトリック共鳴の推移が原因ではないかと考えられる。

第6章 結論

本研究の一環として、まず大強度円形加速器における粒子集団の挙動を調べるために、シミュレーションコード PATRASH を開発した。次にハロー形成のメカニズムを解明するために、非線形共鳴の観点から解析を行った。特に平衡状態へ達する前の過渡状態における非線形共鳴の遷移過程を、PATRASH より得られる rms ビームサイズの情報及び孤立共鳴ハミルトニアンを用いて調べた。以下に得られた結果をまとめる。

(1) 粒子集団の挙動を調べるために、空間電荷を含むベータatron振動に関する軌道計算を行うシミュレーションコード PATRASH を開発した。空間電荷電場はハイブリッドツリー法を用いて計算した。シミュレーションパラメータの最適化を行った後、シミュレーションコードの正当性を評価するためにベンチマークテストを行った。

(2) PATRASH の結果から、粒子集団の挙動に関する以下のような知見が得られた。

一般に不整合な分布を持つ粒子集団が加速器に入射される。非線形空間電荷力は、不整合の消滅・非線形共鳴の励起、またハローの形成を引き起こし、粒子集団の分布を変化させる。これにより非線形空間電荷力が変化し、さらに粒子集団の再分布を生じる。やがてラティスによる収束力と非線形空間電荷力が釣り合うところで、平衡状態へ達する。

(3) 平衡状態へ達する前の、過渡状態におけるハロー形成を調べるために、「ガウス分布の空間電荷が生じる非線形空間電荷力」と「ベータatron振動」の間で x 方向に生じる非線形共鳴に関する孤立共鳴ハミルトニアンを導出した。このとき現実的な rms ビームサイズの時間変化を取り入れるために、rms ビームサイズに関して PATRASH の結果を用いた。

(4) 孤立共鳴ハミルトニアンを数値的に取り扱うために、パラメータの最適化を行った。

まず保存量である y 方向の作用変数 I_y を決定するために、 I_y を変化させて孤立共鳴ハミルトニアンを計算し、resonance island の大きさを比較した。 I_y が大きくなる程 resonance island は小さくなることがわかった。このため空間電荷効果による非線形共鳴の効果をより明らかにするために、本論では

$I_y=0$ を採用した。ここで、ハローの形成は resonance island の境界に生じると考えられている。一般に、 x 方向のハローを抑制するためには x 方向のビームサイズを広げることが考えられるが、 $I_y=0$ 近傍の粒子数を減少させる、すなわち y 方向にビームサイズを広げることで、 x 方向のハローを抑制することができることがわかった。

次に孤立共鳴ハミルトニアンを数値的に解くためには、ガウス分布を Taylor 展開する際に生じる高次の項 x^{2n} について、最大次数 n_{\max} を決定する必要がある。 n_{\max} を決定するために、 n_{\max} を変化させながら resonance island の大きさを調べた。 $n_{\max} \geq 10$ で結果が飽和することがわかった。これはガウス分布の Taylor 展開について最低 x^{20} まで取る必要が有ることを示している。ここでは $n_{\max} = 20$ を採用し、孤立共鳴ハミルトニアンを計算した。

- (5) 導出した孤立共鳴ハミルトニアンの正当性を調べるために、ビーム強度を変えて resonance island を計算し、PATRASH から得られる結果との比較を行った。孤立共鳴ハミルトニアンの結果は PATRASH の結果とほぼ一致したため、導出した孤立共鳴ハミルトニアンの正当性が得られたものと判断した。
- (6) 過渡状態におけるハローの形成及び平衡状態への到達を、非線形共鳴の観点から調べるために、孤立共鳴ハミルトニアンを用いた解析を行った。過渡状態では、不整合状態が時間と共に消滅する過程を含んでいる。このため不整合により生じる非線形共鳴が必ず生じること、及び不整合の消滅と共に不整合による非線形共鳴も消失することがわかった。不整合による非線形共鳴の他に、ラティスの構造によるエンベロープ振動の周波数と depressed tune が整数比になることにより構造共鳴が生じる。Depressed tune の状態により、不整合による非線形共鳴から構造共鳴へ推移する場合が存在し、このような場合はハローを形成することがわかった。また不整合による非線形共鳴が消失し、他に非線形共鳴が生じない場合は、粒子集団は平衡状態へ達することがわかった。
- (7) 開発したシミュレーションコード PATRASH について、入力すべきパラメータはビームパラメータ（ビーム強度、4次元位相空間上の分布、理想粒子の持つ電荷及びエネルギー等）、加速器パラメータ（ラティスの構成、磁場の強度）及びハイブリッドツリー法に関するパラメータ（レベル及びハイブリッド処理のためのグリッド数）である。ここでハイブリッドツリー法は、テスト粒子数やビームサイズ等のビームパラメータに対して、非常に敏感で

あることに注意する必要がある。ハイブリッドツリー法に関するパラメータを少し変えただけで、計算時間に天地の差が開く。このためビームパラメータを変化させる場合は、下準備としてハイブリッドツリー法に関するパラメータを変化させながら、テスト計算を行う必要が有る。このことに注意すれば、ハイブリッドツリー法及び軌道計算部分に関しては、ブラックボックスとして扱えるよう工夫しているため、KEK-PS 以外の加速器に関して PATRASH は適用可能であり、高精度な計算結果を与えうると確信している。

また孤立共鳴ハミルトニアンの式(4-77)及び(4-79)に関して、計算に必要なパラメータは、第4章で述べたようにビームパラメータ（ビーム強度及び σ_x, σ_y のデータ）及び加速器パラメータ（bare tune, $\beta_x, \beta_y, \psi_{0,x}$ ）である。これらのパラメータは数値計算を行うことにより容易に計算できる。このため他の加速器以外への適用は容易である。ただし、式(4-77)及び(4-79)はガウス分布のビームに関する孤立共鳴ハミルトニアンの式である。他の分布については、式(4-14)のように x 及び y に関して Taylor 展開した空間電荷ポテンシャルを用意すれば、ガウス分布の場合と同様の計算手順を取ることにより孤立共鳴ハミルトニアンが求まる。ビームコアの振動が励起する非線形パラメトリック共鳴理論としての枠組みは、一般的な形で活かし得る。

最後に本研究から得られたハロー形成抑制の為のガイドラインについてまとめる。

(1) 円形加速器では、高磁場を得るために、偏向磁石の垂直方向のギャップを狭く設計する。このため、垂直方向に非線形共鳴が生じハローが形成されると、容易にビームロスと成りうる。また「垂直方向の空間電荷効果」を弱めるために「垂直方向にビームを広げる」という方法も、垂直方向のギャップが狭いため使えない。ここで垂直方向の非線形共鳴を抑制する方法の一つとして、水平方向にビームサイズを広げるというものが挙げられる。第3章で述べたように、 $I_x=0$ 近傍の粒子数を減少することで、非線形共鳴によるハロー形成数を減少させることができる。

(2) 構造共鳴を避けるように、bare tune を調整する。KEK-PS のような四階対称な円形加速器では、ラティスの構成によるエンベロープの振動数は必ず4の倍数となる。よって少なくとも depressed tune の整数倍が4の倍数に成らぬように、bare tune を調整すれば良い。

謝辞

本研究は平成 10 年度より加速器研究機構加速器研究施設において、特別共同利用研究員として行った。

高エネルギー加速器研究機構で研究する機会を与えて下さった九州大学 石橋健二教授、前畑京助助教授、有馬秀彦助手、執行信寛助手に深く感謝致します。

高エネルギー加速器研究機構 高山健助教授、木代純逸助教授には、本研究を遂行するに当たり、懇切な指導と適切な助言を頂き、また研究者としての心構えを指導して頂きました。深く感謝致します。

高エネルギー加速器研究機構において研究を行う上で、多方面に渡り助言と支援を与えて下さった高エネルギー加速器研究機構 外山毅助手、白方政治助手、五十嵐進助手、荒川大技官に深く感謝致します。

本研究の遂行に必要不可欠であった Power Macintosh 7600/200 "dokodemo" の管理について指導して下さい、また同室の研究者として多方面に渡り助言と支援を与えて下さった高エネルギー加速器研究機構 魚田雅彦助手に深く感謝致します。

開発したシミュレーションコード PATRASH の高速化に関する助言を与えて下さり、また研究面・生活面に支援を与えて下さった高エネルギー加速器研究機構 中村英二助手に深く感謝致します。

F. W. Jones 氏には、シミュレーションや外国での研究生活等に関して様々な助言を頂きました。深く感謝致します。

つくばにおける研究生活を支えてくれた友人 九州大学 木附秀彦氏、東京工業大学 森本巖氏、大阪大学 大木俊征氏、宮崎大学 山中信司氏 及び両親に深く感謝致します。

参考文献

- [1] A. Suzuki, H. Park, and the K2Kcollaboration, Nucl. Instrum. Meth. A453, 165 (2000).
- [2] K. Takayama and J. Kishiro, Nucl. Instrum. Meth. A451, 304 (2000)
- [3] K. Takayama, "Intensity Doubler : a Proposal for a Major Upgrade of the KEK 12GeV-PS", in Neutrino Oscillations and their Origin, Frontiers Science Series No. 35, Edited by Y. Suzuki, M. Nakahata, M. Shiozawa and K. Kaneyuki, Universal Academy Press, Tokyo
- [4] 日本原子力研究所中性子科学センター,
<http://cens.tokai.jaeri.go.jp/Japanese/contents.html>.
- [5] 日本原子力研究所・高エネルギー加速器研究機構 共同推進チーム,"大強度陽子加速器計画", KEK Report 99-5, JAERI-Tech 2000-003, JHF-99-4, December 1999.
- [6] J. Wei et al, in Proceedings of the European Particle Accelerator Conference, edited by S. Myers, L. Liljeby, Ch. Petit-Jean-Genaz, J. Poole and K.-G. Rensfelt, Vienna, Austria, 2000, p.981.
- [7] 内藤裕志, "2. 粒子シミュレーションの基礎", プラズマ・核融合学会誌 第74巻第5号 (1998), p.470.
- [8] M. Ikegami, Nucl. Instrum. Meth. A435, 284 (1999).
- [9] S. Y. Lee and A. Riabko, Phys. Rev. E 51, 1609 (1995).
- [10] H. Okamoto and M. Ikegami, Phys. Rev. E 55, 4694 (1994).
- [11] C. Chen and R. A. Jameson, Phys. Rev. E 52, 3074 (1995).
- [12] M. Reiser, "Theory and Design of Charged Particle Beams", A Wiley - Interscience Publication.
- [13] D. Edwards, M. Syphers, "An introduction to the physics of high energy accelerators", A Wiley - Interscience Publication.
- [14] Y. Shimosaki and K. Takayama, Phys. Rev. E 62, 2797 (2000).
- [15] K. Takayama, (unpublished)
- [16] D. R. Douglas, in Physics of Particle Accelerators, Edited by M. Month and M. Dienes, AIP Conf. Proc. No. 153 (AIP, New York, 1987).
- [17] 下崎義人, "2次元ガウス分布ポテンシャルのシングルパラメータによる積分表示", KEK internal report ASN-424, 2000.
- [18] G. Franchetti, I. Hofmann and G. Turchetti, Nucl. Instrum. Meth. A415, 450

(1998)

- [19] 下崎義人, "Transfer Matrix 再考", KEK internal report ASN-404 Jun 24, 1998.
- [20] 牧野淳一郎, "高速多重極展開法とツリー法 — 多体シミュレーションのための高速算法", 日本応用数理学会誌「応用数理」 第8巻第4号 (1998), p.277.
- [21] L. Greengard and V. Rokhlin, J. Comput. Phys. 135, 280 (1997).
- [22] F.W. Jones, "A Hybrid Fast-Multipole Technique for Space-Charge Tracking With Halos", Workshop on Space Charge Physics in High Intensity Hadron Rings, Shelter Island NY, May 1998, AIP Conf. Proc. p448.
- [23] MPI フォーラム MPI 日本語訳プロジェクト訳, "MPI: メッセージ通信インターフェース標準 (日本語訳ドラフト)", 1996.
- [24] F.W. Jones, private communication.

付録 A $\int_0^\infty \frac{dt}{(t+a^2)^{n-r+1/2}(t+b^2)^{r+1/2}}$ の積分

$\int_0^\infty \frac{dt}{(t+a^2)^{n-r+1/2}(t+b^2)^{r+1/2}}$ について考える。

(a) $r=0$ のとき

$s = \sqrt{t+a^2}$ に変数変換する。 $\int_b^\infty ds = \int_0^\infty \frac{dt}{2\sqrt{t+a^2}}$ より

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(t+a^2)^{n+1/2}(t+b^2)^{1/2}} = 2 \int_0^\infty \frac{dt}{2(t+a^2)^{1/2}(t+a^2)^n(t+b^2)^{1/2}}$$

$$= 2 \int_a^\infty \frac{ds}{s^{2n}\sqrt{s^2+b^2-a^2}}$$

となる。ここで積分公式

$$\int \frac{dx}{x^{2m}\sqrt{x^2+c}} = \frac{(-1)^m}{c^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{m-1}{k} \left(\frac{\sqrt{x^2+c}}{x} \right)^{2k+1}$$

(ただし $m \geq 1$) を使う。 $c = b^2 - a^2, m = n$ より

$$2 \int_a^\infty \frac{ds}{s^{2n}\sqrt{s^2+b^2-a^2}} = 2 \left[\frac{(-1)^n}{(b^2-a^2)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{\sqrt{s^2+b^2-a^2}}{s} \right)^{2k+1} \right]_a^\infty$$

$$= 2 \frac{(-1)^n}{(b^2-a^2)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k} \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^{2k+1} \right]$$

となる。数値解析を行う際に、分母の $b^2 - a^2$ が邪魔なので一般形に変形する。

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{(-1)^n}{(b^2 - a^2)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k} \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^{2k+1} \right] \\
&= 2 \frac{(-1)^n}{(b-a)^n (b+a)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k} \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^{2k+1} \right] \\
&= 2 \frac{(-1)^n}{a^n (t-1)^n (b+a)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k} (1-t^{2k+1}) \\
&= 2 \frac{(-1)^n}{a^n (t-1)^n (b+a)^n} f(n,0,t) \tag{A-1}
\end{aligned}$$

$$t = \frac{b}{a}$$

ただし

$$f(n,0,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k} (1-t^{2k+1}) \tag{A-2}$$

である。ここで

$$f(n,0,t) = (t-1)^n g(n,0,t) \tag{A-3}$$

$$g(n,0,t) = \sum_{u=0}^{n-1} a_{n,u} t^u \tag{A-4}$$

と仮定する。 $a_{n,u}$ の漸化式を求める。式(A-4)を式(A-3)に代入した式について

$$\begin{aligned}
f(n,0,t) &= (t-1)^n \sum_{u=0}^{n-1} a_{n,u} t^u \\
&= \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} t^v (-1)^{n-v} \sum_{u=0}^{n-1} a_{n,u} t^u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^{n-\nu} [a_{n,0}t^\nu + a_{n,1}t^{\nu+1} + \cdots + a_{n,n-1}t^{\nu+n-1}] \\
&= \binom{n}{0} (-1)^n [a_{n,0} + a_{n,1}t + \cdots + a_{n,n-1}t^{n-1}] + \binom{n}{1} (-1)^{n-1} [a_{n,0}t + a_{n,1}t^2 + \cdots + a_{n,n-1}t^n] \\
&\quad + \cdots + \binom{n}{n-1} (-1)^1 [a_{n,0}t^{n-1} + a_{n,1}t^n + \cdots + a_{n,n-1}t^{2n-2}] \\
&\quad + \binom{n}{n} (-1)^0 [a_{n,0}t^n + a_{n,1}t^{n+1} + \cdots + a_{n,n-1}t^{2n-1}] \\
&= \binom{n}{0} (-1)^n a_{n,0} + \left[\binom{n}{0} (-1)^n a_{n,1} + \binom{n}{1} (-1)^{n-1} a_{n,0} \right] t \\
&\quad + \cdots + \left[\binom{n}{0} (-1)^n a_{n,n-2} + \binom{n}{1} (-1)^{n-1} a_{n,n-3} + \cdots + \binom{n}{n-2} (-1)^2 a_{n,0} \right] t^{n-2} \\
&\quad + \left[\binom{n}{0} (-1)^n a_{n,n-1} + \binom{n}{1} (-1)^{n-1} a_{n,n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} (-1)^1 a_{n,0} \right] t^{n-1} \\
&\quad + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} (-1)^1 a_{n,n-1} + \binom{n}{n} (-1)^0 a_{n,n-2} \right] t^{2n-2} + \binom{n}{n} (-1)^0 a_{n,n-1} t^{2n-1}
\end{aligned} \tag{A-5}$$

となる。また、式(A-2)から

$$\begin{aligned}
f(n,0,t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k} (1-t^{2k+1}) \\
&= \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} - \frac{(-1)^0}{1} \binom{n-1}{0} t - \frac{(-1)^1}{3} \binom{n-1}{1} t^3 \cdots - \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{n-1}{n-1} t^{2n-1}
\end{aligned} \tag{A-6}$$

となる。式(A-5)及び(A-6)について t^u の係数を比較すると、 $a_{n,2m}$ 及び $a_{n,2m+1}$ の漸化式

$$a_{n,0} = (-1)^n \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \tag{A-7}$$

$$\sum_{u=0}^{2m} \binom{n}{u} (-1)^{n-u} a_{n,2m-u} = 0 \quad (\text{A-8})$$

$$\sum_{u=0}^{2m+1} \binom{n}{u} (-1)^{n-u} a_{n,2m-u+1} = -\frac{(-1)^m}{2m+1} \binom{n-1}{m} \quad (\text{A-9})$$

が得られる。さらに式(A-8)及び(A-9)は

$$a_{n,2m} = \sum_{u=1}^{2m} \binom{n}{u} (-1)^{u+1} a_{n,2m-u} \quad (\text{A-10})$$

$$a_{n,2m+1} = \sum_{u=1}^{2m+1} \binom{n}{u} (-1)^{-u+1} a_{n,2m-u+1} + \frac{(-1)^{m-n-1}}{2m+1} \binom{n-1}{m} \quad (\text{A-11})$$

に変形できる。式(A-7)、(A-10)及び(A-11)を式(A-4)に代入すると、式(A-1)及び(A-3)より

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+a^2)^{n+1/2} (t+b^2)^{1/2}} = 2 \frac{(-1)^n}{a^n (b+a)^n} \sum_{u=0}^{n-1} a_{n,u} \left(\frac{b}{a}\right)^u \quad (\text{A-12})$$

が求まる。

(b) $r=n$ のとき

式(A-10)の a, b を入れ替えるだけである。

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+a^2)^{1/2} (t+b^2)^{n+1/2}} = 2 \frac{(-1)^n}{b^n (b+a)^n} \sum_{u=0}^{n-1} a_{n,u} \left(\frac{a}{b}\right)^u$$

(c) $0 < r < n$ の時

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+a^2)^{n-r+1/2} (t+b^2)^{r+1/2}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t+a^2} \sqrt{t+a^2}^{2(n-r)} \sqrt{t+b^2}^{2r+1}}$$

$s = \sqrt{t+a^2}$ に変数変換する。 $ds = \frac{dt}{2\sqrt{t+a^2}}$ 、 $t = s^2 - a^2$ より

$$= 2 \int_a^{\infty} \frac{ds}{s^{2(n-r)} \sqrt{s^2 + b^2 - a^2}^{2r+1}}$$

となる。ここで積分公式

$$\int \frac{dx}{x^{2m} \sqrt{x^2 + c}^{2p+1}} = \frac{(-1)^m}{c^{m+p}} \sum_{k=-p}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{m+p-1}{k+p} \left(\frac{\sqrt{x^2 + c}}{x} \right)^{2k+1}$$

を使う (ただし $m \geq 1, p \geq 0$)。 $c = b^2 - a^2, m = n-r, p = r$ より

$$2 \int_a^{\infty} \frac{ds}{s^{2(n-r)} \sqrt{s^2 + b^2 - a^2}^{2r+1}} = 2 \frac{(-1)^{n-r}}{(b^2 - a^2)^n} \left[\sum_{k=-r}^{n-r-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k+r} \left(\frac{\sqrt{s^2 + b^2 - a^2}}{s} \right)^{2k+1} \right]_a^{\infty}$$

$$= 2 \frac{(-1)^{n-r}}{(b^2 - a^2)^n} \sum_{k=-r}^{n-r-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k+r} \left\{ 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^{2k+1} \right\}$$

となる。数値解析を行う際に、分母の $b^2 - a^2$ が邪魔なので一般形に変形する。

$$2 \frac{(-1)^{n-r}}{(b^2 - a^2)^n} \sum_{k=-r}^{n-r-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k+r} \left\{ 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^{2k+1} \right\}$$

$$= 2 \frac{(-1)^{n-r}}{(b-a)^n (b+a)^n} \sum_{k=-r}^{n-r-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k+r} \left\{ 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^{2k+1} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{(-1)^{n-r}}{a^n (t-1)^n (b+a)^n} \sum_{k=-r}^{n-r-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k+r} (1-t^{2k+1}) \\
&= 2 \frac{(-1)^{n-r}}{a^n (t-1)^n (b+a)^n} f(n, r, t)
\end{aligned} \tag{A-13}$$

ただし

$$f(n, r, t) = \sum_{k=-r}^{n-r-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k+r} (1-t^{2k+1}) \tag{A-14}$$

である。ここで

$$(-1)^{-r} f(n, r, t) = (t-1)^n g(n, r, t) \tag{A-15}$$

$$g(n, r, t) = \frac{1}{t^{2r-1}} \sum_{u=0}^{n-2} c_{n,r,u} t^u \tag{A-16}$$

と仮定する。まず式(A-14)を式(A-15)左辺に代入した式について

$$\sum_{k=-r}^{n-r-1} \frac{(-1)^{k-r}}{2k+1} \binom{n-1}{k+r} (1-t^{2k+1}) = \sum_{k=-r}^{n-r-1} \frac{(-1)^{k-r}}{2k+1} \binom{n-1}{k+r} - \sum_{k=-r}^{n-r-1} \frac{(-1)^{k-r}}{2k+1} \binom{n-1}{k+r} t^{2k+1}$$

となり、 $u = k+r$ と変換すると

$$\begin{aligned}
&= \sum_{u=0}^{n-1} \frac{(-1)^u}{2u-2r+1} \binom{n-1}{u} - \sum_{u=0}^{n-1} \frac{(-1)^u}{2u-2r+1} \binom{n-1}{u} t^{2u+1-2r} \\
&= \sum_{m=1}^{2n-1} \alpha_m t^{m-2r}
\end{aligned} \tag{A-17}$$

となる。ただし

$$\alpha_{m=2u+1} = \frac{(-1)^{u+1}}{2u-2r+1} \binom{n-1}{u}$$


~~~~~ここから式の形が変わる~~~~~

$$\begin{aligned}
 & + \left[ c_{n,r,0} \binom{n}{n} (-1)^0 + c_{n,r,1} \binom{n}{n-1} (-1)^1 + \cdots + c_{n,r,n-2} \binom{n}{2} (-1)^{n-2} \right] t^{n-2r+1} \\
 & + \left[ c_{n,r,1} \binom{n}{n} (-1)^0 + c_{n,r,2} \binom{n}{n-1} (-1)^1 + \cdots + c_{n,r,n-2} \binom{n}{3} (-1)^{n-3} \right] t^{n-2r+2} \\
 & + \left[ c_{n,r,2} \binom{n}{n} (-1)^0 + c_{n,r,3} \binom{n}{n-1} (-1)^1 + \cdots + c_{n,r,n-2} \binom{n}{4} (-1)^{n-4} \right] t^{n-2r+3} \\
 & + \cdots + c_{n,r,n-2} \binom{n}{n} (-1)^0 t^{2n-2r-1} \\
 = & \sum_{m=1}^{n-1} t^{m-2r} \sum_{v=0}^{m-1} c_{n,r,v} \binom{n}{m-1-v} (-1)^{n-m+1+v} \\
 & + t^{n-2r} \sum_{v=0}^{n-2} c_{n,r,v} \binom{n}{n-1-v} (-1)^{v+1} \\
 & + \sum_{m=n+1}^{2n-1} t^{m-2r} \sum_{v=m-n-1}^{n-2} c_{n,r,v} \binom{n}{m-v-1} (-1)^{n-m+v+1} \\
 = & \sum_{m=1}^{2n-1} \beta_v t^{m-2r} \tag{A-18}
 \end{aligned}$$

となる。ただし

$$\beta_{m, 1 \leq m \leq n-1} = \sum_{v=0}^{m-1} c_{n,r,v} \binom{n}{m-1-v} (-1)^{n-m+1+v} \tag{A-19}$$

$$\beta_{m=n} = \sum_{v=0}^{n-2} c_{n,r,v} \binom{n}{n-1-v} (-1)^{v+1}$$

$$\beta_{m, n+1 \leq m \leq 2n-1} = \sum_{v=m-n-1}^{n-2} c_{n,r,v} \binom{n}{m-v-1} (-1)^{n-m+v+1}$$

である。式(A-17)と(A-18)は等価なので、係数を比較することにより  $c_{n,r,v}$  がわかる。初期条件は

$$c_{n,r,0} = \frac{(-1)^n}{2r-1} \quad (\text{A-20})$$

となる。  $m=n-r, 2 \leq r \leq n-1$  の条件より、  $1 \leq m \leq n-1$  の条件、 すなわち式(A-19)を用いれば良い。  $2 \leq m \leq n-1$  について  $c_{n,r,v}$  の漸化式

$$\sum_{v=0}^{m-1} c_{n,r,v} \binom{n}{m-1-v} (-1)^{n-m+1+v} = \begin{cases} \frac{(-1)^{u+1} \binom{n-1}{u}}{2u-2r+1} \cdots m=2u+1 \\ 0 \cdots m=2u, u \neq r \\ \sum_{u=0}^{n-1} \frac{(-1)^u \binom{n-1}{u}}{2u-2r+1} \cdots m=2r \end{cases} \quad (\text{A-21})$$

が得られる。 また式(A-21)は

$$c_{n,r,m-1} = \begin{cases} \sum_{v=0}^{m-2} c_{n,r,v} \binom{n}{m-1-v} (-1)^{-m+v} + \frac{(-1)^{u+1-n} \binom{n-1}{u}}{2u-2r+1} \cdots m=2u+1 \\ \sum_{v=0}^{m-2} c_{n,r,v} \binom{n}{m-1-v} (-1)^{-m+v} \cdots m=2u, u \neq r \\ \sum_{v=0}^{m-2} c_{n,r,v} \binom{n}{m-1-v} (-1)^{-m+v} + \sum_{u=0}^{n-1} \frac{(-1)^{u-n} \binom{n-1}{u}}{2u-2r+1} \cdots m=2r \end{cases} \quad (\text{A-22})$$

と変形できる。 式(A-20)及び(A-22)を式(A-16)に代入すると、式(A-13)及び(A-15)より

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(t+a^2)^{n-r+1/2} (t+b^2)^{r+1/2}} = 2 \frac{(-1)^n}{a^n (b+a)^n} \frac{1}{t^{2r-1}} \sum_{u=0}^{n-2} c_{n,r,u} t^u$$

が求まる。



付録 B Tune spread の導出

「ガウス分布のビームが作る空間電荷効果」の影響を受けながらベータトロ  
ン振動を行う粒子のハミルトニアンは、空間電荷ポテンシャル式(4-20)を (4-  
13)に代入した式で表される。Depressed tune は、正準方程式

$$\frac{d\psi_x}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial I_x} = \nu_x + \frac{eR}{\gamma^2 pv} \frac{\partial}{\partial I_x} \phi(\psi_x, \psi_y, I_x, I_y; \theta)$$

$$\frac{d\psi_y}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial I_y} = \nu_y + \frac{eR}{\gamma^2 pv} \frac{\partial}{\partial I_y} \phi(\psi_x, \psi_y, I_x, I_y; \theta)$$

を  $\theta$  について平均したものになる。よってハミルトニアンに関する定数項のみ  
残り

$$\nu_{s.c.x} = \nu_x + \frac{eR}{\gamma^2 pv} \left\langle \frac{\partial}{\partial I_x} \phi(\psi_x, \psi_y, I_x, I_y; \theta) \right\rangle = \nu_x + \frac{e^2 NR_0}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 pv} [\nu_1 + \nu_2]$$

$$\nu_{s.c.y} = \nu_y + \frac{eR}{\gamma^2 pv} \left\langle \frac{\partial}{\partial I_y} \phi(\psi_x, \psi_y, I_x, I_y; \theta) \right\rangle = \nu_y + \frac{e^2 NR_0}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 pv} [\nu_3 + \nu_4]$$

$$\nu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} I_x^{n-1} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n^{(0)}(\theta) d\theta \right]$$

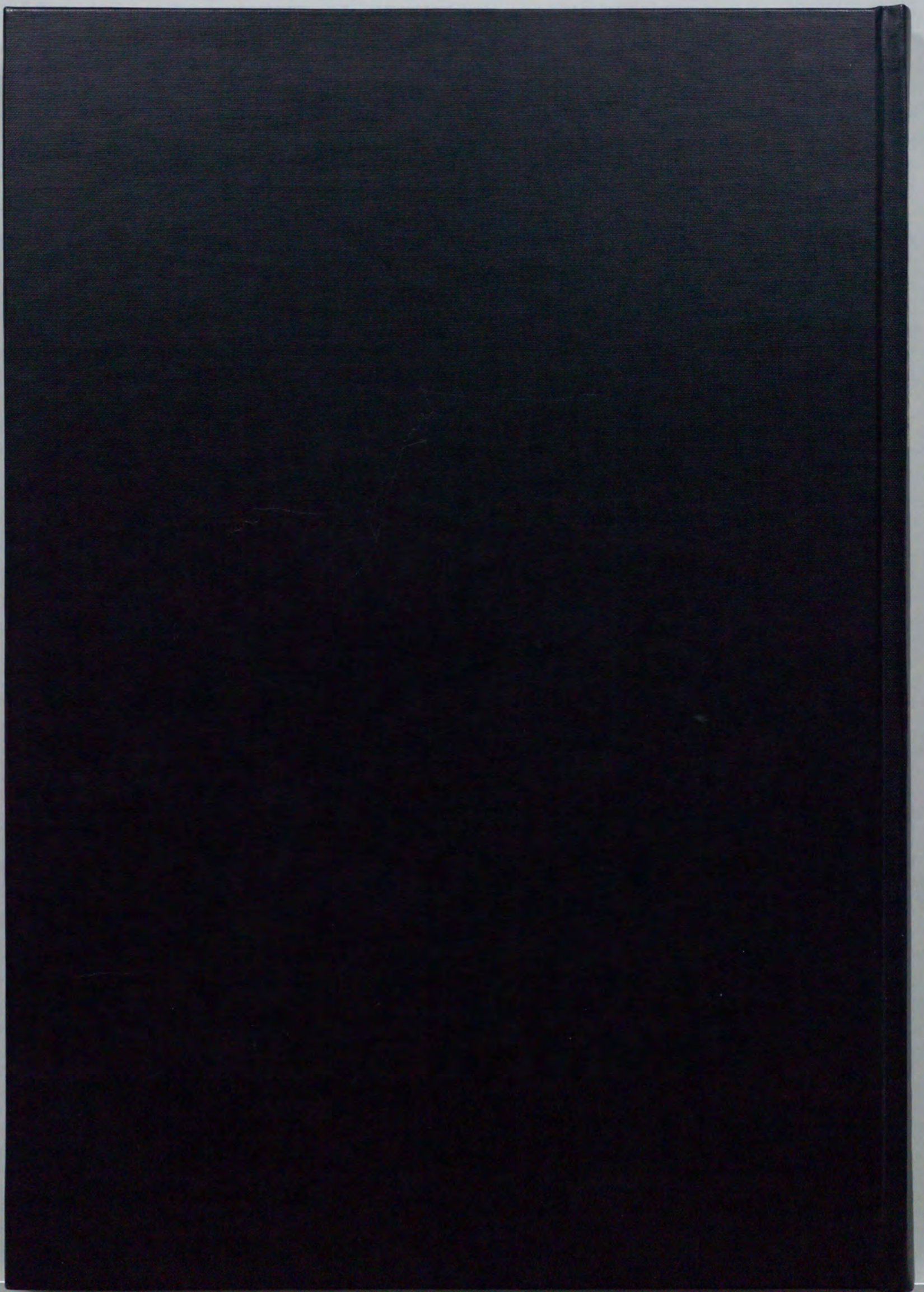
$$\nu_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{n-1} (n-r) \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-r} \binom{2r}{r} I_x^{n-r-1} I_y^r \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n^{(6)}(\theta) d\theta \right]$$

$$\nu_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} I_y^{n-1} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n^{(3)}(\theta) d\theta \right]$$

$$\nu_4 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{n-1} r \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-r} \binom{2r}{r} I_x^{n-r} I_y^{r-1} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n^{(6)}(\theta) d\theta \right]$$

となる。







Inches 1 2 3 4 5 6 7 8  
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

# Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak



# Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

**A** 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19

