

## 広範な応力域における異方圧密砂の降伏特性と弾塑性構成式に関する研究

安福, 規之

<https://doi.org/10.11501/3054272>

---

出版情報 : 九州大学, 1990, 工学博士, 論文博士  
バージョン :  
権利関係 :

## 第6章 相異なる三主応力状態における異方圧密砂の弾塑性構成式

### 6.1 概説

構成式を三主応力空間において定式化しておくことは、実際の数値解析手法の中に構成式を組み込むときに必要であり、また、一般応力状態における土の応力変形挙動をよりよく理解するために大切なことである。

本章では、第4章の応用という位置づけで、その中で示した構成式(AW-2モデル)に、第5章で議論した強度特性の $\theta$ 値(ロードアングル)依存性と降伏特性の誘導異方性の効果を取り入れ、軸対象条件下における構成式の三主応力空間への拡張を試みている。定式化に際して用いたAW-2モデルは、4.4節でも述べたように、圧密過程で生じる異方性のみ(この異方性を初期応力誘導異方性と称する)を考慮した構成式であり、異方性の程度を評価する変数 $\alpha$ の値は、せん断中変化せず、一定であるとしている。なお、この考え方を導入している代表的なモデルに関口・太田モデル(1977, 1979)がある。さて、構成式の一般化に際し、この仮定を導入する理由はいくつかある。まず、形式上降伏関数の内部変数が硬化パラメータの一つだけとなるので、その点で解析が簡単に行えること、次いで、三主応力空間における構成式の組み立てが簡単になること、また、広範な応力域における応力ひずみ挙動を対象とした場合、せん断中に起こる $\alpha$ の変化が変形挙動に与える影響は、初期の応力誘導異方性がそれに与える影響に比べて極めて小さいと判断されること、さらに、この仮定に基づいて誘導される構成式が、以下で示すように、砂の応力ひずみ挙動を比較的うまく表現し得ることなどである。

以下、節に従って、本章の概要を述べる。まず、第2節では、一般応力条件下における構成関係について簡単に述べる。次いで、第3節では、材料特性の $\theta$ 値依存性を取り入れた異方硬化型の弾塑性構成式の具体的な誘導を行う。そして、第4節では、構成式に含まれる10の材料定数について簡単に述べた後、第5章で示した三主応力制御試験の実測値と予測値の比較を行い、提案式の適用性を検討する。最後に、第5節では、本章で得られた知見をまとめる。

## 6.2 構成関係

第5章において、三主応力空間において用いた応力とひずみパラメータの定義は、逐次示しているが、それをまとめて示すと以下のようなになる。まず、応力パラメータは、

$$p = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \cdot \delta_{ij} ; \quad \alpha = \left[ \frac{3}{2} \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ij} \right]^{1/2}$$

$$q = \left[ \frac{3}{2} S_{ij} \cdot S_{ij} \right]^{1/2} ; \quad q^* = \left[ \frac{3}{2} (S_{ij} - p \alpha_{ij})(S_{ij} - p \alpha_{ij}) \right]^{1/2}$$

$$\eta = \left[ \frac{3}{2} \eta_{ij} \cdot \eta_{ij} \right]^{1/2} ; \quad \eta^* = \left[ \frac{3}{2} (\eta_{ij} - \alpha_{ij})(\eta_{ij} - \alpha_{ij}) \right]^{1/2}$$

$$J_3 = \frac{1}{3} [S_{ij} \cdot S_{jk} \cdot S_{ki}] ; \quad J_3^* = \frac{1}{3} (S_{ij} - p \alpha_{ij})(S_{jk} - p \alpha_{jk})(S_{ki} - p \alpha_{ki})$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{27}{2} \frac{J_3}{q^3} \right] ; \quad \theta^* = \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{27}{2} \frac{J_3^*}{q^{*3}} \right]$$

で与えられる。ここで、 $S_{ij} = \sigma_{ij} - p \cdot \delta_{ij}$  は、軸差応力テンソル； $\eta_{ij} = S_{ij}/p$  は、応力比テンソル、 $\alpha$  は、前章で述べたように応力誘導異方性を評価するパラメータであり、二次の無次元化された軸差テンソル $\alpha_{ij}$ で表される。従って、軸対称条件では、 $\alpha = \alpha_{11} - \alpha_{33}$ と考えることができる（ $\alpha_{22} = \alpha_{33}$ を仮定）。 $J_3$ 、 $J_3^*$ は第3不変量に対応する。また、 $\theta$ 、 $\theta^*$ は、正八面体面上における応力状態を表すパラメータであり、ロードアングルと呼ばれる（図5-1参照）。なお、\*の記号は、 $\eta = \alpha$ の軸を中心とした各諸量であることを表している。

次に、ひずみ増分パラメータは、以下の通りである。

$$dv = d\epsilon_{11} \delta_{11} \quad ; \quad d\epsilon = \left[ \frac{2}{3} de_{1j} \cdot de_{1j} \right]^{1/2}$$

ここで、 $de_{1j} = d\epsilon_{1j} - (dv/3)\delta_{1j}$  は、偏差ひずみテンソルである。これらのパラメータは、軸対称条件を考えた場合には、第4章で定義したパラメータにそれぞれ帰着する。

弾塑性構成式に関する微小ひずみ増分理論（例えば、Hill, 1950）では、応力ひずみ増分  $d\sigma_{1j}$  による全ひずみ増分  $d\epsilon_{1j}$  は、次のように弾性成分  $d\epsilon^e_{1j}$  と塑性成分  $d\epsilon^p_{1j}$  の線形和で定義される。

$$d\epsilon_{1j} = d\epsilon^e_{1j} + d\epsilon^p_{1j} \quad (6-1)$$

この中で、弾性成分は、応力増分と、

$$d\epsilon^e_{1j} = \frac{1 + \nu}{E} d\sigma_{1j} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{1j} \quad (6-2a)$$

の関係にあると仮定する。ここで、ヤング係数  $E$  は、式(4-38b)を考慮すると、

$$\begin{aligned} E &= 3(1 - 2\nu)K \\ &= 3(1 - 2\nu) \frac{P}{hk_a} \left[ \frac{p_a}{p} \right]^n \end{aligned} \quad (6-2b)$$

で与えられる。ただし、 $\nu$  はポアソン比、 $K$  は体積弾性係数、 $h$  は、図4-11(b)に示す  $\ln k - \ln p$  除荷曲線の勾配、 $p_a$  は、単位応力 (100 kPa) である。

また、塑性ひずみ増分は、降伏関数、塑性ポテンシャル関数、流れ則、及び硬化係数を明確にすることによって、応力増分と関係づけることが可能となる。以下では、第4章での検討を踏まえ、非関連流れ則に基づいて塑性ひずみ増分  $d\epsilon^p_{1j}$  の評価を行っていく。

### 6.3 相異なる三主応力状態における構成式の誘導

6.1 で言及したように、ここでは、第4章で示した構成式 (AW-2モデル) に、第5章で示した強度特性の  $\theta$  値 (ロードアングル) 依存性と降伏特性の誘導異方性の効果を取り入れることによって、AW-2モデルの一般応力状態への拡張を試みる。ただし、ここでは、初期の応力誘導異方性だけを考慮し、 $\alpha$  の値は、せん断中変化せず、一定であることを仮定する。また、一般応力状態への拡張のために用いる降伏関数は、式(5-29)で与える降伏関数である。

#### 6.3.1 降伏関数、塑性ポテンシャル関数、及び破壊包絡線

異方硬化を仮定した場合の一般応力条件下における降伏関数として5.4.3では、式(5-29)を提示した。この関数は、前章で示した降伏曲線の特性を比較的うまく表現でき、また、一般応力状態へ拡張したときに数学的に取り扱い易いこと、第4章で示した塑性ポテンシャル関数と同型の式型であり、ある特殊な場合には関連流れ則が適用可能となるなど、都合の良い面を多くもっている。ここでは、以上のことを踏まえて、式(5-29)で示す降伏関数に帰着した構成式の誘導を試み、どの程度相異なる三主応力下における応力ひずみ挙動の評価が可能かを検討する。

さて、具体的な降伏関数  $f$  は、

$$f = p^2 - pp_0 + \frac{3}{2N^2} [ (S_{1j} - p\alpha_{1j})(S_{1j} - p\alpha_{1j}) + (p_0 - p)p\alpha_{1j}\alpha_{1j} ] = 0 \quad (6-3a)$$

で与えられ、また、先に示した応力パラメータを用いると、

$$f = p^2 - pp_0 + \frac{1}{N^2} [ q^{*2} + (p_0 - p)p\alpha^2 ] = 0 \quad (6-3b)$$

を得る。ここで、 $N$  は、降伏曲線の勾配が0となる応力比であり、式(5-22)を利用すると、 $\theta^*$ の関数として、

$$N(\theta^*) = N_c \cdot g_L(\theta^*)$$

$$= N_c \cdot \frac{A}{[A^2 \cos^2 [(3/2)\theta^*] + \sin^2 [(3/2)\theta^*]]^{1/2}} \quad (6-4)$$

で与えられる (図5-23参照)。

次いで、塑性ポテンシャル関数については、第4章で用いた軸対称条件下で提示したものをを用いるが、この場合、塑性ポテンシャル  $g$  は、

$$g = p^2 + \frac{1}{M^2} [q^{*2} - p^2 \alpha^2] = \text{const.} \quad (6-5)$$

で表現される。ここで、 $M$  は、塑性ひずみ増分比の勾配が 0 となるときの応力比であるが、この  $M$  値もまた、 $N$  値と同様、式(6-4)で示すロードアングル  $\theta^*$  の関数として定義される。すなわち、

$$M(\theta^*) = M_c \cdot g_L(\theta^*) \quad (6-6)$$

である。

さらに、第4章で示したように、応力比の最大となる位置を結ぶことによって規定した破壊包絡線 ( $\eta_p$  一定線) もまた、 $\theta$  値の関数であり、式(6-4)の関係が満足されるものと仮定する。すなわち、 $\eta_p$  は、

$$\eta_p = \alpha_{hc} \cdot g_L(\theta) \quad \dots p < p_h \quad (6-7a)$$

$$\eta_p = \alpha_{pc} \cdot g_L(\theta) \left(\frac{p}{p_a}\right)^{b-1} \quad \dots p_h < p < p_t \quad (6-7b)$$

$$\eta_p = M_c \cdot g_L(\theta) \quad \dots p > p_t \quad (6-7c)$$

で決定される。ただし、この場合の  $\theta$  値は、 $\theta^*$  ではないことに注意が必要であり、常に  $\alpha_{1j}$  が 0 として計算される（破壊包絡線は恒に  $p$  軸を中心に広がったものであることを仮定している）。また、 $\alpha_{hc}$ 、 $\alpha_{pc}$  は、それぞれ、三軸圧縮状態における  $\alpha_h$ 、 $\alpha_p$  の値であり、 $\alpha_h$ 、 $\alpha_p$ 、 $p_h$  と  $p_c$  の定義は、4.3.4 で詳述している。

### 6.3.2 フローベクトルと硬化係数の誘導

非関連流れ則に基づくと、式(6-1)中の塑性ひずみ増分成分  $d\varepsilon^p_{1j}$  は、一般に、

$$d\varepsilon^p_{1j} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{1j}} \quad (6-8)$$

で与えられる。ここで、 $\Lambda$  は、比例係数である。本章では、簡単のために、異方性を評価するパラメータ  $\alpha = [ [3/2] \alpha_{1j} \cdot \alpha_{1j} ]^{1/2}$  は、せん断中、変化せず一定 ( $d\alpha_{1j} = 0$ ) であることを仮定するので、降伏関数  $f$  の一般型として、

$$f(\sigma_{1j}, k^p) = 0 \quad (6-9)$$

を得る。ここで、第4章でも言及したように、 $k^p$  は、降伏曲線の広がり方を規定する一つの硬化パラメータである。式(6-9)に適合条件を適用すると、

$$df = \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{1j}} \right] d\sigma_{1j} + \left[ \frac{\partial f}{\partial k^p} \right] dk^p = 0 \quad (6-10)$$

の関係を得る。上式で、第4章と同様に、

$$dk^p = \Lambda \overline{k} \quad (6-11)$$

とし、これを式(6-10)に代入し、整理すると、比例係数  $\Lambda$  は、

$$\Lambda = - \frac{\left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right] d\sigma_{ij}}{\left[ \frac{\partial f}{\partial k^p} \right] k} = \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right] d\sigma_{ij} \quad (6-12a)$$

で表され、また、式(6-12a)から、結局、硬化係数  $H$  は、

$$H = - \left[ \frac{\partial f}{\partial k^p} \right] \bar{k} = - \left[ \left[ \frac{\partial f}{\partial p_0} \right] \left[ \frac{\partial p_0}{\partial k^p} \right] \right] \bar{k} \quad (6-12b)$$

で与えられる。式(6-12a)の第3辺を式(6-8)に代入すると、結果的に、塑性ひずみ増分は、

$$d\varepsilon^p_{ij} = \frac{1}{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right] d\sigma_{ij} \quad (6-13)$$

で評価される。従って、上式から、塑性ひずみ増分を具体的に計算するためには、フローベクトル  $\left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right]$ 、 $\left[ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right]$  と硬化係数  $H$  が具体的に評価されなければならない。

まず、 $\left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right]$  は、降伏関数  $f$  [式(6-3)] が、

$$f = f(\sigma_{ij}, k^p) = f(p, q^*, N(\theta^*), k^p) = 0 \quad (6-14)$$

と表せるので、結果として、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial q^*} \frac{\partial q^*}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial \theta^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6-15)$$

となる。ここで、 $N = N(\theta^*)$  は、式(6-4)で与えられる。これと同様の整理は  $\left[ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right]$  についてもでき、 $\left[ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right]$  の表示は、式(6-15)で  $f$  を



g に、N を M に変換さえすればよい。

ところで、 $[\partial \theta^* / \partial \sigma_{1j}]$  は、6. 2 で示した  $\theta^*$  の定義から、若干の計算を行うことによって、次式で変換される。

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \sigma_{1j}} = \frac{-9}{2\sin(3\theta^*)} \left[ \frac{1}{q^{*3}} \frac{\partial J^*_3}{\partial \sigma_{1j}} - \frac{3J^*_3}{q^{*4}} \frac{\partial q^*}{\partial \sigma_{1j}} \right] \quad (6-16)$$

それ故、フローベクトル  $[\partial f / \partial \sigma_{1j}]$ 、 $[\partial g / \partial \sigma_{1j}]$  は、それぞれ、以下のように表現される。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{1j}} = B_1 \frac{\partial p}{\partial \sigma_{1j}} + B_2 \frac{\partial q^*}{\partial \sigma_{1j}} + B_3 \frac{\partial J^*_3}{\partial \sigma_{1j}} \quad (6-17a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{1j}} = C_1 \frac{\partial p}{\partial \sigma_{1j}} + C_2 \frac{\partial q^*}{\partial \sigma_{1j}} + C_3 \frac{\partial J^*_3}{\partial \sigma_{1j}} \quad (6-17b)$$

ここで、

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_{1j}} = \frac{1}{3} \delta_{1j} \quad (6-18a)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial \sigma_{1j}} = \frac{3}{2q^*} \left[ (S_{1j} - p\alpha_{1j}) - \frac{1}{3} (S_{kl} - p\alpha_{kl}) \alpha_{kl} \delta_{1j} \right] \quad (6-18b)$$

$$\frac{\partial J^*_3}{\partial \sigma_{1j}} = [(S_{1k} - p\alpha_{1k})(S_{kj} - p\alpha_{kj}) - \frac{1}{3} q^{*2} \delta_{1j}] + \frac{1}{9} q^{*2} \delta_{1j}$$

$$+ D \cdot \frac{1}{3} \delta_{1j} \quad (6-18c)$$

ここで、

$$D = - [\alpha_{kl} S_{lm} S_{mk} + S_{kl} \alpha_{lm} S_{mk} + S_{kl} S_{lm} \alpha_{mk}] \\ + 2p [\alpha_{kl} \alpha_{lm} S_{mk} + \alpha_{kl} S_{lm} \alpha_{mk} + S_{kl} \alpha_{lm} \alpha_{mk}] \\ - 3p^2 (\alpha_{kl} \alpha_{lm} \alpha_{mk})$$

また、

$$B_1 = \frac{\partial f}{\partial p} \quad (6-19a)$$

$$B_2 = \left[ \frac{\partial f}{\partial q^*} + \frac{1}{q^* \cdot \tan(3\theta^*)} \cdot \frac{\partial f}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial \theta^*} \right] \quad (6-19b)$$

$$B_3 = - \frac{9}{2q^{*3} \sin(3\theta^*)} \frac{\partial f}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial \theta^*} \quad (6-19c)$$

$$C_1 = \frac{\partial g}{\partial p} \quad (6-20a)$$

$$C_2 = \left[ \frac{\partial g}{\partial q^*} + \frac{1}{q^* \cdot \tan(3\theta^*)} \cdot \frac{\partial g}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial \theta^*} \right] \quad (6-20b)$$

$$C_3 = - \frac{9}{2q^{*3} \sin(3\theta^*)} \frac{\partial g}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \theta^*} \quad (6-20c)$$

で与えられる。さらに、式(6-4)、式(6-5)、式(6-6)に基づくと、式(6-19)、式(6-20)の中で与えられる偏微分値は、具体的には、以下のような形で与えられる。

$$\frac{\partial f}{\partial p} = p \left[ 1 - \left( \frac{\eta}{N} \right)^2 \right]; \quad \frac{\partial g}{\partial p} = p \left[ 1 - \left( \frac{\eta}{M} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial q^*} = \frac{2q^*}{N^2}; \quad \frac{\partial g}{\partial q^*} = \frac{2q^*}{M^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial N} = - \frac{2q^{*2}}{N(N^2 - \alpha^2)}; \quad \frac{\partial g}{\partial M} = - \frac{2q^{*2}}{M(M^2 - \alpha^2)}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \theta^*} = \frac{-3N^3 [1 - A^2] \sin(3\theta^*)}{4 [A \cdot N_c]^2}; \quad \frac{\partial M}{\partial \theta^*} = \frac{-3M^3 [1 - A^2] \sin(3\theta^*)}{4 [A \cdot M_c]^2}$$

以上のようなフローベクトルの定式化については、Nayak and Zienkiewicz (1972), Leung(1984)の論文が参考になる。なお、上式で、 $\eta$  が  $\eta^*$  でないことには、注意が必要である。

次いで、硬化係数Hの具体的な評価は、以下のようにして行う。三軸空間における硬化パラメータ $k^p$ の発展式を、第4章では、次のように仮定した。

$$dk^p = dv^p + \chi \eta d\varepsilon^p \quad (4-25a)$$

上式を、三主応力空間で表示すると、

$$dk^p = d\varepsilon^p_{1j} \delta_{1j} + \chi \eta \left[ \frac{2}{3} de^p_{1j} de^p_{1j} \right]^{1/2} \quad (6-22)$$

となり、これは、

$$dk^p = \Lambda \left[ \text{tr} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{1j}} + \chi \eta \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial g}{\partial S_{kl}} \frac{\partial g}{\partial S_{kl}} \right]^{1/2} \right] \quad (6-23a)$$

$$= \Lambda \left[ \frac{\partial g}{\partial p} + \chi \eta \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial g}{\partial S_{kl}} \frac{\partial g}{\partial S_{kl}} \right]^{1/2} \right] \quad (6-23b)$$

$$= \Lambda \bar{k} \quad (6-23c)$$

で評価される。この関係を、式(6-12b)に代入することによって、硬化係数Hは、

$$\begin{aligned} H &= - \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial p_0} \right) \left( \frac{\partial p_0}{\partial k^p} \right) \right] \bar{k} \\ &= - \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial p_0} \right) \left( \frac{\partial p_0}{\partial k^p} \right) \right] \left[ \frac{\partial g}{\partial p} + \chi \eta \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial g}{\partial S_{kl}} \frac{\partial g}{\partial S_{kl}} \right]^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (6-24a)$$

ここで、

$$\frac{\partial f}{\partial p_0} = p \left[ \left( \frac{\alpha}{N} \right)^2 - 1 \right]; \quad \frac{\partial g}{\partial S_{kl}} \frac{\partial g}{\partial S_{kl}} = \frac{6}{M^4} q^{*2} \quad (6-24b)$$

で評価できる。また、上式において、 $\chi$ の値は、 $\eta = \eta_p$ の時、 $H = 0$ となる条件(第4章参照)から、次式で与えられる。

$$\chi = \frac{- \left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)}{\eta_p \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial g}{\partial S_{kl}} \frac{\partial g}{\partial S_{kl}} \right]^{1/2}} \quad (6-25)$$

さらに、 $[\partial p_0 / \partial k^p]$ の評価は、第4章で示した  $\ln k - \ln p$  直線関係がそのまま利用できるかと仮定すると、

$$\frac{\partial p_0}{\partial k^p} = \frac{dp_0}{dk^p} = \frac{p_0}{(\iota - h)k_a} \left( \frac{p_a}{p_0} \right)^\iota \quad (6-26a)$$

ここで、

$$p_0 = \frac{q^{*2} - p^2(\alpha^2 - N^2)}{p(N^2 - \alpha^2)} \quad (6-26b)$$

で与えられる。

以上の流れにより、フローベクトルと硬化係数H が具体的に計算できるので、結果として、式(6-13)を用いて、ある応力増分に対する塑性ひずみ増分を計算することが可能となる。実際に、塑性成分 $d\epsilon^p_{ij}$  を計算する際には、以下のようなマトリックス計算を行うことになる。

$$\begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} d\epsilon^p_{11} \\ d\epsilon^p_{22} \\ d\epsilon^p_{33} \\ d\epsilon^p_{12} \\ d\epsilon^p_{23} \\ d\epsilon^p_{31} \end{array} \right\} \begin{array}{c} 1 \\ - \\ H \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} g_{11}f_{11} & g_{11}f_{22} & g_{11}f_{33} & g_{11}f_{12} & g_{11}f_{23} & g_{11}f_{31} \\ g_{22}f_{11} & g_{22}f_{22} & g_{22}f_{33} & g_{22}f_{12} & g_{22}f_{23} & g_{22}f_{31} \\ g_{33}f_{11} & g_{33}f_{22} & g_{33}f_{33} & g_{33}f_{12} & g_{33}f_{23} & g_{33}f_{31} \\ g_{12}f_{11} & g_{12}f_{22} & g_{12}f_{33} & g_{12}f_{12} & g_{12}f_{23} & g_{12}f_{31} \\ g_{23}f_{11} & g_{23}f_{22} & g_{23}f_{33} & g_{23}f_{12} & g_{23}f_{23} & g_{23}f_{31} \\ g_{31}f_{11} & g_{31}f_{22} & g_{31}f_{33} & g_{31}f_{12} & g_{31}f_{23} & g_{31}f_{31} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{12} \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{31} \end{array} \right\} \end{array} \quad (6-27)$$

ここで、 $g_{ij} = \partial g / \partial \sigma_{ij}$ 、 $f_{ij} = \partial f / \partial \sigma_{ij}$  であり、それぞれ、式(6-17a)、式(6-17b)で与えられる。また、H は、式(6-24)で規定される。

## 6.4 実験による提案式の検証

### 6.4.1 材料定数の決定

実験による提案式の検証には、第5章で述べた相対密度60%程度の秋穂砂供試体を用いた。実験はすべて、中空せん断試験機を用いて行われたものであり、供試体は、空中落下法により作成されている。中空せん断試験機による三主応力を独立に制御した実験の手法及びその手順については、5.3.2で既に詳述した。

表6-1は、この秋穂砂供試体に対する構成式中の10の材料定数をまとめたものである。これらの材料定数の具体的な決定は、4.5.1で述べた方法に従って行った。まず、定数  $l$ ,  $h$  と  $k_a$  は、図6-1(a)に示す等方圧密除荷試験の結果から決定された。次いで、定数  $\alpha_{pc}$ ,  $\alpha_{hc}$  と  $b$  は、通常の三軸圧縮試験を3

表6-1 秋穂砂の材料定数

Aio sand ( $D_r = 60\%$ )			
$l$	0.688	$M_c$	1.05
$h$	0.361	$N_c$	0.80
$k_a$	0.0047	$\alpha$	0.0/0.4*
$\alpha_{pc}$	1.65	$\Lambda$	.75
$\alpha_{hc}$	1.80		
$b$	0.937		

[注意] \*: 等方圧密砂の場合  $\rightarrow \alpha = 0.0$   
 : 異方圧密砂の場合  $\rightarrow \alpha = 0.4$ 、ただし圧密経路によって主値 ( $\alpha_{11}$ ) は異なる

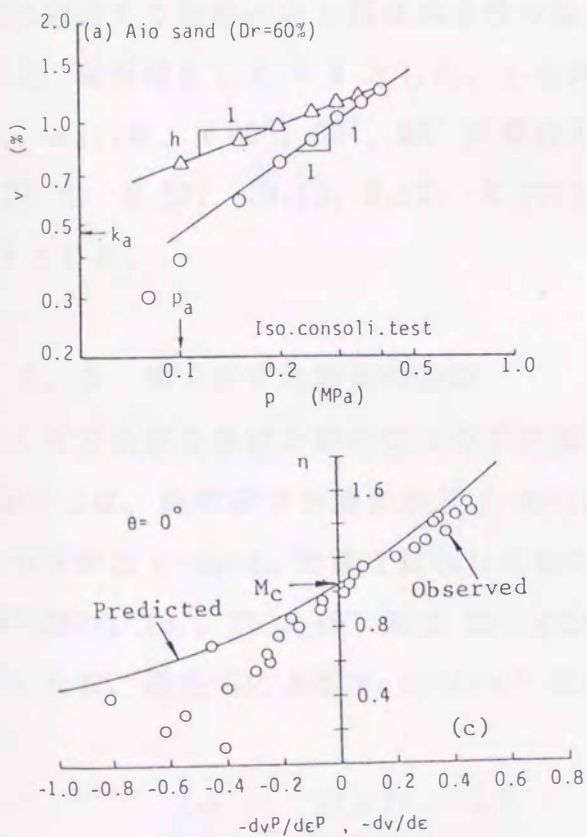


図6-1 材料定数の決定

- (a)  $l$ ,  $h$  及び  $k_a$  の決定
- (b)  $\alpha_{hc}$ ,  $\alpha_{pc}$  及び  $b$  の決定
- (c)  $M_c$  の決定

本行うことによって決定された〔図6-1 (b) 参照〕。図6-1 (b) には  $\theta = 30^\circ$  と  $60^\circ$  の結果も示されているが、これから、破壊包絡線の勾配は、 $\theta$  値にあまり依存しないと判断でき、これは、式(6-7)の考え方が妥当なものであることを意味する。なお、ここでの  $\alpha_{nc}$  の値は、簡単のために、Fukushima and Tatsuoka(1984) の報告を参考にして、 $p = 50 \text{ kPa}$  の時の破壊時の応力比で与える〔図6-1 (b) 〕。また、 $M_c$  の値は通常の三軸圧縮試験から得られる  $\eta - dv/d\varepsilon$  関係から決定される〔図6-1 (c) 〕。加えて、降伏特性を規定する  $N_c$  の値は、式(5-24)の等方硬化型の降伏関数に基づくと、

$$N_c = \frac{\eta_y}{[(p_0/p) - 1]^{1/2}} \quad (6-28)$$

で与えられる。従って、実験によって降伏応力  $\eta_y$  と  $[p_0/p]$  を求めれば、 $N_c$  の値は簡単に決定できる。また、定数  $N$  の  $\theta$  値依存性を規定する式(6-4)中の定数  $A$  ( $N_0/N_c$ ) は、実験結果に基づいて決定でき、ここでは、0.75 とした。最後に、圧密に起因する初期の応力誘導異方性の程度を表現する定数  $\alpha$  は、式(4-44)に従って、近似値として 0.4 とした。したがって、 $\alpha$  の定義からその成分 ( $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{33}$ ) は、 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  の場合それぞれ、(0.27, -0.13, -0.13)、(0.20, 0, -0.20)、(0.13, 0.13, -0.27)となる。また、ここではポアソン比  $\nu$  は 0 とした。

#### 6.4.2 応力ひずみ関係の予測

##### (1) 等方圧密を受けた砂の応力ひずみ関係の予測

図6-2は、提案式で予測される  $\eta - dv^p/d\varepsilon^p$  関係と  $\theta$  一定、 $p$  一定のせん断試験から求めた  $\eta - dv/d\varepsilon$  関係を比較したものである。図中には、 $\theta$  値が  $0^\circ$  (三軸圧縮状態)、 $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  及び  $60^\circ$  (三軸伸張状態) の場合の比較が示されている。なお、提案式による  $\eta - dv^p/d\varepsilon^p$  関係は、

$$\frac{dv^p}{d\varepsilon^p} = \frac{M(\theta)^2 - \eta^2}{2\eta} \quad (6-29)$$

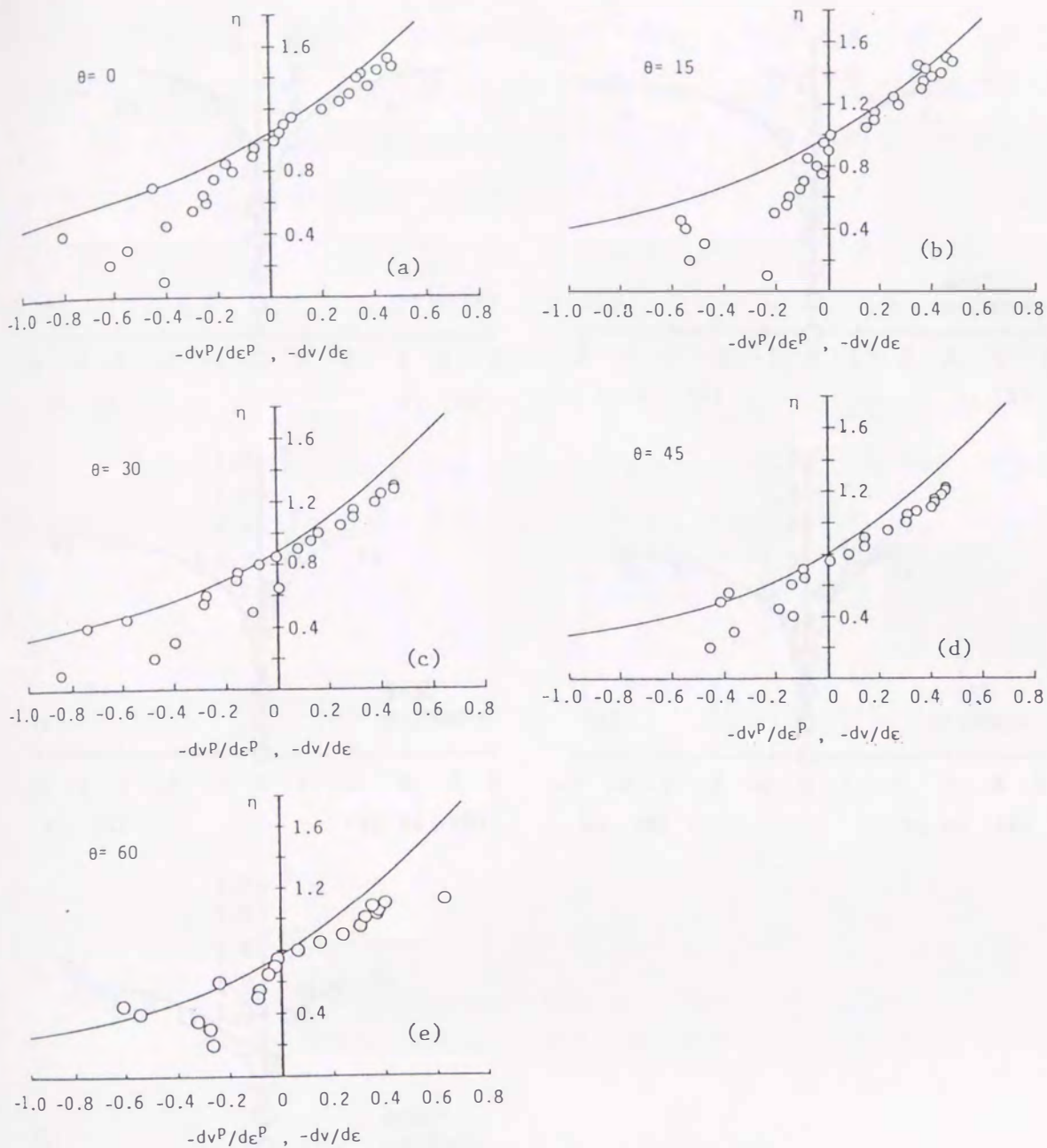


図6-2 予測された  $\eta - dv_p/d\varepsilon_p$  と実測された  $\eta - dv/d\varepsilon$  の比較

で与えられ、この中で、 $M(\theta)$ は、式(6-6)の関係から求められる。これらの図より、何れの $\theta$ の値に対しても、応力比の低いところで、多少予測値と実測値に違いが見られるものの、全体的には（塑性ひずみ増分比と全ひずみ増分比の違いを考慮にいれれば）、予測値は、ストレス・ダイレタンシー関係の $\theta$ 値依存性をうまく表している。

図6-3は、 $p = 100 \text{ kPa}$ の基礎での、 $p$ 一定、 $\theta$ 一定のせん断試験から求まる応力比と主ひずみ関係の予測値と実測値の比較を示したものである。図中には、 $\theta$



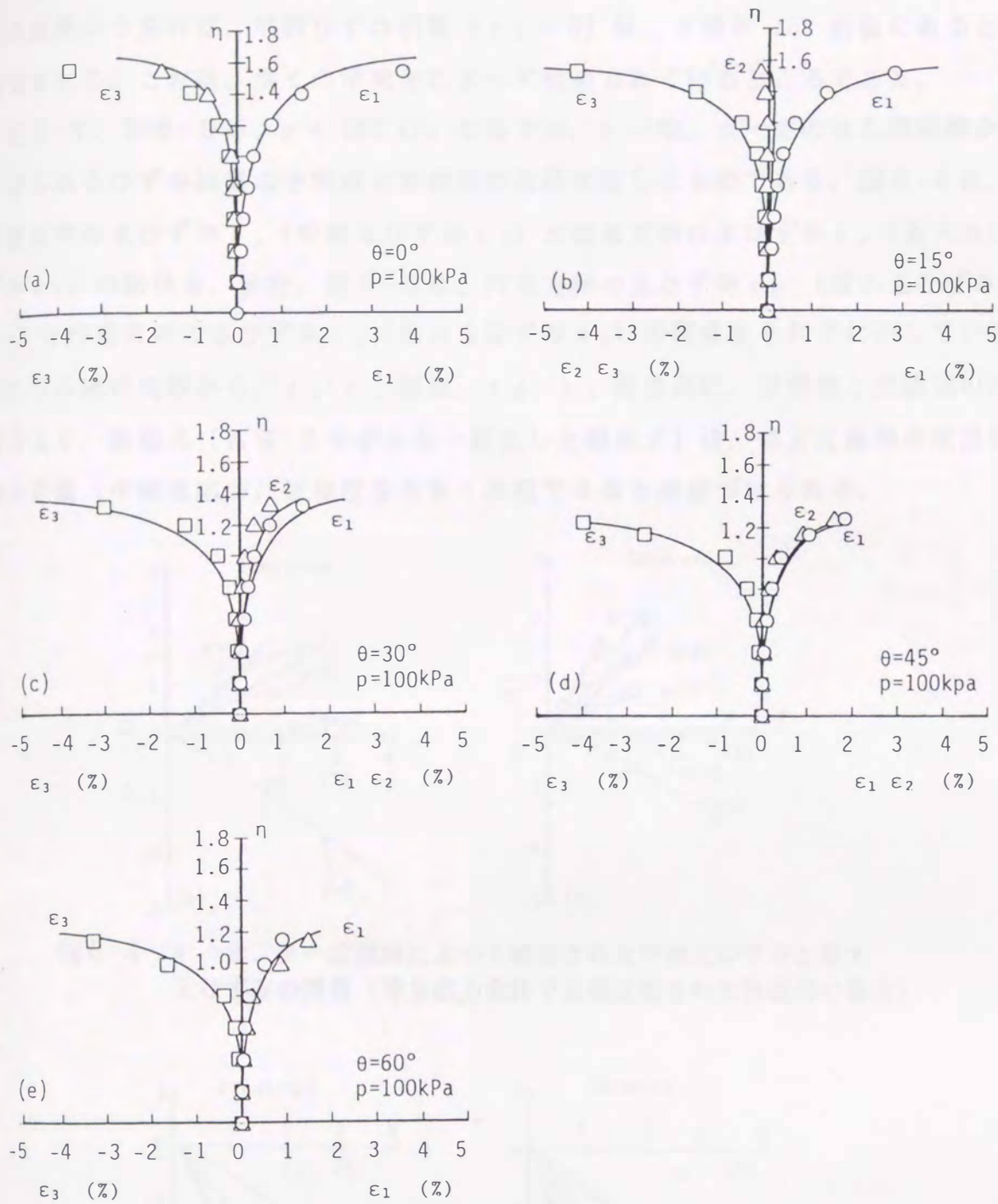


図6-3  $p$ 一定、 $\theta$ 一定試験によって観察された応力比と主ひずみの関係  
(等方応力条件で正規圧密された秋穂砂の場合)

値が  $0^\circ$  (三軸圧縮状態),  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  及び  $60^\circ$  (三軸伸張状態) の場合の比較が示されている。なお、等方圧密砂の予測では、 $\alpha$  値は恒に 0 であることを仮定している。これらの図から、予測される主ひずみ値は、何れの  $\theta$  値に対しても、実測値との対応がよく、特に中間主ひずみ値の  $\theta$  値依存性をうまく表している。

この結果から見れば、平面ひずみ状態 ( $\epsilon_2 = 0$ ) は、 $\theta$  値が  $15^\circ$  前後にあると判断される。これは、多くの研究者によって認められているところである。

図6-4、図6-5は、 $p = 100 \text{ kPa}$  の基での、 $p$  一定、 $\theta$  一定のせん断試験から得られるひずみ経路の予測値と実測値の比較を示したものである。図6-4は、半径方向の主ひずみ  $\epsilon_r$  (中間主ひずみ  $\epsilon_2$ ) と垂直方向の主ひずみ  $\epsilon_z$  (最大主ひずみ  $\epsilon_1$ ) の関係を、また、図6-5は、円周方向の主ひずみ  $\epsilon_\theta$  (最小主ひずみ  $\epsilon_3$ ) と円直方向の主ひずみ  $\epsilon_z$  (最大主ひずみ  $\epsilon_1$ ) の関係をそれぞれ示している。これらの図の比較から、 $\epsilon_r - \epsilon_z$  関係、 $\epsilon_\theta - \epsilon_z$  関係共に、予測値と実測値の対応はよく、提案式 (AW-2モデルを一般化した構成式) は、等方圧密砂の変形挙動の  $\theta$  値 (中間主応力) 依存性をうまく表現できると結論づけられる。

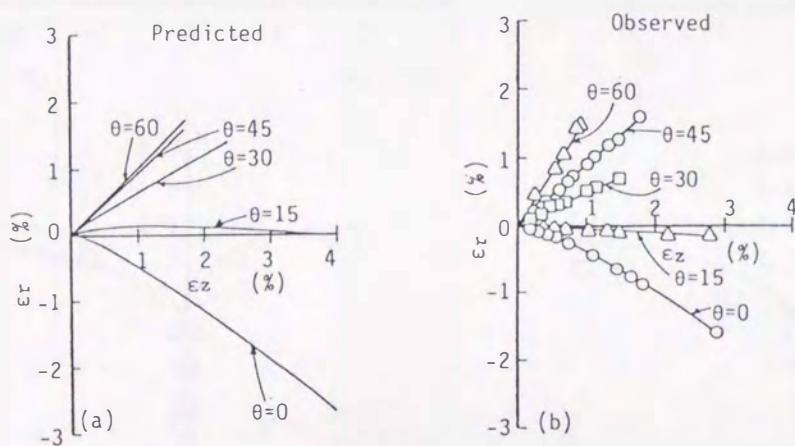


図6-4  $p$  一定、 $\theta$  一定試験によって観察された中間主ひずみと最大主ひずみの関係 (等方応力条件で正規圧密された秋穂砂の場合)

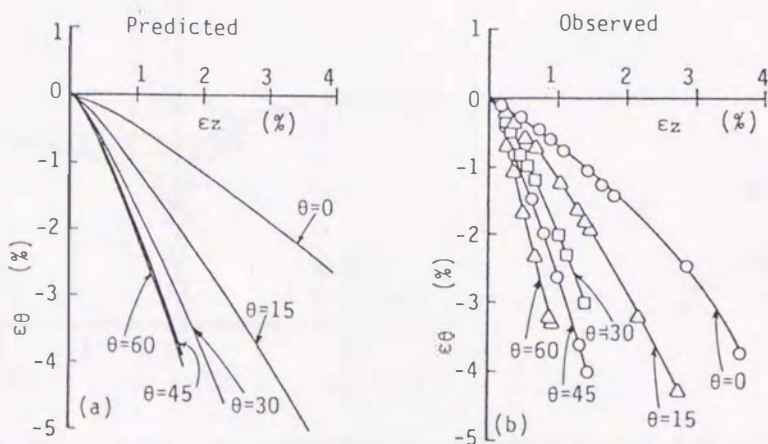


図6-5  $p$  一定、 $\theta$  一定試験によって観察された最小主ひずみと最大主ひずみの関係 (等方応力条件で正規圧密された秋穂砂の場合)

(2) 異方圧密を受けた砂の応力ひずみ関係の予測

図6-6は、5.3.3で述べた Type B-2 試験から得られた応力比と主ひずみ関係の実測値と予測値の比較を示したものである。Type B-2 試験は、図中の応力経路に示すように、まず、 $\theta = 0^\circ$  方向に応力比 0.6 を保ちながら  $p = 0.2$

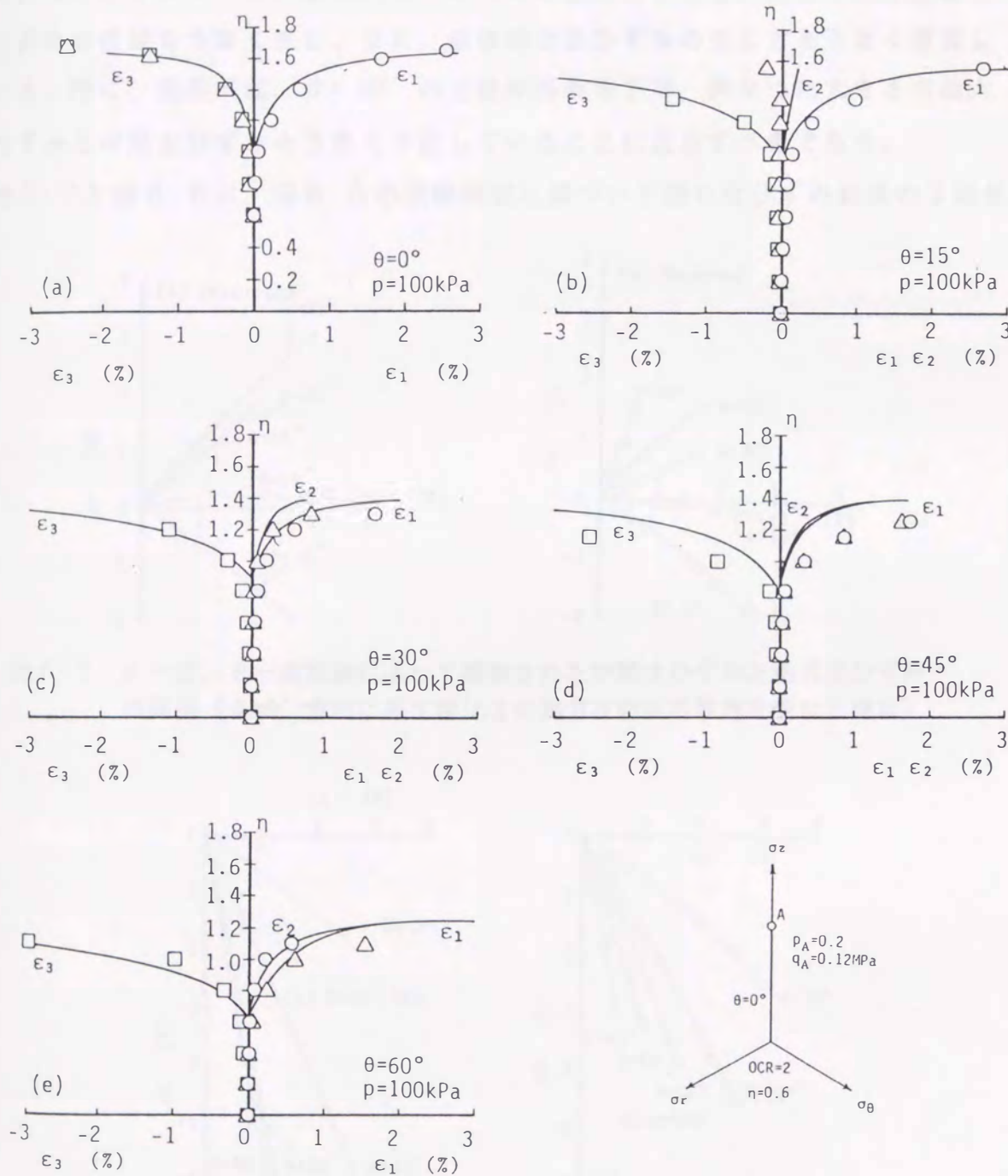


図6-6  $p$ 一定、 $\theta$ 一定試験によって観察された応力比と主ひずみの関係  
 ( $\theta=0^\circ$  方向に過圧密比2の異方圧密除荷履歴を受けた秋穂砂の場合)

MPa まで異方圧密し、その後、応力比一定で、 $p = 0.1$  MPa まで除荷し、さらに、 $p$  一定の条件で静水圧軸まで戻し、その状態から、種々の  $\theta$  値の基で行う一連の  $p$  一定 ( $p = 0.1$  MPa)、 $\theta$  値一定試験の総称である。図中には、 $\theta$  値が  $0^\circ$  (三軸圧縮状態)、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$  及び  $60^\circ$  (三軸伸張状態) の場合の予測値と実測値の比較が示されている。提案式は、何れの  $\theta$  値に対しても、主ひずみが急激に生じ始める位置をうまく表し、また、全体的な主ひずみの生じ方をうまく模擬している。特に、提案式は、 $\theta = 60^\circ$  の三軸伸張条件下で、異なった大きさの最大主ひずみと中間主ひずみをうまく予測していることに注目すべきである。

図6-7と図6-8は、図6-6の試験結果に基づいて描いたひずみ経路の予測値

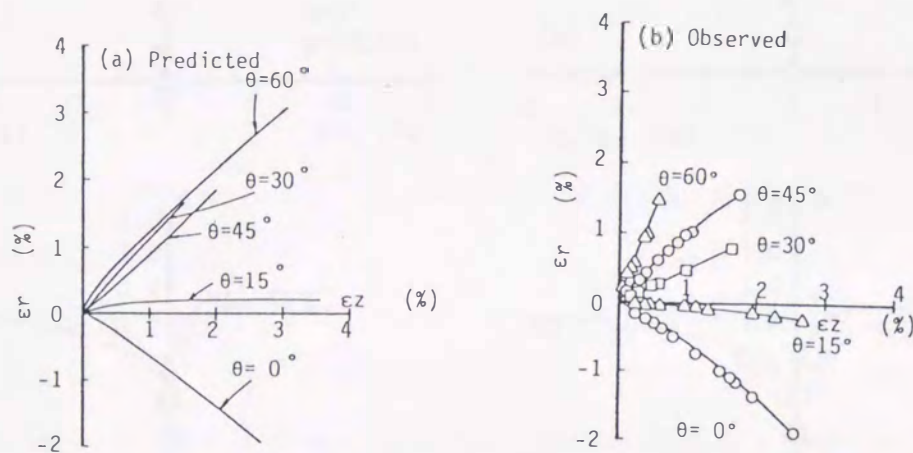


図6-7  $p$  一定、 $\theta$  一定試験によって観察された中間主ひずみと最大主ひずみの関係 ( $\theta=0^\circ$  方向に過圧密比2の異方圧密除荷履歴を受けた場合)

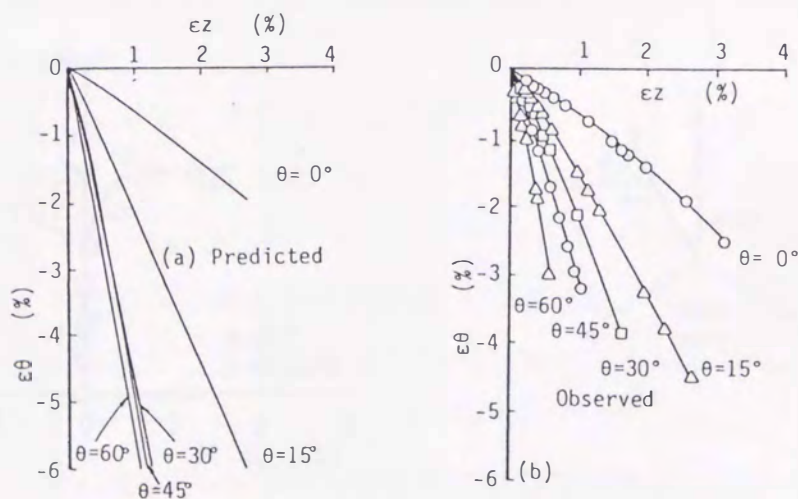


図6-8  $p$  一定、 $\theta$  一定試験によって観察された最小主ひずみと最大主ひずみの関係 ( $\theta=0^\circ$  方向に過圧密比2の異方圧密除荷履歴を受けた場合)

と実測値を比較したものである。図6-7に、最大主ひずみと中間主ひずみの関係が、また、図6-8に、最大主ひずみと最小主ひずみの関係が示されている。

図6-7の  $\epsilon_r$  (中間主ひずみ) -  $\epsilon_z$  (最大主ひずみ) 関係の予測値は、 $\theta = 30^\circ$  と  $45^\circ$  で、その勾配の逆転を許し実測値とは若干異なった傾向をもたらしている。

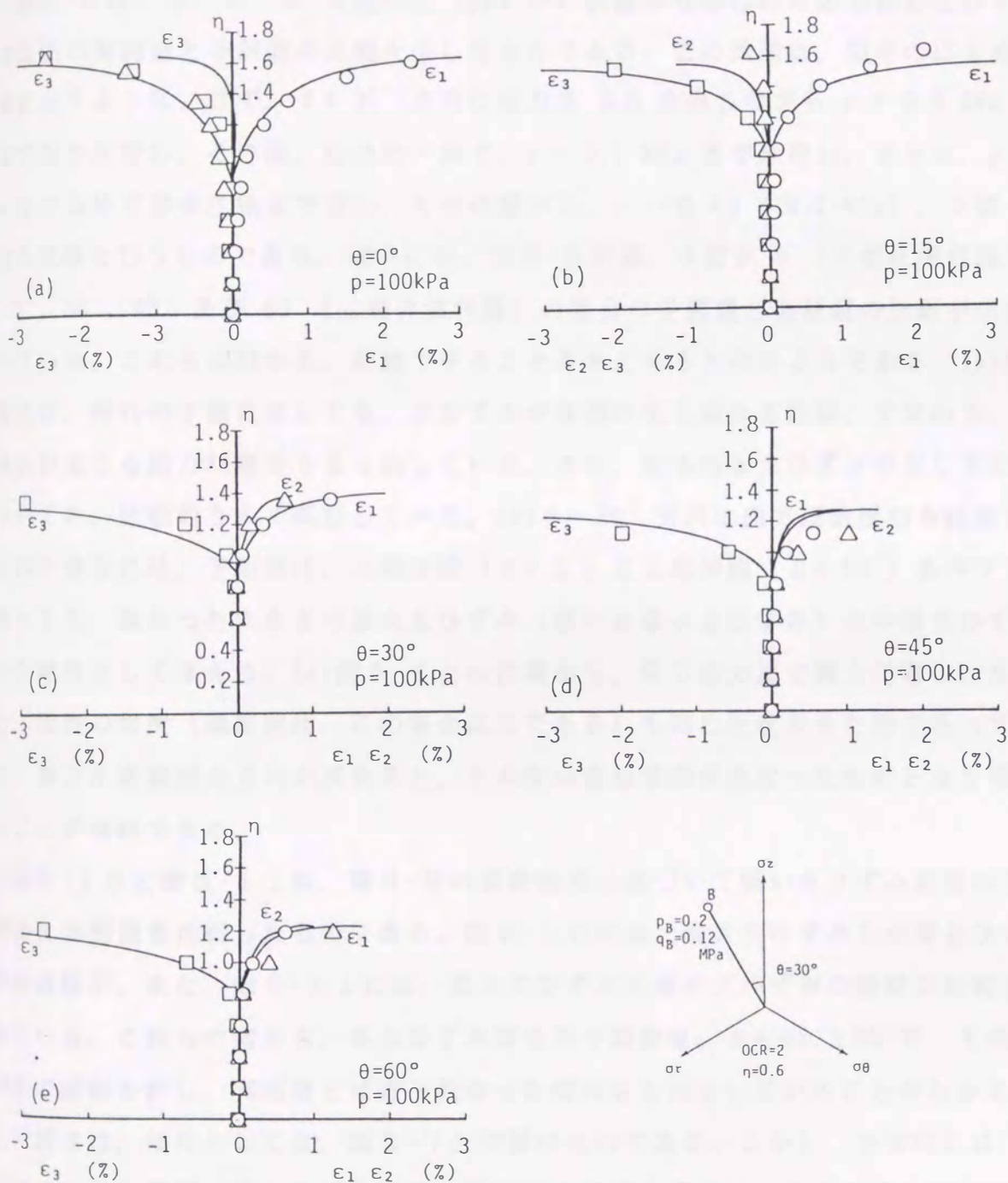


図6-9  $p$ 一定、 $\theta$ 一定試験によって観察された応力比と主ひずみの関係  
( $\theta = 30^\circ$  方向に過圧密比2の異方圧密除荷履歴を受けた秋穂砂の場合)

これは、圧密に起因した初期の応力誘導異方性を取り入れた結果として表れるものであり、異方性の程度の与え方によるものと考えられる。したがって、 $\alpha$ の値の評価手法をもう少し詳細に検討することや、また、異方性の程度を色々変えた場合のひずみの生じ方を詳しく調べておく必要があるのかも知れない。

図6-9は、5.3.3で述べた Type C-2 試験から得られた応力比と主ひずみ関係の実測値と予測値の比較を示したものである。この試験は、図中の応力経路に示すように、まず、 $\theta = 30^\circ$  方向に応力比 0.6 を保ちながら  $p = 0.2 \text{ MPa}$  まで異方圧密し、その後、応力比一定で、 $p = 0.1 \text{ MPa}$  まで除荷し、さらに、 $p$ 一定の条件で静水圧軸まで戻し、その状態から、 $p$ 一定 ( $p = 0.1 \text{ MPa}$ )、 $\theta$ 値一定の試験を行うものである。図中には、図6-6同様、 $\theta$ 値が  $0^\circ$  (三軸圧縮状態)、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$  及び  $60^\circ$  (三軸伸張状態) の場合の予測値と実測値の比較が示されている。これらの図から、結論できることをまとめると次のようである。(a)提案式は、何れの  $\theta$  値に対しても、主ひずみが急激に生じ始める位置、すなわち、降伏が生じる応力状態をうまく表している。また、全体的な主ひずみの生じ方についても、比較的うまく模擬している。(b)  $\theta = 30^\circ$  方向に異方圧密履歴を経験した砂の場合には、予測値は、三軸圧縮 ( $\theta = 0^\circ$ ) と三軸伸張 ( $\theta = 60^\circ$ ) 条件下であっても、異なった大きさの最大主ひずみ (或いは最小主ひずみ) と中間主ひずみを結果として与える。(c) 図6-6との比較から、同じ応力比で異方圧密し、また、履歴の程度 (過圧密比、この場合は2である) も同じだけ与えた砂であっても、異方圧密履歴の方向が異なると、その後の変形挙動が異なったものとなり得ることが確認できる。

図6-10と図6-11は、図6-9の試験結果に基づいて描いたひずみ経路の予測値と実測値を比較したものである。図6-10には、最大主ひずみと中間主ひずみの関係が、また、図6-11には、最大主ひずみと最小主ひずみの関係が比較されている。これらの図から、各主ひずみ関係の予測値は、 $\theta = 45^\circ$  と  $60^\circ$  で、その勾配の逆転を許し、実測値とは若干異なった傾向をもたらしていることがわかる。この結果は、傾向としては、図6-7と同様のものである。しかし、全体的には、予測値は、実測値の各主ひずみ関係の特性を比較的うまくとらえている。

図6-12は、5.3.3で述べた Type D-2 試験から得られた応力比と主ひずみ関係の実測値と予測値の比較を示したものである。このタイプの試験は、図

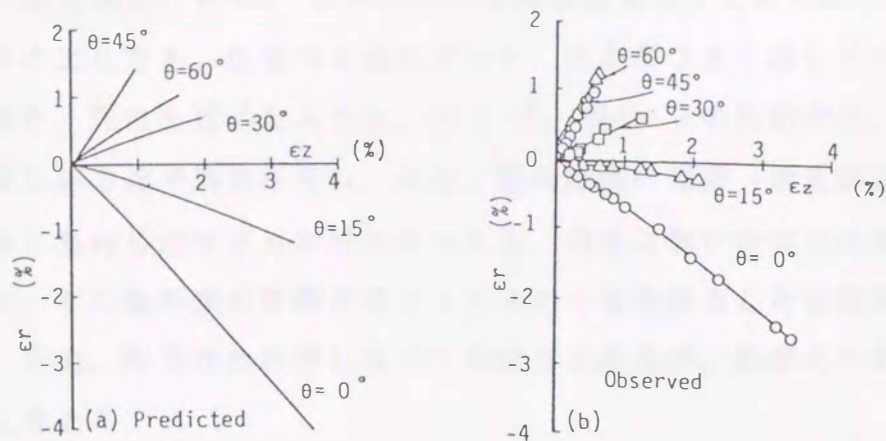


図6-10  $p$ 一定、 $\theta$ 一定試験によって観察された中間主ひずみと最大主ひずみの関係 ( $\theta=30^\circ$  方向に過圧密比2の異方圧密除荷履歴を受けた場合)

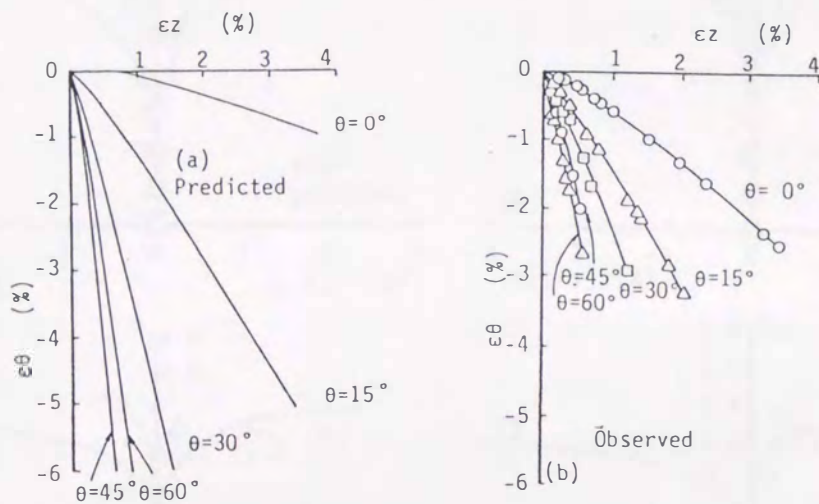


図6-11  $p$ 一定、 $\theta$ 一定試験によって観察された最小主ひずみと最大主ひずみの関係 ( $\theta=30^\circ$  方向に過圧密比2の異方圧密除荷履歴を受けた場合)

中の応力経路に示すように、まず、 $\theta = 60^\circ$  方向に応力比 0.6 を保ちながら  $p = 0.2$  MPa まで異方圧密し、その後、応力比一定で、 $p = 0.1$  MPa まで除荷し、さらに、 $p$  一定の条件で静水圧軸まで戻し、その状態から、種々の  $\theta$  値の基で行う一連の  $p$  一定 ( $p = 100$  kPa)、 $\theta$  値一定試験を表している。図中には、図6-6、図6-9 同様、 $\theta$  値が  $0^\circ$  (三軸圧縮状態)、 $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  及び  $60^\circ$  (三軸伸張状態) の場合の予測値と実測値の比較が示されている。これらの図から、図6-6や図6-9に比べて、予測精度としては、若干劣るが、異方性の程度をラフに仮定したこと (図6-6、図6-9 同様、 $\alpha = 0.4$  を与えて計算した) を

考えれば、提案式は、 $\theta = 60^\circ$  方向に異方圧密履歴を受けた砂の応力比の増加に伴う主ひずみの生じ方を、任意の  $\theta$  値に対して、比較的うまく表しているように思われる。また、先にも述べたように、図 6-6、図 6-9 の比較から、大切なこととして、同じ応力比で異方圧密し、また、除荷履歴の程度（過圧密比、この場合は 2 である）も同じだけ与えた砂であっても、過去に受けた異方圧密履歴の方向が異なると、その後の変形挙動が異なったものとなり得ることは認識しておくべきである。以上、限られた実験に基づく検証ではあるが、提案式の有用性が確かめられたと考える。

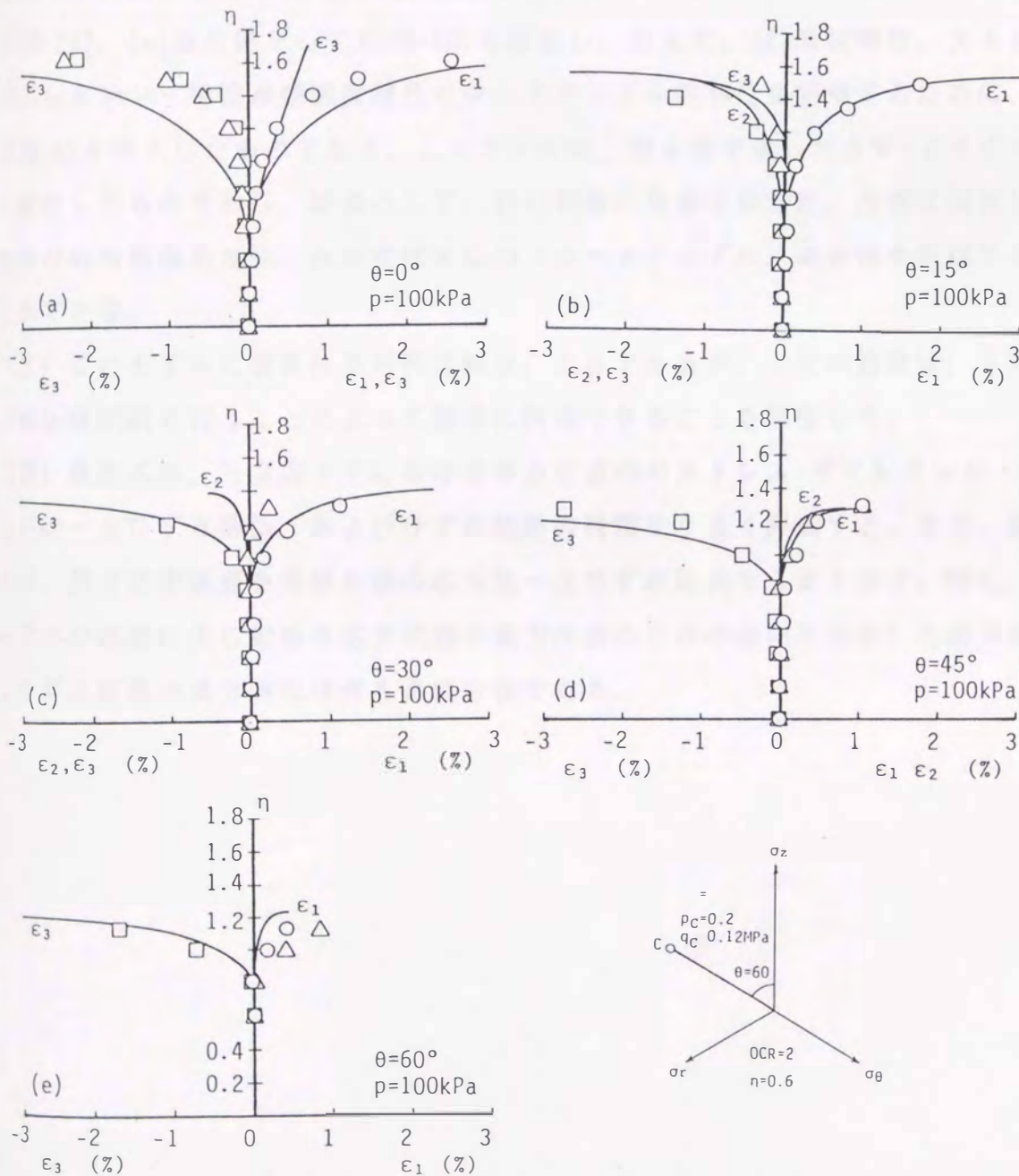


図 6-12  $p$  一定、 $\theta$  一定試験によって観察された応力比と主ひずみの関係  
 ( $\theta = 60^\circ$  方向に過圧密比 2 の異方圧密除荷履歴を受けた秋穂砂の場合)



## 6.5 本章の要約

本章では、第4章で提案した軸対称条件下での構成式(AW-2モデル)に、第5章で議論した強度特性の $\theta$ 値(ロードアングル)依存性と降伏特性の誘導異方性の効果を取り入れた一つの弾塑性構成式の提示を行い、その一般応力状態における適用性について検討した。本章の結果をまとめると以下のようである。

(1) ここで誘導した弾塑性構成式は、(a)降伏関数として式(6-3)、(b)塑性ポテンシャル関数として式(6-5)、(c)破壊包絡線として式(6-7)、(d)硬化係数として式(6-22)、(e)硬化則として式(6-26)を仮定し、加えて、(f)降伏特性、ストレス・ダイランシー特性及び強度特性のロードアングル依存性を評価するために、式(6-4)を導入したものである。このモデルは、第4章で示したAW-2モデルを一般化したものであり、結果として、砂の挙動の拘束圧依存性、圧密に起因した初期の応力誘導異方性、及び中間主応力(ロードアングル)依存性を評価することができる。

(2) このモデルに含まれる材料定数は、10であるが、10の定数は、3本の三軸圧縮試験を行うことによって簡単に決定できることを検証した。

(3) 提案式は、三主応力下における等方圧密砂のストレス・ダイランシー関係、応力比-主ひずみ関係、およびひずみ経路の特徴をうまく評価する。また、提案式は、異方圧密履歴を受けた砂の応力比-主ひずみ関係をうまく表す。特に、主ひずみが顕著に生じ始める応力状態や異方圧密の方向の違いに起因した応力比-主ひずみ関係の異方的な特性を表現可能である。

参考文献

- Fukushima, S. and Tatsuoka, F.(1984):"Strength and deformation characteristics of saturated sand at extremely low pressures," Soils and Foundations, Vol.24, No.4, pp.30-48.
- Hill, R.(1950):"The mathematical theory of plasticity," Oxford University Press, London.
- Leung, K.H.(1984):"Earthquake response on saturated soils and Liquefaction," Ph.D. thesis, University College of Swansea.
- Nayak, G.C. and Zienkiewicz, O.C.(1972):"Convenient forms of stress invariants for plasticity," ASCE, Journal of ST Div., Vol.98, No.ST4, pp.949-953.
- Ohta, H. and Sekiguchi, H.(1979):"Constitutive equations considering anisotropy and stress reorientation in clay," Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Meth. Geomech. (ed. W. Wittkcke), Aachen, pp.475-484.
- Sekiguchi, H. and Ohta, H.(1977):"Induced anisotropy and time dependency in clay, Proc. 9th ICSMFE, Spec. Session 9, Constitutive equations of soils(eds. Murayama, S. and Schofield, A.N.), pp.163-175.