複数組の制約条件と最適解のデータに基づく不変な未知目的関数のノンパラメトリック推計法 : 線形制約条件付凹計画問題の場合

前田, 幸嗣
農業計算学講座

川口, 雅正
農業計算学講座

https://doi.org/10.15017/23637

出版情報：九州大學農學部學藝雜誌. 54 (1/2), pp.97-102, 1999-11. 九州大學農學部

九大農学芸誌（Sci. Bull. Fac. Agr., Kyushu Univ.）
第54巻　第1·2号　97-102　(1999)

複数組の制約条件と最適解のデータに基づく不変な未知目的関数のノンパラメトリック推計法
── 線形制約条件付凹計画問題の場合 ──

前　田　幸　嗣・川　口　雅　正
農業計算学講座

（1999年7月30日受付，1999年8月24日受理）

A Method of Nonparametric Estimation of Unique Unknown Objective Function Using Sets of Constraint Condition and Corresponding Optimal Solution Data
── The Case of Concave Programming with Linear Inequalities Constraint ──

Koushi MAEDA and Tsunemasa KAWAGUCHI
Seminar of Econometric Analysis in Agriculture

1．課　　　題

本稿の第1の課題は，線形不等式（等式）体系を制約条件とする凹計画問題において，制約条件のパラメーターおよびそれに対応する最適解が有限組観察されているとき，その観察値から，不変ではあるが未知な目的関数をノンパラメトリックに推計する方法を提示することである．

第2の課題は，未知な目的関数を推計された目的関数で置き換え，任意の線形不等式（等式）体系を制約条件とすることによって得られる凹計画問題の最適解を求める方法を提示することである．

本稿の以下の構成は次のとおりである．まず第2節において本稿で使用する記号の定義と仮定について述べ，本稿の課題を定式化する．次に第3節および第4節において分析方法を提示する．なお，第3節および第4節は，上記の第1の課題および第2の課題に各々対応している．続く第5節においては，第3節および第4節で提示した分析方法を簡単な実験的問題に適用し，われわれの分析方法が有用であることを示す．そして最後に第6節において，本稿の含意と残された課題について述べる．

2．課題の定式化

（1）記号の定義

本稿で使用する記号の定義は以下のとおりである．

1）実定数の $m\times n$ 行列 A と，実定数の m 次列ベクトル b および実変数の n 次列ベクトル x

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ここで，m および n は任意の自然数を表すものとする．

2）$x\geq 0$（つまり $x_h\geq 0$，$h=1,2,\cdots,n$）なる範囲で定義されかつ連続な偏導関数を有する x の実数値関数 $f(x)$，$f(x)$ の x_h に関する偏導関数 $f_h(x)$ および $f(x)$ の勾配（Gradient）ベクトル $\nabla f(x)$

$$f(x)\equiv f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_h}\equiv f_h(x)\equiv f_h(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad h=1,2,\cdots,n$$
$$\nabla f(x)\equiv\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

ここで，$f(x)$ には必要なだけ高階の連続な偏導関数が存在するものとする．また，x がある特定の値 $\bar{x}\equiv[\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n]^{\mathrm{T}}$ をとるとき，$f(x)$，$f_h(x)$ および $\nabla f(x)$ の値は，各々 $f(\bar{x})$，$f_h(\bar{x})$ および $\nabla f(\bar{x})$ と表されるものとする．なお，$\bar{x}\geq 0$ であることはいうまでもない．さらに，行列やベクトルの右上に示されたTは，その転置を表すものとする．

3）A，b および $\bar{x}$ の有限組（t 組）の観察値を各々 $A(i)$，$b(i)$ および $\bar{x}(i)$ と表す．なお，i は1から t までの任意の整数を表すものとする．

（2）$f(x)$ の形状に関する仮定

$f(x)$ は x の凹関数であるものと仮定する．したがって，$x=\bar{x}$ における $f(x)$ の接平面（Tangent Plane）を $TP(x)$ とすれば，任意の $x\geq 0$ について以下の関係が成立する．

$$
\begin{aligned}
f(x)\leq TP(x)&\equiv f(\bar{x})+f_1(\bar{x})(x_1-\bar{x}_1)\\
&\quad+f_2(\bar{x})(x_2-\bar{x}_2)+\cdots+f_n(\bar{x})(x_n-\bar{x}_n)\\
&=f(\bar{x})+[\nabla f(\bar{x})]^{\mathrm{T}}(x-\bar{x})
\end{aligned}
$$

さらに，少なくとも1組の $i\neq j$ について，$f(\bar{x}(i))\neq f(\bar{x}(j))$ が成立するものと仮定する．

（3）課題の定式化

以上の記号および仮定を利用すれば，前節における第1の課題および第2の課題は各々以下のように定式化できる．

1）第1の課題の定式化

A，b の t 組の観察値 $A(i)$，$b(i)$ に対応し，$A(i)x\leq b(i)$，$x\geq 0$ の下で $f(x)$ を最大にする最適解 $\bar{x}(i)$ が観察されている．これらの t 組の観察値 $A(i)$，$b(i)$ および $\bar{x}(i)$ に基づいて，不変ではあるが未知な目的関数 $f(x)$ のノンパラメトリックな推計方法を示せ．ただし，このとき $f(x)$ のノンパラメトリックな推計結果を $\bar{\bar{f}}(x)$ で表せば，$\bar{\bar{f}}(x)$ は次の条件を満たすように推計されるものとする．つまり，

> $A(i)x\leq b(i)$，$x\geq 0$ の下で，$\bar{x}(i)$ は $\bar{\bar{f}}(x)$ を最大にする，

という条件である．また，$\bar{\bar{f}}(x)$ を測る尺度の原点および単位は，何らかの形で与えられるものとする．

2）第2の課題の定式化

A と b の任意の値に対して $Ax\leq b$，$x\geq 0$ の下で $\bar{\bar{f}}(x)$ を最大にする最適解 x を求める方法を示せ．

3. 未知目的関数のノンパラメトリック推計法

$A(i)x\leq b(i)$，$x\geq 0$ の下で $\bar{x}(i)$ が $f(x)$ を最大にするための必要十分条件は，$A(i)x\leq b(i)$，$x\geq 0$ の下で $\bar{x}(i)$ が $[\nabla f(\bar{x}(i))]^{\mathrm{T}}x$ を最大にすることである．また，そのための必要十分条件は，次の条件を満たす m 次シャドウプライス列ベクトル $U(i)$，および m 次と n 次のスラック変数列ベクトル $y(i)$ と $v(i)$ が存在することである．

$$
\begin{aligned}
&A(i)\bar{x}(i)+y(i)=b(i),\ \bar{x}(i)\geq 0,\ y(i)\geq 0\\
&A(i)^{\mathrm{T}}U(i)=\nabla f(\bar{x}(i))+v(i),\\
&\qquad U(i)\geq 0,\ v(i)\geq 0\\
&U(i)^{\mathrm{T}}y(i)=0,\ v(i)^{\mathrm{T}}\bar{x}(i)=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$x=\bar{x}(i)$ における $f(x)$ の接平面を $TP_i(x)$ と表せば，$f(x)$ の形状と(1)式より，任意の $x\geq 0$ について次の関係が成立する．

$$
\begin{aligned}
&f(x)\leq TP_i(x) &&(f(x)\text{ の形状より})\\
&TP_i(x)=f(\bar{x}(i))+[\nabla f(\bar{x}(i))]^{\mathrm{T}}(x-\bar{x}(i))\\
&\qquad=f(\bar{x}(i))+[A(i)^{\mathrm{T}}U(i)-v(i)]^{\mathrm{T}}(x-\bar{x}(i))\\
&\qquad=f(\bar{x}(i))+U(i)^{\mathrm{T}}A(i)(x-\bar{x}(i))-v(i)^{\mathrm{T}}x\\
&&&(v(i)^{\mathrm{T}}\bar{x}(i)=0\text{ より})\\
&\qquad\leq f(\bar{x}(i))+U(i)^{\mathrm{T}}A(i)(x-\bar{x}(i))\equiv\overline{TP}_i(x)\\
&&&(v(i)^{\mathrm{T}}x\geq 0\text{ より})\\
&\overline{TP}_i(x)=f(\bar{x}(i))+U(i)^{\mathrm{T}}(A(i)x-A(i)\bar{x}(i))\\
&\qquad=f(\bar{x}(i))+U(i)^{\mathrm{T}}(A(i)x-b(i))\\
&\qquad(A(i)\bar{x}(i)=b(i)-y(i),\ U(i)^{\mathrm{T}}y(i)=0\text{ より})
\end{aligned}
$$

そして，ここで導入した $\overline{TP}_i(x)$ は $TP_i(x)$ の1つの近似であり，容易に分かるように次の条件を満たす．

$$f(\bar{x}(i))=TP_i(\bar{x}(i))=\overline{TP}_i(\bar{x}(i))$$

さらに，$A(i)x\leq b(i)$，$x\geq 0$ なる任意の x について次の関係が成立する．

$$\overline{TP}_i(x)=f(\bar{x}(i))-U(i)^{\mathrm{T}}(b(i)-A(i)x)\leq f(\bar{x}(i))$$

以上をまとめると，$\overline{TP}_i(x)$ は次の条件を満たすことがわかる．

$$
\begin{aligned}
&\overline{TP}_i(\bar{x}(i))=f(\bar{x}(i))\\
&\overline{TP}_i(\bar{x}(j))=f(\bar{x}(i))-U(i)^{\mathrm{T}}(b(i)-A(i)\bar{x}(j))\geq\\
&\qquad TP_i(\bar{x}(j))\geq f(\bar{x}(j)),\ j\neq i
\end{aligned}
$$

$A(i)x\leq b(i)$，$x\geq 0$ の下で $\bar{x}(i)$ が $\overline{TP}_i(x)$ を最大にする

この条件から明らかなように，$\lambda(1), \lambda(2), \cdots, \lambda(t)$ を t 個の m 次変数列ベクトル，また，$z_1, z_2, \cdots, z_t$ を t 個の実変数とすれば，次の線形不等式（等式）体系には少なくとも1組の解が存在し，その解は線形計画法を利用して求めることができる．このことは，$f(\bar{x}(i))$ および $U(i)$ を各々 z_i および $\lambda(i)$ で置き換えてみると，$f(x)$ の計数尺度の原点と単位を適当に決めることができることから明らかである．さらに，解はただ1組であるとは限らないが，z_i および $\lambda(i)$ の値は各々 $f(\bar{x}(i))$ および $U(i)$ の推定値とみなすことができ，これらの値を求めることにより，$\overline{TP}_i(x)$ の1つの近似を得ることができる．

$$\begin{aligned}
&z_i-\lambda(i)^{\mathrm{T}}(b(i)-A(i)\bar{x}(j))\geq z_j,\\
&\quad i\neq j\ ;\ i,j=1,2,\cdots,t\\
&\lambda(i)^{\mathrm{T}}y(i)=0,\ i=1,2,\cdots,t\\
&Min\{z_1,z_2,\cdots,z_t\}=0\\
&z_1+z_2+\cdots+z_t=t\\
&\lambda(i)\geq 0,\ z_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots,t
\end{aligned} \tag{2}$$

なお $Min\{z_1,z_2,\cdots,z_t\}=0$ および $z_1+z_2+\cdots+z_t=t$ は，$f(x)$ の計数尺度の原点および単位を各々与えるためのものである．また，$y(i)$ は(1)式よりその値が求められる．

具体的な計算方法としては，$Min\{z_1,z_2,\cdots,z_t\}=0$ という条件を除いた制約の下で，z_i を最小にする線形計画問題を $i=1,2,\cdots,t$ について各々解き，最小値がゼロになる i についての最適解を，求める最適解とすればよい．

このようにして求めた最適解を $\bar{\lambda}(i)$，$\bar{z}_i(i=1,2,\cdots,t)$ で表し，また $\overline{\overline{TP}}_i(x)=\bar{z}_i-\bar{\lambda}(i)^{\mathrm{T}}(b(i)-A(i)x)$ なる式を導入すれば，本稿で求める関数 $\bar{\bar{f}}(x)$ は

$$\bar{\bar{f}}(x)=Min\{\overline{\overline{TP}}_1(x),\overline{\overline{TP}}_2(x),\cdots,\overline{\overline{TP}}_t(x)\}$$

となる．この関数が x の凹関数であり，第2節で述べた条件を満たすことは容易に確認できる．

4. 新たな制約条件の下で $\bar{\bar{f}}(x)$ を最大にする凹計画問題の解法

A と b の新たな値に対して，$Ax\leq b$，$x\geq 0$ の下で $\bar{\bar{f}}(x)$ を最大にするという凹計画問題は，次のようにして解くことができる．

任意に固定された x に対して，$\bar{\bar{f}}(x)$ は以下の線形計画問題の目的関数の最小値として表すことができる．

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{f}}(x)=&Min_{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_t}\{\theta_1\overline{\overline{TP}}_1(x)+\theta_2\overline{\overline{TP}}_2(x)\\
&+\cdots+\theta_t\overline{\overline{TP}}_t(x)\}\\
&\text{s.t.}\quad \theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_t=1\\
&\qquad\ \ \theta_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots,t
\end{aligned}$$

したがって，$\overline{\overline{TP}}_i(x)$，$i=1,2,\cdots,t$ が x の1次式であることより問題を適当に変形すると，$Ax\leq b$，$x\geq 0$ の下で $\bar{\bar{f}}(x)$ を最大にする問題は Maximin Programming の問題となり，線形計画法を利用して解くことができる（註1）．つまり，次の線形計画問題(3)を解けばよい．ただし，l_1 および l_2 は非負の実変数である．

$$\begin{aligned}
&Max_{x,l_1,l_2}\{l_1-l_2\}\\
&\text{s.t.}\quad \overline{\overline{TP}}_i(x)=(\bar{z}_i-\bar{\lambda}(i)^{\mathrm{T}}b(i))\\
&\qquad\quad +\bar{\lambda}(i)^{\mathrm{T}}A(i)x\geq l_1-l_2,\ i=1,2,\cdots,t\\
&\qquad\quad Ax\leq b\\
&\qquad\quad x\geq 0,\ l_1\geq 0,\ l_2\geq 0
\end{aligned} \tag{3}$$

（註1）Kawaguchi and Maruyama (1976) を参照．なお，任意に固定された x に対して，$\bar{\bar{f}}(x)$ は次の線形計画問題の目的関数の最大値としても表すことができる．つまり，$\overline{\overline{TP}}_i(x)\geq(l_1-l_2)$，$l_1\geq 0$，$l_2\geq 0$，$i=1,2,\cdots,t$ なる条件の下で (l_1-l_2) を最大にする問題．この関係を利用すると，線形計画問題(3)を解くことにより求める解が得られることが容易に分かる．

5. 適　用　例

前節までに提示した分析方法の有用性を，簡単な実験的問題を利用して以下検討しよう．検討にあたっては，次の手順で実験的問題を作成し，分析を行う．

1）目的関数 $f(x)$ の関数形を任意に特定化する．

2）$A(i)$，$b(i)$ として任意に有限組の値を与え，$A(i)x\leq b(i)$，$x\geq 0$ の下で特定化された目的関数 $f(x)$ を最大にする凹計画問題を解き，有限組の最適解 $\bar{x}(i)$ を求める．

3）以上の有限組の $A(i)$，$b(i)$ および $\bar{x}(i)$ を所与として，線形不等式体系(2)を満たす解 $\lambda(i)$，z_i を求める．

4）得られた1組（ないし複数組）の $\lambda(i)$，z_i の値に対して $\overline{\overline{TP}}_i(x)$ を求め，$\bar{\bar{f}}(x)$ を構成する．

5）先のどの $A(i)$，$b(i)$ とも異なる新たな1組の $A(*)$，$b(*)$ を任意に与え，$A(*)x\leq b(*)$，$x\geq 0$ の下で $f(x)$ を最大化する．さらに1組（ないし複数組）の $\lambda(i)$，z_i の値に対して，同じ

く$A(*)x \leq b(*)$，$x \geq 0$ の下で $\bar{\bar{f}}(x)$ を最大化する．

6) $f(x)$ に対応する5）の最適解と $\bar{\bar{f}}(x)$ に対応する5）の最適解を比較する．

表1のように，$A(i)$，$b(i)$ として任意に7組の値を与え，$A(i)x \leq b(i)$，$x \geq 0$ の下で，以下に示すような2次関数 $f(x)$ を最大にすると，表1に示すとおり，7組の最適解 $\bar{x}(i)$，$i=1,2,\cdots,7$ が求まる．

$$f(x)=-x_1^2-x_2^2+40x_1+30x_2$$

そして，以上の7組の $A(i)$，$b(i)$ および $\bar{x}(i)$ を所与とすれば，表2に示すとおり，線形不等式体系(2)を満たす4組の解 $\bar{\lambda}(i)$，$\bar{z}_i$ が求まり，かつ，この4組の $\bar{\lambda}(i)$，$\bar{z}_i$ の各々に対する $\overline{\overline{TP}}_i(x)$，つまり $\bar{\bar{f}}(x)$ を表3のように構成することができる．

先の7組の観察値 $A(i)$，$b(i)$ とは異なる1組の観

表1 実験的問題の構成（$m=2$, $n=2$, $t=7$）

i	$a_{11}(i)$	$a_{12}(i)$	$b_1(i)$	$a_{21}(i)$	$a_{22}(i)$	$b_2(i)$	$\bar{x}_1(i)$	$\bar{x}_2(i)$
1	3.0000	7.0000	77.0000	8.0000	1.0000	64.0000	7.0000	8.0000
2	1.0000	5.0000	80.0000	14.0000	−3.0000	98.0000	10.0000	14.0000
3	7.0000	12.0000	156.0000	3.0000	1.0000	42.0000	12.0000	6.0000
4	1.0000	13.0000	156.0000	11.0000	2.0000	165.0000	13.0000	11.0000
5	1.0000	4.0000	72.0000	14.0000	−1.0000	210.0000	16.0000	14.0000
6	7.0000	17.0000	289.0000	10.0000	7.0000	240.0000	17.0000	10.0000
7	2.0000	19.0000	285.0000	13.0000	3.0000	286.0000	19.0000	13.0000
*	4.0000	11.0000	143.0000	9.0000	1.0000	108.0000	11.0000	9.0000

（註）$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，$\bar{x}=\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$

表2 線形不等式体系(2)の解

i	No.1			No.2			No.3			No.4		
	$\bar{\lambda}_1(i)$	$\bar{\lambda}_2(i)$	$\bar{z}_i$	$\bar{\lambda}_1(i)$	$\bar{\lambda}_2(i)$	$\bar{z}_i$	$\bar{\lambda}_1(i)$	$\bar{\lambda}_2(i)$	$\bar{z}_i$	$\bar{\lambda}_1(i)$	$\bar{\lambda}_2(i)$	$\bar{z}_i$
1	0.0000	0.0226	0.0000	0.0000	0.0197	0.0000	0.0000	0.0391	0.0000	0.0000	0.0196	0.0000
2	0.0000	0.0154	0.3690	0.0000	0.0134	0.3211	0.0327	0.0040	1.1730	0.0000	0.0103	0.5888
3	0.0194	0.0000	0.2136	0.0106	0.0000	0.7107	0.0126	0.0000	0.1387	0.0099	0.0000	0.6673
4	0.0000	0.0160	1.1530	0.0000	0.0139	1.0033	0.0106	0.0071	0.9838	0.0000	0.0131	0.9421
5	0.0000	0.0118	1.6132	0.0000	0.0113	1.4448	0.0000	0.0026	1.7027	0.0000	0.0103	1.4523
6	0.0000	0.0000	1.8256	0.0053	0.0000	1.5886	0.0097	0.0000	1.1856	0.0564	0.0000	1.4916
7	0.0000	0.0000	1.8256	0.0056	0.0000	1.9315	0.0000	0.0000	1.8162	0.0000	0.0000	1.8579

（註）No.1 から No.4 は，線形不等式体系(2)を満たす4組の解の各々の組を表している．

表3 $\overline{\overline{TP}}_i(x)$ の構成

i	No.1 $\overline{\overline{TP}}_i(x)$	No.2 $\overline{\overline{TP}}_i(x)$	No.3 $\overline{\overline{TP}}_i(x)$	No.4 $\overline{\overline{TP}}_i(x)$
1	$-1.4469+0.1809x_1+0.0226x_2$	$-1.2591+0.1574x_1+0.0197x_2$	$-2.5023+0.3128x_1+0.0391x_2$	$-1.2561+0.1570x_1+0.0196x_2$
2	$-1.1376+0.2152x_1-0.0461x_2$	$-0.9899+0.1873x_1-0.0401x_2$	$-1.8288+0.0883x_1+0.1514x_2$	$-0.4187+0.1439x_1-0.0308x_2$
3	$-2.8161+0.1359x_1+0.2331x_2$	$-0.9394+0.0740x_1+0.1269x_2$	$-1.8288+0.0883x_1+0.1514x_2$	$-0.8820+0.0695x_1+0.1192x_2$
4	$-1.4893+0.1762x_1+0.0320x_2$	$-1.2960+0.1533x_1+0.0279x_2$	$-1.8288+0.0883x_1+0.1514x_2$	$-1.2168+0.1439x_1+0.0262x_2$
5	$-0.8648+0.1652x_1-0.0118x_2$	$-0.9323+0.1585x_1-0.0113x_2$	$1.1483+0.0370x_1-0.0026x_2$	$-0.7065+0.1439x_1-0.0103x_2$
6	$1.8256+0.0000x_1+0.0000x_2$	$0.0639+0.0369x_1+0.0897x_2$	$-1.6183+0.0679x_1+0.1649x_2$	$-14.7971+0.3945x_1+0.9582x_2$
7	$1.8256+0.0000x_1+0.0000x_2$	$0.3293+0.0112x_1+0.1068x_2$	$1.8162+0.0000x_1+0.0000x_2$	$1.8579+0.0000x_1+0.0000x_2$

（註）No.1 から No.4 は，線形不等式体系(2)を満たす4組の解の各々に対応する組を表している．

察値 $A(*)$, $b(*)$ を表1のように任意に与え, $A(*)x \leq b(*)$, $x \geq 0$ の下で $f(x)$ を最大にすると, 表1に示すとおり最適解 $\bar{x}(*)$ が得られる. また, 線形計画問題(3)を利用して同じく $A(*)x \leq b(*)$, $x \geq 0$ の下4組の $\bar{\bar{f}}(x)$ を各々最大化すれば, 表4に示すとおり4組の最適解が得られる. $f(x)$ に対応する最適解と $\bar{\bar{f}}(x)$ に対応する4組の最適解はすべて一致しており, こうして, 本稿で提示した分析方法が有用であることが分かる.

6. 含意と残された課題

本稿で提示した分析方法は汎用性および一般性が高く, 多くの応用分野をもつものと思われる.

応用分野の1例としては, 経済学における家計の計量分析がある. つまり, 効用最大化問題における効用関数を推計するにあたって, 本稿の分析方法を応用することができる. 予算が唯一の制約である単純な家計モデルに対しては, 効用関数を推計する際, Dual Approach やノンパラメトリック需要分析を適用することができるが (註1), 予算以外にも制約がある場合, 例えば, 家計内生産を含む家計モデル (註2) に対しては, 効用関数の推計に上記の Dual Approach やノンパラメトリック需要分析を適用することができず, 本稿の分析方法が有効となろう (註3) (註4). 具体的には, 第1に, 第3節の線形不等式 (等式) 体系(2)を利用して家計の経済合理性を検証することが可能となろう. また第2に, 第4節の線形計画問題(3)を利用すれば, 比較静学分析や厚生分析, ならびに賦存資源の限界評価や各種弾力性の計測を行うことができるだろう. これらの分析については別稿に譲ることにし, ここでは本稿の分析方法に関する残された課題について述べておきたい.

第1に, 第5節でみたとおり, 観察値の組み合わせが少ない場合, 線形不等式 (等式) 体系(2)には通常複数の解が存在するものと考えられる. これは, 未知なる目的関数の推計結果が一意ではないことを意味している. しかし, 観察値の組み合わせを多数利用すれば, 線形不等式 (等式) 体系(2)の解はある1つの解に収束していくことが期待できる. この解の収束にどの程度多くの観察値の組み合わせが必要となるか, 検討する必要がある.

第2に, 線形不等式 (等式) 体系(2)の解が一意となるほどには多くの観察値の組み合わせを利用できない場合, 線形不等式 (等式) 体系(2)の複数の解の中からどの解を選択し未知なる目的関数を構成するか, 選択基準を設ける必要がある.

第3に, 観察値が線形制約下の凹計画問題と整合的でない場合, 線形不等式 (等式) 体系(2)には解が存在しないだろう. この問題への対処方法としては, Varian (1985) や Sakong and Hayes (1993) の方法が参考となるだろう.

表4 $A(*)$, $b(*)$ 制約下の最適解

	$x_1(*)$	$x_2(*)$	$\lambda_1(*)$	$\lambda_2(*)$
No.1	11.0000	9.0000	0.0130	0.0190
No.2	11.0000	9.0000	0.0113	0.0166
No.3	11.0000	9.0000	0.1475	0.0039
No.4	11.0000	9.0000	0.9528	0.0053

(註) No.1 から No.4 は, 線形不等式体系(2)を満たす4組の解の各々の組を表している.

(註1) Dual Approach については Varian (1992) 等を, またノンパラメトリック需要分析については Afriat (1967, 1987), Varian (1982, 1983) および Chavas and Cox (1997) 等を参照.

(註2) 家計内生産を含む家計モデルについては, Becker (1965), Gronau (1977) および丸山 (1984) 等を参照.

(註3) 家計内生産を含む家計モデルに対して本稿の分析方法を適用する場合, 家計内生産を Activity の概念を利用して定式化すれば, モデルが本稿の分析方法と整合するばかりか, 生産関数分析に対する Activity Analysis の優位性をいかした分析が可能となろう. 生産関数分析に対する Activity Analysis の優位性については, Dorfman (1951), Dorfman et al. (1958) および Naylor (1966) を参照.

(註4) 本稿は, 単一の線形不等式を制約条件とする凹計画問題 (予算制約下の効用最大化問題) に対して開発された Chavas and Cox (1997) の分析方法を, 線形不等式 (等式) 体系を制約条件とする凹計画問題に対する分析へと発展させたものであり, 本稿の分析方法は Chavas and Cox (1997) の分析方法を包含している. そして, 非飽和の仮定を除去した点と, 目的関数 (効用関数) の計数尺度の導入の仕方を明確にした点で, 本稿は Chavas and Cox (1997) の分析方法を大きく改善している.

文　献

Afriat, S. N. 1967 The Construction of

Utility Functions from Expenditure Data. *International Economic Review*, **8**(1) : 67-77

Afriat, S. N. 1987 *Logic of Choice and Economic Theory*. Clarendon Press, Oxford

Becker, G. S. 1965 A Theory of the Allocation of Time. *Economic Journal*, **75** : 493-517

Chavas, J. P. and T. L. Cox 1997 On Nonparametric Demand Analysis. *European Economic Review*, **41**(1) : 75-95

Dorfman, R. 1951 *Application of Linear Programming to the Theory of the Firm: Including an Analysis of Monopolistic Firms by Non-Linear Programming*. University of California Press, Berkeley

Dorfman, R., P. A. Samuelson and R. M. Solow 1958 *Linear Programming and Economic Analysis*. McGraw-Hill, New York

Gronau, R. 1977 Leisure, Home Production, and Work: The Theory of Allocation of Time Revisited. *Journal of Political Economy*, **85**(6) : 1099-1123

Kawaguchi, T. and Y. Maruyama 1976 A Note on Minimax (Maximin) Programming. *Management Science*, **22**(6) : 670-676

丸山義皓 1984 企業・家計複合体の理論. 創文社, 東京

Naylor, T. H. 1966 The Theory of the Firm: A Comparison of Marginal Analysis and Linear Programming. *Southern Economic Journal*, **32**(3) : 263-274

Sakong, Y. and D. J. Hayes 1993 Testing the Stability of Preferences: A Nonparametric Approach. *American Journal of Agricultural Economics*, **75**(2) : 269-277

Varian, H. R. 1982 The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, **50**(4): 945-973

Varian, H. R. 1983 Non-Parametric Tests of Consumer Behavior. *Review of Economic Studies*, **50**(1) : 99-110

Varian, H. R. 1985 Non-Parametric Analysis of Optimizing Behavior with Measurement Error. *Journal of Econometrics*, **30** : 445-458

Varian, H. R. 1992 *Microeconomic Analysis, Third Edition*. W. W. Norton & Company, New York

Summary

In this paper, we present a nonparametric linear programming estimation method of unique unknown objective function in concave programming with linear inequalities constraint, using sets of constraint condition and corresponding optimal solution data.

We also present a linear programming method of maximizing the estimated objective function under new constraint.

A case study of simple experimental problem proves the usefulness of our methods. Finally, we show the implications of this paper and problems to be solved in the future.